

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра вычислительных технологий и моделирования
в геофизике и биоматематике

Динамическое моделирование земной ионосферы

Выпускная квалификационная работа
(бакалаврская работа)

Направление подготовки: 03.03.01 Прикладные математика и физика

Выполнил:

Студент 371 группы _____ Останин Павел Антонович

Научный руководитель:

канд. физ.-мат. наук _____ Кулямин Дмитрий Вячеславович

Москва 2017

Содержание

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Введение | 2 |
| 2 | Модель ионосферы | 3 |
| 2.1 | Вывод используемых уравнений | 3 |
| 2.2 | Внешние параметры уравнения | 7 |
| 2.3 | Основное уравнение в сферической системе координат (в приближении тонкого сферического слоя) | 10 |
| 2.4 | Свойства дифференциальной задачи | 13 |
| 3 | Метод решения | 14 |
| 3.1 | Требования к разностным схемам | 14 |
| 3.2 | Расщепление по физическим процессам и геометрическим переменным | 15 |
| 3.3 | Разностные схемы для одномерного уравнения | 17 |
| 3.4 | Исследование разностных схем | 19 |
| 3.5 | Квазидвумерная постановка | 22 |
| 4 | Результаты численных экспериментов | 24 |
| 4.1 | Воспроизведение дневного вертикального профиля электронной концентрации | 24 |
| 4.2 | Чувствительности ко внешним параметрам уравнения | 26 |
| 4.3 | Сравнение стационарных решений в различных постановках | 30 |
| 4.4 | Моделирование суточного хода в одномерной модели | 35 |
| 4.5 | Суточный ход с учётом широтной зависимости | 36 |
| 5 | Заключение | 40 |
| | Список использованных источников | 41 |

1 Введение

Представленная работа посвящена решению проблемы описания механизмов формирования, изменчивости и прогноза глобального состояния Земной ионосферы на основе численного моделирования среднеклиматических характеристик F-слоя с особым вниманием к разработке эффективных численных методов и алгоритмов их реализации. Данная работа является частью реализуемого в данное время в ИВМ РАН направления исследований по моделированию глобального состояния верхней атмосферы Земли и направлена на разработку и развитие согласованной глобальной численной модели ионосферы и термосферы высокого уровня, в том числе с дальнейшим созданием системы усвоения данных наблюдений. Таким образом, одной из ключевых особенностей данной работы является согласование методологии разработки моделирования ионосферы с уже созданными в ИВМ РАН моделями нейтральной термосферы и нижних слоев атмосферы [1, 2]. Актуальность данной задачи обусловлена повышенным в последние годы практическим интересом к исследованию и прогнозированию космической погоды, что связано с особой ролью состояния ионосферы для систем глобальной радиосвязи, спутниковых систем, а также для космической отрасли в целом. Состояние системы термосфера-ионосфера определяет как характеристики движения низкоорбитальных спутников и космических аппаратов, так и условия для распространения радиосигналов, обеспечивающих бесперебойную работу систем дальней радиосвязи, радиолокации, а также навигационных систем глобального спутникового позиционирования. На сегодняшний день существует разорванность между традиционными полупэмпирическими подходами в исследованиях верхней атмосферы и успешно применяемыми для прогноза погоды и изменений климата высокотехнологичными методами. Таким образом, задача создания по существу новой методологии моделирования и прогноза глобального состояния и изменчивости системы ионосфера-термосфера является крайне актуальной.

В работе рассматривается решение задачи по построению динамической трёхмерной модели Земной ионосферы (для 100-500 км) с детальным анализом решаемых уравнений, согласованных с уже разработанной моделью нейтральной термосферы ИВМ РАН [1], с целью дальнейшего включения этой модели в качестве вычислительного блока в совместную модель верх-

ней атмосферы. При разработке первой версии модели ионосферы используются традиционные приближения (рассмотрение только F слоя, динамическое преобладание амбиполярной диффузии, одноионная постановка, дипольное магнитное поле Земли, приближение совпадения географических и магнитных полюсов и др.) [3].

В главе 2 сформулировано основное исследуемое уравнение, описывающее эволюцию распределения электронной концентрации в F -слое ионосферы, а также описаны используемые аналитические формулы для входящих в это уравнение параметров. После этого осуществлён переход от компактной векторной записи к сферическим координатам в приближении тонкого сферического слоя. Исследованы также и свойства решения дифференциальной задачи, определяющие дальнейший выбор разностных схем для численного моделирования. В главе 3 для численного решения применён метод расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным, а затем для первого шага метода расщепления исследованы различные разностные схемы, отвечающие полученным свойствам дифференциальной задачи. В главе 4 представлены численные эксперименты по воспроизведению вертикальных профилей электронной плотности в различных постановках, чувствительности решений к изменениям внешних параметров, входящих в уравнения, а также моделированию суточного хода.

2 Модель ионосферы

2.1 Вывод используемых уравнений

Ионосфера — это ионизованная часть верхней атмосферы, приблизительно от 60 км до 1000 км, целиком окружающая Землю. Основным источником плазмы — фотоионизация нейтральных молекул под действием солнечного ультрафиолета и рентгеновского излучения. Ионы вступают в химические реакции с нейтральными молекулами, рекомбинируют с электронами и диффундируют в другие высоты или перемещаются нейтральным ветром. Но диффузия и перенос подвержены влиянию собственного магнитного поля Земли.

В рассматриваемом приближении моделируется эволюция концентрации n_e

электронов во времени и пространстве в верхней ионосфере (в F-слое).

Основным используемым уравнением по существу является уравнение неразрывности для электронной концентрации, выражающее закон сохранения массы: $\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{u}) = P_1 - kn_e$, где u — средняя скорость диффузии. Слагаемые в правой части выражают наличие процессов образования (прямой ионизации при столкновении O и O^+) и потерь (процессов рекомбинации). Считаем $n_e = n_i = n(O^+)$, т. е. рассматриваем только электроны и ионы кислорода (в F-слое больше всего ионов O^+), а плазму считаем квазинейтральной. Последнее условие позволяет записать уравнение неразрывности для n_i в том же виде, что и для электронной концентрации.

За перенос в верхней атмосфере в рассматриваемой модели отвечает амбиполярная диффузия. Её суть заключается в следующем: масса электрона гораздо меньше, чем масса иона кислорода, вследствие чего электроны и ионы разделяются пространственно. Вследствие этого разделяются и заряды, и возникает добавочное электрическое поле. Это поле препятствует дальнейшему разделению слоёв. После его создания электроны и ионы движутся как единый газ.

Для вывода уравнения амбиполярной диффузии используем общее уравнение движения в следующей форме:

$$nm \frac{D\vec{u}}{Dt} + \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \hat{\tau} - ne(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) + nm[-\vec{G} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})] =$$

$$= \sum_t nm\nu_t(\vec{u}_t - \vec{u}) + \vec{f}(\vec{q})$$

В этом уравнении $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}; \vec{\nabla})$ — полная производная; u — скорость диффузии; n — концентрация электронов; m — масса электрона; $\hat{\tau}$ — тензор напряжений; \vec{G} — ускорение свободного падения; в квадратных скобках помимо \vec{G} стоят слагаемые, связанные с неинерциальностью системы отсчета, вызванной вращением Земли с угловой скоростью $\vec{\Omega}$; в правой части сумма отвечает за столкновения электронов с различными частицами (разные типы частиц нумеруются индексом t), а последнее слагаемое зависит от тепловых потоков, которые в частично ионизованной плазме малы и отбрасываются. Уравнение записано в системе координат, связанной с Землёй.

Далее используем т. н. диффузионную аппроксимацию: отбросим всю полную производную в силу её малости по сравнению с градиентом давления:

- $\frac{|nm(\vec{u}; \vec{\nabla})\vec{u}|}{|\vec{\nabla}p|} \approx \frac{nm u^2/L}{nkT} \approx \frac{u^2}{kT/m} = M^2$ — число Маха. При малых числах Маха (т. е. при дозвуковых течениях) первое слагаемое можно отбросить.
- $\frac{|nm\partial\vec{u}/\partial t|\vec{u}|}{|\vec{\nabla}p|} \approx \frac{L}{\tau} \frac{u}{kT/m} \approx M \frac{L/\tau}{\sqrt{kT/m}}$, где τ и L — характерное время процессов в плазме и характерный размер области, в которой находится рассматриваемая часть плазмы.

Для медленно меняющихся и дозвуковых потоков диффузионная аппроксимация применима.

Помимо квазинейтральности ($n_e = n_i$) предполагаем движение электронов с ионами единым целым: $n_e\vec{u}_e = n_i\vec{u}_i$. Отбросим также и слагаемые, связанные с неинерциальностью системы отсчета в предположении их малости в сравнении с силами тяжести и магнитными силами.

Как уже упоминалось выше, считаем, что имеются ионы всего одного вида — кислорода. Это справедливо в рассматриваемом F-слое (выше ≈ 130 км и до 1000 км).

Запишем в приведенных приближениях общее уравнение движения для электронов и ионов в проекциях на магнитные силовые линии (индекс \parallel указывает соответствующую проекцию):

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_{\parallel} p_i + (\vec{\nabla} \cdot \hat{\tau}_i)_{\parallel} + n_i e \vec{E}_{\parallel} - n_i m_i \vec{G}_{\parallel} = \\ \quad = n_i m_i \nu_{ie} (\vec{u}_e - \vec{u}_i)_{\parallel} + n_i m_i \nu_{in} (\vec{u}_n - \vec{u}_i)_{\parallel} \\ \vec{\nabla}_{\parallel} p_e + (\vec{\nabla} \cdot \hat{\tau}_e)_{\parallel} - n_e e \vec{E}_{\parallel} - n_e m_e \vec{G}_{\parallel} = \\ \quad = n_e m_e \nu_{ei} (\vec{u}_i - \vec{u}_e)_{\parallel} + n_e m_e \nu_{en} (\vec{u}_n - \vec{u}_e)_{\parallel} \end{cases}$$

Сложив эти уравнения и учтя, что $n_e = n_i$, $\vec{u}_e = \vec{u}_i$, $n_i m_i \nu_{ei} = n_e m_e \nu_{ei}$, получим уравнение, не содержащее электрического поля, возникшего вследствие разделения электронов и ионов по слоям:

$$\vec{\nabla}_{\parallel} (p_i + p_e) + (\vec{\nabla} \cdot (\hat{\tau}_i + \hat{\tau}_e))_{\parallel} - n_i (m_i + m_e) \vec{G}_{\parallel} = n_i (m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en}) (\vec{u}_n - \vec{u}_i)_{\parallel}$$

Теперь можно отбросить все слагаемые, содержащие массу электрона по сравнению с такими же слагаемыми, но уже с массой иона. После этого заменим давление $p_i = n_i k T_i$, $p_e = n_i k T_e$ и обозначим $T_p = \frac{1}{2}(T_e + T_i)$. Выразив из правой части векторную разность скоростей, получим закон амбиполярной диффузии, дающий характеристику средней скорости диффундирующих ионов:

$$\vec{u}_{i\parallel} = \vec{u}_{n\parallel} - \frac{2kT_p}{m_i \nu_{in}} \left(\frac{1}{n_i} \vec{\nabla}_{\parallel} n_i + \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{m_i \vec{G}_{\parallel}}{2kT_p} + \frac{(\vec{\nabla} \cdot \hat{\tau}_i)_{\parallel}}{2n_i k T_p} \right)$$

Обозначим $D = \frac{2kT_p}{m_i \nu_{in}}$ — коэффициент амбиполярной диффузии.

Теперь обратимся к компоненте скорости, ортогональной вектору \vec{B} . В соответствии с оценками, приведёнными в [3], будем считать, что в плоскости, ортогональной вектору \vec{B} главный процесс — дрейф, связанный с внешними полями (это справедливо ввиду сильной замагниченности плазмы). Тогда в проекции на плоскость, ортогональную \vec{B} , уравнение движения для ионов можно записать в форме

$$n_i e \vec{E}_{\perp} + n_i e [\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] + n_i m_i \nu_{in} \vec{u}_{i\perp} = 0$$

Домножим векторно на \vec{B} :

$$\begin{aligned} [e \vec{E}_{\perp} \times \vec{B}] + e [[\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] \times \vec{B}] + m_i \nu_{in} [\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow [e \vec{E}_{\perp} \times \vec{B}] - e B^2 \vec{u}_{i\perp} + e (\vec{u}_{i\perp} \cdot \vec{B}) \vec{B} + m_i \nu_{in} [\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] &= 0 \end{aligned}$$

Отметим также, что $\vec{E}_{\perp} \times \vec{B} = (\vec{E}_{\perp} + \vec{E}_{\parallel}) \times \vec{B} = \vec{E} \times \vec{B}$.

Учтём, что рассматривается компонента, ортогональная \vec{B} , поэтому скалярное произведение в третьем слагаемом равно нулю. Это позволяет выразить векторное произведение $[\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}]$:

$$[\vec{u}_{i\perp} \times \vec{B}] = \frac{e B^2}{m_i \nu_{in}} \vec{u}_{i\perp} - \frac{e [\vec{E} \times \vec{B}]}{m_i \nu_{in}}$$

Подставляем это уравнение в исходное уравнение движения, тем самым избавляясь от векторного произведения и получая векторное уравнение, из

которого можно явно выразить искомую скорость $\vec{u}_{i\perp}$:

$$e\vec{E}_{\perp} + \frac{e^2 B^2}{m_i \nu_{in}} \vec{u}_{i\perp} - \frac{e^2}{m_i \nu_{in}} [\vec{E} \times \vec{B}] + m_i \nu_{in} \vec{u}_{i\perp} = 0$$

Введем обозначение $\alpha = \frac{eB}{m_i \nu_{in}}$. Это отношение гирочастоты $\frac{eB}{m_i \nu_{in}}$ к частоте столкновений. Учтём далее, что $\alpha \gg 1$. В рассматриваемом уравнении

$$(1 + \alpha^2) \vec{u}_{i\perp} + \frac{\alpha \vec{E}_{\perp}}{B} - \frac{e^2}{m_i^2 \nu_{in}^2} [\vec{E} \times \vec{B}] = 0$$

можно положить $1 + \alpha^2 \approx \alpha^2$, а затем разделить на α^2 и пренебречь слагаемым порядка α^{-1} :

$$\alpha^2 \vec{u}_{i\perp} = \frac{e^2}{m_i^2 \nu_{in}^2} [\vec{E} \times \vec{B}] - \frac{e}{m_i \nu_{in}} \vec{E}_{\perp} \Rightarrow \vec{u}_{i\perp} = \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\vec{E}_{\perp}}{B} \approx \frac{[\vec{E} \times \vec{B}]}{B^2}.$$

После нахождения компонент \vec{u} , параллельной и ортогональной полю, из уравнения неразрывности окончательно получаем следующее векторное уравнение, описывающее искомую эволюцию рассматриваемой электронной концентрации:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & -\operatorname{div}(n_i \vec{u}_{n\parallel}) - \operatorname{div} \left(n_i \frac{1}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}] \right) + \\ & + \operatorname{div} \left(D \left[\vec{\nabla}_{\parallel} n_i + n_i \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \vec{g}_{\parallel} \right] \right) + [P - k_i n_i]. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

2.2 Внешние параметры уравнения

Входящие в уравнение в качестве внешних параметров функции фотоионизации, рекомбинации, температуры нейтралов, электронов и ионов, а также концентрации молекул N_2 , O_2 и O задаются аналитическими формулами. Для концентраций используем Больцмановское распределение по высоте:

$$n_{O_2, N_2, O}(z) = n_{O_2, N_2, O}(z_0) \cdot \exp \left(-\frac{M_{O_2, N_2, O} g}{R_0 T_n} (z - z_0) \right).$$

Концентрации на высоте $z_0 \approx 100$ км полагаем равными $n_{O_2} = 5,6 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$, $n_O = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$, $n_{N_2} = 5,2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Температуры вычисляем по аналитическим формулам

$$T(z) = T_\infty - (T_\infty - T_0) \exp \left(-\frac{g}{RT_\infty}(z - z_0) \right),$$

где $R = \frac{R_0}{M_{air}} \approx 287 \text{ Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$, R_0 — универсальная газовая постоянная. Константы T_∞ для разных составляющих приближённо считаем равными $T_{n\infty} = 800 \text{ К}$, $T_{i\infty} = 950 \text{ К}$, $T_{e\infty} = 2200 \text{ К}$.

Функции рекомбинации и фотоионизации (в дневное время) можно приближенно вычислять по следующим формулам:

$$P = 4 \cdot 10^{-7} \cdot n_O(z) [\text{с}^{-1}]$$

$$k = 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot n_{N_2}(z) + 2,1 \cdot 10^{-11} \cdot n_{O_2}(z) [\text{с}^{-1}]$$

При неизменных по времени функциях фотоионизации и рекомбинации P и k рассматриваемые уравнения имеют стационарное решение, отвечающее по существу состоянию системы в один определённый момент времени, а вертикальный профиль соответствует фиксированным широте и долготе. Для моделирования суточного изменения вертикального профиля добавим зависимость от времени в слагаемое P , отвечающее фотоионизации. Используем формулу

$$P(z, t) = \begin{cases} P_0(z) e^{\tau_0(z)(1 - \sec \chi)}, & |\chi| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & |\chi| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Здесь введены следующие обозначения: $P_0(z)$ — фотоионизация в дневное время, χ — зенитный угол Солнца (угол между направлением на Солнце и нормалью к земной поверхности), $\tau_0(z)$ — оптическая толщина, для вычисления которой используется формула

$$\begin{aligned} \tau_0(z) &= \sum_{i=N_2, O_2, O} \sigma_i^{abs} \left[\frac{R_0 T_n}{M_i g} n_i(z) \right] = \\ &= \frac{R_0 T_n}{g} \left(\sigma_{N_2}^{abs} \frac{n_{N_2}(z)}{M_{N_2}} + \sigma_{O_2}^{abs} \frac{n_{O_2}(z)}{M_{O_2}} + \sigma_O^{abs} \frac{n_O(z)}{M_O} \right). \end{aligned}$$

Константы σ_i^{abs} для трёх типов нейтральных молекул известны и равны соответственно $\sigma_{N_2}^{abs} = 1,5 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, $\sigma_{O_2}^{abs} = 2 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, $\sigma_O^{abs} = 1 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$. Характерные величины оптической толщины на различных высотах представлены в следующей таблице:

| | $z_1 = 100 \text{ км}$ | $z_2 = 300 \text{ км}$ | $z_3 = 500 \text{ км}$ |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|
| τ_0 | $4 \cdot 10^2$ | $3 \cdot 10^{-1}$ | $2 \cdot 10^{-4}$ |

В предложенной формуле для фотоионизации время в качестве параметра входит лишь в зенитный угол. Кусочное задание функции $P(z, t)$ связано с приближением отсутствия фотоионизации в ночное время (Солнце не заходит за горизонт лишь при зенитных углах, не превосходящих 90°).

Зависимость зенитного угла от времени даётся следующими формулами:

$$\cos \chi = \sin \varphi \cdot \sin \delta - \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos \omega t$$

Здесь ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта, а δ — склонение Солнца, тангенс которого определяется формулой

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} 23,5^\circ \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{d - 80}{365} \right),$$

где d — номер дня от начала года.

В рассматриваемое уравнение также входит вектор напряженности магнитного поля. В рассматриваемой постановке принимается дипольное приближение, в котором компоненты вектора напряженности магнитного поля выражаются через широту с помощью углов магнитного наклона $I \approx \arctg(2 \operatorname{tg} \varphi)$ и угла склонения D по формулам

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} B \cos I \sin D \\ B \cos I \cos D \\ -B \sin I \end{pmatrix}.$$

Кроме того, в приближении совпадения магнитных и географических полюсов $D \approx 0$, поэтому далее считается, что

$$\vec{B} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ B \cos I \\ -B \sin I \end{pmatrix}.$$

2.3 Основное уравнение в сферической системе координат (в приближении тонкого сферического слоя)

Перейдем от векторной записи уравнения неразрывности (2.1), описывающего динамику электронной плотности, к сферическим координатам (λ, φ, z) , где λ — долгота, $\lambda \in [0, 2\pi]$, φ — широта, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, z — высота, отсчитываемая от радиуса Земли a .

Используем приближение тонкого сферического слоя: для частных производных по x и y запишем формулы

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi},$$

в которых a считаем постоянным. Для дивергенции в сферических координатах используем

$$\operatorname{div}(n_i \vec{a}) = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (n_i a_x) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_i a_y \cos \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (n_i a_z).$$

Для векторного поля, стоящего под общим знаком дивергенции в правой части уравнения (2.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & -\operatorname{div}(n_i \vec{u}_{n\parallel}) - \operatorname{div} \left(n_i \frac{1}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}] \right) + \\ & + \operatorname{div} \left(D \left[\vec{\nabla}_{\parallel} n_i + n_i \frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \vec{g}_{\parallel} \right] \right) + [P - k_i n_i] \end{aligned}$$

введём следующие обозначения:

$$\vec{\alpha} = -\vec{u}_{\parallel} - \frac{1}{B^2} [\vec{E} \times \vec{B}]; \quad \vec{\beta} = \vec{\nabla}_{\parallel} n_i;$$

$$\vec{\gamma} = \left(\frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{m_i \vec{g}_{\parallel}}{2kT_p} \right) = \left(\frac{1}{T_p} \vec{\nabla}_{\parallel} T_p - \frac{1}{H} \frac{\vec{g}_{\parallel}}{g} \right).$$

К вектору $\vec{\alpha}$ отнесены компоненты, отвечающие переносу без диффузии, в вектор $\vec{\beta}$ вошли слагаемые с производными от n_i , а оставшийся вектор $\vec{\gamma}$ соответствует эффективной скорости при диффузии. Обозначим $DYZ(n_i) = \text{div}(D\vec{\beta})$, $Tr(n_i) = \text{div}(n_i\vec{\alpha})$, $DTr(n_i) = \text{div}(Dn_i\vec{\gamma})$. С учетом этих обозначений уравнение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= \text{div}(n_i\vec{\alpha} + D\vec{\beta} + Dn_i\vec{\gamma}) + [P - kn_i] = \\ &= DYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - kn_i]. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Запишем теперь введенные векторы $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ в компонентах и применим формулу для дивергенции в сферических координатах. Учтём, что компоненты вектора напряженности магнитного поля в дипольном приближении, а также в приближении совпадения магнитных и географических полюсов выражаются через широту с помощью угла магнитного наклона $I \approx \arctg(2 \tg \varphi)$ по формулам

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ B \cos I \\ -B \sin I \end{pmatrix}.$$

Это означает, что для некоторого вектора \vec{a} его составляющая вдоль магнитного поля

$$\vec{a}_{\parallel} = \left(\vec{a}, \frac{\vec{B}}{B} \right) \frac{\vec{B}}{B} = (a_y \cos I - a_z \sin I) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos I \\ -\sin I \end{pmatrix}.$$

Аналогично, для параллельной полю компоненты градиента некоторой скалярной функции f можем записать

$$\vec{\nabla}_{\parallel} f = \left(\vec{\nabla} f, \frac{\vec{B}}{B} \right) \frac{\vec{B}}{B} = \left(\frac{\partial f}{\partial y} \cos I - \frac{\partial f}{\partial z} \sin I \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \cos I \\ -\sin I \end{pmatrix}.$$

С учетом этих замечаний заключаем, что вектор α имеет компоненты

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_y \cos^2 I + u_z \sin I \cos I \\ u_y \cos I \sin I - u_z \sin^2 I \end{pmatrix} - \frac{1}{B} \begin{pmatrix} -E_y \sin I - E_z \cos I \\ E_x \sin I \\ E_x \cos I \end{pmatrix}.$$

Вектор $\vec{\beta}$ — параллельная полю составляющая градиента функции n_i , поэтому с учётом формул для $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$ запишем

$$\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial y} \cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos I \sin I \\ -\frac{\partial n_i}{\partial y} \cos I \sin I + \frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos I \sin I \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 I \end{pmatrix}$$

Оставшийся вектор $\vec{\gamma}$ — линейная комбинация градиента скалярной функции T_p и параллельной полю компоненты вектора $\vec{g} = (0, 0, -g)^T$:

$$\vec{\gamma} = \frac{1}{T_p} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial T_p}{\partial z} \cos I \sin I \\ -\frac{1}{a} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \frac{\partial T_p}{\partial z} \sin^2 I \end{pmatrix} - \frac{1}{H} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin I \cos I \\ -\sin^2 I \end{pmatrix}$$

Теперь с помощью записанной ранее формулы для дивергенции окончательно получаем уравнение $\frac{\partial n_i}{\partial t} = DYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - kn_i]$, где:

$$\begin{aligned} Tr(n_i) &= \text{div}(n_i \vec{\alpha}) = \frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (n_i \alpha_x) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (n_i \alpha_y \cos \varphi) \right] + \frac{\partial}{\partial z} (n_i \alpha_z) = \\ &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[n_i \frac{1}{B} (E_y \sin I - E_z \cos I) \right] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left[u_z \sin I \cos I - u_y \cos^2 I - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{E_x}{B} \sin I \right] n_i \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left[u_y \cos I \sin I - u_z \sin^2 I - \frac{E_x}{B} \cos I \right] n_i \right); \end{aligned}$$

$$DYZ(n_i) = \text{div}(D\vec{\beta}) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(Dn_i \cos \varphi \left[\frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos I \sin I \right] \right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z} \left(n_i \left[\frac{\partial n_i}{\partial z} \sin^2 I - \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos I \sin I \right] \right);$$

$$DTr(n_i) = \operatorname{div}(Dn_i \vec{\gamma}) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\left[\frac{1}{a} \frac{D}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos^2 I - \frac{D}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \cos I \sin I - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{D}{H} \sin I \cos I \right] n_i \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left[- \frac{1}{a} \frac{D}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} \cos I \sin I + \frac{D}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} \sin^2 I \right] n_i \right).$$

2.4 Свойства дифференциальной задачи

Полученное уравнение имеет ряд особенностей, которые необходимо учитывать при численном моделировании.

- Для дифференциальной задачи имеет место закон сохранения массы: интегрирование по некоторому объему обеих частей рассматриваемого уравнения и применение формулы Остроградского-Гаусса приводит к уравнению баланса:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n_i dV = \int_V (P - kn_i) dV + F(V, n_i),$$

где $F(V, n_i)$ — поток векторного поля, стоящего под общим знаком дивергенции в уравнении (2.2.1) через границу ∂V выбранного объема V . При подходящем выборе объема V в отсутствие источников и соответствующих граничных условиях полученное соотношение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n_i dV = 0.$$

- В силу своего физического смысла (как концентрации электронов) решение дифференциальной задачи неотрицательно. Это справедливо для дневного стационарного решения дифференциальной задачи: при вычислении выбираются положительные начальные условия. При моделировании суточного хода в качестве начальных условий также выбирается неотрицательное начальное условие — найденное дневное стационарное решение.

- Вблизи нижней границы влияние диффузионного слагаемого и переноса пренебрежимо малы по сравнению с процессами фотохимии. Напротив, на верхней части исследуемого высотного интервала преобладают диффузионные процессы, а P и k уже не играют роли. Важной особенностью рассматриваемой задачи является изменение входящих в уравнение коэффициентов D, P, k, u на рассматриваемом отрезке на несколько порядков. Характерные величины на нескольких высотах представлены в следующей таблице:

| | $z_1 = 200$ км | $z_2 = 300$ км | $z_3 = 500$ км |
|---|---------------------|---------------------|---------------------|
| $D, \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}$ | $3,1 \cdot 10^9$ | $3,4 \cdot 10^{10}$ | $4,2 \cdot 10^{12}$ |
| $k, \text{с}^{-1}$ | $5,2 \cdot 10^{-3}$ | $5,5 \cdot 10^{-5}$ | $1,3 \cdot 10^{-8}$ |
| $P, \text{см}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ | $1,5 \cdot 10^3$ | $1,2 \cdot 10^2$ | 1,3 |
| $u_{\text{эфф}}/D, \text{см}^{-1}$ | $4,8 \cdot 10^{-8}$ | $4,5 \cdot 10^{-8}$ | $3,6 \cdot 10^{-8}$ |

Как показано в [3], характерные времена различных физических процессов существенно различны, поэтому рассматриваемая задача жесткая.

3 Метод решения

3.1 Требования к разностным схемам

Учёт свойств дифференциальной задачи, перечисленных в предыдущем разделе, приводит к следующим требованиям к используемым разностным схемам:

- Для сохранения уравнения баланса при численном моделировании используются консервативные схемы.
- Решение дифференциальной задачи неотрицательно, поэтому от схемы требуется свойство монотонности (в смысле определения Годунова): если на каком-либо шаге $\vec{n}^j \geq 0$, то и на следующем шаге $\vec{n}^{j+1} \geq 0$.
- В силу жёсткости задачи используем неявные схемы по времени: во всех случаях производную по времени аппроксимируем по формуле

$\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau}$, а в правой части все слагаемые берём на следующем временном слое с номером $(j + 1)$.

3.2 Расщепление по физическим процессам и геометрическим переменным

Выберем последовательно в полученном трёхмерном уравнении ключевые процессы, формирующие поле скоростей. Затем реализуем модель поэтапно, учитывая каждый раз новые поправки и сравнивая новое решение с предыдущим.

Рассматриваем полученное уравнение в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DTr(n_i) + Tr(n_i) + DYZ(n_i) + [P - kn_i]$$

и используем метод расщепления: вводим шаг по времени τ , а затем на каждом шаге по времени решаем сначала разностную задачу

$$\frac{n^{j+1/3} - n^j}{\tau} = A_z n^{j+1/3} + [P - kn^{j+1/3}],$$

аппроксимирующую

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DTr(n_i) + [P - kn_i],$$

затем, взяв полученное решение в качестве начального условия, решаем

$$\frac{n^{j+2/3} - n^{j+1/3}}{\tau} = A_\varphi n^{j+2/3},$$

аппроксимирующую

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = Tr(n_i),$$

наконец, на третьем шаге решается разностная задача

$$\frac{n^{j+1} - n^{j+2/3}}{\tau} = A_\varphi n^{j+2/3}$$

для

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = DY Z(n_i)$$

с начальным условием — решением со второго шага. В записанных разностных уравнениях учтена жесткость задачи: все использованные схемы неявные.

В данной работе реализован численный алгоритм для первого шага метода расщепления: из трёх введённых слагаемых остаётся только первое: $DTr(n_i)$, а также P и kn_i . Несмотря на это, уже такая приближённая постановка имеет смысл в средних широтах и вблизи полюсов, при отсутствии возмущений — диффузионные и плазмохимические процессы в этих областях преобладают.

Решение рассматриваемой приближённой задачи, отвечающей первому шагу метода расщепления, проводится в несколько этапов. На первом этапе считается, что диффузия происходит только вдоль оси z . При этом получаем следующую одномерную задачу для электронной концентрации n :

$$\begin{cases} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + un \right) \\ n|_{z=100 \text{ km}} = \frac{P(z=100 \text{ km})}{k(z=100 \text{ km})} \\ \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + un \right) \Big|_{z=500 \text{ km}} = F = \text{const} \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Здесь введено обозначение $u = D \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{m_i g}{2kT_p} \right)$ — эффективная скорость.

Следующим этапом учтём широтную зависимость в уравнении. Простейший способ — замена коэффициента диффузии D на $D \sin^2 I$, где I — угол наклона магнитных силовых линий, $I \approx \arctg(2 \tg \varphi)$, φ — широта ($\varphi \in [-90^\circ; +90^\circ]$). При этом уравнение заменится на следующее:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sin^2 I \left(D \frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) \right] \quad (3.1.2)$$

В рассматриваемой постановке широта φ — внешний задаваемый параметр. При фиксированном φ уравнение, как и предыдущее, имеет стационарное решение.

Особенность данной постановки состоит в том, что на экваторе при $\varphi = 0$ уравнение вырождается: ненулевыми остаются только производная по времени в левой части и $P - kn$ в правой. Этот эффект не соответствует никакому физическому явлению, уравнение не описывает физические процессы на экваторе.

Более точный учёт широтной зависимости решения приводит к двумерной задаче, включающей диффузию вдоль оси z в проекции (со смешанной производной):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

3.3 Разностные схемы для одномерного уравнения

Перейдем к получению используемых разностных схем. Введём следующие обозначения для шагов по пространству:

$$h_i = z_{i+1} - z_i; \quad h_{i+1/2} = z_{i+1/2} - z_{i-1/2}.$$

В точке $z = z_i$ для слагаемого $\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z}$ в разностных схемах используется следующая аппроксимация, полученная двойным применением формулы центральной разности на отрезках $[z_{i-1}; z_i]$ и $[z_i; z_{i+1}]$:

$$\frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial n}{\partial z} \approx \frac{1}{h_{i+1/2}} \left(\frac{D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i)}{h_i} - \frac{D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})}{h_{i-1}} \right)$$

Для слагаемого $\frac{\partial}{\partial z}(nu)$, связанного с переносом, исследуем схему направленных разностей

$$\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_in_i}{h_i}, \quad (3.3.1)$$

а также схему центральных разностей

$$\frac{u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}. \quad (3.3.2)$$

Нижнее граничное условие (условие Дирихле) аппроксимируется точно, а на верхней границе условие постоянства потока может быть записано несколькими способами. Для данной одномерной задачи используем две различных аппроксимации этого условия:

- В первом случае поток $\frac{\partial n}{\partial z} + \frac{u_N}{D_N} \cdot n_N = F$ аппроксимируется с помощью центральных разностей по пространству, что соответствует схеме

$$n_N - n_{N-1} + u_N/D_N \cdot h_N \cdot n_N = F \cdot h_N \quad (3.3.3)$$

- Во втором случае для схемы центральных разностей запишем согласованную схему для верхнего граничного случая, получаемую с помощью интегрирования уравнения на N -ом шаге по пространству между двумя соседними полуцелыми узлами, а также учёта равенства потока на верхнем полуцелом узле заданной величине F :

$$h_{N+1/2} \frac{n^{j+1} - n^j}{\tau} = F - D_{N-1/2} \frac{n_N - n_{N-1}}{h_{N-1}} - \frac{1}{2}(u_{N-1}n_{N-1}^{j+1} + u_N n_N^{j+1}) \quad (3.3.4)$$

Соответственно, в численных экспериментах протестированы три различные разностные схемы:

- В схеме 1 потоковый член и граничное условие аппроксимируются с помощью направленных разностей;
- В схеме 2 только потоковый член в уравнении записывается с помощью центральных разностей, а граничное условие всё еще использует направленные разности;
- Наконец, схема 3 имеет согласованные граничное условие и схему, записанные с помощью центральных разностей.

Для одномерного уравнения (3.1.2) с учётом проекции на магнитную силовую линию (с помощью добавления множителя $\sin^2 I$) использованы те же разностные схемы, но с добавлением широты φ в качестве внешнего параметра.

3.4 Исследование разностных схем

Покажем, что в дискретном случае для рассматриваемых двух схем для одномерной постановки справедлив закон сохранения массы. Для схемы 1 (с аппроксимацией $\frac{\partial}{\partial z}(u \cdot n)$ с помощью направленной разности (3.3.1), описанной в предыдущем разделе) запишем:

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = (D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i) - D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})) \frac{1}{h^2} + (u_{i+1}n_{i+1} - u_i n_i) \frac{1}{h}.$$

Суммируя по всем узлам i , получим:

$$\sum_{i=1}^N \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = (D_{N+1/2}(n_{N+1} - n_N) - D_{1/2}(n_1 - n_0)) \frac{1}{h^2} + (u_{N+1}n_{N+1} - u_1 n_1) \frac{1}{h}.$$

Для подходящих граничных условий, обнуляющих правую часть, после домножения на τ , получим $\sum_{i=1}^N n_i^{j+1} = \sum_{i=1}^N n_i^j$, что и требовалось.

Аналогично для схемы 2 (с аппроксимацией $\frac{\partial}{\partial z}(u \cdot n)$ с помощью центральной разности (3.3.2)) получаем

$$\begin{aligned} \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} &= (D_{i+1/2}(n_{i+1} - n_i) - D_{i-1/2}(n_i - n_{i-1})) \frac{1}{h^2} + (u_{i+1}n_{i+1} - u_{i-1}n_{i-1}) \frac{1}{h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N \frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} &= (D_{N+1/2}(n_{N+1} - n_N) - D_{1/2}(n_1 - n_0)) \frac{1}{h^2} + (u_{N+1}n_N - u_1 n_1) \frac{1}{h}, \end{aligned}$$

откуда при подходящих краевых условиях следует такой же результат.

Отметим также согласованность аппроксимаций уравнения и граничного условия в схемах 1 и 3. Обе схемы можно записать в консервативной форме

$$\frac{n_i^{j+1} - n_i^j}{\tau} = \frac{F_{i+1/2} - F_{i-1/2}}{h},$$

где для схемы 1 с направленной разностью поток F равен

$$F_{i+1/2} = \frac{D_{i+1/2}(n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1})}{h} + u_{i+1}n_{i+1}^{j+1},$$

что согласовано с аппроксимацией верхнего граничного условия (3.3.3):

$$F = D_N \frac{n_N^{j+1} - n_{N-1}^{j+1}}{h} + u_N n_N^{j+1}.$$

Аналогично и для схемы 3 с центральной разностью: поток равен

$$F_{i+1/2} = \frac{D_{i+1/2}(n_{i+1}^{j+1} - n_i^{j+1})}{h} + \frac{1}{2}(u_{i+1}n_{i+1}^{j+1} + u_i n_i^{j+1}),$$

причем постановка верхнего граничного условия (3.3.4) соответствует этой аппроксимации:

$$\frac{n_N^{j+1} - n_N^j}{\tau} \cdot h = F - D_{N-1/2} \cdot \frac{n_N^{j+1} - n_{N-1}^{j+1}}{h} - \frac{1}{2}(u_{N-1}n_{N-1}^{j+1} + u_N n_N^{j+1}).$$

Докажем теперь монотонность по Годунову для первой схемы. Для монотонности необходимо и достаточно неотрицательности элементов матрицы S системы $\vec{n}^{j+1} = S\vec{n}^j + \tau S\vec{P}$, эквивалентной нашей разностной схеме. Перепишем схему в виде

$$\frac{\vec{n}^{j+1} - \vec{n}^j}{\tau} = \vec{P} - K\vec{n}^{j+1} + \frac{1}{h^2}A\vec{n}^{j+1} + \frac{1}{h}B\vec{n}^{j+1}.$$

Здесь $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_N)$.

Выпишем введенные матрицы A и B :

$$A = \begin{pmatrix} (-D_{1+1/2}-D_{1-1/2}) & D_{1+1/2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D_{2-1/2} & (-D_{2+1/2}-D_{2-1/2}) & D_{2+1/2} & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & D_{i-1/2} & (-D_{i+1/2}-D_{i-1/2}) & D_{i+1/2} & \dots & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$$B = \begin{pmatrix} -u_1 & u_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -u_2 & u_3 & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & \dots & -u_i & u_{i+1} & \dots & \dots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots & u_N \\ & & & & & -u_N \end{pmatrix}.$$

Первая и последняя строки зависят от краевых условий.

Заметим, что в матричной записи рассматриваемой неявной схемы

$$Q\vec{n}^{j+1} = \vec{n}^j + \tau\vec{P}$$

матрица Q трёхдиагональна, причем элементы на трёх её центральных диагоналях (по порядку их записи в строке) равны соответственно

$$q_{i,i-1} = -\frac{\tau}{h^2}D_{i-1/2};$$

$$q_{i,i} = 1 + \tau k_i + \frac{\tau}{h^2}D_{i+1/2} + \frac{\tau}{h^2}D_{i+1/2} + \frac{\tau}{h}u_i;$$

$$q_{i,i+1} = -\frac{\tau}{h^2}D_{i-1/2} - \frac{\tau}{h}u_{i+1}.$$

Разность $q_{i,i}$ и модулей внедиагональных элементов равна

$$q_{i,i} + q_{i,i-1} + q_{i,i+1} = 1 + \tau \left(k_i + \frac{u_i - u_{i+1}}{h} \right),$$

при достаточно малых значениях τ эта величина строго положительна.

Все диагональные элементы положительны, внедиагональные отрицательны и есть строгое диагональное преобладание, т. е. по определению перед нами М-матрица. С учётом этого замечания монотонность схемы следует из леммы:

Лемма 1. Пусть A — М-матрица. Тогда ее обратная матрица состоит из неотрицательных элементов.

Доказательство. Пусть D — диагональная матрица с диагональными элементами A . Тогда $A = D - B$, где в матрице B на диагонали стоят нули, а вне — неотрицательные элементы.

Возьмем обратную матрицу к A :

$$A^{-1} = (D - B)^{-1} = (E - D^{-1}B)^{-1}D^{-1}.$$

В матрице $D^{-1}B$ каждая строка B домножилась на обратный элемент к диагональному в соответствующей строке D . Но сумма модулей элементов в строке B строго меньше этого диагонального элемента, а значит, в матрице

$D^{-1}B$ сумма модулей элементов в любой строке меньше единицы. Поэтому $\|D^{-1}B\|_{\infty} < 1$, а значит, можно разложить $(E - D^{-1}B)^{-1}$ в сходящийся ряд Неймана:

$$(E - D^{-1}B)^{-1} = E + D^{-1}B + (D^{-1}B)^2 + (D^{-1}B)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (D^{-1}B)^k.$$

В записанном ряду каждая матрица имеет неотрицательные элементы, что и заканчивает доказательство. \square

3.5 Квазидвумерная постановка

Рассмотрим теперь разностные схемы для уравнения, описывающего диффузию вдоль оси Oz в проекции с добавлением смешанной производной (3.1.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} = P - kn + \frac{\partial}{\partial z} \left[D \sin^2 I \left(\frac{\partial n}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left(\frac{\partial n}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n \right) \right] \end{aligned}$$

Заменим $u = \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}$. Для использования уже имеющегося программного кода в применении уже к данной двумерной задаче используем следующую разностную схему: для смешанной производной $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \varphi}$ запишем

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial n}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(n \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} \right)$$

Введём обозначение

$$u_{\varphi} = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{\partial \ln n}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \varphi}.$$

Для рассматриваемого уравнения u_{φ} — это добавка к эффективной скорости, связанная со смешанной производной по φ .

Используем для численного решения нелинейную схему: будем вычислять решение, последовательно перемещаясь по временным слоям, причем u_{φ}

будем брать на основании данных с предыдущего временного слоя.

Для рассматриваемого уравнения в результате применяется та же разностная схема с центральными разностями, что и для одномерного уравнения, но возникает добавка, связанная с последним слагаемым. Для этого слагаемого использованы две различные разностные аппроксимации:

- Схема направленных разностей с учётом возможной знакопеременности эффективной скорости: $\frac{|u_\varphi| + u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i+1} - n_i}{h_i} + \frac{|u_\varphi| - u_\varphi}{2} \cdot \frac{n_{i-1} - n_i}{h_{i-1}};$
- Схема центральных разностей: $\frac{(u_\varphi)_{i+1}n_{i+1} - (u_\varphi)_{i-1}n_{i-1}}{h_{i-1} + h_{i+1}}.$

В обоих случаях концентрации n берутся со следующего временного слоя — схема неявная.

При этом сама эффективная скорость может быть вычислена двумя способами:

- Первый способ — применение формулы центральной разности к производной по φ для логарифма в формуле u_φ

$$u_\varphi \approx \frac{\ln n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) - \ln n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi};$$

- Второй способ — без привлечения логарифма использовать формулу

$$u_\varphi \approx \frac{2}{n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) + n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)} \cdot \frac{n_i^j(\varphi + \Delta\varphi) - n_i^j(\varphi - \Delta\varphi)}{2\Delta\varphi}.$$

Численные эксперименты показали, что обе формулы для u_φ дают один и тот же результат. Более того, на практике решение никогда не достигает чистого нуля, поэтому отдельные кусочные задания формул для u_φ при нулевых значениях n на предыдущем временном слое никак не отражаются на получаемом решении. Тем не менее, вторая формула более удобна для анализа асимптотического поведения u_φ при приближении n к нулю.

Для вычисления решения на следующем временном слое используются граничные условия как по z , так и по φ : на полюсах решение полагается тождественно равным стационарному решению одномерной задачи. Это позволяет сохранить непрерывность решения в зависимости от $\varphi \in [-90^\circ; 90^\circ]$.

На нижней границе по z ставится граничное условие типа Дирихле — решение совпадает с отношением $\frac{P(100 \text{ km})}{k(100 \text{ km})}$.

Верхнее граничное условие, как и ранее, — постоянство полного потока (с учётом добавки к эффективной скорости в виде u_φ). В разностной аппроксимации верхнего граничного условия используется центральная разность, в результате чего эта аппроксимация оказывается согласованной со схемой центральных разностей для рассматриваемого уравнения.

4 Результаты численных экспериментов

4.1 Воспроизведение дневного вертикального профиля электронной концентрации

Прежде всего обратимся к одномерной задаче для z -диффузии без проекций. Исследуемая задача при постоянных значениях P и k имеет не зависящее от времени решение, а численные эксперименты показали, что при итерациях по времени происходит установление решения во всех трёх схемах, указанных в разделе (3.3). Используемый шаг по пространству $h = 5$ км и по времени $\tau = 3$ мин обеспечивает сходимость к одной и той же кривой в схемах 1 и 3 с характерным временем установления порядка 4–5 часов (по прошествии этого времени первые несколько значащих цифр в решении уже не изменяются). Схема 2 также имеет сходимость к стационарному решению, но в отличие от оставшихся двух схем шаг по пространству $h = 5$ км слишком велик: для получения того же самого решения, что и в других двух схемах, необходимо уменьшить шаг хотя бы до $h = 0,2$ км.

Результаты расчетов (стационарные решения в зависимости от разного количества узлов по пространству) представлены на следующих графиках (по горизонтальной оси масштаб выбран логарифмическим). Соответственно, 80, 400 и 2000 узлов отвечают шагам по времени 5 км, 1 км и 0,2 км.

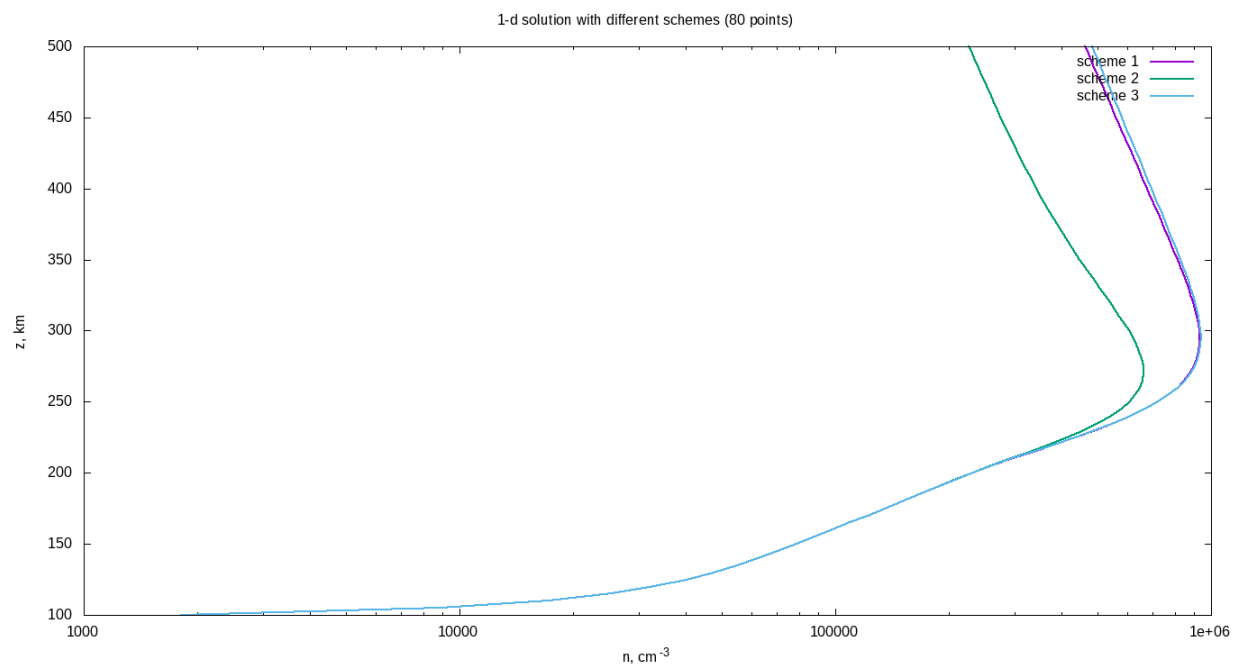


Рис. 1: Стационарные решения на 80 расчётных узлах.

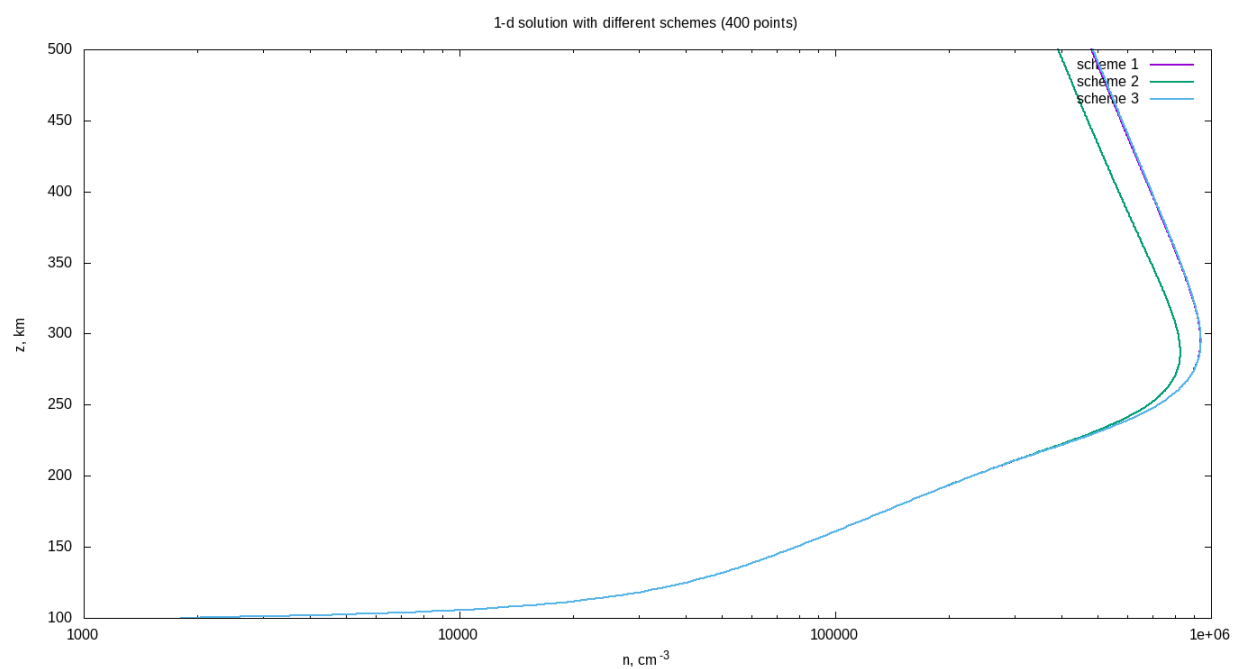


Рис. 2: Стационарные решения на 400 расчётных узлах.

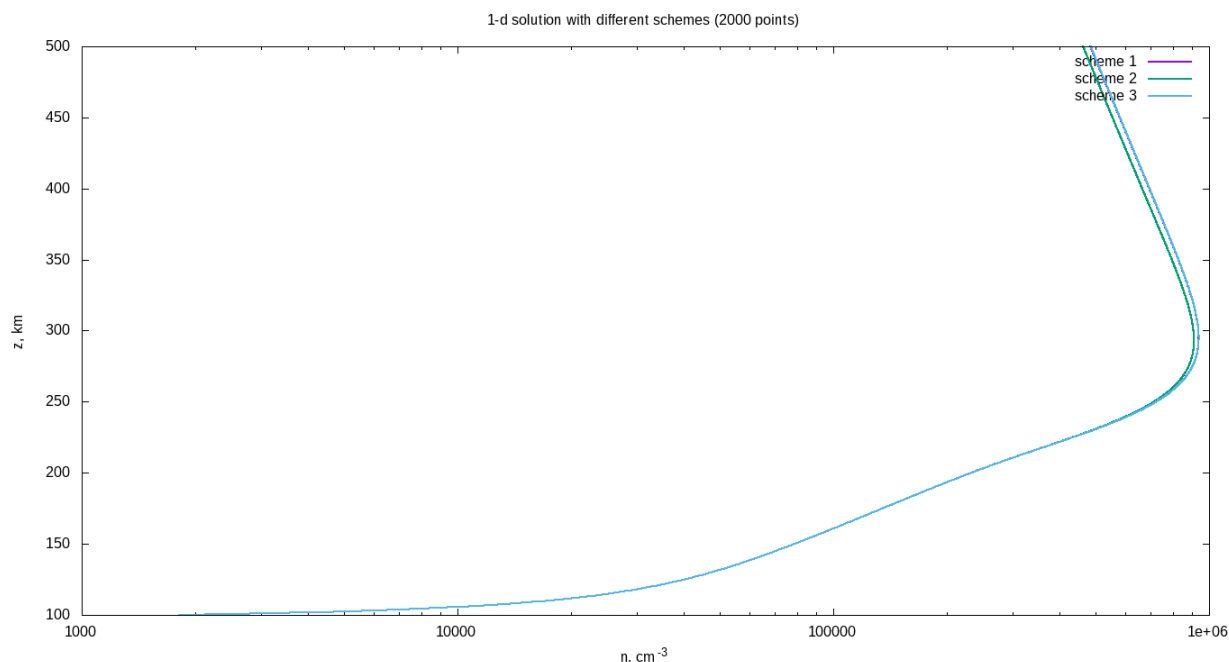


Рис. 3: Стационарные решения на 2000 расчётных узлах.

4.2 Чувствительности ко внешним параметрам уравнения

Полученное решение позволяет исследовать чувствительность к изменению различных входящих в уравнение внешних параметров: температурам, концентрациям нейтральных молекул, фотоионизации и рекомбинации. На следующих ниже графиках представлены результаты варьирования каждого из параметров в отдельности на 10% и 20% (в обе стороны). В каждом случае вычислено стационарное решение при изменённом параметре, на всех графиках средняя кривая отвечает невозмущенному уравнению.

Варьирование входящих в уравнение температур показывает, что наибольшую чувствительность решение имеет к температуре нейтральных молекул. Изменение концентрации нейтральных молекул — атомарного кислорода, молекулярного кислорода и азота показывает, что наибольшая чувствительность решения отвечает изменению концентрации атомарного кислорода, а чувствительности к изменению концентраций атомарного кислорода и азота приблизительно одинаковы.

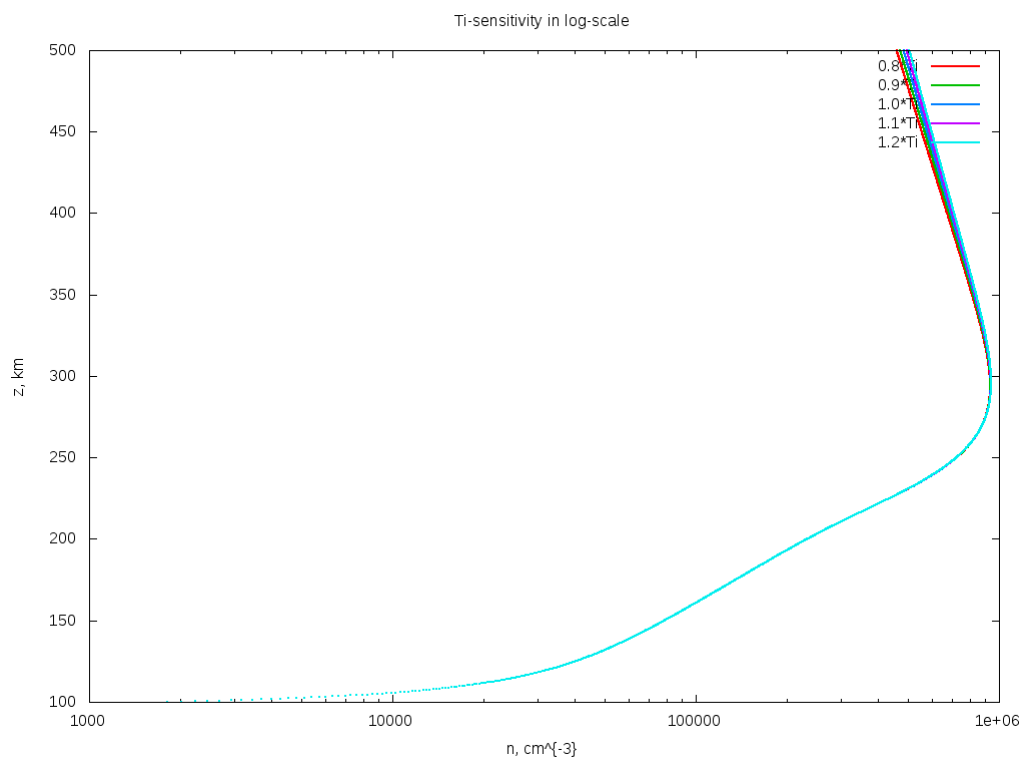


Рис. 4: Чувствительность к изменению температуры ионов.

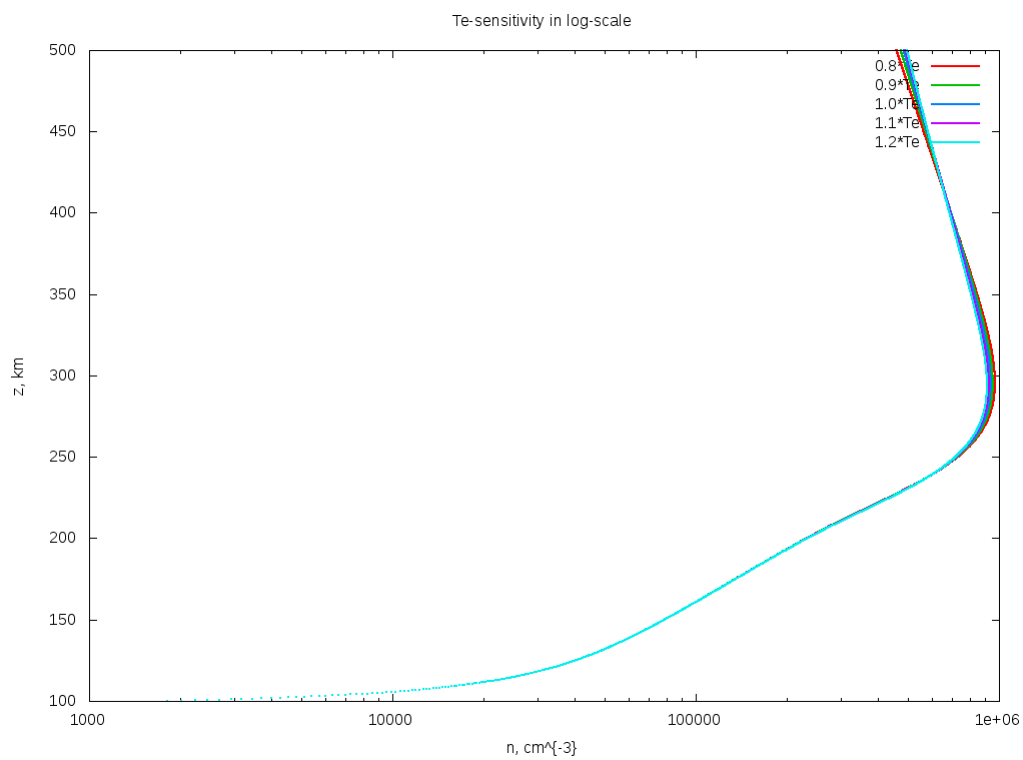


Рис. 5: Чувствительность к изменению температуры электронов.

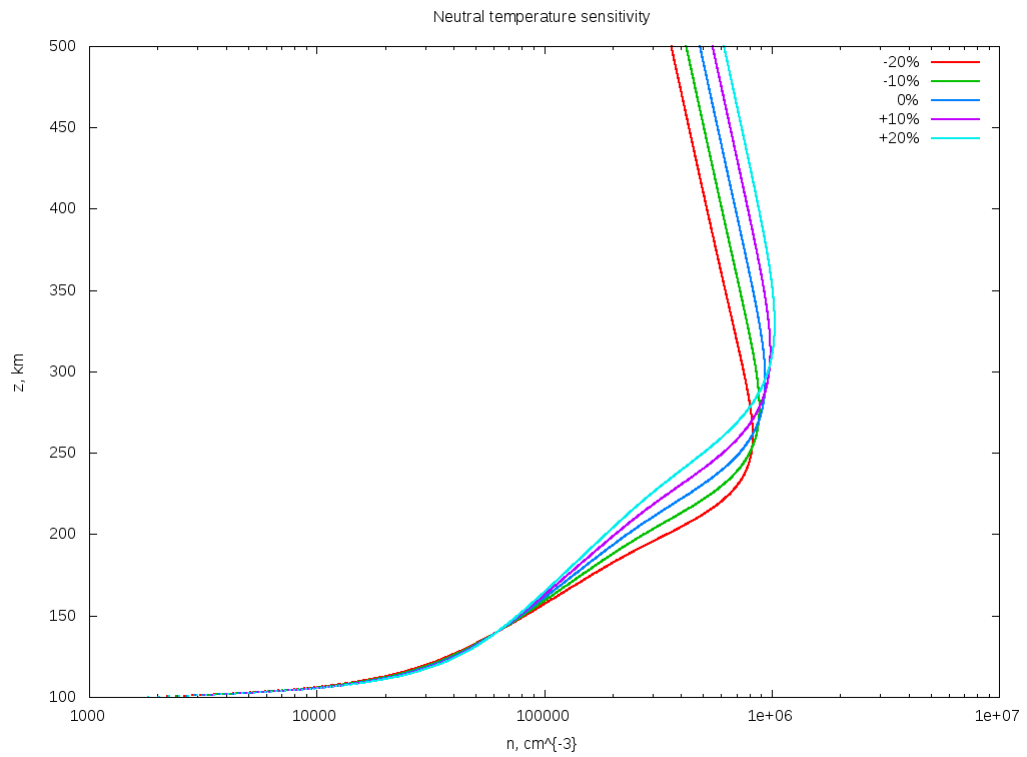


Рис. 6: Чувствительность к изменению температуры нейтральных молекул.

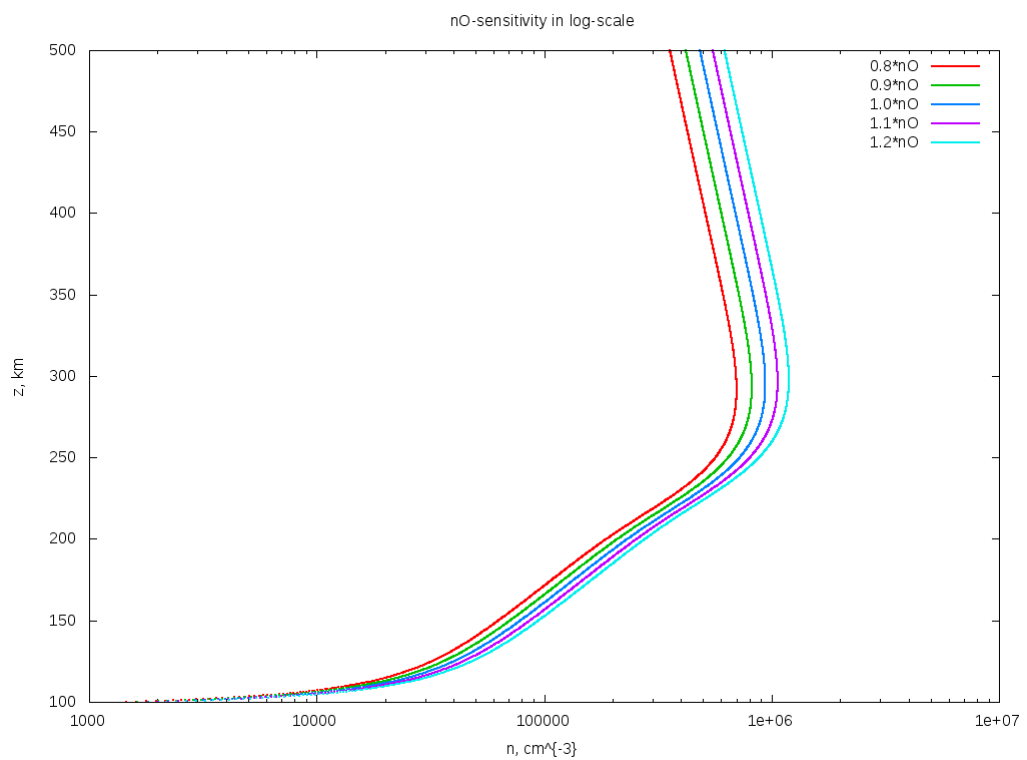


Рис. 7: Чувствительность к изменению концентрации атомарного кислорода.

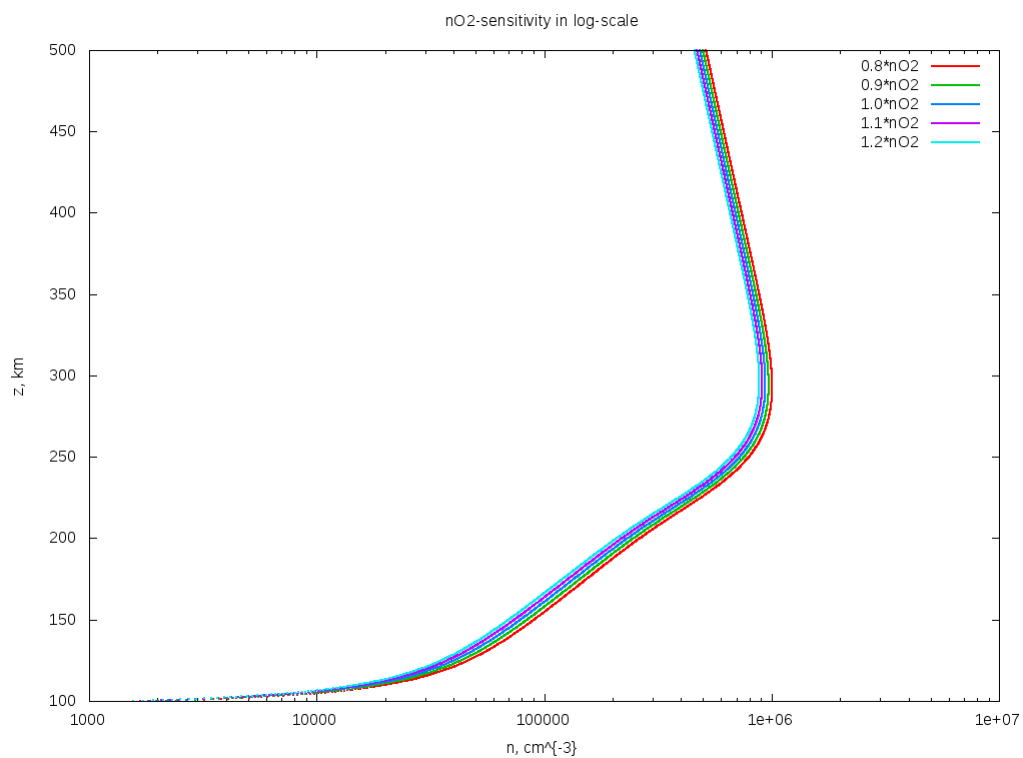


Рис. 8: Чувствительность к изменению концентрации молекулярного кислорода.

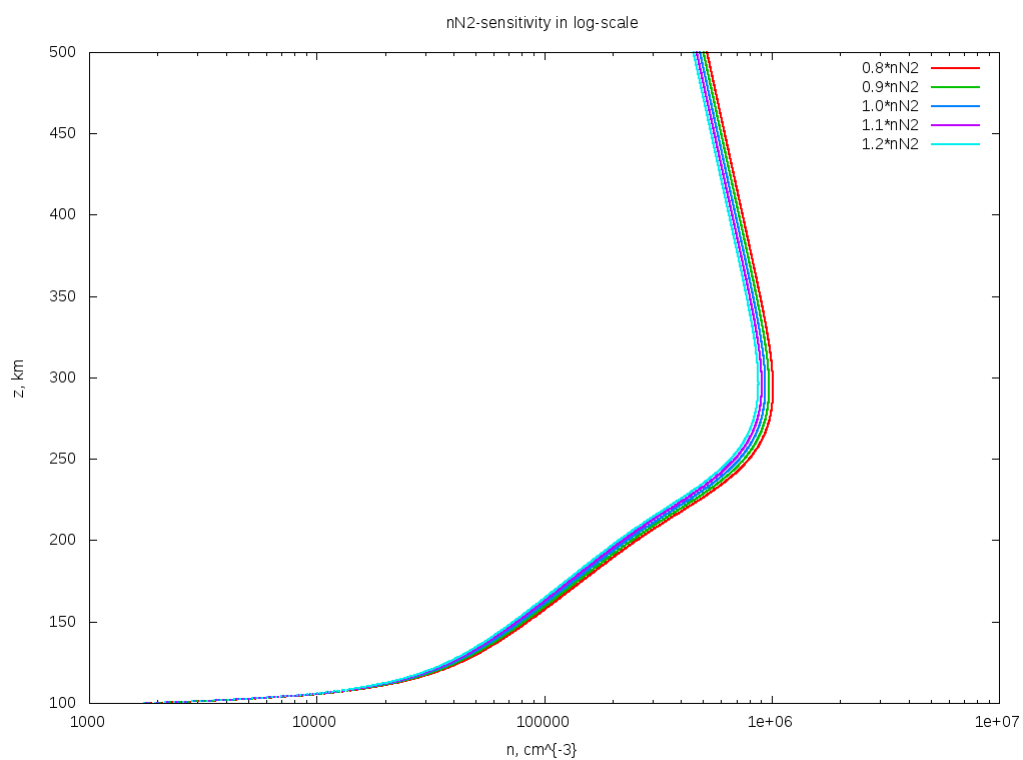


Рис. 9: Чувствительность к изменению концентрации азота.

4.3 Сравнение стационарных решений в различных постановках

Различные постановки используются для учёта наклонения магнитных силовых линий. Для исследования и сравнения качественных отличий полученных результатов установим не зависящую от времени ионизацию

$$P(z, t) \equiv P_0(z)$$

и изучим сходимости к стационарным решениям с одних и тех же начальных условий — вектора с компонентами, равными единице (такой вектор отвечает «почти нулевому» решению, при этом даёт возможность использовать схемы, применение которых к случаю нулевых значений затруднено, как, например, в случае логарифма для u_φ).

Полученные решения при широтах $\varphi = -88^\circ, -66^\circ, -50^\circ, -40^\circ, -30^\circ, -16^\circ, -2^\circ$, а также и решения при $\varphi = 0^\circ$, соответствующие положению на экваторе, представлены на следующих графиках:

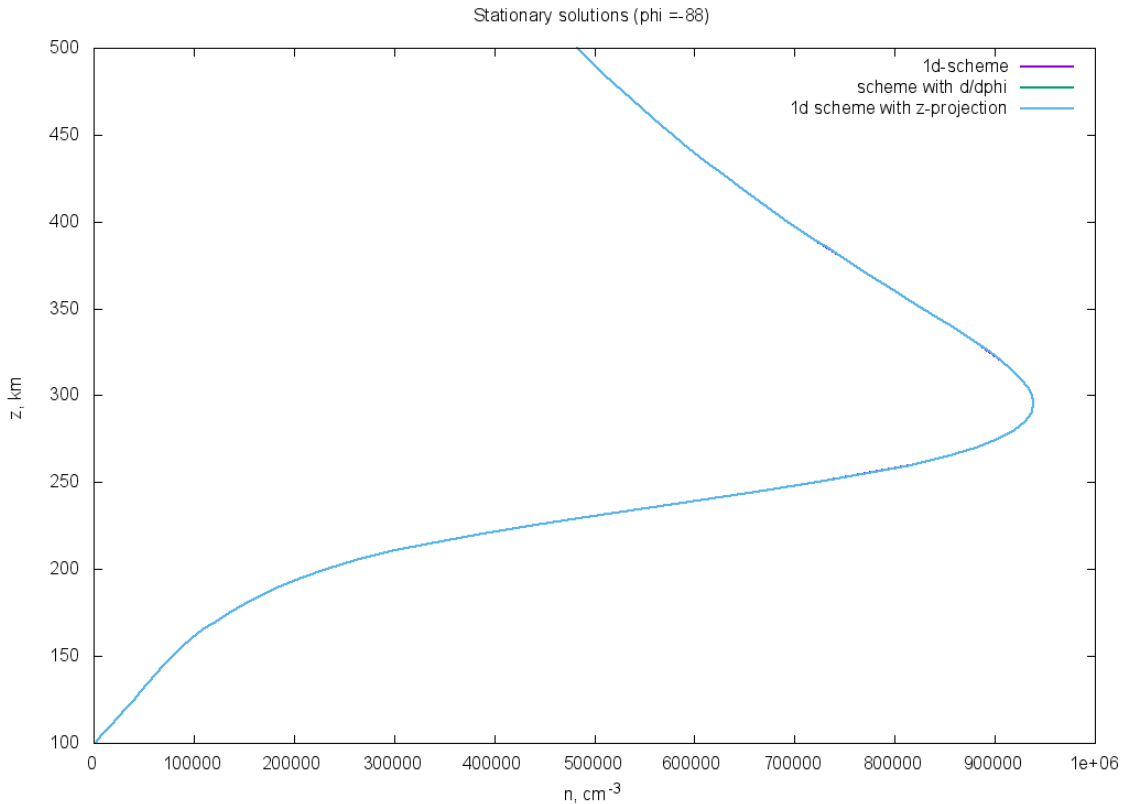


Рис. 10: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -88^\circ$.

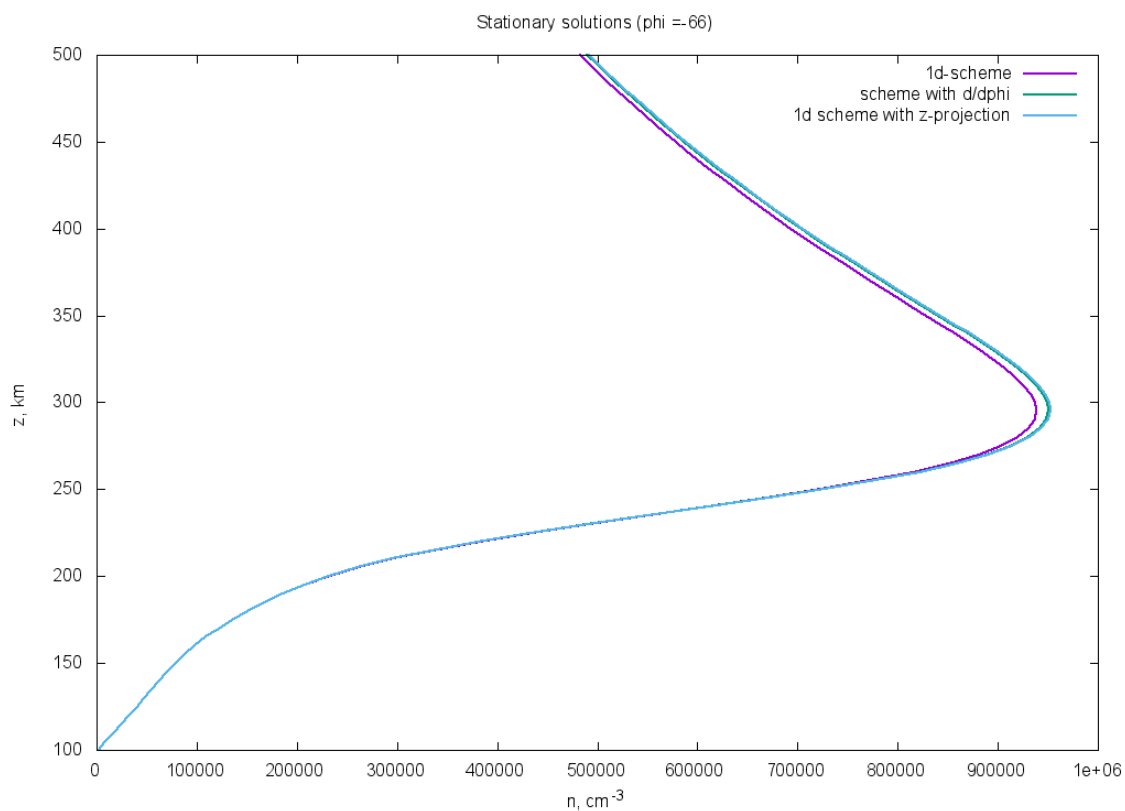


Рис. 11: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -66^\circ$.

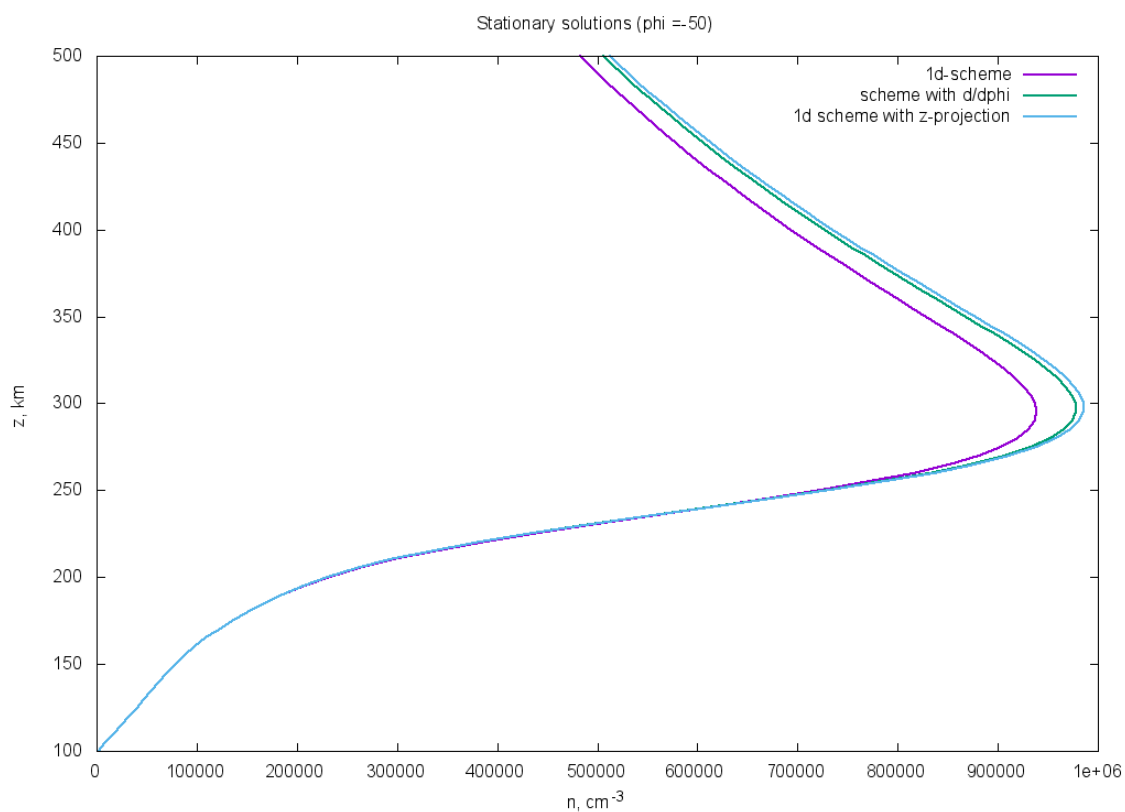


Рис. 12: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -50^\circ$.

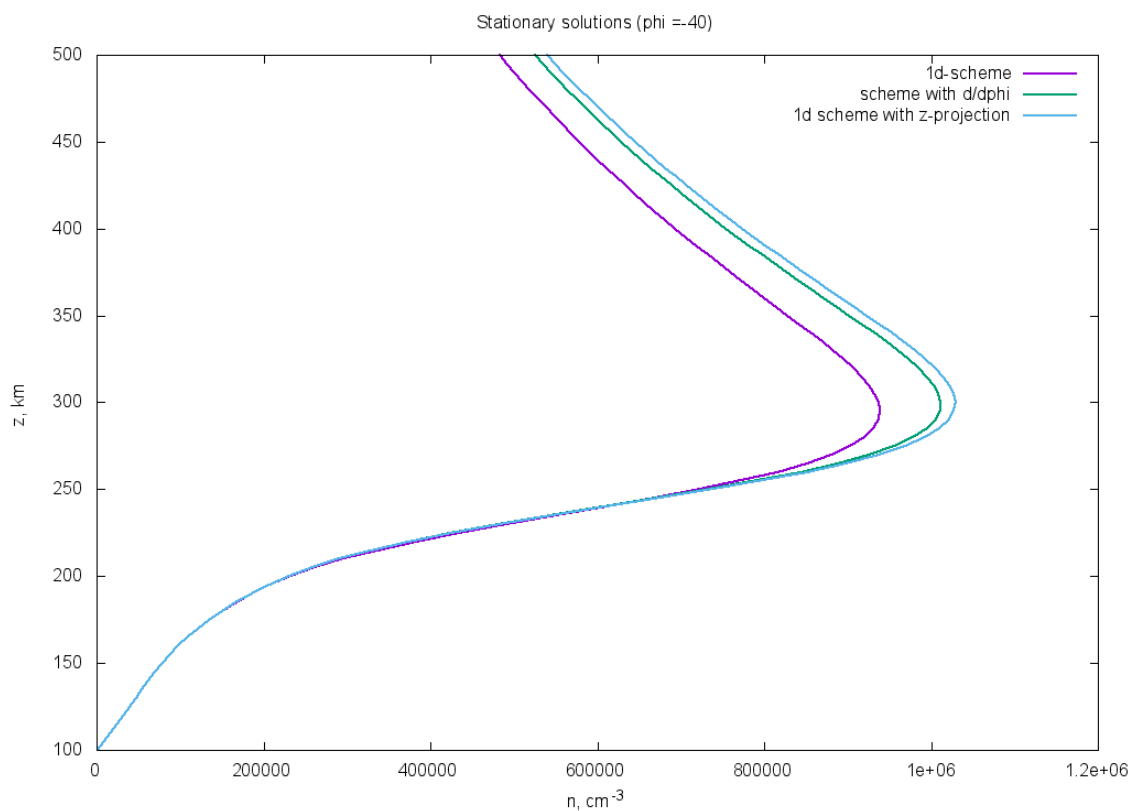


Рис. 13: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -40^\circ$.

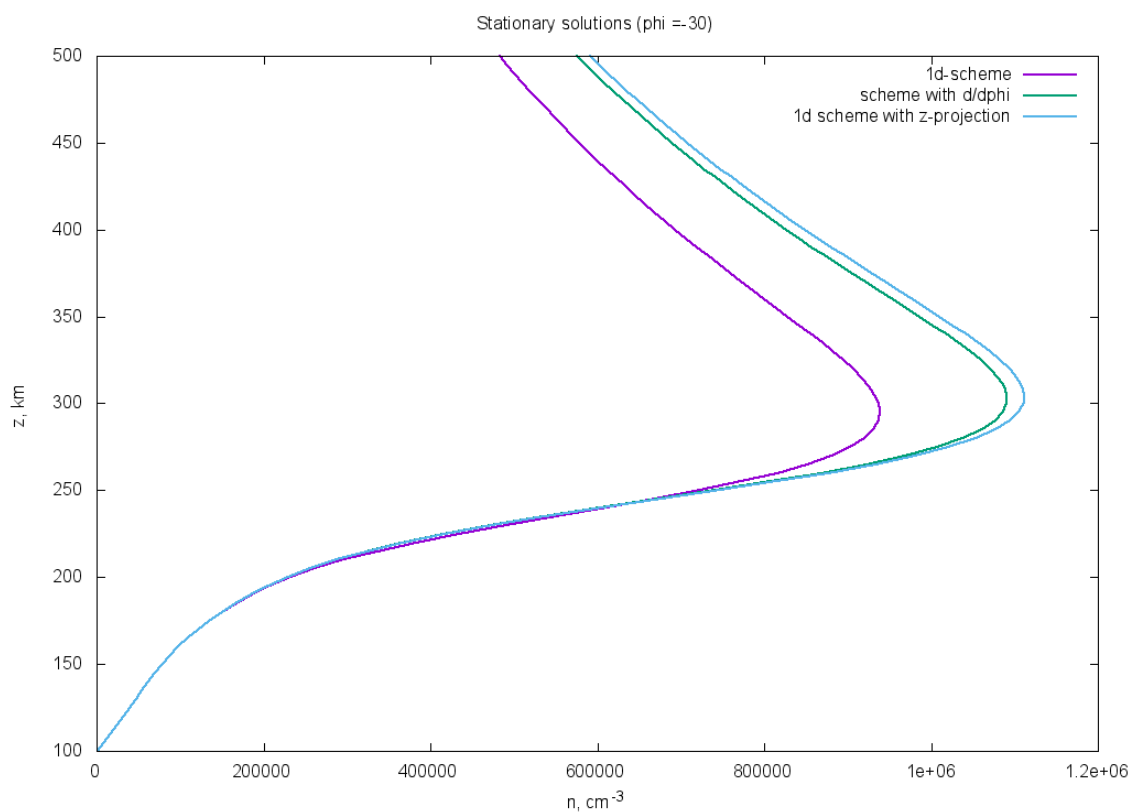


Рис. 14: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -30^\circ$.

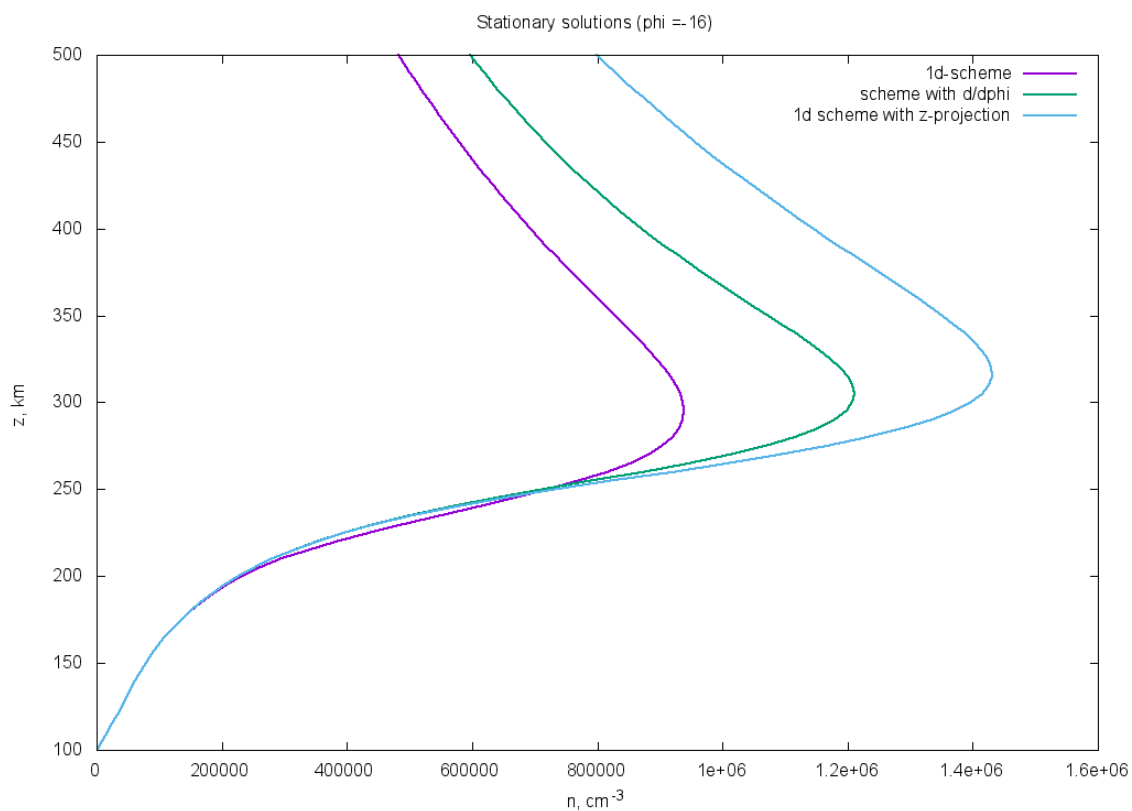


Рис. 15: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -16^\circ$.

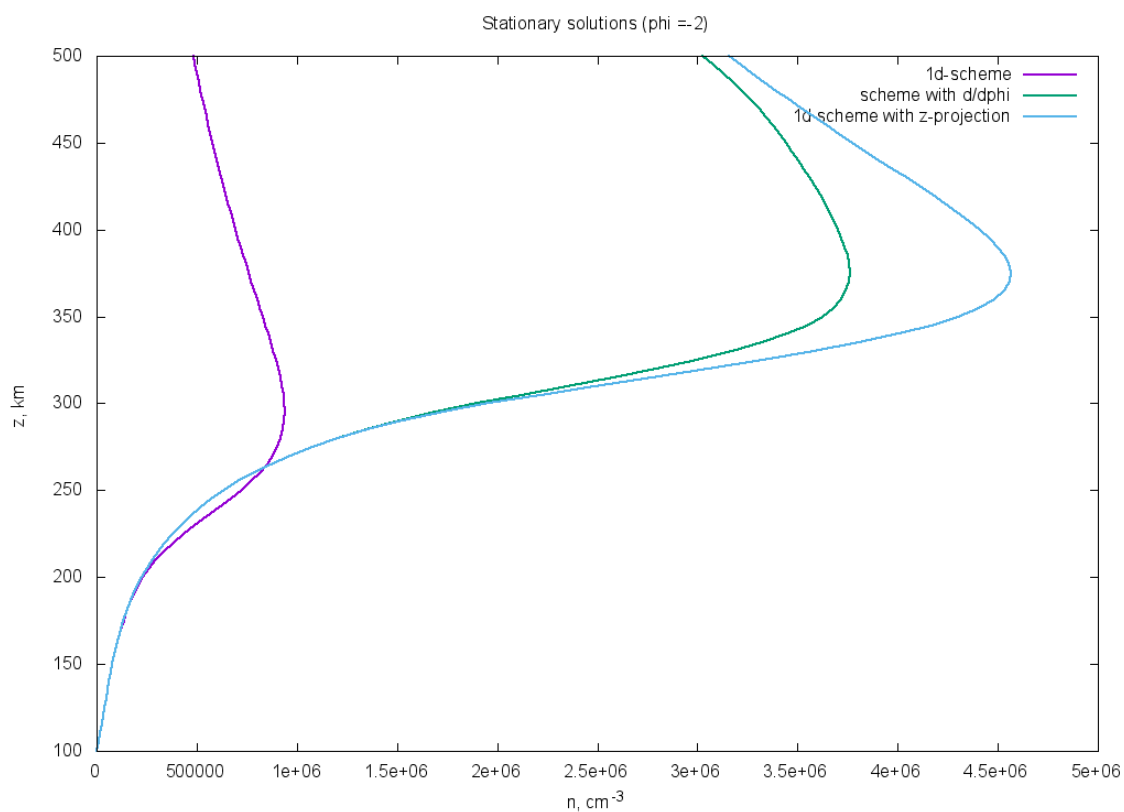


Рис. 16: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = -2^\circ$.

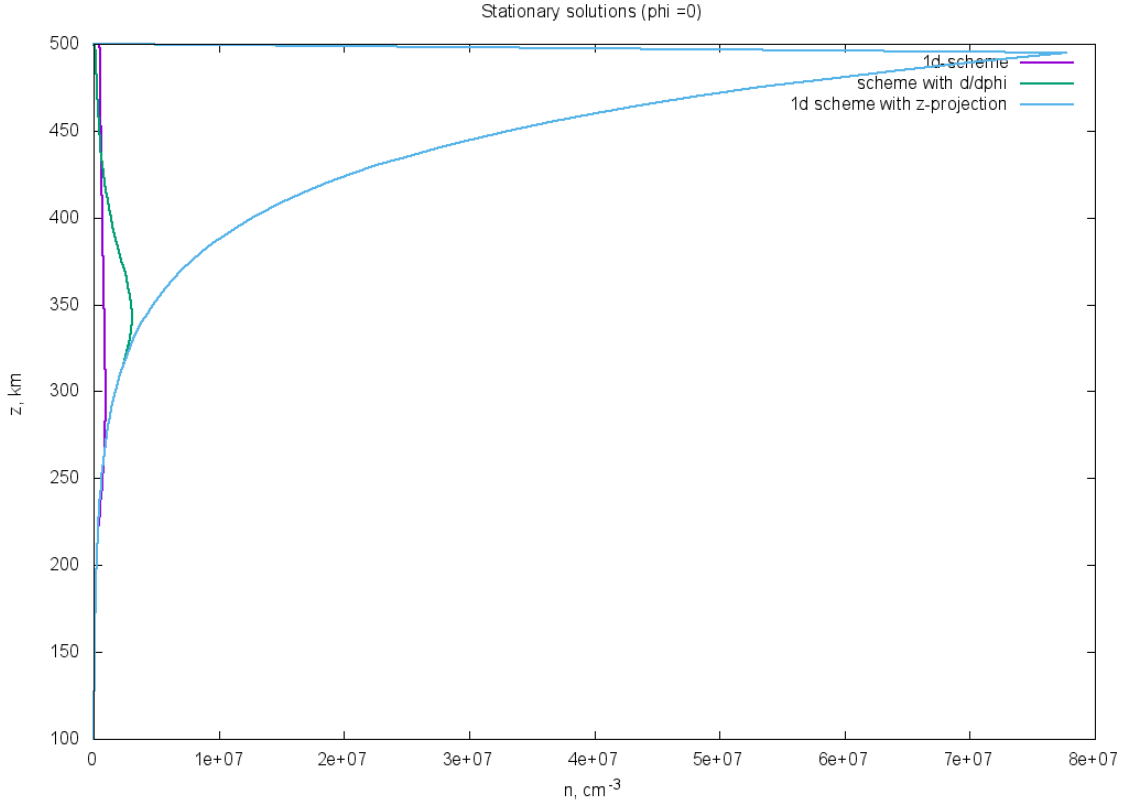


Рис. 17: Стационарные решения для трёх различных постановок, $\varphi = 0^\circ$.

Из представленных графиков видно, что решения тем больше отличаются, чем ближе рассматриваемая широта к экватору. Вблизи полюса все три стационарных решения практически совпадают со стационарным решением одномерной задачи без учёта широтной зависимости. Напротив, вблизи экватора различия весьма существенны: учёт широтной зависимости значительно увеличивает решение по сравнению со стационарным распределением электронной плотности на полюсе. Отметим также, что фактическое получаемое решение на экваторе (при $\varphi = 0^\circ$) в одномерной задаче с проекцией на ось z не соответствует никакому физическому явлению и не описывает действительное распределение электронной плотности. Как уже было упомянуто, при нулевой широте в уравнении обнуляется вся диффузионная часть, а остаются лишь функции фотоионизации и рекомбинации P и k , откуда в стационарном случае находим $n_e = \frac{P}{k}$, что соответствует экспоненциальному росту концентрации, как если бы единственными процессами в системе были фотохимические процессы.

4.4 Моделирование суточного хода в одномерной модели

В ходе численного эксперимента по моделированию суточного хода в одномерной модели вычисляется стационарное решение одномерной задачи при дневном значении $P(z)$, а затем итерации по времени продолжаются с уже меняющимся $P(z, t)$ в соответствии со введённой формулой.

Результаты представлены следующим графиком — трёхмерной поверхностью, построенной над плоскостью (z, t) .

Видно, что за сутки решение восстанавливается до исходного дневного стационарного решения. Кроме того, после обнуления P при зенитных углах больше 90° начинается спад электронной концентрации, сопровождающийся изломом по времени (в соответствующий момент P , входящее в уравнение, также терпит излом).

Отметим также, что при обнулении P распределение электронной плотности падает почти до нуля (начиная со стационарного) приблизительно за 6 часов.

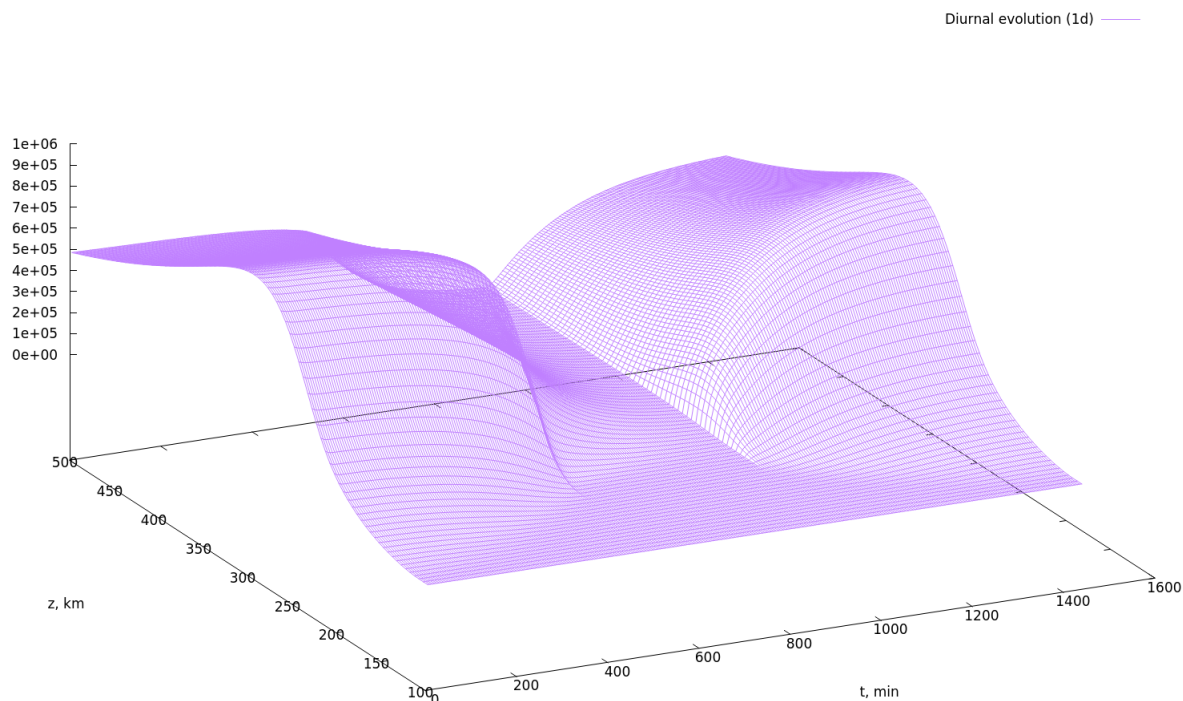


Рис. 18: Суточный ход в одномерной модели с добавлением зависимости фотоионизации от зенитного угла.

4.5 Суточный ход с учётом широтной зависимости

Учтём теперь широтную зависимость в уравнении. В качестве первого шага продолжим использование одномерного уравнения, но уже в z -проекции, с заменой коэффициента диффузии D на $D \sin^2 I$.

Как и для одномерного уравнения без широтной зависимости, сначала рассчитываем стационарное решение при дневном значении функции фотоионизации P , после чего с итерациями по времени меняем P в соответствии с изменением зенитного угла.

Результаты расчётов суточного хода в одномерной модели с учётом широтной зависимости при широтах $\varphi = -88^\circ, -66^\circ, -30^\circ, -1^\circ$ приведены на следующих графиках:

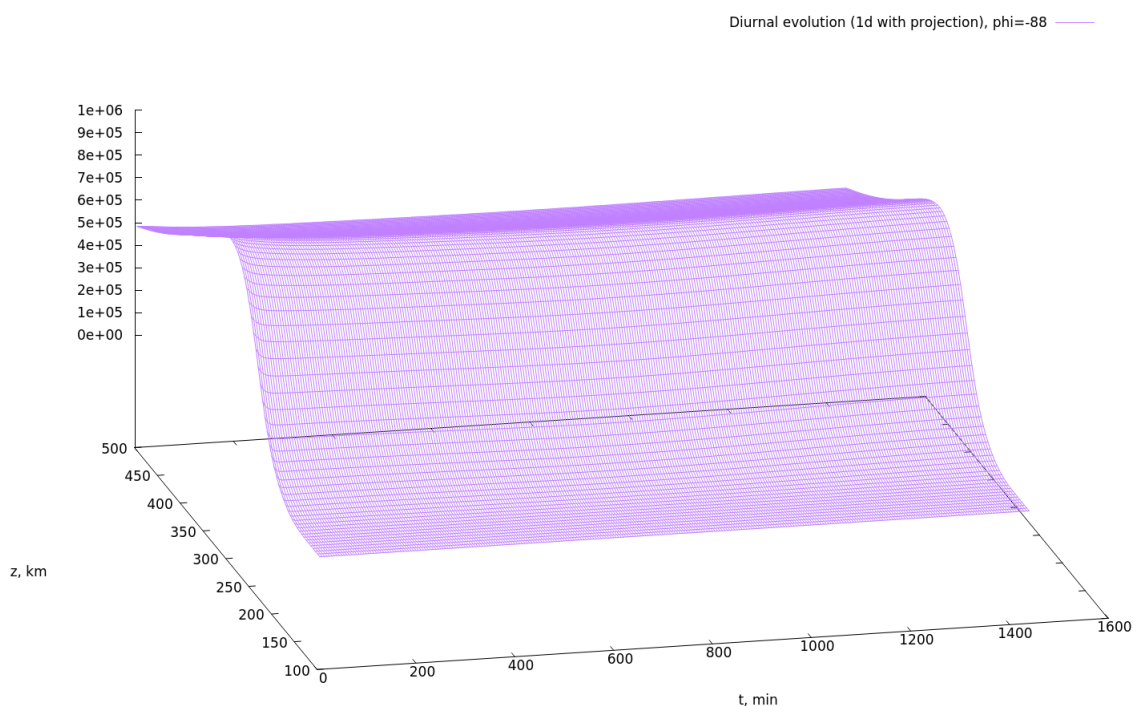


Рис. 19: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -88^\circ$.

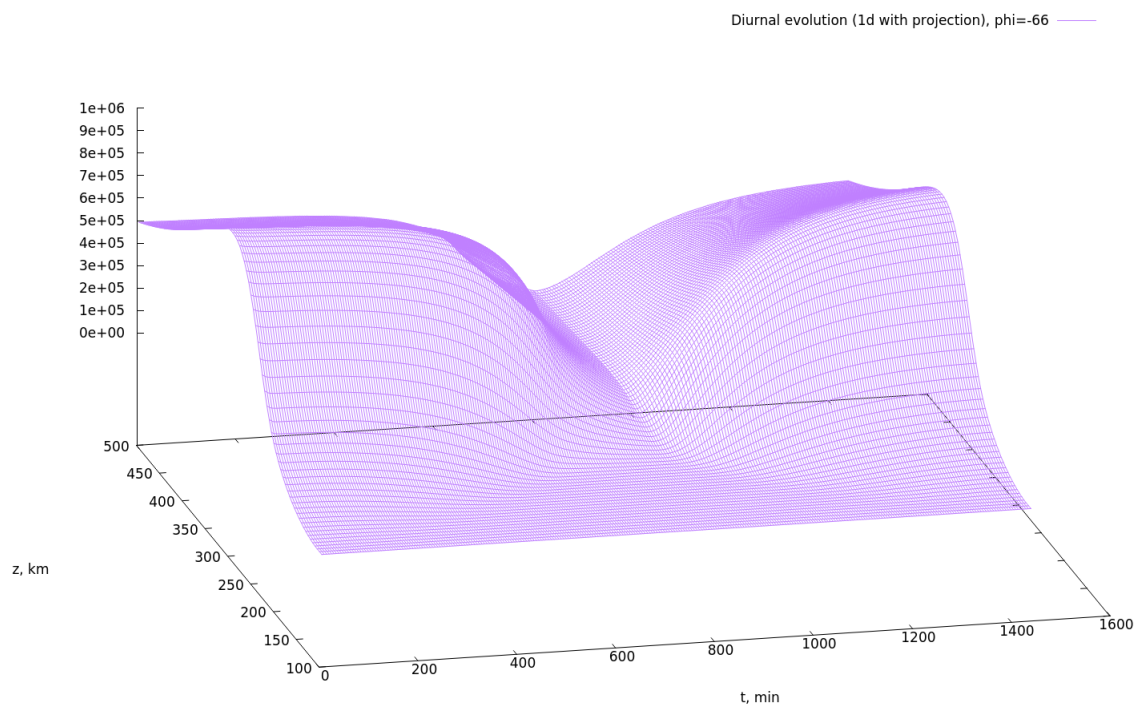


Рис. 20: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -66^\circ$.

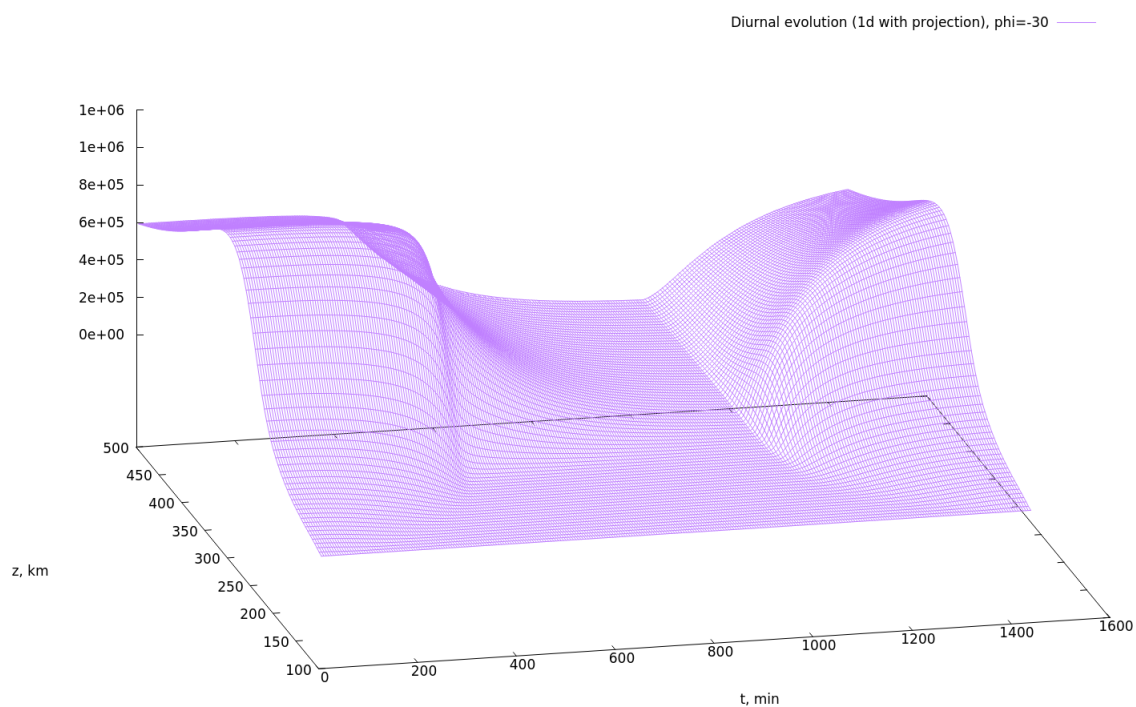


Рис. 21: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -30^\circ$.

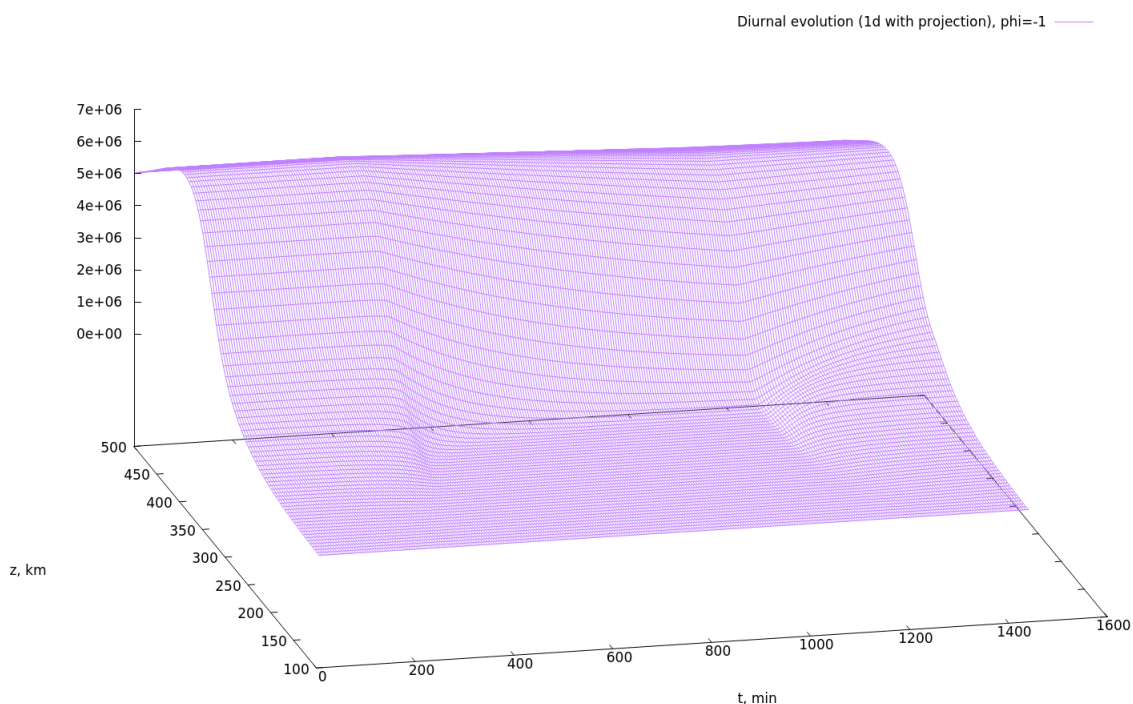


Рис. 22: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -2^\circ$.

Теперь рассмотрим суточный ход в квазидвумерной модели (в z -проекции со смешанной производной). На следующих графиках представлен суточный ход при тех же широтах, что и в случае одномерного уравнения с z -проекцией. Эксперимент повторяет действия с одномерной моделью: вычисление стационарного дневного решения с последующим изменением функции фотоионизации в согласии с суточным ходом. Существенное отличие наблюдается в характере решения вблизи экватора — уравнение не вырождается.

На графиках приведены результаты моделирования суточного хода в квазидвумерной постановке при широтах $\varphi = 30^\circ$ и $\varphi = -2^\circ$. Качественные отличия от предыдущей постановки становятся заметны именно на широтах вблизи экватора.

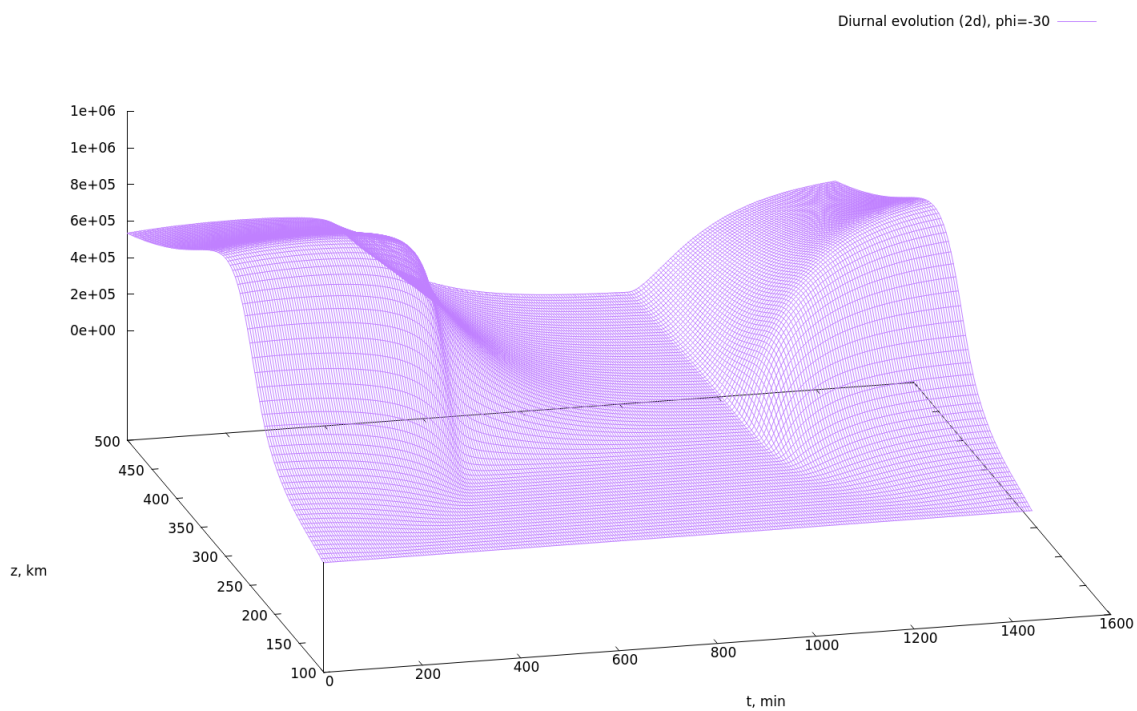


Рис. 23: Суточный ход в квазидвумерной модели, $\varphi = -30^\circ$.

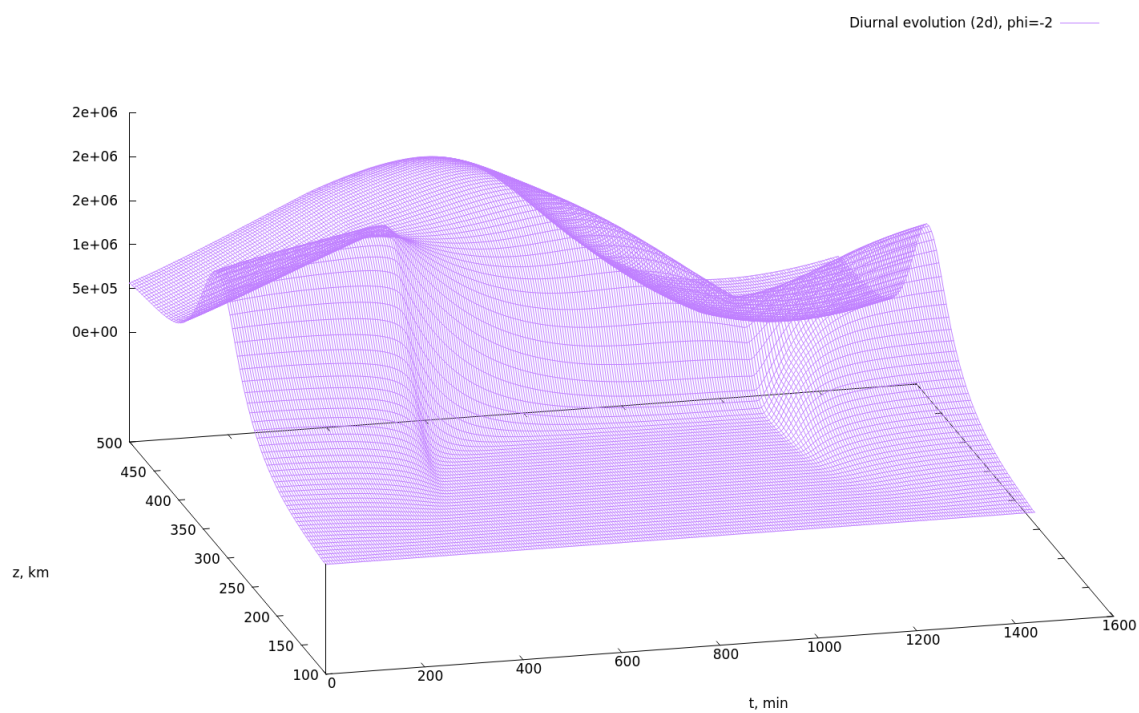


Рис. 24: Суточный ход в одномерной модели с учётом проекции на магнитную силовую линию, $\varphi = -2^\circ$.

5 Заключение

Построена трёхмерная динамическая модель ионосферы, в которой с помощью трёхмерного уравнения неразрывности описывается эволюция электронной плотности в F -слое.

К векторному уравнению после записи в сферических координатах (в приближении тонкого сферического слоя) применён метод расщепления по физическим процессам и геометрическим переменным. После этого исследовано и численно промоделировано приближенное уравнение, представляющее собой первый шаг метода расщепления. В качестве этапов построения решения поставленной приближённой задачи рассмотрены одномерные и двумерные постановки, учитывающие основные процессы — амбиполярную диффузию и процессы фотохимии. Полученные решения применимы при описании ионосферы в средних широтах и вблизи полюсов при отсутствии возмущений.

Для рассмотренных одномерных и двумерной постановок исследованы свойства рассматриваемых дифференциальных уравнений: баланс массы, сильная жесткость решаемых задач, неотрицательность концентрации. Построены разностные схемы, учитывающие эти особенности, получены стационарные профили, промоделирован суточный ход. Для двумерного уравнения применена аппроксимация, позволяющая свести его к одномерному и использовать уже имеющийся программный код: смешанная производная при этом считается эффективной добавкой к скорости переноса.

В результате численных экспериментов проведён сравнительный анализ высотных профилей электронной концентрации, полученных в различных постановках, при различных широтах. Исследована также и чувствительность дневного высотного профиля к изменению величин, входящих в уравнение в качестве внешних параметров.

Анализ полученных численных решений показывает необходимость решения полного трёхмерного уравнения, в частности — вблизи экватора, где магнитное поле близко к вертикальному.

План дальнейшего исследования включает в себя решение полной трёхмерной задачи, интеграцию построенной модели в уже разработанную в ИВМ модель термосферы, а также последующее улучшение используемых методов и уточнение результатов.

Список литературы

- [1] *Kulyamin, D. V. and V. P. Dymnikov*. A three-dimensional model of general thermospheric circulation. // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2013. 28(4): 353-380.
- [2] *Кулямин Д. В., Дымников В. П.*, Моделирование климата нижней ионосферы. // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана, 2015. Т. 51(3): С. 317–337.
- [3] *Schunk, R.W. and A.F. Nagy*, IONOSPHERES Physics, Plasma Physics, and Chemistry. 2009, New York, United States: Cambridge University Press.