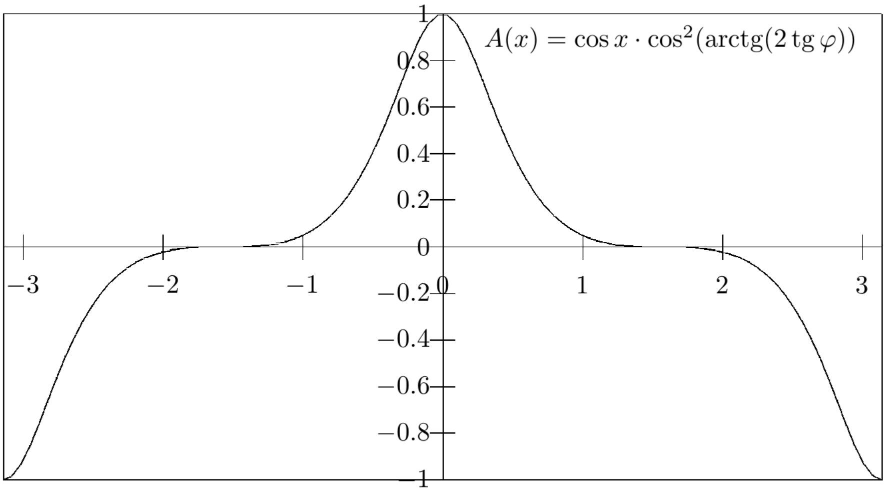
Уравнение, решаемое на втором шаге расщепления:

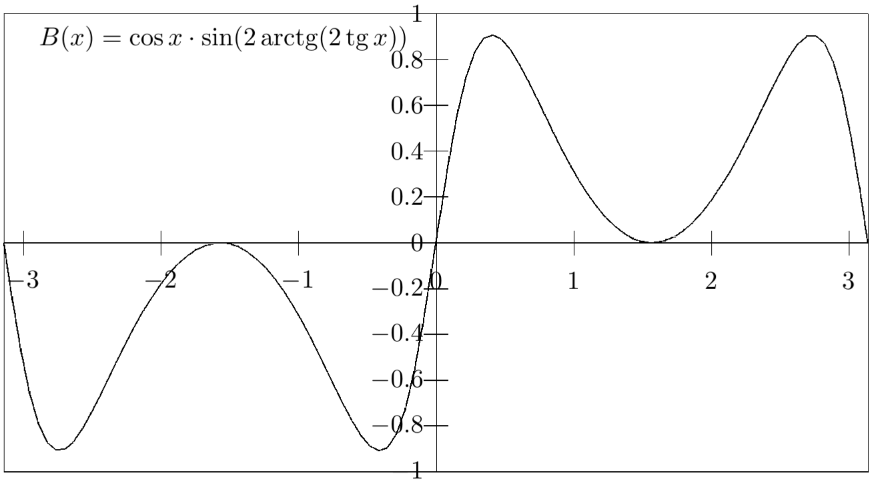
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot(\cos^2 I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial \varphi} - D\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial z} - u\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot n\right]$$

Здесь $u = D\left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)$ — эффективная скорость из первого шага, $I = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)$.
На первом этапе решаем задачу без смешанной производной. В качестве начальных условий выступает решение уравнения с первого шага расщепления. Введём функции $A(\varphi) = \cos\varphi\cdot\cos^2(\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi))$ и $B(\varphi) = \cos\varphi\cdot\sin(2\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi))$. С помощью этих функций задачу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a^2}A(\varphi)\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{D}{2a}B(\varphi)\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{u}{2a}B(\varphi)n\right]$$

Исследуем асимптотическое поведение слагаемых вблизи полюсов (при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$).
Графики функций A и B приведены ниже:





Обе функции в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$ касаются оси абсцисс — имеют нули по крайней мере второго порядка, поэтому особенность в уравнении устранимая.
Имеют место следующие разложения при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{16}\cdot\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

$$B(\varphi) = 1\cdot\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\cdot\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Соответственно, при $x \to -\dfrac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{4} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

$$B(\varphi) = -1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Обозначим $\varphi - \dfrac{\pi}{2} = x$. При $x \to 0$ заметим, что:

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(A(\varphi)\frac{\partial n}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial A}{\partial\varphi}\frac{\partial n}{\partial\varphi} + \frac{A}{\cos\varphi}\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi^2} \approx \frac{1}{x - \frac{x^3}{6}}\left(-\frac{1}{4}\cdot 2x^2\right)\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{1}{4}\frac{x^2}{1-\frac{x^2}{6}}\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi^2} \approx$$

$$\approx -\frac{1}{2}x\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{1}{4}x^2\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi^2} = -\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{1}{4}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(B(\varphi)\frac{\partial n}{\partial z}\right) = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial B}{\partial\varphi}\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{1}{\cos\varphi}B\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi\partial z} \approx 2\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial^2 n}{\partial\varphi\partial z}$$

$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(B(\varphi)n\right) = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial B}{\partial\varphi}n + \frac{1}{\cos\varphi}B\frac{\partial n}{\partial\varphi} \approx 2n + \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\frac{\partial n}{\partial\varphi}$$

Для полного уравнения используем следующую схему:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t}}{\tau} = \frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2})\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi^2}\right) - \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1} - B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{D}{2a}\left(\frac{|u_z| + u_z}{2}\frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi} + \frac{|u_z| - u_z}{2}\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi}\right)\right]$$

(Консервативность?..)

Здесь введено обозначение $u_z = \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial n}{\partial z} = \dfrac{\partial \ln n}{\partial z}$. При этом значения n для вычисления u_z берутся с предыдущего временного шага.

При $j = 1$ ($\varphi = -90°$) и $j = N_\varphi$ ($\varphi = +90°$) используем граничные условия Дирихле — равенство распределения на полюсах дневному распределению одномерной задаче в z-проекции без учета широтной зависимости.

При $i = 1$ ($z = 100$ км) также ставим граничное условие Дирихле — на нижней границе по z решение совпадает с P/k, полученным на первом шаге.

На верхней границе требуется граничное условие для определения u_z.

Поток на границе $z = z_{ub}$:

$$\frac{D}{a^2}A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{N,j+1} - n_{N,j}}{h} - \frac{u}{2a}\frac{B(\varphi_{j+1})n_{N,j+1} + B(\varphi_j)n_{N,j}}{2\Delta\varphi} - \frac{D}{2a}\left(\frac{|u_z|}{2}\frac{n_{N,j+1} + n_{N,j}}{\Delta\varphi} + \frac{u_z}{2}\frac{n_{N,j+1} - n_{N,j}}{\Delta\varphi}\right) = F_y$$