

# ATP Übungsblatt 2

Tobias Rücker  
tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock  
paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

11. Mai 2020

Abgabegruppe: **Mittw. 10-12 Uhr**

1.1

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Aufgabe 4</b>	<b>1</b>
1.1	a) . . . . .	2
1.2	b) . . . . .	2
1.3	c) . . . . .	3
1.4	d) . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Aufgabe 5</b>	<b>3</b>
2.1	a) . . . . .	4
2.2	b) . . . . .	4
2.3	c) . . . . .	5
2.4	d) . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Aufgabe 6</b>	<b>5</b>
3.1	a) . . . . .	6
3.2	b) . . . . .	7
3.3	c) . . . . .	7
3.4	d) . . . . .	7
3.5	e) . . . . .	7

# 1 Aufgabe 4

## Aufgabe 4: Eddington-Limit

5 P.

Die Stabilität massereicher Sterne ist direkt durch deren hohe Leuchtkraft bedingt. Der Gesamtdruck setzt sich zusammen aus dem idealen Gasdruck und dem Strahlungsdruck.

Für sehr hohe Temperaturen und relative kleine Dichten, wie es in den äußeren Schichten von Sternen vorkommen kann, wird der Gesamtdruck durch den Strahlungsdruck dominiert. Die maximale Leuchtkraft, für die die Sternregion im hydrostatischen Gleichgewicht ist, heißt Eddington Leuchtkraft.

- a) Leiten Sie die Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M\rho}{r^2} \quad (1)$$

in einem Gravitationsfeld her. Hierbei beschreibt  $dP/dr$  den Druckgradienten,  $\rho$  die Dichte des Sterns am Radius  $r$  und  $M$  Masse des Sterns.

Der Strahlungsdruckgradient ist gegeben durch

$$\frac{dP_{\text{rad}}}{dr} = -\frac{\kappa\rho}{c} F_{\text{rad}}, \quad (2)$$

wobei  $\kappa$  die Opazität und  $F_{\text{rad}}$  den Strahlungsfluss beschreibt.

- b) Leiten Sie den Ausdruck für die Eddington Leuchtkraft her. Drücken Sie hierfür den Strahlungsdruckgradienten (2) in Abhängigkeit der Leuchtkraft aus. Nutzen Sie nun die Bedingung für das hydrostatische Gleichgewicht (1) und berechnen Sie hieraus die Eddington Leuchtkraft.
- c) Was passiert im Fall, dass die Leuchtkraft die Eddington Grenze überschreitet?
- d) Berechnen Sie die Eddington Leuchtkraft für einen Stern mit  $M = 0.083M_{\odot}$  sowie  $\kappa = 0,02 \text{ m}^2/\text{kg}$  und vergleichen Sie die Lösung mit der Hauptreihen-Leuchtkraft. Inwiefern ist der Strahlungsdruck für derartige Sterne relevant?

Die Leuchtkraft oder Luminosität eines Sterns ist gegeben durch das Stefan-Boltzman-Gesetz:

$$L = \sigma \cdot A \cdot T^4 \quad (1)$$

Wobei  $A$  die betrachtete Oberfläche,  $T$  die Oberflächentemperatur und  $\sigma = \frac{2\pi^5 \kappa^4}{15c^2 h^3}$  die Stefan-Boltzman Konstante darstellt. Die Formel des Strahlungsflusses lautet:

$$f = \frac{L_{\text{Stern}}}{A} \quad (2)$$

## 1.1 a)

Das hydrostatische Gleichgewicht basiert auf dem Gleichgewicht zwischen Strahlung und Druck. Demnach muss eine Variation in Druck oder Strahlung eine entsprechende Reaktion der anderen Kraft hervorrufen. Am Equilibrium  $F_g = F_p$  muss der Druck der Strahlung gleich der Gewichtskraft sein. Die Gewichtskraft, die an der relevanten Schicht herrscht, ist wie folgt definiert:

$$dF_g = -G \frac{M_r dm}{r^2} = -G \frac{M_r \rho}{r^2} dA dr$$

4.1

Wobei  $G$  die Gravitationskonstante,  $M_r$  die Masse der vom Radius  $r$  eingeschlossenen Sphäre und  $\rho$  die Dichte der Schicht an der Stelle  $r$  ist. Der Druck ist definiert durch:

$$dP = \frac{\text{Kraft(F)}}{\text{Fläche(A)}} \Leftrightarrow F_p = P \cdot A$$

Druck  $p$  und Fläche sind hier jeweils variabel und vom Radius abhängig:

$$dF_p = dP dA$$

Im perfektem Gleichgewicht müssen sich beide Kräfte aufheben, demnach gilt:

$$\begin{aligned} dF_p - dF_g &= 0 \Leftrightarrow dF_p = dF_g \\ \Rightarrow \text{einsetzen} \quad dP dA &= -G \frac{M_r \rho}{r^2} dA dr \\ \Leftrightarrow \frac{dP}{dr} &= -G \frac{M_r \rho}{r^2} \end{aligned}$$

## 1.2 b)

Für die Eddington Leuchtkraft wird der Strahlungsfluss (2) benötigt, welcher in den Strahlungsdruckgradienten für  $F_{rad}$  eingesetzt wird. Für den Strahlungsfluss muss die Luminosität am Ort  $R$  bekannt sein, welcher sich mit Formel (1) bestimmen lässt. Werden beide Formeln in den Strahlungsdruckgradienten eingesetzt, ergibt sich für  $\frac{dP}{dr}$ :

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{\kappa \rho}{c} \cdot \frac{L}{A}$$

Wird der Strahlungsdruckgradienten in Abhängigkeit von  $L$  nun nach mit der Gewichtskraft gleichgesetzt und nach  $L$  umgeformt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa \rho}{c} \frac{L}{4\pi r^2} &= -G \frac{M_r \rho}{r^2} \\ \Leftrightarrow L &= G \frac{4\pi M_r c}{\kappa} \end{aligned}$$

### 1.3 c)

Eine Überschreitung der Eddington Leuchtkraft liegt in der Regel einem zu hohem Strahlungsdruck zugrunde. Ein überwiegender Strahlungsdruck hat in der Regel eine Abstrahlung von Masse in Form von Supernovae oder planetaren Nebeln. In beiden Fällen wird mindesten eine Schicht des Stern von der sterneigenen Strahlung abgetragen.



### 1.4 d)

Mit einer Masse von  $0.083M_{\odot}$  und einer Opazität von  $0,02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$  ergibt sich eine Leuchtkraft von:

$$L = G \frac{4\pi \cdot 0.083M_{\odot} \cdot c}{0,02 \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}} = 2,07 \text{ W}$$

5.1

Da der Stern eine Masse von  $8\% M_{\odot}$  besitzt, hat der Energietransport keinen Radialteil, sondern ist konvektiv. Demnach ist der Strahlungsdruck irrelevant, da die Energie als Wärme abgestrahlt wird. Auf dem Hertzsprung-Russel Diagramm würde die Leuchtkraft des Sterns ins untere rechte Ende der Hauptreihe fallen.

$$L_{\odot} = 0,00019$$



Dies wird mit einer Leuchtkraft von  $0,019\%$  der Leuchtkraft der Sonne bestätigt.

5.2

5.3

## 2 Aufgabe 5

### Aufgabe 5: *pp-Kette und CNO-Zyklus*

5 P.

Die wesentliche Energiequelle von Sternen auf der Hauptreihe stellt das Wasserstoffbrennen dar. Hierbei sind insbesondere zwei Reaktionsabläufe zu nennen: Die **pp-Kette** sowie der **CNO-Zyklus**.

- Wie wird allgemein bei Fusionsreaktionen Energie gewonnen? Wie ist dies physikalisch möglich, und was sind die allgemeinen Voraussetzungen?
- Erläutern Sie die Schritte der pp-Kette sowie die Schritte des CNO-Zyklus. Was sind die Gemeinsamkeiten, was sind die Unterschiede beider Prozesse? Gehen Sie außerdem darauf ein, welcher der beiden Prozesse für die Sonne am relevantesten ist.
- Welche Schritte liefern jeweils die meiste Energie?
- Welche weiteren Formen der Energiegewinnung durch Kernfusionsreaktionen existieren?

## 2.1 a)

Grundsätzlich entsteht die Energie bei einer Kernfusion daraus, dass die Bindungsenergie zweier Reaktionspartner vor der Fusion größer als nach der Fusion ist. Dadurch wird ein Teil der Energie in Form von Teilchen weggetragen. Das funktioniert allerdings nur bis zu einem gewissen Punkt, da dann der Prozess der Fusion mehr Energie braucht, als sie erzeugt.



Die Voraussetzung für die Kernfusion sind sehr hohe Temperaturen und einen sehr hohen Druck, damit die Protonen genug Energie besitzen, um die Coulomb-Barriere zu überwinden. Durch den quantenmechanischen Tunneleffekt sind die Protonen dann dazu in der Lage sich nahe genug zu kommen, um einen Fusionsprozess in Gang zu setzen.



## 2.2 b)

pp-Kette:

Bei der pp-Kette verschmelzen zwei Wasserstoffkerne zu einem Deuteriumkern, einem Positron und einem Elektronenneutrino. Daraufhin verschmelzen ein Deuterium und ein Wasserstoff zu einem  $^3\text{He}$  und einem Gammaquant. Der nächste Schritt, der am häufigsten Auftritt ist die Verschmelzung zweier  $^3\text{He}$  Kerne zu einem  $^4\text{He}$ - und 2 Wasserstoffkernen.

CNO-Zyklus:

Bei dem CNO-Zyklus werden zyklisch Stoffe durchn Zerfalls- und Fusionsprozesse ineinander umgewandelt. Beginnend bei  $^{12}\text{C}$ , welches mit einem Wasserstoffkern zu  $^{13}\text{N}$  und einem Gammaquant fusioniert. Der Stickstoff zerfällt dann zu einem  $^{13}\text{C}$ , einem Positron und einem Elektronenneutrino. Der Kohlenstoff fusioniert wieder mit einem Wasserstoffkern zu  $^{14}\text{N}$  und einem Gammaquant. Der Stickstoff fusioniert auch mit einem Wasserstoffkern zu einem  $^{15}\text{O}$  und wieder einem Gammaquant. Der Sauerstoff zerfällt zu einem  $^{15}\text{N}$  und einem Positron sowie einem Elektronenneutrino. In dem letzte Prozess des Zyklus fusioniert der Stickstoff mit einem Wasserstoffkern zu  $^{12}\text{C}$  und  $^4\text{He}$  und dann geht der Prozess mit dem Kohlenstoff wieder von vorne los. Dieser Zirkel wird auch Bethe-Weizsäcker Zyklus genannt.



Die Unterschiede zwischen beiden sind, dass bei der pp-Kette es eine Verzweigung der Fusion von Wasserstoff über Deuterium zu dem  $^4\text{He}$ , während bei dem CNO-Zyklus man bei dem Atom  $^{12}\text{C}$  wieder rauskommt, elcher in der Fusion wieder verwendet wird. Zudem ist die Energieerzeugung für pp bei niedrigeren und bei CNO für höhere effizienter.

Bei beiden Prozessen kommt es allerdings letztendlich auf die Produzierung von  $^4\text{He}$  raus.

Der Unterschied liegt in der kreisförmigen Struktur des CNO-Zykluses, da die pp-Kette ihr Endstadium mit  $^4\text{He}$  erreicht hat. Der CNO-Zyklus knüpft jedoch an dem letzten Schritt wieder an, indem das aus Stickstoff und Wasserstoff gewonnene  $^{12}\text{C}$  wieder mit einem Wasserstoffkern fusioniert wird.

6.2

Der Fusionsprozess der pp-Kette ist bei der Sonne am stärksten vertreten.

### 2.3 c)

Bei der pp-Kette ist der energiereichste Übergang der Übergang von den beiden  ${}^3\text{He}$  zu  ${}^4\text{He} + 2 {}^1\text{H}$ , da dort 91 % der Energie gewonnen wird. Beim CNO-Zyklus (Bethe-Weizsäcker Zyklus) ist es der Schritt von  ${}^{13}\text{C}$  und  ${}^1\text{H}$  zu  ${}^{14}\text{N}$  und einen Gammaquant.



### 2.4 d)

Bei massereicheren Sternen können neben dem Wasserstoff-Brennen auch Helium-Brennen, Kohlenstoff-Brennen, Sauerstoff-Brennen und Neon-Brennen auftreten. Bei Sternen mit einer Masse  $> M_{\odot}$  kann der 3- $\alpha$ -Prozess auftreten, wo Helium mit Helium zu Beryllium und Beryllium mit Helium zu Kohlenstoff fusioniert wird. Dies tritt in der Regel dann auf, wenn der Wasserstoffvorrat im Kern erschöpft ist, dieser kontrahiert und sich die Wasserstoff-Schale auf Zündtemperatur erhitzt (hat die Expansion zum roten Riesen als Folge).



7.1

## 3 Aufgabe 6

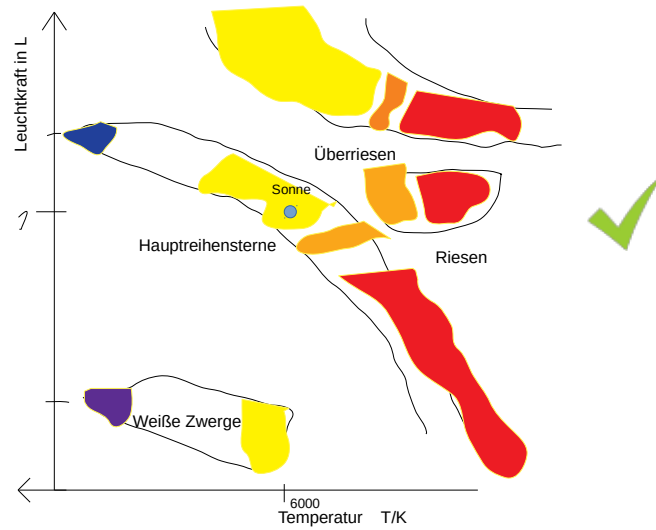
### Aufgabe 6: Hertzsprung-Russell-Diagramm

5 P.

- Skizzieren Sie das Hertzsprung-Russell-Diagramm (mit Achsenbeschriftung) und zeichnen Sie die Hauptreihe und drei typische Bereiche aus den Früh- und Spätstadien der Sternentwicklung ein.
- Erklären Sie qualitativ, was in dem HR-Diagramm dargestellt wird und gehen Sie insbesondere auf die Bedeutung der Hauptreihe ein.
- Wieso leuchten sehr heiße Sterne blau und etwas kältere Sterne rot?
- Welche Position hat die Sonne im HR-Diagramm und welche weiteren Sternentwicklungsschritte wird die Sonne durchlaufen?
- Welche Sterne im HR-Diagramm haben die kürzeste Lebensdauer und warum?

### 3.1 a)

Abbildung 1: Hertzsprung-Russel Diagramm





### 3.2 b)

In dem Hertzsprung-Russell Diagramm werden die verschiedenen Sterntypen in Abhängigkeit ihrer Leuchtkraft und Temperatur abgebildet. Dabei ist die Leuchtkraft logarithmisch als ein Vielfaches der Sonnenleuchtkraft aufgetragen. Gleichzeitig werden auch die Farben der Sterne eingetragen, welche unabhängig von ihrer Leuchtkraft sind und nur von der Temperatur hier abhängen. Das Diagramm unterteilt sich dabei grob in 4 Bereiche.

Die weißen Zwerge sind die lichtschwächsten Objekte in dem Diagramm und sind Sternüberreste.

Riesen und Überriesen sind sehr leuchtkräftige Sterne.

Die Hauptreihensterne sind von großer Bedeutung, da zum einen in ihnen je nach Masse die pp-Kette oder der CNO Zyklus als Reaktionen stattfindet und unsere Sonne zu dieser Kategorie gehört.

### 3.3 c)

Nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz verschiebt sich die Wellenlänge der maximalen Intensität eines schwarzen Körpers antiproportional, also  $\lambda \sim 1/T$ . Sterne sind näherungsweise schwarze Körper und damit verschiebt sich bei höheren Temperaturen die Wellenlänge in den blauen Spektralbereich und bei niedrigeren in den Roten.

### 3.4 d)

Die Sonne gehört im HR-Diagramm zu den Hauptreihensternen. Im Laufe ihrer Zeit wird die Sonne zu einem roten Riesen, sobald ihr Wasserstoff für den pp-Prozess ausgeht. Danach wird sie zu einem weißen Zwerg. Sobald der weiße Zwerg seine gesamte Restenergie abgestrahlt hat, wird dieser zu einem schwarzen Stern.

### 3.5 e)

Die Sterne mit der kürzesten Lebensdauer sind die Überriesen. Ihr Brennprozess im Kern ist aufgrund ihrer immensen Gravitation wesentlich intensiver. Dadurch wird der Wasserstoff in ihnen wesentlich schneller verbraucht.

# Index der Kommentare

---

- 1.1 Sehr nice, es ist getext :)
- 4.1  $M_r = M(r)$
- 5.1 die Potenz vergessen, 2,07 Watt < als Glühbirne...  
 $\cdot 10^{30}$  !!!
- 5.2 Sehr gute Abgabe  
4/5
- 5.3 OK
- 6.1 Reaktionsgleichungen wären schön...
- 6.2 Das wollte ich hören :)
- 7.1 Kann nicht mekern  
5/5
- 9.1 theoretisch sind es Neutronen Sterne, diese sind so schwach das sie es nichtmehr rein schaffen
- 9.2 jein
- 9.3 schwarzer Stern noch nie gehört. Ich vermute mal du meinst schwarzer Zwerg.
- 9.4 bezogen auf die nicht Hauptreihen Sterne ist das richtig
- 9.5 Sehr gute Abgabe, weiter so. An sich sehr nice, fehlen aber ein paar entscheidende Sätze.  
4/5