KONWERSATORIUM

Zadanie 1
Wykazać, że $R[m] = R^*[-m]$ (tzw. symetria hermitowska)

Zadanie 2
Dany jest fragment realizacji $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$ pewnego sygnału stochastycznego $\xi[n]$. Korzystając z pojęcia periodogramu wyznaczyć na podstawie tej realizacji estymator widma mocy, a następnie estymator autokorelacji procesu $\xi[n]$.
Przydatne wzory:
$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos\theta$, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Zadanie 3
Widmo gęstości mocy dyskretnego sygnału losowego $\xi[n]$ ma postać $S_\xi(\theta) = 2 - 2\cos(2\theta)$. Wyznaczyć autokorelację tego sygnału. Sygnałem $\xi[n]$ pobudzono filtr liniowy o transmitancji $H(z) = 1 + z^{-2}$. Wyznaczyć widmo mocy oraz ciąg autokorelacji sygnału na wyjściu tego filtru.
Wzór: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

Zadanie 4
Dyskretny układ liniowy o odpowiedzi impulsowej: $h[n] = a^n\mathbf{1}[n]$, $a \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, pobudzono na wejściu dyskretnym stacjonarnym sygnałem losowym $\xi[n]$ o wartości oczekiwanej μ_ξ. Podać ogólną zależność wartości oczekiwanej μ_η sygnału wyjściowego w zależności od wartości oczekiwanej μ_ξ i parametru a. Zakładając następnie, że sygnał wejściowy $\xi[n]$ jest białym szumem o zerowej wartości oczekiwanej ($\mu_\xi = 0$) i wariancji σ_ξ^2 podać zależność mocy σ_η^2 sygnału wyjściowego od mocy sygnału wejściowego σ_ξ^2 i parametru a.

Zadanie 5
Dany jest układ o transmitancji $H(z) = 1 - z^{-1}$. Układ ten pobudzono sygnałem losowym o funkcji autokorelacji: $R_x[m] = \delta[m] + \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)$. Wyznaczyć i naszkicować widmo mocy sygnału wyjściowego.

Zadanie 6
Niech $x[n]$ będzie procesem losowym o wartościach rzeczywistych generowanym przez system opisany następującym równaniem różnicowym:

$$y[n] = ax[n-1] + x[n] \quad ,$$

gdzie $y[n] = 0$ dla $n < 0$ oraz $x[n] = w[n]\mathbf{1}[n]$ i $w[n]$ jest procesem stacjonarnym o wartości średniej μ_w i autokorelacji $R_w[m] = \sigma_w^2\delta[m]$. Określić wartość średnią procesu $y[n]$ ($\mu_y[n] =$?) oraz skomentować w tym kontekście stacjonarność procesu $y[n]$.

Zadanie 7
Niech $w[n]$ będzie białym szumem o zerowej wartości średniej i wariancji σ_w^2. Definiujemy proces:

$$x[n] = w[n] + w[n-1], \quad -\infty < n < \infty$$

Określić wartość średnią, autokorelację i widmo mocy procesu $x[n]$. Czy proces $x[n]$ jest niezależny ?

Zadanie 8
Proces losowy $x[n]$ opisany jest następującym równaniem różnicowym:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + w[n]$$

gdzie $w[n]$ jest białym szumem o zerowej średniej i wariancji σ_w^2 . Z kolei, proces $z[n]$ jest określony jako $z[n] = x[n] + v[n]$, gdzie $v[n]$ jest białym szumem o zerowej średniej i wariancji σ_v^2, nieskorelowanym z $w[n]$.
Wyznaczyć widmo mocy procesów $x[n]$ i $z[n]$.

Zadanie 1

$$R[m] = E\{\xi[n]\,\xi^*[n-m]\} \leftarrow \text{definicja}$$

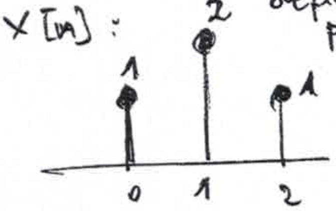
$$R^*[-m] = E\{\xi^*[n]\,\xi[n+m]\} = E\{\xi[n+m]\,\xi^*[n]\} =$$

$$\underset{\text{z def.}}{=} R[(n+m)-n] = R[m] \quad // \text{ cnd.}$$

Zadanie 2

$N=3$ $\quad X_N(e^{j\theta})$ - transformata Fouriera fragmentu realizacji procesu.

$$\hat{S}_3(\theta) = \underbrace{\frac{1}{N}\left|X_N(e^{j\theta})\right|^2}_{\text{definicja periodogramu}} = \frac{1}{3}\left|1+2e^{-j\theta}+1e^{-j2\theta}\right|^2 =$$



$$= \frac{1}{3}\left|e^{-j\theta}\left(e^{j\theta}+2+e^{-j\theta}\right)\right|^2 =$$

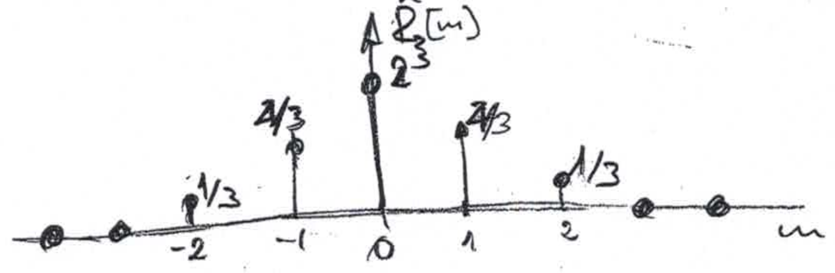
$$= \frac{1}{3}\left|2+2\cos\theta\right|^2 = \frac{4}{3}(1+\cos\theta)^2 =$$

$$= \frac{4}{3}\left(1+2\cos\theta+\cos^2\theta\right) = \frac{4}{3}\Big(1+2\cos\theta+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\theta}\Big) =$$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

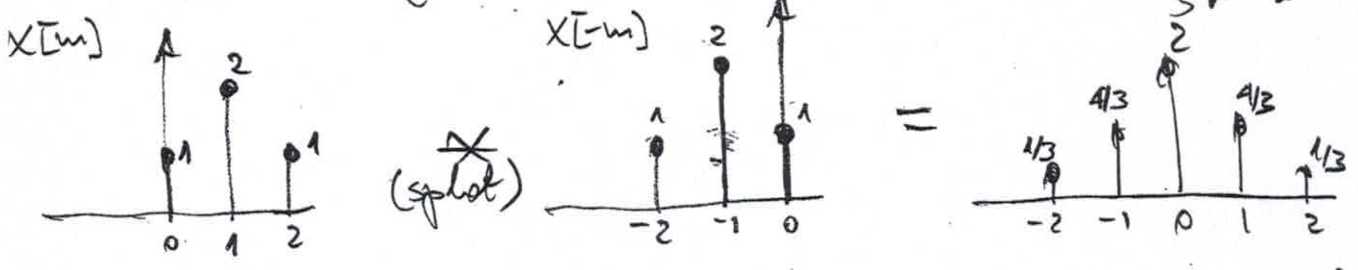
$$= 2+\frac{8}{3}\cos\theta+\frac{2}{3}\cos 2\theta = 1+\frac{4}{3}\left(e^{j\theta}+e^{-j\theta}\right)+\frac{1}{3}\left(e^{j2\theta}+e^{-j2\theta}\right)$$

stąd:



II sposób Estymator autokorelacji jako splot:

$$\hat{R}_3[m] = \frac{1}{3}\left(x[m] * x[-m]\right)$$



a stąd możemy wyznaczyć $\hat{S}_3(\theta)$ jako transformatę Fouriera:

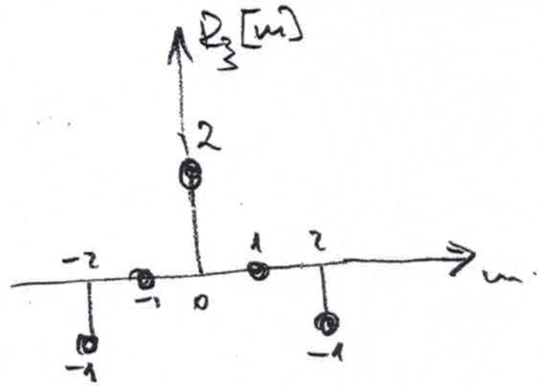
$$\hat{S}_3(\theta) = 2+\frac{4}{3}e^{+j\theta}+\frac{4}{3}e^{-j\theta}+\frac{1}{3}e^{j2\theta}+\frac{1}{3}e^{-j2\theta} =$$

$$= 2+\frac{8}{3}\cos\theta+\frac{2}{3}\cos 2\theta$$

Zadanie 3

$S_3(\theta) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow S_y(\theta)$

$S_3(\theta) = 2 - (e^{-j2\theta} + e^{j2\theta}) \Rightarrow$



$$H(z) = 1 + z^{-2} \Rightarrow H(e^{j\theta}) = 1 + e^{-j2\theta} = e^{-j\theta}(e^{j\theta} + e^{-j\theta}) = e^{-j\theta}2\cos\theta$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = 4\cos^2\theta$$

$$S_y(\theta) = |H(e^{j\theta})|^2 \cdot S_3(\theta)$$

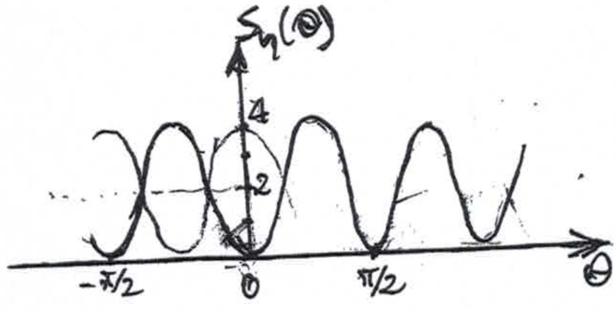
$$S_y(\theta) = 4\cos^2\theta \cdot (2 - 2\cos 2\theta) =$$

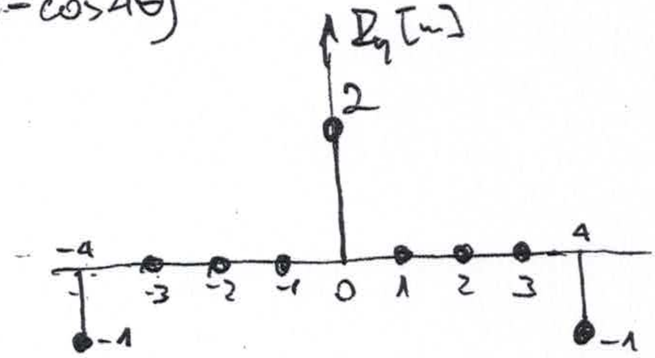
$$= 2\cdot(\cos 2\theta + 1)\cdot 2(1 - \cos 2\theta) = 4(1 - \cos^2 2\theta) =$$

$$\left\{ \cos^2 2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta) \right\}$$

$$= 4\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4\theta\right) = \underbrace{2 - 2\cos 4\theta}_{\text{widmo mocy}} = 2 - e^{-j4\theta} - e^{j4\theta}$$

$$2(1 - \cos 4\theta)$$





II sposób

$H(z) = 1 + z^{-2} \longrightarrow$ h[n]:

$R_y[m] = h[m] * h[-m] * R_3[m]$ (zależność znane z „tabelki wykładowej", a nawet dowiedziona)

Mając $R_y[m]$ wyznaczony: $S_y(\theta) = \sum_m R_y[m]e^{-jm\theta}$

Zadanie 4

$$h[n] = a^n \mathbb{1}[n] \rightarrow H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-ae^{-j\theta}}$$

$$H(0) = H(e^{j\theta})\Big|_{\theta=0} = \frac{1}{1-a}$$

stąd:

$$\mu_\eta = H(0)\,\mu_\xi = \frac{1}{1-a}\mu_\xi$$ (znana zależność)

Ponieważ $\mu_\xi = 0$, to $\mu_\eta = 0$

$S_\xi(\theta) = \sigma_\xi^2$ (biały szum)

stąd: $S_\eta(\theta) = \sigma_\xi^2 \cdot |H(e^{j\theta})|^2$

$$P_\eta = \sigma_\eta^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\eta(\theta)\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_\xi^2 |H(e^{j\theta})|^2 d\theta =$$

moc jest równa wariancji dlatego, że $\mu_\eta = 0$

$$= \sigma_\xi^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H(e^{j\theta})|^2 d\theta = \sigma_\xi^2 \sum_{n=0}^{\infty}|h[n]|^2 =$$

tw. Parsevala

$$= \sigma_\xi^2 \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} = \frac{\sigma_\xi^2}{1-a^2}$$

Ostatecznie:

$$\boxed{P_\eta = \sigma_\eta^2 = \frac{\sigma_\xi^2}{1-a^2}}$$

Zadanie 5

$$R_x[m] = \delta[m] + \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_x(\theta) = \mathcal{F}\left\{R_x[m]\right\} = \underbrace{1}_{\updownarrow\ \delta[m]} + \underbrace{\pi\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\delta\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}_{\updownarrow\ \cos\left(m\frac{\pi}{2}\right)}$$

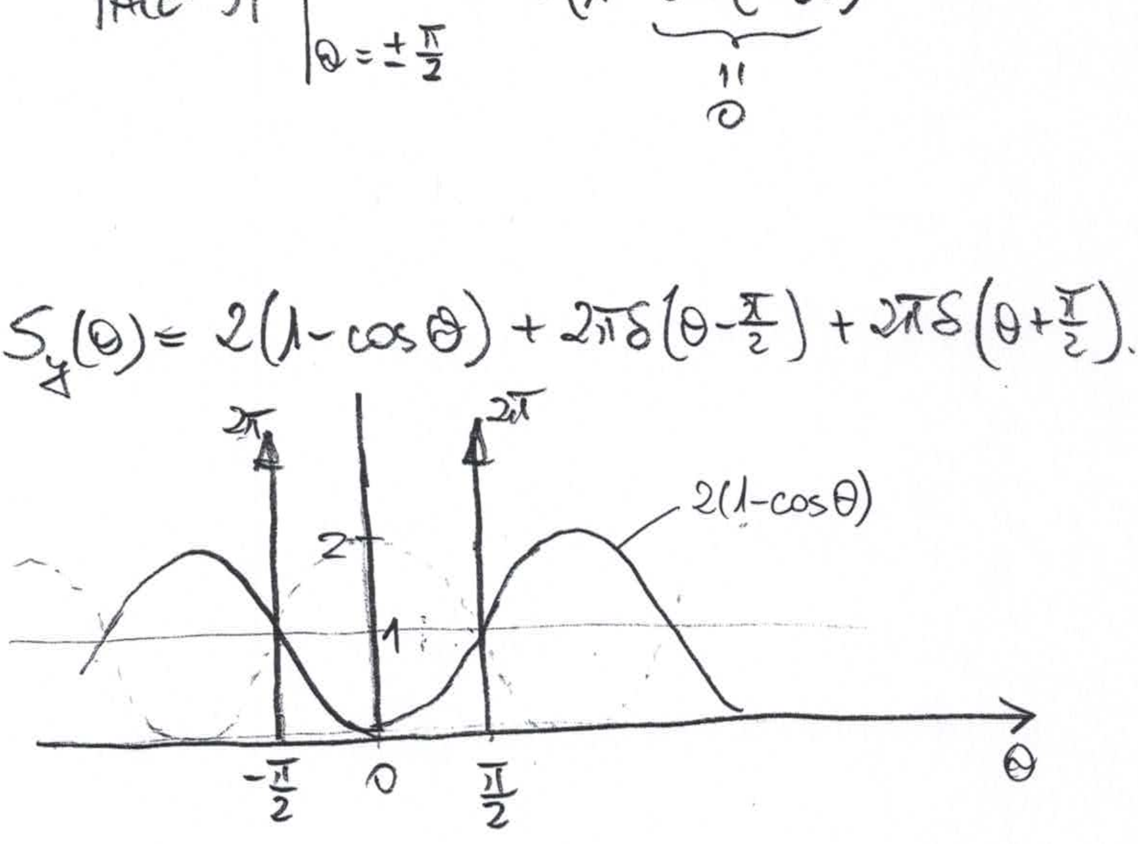
$$S_y(\theta) = |H(e^{j\theta})|^2 \cdot S_x(\theta) = |H(e^{j\theta})|^2 + \pi|H(e^{j\theta})|^2\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + \pi|H(e^{j\theta})|^2\delta\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = |1-e^{-j\theta}|^2 = (1-e^{-j\theta})(1-e^{+j\theta}) = 1-e^{-j\theta}-e^{+j\theta}+1 = 2-2\cos\theta$$

$$|H(e^{j\theta})|^2\Big|_{\theta=\pm\frac{\pi}{2}} = 2\Big(1-\underbrace{\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\Big) = 2$$

stąd:

$$S_y(\theta) = 2(1-\cos\theta) + 2\pi\delta\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + 2\pi\delta\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right).$$



Zadanie 6

Dla $n \geq 0$ mamy:

$$y[0] = a y[-1] + w[0] = w[0]$$

$$y[1] = a y[0] + w[1] = a w[0] + w[1]$$

$$y[2] = a y[1] + w[2] = a^2 w[0] + a w[1] + w[2]$$

$$\vdots$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} a^k w[n-k]$$

$$\mu_y = E\{y[n]\} = \sum_{k=0}^{n} a^k \underbrace{E\{w[n-k]\}}_{\mu_w \text{ (stacjonarny)}} = \mu_w \sum_{k=0}^{n} a^k$$

$$= \mu_w \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Wnioski

μ_y zależy od n, czyli proces $y[n]$ nie jest stacjonarny

ale

$$\mu_w \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \xrightarrow{n \to \infty} \mu_w \frac{1}{1-a}$$

Zatem po osiągnięciu stanu ustalonego układu proces na wyjściu będzie stacjonarny.
Jest to jednak czas nieskończony (teoretycznie)

Uwaga

Gdyby $x[n] \equiv w[n]$, $-\infty < n < \infty$ to $\forall n$ mamy stan ustalony i wówczas:

$$\mu_y = \mu_w H(e^{j\theta})\big|_{\theta=0}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \Rightarrow H(e^{j\theta}) = \frac{1}{1-ae^{-j\theta}} \Rightarrow H(e^{j\theta})\big|_{\theta=0} = \frac{1}{1-a}$$

stąd:

$$\mu_y = \mu_w \frac{1}{1-a}$$

Zadanie 7

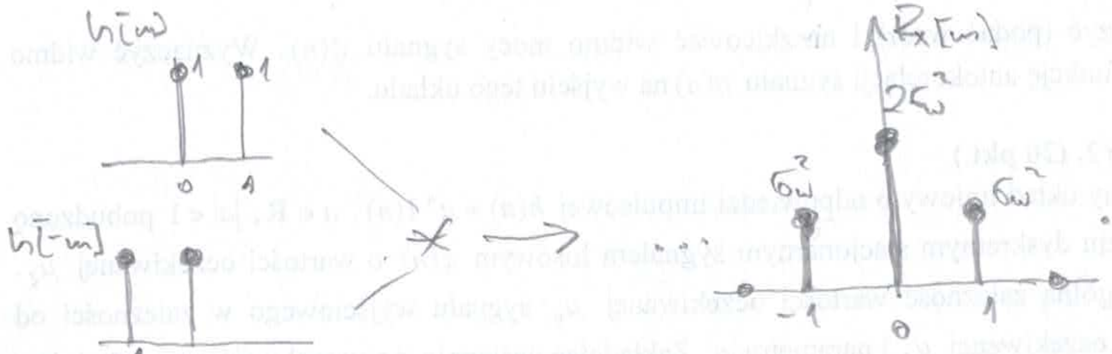
Proces x[n] zdefiniowany takim równaniem jest procesem na wyjściu filtru o odpowiedzi impulsowej $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$, tzn.

$$w[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow x[n]$$

stąd:

$$R_x[m] = h[m] * h[-m] * R_w[m] =$$

$$= h[m] * h[-m] * \sigma_w^2 \delta[m] = \sigma_w^2 \left(h[m] * h[-m]\right)$$



$$S_x(\theta) = 2\sigma_w^2 + \sigma_w^2 e^{-j\theta} + \sigma_w^2 e^{j\theta} =$$

$$= \sigma_w^2 \left(2 + 2\cos\theta\right)$$

Niezależność:

Zmienne

x[n] zależy od w[n]

x[n+1] także zależy od w[n]

$\Rightarrow$ x[n] i x[n+1] nie są niezależne

$\Downarrow$

proces x[n] nie jest niezależny

Zadanie 8

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} a_k x[n-k] + w[n]$$ – równanie różnicowe.

$$H(z) = \frac{1}{1-\sum_{k} a_k z^{-k}}$$

stąd:

$$S_x(\theta) = |H(e^{j\theta})|^2 \underbrace{S_w(\theta)}_{=\sigma_w^2} = \sigma_w^2 |H(e^{j\theta})|^2 = \sigma_w^2 \frac{1}{|1+\sum a_k e^{-jk\theta}|^2}$$

$$R_z[m] = E\{z[n]\,z[n-m]\} =$$

$$= E\{(x[n]+v[n])(x[n-m]+v[n-m])\} =$$

$$= E\{x[n]x[n-m] + x[n]v[n-m] + v[n]x[n-m] + v[n]v[n-m]\}$$

$$= R_x[m] + R_v[m] + E\{x[n]v[n-m]\} + E\{v[n]x[n-m]\}$$

Są to korelacje wzajemne, ale z uwagi na fakt, że: $\mu_x = 0$, $\mu_v = 0$ są to także kowariancje wzajemne.
Ze względu na założenie nieskorelowania procesów obie kowariancje są zerowe.

stąd:

$$R_z[m] = R_x[m] + R_v[m]$$

czyli:

$$S_z(\theta) = S_x(\theta) + S_v(\theta)$$ (jak należało się spodziewać).