I. Уравнение, решаемое на первом шаге:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n_i}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n_i\right) - \frac{1}{a}D\sin I\cos I\left(\frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial \varphi}n_i\right)\right] + [P - kn_i]$$

Во всех случаях используем для диффузионного слагаемого схему, получаемую применением формулы центральной разности дважды, а для потокового слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial z}(un)$ центральную разность. Вычисление u_φ ведётся по формуле

$$u_\varphi \approx -\frac{1}{a}\cos I\sin I\frac{2}{n^t_{i,j+1} + n^t_{i,j-1}}\begin{cases}\dfrac{n^t_{i,j+1} - n^t_{i,j}}{\Delta\varphi}, \sin I \geqslant 0\\ \dfrac{n^t_{i,j} - n^t_{i,j-1}}{\Delta\varphi}, \sin I \leqslant 0.\end{cases}$$

Полная схема для уравнения на первом шаге:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = P - kn^{t+1}_{i,j} + \Bigg[\left(D_{i+1/2}\frac{n^{t+1}_{i+1,j} - n^{t+1}_{i,j}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n^{t+1}_{i+1,j} - u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right) +$$

$$+\left(\frac{u_{\varphi(i+1/2)} + |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i,j} + \frac{u_{\varphi(i+1/2)} - |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i+1,j} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i-1,j} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i,j}\right)\Bigg]$$

На верхней границе учитывается равенство нулю полного потока: в результате имеем уравнение:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = +\Bigg[-D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2} - \left(\frac{u_i n^{t+1}_{i,j} + u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right) +$$

$$+\left(-\frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i-1,j} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i,j}\right)\Bigg]$$

На нижней границе $n^{t+1}_{i,j} = P/k$.

На граничных точках $\varphi = \pm 89{,}5^\circ$ коэффициент $\sin I$ перед смешанной производной мал. Для того, чтобы избавиться от необходимости использовать при подсчете u_φ значения с предыдущего временного шага, находящиеся вне рассматриваемой расчетной области, в этих граничных точках сетки из уравнения системы исключены слагаемые со смешанной производной:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = P - kn^{t+1}_{i,j} + \Bigg[\left(D_{i+1/2}\frac{n^{t+1}_{i+1,j} - n^{t+1}_{i,j}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n^{t+1}_{i+1,j} - u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right)\Bigg]$$

II. Уравнение, решаемое на втором шаге расщепления:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot(\cos^2 I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial \varphi} - D\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial z} - u\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot n\right]$$

Здесь $u = D\left(\dfrac{1}{T_p}\dfrac{\partial T_p}{\partial z} + \dfrac{1}{H}\right)$ — эффективная скорость из первого шага, $I = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)$.

В качестве начальных условий выступает решение уравнения с первого шага расщепления. Введём две функции:

$$A(\varphi) = \cos\varphi\cdot\cos^2(\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)) = \frac{\cos\varphi}{1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi} \text{ и } B(\varphi) = \cos\varphi\cdot\sin(2\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)) = \frac{4\sin\varphi}{1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

С помощью этих функций задачу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a^2}A(\varphi)\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{D}{2a}B(\varphi)\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{u}{2a}B(\varphi)n\right]$$

Для полного уравнения используем следующую схему:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = \frac{1}{\cos\varphi_j}\Bigg[\frac{D}{a^2}\left(A(\varphi_{j+1/2})\frac{n^{t+1}_{i,j+1} - n^{t+1}_{i,j}}{\Delta\varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2})\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i,j-1}}{\Delta\varphi^2}\right) -$$

$$-\frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1}-B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right)-MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}\Bigg]$$

Здесь $MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}$ — аппроксимация смешанной производной $MIX_{\varphi,z}(n)=\dfrac{-1}{\cos\varphi}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{D}{2a}u_z n\right)$, где введено обозначение $u_z=B(\varphi)\dfrac{1}{n}\dfrac{\partial n}{\partial z}=B(\varphi)\dfrac{\partial \ln n}{\partial z}$. При этом значения n для вычисления u_z берутся с предыдущего временного шага. Аналогично первому шагу,

$$u_z\approx B(\varphi)\frac{2}{n_{i+1,j}^t+n_{i-1,j}^t}\begin{cases}\dfrac{n_{i+1,j}^t-n_{i,j}^t}{h}, B(\varphi)\geqslant 0\\ \dfrac{n_{i,j}^t-n_{i-1,j}^t}{h}, B(\varphi)\leqslant 0.\end{cases}$$

После вычисления u_z в узлах (i,j), $(i,j+1)$, $(i,j-1)$ в зависимости от знака произведения $\cos\varphi\cdot u_{z(i,j)}$ аппроксимируется смешанная производная :

$$MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}\approx\begin{cases}\dfrac{u_{z(i,j+1)}n_{i,j+1}^{t+1}-u_{z(i,j)}n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi}, (-u_{z(i,j)}\cos\varphi)\geqslant 0\\ \dfrac{u_{z(i,j)}n_{i,j}^{t+1}-u_{z(i,j-1)}n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi}, (-u_{z(i,j)}\cos\varphi)\leqslant 0.\end{cases}$$

При $i=1$ ($z=100$ км) также ставим граничное условие Дирихле — на нижней границе по z решение совпадает с полученным на первом шаге.
На верхней границе требуется граничное условие для определения u_z.
Поток на границе $z=z_{ub}$:

$$\frac{D}{a^2}A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{N,j+1}-n_{N,j}}{h}-\frac{u}{2a}\frac{B(\varphi_{j+1})n_{N,j+1}+B(\varphi_j)n_{N,j}}{2\Delta\varphi}-$$

$$-\frac{D}{2a}\left(\frac{u_{z(j+1/2)}+|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j}^{t+1}+\frac{u_{z(j+1/2)}-|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j+1}^{t+1}\right)=F_y\approx 0$$

С помощью условия равенства нулю потока на границе $z=500$ км получаем, что при решении линейной системы во втором шаге расщепления сохраняются значения при $z=500$ км с первого шага расщепления, т. е. в рамках решения уравнения второго шага расщепления имеет место граничное условие Дирихле на этой границе: равенство результату с первого шага.
При $j=1$ ($\varphi=-89{,}5°$) и $j=N_\varphi$ ($\varphi=+89{,}5°$) используем следующее граничное условие: в точках $(i,j+1/2)$ на северном полюсе и $(i,j-1/2)$ на южном функции $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ имеют нули третьего и второго порядка соответственно, что позволяет занулить на этих слоях по j те слагаемые, в которых множители A и B берутся на полюсах.
Это означает, что при $j=1$ используется аппроксимация

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau}=\frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{i,j+1}^{t+1}-n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2}\right)-\frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1}+B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right)-MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}\right)\right]$$

Аналогично, на северном полюсе при $j=N_\varphi$:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau}=\frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(-A(\varphi_{j-1/2})\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi^2}\right)+\frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}+B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right)-MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}\right)\right]$$

Аппроксимации смешанных производных $MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}$ в околополюсных точках такие же, как и внутри расчетной области, за исключением единственного отличия: на северном полюсе $u_{z(i,j-1)}$ полагается равным нулю, а на южном, при $j=N_\varphi$, соответственно, $u_{z(i,j+1)}=0$.
Результаты расчетов показывают, что для устойчивого счёта при 80 узлах по высоте и 180 узлах по широте ($h=5$ км, $\varphi=1°$) требуется брать шаг по времени $\tau<160$ с.

Дополнение. Исследуем асимптотическое поведение функций $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ вблизи полюсов (при $\varphi=\pm\dfrac{\pi}{2}$).

Имеют место следующие разложения при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

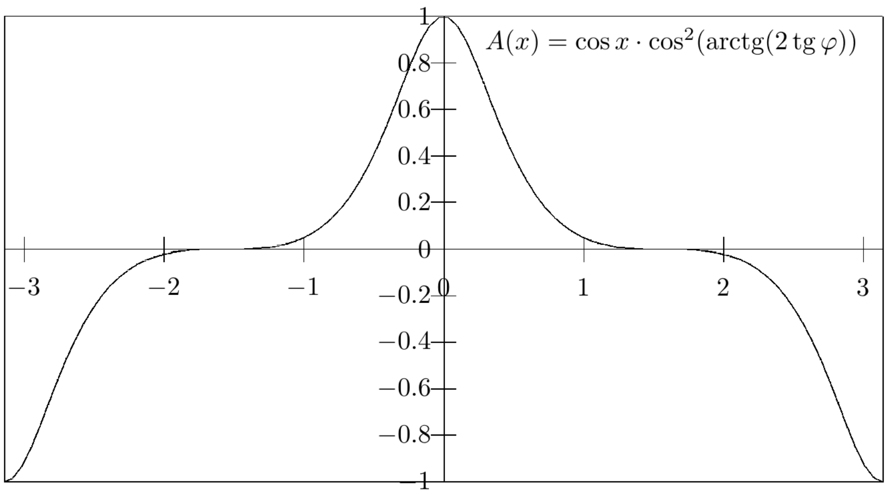
$$B(\varphi) = 1 \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

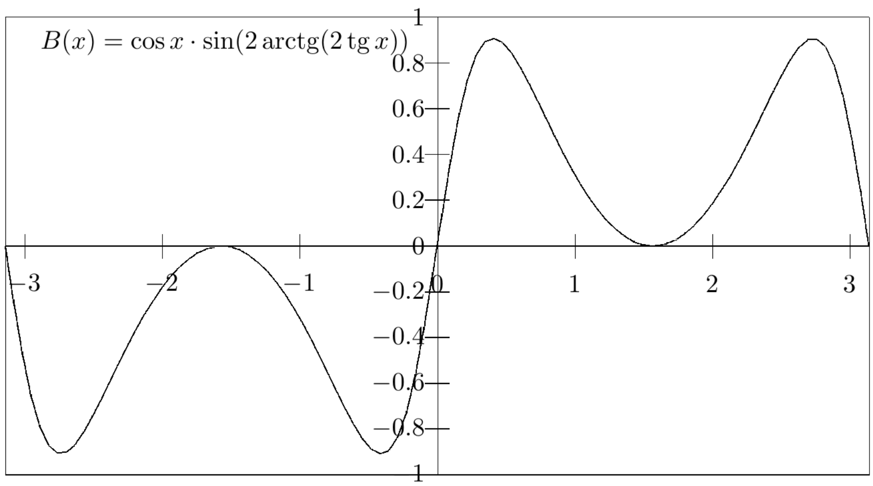
Соответственно, при $x \to -\frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{4} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

$$B(\varphi) = -1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Графики функций A и B приведены ниже:





Обе функции в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$ касаются оси абсцисс — имеют нули по крайней мере второго порядка, поэтому особенность в уравнении устранимая.