УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Специальность: Автоматизированные системы обработки информации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ № 11
Вариант № 8

Соболевского Дмитрия Александровича

Группа: 590651
Зачетная книжка: 000623-28

Электронный адрес: sobolevskidmitry@gmail.com / BSUIR\sda

Контрольная работа 11. Операционное исчисление

Задачи 531 – 540.

Найти изображение заданного оригинала $f(t)$.

538. $f(t) = te^{4t}\cos 2t$.

Решение.

По таблице оригиналов находим $t^3 \fallingdotseq \dfrac{1}{p^2}$

Тогда по теореме смещения $te^{4t} \fallingdotseq \dfrac{1}{(p-4)^4}$.

Если $f(t) \fallingdotseq F(p)$, то $f(t)\cos\omega t \fallingdotseq \dfrac{1}{2}\left(F(p-i\omega)+F(p+i\omega)\right)$.

Получим: $f(t) = te^{4t}\cos 2t \square \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{(p-4-2i)^4}+\dfrac{1}{(p-4+2i)^4}\right)$

Задачи 541 – 550.

Найти изображение заданного оригинала *f(t)*.

548. $f(t) = \int\limits_0^t \dfrac{\operatorname{ch}2\tau - \operatorname{ch}5\tau}{\tau}\,d\tau$.

Решение.

Используя таблицу оригиналов и свойство линейности, находим:

$$ch2t - ch5t = \frac{e^{2t}}{2}+\frac{e^{-2t}}{2}-\frac{e^{5t}}{2}-\frac{e^{-5t}}{2} \square \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{p-5}-\frac{1}{p+5}\right)$$

Применив теорему интегрирования изображения, получим

$$\frac{\operatorname{ch}2\tau - \operatorname{ch}5\tau}{\tau} \fallingdotseq$$

$$\int\limits_p^\infty \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}+\frac{1}{u+2}-\frac{1}{u-5}-\frac{1}{u+5}\right)du = \frac{1}{2}\left(\ln(u^2-4)-\ln(u^2-25)\right)\Big|_p^\infty =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{u^2-4}{u^2-25}\Big|_p^\infty = \frac{1}{2}\left(0-\ln\frac{p^2-4}{p^2-25}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{p^2-25}{p^2-4}.$$

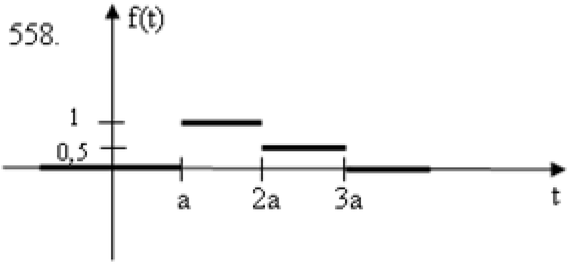
На основании теоремы интегрирования оригинала

$\int\limits_0^t f(\tau) \fallingdotseq \dfrac{F(p)}{p}$ имеем

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch}2\tau - \operatorname{ch}5\tau}{\tau}\,d\tau \div \frac{1}{2p}\ln\frac{p^2-25}{p^2-4}$$

Задачи 551 – 560.

По заданному графику оригинала найти изображение.



Решение.

Найдем аналитическое выражение для функции $f(t)$:

$$f(t)=\begin{cases}0, & t\in(-\infty;a),\\ 1, & t\in(a;2a),\\ 0{,}5, & t\in(2a;3a),\\ 0, & t\in(3a;+\infty).\end{cases}$$

Для $t\in(-\infty;a)$ имеем $f(t)=1$. Найдем функцию $g_1(t)$ такую, чтобы при $t>a$ выполнялось соотношение:

$$f(t)+g_1(t)=1 \quad\Rightarrow\quad 1+g_1(t)=1 \quad\Rightarrow\quad g_1(t)=1(t-a),$$

где

$$1(t-a)=\begin{cases}0, & t\le a,\\ 1, & t>a.\end{cases}$$

Теперь находим функцию $g_2(t)$ такую, чтобы при $t>2a$ было справедливо равенство:

$$1+g_2(t)=0{,}5 \quad\Rightarrow\quad g_2(t)=-0{,}5\cdot 1(t-2a).$$

Аналогично находим функции: $-0{,}5+g_3(t)=0,\quad g_3(t)=0{,}5\cdot 1(t-3a).$

Таким образом,

$$f(t)=1(t)-1(t-a)-0{,}5\cdot 1(t-2a)+0{,}5\cdot 1(t-3a).$$

Пользуясь свойством линейности и теоремой запаздывания, получили изображение: $F(p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-ap}-\dfrac{1}{2ap}e^{-2ap}+\dfrac{1}{2ap}e^{-3ap}.$

Задачи 561 – 570.

Найти оригинал по заданному изображению.

568. $F(p)=\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}.$

Решение.

Разложим $F(p)$ в сумму простых дробей:

$$\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}=\frac{Ap+B}{p^2+1}+\frac{Cp+D}{p^2+4}$$

Приводим правую часть равенства к общему знаменателю и приравниваем числители двух дробей:

$$(Ap+B)(p^2+1)+(Cp+D)(p^2+1)=p$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях р, получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{array}{l} p^3: \\ p^2: \\ p: \\ p^0: \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A+C=0, \\ B+D=0, \\ 4A+C=1, \\ 4B+D=0. \end{array} \right.$$

Решая систему, находим коэффициенты:

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=0, \; C=-\frac{1}{3}, \quad D=0.$$

Таким образом, $F(p)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{p^2+4}$

Используя свойство линейности и таблицу оригиналов и изображений, находим оригинал $f(t)=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t.$

Задачи 571 – 580.

Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям.

578. $x''+4x'+29x=e^{-2t}, \quad x(0)=0, x'(0)=1.$

Решение.

Пусть искомое решение $x(t)$ есть оригинал, и $X(p)$ – его изображение. Тогда если $x(t) \quad X(p)$, то $x'(t) \quad pX(p)-x(0)=pX(p),$

$x''(t) \quad p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X(p)-1.$

По таблице изображений находим изображение функции в правой части уравнения: $e^{-2t} \doteqdot \frac{1}{p+2}$.

Тогда операторное уравнение имеет вид

$$p^2X(p)-1+4pX(p)+29X(p)=\frac{1}{p+2}.$$

Из последнего уравнения находим $X(p)$:

$$X(p)=\frac{1}{p^2+4p+29}\left(\frac{1}{p+2}+1\right)=\frac{1}{p^2+4p+29}\cdot\frac{p+3}{p+2}=$$

$$=\frac{p+3}{\left(p^2+4p+29\right)\left(p+2\right)}=\frac{1}{25}\frac{-p+23}{p^2+4p+29}+\frac{1}{25}\frac{1}{p+2}=$$

$$=-\frac{1}{25}\frac{p+2}{(p+2)^2+25}+\frac{1}{5}\frac{5}{(p+2)^2+25}+\frac{1}{25}\frac{1}{p+2}$$

Следовательно, по таблице оригиналов и изображений искомое решение будет иметь вид $x(t)=-\frac{1}{25}e^{-2t}\cos 5t+\frac{1}{5}e^{-2t}\sin 5t+\frac{1}{25}e^{-2t}$

Задачи 581 – 590.

Операционным методом решить систему дифференциальных уравнений.

588. $\begin{cases}\dot{x}=2x+3y+1, & x(0)=-1,\\ \dot{y}=4x-2y, & y(0)=0.\end{cases}$

Решение.

Пусть $x(t)\risingdotseq X(p)$, $y(t)\risingdotseq Y(p)$, тогда $\dot{x}(t)\risingdotseq pX(p)+1$, $\dot{y}(t)\risingdotseq pY(p)$.

По таблице оригиналов и изображений находим $1\risingdotseq\frac{1}{p}$.

Применяя преобразование Лапласа к уравнениям системы, получаем:

$$\begin{cases}pX(p)+1=2X(p)+3Y(p)+\frac{1}{p},\\ pY(p)=4X(p)-2Y(p).\end{cases}$$

Преобразуем эту систему к виду:

$$\begin{cases}(p-2)X(p)-3Y(p)=\frac{1-p}{p},\\ 4X(p)-(p+2)Y(p)=0.\end{cases}$$

Находим решение этой алгебраической системы по правилу Крамера

$$\Delta=\begin{vmatrix}p-2 & -3\\ 4 & -(p+2)\end{vmatrix}=-(p^2-4)+12=16-p^2$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\frac{1-p}{p} & -3\\ 0 & -(p+2)\end{vmatrix}=\frac{(p-1)(p+2)}{p}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}p-2 & \frac{1-p}{p}\\ 4 & 0\end{vmatrix}=\frac{4(p-1)}{p}$$

$$X(p)=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{(p-1)(p+2)}{p(16-p^2)},\qquad Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{4(p-1)}{p(16-p^2)}.$$

Преобразуем, разложив на простейшие дроби:

$$X(p)=\frac{(p-1)(p+2)}{p\left(16-p^2\right)}=\frac{1}{16}\frac{1}{p-4}-\frac{3}{16}\frac{1}{p+4}+\frac{1}{8}\frac{1}{p},$$

$$Y(p)=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{4(p-1)}{p\left(16-p^2\right)}=-\frac{15}{32}\frac{1}{p-4}+\frac{17}{32}\frac{1}{p+4}-\frac{1}{16}\frac{1}{p}$$

Пользуясь таблицей оригиналов и изображений, получаем

$$x(t)=\frac{1}{16}e^{4t}-\frac{3}{16}e^{-4t}+\frac{1}{8}t,\quad y(t)=-\frac{15}{32}e^{4t}+\frac{17}{32}e^{-4t}-\frac{1}{16}t$$