Nome: Patrícia de Andrade Kovaleski

Otimização Natural
Lista 2

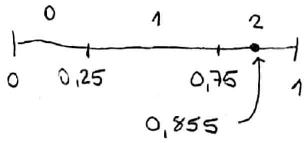
(1) a)

$$p_1 = Mp_0 \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}50 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}}_{p_0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}325 \\ 0{,}35 \\ 0{,}325 \end{bmatrix}}_{p_1}$$

$$p_2 = Mp_1 \rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}33125 \\ 0{,}3375 \\ 0{,}33125 \end{bmatrix}}_{p_2} \qquad p_3 = Mp_2 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0{,}3328125 \\ 0{,}334375 \\ 0{,}3328125 \end{bmatrix} \approx \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}33 \\ 0{,}33 \\ 0{,}33 \end{bmatrix}}_{p_3} \quad //$$

b) $X[0] = 1 \qquad p_0 = [0, 1, 0]^T$

$M[:,1] = [0{,}25, 0{,}5, 0{,}25]^T \qquad$ rand() = 0,855 → $X[1] = 2$



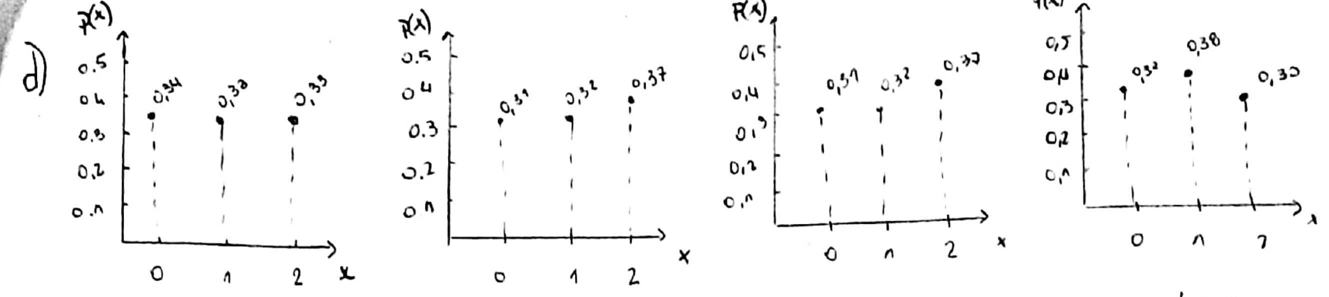
$M[:,2] = [0{,}25, 0{,}25, 0{,}5]^T \qquad$ rand() = 0,519 → $X[2] = 2$

$M[:,2] = [0{,}25, 0{,}25, 0{,}5]^T \qquad$ rand() = 0,908 → $X[3] = 2$ //

c)

```
A = np.zeros([100,4])
for i in range(100):
    estado_0 = i%3
    x=[estado_0]
    for t in range(3):
        r = np.random.rand()
        M' = M[:,x[t]]
        if 0 ≤ r < M'[0] :
            x.append(0)
        elif M'[0] ≤ r < M'[0]+M'[1]:
            x.append(1)
        else:
            x.append(2)
    A[i] = x
```

d)



t = 0 t = 1 t = 2 t = 3

Em $t=0$ os estados foram inicializados com probabilidade uniforme. Porém, vemos que a distribuição de probabilidade se mantém próxima a uniforme para os t's seguintes; o que faz sentido, uma vez que ela deve convergir para seu vetor $\pi = [1/3 \ 1/3 \ 1/3]^T$.

(2)

a) • $1 \to 2$: $\Delta J = -0.3 \Rightarrow \underbrace{P(\text{aceitar } 2 \mid \text{sortear } 2)}_{1} \underbrace{P(\text{sortear } 2)}_{1/4} = 1/4$

• $1 \to 3$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$ • $1 \to 4$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$ • $1 \to 5$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$

• $2 \to 1$: $\Delta J = 0.3 \Rightarrow e^{-0.3/0.1} \cdot 1/4 = e^{-3}/4$ • $2 \to 4$: $\Delta J < 0 = 1/4$

• $2 \to 3$: $\Delta J = 0.1 \Rightarrow e^{-1}/4$ • $2 \to 5$: $\Delta J = 0.2 \Rightarrow e^{-2}/4$

• $4 \to 3$: $\Delta J = 0.2 \Rightarrow e^{-2}/4$ • $4 \to 5$: $\Delta J = 0.3 \Rightarrow e^{-3}/4$

• $3 \to 1$: $\Delta J = 0.2 \Rightarrow e^{-2}/4$ • $3 \to 2$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$ • $3 \to 4$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$

• $3 \to 5$: $\Delta J = 0.1 \Rightarrow e^{-1}/4$ • $5 \to 1$: $\Delta J = 0.1 \Rightarrow e^{-1}/4$ • $5 \to 2$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$

• $5 \to 3$: $\Delta J < 0$: $1/4$ • $5 \to 4$: $\Delta J < 0 \Rightarrow 1/4$ • $4 \to 1$: $\Delta J = 0.4 \Rightarrow e^{-4}/4$
• $4 \to 2$: $\Delta J = 0.1 \Rightarrow e^{-1}/4$

M	1	2	3	4	5
1	0	$e^{-3}/4$	$e^{-2}/4$	$e^{-4}/4$	$e^{-1}/4$
2	1/4	$(3/4 - e^{-3}/4 - e^{-1}/4 - e^{-2}/4)$	1/4	$e^{-1}/4$	1/4
3	1/4	$e^{-1}/4$	$(1/2 - e^{-2}/4 - e^{-1}/4)$	$e^{-2}/4$	1/4
4	1/4	1/4	1/4	$(1 - e^{-4}/4 - e^{-1}/4 - e^{-2}/4 - e^{-3}/4)$	1/4
5	1/4	$e^{-2}/4$	$e^{-1}/4$	$e^{-3}/4$	$(1/4 - e^{-1}/4)$

b) $X[0] = 1$

$t=1: M[:,0] \cong [0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25]$ rand() = 0,885 $X[1] = 5$

$t=2: M[:,5] \cong [0.092, 0.25, 0.25, 0.25, 0.158]$ rand() = 0,527 $X[2] = 3$

$t=3: M[:,3] = [0.034, 0.25, 0.374, 0.25, 0.092]$ rand() = 0,581 $X[3] = 3$

$t=4: M[:,3] = [0.034, 0.25, 0.374, 0.25, 0.092]$ rand() = 0,689 $X[4] = 4$

c) Devemos encontrar o autovetor associado ao autovalor 1. Utilizando a função "np. linalg. eig(M)" o vetor invariante encontrado foi:

$$P = [0.0117, 0.2341, 0.0861, 0.6364, 0.0317]^T$$

↳ normalizado

d)

$x=1 \rightarrow e^{-5} \approx 0{,}0067$

$x=2 \rightarrow e^{-2} \approx 0{,}1353$

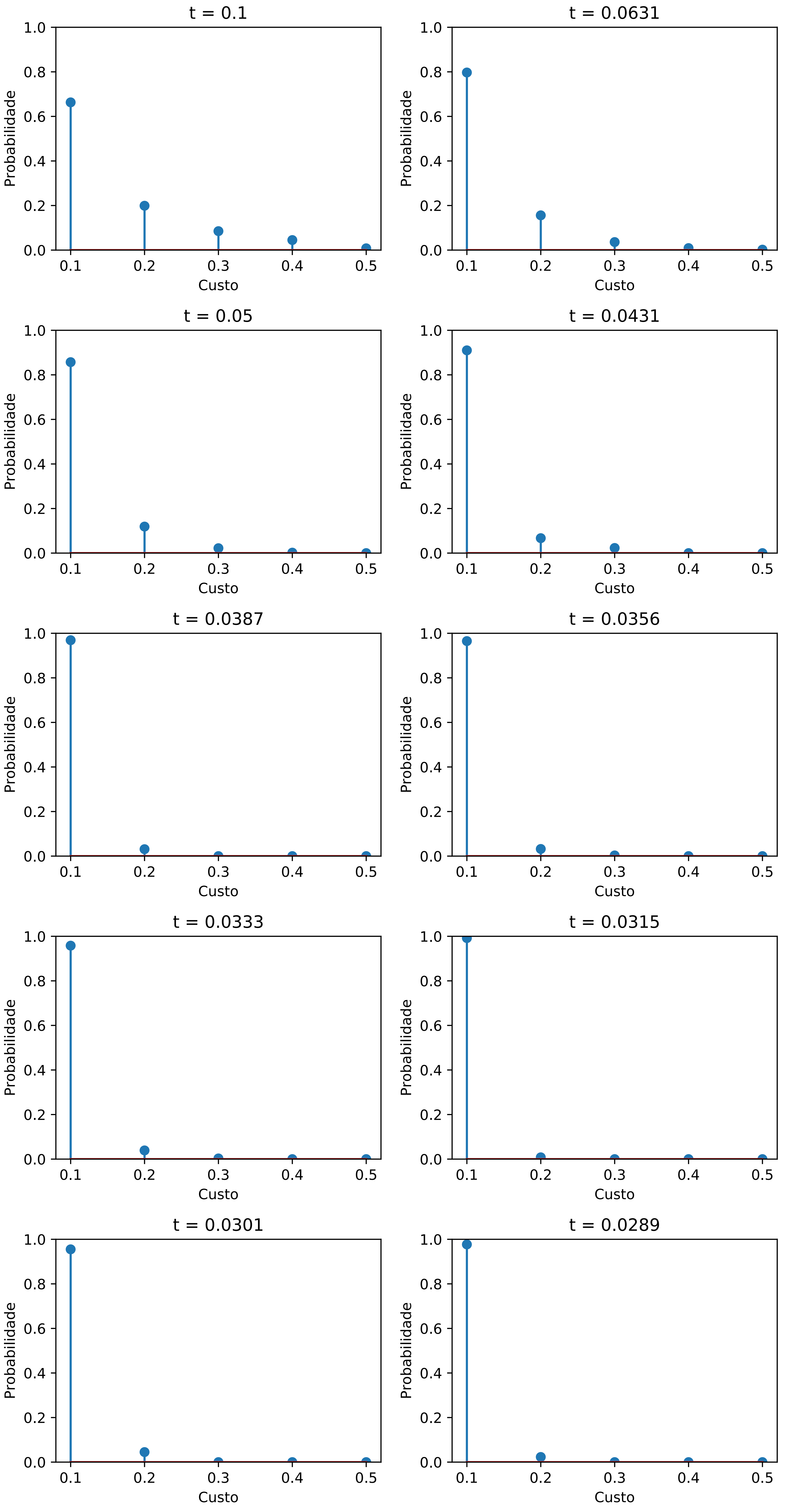
$x=3 \rightarrow e^{-3} \approx 0{,}04979$

$x=4 \rightarrow e^{-1} \approx 0{,}3679$

$x=5 \rightarrow e^{-4} \approx 0{,}0183$

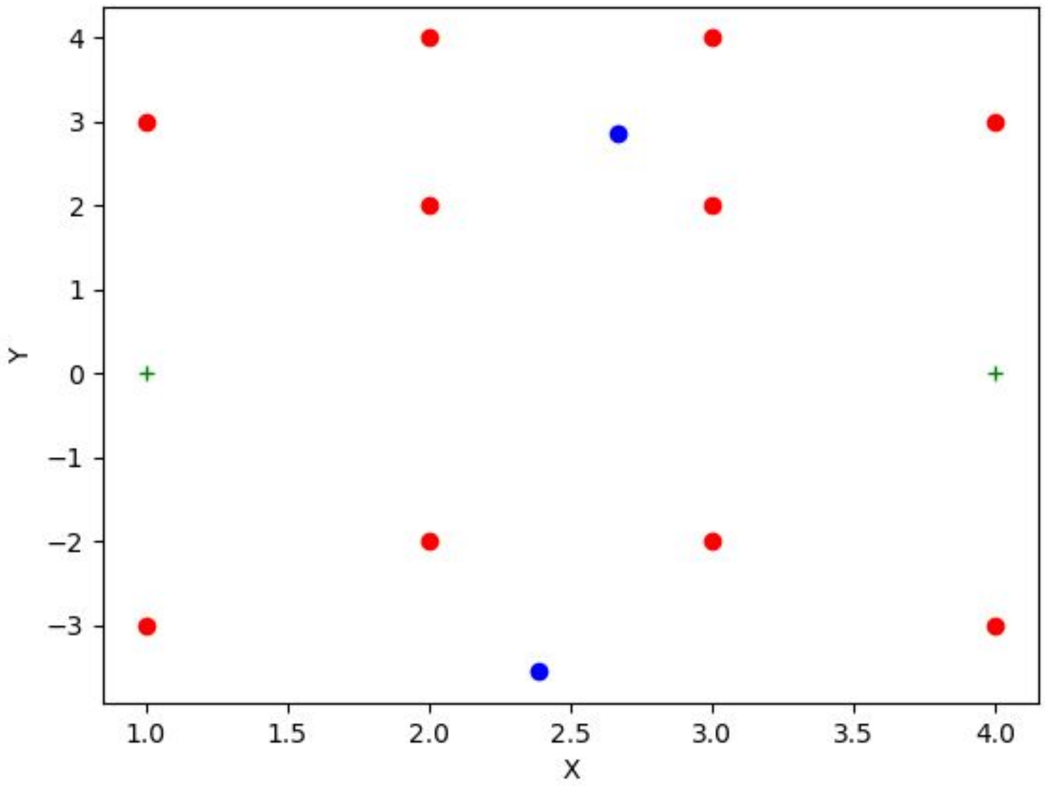
Dividindo-se o vetor P pelo vetor formado pelos fatores de Boltzmann calculados encontra-se uma razão de aproximadamente $\boxed{2{,}528}$ entre eles. Isso mostra que a distribuição de probabilidade para os estados deste problema segue uma distribuição de Boltzmann.

e) Nos gráficos da página seguinte, temos a distribuição de probabilidade para os valores gerados em uma determinada temperatura. Vemos que quanto menor a temperatura maior a probabilidade dos estados de menor energia.


t = 0.1
t = 0.0631
t = 0.05
t = 0.0431
t = 0.0387
t = 0.0356
t = 0.0333
t = 0.0315
t = 0.0301
t = 0.0289
Probabilidade
Custo
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5

Q3) Para o problema de clusterização com centróides inicialmente dispostos nos pontos Y = [[1, 0], [4, 0]] e dados X = [[1, 3], [2, 2], [2, 4], [3, 2], [3, 4], [4, 3], [1, -3], [2, -2], [3, -2], [4, -3]], foram encontrados os novos centróides Y' = [[2.443, 2.933], [2.481, -2.506]] utilizando como custo a média das distâncias euclidianas de cada dado a seu respectivo centróide. O valor mínimo encontrado se aproxima do esperado: Y_min = [[2.5, 2.5], [2.5, -2.5]].

Na figura a seguir temos a representação dos centróides iniciais pela cruz verde, os dados em vermelho e os novos centróides em azul.



O código utilizado para obter este resultado, *lista2-q3.py*, foi enviado em anexo a esta lista de exercícios.