
MIPI 15.4 – Remédiation et échauffement

Exercice 1 - Etude de fonctions Etudier les fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$ (dérivée, sens de variation, limites, tableau de variation et primitives) :

- $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$
- $g : x \mapsto \cos(2x) - 2x$
- $h : x \mapsto |2x - 1| + |x|$
- $k : x \mapsto e^{3x+2}$

Pour aller plus loin

- $f_2 : x \mapsto \frac{4x}{x^2+1}$
- $g_2 : x \mapsto \cos^2(x) - \cos(2x)$
- $h_2 : x \mapsto \ln(x^3 - 2x^2 - x + 2)$

Exercice 2 - Dans $\mathbb{C}$

1. Simplifier : $z_1 = 2i(3 - 2i)$, $z_2 = (3i - 2)(2i + 6)$, $z_3 = (2 - i)(2 + i)$.
2. Placer dans le plan les points d'affixes z_1, z_2, z_3.
3. Calculer les conjugués, inverses et modules de z_1, z_2, z_3.
4. Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Pour aller plus loin

- Simplifier $\frac{(i-1)^5}{(i+1)^4}$ et $(1 + i)^{10}$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ de module 1, calculer $|1 + z|^2 + |1 - z|^2$. Faire un dessin pour comprendre le résultat.
- Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$. Déterminer les parties réelle et imaginaire de z_3, ainsi que son module et son argument. Trouver une formule pour $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$, puis pour $\tan(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3 - Suite homographique Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 - \frac{5}{u_n+4}$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$
3. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ? Qu'en conclure ?
4. Illustrer graphiquement les résultats précédents (on s'aidera des graphes de $y = \frac{2x+3}{x+4}$ et de $y = x$).

Exercice 4 - Vecteurs et géométrie Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère les points $A(2; 4)$, $B(5; 5)$, $C(1; 1)$ et $D(7; 3)$.

1. Faire une figure.
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$.
3. Que remarquez vous ? En déduire que le quadrilatère ABDC est un trapèze.
4. On note E le symétrique de C par rapport à A (donc A est le milieu de $[EC]$). Calculer les coordonnées de E.
5. Montrer que B est milieu de $[ED]$
6. Soient M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Déterminer les coordonnées de M et N. En déduire que les points E, M et N sont alignés.