KONWERSATORIUM (22.05.2017, nie odbyło się)

Zadanie 1 (filtracja białego szumu)
Filtr o transmitancji

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Pobudzono białym szumem o zerowej wartości średniej i wariancji $\sigma_w^2 = 1$. Wyznaczyć widmo mocy i funkcję autokorelacji procesu na wyjściu filtru.

Zadanie 2
Przetwarzając biały szum o zerowej wartości średniej i wariancji $\sigma_w^2 = 1$ przez filtr liniowy o transmitancji $H(z)$ chcemy uzyskać sygnał losowy o widmie mocy opisanym zależnością:

$$S_\xi(\theta) = \frac{5 + 4\cos 2\theta}{10 + 6\cos\theta}$$

Wyznaczyć transmitancję $H(z)$, która to zapewni. Wyznaczyć odpowiedź impulsową filtru.

Zadanie 3
Filtr o transmitancji :

$$H(z) = \frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

pobudzono na wejściu szumem o funkcji autokorelacji $R_\xi(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$. Wyznaczyć widmo mocy i autokorelację procesu wyjściowego.

Zadanie 4
Dane są filtry dyskretne o transmitancjach
$H_1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$ i $H_2(z) = \frac{1}{1+az^{-1}}$, $0 < a < 1$.
Filtry te pobudzono na wejściu białym szumem o wariancji σ_w^2. Naszkicować widmo gęstości mocy sygnałów na wyjściu obu filtrów.

Wykazać, że:

$$\boxed{\alpha^{|k|} \xleftrightarrow{\ \mathcal{Z}\ } \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} z^{-k} = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} \alpha^{-k} z^{-k}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{k} z^{-k}}$$

$$= 1 + \alpha z^{-1} + \alpha^2 z^{-2} + \ldots = \frac{1}{1-\alpha z^{-}}$$

o ile $|\alpha z^{-1}| < 1$

$|z| > |\alpha|$

$$\sum_{k=-\infty}^{-\infty} \alpha^{-k} z^{-k} = \alpha z + \alpha^2 z^2 + \ldots =$$

$$= \frac{\alpha z}{1-\alpha z}$$

o ile $|\alpha z| < 1$

Zatem:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^{|k|} z^{-k} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{\alpha z}{1-\alpha z} = \frac{1-\alpha z+\alpha z-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

$$= \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$$

cnd.

Zadanie 1

Zespolone widmo mocy sygnału wyjściowego ma postać:

$$S_y(z)=H(z)\,H^*(1/z^*)\,S_x(z)$$

Dla układu o rzeczywistych parametrach mamy zawsze:

$$H(z)=H^*(z^*) \quad \text{(sprawdzić!)}$$

zatem:

$$S_y(z)=H(z)\,H(z^{-1})\,\sigma_w^2$$

bo szum na wejściu jest biały

Dla $\sigma_w^2=1$ mamy:

$$S_y(z)=H(z)H(z^{-1})=\frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z)}$$

Autokorelację procesu wyjściowego, czyli $\mathcal{Z}^{-1}(S_y(z))$ możemy wyznaczyć na dwa sposoby:

I sposób (prosty i naturalny)

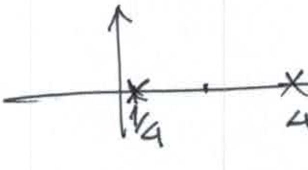
Skorzystać ze związku: $\alpha^{|k|} \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$,

z $\alpha=\frac{1}{4}$. Dostaniemy:

$$R_x(k)=\frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}$$

II sposób (bardziej skomplikowany)

Funkcja $S_y(z)$ ma dwa bieguny: $z=\frac{1}{4}$ i $z=4$



Rozkład tej funkcji na ułamki proste jest następujący:

$$S_y(z)=\frac{16/15}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}-\frac{16/15}{1-4z^{-1}}$$

Zadanie 1 (c.d.)

Obszar zbieżności funkcji $S_y(z)$ musi zawierać okrąg jednostkowy, gdyż w przeciwnym przypadku nie istniałoby widmo mocy. Zatem,

$$\frac{1}{4} < |z| < 4$$

Z pierwszym ułamkiem prostym, czyli biegunem $z = 1/4$ wiążemy zatem sygnał przyczynowy:

$$\frac{16}{15}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k \mathbb{1}[k] \quad (\text{bo } |z| > 1/4)$$

Z kolei z drugim ułamkiem prostym wiążemy sygnał antyprzyczynowy, czyli:

$$\frac{16}{15}\cdot 4^k \mathbb{1}[-k-1] \quad (\text{bo } |z| < 4)$$

Łącząc oba sygnały dostajemy:

$$R_x(k) = \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^k \mathbb{1}[k] + \frac{16}{15}4^k \mathbb{1}[-k-1] =$$

$$= \frac{16}{15}\left(\frac{1}{4}\right)^{|k|}$$

Zadanie 2

Zapiszmy widmo mocy w postaci:

$$S_\xi(\theta) = \frac{5 + 2e^{j2\theta} + 2e^{-j2\theta}}{10 + 3e^{j\theta} + 3e^{-j\theta}}$$

Podstawiając $e^{j\theta} = z$ dostajemy:

$$S_\xi(z) = \frac{5 + 2z^2 + 2z^{-2}}{10 + 3z + 3z^{-1}} = \frac{(2z^2+1)(2z^{-2}+1)}{(3z+1)(3z^{-1}+1)}$$

Wiadomo, że funkcja ta jest postaci:

$$S_\xi(z) = H(z)H(z^{-1})\sigma_w^2 = H(z)H(z^{-1})$$

stąd wynika, że $H(z) = \frac{2z^2+1}{3z+1}$

lub $$H(z) = \frac{2z^2\left(1+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}{3z\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)} = z\,\frac{2}{3}\,\frac{1+\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

ten czynnik wnosi tylko dodatkowe opóźnienie w układzie, a zatem nie ma wpływu na charakterystykę amplitudową układu, a tym samym na widmo mocy procesu wyjściowego. Czynnik ten można pominąć!

stąd:

$$H(z) = \frac{2}{3}\,\frac{1+\frac{1}{2}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Zadanie 3

$$R_\xi(k) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{|k|} \xleftrightarrow{Z} S_\xi(z) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}$$

Zespolone widma mocy na wejściu i na wyjściu układu są związane zależnością:

$$S_\eta(z) = H(z)\,H^*(1/z^*)\,S_\xi(z)$$

Dla układu o rzeczywistych parametrach $H(z)=H^*(z^*)$ i wówczas zależność ta przybiera postać:

$$S_\eta(z) = H(z)\,H(z^{-1})\,S_\xi(z)$$

$$S_\eta(z) = \frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}z}{1-\frac{1}{3}z}\cdot\frac{3/4}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)} =$$

$$= \frac{3/4}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$$

Doprowadzimy tę zależność do postaci: $\dfrac{1-\alpha^2}{(1-\alpha z^{-1})(1-\alpha z)}$, wiedząc, że $\alpha = \frac{1}{3}$

$$1-\alpha^2 = 1-\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} = \frac{32}{27}\cdot\frac{3}{4}.$$

stąd:

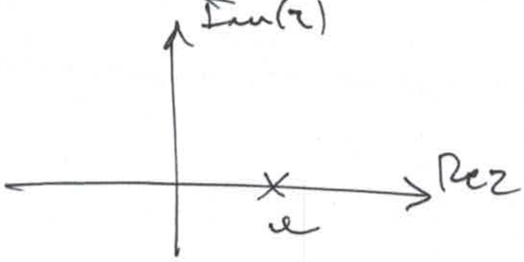
$$S_\eta(z) = \frac{27}{32}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z\right)}$$

a to daje autokorelację procesu wyjściowego w postaci:

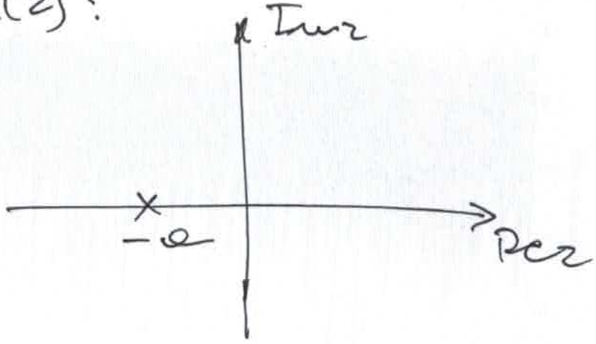
$$R_\eta(k) = \frac{27}{32}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{|k|}$$

Zadanie 4

$H_1(z)$:



$H_2(z)$:

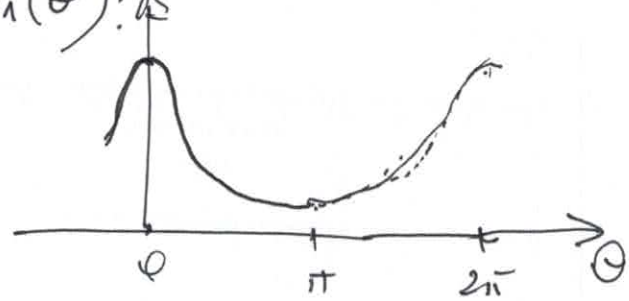


Widmo mocy procesu wyjściowego:

$$S_{1,2}(\theta) = |H_{1,2}(e^{j\theta})|^2 \sigma_w^2$$

Jak wiadomo charakterystyka amplitudowa przyjmuje wartość maksymalną dla pulsacji równej pulsacji bieguna. Stąd:

$S_1(\theta)$:



$S_2(\theta)$