### Контрольная работа 10. Функции комплексной переменной

#### Указания к выбору варианта

Последняя цифра личного шифра (после дефиса) определяет номер варианта. Если последняя цифра 0, то номер варианта 10.

#### Задания

**Задачи 471 - 480.**

Представить заданную функцию , где , в виде  проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке 



 

**Задачи 481 - 490.**

Данную функцию  разложить в ряд Лорана в окрестности точки .



**Задачи 491 - 500.**

Определить область (круг) сходимости данного ряда и исследовать его сходимость (расходится, сходится условно, сходится абсолютно) в точках



**Задачи 501 - 510.**

Определить тип особой точки  для данной функции.



**Задачи 511 - 520.**

Для данной функции  найти:

− особые точки и определить их тип;

− вычеты в особых точках;





**Задачи 521 - 530.**

Используя теорию вычетов, вычислить определенный интеграл.



#### Методические указания к контрольной работе 10.

**Пример 1.** Представить заданную функцию  в виде ; проверить, является ли она аналитической. Если да, то найти значение ее производной в заданной точке .

Решение. Определим действительную и мнимую части функции  

 

Найдем частные производные этих функций, которые непрерывны на плоскости *xOy:*

 

 



при всех значениях *х* и *у*, следовательно, функция  является дифференцируемой и аналитической на всей комплексной плоскости *z*,





**Пример 2.** Данную функцию



разложить в ряд Лорана в окрестности точки .

Решение.

Данная функция аналитична в кольце , следовательно, разложима в нем в ряд Лорана. Сделаем замену переменной по формуле , т. е. , тогда  и функция  примет вид:



Используем разложение в ряд Тейлора функции:



Положим в этом разложении . Имеем:



**Пример 3.** Определить область сходимости данного ряда и исследовать сходимость его в точках .



Решение.

Для данного степенного ряда

.

Тогда





Область сходимости ряда определяется неравенством , которое выражает внутренность круга с центром в точке  радиусом 4. Очевидно, точка  лежит внутри круга сходимости, так как . Поэтому ряд в точке  сходится абсолютно. Точка  лежит вне круга сходимости, так как .Ряд в точке  расходится.

Исследуем сходимость ряда в точке , которая лежит на границе круга сходимости, так как  **.** Положив , получим числовой ряд



Исследуем этот ряд на абсолютную сходимость

.

Он является расходящимся.

Определим, является ли ряд условно сходящимся.





Действительная и мнимая части этого ряда являются сходящимися рядами по признаку Лейбница.

Таким образом, ряд

 в точке  сходится условно.

**Пример 4.** Определить тип особой точки  для данной функции



Решение.



аналитические в точке . Воспользуемся разложениями в ряд Тейлора функций  и :



Тогда получим





Аналогично,



и z=0 нуль порядка

Значит, функция  принимает вид:



В этом случае  и так как , то  является полюсом порядка  функции .

**Пример 5.** Для заданной функции



найти:

1) особые точки и определить их тип;

2) вычеты в особых точках;

   

Решение. 1). Особые точки функции  определяются из условия:

.

Значит, функция имеет две особые точки . Определим их тип. Вычислим



Имеем неопределенность вида 0/0. Разложим в ряд Лорана функцию .



Так как  (конечное число), то точка  является устранимой особой точкой.

Аналогично, вычисляем



Значит  является полюсом функции . Определим порядок полюса. Представим функцию  в виде

 

Функция  является аналитической в точке



Таким образом, получаем, что  это полюс порядка  функции .

2) Вычислим вычеты функции  в ее особых точках.

, так как  – устранимая особая точка. Для вычисления вычета в точке  воспользуемся формулой



3) Вычислим контурный интеграл



в трех различных случаях.

а) В области  функция  имеет одну особую точку , поэтому



б) В области  функция  является аналитической, поэтому



в) В области  функция  имеет две особые точки , , поэтому



**Пример 6.** Используя теорию вычетов, вычислить определенный интеграл

.

Решение.

Применяем подстановку , тогда

 

и интеграл сводится к контурному интегралу:



Находим особые точки подынтегральной функции, решая уравнение:

,





Так как, , а , то по теореме Коши о вычетах

.

Для того, чтобы найти вычет, определим характер особой точки.



 аналитическая в точке  и



Значит,  – полюс порядка  и



Окончательно имеем

