Hausarbeit Rucksackproblem

Das Rucksackproblem

Diskrete Mathematik
Dualen Hochschule Baden-Württemberg
Stuttgart

von
Paul Walker und Tom Hofer

Matrikelnummer:	3610783, XXXXXX
Abgabedatum:	30.06.2022

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

1 Einleitung

2 Problemstellung

Ein Rucksack hat eine bestimmte Tragekapazität (z.b. 5 Kg) ein Dieb packt bei einem Wohnungsraub sein Diebesgut in diesen Rucksack. In der Wohnung befinden sich Gegenstände mit unterschiedlichem Gewicht und Geldwert. Gegenstände können verschieden oft vorhanden sein (z.b. Schmuck 200g 1000€ 1stk, Elektrogeräte 2kg 500€ 3stk, Kleidung 1kg 100€ 1stk, Geld 300g 200€ 2stk). Der Dieb möchte bei dem Wohnungsraub einen möglichst großen Gewinn erzielen, er möchte also den Geldwert der in den Rucksack gepackten Gegenstände maximieren, da der Rucksack aber nur eine bestimmte Kapazität hat, muss zuerst ein Optimierungsproblem gelöst werden. Dieses Problem nennt sich das *Rucksackproblem* (oder Englisch: *Knapsack Problem*)

Mathematisch formuliert: Es gibt m Gegenstände. Sei $c_i \in R : i \in I$ der Wert des Gegenstandes i, $a_i \in R : i \in I$ das Gewicht des Gegenstandes i und $u_i \in N : i \in I$ wie oft der Gegenstand vorhanden ist jeweils mit $i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}$. Die Tragekapazität des Rucksacks ist $b \in R$. Dann wird für den maximal erreichbaren Geldwert in Abhängigkeit zur Tragekapazität des Rucksacks $f(b)$ definiert:

$$f(b) = \max(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i : \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \leq b, 0 \leq x_i \leq u_i, x_i \in N, i \in I)$$

Das hier dargestellte Rucksackproblem ist ein begrenztes Rucksackproblem. Beim unbegrenzen Rucksackproblem kann x_i jeden beliebigen wert in N annehmen und ist nicht von u_i begrenze.

Häufigste Rucksackproblem ist aber das 0-1-Rucksackproblem. ein Begrenztes Rucksackproblem kann zu einem 0-1-Rucksackproblem vereinfacht werden, indem $u_i = 1$. Dann gilt:

$$f(b) = \max(\sum_{i \in I} c_i : \sum_{i \in I} a_i \leq b, i \in I)$$

Anschaulich bedeutet das, dass jeder Gegenstand nur genau einmal vorhanden ist und daher auch nur einmal mitgenommen werden kann.

Das Rucksackproblem gehört zur Kategorie der am schwersten zu lösenden Problemen, den $\mathcal{NP}$-complete Problemen [1]. In der Praxis gibt es aber einige solide Lösungsverfahren und einige Approximationsverfahren.

2.1 NP-complete Probleme

3 Praktische Anwendungen

Das Rucksackproblem tritt in der realen Welt häufiger bei Optimierungsproblemen, speziell bei Problemen in der Ressourcen Allokation auf. Man denke beispielsweise an einen LKW, der ein bestimmtes Transportvolumen hat und Güter, die bei verschiedenem Volumen einen unterschiedlichen Gewinn erzielen. Oder ein Containerschiff das ein bestimmtes Gewicht Tragen kann und Container mitunterschiedlichem Gewicht und Gewinn.

Eine Problemvariante des Rucksackproblems, die Subset sum wird in der Kryptographie verwendet, beispielsweise beim Merkle-Hellman-Kryptosystem (das sich nicht als besonders sicher herausstellte)

4 Lösungsansätze

viele Lösungsansätze basieren auf dynamische Programmierung

5 Dynamische Programmierung

Literatur

[1] Ernst-Peter Beisel. *Verfahren zur Lösung von 0-1-Rucksack Problemen - Theorie und Implementierung*. 2010. URL: http://www2.math.uni-wuppertal.de/~beisel/Rucksack/mainKnapsack.pdf (besucht am 21. 06. 2022).