

Уравнение, решаемое на втором шаге расщепления:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a} \cdot (\cos^2 I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial \varphi} - D \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot \frac{\partial n}{\partial z} - u \cdot (\sin I \cos I \cos \varphi) \cdot n \right]$$

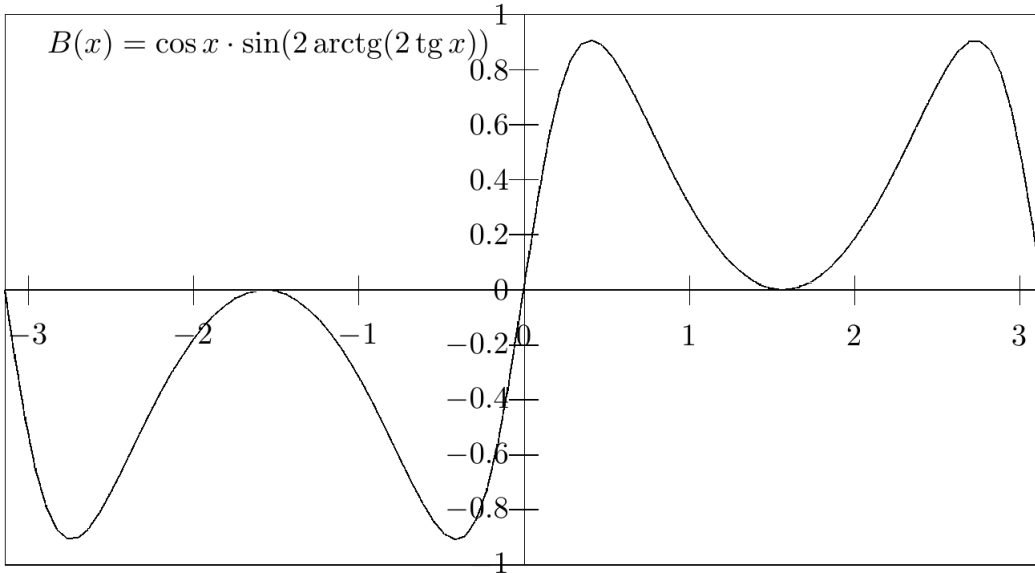
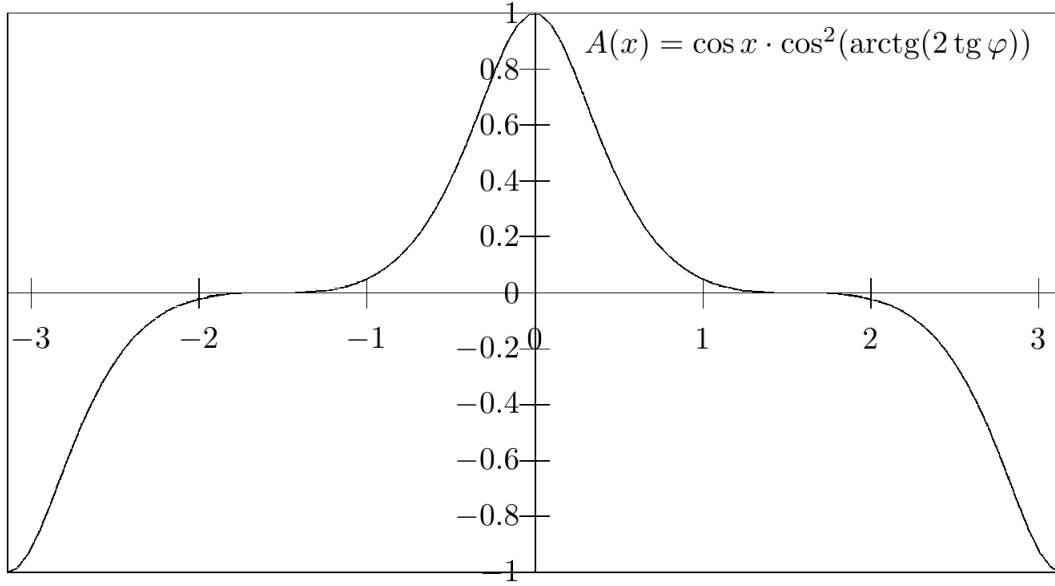
Здесь $u = D \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right)$ — эффективная скорость из первого шага, $I = \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)$.

На первом этапе решаем задачу без смешанной производной. В качестве начальных условий выступает решение уравнения с первого шага расщепления. Введём функции $A(\varphi) = \cos \varphi \cdot \cos^2(\arctg(2 \operatorname{tg} \varphi))$ и $B(\varphi) = \cos \varphi \cdot \sin(2 \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi))$. С помощью этих функций задачу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{D}{a^2} A(\varphi) \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{D}{2a} B(\varphi) \frac{\partial n}{\partial z} - \frac{u}{2a} B(\varphi) n \right]$$

Исследуем асимптотическое поведение слагаемых вблизи полюсов (при $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$).

Графики функций A и B приведены ниже:



Обе функции в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$ касаются оси абсцисс — имеют нули по крайней мере второго порядка, поэтому особенность в уравнении устранимая.

Имеют место следующие разложения при $\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = -\frac{1}{4} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^3 - \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^5 + o \left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^6 \right)$$

$$B(\varphi) = 1 \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Соответственно, при $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{4} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{16} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

$$B(\varphi) = -1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Обозначим $\varphi - \frac{\pi}{2} = x$. При $x \rightarrow 0$ заметим, что:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(A(\varphi) \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right) &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{A}{\cos \varphi} \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} \approx \frac{1}{x - \frac{x^3}{6}} \left(-\frac{1}{4} \cdot 2x^2 \right) \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \frac{x^2}{1 - \frac{x^2}{6}} \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} \approx \\ &\approx -\frac{1}{2} x \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} x^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial n}{\partial \varphi} - \frac{1}{4} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right)^2 \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} \\ \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(B(\varphi) \frac{\partial n}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial B}{\partial \varphi} \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{B}{\cos \varphi} \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi \partial z} \approx 2 \frac{\partial n}{\partial z} + \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi \partial z} \\ \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (B(\varphi)n) &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial B}{\partial \varphi} n + \frac{B}{\cos \varphi} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \approx 2n + \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\partial n}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

Для полного уравнения используем следующую схему:

$$\begin{aligned} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j}^t}{\tau} &= \frac{1}{\cos \varphi_j} \left[\frac{D}{a^2} \left(A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2}) \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta \varphi^2} \right) - \frac{u}{2a} \left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1} - B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta \varphi} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{D}{2a} \left(\frac{|u_z| + u_z}{2} \frac{n_{i,j+1}^{t+1} - n_{i,j}^{t+1}}{\Delta \varphi} + \frac{|u_z| - u_z}{2} \frac{n_{i,j}^{t+1} - n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta \varphi} \right) \right] \end{aligned}$$

(Консервативность?..)

Здесь введено обозначение $u_z = \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} = \frac{\partial \ln n}{\partial z}$. При этом значения n для вычисления u_z берутся с предыдущего временного шага.

При $j = 1$ ($\varphi = -90^\circ$) и $j = N_\varphi$ ($\varphi = +90^\circ$) используем граничные условия Дирихле — равенство распределения на полюсах дневному распределению одномерной задаче в z -проекции без учета широтной зависимости.

При $i = 1$ ($z = 100$ км) также ставим граничное условие Дирихле — на нижней границе по z решение совпадает с P/k , полученным на первом шаге.

На верхней границе требуется граничное условие для определения u_z .

Поток на границе $z = z_{ub}$:

$$\frac{D}{a^2} A(\varphi_{j+1/2}) \frac{n_{N,j+1} - n_{N,j}}{h} - \frac{u}{2a} \frac{B(\varphi_{j+1})n_{N,j+1} + B(\varphi_j)n_{N,j}}{2\Delta \varphi} - \frac{D}{2a} \left(\frac{|u_z|}{2} \frac{n_{N,j+1} + n_{N,j}}{\Delta \varphi} + \frac{u_z}{2} \frac{n_{N,j+1} - n_{N,j}}{\Delta \varphi} \right) = F_y$$