Metody numeryczne - Układy równań liniowych (zadanie projektowe)

1. Wstęp

Celem zadania było zaimplementowanie trzech metod rozwiązywania układów liniowych postaci:

$$Ax = b$$

oraz przeprowadzenie analizy ich działania. Omawianymi metodami są dwie metody iteracyjne- Jacobiego oraz Gaussa-Seidla i jedna metoda bezpośrednia - Faktoryzacja LU. Do zaimplementowania rozwiązań skorzystałem z języka Python z dołączoną bibliotekę matplotlib.

Metody iteracyjne polegają na znalezieniu akceptowalnie przybliżonego rozwiązania układu równań. W każdej swojej iteracji wyszukują dokładniejsze przybliżenie rozwiązania, oszczędzając w ten sposób czas potrzebny na dokonanie obliczeń dążących do wyznaczenia dokładnego rozwiązania.

Metoda Jacobiego polega na podzieleniu macierzy A na macierz diagonalną D, macierz trójkątną dolną L oraz macierz trójkątną górną U, w taki sposób, że:

$$A = -L - U + D$$

Następnie z powyższego wyznaczamy schemat iteracyjny postaci:

$$x^{(n+1)} = D(L + U)x^{(n)} + D^{-1}b$$

po którego obliczeniu znajdujemy $x^{(n+1)}$ będące naszym szukanym przybliżeniem rozwiązania.

Metoda Gaussa-Seidla bazuje na Metodzie Jacobiego wprowadzając przy tym znaczącą modyfikację - korzysta z wcześniej obliczonych wartości, tym samym przyspieszając znalezienie szukanego przybliżenia rozwiązania. Schemat iteracyjny w tym przypadku wygląda następująco:

$$x^{(n+1)} = (D - L)^{-1}(Ux^{(n)}) + (D - L)^{-1}b$$

Do oceny jakości przybliżeń rozwiązań w przypadku powyższych metod iteracyjnych, korzysta się z **wektora residuum**, który dla n - tej iteracji przyjmuje postać:

$$res^{(n)} = Ax^{(k)} - b$$

oraz oblicza jego normę euklidesową $||res|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} res_j^2}$, która będzie tym bliższa zeru, im bliższe dokładnemu rozwiązaniu jest rozwiązanie przybliżone. Na potrzeby zadania zakładamy, że akceptowalny błąd przybliżenia wynosi mniej niż 10^{-9}.

Faktoryzacja LU jest metodą bezpośrednią rozwiązywania układów równań liniowych, która pozwala nam obliczyć rozwiązania dokładne. Polega ona na przekształceniu macierzy A do iloczynu macierzy trójkątnej dolnej L oraz trójkątnej górnej U, w taki sposób, że $LUx = b$ i stworzenia wektora pomocniczego $y = Ux$, by następnie rozwiązać układy równań $Ly = b$ oraz $Ux = y$ odpowiednio korzystając z podstawienia wprzód oraz podstawienia wstecz.

Ze względu na treść zadania projektowego oraz mój numer indeksu (191711), rozwiązywane równania macierzowe będą postaci:

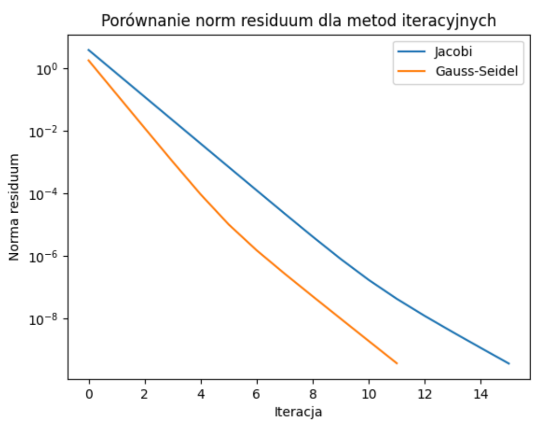
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a3 & a2 & a1 & a2 & a3 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a3 & a2 & a1 \end{bmatrix},$$

gdzie, $a1 = 12, a2 = a3 = -1$, a rozmiar macierzy A wynosi 911×911.

Wektor b ma długość 911 i jego n-ty element ma wartość $sin(n \cdot (2))$.

2. Prezentacja oraz analiza

W pierwszej kolejności porównam działanie metod iteracyjnych Jacobiego oraz Gaussa-Seidla dla układu liniowego, w którym macierz A oraz wektor b zostały ustalone zgodnie z treścią zadania.

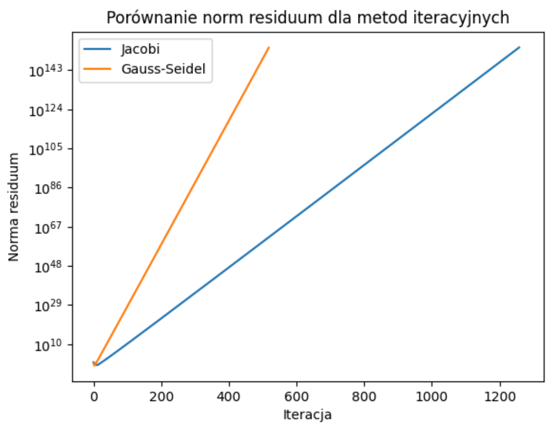


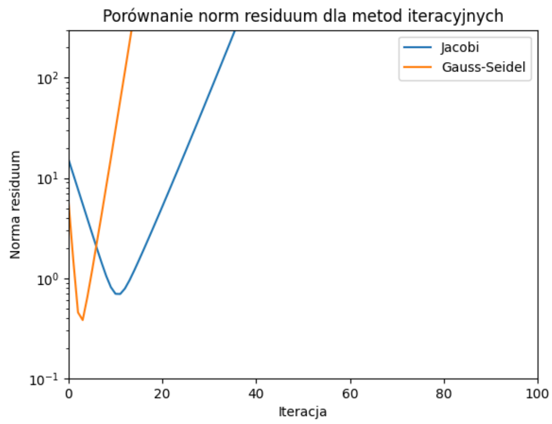
zał. 1. - porównanie norm residuum dla metod iteracyjnych Jacobiego oraz Gaussa-Seidla

Metoda	Czas [s]	Ilość iteracji	Norma wektora residuum
Jacobi	1.17458	16	$3.54 \cdot 10^{-10}$
Gauss-Seidel	0.91824	12	$3.61 \cdot 10^{-10}$

Tak jak można było się spodziewać - metoda Gaussa-Seidla będąca usprawnieniem metody Jacobiego, potrzebuje mniejszej ilości iteracji do znalezienia akceptowalnego przybliżenia rozwiązania układu równań w krótszym czasie. W zadanym równaniu, metoda Gaussa-Seidla okazała się być szybsza od metody Jacobiego o ok. 25% wykonując przy tym 30% iteracji mniej.

Następnie wprowadzam zmianę w macierzy A, zmieniając $a1 = 3$ (wcześniej $a1 = 12$). Wektor b pozostaje bez zmian.





zał. 2. oraz 3. - porównanie norm residuum dla metod iteracyjnych w zmienionym układzie

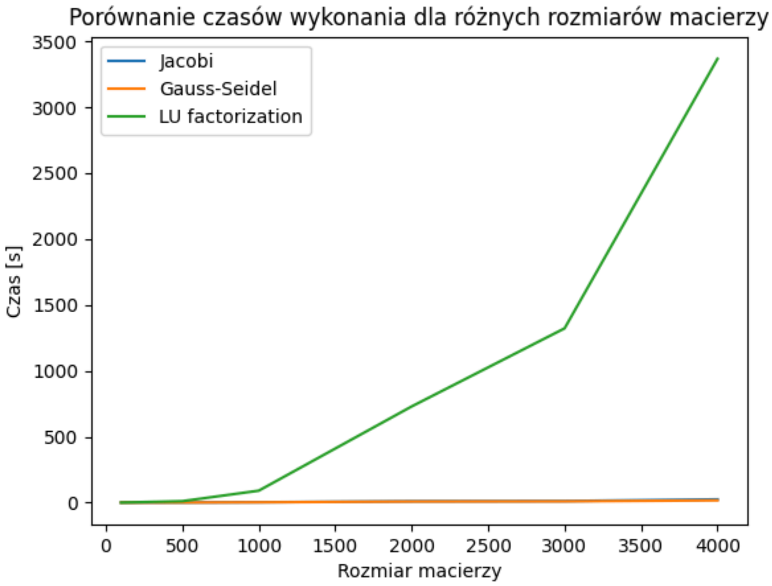
Z powyższych wykresów wynika, że w obu przypadkach norma wektora residuum dąży do nieskończoności, zatem zarówno metoda Gaussa-Seidla oraz Jacobiego nie są metodami uniwersalnymi i się nie zbiegają. W tej sytuacji należałoby ograniczyć możliwą ilość iteracji (np. 100), natomiast na potrzeby zadania projektowego, zdecydowałem się badać wartość normy dla dużej ilości iteracji. Wykres po prawej stronie jest przybliżeniem wykresu po lewej stronie - można na nim zauważyć, że norma wektora residuum zaczyna w pewnym momencie rosnąć. Warto również zauważyć, że w przypadku metody Gaussa-Seidla, norma rośnie w szybszym tempie.

Te samo równanie rozwiązałem metodą faktoryzacji LU:

Metoda	Czas [s]	Norma wektora residuum
Faktoryzacja LU	33.97546	2.88×10^{-15}

tym samym rozwiązując równanie, kosztem dużo dłuższego czasu w porównaniu do metod iteracyjnych (metoda faktoryzacji LU jest metoda uniwersalną).

Następnie cofam modyfikację macierzy A (ponownie $a1 = 12$) w celu sprawdzenia czasu wyznaczenia rozwiązań dla trzech badanych metod w zależności od wymiarów macierzy (N = {100, 500, 1000, 2000, 3000, 4000}).



zał. 4. - porównanie czasów wykonania dla różnych rozmiarów macierzy

Na powyższym wykresie widać, że uniwersalność metody faktoryzacji LU i jej dokładność są cechami, za które płaci się czasem wykonania. Poniżej zamieszczam dokładniejsze dane dotyczące przeprowadzonych obliczeń:

a) rozmiar macierzy $A = 100 \times 100$

Metoda	**Czas [s]**	**Ilość iteracji**	**Norma wektora residuum**
Jacobi	0.01499	16	4.32×10^{-10}
Gauss-Seidel	0.01099	12	5.28×10^{-10}
Faktoryzacja LU	0.04000	-	8.97×10^{-16}

b) rozmiar macierzy $A = 500 \times 500$

Metoda	**Czas [s]**	**Ilość iteracji**	**Norma wektora residuum**
Jacobi	0.33636	15	5.92×10^{-10}
Gauss-Seidel	0.25725	11	9.68×10^{-10}
Faktoryzacja LU	5.19888	-	2.14×10^{-15}

c) rozmiar macierzy $A = 1000 \times 1000$

Metoda	Czas [s]	Ilość iteracji	Norma wektora residuum
Jacobi	1.42981	16	4.17×10^{-10}
Gauss-Seidel	1.12499	12	5.16×10^{-10}
Faktoryzacja LU	44.37876	-	3.03×10^{-15}

d) rozmiar macierzy $A = 2000 \times 2000$

Metoda	Czas [s]	Ilość iteracji	Norma wektora residuum
Jacobi	5.41155	15	5.37×10^{-10}
Gauss-Seidel	4.14664	11	4.19×10^{-10}
Faktoryzacja LU	356.78222	-	4.17×10^{-15}

e) rozmiar macierzy $A = 3000 \times 3000$

Metoda	Czas [s]	Ilość iteracji	Norma wektora residuum
Jacobi	12.87189	16	4.16×10^{-10}
Gauss-Seidel	10.08531	12	4.64×10^{-10}
Faktoryzacja LU	1214.68160	-	5.04×10^{-15}

f) rozmiar macierzy $A = 4000 \times 4000$

Metoda	Czas [s]	Ilość iteracji	Norma wektora residuum
Jacobi	22.95518	16	3.3×10^{-10}
Gauss-Seidel	17.86282	12	4.12×10^{-10}
Faktoryzacja LU	~3500 s.	-	$\sim 5 \times 10^{-15}$

3. Podsumowanie

Metody iteracyjne, chociaż są dużo szybsze w wykonaniu, niż metoda faktoryzacji LU, nie zawsze mogą zostać zastosowane, a wskazane przez nie rozwiązania są obarczone odpowiednim błędem. W sytuacji, gdy metody iteracyjne można zastosować, odpowiednio mały błąd przybliżenia rozwiązania równania, jest często akceptowalny. Faktoryzacja LU, chociaż jest metodą uniwersalną, która oblicza dokładne rozwiązania, jest metodą niepraktyczną ze względu na długi czas potrzebny do znalezienia rozwiązania.

Patryk Sowiński-Toczek
191711