TP1_descent_algo

October 14, 2024

1 Algorithmes de descente en optimisation différentiable sans contrainte

Ce TP utilisera les bibliothèques `numpy` et `matplotlib.pyplot` qui sont importées de cette façon:

[4]:
```
%matplotlib inline
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
```

Ce TP est dédié aux algorithmes de minimisation sans contrainte de fonctions, c'est à dire à la résolution numériques des probèmes de la forme:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

Le but de cette séance est de coder une descente de gradient et un algorithme de Newton local et d'évaluer leurs performances sur les fonctions tests suivantes:

- $f_1(x,y) = 2(x+y-2)^2 + (x-y)^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$
- $f_2(x,y) = x^4 - x^2 + y^2$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

1.1 I. Etude des fonctions

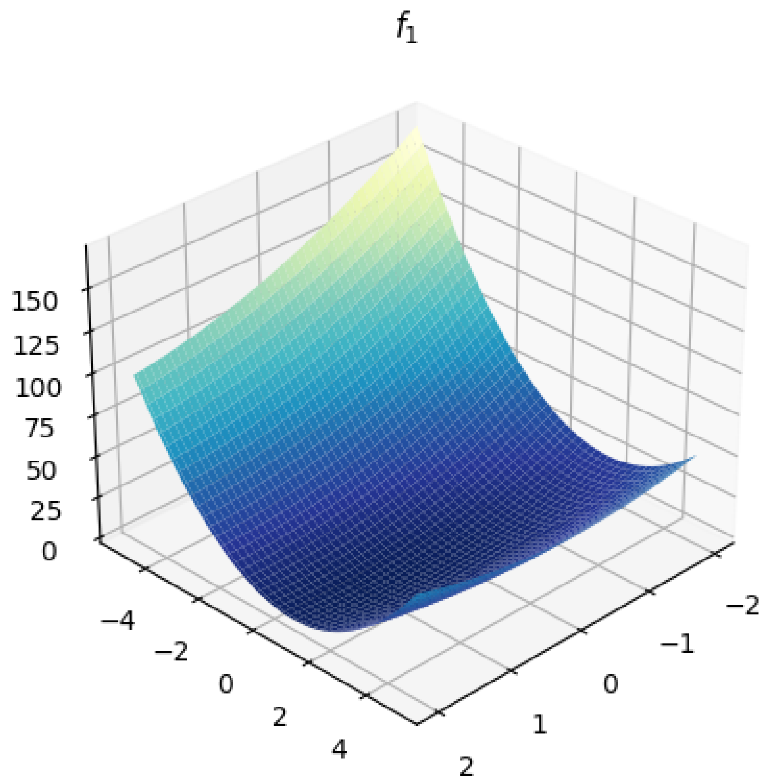
Dans un premier temps, nous allons étudier les deux fonctions. Le code suivant permet d'afficher les graphes des fonctions.

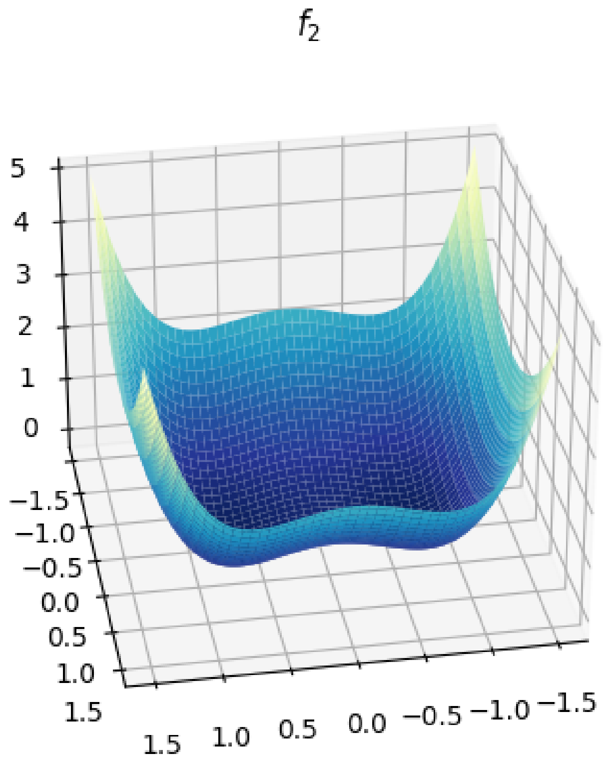
[5]:
```
N = 501
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.view_init(elev=30, azim=45)
X,Y = np.meshgrid(np.linspace(-2,2,N),np.linspace(-5,5,N))
ax.plot_surface(X,Y, 2*(X+Y-2)**2 + (X-Y)**2, cmap=plt.cm.YlGnBu_r)
plt.title('$f_1$')

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection='3d')
ax.view_init(elev=30, azim=80)
X,Y = np.meshgrid(np.linspace(-1.5,1.5,N),np.linspace(-1.5,1.5,N))
ax.plot_surface(X,Y, X**4 - X**2 + Y**2 , cmap=plt.cm.YlGnBu_r)
```

```
plt.title('$f_2$')
```

[5]: Text(0.5, 0.92, 'f_2')





Exercice 1: Calculer les gradients et les Hessiennes des deux fonctions

Exercice 2: 1. Donner les points critiques des fonctions proposées. 2. Les fonctions f_i admettent-elles des extrema sur $\mathbb{R}^2$?

1.2 II. Algorithmes de descente

Un algorithme générique de descente possède la forme suivante:

- **Données :**
  - $x_0 \in \mathbb{R}^n$ point initial arbitraire
  - une fonction oracle $[f(x), \nabla f(x), H[f](x)] = \text{oracle}(x)$
- **Initialisation :** Itération: $k = 0$.
- **Tant que** le critère d'arrêt n'est pas satisfait, **faire**
  - Calcul de la direction de descente d_k.
  - Choix/Calcul du pas s_k.
  - Mise à jour: calcul du prochain itéré x_{k+1}.
  - $k = k + 1$.

1.2.1 1. Oracles

La fonction *oracle* permet de fournir toutes les informations nécessaires sur la fonction à minimiser à l'algorithme de descente. A un x donné elle renvoie la valeur $f(x)$ du critère, le gradient $\nabla f(x)$

s'il existe, et éventuellement la matrice Hessienne $H[f](x)$ si elle existe et si nécessaire (algorithme de Newton)

Exercice 3: Implémenter les fonctions oracles associées à f_1 et f_2.

- Les prototypes de ces fonctions sont affichés dans la cellule suivante et doivent être complété.
- En entrée: `x` est un `np.array` de taille `(2,)`
- En sortie:
  - `f` : la valeur de la fonction coût
  - `Df`: un `np.array` de taille `(2,)` contenant le gradient
  - `Hf`: un `np.array` de taille `(2,2)` contenant la matrice Hessienne

[6]:
```
def oracle1(x):
    # code
    return f, Df, Hf

def oracle2(x):
    # code
    return f, Df, Hf
```

Exercice 4 : Vérifier les oracles pour quelques x

1.2.2 2. Descente de gradient

Exercice 5: Implémenter l'algorithme de descente de gradient à pas fixe

$$x_{k+1} = x_k - s\nabla f(x_k)$$

- Le prototype de la fonction est affiché dans la cellule suivante et doit être complété.
- Le critère d'arrêt sera sur la norme du gradient: $| f(x) | < $ et un nombre d'itérations maximal
- Les arguments d'entrée:
  - `function` sera l'oracle associé à la fonction à minimiser
  - `step` sera le pas de la méthode de gradient
  - `x_ini` est le point initial
  - `eps` correspond à ϵ, la précision requise sur la norme du gradient (par défaut: `eps = 1e-10`)
  - `iter_max` nombre d'itérations max (pas défaut `itermax = 1000`)
- Les arguments de sortie:
  - `x` l'itéré final
  - `x_iter` un tableau de taille (n, itermax) contenant tous les itérés
  - `cf_iter` un tableau de taille (n) contenant les valeurs de la fonction coût à toutes les itérations
  - `err_iter` un tableau de taille (n) contenant la norme du gradient à toutes les itérations
  - `nb_iter` l'itération finale

Les tableaux `x_iter`, `cf_iter` et `err_iter` peuvent être construits sous forme de liste puis convertis en `np.array` à la fin de la fonction

[8]:
```python
def gradient_descent(function, step, x_ini, eps = 1e-10, iter_max=1000):
    # initialisation des variables
    x = np.copy(x_ini)
    x_iter = [] # liste des itérés
    cf_iter = [] # liste des valeurs de la fonction cout
    err_iter = [] # liste des normes du gradient

    # descente de gradient à coder

    # list to array
    x_iter = np.array(x_iter)
    cf_iter = np.array(cf_iter)
    err_iter = np.array(err_iter)

    return x, x_iter, cf_iter, err_iter, nb_iter
```

1.2.3 3. Méthode de Newton locale

Exercice 6: Implémenter la méthode de Newton locale.

$$x_{k+1} = x_k - H[f](x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$$

- Le prototype de la fonction est affiché dans la cellule suivante et doit être complété.
- Le critère d'arrêt sera sur la norme du gradient: $| f(x) | < $ et un nombre d'itérations maximal
- Les arguments d'entrée:
  - `function` sera l'oracle associé à la fonction à minimiser
  - `x_ini` est le point initial
  - `eps` correspond à ϵ, la précision requise sur la norme du gradient (par défaut: `eps = 1e-10`)
  - `iter_max` nombre d'itérations max (pas défaut `itermax = 1000`)
- Les arguments de sortie:
  - `x` l'itéré final
  - `x_iter` un tableau de taille (n, itermax) contenant tous les itérés
  - `cf_iter` un tableau de taille (n) contenant les valeurs de la fonction coût à toutes les itérations
  - `err_iter` un tableau de taille (n) contenant la norme du gradient à toutes les itérations
  - `nb_iter` l'itération finale

Les tableaux `x_iter`, `cf_iter` et `err_iter` peuvent être construits sous forme de liste puis convertis en `np.array` à la fin de la fonction.

Le calcul de $H[f](x_k)^{-1}\nabla f(x_k)$ pourra se réaliser à l'aide de la fonction `np.linalg.solve`

[10]:
```python
def newton_descent(function, x_ini, eps = 1e-10, iter_max=1000):
    # initialisation des variables
    x = np.copy(x_ini)
    x_iter = [] # liste des itérés
```

```
    cf_iter = [] # liste des valeurs de la fonction cout
    err_iter = [] # liste des normes du gradient

    # descente de newton à coder

    # list to array
    x_iter = np.array(x_iter)
    cf_iter = np.array(cf_iter)
    err_iter = np.array(err_iter)

    return x, x_iter, cf_iter, err_iter, nb_iter
```

1.3 III. Evaluation des performances

Dans cette section, les algorithmes de descente seront évalués sur les fonctions f_1 f_2 Dans ce but, on se propose de : * représenter la suite des itérés sur les courbes de niveau des fonctions * suivre la décroissance (en semilogy) * de la fontion coût * de la norme du gradient

Les fonctions suivantes permettent de tracer les suites des itérés sur les courbes des niveaux des fonctions f_1 et f_2 Etudier et comprendre leur code.

[12]:
```
def plot_iter_f1(x_iter):
    Nx = 1000
    Ny = 1000
    x = np.linspace(-1.5,3.5,Nx)
    y = np.linspace(-1.5,3.5,Ny)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    Z=2*(X+Y-2)**2+(X-Y)**2
    CS=plt.contour(X, Y, Z,[0,0.1,1,2,4,6,8,12,16,20,24],colors='k')
    plt.plot(x_iter[:,0], x_iter[:,1],'o-')
    plt.clabel(CS, inline=1, fontsize=10)

def plot_iter_f2(x_iter):
    Nx = 1000
    Ny = 1000
    x = np.linspace(-2,2,Nx)
    y = np.linspace(-2,2,Ny)
    X, Y = np.meshgrid(x, y)
    Z= X**4 - X**2 + Y **2
    CS=plt.contour(X, Y, Z,[0,0.1,0.5,2,5],colors='k')
    plt.plot(x_iter[:,0], x_iter[:,1],'-o')
    plt.clabel(CS, inline=1, fontsize=10)
```

1.3.1 1. Fonction f_1

Exercice 7: Pour f_1 tester la descente de gradient pour

Points initiaux x_0	Les pas s
$(1, 2)$	0.1
$(10, 10)$	0.1
$(1, 2)$	0.3
$(1, 2)$	0.01

Exercice 8: Pour f_1 tester la méthode de Netwon avec les points initiaux $x_0 = (1, 2), (10, 10^{10})$

1.3.2 2. Fonction f_2

Exercice 9: Pour f_2 tester la descente de gradient avec 1000 itérations pour

Points initiaux x_0	**Les pas s**
$(0, 0)$	0.1
$(0, 1.5)$	0.01
$(0.01, 1.5)$	0.1
$(-0.01, 1.5)$	0.1
$(1, 1.5)$	0.4
$(1, 1.5)$	0.99
$(1, 1.5)$	1
$(1, 1.5)$	1.1

Exercice 10: Pour f_2 tester la méthode de Netwon avec les points initiaux $x_0 = (0, 1.5), (0.3, 1.5), (1, 1.5), (10, 1000)$

1.3.3 3. Discussion

Exercice 11: Discuter des résultats obtenus.