

На первом шаге расщепления решается уравнение

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \left(\frac{\partial n_i}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n_i \right) - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left(\frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n_i \right) \right] + [P - kn_i]$$

Рассмотрим следующие варианты разностных схем для этого уравнения. Во всех случаях используем для диффузионного слагаемого схему, получаемую применением формулы центральной разности дважды, а для потокового слагаемого $\frac{\partial}{\partial z}(un)$ центральную разность. Различия рассматриваемых схем — в аппроксимации слагаемого со смешанной производной. В схемах вычисление u_φ ведётся либо по формуле с логарифмом

$$u_\varphi = \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} \approx \frac{\ln \frac{n_{i,j+1}}{n_{i,j-1}}}{2\Delta\varphi},$$

либо с помощью дроби:

$$u_\varphi \approx \frac{2}{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}} \frac{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}.$$

Отметим также следующее: эксперимент показал что в процессе вычисления величина n никогда не достигает в точности нулевого значения, поэтому вопрос об асимптотической формуле для u_φ в нулях n не ставится. Тем не менее, в случаях возникновения осцилляций в процессе вычисления численные значения n иногда меняют знак. Ввиду этого обстоятельства формула для аппроксимации u_φ с помощью дроби представляется более удобной — она позволяет исследовать и такие схемы.

Схема 1. Схема с центральными разностями: используем для смешанной производной центральную разность в уравнении и в граничном условии. В результате получим стационарное решение, в котором, тем не менее, имеются сильные осцилляции вдоль изменения широты. Период осцилляции соответствует мелкости шага сетки (при дроблении сетки частота осцилляции увеличивается).

Схема:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_i = D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \frac{(u_{i+1} + u_{\varphi(i+1)})n_{i+1} - (u_{i-1} + u_{\varphi(i-1)})n_{i-1}}{2h}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2} \frac{n_{N+1} - n_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N}{2h} = \frac{F_{ub}}{h} = 0$$

Схема 2. Единственное отличие этой схемы от схемы 1 — в способе аппроксимации и вычисления самой величины u_φ : используется формула без логарифмов $u_\varphi \approx \frac{2}{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}} \frac{n_{i,j+1} + n_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}$. Эксперименты показали, что результаты вычислений слабо зависят от способа этой аппроксимации. Далее применяется формула с дробью, поскольку при возникновении нефизических численных отрицательных значений n логарифм вычислить невозможно, а дробь при этом определена. Расчеты показали наличие сильных биений и в данной схеме.

Схема 3. (Фактически данная схема аппроксимирует не $\frac{\partial}{\partial z}(u_\varphi n)$, а $u_\varphi \frac{\partial}{\partial z} n$.)

Запишем несогласованную схему: в уравнении используем для смешанной производной направленную разность, а в граничном условии — соответствующее условие для центральной разности.

В этой схеме в направленной разности u_φ везде берется в среднем узле i .

Схема:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_i &= D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \\ &\quad + \frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \\ &\quad + \frac{|u_{\varphi(i)}| + u_{\varphi(i)}}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h} + \frac{|u_{\varphi(i)}| - u_{\varphi(i)}}{2} \cdot \frac{n_i - n_{i-1}}{h} \end{aligned}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2} \frac{n_{N+1} - n_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N}{2h} = \frac{F_{ub}}{h} = 0$$

Схема 4. (Фактически данная схема аппроксимирует не $\frac{\partial}{\partial z}(u_{\varphi}n)$, а $u_{\varphi} \frac{\partial}{\partial z}n$.)

Наконец, используем формулу направленной разности и в уравнении, и в граничном условии. Выясним также аппроксимацию верхнего граничного условия в такой схеме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_i &= D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \\ &\quad + \frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \\ &\quad + \frac{|u_{\varphi(i)}| + u_{\varphi(i)}}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h} + \frac{|u_{\varphi(i)}| - u_{\varphi(i)}}{2} \cdot \frac{n_i - n_{i-1}}{h} \end{aligned}$$

Рассматриваемая схема неконсервативна. Для аппроксимации верхнего граничного условия выделим подобие функции потока в схеме:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_i &= \left(D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} + \frac{u_{i+1}n_{i+1} + u_i n_i}{2h} + \frac{|u_{\varphi(i)}|}{2} \frac{n_{i+1} + n_i}{h} + \frac{u_{\varphi(i)}}{2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h} \right) - \\ &\quad - \left(D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i n_i + u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \frac{|u_{\varphi(i)}|}{2} \frac{n_i + n_{i-1}}{h} + \frac{u_{\varphi(i)}}{2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h} \right) \end{aligned}$$

Теперь аппроксимируем граничное условие следующим образом:

$$D_{N+1/2} \frac{n_{N+1} - n_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{|u_{\varphi(N)}|}{2} \frac{n_{N+1} + n_N}{h} + \frac{u_{\varphi(N)}}{2} \frac{n_{N+1} - n_N}{h} = \frac{F_{ub}}{h} = 0$$

Схема 5. (Фактически данная схема аппроксимирует не $\frac{\partial}{\partial z}(u_{\varphi}n)$, а $u_{\varphi} \frac{\partial}{\partial z}n$.)

Подкорректируем схему из предыдущего пункта: будем брать перед направленной разностью $\frac{n_{i+1} - n_i}{h}$ скорость u_{φ} в полущелом узле $i + 1/2$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_i &= D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \\ &\quad + \frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \\ &\quad + \frac{|u_{\varphi(i+1/2)}| + u_{\varphi(i+1/2)}}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h} + \frac{|u_{\varphi(i-1/2)}| - u_{\varphi(i-1/2)}}{2} \cdot \frac{n_i - n_{i-1}}{h} \end{aligned}$$

Такая схема также неконсервативна. Граничное условие оставим из схемы 4.

Схема 6. Используем схему Куранта-Изаксона-Риис (КИР) для консервативной аппроксимации. Схему запишем исходя из аппроксимации потока для слагаемого $\frac{\partial}{\partial z}(u_{\varphi}n)$ вида

$$\frac{1}{2}(u_{\varphi(i)}n_i + u_{\varphi(i+1)}n_{i+1}) - \frac{1}{2}|u_{\varphi(i+1/2)}|(n_i - n_{i+1}).$$

Схема имеет вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_i &= \left(D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} + \frac{u_{i+1}n_{i+1} + u_i n_i}{2h} + \frac{1}{2h}(u_{\varphi(i+1)}n_{i+1} + u_{\varphi(i)}n_i) - \frac{1}{2}|u_{\varphi(i+1/2)}| \frac{n_i - n_{i+1}}{h} \right) - \\ &\quad - \left(D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i n_i + u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \frac{1}{2h}(u_{\varphi(i)}n_i + u_{\varphi(i-1)}n_{i-1}) - \frac{1}{2}|u_{\varphi(i-1/2)}| \frac{n_{i-1} - n_i}{h} \right) \end{aligned}$$

Верхнее граничное условие:

$$D_{N+1/2} \frac{n_{N+1} - n_N}{h^2} + \frac{u_{N+1}n_{N+1} + u_N n_N}{2h} + \frac{1}{2h}(u_{\varphi(N+1)}n_{N+1} + u_{\varphi(N)}n_N) - \frac{1}{2h}|u_{\varphi(N+1/2)}|(n_N - n_{N+1}) = \frac{F_{ub}}{h} = 0$$

Схема 7.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i &= D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \\ &\quad + \frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \\ &\quad + \frac{u_{\varphi(i+1/2)} + |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h} n_i + \frac{u_{\varphi(i+1/2)} - |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h} n_{i+1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_{i-1} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h} n_i \end{aligned}$$

Далее идут неопробованные схемы

Схема 8. Формула для аппроксимации потока:

$$\Phi_{i+1/2} = \begin{cases} u_{\varphi(i)}n_i, u_{\varphi(i+1/2)} > 0 \\ u_{\varphi(i+1)}n_{i+1}, u_{\varphi(i+1/2)} \leq 0 \end{cases}$$

Проблема в этой схеме потенциально может быть в тех узлах, в которых $u_{\varphi(i+1/2)}$ и $u_{\varphi(i-1/2)}$ разных знаков. Тогда разность потоков будет нулём.

Схема 7.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right)_i &= D_{i+1/2} \frac{n_{i+1} - n_i}{h^2} - D_{i-1/2} \frac{n_i - n_{i-1}}{h^2} + \\ &\quad + \frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{2h} + \\ &\quad + \frac{1}{h} \left(\frac{|u_{\varphi(i+1/2)}| + u_{\varphi(i+1/2)}}{2} \cdot n_{i+1/2} - \frac{|u_{\varphi(i-1/2)}| + u_{\varphi(i-1/2)}}{2} \cdot n_{i-1/2} \right) \end{aligned}$$