**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ**

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Специальность: Автоматизированные системы обработки информации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ № 10
Вариант № 8

Соболевского Дмитрия Александровича

Группа: 590651
Зачетная книжка: 000623-28

Электронный адрес: sobolevskidmitry@gmail.com / ***BSUIR\sda***

Контрольная работа 10. Функции комплексной переменной

Задачи 471 - 480.

Представить заданную функцию $w = f(z)$, где $z = x + iy$, в виде $w = u(x, y) + iv(x, y),$ проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке z_0.

478. $w = 2z^2 - iz,$ $\qquad z_0 = 1 - i.$

Решение.

Определим действительную и мнимую части функции
$$w = 2z^2 - iz = 2\left(x + iy\right)^2 - i\left(x + iy\right) = 2x^2 + 4xyi - 2y^2 - ix + y = 2x^2 - 2y^2 + y + i\left(4xy - x\right)$$
$$u(x; y) = 2x^2 - 2y^2 + y; \quad v(x; y) = 4xy - x.$$

Найдем частные производные этих функций, которые непрерывны на плоскости *xOy:*
$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -4y + 1; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 4y - 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 4x.$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

при всех значениях x и y, следовательно, функция $w = 2z^2 - iz$ является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости z,
$$w' = (2z^2 - iz)' = 4z - i; \quad w'(1 - i) = 4\left(1 - i\right) - i = 4 - 5i.$$

Задачи 481 - 490.

Данную функцию $f(z)$ разложить в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

488. $f(z) = (z - 3)\cos\pi\dfrac{z - 3}{z}, \quad z_0 = 0.$

Решение.

Преобразуем функцию:
$$f(z) = (z - 3)\cos\pi\frac{z - 3}{z} = (z - 3)\cos\left(\pi - \frac{3}{z}\right) = (3 - z)\cos\frac{3}{z}$$

Данная функция аналитична в кольце $0 < |z| < \infty$, следовательно, разложима в нем в ряд Лорана.

Используем разложение в ряд Тейлора функции: $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \dfrac{z^{2n}}{\left(2n\right)!}.$

Получим:

$$f(z)=(3-z)\cos\frac{3}{z}=(3-z)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{3}{z}\right)^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n+1}}{z^{2n}(2n)!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}}{z^{2n-1}(2n)!}$$

Задачи 491 - 500.

Определить область (круг) сходимости данного ряда и исследовать его сходимость (расходится, сходится условно, сходится абсолютно) в точках z_1, z_2, z_3.

498. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1+i)^n}{2^n(n^2+1)}$, $\quad z_1 = 0,\; z_2 = 1+i,\; z_3 = -1+i.$

Решение.

$c_n = \dfrac{1}{2^n(n^2+1)}$, тогда $c_{n+1} = \dfrac{1}{2^{n+1}((n+1)^2+1)}$.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n(n^2+1)}{2^{n+1}((n+1)^2+1)}\right| = \frac{1}{2}.$$

Область сходимости ряда определяется неравенством $|z-1+i| < \dfrac{1}{2}$, которое выражает внутренность круга с центром в точке $z_0 = 1-i$ радиусом 1/2. Очевидно, точка $z_1 = 0$ лежит вне круга сходимости, так как $|z_1 - z_0| = |0-1+i| = 2 > \dfrac{1}{2}$. Поэтому ряд в точке z_1 расходится.

Точка $z_2 = 1+i$ лежит вне круга сходимости, так как $|z_2 - z_0| = |1+i-1+i| = |2i| = 2 > \dfrac{1}{2}$. Ряд в точке z_2 расходится.

Точка $z_3 = -1+i$ лежит вне круга сходимости, так как $|z_3 - z_0| = |-1+i-1+i| = |-2+2i| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} > \dfrac{1}{2}$. Ряд в точке z_3 расходится.

Задачи 501 - 510.

Определить тип особой точки $z = 0$ для данной функции.

508. $f(z) = z\sin\dfrac{3}{z^3}$.

Решение.

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора функции $\sin z$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots$$

Получим: $f(z) = z\sin\dfrac{3}{z^3} = z\left(\dfrac{3}{z^3} - \dfrac{\left(\dfrac{3}{z^3}\right)^3}{3!} + \dfrac{\left(\dfrac{3}{z^3}\right)^5}{5!} + \ldots + (-1)^n\dfrac{\left(\dfrac{3}{z^3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) =$

$$=\frac{3}{z^2}-\frac{9}{2z^8}+\frac{3^5}{5!z^{14}}+....+\left(-1\right)^n\frac{3^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!z^{2n}}+...$$

Ряд Лорана содержит в своей главной части бесконечное множество членов, значит, точка z=0 для данной функции является существенно особой точкой.

Задачи511 - 520.

Для данной функции $f(z)$ найти:

–особые точки и определить их тип;

–вычеты в особых точках;

$\oint\limits_C f(z)dz,$ если а) $\mathrm{C}=\Gamma_1$, б) $\mathrm{C}=\Gamma_2$, в) $\mathrm{C}=\Gamma_3$.

518. $f(z)=\dfrac{\mathrm{ch}2z-1}{z^2(z-i)^2}$, $\Gamma_1: |z+2i|=1; \quad \Gamma_2: |z+2i|=2{,}5;\cdots\Gamma_3: |z+2i|=10.$

Решение.

1). Особые точки функции $f(z)$ определяются из условия:

$z^2\,(z-i)^2=0$.

Значит, функция имеет две особые точки $z_1=0, z_2=i$. Определим их тип. Вычислим $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{ch}\,2z-1}{z^2(z-i)^2}$.

Имеем неопределенность вида 0/0. Разложим в ряд Лорана функцию $ch2z$.

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{1+\frac{(2z)^2}{2!}+\frac{(2z)^4}{4!}...-1}{z^2(z-i)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{2^2}{2!}z^2+\frac{2^4}{4!}z^4+...}{z^2(z-i)^2}=\lim_{z\to 0}\frac{2+\frac{2}{3}z^2+...}{(z-i)^2}=\frac{2}{\left(-i\right)^2}=-2.$$

Так как $\lim\limits_{z\to 0} f(z)=-2$ (конечное число), то точка $z=0$ является устранимой особой точкой.

Аналогично, вычисляем $\lim\limits_{z\to i} f(z)=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{\mathrm{ch}\,2z-1}{z^2(z-i)^2}=\infty.$

Значит $z=i$ является полюсом функции $f(z)$. Определим порядок полюса. Представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-i)^2},\text{ где }\quad \varphi(z)=\frac{\mathrm{ch}\,2z-1}{z^2}.$$

Функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке $z=i$ и $\varphi(i)=\dfrac{\mathrm{ch}\,2i-1}{i^2}\neq 0.$

Таким образом, получаем, что $z=i$ это полюс порядка $m=2$ функции $f(z)$.

2) Вычислим вычеты функции $f(z)$ в ее особых точках.

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$, так как $z=0$ – устранимая особая точка. Для вычисления вычета в точке $z=i$ воспользуемся формулой

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to i}\frac{d^{m-1}(f(z)(z-i)^m)}{d\,z^{m-1}}=\lim_{z\to i}\left(\frac{(\operatorname{ch}2z-1)(z-i)^2}{z^2(z-i)^2}\right)'=\lim_{z\to i}\left(\frac{\operatorname{ch}2z-1}{z^2}\right)'=$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{2sh2z\cdot z^2-(ch2z-1)\cdot 2z}{z^4}=\lim_{z\to i}\frac{sh2z\cdot z-ch2z+1}{z^3}=\frac{i\dfrac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}-\dfrac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}+1}{i^3}=$$

$$=\frac{i\dfrac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}-\dfrac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}+1}{-i}=\frac{i\left(i\dfrac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}-\dfrac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}+1\right)}{-i^2}=\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}+\left(1-\frac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}\right)i$$

3) Вычислим контурный интеграл

$\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{ch}2z-1}{z^2(z-i)^2}\,dz$ в трех различных случаях.

а) В области $D:|z+2i|<1$ функция $f(z)$ является аналитической, поэтому

$$\oint\limits_{|z+2i|=1} f(z)\,dz=0.$$

б) В области $D:|z+2i|<2{,}5$ функция $f(z)$ имеет одну особую точку $z=0$, поэтому $\oint\limits_{|z+2i|=2,5} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=2\pi i\cdot 0=0.$

в) В области $D:|z+2i|<10$ функция $f(z)$ имеет две особые точки $z_1=0$, $z_2=i$, поэтому

$$\oint\limits_{|z+2i|=10} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)\right)=2\pi i\left(\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}+\left(1-\frac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}\right)i\right)=$$

$$=2\pi\left(\frac{e^{2i}+e^{-2i}}{2}-1+\frac{e^{2i}-e^{-2i}}{2}i\right)$$

Задачи 521 - 530.

Используя теорию вычетов, вычислить определенный интеграл.

528. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dx}{7+3\cos x}$.

Решение.

Применяем подстановку $z=e^{ix}$, тогда $\cos x=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$, $\quad dx=\dfrac{dz}{iz}$

и интеграл сводится к контурному интегралу:

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{7+3\cos x} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{d\,z}{i\,z\left(7+3\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{d\,z}{i\,z\left(7+\frac{3}{2}z+\frac{3}{2z}\right)} = \frac{2}{i}\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2+14z+3}.$$

Находим особые точки подынтегральной функции, решая уравнение:

$6z^2+14z+3=0,$

$$z_{1,2} = \frac{-14\pm 2\sqrt{21}}{12} = \frac{-7\pm\sqrt{21}}{6}$$

$$z_1 = \frac{-7-\sqrt{21}}{6},\ \ z_2 = \frac{-7+\sqrt{21}}{6}.$$

Так как, $|z_1|>1$, а $|z_2|<1$, то по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{6z^2+14z+3} = \frac{1}{6}\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+\frac{7}{3}z+\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \frac{1}{3}\pi i\cdot \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z).$$

Для того, чтобы найти вычет, определим характер особой точки.

$$\frac{1}{z^2+\frac{7}{3}z+\frac{1}{2}} = \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{\frac{1}{z-z_1}}{z-z_2} = \frac{\phi(z)}{z-z_2},$$

Причем $\varphi(z)=\dfrac{1}{z-z_1}$ аналитическая в точке z_2 и $\varphi(z_2)=\dfrac{1}{z_2-z_1}=\dfrac{1}{\sqrt{21}}\neq 0.$

Значит, $z=z_2$ – полюс порядка $m=1$ и

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2}\frac{1}{z^2+\frac{7}{3}z+\frac{1}{2}} = \lim_{z\to z_2}\frac{(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)} = \lim_{z\to z_2}\frac{1}{z-z_1} = \frac{1}{z_2-z_1} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Окончательно имеем $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{7+3\cos x} = \frac{2}{i}\left(\frac{1}{3}\pi i\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}\right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{21}}.$