Metody rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu (zagadnienie początkowe/końcowe)

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(a) = \bar{y} \text{ lub } y(b) = \bar{y}$$

Oznaczenia

$$h = (b-a)/M, \quad x_n = a + nh, \quad n = 0, \dots, M,$$
$$y_n = y(x_n),$$

Chcemy wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia początkowego. Mamy

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))dx,$$

Metoda Euler'a:

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{h} \approx f(x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} \approx y_n + hf(x_n, y_n),$$

Metoda Heun'a (predictor-corrector): Predykcja:

$$\widehat{y}_{n+1} \approx y_n + hf(x_n, y_n)$$

Korekta

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \widehat{y}_{n+1})}{2}h$$

Krok korekty moze byc powtarzany wielkrotnie. Dla pojedynczego kroku korekty mamy

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

Metoda punktu środkowego

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n)$$
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}})$$

Metoda Ralstona

$$y_{n+1} = y_n + h\Big(\frac{1}{3}k_1 + \frac{2}{3}k_2\Big)$$

gdzie

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f\Big(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}h\Big).$$

Metoda Runge-Kutta trzeciego rzędu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\Big(k_1 + 4k_2 + k_3\Big),$$

gdzie

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1), \quad k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2),$$

Metoda Runge-Kutta czwartego rzędu

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\Big(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\Big),$$

gdzie

$$k_1 = f(x_n, y_n), \quad k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),$$
$$k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2), \quad k_4 = f(x_n + h, y_n + k_3h),$$