Feuille 1
Vecteurs du plan et de l'espace [1]

Les feuilles d'exercices sont découpées en trois types d'exercice :
- Les *indispensables* : à savoir faire en autonomie.
- Les *exercices d'application* : pour mieux maîtriser et comprendre le cours.
- *Pour aller plus loin* : exercices présentant des développements mathématiques ou des études de modélisations de phénomènes issues d'autres disciplines.

Indispensables

Exercice 1 (Rappels de trigonométrie)**.**
1. Pour chaque valeur de a dans la liste d'angles (en radians)
$$0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},$$
donner le cosinus et le sinus de a et de $-a$. Placer les points de coordonnées $(\cos(a), \sin(a))$ et $(\cos(a), \sin(-a))$ sur le cercle trigonométrique.
2. Pour tout x réel, exprimer les cosinus et sinus de $x + \frac{\pi}{2}$, $x + \pi$ et $x + \frac{3\pi}{2}$ en fonction de ceux de x. On pourra se rappeler les formules trigonométriques pour le cosinus et le sinus de la somme de deux angles.
3. Pour toutes les valeurs de a de la première liste, déterminer les sinus et cosinus de $a + \frac{\pi}{2}$, $a + \pi$ et $a + \frac{3\pi}{2}$

Exercice 2 (Coordonnées et produit scalaire)**.** On se place dans le plan euclidien, avec son repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ canonique. On définit les points $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
1. Placer ces points sur un graphique.
2. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$ et leur norme.
3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$. En déduire l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{AB}$, et l'angle entre $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OA}$.

Exercice 3 (Equations de droite)**.** On se place dans le plan euclidien avec un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère le point $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
1. Calculer la norme de $\vec{u}$.
2. Donner une équation paramétrique de la droite D passant par A et dirigée par $\vec{u}$.
3. Donner les coordonnées des deux points de D à distance 1 de A.
4. Donner un vecteur $\vec{v}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$.
5. Donner une équation cartésienne de D.
6. Parmi les points de la liste suivante, déterminer ceux qui appartiennent à D :
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Version du 9 septembre 2019

Exercice 4. Equation de plan
On se place dans l'espace euclidien, avec son repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ canonique. On définit le point $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Vérifier qu'il est bien orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace. Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$.
3. On suppose que M est dans le plan P passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Combien vaut le produit scalaire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{w}$? En déduire une équation cartésienne du plan P.
4. Le point de coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ appartient-il au plan P ?

Exercice 5. Familles libres/liées
Pour les familles de vecteurs de l'espace ci-dessous, indiquer si elles sont libres ou liées et si elles forment une base de l'espace.

1. La famille composée de l'unique vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. La famille composée des deux vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
3. La famille composée des trois vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
4. La famille composée des quatres vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
5. La famille composée des trois vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
6. La famille composée des deux vecteurs $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Applications

Exercice 6 (Vecteurs et centre de gravité)**.** Soit ABC un triangle du plan euclidien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note G le point tel que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$. On l'appelle centre de gravité du triangle.

1. Soit M le milieu de AB. Montrer que $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$.
2. Montrer que pour tout point P du plan, on a : $\overrightarrow{PG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC}$. En déduire que G est l'unique point du plan à vérifier $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

3. Montrer que $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.
4. Montrer que les médianes du triangle sont concourantes et se rencontrent en le point G. De plus, G est au deux-tiers de chaque médiane.

Remarque : Dans cet exercice, on touche la notion de barycentre, qui a l'interprétation physique du centre de masse : si on imagine un triangle plan avec trois masses égales aux trois sommets, le point G est le point précis où il faut attacher le triangle pour qu'il soit suspendu de manière horizontale.

Exercice 7 (Travail d'une force (Physique))**.** Des étudiantes en sciences construisent leur propre trottinette électrique. Elles disposent pour cela d'un moteur capable d'exercer une force de traction de $400N$ représentée par un vecteur $\vec{T}$. Elles se demandent sur quelle pente elles pourront l'utiliser.
Dans le plan euclidien muni du repère canonique, soit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$. Le long du déplacement de la trottinette sur le trajet $\overrightarrow{OA}$, trois forces travaillent sur le couple "trottinette+étudiante" : la traction, correspondant à $\vec{T} = 400\,\overrightarrow{OA}$; le poids, représenté par un vecteur $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -800 \end{pmatrix}$ et la réaction du sol, représentée par un vecteur $\vec{R}$ colinéaire à $\begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.
Sur un déplacement rectiligne de O à A, le travail de chacune des forces est le produit scalaire entre le vecteur représentant cette force et le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

1. Calculer le travail des 3 forces.
2. Pour que la traction soit possible, il faut que la somme du travail des trois forces soit positif : déterminer la valeur de α (en radian) jusqu'à laquelle les étudiantes peuvent monter.
3. Sur une route, les pentes sont plutôt exprimée en pourcentage. Savez-vous exprimer la valeur trouvée dans ces termes ?

Pour aller plus loin

Exercice 8 (Hauteurs du triangle)**.** Soit ABC un triangle du plan euclidien $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Soit H l'intersection de la hauteur issue de A et de la hauteur issue de B.

1. Montrer que pour tout point P du plan, on a :
$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB}$.
3. Montrer que les trois hauteurs sont concourantes.