

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»  
Факультет управления и прикладной математики  
Кафедра вычислительных технологий и моделирования  
в геофизике и биоматематике

## **Динамическое моделирование земной ионосферы**

Выпускная квалификационная работа  
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:

Студент 371 группы \_\_\_\_\_ Останин Павел Антонович

Научный руководитель:

канд. физ.-мат. наук \_\_\_\_\_ Кулямин Дмитрий Вячеславович

Москва 2017

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Модель ионосферы</b>	<b>3</b>
2.1	Вывод используемых уравнений . . . . .	3
2.2	Внешние параметры уравнения . . . . .	7
2.3	Основное уравнение в сферической системе координат (в приближении тонкого сферического слоя) . . . . .	9
2.4	Свойства дифференциальной задачи . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Метод решения</b>	<b>13</b>
3.1	Требования к разностным схемам . . . . .	13
3.2	Расщепление по физическим процессам и геометрическим переменным . . . . .	14
3.3	Разностные схемы для одномерного уравнения . . . . .	17
3.4	Исследование разностных схем . . . . .	18
3.5	Квазидвумерная постановка . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Результаты численных экспериментов</b>	<b>23</b>
4.1	Воспроизведение дневного вертикального профиля электронной концентрации . . . . .	23
4.2	Чувствительности ко внешним параметрам уравнения . . . . .	25
4.3	Сравнение стационарных решений в различных постановках	29
4.4	Моделирование суточного хода . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>39</b>
	<b>Список использованных источников</b>	<b>41</b>

# 1 Введение

Представленная работа посвящена решению проблемы описания механизмов формирования, изменчивости и прогноза глобального состояния Земной ионосферы на основе численного моделирования среднеклиматических характеристик F-слоя с особым вниманием к разработке эффективных численных методов и алгоритмов их реализации. Данная работа является частью реализуемого в данное время в ИВМ РАН направления исследований по моделированию глобального состояния верхней атмосферы Земли и направлена на разработку и развитие согласованной глобальной численной модели ионосферы и термосферы высокого уровня, в том числе с дальнейшим созданием системы усвоения данных наблюдений. Таким образом, одной из ключевых особенностей данной работы является согласование методологии разработки моделирования ионосферы с уже созданными в ИВМ РАН моделями нейтральной термосферы и нижних слоев атмосферы [1, 2]. Актуальность данной задачи обусловлена повышенным в последние годы практическим интересом к исследованию и прогнозированию космической погоды, что связано с особой ролью состояния ионосферы для систем глобальной радиосвязи, спутниковых систем, а также для космической отрасли в целом. Состояние системы термосфера-ионосфера определяет как характеристики движения низкоорбитальных спутников и космических аппаратов, так и условия для распространения радиосигналов, обеспечивающих бесперебойную работу систем дальней радиосвязи, радиолокации, а также навигационных систем глобального спутникового позиционирования. На сегодняшний день существует разорванность между традиционными полупэмпирическими подходами в исследованиях верхней атмосферы и успешно применяемыми для прогноза погоды и изменений климата высокотехнологичными методами. Таким образом, задача создания по существу новой методологии моделирования и прогноза глобального состояния и изменчивости системы ионосфера-термосфера является крайне актуальной.

В работе рассматривается решение задачи по построению динамической трёхмерной модели Земной ионосферы (для 100-500 км) с детальным анализом решаемых уравнений, согласованных с уже разработанной моделью нейтральной термосферы ИВМ РАН [1], с целью дальнейшего включения этой модели в качестве вычислительного блока в совместную модель верх-

ней атмосферы. При разработке первой версии модели ионосферы используются традиционные приближения (рассмотрение только  $F$  слоя, динамическое преобладание амбиполярной диффузии, одноионная постановка, дипольное магнитное поле Земли, приближение совпадения географических и магнитных полюсов и др.) [3].

В главе 2 сформулировано основное исследуемое уравнение, описывающее эволюцию распределения электронной концентрации в  $F$ -слое ионосферы, а также описаны используемые аналитические формулы для входящих в это уравнение параметров. После этого осуществлён переход от компактной векторной записи к сферическим координатам в приближении тонкого сферического слоя. Исследованы также и свойства решения дифференциальной задачи, определяющие дальнейший выбор разностных схем для численного моделирования. В главе 3 для численного решения применён метод расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным, а затем для первого шага метода расщепления исследованы различные разностные схемы, отвечающие полученным свойствам дифференциальной задачи. В главе 4 представлены численные эксперименты по воспроизведению вертикальных профилей электронной плотности в различных постановках, чувствительности решений к изменениям внешних параметров, входящих в уравнения, а также моделированию суточного хода.

## **2 Модель ионосферы**

### **2.1 Вывод используемых уравнений**

Ионосфера — это ионизованная часть верхней атмосферы, приблизительно от 60 км до 1000 км, целиком окружающая Землю. Основным источником плазмы — фотоионизация нейтральных молекул под действием солнечного ультрафиолета и рентгеновского излучения. Ионы вступают в химические реакции с нейтральными молекулами, рекомбинируют с электронами и диффундируют в другие высоты или перемещаются нейтральным ветром. Но диффузия и перенос подвержены влиянию собственного магнитного поля Земли.

В рассматриваемом приближении моделируется эволюция концентрации  $n_e$

электронов во времени и пространстве в верхней ионосфере (в F-слое).

Основным используемым уравнением по существу является уравнение неразрывности для электронной концентрации, выражающее закон сохранения массы:  $\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{u}) = P - kn_e$ , где  $u$  — средняя скорость диффузии. Слагаемые в правой части выражают наличие процессов образования (прямой ионизации при столкновении  $O$  и  $O^+$ ) и потерь (процессов рекомбинации). Считаем  $n_e = n_i = n(O^+)$ , т. е. рассматриваем только электроны и ионы кислорода (в F-слое больше всего ионов  $O^+$ ), а плазму считаем квазинейтральной. Последнее условие позволяет записать уравнение неразрывности для  $n_i$  в том же виде, что и для электронной концентрации.

За перенос в верхней атмосфере в рассматриваемой модели отвечает амбиполярная диффузия. Её суть заключается в следующем: масса электрона гораздо меньше, чем масса иона кислорода, вследствие чего электроны и ионы разделяются пространственно. Вследствие этого разделяются и заряды, и возникает добавочное электрическое поле. Это поле препятствует дальнейшему разделению слоёв. После его создания электроны и ионы движутся как единый газ.

Для вывода уравнения амбиполярной диффузии используем общее уравнение движения в следующей форме:

$$nm \frac{D\vec{u}}{Dt} + \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \hat{\tau} - ne(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + nm[-\vec{G} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})] = \sum_t nm\nu_t(\vec{u}_t - \vec{u}) + \vec{f}(\vec{q}). \quad (1)$$

В этом уравнении  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}; \vec{\nabla})$  — полная производная;  $u$  — скорость диффузии;  $n$  — концентрация электронов;  $m$  — масса электрона;  $\hat{\tau}$  — тензор напряжений;  $\vec{G}$  — ускорение свободного падения; в квадратных скобках помимо  $\vec{G}$  стоят слагаемые, связанные с неинерциальностью системы отсчета, вызванной вращением Земли с угловой скоростью  $\vec{\Omega}$ ; в правой части сумма отвечает за столкновения электронов с различными частицами (разные типы частиц нумеруются индексом  $t$ ), а последнее слагаемое зависит от тепловых потоков, которые в частично ионизованной плазме малы и отбрасываются. Уравнение записано в системе координат, связанной с Землёй.

Далее используем т. н. диффузионную аппроксимацию: отбросим всю полную производную в силу её малости по сравнению с градиентом давления:

- $\frac{|nm(\vec{u}; \vec{\nabla})\vec{u}|}{|\vec{\nabla}p|} \approx \frac{nm u^2/L}{nkT} \approx \frac{u^2}{kT/m} = M^2$  — квадрат числа Маха. При малых числах Маха (т. е. при дозвуковых течениях) первое слагаемое можно отбросить.
- $\frac{|nm\partial\vec{u}/\partial t|\vec{u}}{|\vec{\nabla}p|} \approx \frac{L}{\tau} \frac{u}{kT/m} \approx M \frac{L/\tau}{\sqrt{kT/m}}$ , где  $\tau$  и  $L$  — характерное время процессов в плазме и характерный размер области, в которой находится рассматриваемая часть плазмы.

Для медленно меняющихся и дозвуковых потоков диффузионная аппроксимация применима.

Помимо квазинейтральности ( $n_e = n_i$ ) предполагаем движение электронов с ионами единым целым:  $n_e\vec{u}_e = n_i\vec{u}_i$ . Отбросим также и слагаемые, связанные с неинерциальностью системы отсчета в предположении их малости в сравнении с силами тяжести и магнитными силами.

Как уже упоминалось выше, считаем, что имеются ионы всего одного вида — кислорода. Это справедливо в рассматриваемом F-слое (выше  $\approx 130$  км и до 1000 км).

Запишем в приведенных приближениях общее уравнение движения для электронов и ионов в проекциях на магнитные силовые линии (индекс  $\parallel$  указывает соответствующую проекцию):

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_{\parallel} p_i + (\vec{\nabla} \cdot \hat{\tau}_i)_{\parallel} + n_i e \vec{E}_{\parallel} - n_i m_i \vec{G}_{\parallel} = \\ \quad = n_i m_i \nu_{ie} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)_{\parallel} + n_i m_i \nu_{in} (\vec{u}_n - \vec{u}_i)_{\parallel} \\ \vec{\nabla}_{\parallel} p_e + (\vec{\nabla} \cdot \hat{\tau}_e)_{\parallel} - n_e e \vec{E}_{\parallel} - n_e m_e \vec{G}_{\parallel} = \\ \quad = n_e m_e \nu_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)_{\parallel} + n_e m_e \nu_{en} (\vec{u}_n - \vec{u}_e)_{\parallel} \end{cases} \quad (2)$$

Сложив эти уравнения и учтя, что  $n_e = n_i$ ,  $\vec{u}_e = \vec{u}_i$ ,  $n_i m_i \nu_{ei} = n_e m_e \nu_{ei}$ , получим уравнение, не содержащее электрического поля, возникшего вследствие разделения электронов и ионов по слоям:

$$\vec{\nabla}_{\parallel} (p_i + p_e) + (\vec{\nabla} \cdot (\hat{\tau}_i + \hat{\tau}_e))_{\parallel} - n_i (m_i + m_e) \vec{G}_{\parallel} = n_i (m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en}) (\vec{u}_n - \vec{u}_i)_{\parallel}. \quad (3)$$

Теперь можно отбросить все слагаемые, содержащие массу электрона по сравнению с такими же слагаемыми, но уже с массой иона. После этого заменим давление  $p_i = n_i k T_i$ ,  $p_e = n_i k T_e$  и обозначим  $T_p = \frac{1}{2}(T_e + T_i)$ . Выразив из правой части векторную разность скоростей, получим закон амбиполярной диффузии, дающий характеристику средней скорости диффундирующих ионов:

$$\vec{u}_{i\parallel} = \vec{u}_{n\parallel} - \frac{2kT_p}{m_i \nu_{in}} \left( \frac{1}{n_i} \vec{\nabla}_{\parallel} n_i + \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{m_i \vec{G}_{\parallel}}{2kT_p} + \frac{(\vec{\nabla} \cdot \hat{\tau}_i)_{\parallel}}{2n_i k T_p} \right). \quad (4)$$

Обозначим  $D = \frac{2kT_p}{m_i \nu_{in}}$  — коэффициент амбиполярной диффузии.

Теперь обратимся к компоненте скорости, ортогональной вектору  $\vec{B}$ . В соответствии с оценками, приведёнными в [3], будем считать, что в плоскости, ортогональной вектору  $\vec{B}$  главный процесс — дрейф, связанный с внешними полями (это справедливо ввиду сильной замагниченности плазмы). Тогда в проекции на плоскость, ортогональную  $\vec{B}$ , уравнение движения для ионов можно записать в форме

$$n_i e \vec{E}_{\perp} + n_i e [\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] = 0. \quad (5)$$

Домножим векторно на  $\vec{B}$ :

$$\begin{aligned} [e \vec{E}_{\perp} \times \vec{B}] + e [[\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] \times \vec{B}] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [e \vec{E}_{\perp} \times \vec{B}] - e B^2 \vec{u}_{i\perp} + e (\vec{u}_{i\perp}; \vec{B}) \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

Отметим также, что  $\vec{E}_{\perp} \times \vec{B} = (\vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}) \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{B}$ .

Учтём, что рассматривается компонента, ортогональная  $\vec{B}$ , поэтому скалярное произведение в третьем слагаемом равно нулю. Это позволяет выразить искомый вектор  $\vec{u}_{i\perp}$ :

$$\vec{u}_{i\perp} = \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2}. \quad (6)$$

После нахождения компонент  $\vec{u}$ , параллельной и ортогональной полю, из уравнения неразрывности окончательно получаем следующее векторное уравнение, описывающее искомую эволюцию рассматриваемой электронной кон-

центрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & -\operatorname{div}(n_i \vec{u}_{n\parallel}) - \operatorname{div}\left(n_i \frac{1}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}]\right) + \\ & + \operatorname{div}\left(D \left[ \vec{\nabla}_{\parallel} n_i + n_i \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \vec{g}_{\parallel} \right]\right) + [P - k_i n_i]. \end{aligned} \quad (7)$$

## 2.2 Внешние параметры уравнения

Входящие в уравнение в качестве внешних параметров функции фотоионизации, рекомбинации, температуры нейтралов, электронов и ионов, а также концентрации молекул  $N_2$ ,  $O_2$  и  $O$  задаются аналитическими формулами. Для концентраций используем Больцмановское распределение по высоте:

$$n_{O_2, N_2, O}(z) = n_{O_2, N_2, O}(z_0) \cdot \exp\left(-\frac{M_{O_2, N_2, O} g}{R_0 T_n}(z - z_0)\right). \quad (8)$$

Концентрации на высоте  $z_0 \approx 100$  км полагаем равными  $n_{O_2} = 5,6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $n_O = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ ,  $n_{N_2} = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

Температуры вычисляем по аналитическим формулам

$$T(z) = T_{\infty} - (T_{\infty} - T_0) \exp\left(-\frac{g}{RT_{\infty}}(z - z_0)\right), \quad (9)$$

где  $R = \frac{R_0}{M_{air}} \approx 287 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ ,  $R_0$  — универсальная газовая постоянная. Константы  $T_{\infty}$  для разных составляющих приближённо считаем равными  $T_{n\infty} = 800 \text{ К}$ ,  $T_{i\infty} = 950 \text{ К}$ ,  $T_{e\infty} = 2200 \text{ К}$ .

Функции рекомбинации и фотоионизации (в дневное время) можно приближенно вычислять по следующим формулам:

$$P = 4 \cdot 10^{-7} \cdot n_O(z) [\text{с}^{-1}] \quad (10)$$

$$k = 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot n_{N_2}(z) + 2,1 \cdot 10^{-11} \cdot n_{O_2}(z) [\text{с}^{-1}] \quad (11)$$

При неизменных по времени функциях фотоионизации и рекомбинации  $P$  и  $k$  рассматриваемые уравнения имеют стационарное решение, отвечающее по существу состоянию системы в один определённый момент времени, а вертикальный профиль соответствует фиксированным широте и долготе. Для моделирования суточного изменения вертикального профиля добавим



зависимость от времени в слагаемое  $P$ , отвечающее фотоионизации. Используем формулу

$$P(z, t) = \begin{cases} P_0(z) e^{\tau_0(z)(1-\sec \chi)}, & |\chi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\chi| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (12)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $P_0(z)$  — фотоионизация в дневное время,  $\chi$  — зенитный угол Солнца (угол между направлением на Солнце и нормалью к земной поверхности),  $\tau_0(z)$  — оптическая толщина, для вычисления которой используется формула

$$\begin{aligned} \tau_0(z) &= \sum_{i=N_2, O_2, O} \sigma_i^{abs} \left[ \frac{R_0 T_n}{M_i g} n_i(z) \right] = \\ &= \frac{R_0 T_n}{g} \left( \sigma_{N_2}^{abs} \frac{n_{N_2}(z)}{M_{N_2}} + \sigma_{O_2}^{abs} \frac{n_{O_2}(z)}{M_{O_2}} + \sigma_O^{abs} \frac{n_O(z)}{M_O} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Константы  $\sigma_i^{abs}$  для трёх типов нейтральных молекул известны и равны соответственно  $\sigma_{N_2}^{abs} = 1,5 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ ,  $\sigma_{O_2}^{abs} = 2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ ,  $\sigma_O^{abs} = 1 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$ . Характерные величины оптической толщины на различных высотах представлены в следующей таблице:

	$z_1 = 100 \text{ км}$	$z_2 = 300 \text{ км}$	$z_3 = 500 \text{ км}$
$\tau_0$	$4 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-4}$

В предложенной формуле для фотоионизации время в качестве параметра входит лишь в зенитный угол. Кусочное задание функции  $P(z, t)$  связано с приближением отсутствия фотоионизации в ночное время (Солнце не заходит за горизонт лишь при зенитных углах, не превосходящих  $90^\circ$ ).

Зависимость зенитного угла от времени даётся следующими формулами:

$$\cos \chi = \sin \varphi \cdot \sin \delta - \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega t. \quad (14)$$

Здесь  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли,  $\varphi$  — широта, а  $\delta$  — склонение Солнца, тангенс которого определяется формулой

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} 23,5^\circ \cdot \sin \left( 2\pi \cdot \frac{d - 80}{365} \right), \quad (15)$$

где  $d$  — номер дня от начала года.

В рассматриваемое уравнение также входит вектор напряженности магнитного поля. В рассматриваемой постановке принимается дипольное приближение, в котором компоненты вектора напряженности магнитного поля выражаются через широту с помощью углов магнитного наклона  $I \approx \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)$  и угла склонения  $D$  по формулам

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \cos I \sin D \\ B \cos I \cos D \\ -B \sin I \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Кроме того, в приближении совпадения магнитных и географических полюсов  $D \approx 0$ , поэтому далее считается, что

$$\vec{B} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ B \cos I \\ -B \sin I \end{pmatrix}. \quad (17)$$

### 2.3 Основное уравнение в сферической системе координат (в приближении тонкого сферического слоя)

Перейдем от векторной записи уравнения неразрывности (7), описывающего динамику электронной плотности, к сферическим координатам  $(\lambda, \varphi, z)$ , где  $\lambda$  — долгота,  $\lambda \in [0, 2\pi]$ ,  $\varphi$  — широта,  $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $z$  — высота, отсчитываемая от радиуса Земли  $a$ .

Используем приближение тонкого сферического слоя: для частных производных по  $x$  и  $y$  запишем формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

в которых  $a$  считаем постоянным. Для дивергенции в сферических коорди-

натах в приближении тонкого сферического слоя используем

$$\operatorname{div}(n_i \vec{a}) = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_i a_x) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_i a_y \cos \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (n_i a_z). \quad (18)$$

Для векторного поля, стоящего под общим знаком дивергенции в правой части уравнения (7) введём следующие обозначения:

$$\vec{\alpha} = -\vec{u}_{\parallel} - \frac{1}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}]; \quad \vec{\beta} = \vec{\nabla}_{\parallel} n_i;$$

$$\vec{\gamma} = \left( \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{m_i \vec{g}_{\parallel}}{2kT_p} \right) = \left( \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{1}{H} \frac{\vec{g}_{\parallel}}{g} \right).$$

К вектору  $\vec{\alpha}$  отнесены компоненты, отвечающие переносу без диффузии, в вектор  $\vec{\beta}$  вошли слагаемые с производными от  $n_i$ , а оставшийся вектор  $\vec{\gamma}$  соответствует эффективной скорости при диффузии. Обозначим  $DYZ(n_i) = \operatorname{div}(D\vec{\beta})$ ,  $Tr(n_i) = \operatorname{div}(n_i \vec{\alpha})$ ,  $DTr(n_i) = \operatorname{div}(Dn_i \vec{\gamma})$ . С учетом этих обозначений уравнение (7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \operatorname{div}(n_i \vec{\alpha} + D\vec{\beta} + Dn_i \vec{\gamma}) + [P - kn_i] = \\ &= DYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - kn_i]. \end{aligned} \quad (19)$$

Запишем теперь введённые векторы  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  в компонентах и применим для дивергенции формулу (18). Учтём, что компоненты вектора напряжённости магнитного поля в дипольном приближении, а также в приближении совпадения магнитных и географических полюсов выражаются через широту с помощью угла магнитного наклона  $I \approx \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)$  по формулам (17). Это означает, что для некоторого вектора  $\vec{a}$  его составляющая вдоль магнитного поля

$$\vec{a}_{\parallel} = \left( \vec{a}, \frac{\vec{B}}{B} \right) \frac{\vec{B}}{B} = (a_y \cos I - a_z \sin I) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos I \\ -\sin I \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Аналогично, для параллельной полю компоненты градиента некоторой ска-

лярной функции  $f$  можем записать

$$\vec{\nabla}_{\parallel} f = \left( \vec{\nabla} f, \frac{\vec{B}}{B} \right) \frac{\vec{B}}{B} = \left( \frac{\partial f}{\partial y} \cos I - \frac{\partial f}{\partial z} \sin I \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos I \\ -\sin I \end{pmatrix}. \quad (21)$$

С учетом этих замечаний заключаем, что вектор  $\vec{\alpha}$  имеет компоненты

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_y \cos^2 I + u_z \sin I \cos I \\ u_y \cos I \sin I - u_z \sin^2 I \end{pmatrix} - \frac{1}{B} \begin{pmatrix} -E_y \sin I - E_z \cos I \\ E_x \sin I \\ E_x \cos I \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Вектор  $\vec{\beta}$  — параллельная полю составляющая градиента функции  $n_i$ , поэтому с учётом формул для  $\frac{\partial}{\partial y}$  и  $\frac{\partial}{\partial z}$  запишем

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} \cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos I \sin I \\ -\frac{\partial n_i}{\partial y} \cos I \sin I + \frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos I \sin I \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 I \end{pmatrix} \quad (23)$$

Оставшийся вектор  $\vec{\gamma}$  — линейная комбинация градиента скалярной функции  $T_p$  и параллельной полю компоненты вектора  $\vec{g} = (0, 0, -g)^T$ :

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{T_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial T_p}{\partial z} \cos I \sin I \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \frac{\partial T_p}{\partial z} \sin^2 I \end{pmatrix} - \frac{1}{H} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin I \cos I \\ -\sin^2 I \end{pmatrix} \quad (24)$$

Теперь с помощью записанной ранее формулы для дивергенции (18) окончательно получаем для слагаемых в правой части уравнения (19) выражения:

$$\begin{aligned} Tr(n_i) = \text{div}(n_i \vec{\alpha}) &= \frac{1}{a \cos \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (n_i \alpha_x) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_i \alpha_y \cos \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (n_i \alpha_z) = \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ n_i \frac{1}{B} (E_y \sin I + E_z \cos I) \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( u_z \sin I \cos I - u_y \cos^2 I - \right. \right. \end{aligned}$$

$$-\frac{E_x}{B} \sin I \Big) n_i \cos \varphi \Big] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( u_y \cos I \sin I - u_z \sin^2 I - \frac{E_x}{B} \cos I \right) n_i \right]; \quad (25)$$

$$\begin{aligned} DY Z(n_i) = \operatorname{div}(D\vec{\beta}) &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( D \cos \varphi \left[ \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos I \sin I \right] \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left( D \left[ \frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 I - \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos I \sin I \right] \right); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} DTr(n_i) = \operatorname{div}(Dn_i\vec{\gamma}) &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{1}{a} \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \cos I \sin I - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{H} \sin I \cos I \right) Dn_i \cos \varphi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( - \frac{1}{a} \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \right. \right. \\ &\left. \left. \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \sin^2 I + \frac{1}{H} \sin^2 I \right) Dn_i \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

## 2.4 Свойства дифференциальной задачи

Основное исследуемое уравнение (7) имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать при численном моделировании.

- Для дифференциальной задачи имеет место закон сохранения массы: интегрирование по некоторому объему обеих частей уравнения (7) и применение формулы Остроградского-Гаусса приводит к уравнению баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n_i dV = \int_V (P - kn_i) dV + F(V, n_i), \quad (28)$$

где  $F(V, n_i)$  — поток векторного поля, стоящего в уравнении (7) под общим знаком дивергенции, через границу  $\partial V$  выбранного объема  $V$ . При подходящем выборе объема  $V$  в отсутствие источников и соответствующих граничных условиях полученное соотношение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n_i dV = 0. \quad (29)$$

- В силу своего физического смысла (как концентрации электронов) решение дифференциальной задачи неотрицательно. Это справедливо

для дневного стационарного решения дифференциальной задачи: при вычислении выбираются положительные начальные условия. При моделировании суточного хода в качестве начальных условий также выбирается неотрицательное начальное условие — найденное дневное стационарное решение.

- Вблизи нижней границы влияние диффузионного слагаемого и переноса пренебрежимо малы по сравнению с процессами фотохимии. Напротив, на верхней части исследуемого высотного интервала преобладают диффузионные процессы, а  $P$  и  $k$  уже не играют роли. Важной особенностью рассматриваемой задачи является изменение входящих в уравнение коэффициентов  $D$ ,  $P$ ,  $k$ ,  $u$  на рассматриваемом отрезке на несколько порядков. Характерные величины на нескольких высотах представлены в следующей таблице:

	$z_1 = 200$ км	$z_2 = 300$ км	$z_3 = 500$ км
$D, \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	$3,1 \cdot 10^9$	$3,4 \cdot 10^{10}$	$4,2 \cdot 10^{12}$
$k, \text{с}^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$
$P, \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$	$1,5 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^2$	1,3
$u_{\text{эфф}}/D, \text{см}^{-1}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$

Как следует из приведенных выше числовых оценок ключевых коэффициентов на разных высотах и как подробно показано в [3], характерные времена различных физических процессов существенно отличаются, поэтому рассматриваемая задача жесткая.

## 3 Метод решения

### 3.1 Требования к разностным схемам

Учёт свойств дифференциальной задачи, перечисленных в предыдущем разделе, приводит к следующим требованиям к используемым разностным схемам:

- Для сохранения уравнения баланса при численном моделировании используются консервативные схемы.

- Решение дифференциальной задачи неотрицательно, поэтому от схемы требуется свойство монотонности (в смысле определения Годунова): если на каком-либо шаге  $\vec{n}^j \geq 0$ , то и на следующем шаге  $\vec{n}^{j+1} \geq 0$ .
- В силу жёсткости задачи используем неявные схемы по времени: во всех случаях производную по времени аппроксимируем по формуле  $\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau}$ , а в правой части все слагаемые берём на следующем временном слое с номером  $(j + 1)$ .

### 3.2 Расщепление по физическим процессам и геометрическим переменным

Выберем последовательно в полученном трёхмерном уравнении ключевые процессы, формирующие поле скоростей. Затем реализуем модель поэтапно, учитывая каждый раз новые поправки и сравнивая новое решение с предыдущим. В использованных разностных уравнениях учтена жесткость задачи: все использованные схемы неявные.

Рассматриваем полученное уравнение (7) в виде (19)

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DTr(n_i) + Tr(n_i) + DYZ(n_i) + [P - kn_i]$$

и используем метод расщепления. Обозначим шаг по времени  $\tau$ . На каждом шаге по времени решаем сначала разностную задачу

$$\frac{n^{j+1/3} - n^j}{\tau} = A_z n^{j+1/3} + [P - kn^{j+1/3}], \quad (30)$$

отвечающую уравнению, включающему плазмохимические процессы и диффузию в  $z$ -проекции

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin^2 I \left( \frac{\partial n_i}{\partial z} + \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n_i \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left( \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n_i \right) \right] + [P - kn_i], \end{aligned} \quad (31)$$

Затем, взяв полученное решение в качестве начального условия, решаем

следующую разностную задачу

$$\frac{n^{j+2/3} - n^{j+1/3}}{\tau} = A_{\varphi} n^{j+2/3}, \quad (32)$$

аппроксимирующую уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D \cos^2 I \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos \varphi \right] - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D \sin I \cos I \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos \varphi \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{1}{a} D \cos^2 I \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} - D \sin I \cos I \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) \right) n_i \cos \varphi \right], \end{aligned} \quad (33)$$

В результате после проведения первых двух шагов оказывается решено уравнение в двумерной  $y - z$  постановке без учёта нейтрального и поперечного переноса:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DYZ(n_i) + DTr(n_i) + [P - kn_i].$$

Наконец, на третьем шаге решается разностная задача, отвечающая оператору трёхмерного переноса: схема

$$\frac{n^{j+1} - n^{j+2/3}}{\tau} = A_{tr} n^{j+2/3} \quad (34)$$

для уравнения

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = Tr(n_i) \quad (35)$$

с начальным условием — решением со второго шага.

В данной работе реализован численный алгоритм для первого шага метода расщепления. Несмотря на это, уже такая приближённая постановка имеет смысл в средних широтах и вблизи полюсов, при отсутствии возмущений — диффузионные и плазмохимические процессы в этих областях преобладают. Решение рассматриваемой приближённой задачи, отвечающей первому шагу метода расщепления, проводится в несколько этапов. На первом этапе считается, что диффузия происходит только вдоль оси  $z$ . При этом получаем следующую одномерную задачу для электронной концентрации  $n$ :



$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial n}{\partial z} + un \right) \\ n|_{z=100 \text{ km}} = \frac{P(z=100 \text{ km})}{k(z=100 \text{ km})} \\ \left( D \frac{\partial n}{\partial z} + un \right) \Big|_{z=500 \text{ km}} = F = \text{const} \end{cases} \quad (36)$$

Здесь введено обозначение  $u = D \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{m_i g}{2kT_p} \right)$  — эффективная скорость.

Следующим этапом учтём широтную зависимость в уравнении. Простейший способ — замена коэффициента диффузии  $D$  на  $D \sin^2 I$ , где  $I$  — угол наклона магнитных силовых линий,  $I \approx \arctg(2 \tg \varphi)$ ,  $\varphi$  — широта ( $\varphi \in [-90^\circ; +90^\circ]$ ). При этом уравнение заменится на следующее:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \sin^2 I \left( D \frac{\partial n}{\partial z} + \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) \right] \quad (37)$$

В рассматриваемой постановке широта  $\varphi$  — внешний задаваемый параметр. При фиксированном  $\varphi$  уравнение, как и предыдущее, имеет стационарное решение.

Особенность данной постановки состоит в том, что на экваторе при  $\varphi = 0$  уравнение вырождается: ненулевыми остаются только производная по времени в левой части и  $P - kn$  в правой. Этот эффект соответствует чистой фотохимической постановке, что по отношению к Земной ионосфере неверно — в области экватора для моделирования необходимо использовать полное трёхмерное уравнение.

Более точный учёт широтной зависимости решения приводит к двумерной задаче, включающей диффузию вдоль оси  $z$  в проекции (со смешанной производной), совпадающей с первым шагом расщепления:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin^2 I \left( \frac{\partial n}{\partial z} + \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left( \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

### 3.3 Разностные схемы для одномерного уравнения

Перейдем к получению используемых разностных схем. Введём следующие обозначения для шагов по пространству:

$$h_i = z_{i+1} - z_i; \quad h_{i+1/2} = z_{i+1/2} - z_{i-1/2}.$$

В точке  $z = z_i$  для слагаемого  $\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z}$  в разностных схемах используется следующая аппроксимация, полученная двойным применением формулы центральной разности на отрезках  $[z_{i-1}; z_i]$  и  $[z_i; z_{i+1}]$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z} \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \left( \frac{D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i)}{h_i} - \frac{D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})}{h_{i-1}} \right). \quad (39)$$

Для слагаемого  $\frac{\partial}{\partial z}(nu)$ , связанного с переносом, исследуем схему направленных разностей

$$\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_i n_i}{h_i}, \quad (40)$$

а также схему центральных разностей

$$\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}. \quad (41)$$

Нижнее граничное условие (условие Дирихле) аппроксимируется точно, а на верхней границе условие постоянства потока может быть записано несколькими способами. Для данной одномерной задачи используем две различных аппроксимации этого условия:

- В первом случае поток  $\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{u_N}{D_N} \cdot n_N = F$  аппроксимируется с помощью центральных разностей по пространству, что соответствует схеме

$$n_N - n_{N-1} + u_N/D_N \cdot h_N \cdot n_N = F \cdot h_N \quad (42)$$

- Во втором случае для схемы центральных разностей запишем согласованную схему для верхнего граничного случая, получаемую с помощью интегрирования уравнения на  $N$ -ом шаге по пространству между двумя соседними полуцелыми узлами, а также учёта равенства потока

на верхнем полуцелом узле заданной величине  $F$ :

$$h_{N+1/2} \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau} = F - D_{N-1/2} \frac{n_N - n_{N-1}}{h_{N-1}} - \frac{1}{2}(u_{N-1}n_{N-1}^{j+1} + u_N n_N^{j+1}) \quad (43)$$

Соответственно, в численных экспериментах протестированы три различные разностные схемы:

- В схеме 1 потоковый член и граничное условие аппроксимируются с помощью направленных разностей;
- В схеме 2 только потоковый член в уравнении записывается с помощью центральных разностей, а граничное условие всё еще использует направленные разности;
- Наконец, схема 3 имеет согласованные граничное условие и схему, записанные с помощью центральных разностей.

Для одномерного уравнения (37) с учётом проекции на магнитную силовую линию (с помощью добавления множителя  $\sin^2 I$ ) использованы те же разностные схемы, но с добавлением широты  $\varphi$  в качестве внешнего параметра.

### 3.4 Исследование разностных схем

Покажем, что в дискретном случае для рассматриваемых двух схем для одномерной постановки справедлив закон сохранения массы. Для схемы 1 (с аппроксимацией  $\frac{\partial}{\partial z}(u \cdot n)$  с помощью направленной разности (40), описанной в предыдущем разделе) запишем:

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = (D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i) - D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})) \frac{1}{h^2} + (u_{i+1}n_{i+1} - u_i n_i) \frac{1}{h}.$$

Суммируя по всем узлам  $i$ , получим:

$$\sum_{i=1}^N \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = (D_{N+1/2}(n_{N+1} - n_N) - D_{1/2}(n_1 - n_0)) \frac{1}{h^2} + (u_{N+1}n_{N+1} - u_1 n_1) \frac{1}{h}. \quad (44)$$

Для подходящих граничных условий, обнуляющих правую часть, после домножения на  $\tau$ , получим  $\sum_{i=1}^N n_i^{j+1} = \sum_{i=1}^N n_i^j$ , что и требовалось.

Аналогично для схемы 2 (с аппроксимацией  $\frac{\partial}{\partial z}(u \cdot n)$  с помощью центральной разности (41)) получаем

$$\begin{aligned} \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} &= (D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i) - D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})) \frac{1}{h^2} + (u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}) \frac{1}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} &= (D_{N+1/2}(n_{N+1} - n_N) - D_{1/2}(n_1 - n_0)) \frac{1}{h^2} + (u_{N+1}n_N - u_1n_1) \frac{1}{h}, \end{aligned} \quad (45)$$

откуда при подходящих краевых условиях следует такой же результат.

Отметим также согласованность аппроксимаций уравнения и граничного условия в схемах 1 и 3. Обе схемы можно записать в консервативной форме

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{h}, \quad (46)$$

где для схемы 1 с направленной разностью поток  $F$  равен

$$F_{i+1/2} = \frac{D_{i+1/2}(n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1})}{h} + u_{i+1}n_{i+1}^{j+1}, \quad (47)$$

что согласовано с аппроксимацией верхнего граничного условия (42):

$$F = D_N \frac{n_N^{j+1} - n_{N-1}^{j+1}}{h} + u_N n_N^{j+1}.$$

Аналогично и для схемы 3 с центральной разностью: поток равен

$$F_{i+1/2} = \frac{D_{i+1/2}(n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1})}{h} + \frac{1}{2}(u_{i+1}n_{i+1}^{j+1} + u_i n_i^{j+1}), \quad (48)$$

причем постановка верхнего граничного условия (43) соответствует этой аппроксимации:

$$\frac{n_N^{j+1} - n_N^j}{\tau} \cdot h = F - D_{N-1/2} \cdot \frac{n_N^{j+1} - n_{N-1}^{j+1}}{h} - \frac{1}{2}(u_{N-1}n_{N-1}^{j+1} + u_N n_N^{j+1}).$$

Докажем теперь монотонность по Годунову для первой схемы. Для монотонности необходимо и достаточно неотрицательности элементов матрицы  $S$  системы  $\vec{n}^{j+1} = S\vec{n}^j + \tau S\vec{P}$ , эквивалентной нашей разностной схеме. Перепишем схему в виде

$$\frac{\vec{n}^{j+1} - \vec{n}^j}{\tau} = \vec{P} - K\vec{n}^{j+1} + \frac{1}{h^2}A\vec{n}^{j+1} + \frac{1}{h}B\vec{n}^{j+1}. \quad (49)$$

Здесь  $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_N)$ .

Выпишем введенные матрицы  $A$  и  $B$ :

$$A = \begin{pmatrix} (-D_{1+1/2} - D_{1-1/2}) & D_{1+1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_{2-1/2} & (-D_{2+1/2} - D_{2-1/2}) & D_{2+1/2} & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & D_{i-1/2} & (-D_{i+1/2} - D_{i-1/2}) & D_{i+1/2} & \dots & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (50)$$

$$B = \begin{pmatrix} -u_1 & u_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -u_2 & u_3 & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & -u_i & u_{i+1} & \dots & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & u_N & \\ & & & & -u_N & \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Первая и последняя строки зависят от краевых условий.

Заметим, что в матричной записи рассматриваемой неявной схемы

$$Q\vec{n}^{j+1} = \vec{n}^j + \tau\vec{P} \quad (52)$$

матрица  $Q$  трёхдиагональна, причем элементы на трёх её центральных диагоналях (по порядку их записи в строке) равны соответственно

$$q_{i,i-1} = -\frac{\tau}{h^2}D_{i-1/2}; \quad (53)$$

$$q_{i,i} = 1 + \tau k_i + \frac{\tau}{h^2}D_{i+1/2} + \frac{\tau}{h^2}D_{i-1/2} + \frac{\tau}{h}u_i; \quad (54)$$

$$q_{i,i+1} = -\frac{\tau}{h^2}D_{i+1/2} - \frac{\tau}{h}u_{i+1}. \quad (55)$$

Разность  $q_{i,i}$  и модулей внедиагональных элементов равна

$$q_{i,i} + q_{i,i-1} + q_{i,i+1} = 1 + \tau \left( k_i + \frac{u_i - u_{i+1}}{h} \right), \quad (56)$$

при достаточно малых значениях  $\tau$  эта величина строго положительна.

Все диагональные элементы положительны, внедиагональные отрицательны и есть строгое диагональное преобладание, т. е. по определению перед нами М-матрица, а поэтому её обратная матрица состоит из неотрицательных элементов, что и требовалось.

### 3.5 Квазидвумерная постановка

Рассмотрим теперь разностные схемы для уравнения, описывающего диффузию вдоль оси  $Oz$  в проекции с добавлением смешанной производной (38):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin^2 I \left( \frac{\partial n}{\partial z} + \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left( \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right]. \end{aligned}$$

Заменим  $u = \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}$ . Для использования уже имеющегося программного кода в применении уже к данной двумерной задаче используем следующую разностную схему: для смешанной производной  $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \varphi}$  запишем

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left( n \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( n \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} \right). \quad (57)$$

Введём обозначение

$$u_\varphi = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi}. \quad (58)$$

Для рассматриваемого уравнения  $u_\varphi$  — это добавка к эффективной скорости, связанная со смешанной производной по  $\varphi$ .

Используем для численного решения нелинейную схему: будем вычислять решение, последовательно перемещаясь по временным слоям, причем  $u_\varphi$  будем брать на основании данных с предыдущего временного слоя.

Для рассматриваемого уравнения в результате применяется та же разностная схема с центральными разностями, что и для одномерного уравнения, но возникает добавка, связанная с последним слагаемым. Для этого слагаемого использованы две различные разностные аппроксимации:

- Схема направленных разностей с учётом возможной знакопеременности эффективной скорости:  $\frac{|u_\varphi| + u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h_i} + \frac{|u_\varphi| - u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i-1} - n_i}{h_{i-1}}$ ;
- Схема центральных разностей:  $\frac{(u_\varphi)_{i+1}n_{i+1} - (u_\varphi)_{i-1}n_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$ .

В обоих случаях концентрации  $n$  берутся со следующего временного слоя — схема неявная.

При этом сама эффективная скорость может быть вычислена двумя способами:

- Первый способ — применение формулы центральной разности к производной по  $\varphi$  для логарифма в формуле  $u_\varphi$

$$u_\varphi \approx \frac{\ln n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) - \ln n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi}; \quad (59)$$

- Второй способ — без привлечения логарифма использовать формулу

$$u_\varphi \approx \frac{2}{n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) + n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)} \cdot \frac{n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) - n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi}. \quad (60)$$

Численные эксперименты показали, что обе формулы для  $u_\varphi$  дают один и тот же результат. Более того, на практике решение никогда не достигает чистого нуля, поэтому отдельные кусочные задания формул для  $u_\varphi$  при нулевых значениях  $n$  на предыдущем временном слое никак не отражаются на получаемом решении. Тем не менее, вторая формула более удобна для анализа асимптотического поведения  $u_\varphi$  при приближении  $n$  к нулю.

Для вычисления решения на следующем временном слое используются граничные условия как по  $z$ , так и по  $\varphi$ : на полюсах решение полагается тождественно равным стационарному решению одномерной задачи. Это позволяет сохранить непрерывность решения в зависимости от  $\varphi \in [-90^\circ; 90^\circ]$ .

На нижней границе по  $z$  ставится граничное условие типа Дирихле — решение совпадает с отношением  $\frac{P(100 \text{ km})}{k(100 \text{ km})}$ .

Верхнее граничное условие, как и ранее, — постоянство полного потока (с учётом добавки к эффективной скорости в виде  $u_\varphi$ ). В разностной аппроксимации верхнего граничного условия используется центральная разность, в результате чего эта аппроксимация оказывается согласованной со схемой центральных разностей для рассматриваемого уравнения.

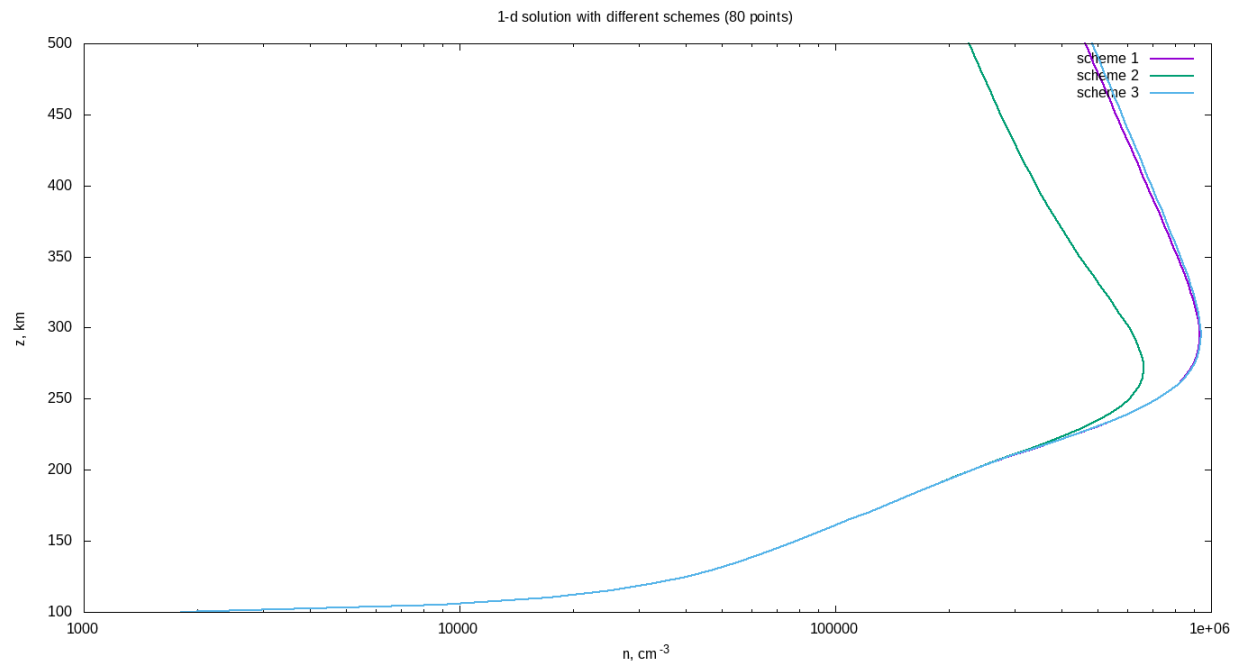
## 4 Результаты численных экспериментов

### 4.1 Воспроизведение дневного вертикального профиля электронной концентрации

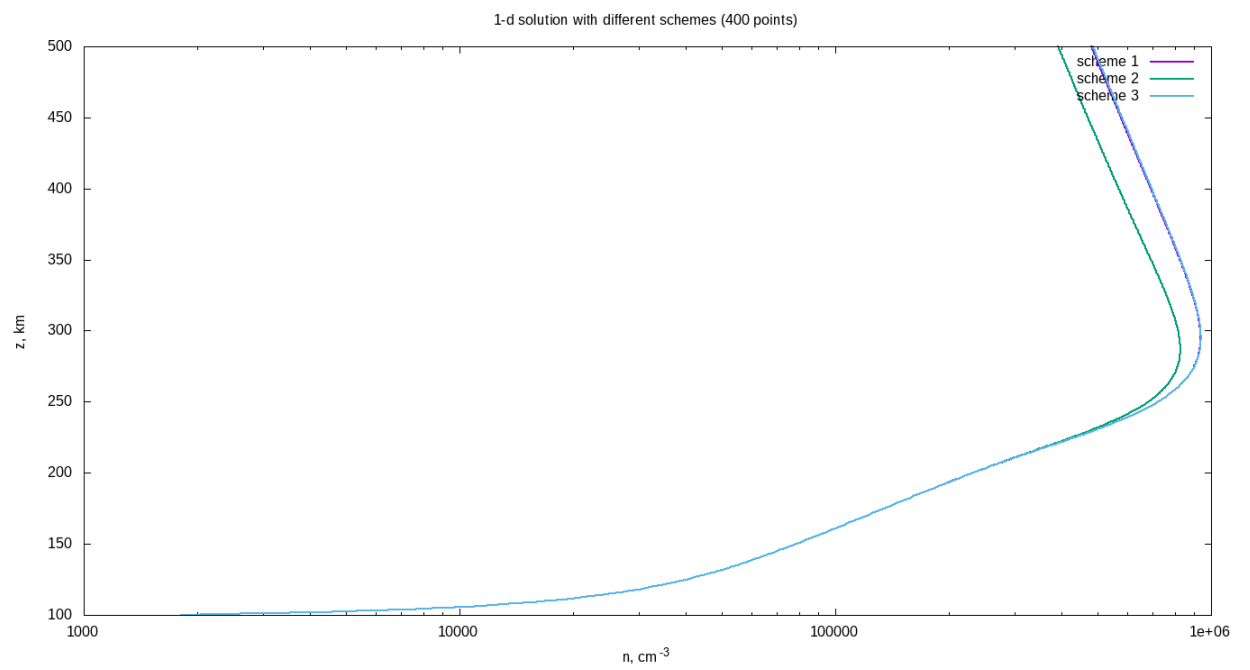
Прежде всего обратимся к одномерной задаче для  $z$ -диффузии без проекций. Исследуемая задача при постоянных значениях  $P$  и  $k$  имеет не зависящее от времени решение, а численные эксперименты показали, что при итерациях по времени происходит установление решения во всех трёх схемах, указанных в разделе (3.3). Используемый шаг по пространству  $h = 5$  км и по времени  $\tau = 3$  мин обеспечивает сходимость к одной и той же кривой в схемах 1 и 3 с характерным временем установления порядка 4–5 часов (по прошествии этого времени первые несколько значащих цифр в решении уже не изменяются). Схема 2 также имеет сходимость к стационарному решению, но в отличие от оставшихся двух схем шаг по пространству  $h = 5$  км слишком велик: для получения того же самого решения, что и в других двух схемах, необходимо уменьшить шаг хотя бы до  $h = 0,2$  км.

Результаты расчетов (стационарные решения в зависимости от разного количества узлов по пространству) представлены на следующих графиках (по горизонтальной оси масштаб выбран логарифмическим). Соответственно, 80, 400 и 2000 узлов отвечают шагам по времени 5 км, 1 км и 0,2 км.

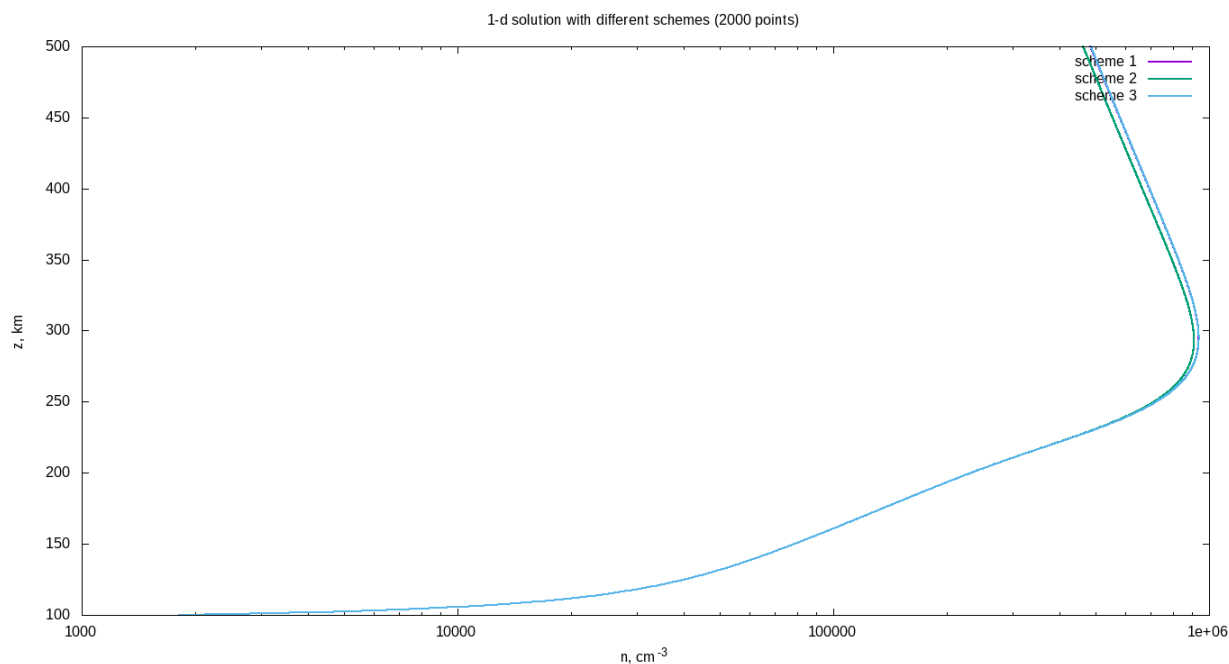




(a)



(b)



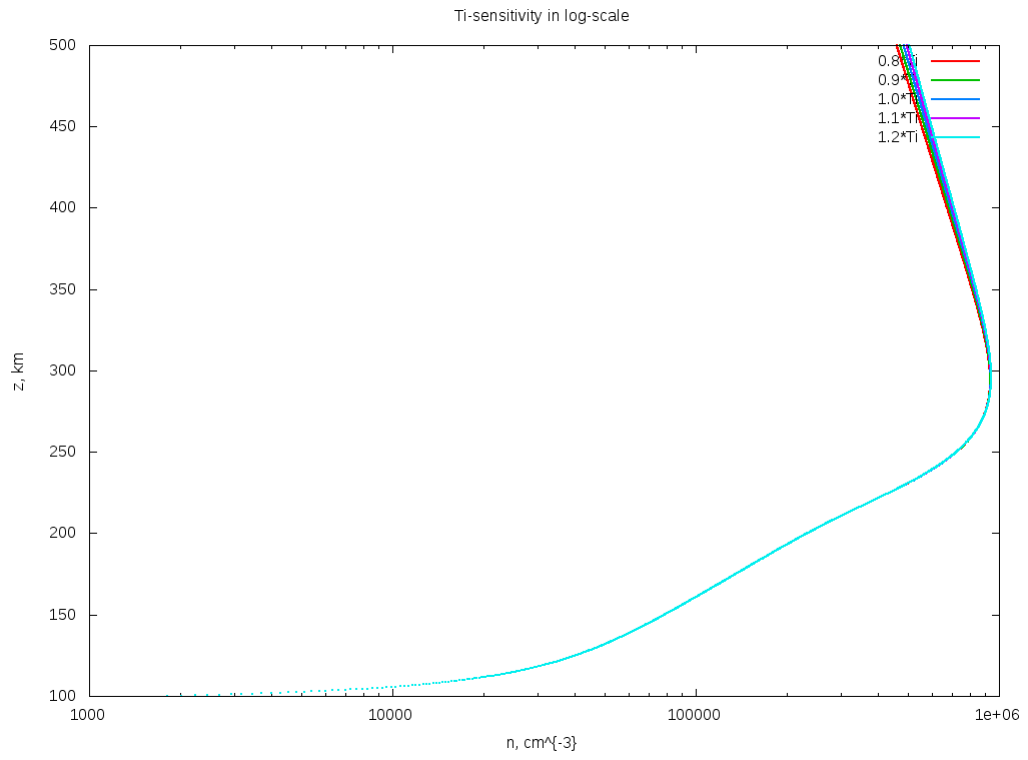
(в)

Рис. 1: Вертикальные профили дневных стационарных распределений электронной концентрации при (а) 80, (б) 400 и (в) 2000 расчётных узлах (по вертикальной оси показана высота в км, по горизонтальной — электронная концентрация в  $\text{cm}^{-3}$  в логарифмическом масштабе).

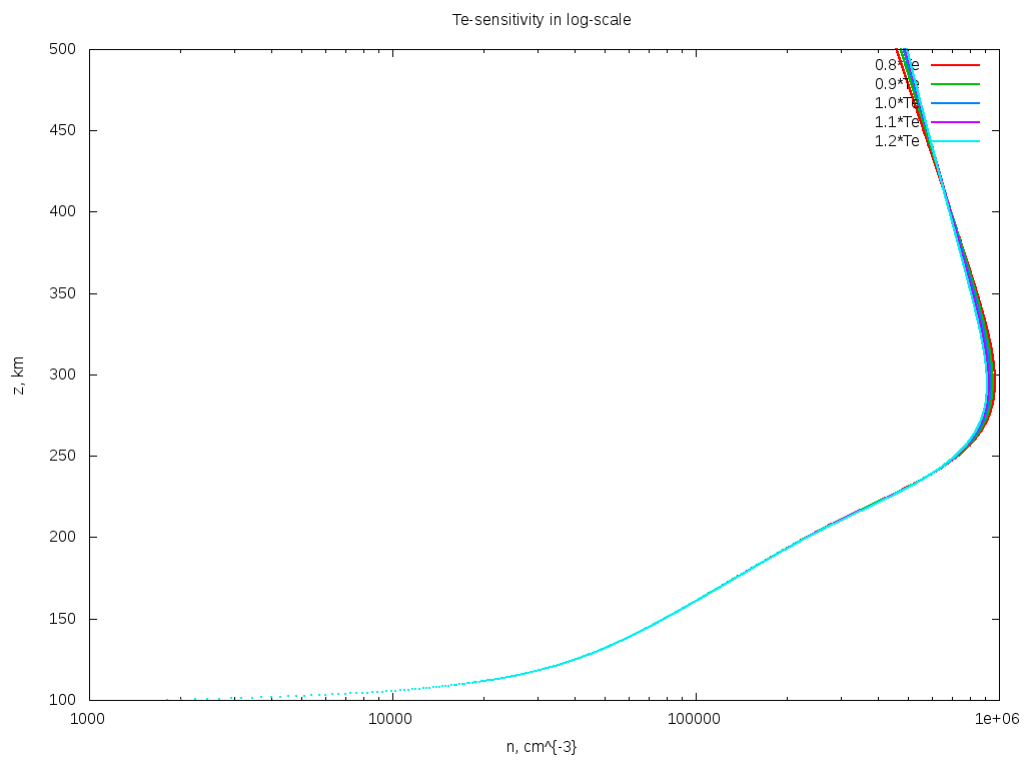
## 4.2 Чувствительности ко внешним параметрам уравнения

Полученное решение позволяет исследовать чувствительность к изменению внешних параметров: температурам, концентрациям нейтральных молекул, фотоионизации и рекомбинации. На следующих графиках представлены результаты варьирования каждого из параметров в отдельности на 10% и 20% (в обе стороны). В каждом случае вычислено стационарное решение при изменённом параметре.

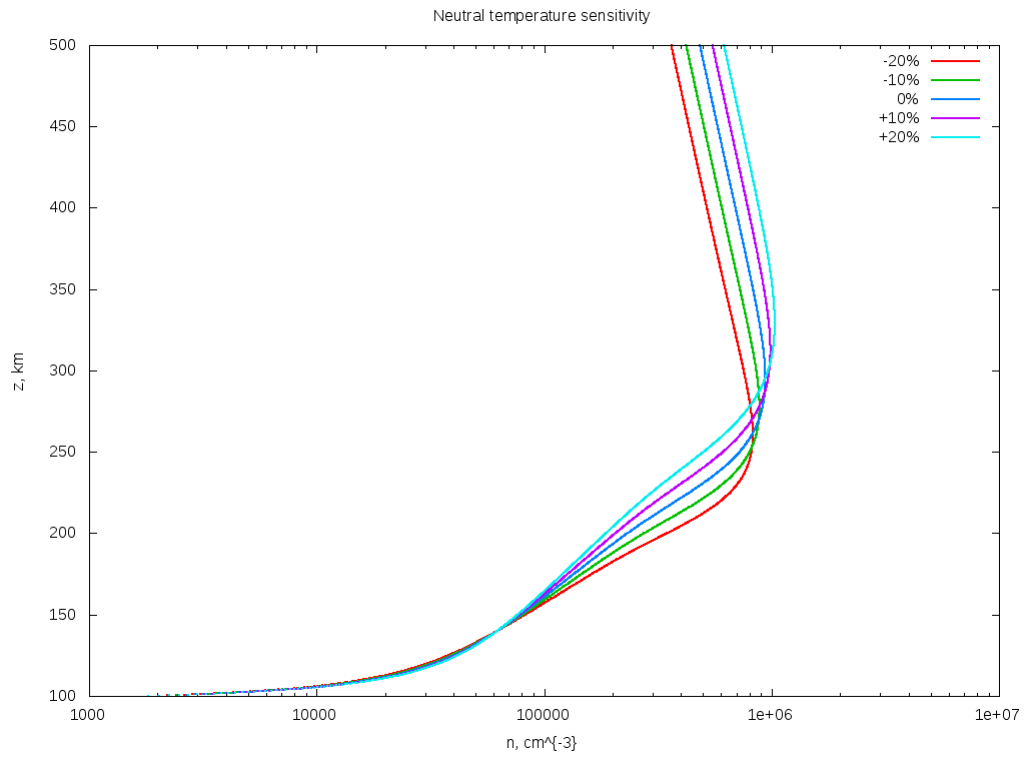
Варьирование входящих в уравнение температур показывает, что наибольшую чувствительность решение имеет к температуре нейтральных молекул. Изменение концентрации нейтральных молекул — атомарного кислорода, молекулярного кислорода и азота показывает, что наибольшая чувствительность решения отвечает изменению концентрации атомарного кислорода, а чувствительности к изменению концентраций атомарного кислорода и азота приблизительно одинаковы.



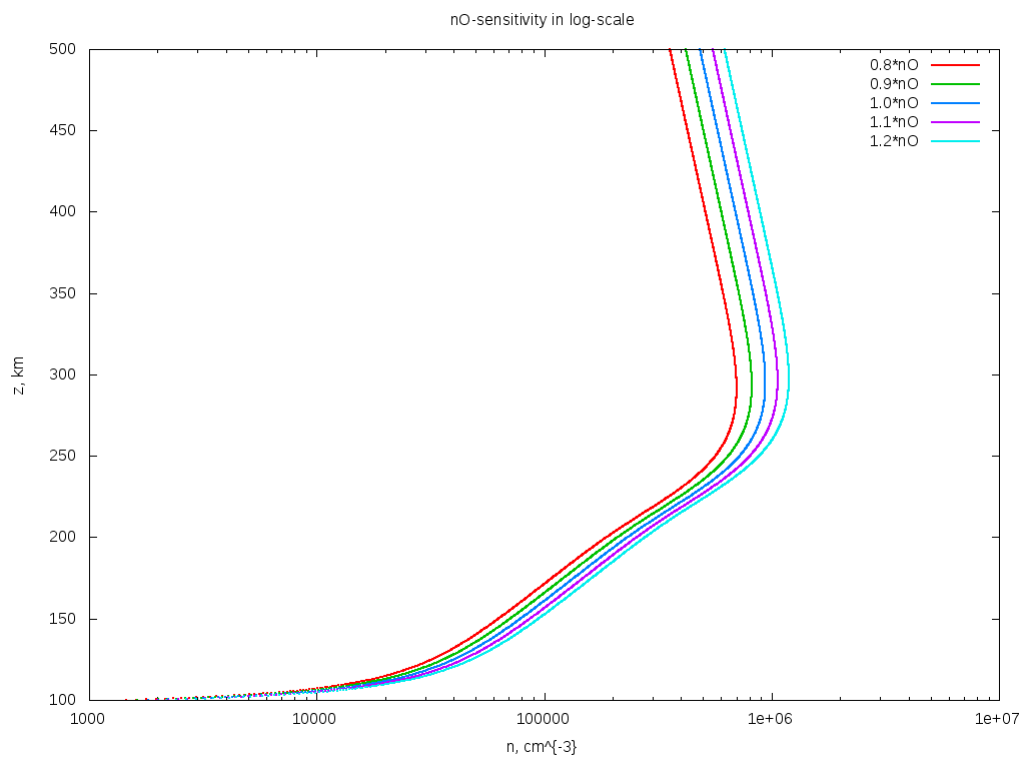
(a)



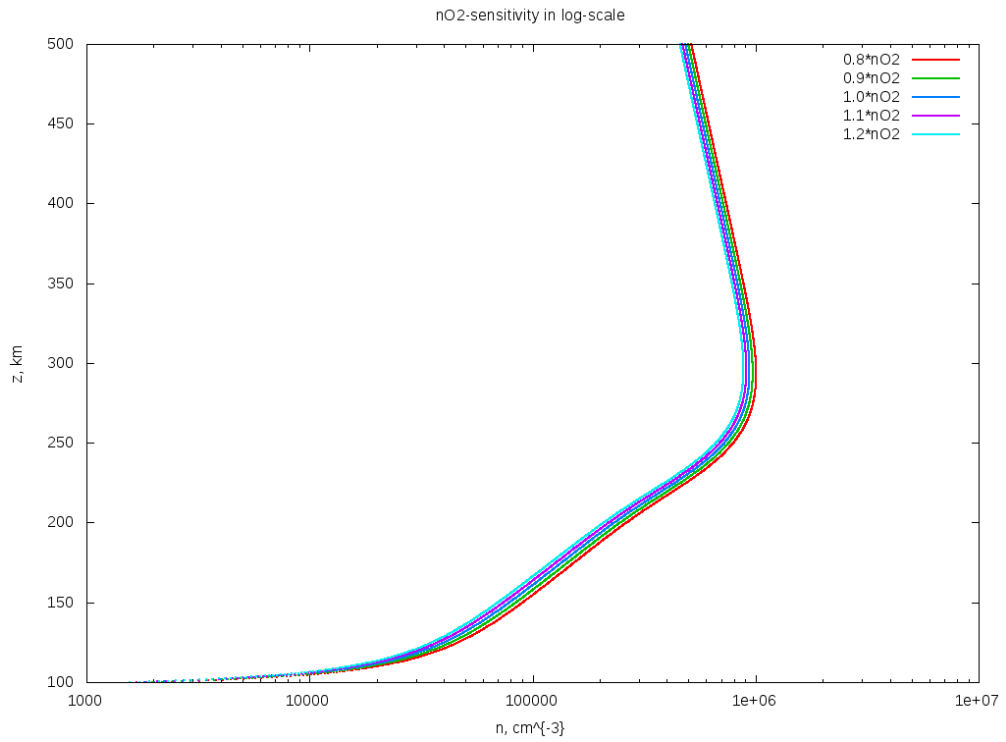
(b)



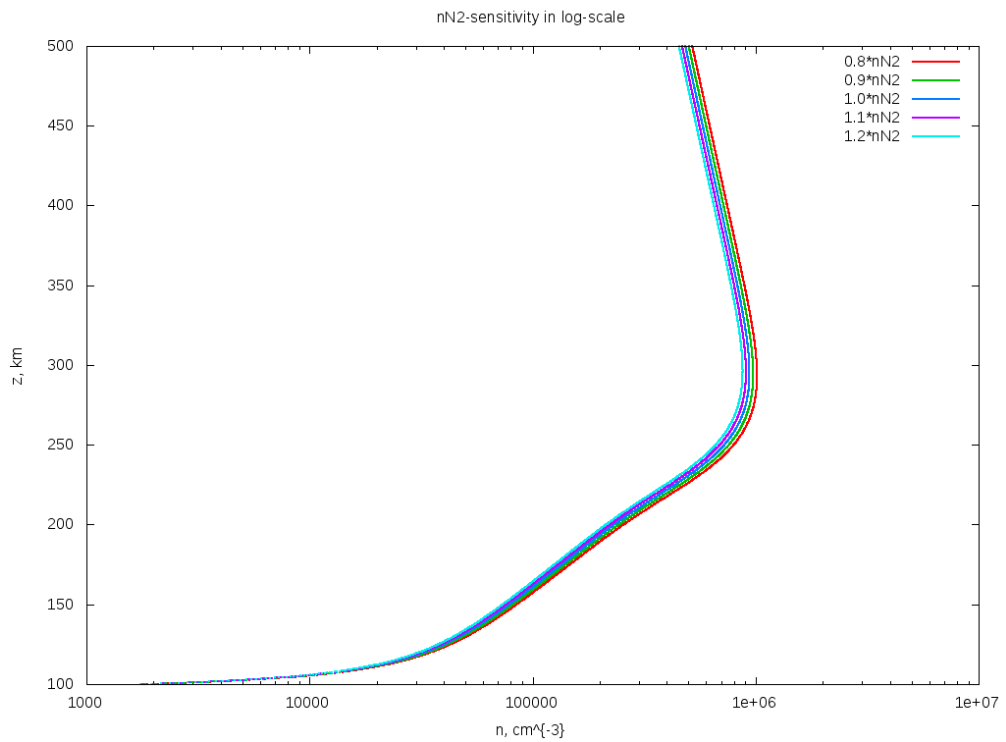
(B)



(Γ)



(д)



(е)

Рис. 2: Чувствительности к изменению (а) температуры ионов, (б) температуры электронов, (в) температуры нейтралов, (г) концентрации  $O$ , (д) концентрации  $O_2$ , (е) концентрации  $N_2$  (по горизонтальной оси — электронная концентрация в  $\text{см}^{-3}$  в логарифмическом масштабе).

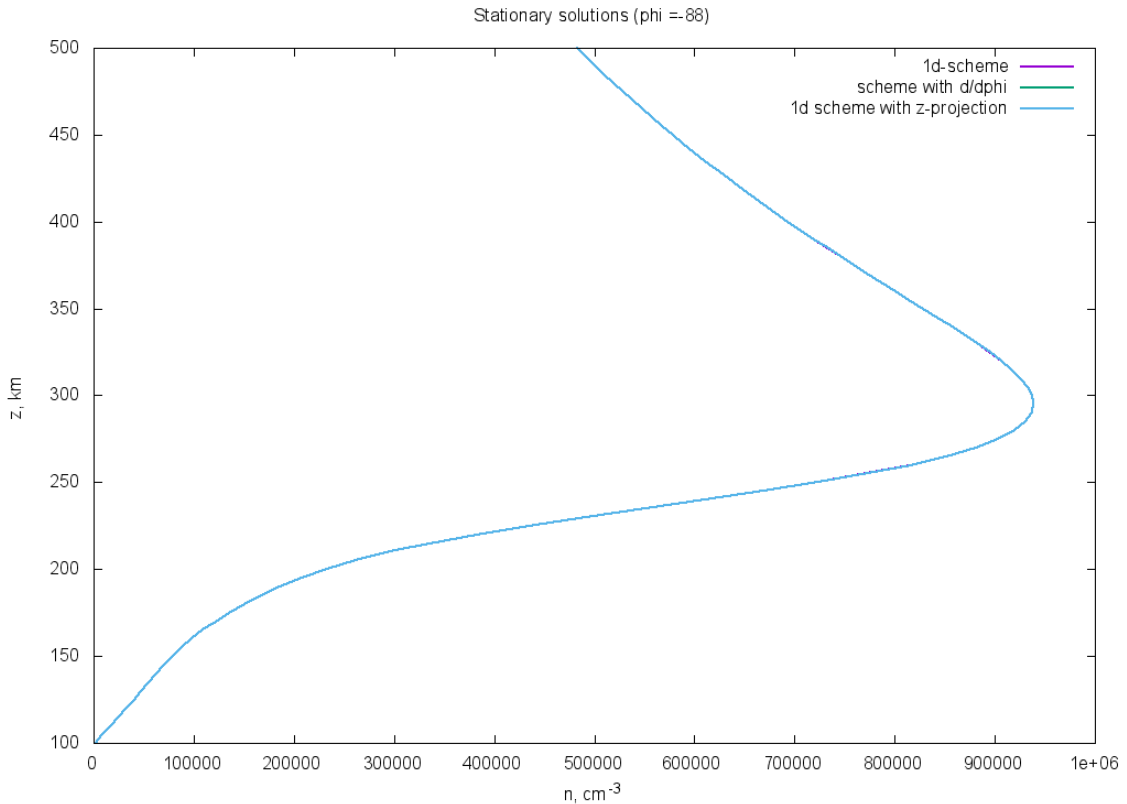
### 4.3 Сравнение стационарных решений в различных постановках

Различные постановки используются для учёта наклона магнитных силовых линий. Для исследования и сравнения качественных отличий полученных результатов установим не зависящую от времени ионизацию

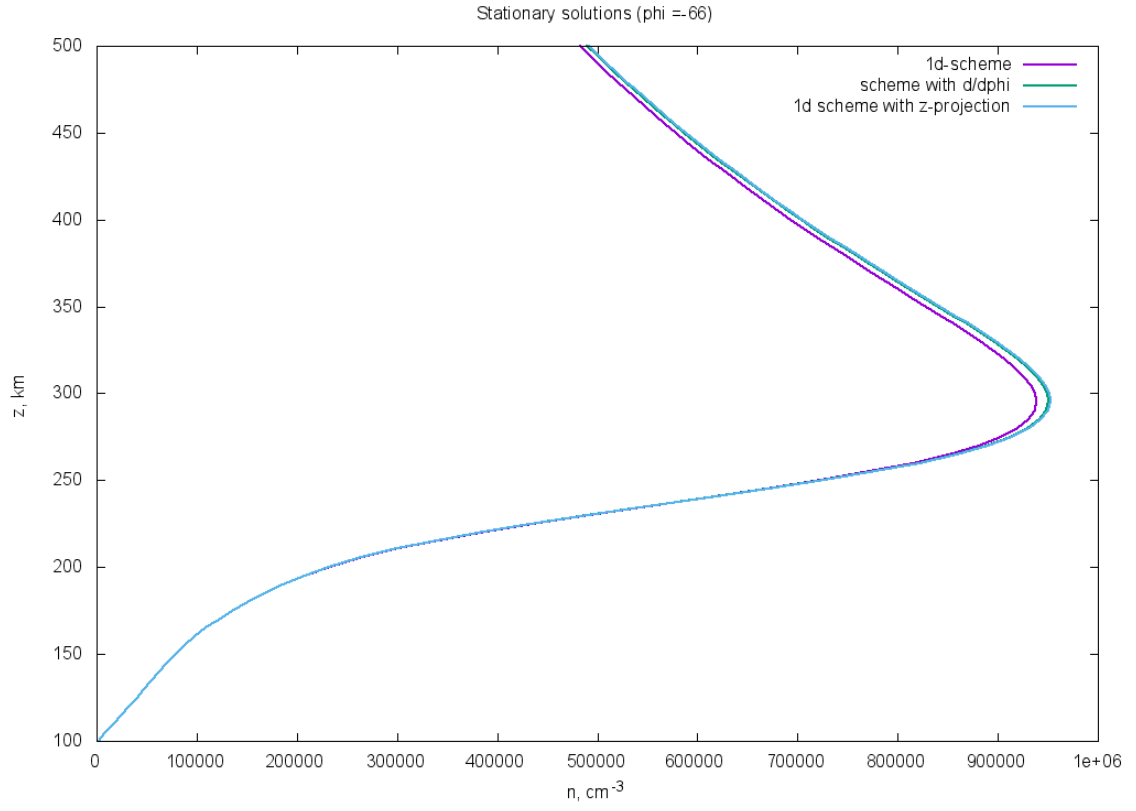
$$P(z, t) \equiv P_0(z)$$

и изучим сходимости к стационарным решениям с одних и тех же начальных условий — вектора с компонентами, равными единице (такой вектор отвечает «почти нулевому» решению, при этом даёт возможность использовать схемы, применение которых к случаю нулевых значений затруднено, как, например, в случае логарифма для  $u_\varphi$ ).

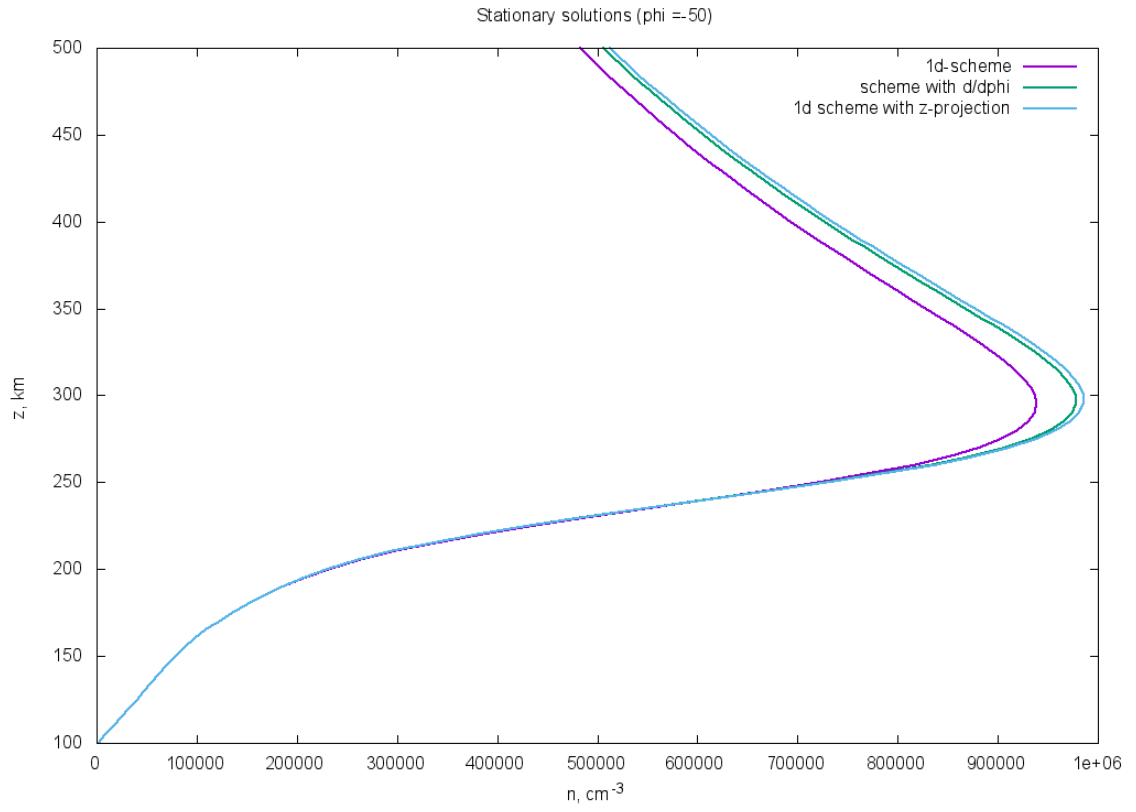
Полученные решения при широтах  $\varphi = -88^\circ, -66^\circ, -50^\circ, -40^\circ, -30^\circ, -16^\circ, -2^\circ$ , а также и решения при  $\varphi = 0^\circ$ , соответствующие положению на экваторе, представлены на следующих графиках:



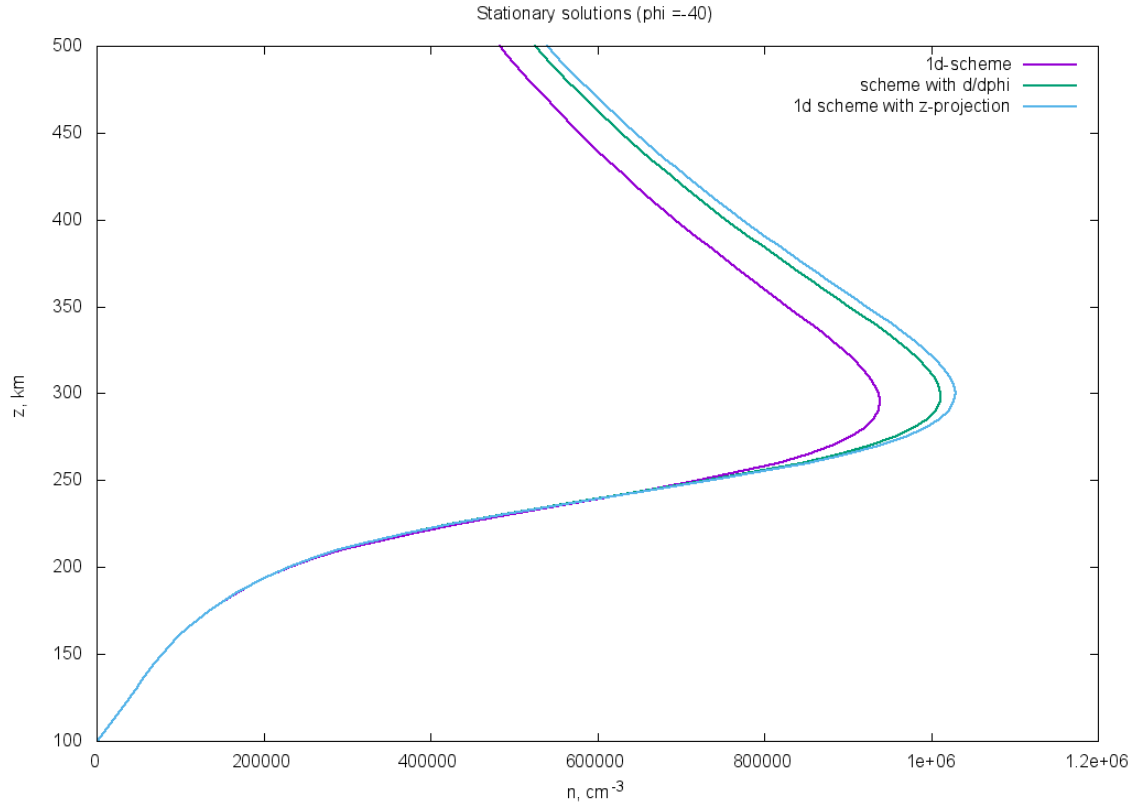
(a)



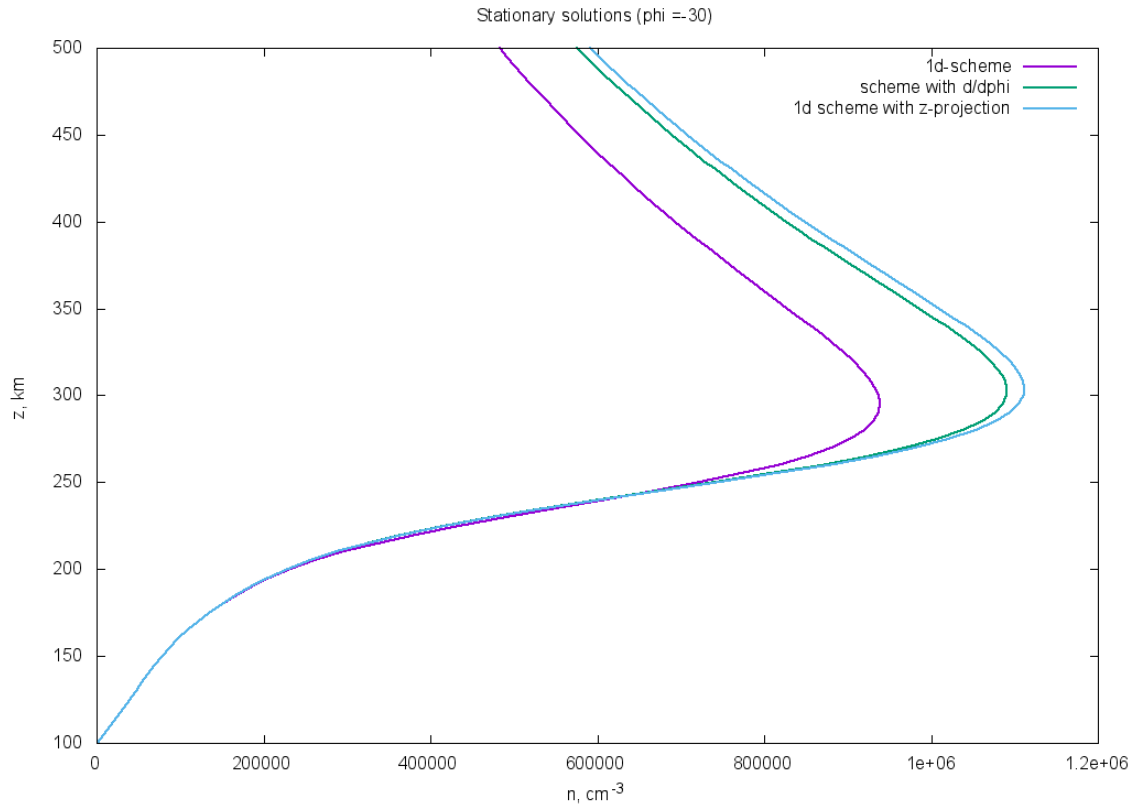
(6)



(B)

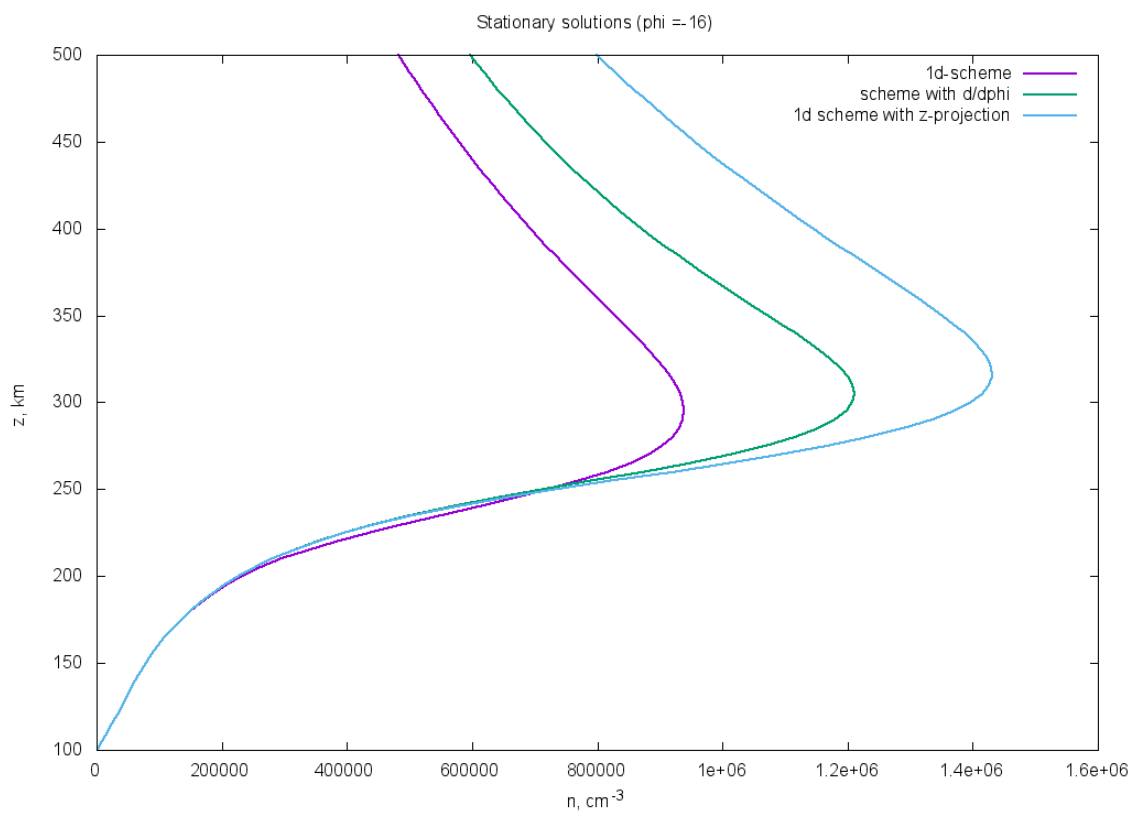


(Г)

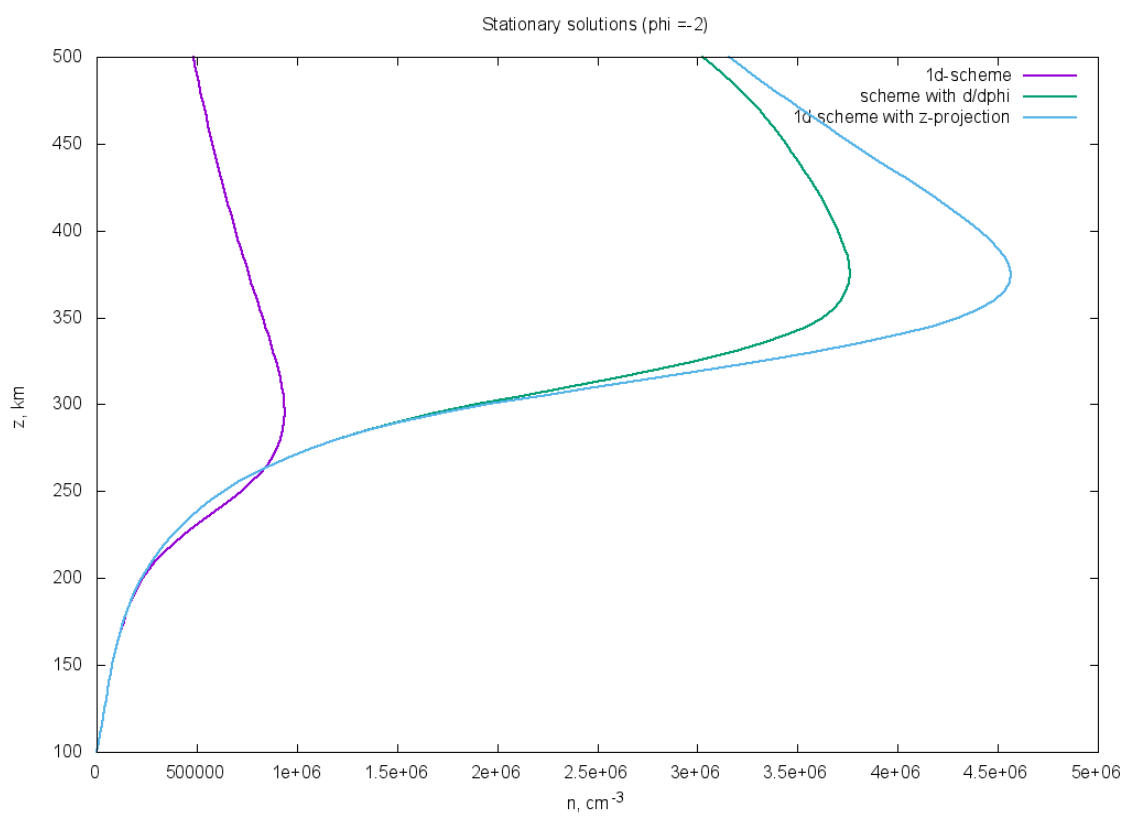


(Д)

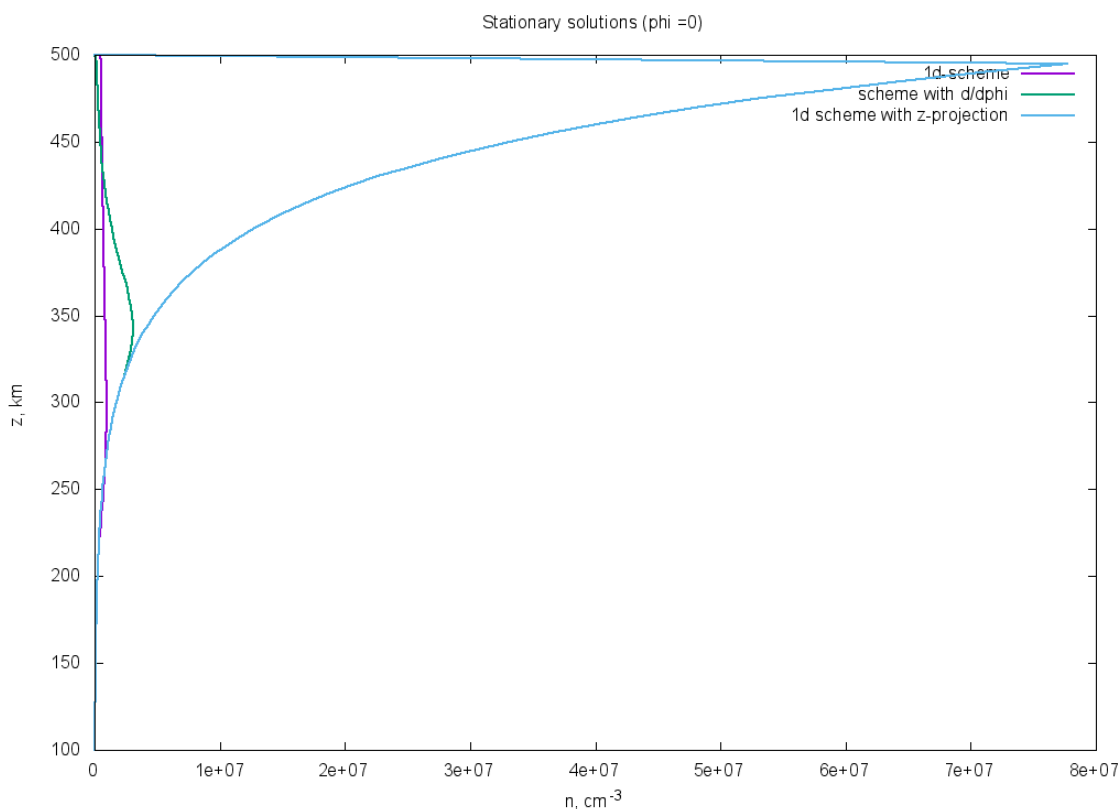




(e)



(ж)



(3)

Рис. 3: Стационарные вертикальные профили электронной концентрации для трёх различных постановок при широте (а)  $\varphi = -88^\circ$ , (б)  $\varphi = -66^\circ$ , (в)  $\varphi = -50^\circ$ , (г)  $\varphi = -40^\circ$ , (д)  $\varphi = -30^\circ$ , (е)  $\varphi = -16^\circ$ , (ж)  $\varphi = -2^\circ$ , (з)  $\varphi = 0^\circ$  (по вертикальной оси показана высота в км, по горизонтальной — электронная концентрация в  $\text{см}^{-3}$  в логарифмическом масштабе). Синим цветом обозначены результаты расчета в одномерной постановке, зеленым — результаты, полученные из одномерной постановки с учётом широтной зависимости, фиолетовый цвет относится к квазидвумерной постановке.

Из представленных графиков видно, что решения тем больше отличаются, чем ближе рассматриваемая широта к экватору. Вблизи полюса все три стационарных решения практически совпадают со стационарным решением одномерной задачи без учёта широтной зависимости. Напротив, вблизи экватора различия весьма существенны: учёт широтной зависимости значительно увеличивает решение по сравнению со стационарным распределением электронной плотности на полюсе. Как уже было упомянуто, при нулевой широте в одномерном уравнении с  $z$ -проекцией обнуляется вся

диффузионная часть, а остаются лишь функции фотоионизации и рекомбинации  $P$  и  $k$ , откуда в стационарном случае  $n_e = \frac{P}{k}$ .

## 4.4 Моделирование суточного хода

Рассмотрим для начала численный эксперимент по моделированию суточного хода в одномерной модели. В ходе этого эксперимента вычисляется стационарное решение одномерной задачи при дневном значении  $P(z)$ , а затем итерации по времени продолжаются с уже меняющимся  $P(z, t)$  в соответствии со введённой формулой (13).

Результаты представлены следующим графиком — трёхмерной поверхностью, построенной над плоскостью  $(z, t)$ .

Видно, что за сутки решение восстанавливается до исходного дневного стационарного решения. Кроме того, после обнуления  $P$  при зенитных углах больше  $90^\circ$  начинается спад электронной концентрации, сопровождающийся изломом по времени (в соответствующий момент  $P$ , входящее в уравнение, также терпит излом).

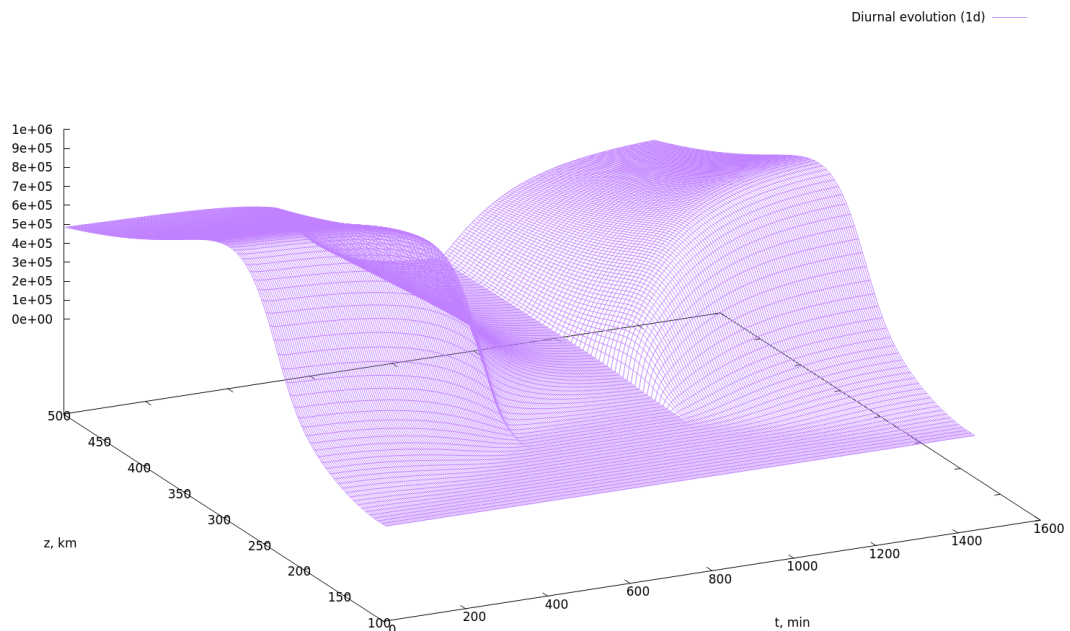
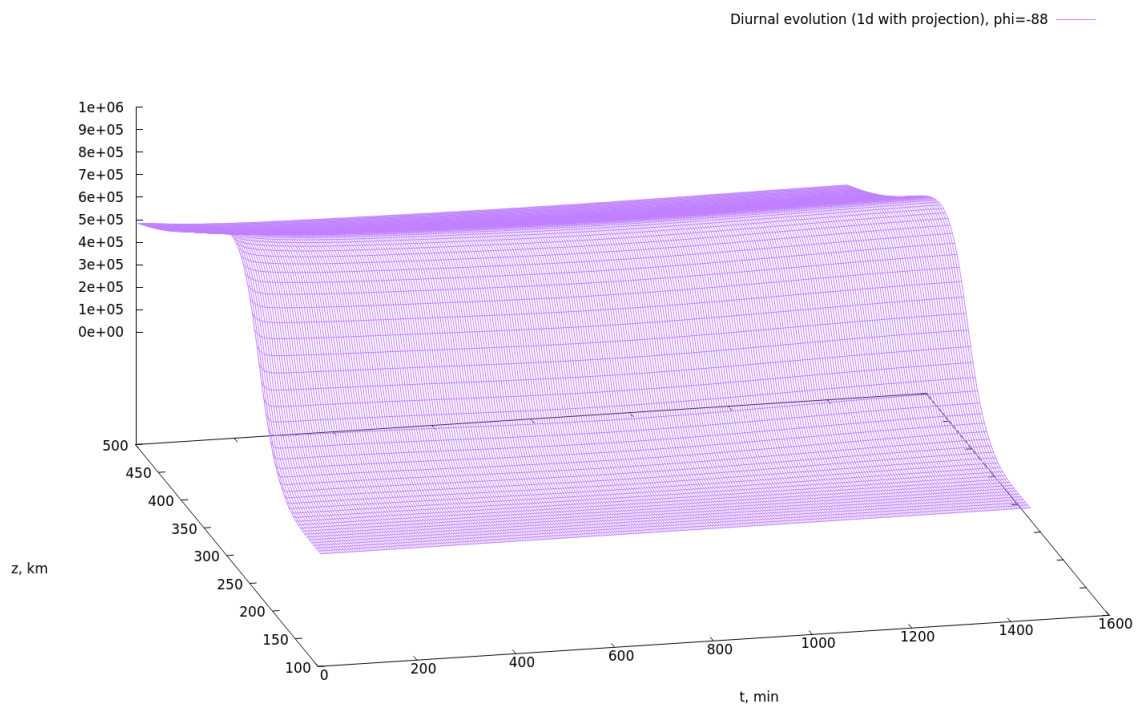


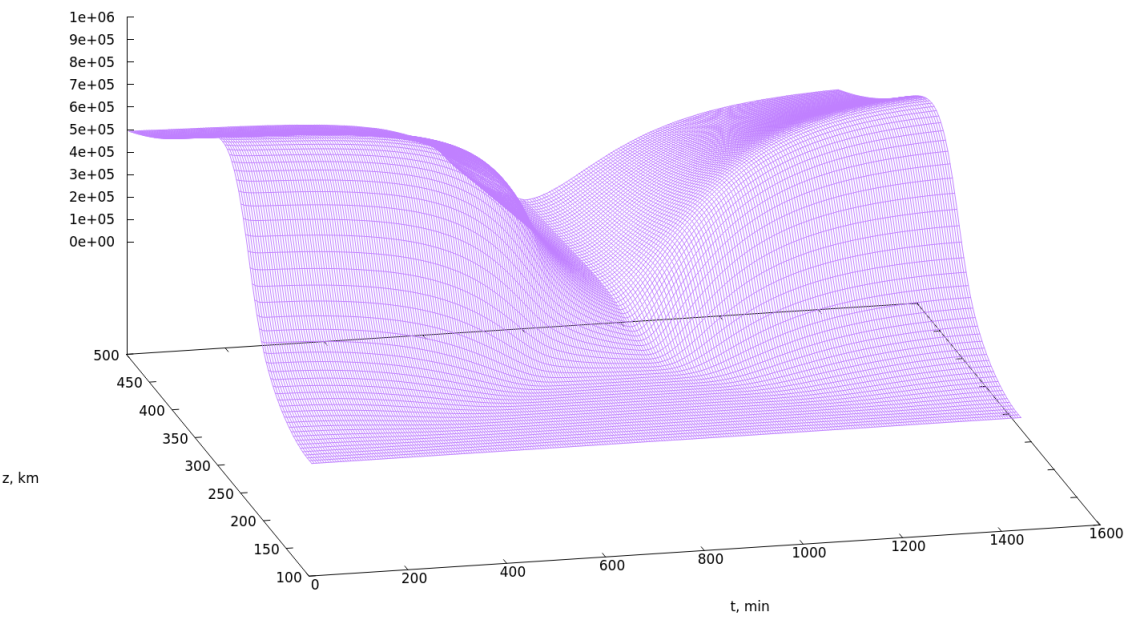
Рис. 4: Суточный ход в одномерной модели с добавлением зависимости фотоионизации от зенитного угла. По вертикальной оси показана электронная концентрация в  $\text{см}^{-3}$ , а по двум горизонтальным — высота в км и время в мин.

Учтём теперь широтную зависимость в уравнении. В качестве первого шага продолжим использование одномерного уравнения, но уже в  $z$ -проекции, с заменой коэффициента диффузии  $D$  на  $D \sin^2 I$ .

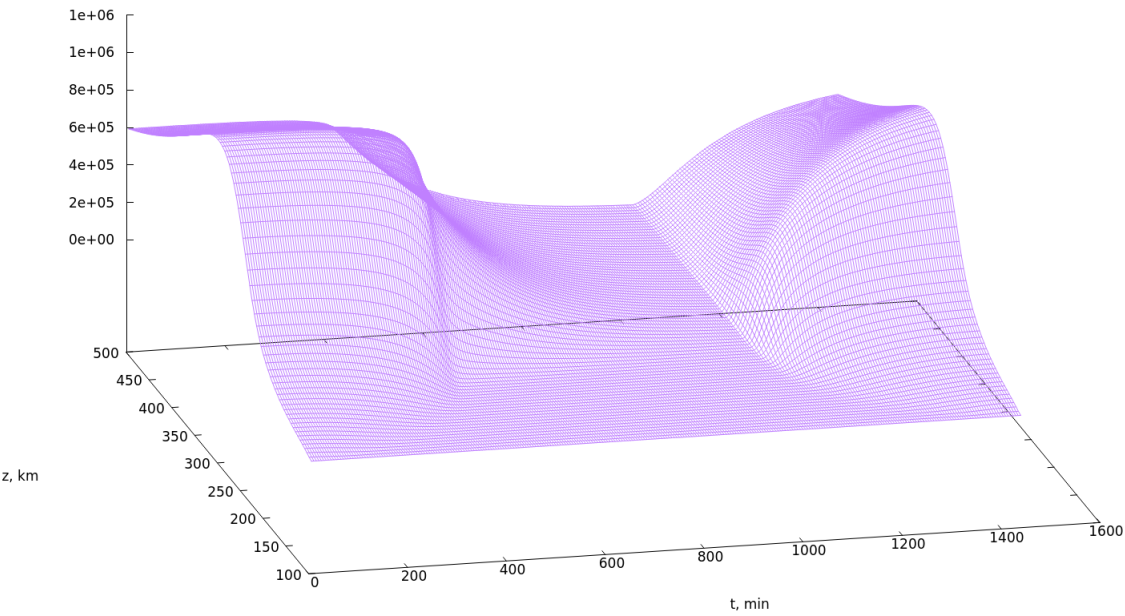
Как и для одномерного уравнения без широтной зависимости, сначала рассчитываем стационарное решение при дневном значении функции фотоионизации  $P$ , после чего с итерациями по времени меняем  $P$  в соответствии с изменением зенитного угла.

Результаты расчётов суточного хода в одномерной модели с учётом широтной зависимости при широтах  $\varphi = -88^\circ, -66^\circ, -30^\circ, -1^\circ$  приведены на следующих графиках:

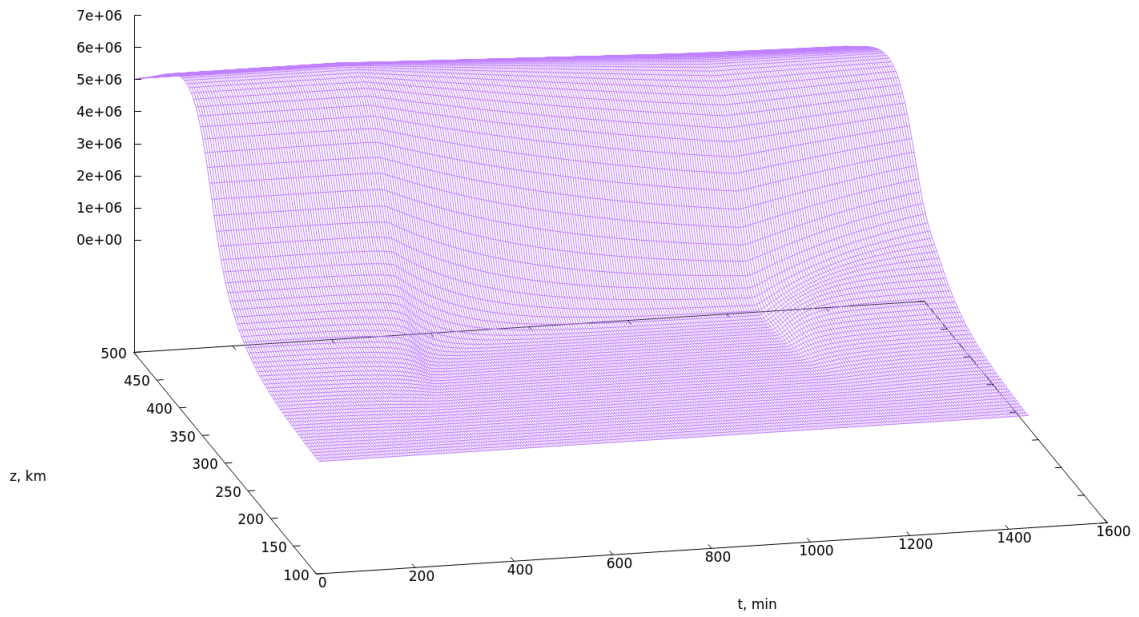




(6)



(B)



(г)

Рис. 5: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию при широтах: (а)  $\varphi = -88^\circ$ , (б)  $\varphi = -66^\circ$ , (в)  $\varphi = -30^\circ$ , (г)  $\varphi = -2^\circ$ . Вертикальная ось отвечает значениям электронной концентрации в  $\text{см}^{-3}$ , по горизонтальным осям отложены высота в км и время в мин.

Теперь рассмотрим суточный ход в квазидвумерной модели (в  $z$ -проекции со смешанной производной). На следующих графиках представлен суточный ход при тех же широтах, что и в случае одномерного уравнения с  $z$ -проекцией. Эксперимент повторяет действия с одномерной моделью: вычисление стационарного дневного решения с последующим изменением функции фотоионизации в согласии с суточным ходом. Существенное отличие наблюдается в характере решения вблизи экватора — уравнение не вырождается.

На графиках приведены результаты моделирования суточного хода в квазидвумерной постановке при широтах  $\varphi = 30^\circ$  и  $\varphi = -2^\circ$ . Качественные отличия от предыдущей постановки становятся заметны именно на широтах вблизи экватора.



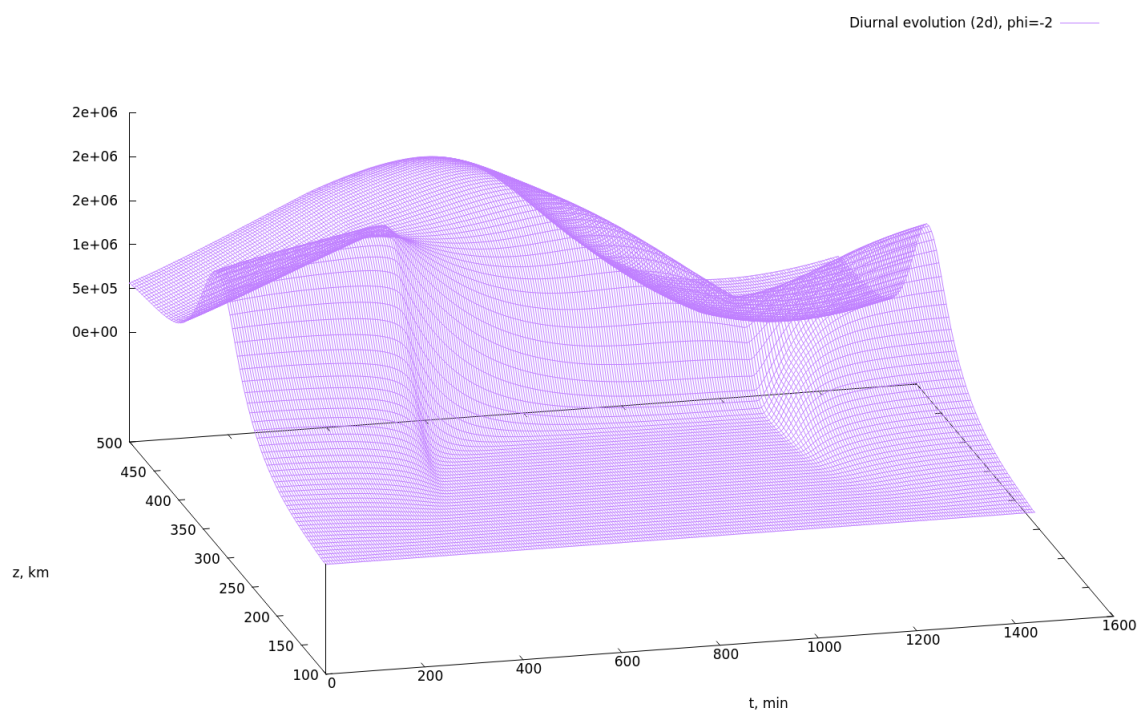
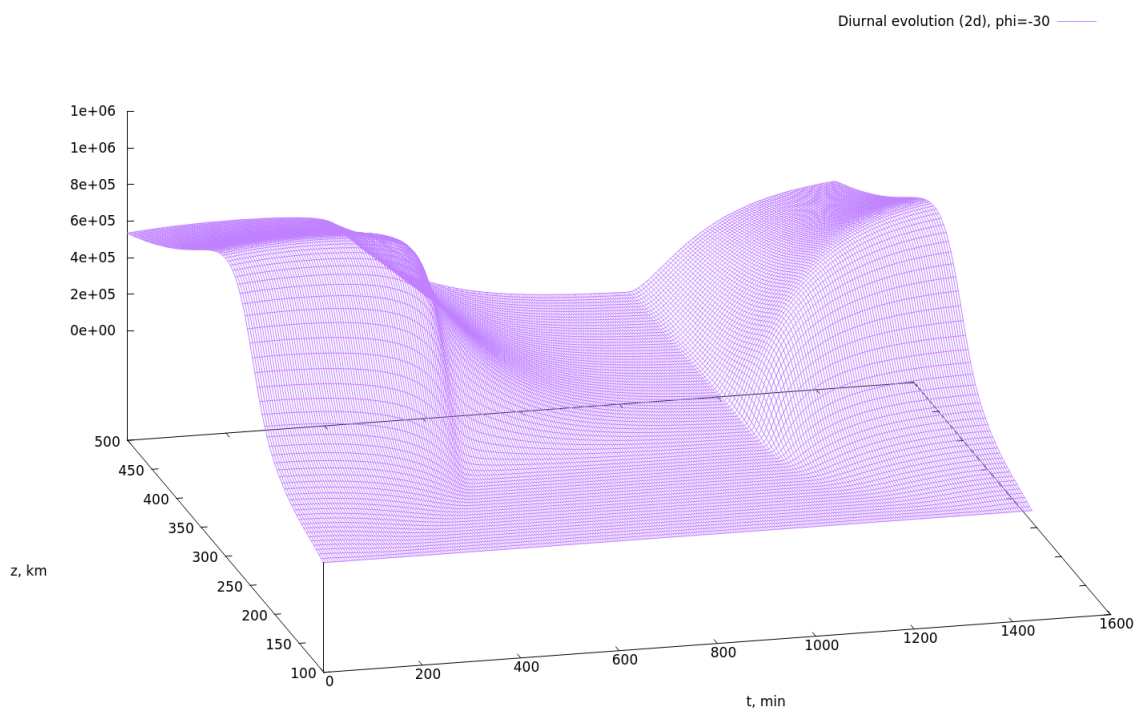


Рис. 6: Суточный ход в квазидвумерной модели при широтах (а)  $\varphi = -30^\circ$ , (б)  $\varphi = -2^\circ$  (по вертикальной оси, как и на предыдущих графиках, соответствующих суточному ходу, отмечается электронная концентрация в  $\text{см}^{-3}$ , а по двум осям в горизонтальной плоскости, соответственно, высота в км и время в мин.)

## 5 Заключение

В заключении подведем итоги проделанной работы

- Построена трёхмерная динамическая модель ионосферы, в которой с помощью трёхмерного уравнения неразрывности с учетом явления амбиполярной диффузии описывается эволюция электронной плотности в  $F$ -слое. Для внешних параметров, входящих в полученное уравнение — концентраций и температур — использованы аналитические формулы.
- Получены выражения для дивергентных членов уравнения в сферической системе координат в приближении тонкого сферического слоя для дальнейшего численного моделирования.
- Исследованы свойства дифференциальной задачи: неотрицательность решения, уравнение баланса и сильная жесткость, обусловленная резким изменением входящих в уравнение параметров.
- В соответствии со свойствами дифференциальной задачи сформулированы основные требования к используемым в задаче разностным схемам: монотонность по Годунову, консервативность, а также использование неявных схем.
- Применён метод расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным. Расщепление произведено на три слагаемых: первое отвечает  $z$ -диффузии в проекции, ко второму отнесены оставшиеся части исходного оператора без учета нейтрального и поперечного переноса, наконец, на третьем шаге расщепления добавляется и перенос.
- После этого исследовано и численно промоделировано приближенное уравнение, представляющее собой первый шаг метода расщепления. В качестве этапов построения решения поставленной приближённой задачи рассмотрены одномерные и двумерные постановки, учитывающие основные процессы — амбиполярную диффузию и процессы фотохимии. Полученные решения применимы при описании ионосферы в средних широтах и вблизи полюсов при отсутствии возмущений.



- Проведено исследование записанных разностных схем на соответствие предъявленным требованиям.
- Для двумерного уравнения применена аппроксимация, позволяющая свести его к одномерному и использовать уже имеющийся программный код: смешанная производная при этом считается эффективной добавкой к скорости переноса.
- В результате численных экспериментов проведён сравнительный анализ разностных схем для одномерного уравнения, исследована сходимость к стационарному дневному решению при измельчении шага сетки.
- После получения стационарного дневного распределения электронной концентрации исследованы чувствительности этого распределения к изменению внешних параметров, входящих в уравнение: концентраций молекулярного и атомарного кислорода, молекулярного азота, а также температур электронов, ионов и нейтральных молекул.
- Промоделированы стационарные решения в различных постановках: одномерной без проекции, одномерной с  $z$ -проекцией без смешанной производной, а также двумерной с  $z$ -проекцией с добавлением смешанной производной, что отвечает полному первому шагу расщепления.
- С помощью изменения функции фотоионизации  $P$  в соответствии с изменением зенитного угла получен суточный ход во всех трёх рассматриваемых постановках.

Анализ полученных численных решений показывает необходимость решения полного трёхмерного уравнения, в частности — вблизи экватора, где магнитное поле близко к вертикальному.

План дальнейшего исследования включает в себя решение полной трёхмерной задачи, интеграцию построенной модели в уже разработанную в ИВМ модель термосферы, а также последующее улучшение используемых методов и уточнение результатов.

## Список литературы

- [1] *Kulyamin D. V. and Dymnikov V. P.* A three-dimensional model of general thermospheric circulation. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2013. — 28(4). — С. 353-380.
- [2] *Кулямин Д. В., Дымников В. П.* Моделирование климата нижней ионосферы. // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2015. — Т. 51(3). — С. 317–337.
- [3] *Schunk R.W., Nagy A.F.* IONOSPHERES Physics, Plasma Physics, and Chemistry. — New York, United States: Cambridge University Press, 2009. — 628 p.
- [4] *Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1560-1588.
- [5] *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику: Учебное пособие для вузов / Под ред. А. И. Лобанова. — 2-е изд., испр. и доп. — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. — 504 с.
- [6] *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 592 с.