Digitale Bildverarbeitung

Wavelets; Verfahren und Einsatzgebiete

Informatik / Informationstechnik
Duale Hochschule Baden-Württemberg
Stuttgart

von
Paul Walker

Matrikelnummer:	3610783
Abgabedatum:	22.03.2023

Inhaltsverzeichnis

Abkürzungsverzeichnis

1 Einleitung

Wavelets spielen in der heutigen Bildverarbeitung eine große Rolle. Sie erlauben es Signale zu analysieren, Signale zu komprimieren, Rauschen zu entfernen und vieles mehr. Die Wavelet Transformation hat einige Ähnlichkeiten mit der Fourier Transformation allerdings ist die Wavelet Transformation in der Lage Signale auch in der Zeitdomäne zu analysieren [3]. Im Gegensatz zur Fourier Transformation lassen sich mit der Wavelet Transformation speziell Lokale Effekte in einem Signal analysieren, diese Eigenschaft ist besonders nützlich bei der Analyse von beispielsweise Bildern und Audio Signalen und kann unter anderem auch für die Komprimierung dieser Daten eingesetzt werden. Wavelets könnten so beispielsweise genutzt werden, um die Frequenz von einer Musikaufnahme zu analysieren. Die Wavelet Transformation ermöglicht es dabei die Frequenzen der Töne zu bestimmen und zu bestimmen, wann und wie lange diese Töne gespielt werden [6, S.17]. Es lässt sich in diesem Beispiel also die musikalische Notation eines Stückes rekonstruieren.

2 Verfahren

Der Begriff Wavelet kommt von dem Begriff *Wave* also Welle und *let* als Verkleinerungsform, also kleine Welle [6, S.2]. Für die Wavelet Transformation wird zuerst eine Basisfunktion gewählt, das sogenannte *Analyse Wavelet* oder *Mutter Wavelet* [3]. Mit dieser Basisfunktion wird dann das Signal analysiert. Die Basisfunktion wird dabei mit $\Psi(t)$ bezeichnet. Für die Wavelet Transformation wird die Basisfunktion skaliert und verschoben.

Es können verschiedene Arten von Basisfunktionen gewählt werden, einige davon werden in Abschnitt 2.4 vorgestellt. Alle Basisfunktionen müssen jedoch einige Eigenschaften erfüllen. Eine wichtige Eigenschaft ist die sogenannte *admisibility* Bedingung [8, S.6]. Diese sagt aus, dass die Basisfunktion eine oszillierende Funktion sein muss, deren Integral über die Zeit null sein muss [8, S.6]. Eine weitere wichtige Eigenschaft ist die *Regularität* des Wavelets. Die sorgt für einen schnellen Zerfall des Wavelets, also dafür das die Basisfunktion schnell gegen null geht [8, S.6]. Die genannten Eigenschaften reichen nicht aus um ein Wavelet zu definieren, geben aber Aufschluss über die Form einer Wavelet Funktion als schwingende und schnell abfallende Funktion. Es wird kein spezielles Wavelet vorgegeben, viel ist es möglich mit diesen Rahmenbedingungen Basisfunktionen zu wählen, die für die jeweiligen Anwendungsfälle angepasst sind [8, S.5].

2.1 Stetige Wavelet Transformation

Für die CWT wird das Mutter Wavelet skaliert und verschoben. Der Skalierungsfaktor wird mit s bezeichnet und die Verschiebung des Wavelets mit τ. Das geschieht mit der folgenden Formel. Dabei dient $\frac{1}{\sqrt{s}}$ zur Normalisierung der Funktion [8, S.5].

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Psi(\frac{t-\tau}{s})$$

Das skalierte und verschobene Wavelet wird dann mit dem Signal multipliziert. Über das Ergebnis wird dann integriert. Es ergibt sich die folgende Wavelet Transformation $W(s,\tau)$ [8, S.5]

$$W(s,\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\Psi_{s,\tau}(t)dt$$

Damit ergibt sich eine zweidimensionale Funktion. Die Dimension τ beschreibt dabei den Zeitbereich des Signals und die Dimension s beschreibt den Frequenzbereich des Signals. Wenn die Wavelet Transformation auf einem zweidimensionalen Signal ausgeführt wird, dann ergibt sich eine vierdimensionale Wavelet Transformation [8, S.6]. Die Rücktransformation der Wavelet Transformation sieht wie folgt aus [8, S.5]

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(s,\tau)\Psi_{s,\tau}(t)dsd\tau$$

2.2 Diskrete Wavelet Transformation

Die CWT wandelt ein eindimensionales Signal in einen zweidimensionalen Bereich. Das stellt allerdings eine Große Redundanz dar. Eine Lösung dafür ist es Wavelets nicht kontinuierlich zu skalieren und zu verschieben, sondern beide Werte zu diskretisieren [8, S.8].

$$\Psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{s_0^j}}\Psi(\frac{t-k\tau_0 s_0^j}{s_0^j}) \; ; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, s_0 > 1$$

Mit diesen diskreten Wavelet Koeffizienten lässt sich nun ein Signal analysieren. Das Mutter Wavelet und damit die Transformation ist allerdings weiterhin stetig [8, S.8]. Die Transformation kann diskretisiert werden, indem die Wavelet Funktion diskretisiert wird. Allerdings kann eine höhere Auflösung erzielt werden, wenn die Wavelet Transformation in zwei Teile, einen Höherfrequenten Teil und einen Niedrigfrequenten Teil aufgespalten wird [8, S.14].

$$W_\varphi(j,k) = \tfrac{1}{\sqrt{M}}\textstyle\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\varphi_{j,k}(x)$$
$$W_\Psi(j,k) = \tfrac{1}{\sqrt{M}}\textstyle\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\Psi_{j,k}(x)$$

Dabei beschreibt j die Skalierung des Wavelets und k die Verschiebung [4, S.9].

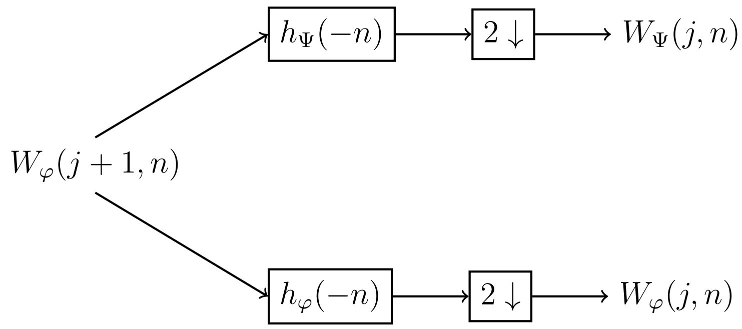


Abbildung 1: Wavelet Berechnungsbaum

2.3 Schnelle Wavelet Transformation

Die FWT ist eine Weiterentwicklung der DWT, die es möglich macht die DWT effizienter auszuführen. Dafür wird die Trennung der DWT in Höherfrequenten und Niedrigfrequenten Teil ausgenutzt. Eine Wavelet Transformation lässt sich basierend auf der Nächsten Wavelet Transformation ausdrücken. Wenn für $\varphi(x)$ und analog für $\Psi(x)$ gilt

$$\varphi(x) = \sum_n h_\varphi(n)\sqrt{2}\varphi(2x-n)$$

Dann ergibt sich für $W_\varphi(j,k)$ die folgende Gleichung [4, S.11].

$$W_\varphi(j,k) = \sum_m h_\varphi(m-2k)W_\varphi(j-1,m)$$

Und analog dazu für $W_\Psi(j,k)$ [4, S.11].

$$W_\Psi(j,k) = \sum_m h_\Psi(m-2k)W_\Psi(j-1,m)$$

Damit lässt sich die Wavelet Transformation für ein bestimmtes j einfach aus dem vorherigen j bilden. Es entsteht ein Berechnungsbaum mit dem die Wavelet Transformation einfach und schnell berechnet werden kann. Dieser Berechnungsbaum ist in Abbildung 1 dargestellt. Um eine Stufe der FWT zu berechnen, muss die Funktion $h_\Psi(-n)$ und $h_\varphi(-n)$ mit $n = 2k, k \leq 0$ auf die vorherige Stufe der Wavelet Transformation angewendet werden. Nach einem Subsampling mit dem Faktor 2 erhält man die nächste Stufe der Wavelet Transformation [4, S.12]. Um weitere Frequenzstufen zu erhalten, wird der Berechnungsbaum um weitere Stufen vergrößert.

2.4 Basis Funktionen

In der Wavelet Transformation können verschiedene Basisfunkionen verwendet werden, allerdings müssen alle Basisfunktionen gewisse Eigenschaften erfüllen, diese wurden

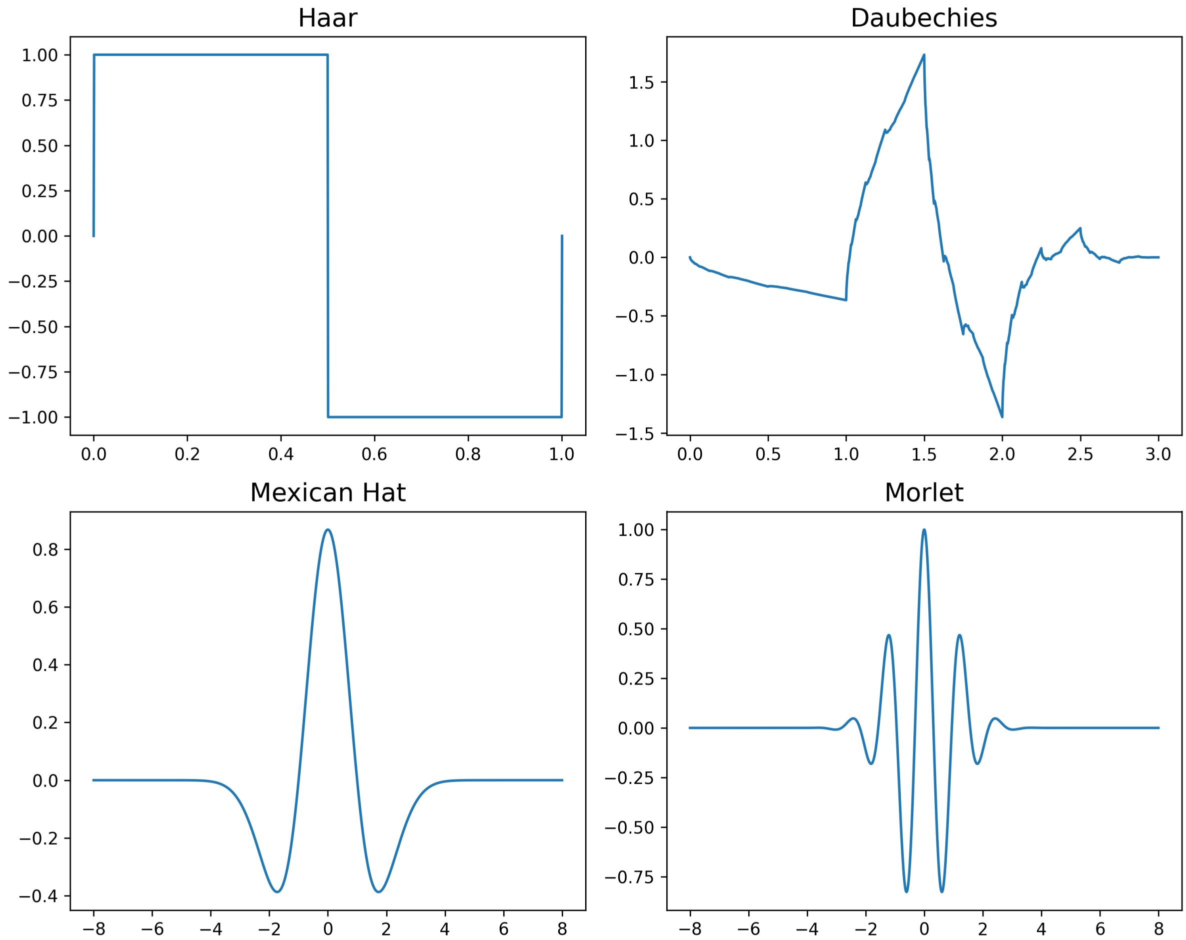


Abbildung 2: Basisfunktionen

bereits in Abschnitt 2 beschrieben. Solange diese Eigenschaften beachtet werden, können Wavelets an verschiedene Anwendungsfälle angepasst werden. Zur Erkennung von bestimmten Mustern auf einem Bild werden sicherlich andere Basisfunktionen verwendet als zum Entrauschen eines Bildes. In Abbildung 2 sind einige mögliche Wavelet Basisfunktionen dargestellt. Dabei sind sowohl das Haar als auch das Daubechies Wavelet Beispiele für diskrete Wavelets und das Mexican Hat und das Morlet Wavelet Beispiele für kontinuierliche Wavelets.

3 Wavelet versus Fourier

Die Wavelet Transformation hat einige Ähnlichkeiten zur Fourier Transformation. Es wird in beiden fällen die Zusammensetzung des Signals aus Basisfunktionen bestimmter Frequenzen analysiert. Bei der Fourier Transformation ist die Basisfunktion eine Sinus oder Cosinus Funktionen [3, S.5]. Die Wavelet Transformation schränkt die Basisfunktion nicht auf Sinus oder Cosinus Funktionen ein. Hier sind alle Funktionen erlaubt, die nicht unendlich sind und ein Integral von 1 haben. Die Fourier Transformation ist nur in der

Lage den Frequenzbereich eines Signals zu analysieren. Die Wavelet Transformation macht es dagegen möglich den Frequenzbereich und den Zeitbereich eines Signals gleichzeitig zu analysieren und so Zusammenhänge zwischen den beiden Bereichen zu erkennen, um so weitere Aufschlüsse über das Signal zu erhalten. Außerdem können bei der Wavelet Transformation verschiedene Basisfunktionen genutzt werden, das macht es möglich die Basisfunktionen an den Anwendungsfall anzupassen. Die Fourier Transformation ist dagegen auf die Sinus und Cosinus Funktionen beschränkt.

4 Einsatzgebiete

Wavelets werden in vielen Bereichen eingesetzt, vor allem in Bereichen, die mit digitaler Signalverarbeitung zu tun haben. Typische Anwendungen finden sich in der Bildverarbeitung und der Bildkompression aber auch in vielen anderen Bereichen wird die Wavelet Transformation eingesetzt. Hier sollen allerdings nur einige wenige Anwendungen vorgestellt werden.

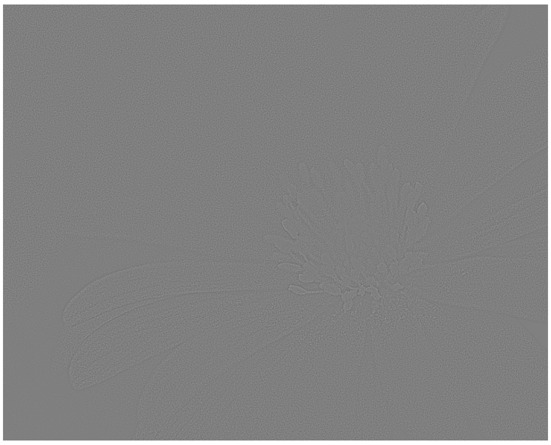
4.1 Bildverarbeitung

In der Bildverarbeitung wird in der Regel eine zweidimensionale Wavelet Transformation verwendet, um ein Bild zu analysieren. Mithilfe der Wavelet Transformation kann ein Bild in verschiedene Frequenzbereiche zerlegt werden, so können Aktionen nur auf bestimmten Frequenzbereichen durchgeführt werden [1, S.38]. In Abbildung 3 ist ein Bild und einige seiner Frequenzbereiche, den Skalen, dargestellt. Es ist erkennbar, dass die verschiedenen Frequenzbereiche unterschiedliche Details enthalten. In den höheren Frequenzbereichen sind die feinsten Details zu erkennen. In Abbildung 3 ist das die Wavelet Skala 3. Hier sind sehr feine Details auf den Blütenblättern der Blüte zu erkennen. Außerdem findet sich auch ein großer teil des Bildrauschens in diesem Frequenzbereich. In den niedrigeren Frequenzbereichen, Skala 7 in Abbildung 3, sind die gröberen Details zu erkennen. Hier ist zum Beispiel die zweite Blüte zu erkennen, die sich unscharf im Hintergrund des Bildes befindet. Mit der Zerlegung des Bildes in einzelne Frequenzbereiche über die Wavelet Transformation lassen sich einige Aufgaben in der Bildverarbeitung vereinfachen. Hier werden ein paar Beispiele für die Anwendung von Wavelets in der Bildverarbeitung gezeigt.

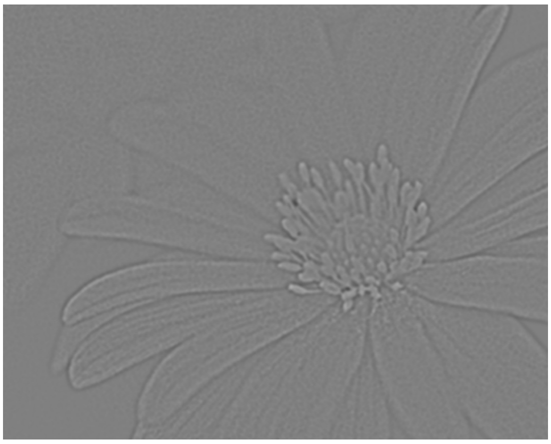
4.1.1 Entrauschen

Typischerweise ist das Rauschen eines Kamerasensors hauptsächlich in den höheren Frequenzbereichen des Bildes zu erkennen. Diese Frequenzbereiche lassen sich dann mit der Wavelet Transformation isolieren. Dann können die Frequenzbereiche, in denen sich das Rauschen befindet, getrennt von allen anderen Frequenzbereichen bearbeitet werden, um das Rauschen zu reduzieren [1, S.117]. Das Rauschen wird dann allerdings von einem anderen Filter der nicht teil der Wavelet Transformation ist entfernt. Das Rauschen in einem Bild kann über verschiedene Frequenzbereiche verteilt und in verschiedenen Frequenzbereichen verschieden stark sein [1, S.119]. In Abbildung 3 ist das gut zu erkennen, hier befindet sich das Rauschen sowohl in Skala 3 als auch in Skala

(a) Original



(b) Wavelet Skala 3



(c) Wavelet Skala 5

(d) Wavelet Skala 7

Abbildung 3: Wavelet Transformation eines Bildes

5. In Skala 7 hingegen ist kein Rauschen zu erkennen. Die Aufspaltung des Bildes in verschiedene Frequenzbereiche macht es möglich in den einzelnen Frequenzbereichen das Rauschen unterschiedlich stark zu reduzieren [1, S.119]. So kann pro Frequenzbereich ein Kompromiss zwischen der Reduktion des Rauschens und dem Erhalten von Details im Bild gefunden werden. Um in dem Bild in Abbildung 3 das Rauschen zu reduzieren, müsste demnach hauptsächlich in den Frequenzbereichen Skala 3 und Skala 5 das Rauschen reduziert werden. In Skala 7 hingegen wäre keine Rauschreduzierung notwendig.

4.1.2 Retuschieren

Wavelets werden teilweise auch in der Retusche von Haut in Bildern verwendet. Bei der Retusche soll die Haut im Bild verbessert werden und ungewollte Details wie Pickel oder Narben sollen entfernt werden. Ansätze die direkt auf dem Bild arbeiten, ohne das Bild in verschiedene Frequenzbereiche zu zerlegen, erzielen oft nicht die gewünschten Ergebnisse [2]. Bei der Retusche von Haut sollte darauf geachtet werden, dass die Haut weiterhin natürlich aussieht. Um das zu erreichen, sollte die Hautfarbe und die Hautstruktur erhalten bleiben. An dieser Stelle kommt die Wavelet Transformation ins Spiel. Die Hautfarbe ist in den niedrigen Frequenzbereichen und die Hautstruktur ist in den höheren Frequenzbereichen des Bildes zu finden. Abbildung **??** zeigt zwar keine Haut, allerdings lässt sich das Prinzip der Retusche auch auf andere Bilder anwenden. Hier wird speziell die Blüte betrachtet. Die feine Struktur der Blüte ist in Abbildung **??** in Skala 3 zu erkennen. Wohingegen die Helligkeit der Blüte in Skala 7, zu sehen ist, bei einem farbigen Bild wäre hier auch die Blütenfarbe zu erkennen. Im Idealfall finden sich die ungewollten Details in den Frequenzbereichen zwischen Struktur und Farbe des Bildes. Damit sind die ungewollten Details nun isoliert und können getrennt von der Farbe und der Struktur retuschiert werden. In Abbildung **??** befindet sich Beispielsweise ein kleiner schwarzer Fleck in den oberen linken Staubbeuteln der Blüte, dieser soll entfernt werden. Dieser Fleck befindet sich in den Frequenzbereichen zwischen Struktur und Farbe und ist am deutlichsten in Skala 5 zu erkennen. Hier kann dieser Fleck nun entfernt werden ohne die Farbe oder Struktur des Bildes zu beeinflussen.

4.1.3 Lokaler Kontrast

Kontrast ist der Unterschied zwischen hellen und dunklen Bereichen eines Bildes. Der lokale Kontrast beschreibt den Kontrast auf Teilbereichen eines Bildes. Dieser Teilbereich kann verschiedene Größen haben. Er kann so groß wie das Ursprungsbild sein oder auch nur ein paar Pixel groß. Lokaler Kontrast wird in der Bildverarbeitung verwendet, um die wahrgenommene Schärfe zu erhöhen und Details im Bild zu verstärken [1, S.108]. Die großen und gröberen Teilbereiche des Bildes entsprechen den niedrigen Frequenzbereichen des Bildes. Die kleinen und feineren Teilbereiche des Bildes entsprechen den hohen Frequenzbereichen des Bildes. Es wird eine Wavelet Transformation verwendet, um das Bild in diese Frequenzbereiche zu zerlegen [1, S.107]. Nach dieser Zerlegung wird der lokale Kontrast eines Frequenzbereichs erhöht, indem der globale Kontrast dieses Frequenzbereichs erhöht wird, ohne dabei den Kontrast der anderen Frequenzbereich zu erhöhen. Um in Abbildung 3 beispielsweise den lokalen

Kontrast in den feinsten Details zu erhöhen, müsste der Kontrast in Skala 3 vor der Rücktransformation erhöht werden.

4.2 Bildkompression

Wavelets können auch verwendet werden, um Daten zu komprimieren. Ein Beispiel hierfür ist JPEG 2000. Während die JPEG-Kompression die Diskrete Kosinus Transformation (DCT) verwendet, um die Bilddaten zu komprimieren, verwendet JPEG 2000 die Wavelet Transformation [7, S.1]. Für die DCT der JPEG-Kompression wird das Bild zuerst in kleine Blöcke zerlegt, auf die dann die DCT angewendet wird. Damit lässt sich das Bild zwar gut komprimieren, allerdings kann es bei einer hohen Kompressionsrate zu Artefakten kommen, bei denen die Blöcke deutlich zu erkennen sind [7, S.13]. Die JPEG 2000 Kompression umgeht dieses Problem, indem die Kompression direkt auf das ganze Bild angewendet wird. So entstehen keine Blockartefakten mehr. Für die JPEG 2000 Kompression wird das Bild eine zweidimensionale Wavelet Transformation angewendet, die aus zwei Ebenen von eindimensionalen Wavelet Transformationen auf Zeilen und Spalten besteht [7, S.2]. Danach folgt die eigentliche Bildkompression. Es handelt sich um die sogenannte Embedded Zero-tree Wavelet (EZW) Kompression [7, S.1]. Dabei wird ausgenutzt, dass Bereiche mit Werten nahe null in niedrigen Frequenzen häufig mit Werten nahe null in allen höheren Frequenzen korrelieren [7, S.9]. Es können null Bäume aufgebaut werden, die die Positionen dieser Null Bereiche speichern. Da die null Bereiche mit den null Bäumen einfach rekonstruiert werden können, müssen nur noch die null Bäume gespeichert werden [7, S.10]. Das sorgt für einen großen Kompressionsgewinn und eine bessere Kompression und Qualität als bei JPEG.

5 Fazit

Die Wavelet Transformation bietet viele Vorteile gegenüber der Fourier Transformation und wird in vielen Anwendungen der Bildverarbeitung verwendet. In dieser Arbeit wurde die Funktionsweise der Wavelet Transformation erklärt und einige Anwendungsfälle beispielhaft vorgestellt, um eine Übersicht über die Wavelet Transformation zu erhalten. In der Bildverarbeitung wird die Wavelet Transformation an vielen Stellen verwendet besonders, wenn zwischen verschiedenen Detailebenen unterschieden werden muss. Die Wavelet Transformation ist besonders nützlich in der Retusche von Bildern, der Rauschreduzierung und um den lokalen Kontrast in Bildern zu erhöhen. Außerdem hat die Wavelet Transformation einen etablierten Platz in der Bildkompression mit der EZW Kompression von JPEG 2000 gefunden. Neben den hier vorgestellten Anwendungsfällen findet die Wavelet Transformation aber auch in vielen anderen Anwendungen Verwendung. Im Bereich der Bildverarbeitung wird die Wavelet Transformation beispielsweise noch für die Mustererkennung verwendet [6]. Fokus dieser Arbeit ist die Bildverarbeitung, jedoch werden Wavelets auch in anderen Bereichen der Signalverarbeitung wie zum Beispiel der Audioverarbeitung verwendet [5]. Diese Arbeit hat das Ziel eine Übersicht über die Wavelet Transformation und einige ihrer Anwendungen zu geben. In weiteren Arbeiten kann nun auf weitere Anwendungsfälle eingegangen werden und beispielsweise der Einfluss der verschiedene Wavelet Basisfunktionen genauer erklärt werden.

Literatur

[1] darktable comunity. *Darktable User Manual*. Version 4.2. 2023. URL: https://docs.darktable.org/usermanual/4.2/en/darktable_user_manual.pdf (besucht am 05. 04. 2023).

[2] Pat David. *Skin Retouching with Wavelet Decompose*. pixls.us. 2015. URL: https://pixls.us/articles/skin-retouching-with-wavelet-decompose/ (besucht am 05. 04. 2023).

[3] A. Graps. „An introduction to wavelets". In: *IEEE Computational Science and Engineering* 2.2 (1995), S. 50–61. DOI: 10.1109/99.388960.

[4] Tzu-Heng Henry Lee. „Wavelet Analysis for Image Processing". Magisterarb. Graduate Institute of Communication Engineering, National Taiwan University, Taipei, Taiwan, ROC, 2017.

[5] Chien-Chang Lin u. a. „Audio classification and categorization based on wavelets and support vector Machine". In: *IEEE Transactions on Speech and Audio Processing* 13.5 (2005), S. 644–651. DOI: 10.1109/TSA.2005.851880.

[6] Yuan Yan Tang. *Wavelet Theory Approach To Pattern Recognition (2nd Edition)*. Singapore, SINGAPORE: World Scientific Publishing Company, 2009. ISBN: 9789814273961. URL: http://ebookcentral.proquest.com/lib/dhbw-stuttgart/detail.action?docID=1679493.

[7] B.E. Usevitch. „A tutorial on modern lossy wavelet image compression: foundations of JPEG 2000". In: *IEEE Signal Processing Magazine* 18.5 (2001), S. 22–35. DOI: 10.1109/79.952803.

[8] Clemens Valens. „A really friendly guide to wavelets". In: (1999).