

Численные эксперименты

Одномерное уравнение

Рассмотрим следующую задачу для электронной концентрации n :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + un \right) \\ n|_{z=100 \text{ km}} = \frac{P(z=100 \text{ km})}{k(z=100 \text{ km})} \\ \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + un \right) \Big|_{z=500 \text{ km}} = F = \text{const} \end{cases}$$

Здесь D — коэффициент амбиполярной диффузии, $u = D \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{m_i g}{2kT_p} \right)$ — эффективная скорость, P и kn — слагаемые, отвечающие процессам ионизации при столкновении O и $O+$ и рекомбинации соответственно. В используемой модели температура, концентрация нейтралов, зависимости $D(z)$, $k(z)$ и $P_1(z)$ — внешние параметры.

Вблизи нижней границы влияние диффузионного слагаемого и переноса пре-небрежимо малы по сравнению с процессами фотохимии. Напротив, на верхней части исследуемого высотного интервала преобладают диффузионные процессы, а P и k уже не играют роли. Важной особенностью рассматриваемой задачи является изменение входящих в уравнение коэффициентов D , P , k , u на рассматриваемом отрезке на несколько порядков. Характерные величины на нескольких высотах представлены в следующей таблице:

	$z_1 = 200 \text{ км}$	$z_2 = 300 \text{ км}$	$z_3 = 500 \text{ км}$
$D, \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$	$3,1 \cdot 10^9$	$3,4 \cdot 10^{10}$	$4,2 \cdot 10^{12}$
$k, \text{ с}^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-8}$
$P_1, \text{ см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$	$1,5 \cdot 10^3$	$1,2 \cdot 10^2$	$1,3$
$u_{\text{эфф}}/D, \text{ см}^{-1}$	$4,8 \cdot 10^{-8}$	$4,5 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-8}$

Характерные времена различных физических процессов существенно различны, поэтому рассматриваемая задача жесткая. Следовательно, по времени рассматриваем неявные схемы: во всех случаях производную по времени аппроксимируем по формуле $\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau}$, а в правой части все слагаемые берём

на следующем временном слое с номером $(j + 1)$. С учётом этого замечания далее в записи различных аппроксимаций правой части будем писать только нижние индексы у n , подразумевая всегда верхний индекс $(j + 1)$.

От разностной схемы требуется выполнение закона сохранения массы, а также сохранение неотрицательности значений n на следующем временном слое, если это свойство было выполнено на предыдущем. Эти требования связаны с отсутствием физического смысла у решений, не сохраняющих массу или содержащих отрицательные значения концентрации.

Перейдем к получению используемых разностных схем. Введём следующие обозначения для шагов по пространству:

$$h_i = z_{i+1} - z_i$$

$$h_{i+1/2} = z_{i+1/2} - z_{i-1/2}$$

В точке $z = z_i$ для слагаемого $\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z}$ в разностных схемах используется следующая аппроксимация, полученная двойным применением формулы центральной разности на отрезках $[z_{i-1}; z_i]$ и $[z_i; z_{i+1}]$:

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z} \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \left(\frac{D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i)}{h_i} - \frac{D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})}{h_{i-1}} \right)$$

Для слагаемого $\frac{\partial}{\partial z}(nu)$ исследуем схемы направленных разностей $\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_in_i}{h_i}$, а также центральных разностей $\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$.

Нижнее граничное условие (условие Дирихле) аппроксимируется точно, а на верхней границе условие постоянства потока может быть записано несколькими способами. Для данной одномерной задачи используем две различных аппроксимации этого условия:

- В первом случае поток $\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{u_N}{D_N} \cdot n_N = F$ аппроксимируется с помощью центральных разностей по пространству, что соответствует схеме

$$n_N - n_{N-1} + u_N/D_N \cdot h_N \cdot n_N = F \cdot h_N$$

- Во втором случае для схемы центральных разностей запишем согласованную схему для верхнего граничного случая, получаемую с помощью интегрирования уравнения на N -ом шаге по пространству между двумя соседними полуцелыми узлами, а также учёта равенства потока на верхнем полуцелом узле заданной величине F :

$$h_{N+1/2} \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau} = F - D_{N-1/2} \frac{n_N - n_{N-1}}{h_{N-1}} - \frac{1}{2}(u_{N-1}n_{N-1}^{j+1} + u_N n_N^{j+1})$$

Соответственно, в численных экспериментах протестираны три различные разностные схемы:

- В схеме 1 потоковый член и граничное условие аппроксимируются с помощью центральных разностей;
- В схеме 2 только потоковый член в уравнении записывается с помощью центральных разностей, а граничное условие всё еще использует центральные разности;
- Наконец, схема 3 имеет согласованные граничное условие и схему, записанные с помощью центральных разностей.

Исследуемая задача имеет не зависящее от времени решение, а численные эксперименты показали, что при итерациях по времени происходит установление решения во всех трёх схемах. Используемый шаг по пространству $h = 5$ км и по времени $\tau = 3$ мин обеспечивает сходимость к одной и той же кривой в схемах 1 и 3 с характерным временем установления порядка 4 – 5 часов (по прошествии этого времени первые несколько значащих цифр в решении уже не изменяются). Схема 2 также имеет сходимость к стационарному решению, но в отличие от оставшихся двух схем при шаге по пространству $h = 5$ км слишком велик, для получения того же самого решения, что и в других двух схемах, необходимо уменьшить шаг хотя бы до $h = 0,2$ км.

Результаты расчетов (стационарные решения в зависимости от разного количества узлов по пространству) представлены на следующих графиках (по горизонтальной оси масштаб выбран логарифмическим). Соответственно, 80, 400 и 2000 узлов отвечают шагам по времени 5 км, 1 км и 0,2 км.

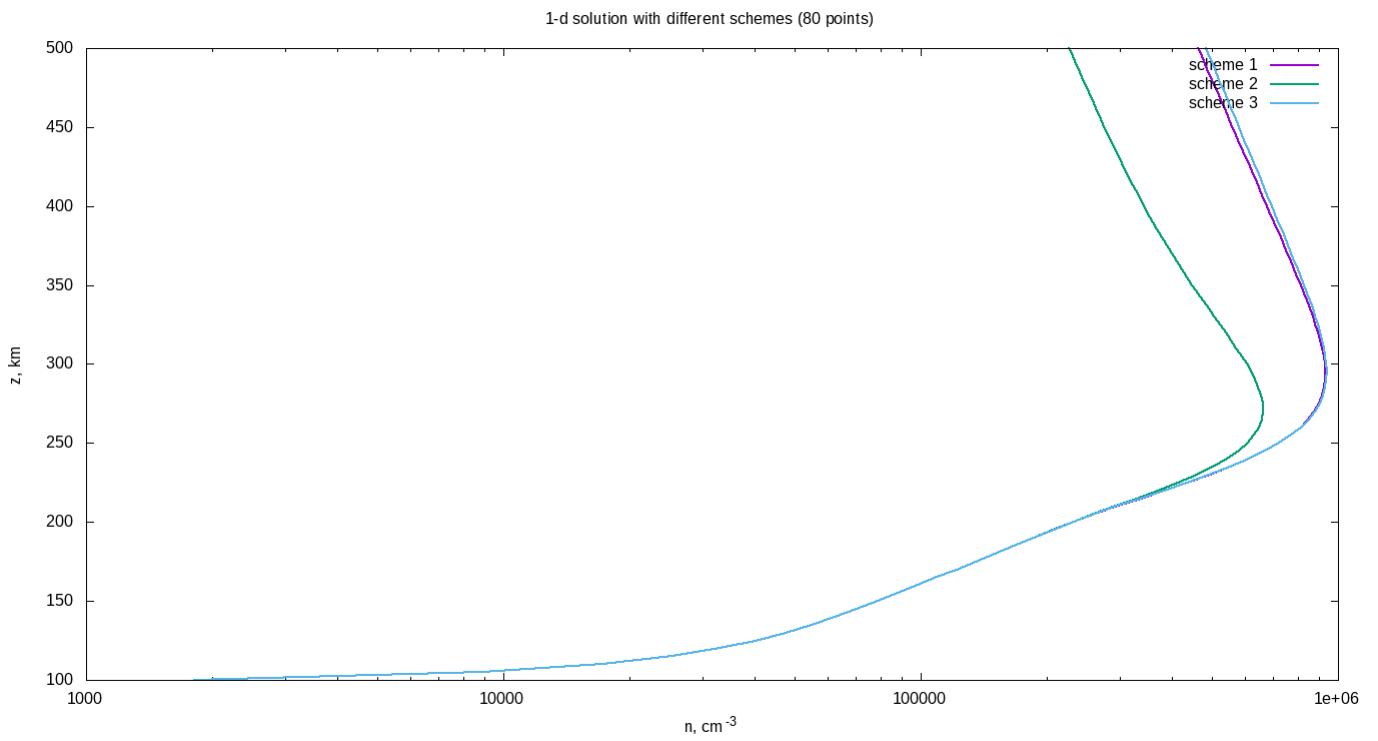


Рис. 1: Стационарные решения на 80 расчётных узлах.

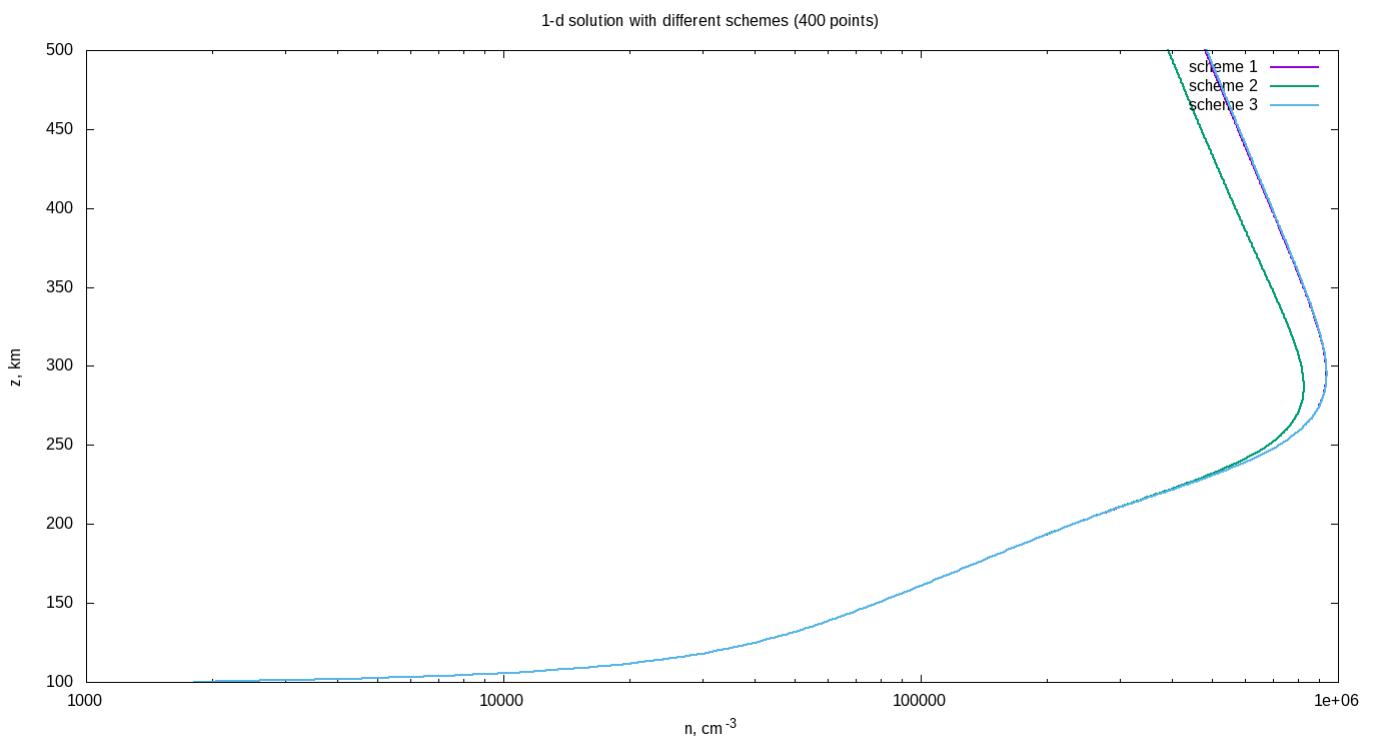


Рис. 2: Стационарные решения на 400 расчётных узлах.

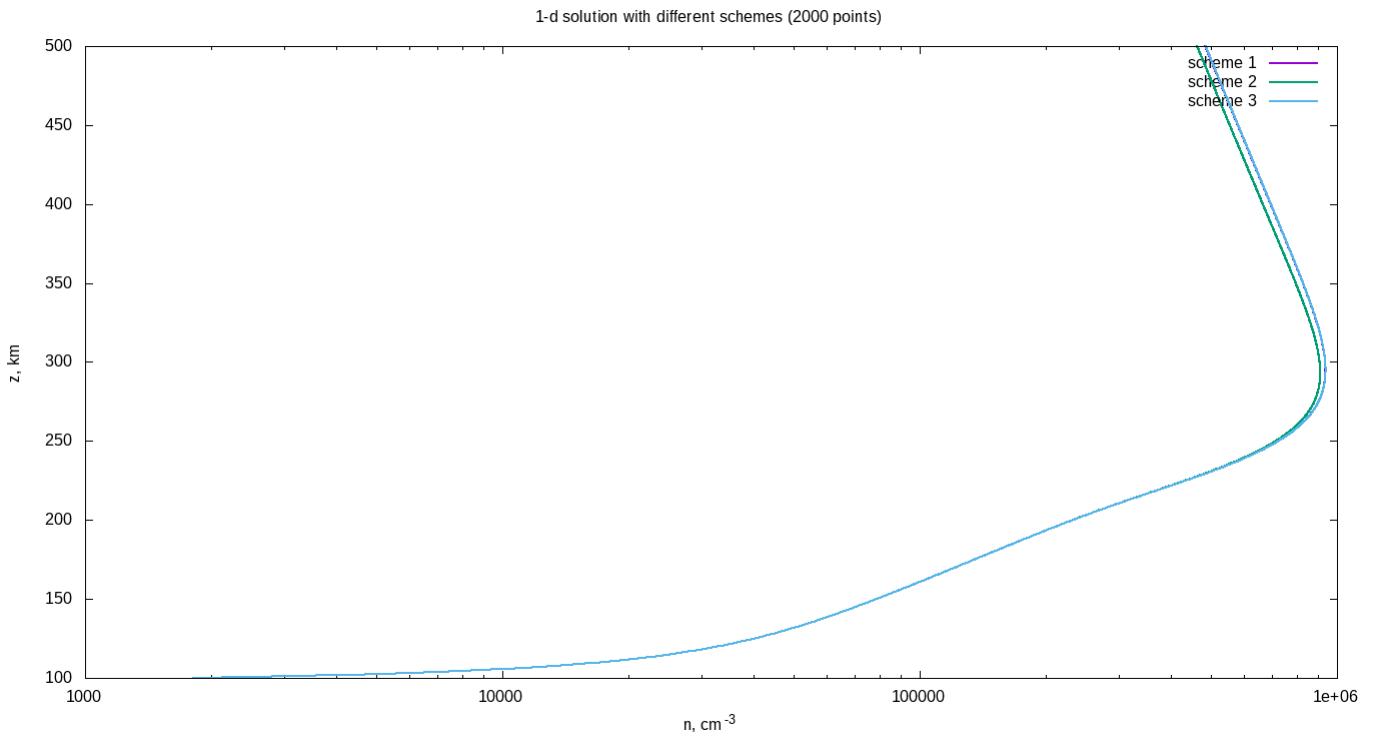


Рис. 3: Стационарные решения на 2000 расчётных узлах.

Полученное решение позволяет исследовать чувствительность к изменению различных входящих в уравнение внешних параметров: температурам, концентрациям нейтральных молекул, фотоионизации и рекомбинации. На следующих ниже графиках представлены результаты варьирования каждого из параметров в отдельности на 10% и 20% (в обе стороны). В каждом случае вычислено стационарное решение при изменённом параметре, на всех графиках средняя кривая отвечает невозмущенному уравнению.

Варьирование входящих в уравнение температур показывает, что наибольшую чувствительность решение имеет к температуре нейтральных молекул. Изменение концентрации нейтральных молекул — атомарного кислорода, молекулярного кислорода и азота показывает, что наибольшая чувствительность решения отвечает изменению концентрации атомарного кислорода, а чувствительности к изменению концентраций атомарного кислорода и азота приблизительно одинаковы.

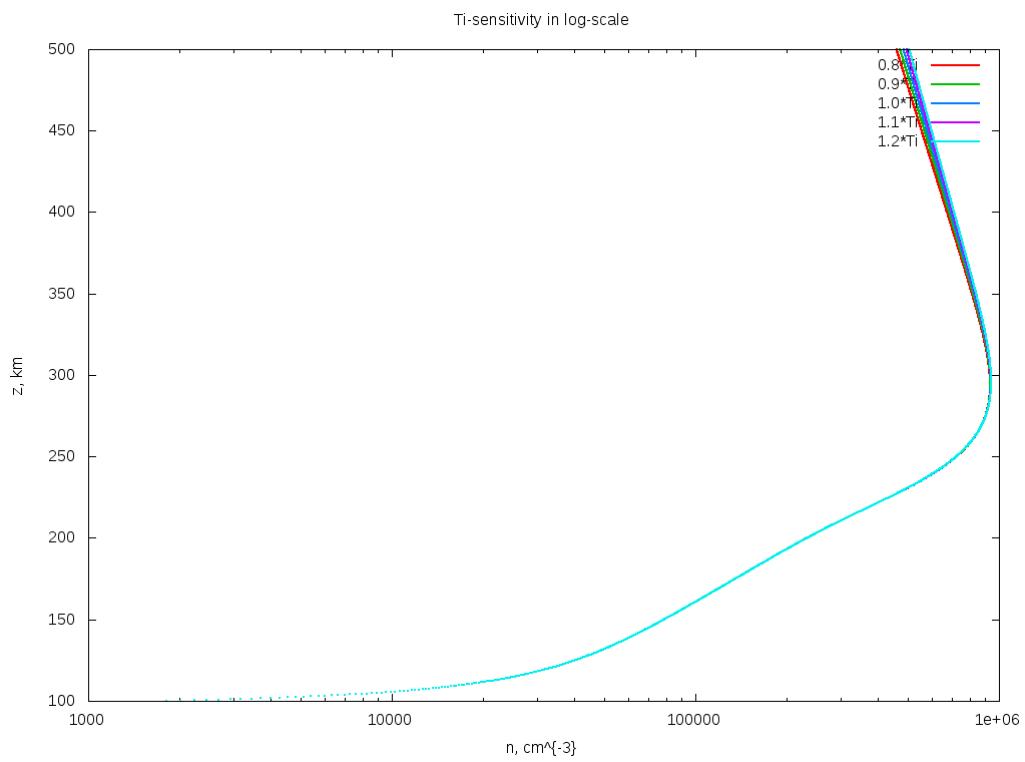


Рис. 4: Чувствительность к изменению температуры ионов.

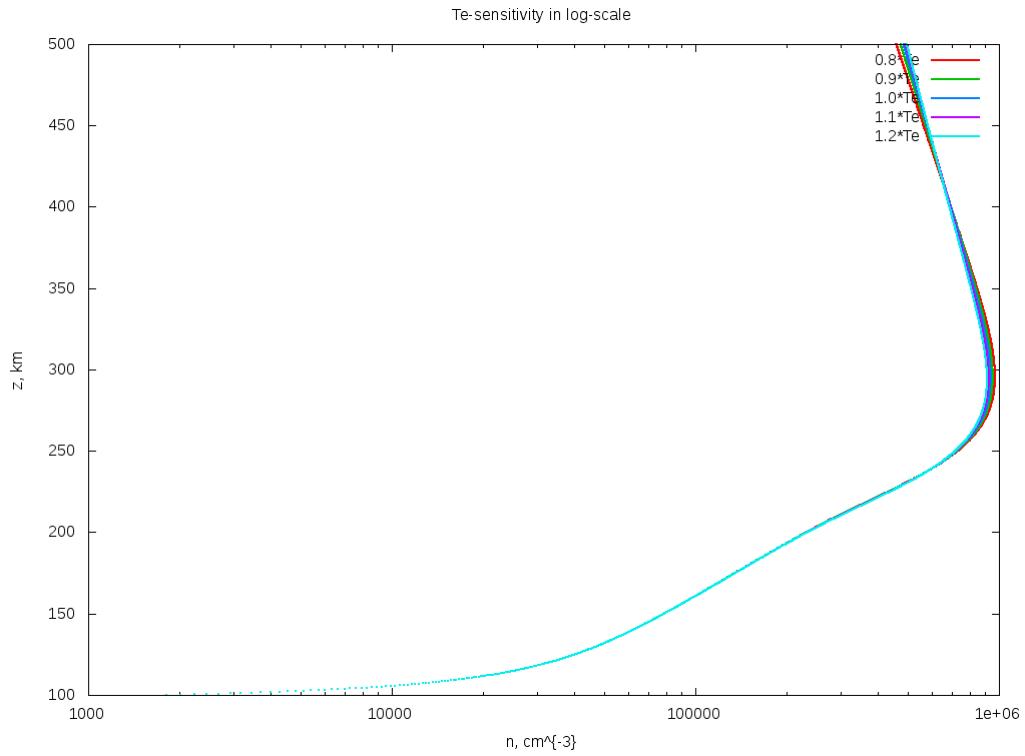


Рис. 5: Чувствительность к изменению температуры электронов.

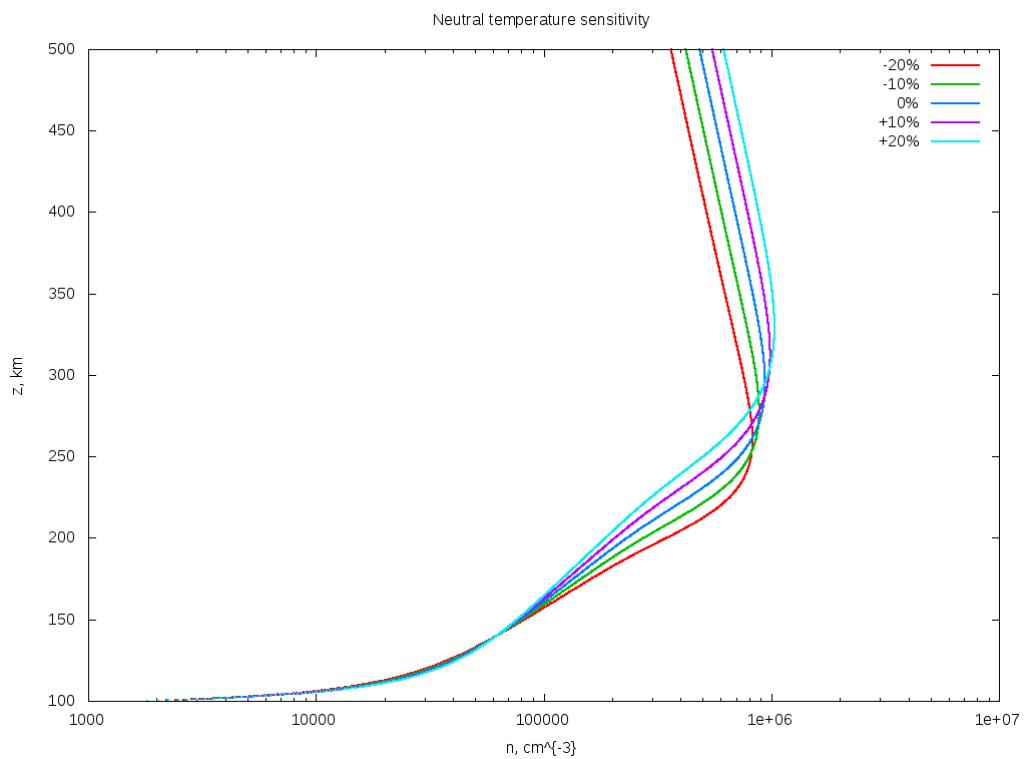


Рис. 6: Чувствительность к изменению температуры нейтральных молекул.

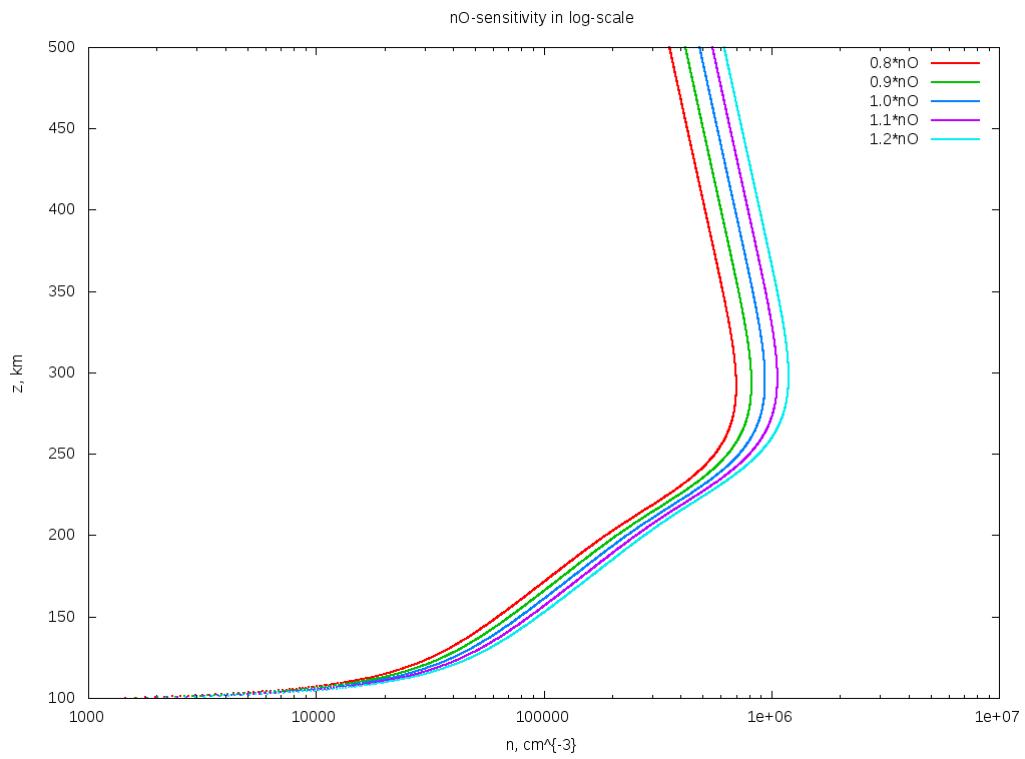


Рис. 7: Чувствительность к изменению концентрации атомарного кислорода.

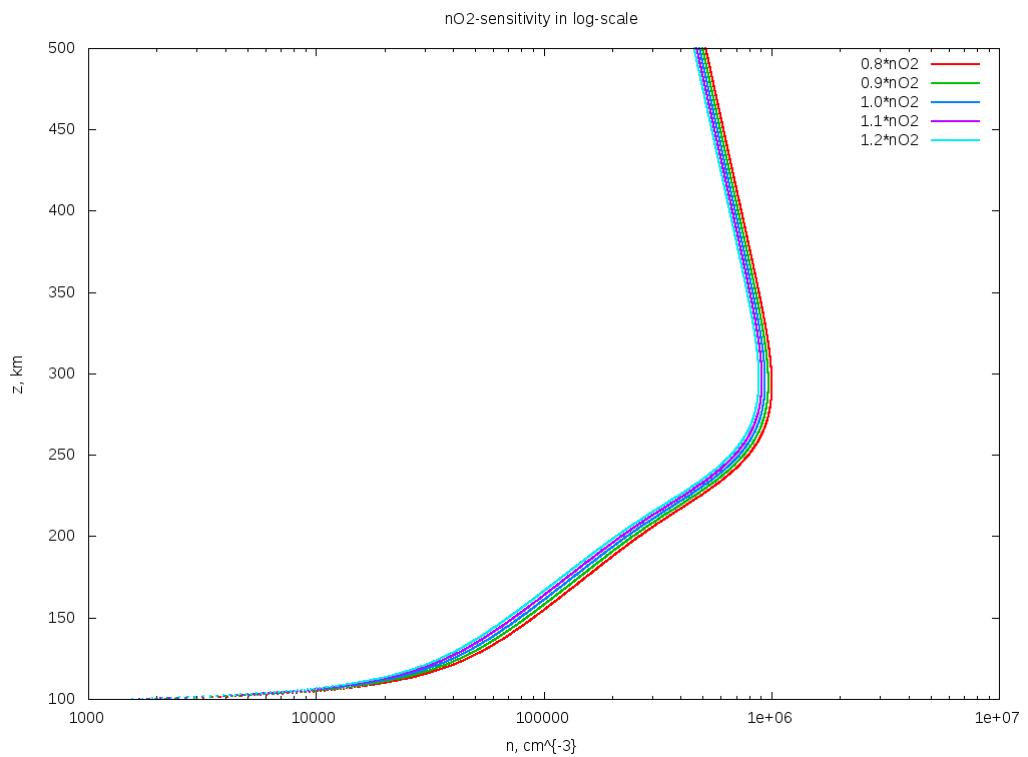


Рис. 8: Чувствительность к изменению концентрации молекулярного кислорода.

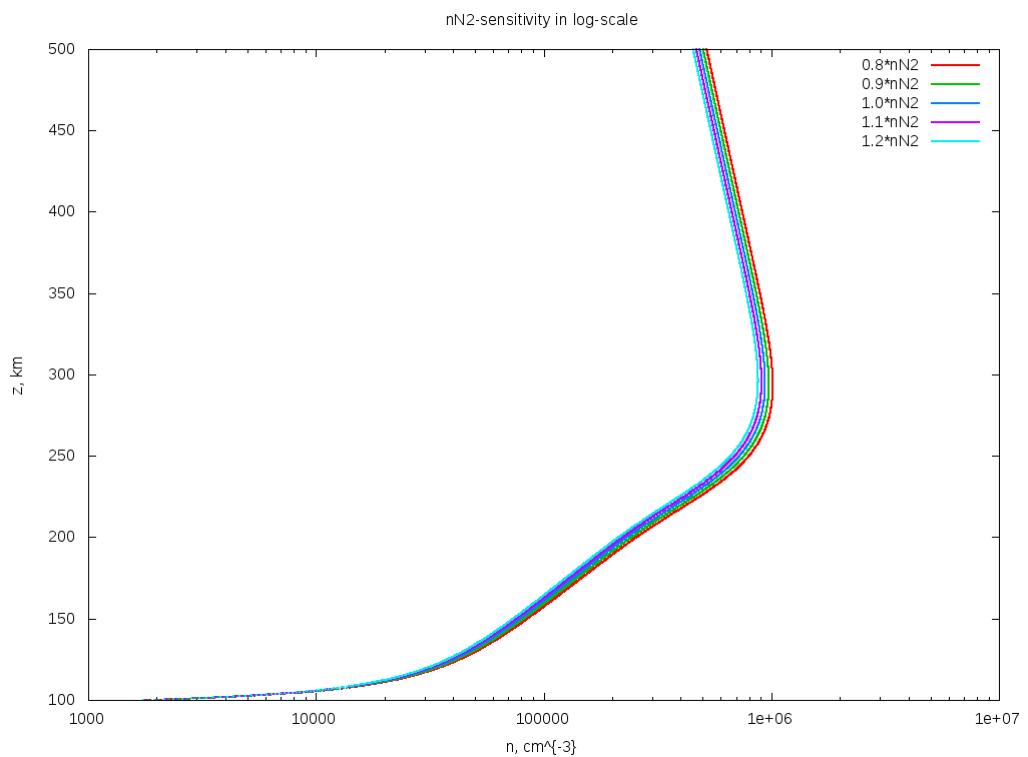


Рис. 9: Чувствительность к изменению концентрации азота.

Суточный ход

Полученное в предыдущем разделе стационарное решение отвечает по существу состоянию системы в один определённый момент времени, а вертикальный профиль соответствует фиксированным широте и долготе. Для моделирования суточного изменения вертикального профиля добавим зависимость от времени в слагаемое P , отвечающее фотоионизации.

Используем формулу

$$P(z, t) = \begin{cases} P_0(z)e^{\tau_0(z)(1 - \sec \chi)}, & |\chi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\chi| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Здесь использованы следующие обозначения: $P_0(z)$ — фотоионизация, использованная в одномерной модели, χ — зенитный угол Солнца (угол между направлением на Солнце и нормалью к земной поверхности), $\tau_0(z)$ — оптическая толщина, для вычисления которой используется формула

$$\tau_0(z) = \sum_{i=N_2, O_2, O} \sigma_i^{abs} \left[\frac{R_0 T_n}{M_i g} n_i(z) \right] = \frac{R_0 T_n}{g} \left(\sigma_{N_2}^{abs} \frac{n_{N_2}(z)}{M_{N_2}} + \sigma_{O_2}^{abs} \frac{n_{O_2}(z)}{M_{O_2}} + \sigma_O^{abs} \frac{n_O(z)}{M_O} \right).$$

Константы σ_i^{abs} для трёх типов нейтральных молекул известны и равны соответственно $\sigma_{N_2}^{abs} = 1,5 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, $\sigma_{O_2}^{abs} = 2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, $\sigma_O^{abs} = 1 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$.

Характерные величины оптической толщины на различных высотах представлены в следующей таблице:

	$z_1 = 100 \text{ км}$	$z_2 = 300 \text{ км}$	$z_3 = 500 \text{ км}$
τ_0	$4 \cdot 10^2$	$3 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-4}$

[Здесь необходимо добавить комментарии по поводу физического смысла формулы для τ_0]

В предложенной формуле для фотоионизации время в качестве параметра входит лишь в зенитный угол. Кусочное задание функции $P(z, t)$ связано с приближением отсутствия фотоионизации в ночное время (Солнце не заходит за горизонт лишь при зенитных углах, не превосходящих 90°).

Зависимость зенитного угла от времени даётся следующими формулами:

$$\cos \chi = \sin \varphi \cdot \sin \delta - \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega t$$

Здесь ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта, а δ — склонение Солнца, тангенс которого определяется формулой

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} 23,5^\circ \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{d - 80}{365} \right),$$

где d — номер дня от начала года.

В ходе численного эксперимента по моделированию суточного хода в одномерной модели вычисляется стационарное решение одномерной задачи при дневном значении $P(z)$, а затем итерации по времени продолжаются с уже меняющимся $P(z, t)$ в соответствии со введённой формулой.

Результаты представлены следующим графиком — трёхмерной поверхностью, построенной над плоскостью (z, t) :

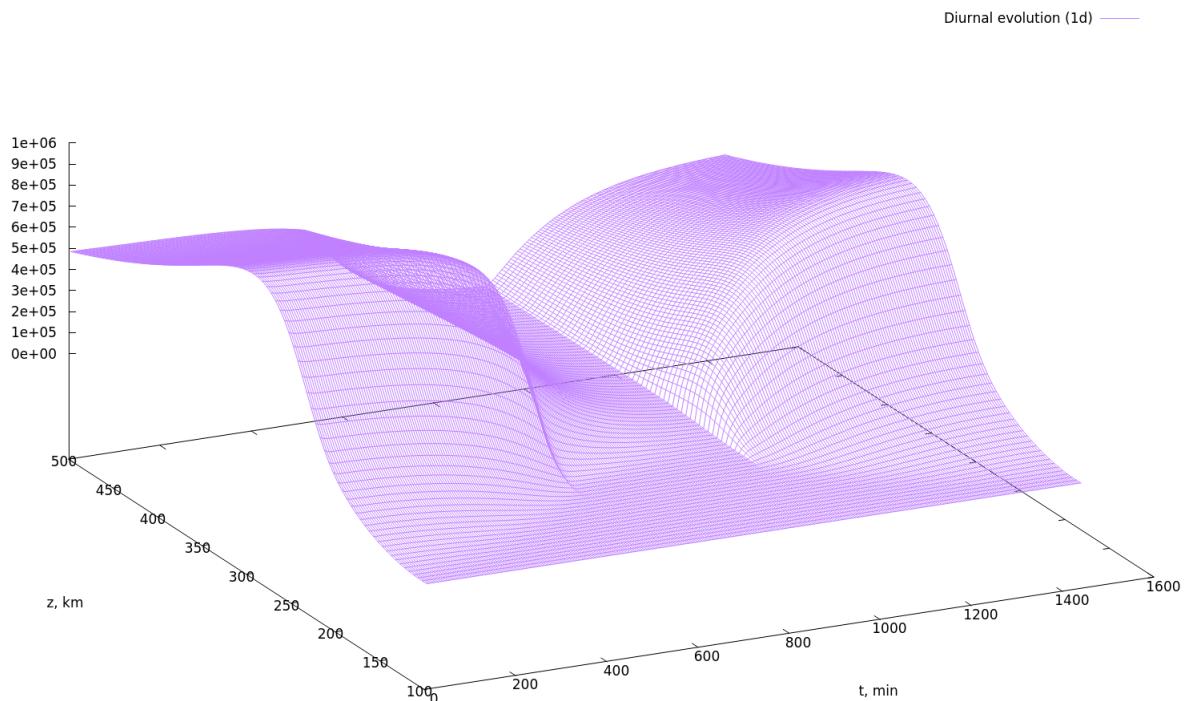


Рис. 10: Суточный ход в одномерной модели с добавлением зависимости фотоионизации от зенитного угла.

Видно, что за сутки решение восстанавливается. Кроме того, после зануления P при зенитных углах больше 90° начинается спад электронной концентрации, сопровождающийся изломом по времени (в соответствующий момент P , входящее в уравнение, также терпит излом).

Отметим также, что при обнулении P решение (начиная со стационарного) падает почти до нуля приблизительно за 6 часов.

Учёт проекции на магнитную силовую линию

Учтём теперь широтную зависимость в уравнении. Простейший способ — замена коэффициента диффузии D на $D \sin^2 I$, где I — угол наклонения магнитных силовых линий, $I \approx \arctg(2 \tan \varphi)$, φ — широта ($\varphi \in [-90^\circ; +90^\circ]$). При этом уравнение заменится на следующее:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sin^2 I \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) \right]$$

В рассматриваемой постановке широта φ — внешний задаваемый параметр. При фиксированном φ уравнение, как и раньше, имеет стационарное решение. Особенность данной постановки состоит в том, что на экваторе при $\varphi = 0$ уравнение вырождается: ненулевыми остаются только производная по времени в левой части и $P - kn$ в правой. Этот эффект не соответствует никакому физическому явлению

Результаты расчётов суточного хода при $\varphi = -70^\circ, -40^\circ, -10^\circ$ приведены на следующих графиках:

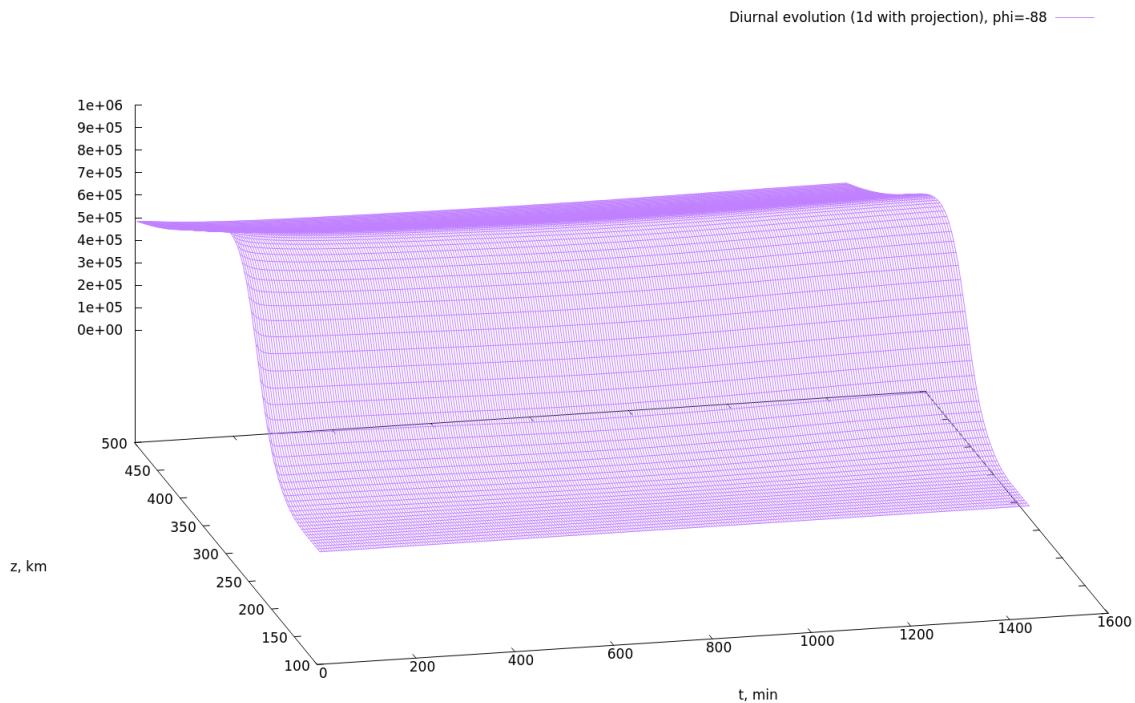


Рис. 11: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -88^\circ$.

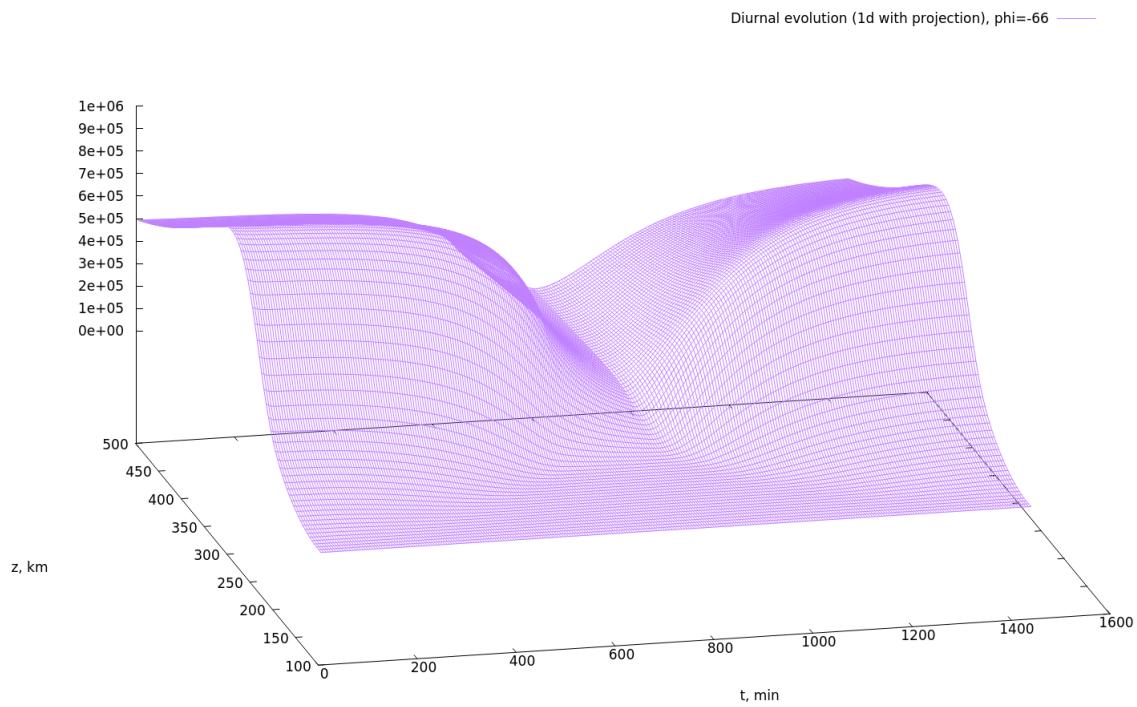


Рис. 12: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -66^\circ$.

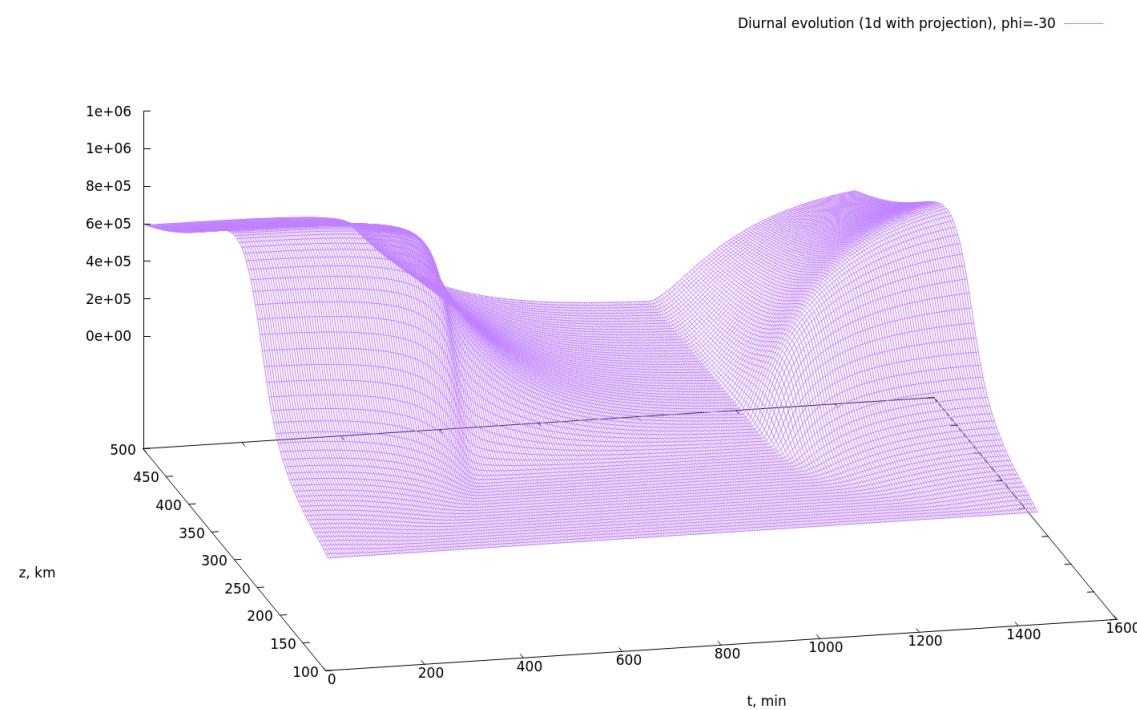


Рис. 13: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -30^\circ$.

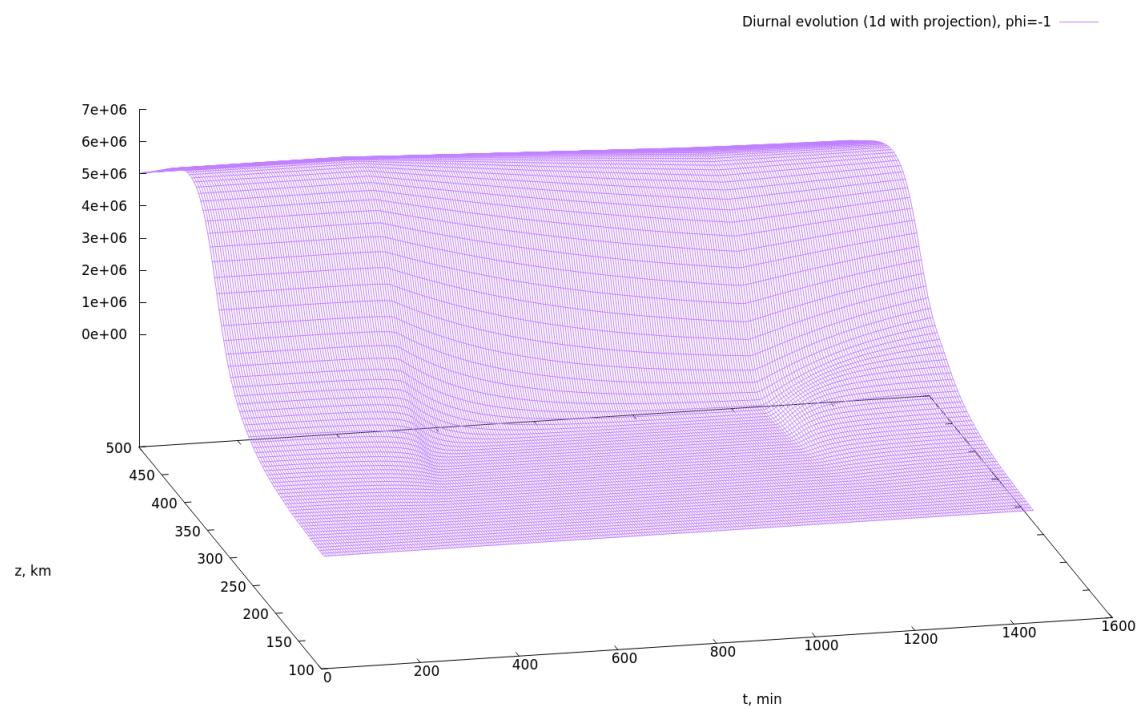


Рис. 14: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -2^\circ$.

Квазидвумерная постановка

Более точный учёт широтной зависимости решения приводит к двумерной задаче:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right]$$

Заменим $u = \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}$. Для использования уже имеющегося программного кода в применении уже к данной двумерной задаче используем следующую разностную схему: для смешанной производной $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \varphi}$ запишем

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} \right)$$

Введём обозначение $u_\varphi = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi}$. Для рассматриваемого уравнения u_φ — это добавка к эффективной скорости, связанная со смешанной производной по φ .

Используем для численного решения нелинейную схему: будем вычислять решение, последовательно перемещаясь по временным слоям, причем u_φ будем брать на основании данных с предыдущего временного слоя, а n — со следующего.

Для рассматриваемого уравнения в результате применяется та же разностная схема с центральными разностями, что и для одномерного уравнения, но возникает добавка, связанная с последним слагаемым. Для этого слагаемого использованы две различные разностные аппроксимации:

- Схема направленных разностей с учётом возможной знакопеременности эффективной скорости: $\frac{|u_\varphi| + u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h_i} + \frac{|u_\varphi| - u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i-1} - n_i}{h_{i-1}}$
- Схема центральных разностей: $\frac{(u_\varphi)_{i+1} n_{i+1} - (u_\varphi)_{i-1} n_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}$

В обоих случаях концентрации n берутся со следующего временного слоя — схема неявная.

При этом сама эффективная скорость может быть вычислена двумя способами:

- Первый способ — применение формулы центральной разности к производной по φ для логарифма в формуле u_φ

$$u_\varphi \approx \frac{\ln n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) - \ln n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi};$$

- Второй способ — без привлечения логарифма использовать формулу

$$u_\varphi \approx \frac{2}{n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) + n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)} \cdot \frac{n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) - n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi}.$$

Численные эксперименты показали, что обе формулы для u_φ дают один и тот же результат. Более того, на практике решение никогда не достигает чистого нуля, поэтому отдельные кусочные задания формул для u_φ при нулевых значениях n на предыдущем временном слое никак не отражаются на получаемом решении. Тем не менее, вторая формула более удобна для анализа асимптотического поведения u_φ при приближении n к нулю.

Для вычисления решения на следующем временном слое используются граничные условия как по z , так и по φ : на полюсах решение полагается тождественно равным стационарному решению одномерной задачи. Это позволяет сохранить непрерывность решения в зависимости от $\varphi \in [-90^\circ; 90^\circ]$. На нижней границе по z ставится граничное условие типа Дирихле — решение совпадает с отношением $\frac{P(100 \text{ km}, t)}{k(100 \text{ km})}$. Верхнее граничное условие, как и ранее, — постоянство полного потока (с учётом добавки к эффективной скорости в виде u_φ). В разностной аппроксимации верхнего граничного условия используется центральная разность, в результате чего эта аппроксимация оказывается согласованной со схемой центральных разностей для рассматриваемого уравнения. На следующих графиках представлен суточный ход при тех же широтах, что и в случае одномерного уравнения с z -проекцией. Существенное отличие на-

блюдается в характере решения вблизи экватора — уравнение не вырождается.

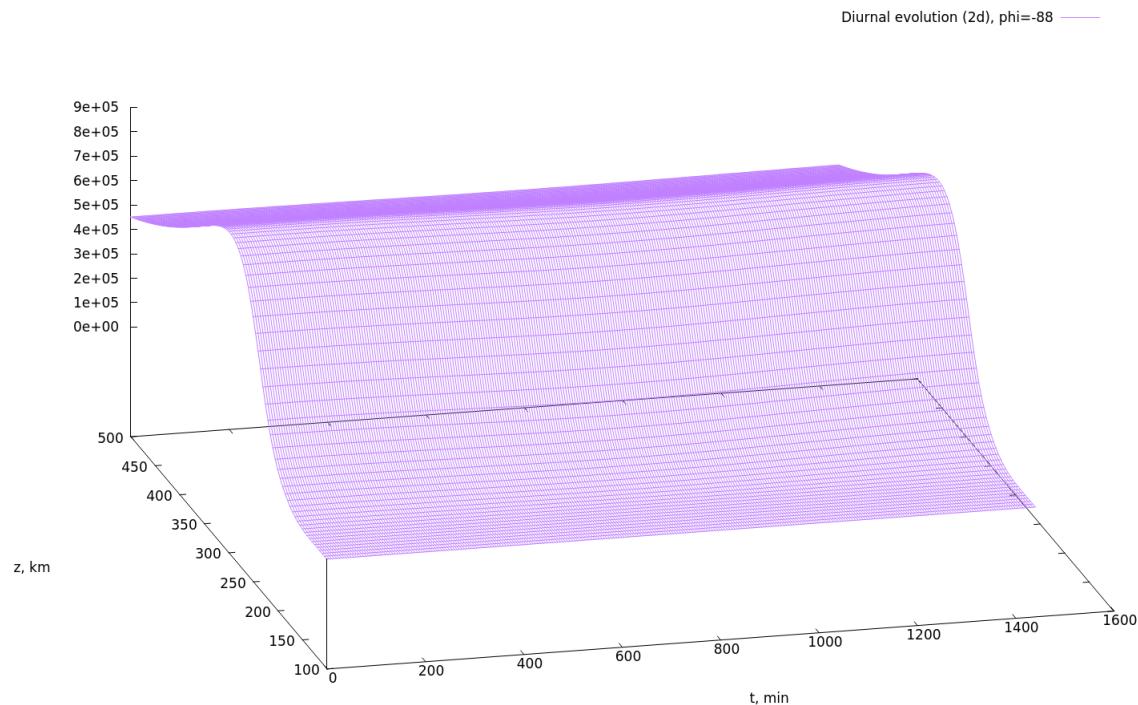


Рис. 15: Суточный ход в квазидвумерной модели, $\varphi = -88^\circ$.

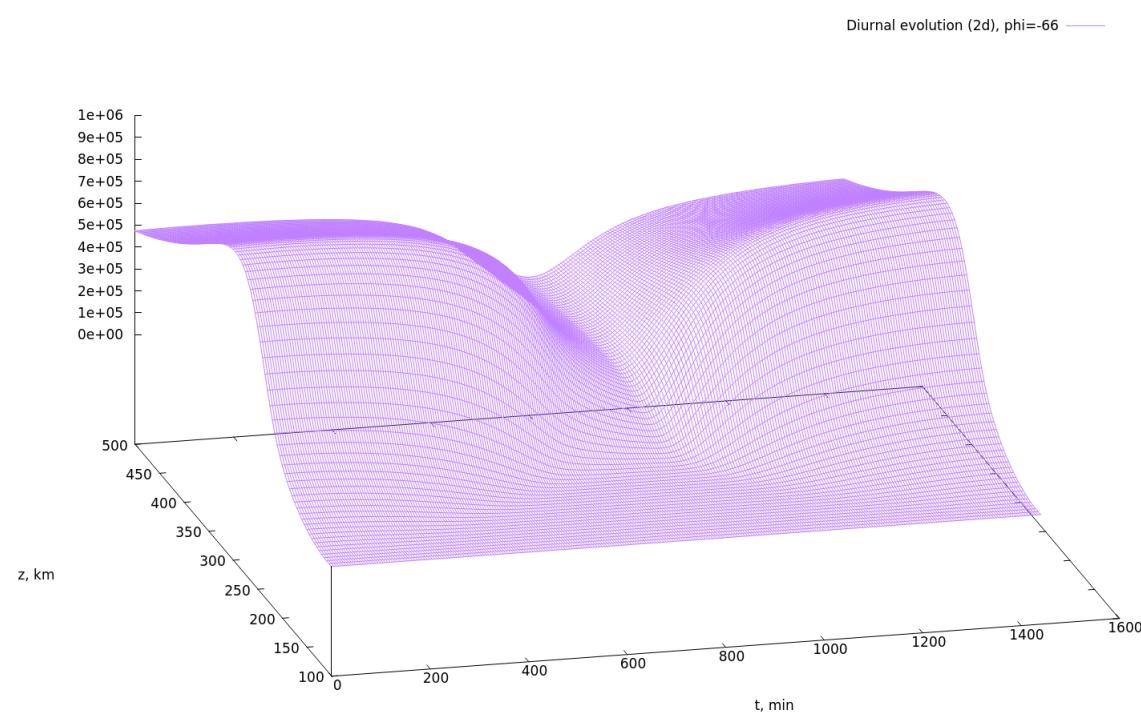


Рис. 16: Суточный ход в квазидвумерной модели, $\varphi = -66^\circ$.

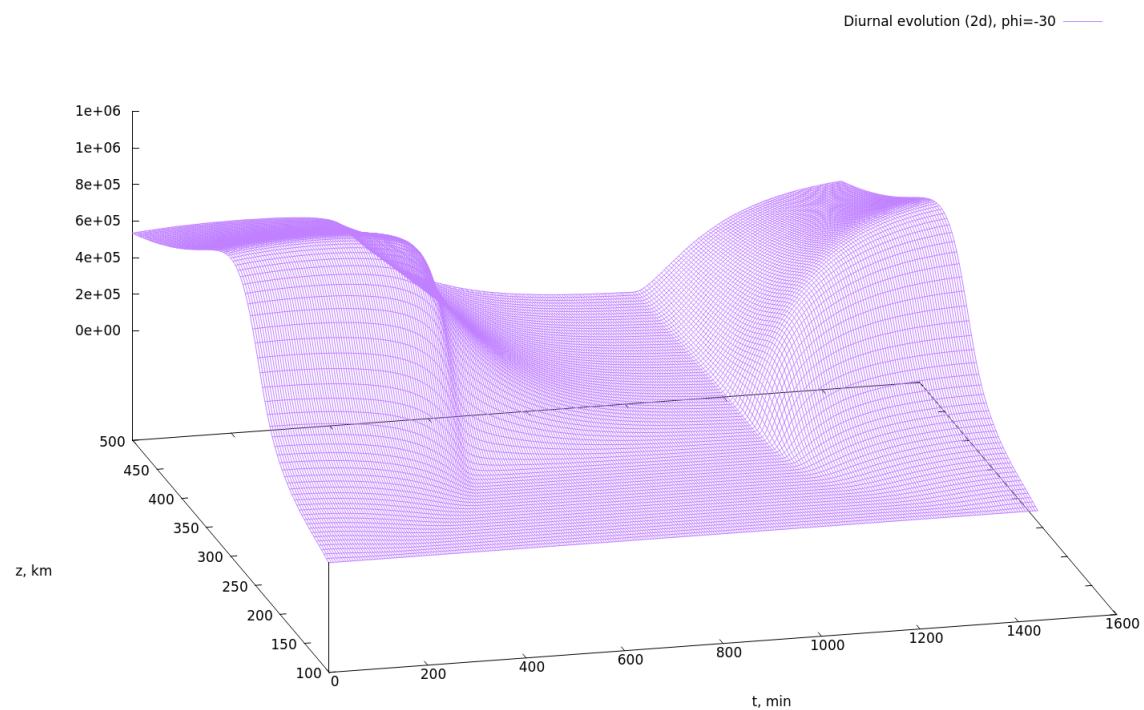


Рис. 17: Суточный ход в квазидвумерной модели, $\varphi = -30^\circ$.

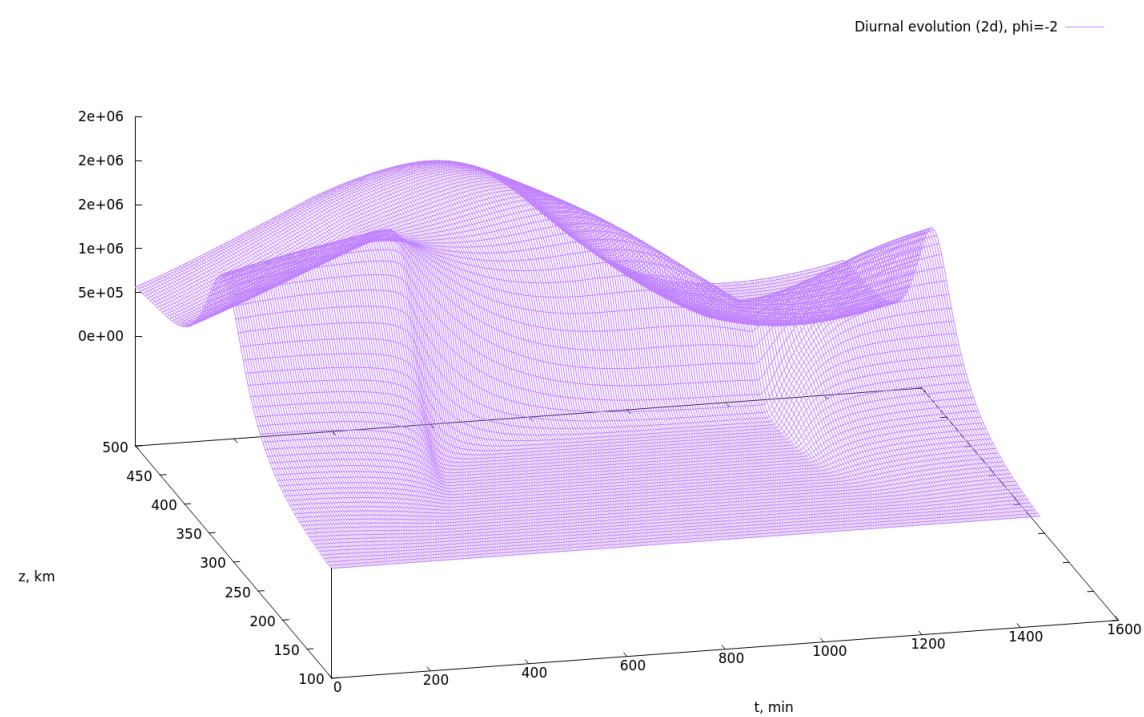


Рис. 18: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -2^\circ$.

Согласованность аппроксимаций граничного условия и уравнения

При аппроксимации уравнения и граничного условия были использованы центральные разности. Выясним, каково влияние согласованности этих аппроксимаций на решение: для верхнего граничного условия продолжим использовать центральную разность, а уравнение аппроксимируем, используя для дополнительного слагаемого со смешанной производной аппроксимацию

$$\frac{|u_\varphi| + u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h_i} + \frac{|u_\varphi| - u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i-1} - n_i}{h_{i-1}}.$$

Результат численного эксперимента показывает, что при широтах, далёких от нулевой, влияние несущественно, но вблизи экватора решение меняется заметно:

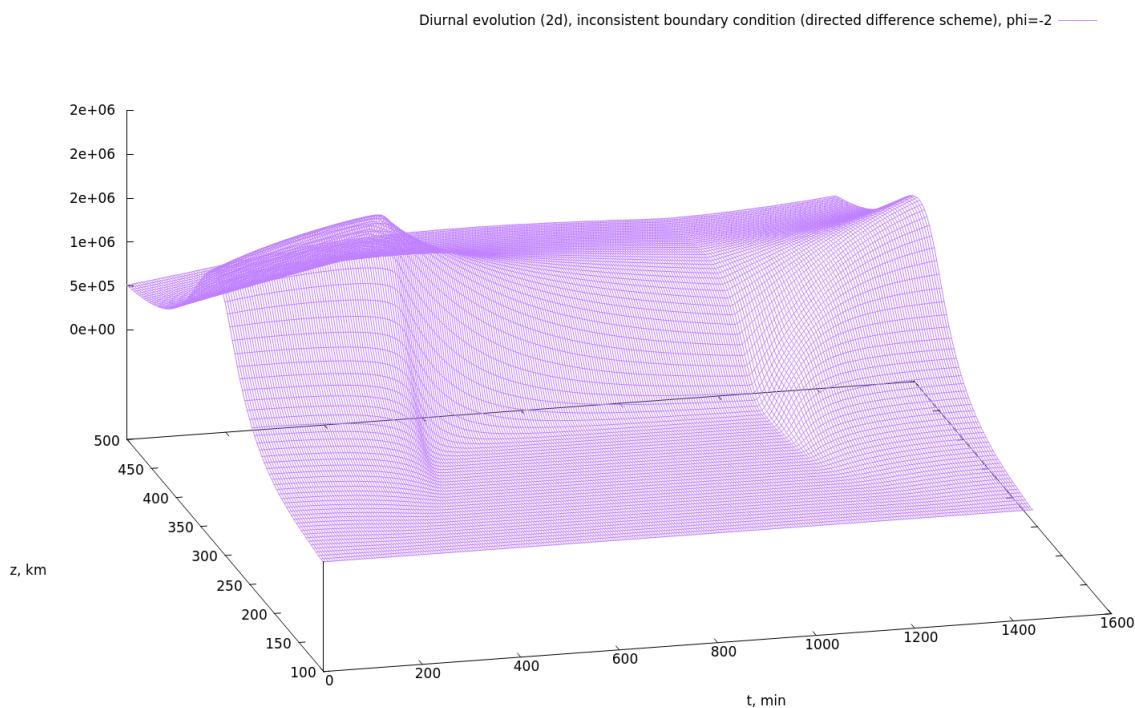


Рис. 19: Использование несогласованных схем для гр. условия и для уравнения, $\varphi = -2^\circ$.

Сравнение стационарных решений в различных постановках

Различные постановки используются для учёта наклонения магнитных силовых линий. Для исследования и сравнения качественных отличий полученных результатов установим не зависящую от времени ионизацию $P(z, t) \equiv P_0(z)$ и изучим сходимости к стационарным решениям с одних и тех же начальных условий — вектора с компонентами, равными единице (такой вектор отвечает «почти нулевому» решению, при этом даёт возможность использовать схемы, применение которых к случаю нулевых значений затруднено, как, например, в случае логарифма для u_φ).

Полученные решения при широтах $\varphi = -66^\circ$ и $\varphi = -88^\circ$ практически не отличаются (кривые на графике совпадают), а при $\varphi = -30^\circ$ и в особенности — при $\varphi = -2^\circ$ различия существенны:

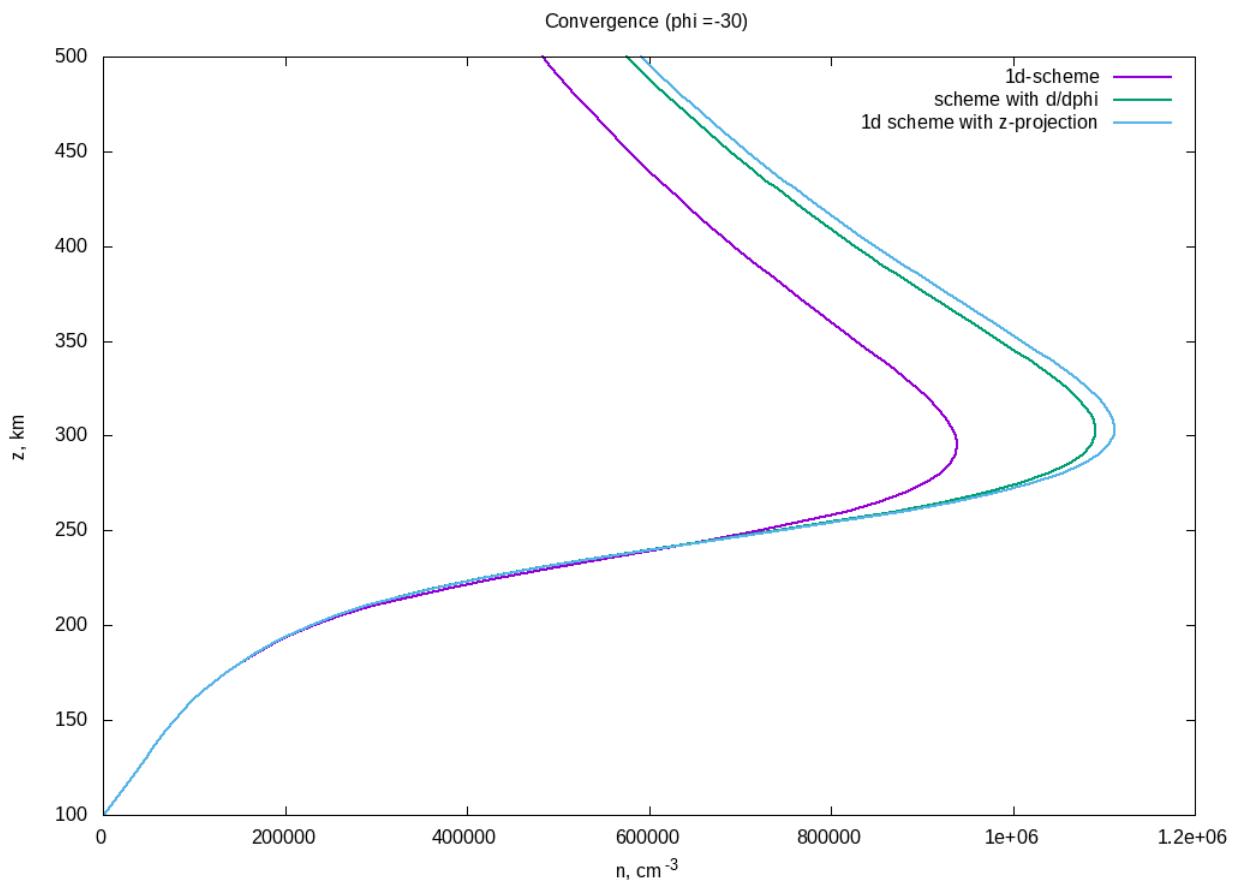


Рис. 20: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -30^\circ$.

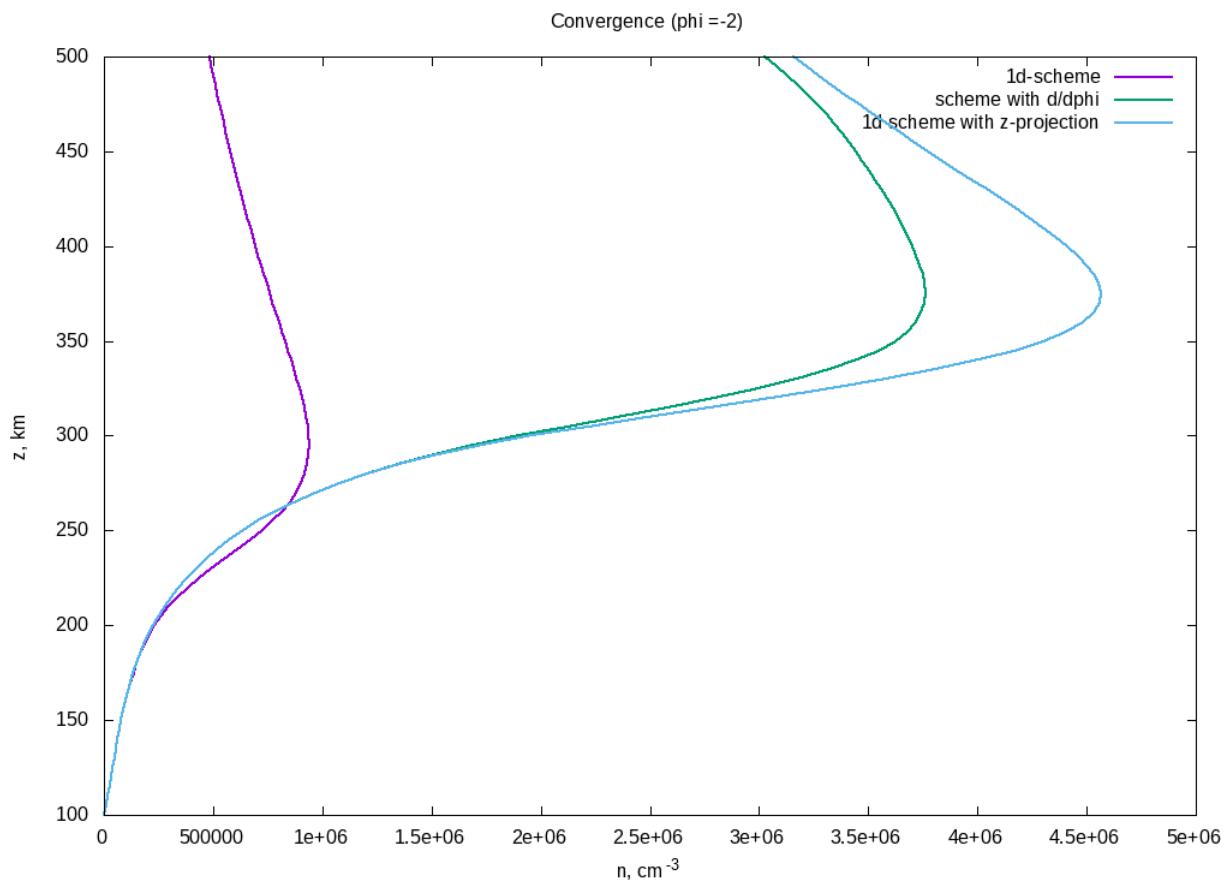


Рис. 21: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -2^\circ$.