Physik IV Übungsblatt 2

Tobias Rücker
tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock
paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

1. Mai 2020

Abgabegruppe: **4 H**

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 1 **1**
1.1 a) 2
1.1.1 i) 2
1.1.2 ii) 3
1.1.3 iii) 4
1.2 b) 5
1.2.1 i) 5
1.2.2 ii) 5
1.2.3 iii) 7

2 Aufgabe 2 **7**
2.1 a) 7
2.2 b) 8
2.3 c) 11
2.4 d) 12

3 Aufgabe 3 **12**
3.1 a) 13
3.2 b) 13
3.3 c) 13
3.4 d) 14

1 Aufagabe 1

Betrachten Sie im Folgenden die Wellenfunktionen

a) $\Psi_1(x) = N_1 \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$,

b) $\Psi_2(x) = N_2 \frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$,

c) $\Psi_3(x) = N_3 \left(2\frac{x^2}{x_0^2} - 1\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$, **(FREIWILLIG!)**

mit $x_0 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie jeweils

i) die Normierungskonstante N_i.

ii) die Erwartungswerte $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$und $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

iii) die Orts-Impulsunschärfe $\Delta x \cdot \Delta p$.

Hinweise:

- Orts- und Impulsoperator sind gegeben durch

$$\hat{x}\Psi(x) = x\Psi(x) \tag{1}$$

$$\hat{p}\Psi(x) = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x) \, . \tag{2}$$

- Der Erwartungserwart des Operators $\hat{O}$ bezogen auf den Zustand $\Psi(x)$ ist gegeben durch

$$\langle \hat{O} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \Psi^*(x) \hat{O} \Psi(x) \, . \tag{3}$$

- Die mittlere Abweichung bzw. Unschärfe ΔO ist gegeben durch

$$\Delta O = \sqrt{\mathrm{Var}(\hat{O})} = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2} \, . \tag{4}$$

- Verwenden Sie

$$\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, x^{2n} \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{a^{2n+1}(2n-1)!!}{2^{n+1}} \tag{5}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$ und

$$n!! = \frac{(n+2)!!}{n+2} \, . \tag{6}$$

1.1 a)

1.1.1 i)

$$\Psi_1(x) = N_1 \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_1(x)|^2 \, \mathrm{d}x \overset{!}{=} 1 \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |N_1 \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

$$|N_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}x = 1$$

$$u = \frac{x}{x_0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x_0}\mathrm{d}x$$

$$|N_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x_0 \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}u = 1$$

$$|N_1|^2 \cdot x_0 \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

$$|N_1| = \pm\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}x_0}} \qquad (A) \tag{3}$$

1.1.2 ii)

$$\hat{x}\Psi = x\Psi \tag{4}$$

$$\langle \hat{x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |N_1|^2 exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$u = \frac{x}{x_0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{d}u = \frac{1}{x_0}\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} x_0 \cdot |N_1|^2 \cdot exp\left(-u^2\right)\,\mathrm{d}u$$

$$= x_0^2 |N_1|^2 \cdot \frac{1}{2}\left[e^{-u^2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\langle \hat{x} \rangle_{\Psi_1} = 0 \qquad\qquad (B) \tag{6}$$

$$\hat{p}\Psi_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi_1 \tag{7}$$

$$= i\hbar|N_1|\frac{x}{x_0^2} \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* \hat{p} \Psi_1\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |N_1|^2 exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \cdot i\hbar\frac{x}{x_0^2} exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= i\hbar|N_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}i\hbar|N_1|^2 x_0 \left[exp\left(-u^2\right)\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$\langle \hat{p} \rangle_{\Psi_1} = 0 \qquad\qquad (C) \tag{9}$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^2(x) x^2\,\mathrm{d}x \tag{10}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |N_1|^2 x^2 exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\,\mathrm{d}x$$

Da die Gaußkurve symmetrisch ist, folgt:

$$
\begin{aligned}
&= 2 \cdot \int_0^{\infty} |N_1|^2 x^2 exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&\overset{Blatt\ (5)}{=} 2|N_1|^2 \cdot \sqrt{\pi}\frac{x_0^3(1)!!}{2^2} \qquad \text{für } n=1 \\
&= 2|N_1|^2 \cdot \sqrt{\pi}\frac{x_0^3}{8} \qquad\qquad (D) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_{\Psi_1} \overset{(A)}{=} \frac{1}{2} \cdot x_0^2 \qquad (12)$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |N_1|^2 exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)(-\hbar)\frac{\partial^2}{\partial x^2}|N_1| \cdot exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}x \qquad (13)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\hbar|N_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x_0^2}\right) exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= -\hbar|N_1|^2 \int_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\left(-\frac{1}{x_0^2}+\frac{x^2}{x_0^4}\right) exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&\overset{!}{=} -2\hbar|N_1|^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{x_0^2}+\frac{x^2}{x_0^4}\right) exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \, \mathrm{d}x \\
&= -2\hbar|N_1|^2 \int_0^{\infty} \left(-\frac{1}{x_0^2}\sqrt{\pi}\frac{x_0}{2}+\frac{1}{x_0^4}\sqrt{\pi}\frac{x_0^3}{2^2}\right) \\
&= -2\hbar|N_1|^2\left(-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\hbar\frac{|N_1|^2}{x_0}
\end{aligned}
$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_{\Psi_1} \overset{(A)}{=} \frac{1}{2}\frac{\hbar}{x_0^2} \qquad (14)$$

1.1.3 iii)

$$\Delta x = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \sqrt{\frac{x_0^2}{2}} = \frac{|x_0|}{\sqrt{2}} \qquad (15)$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2x_0^2}} \qquad (16)$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{|x_0|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hbar}{2x_0^2}} = \frac{\hbar}{2} \qquad (17)$$

1.2 b)

$$\Psi_2(x) = N_2 \frac{x}{x_0} \exp - \frac{x^2}{2x_0^2} \tag{18}$$

1.2.1 i)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, |N_2 \frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)|^2 = 1 \tag{19}$$

$$|N_2|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \, |\frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)|^2 = 1$$

$$|N_2|^2 \left(\int_0^{\infty} dx \, \left(\frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\right)^2 + \int_{-\infty}^{0} dx \, \left(-\frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\right)^2\right) = 1$$

$$2|N_2|^2 \int_0^{\infty} dx \, \frac{x^2}{x_0^2} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) = 1$$

$$2|N_2|^2 \left(\sqrt{\pi} \frac{1}{x_0^2} \frac{x_0^3}{2^2}\right) = 1$$

$$|N_2|^2 = \frac{2}{x_0 \sqrt{\pi}}$$

$$|N_2| = \pm \sqrt{\frac{2}{x_0 \sqrt{\pi}}} \tag{20}$$

1.2.2 ii)

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \Psi_2^* \hat{x} \Psi_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \cdot |N_2|^2 \frac{x^2}{x_0^2} \exp(-\frac{x^2}{x_0^2}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \, \underbrace{\underbrace{\frac{x^3}{x_0^2}}_{\text{ungerade Fkt}} \underbrace{\exp(-\frac{x^2}{x_0^2})}_{\text{gerade Fkt}}}_{\text{ungerade Fkt}} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{Integral} \;\; I \in (-\infty, \infty) \; 0 \;\; \text{ist} \\ &\langle \hat{x} \rangle_{\Psi_2} = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |N_2|^2 x^2 \frac{x^2}{x_0^2} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right) \tag{23}$$

$$= \frac{1}{x_0^2}|N_2|^2 2 \int_0^{\infty} dx\, x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x_0^2}|N_2|^2 2\sqrt{\pi}\frac{x_0^5(2\cdot 2-1)!!}{2^3}$$

$$= \frac{3\sqrt{\pi}}{4}x_0^3|N_2|^2$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle_{\Psi_2} = \frac{3}{2}x_0^2 \tag{24}$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_2^* \hat{p} \Psi_2 \tag{25}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, N_2^* \frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) (-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x_0}N_2 \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\right)$$

$$= (-i\hbar)\frac{|N_2|^2}{x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$\left(\text{zwei Ungerade Fkt. } x\exp\left(-\tfrac{x^2}{x_0^2}\right) \wedge x^3 \exp\left(-\tfrac{x^2}{x_0^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \langle \hat{p} \rangle_{\Psi_2} = 0 \tag{26}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{x}{x_0} N_2^* exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)(-\hbar^2)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{x_0}N_2 \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\right) \tag{27}$$

$$= -\hbar^2 \frac{|N_2|^2}{x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(1-\frac{x^2}{x_0^2}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\right)$$

$$= -\hbar^2 \frac{|N_2|^2}{x_0^2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)\left(-\frac{3x}{x_0^2}+\frac{x^3}{x_0^4}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right)$$

$$= -\hbar^2 \frac{|N_2|^2}{x_0^4}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \left(-3x^2+\frac{x^4}{x_0^2}\right)\exp(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$$

$$= -\hbar^2 \frac{|N_2|^2}{x_0^4}\sqrt{\pi}2\left(\frac{-3x_0^3}{2^2}+\frac{x_0^5 3!!}{x_0^2\cdot 2^3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2\sqrt{\pi}|N_2|^2\frac{1}{x_0}$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle_{\Psi_2} = \frac{3}{2}\frac{\hbar^2}{x_0^2} \tag{28}$$

1.2.3 iii)

$$\Delta x = \sqrt{<\hat{x}^2> - <\hat{x}>^2} = \sqrt{3}2|x_0| \tag{29}$$

$$\Delta p = \sqrt{<\hat{p}^2> - <\hat{p}>^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\hbar}{|x_0|}} \tag{30}$$

$$\Delta x \Delta p = \frac{3}{2}\hbar \tag{31}$$

2 Aufgabe 2

Aufgabe 2: Wellenfunktionen **(5 Punkte)**

Betrachten Sie die eindimensionalen, normierten Wellenfunktionen Ψ_0 und Ψ_1 mit folgenden Eigenschaften:

$$\Psi_0(-x) = \Psi_0(x) = \Psi_0^*(x), \qquad \Psi_1(x) = N\frac{\mathrm{d}\Psi_0(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{7}$$

sowie deren Linearkombination

$$\Psi(x) = c_0\Psi_0(x) + c_1\Psi_1(x) \tag{8}$$

mit $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ und c_0, c_1, $N \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie die Orthogonalität zwischen den Zuständen Ψ_0 und Ψ_1 sowie, dass Ψ normiert ist.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte für $\hat{x}$ und $\hat{p}$ für die Zustände Ψ_0, Ψ_1 und Ψ.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ für den Zustand Ψ_0. Zeigen Sie, dass Folgendes gilt:

$$\int \Psi_0^*(x)(\hat{T}^2\Psi_0)(x)\mathrm{d}x = \int \Psi_0^*(x)(\hat{T}\Psi_0)(x)\mathrm{d}x \int \Psi_1^*(x)(\hat{T}\Psi_1)(x)\mathrm{d}x. \tag{9}$$

d) Zeigen Sie:

$$\int \Psi_0^*(x)(\hat{x}^2\Psi_0)(x)\mathrm{d}x \int \Psi_1^*(x)(\hat{p}^2\Psi_1)(x)\mathrm{d}x \geq \frac{\hbar^2}{4} \tag{10}$$

Nutzen Sie hierzu die Cauchy-Schwarzsche und die folgende Ungleichung:

$$\int \Psi_1^*(x)(\hat{T}\Psi_1)(x)\mathrm{d}x \geq \int \Psi^*(x)(\hat{T}\Psi)(x)\mathrm{d}x \geq \int \Psi_0^*(x)(\hat{T}\Psi_0)(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

2.1 a)

Beweis der Orthogonalität zwischen Ψ_1 und Ψ_2

Fall $\Psi_0 = \Psi_1$

$$<\Psi_0, \Psi_0> = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0^*\Psi_0 \tag{32}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi_0|^2 \tag{33}$$

$$= 1 \tag{34}$$

Beweis, dass Ψ bereits normiert ist:
Fall: $\Psi_0 \neq \Psi_1$

$$\begin{aligned}
<\Psi_0, \Psi_1> &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0^* \cdot \Psi_1 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0 N \frac{d\Psi_0(x)}{dx} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{N}{2} \frac{d}{dx} (\Psi_0(x) \cdot \Psi_0(x)) \\
&= \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d}{dx} (\Psi_0(x) \cdot \Psi_0^*(x)) \\
&= \frac{N}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{d}{dx} (|\Psi_0(x)|^2) \\
&= \frac{N}{2} [|\Psi_0(x)|^2]_{-\infty}^{\infty}
\end{aligned} \tag{35}$$

$\Psi_0(x)$ ist gerade und läuft im Unendlichen gegen 0

$$\Rightarrow = 0$$

$$\mathbb{Z} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2 = 1 \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} dx\, |\Psi(x)|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |c_0 \Psi_0(x) + c_1 \Psi_1(x)|^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (c_0 \Psi_0 + c_1 \Psi_1)^* \, (c_0 \Psi_0 + c_1 \Psi_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (c_0^* \Psi_0 + c_1^* \Psi_1^*) \, (c_0 \Psi_0 + c_1 \Psi_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |c_0|^2 |\Psi_0|^2 + |c_1|^2 |\Psi_1|^2 + c_0^* c_1 \Psi_0 \Psi_1 + c_1^* c_0 \Psi_0 \Psi_1^* \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |c_0|^2 |\Psi_0|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, |c_1|^2 |\Psi_1|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, c_0^* c_1 \Psi_0 \Psi_1 + \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, c_1^* c_0 \Psi_0 \Psi_1^* \\
&= |c_0|^2 + |c_1|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{c_0^* c_1}{N} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (|\Psi_0|^2) + \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{c_1^* c_0}{N^*} \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (|\Psi_0|^2) \\
&= 1 + \underbrace{\left[\frac{c_0^* c_1}{2N} |\Psi_0|^2 \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\left[\frac{c_1^* c_0}{2N^*} |\Psi_0|^2 \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

2.2 b)

Berechnung der Erwartungswerte für den Zustand Ψ_0

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0^* \hat{x} \Psi_0 && (37)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0^* x \Psi_0 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad \underbrace{x|\Psi_0|^2}_{\text{ungerade Fkt}} \\
&\Rightarrow \langle\hat{x}\rangle_{\Phi_0} = 0 && (38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{p}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0 (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0 && (39)\\
&= (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} dx \quad \underbrace{\Psi_0^* \frac{\Psi_1}{N}}_{\text{ungerade Fkt}} \\
&\Rightarrow \langle\hat{p}\rangle_{\Psi_0} = 0 && (40)
\end{aligned}
$$

Berechnung der Erwartungswerte für den Zustand Ψ_1

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{x}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_1^* \hat{x} \Psi_1 && (41)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, N^* \frac{d\Psi_0^*}{dx} N \frac{d\Psi_0}{dx} \\
&= |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \underbrace{x \left(\frac{d\Psi_0}{dx}\right)^2}_{ungerade} \\
&\Rightarrow \langle\hat{x}\rangle_{\Psi_0} = 0 && (42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{p}\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_1^* \hat{p} \Psi_1 && (43)\\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, N^* \frac{d\Psi_0}{dx} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{d\Psi_0}{dx} \right) \\
&= |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{d\Psi_0}{dx} \frac{d^2\Psi_0}{dx^2} \\
&= |N|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi_0}{dx}\right)^2 \\
&= \frac{|N|^2}{2} \left[\left(\frac{d\Psi_0}{dx}\right)^2 \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= 0 && (44)
\end{aligned}
$$

Berechnung der Erwartungswerte für den Zustand Ψ

$$
\begin{aligned}
\langle \hat{x} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi^* \hat{x} \Psi \qquad (45) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, (c_0\Psi_0 + c_1\Psi_1)^* x (c_0\Psi_0 + c_1\Psi_1) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x(|c_0|^2|\Psi_0|^2 + |c_1|^2|\Psi_1|^2 + c_0^* c_1 \Psi_0^* \Psi_1 + c_0 c_1^* \Psi_0 \Psi_1^*) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x|c_0|^2|\Psi_0|^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} x|c_1|^2|\Psi_1|^2\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} c_0^* c_1 x \Psi_0^* \Psi_1\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} c_0 c_1^* x \Psi_0 \Psi_1^*\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + 0 + \int_{-\infty}^{\infty} c_0^* c_1 N x \Psi_0^* \frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x} + \int_{-\infty}^{\infty} c_0 c_1^* N^* x \Psi_0 \frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0^* c_1 N}{2} x \frac{\mathrm{d}\Psi_0^2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_0 c_1^* N^*}{2} x \frac{\mathrm{d}\Psi_0^2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{c_0^* c_1 N + c_0 c_1^* N^*}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\mathrm{d}\Psi_0^2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Nebenrechnung:

$$
x\frac{\mathrm{d}\Psi_0^2}{dx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Psi_0^2 x) - \Psi_0^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x \qquad (46)
$$

Fortsetzung der Rechnung:

$$
= \left(\frac{c_0^* c_1 N + c_0 c_1^* N^*}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\Psi_0^2 x)}_{=0} - \Psi_0^2\,\mathrm{d}x \qquad (47)
$$

Randterm verschwindet im Unendlichen

$$
= -\left(\frac{c_0^* c_1 N + c_0 c_1^* N^*}{2}\right) \qquad (48)
$$

$$\langle\hat{p}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi^* \hat{p} \Psi \tag{49}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, (c_0\Psi_0 + c_1\Psi_1)^*(-i\hbar)\frac{\partial}{\partial x}(c_0\Psi_0 + c_1\Psi_1) \tag{50}$$

$$= (-i\hbar)\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, (c_0^*\Psi_0^* + c_1^*\Psi_1^*)\left(c_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + c_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right) \tag{51}$$

$$= (-i\hbar)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \underbrace{|c_0|^2\Psi_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}}_{\text{ungerade}\Rightarrow=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \underbrace{|c_1|^2\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}}_{\text{ungerade}\Rightarrow=0} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, c_0^*c_1\Psi_0^*\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, c_0c_1^*\Psi_1^*\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right) \tag{52}$$

$$= (-i\hbar)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, c_0^*c_1 N\Psi_0\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{c_0c_1^*}{N}|\Psi_1|^2\right) \tag{53}$$

$$= (-i\hbar)\left(\frac{c_0c_1^*}{N} + c_0^*c_1 N\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_0\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right) - \frac{|\Psi_1|^2}{|N|^2}\right)\right) \tag{54}$$

$$= i\hbar\left(\frac{c_0^*c_1}{N^*} - \frac{c_0c_1^*}{N}\right) \tag{55}$$

2.3 c)

Berechnung des Erwartungswertes der kinetischen Energie für Ψ_0

$$\langle\hat{T}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_0^*\hat{T}\Psi_0 \tag{56}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_0\frac{\hat{P}^2}{2m}\Psi_0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_0\frac{1}{2m}(-i\hbar)^2\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial x^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \Psi_0\frac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{\mathrm{d}x^2}$$

Nebenrechnung:

$$\Psi_0\frac{\mathrm{d}^2\Psi_0}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Psi_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi_0\right) - \left(\frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x}\right)^2 \tag{57}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x} = \frac{\Psi_1}{N}\frac{\Psi_1^*}{N^*} = \frac{|\Psi_1|^2}{|N|^2} \tag{58}$$

Fortsetzung der Rechnung:

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\Psi_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi_0\right) - \frac{|\Psi_1|^1}{|N|^2}\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m|N|^2} \tag{59}$$

Beweis der Relation $\int \Psi_0^*(x)(\hat{T}^2\Psi_0)(x)\,\mathrm{d}x = \int \Psi_0^*(x)(\hat{T}\Psi_0)(x)\,\mathrm{d}x \int \Psi_1^*(x)(\hat{T}\Psi_1)(x)\mathrm{d}x$
Umformung der linken Seite:

$$\int \mathrm{d}x\, \Psi_0^*(\hat{T}^2\Psi_0) = \int \Psi_0 \left(\frac{\hat{p}^4}{4m^2}\Psi_0\right) \tag{60}$$

$$= \int \mathrm{d}x\, \Psi_0 \frac{\hat{p}^2}{(2m)^2}\left((-i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi_0\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\hbar^4}{4m^2}\int \mathrm{d}x\, \Psi_0 \frac{\partial^4 \Psi_0}{\partial x^4}}} \tag{61}$$

Umformung der rechten Seite Gleichung:

$$\int \Psi_0^* \hat{T}\Psi_0\,\mathrm{d}x \int \Psi_1^*\hat{T}\Psi_1\,\mathrm{d}x = \frac{\hbar^2}{2m|N|^2}\int N^* \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\frac{\hat{p}^2}{2m}N\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\,\mathrm{d}x \tag{62}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m^2}\int \frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x}(-i\hbar)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}\Psi_0}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\hbar^4}{4m^2}\int \frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial x^3}\mathrm{d}x \tag{63}$$

Nebenrechnung:

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial x}\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_0\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial x^3}\right) - \Psi_0\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial x^4} \tag{64}$$

Fortsetzung der Rechnung:

$$= -\frac{\hbar^4}{4m^2}\int \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(\Psi_0\frac{\partial^3\Psi_0}{\partial x^3}\right)}_{=0} - \Psi_0\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial x^4}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \underline{\underline{\frac{\hbar^4}{4m^2}\int \mathrm{d}x\, \Psi_0\frac{\partial^4\Psi_0}{\partial x^4}}} \tag{65}$$

2.4 d)

3 Aufgabe 3

Aufgabe 3: Schrödingergleichung **(5 Punkte)**

a) Geben Sie die eindimensionale Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung für ein freies Teilchen der Masse m an.

b) Verwenden Sie den Ansatz

$$\Psi(x,t) = \varphi(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{E}{\hbar}t\right) \tag{12}$$

für die Wellenfunktion des freien Teilchens, um die *stationäre* Schrödingergleichung für φ zu erhalten.
Um welche Art von Gleichung, die Sie bereits aus der linearen Algebra kennen, handelt es sich hierbei?

3.1 a)

Die eindimensionale Schrödingergleichung in der Ortsdarstellung lautet:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi \tag{66}$$

3.2 b)

$$\Psi(x,t) = \varphi \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{67}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\frac{E}{\hbar} \cdot \varphi(x) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{68}$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{69}$$

$e^{-i\frac{E}{\hbar}t} = 1$, da der stationäre Zustand zeitunabhängig ist. Werden nun Gleichungen (68) und (69) in Gleichung (66) eingesetzt, ergibt sich:

$$\tag{70}$$

$$\Rightarrow i\hbar(-i\frac{E}{\hbar} \cdot \varphi(x)) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V\varphi$$

$$\Leftrightarrow E\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + V\varphi \tag{71}$$

Bei der Gleichung (71) handelt es sich um die Eigenwertgleichung der Energie.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Ansatzes

$$\varphi(x) = \exp\left(\mathrm{i}\frac{p}{\hbar}x\right) \tag{13}$$

die Energie-Impuls-Relation.

d) Welcher Dispersionrelation $\omega = \omega(k)$ entspricht die in c) bestimmte Energie-Impuls-Relation?

3.3 c)

$$\varphi(x) = e^{i\frac{p}{\hbar}x} \tag{72}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \cdot e^{i\frac{p}{\hbar}x} \tag{73}$$

$$E = (-\frac{\hbar}{2m}) \cdot (-\frac{p^2}{\hbar^2}) + V \tag{74}$$

$$E = \frac{p^2}{2m\hbar} + V \tag{75}$$

3.4 d)

Aus $k = \frac{2\pi}{\lambda},\ p = \frac{2\pi\hbar}{\lambda} = k\hbar$ und (75) folgt:

$$\hbar\omega = \frac{k^2 \cdot \hbar^2}{2m\hbar} + V \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\underline{\omega(k) = \frac{k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar}}} \tag{76}$$