I. Уравнение, решаемое на первом шаге:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[D\sin^2 I\left(\frac{\partial n_i}{\partial z} + \left(\frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H}\right)n_i\right) - \frac{1}{a}D\sin I\cos I\left(\frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p}\frac{\partial T_p}{\partial \varphi}n_i\right)\right] + [P - kn_i]$$

Во всех случаях используем для диффузионного слагаемого схему, получаемую применением формулы центральной разности дважды, а для потокового слагаемого $\dfrac{\partial}{\partial z}(un)$ центральную разность. Вычисление u_φ ведётся по формуле

$$u_\varphi \approx -\frac{1}{a}\cos I\sin I\frac{2}{n^t_{i,j+1} + n^t_{i,j-1}}\begin{cases}\dfrac{n^t_{i,j+1} + n^t_{i,j}}{\Delta\varphi}, \sin I \geqslant 0\\ \dfrac{n^t_{i,j} + n^t_{i,j-1}}{\Delta\varphi}, \sin I \leqslant 0.\end{cases}$$

Полная схема для уравнения на первом шаге:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = P - kn^{t+1}_{i,j} + \left[\left(D_{i+1/2}\frac{n^{t+1}_{i+1,j} - n^{t+1}_{i,j}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n^{t+1}_{i+1,j} - u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right) + \right.$$

$$\left.+\left(\frac{u_{\varphi(i+1/2)} + |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i,j} + \frac{u_{\varphi(i+1/2)} - |u_{\varphi(i+1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i+1,j} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i-1,j} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i,j}\right)\right]$$

На верхней границе учитывается равенство нулю полного потока: в результате имеем уравнение:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = +\left[-D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2} - \left(\frac{u_i n^{t+1}_{i,j} + u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right) + \right.$$

$$\left.+\left(-\frac{u_{\varphi(i-1/2)} + |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i-1,j} - \frac{u_{\varphi(i-1/2)} - |u_{\varphi(i-1/2)}|}{2h}n^{t+1}_{i,j}\right)\right]$$

На нижней границе $n^{t+1}_{i,j} = P/k$.
На граничных точках $\varphi = \pm 89{,}5^\circ$ коэффициент $\sin I$ перед смешанной производной мал. Для того, чтобы избавиться от необходимости использовать при подсчете u_φ значения с предыдущего временного шага, находящиеся вне рассматриваемой расчетной области, в этих граничных точках сетки из уравнения системы исключены слагаемые со смешанной производной:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = P - kn^{t+1}_{i,j} + \left[\left(D_{i+1/2}\frac{n^{t+1}_{i+1,j} - n^{t+1}_{i,j}}{h^2} - D_{i-1/2}\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i-1,j}}{h^2}\right) + \left(\frac{u_{i+1}n^{t+1}_{i+1,j} - u_{i-1}n^{t+1}_{i-1,j}}{2h}\right)\right]$$

II. Уравнение, решаемое на втором шаге расщепления:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{a\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a}\cdot(\cos^2 I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial\varphi} - D\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot\frac{\partial n}{\partial z} - u\cdot(\sin I\cos I\cos\varphi)\cdot n\right]$$

Здесь $u = D\left(\dfrac{1}{T_p}\dfrac{\partial T_p}{\partial z} + \dfrac{1}{H}\right)$ — эффективная скорость из первого шага, $I = \operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)$.
В качестве начальных условий выступает решение уравнения с первого шага расщепления. Введём две функции:

$$A(\varphi) = \cos\varphi\cdot\cos^2(\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)) = \frac{\cos\varphi}{1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi} \text{ и } B(\varphi) = \cos\varphi\cdot\sin(2\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}\varphi)) = \frac{4\sin\varphi}{1 + 4\operatorname{tg}^2\varphi}.$$

С помощью этих функций задачу можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{D}{a^2}A(\varphi)\frac{\partial n}{\partial\varphi} - \frac{D}{2a}B(\varphi)\frac{\partial n}{\partial z} - \frac{u}{2a}B(\varphi)n\right]$$

Для полного уравнения используем следующую схему:

$$\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^t_{i,j}}{\tau} = \frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(A(\varphi_{j+1/2})\frac{n^{t+1}_{i,j+1} - n^{t+1}_{i,j}}{\Delta\varphi^2} - A(\varphi_{j-1/2})\frac{n^{t+1}_{i,j} - n^{t+1}_{i,j-1}}{\Delta\varphi^2}\right) - \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n^{t+1}_{i,j+1} - B(\varphi_{j-1})n^{t+1}_{i,j-1}}{2\Delta\varphi}\right) - \right.$$

$$-\frac{D}{2a}\left(\frac{u_{z(j+1/2)}+|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j}^{t+1}+\frac{u_{z(j+1/2)}-|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j+1}^{t+1}-\frac{u_{z(j-1/2)}+|u_{z(j-1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j-1}^{t+1}-\frac{u_{z(j-1/2)}-|u_{z(j-1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j}^{t+1}\right)\Bigg]$$

Здесь введено обозначение $u_z = B(\varphi)\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial z} = B(\varphi)\frac{\partial \ln n}{\partial z}$. При этом значения n для вычисления u_z берутся с предыдущего временного шага. Аналогично первому шагу,

$$u_z \approx B(\varphi)\frac{2}{n_{i+1,j}^t + n_{i-1,j}^t}\begin{cases}\dfrac{n_{i+1,j}^t + n_{i,j}^t}{h}, B(\varphi) \geqslant 0\\ \dfrac{n_{i,j}^t + n_{i-1,j}^t}{h}, B(\varphi) \leqslant 0.\end{cases}$$

При $i = 1$ ($z = 100$ км) также ставим граничное условие Дирихле — на нижней границе по z решение совпадает с полученным на первом шаге.

На верхней границе требуется граничное условие для определения u_z.

Поток на границе $z = z_{ub}$:

$$\frac{D}{a^2}A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{N,j+1}-n_{N,j}}{h} - \frac{u}{2a}\frac{B(\varphi_{j+1})n_{N,j+1}+B(\varphi_j)n_{N,j}}{2\Delta\varphi} -$$

$$-\frac{D}{2a}\left(\frac{u_{z(j+1/2)}+|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j}^{t+1}+\frac{u_{z(j+1/2)}-|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j+1}^{t+1}\right) = F_y \approx 0$$

С помощью условия равенства нулю потока на границе $z = 500$ км получаем, что при решении линейной системы во втором шаге расщепления сохраняются значения при $z = 500$ км с первого шага расщепления, т. е. в рамках решения уравнения второго шага расщепления имеет место граничное условие Дирихле на этой границе: равенство результату с первого шага.

При $j = 1$ ($\varphi = -89{,}5°$) и $j = N_\varphi$ ($\varphi = +89{,}5°$) используем следующее граничное условие: полный поток $\Phi_{j+1/2}$ на северном полюсе и $\Phi_{j-1/2}$ на южном обращается в ноль.

Это означает, что при $j = 1$ используется аппроксимация

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau} = \frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(A(\varphi_{j+1/2})\frac{n_{i,j+1}^{t+1}-n_{i,j}^{t+1}}{\Delta\varphi^2}\right) - \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_{j+1})n_{i,j+1}^{t+1}+B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{D}{2a}\left(\frac{u_{z(j+1/2)}+|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j}^{t+1}+\frac{u_{z(j+1/2)}-|u_{z(j+1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j+1}^{t+1}\right)\right]$$

Аналогично, на северном полюсе при $j = N_\varphi$:

$$\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j}^t}{\tau} = \frac{1}{\cos\varphi_j}\left[\frac{D}{a^2}\left(-A(\varphi_{j-1/2})\frac{n_{i,j}^{t+1}-n_{i,j-1}^{t+1}}{\Delta\varphi^2}\right) + \frac{u}{2a}\left(\frac{B(\varphi_j)n_{i,j}^{t+1}+B(\varphi_{j-1})n_{i,j-1}^{t+1}}{2\Delta\varphi}\right) +\right.$$

$$\left.+\frac{D}{2a}\left(\frac{u_{z(j-1/2)}+|u_{z(j-1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j-1}^{t+1}+\frac{u_{z(j-1/2)}-|u_{z(j-1/2)}|}{2\Delta\varphi}n_{i,j}^{t+1}\right)\right]$$

Дополнение. Исследуем асимптотическое поведение функций $A(\varphi)$ и $B(\varphi)$ вблизи полюсов (при $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$).

Имеют место следующие разложения при $\varphi \to \frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = -\frac{1}{4}\cdot\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{16}\cdot\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

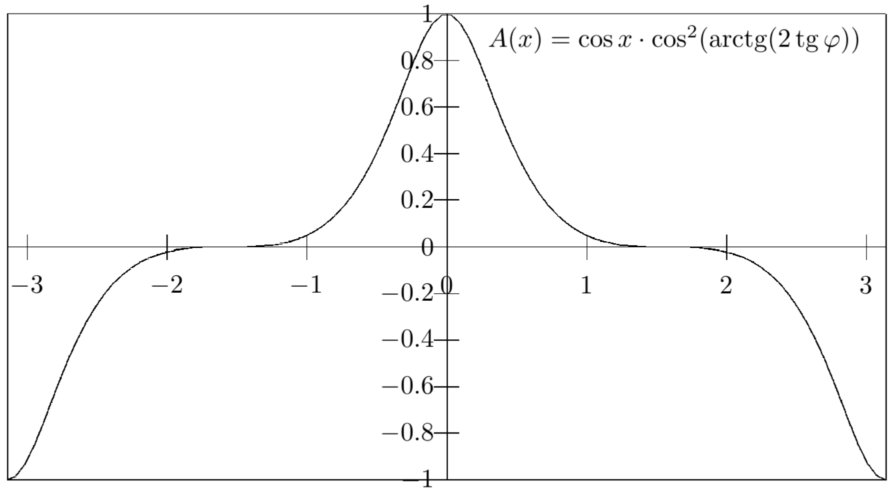
$$B(\varphi) = 1\cdot\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{12}\cdot\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

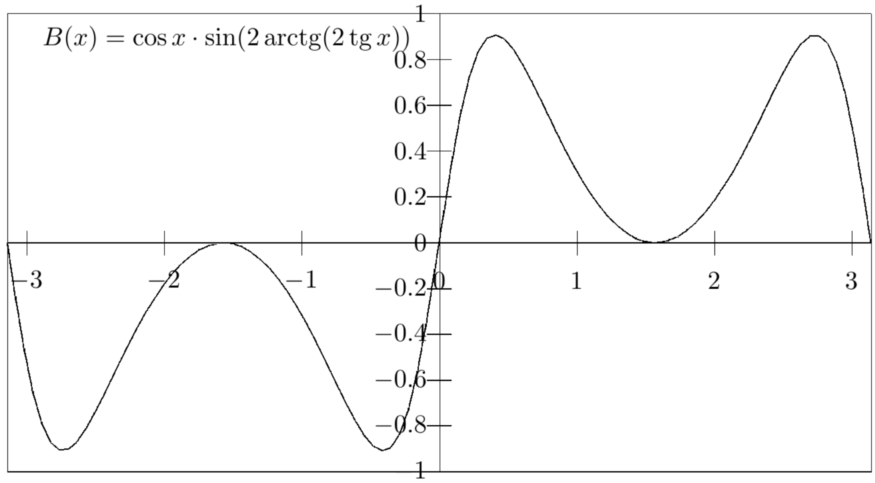
Соответственно, при $x \to -\frac{\pi}{2}$:

$$A(\varphi) = \frac{1}{4}\cdot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{16}\cdot\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)^5 + o\left(\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)^6\right)$$

$$B(\varphi) = -1 \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} \cdot \left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

Графики функций A и B приведены ниже:





Обе функции в точке $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ касаются оси абсцисс — имеют нули по крайней мере второго порядка, поэтому особенность в уравнении устранимая.