УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Специальность: Автоматизированные системы обработки информации

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА
ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ № 12
Вариант № 8

Соболевского Дмитрия Александровича

Группа: 590651
Зачетная книжка: 000623-28

Электронный адрес: sobolevskidmitry@gmail.com / BSUIR\sda

Задачи 591 - 600.

На интервале $(-\pi; \pi)$ задана периодическая с периодом 2π функция $f(x)$.

Требуется:

1) разложить функцию в ряд Фурье;

2) построить график функции $f(x)$;

3) построить график суммы ряда Фурье.

598. $f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

Решение:

1) Период разложения в данной задаче: $T = 2\pi$, полупериод $l = \pi$.

Разложение в ряд Фурье будем искать по формуле: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right]$

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1) dx + \int_{0}^{\pi} 1 dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi} \right) = \frac{1}{\pi} (-0 - \pi + \pi - 0) = 0$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1) \cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 1 \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \big(\sin 0 - \sin(-\pi n) \big) + \frac{1}{n} \big(\sin(\pi n) - \sin 0 \big) \right) = 0$$

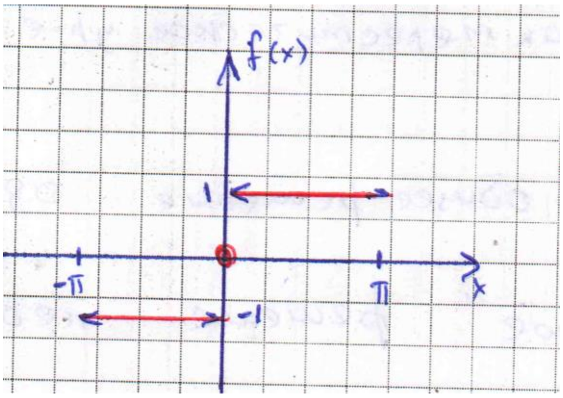
$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} (-1) \sin nx dx + \int_{0}^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n} \cos nx \Big|_{0}^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{n} \big(\cos 0 - \cos(-\pi n) \big) - \frac{1}{n} \big(\cos(\pi n) - \cos 0 \big) \right) = \frac{1}{\pi n} \left(1 - (-1)^n - (-1)^n + 1 \right) = \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n}$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[0 \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n} \cdot \sin \frac{\pi n x}{\pi} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n} \cdot \sin nx$$

2) Построим график функции $f(x)$:



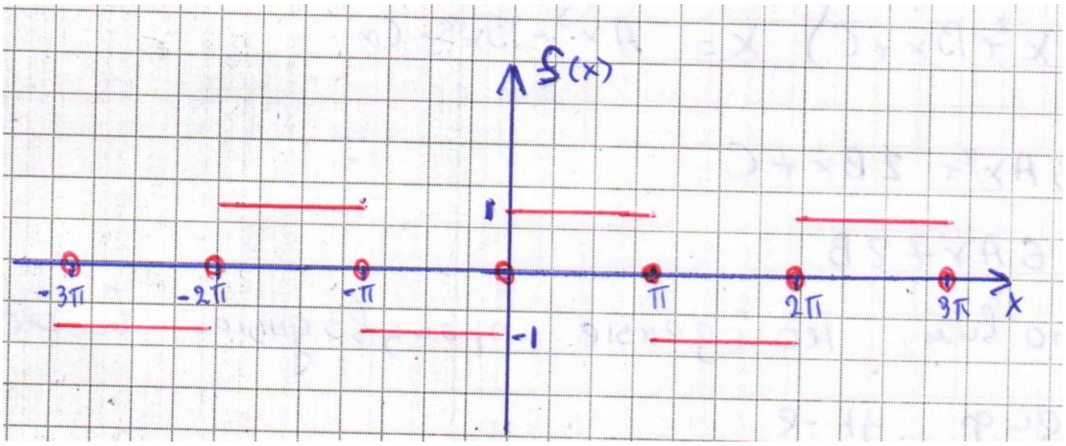
3) Построим график суммы ряда Фурье $S(x)$. Эта функция определена на всей числовой оси, является 2π периодической, в точках непрерывности $S(x) = f(x)$, в точках разрыва x_0 функции $f(x)$ имеем:

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}.$$

Найдем сумму ряда в точках разрыва:

$$S\left(-\pi + 2\pi n\right) = \frac{-1+1}{2} = 0;\ S\left(\pi + 2\pi n\right) = \frac{1-1}{2} = 0$$

Таким образом, график суммы ряда Фурье имеет вид:



Задачи 601 - 610.

Доопределяя необходимым образом заданную в промежутке (0,*a*) функцию *f(x)*, получить для нее:

а) ряд Фурье по синусам;

б) ряд Фурье по косинусам.

608. $f(x)=|x|, \quad a=3$.

Решение:

а) Доопределим функцию $f(x)$ на промежутке $(-3;0)$ нечетным образом. Имеем $f(x)=x,(-3;3)$

Период разложения в данной задаче: $T=6$, полупериод $l=3$.

Разложение в ряд Фурье будем искать по формуле: $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n \sin\frac{\pi nx}{l}\right]$

Найдем коэффициенты Фурье:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^3 x\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{3}dx & v=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3x}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3+\int_0^3\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\frac{2}{3}\left(-\frac{3x}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3+\frac{9}{(\pi n)^2}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_0^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{9}{\pi n}\cos\pi n+0+\frac{9}{(\pi n)^2}(\sin\pi n-\sin 0)\right)=\frac{6\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6\cdot(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right]$$

б) Доопределяя функцию $f(x)$ на промежутке (–3; 0) четным образом, получим

$$f(x)=\begin{cases}-x, x\in(-3;0)\\ x, x\in(0;3)\end{cases}$$

Период разложения в данной задаче: $T=6$, полупериод $l=3$.

Разложение в ряд Фурье будем искать по формуле: $f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{\pi nx}{l}\right]$

Найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^3 xdx\right)=\left.\frac{x^2}{3}\right|_0^3=\frac{9-0}{3}=3$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^3 x\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=\cos\frac{\pi nx}{3}dx & v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{3x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right|_0^3-\int_0^3\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=\frac{2}{3}\left(\left.\frac{3x}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\right|_0^3+\left.\frac{9}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{3}\right|_0^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{\pi n}\sin\pi n-0+\frac{9}{(\pi n)^2}(\cos\pi n-\cos 0)\right)=\frac{6\cdot\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^2}$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(x) \sim \frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6\cdot\left((-1)^n-1\right)}{(\pi n)^2}\cos\frac{\pi nx}{3}\right]$$

Задачи 611 - 620.

Найти комплексную форму ряда Фурье периодической с периодом 2 функции $f(x)$, заданной на промежутке и вычислить сумму полученного ряда в точке x_0.

618. $f(x)=2x, \qquad -1<x<1,\ x_0=1.$

Решение:

$f(x)=2x, \qquad -1<x<1,\ x_0=1. \Rightarrow f(x)=2t, \qquad -1<t<1,\ t_0=1.$

Построим ряд Фурье в комплексной форме.

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{iwnt}$$

$$T=1-(-1)=2\ ;\ w=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\ .$$

Найдем коэффициенты Фурье: $C_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^b f(t)\cdot e^{-iwnt}dt$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-1}^{1} f(t)\cdot e^{-iwnt}dt=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}2t\cdot e^{-i\pi nt}dt=\begin{vmatrix} u=2t & du=2dt \\ dv=e^{-i\pi nt} & v=-\dfrac{e^{-i\pi nt}}{i\pi n}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2te^{-i\pi nt}}{i\pi n}\bigg|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{e^{-i\pi nt}}{i\pi n}dt\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2e^{-i\pi n}}{i\pi n}-\frac{2e^{i\pi n}}{i\pi n}-\frac{e^{-i\pi nt}}{(i\pi n)^2}\bigg|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2e^{-i\pi n}+2e^{i\pi n}}{i\pi n}-\frac{e^{-i\pi n}-e^{i\pi n}}{(\pi n)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{2\left(\cos(-\pi n)+i\cdot\sin(-\pi n)+\cos(\pi n)+i\cdot\sin(\pi n)\right)}{i\pi n}-\frac{\cos(-\pi n)+i\cdot\sin(-\pi n)-\cos(\pi n)-i\cdot\sin(\pi n)}{(\pi n)^2}\right)=$$

$$=\frac{2(-1)^n i}{\pi n}$$

Разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2(-1)^n i}{\pi n}\cdot e^{i\pi nt}$$

Вычислим сумму полученного ряда в точке $t_0=1$.

Во всех точках непрерывности ряд Фурье сходится к функции $f(t)$. Так как точка 1 является точкой разрыва функции $f(t)$, сумма ряда в этой точке равна среднему арифметическому левостороннего и правостороннего пределов, т.е.

$$S(\pi)=\frac{2\cdot 1+2\cdot(-1)}{2}=0.$$

Задачи 621 - 630.

Найти преобразование Фурье $F(i\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}dt$ **функции** $f(x)$.

628. $f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{-x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$

Решение:

Находим преобразование Фурье

$$F(i\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot e^{-i\omega t}dt+\int\limits_{0}^{+\infty}x\cdot e^{-x}e^{-i\omega t}dt\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}t\cdot e^{-t}\cdot e^{-i\omega t}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to+\infty}\int\limits_{0}^{a}t\cdot e^{(-1-i\omega)t}dt=\left|\begin{matrix} u=t & du=dt \\ dv=e^{(-1-i\omega)t}dt & v=\frac{1}{-1-i\omega}e^{(-1-i\omega)t}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{t}{-1-i\omega}e^{(-1-i\omega)t}\Big|_0^a-\int\limits_0^a\frac{1}{-1-i\omega}e^{(-1-i\omega)t}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{t}{-1-i\omega}e^{(-1-i\omega)t}\Big|_0^a-\frac{1}{(-1-i\omega)^2}e^{(-1-i\omega)t}\Big|_0^a\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{a\to+\infty}\left(\frac{a}{-1-i\omega}e^{(-1-i\omega)a}-0-\frac{1}{(-1-i\omega)^2}e^{(-1-i\omega)a}+\frac{1}{(-1-i\omega)^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)^2}$$

Вычислим каждый из интегралов по отдельности.

$$\int\limits_2^3 2e^{-i\omega t}dt=-\frac{2}{i\omega}e^{-i\omega t}\Big|_2^3=-\frac{2}{i\omega}(e^{-3i\omega}-e^{-2i\omega}).$$

$\int\limits_3^4(4-t)e^{-i\omega t}dt$ = (применяем формулу интегрирования по частям

$u=4-t,\quad du=-dt;\quad dv=e^{-i\omega t}dt,\quad v=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega t})=$

$$=-\frac{1}{i\omega}(4-t)e^{-i\omega t}\Big|_3^4-\frac{1}{i\omega}\int\limits_3^4 e^{-i\omega t}dt=\frac{e^{-3i\omega}}{i\omega}+\frac{1}{(i\omega)^2}e^{-i\omega t}\Big|_3^4=\frac{e^{-3i\omega}}{i\omega}-\frac{e^{-4i\omega}-e^{-3i\omega}}{\omega^2}.$$

Таким образом имеем:

$$F(i\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1+i\omega)^2}$$

Задачи 635 - 640.

Найти косинус-преобразование Фурье заданной функции $f(x)$.

638. $f(x)=e^{2x}, \quad x\le 0.$

Решение:

Функция $f(x)$ гладкая и абсолютно-интегрируемая на промежутке $x\in(-\infty;0]$. Действительно,

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} e^{2x}dx=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{2x}dx=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\bigg|_a^0\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{2a}\right)=\frac{1}{2}$$

Т.к. $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\frac{1}{2}$, то функция $f(x)$ является абсолютно-интегрируемой.

Найдем ее косинус-преобразование Фурье:

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{2t}\cos\omega t dt$$

Воспользуемся формулой: $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx=\frac{\alpha\cos\beta x+\beta\sin\beta x}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}$

$$F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} e^{2t}\cos\omega t dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{4+\omega^2}e^{2t}\right)\bigg|_a^0=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2\cos 0+\omega\sin 0}{4+\omega^2}e^{0}-\frac{2\cos\omega a+\omega\sin\omega a}{4+\omega^2}e^{2a}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\left(4+\omega^2\right)}$$

Ответ: $F_c(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0} f(t)\cos\omega t dt=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\left(4+\omega^2\right)}$