

## Lab 1 – Sampling

### TASK 1: Spatial Frequencies

Considerem la funció:

$$\psi(x, y) = a \cos(a \frac{\pi}{5} y) \cos(b \frac{\pi}{5} (x - y))$$

Els valors d'a i b seran la suma dels dígitos de dos dels NIAs del grup, per tant:

NIA 1 : 218011, a = 13

NIA 2 : 242171, b = 17

- a. Calculate (analytically) the Fourier transform of the above function and identify its frequency components. Make a plot of the spectrum.

Calcularem la transformada de Fourier de  $\psi$  sense tenir en compte els valors d'a i de b, més tard els substituïrem.

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= a \cos(\pi \frac{a}{5} y) \cos(\pi \frac{b}{5} (x - y)) = a \cos(\pi \frac{a}{5} y) \cos(\pi \frac{b}{5} x - \pi \frac{b}{5} y) = \\ &\frac{a}{2} [e^{2\pi j \frac{a}{5} y} + e^{-2\pi j \frac{a}{5} y}] \frac{1}{2} [e^{2\pi j \frac{b}{5} (x-y)} + e^{-2\pi j \frac{b}{5} (x-y)}] = \\ &\frac{a}{4} [e^{2\pi j \frac{a}{10} y} e^{2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} + e^{2\pi j \frac{a}{10} y} e^{-2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} + e^{-2\pi j \frac{a}{10} y} e^{2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} + e^{-2\pi j \frac{a}{10} y} e^{-2\pi j \frac{b}{10} (x-y)}] = \\ &\frac{a}{4} [e^{2\pi j \frac{a}{10} y + 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} + e^{2\pi j \frac{a}{10} y - 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} + e^{-2\pi j \frac{a}{10} y + 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} + e^{-2\pi j \frac{a}{10} y - 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)}] \end{aligned}$$

Ara analitzarem cada sumand per separat per poder treure les freqüències:

- $e^{2\pi j \frac{a}{10} y + 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} = \exp(2\pi j [\frac{b}{10} \quad \frac{a}{10} - \frac{b}{10}]^T [x \ y])$
- $e^{2\pi j \frac{a}{10} y - 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} = \exp(2\pi j [-\frac{b}{10} \quad \frac{a}{10} + \frac{b}{10}]^T [x \ y])$
- $e^{-2\pi j \frac{a}{10} y + 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} = \exp(2\pi j [\frac{b}{10} \quad -\frac{a}{10} - \frac{b}{10}]^T [x \ y])$
- $e^{-2\pi j \frac{a}{10} y - 2\pi j \frac{b}{10} (x-y)} = \exp(2\pi j [-\frac{b}{10} \quad -\frac{a}{10} + \frac{b}{10}]^T [x \ y])$

Com ja sabem que la nostra a=13 i b=17, obtenim les freqüències següents:

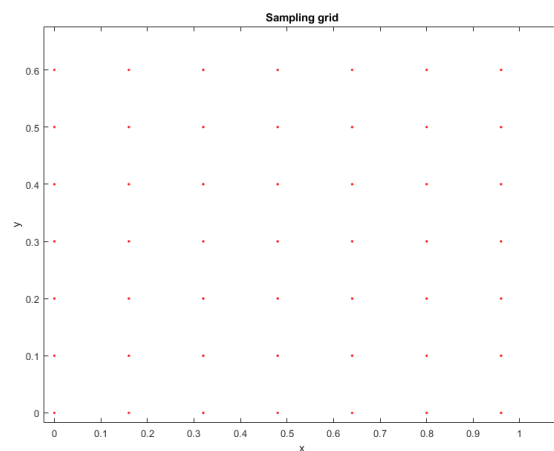
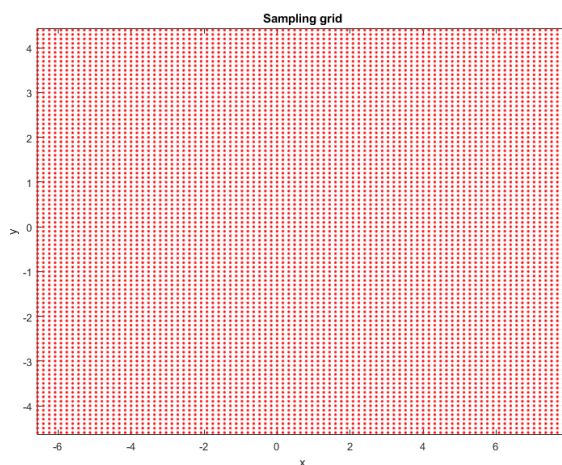
- $[\frac{b}{10}, \frac{a}{10} - \frac{b}{10}] = (1.7, -0.4)$

2.  $[-\frac{b}{10}, \frac{a}{10} + \frac{b}{10}] = (-1.7, 3)$
3.  $[\frac{b}{10}, -\frac{a}{10} - \frac{b}{10}] = (1.7, -3)$
4.  $[-\frac{b}{10}, -\frac{a}{10} + \frac{b}{10}] = (-1.7, 0.4)$

On el primer component es  $f_x$  i el segon  $f_y$ .

- b.** Using the above matrix, generate a sampling grid that covers all the area defined by  $-8 \leq x \leq +8$  and  $-5 \leq y \leq +5$ .

Tenim una lattice definida  $V = \begin{bmatrix} 4/25 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}$ , per tant, per crear la graella de punts per dibuixar la Voronoi Cell, ho fem a partir dels dos vectors que formen la matriu  $V$ . En l'eix  $x$  farem passes de  $4/25$  i en l'eix  $y$  passes de  $1/10$ . Per tant, com ens estan definint els límits dels eixos, doncs hem de col·locar-ho de tal manera:  $-8 \leq 4/25 \leq +8$  i  $-5 \leq 1/10 \leq +5$ .



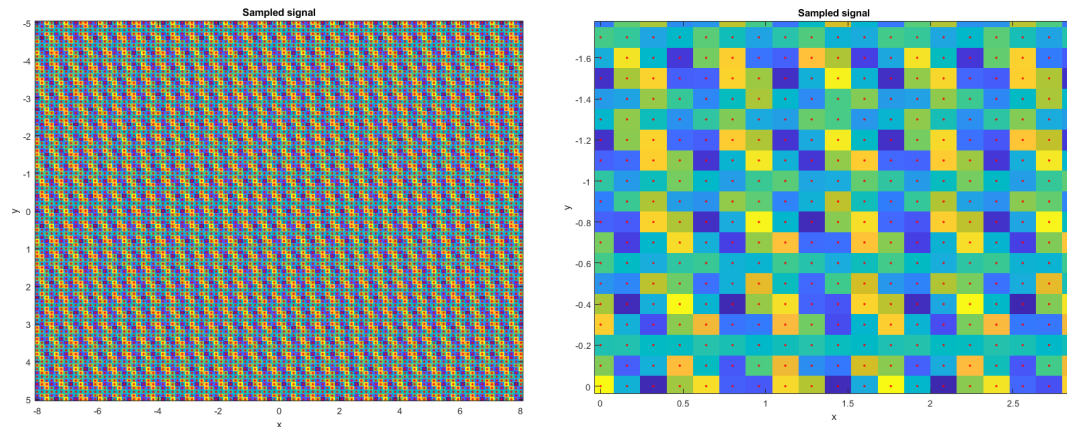
*Malla feta a partir de la matriu lattice  $V_n$  (a la dreta podem veure un zoom in)*

- c.** Use the sampling grid defined in (b) to obtain the sampled signal:

$$\psi_{\text{sampled}}(n) = \psi(V_n)$$

Display the result. Make sure to clearly indicate what is shown in each axis and that the numbers in them are correct.

Ara, utilitzarem la quadrícula feta a l'apartat anterior unint-la amb la nostra senyal  $\psi(x, y)$ , d'aquesta forma obtenim el següent resultat:

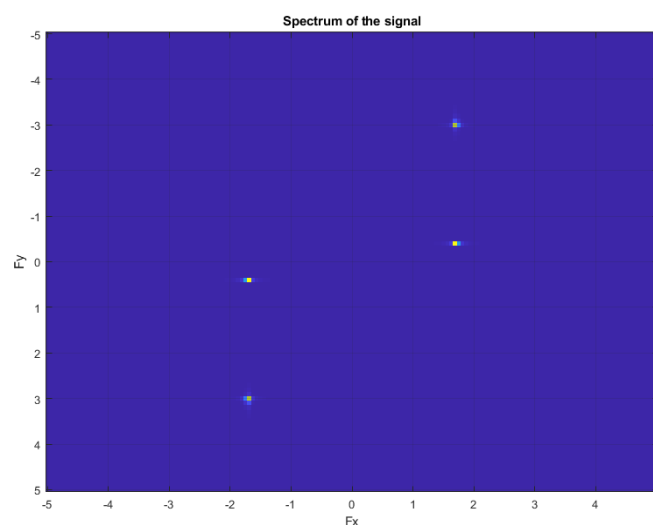


*Resultat de la nostra senyal a sobre de la malla creada a partir de la lattice*

A la primera imatge veiem el senyal en general dins de l'àrea entre  $-8 \leq x \leq +8$  i  $-5 \leq y \leq +5$  i a la segona imatge veiem aquesta àrea ampliada.

- d. Calculate the spectrum of the sampled signal obtained in 1.c – Plot the result clearly indicating the axes and all the required numbers to fully define the spectrum without ambiguities.*

Per calcular l'espectre de la senyal samplejada en l'apartat anterior fem la transformada de Fourier. Fem el plot de la part real al quadrat de la transformada (per evitar la part imaginària). Obtenim el resultat següent, on veiem els espectres de la nostra senyal que coincideixen amb els resultats de l'apartat a.



*Gràfic de la transformada de Fourier de  $\psi(Vn)$*

- e. Discuss whether the signal obtained in 1.c suffers from aliasing or not. Provide a clear justification for your answer.

Per veure si la senyal té aliasing, calcularem la seva Voronoi cell i mirarem si les freqüències estan dins de la Voronoi cell o fora. Si els punts cauen dins la cèl·lula no hi ha aliasing, si cauen fora sí que hi haurà.

Per tant, el primer pas serà calcular la Voronoi cell de la matriu ja que les freqüències ja les sabem per l'apartat anterior.

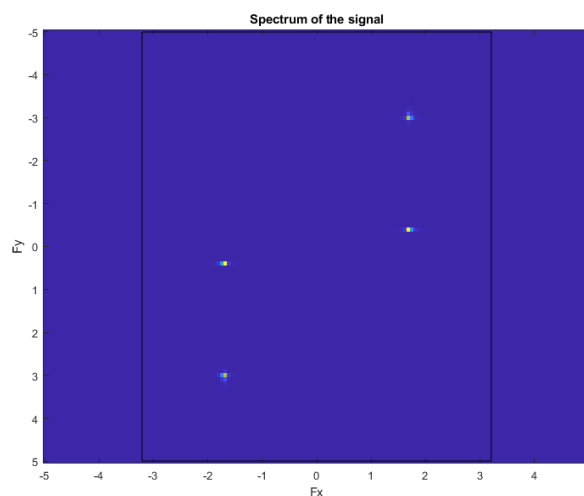
Tenim la matriu :  $V = \begin{pmatrix} \frac{4}{25} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

La transposem i invertim i obtenim:  $U = (V^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{4} & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$

Els vectors a partir dels quals construirem la Voronoi cell son:  $(25/4, 0)$  i  $(0, 10)$ . Hem de traçar línies just a la meitat dels punts més propers al centre  $(0, 0)$ , aquests punts seran:  $(25/4, 0)$ ,  $(0, 10)$ ,  $(-25/4, 0)$  i  $(0, -10)$ .

Per tant, si fem la meitat de cada vector veiem que a l'eix de les x la cèl·lula tallarà al  $x = -25/8$  i  $x = 25/8$ , i a l'eix de les y tallarà a  $y = -5$  i  $y = 5$ .

Lavors, el dibuix de la Voronoi cell d'aquesta matriu és el següent:



Gràfic dels espectres dins de la Voronoi cell

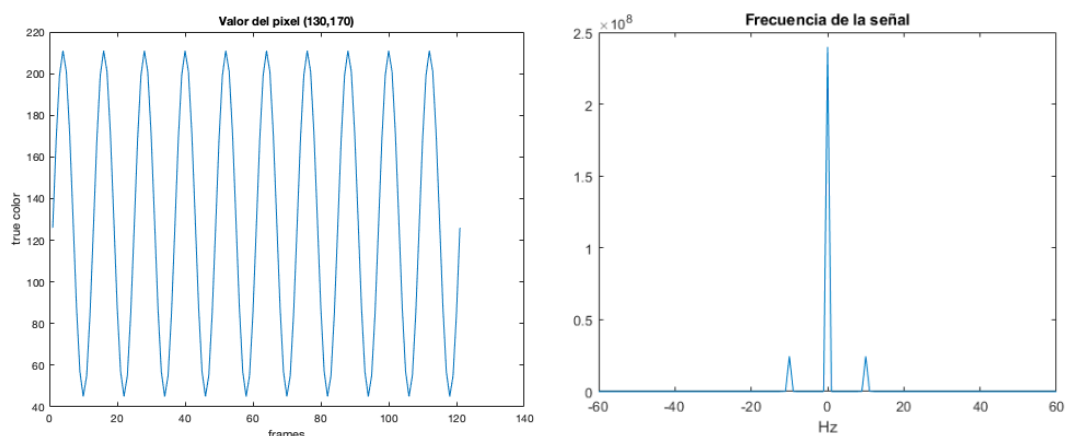
Hem dibuixat la Voronoi cell manualment, amb les dades comentades anteriorment. Com veiem, els quatre espectres estan dins de la Voronoi cell, això vol dir que no hi ha aliasing.

## TASK 2: Temporal Frequencies

- a. Analyze the temporal frequency/frequencies of the pixel at position (10 a, 10 b), where a and b are the same ones defined in Task 1:*

La nostra a és 13 i la nostra b és 17, per tant, el píxel que busquem és el que es troba a la posició (130, 170).

Per obtenir la freqüència temporal del píxel, el que fem és simplement anar frame a frame agafant el valor del píxel. Un cop ja tenim el array amb tots els valors podem fer Fourier.



Gràfic del valor del píxel

Gràfic de Fourier del píxel

En el primer gràfic veiem els valors (true color) que agafa el píxel en els diferents frames del video. Podem veure clarament que forma un sinusoide bastant pur. Per tant podem aplicar Fourier i trobar la freqüència temporal.

Aquesta freqüència és la que veiem en el 2n gràfic. Ja que la senyal no està centrada en el 0 la freqüència 0 serà molt pronunciada ja que és un valor constant que ens desplaça la senyal. La freqüència que ens interessa a nosaltres és l'altre pic. Si ampliem una mica més la imatge veiem que aquest pic està situat a 10Hz. Per tant la freqüència temporal del píxel en la posició (130,170) té valor 10Hz.

- b. Based on your analysis from (2.a), indicate what would be the minimum sampling frequency that you could use so that there is no aliasing for this specific pixel. Justify adequately.*

Si ens basem en l'anàlisi de l'apartat anterior on la freqüència màxima és de 10 Hz, seguint el teorema de Nyquist-Shannon la freqüència de mostreig ha de ser més gran que  $2 \cdot 10\text{Hz}$ , així que la freqüència mínima de mostreig que podem fer servir és de 21Hz.

- c. Select a frequency close to (but slightly higher than) the minimum frequency that you determined in 2.b and generate a new video = the original video that was provided but now sampled at the frequency that you chose(\*). Repeat the analysis of Task 2.a with this new video to confirm whether your result is correct and there is still no aliasing in the pixel at position (10 a, 10 b).*

En aquest apartat hem intentat calcular-ho amb matlab però hem tingut problemes per executar-ho. El procediment que estavem seguint era crear un arxiu nou on emmagatzemar els frames que anéssim agafant i aquest tenia un frame rate igual a la meitat del frame rate del video original. Per tant, quan eren frames parells els guardava i si eren imparells no.

Hem deixat el codi comentat, ja que ens petava i no veiem el error.