Zestaw Startowy

Rozwiązania

Zadanie 1

Przekształcimy lewą stronę nierówności w celu skorzystania ze wzoru

$sin(x+y) = sinxcosy + cosxsiny.$

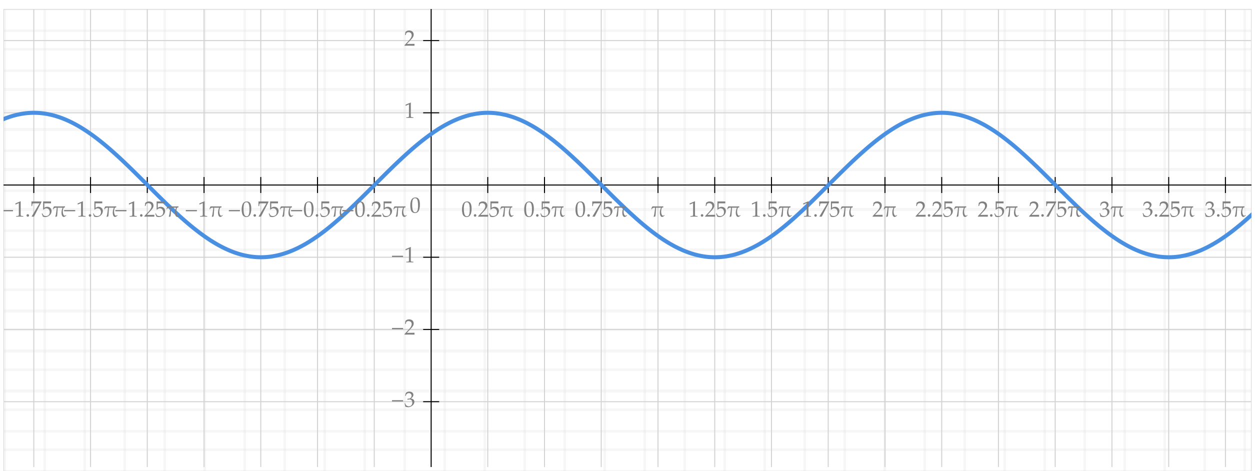
$sinx + cosx \geq 0 \quad | \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} sinx + \frac{\sqrt{2}}{2} cosx \geq 0$

$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) sinx + sin\left(\frac{\pi}{4}\right) cosx \geq 0$ Wykorzystaujemy nasz wzór

$sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Szkicujemy wykres lewej strony nierówności i zapisujemy rozwiązanie



Odpowiedź: $x \in \left[2k\pi - \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right]$

Zadanie 2

Niech A będzie zdarzeniem polegającym na tym, że litera a stoi przed literą b. Niech B będzie zdarzeniem polegającym na tym, że litera b stoi przed literą a. Wówczas

$|A| + |B| = |\Omega|$

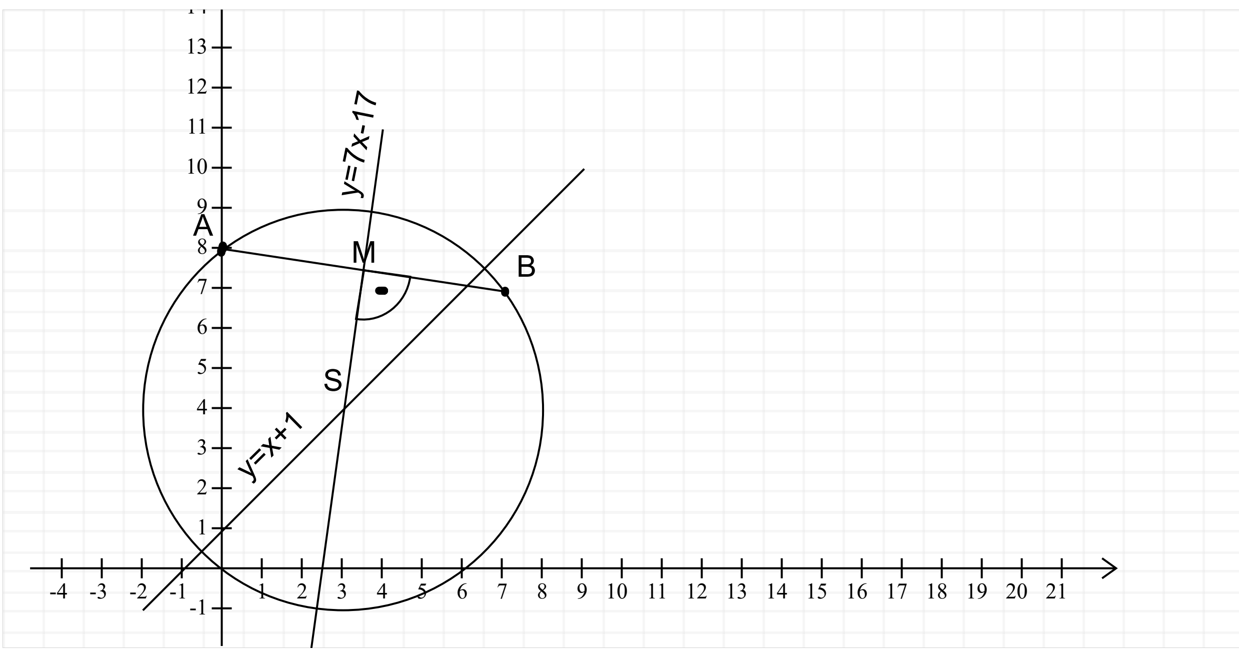
$A \cap B = \varnothing$

$|A| = |B|.$

Ostatnia równość wynika z tego, że jeżeli litera a stoi przed literą b to po przestawieniu miejsc liter otrzymujemy sytuację taką, że litera b stoi przed literą a.

Ponieważ liczba permutacji zbioru n elementowego wynosi $n!$ to
$\Omega = 6! = 720$
Wykorzystując poprzednie wnioski wyznaczamy $|A|$
$2 \cdot |A| = 720$
$|A| = 360.$
Odpowiedź: Mozna ustawić na 360 sposobów.

Zadanie 3



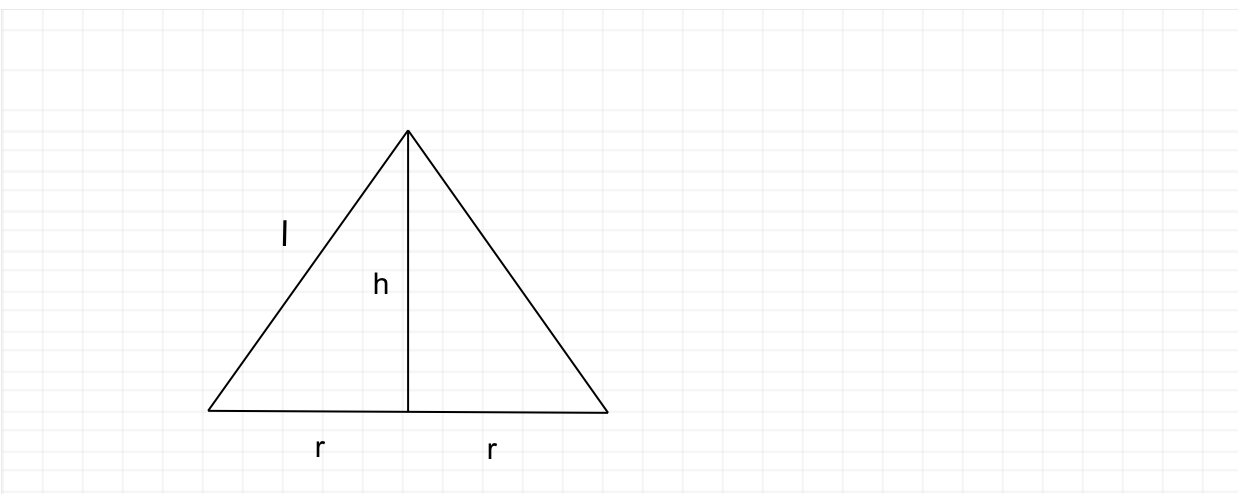
Środek $S = (a, b)$ okręgu o leży na przecięciu prostej $y = x + 1$ oraz prostej prostopadłej do jego cięciwy AB. Środkiem odcinka AB jest punkt $M = \left(\frac{7}{2}, \frac{15}{2}\right)$. Współczynnik kierunkowy prostej przechodzącej przez odcinek AB jest równy $a_{MS} = 7$, ponieważ $a_{MS} \cdot a_{AB} = -1$.
Równanie prostej MS wygląda tak $y = 7x + b$. Prosta ta przechodzi przez punkt
$M = \left(\frac{7}{2}, \frac{15}{2}\right)$, zatem

$$\frac{15}{2} = \frac{49}{2} + b$$

$b = (-17)$
$y = 7x - 17.$
Środek okręgu to punkt przecięcia prostych o równaniach $y = 7x - 17$ i $y = x + 1.$
Wyznaczymy punkt przecięcia tych prostych
$7x - 17 = x + 1$
$6x = 18$
$x = 3$
$y = x + 1 = 4.$
Zatem, $O = (3, 4)$. Kwadrat promieniu O jest równy
$r^2 = (3-0)^2 + (4-8)^2 = 3^2 + 4^2 = 25.$
Równanie naszego okręgu wygląda tak
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25.$
To jest odpowiedź do naszego zadania.

Zadanie 4

Przyjmujemy oznaczenia standardowe. Przekrój stożka wygląda tak:



Pole całkowite stożka jest równe

$$P_c = \pi r(r + l) = 12\pi \quad \Rightarrow \quad r^2 + rl = 12 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{12 - r^2}{r}.$$

Z Twierdzenia Pitagorasa mamy

$$r^2 + h^2 = l^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{l^2 - r^2}$$

$$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 h = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{\pi}{3} \sqrt{r^4 l^2 - r^6} = \frac{\pi}{3} \sqrt{\frac{\left(12 - r^2\right)^2}{r^2} \cdot r^4 - r^6}.$$

Niech $V(r) = \sqrt{f(r)}$. Ponieważ, pierwiastek nie wpływa na monotoniczność funkcji, wystarczy że rozważymy funkcję $f(r)$.

$$f(r) = r^2\left(12 - r^2\right)^2 - r^6 = r^2\left(144 - 24r^2 + r^4 - r^4\right) = r^2\left(144 - 24r^2\right)$$

$$f(r) = 144r^2 - 24r^2$$

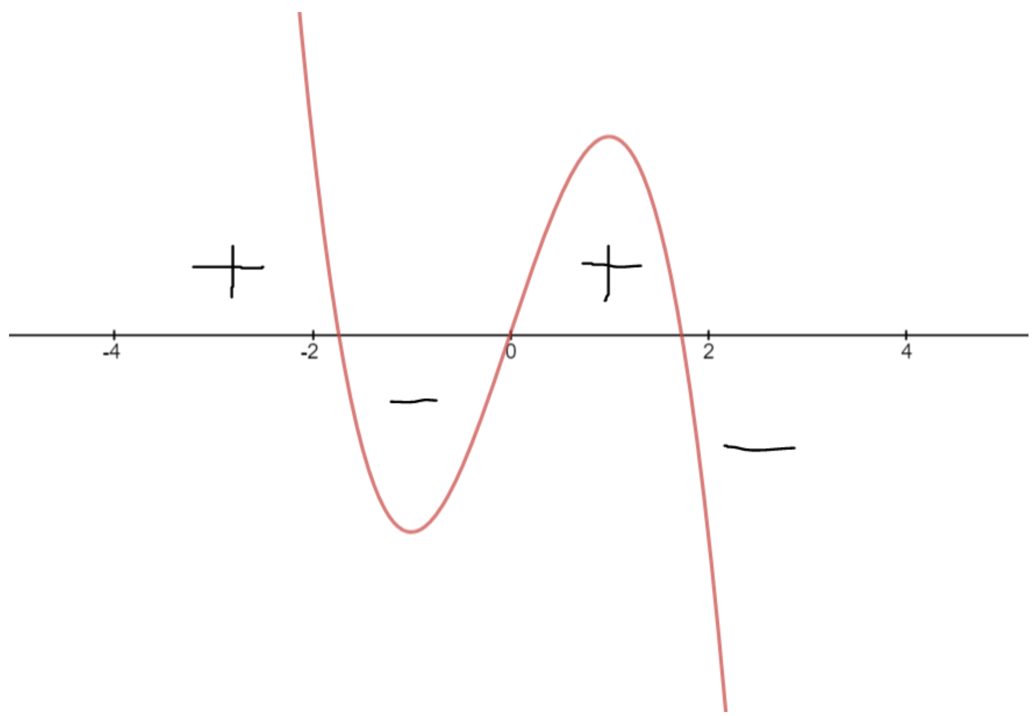
$$D_f = 144r^2 - 24r^4$$

$$f'(r) = 288r - 96r^3 = 96r\left(3 - r^2\right) = -96r\left(r - \sqrt{3}\right)\left(r + \sqrt{3}\right)$$

Miejsca zerowe pochodnej to $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$.

$f'(r) > 0$ dla $r \in \left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(0, \sqrt{3}\right)$

$f'(r) < 0$ dla $r \in \left(-\sqrt{3}, 0\right) \cup \left(\sqrt{3}, \infty\right)$



Nasza funkcja osiąga maksimum dla $r = \sqrt{3}$. Wyznaczamy wymiery stożka

$$l = \frac{12 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{27 - 3} = 2\sqrt{6}$$

Odpowiedź: Wymiery takiego stożka to $r = \sqrt{3},\ l = 3\sqrt{3}$ oraz $h = 2\sqrt{6}$.

Zadanie 5

Przekształćmy nasze wyrażenie

$$\frac{n^3-n^2+2}{n-1} = \frac{n^2(n-1)}{n-1} + \frac{2}{n-1} = n^2 + \frac{2}{n-1}.$$

Żeby nasz ułamek był liczbą całkowitą to $\frac{2}{n-1}$ musi byc liczbą całkowitą. Musi zachodzić $2 \geq n-1 \;\Leftrightarrow\; 3 \geq n.$ Sprawdzamy kolejno $n = 0,\; n = 1,\; n = 2,\; n = 3$ i otrzymujemy że nasz ułamek jest liczbą naturalną dla $n \in \{0, 2, 3\}.$ To jest odpowiedź do naszego zadania.

Zadanid 6*

Wykorzystamy wzór $a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}\right).$

$2010^{10} + 50^{10} - 2 = \left(2010^{10} - 1^{10}\right) + \left(50^{10} - 1\right) = 2009(\dots) + 49 = 49(41(\dots) + 1).$ Z ostatniej postaci liczby jasno wynika, że jest ona podzielna przez 49.