Двумерная задача, неявная схема

Полное двумерное уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n\right) - \frac{1}{a}D\sin I\cos I\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial \varphi}n\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot(\cos^2 I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial\varphi} - D\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial z} - u\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot n\right] +$$

$$+[P - kn]$$

Перепишем его в более компактной форме с использованием эффективной скорости $u = \dfrac{1}{T_p}\dfrac{\partial T_p}{\partial z} + \dfrac{1}{H}$ и функций $A(\varphi) = \cos^2 I\cos\varphi$, $B(\varphi) = \cos\varphi\sin 2I$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\frac{\partial n}{\partial z}\right] + \frac{\partial}{\partial z}(u\sin^2\varphi\cdot n) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial z}\left(D\sin I\cos I\frac{\partial n}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial\varphi}n\right) +$$

$$+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot A(\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}D\cdot B(\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{1}{2}u\cdot B(\varphi)\cdot n\right] +$$

$$+[P - kn]$$

Используемая разностная схема внутри расчетной области:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t}}{\tau} = P - kn_{i,j}^{t+1} + \sin^2 I_j\left[\left(D_{i+1/2}\frac{n_{i+1,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n_{i+1,j}^{t+1} - u_{i-1}n_{i-1,j}^{t+1}}{2h}\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2})\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi^2}\right) - \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1} - B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right)\right]\right] +$$

$$+MIX_{z(i,j)} + MIX_{y(i,j)},$$

где для смешанных производных используются следующие схемы:

$$\boxed{\text{При } \sin I \geqslant 0\text{:}}$$

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi}\cdot$$

$$\cdot\Big[(-D_{i+1}n_{i+1,j} + D_{i+1}n_{i+1,j+1} + D_i n_{i,j} - D_i n_{i,j+1})\cdot\sin I_{j+1/2}\cos I_{j+1/2} +$$

$$(-D_i n_{i,j-1} + D_i n_{i,j} + D_{i-1}n_{i-1,j-1} - D_{i-1}n_{i-1,j})\cdot\sin I_{j-1/2}\cos I_{j-1/2}\Big]$$

$$MIX_{y(i,j)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi\cos\varphi}\cdot$$

$$\cdot\Big[D_{i+1/2}(-B_j n_{i+1,j} + B_{j+1}n_{i+1,j+1} + B_j n_{i,j} - B_{j+1}n_{i,j+1}) + D_{i-1/2}(B_j n_{i,j} - B_{j-1}n_{i,j-1} + B_{j-1}n_{i-1,j-1} - B_j n_{i-1,j})\Big]$$

$$\boxed{\text{При } \sin I < 0\text{:}}$$

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi}\cdot$$

$$\cdot\Big[(-D_{i+1}n_{i+1,j-1} + D_i n_{i,j-1} + D_{i+1}n_{i+1,j} - D_i n_{i,j})\cdot\sin I_{j-1/2}\cos I_{j-1/2} +$$

$$(-D_i n_{i,j} + D_i n_{i,j+1} + D_{i-1}n_{i-1,j} - D_{i-1}n_{i-1,j+1})\cdot\sin I_{j+1/2}\cos I_{j+1/2}\Big]$$

$$MIX_{y(i,j)} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi\cos\varphi}\cdot$$

$$\cdot\Big[D_{i+1/2}(-B_{j-1}n_{i+1,j-1}+B_j n_{i+1,j}+B_{j-1}n_{i,j-1}-B_j n_{i,j})+D_{i-1/2}(B_{j+1}n_{i,j+1}-B_j n_{i,j}+B_j n_{i-1,j}-B_{j+1}n_{i-1,j+1})\Big]$$

Все значения сеточной функции n в смешанных производных берутся неявно, со следующего временного шага $t+1$.

Граничные условия

- На нижней границе $i = 1$ всюду положено $n_{i,j}^{t+1} = P/k$.
- Вблизи южного полюса: $j = 1$, $1 < i < N_z$, $\varphi = -89{,}5°$, $\sin I < 0$. Точки $-89{,}5°$ и $-90{,}5°$ отождествляются, а $A_{j-1/2} = 0$. В связи с этим схема запишется следующим образом:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau} = P - kn_{i,j}^{t+1} + \sin^2 I_j\Bigg[\left(D_{i+1/2}\frac{n_{i+1,j}^{t+1}-n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n_{i+1,j}^{t+1}-u_{i-1}n_{i-1,j}^{t+1}}{2h}\right)+$$

$$+\frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{i,j+1}^{t+1}-n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} - \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1}-B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi}\cdot\Big[(-D_i n_{i,j}+D_i n_{i,j+1}+D_{i-1}n_{i-1,j}-D_{i-1}n_{i-1,j+1})\cdot\sin I_{j+1/2}\cos I_{j+1/2}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi\cos\varphi}\cdot\Big[D_{i-1/2}(B_{j+1}n_{i,j+1}-B_j n_{i,j}+B_j n_{i-1,j}-B_{j+1}n_{i-1,j+1})\Big].$$

- Вблизи северного полюса: $j = N_\varphi$, $1 < i < N_z$, $\varphi = +89{,}5°$, $\sin I > 0$. Точки $+89{,}5°$ и $+90{,}5°$ отождествляются, а $A_{j+1/2} = 0$. В связи с этим схема запишется следующим образом:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau} = P - kn_{i,j}^{t+1} + \sin^2 I_j\Bigg[\left(D_{i+1/2}\frac{n_{i+1,j}^{t+1}-n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n_{i+1,j}^{t+1}-u_{i-1}n_{i-1,j}^{t+1}}{2h}\right)+$$

$$+\frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2} - A(\varphi_{j-1/2})\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} - \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}-B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi}\cdot\Big[(-D_i n_{i,j-1}+D_i n_{i,j}+D_{i-1}n_{i-1,j-1}-D_{i-1}n_{i-1,j})\cdot\sin I_{j-1/2}\cos I_{j-1/2}\Big]-$$

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{\tau}{a\cdot h\cdot\Delta\varphi\cos\varphi}\cdot\Big[D_{i-1/2}(B_j n_{i,j}-B_{j-1}n_{i,j-1}+B_{j-1}n_{i-1,j-1}-B_j n_{i-1,j})\Big]$$

- Вблизи северного полюса: $j = N_\varphi$, $1 < i < N_z$, $\varphi = +89{,}5°$, $\sin I > 0$. Точки $+89{,}5°$ и $+90{,}5°$ отождествляются, а $A_{j+1/2} = 0$. В связи с этим схема запишется следующим образом:

На верхней границе учитывается равенство нулю полного потока: в результате имеем уравнение:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau} = +\Bigg[-D_{i-1/2}\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} - \left(\frac{u_i n_{i,j}^{t+1}+u_{i-1}n_{i-1,j}^{t+1}}{2h}\right)+$$

$$+\left(-\frac{u_{\varphi(i-1/2)}+|u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n_{i-1,j}^{t+1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)}-|u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n_{i,j}^{t+1}\right)\Bigg]$$

- На верхней границе $z = z_{ub} = 500$ км ставится условие постоянства полного потока:

$$D\sin^2 I\frac{\partial n}{\partial z} + u\sin^2 In - \frac{1}{a}D\sin I\cos I\frac{\partial n}{\partial\varphi} = F_{ub},$$

константа F_{ub} полагается малой и при расчетах приравнивается к нулю.

Аппроксимация этого граничного условия в используемой схеме имеет вид:

$$\frac{n_{N,j}^{t+1}-n_{N,j}^t}{\tau} = F_{ub} - D_{N-1/2}\sin^2 I_j\frac{n_{N,j}^{t+1}-n_{N-1,j}^{t+1}}{h^2} - \frac{u_N n_{N,j}-u_{N-1}n_{N-1,j}}{2h}\sin^2 I_j + MIX_{z(i,j)},$$

где $MIX_{z(i,j)}$ вычисляется, как и ранее, в зависимости от знака $\sin I$:

$\boxed{\text{При } \sin I \geqslant 0\text{:}}$

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi} \left[(-D_N n_{N,j-1} + D_N n_{N,j} + D_{N-1} n_{N-1,j-1} - D_{N-1} n_{N-1,j}) \cdot \sin I_{j-1/2} \cos I_{j-1/2} \right]$$

$\boxed{\text{При } \sin I < 0\text{:}}$

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi} \cdot \left[(-D_N n_{N,j} + D_N n_{N,j+1} + D_{N-1} n_{N-1,j} - D_{N-1} n_{N-1,j+1}) \cdot \sin I_{j+1/2} \cos I_{j+1/2} \right]$$