DSP cikksorozat, matematikai okfejtései

Radványi Patrik Tamás

Utolsó módosítás: 2017.03.08.

Diszkrét Hartley-transzformáció definíciója

Legyen a bemeneti N elemű adatsor x_k. Ekkor a szintén N elemű Diszkrét Hartley-transzformáltja az X_p adatsor.

$$X_p = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{N}\right)\right)$$

Jelöljük a páros és páratlan indexű adatok transzformáltját rendere E_p és O_p jelölésekkel. A sajt magunk szórakoztatása kedvéért írjuk fel az $O_{\frac{N}{2}-p}$ definícióját is.

$$\begin{aligned}
E_p &= \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right)\right) \\
O_p &= \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right)\right) \\
O_{\frac{N}{2}-p} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi\left(\frac{N}{2}-p\right)k}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi\left(\frac{N}{2}-p\right)k}{\frac{N}{2}}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(2\pi k - \frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(2\pi k - \frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(-\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{N}{2}}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) - \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Tegyünk még két trigonometriai megjegyzést:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Az észrevételek után tegyük meg a szétbontást a definícióban, mint ahogyan azt a Fourier-transzformáció esetében is tettük.

$$
\begin{aligned}
X_p &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} \left(\cos\left(\frac{2\pi p \cdot 2k}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi p \cdot 2k}{N}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi p \cdot (2k+1)}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi p \cdot (2k+1)}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi p \cdot (2k+1)}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi p \cdot (2k+1)}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} E_p + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}} + \frac{2\pi p}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}} + \frac{2\pi p}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} E_p + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \sin\left(\frac{2\pi p}{N}\right) \right) + \\
&+ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \sin\left(\frac{2\pi p}{N}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} E_p + \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) + \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \right) \right) \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) + \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} x_{2k+1} \left(\cos\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) - \sin\left(\frac{2\pi pk}{\frac{N}{2}}\right) \right) \right) \sin\left(\frac{2\pi p}{N}\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(E_p + O_p \cos\left(\frac{2\pi p}{N}\right) + O_{\frac{N}{2}-p} \sin\left(\frac{2\pi p}{N}\right) \right)
\end{aligned}
$$

Az eredmény pedig a cikkben is szereplő rekurziós képlet.