Konwersatorium

Zadanie 1
Wyznaczyć funkcję autokorelacji procesu harmonicznego $\xi[n] = A\cos(n\theta_0 + \varphi)$, gdzie φ jest zmienną losową o rozkładzie równomiernym w przedziale $[0,2\pi)$.

Zadanie 2
Niech $\xi[n]$ będzie stacjonarnym procesem losowym o autokorelacji $R_\xi[m]$ oraz niech $\eta[n] = \xi[n] + f[n]$, gdzie $f[n]$, jest ciągiem deterministycznym. Wyznaczyć wartość średnią oraz autokorelację procesu $\eta[n]$.

Zadanie 3
Wyznaczyć widmo mocy dla procesów stacjonarnych scharakteryzowanych następującymi funkcjami autokorelacji

a) $R_\xi[k] = 2\delta[k] + j\delta[k-1] - j\delta[k+1]$

b) $R_\xi[k] = \delta[k] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$

c) $R_\xi[k] = 2\delta[k] + \cos(\pi k/4)$

d) $R_\xi[k] = \begin{cases} 10 - |k|, & |k| < 10 \\ 0, & \text{dla pozostałych} \end{cases}$

Zadanie 4
Wyznaczyć funkcję autokorelacji procesów o następujących widmach mocy :

a) $S_\xi(\theta) = 3 + 2\cos\theta$

b) $S_\xi(\theta) = \frac{1}{5+3\cos\theta}$

Zadanie uzupełniające

Dowieść, że:

$$a^{|m|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\theta}$$

$|a| < 1$

$-\infty < m < \infty$, czyli $m \in \mathbb{Z}$.

A

$$R_\xi[m] = E\{\xi[n]\,\xi[n-m]\} =$$

$$= E\{A\cos(n\theta_0+\varphi)\,A\cos((n-m)\theta_0+\varphi)\} =$$

$$= A^2 E\{\cos(n\theta_0+\varphi)\cos((n-m)\theta_0+\varphi)\} \underset{A}{=}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \tfrac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

$$= A^2 E\left\{\tfrac{1}{2}\cos(m\theta_0) + \tfrac{1}{2}\cos((2n-m)\theta_0+2\varphi)\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}A^2\cos m\theta_0 + \tfrac{1}{2}A^2\,\underbrace{E_\varphi\{\cos((2n-m)\theta_0+2\varphi)\}}_{=\,0}$$

0, bo

$$E_\varphi\{\cos((2n-m)\theta_0+2\varphi)\} =$$
$$= \int \cos(2\varphi+\text{const})\,f(\varphi)\,d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi+\text{const})\,\frac{1}{2\pi}\,d\varphi = 0$$

stąd:

$$\boxed{R_\xi[m] = \tfrac{1}{2}A^2\cos m\theta_0}$$

Rozwiązanie zadania 2

$$\eta[n] = \xi[n] + f[n]$$

$\xi[n]$ – proces stacjonarny; $f[n]$ – ciąg deterministyczny.

1) $E\{\eta[n]\} = E\{\xi[n] + f[n]\} = \mu_\xi + f[n]$

2) $R_{\eta\eta}[n_1, n_2] = E\{\eta[n_1]\eta[n_2]\} =$

$= E\{(\xi[n_1] + f[n_1])(\xi[n_2] + f[n_2])\} =$

$= E\{\xi[n_1]\xi[n_2]\} + E\{\xi[n_1]f[n_2]\} + E\{f[n_1]\xi[n_2]\} + E\{f[n_1]f[n_2]\}$

$= \underbrace{R_{\xi\xi}[n_2 - n_1]}_{\text{bo proces } \xi[n] \text{ jest stacjonarny.}} + f[n_2]\mu_\xi + f[n_1]\mu_\xi + f[n_1]f[n_2] =$

$= R_{\xi\xi}[n_2 - n_1] + \mu_\xi(f[n_1] + f[n_2]) + f[n_1]f[n_2].$

Proces $\eta[n]$ nie jest procesem stacjonarnym.

Gdyby jednak ciąg $f[n]$ był ciągiem stałym, tzn. $f[n] = f \;\; \forall n$, to wówczas mielibyśmy

$$E\{\eta[n]\} = \mu_\xi + f = \text{const.}$$

$$R_{\eta\eta}[n_1, n_2] = R_{\xi\xi}[n_2 - n_1] + 2\mu_\xi f + f^2$$

i proces $\eta[n]$ byłby wówczas procesem stacjonarnym.

Rozwiązanie zadania 3

a) $S_\xi(e^{j\theta}) = 2 + je^{-j\theta} - je^{j\theta} = 2 + 2\sin\theta$

b) $|a|^k \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{1-a^2}{|1-ae^{-j\theta}|^2}$

stąd:
$$S_\xi(e^{j\theta}) = 1 + 2\,\frac{1-\frac{1}{4}}{|1-\frac{1}{2}e^{-j\theta}|^2} = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}-\cos\theta} = \frac{11-4\cos\theta}{5-4\cos\theta}$$

c) $\cos(\pi k/4) = \frac{1}{2}e^{j\pi k/4} + \frac{1}{2}e^{-j\pi k/4}$

$$e^{jn\theta_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi\delta(\theta-\theta_0)$$

stąd:
$$S_\xi(e^{j\theta}) = 2 + \pi\delta(\theta-\pi/4) + \pi\delta(\theta+\pi/4)$$

d) Zauważmy, że: $R_\xi[k] = p[k] * p[-k]$

gdzie: $p[k] = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 9 \\ 0, & \text{w.p.p.} \end{cases}$

(symetryczny trójkąt jest splotem prostokątów j.w.)

stąd: $S_\xi(e^{j\theta}) = |P(e^{j\theta})|^2$, gdzie $P(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{9} e^{-jk\theta} =$

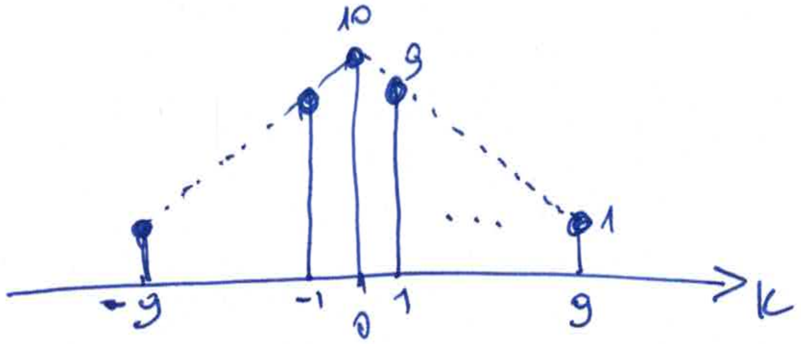
$$= \frac{1-e^{-j10\theta}}{1-e^{-j\theta}} = e^{-j9\theta/2}\,\frac{\sin 5\theta}{\sin\theta/2}$$

Ostatecznie:
$$\boxed{S_\xi(e^{j\theta}) = \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \theta/2}}$$

~~Konwersatorium 9 z dn. 14.12.2018~~

Rozwiązanie zadania 3d

Dane autokorelacja $R_3[k]$ ma kształt symetrycznego trójkąta:

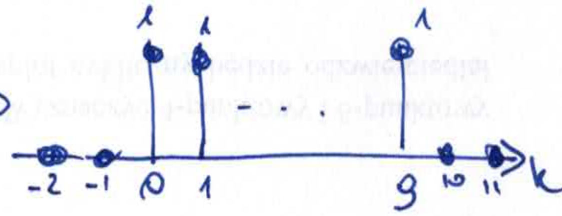


Jak wiadomo, przebieg trójkątny (symetryczny) jest wynikiem splotu przebiegów prostokątnych, tzn.

$$R_3[k] = p[k] * p[-k]$$

gdzie:

$$p[k] = \begin{cases} 1, & 0 \le k \le 9 \\ 0, & \text{poza} \end{cases} \Rightarrow$$



stąd wynika, że:

$$S_3(\theta) \overset{df}{=} \mathcal{F}\{R_3[k]\} = \mathcal{F}\{p(k) * p(-k)\} = P(e^{j\theta}) \cdot P^*(e^{j\theta}) = |P(e^{j\theta})|^2$$

gdzie:

$$P(e^{j\theta}) = \sum_{k=0}^{9} 1 \cdot e^{-jk\theta} = e^{-j9\theta/2} \frac{\sin(10\theta/2)}{\sin\theta/2} = e^{-j9\theta/2} \frac{\sin 5\theta}{\sin\theta/2}$$

taka zależność była wyprowadzana na jednym z pierwszych wykładów/konwersatoriów.

Ostatecznie:

$$\boxed{S_3(\theta) = \frac{\sin^2 5\theta}{\sin^2 \theta/2}}$$

Rozwiązanie zadania 4b (Rozwiązanie 4a jest dość trywialne)

Wiadomo, że:

$$a^{|k|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-a^2}{|1-ae^{j\theta}|^2}, \quad |a|<1$$

co można zapisać w postaci:

$$\frac{1-a^2}{|1-ae^{j\theta}|^2} = \frac{1-a^2}{(1-ae^{j\theta})(1-ae^{-j\theta})} = \frac{1-a^2}{(1+a^2)-2a\cos\theta} =$$

$$= \frac{\frac{1-a^2}{1+a^2}}{1-\frac{2a}{1+a^2}\cos\theta} \quad (*)$$

Z kolei, rozważane widmo można przedstawić do postaci:

$$S_3(\theta) = \frac{1}{5+3\cos\theta} = \frac{1/5}{1+\frac{3}{5}\cos\theta}$$

Porównując z $(*)$ dostajemy:

$$\frac{2a}{1+a^2} = -\frac{3}{5} \longrightarrow a = -1/3$$

(drugie rozwiązanie $a=-3$ odrzucamy, bo $|a|=3>1$)

Dla takiej wartości a, ze wzoru $(*)$ dostajemy:

$$a^{|k|} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\frac{1-1/9}{1+1/9}}{1+\frac{3}{5}\cos\theta} = \frac{8/10}{1+\frac{3}{5}\cos\theta} =$$

$$= 4\cdot\underbrace{\frac{1/5}{1+\frac{3}{5}\cos\theta}}_{\text{podane widmo}}$$

mamy zatem:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 4\,\frac{1/5}{1+3/5\cos\theta}$$

stąd:

$$\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|} \longleftrightarrow \frac{1/5}{1+\frac{3}{5}\cos\theta}$$

co daje odpowiedź:

$$\underline{R_3[k] = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{|k|}}$$

Zadanie

$$R_x[m] = a^{|m|}, \quad |a| < 1$$

Wyznaczyć widmo mocy $S_x(\theta) = ?$

$$S_x(\theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a^{|m|} e^{-jm\theta} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{-1} a^{-m} e^{-jm\theta} + \sum_{m=0}^{\infty} a^{m} e^{-jm\theta} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} a^{m} e^{jm\theta} + \frac{1}{1-ae^{j\theta}} =$$

$$= ae^{j\theta} + a^2 e^{j2\theta} + \ldots + \frac{1}{1-ae^{-j\theta}} =$$

$$= \frac{ae^{j\theta}}{1-ae^{j\theta}} + \frac{1}{1-ae^{-j\theta}} =$$

$$= \frac{ae^{j\theta} - a^2 + 1 - ae^{j\theta}}{(1-ae^{j\theta})(1-ae^{-j\theta})} = \frac{1-a^2}{1-ae^{-j\theta}-ae^{j\theta}+a^2} =$$

$$= \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\theta}$$

$$\frac{1-a^2}{|1-ae^{-j\theta}|^2} \overset{a=\frac{1}{2}}{=} \frac{\frac{3}{4}}{|1-\frac{1}{2}e^{j\theta}|^2}$$

$$\boxed{a^{|m|} \longleftrightarrow \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\theta}}$$