

Двумерная задача, неявная схема

Полное двумерное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right] + \\ & + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a} \cdot (\cos^2 I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial \varphi} - D \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial z} - u \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot n \right] + \\ & + [P - kn] \end{aligned}$$

Перепишем его в более компактной форме с использованием эффективной скорости $u = \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}$ и функций $A(\varphi) = \cos^2 I \cos \varphi$, $B(\varphi) = \cos \varphi \sin 2I$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \frac{\partial n}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} (u \sin^2 \varphi \cdot n) - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \left(D \sin I \cos I \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) + \\ & + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a} \cdot A(\varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} D \cdot B(\varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{1}{2} u \cdot B(\varphi) \cdot n \right] + \\ & + [P - kn] \end{aligned}$$

Используемая разностная схема внутри расчетной области:

$$\begin{aligned} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = & P - kn_{i,j}^{t+1} + \sin^2 I_j \left[\left(D_{i+1/2} \frac{n_{i+1,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{i+1} n_{i+1,j}^{t+1} - u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) + \right. \\ & + \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[\frac{D}{a^2} \left(A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2}) \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} \right) - \frac{u}{2a} \left(\frac{B(\varphi_{j+1}) n_{i,j+1}^{t+1} - B(\varphi_{j-1}) n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta \varphi} \right) \right] + \\ & \left. + MIX_{z(i,j)} + MIX_{y(i,j)}, \right. \end{aligned}$$

где для смешанных производных используются следующие схемы:

При $\sin I \geq 0$:

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta \varphi} \cdot$$

$$\cdot \left[(-D_{i+1} n_{i+1,j} + D_{i+1} n_{i+1,j+1} + D_i n_{i,j} - D_i n_{i,j+1}) \cdot \sin I_{j+1/2} \cos I_{j+1/2} + \right. \\ \left. (-D_i n_{i,j-1} + D_i n_{i,j} + D_{i-1} n_{i-1,j-1} - D_{i-1} n_{i-1,j}) \cdot \sin I_{j-1/2} \cos I_{j-1/2} \right]$$

$$MIX_{y(i,j)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta \varphi \cos \varphi} \cdot$$

$$\cdot \left[D_{i+1/2} (-B_j n_{i+1,j} + B_{j+1} n_{i+1,j+1} + B_j n_{i,j} - B_{j+1} n_{i,j+1}) + D_{i-1/2} (B_j n_{i,j} - B_{j-1} n_{i,j-1} + B_{j-1} n_{i-1,j-1} - B_j n_{i-1,j}) \right]$$

При $\sin I < 0$:

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta \varphi} \cdot$$

$$\cdot \left[(-D_{i+1} n_{i+1,j-1} + D_i n_{i,j-1} + D_{i+1} n_{i+1,j} - D_i n_{i,j}) \cdot \sin I_{j-1/2} \cos I_{j-1/2} + \right. \\ \left. (-D_i n_{i,j} + D_i n_{i,j+1} + D_{i-1} n_{i-1,j} - D_{i-1} n_{i-1,j+1}) \cdot \sin I_{j+1/2} \cos I_{j+1/2} \right]$$

$$MIX_{y(i,j)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi \cos \varphi}.$$

$$\cdot \left[D_{i+1/2}(-B_{j-1}n_{i+1,j-1} + B_j n_{i+1,j} + B_{j-1}n_{i,j-1} - B_j n_{i,j}) + D_{i-1/2}(B_{j+1}n_{i,j+1} - B_j n_{i,j} + B_j n_{i-1,j} - B_{j+1}n_{i-1,j+1}) \right]$$

Все значения сеточной функции n в смешанных производных берутся неявно, со следующего временного шага $t + 1$.

Граничные условия

- На верхней границе $z = z_{ub} = 500$ км ставится условие постоянства полного потока:

$$D \sin^2 I \frac{\partial n}{\partial z} + u \sin^2 I n - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{\partial n}{\partial \varphi} = F_{ub},$$

константа F_{ub} полагается малой и при расчетах приравнивается к нулю.

Аппроксимация этого граничного условия в используемой схеме имеет вид:

$$F_{ub} = D_{N-1/2} \sin^2 I_j \frac{n_{N,j}^{t+1} - n_{N-1,j}^{t+1}}{h^2} + \frac{u_N n_{N,j} + u_{N-1} n_{N-1,j}}{2h} \sin^2 I_j - MIX_{z(i,j)},$$

где $MIX_{z(i,j)}$ вычисляется, как и ранее, в зависимости от знака $\sin I$:

$$\boxed{\text{При } \sin I \geq 0:}$$

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi} \left[(-D_N n_{N,j-1} + D_N n_{N,j} + D_{N-1} n_{N-1,j-1} - D_{N-1} n_{N-1,j}) \cdot \sin I_{j-1/2} \cos I_{j-1/2} \right]$$

$$\boxed{\text{При } \sin I < 0:}$$

$$MIX_{z(i,j)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi} \cdot \left[(-D_N n_{N,j} + D_N n_{N,j+1} + D_{N-1} n_{N-1,j} - D_{N-1} n_{N-1,j+1}) \cdot \sin I_{j+1/2} \cos I_{j+1/2} \right]$$

Остальные граничные условия:

- На нижней границе $i = 1$ всюду положено $n_{i,j}^{t+1} = P/k$.
- Вблизи южного полюса: $j = 1$, $1 < i < N_z$, $\varphi = -89,5^\circ$, $\sin I < 0$. Точки $-89,5^\circ$ и $-90,5^\circ$ отождествляются, а $A_{j-1/2} = 0$. В связи с этим схема запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = & P - k n_{i,j}^{t+1} + \sin^2 I_j \left[\left(D_{i+1/2} \frac{n_{i+1,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{i+1} n_{i+1,j}^{t+1} - u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[\frac{D}{a^2} A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} - \frac{u}{2a} \left(\frac{B(\varphi_{j+1}) n_{i,j+1}^{t+1} - B(\varphi_j) n_{i,j}^{t+1}}{2\Delta\varphi} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi} \cdot \left[(-D_i n_{i,j} + D_i n_{i,j+1} + D_{i-1} n_{i-1,j} - D_{i-1} n_{i-1,j+1}) \cdot \sin I_{j+1/2} \cos I_{j+1/2} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta\varphi \cos \varphi} \cdot \left[D_{i-1/2} (B_{j+1} n_{i,j+1} - B_j n_{i,j} + B_j n_{i-1,j} - B_{j+1} n_{i-1,j+1}) \right] \right]. \end{aligned}$$

- Вблизи северного полюса: $j = N_\varphi$, $1 < i < N_z$, $\varphi = +89,5^\circ$, $\sin I > 0$. Точки $+89,5^\circ$ и $+90,5^\circ$ отождествляются, а $A_{j+1/2} = 0$. В связи с этим схема запишется следующим образом:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = P - k n_{i,j}^{t+1} + \sin^2 I_j \left[\left(D_{i+1/2} \frac{n_{i+1,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} \right) + \left(\frac{u_{i+1} n_{i+1,j}^{t+1} - u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[\frac{D}{a^2} - A(\varphi_{j-1/2}) \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} - \frac{u}{2a} \left(\frac{B(\varphi_j) n_{i,j}^{t+1} - B(\varphi_{j-1}) n_{i,j-1}^{t+1}}{2 \Delta \varphi} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta \varphi} \cdot \left[(-D_i n_{i,j-1} + D_i n_{i,j} + D_{i-1} n_{i-1,j-1} - D_{i-1} n_{i-1,j}) \cdot \sin I_{j-1/2} \cos I_{j-1/2} \right] - \\
& - \frac{1}{4} \cdot \frac{\tau}{a \cdot h \cdot \Delta \varphi \cos \varphi} \cdot \left[D_{i-1/2} (B_j n_{i,j} - B_{j-1} n_{i,j-1} + B_{j-1} n_{i-1,j-1} - B_j n_{i-1,j}) \right]
\end{aligned}$$

- Вблизи северного полюса: $j = N_\varphi$, $1 < i < N_z$, $\varphi = +89,5^\circ$, $\sin I > 0$. Точки $+89,5^\circ$ и $+90,5^\circ$ отождествляются, а $A_{j+1/2} = 0$. В связи с этим схема запишется следующим образом:

На верхней границе учитывается равенство нулю полного потока: в результате имеем уравнение:

$$\begin{aligned}
\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = & + \left[-D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} - \left(\frac{u_i n_{i,j}^{t+1} + u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) + \right. \\
& \left. + \left(-\frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i-1,j}^{t+1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i,j}^{t+1} \right) \right]
\end{aligned}$$