Metody numeryczne - interpolacja (zadanie projektowe)

1. Wstęp

W ramach zadania należało zaimplementować dwie metody aproksymacji interpolacyjnej - metody Lagrange'a oraz metody funkcji sklejanych - i przeanalizować ich działanie na podstawie profili wysokościowych (topograficznych) wybranych tras.

Interpolacja jest działaniem wyznaczającym przybliżenia wartości funkcji w pewnym zakresie na podstawie danych częściowych zwanych węzłami interpolacji.

Metoda wykorzystująca **wielomian interpolacyjny Lagrange'a** polega na znalezieniu wielomianu stopnia n, dla którego wartości w $n + 1$ węzłach interpolacyjnych będą zgodne z rzeczywistymi wartościami przybliżanej funkcji. Funkcja interpolująca jest postaci:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n+1} y_i \phi_i(x), \quad \phi_i(x) = \prod_{j=1,\, j \neq i}^{n+1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Druga metoda wykorzystuje **funkcje sklejane trzeciego stopnia**, czyli interpolację pomiędzy poszczególnymi węzłami wielomianami stopnia k (wielomianami stopnia trzeciego w tym przypadku). Dla każdej z funkcji sklejanych należy znaleźć współczynniki wielomianu a, b, c, d poprzez rozwiązanie układu równań z czterema niewiadomymi zgodnie z poniższymi wzorami ($n + 1$ węzłów):

$$S_j(x_j) = f(x_j),\ j = 0,\ 1 \ldots,.\ n - 1$$

$$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1}),\ j = 0,\ 1 \ldots,\ n - 1$$

Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S'_{j-1}(x_j) = S'_{j-1}(x_j),\ j = 1,\ \ldots,\ n - 1$

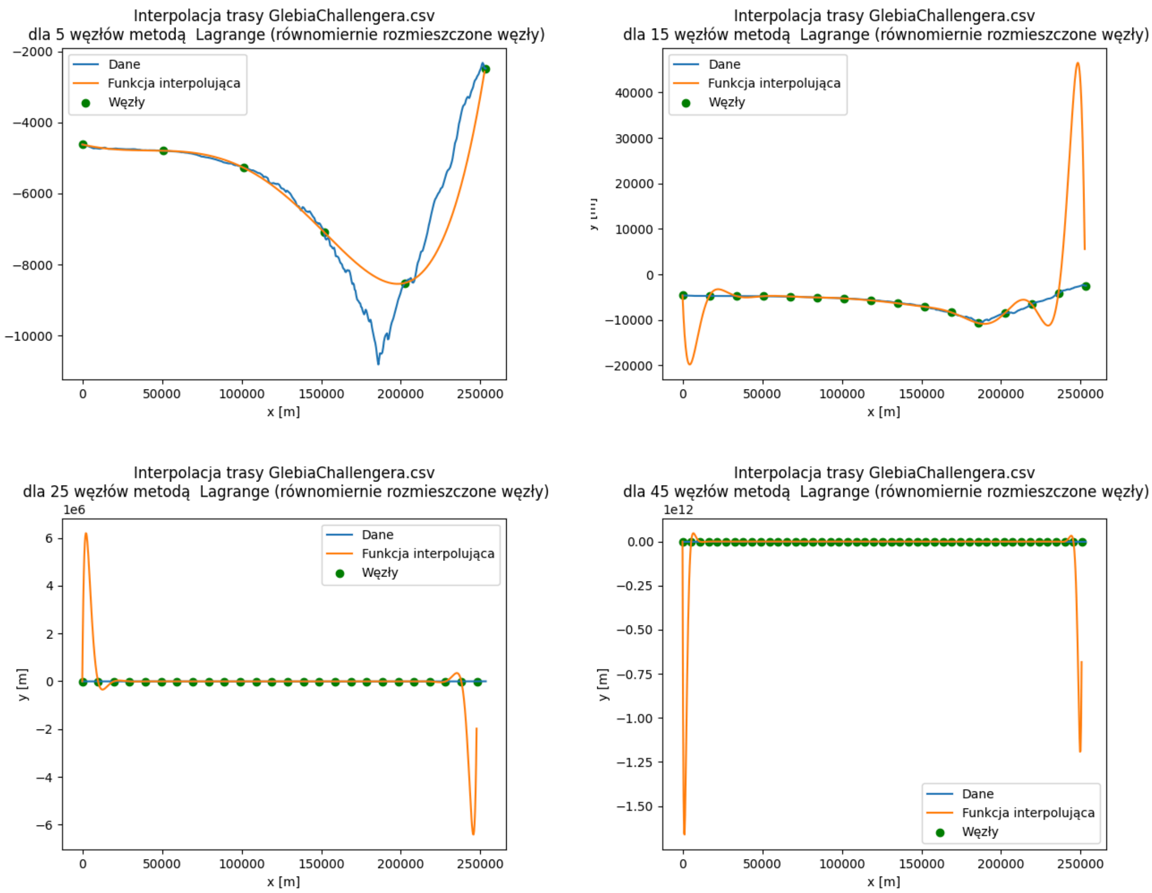
Dla węzłów wewnętrznych x_j: $S''_{j-1}(x_j) = S''_{j-1}(x_j),\ j = 1,\ \ldots,\ n - 1$

Na krawędziach: $S''_0 = 0;\ S''_{n-1} = 0;$

Wybrane przeze mnie trasy do przeprowadzenia analizy to jedna z tras spacerowych w okolicach Gdańska oraz najgłębszy znany ludzkości punkt na Ziemi - Głębia Challengera. Trasy te wybrałem ze względu na ich skrajnie różną charakterystykę. W ramach zadania, interpolacje zostaną przeprowadzone na różnych ilościach równo rozmieszczonych węzłów - $5,\ 15,\ 25$ oraz 45.

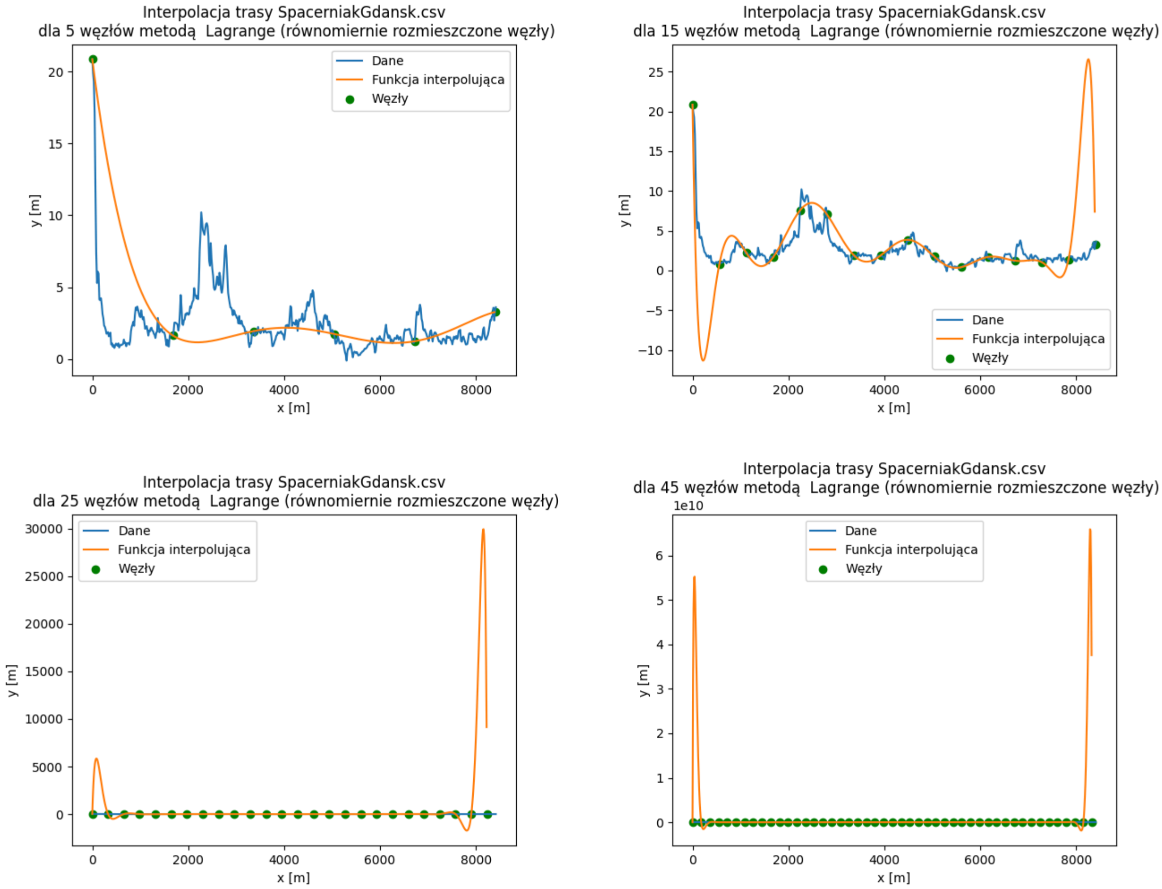
2. Prezentacja oraz analiza

W pierwszej kolejności analizie zostanie poddany profil wysokościowy Głębi Challengera interpolowany metodą Lagrange'a.



zał. 1-4 - interpolacja profilu wysokościowego Głębi Challengera metodą Lagrange'a dla różnej ilości równomiernie rozmieszczonych węzłów

Dla pięciu węzłów, interpolacja okazuje się odzwierciedlać w sposób niedokładny profil topologiczny Głębi Challengera, zwłaszcza w okolicach minimum lokalnego. Spoglądając na pierwszy wykres, można by przyjąć hipotezę, że dokładność odwzorowania dałoby się poprawić poprzez zwiększenie liczby węzłów interpolacji, natomiast na kolejnym wykresie (dla liczby węzłów = 15) widzimy duże oscylacje na krańcach przedziału – jest to Efekt Rungego. W praktyce taki wykres jest mało użyteczny i oznacza, że interpolacja została wykonana na zbyt dużej ilości równomiernie rozmieszczonych węzłów, natomiast, pozostając przy swoich wcześniejszych założeniach, w ramach tego sprawozdania nie będę szukał liczby węzłów, dla których odwzorowanie jest najdokładniejsze. Powiększając bardziej ilość węzłów wykorzystanych do interpolacji, oscylacje są jeszcze większe.

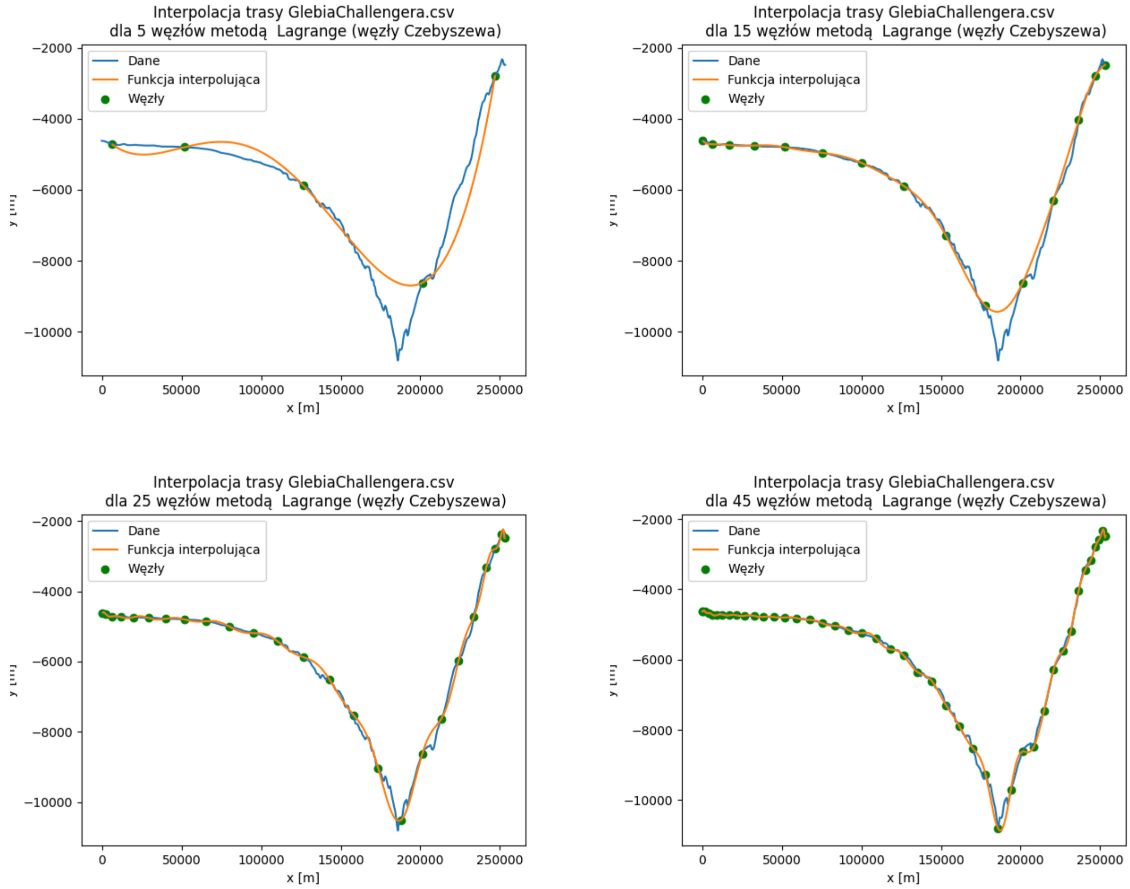


zał. 5-8 - interpolacja profilu wysokościowego trasy spacerowej w Gdańsku metodą Lagrange'a dla różnej ilości równomiernie rozmieszczonych węzłów

Następnie, w taki sam sposób, analizie został poddany profil topologiczny jednej z tras spacerowych w okolicach Gdańska. W tym przypadku funkcja ma dużo więcej ekstremów lokalnych, przez co jest trudniejsza w interpolacji. W tym przypadku dla liczby węzłów = 5, metoda Lagrange'a dużo gorzej sobie radzi, w przeciwieństwie do przypadku z wykorzystaniem piętnastu węzłów, gdzie pomimo ponownie występującego Efektu Rungego na krańcach przedziału, profil topologiczny został średnio-dobrze odwzorowany. Dla liczby węzłów = 25 oraz 45, oscylacje są na tyle duże, że przebiegu trasy nie da się zaobserwować.

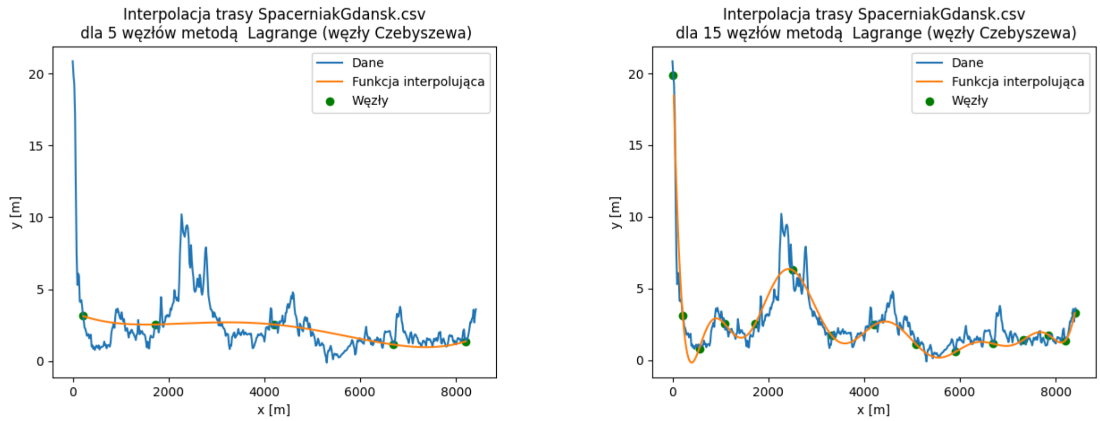
W ramach analizy dodatkowej, zdecydowałem się przeprowadzić interpolację metodą Lagrange'a dla tych samych ilości węzłów interpolacyjnych oraz tych samych tras, natomiast tym razem z nierównomiernie rozmieszczonymi węzłami (węzłami Czebyszewa). Węzły Czebyszewa na krańcach przedziału są rozmieszczone gęściej i są stosowane celem minimalizacji Efektu Rungego. Wyznaczane są zgodnie ze wzorem (n jest liczbą węzłów) :

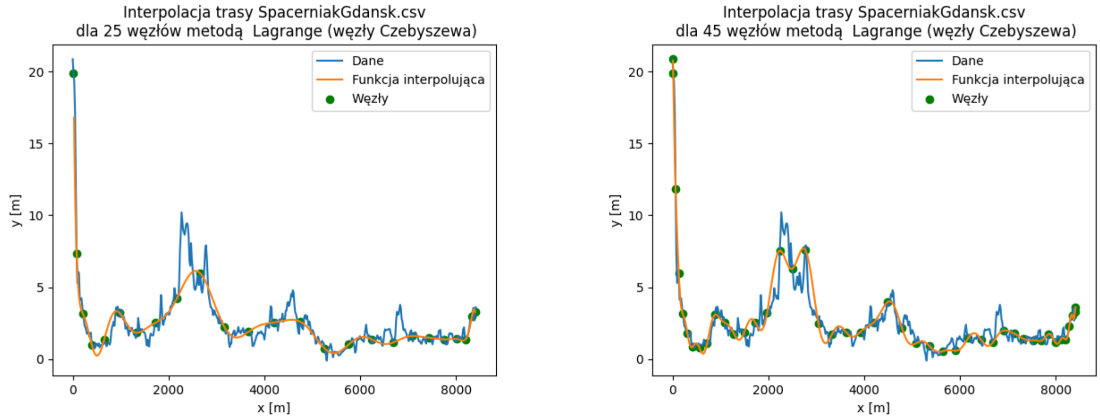
$$x_k = cos(\frac{2k-1}{2n}\pi),\ k = 1,\ 2 ...,\ n$$



zał. 9-12 - interpolacja profilu wysokościowego Głębi Challengera metodą Lagrange'a dla różnej ilości nierównomiernie rozmieszczonych węzłów

Wykorzystując węzły Czebyszewa, Efekt Rungego jest niezauważalny, a dla liczby węzłów = 25 i 45, interpolację można określić mianem dokładnej.Poziom dokładności rośnie wraz ze zwiększaniem ilości węzłów interpolacyjnych.

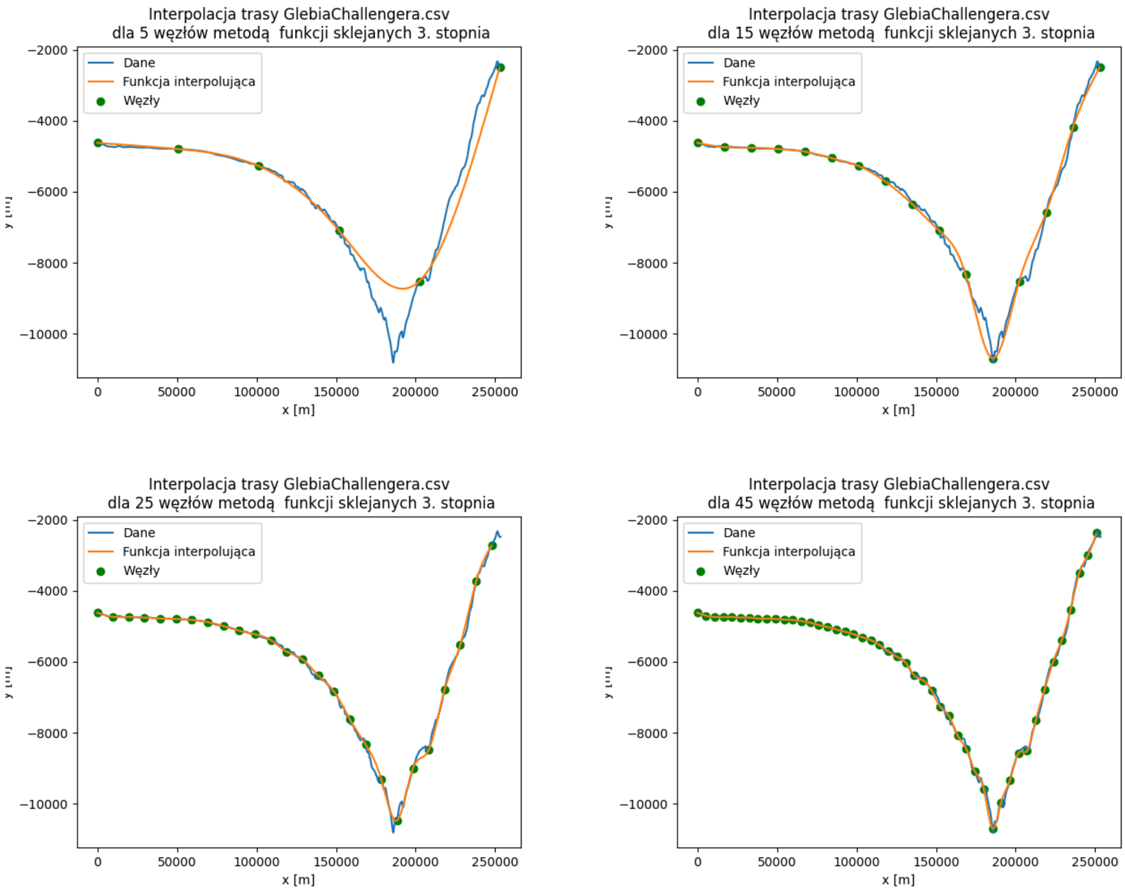




zał. 13-16 - interpolacja profilu wysokościowego trasy spacerowej w Gdańsku metodą Lagrange'a dla różnej ilości nierównomiernie rozmieszczonych węzłów

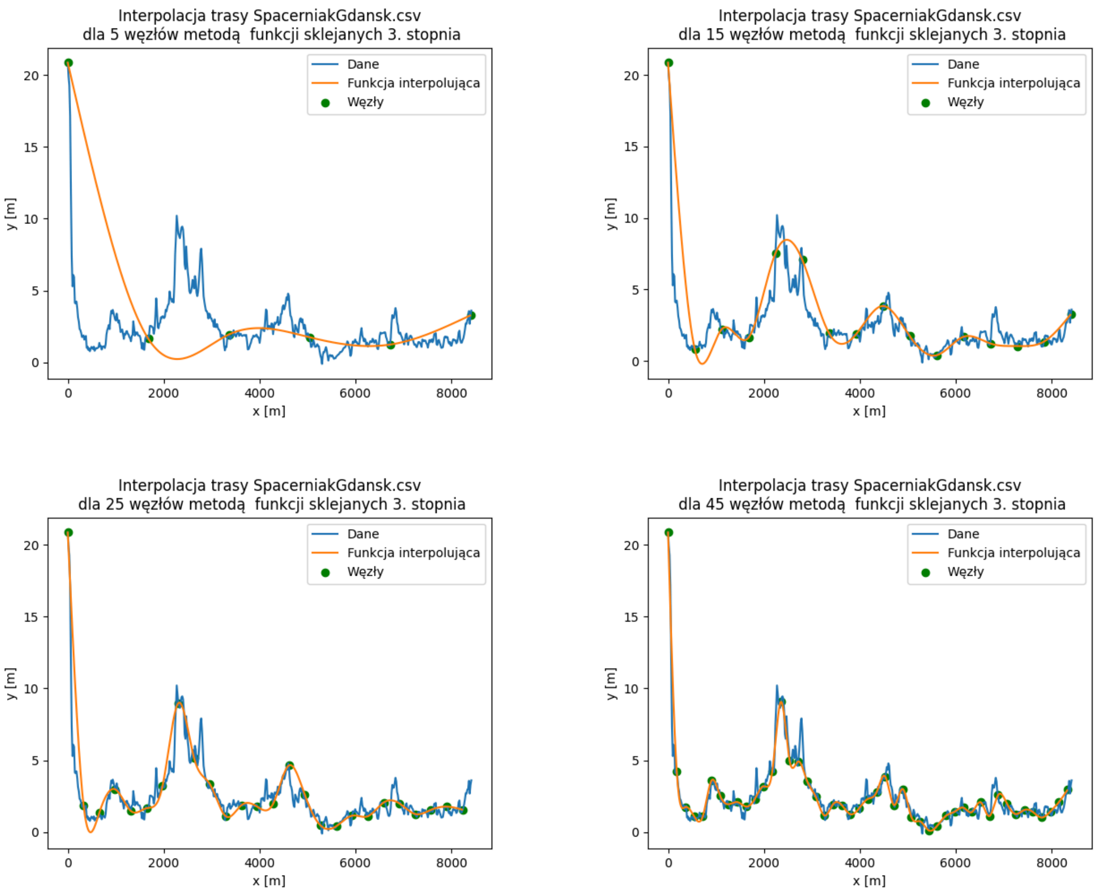
W przypadku trasy spacerowej, ponownie Efekt Rungego jest niezauważalny, natomiast jakość interpolacji się pogorszyła dla liczby węzłów = 5 i 15 (poza krańcami przedziału). W pozostałych przypadkach, rezultat interpolacji się poprawił.

Następnie przeprowadziłem analizy dla interpolacji z wykorzystaniem funkcji sklejanych.



zał. 17-20 - interpolacja profilu wysokościowego Głębi Challengera metodą funkcji sklejanych trzeciego stopnia dla różnej ilości równomiernie rozmieszczonych węzłów

Stosując metodę funkcji sklejanych trzeciego stopnia, nie tylko nie obserwujemy Efektu Rungego (pomimo zastosowania równomiernie rozmieszczonych węzłów), ale również jakość interpolacji w każdym z przypadku się polepszyła.



zał. 21-24 - interpolacja profilu wysokościowego trasy spacerowej w Gdańsku metodą funkcji sklejanych trzeciego stopnia dla różnej ilości równomiernie rozmieszczonych węzłów

Obserwacje potwierdzają się analizując tym razem trasę spacerową w Gdańsku. Ponownie nie da się zaobserwować Efektu Rungego, a dokładność interpolacji polepszyła się.

3. Podsumowanie

Metoda Lagrange'a, chociaż nie wymaga rozwiązywania układu równań liniowych, daje dużo gorsze rezultaty w porównaniu do metody interpolacji z wykorzystaniem funkcji sklejanych 3 stopnia. Największą wadą metody Lagrange'a jest jej podatność na Efekt Rungego oraz konieczność odpowiedniego dobrania węzłów interpolacyjnych.

Patryk Sowiński-Toczek, s191711