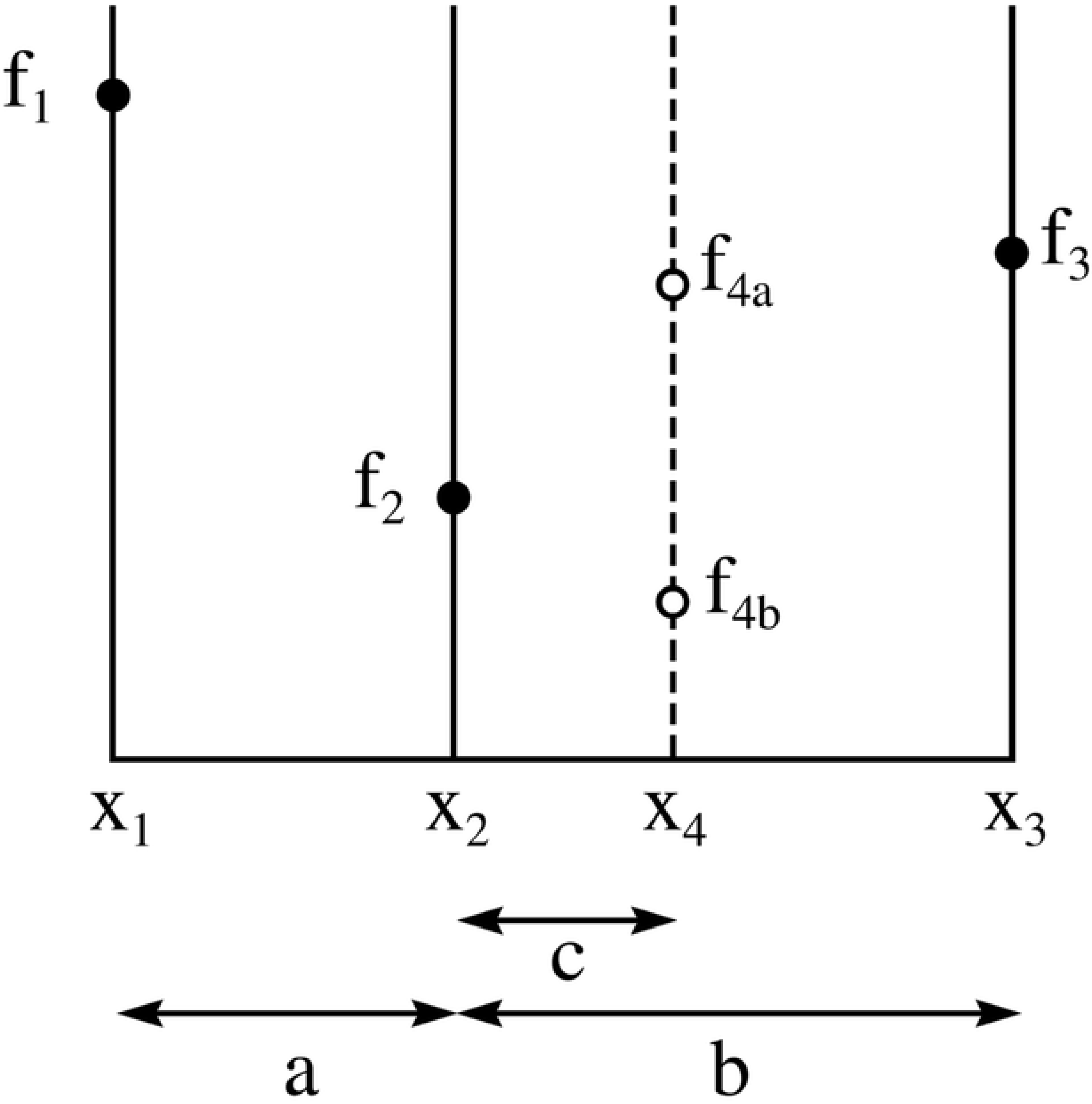
> 本文首先回顾几种基本的非线性规划算法
> 然后整理求解混合整数约束非线性规划问题的文献
> 并且使用matlab进行算法实现
> 最后列举实际例子进行求解

无约束非线性规划模型

黄金分割法 golden section method

- 任务目标： 找一维函数极小值
- 基本思想： 步步紧逼，逐次缩小范围
    - 设定搜索精度
    - 区间内部插入两个点，分其为三段。通过比较两个端点和插入的两个点的函数值大小，划分新的搜索区间
- 适用范围： 一维函数，单峰函数



link - 一维搜索方法/黄金分割法（附matlab代码）

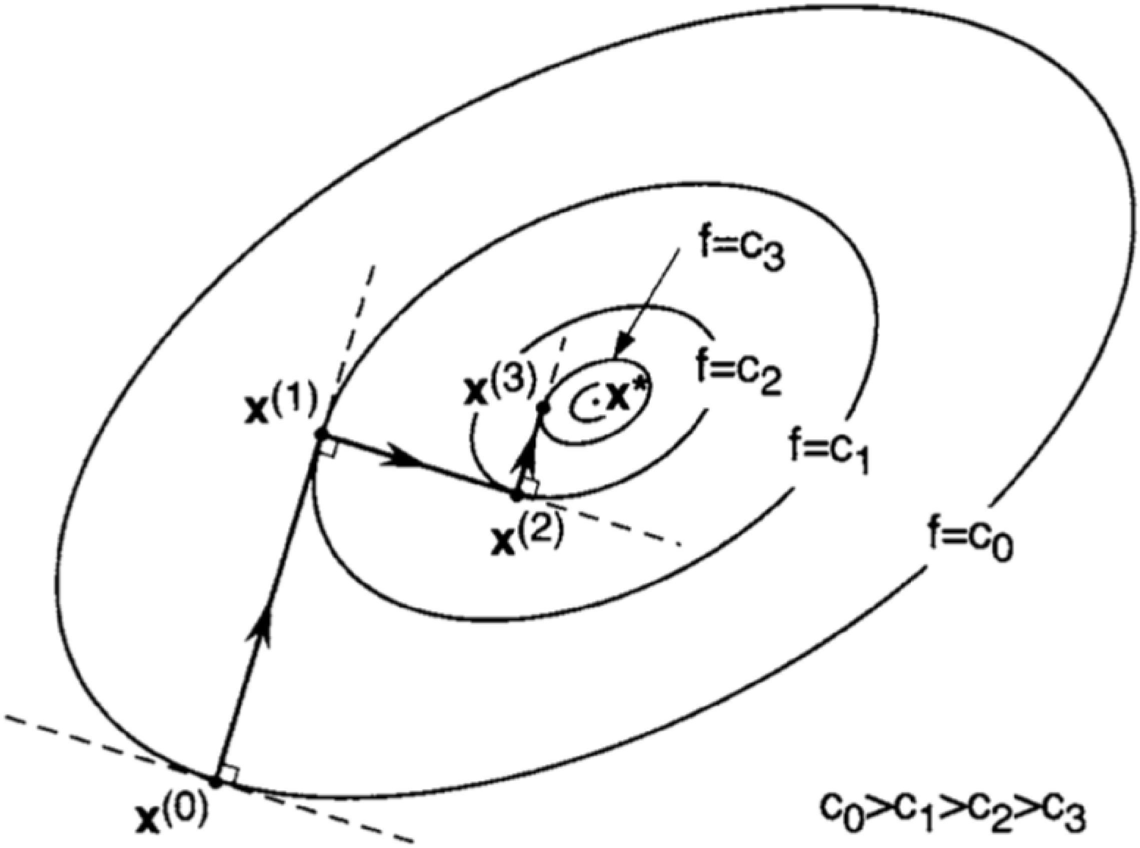
如果目标函数不是一维怎么办？多维度目标函数我们能不能转换成一维搜索？

最速下降法

- 任务目标： 找多维函数极小值点
- 基本思想： 多维函数一维化（负梯度方向+一维搜索方法）
  - 一维化过程（确定搜索方向）： $P^{(i)} = -\nabla f(x)^{(i)} \rightarrow$ 第i次迭代的负梯度方向
  - 一维搜索（计算搜索步长）：$f(x^{(i)} + \lambda^{(i)} P^{(i)}) = \min\limits_{\lambda>0} f(x^{(i)} - \lambda^{(i)} \nabla f(x)^{(i)})$
- 适用范围： 目标函数容易求导，梯度方向收敛较快

但是，负梯度方向不一定是函数值下降最快方向。因为每次迭代选择的梯度方向只是**起始点**的梯度方向，并不能反映起始点和终点之间其他点的梯度方向。

link - 梯度下降法和最速下降法的细微差别



那么，考虑梯度的变化方向会不会加快收敛速度呢?

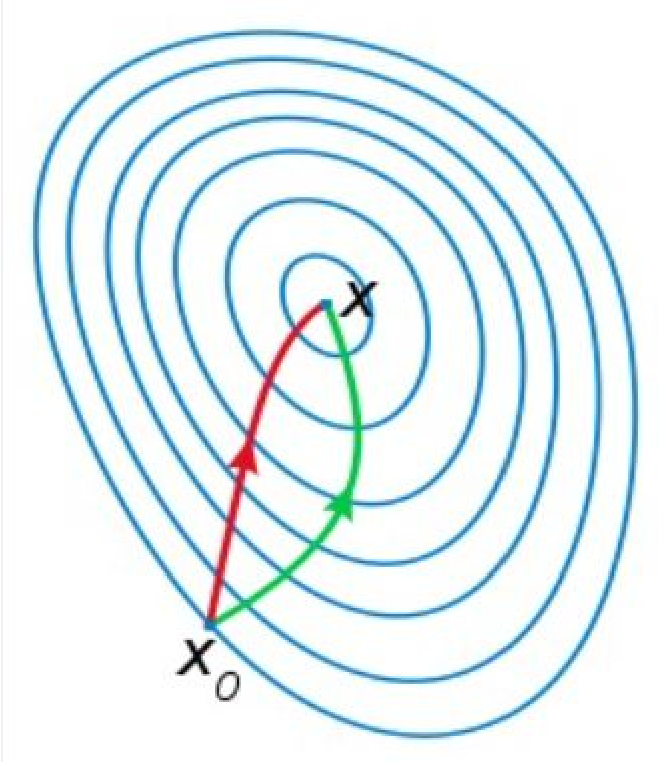
牛顿法（最速下降法 pro）

牛顿法就是在最速下降法的基础上添加目标函数梯度的变化的影响，也就是Hessian矩阵。

$$f(x) \approx Q(x) = f(x)^{(k)} + \nabla(f(x^{(k)})^T (x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T \nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

其中$\nabla^2 f(x)$是Hessian矩阵

令 $\nabla Q(x) = 0$，可以求解得到一个极小值点。
把这个极小值点作为下一次迭代点，直到小于精度时停止迭代。



- 基本思想： 最速下降法+Hessian矩阵
- 适用范围： 容易求得矩阵导数，容易求得Hessian矩阵

模式搜索法

上面介绍的几种方法都需要知道一阶或者二阶导数。如果求不到导数，或者目标函数是离散的，又怎么办呢？

- 基本思想： 多维问题一维化+每个维度左右尝试
- 适用范围 : 离散问题，无法求导

link - wiki:模式搜索

有约束非线性规划模型

> 旧问题的答案也是新问题的答案。
> - Woz·G·Schwarld

有约束非线性规划模型一般数学形式：

$$\min f(x), s.t. \begin{cases} g_i(x) \geq 0 & i = 0, 1, ..., m, \\ h_i(x) = 0 & j = 0, 1, ..., l \end{cases}$$

下面介绍的两种方法都是把有约束问题转化为无约束问题。

- 外点罚函数法

  将约束项添加进目标函数中。当解落在可行域外时，约束项陡增，迫使解落回可行域。
- 内点罚函数法

  仍然将约束项添加进目标函数中。但是这次所有解都在可行域中，一旦解接近范围边界，约束项就会陡增，迫使解始终在远离范围边界的可行域中迭代。

link - 罚函数法

混合整数非线性规划模型

非线性规划+整数规划

正如引言所说，旧问题的答案也是新问题的答案。
混合整数非线性规划模型可以是非线性+整数规划的叠加

整数规划	非线性规划
割平面法	罚函数法
分支定界法	可行方向法
	投影梯度法
	反应曲面法

link - 可行方向法

link - 投影梯度法

link - 复合形法

link - 反应曲面等代理模型

根据乘法原理，我们最多可以得到8种混合整数非线性规划模型，尽管他们中有些并不合理。

除此之外，各种启发式算法也可以用于求解混合整数非线性规划。

遗传算法

link - 遗传算法

模拟退火

link - 模拟退火

粒子群优化

link - 粒子群优化

代理模型算法 surrogate model

link - 代理模型

matlab算法实现

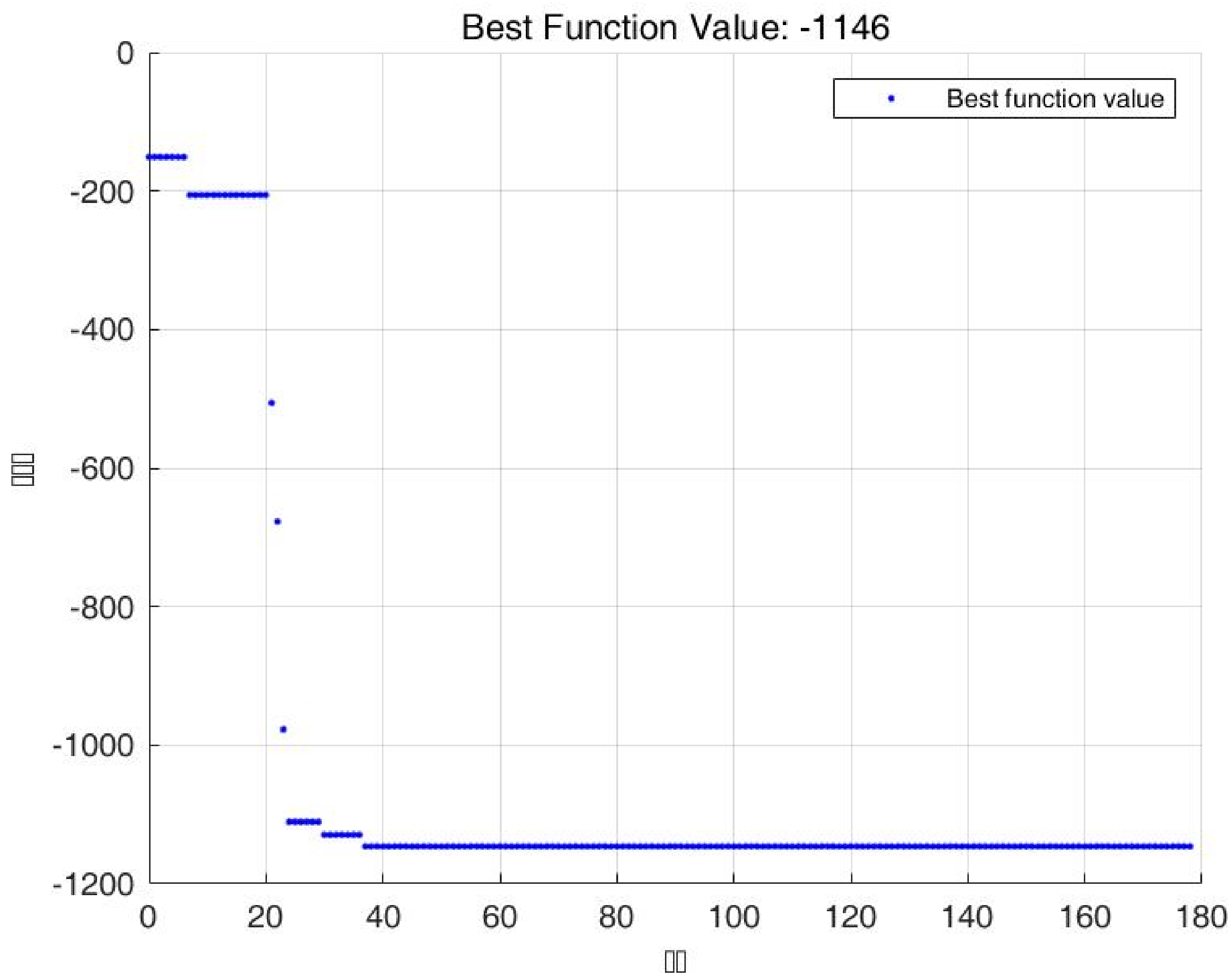
代理模型 surrogateopt

一个栗子

$$
\max f(x)=26(x_1-1)^2+50x_2+60x_3,\\
s.t.\begin{cases}
10\le 12x_1+4x_2+18x_3\\
20x_1+x_2+25x_3\le 300\\
10x_1^2+4x_2+3x_3^2\le 100\\
0\le x_i\le 20, i=1,2,3\\
x_3\in\mathbb{Z}
\end{cases}
$$

```
clc;clear all;close all;
%% constrain
intcon = 3;
A = [-12 -4 -18; 20 1 25];
b = [ -10;300];
lb = [0 , 0 , 0];
ub = [20 , 20 , 20];
[x,fval,exitflag] = surrogateopt(@objconstr,lb,ub,intcon,A,b);

function f = objconstr(x)
f.Fval = -( 26*( x(1) - 1 )^2 + 50*x(2) + 60*x(3) );
f.Ineq = 10 * x(1) ^ 2 + 4*x(2) + 3 * x(3)^2 -100;
end
```



最优解为：$[0;20;2]$