

Двумерная модель земной ионосферы

Останин Павел Антонович

Научный руководитель: Кулямин Дмитрий Вячеславович

Постановка задачи

Основные задачи:

- Построение динамической трёхмерной модели Земной ионосферы;
- Согласование с уже разработанной моделью нейтральной термосферы ИВМ РАН.

Уравнение, описывающее эволюцию ионной концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & -\operatorname{div}(n_i \vec{u}_{\parallel}) - \operatorname{div}\left(n_i \frac{1}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}]\right) + \\ & + \operatorname{div}\left(D \left[\nabla_{\parallel} n_i + n_i \frac{1}{T_p} \nabla_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \vec{g}_{\parallel} \right]\right) + [P - k_i n_i]. \end{aligned}$$

Уравнение в сферических координатах в приближении тонкого сферического слоя

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - kn_i].$$

$$Tr(n_i) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n_i \frac{1}{B} (E_y \sin l + E_z \cos l) \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(u_z \sin l \cos l - u_y \cos^2 l - \frac{E_x}{B} \sin l \right) n_i \cos \varphi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(u_y \cos l \sin l - u_z \sin^2 l - \frac{E_x}{B} \cos l \right) n_i \right];$$

$$DYZ(n_i) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(D \cos \varphi \left[\frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos^2 l - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos l \sin l \right] \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \left[\frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 l - \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos l \sin l \right] \right);$$

$$DTr(n_i) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{1}{a} \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos^2 l - \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \cos l \sin l - \frac{1}{H} \sin l \cos l \right) D n_i \cos \varphi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(- \frac{1}{a} \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos l \sin l + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \sin^2 l + \frac{1}{H} \sin^2 l \right) D n_i \right].$$

Метод расщепления

- На первом шаге расщепления решается уравнение для z-диффузии в проекции со смешанной производной:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right];$$

- На втором шаге добавляется диффузия по y :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a} \cdot (\cos^2 I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial \varphi} - u \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot n \right] = \\ = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a^2} A(\varphi) \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{u}{2a} B(\varphi) n \right];$$

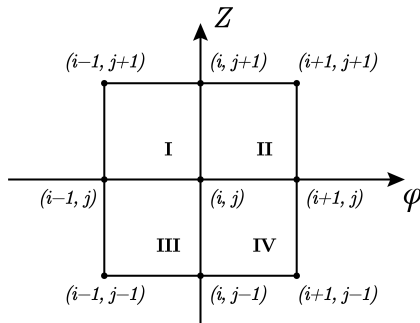
- На третьем шаге добавляется перенос $Tr(n_i)$.

Используемые разностные схемы

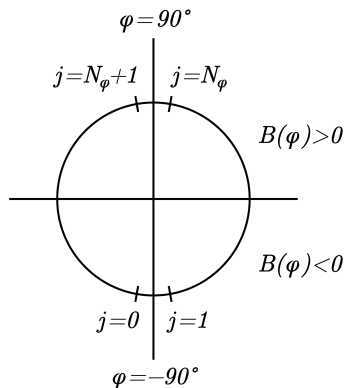
- Для аппроксимации диффузионных слагаемых используется схема

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z} \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \left(\frac{D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i)}{h_i} - \frac{D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})}{h_{i-1}} \right);$$

- Слагаемые, отвечающие переносу $\frac{\partial}{\partial z}(un)$ с эффективной скоростью u аппроксимируются центральной разностью;
- Аппроксимация смешанной производной $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(B(\varphi) \frac{\partial n}{\partial z} \right)$ со вторым порядком осуществляется направленными разностями в зависимости от знака $B(\varphi)$.



Околополюсные точки и потеря порядка аппроксимации



Используются схемы второго порядка аппроксимации, но в окрестности полюсов множитель $\frac{1}{\cos \varphi}$ приводит к уменьшению порядка на единицу.

Для вычислений в крайних точках расчетной области отождествляются точки по разные стороны от полюса.

Рассматриваемые модели

- Плазмохимия и диффузия вдоль Oz:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right);$$

- Полный первый шаг расщепления:

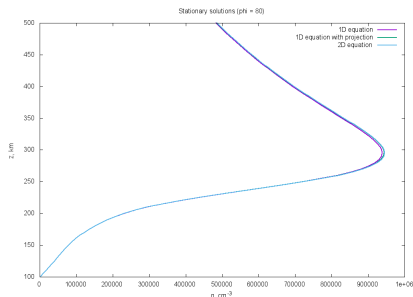
$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 l \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin l \cos l \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right]; \end{aligned}$$

- Двумерная модель: два шага расщепления. На втором шаге решается уравнение:

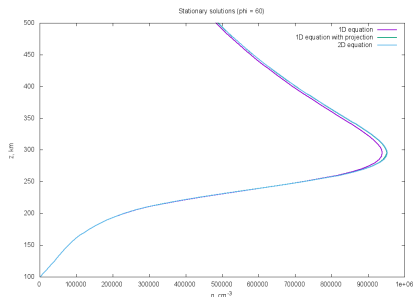
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a} \cdot (\cos^2 l \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial \varphi} - u \cdot (\sin l \cos l \cos \varphi) \cdot n \right].$$

Результаты расчетов: высотные профили

Полученные стационарные решения в трёх рассматриваемых моделях при широтах $\varphi = 80^\circ$ и $\varphi = 60^\circ$.



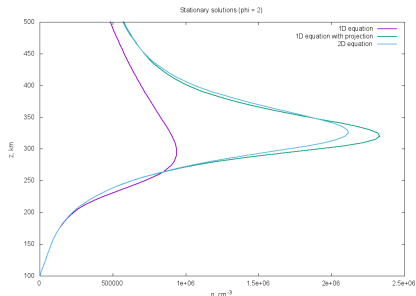
$\varphi = 80^\circ$.



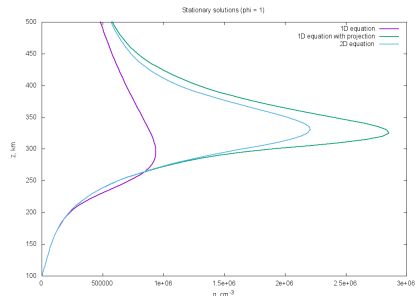
$\varphi = 60^\circ$.

Результаты расчетов: высотные профили

Полученные стационарные решения в трёх рассматриваемых моделях при широтах $\varphi = 2^\circ$ и $\varphi = 1^\circ$.



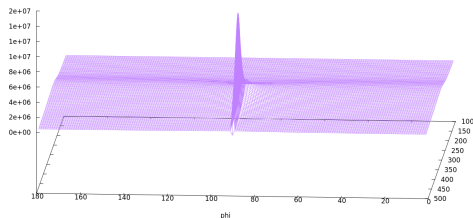
$\varphi = 2^\circ$.



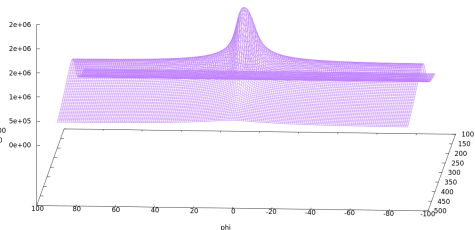
$\varphi = 1^\circ$.

Результаты расчетов

Стационарные решения при расчетах в соответствии с одним или двумя шагами расщепления.



Первый шаг расщепления.



Два шага расщепления.

Спасибо за внимание!

Приложение: входящие в уравнение параметры

Для функций P , k , температур и концентраций N_2 , O_2 и O используются аналитические формулы:

- $$T(z) = T_\infty - (T_\infty - T_0) \exp\left(-\frac{g}{RT_\infty}(z - z_0)\right),$$

$$T_{n\infty} = 800 \text{ K}, T_{i\infty} = 950 \text{ K}, T_{e\infty} = 2200 \text{ K}.$$

- Для концентраций — Больцмановское распределение:

$$n_{O_2, N_2, O}(z) = n_{O_2, N_2, O}(z_0) \cdot \exp\left(-\frac{M_{O_2, N_2, O} g}{R_0 T_n}(z - z_0)\right).$$

На высоте 100 км $n_{O_2} = 5,6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, $n_O = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$,
 $n_{N_2} = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

- В дневное время $P = 4 \cdot 10^{-7} n_O(z)$;
 $k = 1,2 \cdot 10^{-12} n_{N_2}(z) + 2,1 \cdot 10^{-11} n_{O_2}(z)$

Приложение: коэффициенты в уравнении второго шага

Рассмотрим функции:

$$A(\varphi) = \frac{\cos \varphi}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi} \text{ и } B(\varphi) = \frac{4 \sin \varphi}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Имеют место следующие разложения при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5\right); B(\varphi) = 1 \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

Аналогичные асимптотики и при $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

Графики функций A и B приведены ниже:

