# Моделирование F слоя Земной ионосферы

Останин Павел Антонович

Научный руководитель: Кулямин Дмитрий Вячеславович

## Задачи и актуальность

- Разработка динамической трёхмерной модели F слоя ионосферы;
- Разработка совместной модели термосферы-ионосферы со включением модели ионосферы как вычислительного блока.

Актуальность проблемы и её прикладное значение:

- Задачи космической отрасли;
- Межконтинентальная и спутниковая радиокоммуникация;
- Радиолокация и навигационные системы: состояние ионосферы определяет характеристики движения низкоорбитальных спутников;

# Используемые приближения; векторное уравнение

Используемые приближения:

- Рассмотрение только F слоя;
- Динамическое преобладание амбиполярной диффузии;
- Предположение квазинейтральности плазмы;
- Одноионная постановка с рассмотрением иона $O^+$;
- Дипольное приближение магнитного поля Земли;

Уравнение, описывающее эволюцию электронной концентрации (уравнение неразрывности):

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -div(n_i \vec{u}_{\parallel}) - div\left(n_i \frac{1}{B^2}[\vec{E} \times \vec{B}]\right) +$$
$$+div\left(D\left[\nabla_{\parallel} n_i + n_i \frac{1}{T_p} \nabla_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \vec{g}_{\parallel}\right]\right) + [P - k_i n_i].$$

# Уравнение в сферической системе координат (в приближении тонкого сферического слоя)

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - kn_i].$$

$$DYZ(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(D\cos\varphi\left[\frac{1}{a}\frac{\partial n_i}{\partial\varphi}\cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z}\cos I\sin I\right]\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\left[\frac{\partial n_i}{\partial z}\sin^2 I - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{a}\frac{\partial n_i}{\partial\varphi}\cos I\sin I\right]\right);$$

$$DTr(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{1}{a}\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial\varphi}\cos^2 I - \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z}\cos I\sin I - \frac{1}{H}\sin I\cos I\right)Dn_i\cos\varphi\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-\frac{1}{a}\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial\varphi}\cos I\sin I + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z}\sin^2 I + \frac{1}{H}\sin^2 I\right)Dn_i\right];$$

$$Tr(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[n\frac{1}{B}(E_y\sin I + E_z\cos I)\right] + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(u_z\sin I\cos I - u_y\cos^2 I - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{E_x}{B}\sin I\right)n\cos\varphi\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(u_y\cos I\sin I - u_z\sin^2 I - \frac{E_x}{B}\cos I\right)n\right];$$

# Особенности системы уравнений модели ионосферы

Постановка уравнения содержит ряд особенностей:

- Уравнение отражает баланс массы;
- Задача имеет геометрические особенности;
- Характерные значения коэффициента диффузии меняются экспоненциально с высотой на 6 порядков;
- Характерные времена плазмохимических процессов малы; вместе с предыдущим пунктом это обуславливает существенную жёсткость задачи;
- Решение уравнения в силу физического смысла неотрицательно;

Симметричная матрица эффективных коэффициентов диффузии $S = \begin{pmatrix} K_1^2 & K_1 K_2 \\ K_1 K_2 & K_2^2 \end{pmatrix}$, где $K_1 = \sqrt{D} \cos I$, $K_2 = \sqrt{D} \sin I$, вырождена в каждой точке.

При нулевых $P$, $k_i$ и краевых условиях интегрирование по всей области даёт соотношение:

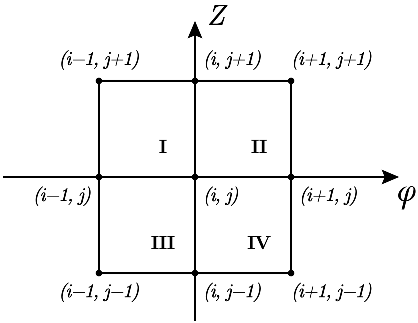
$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\varphi,z}(n_i)^2 \cos\varphi d\varphi dz = -\iint_{\varphi,z}\left(K_1\frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + K_2\frac{\partial n_i}{\partial z}\right)^2 \cos\varphi d\varphi dz \le 0.$$

# Пространственная аппроксимация

- Для диффузионных компонент используется стандартная консервативная аппроксимация с помощью центральных разностей:

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z} \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \left( \frac{D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i)}{h_i} - \frac{D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})}{h_{i-1}} \right);$$

- Гиперболические слагаемые также аппроксимированы центральными разностями;
- Ключевая особенность: наличие смешанных производных. Используется аппроксимация второго порядка, зависящая от знака $\sin I$;
  *При постоянных коэффициентах аппроксимация удовлетворяет конечно-разностному аналогу интегрального соотношения.*
- Верхнее граничное условие аппроксимировано в соответствии с конечно-разностными формулами для смешанных производных.



# Два способа аппроксимации по времени

В работе сравниваются два подхода к аппроксимации по времени:

I. Полностью неявная схема (линейная система решается с помощью метода BiCG);

II. Схема расщепления:

- Диффузия вдоль оси $z$, смешанные производные и фотохимия — первый шаг расщепления;
- Диффузия вдоль широты — второй шаг расщепления;
  (линейные системы на обоих шагах расщепления решаются одномерными прогонками);

Свойства схем протестированы на модельном стационарном решении:

$$n_{mod}(z,\varphi) = A\cdot e^{-B(z-C)}\cdot(z-C)\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Форсинг выбран так, чтобы данная функция являлась точным решением.

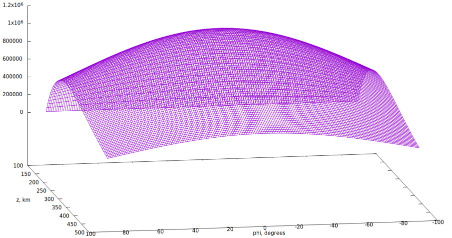



Рис. 1. Модельное решение $n_{mod}(z,\varphi)$, $z$ меняется от 100 км до 500 км и $\varphi$ от $-90^\circ$

# Сравнение аппроксимаций по времени

I. Неявная схема даёт лучшую точность при больших шагах по времени;

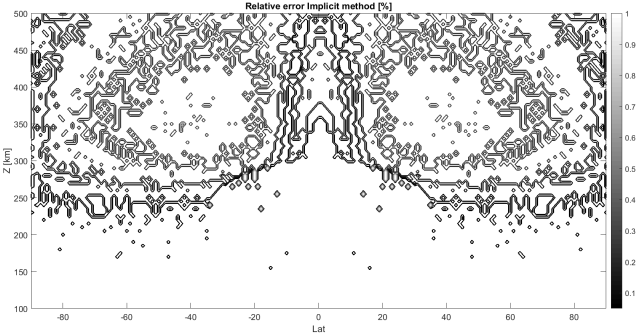



Рис. 2. Ошибка в вычислении стационарного состояния для полностью неявной схемы в задаче с заданным модельным решением.

# Сравнение аппроксимаций по времени

II. При заданном шаге по времени решение по методу расщепления приблизительно в 4 раза быстрее, но дополнительная ошибка вносит существенный вклад;

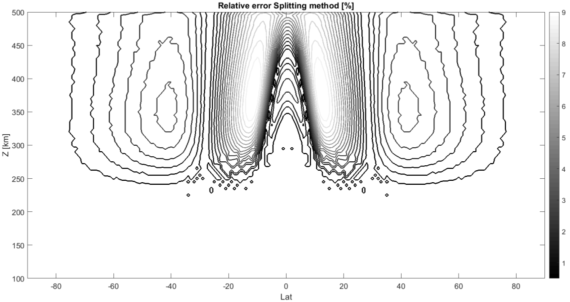



Рис. 3. Ошибка в вычислении стационарного состояния для метода расщепления при шаге по времени $\tau = 100$ с.

# Перенос нейтральным ветром

- Применяется метод расщепления: один шаг — амбиполярная диффузия, второй шаг — трёхмерный перенос;
- Для решения уравнения переноса используется схема КАБАРЕ с нелинейной коррекцией;
- Точность исследуется на стационарном модельном решении;
- Поле скорости задаётся по аналитическим формулам;
- Добавляющаяся часть оператора:

$$Tr(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(u_z \sin I \cos I - u_y \cos^2 I\right) n \cos\varphi\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(u_y \cos I \sin I - u_z \sin^2 I\right) n\right];$$

# Исследование аппроксимации по времени

I. Шаг по времени 30 секунд.

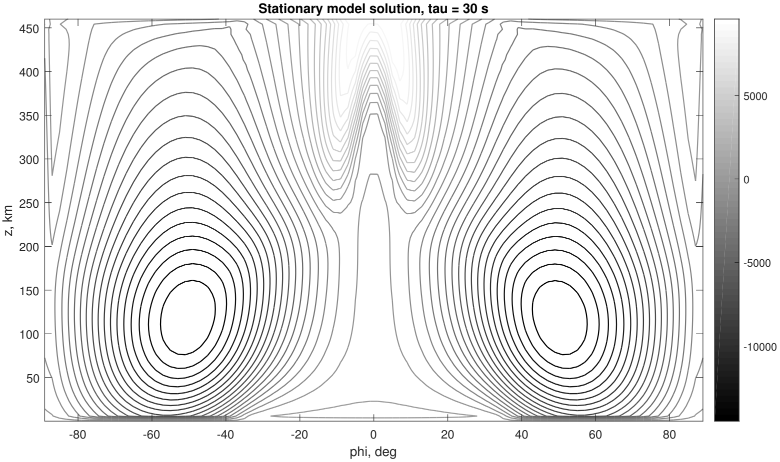



Рис. 4. Ошибка в вычислении стационарного состояния в трёхмерной задаче с учётом нейтрального ветра при шаге по времени $\tau = 30$ с.

# Исследование аппроксимации по времени

II. Шаг по времени 10 секунд.

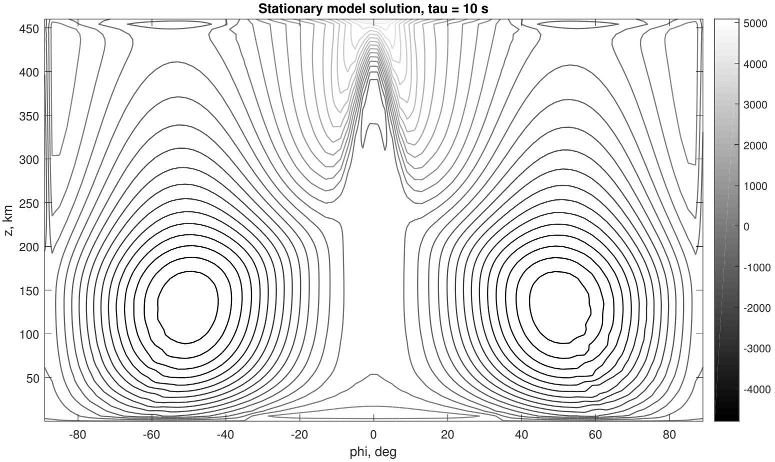



Рис. 5. Ошибка в вычислении стационарного состояния в трёхмерной задаче с учётом нейтрального ветра при шаге по времени $\tau = 10$ с.

# Исследование влияния переноса

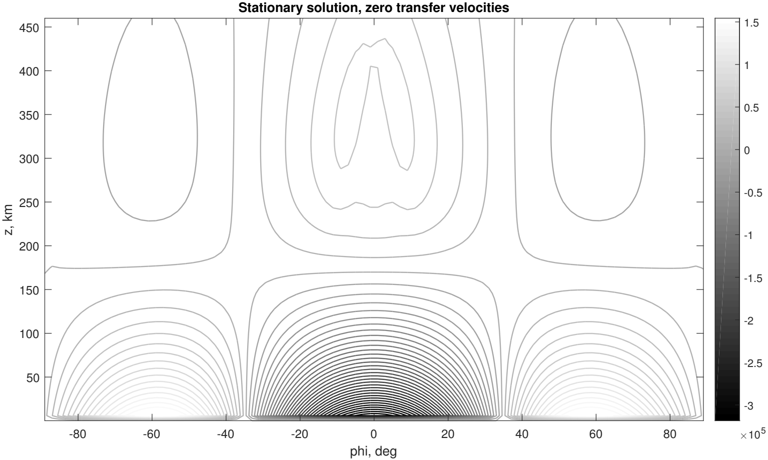



Рис. 6. Стационарное решение при отключенном вычислительном блоке адвекции, но с учетом переноса в правой части; модельная задача.

# Заключение

I. Разработана первая версия трехмерной динамической модели F слоя ионосферы ИВМ РАН на основе решения уравнений динамики плазмы в приближении амбиполярной диффузии в сферических геомагнитных координатах с учётом нейтрального ветра, сформулированы основные уравнения модели и предложен алгоритм поэтапной реализации на основе метода расщепления по физическим процессам;

II. Реализованы два метода численного интегрирования модели, проведено сравнение точности разработанных методов на основе аналитического решения;

III. Использована аппроксимация смешанных производных, учитывающая диффузию вдоль магнитных силовых линий;

IV. Разработан и реализован алгоритм численного решения трёхмерного уравнения, включающего амбиполярную диффузию и перенос нейтральным ветром. Применено расщепление оператора на две части, для решения уравнения переноса использована схема КАБАРЕ.

Спасибо за внимание!