

ATP Übungsblatt 5

Tobias Rücker

tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock

paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

2. Juni 2020

Abgabegruppe: **Mittw. 10-12 Uhr**

Inhaltsverzeichnis

1	Aufgabe 13	1
1.1	a)	1
1.2	b)	2
1.3	c)	2
2	Aufgabe 14	3
2.1	a)	3
2.2	b)	4
2.3	c)	4
2.4	d)	5
3	Aufgabe 15	6
3.1	a)	6
3.2	b)	7

2.1

1 Aufgabe 13

Aufgabe 13: Olberssches Paradoxon

5 P.

Unter der Annahme, dass unser Universum unendlich groß und euklidisch ist und gleichmäßig mit Sternen gefüllt ist, die unendlich lange leben, müsste unser Blick in jeder Richtung eigentlich auf einen Stern treffen, so dass der Nachthimmel hell erleuchtet erscheinen sollte. Warum aber ist es nachts dunkel?

- a) Um diese Fragestellung zu untersuchen, bestimmen Sie zunächst die mittlere Entfernung bis in einem Wald die Sichtlinie s auf einen Baum trifft. Dabei sei der Abstand zwischen den Bäumen $a = 5$ m und der Durchmesser der Bäume $d = 25$ cm.
- b) Erweitern Sie diese Überlegungen für den Sternenhimmel ins Dreidimensionale und bestimmen Sie die mittlere freie Weglänge bis die Sichtlinie auf einen Stern trifft. Die mittlere Sterndichte sei $\rho = 10^{-10} \text{ pc}^{-3}$ und der mittlere Sternradius $R = R_{\odot}$.
- c) Erklären Sie nun, ausgehend von Aufgabenteil **b)**, warum es nachts dunkel ist.

1.1 a)

Bei der Wald-Analogie des Olbersschen Paradoxon wird die Formel der mittleren freien Weglänge im 2-Dimensionalen verwendet:

$$\lambda = \frac{1}{\rho \cdot \sigma}$$



Hierbei ist ρ die Baumdichte des Waldes und σ der Wirkungsquerschnitt eines Baumes (25 cm). Um die Baumdichte bestimmen zu können, wird eine Fläche vorausgesetzt. Hier wird eine Approximation der Fläche des Stadtwaldes von Datteln verwendet. Die Fläche des Lohbusches ist ungefähr:

Länge = 114 m

Breite = 342 m

Fläche = 38 988 m²



Aus der Fläche lässt sich über die Teilchenzahl N die Baumdichte mithilfe von

$$\rho = \frac{N}{A}$$

bestimmen. Da die Baumverteilung als homogen bei einem Abstand von 5 m angenommen wird, ist die Baumzahl N hiermit:

$$N = \frac{A}{25} = 1559,5 \text{ m}$$



Die Baumdichte und die daraus folgende Sichtweite sind damit:

$$\rho = 0,04 \text{ m}^{-2}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\rho \cdot \sigma} = 100 \text{ m}$$

1.2 b)

Wird das Analogon aus Aufgabenteil a) auf den 3-dimensionalen Raum des Universums angewandt, bei einer mittleren Sternendichte von $\rho = 10^{-10} \text{ pc}^{-3}$ und einem mittleren Sternradius $R = R_{\odot}$, ergibt sich für die mittlere Entfernung:

$$\lambda = \frac{1}{\rho \sigma} \quad \text{mit } \sigma = \pi \cdot R_{\odot}^2 = 1\,523\,333\,713\,499\,634\,944$$

$$\Rightarrow \lambda = \underline{1,931 \cdot 10^{41} \text{ m}} \quad \text{4.1}$$

In Parsec ergibt das:

$$\Rightarrow \lambda = 6,251 \cdot 10^{24} \text{ pc}$$

1.3 c)

Der Grund, dass der Nachthimmel dunkel ist, liegt an der falschen Annahme des Paradoxons, dass das Universum unendlich alt ist. Mit einem geschätzten Alter von 15 milliarden Jahren, hat das momentane Universum einen Radius von ca. 15 milliarden Lichtjahren. Wird nun die mittlere freie Weglänge aus b) in Lichtjahre umgerechnet, ergibt sich:

$$\lambda = 2,041 \cdot 10^{25} \text{ ly}$$

$$\frac{15 \cdot 10^9 \text{ ly}}{2,041 \cdot 10^{25} \text{ ly} \cdot 100} = 7,361 \cdot 10^{-14} \%$$

Aus dem Prozentsatz vom Alter des Universums über der mittleren freien Weglänge lässt sich schließen, dass das Licht der Sterne außerhalb des observablen Universums, im Falle eines unendlichen Universums, nicht die Zeit hatte, uns zu erreichen.

4.2

4.3

2 Aufgabe 14

Aufgabe 14: Virialsatz zur Entdeckung Dunkler Materie

5 P.

Die Beobachtung der Rotationskurven in Galaxien ist einer von mehreren Hinweisen auf die Existenz von Dunkler Materie.

- a) Berechnen Sie die Rotationsgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius im äußeren Bereich einer Galaxie. Nehmen Sie dazu an, dass die Masse der Galaxie im Zentrum konzentriert ist und betrachten Sie eine Kreisbahn.
- b) Berechnen Sie die Rotationsgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius unter der Annahme eines Halos von dunkler Materie. Hierbei kann der Beitrag der baryonischen Materie zum Gravitationspotential vernachlässigt werden. Nehmen sie ein Navarro-Frenk-White-Profil

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (1)$$

für die Verteilung der Dunklen Materie an. Der äußere Bereich der Galaxie entspricht $r \gg r_s$.

- c) Bevor die Geschwindigkeitsverteilungen von Sternen in Galaxien beobachtet und zur Vorhersage von Dunkler Materie führten, wurden bereits Gravitationsanomalien in Galaxieclustern entdeckt. Beschreiben Sie grob, wie Fritz Zwicky 1933 bei Beobachtungen des Comahaufens die dunkle Materie entdeckte.
- d) Des Weiteren spielt Dunkle Materie eine Schlüsselrolle in der Strukturbildung. Dazu ist es erforderlich, dass die DM-Teilchen langsamer sind als die Fluchtgeschwindigkeit. Berechnen Sie die Fluchtgeschwindigkeit aus dem Zentrum einer Protogalaxie mit einer Masse von 10^{10} Sonnenmassen und einem Radius von 3 kpc. Bestimmen Sie mittels dieser Geschwindigkeit die maximale Temperatur im Falle eines Axions mit einer Masse von $1 \text{ peV}/c^2$ und eines WIMPs mit einer Masse von $100 \text{ GeV}/c^2$.

5.1

2.1 a)

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{GMm}{r^2} \quad (1)$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} \quad (2)$$



2.2 b)

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r r'^2 \sin \theta \rho(r') \, dr' \quad (3)$$

$$= 4\pi \int_0^r r'^2 \frac{\rho_0}{\left(\frac{r'}{r_s}\right)\left(1 + \frac{r'}{r_s}\right)^2} \, dr' \quad (4) \quad \text{6.1}$$

$$= 4\pi \rho_0 r_s \int_0^r \frac{r'}{\left(1 + \frac{r'}{r_s}\right)^2} \, dr' \quad (5)$$

$$= 4\pi \rho_0 r_s^3 \int_0^r \frac{r'}{(r_s + r')^2} \, dr' \quad (6)$$

Substitution:

$$r_s + r' = u \quad (7) \quad \checkmark$$

$$\frac{du}{dr'} = 1 \quad (8)$$

weiter

$$= 4\pi \rho_0 r_s^3 \int_{r_s}^{r_s+r} \frac{u - r_s}{u^2} \, du \quad (9)$$

$$= 4\pi \rho_0 r_s^3 \int_{r_s}^{r_s+r} \frac{1}{u} - \frac{r_s}{u^2} \, du \quad (10)$$

$$= 4\pi \rho_0 r_s^3 \left(\ln(u) + \frac{r - r_s}{u} \right) \Big|_{r_s}^{r_s+r} \quad (11) \quad \checkmark$$

$$= 4\pi \rho_0 r_s^3 \left(\ln\left(\frac{r_s + r}{r_s}\right) - \frac{r}{r + r_s} \right) \quad (12) \quad \checkmark$$

Für M in Aufgabenteil a einsetzen

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\rho_0 G 4\pi r_s^3 \left(\ln\left(\frac{r_s + r}{r_s}\right) - \frac{r}{r + r_s} \right)}{r}} \quad (13) \quad \text{6.2} \quad \checkmark$$

2.3 c)

Fritz Zwicky hatte die Relativbewegungen von Galaxien im Coma-Haufen betrachtet, da viel Masse schnelle Bewegung der Galaxien hervorruft. Über die Bestimmung der Geschwindigkeitsdispersion und das Virialtheorem lässt sich dann die Masse des Coma-Haufens berechnen. Das Masse-Leuchtkraft-Verhältnis für den Coma-Haufen ergab sich zu $250 M_\odot / L_\odot$. Für typische Sterne in Galaxien gilt ein Verhältnis von $2,5 M_\odot / L_\odot$

2.4 d)

$$\frac{1}{2}mv^2 = -m \left(\int_0^{r_0} \frac{GM(r)}{r^2} dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{GM_0}{r^2} dr \right) \quad (14)$$

$$\frac{1}{2}v^2 = - \left(\int_0^{r_0} \frac{G}{r^2} 4\pi\rho_0 r^3 \left(\ln \left(\frac{r_s + r}{r_s} \right) - \frac{r}{r + r_s} \right) dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{GM_0}{r^2} dr \right) \quad (15)$$

$$r_s \sim r \quad (16)$$

$$= - \left(Gr4\pi\rho_0 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{GM_0}{r^2} dr \right) \quad (17)$$

$$= - \left(Gr^2 2\pi\rho_0 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^{r_0} + \left(-\frac{GM_0}{r} \Big|_{r_0}^{\infty} \right) \right) \quad (18)$$

$$= -Gr_0^2 \pi\rho_0 \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + \frac{GM_0}{r_0} \quad (19)$$

Nebenrechnung:

$$\rho_0 = \frac{M_0}{V_0} \quad (20)$$

$$= \frac{M_0}{\frac{4}{3}\pi r_0^3} \quad (21)$$

weiter

$$= \frac{GM_0}{r_0} \left(-\frac{3}{2} \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + 1 \right) \quad (22)$$

$$v^2 = \frac{2GM_0}{r_0} \left(-\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{7}{4} \right) \quad (23)$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (24)$$

$$T = \frac{mv^2}{3k_B} \quad (25)$$

$$= \frac{m}{3k_B} \frac{2GM_0}{r_0} \left(-\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{7}{4} \right) \quad (26)$$

$$= \left(-\ln 2 + \frac{7}{6} \right) \frac{mM_{\odot}G}{k_B r_0} \quad (27)$$

7.2

7.3

3 Aufgabe 15

Aufgabe 15: *Detektion Dunkler Materie*

5 P.

Bisher konnte die Existenz dunkle Materie lediglich über die Beobachtung sekundärer Effekte, beispielsweise über die Rotationskurven von Galaxien, nachgewiesen werden. Eine direkte Beobachtung von dunkler Materie, d.h. die Beobachtung einer Wechselwirkung von dunkler Materie, konnte bisher jedoch noch nicht nachgewiesen werden.

Verschiedene Experimente versuchen nun, dunkle Materie über solche Wechselwirkungen nachzuweisen. Dabei können diese Experimente in drei Kategorien, basierend auf dem zugrundeliegenden Nachweiskanal, eingeteilt werden: Die *direkte Suche nach dunkler Materie*, die *indirekte Suche nach dunkler Materie* sowie die *Produktion von dunkler Materie in Colliderexperimenten*.

- a) Erklären Sie kurz die Idee hinter den drei genannten Nachweiskanälen.
- b) Suchen Sie sich ein Experiment Ihrer Wahl aus, welches nach dunkler Materie sucht und beschreiben Sie dies. Ziel der Aufgabe soll es sein, dass Sie das von Ihnen gewählte Experiment Ihren Kommilitonen in der Übung vorstellen können.

Beantworten Sie bei Ihrer Recherche insbesondere folgende Fragen:

- In welche der drei Kategorien fällt Ihr Experiment?
- Wie ist die technische Umsetzung Ihres Experimentes?
- Was für Ergebnisse hat Ihr Experiment veröffentlicht? Beachten Sie, dass auch der Ausschluss bestimmter Theorien ein relevantes Ergebnis sein kann.

3.1 a)

Direkte Suche:

Da dunkle Materie (DM) beim Wechselwirken mit normaler Materie (Materie des standard Modells) Energie in Form eines Lichtquants abgibt, kann dieser Lichtquant mithilfe von Photomultipliern (ähnlich derer des ICE Cubes) detektiert werden.



Indirekte Suche:

Detektion der Emission eines γ -Quants, welcher durch die Annihilation des DM Teilchens entsteht. Zum Beispiel mit γ -Teleskope.



Produktion:

DM Teilchen können künstlich erzeugt werden, indem standard Modell Teilchen mit ausreichend Geschwindigkeit kollidieren. Das DM Teilchen selbst kann anschließend durch die Wechselwirkung nachgewiesen werden. Zum Beispiel im LHC.



3.2 b)

XENON1T Dark Matter Project ¹:

In welche der drei Kategorien fällt Ihr Experiment?

Direkte Suche



Wie ist die technische Umsetzung Ihres Experiments?

Das Experiment besteht aus einem 62 kg Behälter, welcher mit einer Xenonflüssigkeit (Ziel) und einem Xenongas gefüllt ist. Am Deckel und am Boden des Behälters befinden sich Photomultiplierrohre (PMT). Die PMT am Boden messen ein schimmerndes Licht (S1) in der Xenonflüssigkeit, welches durch einem, in das Ziel einfallende Teilchen, emittiert wird. Außerdem befindet sich im Xenongas eine Anode und nahe dem Boden in der Xenonflüssigkeit die dazugehörige Kathode. Das elektrische Feld beschleunigt die durch Ionisation freigesetzten Elektronen zur Kathode (zum Gas), wo sie einen zweiten Lichtimpuls abgeben (S2), welcher abermals von den PMT gemessen wird. Die Diskrepanz der beiden Messungen lässt auf die vertikale Position der Wechselwirkung in der Xenonflüssigkeit schließen. Die zweite Messung S2 gibt außerdem die horizontale Komponente, wodurch die Lokalisation des Ereignisses im 3-dim. Raum ermöglicht wird.



Das XENON1T Experiment betrachtet weakly interacting massive particles (WIMPs) Wechselwirkungen mit normaler Materie. Hier wird ein Zustand ohne nuklearen Spin angenommen. Die WIMPs sind deshalb von Interesse, da WIMPs als potentielle Kandidaten für DM in Frage kommen.

Was für Ereignisse hat Ihr Experiment veröffentlicht?

XENON1T hat das Wechselwirkungslimit eines WIMPs über eine Zeitspanne von einem Jahr gemessen. Das XENON1T Experiment liefert außerdem mitunter die saubersten Messungen, da die Hintergrundstrahlung selten (ca. 630 Events pro Jahr) gemessen wird. Über ein Jahr wurden zwei Events im Zentrum des Behälters erwartet, jedoch keine gemessen. XENON1T ist der Vorgänger des neuen Experiments XENONnT, welches einen 4-fach größeren Behälter und einer 10-fach geringeren Eventrate aufweist.



9.1

¹Raphael Lang, XENON1T probes deeper into Dark Matter WIMPs, with 1300 kg of cold Xe atoms, 2018, <http://www.xenon1t.org/>, Online; besucht am 1. Juni 2020

Index der Kommentare

- 2.1 Inhaltsverzeichnis könnt ihr euch eigentlich sparen, sind ja allgemein nur wenige Seiten.
- 3.1 Sehr guter Vergleich
- 4.1 Meter sind in der Astrophysik unerwünscht, immer am besten direkt pc oder Lichtjahre.
- 4.2 Nicht nur das Alter sondern auch die Expansion selbst sorgt natürlich dafür.
- 4.3 4,5/5 Pkt
- 5.1 Einmal bitte schreiben was ihr gleichsetzt.
- 6.1 Hier wäre eine bessere Substitution möglich gewesen, $u = r/r_s$
- 6.2 Abschätzung für $r \gg r_s$...
- 7.1 Hier war nach dem Baryonischen Ansatz gefragt, für V hättet ihr das Gravitationspotential bei R nehmen können: $V = \text{Grav}(R)$
- 7.2 zugegeben, in der Formel hätte ich mir auch das einsetzen gespart, dennoch wurde hier leider explizit nach gefragt...
- 7.3 4/5 Pkt.
- 9.1 5/5 Pkt.