

I. Уравнение, решаемое на первом шаге:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin^2 I \left( \frac{\partial n_i}{\partial z} + \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n_i \right) - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left( \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n_i \right) \right] + [P - kn_i]$$

Во всех случаях используем для диффузионного слагаемого схему, получаемую применением формулы центральной разности дважды, а для потокового слагаемого  $\frac{\partial}{\partial z}(un)$  центральную разность. Вычисление  $u_\varphi$  ведётся по формуле

$$u_\varphi \approx -\frac{1}{a} \cos I \sin I \frac{2}{n_{i,j+1}^t + n_{i,j-1}^t} \begin{cases} \frac{n_{i,j+1}^t + n_{i,j}^t}{\Delta \varphi}, \sin I \geq 0 \\ \frac{n_{i,j}^t + n_{i,j-1}^t}{\Delta \varphi}, \sin I \leq 0. \end{cases}$$

Полная схема для уравнения на первом шаге:

$$\begin{aligned} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = & P - kn_{i,j}^{t+1} + \left[ \left( D_{i+1/2} \frac{n_{i+1,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} \right) + \left( \frac{u_{i+1} n_{i+1,j}^{t+1} - u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) + \right. \\ & \left. + \left( \frac{u_{\varphi(i+1/2)} + |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h} n_{i,j}^{t+1} + \frac{u_{\varphi(i+1/2)} - |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h} n_{i+1,j}^{t+1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i-1,j}^{t+1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i,j}^{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

На верхней границе учитывается равенство нулю полного потока: в результате имеем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = & + \left[ -D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} - \left( \frac{u_i n_{i,j}^{t+1} + u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) + \right. \\ & \left. + \left( -\frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i-1,j}^{t+1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i,j}^{t+1} \right) \right] \end{aligned}$$

На нижней границе  $n_{i,j}^{t+1} = P/k$ .

На граничных точках  $\varphi = \pm 89,5^\circ$  коэффициент  $\sin I$  перед смешанной производной мал. Для того, чтобы избавиться от необходимости использовать при подсчете  $u_\varphi$  значения с предыдущего временного шага, находящиеся вне рассматриваемой расчетной области, в этих граничных точках сетки из уравнения системы исключены слагаемые со смешанной производной:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = P - kn_{i,j}^{t+1} + \left[ \left( D_{i+1/2} \frac{n_{i+1,j}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i-1,j}^{t+1}}{h^2} \right) + \left( \frac{u_{i+1} n_{i+1,j}^{t+1} - u_{i-1} n_{i-1,j}^{t+1}}{2h} \right) \right]$$

II. Уравнение, решаемое на втором шаге расщепления:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{D}{a} \cdot (\cos^2 I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial \varphi} - D \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial z} - u \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot n \right]$$

Здесь  $u = D \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right)$  — эффективная скорость из первого шага,  $I = \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)$ .

В качестве начальных условий выступает решение уравнения с первого шага расщепления. Введём две функции:

$$A(\varphi) = \cos \varphi \cdot \cos^2(\arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)) = \frac{\cos \varphi}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi} \text{ и } B(\varphi) = \cos \varphi \cdot \sin(2 \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)) = \frac{4 \sin \varphi}{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

С помощью этих функций задачу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{D}{a^2} A(\varphi) \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{D}{2a} B(\varphi) \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{u}{2a} B(\varphi) n \right]$$

Для полного уравнения используем следующую схему:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[ \frac{D}{a^2} \left( A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2}) \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} \right) - \right.$$

$$-\frac{u}{2a} \left( \frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1} - B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi} \right) - MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1} \Big]$$

Здесь  $MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}$  — аппроксимация смешанной производной  $MIX_{\varphi,z}(n) = \frac{-1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{D}{2a} u_z n \right)$ , где введено обозначение  $u_z = B(\varphi) \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} = B(\varphi) \frac{\partial \ln n}{\partial z}$ . При этом значения  $n$  для вычисления  $u_z$  берутся с предыдущего временного шага. Аналогично первому шагу,

$$u_z \approx B(\varphi) \frac{2}{n_{i+1,j}^t + n_{i-1,j}^t} \begin{cases} \frac{n_{i+1,j}^t + n_{i,j}^t}{h}, B(\varphi) \geq 0 \\ \frac{n_{i,j}^t + n_{i-1,j}^t}{h}, B(\varphi) \leq 0. \end{cases}$$

После вычисления  $u_z$  в узлах  $(i, j)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i, j-1)$  в зависимости от знака произведения  $\cos \varphi \cdot u_{z(i,j)}$  аппроксимируется смешанная производная :

$$MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j} \approx \begin{cases} \frac{u_{z(i,j+1)}n_{i,j+1}^{t+1} - u_{z(i,j)}n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi}, (-u_{z(i,j)} \cos \varphi) \geq 0 \\ \frac{u_{z(i,j)}n_{i,j}^{t+1} - u_{z(i,j-1)}n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi}, (-u_{z(i,j)} \cos \varphi) \leq 0. \end{cases}$$

При  $i = 1$  ( $z = 100$  км) также ставим граничное условие Дирихле — на нижней границе по  $z$  решение совпадает с полученным на первом шаге.

На верхней границе требуется граничное условие для определения  $u_z$ .

Поток на границе  $z = z_{ub}$ :

$$\frac{D}{a^2} A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{N,j+1} - n_{N,j}}{h} - \frac{u}{2a} \frac{B(\varphi_{j+1})n_{N,j+1} + B(\varphi_j)n_{N,j}}{2\Delta\varphi} - \\ - \frac{D}{2a} \left( \frac{u_{z(j+1/2)} + |u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi} n_{i,j}^{t+1} + \frac{u_{z(j+1/2)} - |u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi} n_{i,j+1}^{t+1} \right) = F_y \approx 0$$

С помощью условия равенства нулю потока на границе  $z = 500$  км получаем, что при решении линейной системы во втором шаге расщепления сохраняются значения при  $z = 500$  км с первого шага расщепления, т. е. в рамках решения уравнения второго шага расщепления имеет место граничное условие Дирихле на этой границе: равенство результату с первого шага.

При  $j = 1$  ( $\varphi = -89,5^\circ$ ) и  $j = N_\varphi$  ( $\varphi = +89,5^\circ$ ) используем следующее граничное условие: в точках  $(i, j + 1/2)$  на северном полюсе и  $(i, j - 1/2)$  на южном функции  $A(\varphi)$  и  $B(\varphi)$  имеют нули третьего и второго порядка соответственно, что позволяет занулить на этих слоях по  $j$  те слагаемые, в которых множители  $A$  и  $B$  берутся на полюсах.

Это означает, что при  $j = 1$  используется аппроксимация

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[ \frac{D}{a^2} \left( A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} \right) - \frac{u}{2a} \left( \frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1} + B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}}{2\Delta\varphi} \right) - MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1} \right]$$

Аналогично, на северном полюсе при  $j = N_\varphi$ :

$$\frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} = \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[ \frac{D}{a^2} \left( -A(\varphi_{j-1/2}) \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi^2} \right) + \frac{u}{2a} \left( \frac{B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1} + B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi} \right) - MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1} \right]$$

Аппроксимации смешанных производных  $MIX_{\varphi,z}(n)_{i,j}^{t+1}$  в околополюсных точках такие же, как и внутри расчетной области, за исключением единственного отличия: на северном полюсе  $u_{z(i,j-1)}$  полагается равным нулю, а на южном, при  $j = N_\varphi$ , соответственно,  $u_{z(i,j+1)} = 0$ .

Результаты расчетов показывают, что для устойчивого счёта при 80 узлах по высоте и 180 узлах по широте ( $h = 5$  км,  $\varphi = 1^\circ$ ) требуется брать шаг по времени  $\tau < 160$  с.

**Дополнение.** Исследуем асимптотическое поведение функций  $A(\varphi)$  и  $B(\varphi)$  вблизи полюсов (при  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ ).

Имеют место следующие разложения при  $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ :

$$A(\varphi) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

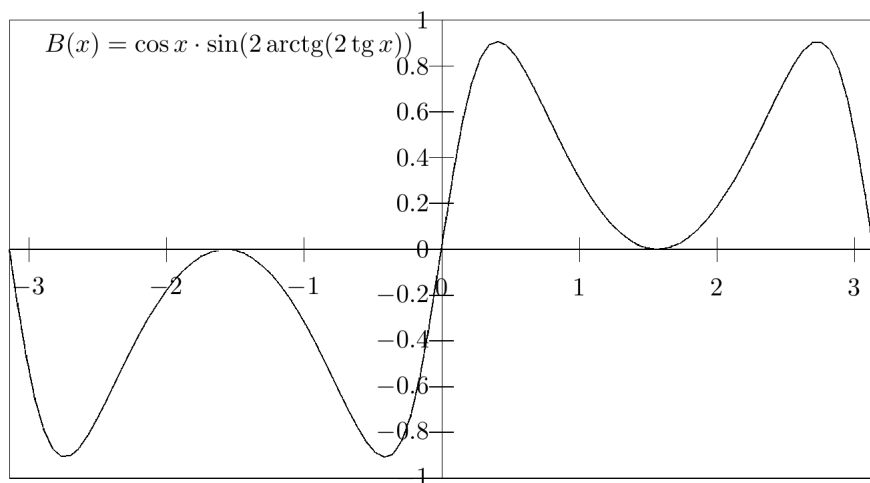
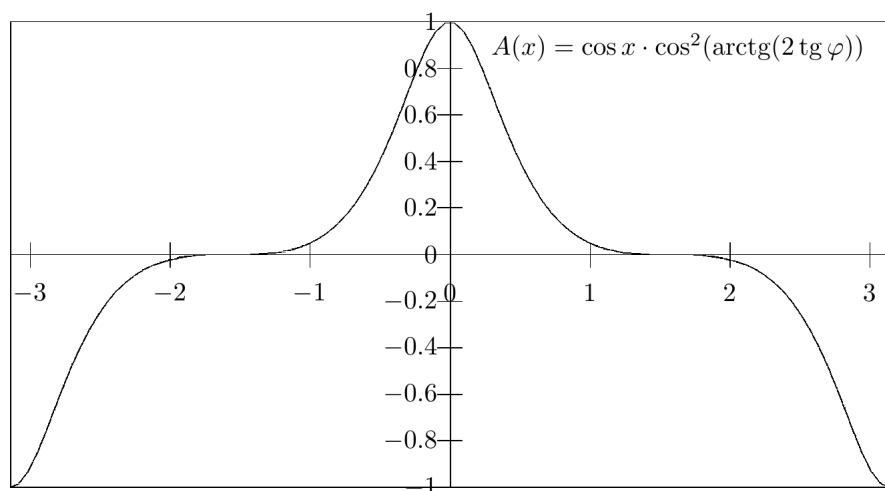
$$B(\varphi) = 1 \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Соответственно, при  $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ :

$$A(\varphi) = \frac{1}{4} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

$$B(\varphi) = -1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Графики функций  $A$  и  $B$  приведены ниже:



Обе функции в точке  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  касаются оси абсцисс — имеют нули по крайней мере второго порядка, поэтому особенность в уравнении устранимая.