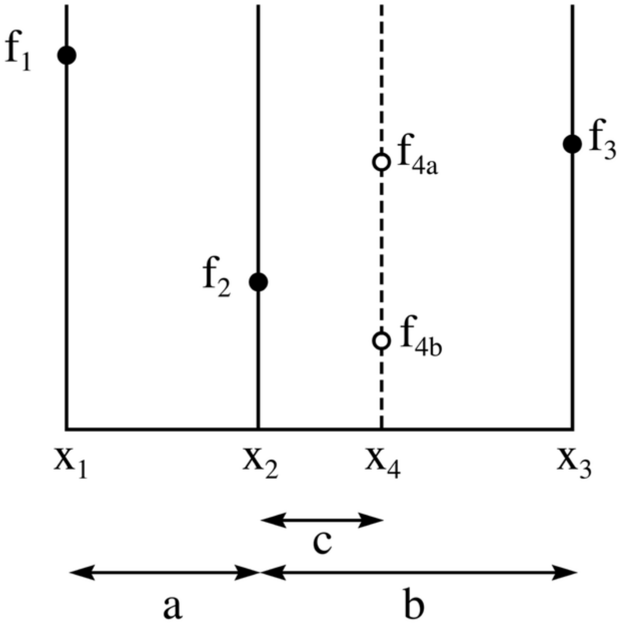
> 本文首先回顾几种基本的非线性规划算法
> 然后整理求解混合整数约束非线性规划问题的文献
> 并且使用matlab进行算法实现
> 最后列举实际例子进行求解

无约束非线性规划模型

黄金分割法 golden section method

- 任务目标： 找一维函数极小值
- 基本思想： 步步紧逼，逐次缩小范围
  - 设定搜索精度
  - 区间内部插入两个点，分其为三段。通过比较两个端点和插入的两个点的函数值大小，划分新的搜索区间
- 适用范围： 一维函数，单峰函数



link - 一维搜索方法/黄金分割法（附matlab代码）

如果目标函数不是一维怎么办？多维度目标函数我们能不能转换成一维搜索？

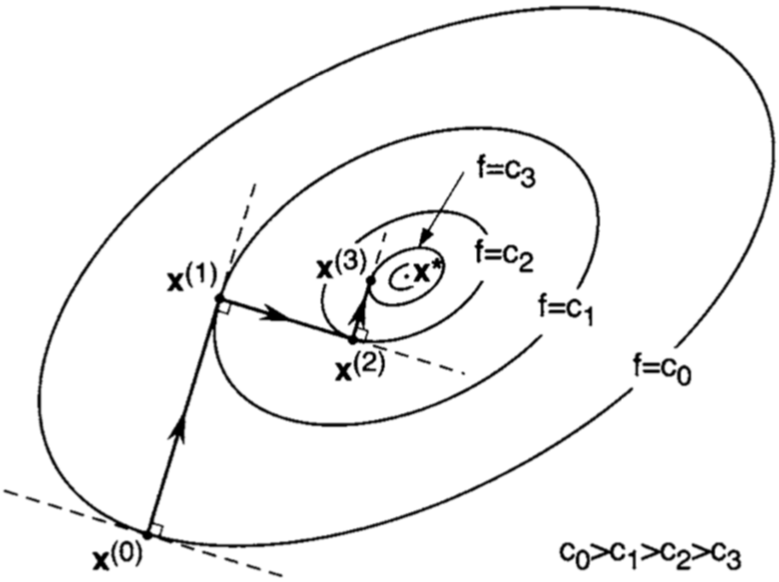
最速下降法

- 任务目标： 找多维函数极小值点
- 基本思想： 多维函数一维化（负梯度方向+一维搜索方法）
  - 一维化过程（确定搜索方向）： $P^{(i)} = -\nabla f(x)^{(i)} \rightarrow$ 第i次迭代的负梯度方向
  - 一维搜索（计算搜索步长）：$f(x^{(i)} + \lambda^{(i)} P^{(i)}) = \min\limits_{\lambda>0} f(x^{(i)} - \lambda^{(i)} \nabla f(x)^{(i)})$

- 适用范围： 目标函数容易求导，梯度方向收敛较快

但是，负梯度方向不一定是函数值下降最快方向。因为每次迭代选择的梯度方向只是**起始点**的梯度方向，并不能反映起始点和终点之间其他点的梯度方向。

link - 梯度下降法和最速下降法的细微差别



那么，考虑梯度的变化方向会不会加快收敛速度呢?

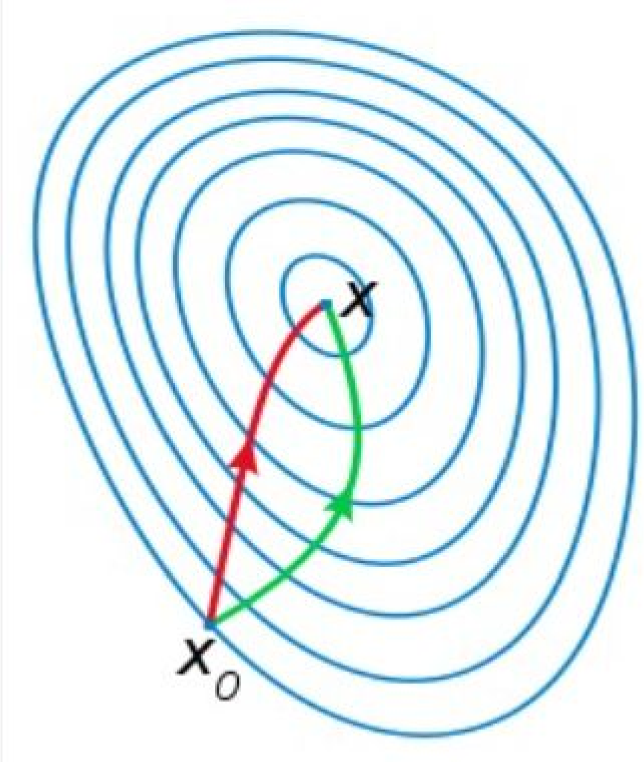
牛顿法（最速下降法 pro）

牛顿法就是在最速下降法的基础上添加目标函数梯度的变化的影响，也就是Hessian矩阵。

$$f(x) \approx Q(x) = f(x)^{(k)} + \nabla(f(x^{(k)})^T(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2}(x - x^{(k)})^T\nabla^2 f(x^{(k)})(x - x^{(k)})$$

其中$\nabla^2 f(x)$是Hessian矩阵

令 $\nabla Q(x) = 0$，可以求解得到一个极小值点。
把这个极小值点作为下一次迭代点，直到小于精度时停止迭代。



- 基本思想： 最速下降法+Hessian矩阵
- 适用范围： 容易求得矩阵导数，容易求得Hessian矩阵

模式搜索法

上面介绍的几种方法都需要知道一阶或者二阶导数。如果求不到导数，或者目标函数是离散的，又怎么办呢?

- 基本思想： 多维问题一维化+每个维度左右尝试
- 适用范围 : 离散问题，无法求导

link - wiki:模式搜索

有约束非线性规划模型

> 旧问题的答案也是新问题的答案。
> - Woz·G·Schwarld

有约束非线性规划模型一般数学形式:

$$\min f(x), s.t. \begin{cases} g_i(x) \geq 0 & i = 0,1,...,m, \\ h_i(x) = 0 & j = 0,1,...,l \end{cases}$$

下面介绍的两种方法都是把有约束问题转化为无约束问题。

- 外点罚函数法

  将约束项添加进目标函数中。当解落在可行域外时，约束项陡增，迫使解落回可行域。
- 内点罚函数法

  仍然将约束项添加进目标函数中。但是这次所有解都在可行域中，一旦解接近范围边界，约束项就会陡增，迫使解始终在远离范围边界的可行域中迭代。

link - 罚函数法

混合整数非线性规划模型

非线性规划+整数规划

正如引言所说，旧问题的答案也是新问题的答案。
混合整数非线性规划模型可以是非线性+整数规划的叠加

整数规划	非线性规划
割平面法	罚函数法
分支定界法	可行方向法
	投影梯度法
	反应曲面法

link - 可行方向法

link - 投影梯度法

link - 复合形法

link - 反应曲面等代理模型

根据乘法原理，我们最多可以得到8种混合整数非线性规划模型，尽管他们中有些并不合理。

除此之外，各种启发式算法也可以用于求解混合整数非线性规划。

遗传算法

link - 遗传算法

模拟退火

link - 模拟退火

粒子群优化

link - 粒子群优化

代理理模型算法 surrogate model

link - 代理模型

matlab算法实现介绍

代理模型 surrogateopt

```
[x,fval,exitflag] = surrogateopt(objconstr,____)
```

该算法在多个维度上搜索实值目标函数的全局最小值，受多种条件约束：

- 目标函数 `objconstr.Favl`
- 边界 `lb` `ub` ,输入约束的下界和上界
- 可选不等式线性约束 `A` `b` ， 输入线性不等式约束
- 可选等式线性约束 `Aeq` `beq` ， 输入线性不等式约束
- 可选整数约束 `intcon` ， 输入为整数的变量的标号
- 可选非线性不等式约束 `obconstr.Ineq`

surrogateopt函数返回一个结构体

- `x` 返回最小值点
- `fval` 实数解处的目标函数值
- `exitflag` 退出标志

算法
surrogateopt重复执行这些步骤：

1. MinSurrogatePoints 通过在边界内随机采样点来创建一组试验点，并在试验点处评估目标函数。

2. 通过在所有随机试验点内插径向基函数来创建目标函数的代理模型。
3. 创建一个评价函数，为代理项赋予一些权重，对与试验点的距离赋予一些权重。通过在现有点（自上次代理重置以来找到的最佳点）周围的区域中随机采样评价函数来定位评价函数的一个小值。使用这个称为自适应点的点作为新的试验点。
4. 在自适应点评估目标，并根据该点及其值更新代理。如果目标函数值远低于观察到的先前最佳（最低）值，则计算“成功”，否则计算“失败”。
5. max(nvar,5)如果在失败 之前发生了 3 次成功，则向上更新样本分布的离散度，其中nvar是维数。max(nvar,5)如果失败发生在三个成功之前，则向下更新离散度。
6. 从步骤 3 继续，直到所有试验点都在MinSampleDistance评估点范围内。此时，通过丢弃代理中的所有自适应点来重置代理，重置量表，然后返回步骤 1 以创建MinSurrogatePoints 新的随机试验点进行评估。

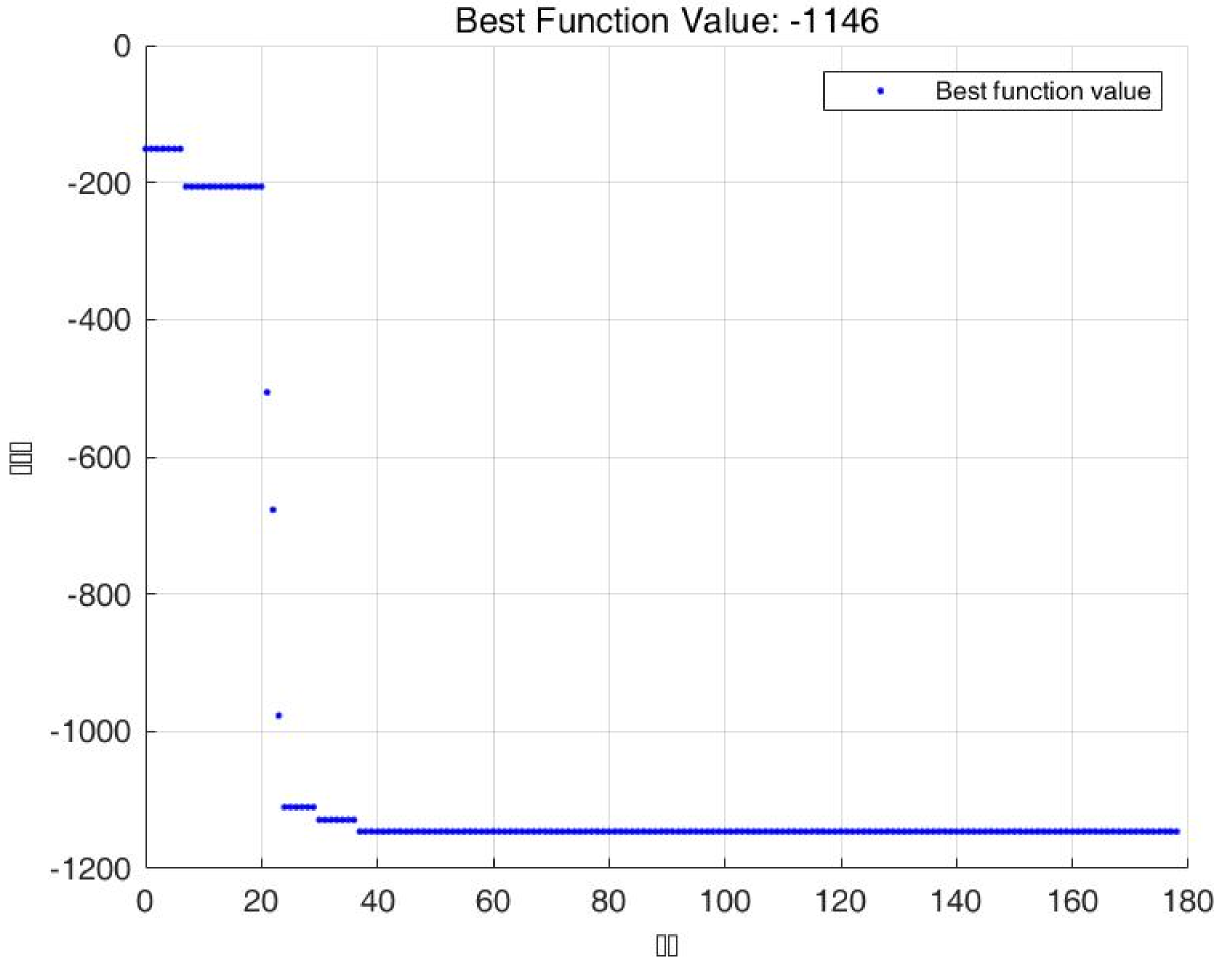
Solve Nonlinear Problem with Integer and Nonlinear Constraints

一个栗子

$$\max f(x) = 26(x_1-1)^2 + 50x_2 + 60x_3,$$
$$s.t. \begin{cases} 10 \le 12x_1 + 4x_2 + 18x_3 \\ 20x_1 + x_2 + 25x_3 \le 300 \\ 10x_1^2 + 4x_2 + 3x_3^2 \le 100 \\ 0 \le x_i \le 20, i = 1,2,3 \\ x_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

```
clc;clear all;close all;
%% constrain
intcon = 3;
A = [-12 -4 -18; 20 1 25];
b = [ -10;300];
lb = [0 , 0 , 0];
ub = [20 , 20 , 20];
[x,fval,exitflag] = surrogateopt(@objconstr,lb,ub,intcon,A,b);

function f = objconstr(x)
f.Fval = -( 26*( x(1) - 1 )^2 + 50*x(2) + 60*x(3) );
f.Ineq = 10 * x(1) ^ 2 + 4*x(2) + 3 * x(3)^2 -100;
end
```


Best Function Value: -1146
Best function value
0
-200
-400
-600
-800
-1000
-1200
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180

最优解为：$[0; 20; 2]$