Динамическое моделирование земной ионосферы

Останин Павел Антонович

Выпускная квалификационная работа

Научный руководитель: Кулямин Дмитрий Вячеславович

Введение

Основные задачи:

- Построение динамической трёхмерной модели Земной ионосферы;
- Согласование с уже разработанной моделью нейтральной термосферы ИВМ РАН.

Актуальность задачи обусловлена особой ролью состояния ионосферы в следующих отраслях:

- Системы глобальной радиосвязи;
- Спутниковые системы;
- Космическая отрасль.

Постановка задачи

Используемые приближения:

- Динамическое преобладание амбиполярной диффузии;
- Одноионная постановка, квазинейтральность плазмы;
- Дипольное магнитное поле Земли;
- Приближение совпадения географических и магнитных полюсов;

Уравнение, описывающее эволюцию ионной концентрации:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -div(n_i \vec{u}_{\parallel}) - div\left(n_i \frac{1}{B^2}[\vec{E} \times \vec{B}]\right) +$$

$$+div\left(D\left[\nabla_{\parallel} n_i + n_i \frac{1}{T_p} \nabla_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \vec{g}_{\parallel}\right]\right) + [P - k_i n_i]$$

Входящие в уравнение параметры

Для функций P, k, температур и концентраций N_2, O_2 и O используются аналитические формулы:

- $T(z) = T_\infty - (T_\infty - T_0)\exp\left(-\frac{g}{RT_\infty}(z - z_0)\right)$,
  $T_{n\infty} = 800$ K, $T_{i\infty} = 950$ K, $T_{e\infty} = 2200$ K.
- Для концентраций — Больцмановское распределение:
  $n_{O_2,N_2,O}(z) = n_{O_2,N_2,O}(z_0) \cdot \exp\left(-\frac{M_{O_2,N_2,O}\,g}{R_0 T_n}(z - z_0)\right)$.
  На высоте 100 км $n_{O_2} = 5{,}6 \cdot 10^9$ см$^{-3}$, $n_O = 2{,}8 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$, $n_{N_2} = 5{,}2 \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$.
- В дневное время $P = 4 \cdot 10^{-7} n_O(z)$;
  $k = 1{,}2 \cdot 10^{-12} n_{N_2}(z) + 2{,}1 \cdot 10^{-11} n_{O_2}(z)$

Требования к схемам и свойства решения

- Концентрация неотрицательна, для сохранения этого свойства используем монотонные (по Годунову) схемы;
- Уравнение имеет закон сохранения массы, схемы должны быть консервативны;
- Характерные времена на нижней и верхней границах отличаются на несколько порядков, по времени используем неявные схемы;
- При постоянных P и k уравнение имеет стационарное решение.

Уравнение в сферических координатах в приближении тонкого сферического слоя

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - kn_i].$$

$$Tr(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[n_i\frac{1}{B}(E_y\sin I + E_z\cos I)\right] + \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(u_z\sin I\cos I - u_y\cos^2 I - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{E_x}{B}\sin I\right)n_i\cos\varphi\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\left(u_y\cos I\sin I - u_z\sin^2 I - \frac{E_x}{B}\cos I\right)n_i\right];$$

$$DYZ(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(D\cos\varphi\left[\frac{1}{a}\frac{\partial n_i}{\partial\varphi}\cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z}\cos I\sin I\right]\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\left[\frac{\partial n_i}{\partial z}\sin^2 I - \right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{1}{a}\frac{\partial n_i}{\partial\varphi}\cos I\sin I\right]\right);$$

$$DTr(n_i) = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{1}{a}\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial\varphi}\cos^2 I - \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z}\cos I\sin I - \frac{1}{H}\sin I\cos I\right)Dn_i\cos\varphi\right] +$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(-\frac{1}{a}\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial\varphi}\cos I\sin I + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z}\sin^2 I + \frac{1}{H}\sin^2 I\right)Dn_i\right].$$

Метод расщепления

- На первом шаге расщепления решается уравнение для z-диффузии в проекции со смешанной производной;
- На втором шаге добавляется диффузия по y.
- На третьем шаге добавляется перенос.

Первый шаг метода расщепления, три постановки

Первое приближение: диффузия вдоль оси z:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n\right)$$

Следующий шаг — учёт широтной зависимости: замена D на $D\sin^2 I$ ($I \approx \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)$):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n\right)\right]$$

Более точный учёт широтной зависимости: z-диффузия в проекции (со смешанной производной):

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{a}D\sin I\cos I\left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial \varphi}n\right)\right]$$

Используемые схемы

Для аппроксимации диффузионного слагаемого используется схема

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z} \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \left(\frac{D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i)}{h_i} - \frac{D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})}{h_{i-1}} \right)$$

Для одномерного уравнения исследованы следующие схемы:

- В схеме 1 потоковый член и граничное условие аппроксимируются с помощью направленных разностей;
- В схеме 2 потоковый член аппроксимируется центральной разностью, граничное условие — направленной разностью;
- Схема 3 имеет согласованные граничное условие и схему, записанные с помощью центральных разностей.

Для уравнения со смешанной производной вводится

$$u_\varphi = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi}$$

— нелинейная добавка добавка к эффективной скорости.

Воспроизведение дневного вертикального профиля электронной концентрации

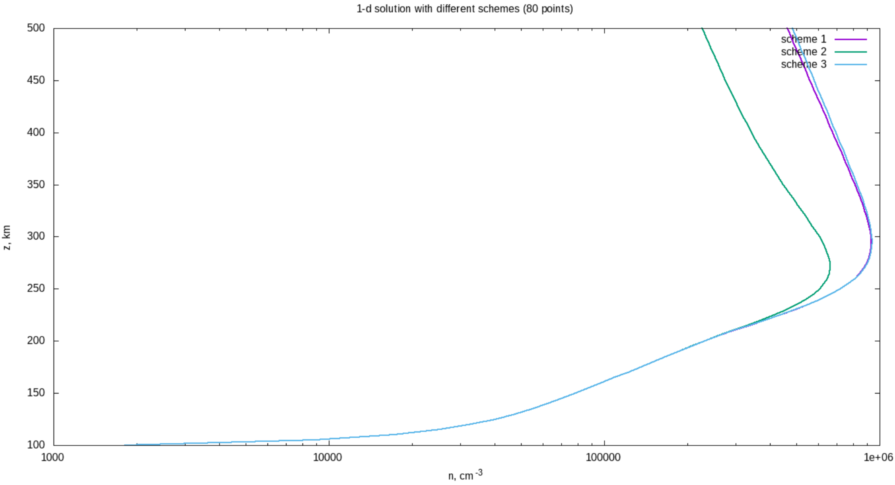


Рис. 1: Стационарные решения на 80 расчётных узлах.

Воспроизведение дневного вертикального профиля электронной концентрации

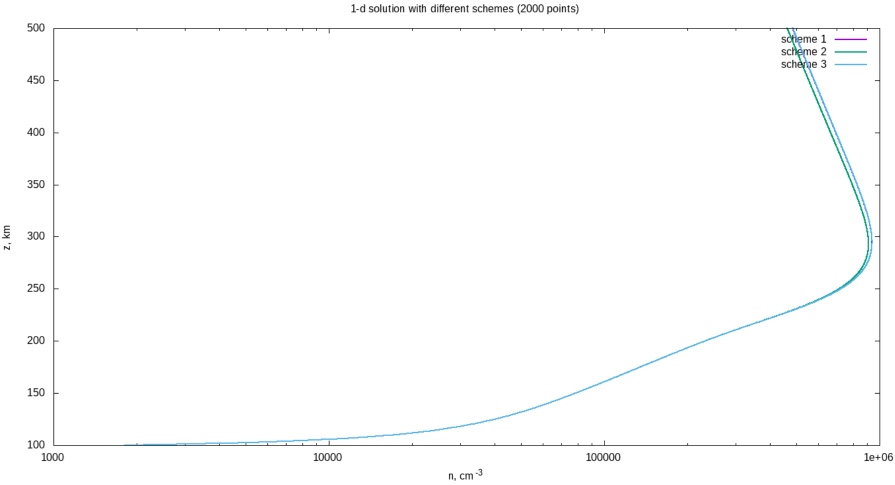


Рис. 2: Стационарные решения на 2000 расчётных узлах.

Чувствительность к изменению внешних параметров

Варьирование входящих в уравнение температур показывает, что наибольшую чувствительность решение имеет к температуре нейтральных молекул.

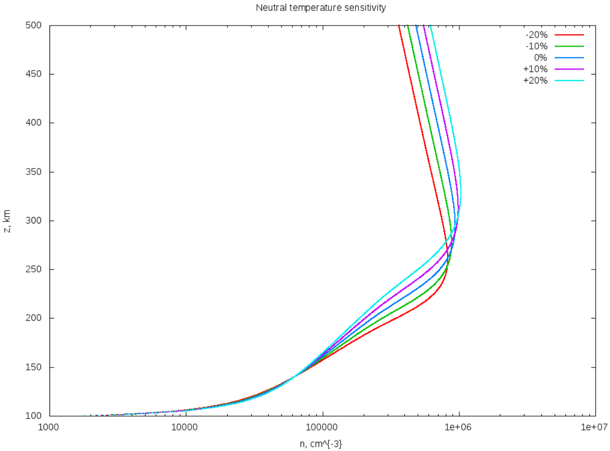


Рис. 3: Чувствительность к изменению температуры нейтральных молекул.

Чувствительность к изменению внешних параметров

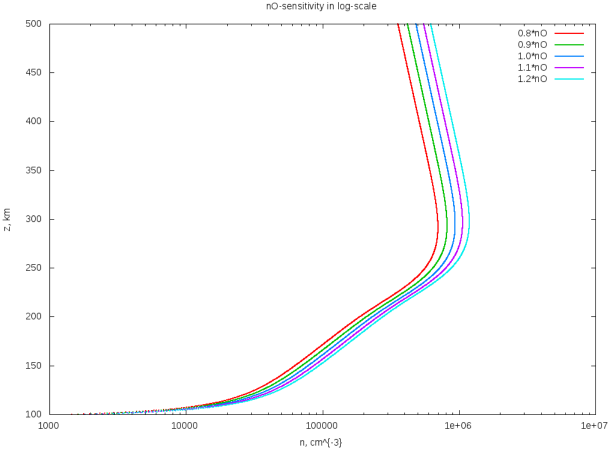
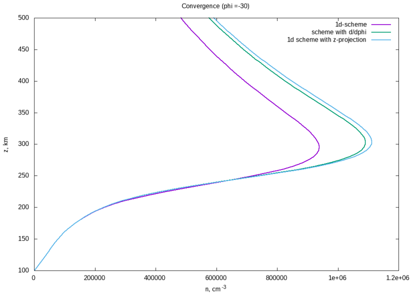


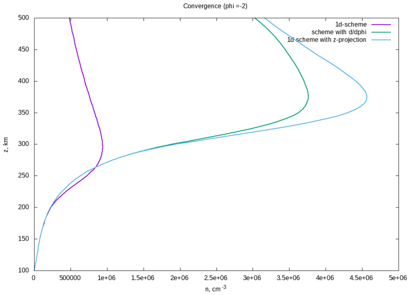
Рис. 4: Чувствительность к изменению концентрации атомарного кислорода.

Учёт широтной зависимости

Различные постановки используются для учёта наклонения магнитных силовых линий.
Полученные стационарные решения при широтах $\varphi = -30^\circ$ и $\varphi = -2^\circ$:



$\varphi = -30^\circ$.



$\varphi = -2^\circ$.

Моделирование суточного хода

Вычисляется стационарное решение одномерной задачи при дневном значении $P(z)$, затем итерации по времени продолжаются с меняющимся $P(z,t)$.

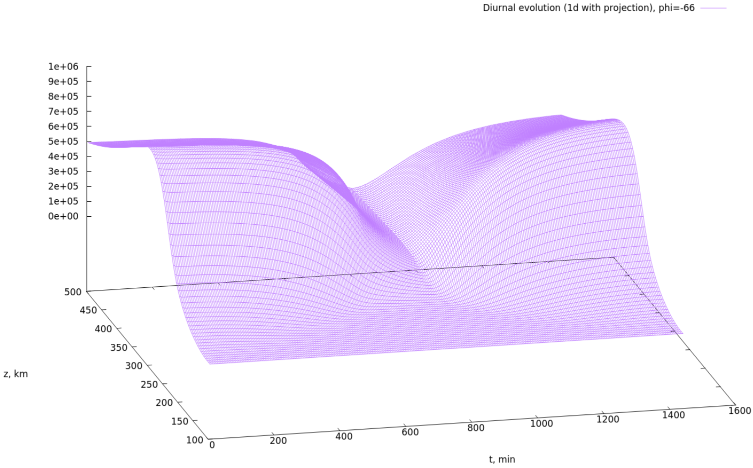


Рис. 5: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции, $\varphi = -66^\circ$.

Моделирование суточного хода

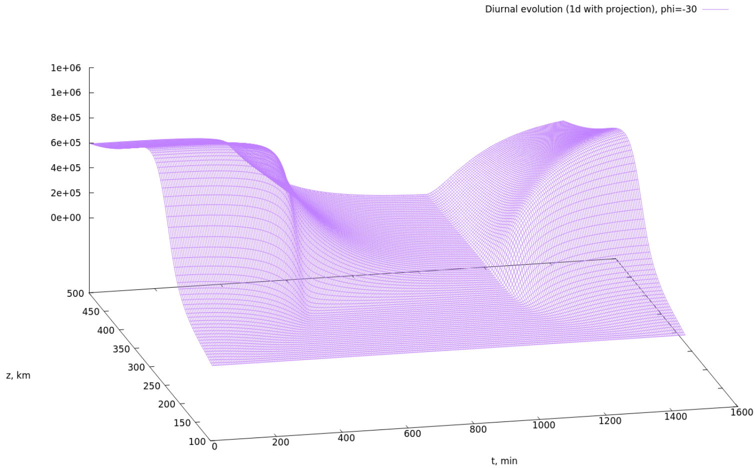


Рис. 6: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции, $\varphi = -30^\circ$.

Список использованной литературы

1. *Kulyamin D. V. and Dymnikov V. P.* A three-dimensional model of general thermospheric circulation. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. — 2013. — 28(4). — C. 353-380.
2. *Кулямин Д. В., Дымников В. П.* Моделирование климата нижней ионосферы. // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. — 2015. — Т. 51(3). — С. 317–337.
3. *Schunk R.W., Nagy A.F.* IONOSPHERES Physics, Plasma Physics, and Chemistry. — New York, United States: Cambridge University Press, 2009. — 628 p.
4. *Холодов А. С., Холодов Я. А.* О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа. // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2006. — Т. 46, № 9. — С. 1560-1588.
5. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику: Учебное пособие для вузов / Под ред. А. И. Лобанова. — 2-е изд., испр. и доп. — Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. — 504 с.
6. *Калиткин Н. Н.* Численные методы: учеб. пособие. — 2-е изд., исправленное. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 592 с.

Спасибо за внимание!