Digitale Bildverarbeitung

Wavelets; Verfahren und Einsatzgebiete

Informatik / Informationstechnik
Duale Hochschule Baden-Württemberg
Stuttgart

von
Paul Walker

Matrikelnummer: 3610783
Abgabedatum: 22.03.2023

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

Abstract

Abstract Stuff

1 Einleitung

Wavelets spielen in der heutigen Bildverarbeitung eine große Rolle. Sie erlauben es Signale zu analysieren, Signale zu komprimieren, Rauschen zu entfernen und vieles mehr. Die Wavelet Transformation hat einige Ähnlichkeiten mit der Fourier Transformation allerdings ist die Wavelet Transformation in der Lage Signale auch in der Zeitdomäne zu analysieren [1]. Im Gegensatz zur Fourier Transformation lassen sich mit der Wavelet Transformation speziell Lokale Effekte in einem Signal analysieren, diese Eigenschaft ist besonders nützlich bei der Analyse von Bildern und Audio Signalen und kann unter anderem auch für die Komprimierung dieser Daten eingesetzt werden. Wavelets könnten so beispielsweise genutzt werden, um die Frequenz von einer Musikaufnahme zu analysieren. Die Wavelet Transformation ermöglicht es dabei die Frequenzen der Töne zu bestimmen und zu bestimmen, wann und wie lange diese Töne gespielt werden [3, S.17]. Es lässt sich in diesem Beispiel also die musikalische Notation eines Stückes rekonstruieren.

2 Verfahren

Der Begriff Wavelet kommt von dem Begriff *Wave* also Welle und *let* als Verkleinerungsform, also kleine Welle [3, S.2]. Für die Wavelet Transformation wird zuerst eine Basisfunktion gewählt, das sogenannte *Analyse Wavelet* oder *Mutter Wavelet* [1]. Mit dieser Basisfunktion wird dann das Signal analysiert. Die Basisfunktion wird dabei mit $\Psi(t)$ bezeichnet. Für die Wavelet Transformation wird die Basisfunktion skaliert und verschoben.

Es können verschiedene Arten von Basisfunktionen gewählt werden, einige davon werden in Abschnitt 2.5 vorgestellt. Alle Basisfunktionen müssen jedoch einige Eigenschaften erfüllen. Eine wichtige Eigenschaft ist die sogenannte *admisibility* Bedingung [4, S.6]. Diese sagt aus, dass die Basisfunktion eine oszillierende Funktion sein muss, deren Integral über die Zeit null sein muss [4, S.6]. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die *Regularität* des Wavelets. Die sorgt für einen schnellen Zerfall des Wavelets, also dafür das die Basisfunktion schnell gegen null geht [4, S.6]. Die genannten Eigenschaften reichen nicht aus um ein Wavelet zu definieren, geben aber Aufschluss über die Form einer Wavelet Funktion als schwingende und schnell abfallende Funktion. Es wird kein spezielles Wavelet vorgegeben, viel ist es möglich mit diesen Rahmenbedingungen Basisfunktionen zu wählen, die für die jeweiligen Anwendungsfälle angepasst sind [4, S.5].

2.1 Stetige Wavelet Transformation

Für die CWT wird das Mutter Wavelet skaliert und verschoben. Der Skalierungsfaktor wird mit s bezeichnet und die Verschiebung des Wavelets mit τ. Das geschieht mit der folgenden Formel. Dabei dient $\frac{1}{\sqrt{s}}$ zur Normalisierung der Funktion [4, S.5].

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Psi(\frac{t-\tau}{s})$$

Das skalierte und verschobene Wavelet wird dann mit dem Signal multipliziert. Über das Ergebnis wird dann integriert. Es ergibt sich die folgende Wavelet Transformation $W(s,\tau)$ [4, S.5]

$$W(s,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi_{s,\tau}(t)dt$$

Damit ergibt sich eine zweidimensionale Funktion. Die Dimension τ beschreibt dabei den Zeitbereich des Signals und die Dimension s beschreibt den Frequenzbereich des Signals. Wenn die Wavelet Transformation auf einem zweidimensionalen Signal ausgeführt wird, dann ergibt sich eine vierdimensionale Wavelet Transformation [4, S.6]. Die Rücktransformation der Wavelet Transformation sieht wie folgt aus [4, S.5]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(s,\tau)\Psi_{s,\tau}(t)dsd\tau$$

2.2 Diskrete Wavelet Transformation

Die CWT wandelt ein eindimensionales Signal in einen zweidimensionalen Bereich. Das stellt allerdings eine Große Redundanz dar. Eine Lösung dafür ist es Wavelets nicht kontinuierlich zu skalieren und zu verschieben, sondern beide Werte zu diskretisieren [4, S.8].

$$\Psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}}\Psi(\frac{t-k\tau_0 s_0^j}{s_0^j})\ ; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, s_0 > 1$$

Mit diesen diskreten Wavelet Koeffizienten lässt sich nun ein Signal analysieren. Das Mutter Wavelet und damit die Transformation ist allerdings weiterhin stetig [4, S.8]. Die Transformation kann diskretisiert werden, indem die Wavelet Funktion diskretisiert wird. Allerdings kann eine höhere Auflösung erzielt werden, wenn die Wavelet Transformation in zwei Teile, einen Höherfrequenten Teil und einen Niedrigfrequenten Teil aufgespalten wird [4, S.14].

$$W_\varphi(j,k) = \tfrac{1}{\sqrt{M}}\textstyle\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\varphi_{j,k}(x)$$
$$W_\Psi(j,k) = \tfrac{1}{\sqrt{M}}\textstyle\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\Psi_{j,k}(x)$$

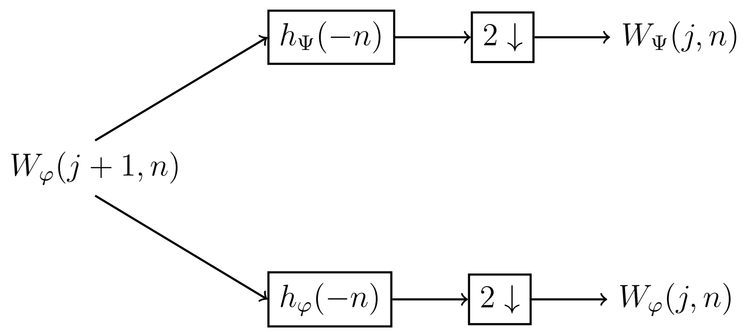

Abbildung 1: Wavelet Berechnungsbaum

Dabei beschreibt j die Skalierung des Wavelets und k die Verschiebung [2, S.9].

2.3 Schnelle Wavelet Transformation

Die FWT ist eine Weiterentwicklung der DWT, die es möglich macht die DWT effizienter auszuführen. Dafür wird die Trennung der DWT in Höherfrequenten und Niedrigfrequenten Teil ausgenutzt. Eine Wavelet Transformation lässt sich basierend auf der Nächsten Wavelet Transformation ausdrücken. Wenn für $\varphi(x)$ und analog für $\Psi(x)$ gilt

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n)\sqrt{2}\varphi(2x - n)$$

Dann ergibt sich für $W_\varphi(j,k)$ die folgende Gleichung [2, S.11].

$$W_\varphi(j,k) = \sum_m h_\varphi(m - 2k) W_\varphi(j - 1, m)$$

Und analog dazu für $W_\Psi(j,k)$ [2, S.11].

$$W_\Psi(j,k) = \sum_m h_\Psi(m - 2k) W_\Psi(j - 1, m)$$

Damit lässt sich die Wavelet Transformation für ein bestimmtes j einfach aus dem vorherigen j bilden. Es entsteht ein Berechnungsbaum mit dem die Wavelet Transformation einfach und schnell berechnet werden kann. Dieser Berechnungsbaum ist in Abbildung 1 dargestellt. Um eine Stufe der schnellen Wavelet Transformation zu berechnen, muss die Funktion $h_\Psi(-n)$ und $h_\varphi(-n)$ mit $n = 2k, k \leq 0$ auf die vorherige Stufe der Wavelet Transformation angewendet werden. Nach einem Subsampling mit dem Faktor 2 erhält man die nächste Stufe der Wavelet Transformation [2, S.12]. Um weitere Frequenzstufen zu erhalten, wird der Berechnungsbaum um weitere Stufen vergrößert.

2.4 Wavelet Pakete

2.5 Basis Funktionen

3 Wavelet Transformation versus Fourier Transformation

Die Wavelet Transformation hat einige Ähnlichkeiten zur Fourier Transformation. Es wird in beiden fällen die Zusammensetzung des Signals aus Basisfunktionen bestimmter Frequenzen analysiert. Bei der Fourier Transformation ist die Basisfunktion eine Sinus oder Cosinus Funktionen. Die Wavelet Transformation schränkt die Basisfunktion nicht auf Sinus oder Cosinus Funktionen ein. Hier sind alle Funktionen erlaubt, die nicht unendlich sind und ein Integral von 1 haben.

4 Einsatzgebiete

4.1 Bildverarbeitung

4.1.1 Entrauschen

4.1.2 Retuschieren

4.1.3 Lokaler Kontrast

4.2 Bildkompression

4.3 Audio Analyse

Literatur

[1] A. Graps. „An introduction to wavelets“. In: *IEEE Computational Science and Engineering* 2.2 (1995), S. 50–61. DOI: 10.1109/99.388960.

[2] Tzu-Heng Henry Lee. „Wavelet Analysis for Image Processing“. Magisterarb. Graduate Institute of Communication Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, ROC, 2017.

[3] Yuan Yan Tang. *Wavelet Theory Approach To Pattern Recognition (2nd Edition)*. Singapore, SINGAPORE: World Scientific Publishing Company, 2009. ISBN: 9789814273961. URL: http://ebookcentral.proquest.com/lib/dhbw-stuttgart/detail.action?docID=1679493.

[4] Clemens Valens. „A really friendly guide to wavelets“. In: (1999).