УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Факультет непрерывного и дистанционного обучения

Специальность: Автоматизированные системы обработки информации

ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА №8

ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Вариант № 8

Соболевского Дмитрия Александровича

Группа: 590651

Зачетная книжка: 000623-28

Электронный адрес: sobolevskidmitry@gmail.com / BSUIR\sda

Задача 1.

Разложите заданную функцию в ряд Фурье, если на заданном интервале задан один ее период. Постройте график заданной функции и график ее ряда Фурье.

$$f(x) = x - 2, \qquad x \in (-\pi; \pi).$$

Решение:

Разложение функции $f = f(x)$ в ряд Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Найдем коэффициент a_0:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-2)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = -4.$$

Найдем коэффициенты a_n:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-2)\cos nx dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} по\ \ частям \\ u = x-2, du = dx \\ dv = \cos nx dx, v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x-2)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x-2)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = 0.$$

Найдем коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x-2)\sin nx dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l} \text{по частям} \\ u=x-2, du=dx \\ dv=\sin nxdx, v=-\frac{1}{n}\cos nx \end{array}\right| = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x-2)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

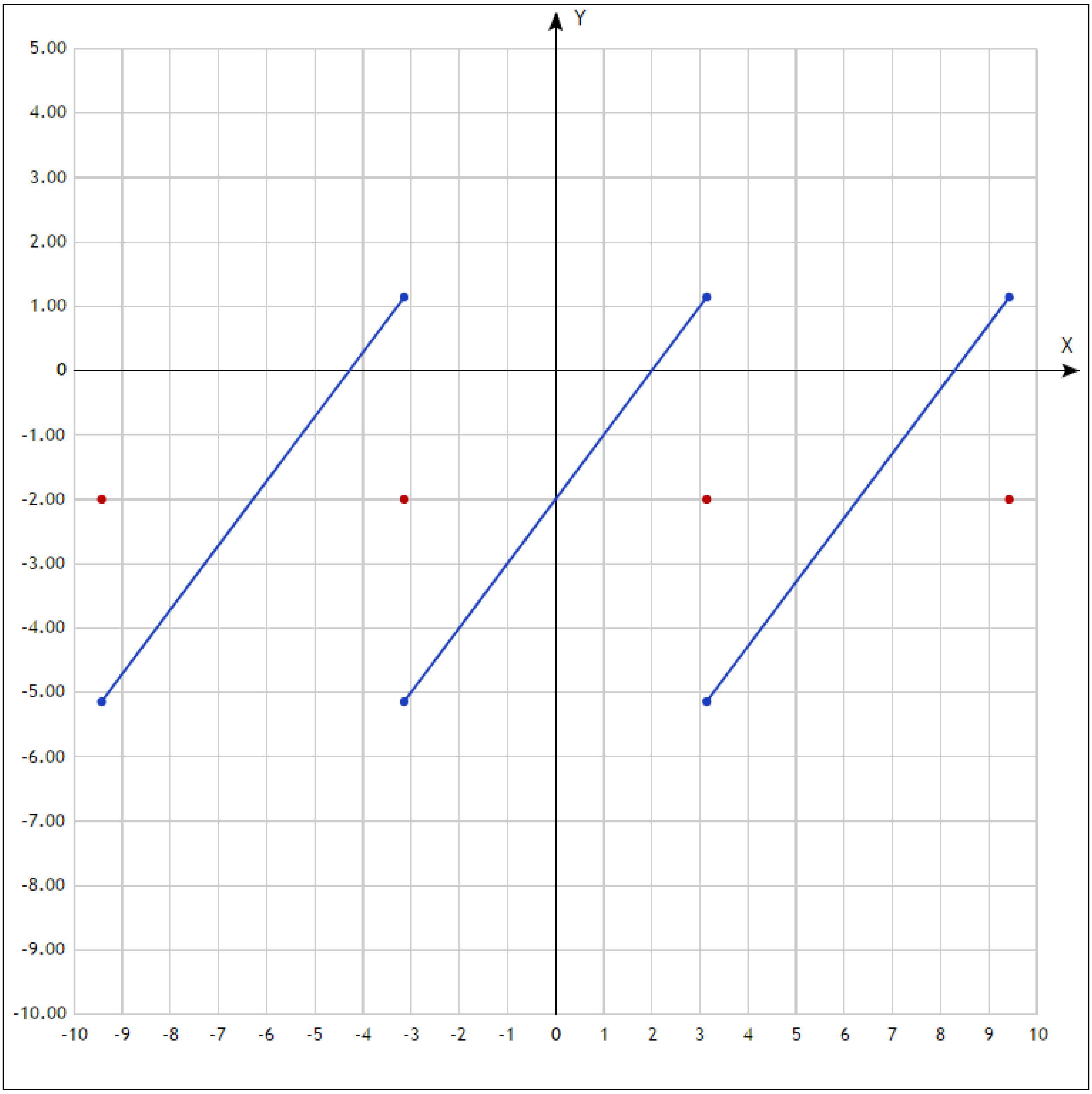
$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x-2)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right)=-\frac{2}{n}\cos\pi n=-\frac{2}{n}(-1)^n.$$

Тогда искомое разложение имеет вид:

$$f(x)=-2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin nx.$$

При любом значении x сумма ряда $S(x)$ сходится к данной функции. В точках разрыва первого рода значение суммы ряда есть $\frac{\pi-2-\pi-2}{2}=-2$.

Тогда график заданной функции и график ее ряда Фурье $S(x)$ имеет вид:



Y
X
5.00
4.00
3.00
2.00
1.00
0
-1.00
-2.00
-3.00
-4.00
-5.00
-6.00
-7.00
-8.00
-9.00
-10.00
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Задача 2.

Доопределяя необходимым образом заданную функцию, разложите ее в ряд Фурье по синусам и в ряд Фурье по косинусам.

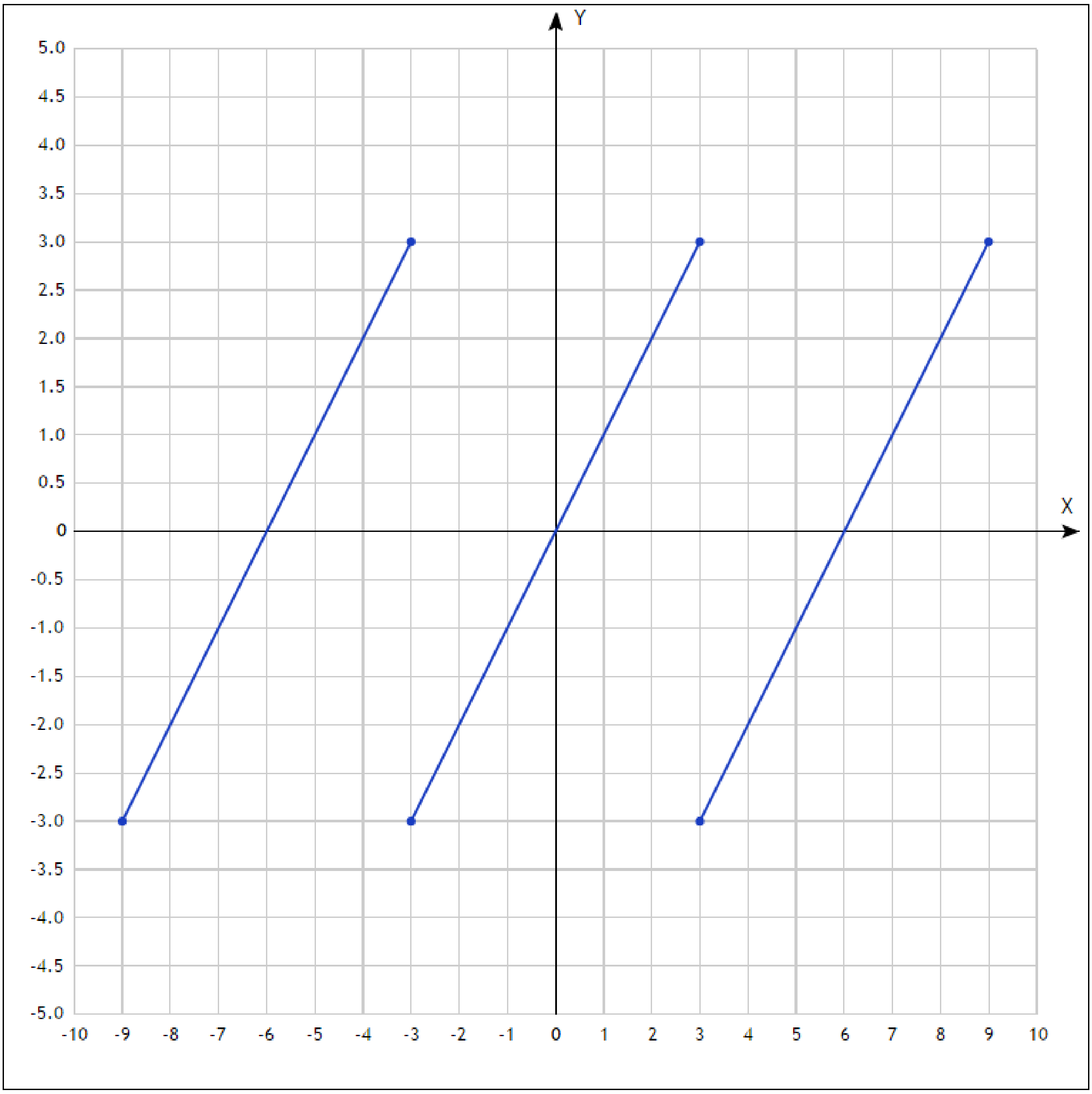
$$f(x)=|x|,\quad x\in(0;3).$$

Решение:

Для разложения данной функции в ряд Фурье по синусам доопределим ее нечетным образом:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in(-3;0)\\ x, & x\in(0;3)\end{cases}.$$

Тогда график данной функции имеет вид:



Разложение функции $f = f(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(-l;l)$ имеет вид:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

В данном случае $l = 3$. Найдем коэффициенты b_n:

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{\pi n x}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} x\sin\frac{\pi n x}{3}\,dx =$$

$$=\left|\begin{array}{l} \textit{по частям} \\ u=x, du=dx \\ dv=\sin\frac{\pi nx}{3}dx, v=-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3} \end{array}\right| = \frac{1}{3}\left(-\frac{3}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} + \frac{3}{\pi n}\int_{-3}^{3}\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right) =$$

$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{\pi n}x\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} + \frac{9}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3}\right) = -\frac{6}{\pi n}\cos\pi n = -\frac{6}{\pi n}(-1)^n .$$

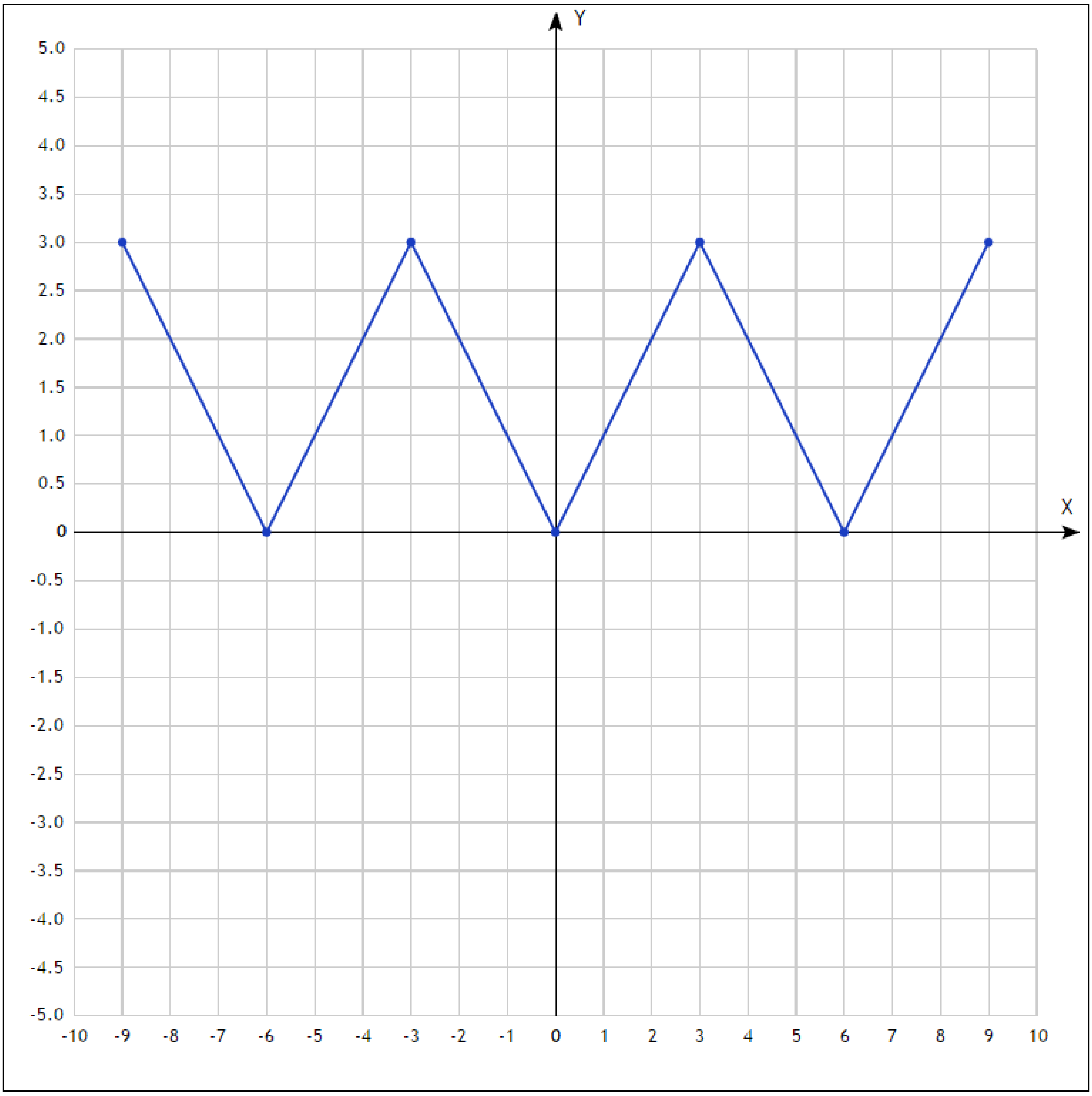
Тогда искомое разложение имеет вид:

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi n}(-1)^n \sin\frac{\pi nx}{3} .$$

Для разложения данной функции в ряд Фурье по косинусам доопределим ее четным образом:

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x\in(-3;0) \\ x, & x\in(0;3) \end{cases} .$$

Тогда график данной функции имеет вид:



Разложение функции $f = f(x)$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $(-l;l)$ имеет вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx.$$

В данном случае $l = 3$. Найдем коэффициент a_0:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3}\left(-\int_{-3}^{0} xdx + \int_{0}^{3} xdx\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{3}\right) = 3.$$

Найдем коэффициенты a_n:

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}f(x)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{1}{3}\left(-\int_{-3}^{0}x\cos\frac{\pi nx}{3}dx+\int_{0}^{3}x\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\left|\begin{array}{l}\textit{по частям}\\ u=x,du=dx\\ dv=\cos\frac{\pi nx}{3}dx,v=\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\end{array}\right|=-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{0}-\frac{3}{\pi n}\int_{-3}^{0}\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{0}^{3}-\frac{3}{\pi n}\int_{0}^{3}\sin\frac{\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{0}+\frac{9}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{0}\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{0}^{3}+\frac{9}{\pi^2n^2}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{0}^{3}\right)=\frac{6}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-1)=\frac{6}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right).$$

Тогда искомое разложение имеет вид:

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{\pi^2n^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\frac{\pi nx}{3}.$$

Задача 3.

Найдите изображение заданного оригинала:

$$f(t)=e^t\cos t+\cos 2t\cos 3t+\sin^3 t+\int_0^t \tau^2\cos\pi d\tau .$$

Решение:

Представим данный оригинал в следующем виде:

$$f(t)=e^t\cos t+\cos 2t\cos 3t+\sin^3 t+\int_0^t \tau^2\cos\pi d\tau =$$

$$=f_1(t)+f_2(t)+f_3(t)+f_4(t).$$

Рассмотрим оригинал $f_1(t)=e^t\cos t$:

$$\cos t\xrightarrow{L}\frac{p}{p^2+1},$$

$$e^t\cos t\xrightarrow{L}\frac{p-1}{(p-1)^2+1}$$ - по теореме смещения.

Рассмотрим оригинал $f_2(t)=\cos 2t\cos 3t$:

$$f_2(t)=\cos 2t\cos 3t=\frac{\cos t+\cos 5t}{2}=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{2}\cos 5t,$$

$$\cos t\xrightarrow{L}\frac{p}{p^2+1},\qquad \cos 5t\xrightarrow{L}\frac{p}{p^2+25},$$

$$\cos 2t\cos 3t\xrightarrow{L}\frac{p}{2(p^2+1)}+\frac{p}{2(p^2+25)}.$$

Рассмотрим оригинал $f_3(t)=\sin^3 t$:

$$f_3(t)=\sin^3 t=\frac{3\sin t-\sin 3t}{4}=\frac{3}{4}\sin t-\frac{1}{4}\sin 3t,$$

$$\sin t\xrightarrow{L}\frac{1}{p^2+1},\qquad \sin 3t\xrightarrow{L}\frac{3}{p^2+9},$$

$$\sin^3 t \xrightarrow{L} = \frac{3}{4\left(p^2+1\right)} - \frac{3}{4\left(p^2+9\right)}.$$

Рассмотрим оригинал $f_4(t) = \int\limits_0^t \tau^2 \cos\tau d\tau$:

$$g(t) = t^2 \cos t = t \cdot (t \cos t), \qquad t\cos t \xrightarrow{L} \frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2},$$

$$g(t) \xrightarrow{L} -\left(\frac{p^2-1}{\left(p^2+1\right)^2}\right)' = -\frac{2p\left(p^2+1\right)^2 - \left(p^2-1\right)\cdot 2\left(p^2+1\right)\cdot 2p}{\left(p^2+1\right)^4} =$$

$$= \frac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}$$ - по теореме дифференцирования изображения,

$$\int\limits_0^t \tau^2 \cos\tau d\tau \xrightarrow{L} \frac{\dfrac{2p\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}}{p} = \frac{2\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}$$ - по теореме интегрирования оригинала.

Тогда получаем:

$$f(t) \xrightarrow{L} \frac{p-1}{(p-1)^2+1} + \frac{p}{2\left(p^2+1\right)} + \frac{p}{2\left(p^2+25\right)} +$$

$$+ \frac{3}{4\left(p^2+1\right)} - \frac{3}{4\left(p^2+9\right)} + \frac{2\left(p^2-3\right)}{\left(p^2+1\right)^3}.$$

Задача 4.

Решите дифференциальное уравнение операционным методом:

$$x'' + 2x' = t\sin t, \qquad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решение:

Перейдем от оригиналов к изображениям:

$$x(t) \xrightarrow{L} X(p),$$

$$x'(t) \xrightarrow{L} pX(p) - x(0) = pX(p),$$

$$x''(t) \xrightarrow{L} p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p),$$

$$t\sin t \xrightarrow{L} \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Тогда получаем:

$$p^2X(p) + 2pX(p) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}, \qquad X(p) = \frac{2}{(p+2)(p^2+1)^2}.$$

Используем метод неопределенных коэффициентов:

$$\frac{2}{(p+2)(p^2+1)^2} = \frac{A}{p+2} + \frac{Bp+C}{p^2+1} + \frac{Dp+E}{(p^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A(p^2+1)^2 + (Bp+C)(p+2)(p^2+1) + (Dp+E)(p+2)}{(p+2)(p^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A(p^4+2p^2+1) + (Bp+C)(p^3+2p^2+p+2) + (Dp+E)(p+2)}{(p+2)(p^2+1)^2},$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ 2A+B+2C+D=0 \\ 2B+C+2D+E=0 \\ A+2C+2E=2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} A=\dfrac{2}{25} \\ B=-\dfrac{2}{25} \\ C=\dfrac{4}{25} \\ D=-\dfrac{10}{25} \\ E=\dfrac{20}{25} \end{cases},$$

$$X(p)=\frac{2}{25(p+2)}+\frac{-2p+4}{25(p^2+1)}+\frac{-10p+20}{25(p^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2}{25(p+2)}-\frac{2p}{25(p^2+1)}+\frac{4}{25(p^2+1)}-\frac{10p}{25(p^2+1)^2}+\frac{20}{25(p^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2}{25(p+2)}-\frac{2p}{25(p^2+1)}-\frac{10p}{25(p^2+1)^2}+\frac{4(p^2+1)+20}{25(p^2+1)}=$$

$$=\frac{2}{25(p+2)}-\frac{2p}{25(p^2+1)}-\frac{10p}{25(p^2+1)^2}+\frac{14(p^2+1)-10(p^2-1)}{25(p^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2}{25(p+2)}-\frac{2p}{25(p^2+1)}-\frac{10p}{25(p^2+1)^2}+\frac{14}{25(p^2+1)}-\frac{10(p^2-1)}{25(p^2+1)^2}.$$

Перейдем от изображений к оригиналам:

$$X(p)\xrightarrow{L^{-1}}x(t),$$

$$\frac{1}{p+2}\xrightarrow{L^{-1}}e^{-2t}, \qquad \frac{p}{p^2+1}\xrightarrow{L^{-1}}\cos t, \qquad \frac{p}{(p^2+1)^2}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{1}{2}t\sin t,$$

$$\frac{1}{p^2+1}\xrightarrow{L^{-1}}\sin t, \qquad \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}\xrightarrow{L^{-1}}t\cos t,$$

$$x(t)=\frac{2}{25}e^{-2t}-\frac{2}{25}\cos t-\frac{5}{25}t\sin t+\frac{14}{25}\sin t-\frac{10}{25}t\cos t.$$