

ATP Übungsblatt 6

Tobias Rücker

tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock

paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

9. Juni 2020

Abgabegruppe: **Mittw. 10-12 Uhr**

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabe 16	1
1.1	a)	2
1.2	b)	2
2	Aufgabe 17	3
2.1	a)	4
2.2	c)	5
3	Aufgabe 18	6
3.1	a)	7
3.2	b)	7
3.3	c)	9
3.4	d)	9

1 Aufgabe 16

Aufgabe 16: *Erste Messung des CMB*

5 P.

Bereits 1941 wurde der kosmische Mikrowellenhintergrund von Walter Adams und Andrew McKellar bei Beobachtungen des Sterns Zeta Ophiuchi indirekt gemessen. Diese Beobachtung soll in dieser Aufgabe näher untersucht werden.

Dicyan-Moleküle, als Summenformel $(\text{CN})_2$, existieren reichlich in interstellaren Wolken. Wenn eine Wolke entlang der Sichtlinie einer hellen optischen Quelle liegt, erzeugt das Dicyan schmale Absorptionslinien im Quellspektrum. Da die Übergänge für Dicyan bei optischen Wellenlängen liegen, können diese Messungen sehr genau durchgeführt werden und sind deshalb weit verbreitet.

Dicyan besitzt dabei sogenannte Rotationsanregungen, welche durch die Temperatur T_{CMB} des kosmischen Mikrowellenhintergrundes beeinflusst werden. Hierbei kann die Messung der relativen Population der verschiedenen Energieniveaus zur Schätzung von T_{CMB} verwendet werden. Diese Messung geschieht durch die Beobachtung interstellarer Moleküle.

Zusätzlich zur Anregung des gesamten Systems durch den Mikrowellenhintergrund muss prinzipiell der Beitrag weiterer Quellen berücksichtigt werden. Dieser zusätzliche Beitrag ist bei kalten, nicht dichten Wolken typischerweise in der Größenordnung von 0,1 K liegt und damit vernachlässigbar im Vergleich zu $T_{\text{CMB}} = 2,73 \text{ K}$.

Mit einem neuen Spektrographen an dem damals größten Teleskop, dem 100-inch Hooker Teleskop am Mount Wilson Observatory, konnten ab 1935 Spektren viel feiner aufgelöst werden. Infolgedessen konnten viele weitere Absorptionslinien in den Spektren heller Sterne entdeckt werden. So konnte auch Adams schwache Linien im Spektrum von Zeta Ophiuchi messen. McKellar identifizierte die Übergänge im blauen Teil des Spektrums als Dicyan-Moleküle im interstellaren Raum zwischen der Erde und dem Stern und führte die Linien auf die Moleküle zurück, die sich in einem (angeregten) Rotationszustand befinden.

McKellar konnte 23 Jahre vor der Entdeckung des CMBs durch Penzias und Wilson und auch 8 Jahre vor der Vorhersage durch Gamov die Temperatur des CMBs bestimmen.

- a) Zeigen Sie mit der Maxwell-Boltzmann-Statistik, dass das Verhältnis von N_a Teilchen mit Energie E_a und N_b angeregten Teilchen mit den Energien E_b sich zu

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} \exp\left(-\frac{E_b - E_a}{k_b T}\right) \quad (1)$$

ergibt, wobei g_i die Entartung darstellt.

- b) Ein Dicyanmolekül hat drei erste angeregte Rotationszustände, von denen jeder entartet ist und eine Energie hat, die $4,8 \cdot 10^{-4}$ eV über dem Grundzustand liegt. Bei den Beobachtungen wurde festgestellt, dass sich verglichen mit dem Grundzustand etwa 27 % der Moleküle im angeregten Zustand befinden. Unter der Annahme, dass sich die Molekülwolken im thermischen Gleichgewicht mit der CMB befinden, schätzen Sie die Temperatur des CMBs ab.

1.1 a)

Nach der Maxwell-Boltzmann Statistik ergibt sich für die Anzahl der Teilchen

$$\frac{\langle N_i \rangle}{N} = \frac{1}{Z} \frac{g_i}{e^{-\frac{E_i}{k_b T}}} \quad (1)$$

$$\langle N_i \rangle = \frac{N}{Z} \frac{g_i}{e^{-\frac{E_i}{k_b T}}} \quad (2)$$

$$\frac{\langle N_b \rangle}{\langle N_a \rangle} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\frac{E_b - E_a}{k_b T}} \quad (3)$$

$$\frac{\langle N_b \rangle}{\langle N_a \rangle} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\frac{E_b - E_a}{k_b T}} \quad (4)$$

1.2 b)

$$\ln\left(\frac{N_b g_a}{N_a g_b}\right) = -\frac{E_b - E_a}{k_b T} \quad (5)$$

$$T = -\frac{E_b - E_a}{k_b \ln\left(\frac{N_b g_a}{N_a g_b}\right)} \quad (6)$$

27% der Moleküle im angeregten Zustand

$$\Rightarrow \frac{N_b}{N_a} = 0,27 \quad (7)$$

angeregter Zustand ist um $4,8 \cdot 10^{-4}$ eV

$$\Rightarrow E_b = E_a + 4,8 \cdot 10^{-4} \text{ eV} \quad (8)$$

$$g_a = 1 \text{ und } g_b = 3$$

$$T = -\frac{4,8 \cdot 10^{-4} \text{ eV}}{k_b \ln \left(0, 27 \frac{1}{3} \right)} \quad (9)$$

$$T = 2,313 \text{ K} \quad (10)$$



5.1

2 Aufgabe 17

Aufgabe 17: *Multipolspektrum*

5 P.

In der Vorlesung wurde die kosmische Mikrowellenhintergrundstrahlung (kurz CMB) besprochen.

- a) Erklären Sie, was der CMB ist und wie er entstanden ist. Nutzen Sie bei Ihrer Erklärung die folgenden Zahlenwerte, welche alle im Zusammenhang mit dem CMB stehen, und ordnen Sie diese in den richtigen Kontext ein: 380 000 Jahre, $z = 1089$, $T = 2,725 \text{ K}$, $T = 3000 \text{ K}$, $\lambda = 1,06 \text{ mm}$.

In der folgenden Abbildung ist das sogenannte Multipolspektrum des kosmischen Mikrowellenhintergrundes dargestellt, welches die vorhandenen Anisotropien der Hintergrundstrahlung veranschaulicht.

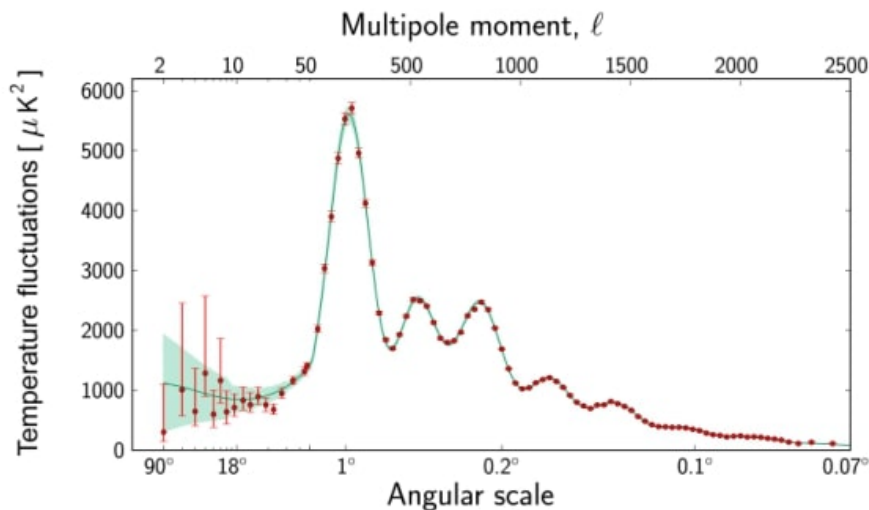


Abbildung 1: Multipolspektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung, aufgenommen durch die Raumsonde Planck. Quelle: ESA

- b) Erklären Sie, welche Größen im Multipolspektrum gegeneinander aufgetragen wurden und was die anschauliche Bedeutung dieser Größen ist. Was bedeutet es beispielsweise, wenn ein Peak im Spektrum zu sehen ist?

Fünf der wichtigsten Effekte, welche die Anisotropien des CMB verursachen, sind:


- Baryonisch akustische Oszillationen
- Sachs-Wolfe-Effekt
- Integrierter Sachs-Wolfe-Effekt
- Silk-Dämpfung
- Sunyaev-Zeldovich Effekt

- c) Erklären Sie qualitativ *zwei* der fünf angegebenen Effekte. Verwenden Sie Skizzen wenn dies bei der Erklärung hilfreich sein könnte.


2.1 a)

Als cosmic microwave background (CMB) wird die elektromagnetische Strahlung bezeichnet, die wir auf der Erde messen können, die aber nicht von der Erde stammt. Der CMB entstand im frühen Universum, wo das Universum aus einer Dichten Masse (Plasma) bestand, welche wiederum aus Protonen und Elektronen bestand. Über einen Zeitraum von 380000 Jahren hat sich diese Masse soweit ausgedehnt, dass sich die Protonen und Elektronen zu Wasserstoff Kernen **fusionieren** konnten. Dies geschah bei einer Temperatur

6.1



von ca. 3000 K. Da elektromagnetische Strahlung von der Lorenzkraft beeinflusst wird, hatte die Rekombination der Protonen und Elektronen die Freisetzung jener Strahlung zur Folge. Denn die entstandenen Neutronen und Photonen wechselwirken nicht miteinander, was es dem Licht erlaubt der abgekühlten Plasmawolke zu entkommen. Nun sind Materie und Strahlung nicht mehr gebündelt. Dieser Zeitpunkt wird auch als surface of last scattering bezeichnet, welcher für den heute zu messenden CMB verantwortlich ist. Durch die Expansion des Raums wurden die freigesetzten Photonen um einen Faktor von $z = 1089$ gestreckt, was einer besonders starken Rotverschiebung zugrunde liegt. Durch die Rotverschiebung scheint die Temperatur der emittierten Photonen deshalb gleich der eines Schwarzkörpers von 2,725 K zu sein. Wird also das Leistungsspektrum der Strahlung $\partial E(\lambda)/\partial \lambda$ gegen die Wellenlänge λ aufgetragen, ergibt sich aus der entstehenden Kurve das Maximum der Wellenlänge $\lambda = 1,06 \text{ mm}$. Die Kurve zeigt, dass das Licht trotz einer relativ homogenen Emission unterschiedlich stark gestreckt wurde.




2.2 c)

Baryonisch akustische Oszillationen:


7.1

Baryonen beschreibt Materie wie Neutronen und Protonen, welche aus drei Quarks bestehen. Vor der Rekombination der Elektronen und Protonen zu Wasserstoffkernen, bestand das Universum aus einer Plasmamasse, welche sich aus Baryonen, Protonen und Elektronen zusammensetzte. Die akustischen Oszillationen entstehen dadurch, dass die Protonen und Elektronen durch Anziehung miteinander wechselwirken. Die Elektronen streuen die Protonen, welche dadurch eine "Protonen-Flüssigkeit" mit enormen Druch formen. Wenn also die Elektronen anfangen sich zu bewegen, müssen die Protonen nachziehen, da sonst ein elektrisches Feld induziert werden würde, welche wiederum die Protonen nachziehen würde. Folglich sind, wie in der a) bereits beschrieben, Materie und Strahlung als Baryon-Photon-Flüssigkeit miteinander verbunden. Ähnlich wie bei Schall im Wasser verglichen mit Schall in der Luft, ist die Schallgeschwindigkeit in der Baryon-Photon-Flüssigkeit deutlich höher, nämlich bei ca. $170\,000 \text{ km s}^{-1}$. Wenn also eine besonders hohe Dichte in der Baryon-Photon-Flüssigkeit auftritt, entsteht ein hoher Druck, welcher sich radialsymmetrisch in Form einer Schallwelle ausbreitet. Im Zentrum dieser Schallwelle sitzt ein Kern aus Antimaterie. Die Schallwelle propagiert solange durch die Baryon-Photon-Flüssigkeit (ca. 380000 J_a), bis zum Zeitpunkt der Rekombination von Protonen und Elektronen, wodurch die Photonen freigesetzt werden. Daher folgt der Begriff surface of last scattering, da die Schallwelle eine Sphäre bildet, von dessen Oberfläche die Photonen emittiert werden. Da sich das Universum über die 380000-400000 Jahre ausdehnt, kann der Radius dieser Sphäre auf ca. 450000 Lichtjahre geschätzt werden.



Sunjaew-Zeldovich-Effekt:

Beim Sunjaew-Zeldovich-Effekt können Elektronen aus einem heißen Gas eines Galaxienhaufens mit den Photonen der CMB streuen. Die Streuwahrscheinlichkeit selbst ist dabei sehr gering. Das eine Photon würde uns dadurch nicht erreichen, allerdings existiert statistisch ein weiteres, welches in unsere Sichtlinie gestreut würde. Diese hätte



allerdings eine veränderte Energie durch den Streuprozess. Dieser Prozess wird inverser Compton-Effekt genannt. Dadurch verändert sich in der Richtung des Galaxienhaufens das Planck-Spektrum.

8.1



3 Aufgabe 18

Aufgabe 18: Kolhörsters Ballonflug

5 P.

Die Entdeckung der kosmischen Strahlung geht auf Victor Hess im Jahr 1912 zurück. Mithilfe von Ballonfahrten in der Erdatmosphäre konnte er den damals als "Höhenstrahlung" bezeichneten Effekt nachweisen, dass die Ionisation mit der Höhe deutlich weniger abnimmt als zunächst angenommen und für noch größere Höhen sogar ansteigt.

Weitere Ballonflüge wurden von Werner Kolhörster durchgeführt. 1913 führte er drei Flüge durch und 1914 führte er einen Ballonflug auf bis zu 9000 m durch. Die Messergebnisse der Ballonflüge sind in Tabelle 1 angegeben.

Tabelle 1: Messdaten der Ballonflüge von Kolhörster. Angegeben ist jeweils die Differenz der gemessenen Ionisation in der angegebenen Höhe mit der gemessenen Ionisation auf dem Erdboden, die Einheit ist Ionenpaare pro $\text{cm}^3 \cdot \text{s}$.
Quelle der Daten: Nucl. Phys. B 238, 11 (2013)

Flughöhe h / m	Messwerte 1913	Messwerte 1914
1000	-1,5	
2000	1,2	
3000	4,0	4,3
4000	8,3	9,3
5000	16,5	17,2
6000	28,7	28,7
7000		44,2
8000		61,3
9000		80,4

- Bewerten Sie qualitativ die Messergebnisse und erklären Sie das zugrundeliegende Phänomen aus heutiger Sicht.
- Fitten Sie die in der Tabelle angegebenen Messdaten mit einem Programm Ihrer Wahl an eine passende Fitfunktion. Vergessen Sie dabei nicht, ggf. einen Messwert für $h = 0$ zu berücksichtigen. Verwenden Sie den Mittelwert wenn für eine Flughöhe zwei Werte aus verschiedenen Jahren angegeben sind.

Sollten Sie diese Teilaufgabe nicht bearbeiten können nutzen Sie für die weiteren Teilaufgaben die Funktion

$$I(h) = ah + bh^2 + ch^3 \quad (2)$$

mit den Parametern $a = -2$, $b = 1$, $c = 0.03$.

- c) Bestimmen Sie, für welche Flughöhe die Ionisation den minimalen Wert annimmt.
- d) Bestimmen Sie die Höhe der effektiven Dosis, welcher Kolhörster bei seinem Ballonflug ausgesetzt war. Nehmen Sie dafür an, dass die Ionisation direkt proportional zur Strahlenexposition sei (d.h. die doppelte Ionisation entspreche der doppelten effektiven Dosis). Die effektive Dosis pro Jahr sei durch 2 mSv gegeben, die von Kolhörster auf der Erde gemessene Ionisation beträgt ca. 17,5 Ionenpaare pro $\text{cm}^3 \cdot \text{s}$. Gehen Sie bei dem Ballonflug von einer Gesamtdauer (d.h. Aufstieg und Abstieg) von 8 Stunden, ohne Pausen und bei einer gleichförmigen Bewegung, aus.

Wie lange dauert es bis man auf der Erde die zum Ballonflug äquivalente effektive Dosis aufgenommen hat?

3.1 a)

Vor Kohlhörsters Experiment, wurde angenommen, dass der Strahlungshintergrund ausschließlich von der Untergrundstrahlung der Erde ausgeht. Demnach sollte der Strahlungshintergrund mit zunehmender Höhe abfallen. Kohlhörsters Ballonflug hingegen zeigte, dass die nicht der Fall ist. Sondern vielmehr, dass der Strahlungshintergrund bei zunehmender Höhe auf ein Vielfaches dessen steigt, was am Erdboden gemessen wird. Interessanterweise, wird bei einer relativ geringen Höhe (ca. 1000m) ein Abfall der Strahlung gemessen, was mit der vorherigen Ansicht, nämlich, dass die Untergrundstrahlung bei zunehmender Höhe abnimmt, übereinstimmt.

Heutzutage wissen wir, dass die gemessene kosmische Strahlung bei größerer Höhe immer weiter zunimmt. Dies hat mit der Ionisation der Luft zu tun, die bei zunehmender Höhe an Dichte verliert, weshalb die kosmische Strahlung weniger abgeschirmt werden kann.

3.2 b)

Die folgende Tabelle gibt die Mittelwerte der in den Jahren 1913 und 1914 gemessenen Strahlungsintensitäten und die dazugehörige Höhe wieder.

Tabelle 1: Höhe gegen Mittelwerte der Messwerte aus 1913 und 1914

Höhe h [m]	Intensität I [$\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}$]
0	0.00
1000	-1.50
2000	1.20
3000	4.15
4000	8.80
5000	16.85
6000	28.70
7000	44.20
8000	61.30
9000	80.40

Mithilfe der Messwerte aus Tabelle 1, der Gleichung:

$$I(h) = ah + bh^2 + ch^3$$

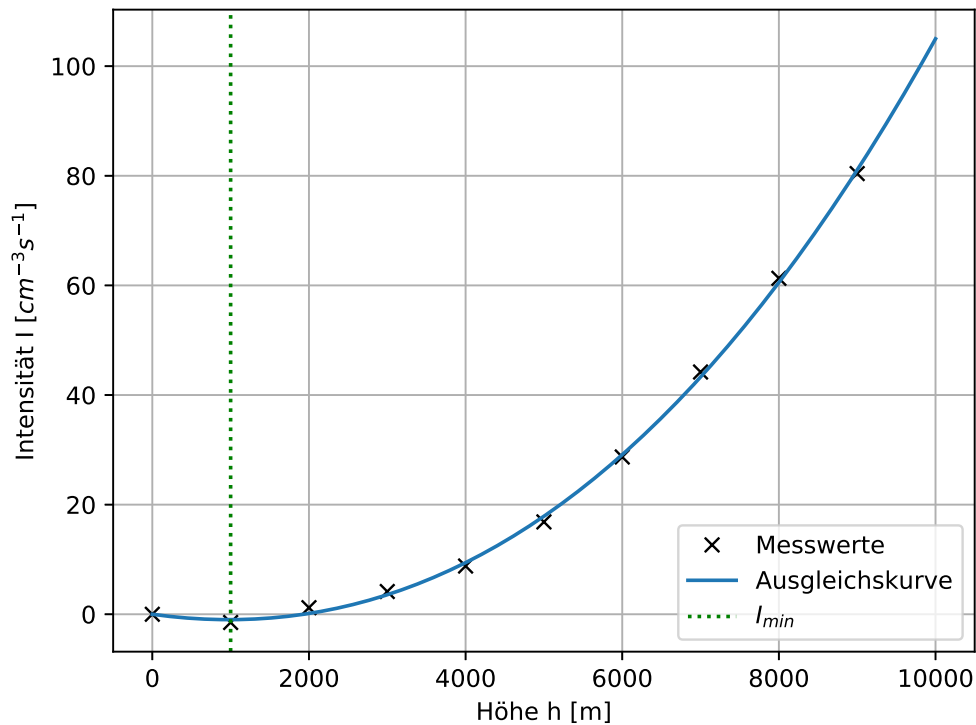
und den dazugehörigen Parametern

$$\begin{aligned} a &= -1,9913 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ b &= 9,7787 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ c &= 2,7113 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

10.1



lässt sich der folgende Graph erstellen:



3.3 c)

Das Ionisationsminimum liegt bei:

$$h_{min} = 1000 \text{ m}$$



11.1

3.4 d)

Die jährliche effektive Dosis beträgt:

$$\text{Dosis}_{\text{jahr}} = 2 \text{ mSv}$$

$$\Rightarrow \text{Dosis}_{\text{sec}} = 0,634 \text{ nSv} \quad (\text{Dosis pro Sekunde})$$

11.2

Da die Dosis proportional zur Ionisation ist, gilt:

$$\text{Dosis}_{\text{sec}} \propto I_0 \Leftrightarrow 0,634 \text{ nSv s}^{-1} \propto 17,5 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Daraus ergibt sich der Proportionalitätsfaktor:

$$\alpha = \frac{\text{Dosis}_{\text{sec}}}{I_0}$$

Die Höhe kann bei gleichbleibender Geschwindigkeit als Geradengleichung angesehen werden. Da sich der gesamte Flug aus einer Aufsteige- und Absteigephase zusammensetzt, folgt für die Höhe:

$$h(t) = \begin{cases} m \cdot t & \text{für } t_{\text{Start}} \leq t \leq t_{0.5} & \text{Aufsteigen} \\ -m \cdot t + \frac{h_{\text{max}}}{2t_{0.5}^2} & \text{für } t_{0.5} \leq t \leq t_{\text{Ende}} & \text{Absteigen} \end{cases}$$

12.1

Die Geradengleichungen können für h in die aus Aufgabenteil b) bekannte Gleichung der Ionisation $I(h)$ eingesetzt werden, woraus folgt:

$$I(t) = \begin{cases} a(m \cdot t) + b(m \cdot t)^2 + c(m \cdot t)^3 & \text{für } t_{\text{Start}} \leq t \leq t_{0.5} \\ a\left(-m \cdot t + \frac{h_{\text{max}}}{2t_{0.5}^2}\right) + b\left(-m \cdot t + \frac{h_{\text{max}}}{2t_{0.5}^2}\right)^2 + c\left(-m \cdot t + \frac{h_{\text{max}}}{2t_{0.5}^2}\right)^3 & \text{für } t_{0.5} \leq t \leq t_{\text{Ende}} \end{cases}$$

Um auf die Dosis zu kommen, muss die Ionisationsfkt. mit dem Proportionalitätsfaktor α multipliziert und anschließend integriert werden. Wichtig hierbei ist, dass die auf der Erde gemessenen Ionisation I_0 noch hinzuaddiert wird, da die in der obig angegebenen Funktion nicht berücksichtigt wurde. Da die Geschwindigkeit wie bereits erwähnt gleichmäßig ist, kann angenommen werden, dass der Graph um den Zeitpunkt $t_{0.5}$ symmetrisch ist, was das Integral wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} \text{Dosis}_{ges} &= \alpha \int_{t_{\text{Start}}}^{t_{\text{Ende}}} I(t) + I_0 dt \Rightarrow 2\alpha \int_0^{t_{0.5}} I(t) + I_0 dt \quad \checkmark \\ &= 2\alpha \int_0^{t_{0.5}} a(m \cdot t) + b(m \cdot t)^2 + c(m \cdot t)^3 + I_0 dt \\ &= 2\alpha \left(\int_0^{t_{0.5}} a(m \cdot t) dt + \int_0^{t_{0.5}} b(m \cdot t)^2 dt + \int_0^{t_{0.5}} c(m \cdot t)^3 dt + \int_0^{t_{0.5}} I_0 dt \right) \\ &= 2\alpha \left(\left[\frac{1}{2} amt^2 + \frac{1}{3} bmt^3 + \frac{1}{4} cmt^4 + I_0 t \right]_0^{t_{0.5}} \right) \\ &= 2\alpha \left(\frac{1}{2} amt_{0.5}^2 + \frac{1}{3} bmt_{0.5}^3 + \frac{1}{4} cmt_{0.5}^4 + I_0 t_{0.5} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Dosis}_{ges,1} = 25,805 \mu\text{Sv}$$

$$\text{Dosis}_{ges,2} = 41,626 \mu\text{Sv} \quad \checkmark$$

Schließlich muss, um bestimmen zu können, die auf der Erde verstreicht um mit der Erddosis Dosis_{sec} zu erfahren, die Gesamtdosis Dosis_{ges} durch die Erddosis pro Sekunde teilen:

$$t_{\text{Erddosis}} = \frac{\text{Dosis}_{ges}}{\text{Dosis}_{sec}}$$

$$t_{\text{Erddosis},1} = 11,3 \text{ h}$$

$$t_{\text{Erddosis},2} = 18,2 \text{ h} \quad \checkmark$$

12.2

Index der Kommentare

- 4.1 In den Nenner oder negativer Exponent, aber nicht beides
- 5.1 A.16: 4.5/5P.
- 6.1 Unglückliche Wortwahl. Besser: (re-)kombinieren
- 7.1 Find ich toll, dass ihr euch diesen Effekt ausgesucht habt! :D
- 7.2 Klar haben EM-WW einen Einfluss zwischen geladenen Teilchen, aber die baryonisch-akustischen Oszillationen resultieren zum Großteil aus gravitativer WW und dem Strahlungsdruck. EM-WW hat aufgrund der Skala der WW eine eher untergeordnete Rolle, soweit ich weiß. Wir können da aber gerne auch in der Übung drüber reden, dann könnt ihr vllt auch näher auf eure Quelle eingehen.
- 7.3 Dunkle Materie statt Antimaterie
- 8.1 A.17: 3.5/5P.
- 10.1 Einheiten stimmen leider nicht
- 11.1 ungefähr :D
- 11.2 Ich hab hier 0.0634 nSv
- 12.1 Die additive Konstante sollte $2 \cdot h_{\text{max}}$ sein ($h_{\text{max}} / t_{\text{0.5}}^2$ passt auch von den Einheiten nicht zu einer Höhe)
- 12.2 A.18: 4.5/5P.