1. Аналитическое решение: $f(z,\varphi)=3\cdot 10^6\left(\frac{z-100}{133}\right)e^{\left(\frac{100-z}{133}\right)}\cdot\cos^2\frac{\varphi}{2}$. Область: $(z,\varphi)\in[100;500]\times\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.
Уравнение:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n}{\partial z}+u\cdot n\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot A(\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial\varphi}-\frac{u}{2}\cdot B(\varphi)\cdot n\right]+$$
$$+[P-kn]$$

Функция $P(z,\varphi)$ подобрана так, чтобы $f(z,\varphi)$ была стационарным решением уравнения:

$$P(z,\varphi)=kf(z,\varphi)-\left(\frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial f}{\partial z}+u\cdot f\right)\right]+\frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot A(\varphi)\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}-\frac{u}{2}\cdot B(\varphi)\cdot f\right]\right)$$

На верхней границе задаётся поток $F(\varphi)=D\cdot\sin^2 I\cdot\left(\frac{\partial n}{\partial z}\right)+u\cdot\sin^2 I\cdot n$. Функция F задана так, чтобы $f(z,\varphi)$ тождественно удовлетворяла этому условию.
Разностная схема для уравнения:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j}-n^t_{i,j}}{\tau}=P_{i,j}+k_i n^{t+1}_{i,j}+\sin^2 I_j\left(D_{i+1/2}\frac{n^{t+1}_{i+1,j}-n^{t+1}_{i,j}}{h^2}-D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j}-n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i+1}n^{t+1}_{i+1,j}-u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right)+$$
$$+\frac{D_i}{a^2\cos\varphi_j}\left(A_{j+1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j+1}-n^{t+1}_{i,j}}{\Delta\varphi^2}-A_{j-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j}-n^{t+1}_{i,j-1}}{\Delta\varphi^2}\right)-\frac{u_j}{2a\cos\varphi_j}\left(\frac{B_{j+1}n^{t+1}_{i,j+1}-B_{j-1}n^{t+1}_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}\right)$$

2. Рассмотрим далее два случая аппроксимации верхнего граничного условия.

- Граничное условие аппроксимируется и включается в систему уравнений отдельно.

В этом случае записываем уравнение системы на предпоследнем слое по z (захватывающем последний N-ый слой одной точкой шаблона).

$$\frac{n^{t+1}_{N-1,j}-n^t_{N-1,j}}{\tau}=P_{N-1,j}+k_{N-1}n^{t+1}_{N-1,j}+$$
$$+\sin^2 I_j\left(D_{N-1/2}\frac{n^{t+1}_{N,j}-n^{t+1}_{N-1,j}}{h^2}-D_{N-3/2}\frac{n^{t+1}_{N-1,j}-n^{t+1}_{N-2,j}}{h^2}+\frac{u_N n^{t+1}_{N,j}-u_{N-2}n^{t+1}_{N-2,j}}{2h}\right)+$$
$$+\frac{D_{N-1}}{a^2\cos\varphi_j}\left(A_{j+1/2}\frac{n^{t+1}_{N-1,j+1}-n^{t+1}_{N-1,j}}{\Delta\varphi^2}-A_{j-1/2}\frac{n^{t+1}_{N-1,j}-n^{t+1}_{N-1,j-1}}{\Delta\varphi^2}\right)-\frac{u_j}{2a\cos\varphi_j}\left(\frac{B_{j+1}n^{t+1}_{N-1,j+1}-B_{j-1}n^{t+1}_{N-1,j-1}}{2\Delta\varphi}\right)$$

Граничное условие запишем в форме $F_j/h=D_{N-1/2}\cdot\sin^2 I_j\frac{n^{t+1}_{N,j}-n^{t+1}_{N-1,j}}{h^2}+\frac{1}{2h}\cdot\sin^2 I_j\cdot(u_{N-1}n^{t+1}_{N-1,j}+u_N n^{t+1}_{N,j})$, поток в программе задаём по формуле $F_j=\left(D_{N-1/2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(500-h/2,\varphi)+u_{N-1/2}\cdot f(500-h/2,\varphi)\right)\cdot\sin^2 I_j$.
В этом случае расчет идет нормально, C-норма ошибки вычисленного стационарного решения равна 7000 при C-норме точного аналитического решения порядка $3\cdot 10^6$.

- Граничное условие используется для выражения n_{N+1}, после чего исключается из системы.

$$\frac{n^{t+1}_{N,j}-n^t_{N,j}}{\tau}=P_{N,j}+\frac{F_j}{h}+k_N n^{t+1}_{N,j}+\sin^2 I_j\left(-D_{N-1/2}\frac{n^{t+1}_{N,j}-n^{t+1}_{N-1,j}}{h^2}-\frac{u_N n^{t+1}_{N,j}-u_{N-1}n^{t+1}_{N-1,j}}{2h}\right)+$$
$$+\frac{D_N}{a^2\cos\varphi_j}\left(A_{j+1/2}\frac{n^{t+1}_{N,j+1}-n^{t+1}_{N,j}}{\Delta\varphi^2}-A_{j-1/2}\frac{n^{t+1}_{N,j}-n^{t+1}_{N,j-1}}{\Delta\varphi^2}\right)-\frac{u_j}{2a\cos\varphi_j}\left(\frac{B_{j+1}n^{t+1}_{N,j+1}-B_{j-1}n^{t+1}_{N,j-1}}{2\Delta\varphi}\right)$$

Поток F_j задается формулой $F_j=u_{N+1/2}\cdot\sin^2 I_j\cdot f(500+h/2,\varphi)+D_{N+1/2}\sin^2 I_j\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(500+h/2,\varphi)$
В этом случае C-норма ошибки численного решения уже не 7000, а 300000 (0_o).