Relazioni di Calcolo Numerico

Lorenzo Pattarini

4 dicembre 2015

Indice

1 Esercitazione 1

1.1 Esercizio 1

```
a = 1.12;
b = 2.34;
c = 0.72;
d = 0.81;
e = 3;
f = 19.83;
g = 20;

x = 1+a/b+c/(f^2);
s = (b-a)/(d-c);
z = (1-(1/(e^5)))^(-1);
r = 1/(1/a+1/c+1/c+1/d);
y = a*b*(1/c)*(f^2/2);
t = 7*(g^(1/3))+4*g^(0.58);

format short
x s z r y t

format long
x s z r y t
```

1.2 Esercizio 2

```
% Ricerca degli errori sintattici

a = 2y+(((3+1)9);

  % Manca una parentesi e la variabile y non risulta inizializzata

b == 2*sin[3];

  %{
     L'operatore "==" \'{e} un operatore di testing non di
     assegnamento, ma non essendo la variabile b inizializzata
     non ha senso testarne l'uguaglianza.
     Il secondo errore \'{e} l'ultilizzo delle parentesi quadre in quanto,
     per riferirsi all'argomento di una funzione vanno usate le
     parentesi tonde.
  %}

c = e^0.5;

  %{
     Il modo corretto per ottenere la radice del numero di nepero
     \'{e} c = exp(0.5).
  %}

d = log(4-8/4*2)

  %{
     In questo modo non essendo certi della precedenza degli operatori
     rischiamo di tentare di calcolare log(0), occorre aggiungere le
     parentesi e riscrivere la formula come
     d = log(4-8/(4*2))
  %}
```

1.3 Esercizio 3

```
r1 = 5
r1 =  5
V1 = 4/3*pi*r1^2
V1 =  104.72
V2 =V1+(30/100)*V1
V2 =  136.14
r2 = ((V2/pi)*(3/4))^1/3
r2 =  10.833

ex = inline(" 1+x ");
ex2 = inline(" 1+x+(x^2)/2 ");
% errore assoluto
ea1 = abs(e^(0.1)-ex(0.1))
ea1 =  0.0051709
ea2 = abs(e^(0.1)-ex2(0.1))
ea2 =    1.7092e-04
% errore relativo
er1 = (abs(e^(0.1)-ex(0.1)))/e^(0.1)
er1 =  0.0046788
er2 = (abs(e^(0.1)-ex2(0.1)))/e^(0.1)
er2 =    1.5465e-04


% Radici di un polinomio
% uso il vettore dei coefficienti
p1 = [ 2 -4 -1 ];
p2 = [ 1 0 2 0 -3 ];
p3 = [ 1 0 0 2197];
s1 = roots(p1)
s1 =

   2.22474
  -0.22474

s2 = roots(p2)
s2 =

  -0.00000 + 1.73205i
  -0.00000 - 1.73205i
  -1.00000 + 0.00000i
   1.00000 + 0.00000i

s3 = roots(p3)
s3 =

  -13.0000 +  0.0000i
    6.5000 + 11.2583i
    6.5000 - 11.2583i
```

1.4 Esercizio 4

```
x = 1:10;
y = [10:-1:1]';

```

```
xy = x*y;

xs = linspace(0,1,11);
z = sin(xs);
```

1.5 Esercizio 5

```
x = 25:3:91;
y = [100:-1:10]';
z = linspace(-15,-10,33);
```

1.6 Esercizio 6

```
z = 1+i;

d_m_zn = sqrt(2)^60*(cos(60*(pi/4))+i*sin(60*(pi/4)));

mat_zn = z^60;
```

2 Esercitazione 2

2.1 Esercizio 1

```
%%% Parte a %%%%

x = [ -3, 5, 8, 0, 1, 5, -2, 4 ];
x(6) = 100;
x(1:3) = [ 5, 6, 7];
x(4) = [];
x(4:7) = [];
x = [1,2,3,x];
x = [x, 10, 11, 12];

%%% Parte b %%%

A = eye(4);
A(1,1) = A(3,4);
A = [ ones(4,1), A];
A = [ A , ones(4,1)];
A = [ 4*ones(1,6) ; A ]
A = [ A ; 4*ones(1,6) ]
A(3,:) = [];
A(:,3) = [];
```

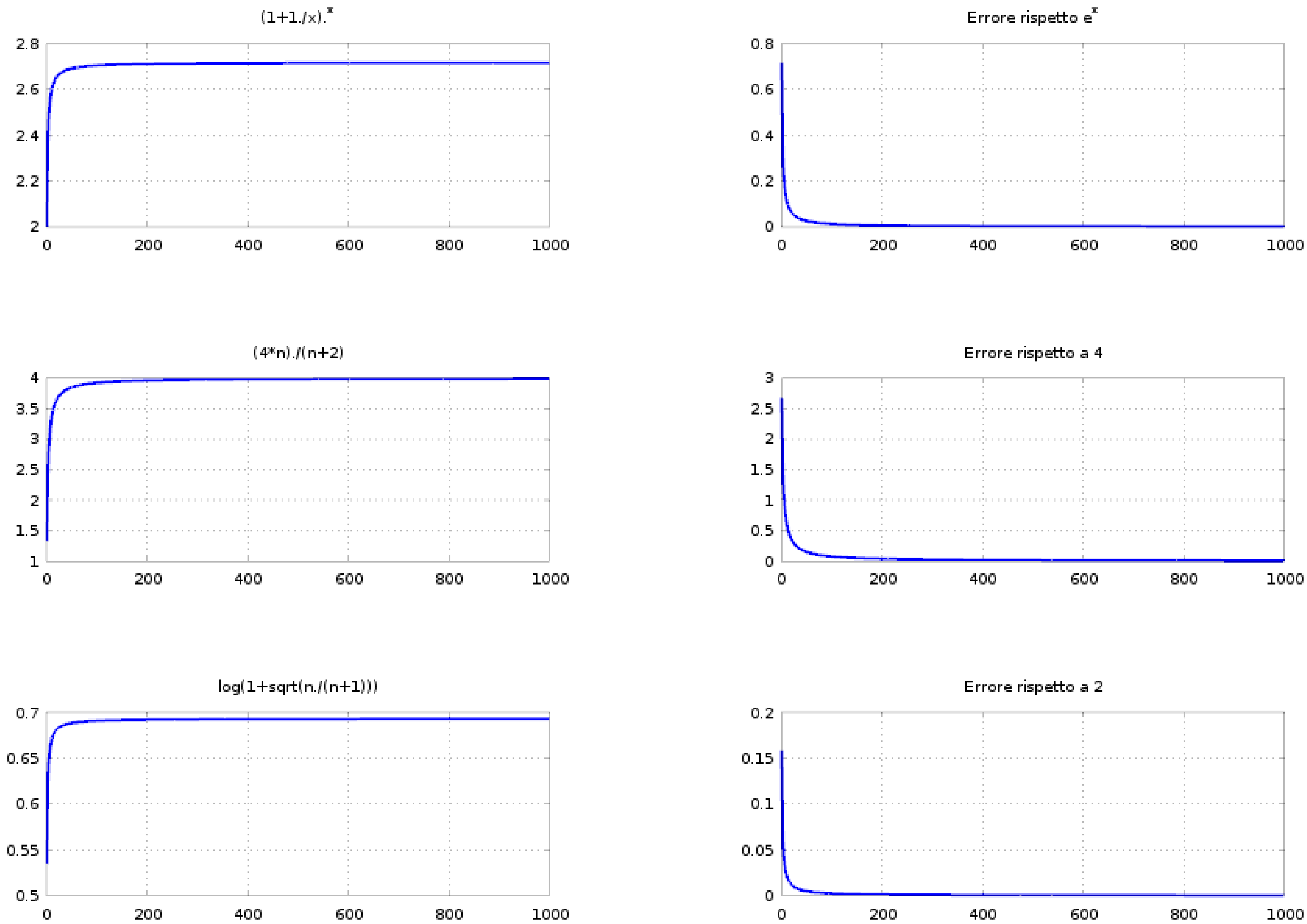
2.2 Esercizio 2

```
x = [1 : -0.1 : 0];

% Estrazione degli elementi di indice 1 4 3 del vettore x
x([1 4 3]);

% Sostituzione degli elementi di indice 1 3 5 7 con 0.5
% dell'elemento di indice 10 con il valore -0.3
x([1:2:7 10] = [ 0.5*ones(1,2) -0.3 ];

% \'{e} l'equivalente della scrittura y = =fliplr(x):
y = x(end:-1:1);
```

2.3 Esercizio 3

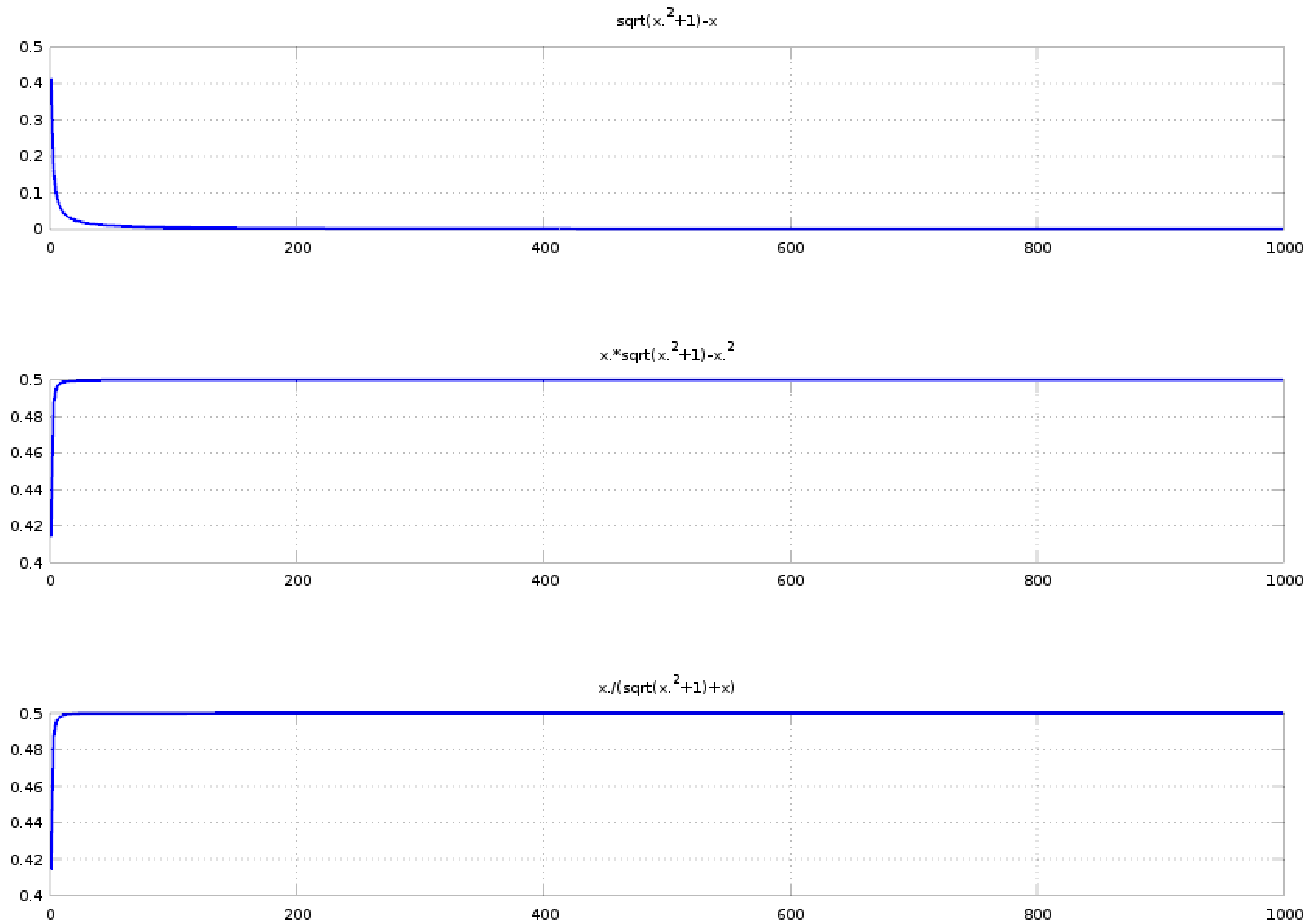
```
f1 = inline("(1+1./x).^x");
f2 = inline("(4*n)./(n+2)");
f3 = inline("log(1+sqrt(n./(n+1)))");

x = 1:2:1000;

y1 = f1(x);
y2 = f2(x);
y3 = f3(x);

n = size(x);

err1 = abs(ones(1,n)*exp(1) - y1);
```

```
err2 = abs(ones(1,n)*4 - y2);
err3 = abs(ones(1,n)*log(2) -y3);

subplot(3,2,1)
  plot(x,y1,'linewidth',2);
subplot(3,2,2)
  plot(x,err1,'linewidth',2);
subplot(3,2,3)
  plot(x,y2,'linewidth',2);
subplot(3,2,4)
  plot(x,err2,'linewidth',2);
subplot(3,2,5)
  plot(x,y3,'linewidth',2);
subplot(3,2,6)
  plot(x,err3,'linewidth',2);
```



2.4 Esercizio 4

```
f1 = inline("sqrt(x.^2+1)-x");
f2 = inline("x.*sqrt(x.^2+1)-x.^2");
f3 = inline("x./(sqrt(x.^2+1)+x)");

x = 1:2:1000;

y1 = f1(x);
y2 = f2(x);
y3 = f3(x);


subplot(3,1,1)
  plot(x,y1,'linewidth',2);
  title("sqrt(x.^2+1)-x");
  grid on
subplot(3,1,2)
  plot(x,y2,'linewidth',2);
  title("x.*sqrt(x.^2+1)-x.^2")
  grid on
subplot(3,1,3)
  plot(x,y3,'linewidth',2);
  title("x./(sqrt(x.^2+1)+x)")
  grid on
```



2.5 Esercizio 5

```
d0 = -2*ones(1,9);
d1 = ones(1,8);

A = diag(d0) + diag(d1,1) + diag(d1,-1);
A([3,6],:) = A([6,3],:);
A(:,[1,4]) = A(:,[4,1]);
```

2.6 Esercizio 6

```
x = [1:12];
A = [x([1:4]);x([5:8]);x([9:12])];
size(A)
B = A.*A
B = A*A
B = A'*A
A(1:2,4)
A(:,3)
A(1:2,:)
A(:,[2 4])
A([2 3 3])
A(3,2)==A(1,1)
A(1:2,4) = zeros(2,1);
A(2,:) = A(2,:)-A(2,1)/A(1,1)*A(1,:);
```

2.7 Esercizio 7

```
a = ones(1,8)
A = [];
for b= 1:8
 A(b,:) = b*a;
endfor

S = triu(A)
L = tril(A)

for i=1:size(S)
   S(i,i) = 0;
   L(i,i) = 1;
endfor

d0 = diag(A);
d1 = diag(A,1);
d_1 = diag(A,-1);

B1 = diag(d0) + diag(d1,1) + diag(d_1,-1);
B2 = diag(d0) + diag(d1,1);
B3 = diag(d0) + diag(d_1,-1);
```

2.8 Esercizio 8
Sviluppo di una funzione matlab per il calcolo delle radici di un'equazione di quarto grado

```
function X = lp_root(alpha)

  b = (1+10^(2*alpha))/10^alpha;
  t1 = (b + sqrt(b^2-4))/2;
  t2 = (b - sqrt(b^2-4))/2;

  x1 = -sqrt(t1);
  x2 = -sqrt(t2);
  x3 =  sqrt(t1);
  x4 =  sqrt(t2);

  X = [ x1, x2, x3, x4 ];

endfunction


A = [];

for i=1:10
  A = [ A ; lp_root(i) ];
endfor


B = [];

for i=1:10
  B = [ B ; roots([ 1, 0, -((1+10^(2*i))/10^i), 0, 1])' ];
endfor


for i=1:10
  A(i,:) = sort(A(i,:));
  B(i,:) = sort(B(i,:));
endfor

E1 = abs(A-B)./A;
E2 = abs(A-B)./B;
```

2.9 Esercizio 9

3 Esercitazione 3

3.1 Esercizio 1

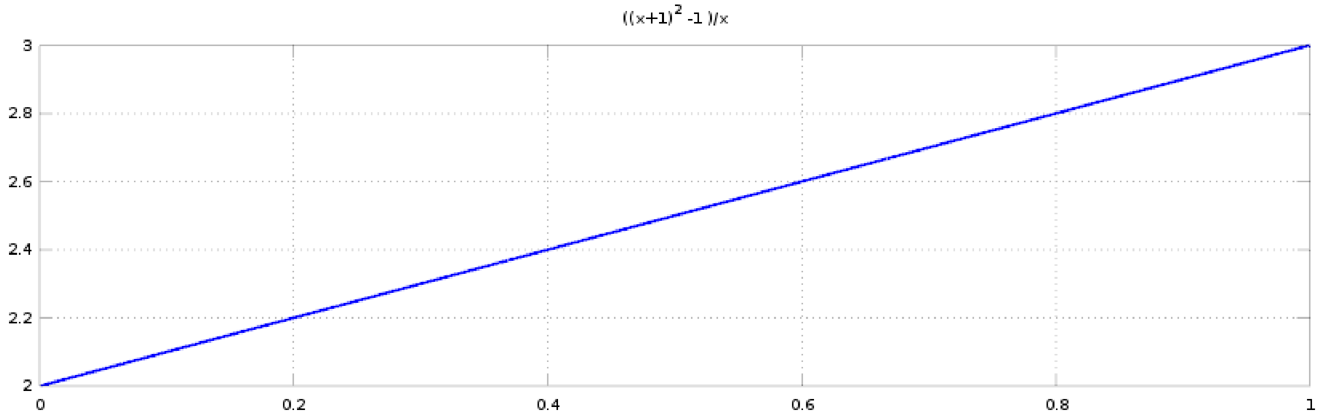
```
x = -5:1:9;
M = max(x)
M =   9
m = min(x)
m = -5
abM = max(abs(x))
abM =   9
abm = min(abs(x))
abm = 0
S = sum(x)
S =   30
abS = sum(abs(x))
abS =   60
```

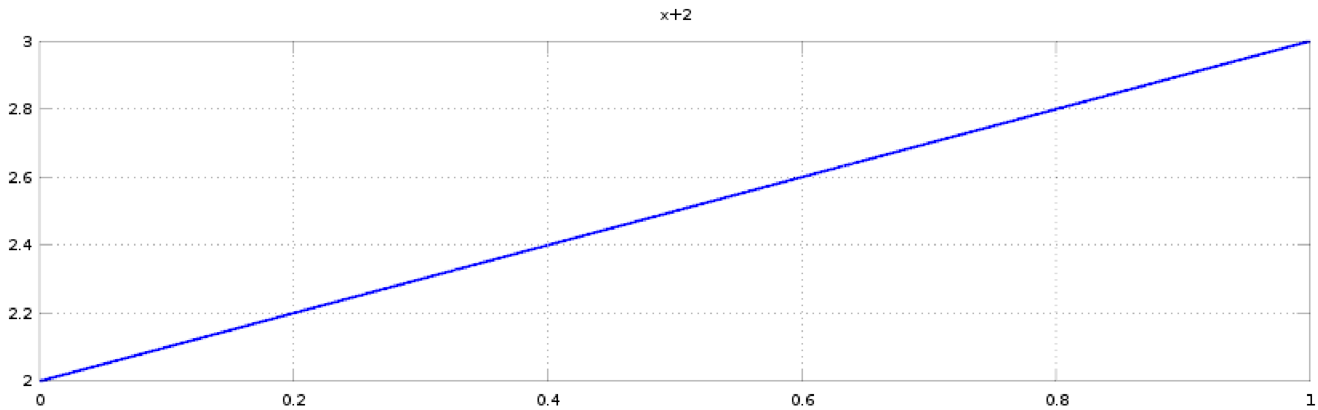
3.2 Esercizio 2

Calcolo di $\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2-1}{x}$ **e** $\lim_{x\to 0} x+2$

```
  f1 = inline (" ((x+1).^2 -1)./x ");
f2 = inline (" x+2 ");

x = 1:-0.001:0;

y1 = f1(x);
y2 = f2(x);

subplot(2,1,1)
  plot(x,y1,'linewidth',2);
  title(" ((x+1)^2 -1 )/x ");
  grid on
subplot(2,1,2)
  plot(x,y2,'linewidth',2);
  title(" x+2 ")
  grid on
```

```
f1 = inline (" ((x+1).^2 -1)./x ");
f2 = inline (" x+2 ");

x = 1:-0.001:0;

y1 = f1(x);
y2 = f2(x);

subplot(2,1,1)
  plot(x,y1,'linewidth',2);
  title(" ((x+1)^2 -1 )/x ");
subplot(2,1,2)
  plot(x,y2,'linewidth',2);
  title(" x+2 ")
```

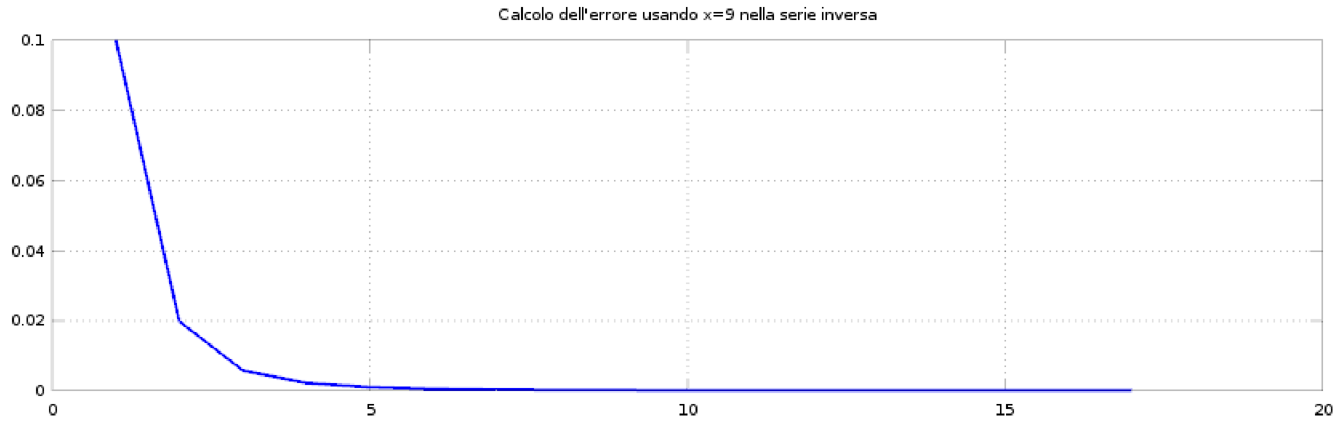

((x+1)^2 -1)/x
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1


x+2
3
2.8
2.6
2.4
2.2
2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

3.3 Esercizio 3
Sviluppo di Taylor per il calcolo di e^x

```
% e^x = 1 + x^2/2! + x^3/3! + ....
% Calcolare e^-9 stabilizzando la 6 cifra dopo la virgola


x1 = [];
x2 = [];

err = 10^-6;

my_e1 = 1;
x = -9;
i = 1;
while ( abs(e^-9 - my_e1) > err )
 my_e1 = my_e1 + x^i/factorial(i);
 i = i+1;
 x1 = [ x1 , my_e1 ];
endwhile

e2 = 1;
my_e2 = 1;
x = 9;
i = 1;
while ( abs(e^-9 - my_e2) > err )
  e2 = e2 + x^i/factorial(i);
  my_e2 = 1/e2;
  i = i+1;
  x2 = [ x2, my_e2 ];
endwhile





% Calcolo degli errori relativi
%  Calcolati sulla somma dei primi n termini


err_rel1 = [];
for i=1:size(x1)(2)
  err_rel1 = [ err_rel1 , abs(x1(i) - exp(-9))/exp(-9) ];
endfor

err_rel2 = [];
for i=1:size(x2)(2)
  err_rel2 = [ err_rel2 , abs(x2(i) - exp(-9))/exp(-9) ];
endfor


a1 = 1:size(x1)(2);
a2 = 1:size(x2)(2);

subplot(2,1,1)
plot(a1,x1,'linewidth',2);

subplot(2,1,2)
plot(a2,x2,'linewidth',2);
```


Calcolo dell'errore usando x=-9 nella serie
600
400
200
0
-200
-400
-600
0
5
10
15
20
25
30
35


Calcolo dell'errore usando x=9 nella serie inversa
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
5
10
15
20

3.4 Esercizio 4
Approssimazioni della derivata di e^x nel punto $x = 1$

```
h = [];

for a=1:1:20
  h = [ h, 10^(-a) ];
endfor

x = 1;
app1 = (exp(x+h)-exp(x))./h;
app2 = (exp(x+h)-exp(x-h))./(2*h);

analitic1 = abs((app1 - exp(1)));
analitic2 = abs((app2 - exp(1)));

tab = [ h', analitic1', analitic2' ]

#{
    1.0000e-01   1.4056e-01   4.5327e-03
    1.0000e-02   1.3637e-02   4.5305e-05
    1.0000e-03   1.3596e-03   4.5305e-07
    1.0000e-04   1.3592e-04   4.5306e-09
    1.0000e-05   1.3591e-05   5.8587e-11
    1.0000e-06   1.3590e-06   1.6346e-10
    1.0000e-07   1.3995e-07   5.8587e-11
    1.0000e-08   6.6028e-09   6.6028e-09
    1.0000e-09   2.1544e-07   6.6028e-09
    1.0000e-10   1.5477e-06   6.7274e-07
    1.0000e-11   3.2634e-05   1.0429e-05
    1.0000e-12   4.3231e-04   2.1027e-04
    1.0000e-13   4.5586e-04   4.5586e-04
    1.0000e-14   9.3376e-03   9.3376e-03
    1.0000e-15   3.9034e-01   1.6830e-01
    1.0000e-16   2.7183e+00   2.7183e+00
    1.0000e-17   2.7183e+00   2.7183e+00
    1.0000e-18   2.7183e+00   2.7183e+00
    1.0000e-19   2.7183e+00   2.7183e+00
    1.0000e-20   2.7183e+00   2.7183e+00
#}
```

3.5 Esercizio 5

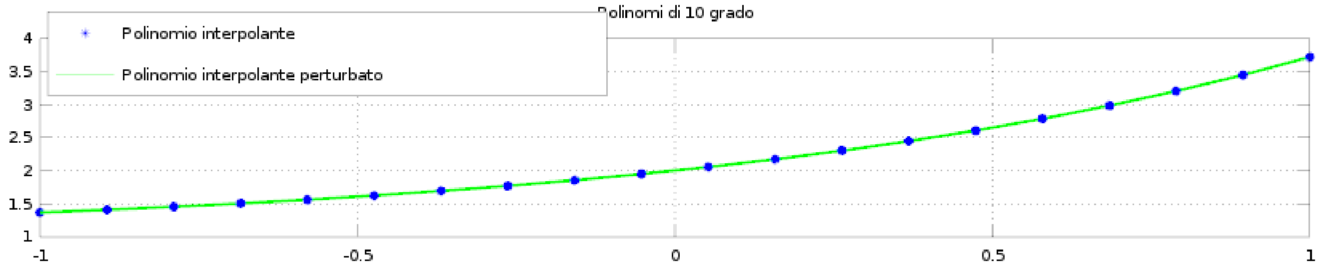
```
H = hilb(10);
x = ones(10,1);

b = H*x;

x1 = H\b;

z = [ 0.001, zeros(1,size(b)-1)]'

c = b+z  ;

y = H\c;

err = norm(x-y)/norm(x)

err =   4852.2
```

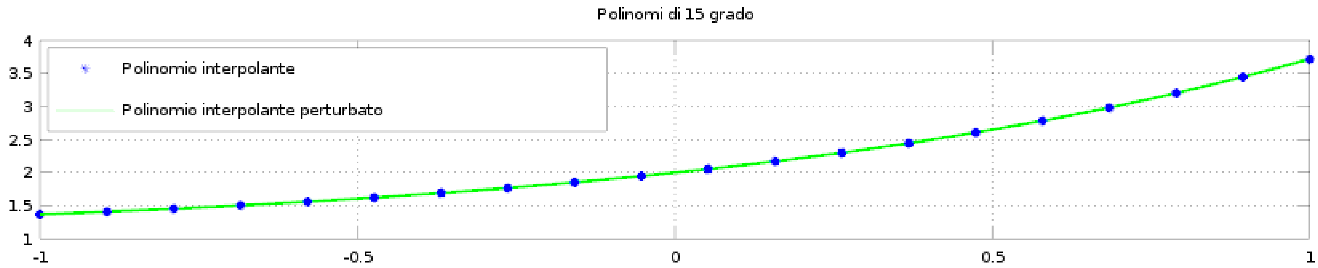
4 Esercitazione 4

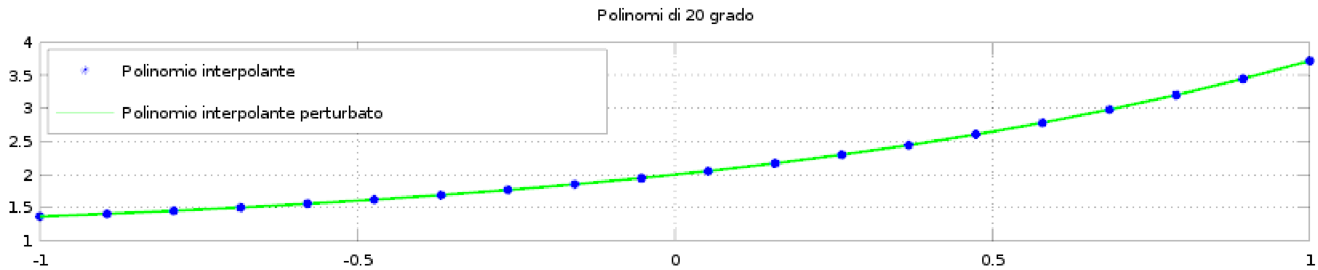
4.1 Esercizio 1 Interpolazione con Vandermonde e perturbazione dei dati

```
x10 = linspace(-1,1,10);
x15 = linspace(-1,1,15);
x20 = linspace(-1,1,20);

V10 = vander(x10);
V15 = vander(x15);
V20 = vander(x20);

f = inline(" exp(x)+1 ");

% I bi sono i coefficienti della funzione calcolati nei nodi
%  mi servono ad imporre le condizioni di interpolazione.
b10 = f(x10)';
b15 = f(x15)';
b20 = f(x20)';

% I sistemi sarebbero genericamente Vx = b, devo trovare x
%  che per comodit\'{a} chiamer\'{o} a, il vettore dei coefficienti.


% Coefficienti del polinomio
a10 = V10\b10;
a15 = V15\b15;
a20 = V20\b20;


eps = [];
for i=1:20
 eps = [ eps, (-1)^(i)*10^(-5) ];
endfor

b10_1 = b10 + eps([1:10])';
b15_1 = b15 + eps([1:15])';
b20_1 = b20 + eps([1:20])';


% Coefficienti polinomio perturbato
a10_1 = V10\b10_1;
a15_1 = V15\b15_1;
a20_1 = V20\b20_1;




% Ricordiamo che Un polinomio in Matlab ‘e dato da un vettore che contiene
%  i sui coefficienti ordinati da an  fino ad a0.



a10 = fliplr(a10);
a15 = fliplr(a15);
a20 = fliplr(a20);
a10_1 = fliplr(a10_1);
a15_1 = fliplr(a15_1);
a20_1 = fliplr(a20_1);
```

```
% Uso x20 per valutare i polinomi
y10 = polyval(a10,x20);
y15 = polyval(a15,x20);
y20= polyval(a20,x20);
y10_1 = polyval(a10_1,x20);
y15_1 = polyval(a15_1,x20);
y20_1 = polyval(a20_1,x20);

,'linewidth',2,


subplot(3,1,1)
 plot(x20,y10,'linewidth',2,'*',x20,y10_1,'linewidth',2,'g');
 grid on
 legend("Polinomio interpolante","Polinomio interpolante perturbato");
 title("Polinomi di 10 grado");
subplot(3,1,2)
 plot(x20,y15,'linewidth',2,'*',x20,y15_1,'linewidth',2,'g');
 grid on
 legend("Polinomio interpolante","Polinomio interpolante perturbato");
 title("Polinomi di 15 grado");
subplot(3,1,3)
 plot(x20,y20,'linewidth',2,'*',x20,y20_1,'linewidth',2,'g');
 grid on
 legend("Polinomio interpolante","Polinomio interpolante perturbato");
 title("Polinomi di 20 grado");

maxa10 = max(abs(a10 - a10_1));
maxa15 = max(abs(a15 - a15_1));
maxa20 = max(abs(a20 - a20_1));

t = linspace(-1,1,101);

pt10   = polyval(a10,t);
pt10_1 = polyval(a10_1,t);
pt15   = polyval(a15,t);
pt15_1 = polyval(a15_1,t);
pt20   = polyval(a20,t);
pt20_1 = polyval(a20_1,t);


maxp10 = max(abs(pt10-pt10_1));
maxp15 = max(abs(pt15-pt15_1));
maxp20 = max(abs(pt20-pt20_1));
```


Polinomi di 10 grado
Polinomio interpolante
Polinomio interpolante perturbato
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1


Polinomi di 15 grado
Polinomio interpolante
Polinomio interpolante perturbato
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1


Polinomi di 20 grado
Polinomio interpolante
Polinomio interpolante perturbato
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
-1
-0.5
0
0.5
1

4.2 Esercizio 2

```
A = hilb(1000);
B = rand(1000);

x = ones(1000,1);
y = ones(1000,1);

% Ax = b;
% By = c;

b = A*x;
c = B*y;

x1 = A\x;
y1 = B\y;

%  Calcolare gli errori relativi tra b,c b1 e c1
%   rapportandoli al numero di condizionamento di A e B

Ka = cond(A);
Kb = cond(B);


err_relx = norm(x-x1)/norm(x);
err_rely = norm(y-y1)/norm(y);
```

5 Esercitazione 5

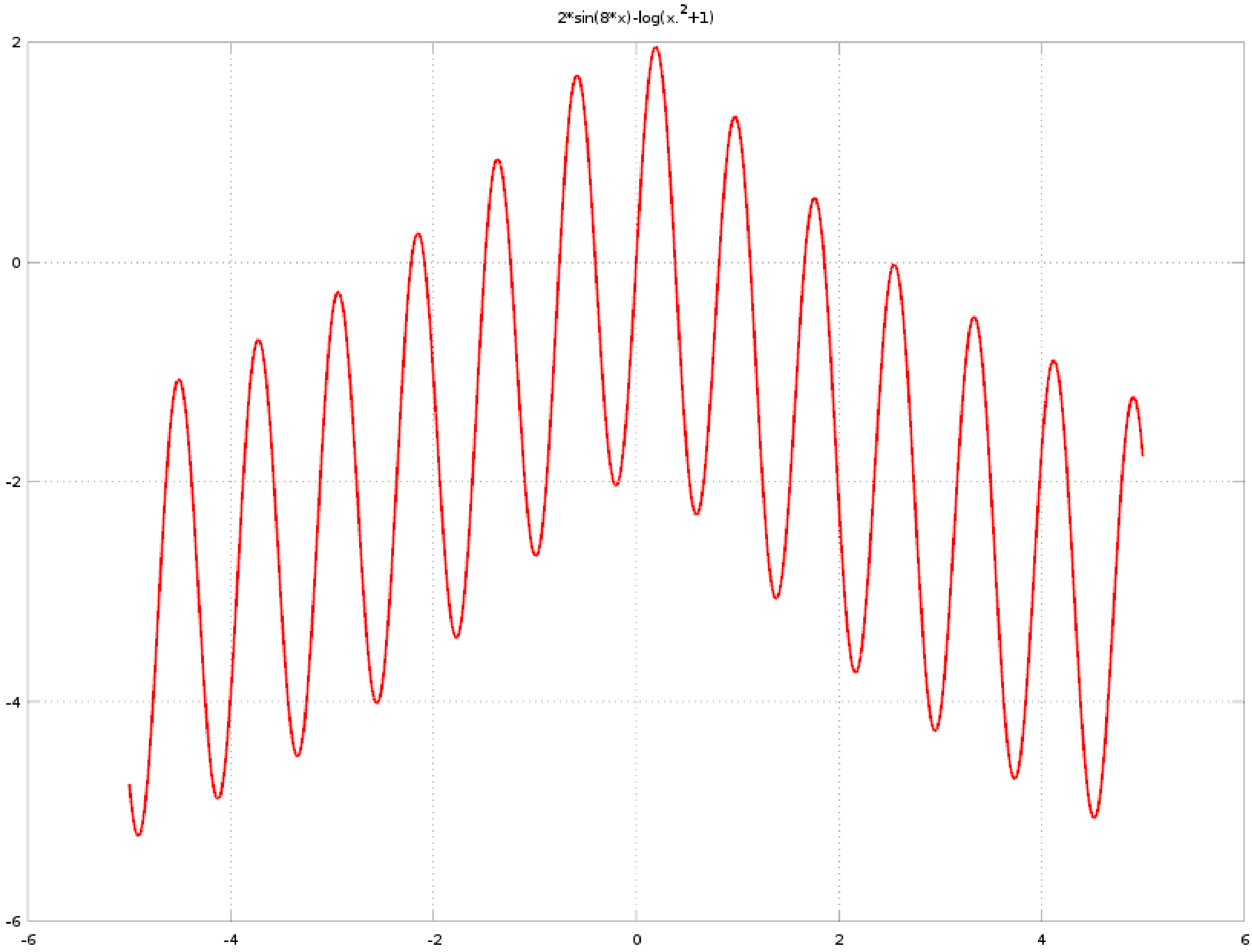
5.1

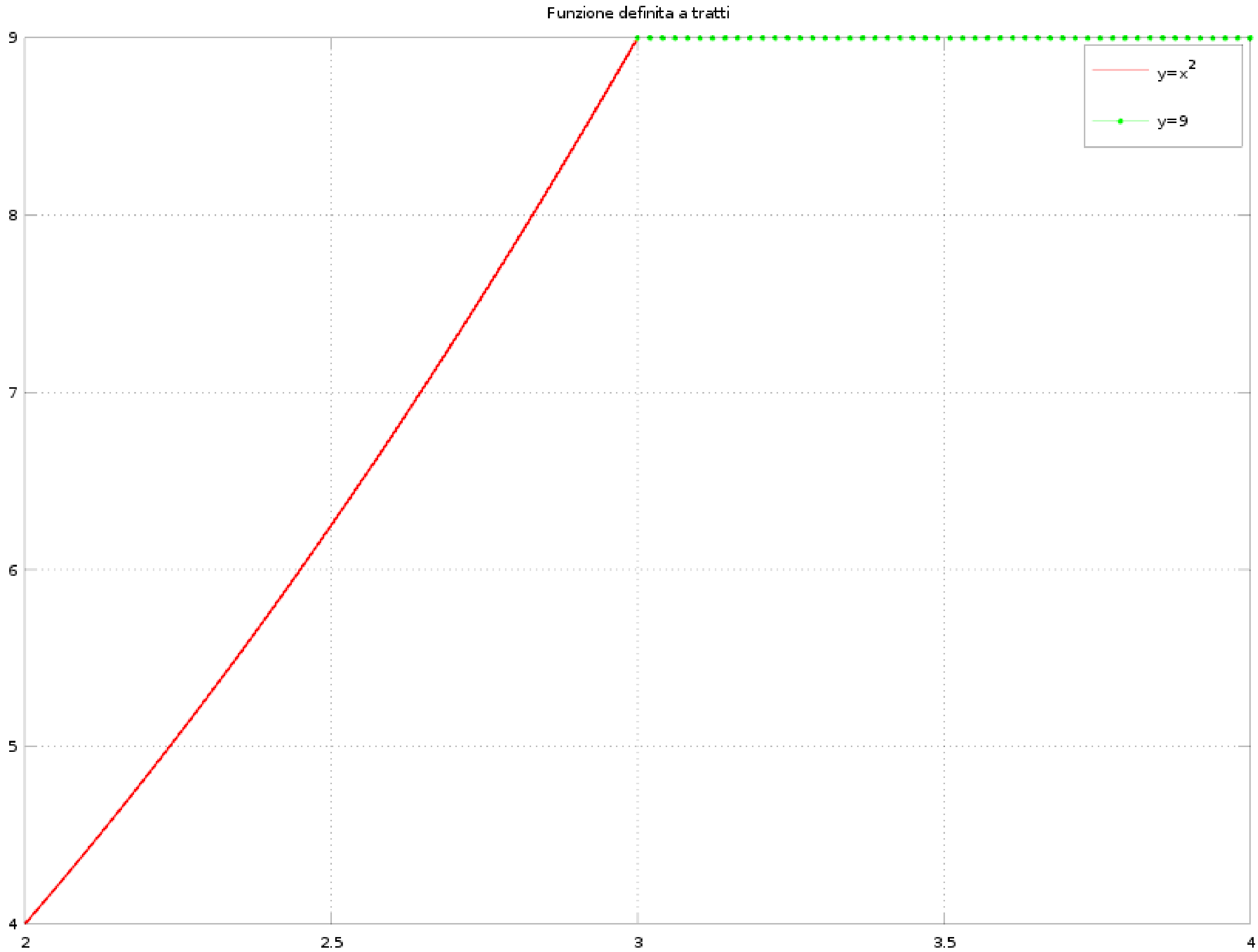
Esercizio 1
Rappresentazione grafica di funzioni

$f(x) = 2sin(8x) - ln(x^2 + 1)$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & x < 3 \\ 9 & x > 3 \end{cases}$$

```
%%%%%% PARTE a %%%%%%%
function plot_f(a,b)

 f = inline(" 2*sin(8*x) - log(x.^2+1) ");

 if ( a < b )
     c = a;
     a = b;
     b = c;
   endif

   x = linspace(a,b,(a-b)*100);

   y = f(x);

   plot(x,y,'r');
   xlabel(" decomposition ");
   ylabel(" 2*sin(8*x) - ln(x.^2+1) ");
   grid on;

endfunction

plot_f(-6,6)

%%%%%% PARTE a %%%%%%%

x1 = linspace(2,3,50);
x2 = linspace(3,4,50);

g1 = inline('x.^2');
plot(x1,g1(x1));

hold on

g2 = 9;
plot(x2,g2);
```


2*sin(8*x)-log(x.^2+1)
2
0
-2
-4
-6
-6
-4
-2
0
2
4
6

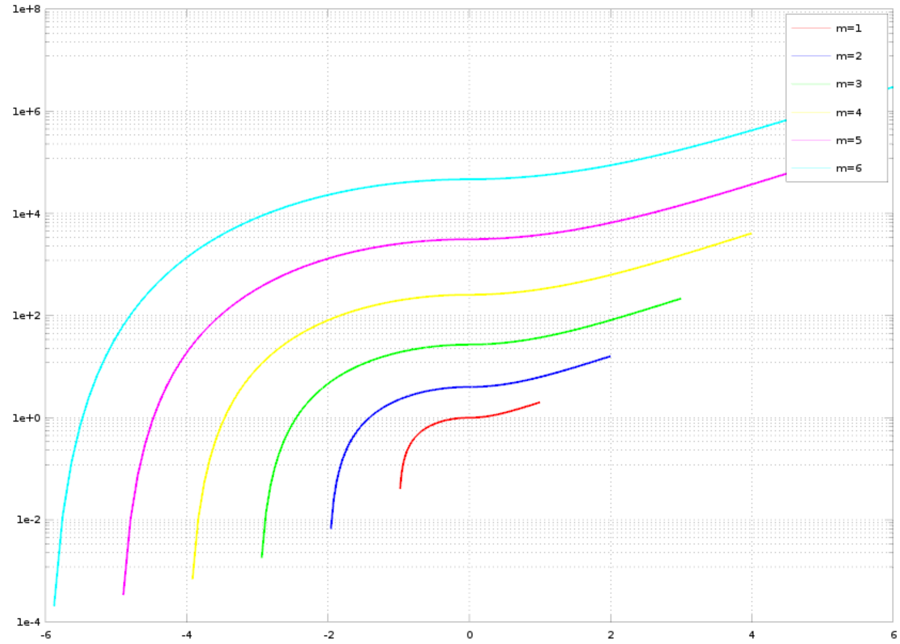


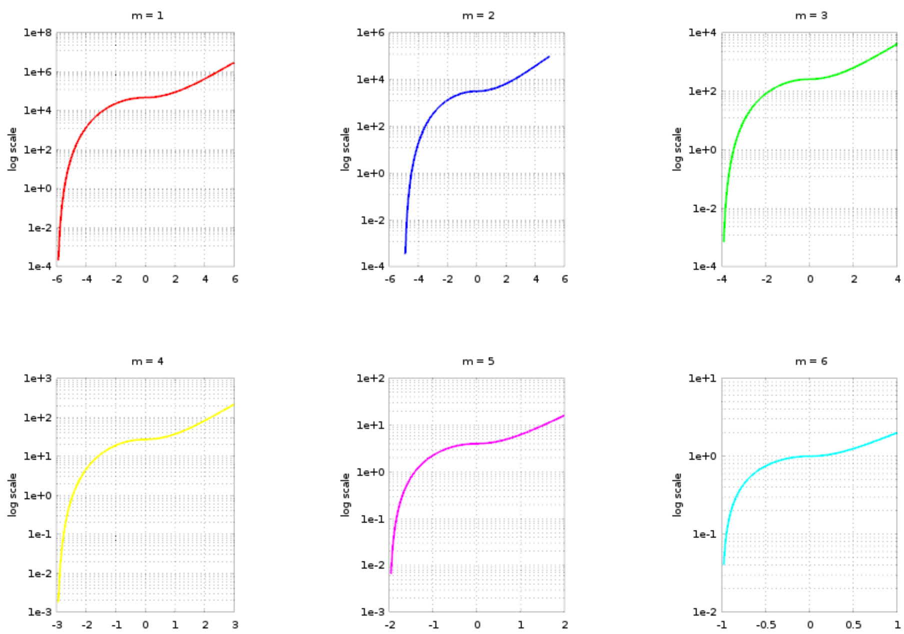
Funzione definita a tratti
9
8
7
6
5
4
2
2.5
3
3.5
4
y=x^2
y=9

5.2 Esercizio 2

5.3 Esercizio 3

```
function [x,y] = m_calc(m)
  m = abs(m);
   x1 = linspace(-m,0,50);
   x2 = linspace( 0,m,50);

   y1 =  (m-(x1.^2)./m).^m ;
   y2 =  ((x2.^2)./m+m).^m ;

   x = [ x1 x2 ];
   y = [ y1 y2 ];

endfunction

x=[];
y=[];

A = [];
for i=1:6
 [ x,y ] = m_calc(i);
 A = [ [ x, y ] ; A];
 semilogy(x,y);
 %legend([ " m = " num2str(i) ] );
 hold on
endfor



figure 2
for i=1:6
   subplot(2,3,i)
   semilogy(A(i,1:100),A(i,101:200));
   title([ " m = " num2str(i) ]);
   ylabel(" log scale ");
endfor
```


m=1
m=2
m=3
m=4
m=5
m=6
1e+8
1e+6
1e+4
1e+2
1e+0
1e-2
1e-4
-6
-4
-2
0
2
4
6


m = 1
m = 2
m = 3
m = 4
m = 5
m = 6
log scale

5.4 Esercizio 4
Risoluzione di sistemi lineari a matrice tridiagonale

```
% Risoluzione di sistemi lineari con matrici tridiagonali
%  Utilizzo la fattorizzazione LU per la matrice A e poi
%  risolvo il sistema che ne consegue.


A = diag(ones(1,5));
A = A + diag(ones(1,4),1)*3;
A = A + diag(ones(1,4),-1)*5;

% Fattorizzazione LU per matrici tridiagonali.
  % conditio sine qua non A deve essere tridiagonale.
function [ L, U ] = tridiag_fatt(A)
  a = diag(A);
  c = diag(A,1);
  b = diag(A,-1);

  % Calcolo dei determinanti dei minori
  %  NB d(n) = det(A)

  d = ones(1,size(a)+1);
  d(1) = 1;
  d(2) = a(1);
  for i=2:size(a)
    d(i+1) =  (a(i)*d(i) - b(i-1)*c(i-1)*d(i-1));
  endfor


  % diagonale inferiore di L
  l = ones(1,size(a)-1);
  % diagonale principale di U
  u = ones(1,size(a));

  for i=1:size(a)-1
   l(i) = l(i)*( b(i)*d(i)/d(i+1) );
  endfor

  for i=1:size(a)
   u(i) = d(i+1)/d(i);
  endfor

  % Ora posso calcolare le due matrici L ed U

  L = diag(ones(1,size(a))) + diag(l,-1);
  U = diag(u) + diag(c,1);

endfunction


[ L,U ] = tridiag_fatt(A);
b = [ 1,2,3,4,5 ]';
%% Algoritmo di risoluzione
%   Ax = b
%   A  = LU
%   LUx = b
%
%   Ly = b
%   Ux = y
%
```

```
%
%   x \'{e} la mia soluzione finale


% Diagonale inferiore di L
 bl = diag(L,-1);

% Diagonale principale di U
 au = diag(U);

% Diagonale superiore di U
 cu = diag(U,1);

n = size(L)(1);


x_sure = A\b

y = ones(1,n);
x = ones(1,n);Y


% Risoluzione di Ly = b
y(1) = b(1);
for i=2:n
   y(i) = b(i) - bl(i-1)*y(i-1);
endfor


% Risoluzione di Ux = y
x(n) = y(n)/au(n);
for i=n-1:-1:1
   x(i) = (y(i-1)-cu(i)*x(i+1))/cu(i);
endfor
```

5.5 Esercizio 5

```
% funzione per matrice bidiagonale del tipo
%   A = diag(ones(1,n)) + diag(2*ones(1,n-1),1);

function [ inv_A ] = inv_bidiag(A);

% Calcolo l'inversa con il metodo di Gauss Giordan


% n = numero di righe di A
n = size(A)(1);


AI = [ A , eye(size(A)(2)) ];


for r=n:-1:2
  AI(r-1,:) = AI(r-1,:)-2*AI(r,:);
endfor

inv_A = AI(:,size(AI)(2)/2+1:size(AI)(2));


endfunction


a1=1:10;
c1=11:19;

A = diag(a1) + diag(c1,1) + diag(c1,-1);

% A deve essere tridiagonale
function [ B ] = tri_fact(A)

  n = size(A)(2);
  p = ones(1,n);
  q = ones(1,n-1);
  a = diag(A);
  c = diag(A,-1);

  p(1) = sqrt(a(1));

  for i=2:n
    q(i-1) = c(i-1)./p(i-1);
    p(i) = sqrt(a(i)-q(i-1).^2);
  endfor

  B = diag(p) + diag(q,-1);

endfunction

B = tri_fact(A);

A1 = B*B';
```

5.6 Esercizio 6

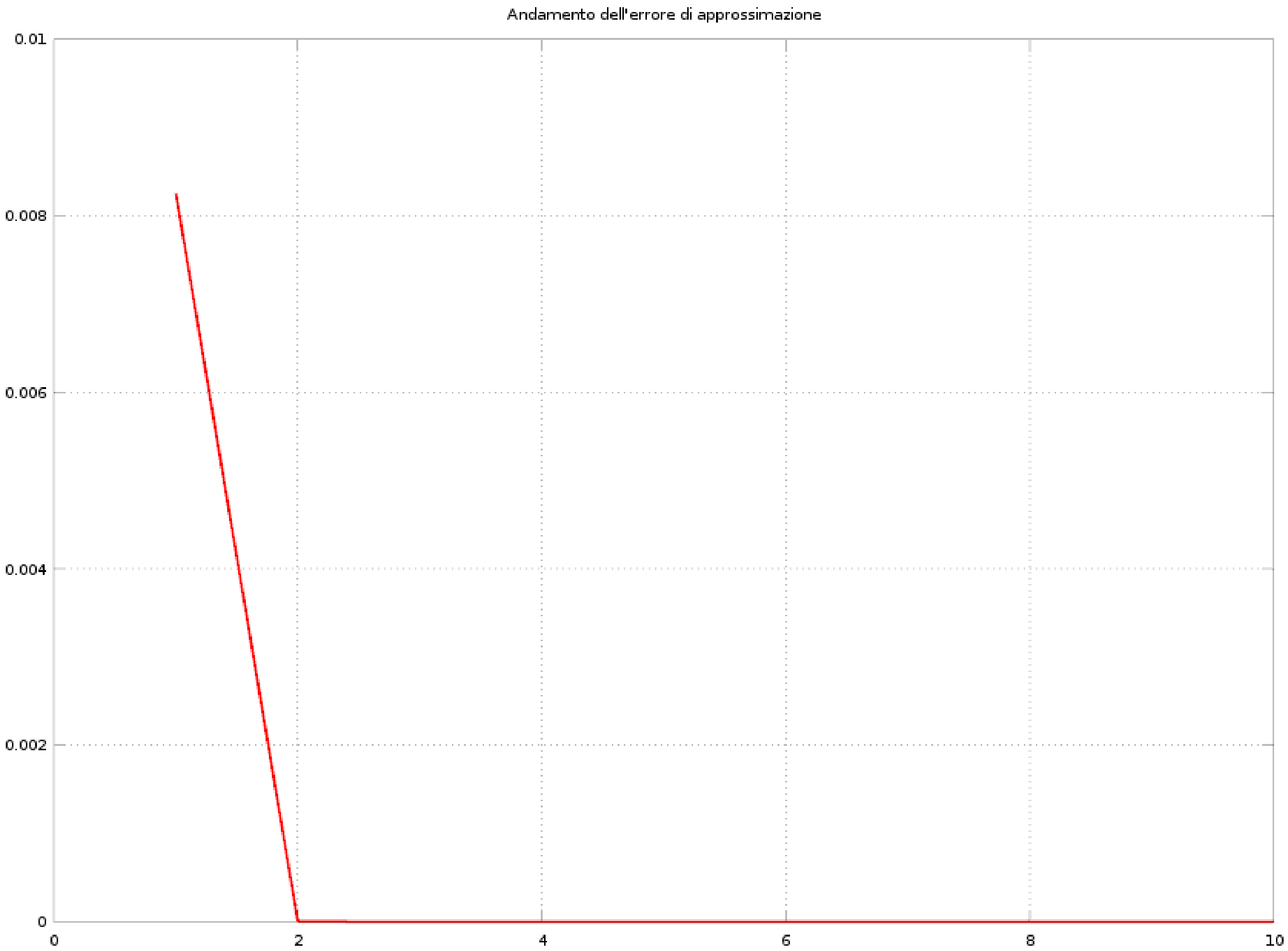
```
t = 1:6;
y = [ 0.5,0.8,0.7,0.3,0.1,0.4 ]

f = inline(' 1 + sin(2*pi*x/6) + cos(2*pi*x/6) ');


A = [];
for i=1:6
  A = [ A ; [ 1, sin(2*pi*i/6), cos(2*pi*i/6) ] ];
endfor

a = A\y';

a = fliplr(a);

p = polyval(a,t);

A
```

5.7 Esercizio 7

```
a1=1:10;
c1=11:19;

A = diag(a1) + diag(c1,1) + diag(c1,-1);

% A deve essere tridiagonale
function [ B ] = tri_fact(A)

  n = size(A)(2);
  p = ones(1,n);
  q = ones(1,n-1);
  a = diag(A);
  c = diag(A,-1);

  p(1) = sqrt(a(1));

  for i=2:n
    q(i-1) = c(i-1)./p(i-1);
    p(i) = sqrt(a(i)-q(i-1).^2);
  endfor

  B = diag(p) + diag(q,-1);

endfunction

B = tri_fact(A);

A1 = B*B';
```

5.8 Esercizio 8
Approssimazione di π mediante troncata di una serie

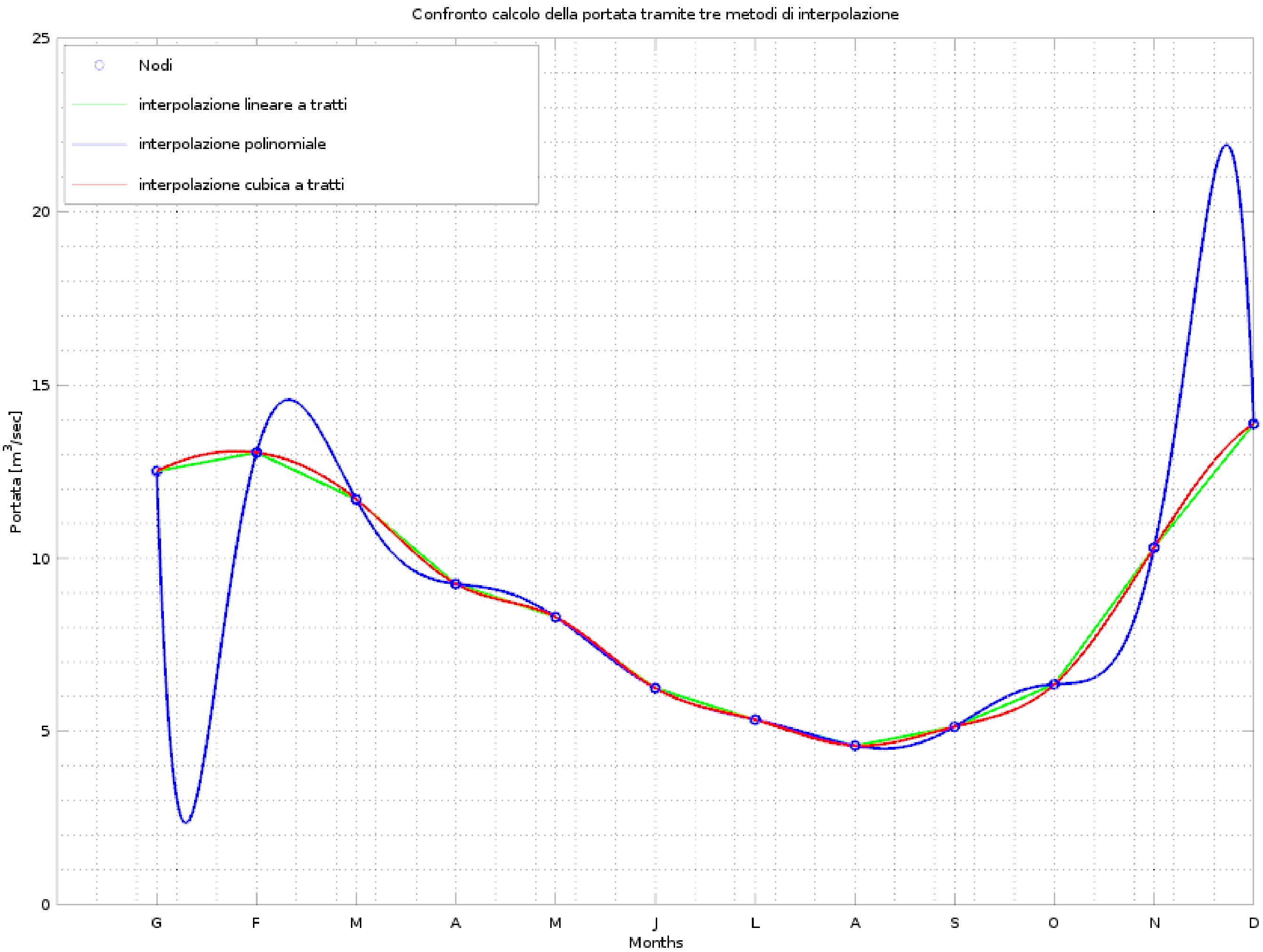
```
tr = inline("16^(-x)*(4/(8*x+1) - 2/(8*x+4) - 1/(8*x+5) - 1/(8*x+6))");

p0 = (4-1/2-1/5-1/6);

p_i = p0*ones(1,100);


for a=2:100
  for b=1:a
    p_i(a) = p_i(a) + tr(b);
  endfor
endfor

% converge velocemente a pi

real_pi = ones(1,100)*pi;
err = abs(real_pi - p_i);

% alla decima iterazione l'errore in format long risulta essere nullo

plot(1:10,err(1:1:10),'linewidth',2,'r');
grid on
title("Andamento dell'errore di approssimazione");
```


Andamento dell'errore di approssimazione
0.01
0.008
0.006
0.004
0.002
0
0
2
4
6
8
10

6 Esercitazione 6

6.1 Esercizio 1

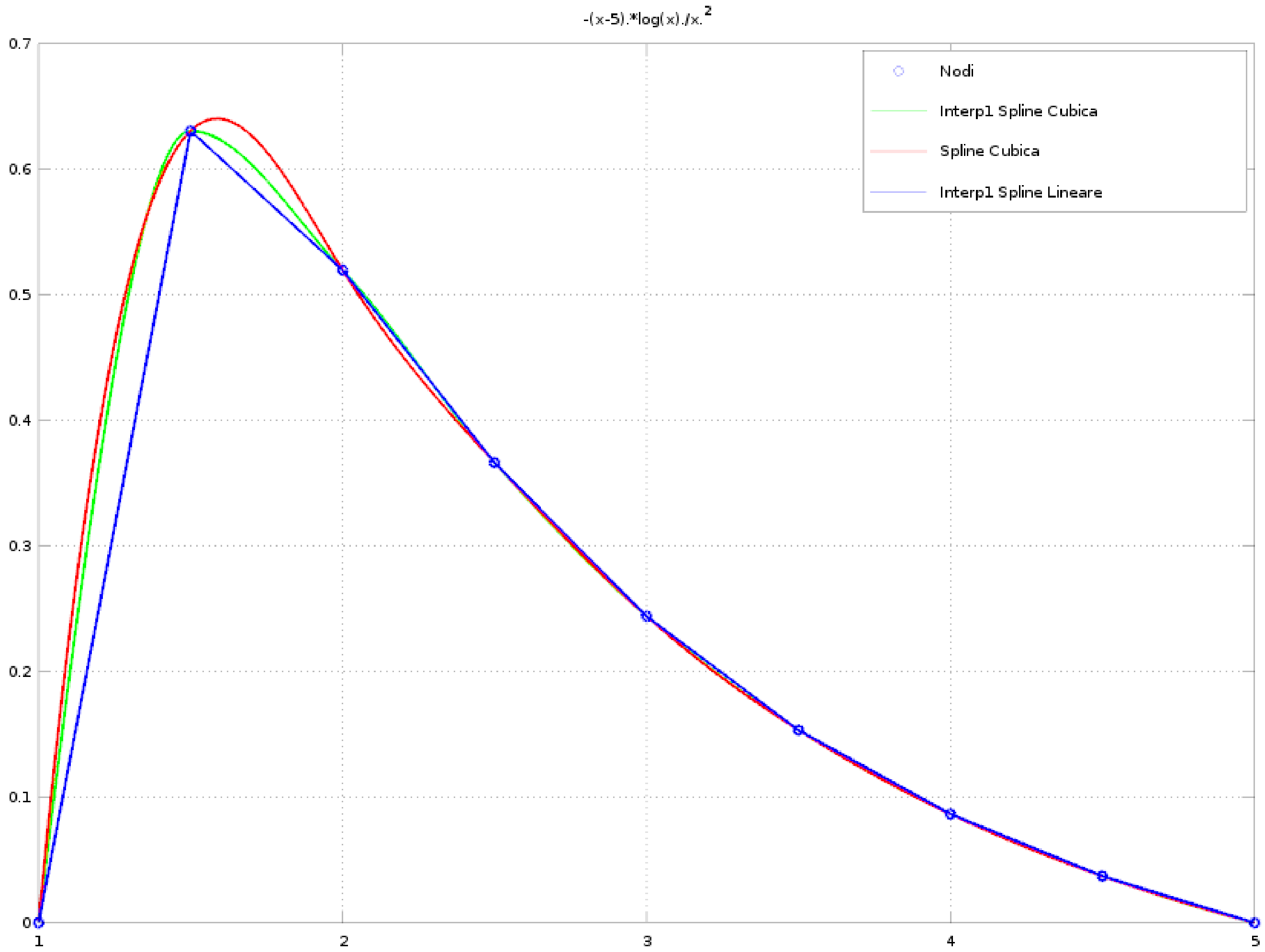
```
%months = [ 'G','F','M','A','M','J','L','A','S','O','N','D']
%set(gca,'XtickLabel',months)
x=1:12;
y=[12.51, 13.05, 11.7, 9.26, 8.3, 6.25, 5.34, 4.59, 5.14, 6.36, 10.31, 13.88]


xx=linspace(1,12,1201);


% spline lineare
% se il campo " metodo " viene omesso di default viene usata
%  l'interpolazione lineare, ovvero le spline lineari

yyl = interp1(x,y,xx);


% interpolazione polinomiale
% comando polifit

coeff_yyp = polyfit(x,y,11);
yyp = polyval(coeff_yyp,xx);

% spline cubica

yyc = interp1(x,y,xx,'spline');


% plotting

plot(x,y,'o',xx,yyl,'g',xx,yyp,'b',xx,yyc,'r');
grid on
ylabel("Portata [m^3/sec]");
xlabel("Months");
title("Confronto calcolo della portata tramite tre metodi di interpolazione");

legend(" Nodi "," interpolazione lineare a tratti "," interpolazione
    polinomiale "," interpolazione cubica a tratti ");
```



Confronto calcolo della portata tramite tre metodi di interpolazione
Nodi
interpolazione lineare a tratti
interpolazione polinomiale
interpolazione cubica a tratti
Portata [m^3/sec]
0
5
10
15
20
25
G
F
M
A
M
J
L
A
S
O
N
D
Months

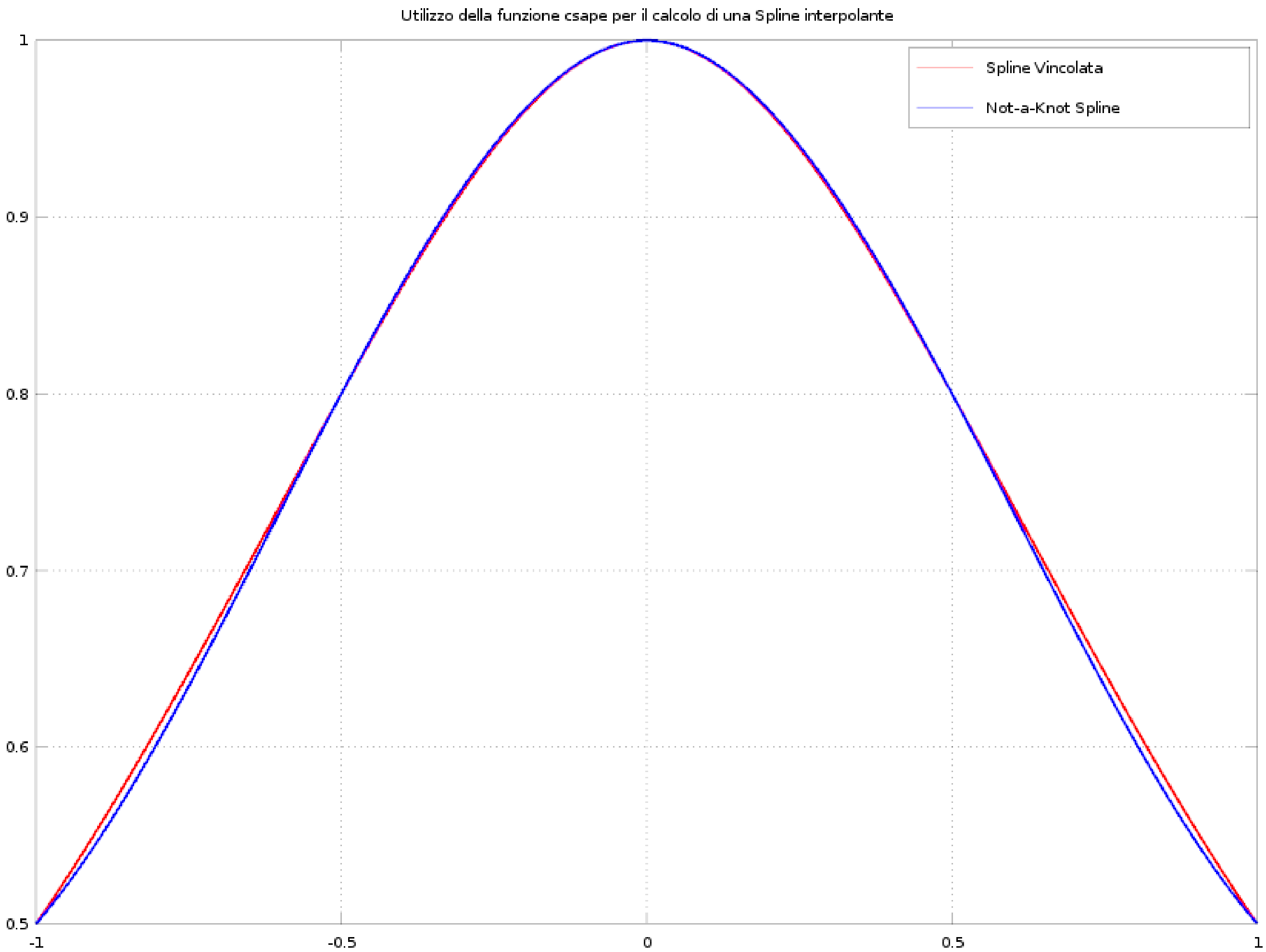
6.2 Esercizio 2

```
f = inline("-(x-5).*log(x)./x.^2");
x = 1:0.5:5;
y = f(x);


xx = linspace(1,5,500);

% comando interp1 per interpolazione a tratti lineare

yyl = interp1(x,y,xx,'linear');

% comando interp1 per interpolazione a tratti cubica


yyi = interp1(x,y,xx,'cubic');


% comando spline per interpolazione a tratti

pps = spline(x,y);
yys = ppval(pps,xx);


% plotting

plot(x,y,'linewidth',2,'o',xx,yyi,'linewidth',2,'g',xx,yys,'linewidth',2,'r',xx,
    yyl,'linewidth',2,'b');
legend(" Nodi ", " Interp1 Spline Cubica ", " Spline Cubica ", " Interp1 Spline
    Lineare");
grid on

% Errori
% Valori della funzione nei punti xx

yyreal = f(xx);

% confrontiamo i valori della funzione con quelli approssimati

err_interp_lineare = abs(yyreal-yyl);
err_interp_cubica  = abs(yyreal-yys);
err_interp_spline  = abs(yyreal-yys);


figure 2

plot(xx,err_interp_cubica,'linewidth',2,'g',xx,err_interp_spline,'linewidth',2,'
    o',xx,err_interp_lineare,'linewidth',2,'r');
legend(" Interp1 Spline Cubica ", " Spline Cubica ", " Interp1 Spline Lineare");
grid on


% La migliore funzione interpolante risulta essere, all'analisi degli errori, la
    spline cubica.
%  Gli errori della spline cubica calcolati con la funzione spline e quelli
    calcolati con la funzione
%  interpl(xx,yy,'spline') risultano essere praticamente sovrapposti nel grafico
    , possiamo concludere quindi che siano
%  entrambi metodi appropriati per il calcolo della funzione interpolante
```


-(x-5).*log(x)./x.^2
Nodi
Interp1 Spline Cubica
Spline Cubica
Interp1 Spline Lineare
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1
2
3
4
5

6.3 Esercizio 3

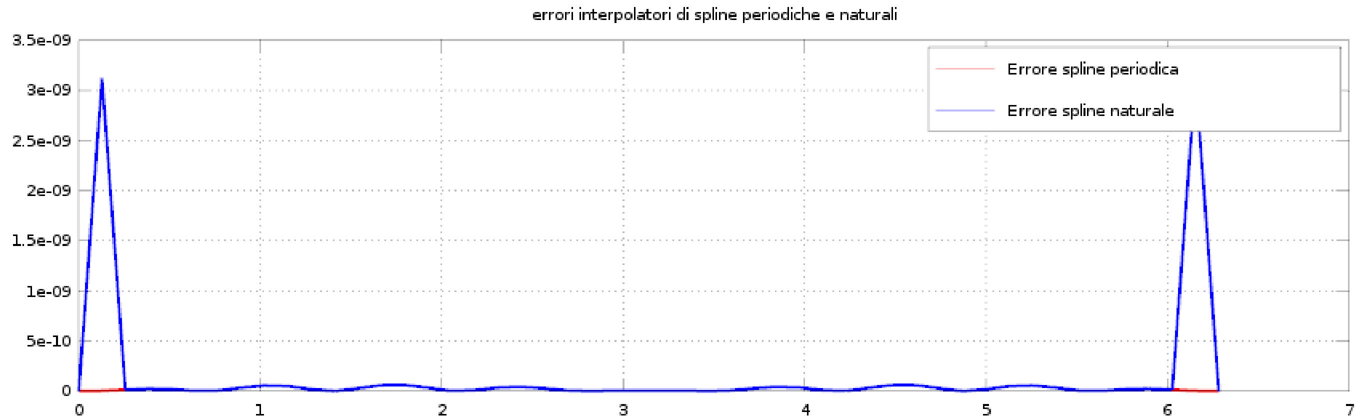
```
load csape.m

x = [-1, -0.5, 0, 0.5, 1];
y = [0.5, 0.8, 1, 0.8, 0.5];

xx = linspace(-1,1,1000);

% "Complete" condition imposes that the spline's values  have to be clamped
%  at the extreme knots with values specified in 2nd argument vector
pp_cl = csape(x,y,'complete',[1/2 -1/2]);

% Not-a-knot condition imposes the continuity of third derivative between first
    and second and
%   next-to-last and last knot-
pp_nk = csape(x,y,'not-a-knot');

yy_cl = ppval(pp_cl,xx);
yy_nk = ppval(pp_nk,xx);

plot(xx,yy_cl,'linewidth',2,'r',xx,yy_nk,'linewidth',2,'b');
grid on
legend(" Spline Vincolata ", " Not-a-Knot Spline ");
```



6.4 Esercizio 4

```
load csape.m

x = linspace(0,2*pi,500);
y = sin(x);

xx = linspace(0,2*pi,50);
yy = sin(xx);

% Cofficents Periodic Spline
%     S'(x0) = S'(xn)
%     S''(x0) = S''(xn)

cp = csape(x,y,'periodic');




% Coefficents Natural Spline
%     S'''(x0)=S'''(xn) = 0

cn = csape(x,y,'complete',[ 0 0 ]);



yp = ppval(cp,xx);
yn = ppval(cn,xx);

err_periodic = abs(yy-yp);
err_natural  = abs(yy-yn);


subplot(2,1,1)
  plot(x,y,'linewidth',2,'g', xx,yp,'linewidth',0.5,'b', xx,yn,'linewidth',2,'r'
    )
  title(" Interpolazione del seno con spline cubiche naturali e periodiche ");
  grid on
  legend(" sin(x) ", " periodic spline ", " natural spline ");
subplot(2,1,2)
  plot(xx,err_periodic,'linewidth',2,'r', xx,err_natural,'linewidth',2,'b')
  title(" errori interpolatori di spline periodiche e naturali ");
  grid on
  legend( " Errore spline periodica ", " Errore spline naturale ");



% Si noti che data una discretizzazione iniziale piccola ( 5 punti ) come questa
%  gli errori risultano rilevanti per entrambe le tecniche interpolatorie, per
    quanto per la
%  spline naturale risultino gi\'{a} maggiori.
% Se aumentiamo notevolmente invece il numero di intervalli notiamo che entrambi
    gli errori
%  tendono a diminuire drasticamente all'interno dell'intervallo, mentre agli
    estremi la
%  spline naturale continua a mantenere un errore notevole.
```


Interpolazione del seno con spline cubiche naturali e periodiche
sin(x)
periodic spline
natural spline
1
0.5
0
-0.5
-1
0
1
2
3
4
5
6
7

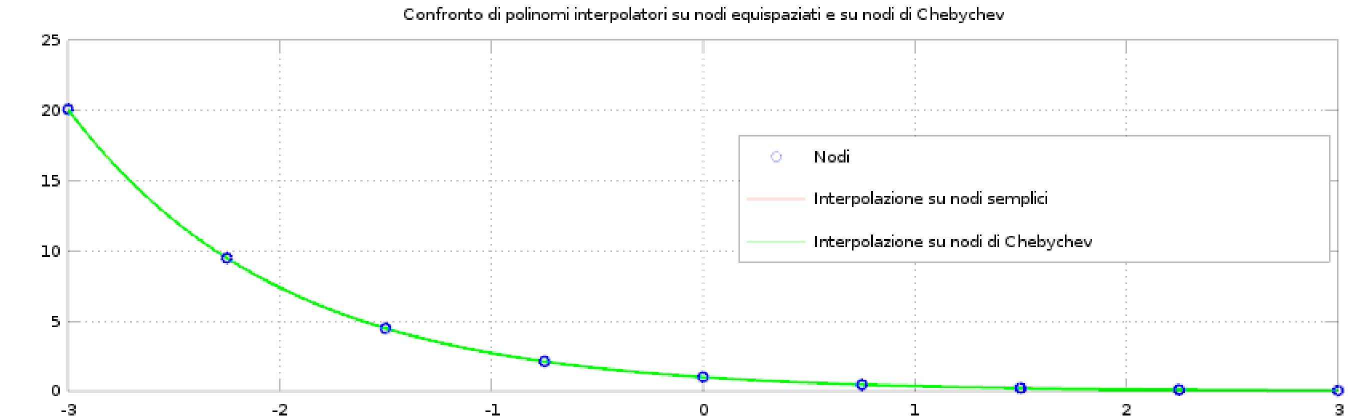

errori interpolatori di spline periodiche e naturali
Errore spline periodica
Errore spline naturale
3.5e-09
3e-09
2.5e-09
2e-09
1.5e-09
1e-09
5e-10
0
0
1
2
3
4
5
6
7

6.5 Esercizio 5

```
p1 = [ 2, -3, 4, -7 ];
p2 = [ 3, -2, -5 ];

% Somma di Polinomi

 psum = polyadd(p1,p2);

% Sottrazione di Polinomi

 psub = polyadd(p1,-p2);

% Moltiplicazione

 pmul = conv(p1,p2);

% Divisione

 pdiv = deconv(p1,p2);
```

6.6 Esercizio 6

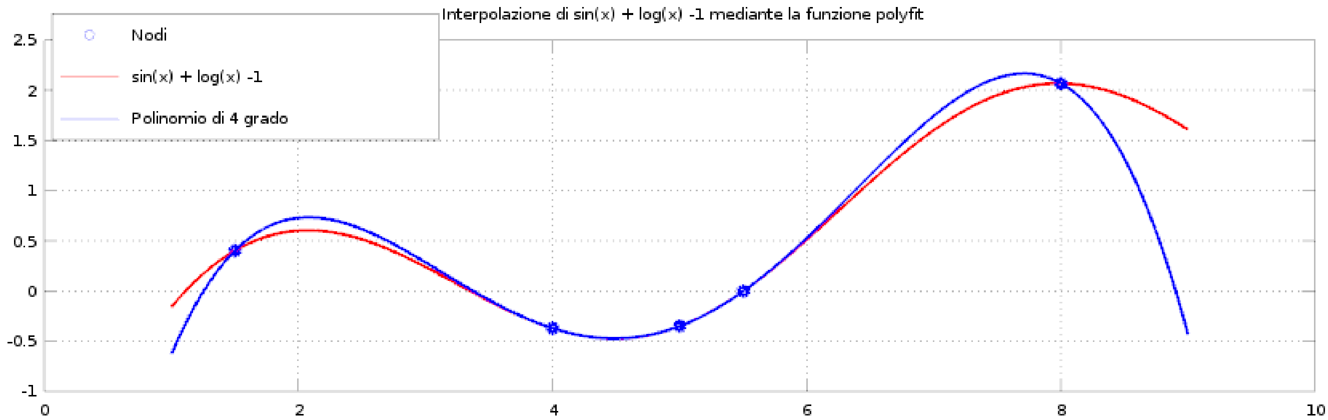
```
f = inline(" e.^-x ");

x = linspace(-3,3,9);

y = f(x);

% Polinomio di grado minimo

 cp = polyfit(x,y,8);

 xx = linspace(-3,3,1000);

% Valori del Polinomio

 yp = polyval(cp,xx);


% Ricerca dei Nodi di Chebychev


cheb = inline("1/2(-3+3) + 1/2(3+3)*cos((2*x-1)/(2*9))");

  xc = zeros(1,9);
  for i=1:9
    xc(i) = 1/2*(-3+3)+1/2*(3+3).*(cos(((2.*i-1)./18).*pi));
  endfor


yc = f(xc);

% Polinomio di grado minimo con
 Chebychev

 cc = polyfit(xc,yc,8);

% Valori del Polinomio di grado minimo

 ypc = polyval(cc,xx);


% Errori

y_ex = f(xx);
err_pol  = abs(y_ex-yp);
err_cheb = abs(y_ex-ypc);


% Plotting

subplot(2,1,1)
  plot(x,y,'linewidth',2,'o',xx,yp,'linewidth',2,'r',xx,ypc,'linewidth',2,'g');
  legend("Nodi", "Interpolazione su nodi semplici", "Interpolazione su nodi di
      Chebychev");

subplot(2,1,2)
  plot(xx,err_pol,'linewidth',2,'r',xx,err_cheb,'linewidth',2,'g');
  legend("Errori interpolazione nodi semplici","Errore interpolazione nodi di
      Chebychev");
```

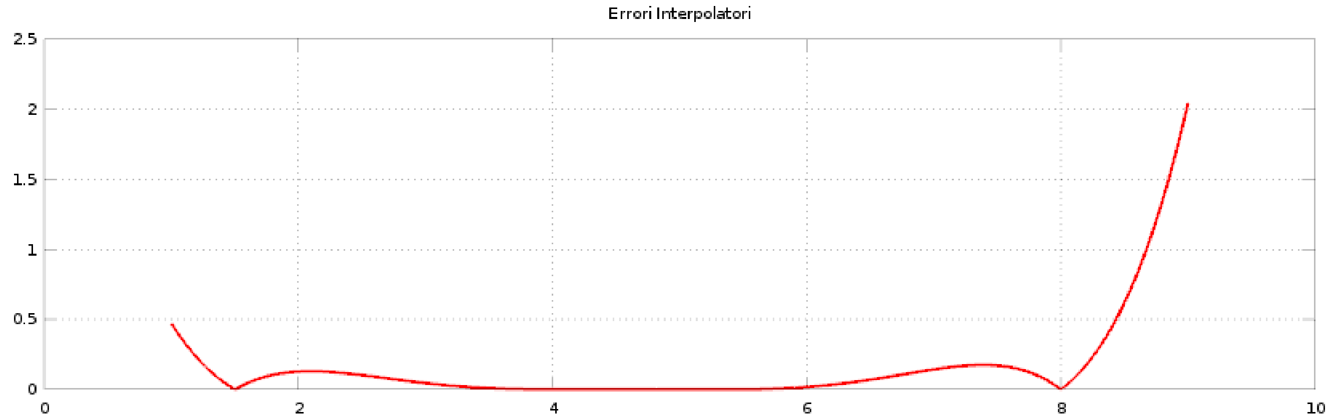

Confronto di polinomi interpolatori su nodi equispaziati e su nodi di Chebychev
Nodi
Interpolazione su nodi semplici
Interpolazione su nodi di Chebychev
25
20
15
10
5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3


Errori interpolatori
Errori interpolazione nodi semplici
Errore interpolazione nodi di Chebychev
0.002
0.0015
0.001
0.0005
0
-3
-2
-1
0
1
2
3

6.7 Esercizio 7

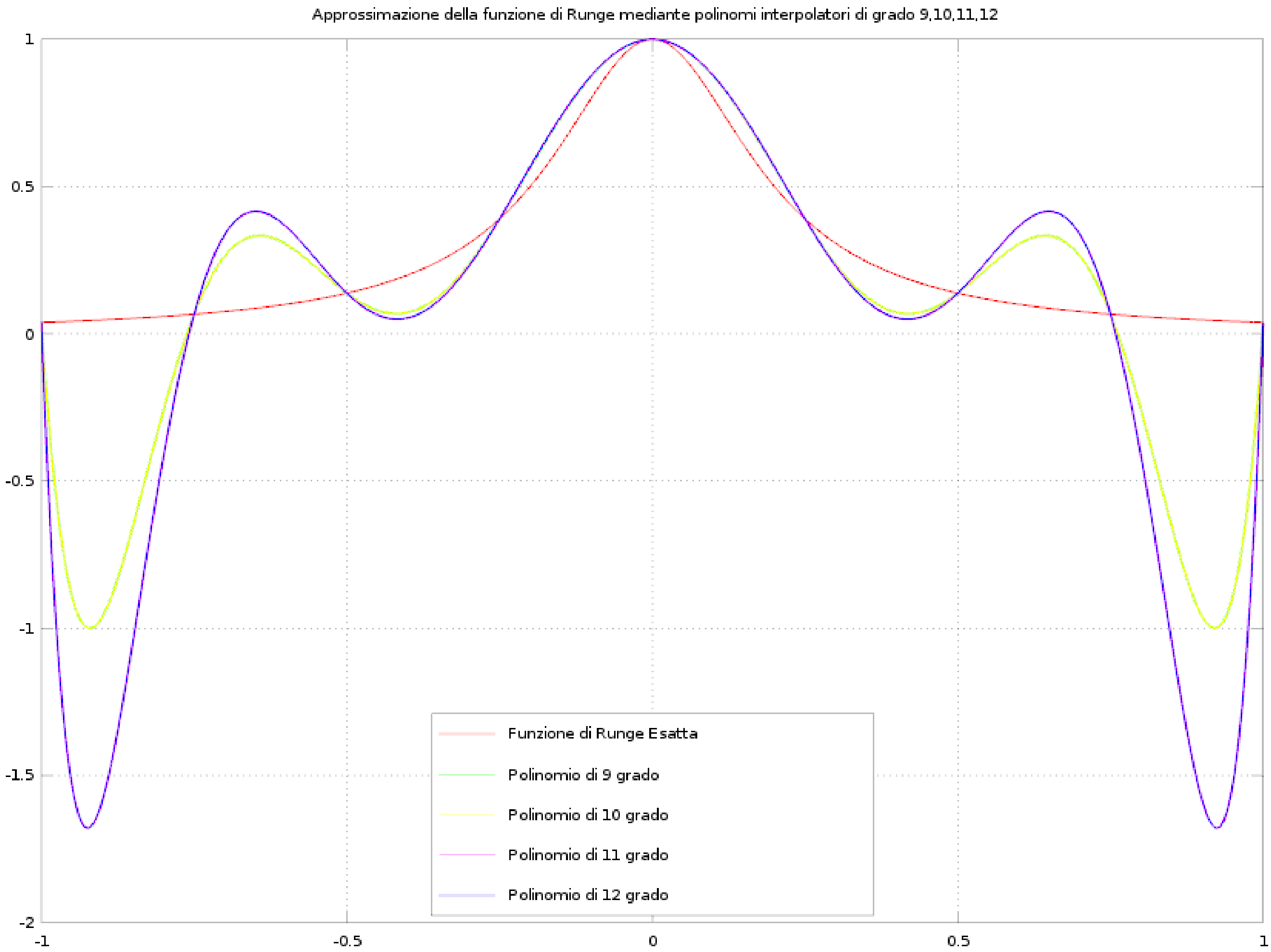
```
f = inline("sin(x) + log(x) -1 ");
x = [1.5, 4, 5, 5.5, 8];
y = f(x);

xx = linspace(1,9,1000);

c = polyfit(x,y,4);

yy = polyval(c,xx);

y_ex = f(xx);


err = abs(y_ex-yy);


subplot(2,1,1)
plot(x,y,'linewidth',3,'o',xx,y_ex,'linewidth',2,'r', xx,yy,'linewidth',2,'b');
legend(" Nodi ", " sin(x) + log(x) -1 ", " Polinomio di 4 grado ","location","
    northwest");
grid on
ylabel(" sin(x) + log(x) -1 ");

subplot(2,1,2)
plot(xx,err,'linewidth',2,'r');
title(" Errori Interpolatori ")
grid on
```


Interpolazione di sin(x) + log(x) -1 mediante la funzione polyfit
Nodi
sin(x) + log(x) -1
Polinomio di 4 grado


Errori Interpolatori

6.8 Esercizio 8

```
f = inline("1./(1+25*x.^2)");

x9 = linspace(-1,1,9);
x10 = linspace(-1,1,10);
x11 = linspace(-1,1,11);
x12 = linspace(-1,1,12);

y9 = f(x9);
y10 = f(x10);
y11 = f(x11);
y12 = f(x12);


c9 = polyfit(x9,y9,8);
c10 = polyfit(x9,y9,9);
c11 = polyfit(x9,y9,10);
c12 = polyfit(x9,y9,11);

xx = linspace(-1,1,1000);

y_ex = f(xx);
yp9 = polyval(c9,xx);
yp10 = polyval(c10,xx);
yp11 = polyval(c11,xx);
yp12 = polyval(c12,xx);


plot(xx,y_ex,'r',xx,yp9,xx,yp10,xx,yp11,xx,yp12);
legend(" Funzione di Runge Esatta ", " Polinomio di 9 grado ", " Polinomio di 10
    grado ", " Polinomio di 11 grado ", " Polinomio di 12 grado ","location","
    south");
grid on
title(" Approssimazione della funzione di Runge mediante polinomi interpolatori
    di grado 9,10,11,12");
```



7 Esercitazione 7

7.1 Esercizio 1 Costruzione di una formula di quadratura per il calcolo dell' integrale definito $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

```
%% Newton Cotes con n = 4 %%


% expr0= ((x-1)/(0-1))*((x-2)/(0-2))*((x-3)/(0-3))*((x-4)/(0-4));
% expr2= ((x-0)/(2-0))*((x-1)/(2-1))*((x-3)/(2-3))*((x-4)/(2-4));


% Codice per il Calcolo dei Coefficienti in Matlab
syms x;

alpha0 = int(((x-1)/(0-1))*((x-2)/(0-2))*((x-3)/(0-3))*((x-4)/(0-4)) ,x, 0,
    4);

alpha2 = int(((x-0)/(2-0))*((x-1)/(2-1))*((x-3)/(2-3))*((x-4)/(2-4)) ,x, 0,
    4);

alpha1 = (4-(2*alpha0)*-alpha2);
alpha1 = alpha1/2;
alpha3 = alpha1;
```

```
alpha4 = alpha0;

#{
% Coefficienti precalcolati
alpha0 = 14/15;
alpha1 = 64/15;
alpha2 = 24/25;
alpha3 = alpha1;
alpha4 = alpha0;
#}

% alpha0+alpha1+alpha2+alpha3+alpha4 = 4 ? Propriet\'{a} delle costanti di Newton
%  se non vale i calcoli sono errati

alpha = [ alpha0, alpha1, alpha2, alpha3, alpha4 ]


% La formula di NewtonCotes chiusa vuole che I = h*[alpha0*f(x(0)+alpha1*f(x)...]

a=0;
b=1;
h = (b-a)/4;

x = [];
x = [ x, 0 ];
for i=1:4
  x = [ x, a+i*h ];
endfor


f = inline("e^(-x.^2)");
fun = @(x) e^(-x.^2);
y = f(x);

I = 0;
for i=1:5
  I = I + y(i)*alpha(i);
endfor

  I = h*I;

RealI = integrate(fun,0,1);

err = abs(RealI-I);
```

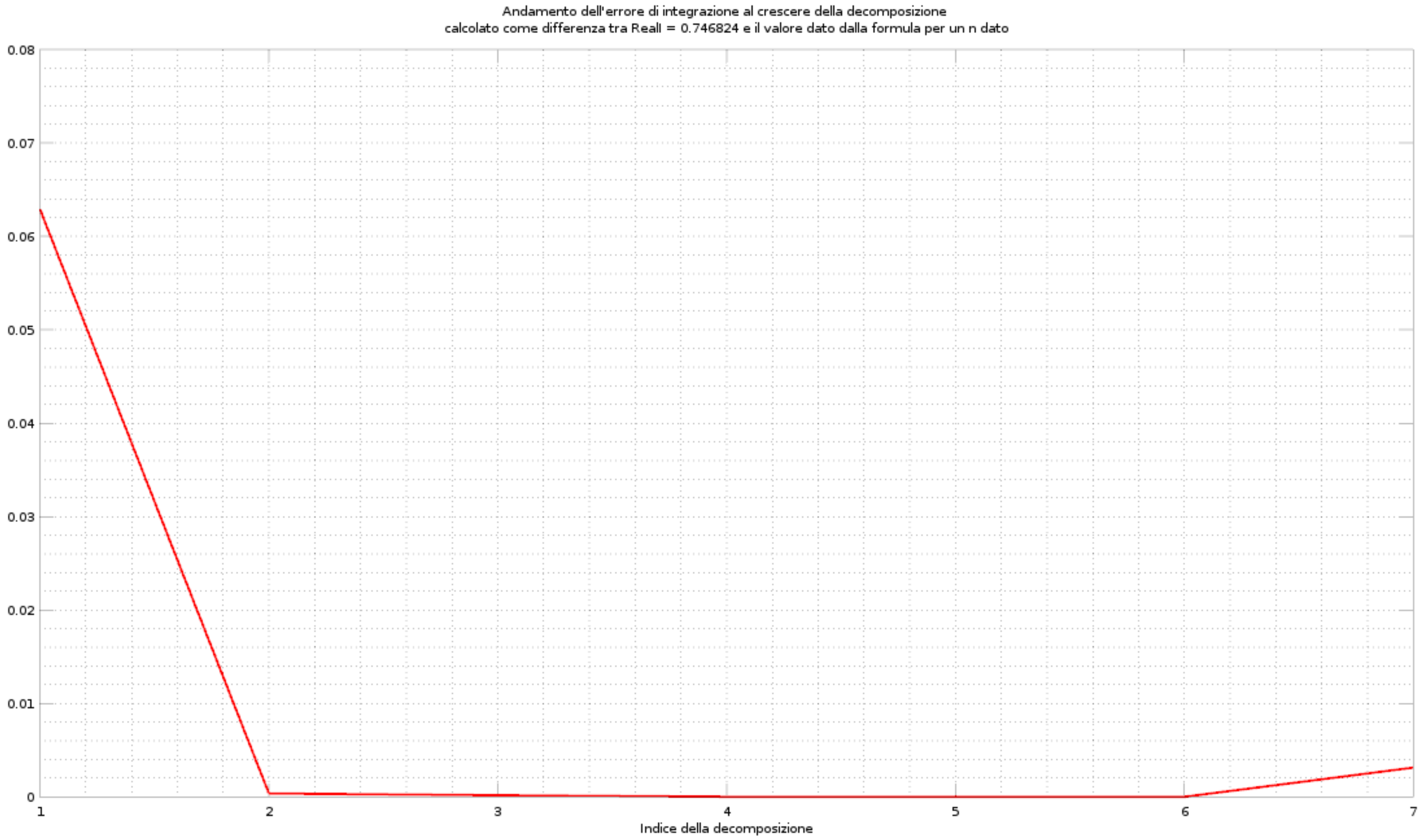
7.2 Esercizio 2
Costruzione di un grafico per la rappresentazione dell'errore relativo nel calcolo delle formule di Newton-Cotes approssimanti l'integrale definito $I = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$

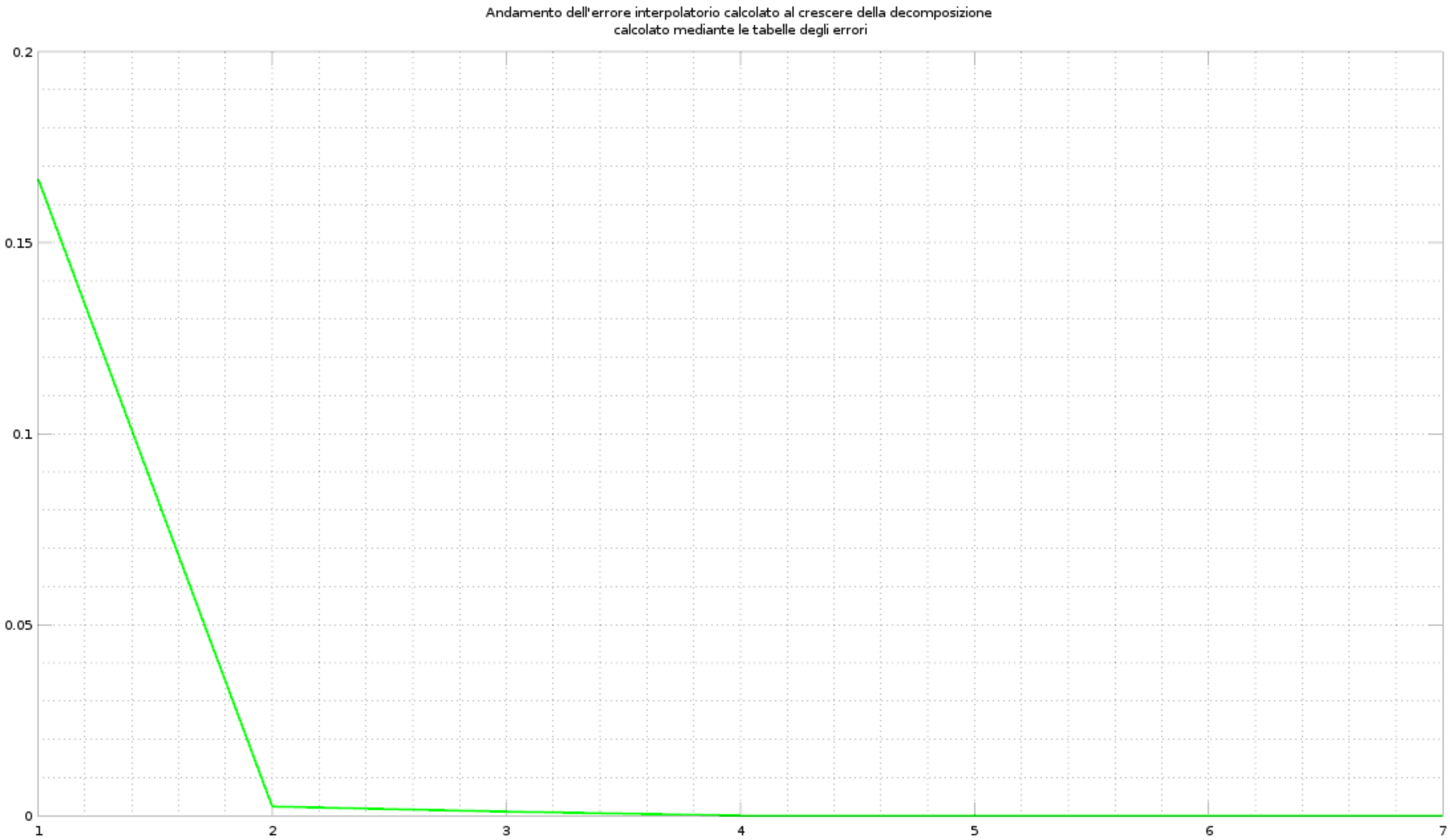
```
% Andamento dell'errore relativo nel calcolo dell'integrale definito della funzione e^(-x.^2)
%  mediante l'uso delle formule di Newton-Cotes

% Inizio calcolando il valore "esatto" dell'integrale


f = @(x) e.^(-x.^2);


%RealI = integrate(fun,0,1);
%err = abs(RealI-I);

RealI = 0.746824;
RealI_v = RealI*ones(1,7);

% Matrice dei Coefficienti delle formule di Newton-Cotes
NC\_coeff =
```

$$\begin{pmatrix}
1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 4/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3/8 & 9/8 & 9/8 & 3/8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
14/45 & 64/45 & 24/45 & 64/45 & 14/45 & 0 & 0 & 0 \\
95/288 & 375/288 & 250/288 & 250/288 & 375/288 & 95/288 & 0 & 0 \\
41/140 & 216/140 & 27/140 & 272/140 & 27/140 & 216/140 & 41/140 & 0 \\
5257/17208 & 25039/17208 & 9261/17208 & 20923/17208 & 20923/17208 & 9261/17208 & 25039/17208 & 5257/17208
\end{pmatrix}$$

```
% Ora cerco i 7 valori dell'integrale approssimato

a=0;
b=1;
n=7;

I = zeros(1,n);

for i=1:n
  h = (b-a)/i;
  for j=1:i+1
    I(i) = I(i) + NC_coeff(i,j)*f(a+h*(j-1));
  endfor
  I(i) = h*I(i);
endfor


err = abs(RealI_v - I);

plot([1:7], err, 'linewidth',2,'r')
grid minor
title("Andamento dell'errore di integrazione al crescere della decomposizione \n calcolato come differenza tra RealI = 0.746824 e il valore dato dalla formula per un n dato ");
xlabel("Indice della decomposizione")
```

```
% Calcolo ora una stima dell'errore per eccesso mediante le formule alle
    derivate

f2 = @(x) e.^(-x.^2).*(4*x-2);
f4 = @(x) 4*e.^(-x.^2).*(4*x.^3-2*x.^2-6*x+1);
f6 = @(x) 8*e.^(-x.^2).*(8*x.^5-4*x.^4-40*x.^3+12*x.^2+30*x-3);
f8 = @(x) 16*e.^(-x.^2).*(16*x.^7-8*x.^6-168*x.^5+60*x.^4+420*x.^3-90*x.^2-210*x
    +15);


a = 0;
b = 1;
h1 = (b-a);
h2 = (b-a)/2;
h3 = (b-a)/3;
h4 = (b-a)/4;
h5 = (b-a)/5;
h6 = (b-a)/6;
h7 = (b-a)/7;


% coefficienti dell'errore
coeff_err  = [ (-1/12)*h1^3, (-1/90)*h2^5, (-3/80)*h3^5, (-8/945)*h4^7,
    (-275/12096)*h5^7, (-9/1400)*h6^9, (-8183/518400)*h7^9 ];


x = 0:0.01:1;


ve1 = f2(x).*coeff_err(1);
ve2 = f4(x).*coeff_err(2);
ve3 = f4(x).*coeff_err(3);
ve4 = f6(x).*coeff_err(4);
ve5 = f6(x).*coeff_err(5);
ve6 = f8(x).*coeff_err(6);
ve7 = f8(x).*coeff_err(7);

% Cerco il massimo di ogni vettore per poter fare una stima per eccesso

Me1 = max(abs(ve1));
Me2 = max(abs(ve2));
Me3 = max(abs(ve3));
Me4 = max(abs(ve4));
Me5 = max(abs(ve5));
Me6 = max(abs(ve6));
Me7 = max(abs(ve7));


Me=[Me1,Me2,Me3,Me4,Me5,Me6,Me7];



figure 2
plot(1:7,Me,'linewidth',2,'g');
grid minor
title("Andamento dell'errore interpolatorio calcolato al crescere della
    decomposizione \n calcolato mediante le tabelle degli errori ");
```


Andamento dell'errore di integrazione al crescere della decomposizione
calcolato come differenza tra RealI = 0.746824 e il valore dato dalla formula per un n dato
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
1
2
3
4
5
6
7
Indice della decomposizione

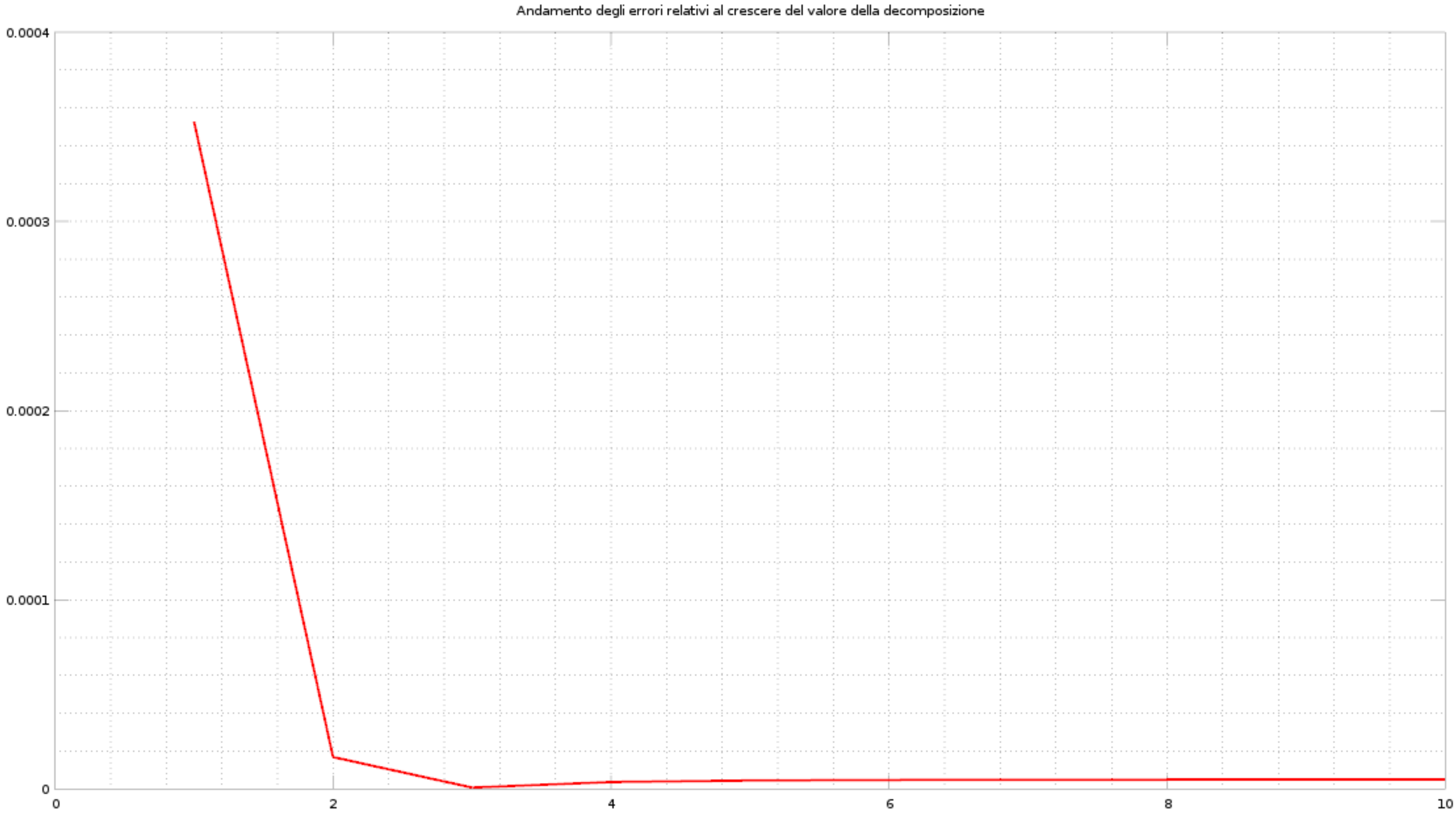

Andamento dell'errore interpolatorio calcolato al crescere della decomposizione
calcolato mediante le tabelle degli errori
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7

7.3 Esercizio 3

Costruzione di un grafico per la rappresentazione degli errori relativi nel calcolo dell'integrale definito $\int_0^1 sin(x)\,dx$ mediante le formule dei trapezi e di Cavalieri-Simpson iterate

```
% Errori relativi al calcolo dell'integrale definito tra 0 e 1
%  della funzione sin(x) con le formule di Cavalieri Simpson
%  al crescere dei sottointervalli della decomposizione


% RealI = integrate(0,1,@(x) sin(x));
% Calcolato Online risulta
RealI = 0.45970;

CS_coeff = [ 1/3, 4/3, 1/3 ];

b0 = 1;
a0 = 0;

b = @(i,j) a0 + j*((b0-a0)/i),
a = @(i,j) (j-1)/i;

% Voglio dividere l'intervallo in 2m sottointervalli di modo da poter
%  applicare la formula di CavalieriSimpson sottointervalli sulle coppie di
   sottointervalli
% Lo far\'{o} per n=1:10


function I = CavalieriSimpson(x,y,f)
   I = ((y-x)/2)*(1/3*f(x) + 4/3*f((x+y)/2) + 1/3*f(y));
endfunction

I = zeros(10);

for i=1:10
  for j=1:i
    I(i,j) = CavalieriSimpson(a(i,j),b(i,j),@(x) sin(x));
  endfor
endfor



% sommando i termini della stessa riga della matrice I ottengo un'
   approssimazione ( in teoria sempre migliore )
%  del valore dell'integrale del seno di x tra 0 e 1


Integralen = zeros(1,10);

for i=1:10
  for j=1:i
    Integralen(i) = Integralen(i) + I(i,j);
  endfor
endfor


RealIv = ones(1,10)*RealI;

err_rel = abs(RealIv-Integralen)./RealIv;

```

```
plot([1:10],err_rel,'linewidth',2,'r');
title(" Andamento degli errori relativi al crescere del valore della
    decomposizione ");
grid minor
```



8 Esercitazione 8

8.1 Esercizio 1
Utilizzo della tecnica del pivoting per la fattorizzazione LU

```
function [A, P] = pivoting(A)
    P = eye(length(A));
    for i = 1: length(A)
        if(A(i, i) == 0)
            [m, j] = max(abs(A(i:length(A), i)));
            j = i + j - 1;
            A([i,j],:) = A([j,i],:);
            P([i,j],:) = P([j,i],:);
        end
    end
end


% fattorizzazione LU

function [ L, U, P ] = lu_fact(A)
   [ A, P ] = pivoting(A);
   n = size(A);
   L = eye(n);
   U = zeros(n);

   for k=1:n-1
     for i=k+1:n
       L(i,k) = A(i,k)/A(k,k);
       A(i,:) = A(i,:) - L(i,k)*A(k,:);
     endfor
   endfor

   U = A;
endfunction



A1 =
        1, 0, 0, 1;
        1, 0, 0, 1;
        0, 0, 1, 1;
        2, 3, 4, 5;

A2 =
        4, 0,  2,  4;
        0, 1,  1,  1;
        2, 2, 11   9;
        4, 1,  9, 25;
```

```
[ l1 , u1, p1 ] = lu_fact(A1);

[ l2 , u2, p2 ] = lu_fact(A2);


[ ll1 , uu1, pp1 ] = lu(A1);
[ ll2 , uu2, pp2 ] = lu(A2);

% Fattorizzazione con lu_fact di A1
l1 =

   1   0   0   0
   2   1   0   0
   0   0   1   0
   1   0   0   1

u1 =

   1   0   0   1
   0   3   4   3
   0   0   1   1
   0   0   0   0

p1 =

   1   0   0   0
   0   0   0   1
   0   0   1   0
   0   1   0   0

p1*(l1*u1) =

   1   0   0   1
   1   0   0   1
   0   0   1   1
   2   3   4   5

A1 =

   1   0   0   1
   1   0   0   1
   0   0   1   1
   2   3   4   5


% Fattorizzazione con lu_fact di A2

l2 =

   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   1.00000   0.00000   0.00000
   0.50000   2.00000   1.00000   0.00000
   1.00000   1.00000   0.75000   1.00000

u2 =

    4.00000    0.00000    2.00000    4.00000
    0.00000    1.00000    1.00000    1.00000
    0.00000    0.00000    8.00000    5.00000
    0.00000    0.00000    0.00000   16.25000

```

```
p2 =

% Essendo la matrice di permutazione diagonale si pu\'{o} dedurre che nessuno dei minori
%  di A2 abbia determinante nullo, quindi non necessita di una premoltiplicazione per una
%  matrice di permutazione.

Diagonal Matrix

   1   0   0   0
   0   1   0   0
   0   0   1   0
   0   0   0   1

p2*(l2*u2) =

    4    0    2    4
    0    1    1    1
    2    2   11    9
    4    1    9   25



A2 =

    4    0    2    4
    0    1    1    1
    2    2   11    9
    4    1    9   25



% Fattorizzazione con lu di matlab di A1
ll1 =

   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.50000   1.00000   0.00000   0.00000
   0.00000  -0.00000   1.00000   0.00000
   0.50000   1.00000   0.00000   1.00000

uu1 =

   2.00000   3.00000   4.00000   5.00000
   0.00000  -1.50000  -2.00000  -1.50000
   0.00000   0.00000   1.00000   1.00000
   0.00000   0.00000   0.00000   0.00000

pp1 =

Permutation Matrix

   0   0   0   1
   0   1   0   0
   0   0   1   0
   1   0   0   0
```

```
pp1*(ll1*uu1) =

   1   0   0   1
   1   0   0   1
   0   0   1   1
   2   3   4   5

A1 =

   1   0   0   1
   1   0   0   1
   0   0   1   1
   2   3   4   5


% Fattorizzazione con lu di matlab di A2

ll2 =

   1.00000   0.00000   0.00000   0.00000
   0.50000   1.00000   0.00000   0.00000
   0.00000   0.50000   1.00000   0.00000
   1.00000   0.50000  -0.50000   1.00000

uu2 =

    4.00000    0.00000    2.00000    4.00000
    0.00000    2.00000   10.00000    7.00000
    0.00000    0.00000   -4.00000   -2.50000
    0.00000    0.00000    0.00000   16.25000
```

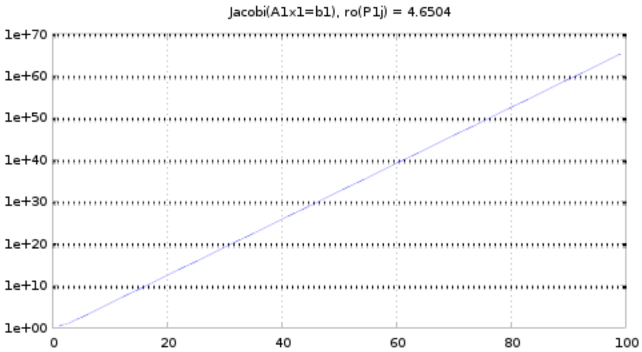
```
pp2 =
Permutation Matrix

   1   0   0   0
   0   0   1   0
   0   1   0   0
   0   0   0   1

 octave:172> pp2*(ll2*uu2)
ans =

    4    0    2    4
    0    1    1    1
    2    2   11    9
    4    1    9   25

A2 =

    4    0    2    4
    0    1    1    1
    2    2   11    9
    4    1    9   25


%Le matrici di permutazione restituite dall'algoritmo implementato nel
% linguaggio non sono le stesse che ottengo dal mio algoritmo.
% Evidentemente l'implementazione interna utilizza un algoritmo differente
% da quello di eliminazione gaussiana.
```

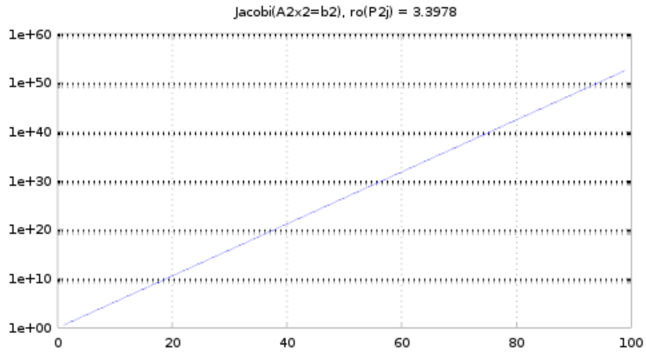
8.2 Esercizio 2
Implementazione dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per la soluzione approssimata di sistemi lineari1

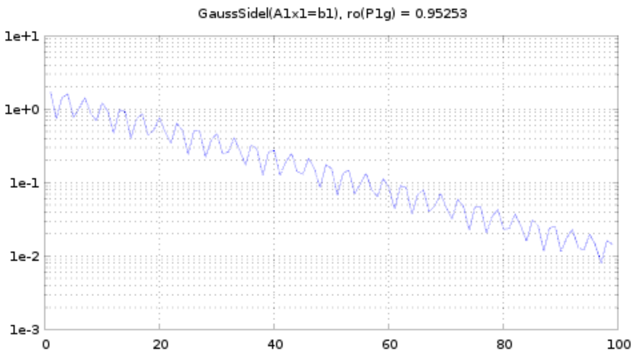
```
A1
        -3,  3,  -6
        -4,  7,  -8
         5,  7,  -9

b1 = -6; -5; 3


A2 =
         4,   1,   1
         2,  -9,   0
         0,  -8,  -6

b2 = 6; -7; -14


function [ xnew, err, ro ] = Jacobi(A,b,x0,Nmax,toll)

  D = diag(A);
  E = D-tril(A);
  F = D-triu(A);

  invD = diag(1./diag(A));
  Pj = invD*(E+F);  % Matrice di iterazione
  ro = max(abs(eig(Pj)));

  xold = x0;
  i=1;
  test = 1;
  err = zeros(1,Nmax);

  while i<Nmax && test>toll
    xnew    = Pj*xold + invD*b;   % Da definizione
    err(i)  = norm(xnew-xold);
    test    = err(i);
    xold    = xnew;
    i       = i+1;
  endwhile

  err = err(1:i-1);

endfunction



function [ xnew, err, ro ] = GaussSeidel(A,b,x0,Nmax,toll)

  D = diag(A);
  E = D-tril(A);
  F = D-triu(A);

  invDE = inv(D+E);
  Pgs = invDE*F;  % Matrice di iterazione
  ro = max(abs(eig(Pgs)));

  xold = x0;
```

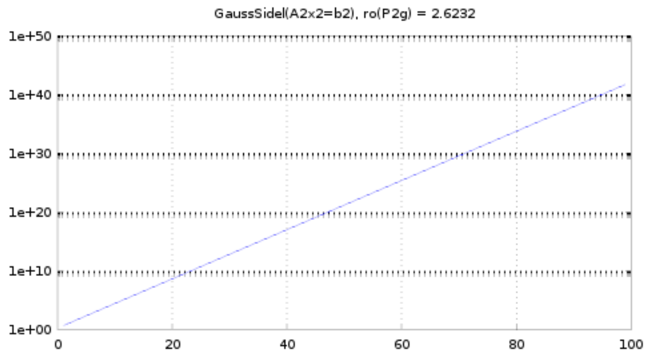
```
  i=1;
  test = 1;
  err = zeros(1,Nmax);

  while i<Nmax && test>toll
    xnew   = Pgs*xold + invDE*b;   % Da definizione
    err(i) = norm(xnew-xold);
    test   = err(i);
    xold   = xnew;
    i      = i+1;
  endwhile

  err = err(1:i-1);

endfunction




[x1j, err1j, ro1j]= Jacobi(A1, b1, zeros(3, 1), 100, 10^-3);
[x2j, err2j, ro2j]= Jacobi(A2, b2, zeros(3, 1), 100, 10^-3);


[x1g, err1g, ro1g]= GaussSeidel(A1, b1, zeros(3, 1), 100, 10^-3);
[x2g, err2g, ro2g]= GaussSeidel(A2, b2, zeros(3, 1), 100, 10^-3);



hold on
subplot(2,2,1)
semilogy(1:length(err1j), err1j)
title([ "Jacobi(A1x1=b1), ro(P1j) = " num2str(ro1j) ] )
grid on
subplot(2,2,2)
semilogy(1:length(err2j), err2j)
title([ "Jacobi(A2x2=b2), ro(P2j) = " num2str(ro2j) ] )
grid on
subplot(2,2,3)
semilogy(1:length(err1g), err1g)
title([ "GaussSidel(A1x1=b1), ro(P1g) = " num2str(ro1g) ] )
grid on
subplot(2,2,4)
semilogy(1:length(err2g), err2g)
title(["GaussSidel(A2x2=b2), ro(P2g) = " num2str(ro2g) ])
grid on

[firstnumber=last]
%%% fprintf degli errori %%%%

e1j = [ 1:length(err1j); err1j ];
e2j = [ 1:length(err2j); err2j ];

e1g = [ 1:length(err1g); err1g ];
e2g = [ 1:length(err2g); err2g ];


file_errori = fopen('errori1j.txt','w');
fprintf(file_errori, '%6s %56s\n', 'x', 'errore sistema 1 con Jacobi')
fprintf(file_errori, '%6.2f %56.8f\n' , e1j);

file_errori = fopen('errori2j.txt','w');
```

```
fprintf(file_errori , '%6s %56s\n', 'x', 'errore sistema 2 con Jacobi')
fprintf(file_errori , '%6.2f %56.8f\n' , e2j);

file_errori = fopen('errori1g.txt','w');
fprintf(file_errori , '%6s %56s\n', 'x', 'errore sistema 1 con Gauss Sidel')
fprintf(file_errori , '%6.2f %56.8f\n' , e1g);

file_errori = fopen('errori2g.txt','w');
fprintf(file_errori , '%6s %56s\n', 'x', 'errore sistema 2 con Gauss Sidel')
fprintf(file_errori , '%6.2f %56.8f\n' , e2g);
```









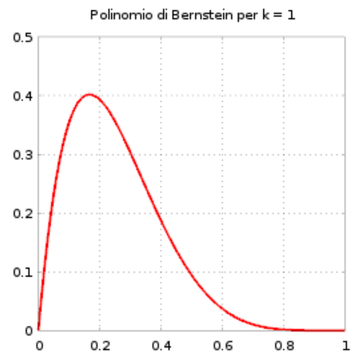
Si noti che l'unica successione convergente è quella che usa il metodo di Gauss Sidel sul primo dei sistemi, la matrice d'iterazione associata infatti ha raggio spettrale minore di 1.
Abbiamo un teorema che ci dice che questa è una condizione necessaria e sufficiente, quindi è coerente con la teoria avere come unica successione convergente quella che ha matrice associata d'iterazione con raggio spettrale minore di 1

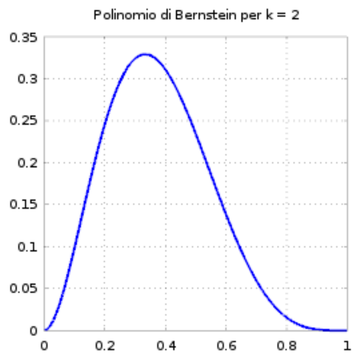
9 Esercitazione 9

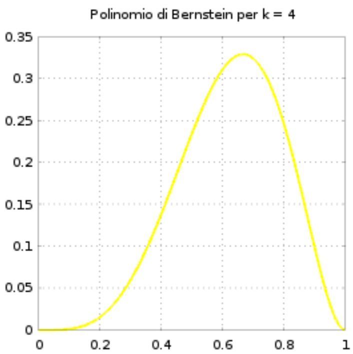
9.1 Esercizio 1
Polinomi approsimanti di Bernstein

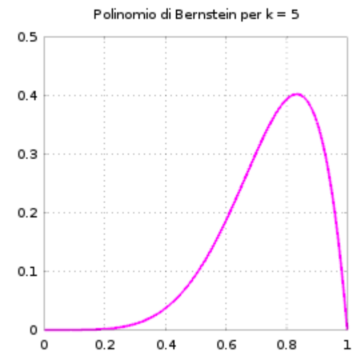
```
color = ['r','b','g','y','m','c'];

%%% Valuta i polinomi di Bernstein  per t in [0,1] noti k e n  %%%%

function [ber]=bernstein(n,k)
   i=0;
   if k == 0
     coef=1 ;
   else
     coef=prod([1:n])/(prod([1:k])*prod([1:n-k]));
   end
   for t=0:0.01:1
     i=i+1;
     ber(i)=coef*t^k*(1-t)^(n-k);
   endfor
endfunction


%%% Bnk per k =1:n fissato n %%%

n=6;

for k=1:n
 B(k,:) = bernstein(n,k);
endfor


x = 0:0.01:1;


for i=1:n
 plot(x,B(i,:),'linewidth',2,color(i))
 legend([" m = " num2str(i)])
 grid on
 hold on
endfor
title(" Polinomi di Bernstein per k da 1 a 6 ");
hold off
legend("m=1","m=2","m=3","m=4","m=5","m=6")

figure 2
for i=1:n
 subplot(2,3,i)
 plot(x,B(i,:),'linewidth',2,color(i))
 grid on
 title([ "Polinomio di Bernstein per k = " num2str(i) ]);
endfor


%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% SECONDA PARTE %%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%


n=4;

```

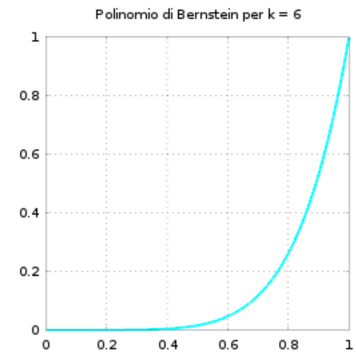
```
f = inline('sqrt(x+1)');
x = linspace(0,1,n);
y = f(x);

xx = 0:0.01:1;
yy = interp1(x,y,xx);

P = polyfit(x,f(x),3);
Pv = polyval(P,xx);

berValues = zeros(101, 1);
for i = 0:3
berValues = berValues + f(i/3).*bernstein(3,i)';
end

figure 3
plot(xx,Pv,'linewidth',1.5,'k',xx,berValues,'linewidth',2,'r*',xx,yy,'linewidth'
    ,2,'g',x,y,'o','linewidth',2);
legend('Interpolazione Polinomiale','Interpolazione di Bernstein','
    Interpolazione con spline lineare','Nodi di passaggio')
grid on
```

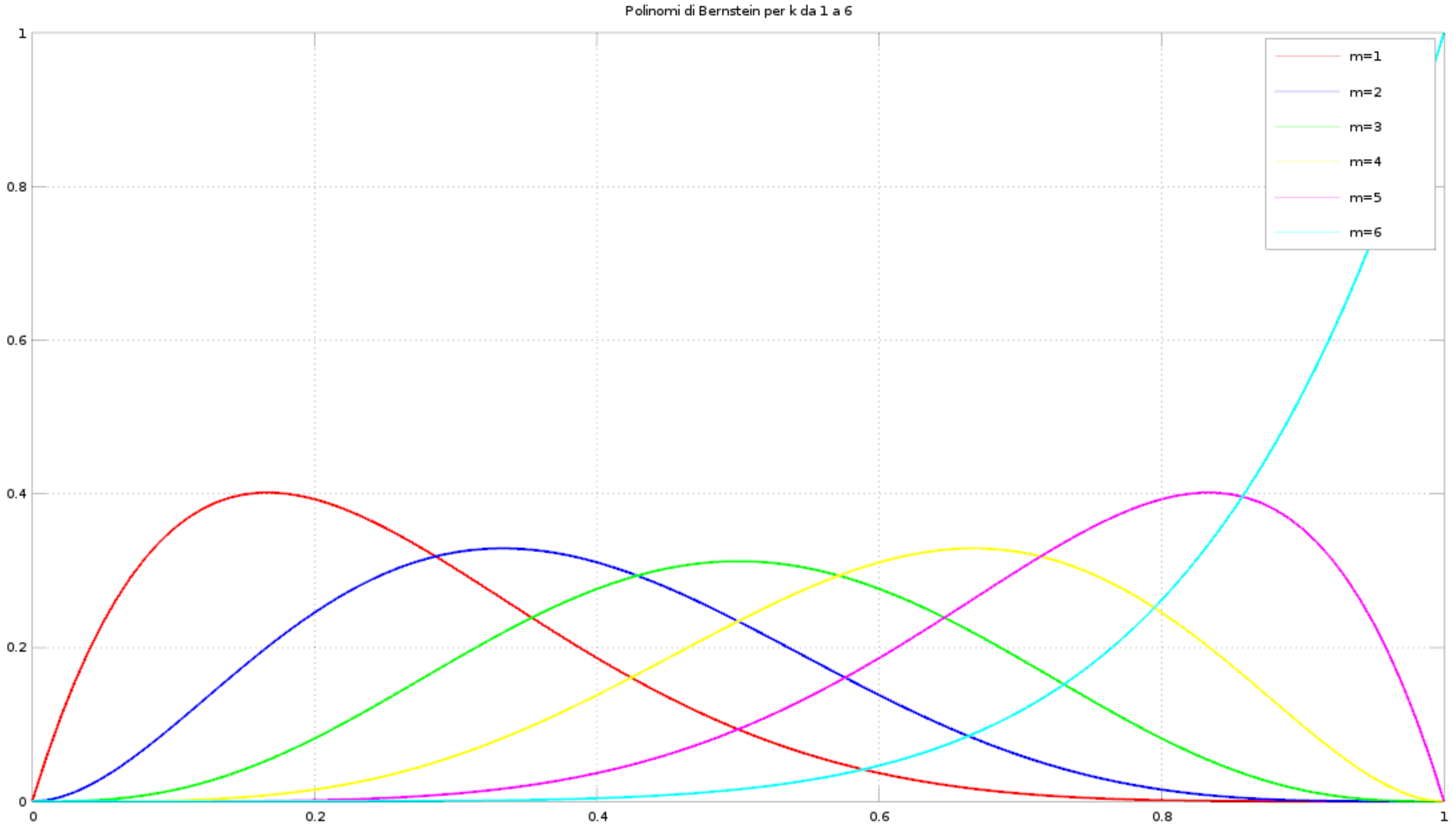


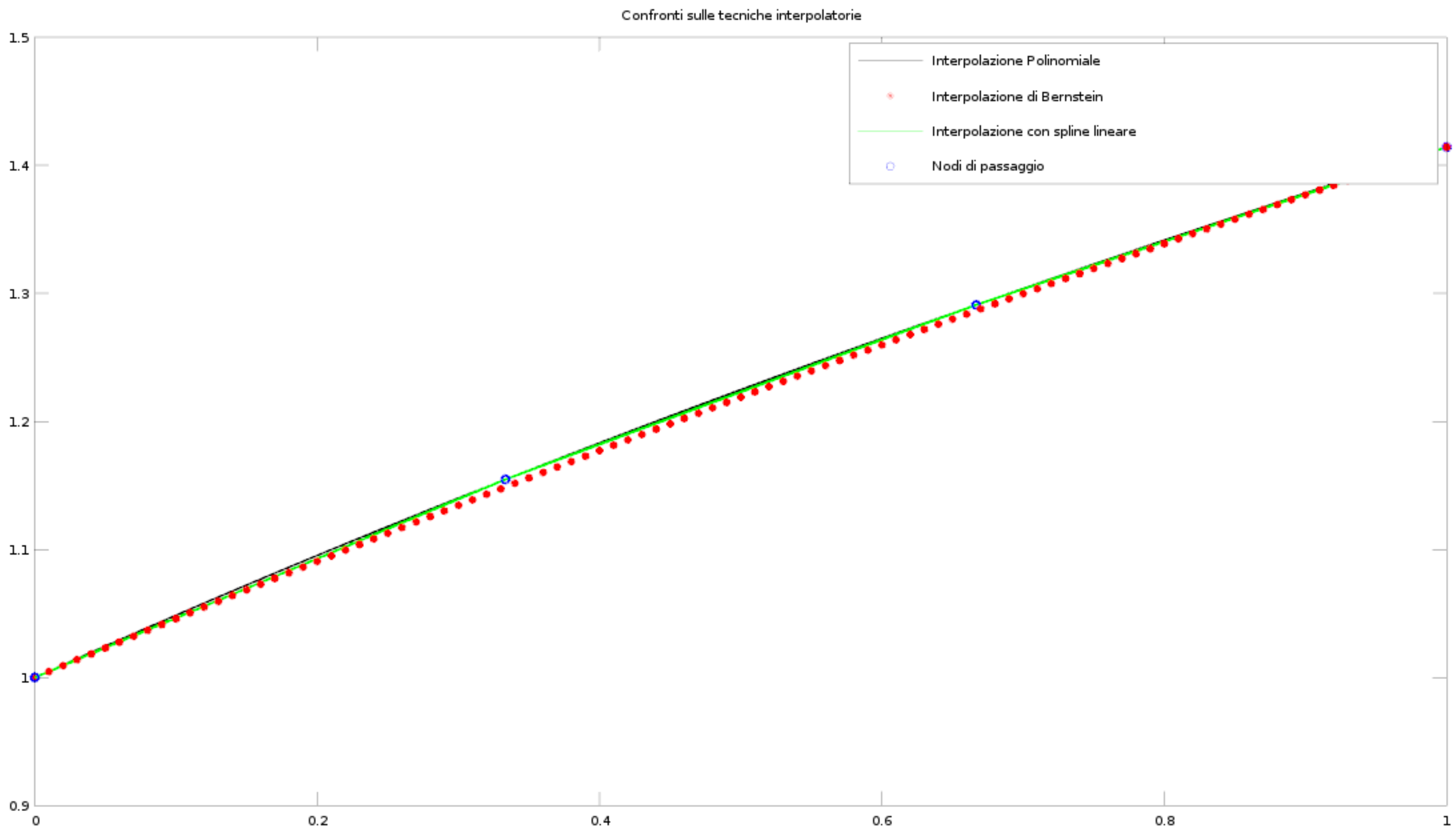


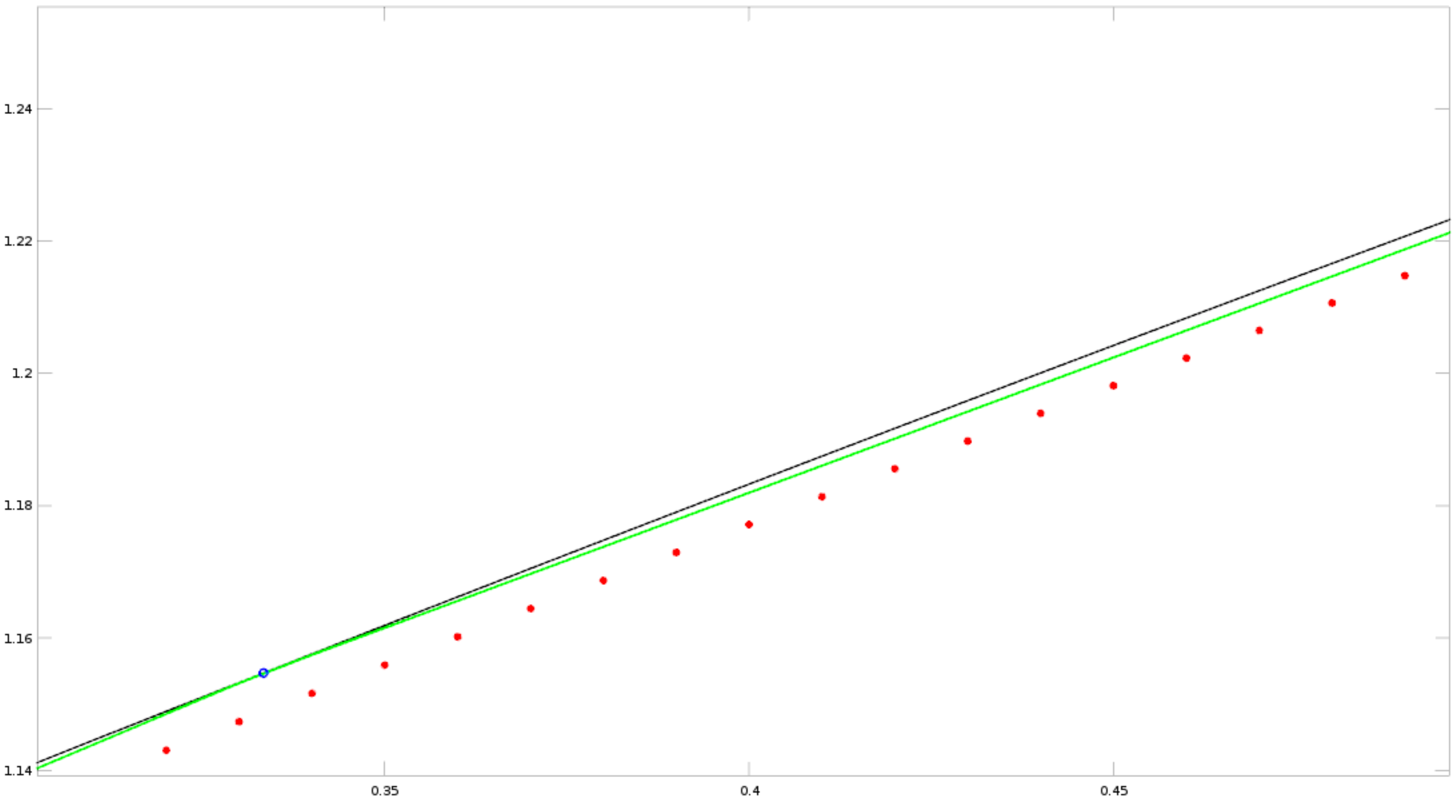






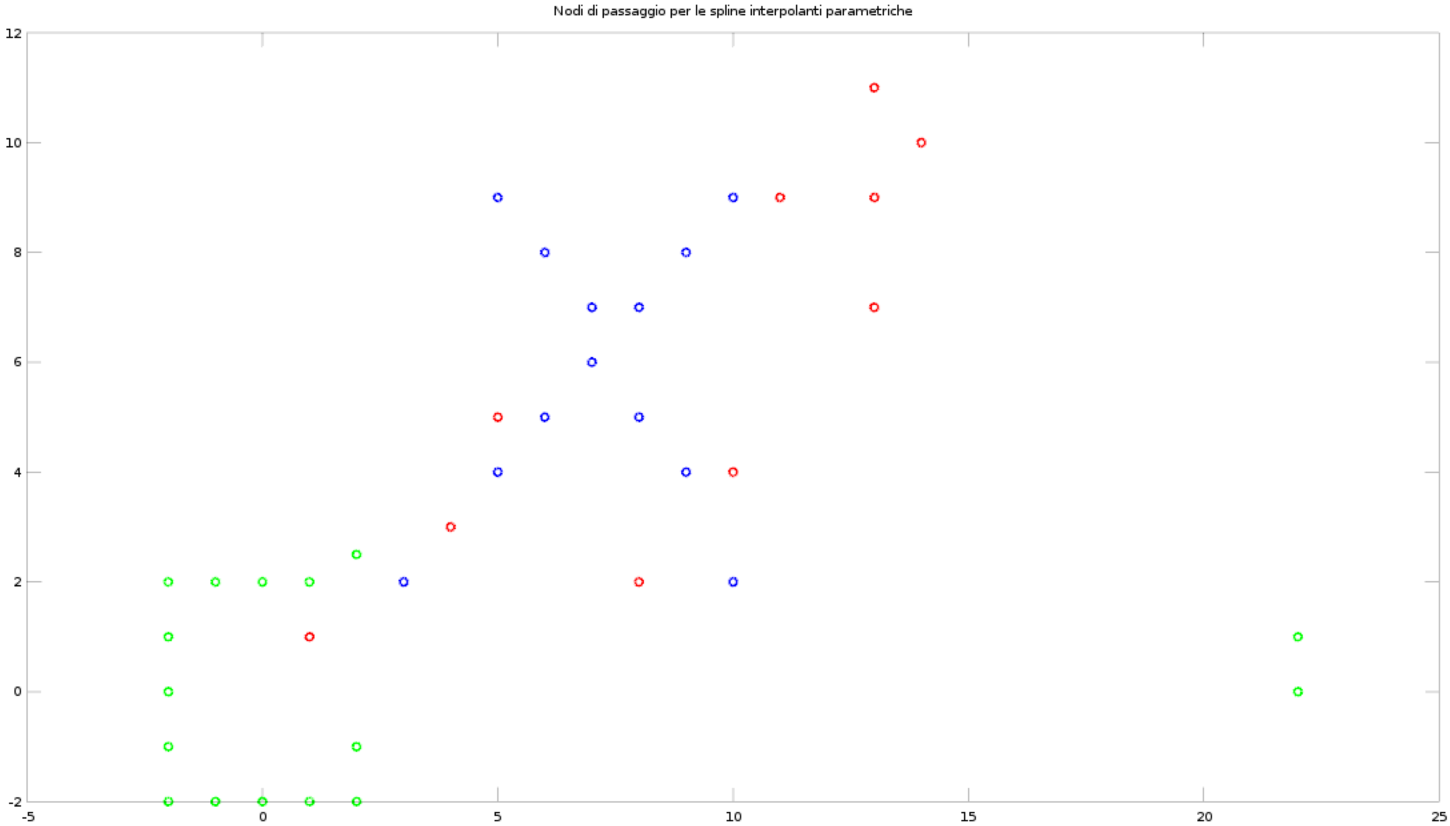

Polinomi di Bernstein per k da 1 a 6
m=1
m=2
m=3
m=4
m=5
m=6

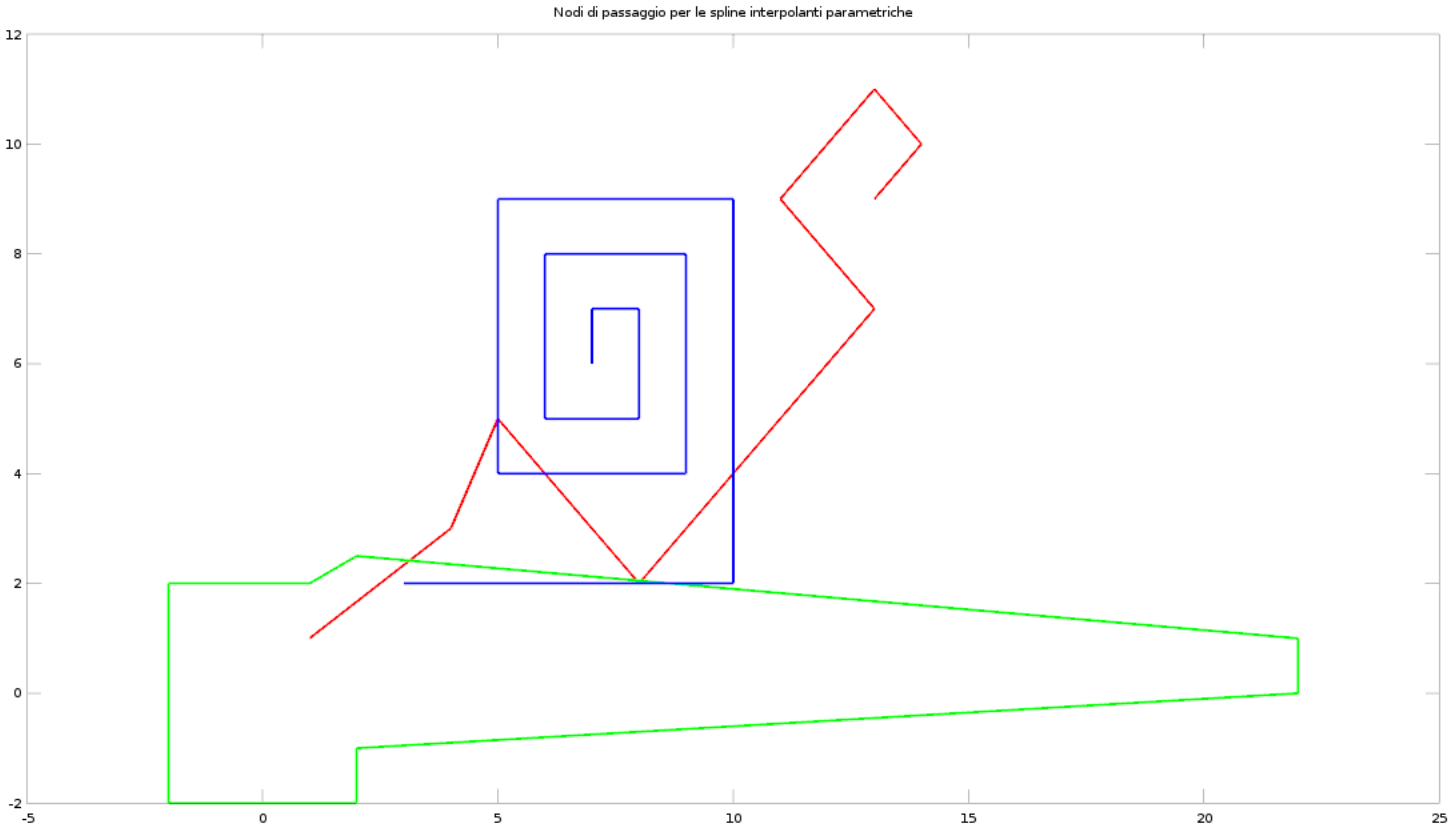

Confronti sulle tecniche interpolatorie
Interpolazione Polinomiale
Interpolazione di Bernstein
Interpolazione con spline lineare
Nodi di passaggio

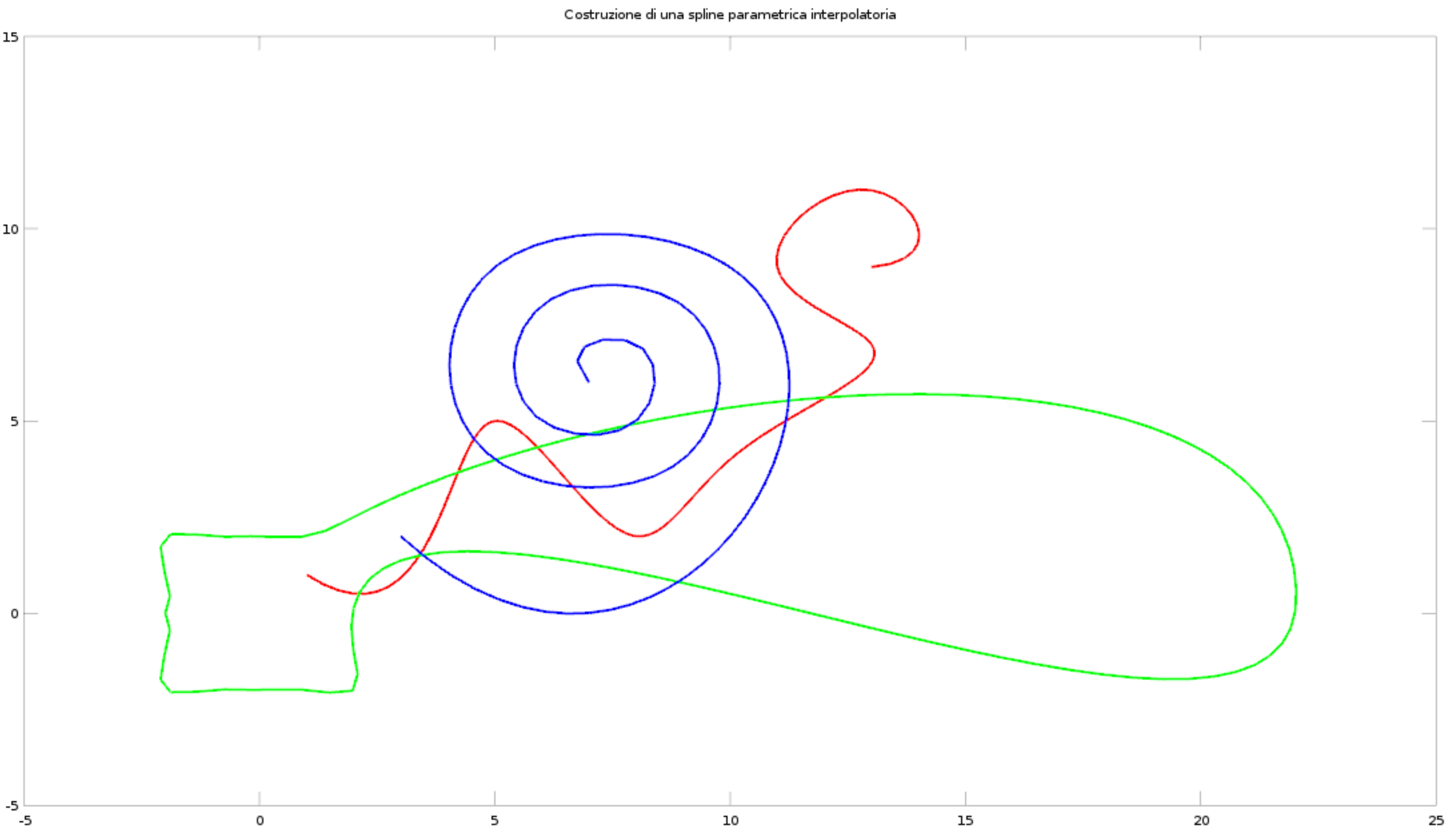

1.24
1.22
1.2
1.18
1.16
1.14
0.35
0.4
0.45

9.2 Esercizio 2 Spline interpolanti per curve parametriche

```
#{
    When called with two arguments, return the piecewise polynomial PP
    that may be used with 'ppval' to evaluate the polynomial at
    specific points.  When called with a third input argument, 'spline'
    evaluates the spline at the points XI.  The third calling form
    'spline (X, Y, XI)' is equivalent to 'ppval (spline (X, Y), XI)'.

    The variable X must be a vector of length N.  Y can be either a
    vector or array.  If Y is a vector it must have a length of either
    N or 'N + 2'.  If the length of Y is N, then the "not-a-knot" end
    condition is used.  If the length of Y is 'N + 2', then the first
    and last values of the vector Y are the values of the first
    derivative of the cubic spline at the endpoints.q

#}

function [ xi, yi ] = par_spline(x,y)
  t(1) = 0;
  for i=1:length(x)-1
    t(i+1) = t(i) + sqrt((x(i+1)-x(i))^2 + (y(i+1)-y(i))^2);
  endfor
  z = [t(1):(t(length(t))-t(1))/100:t(length(t))];
  xi = spline(t,x,z);
  yi = spline(t,y,z);

endfunction


x1 = [1,4,5,8,10,13,11,13,14,13];
y1 = [1,3,5,2,4,7,9,11,10,9];

x2 = [-2,-2,-2,-1,0,1,2,22,22,2,2,1,0,-1,-2,-2,-2];
y2 = [0,1,2,2,2,2,2.5,1,0,-1,-2,-2,-2,-2,-2,-1,0];

x3 = [3,10,10,5,5,9,9,6,6,8,8,7,7];
y3 = [2,2,9,9,4,4,8,8,5,5,7,7,6];




[ xx1,yy1 ] = par_spline(x1,y1);
[ xx2,yy2 ] = par_spline(x2,y2);
[ xx3,yy3 ] = par_spline(x3,y3);


%% Plotting nodes
plot(x1,y1,'ro','linewidth',2,x2,y2,'go','linewidth',2,x3,y3,'bo','linewidth',2)
    ;
title("Nodi di passaggio per le spline interpolanti parametriche")

%% Plotting nodes
plot(x1,y1,'r','linewidth',2,x2,y2,'g','linewidth',2,x3,y3,'b','linewidth',2);
title("Nodi di passaggio per le spline interpolanti parametriche")

figure 2
plot(xx1,yy1,'r','linewidth',2,xx2,yy2,'g','linewidth',2,xx3,yy3,'b','linewidth'
    ,2);
title("Costruzione di una spline parametrica interpolatoria")
```

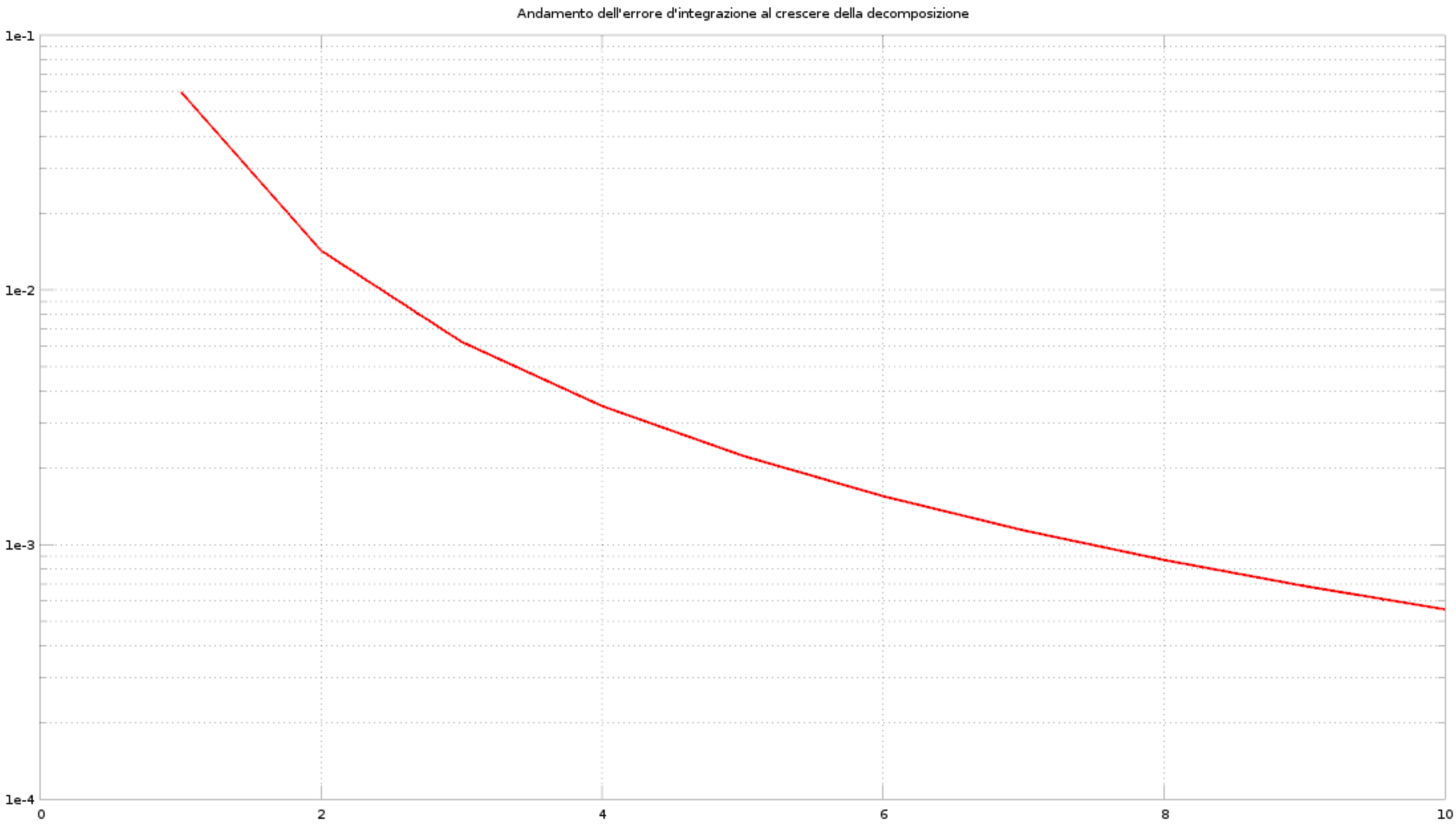

Nodi di passaggio per le spline interpolanti parametriche
12
10
8
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
25


Nodi di passaggio per le spline interpolanti parametriche
12
10
8
6
4
2
0
-2
-5
0
5
10
15
20
25


Costruzione di una spline parametrica interpolatoria
15
10
5
0
-5
-5
0
5
10
15
20
25

9.3 Esercizio 3
Formule di quadratura per integrali doppi

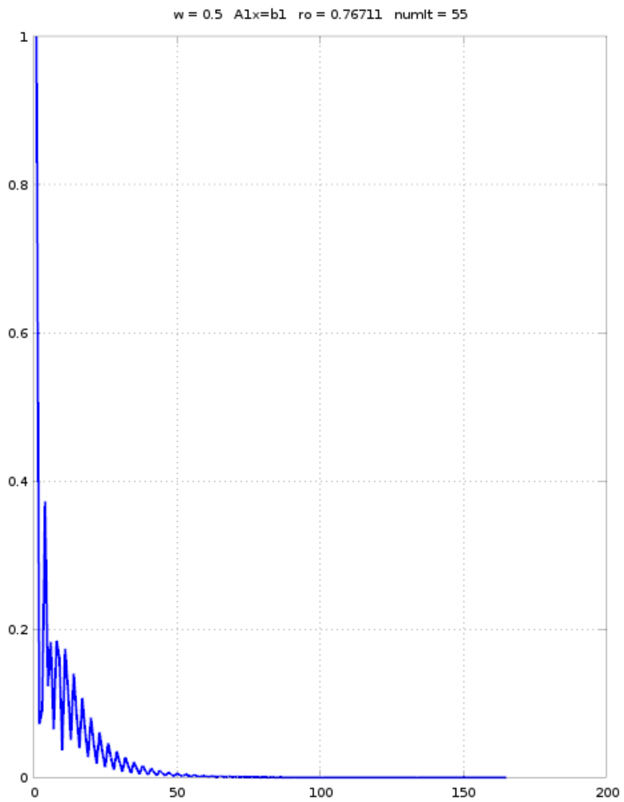
```
m = 10;
n = 10;


function [ I ] = trapezi(f,a,b,c,d)

  hx = b-a;
  hy = d-c;

  I = ((hx*hy)/4)*(f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d));

endfunction

function [ I ] = trapezi_iterata(f,a,b,c,d,m,n)

  hx = (b-a)/n;
  hy = (d-c)/m;

  I = 0;
  for i=0:n-1
    for j=0:m-1

      I = I + trapezi(f, a+i*hx, a+(i+1)*hx, c+j*hy, c+(j+1)*hy);
    endfor
  endfor

endfunction

f  = @(x,y) (1./(1+x+y))

RealI = 0.523248;

for i=1:10
  I(i) = trapezi_iterata(f,0,1,0,1,i,i);
  err(i) = abs(I(i)-RealI)
endfor


x=1:10;
semilogy(x,err,'r','linewidth',2);
title("Andamento dell'errore d'integrazione al crescere della decomposizione");
grid on
```

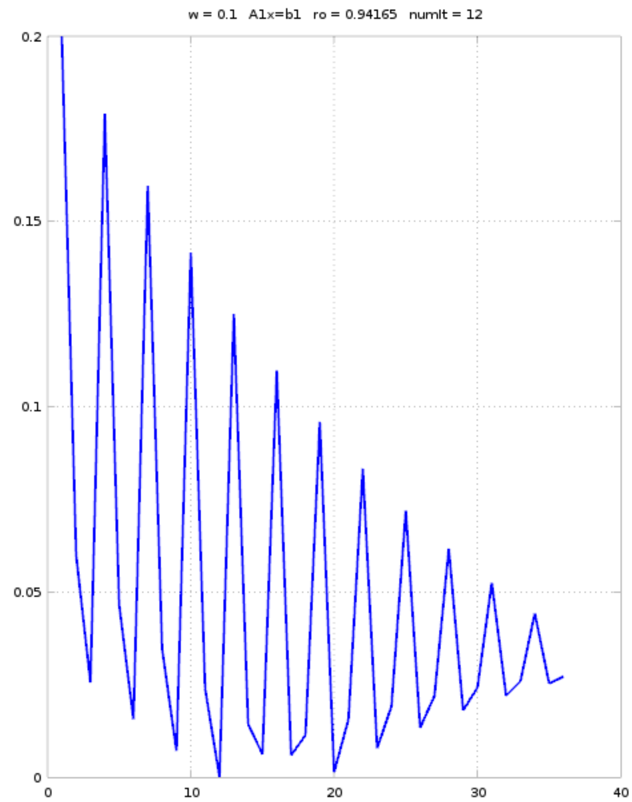

Andamento dell'errore d'integrazione al crescere della decomposizione
1e-1
1e-2
1e-3
1e-4
0
2
4
6
8
10

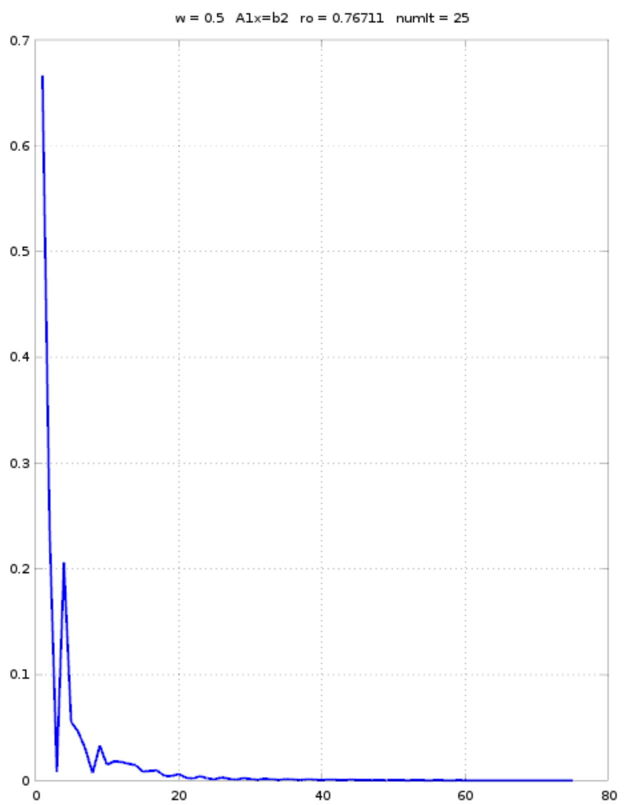
9.4 Esercizio 4
Metodo iterativo SOR per la risoluzione di sistemi lineari

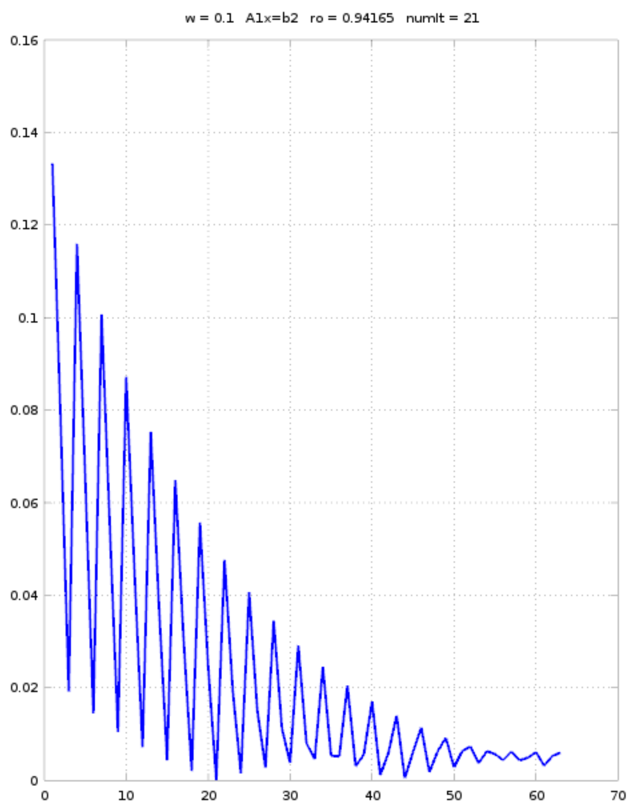
```
function [ x, ro, err, numIt ] = SOR(A,b,x0,w,toll)

 if(size(A)(1)~=size(A)(2))
    error("La matrice deve essere quadrata");
  endif

  n=size(A);

  D = diag(diag(A));
  L = tril(A,-1);
  U = triu(A,1);
  invD = diag(1./diag(A));
  I = eye(n);
  % Matrice di Iterazione
  P = inv((I+w*invD*L))*[(1-w)*I-w*invD*U];

  ro = max(abs(eig(P)));

  numIt = 0;
  err = [];
  xold = x0;
  xnew = xold;
  while(1)
    numIt = numIt+1;
    xold = xnew;
    xnew = P*xold + w*inv(I+w*invD*L)*invD*b;
    err = [ err; abs(xnew-xold) ];
    if(max(err(numIt))<toll)
      break
    endif
  endwhile

  x = xnew;

endfunction


A1 = [
        -3, 3, -6;
        -4, 7, -8;
         5, 5, -9;
      ];

A2 = [
        7,  4, -7;
        4,  5, -3;
       -7, -3,  8;
        ];

b1 = [ -6; -5;  3 ];
b2 = [  4;  6; -2 ];


toll = 10^-3;
x0 = [0;0;0];



```

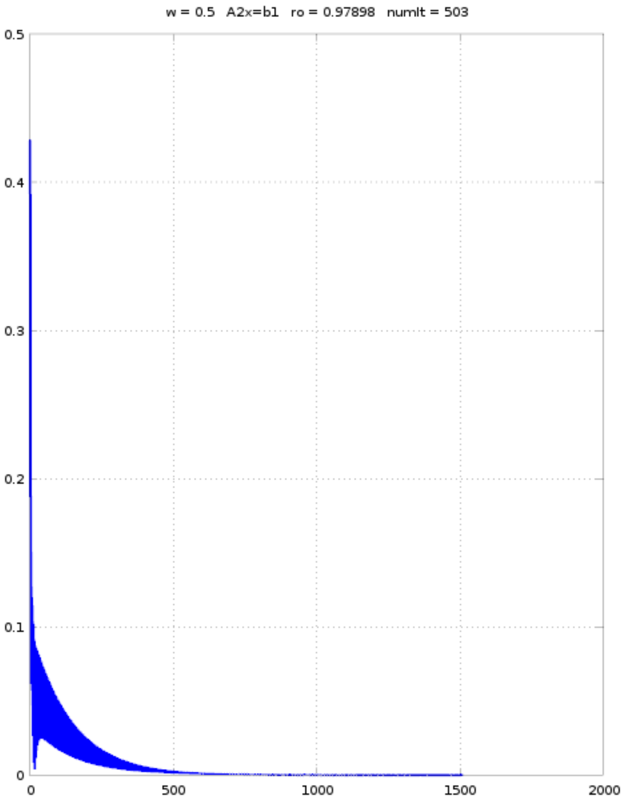
```
figure 1
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A1,b1,x0,0.5,toll);
subplot(1,2,1)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.5    A1x=b1    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A1,b1,x0,0.1,toll);
subplot(1,2,2)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.1    A1x=b1    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on


figure 2
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A1,b2,x0,0.5,toll);
subplot(1,2,1)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.5    A1x=b2    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A1,b2,x0,0.1,toll);
subplot(1,2,2)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.1    A1x=b2    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on


figure 3
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A2,b1,x0,0.5,toll);
subplot(1,2,1)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.5    A2x=b1    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A2,b1,x0,0.5,toll);
subplot(1,2,2)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.1    A2x=b1    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on



figure 4
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A2,b2,x0,0.5,toll);
subplot(1,2,1)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.5    A2x=b2    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on
[ x, ro, err, numIt ] = SOR(A2,b2,x0,0.5,toll);
subplot(1,2,2)
plot(1:length(err), err, 'linewidth',2)
title(["w = 0.1    A2x=b2    ro = " num2str(ro) "    numIt = " num2str(numIt)])
grid on
```

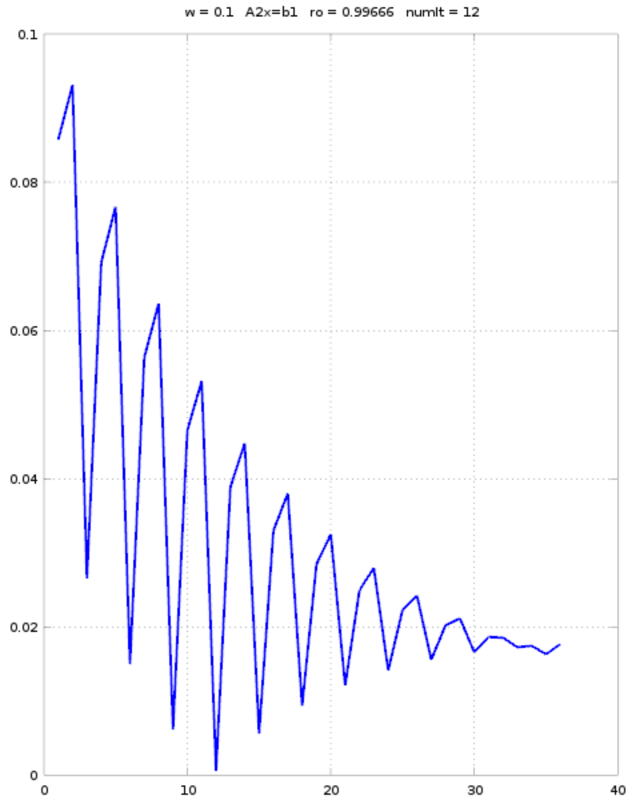

w = 0.5   A1x=b1   ro = 0.76711   numIt = 55
0 50 100 150 200
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1

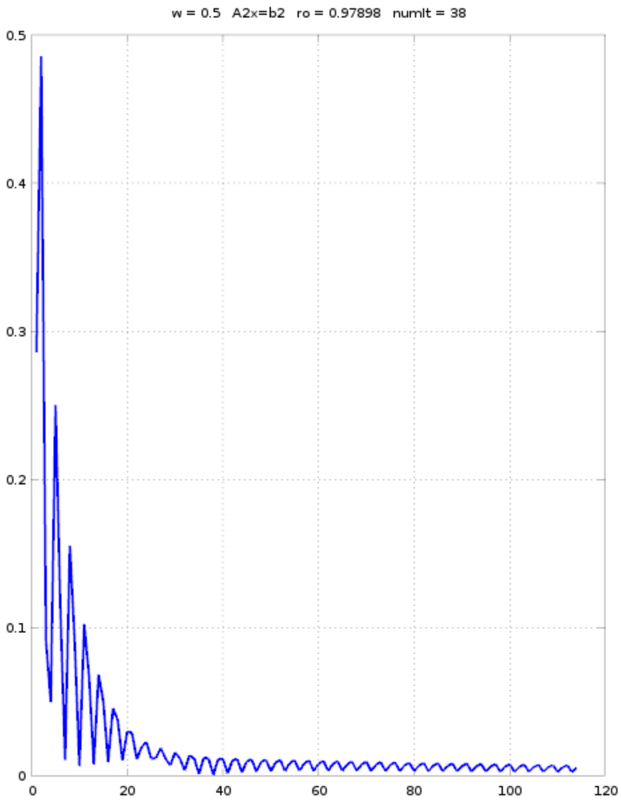

w = 0.1   A1x=b1   ro = 0.94165   numIt = 12
0 10 20 30 40
0 0.05 0.1 0.15 0.2

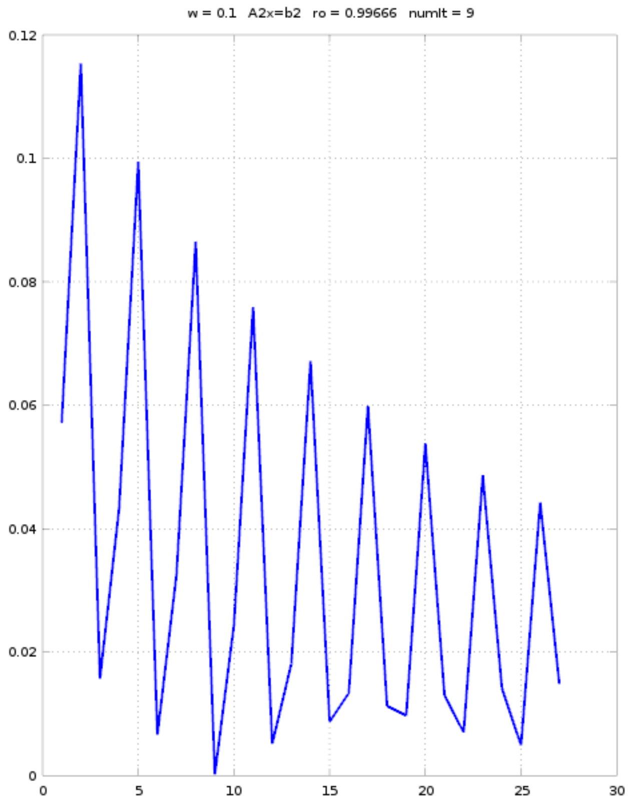

w = 0.5   A1x=b2   ro = 0.76711   numIt = 25
0 20 40 60 80
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7


w = 0.1   A1x=b2   ro = 0.94165   numIt = 21
0 10 20 30 40 50 60 70
0 0.02 0.04 0.06 0.08 0.1 0.12 0.14 0.16


w = 0.5 A2x=b1 ro = 0.97898 numIt = 503
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
500
1000
1500
2000


w = 0.1 A2x=b1 ro = 0.99666 numIt = 12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
10
20
30
40


w = 0.5 A2x=b2 ro = 0.97898 numIt = 38
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
20
40
60
80
100
120


w = 0.1 A2x=b2 ro = 0.99666 numIt = 9
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
5
10
15
20
25
30