На первом шаге расщепления решается уравнение

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n_i}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n_i\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{a}D\sin I\cos I\left(\frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial \varphi}n_i\right)\right] + [P - kn_i]$$

Рассмотрим следующие варианты разностных схем для этого уравнения. Во всех случаях используем для диффузионного слагаемого схему, получаемую применением формулы центральной разности дважды, а для потокового слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial z}(un)$ центральную разность. Различия рассматриваемых схем — в аппроксимации слагаемого со смешанной производной. В схемах $1, 3, 4$ вычисление u_φ ведётся по формуле с логарифмом

$$u_\varphi = \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} \approx \frac{\ln \frac{n_{i,j+1}}{n_{i,j-1}}}{2\Delta\varphi}.$$

В схеме 2 для сравнения эта аппроксимация заменена на

$$u_\varphi \approx \frac{2}{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}\frac{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}.$$

Отметим также следующее: эксперимент показал что в процессе вычисления величина n никогда не достигает в точности нулевого значения, поэтому вопрос об асимптотической формуле для u_φ в нулях n не ставится.

1. Схема с центральными разностями:используем для смешанной производной центральную разность в уравнении и в граничном условии. В результате получим стационарное решение, в котором, тем не менее, имеются сильные осцилляции вдоль изменения широты. Период осцилляции соответствует мелкости шага сетки (при дроблении сетки частота осцилляции увеличивается).

Схема:
$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1} - n_i}{h} - D_{i-1/2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h} + \frac{(u_{i+1} + u_{\varphi(i+1)})n_{i+1} - (u_{i-1} + u_{\varphi(i-1)})n_{i-1}}{2h}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1} - n_N}{h} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N}{2h} = F_{ub} = 0$$

2. Единственное отличие этой схемы от схемы 1 — в способе аппроксимации и вычисления самой величины u_φ: используется формула без логарифмов $u_\varphi \approx \dfrac{2}{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}\dfrac{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}$. Эксперименты показали, что результаты вычислений слабо зависят от способа этой аппроксимации. Далее везде применяется формула с логарифмом. Расчеты также показали наличие сильных биений в данной схеме.

3. Запишем несогласованную схему: в уравнении используем для смешанной производной направленную разность, а в граничном условии — соответствующее условие для центральной разности. Это внесёт дополнительную численную диффузию, в результате чего осцилляции прекратятся.

Схема:
$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1} - n_i}{h} - D_{i-1/2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h} +$$

$$+\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} +$$

$$+\frac{|u_\varphi| + u_\varphi}{2}\cdot\frac{n_{i+1} - n_i}{h} + \frac{|u_\varphi| - u_\varphi}{2}\cdot\frac{n_i - n_{i-1}}{h}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1} - n_N}{h} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N}{2h} = F_{ub} = 0$$

4. Наконец, используем формулу центральной разности и в уравнении, и в граничном условии. Для выяснения корректной согласованной (консервативной) аппроксимации граничного условия исследуем функцию потока в схеме:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h} - D_{i-1/2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h} +$$

$$+\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} +$$

$$+\frac{|u_\varphi| + u_\varphi}{2}\cdot\frac{n_{i+1}-n_i}{h} + \frac{|u_\varphi| - u_\varphi}{2}\cdot\frac{n_i - n_{i-1}}{h}$$

Перепишем в консервативной форме, явно выделив функцию потока:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = q_{i+1/2} - q_{i-1/2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = \left(D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h} + \frac{u_{i+1}n_{i+1} + u_i n_i}{2h} + \frac{|u_\varphi|}{2}\frac{n_{i+1}+n_i}{h} + \frac{u_\varphi}{2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h}\right) -$$

$$-\left(D_{i-1/2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h} + \frac{u_i n_i + u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \frac{|u_\varphi|}{2}\frac{n_i + n_{i-1}}{h} + \frac{u_\varphi}{2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h}\right)$$

Теперь аппроксимируем граничное условие следующим образом:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1}-n_N}{h} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{|u_\varphi|}{2}\frac{n_{N+1}+n_N}{h} + \frac{u_\varphi}{2}\frac{n_{N+1}-n_N}{h} = F_{ub} = 0$$