На первом шаге расщепления решается уравнение

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n_i}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n_i\right) - \frac{1}{a}D\sin I\cos I\left(\frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial \varphi}n_i\right)\right] + [P - kn_i]$$

Рассмотрим следующие варианты разностных схем для этого уравнения. Во всех случаях используем для диффузионного слагаемого схему, получаемую применением формулы центральной разности дважды, а для потокового слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial z}(un)$ центральную разность. Различия рассматриваемых схем — в аппроксимации слагаемого со смешанной производной. В схемах вычисление u_φ ведётся либо по формуле с логарифмом

$$u_\varphi = \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} \approx \frac{\ln\frac{n_{i,j+1}}{n_{i,j-1}}}{2\Delta\varphi},$$

либо с помощью дроби:

$$u_\varphi \approx \frac{2}{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}\frac{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}.$$

Отметим также следующее: эксперимент показал что в процессе вычисления величина n никогда не достигает в точности нулевого значения, поэтому вопрос об асимптотической формуле для u_φ в нулях n не ставится. Тем не менее, в случаях возникновения осцилляций в процессе вычисления численные значения n иногда меняют знак. Ввиду этого обстоятельства формула для аппроксимации u_φ с помощью дроби представляется более удобной — она позволяет исследовать и такие схемы.

1. Схема с центральными разностями:используем для смешанной производной центральную разность в уравнении и в граничном условии. В результате получим стационарное решение, в котором, тем не менее, имеются сильные осцилляции вдоль изменения широты. Период осцилляции соответствует мелкости шага сетки (при дроблении сетки частота осцилляции увеличивается).

Схема:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \frac{(u_{i+1} + u_{\varphi(i+1)})n_{i+1} - (u_{i-1} + u_{\varphi(i-1)})n_{i-1}}{2h}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1} - n_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N}{2h} = \frac{F_{ub}}{h} = 0$$

2. Единственное отличие этой схемы от схемы 1 — в способе аппроксимации и вычисления самой величины u_φ: используется формула без логарифмов $u_\varphi \approx \dfrac{2}{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}\dfrac{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}$. Эксперименты показали, что результаты вычислений слабо зависят от способа этой аппроксимации. Далее применяется формула с дробью, поскольку при возникновении нефизических численных отрицательных значений n логарифм вычислить невозможно, а дробь при этом определена. Расчеты показали наличие сильных биений и в данной схеме.

3. Запишем несогласованную схему: в уравнении используем для смешанной производной направленную разность, а в граничном условии — соответствующее условие для центральной разности. Это внесёт дополнительную численную диффузию, в результате чего осцилляции прекратятся.

В этой схеме в направленной разности u_φ везде берется в среднем узле i.

Схема:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} +$$

$$+\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} +$$

$$+\frac{|u_{\varphi(i)}| + u_{\varphi(i)}}{2}\cdot\frac{n_{i+1} - n_i}{h} + \frac{|u_{\varphi(i)}| - u_{\varphi(i)}}{2}\cdot\frac{n_i - n_{i-1}}{h}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1} - n_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N}{2h} = \frac{F_{ub}}{h} = 0$$

4. Наконец, используем формулу центральной разности и в уравнении, и в граничном условии. Выясним также аппроксимацию верхнего граничного условия в такой схеме:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_i-n_{i-1}}{h^2}+$$

$$+\frac{u_{i+1}n_{i+1}-u_{i-1}n_{i-1}}{2h}+$$

$$+\frac{|u_{\varphi(i)}|+u_{\varphi(i)}}{2}\cdot\frac{n_{i+1}-n_i}{h}+\frac{|u_{\varphi(i)}|-u_{\varphi(i)}}{2}\cdot\frac{n_i-n_{i-1}}{h}$$

Рассматриваемая схема неконсервативна. Для аппроксимации верхнего граничного условия выделим подобие функции потока в схеме:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = \left(D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h^2}+\frac{u_{i+1}n_{i+1}+u_in_i}{2h}+\frac{|u_{\varphi(i)}|}{2}\frac{n_{i+1}+n_i}{h}+\frac{u_{\varphi(i)}}{2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h}\right)-$$
$$-\left(D_{i-1/2}\frac{n_i-n_{i-1}}{h^2}+\frac{u_in_i+u_{i-1}n_{i-1}}{2h}+\frac{|u_{\varphi(i)}|}{2}\frac{n_i+n_{i-1}}{h}+\frac{u_{\varphi(i)}}{2}\frac{n_i-n_{i-1}}{h}\right)$$

Теперь аппроксимируем граничное условие следующим образом:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1}-n_N}{h^2}+\frac{u_{N+1}n_{N+1}+u_Nn_N}{2h}+\frac{|u_{\varphi(N)}|}{2}\frac{n_{N+1}+n_N}{h}+\frac{u_{\varphi(N)}}{2}\frac{n_{N+1}-n_N}{h}=\frac{F_{ub}}{h}=0$$

5. Подкорректируем схему из предыдущего пункта: будем брать перед направленной разностью $\dfrac{n_{i+1}-n_i}{h}$ скорость u_φ в полуцелом узле $i+1/2$:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n_i-n_{i-1}}{h^2}+$$

$$+\frac{u_{i+1}n_{i+1}-u_{i-1}n_{i-1}}{2h}+$$

$$+\frac{|u_{\varphi(i+1/2)}|+u_{\varphi(i+1/2)}}{2}\cdot\frac{n_{i+1}-n_i}{h}+\frac{|u_{\varphi(i-1/2)}|-u_{\varphi(i-1/2)}}{2}\cdot\frac{n_i-n_{i-1}}{h}$$

Такая схема также неконсервативна. Граничное условие оставим из схемы 4.

6. Используем схему КИР для консервативной аппроксимации. Схему запишем исходя из аппроксимации потока для слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial z}(u_\varphi n)$ вида

$$\frac{1}{2}(u_{\varphi(i)}n_i+u_{\varphi(i+1)}n_{i+1})-\frac{1}{2}|u_{\varphi(i+1/2)}|(n_i-n_{i+1}).$$

Схема имеет вид:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i = \left(D_{i+1/2}\frac{n_{i+1}-n_i}{h^2}+\frac{u_{i+1}n_{i+1}+u_in_i}{2h}+\frac{1}{2h}(u_{\varphi(i+1)}n_{i+1}+u_{\varphi(i)}n_i)-\frac{1}{2}|u_{\varphi(i+1/2)}|\frac{n_i-n_{i+1}}{h}\right)-$$

$$-\left(D_{i-1/2}\frac{n_i-n_{i-1}}{h^2}+\frac{u_in_i+u_{i-1}n_{i-1}}{2h}+\frac{1}{2h}(u_{\varphi(i)}n_i+u_{\varphi(i-1)}n_{i-1})-\frac{1}{2}|u_{\varphi(i-1/2)}|\frac{n_{i-1}-n_i}{h}\right)$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2}\frac{n_{N+1}-n_N}{h^2}+\frac{u_{N+1}n_{N+1}+u_Nn_N}{2h}+\frac{1}{2h}(u_{\varphi(N+1)}n_{N+1}+u_{\varphi(N)}n_N)-\frac{1}{2h}|u_{\varphi(N+1/2)}|(n_N-n_{N+1})=\frac{F_{ub}}{h}=0$$