ATP Übungsblatt 4

Tobias Rücker
tobias.ruecker@tu-dortmund.de

Paul Störbrock
paul.stoerbrock@tu-dortmund.de

25. Mai 2020

Abgabegruppe: **Mittw. 10-12 Uhr**

Arbeitet ihr mit Luca und Luca zusammen? Sehr ähnliche Abgaben :)

1	2	3	Σ
2	4	3,5	9,5

Inhaltsverzeichnis

1 Aufgabe 10

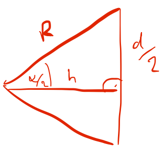
Aufgabe 10: *Historische Bestimmung von Entfernungen im Sonnenystem* **5 P.**

Auf der Basis der Arbeiten von Johannes Kepler war es bereits seit 1627 möglich, die relativen Abstände der Planeten im Sonnensystem untereinander sowie zur Sonne zu bestimmen. Um absolute Werte für die Abstände zu erhalten war es somit ausreichend, die absolute Distanz der Erde zu einem einzigen Planeten zu ermitteln.

Einer der ersten Versuche wurde im September 1672 von den Astronomen *Giovanni Cassini* und *Jean Richter* durchgeführt. In diesem Monat war der Abstand zwischen Erde und Mars besonders gering. Sie nutzen zur Bestimmung des Abstandes die Methode der *trigonometrischen Parallaxe.*

Cassini beobachtete von Paris (48,9° geographische Breite, 2,3° geographische Länge) aus den Abstand des Planeten Mars zu 3 Sternen im Sternbild Wassermann. Zeitgleich befand sich Richter in Französisch Guyana (4° geographische Breite, −54° geographische Länge) und beobachtete ebenfalls diesen Abstand. Der genaue Radius der Erde sei für diese Aufgabe bekannt.

a) Die scheinbare Verschiebung, d.h. die Parallaxe, des Mars gegenüber den Sternen wurde zu 25 Bodensekunden ermittelt. In der Nacht der Messung betrug, wie man aus den Keplerschen Gesetzen bestimmen konnte, der relative Abstand des Planeten Mars zur Erde 0,3812 · AE. Welcher Wert für AE folgt aus dieser Beobachtung? Wie weit weicht der berechnete Abstand zwischen Sonne und Erde vom heutigen Wert ab?



Um die direkte Distanz d der beiden Städte Paris (P) und Guyana(G) zu bestimmen, wird das gleichschenklige Dreieck Paris-Guyana-Erdmittelpunkt betrachtet. Die Schenkel sind hierbei der Erdradius r_E und die Hypothenuse ist die direkte Distanz d. Dabei gilt es den von den Schenkeln aufgespanneten Winkel α zu bestimmen um auf d schließen zu können.

Paris [Längengrad(L_1): 2,3°, Breitengrad(B_1): 48,9°] und Guyana [Längengrad(L_2): −54°, Breitengrad(B_2): 4°]

$$\alpha_x = |L_1 - L_2| = |2{,}3° - (-54°)| = 56{,}3°$$
$$\alpha_y = |B_1 - B_2| = |48{,}9° - 4°| = 44{,}9°$$

Aus $\alpha = \sqrt{\alpha_x^2 + \alpha_y^2}$ folgt:

$$\alpha = 77{,}25°$$

Aus den obig genannten Verhältnis ergibt sich mit Pythagoras:

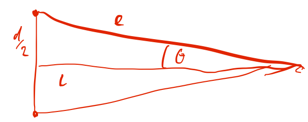
$$r_E^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2$$

Wobei h die Strecke zwischen Distanz d und Erdmittelpunkt beschreibt.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{h}{r_E} \\
\Leftrightarrow h &= r_E \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
\left(\frac{d}{2}\right)^2 &= r_E^2 - r_E^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad \checkmark \\
d &= 2r_E \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\
\Rightarrow d &= 7491{,}562\,159\,\mathrm{km}
\end{aligned}
$$

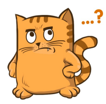
Zahlenwert passt nicht.

Für die Distanz H zwischen Erde und Mars wird ein ähnliches gleichschenkliges Dreieck wie zuvor betrachtet, nur sind hier die Schenkel e der Abstand zwischen Paris/Guyana und Mars. d ist hier die selbe direkte Distanz zwischen Paris und Guyana, wobei der Winkel, der von den Schenkeln aufgespannt wird, hier β ist. Daraus folgt analog zu der obigen Rechnung:



$$
\begin{aligned}
e^2 &= \left(\frac{d}{2}\right)^2 + e^2 \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) \\
e^2\left(1 - \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\right) &= \frac{d^2}{4} \\
e &= \frac{d}{2\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}} \\
\Rightarrow 0.3812\mathrm{AE} &= \frac{d}{2\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}} \\
AE &= \frac{d}{2 \cdot 0.3812\sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}} \\
&= 8.812 \cdot 10^{20}\mathrm{km}
\end{aligned}
$$

Vgl. Luca und Luca 2 :D



wir wollen nicht e wissen..

wir wollen l wissen.

viel zu viel.

2/5

2 Aufgabe 11

Aufgabe 11: *Entfernungsbestimmung mit dem Distanzmodul* **5 P.**

Je weiter eine Lichtquelle von uns entfernt ist, desto dunkler erscheint sie. Das liegt daran, dass sich das Licht der Quelle auf einer Kugelfläche verteilt, die mit dem Abstandsquadrat anwächst. Verdoppelt man die Entfernung der Lichtquelle, so nimmt ihre Intensität um das Vierfache ab.

Astronominnen und Astronomen unterscheiden bei einem Himmelsobjekt die scheinbare Helligkeit m von der absoluten Helligkeit M. Die scheinbare Helligkeit m nimmt mit der Entfernung ab, wohingegen die absolute Helligkeit ein fester Wert ist, nämlich die Helligkeit in einer Entfernung von 10 pc.

a) Die Einheit pc steht für Parsec und ist ein gängiges astronomisches Längenmaß. Erklären Sie wie die Einheit definiert ist.

Historisch bedingt unterteilte man Helligkeiten zunächst in sechs Größenklassen. Das erste Messinstrument war das menschliche Auge, welches im Prinzip einem logarithmischen Strahlungsdetektor entspricht. Daher ist die natürliche Helligkeitsskala logarithmisch und nicht linear. Die hellsten Sterne definierte man mit der 1. Größe, die lichtschwächsten, gerade noch mit dem Auge sichtbaren, als Sterne 6. Größe. Der britische Astronom Norman Robert Pogson (1829 - 1891) führte 1856 ein logarithmisches Gesetz ein, das den Zusammenhang zwischen scheinbarer Helligkeit m und dem Strahlungsfluss F wiedergibt. Dabei zeigte sich, dass das Verhältnis der Strahlungsflüsse aufeinander folgender Größenklassen immer konstant ist, etwa 2,512. Mit der obigen Definition, dass die absolute Helligkeit M bei einem Abstand r von 10 pc zu messen sei, folgt eine Gleichung, das so genannte Distanzmodul:

$$m - M = -2.5 \cdot \log_{10}\left(\frac{F(r)}{F(10)}\right) = 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{r}{10\,\mathrm{pc}}\right)$$

Dabei werden Helligkeiten meist mit dem Zusatz mag gekennzeichnet.

b) Die scheinbare Helligkeit der Sonne für einen Beobachter auf der Erde beträgt $m = -26{,}74\,\mathrm{mag}$. Die mittlere Entfernung ist durch ca. $149{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$ gegeben. Wie lautet die absolute Helligkeit der Sonne?

c) Der hellste Stern am Himmel, Sirius, besitzt für einen Beobachter auf der Erde eine scheinbare Helligkeit von $m = -1{,}46\,\mathrm{mag}$. Berechnen Sie aus der absoluten Helligkeit $M = 1{,}43\,\mathrm{mag}$ die Entfernung von der Erde zu Sirius.

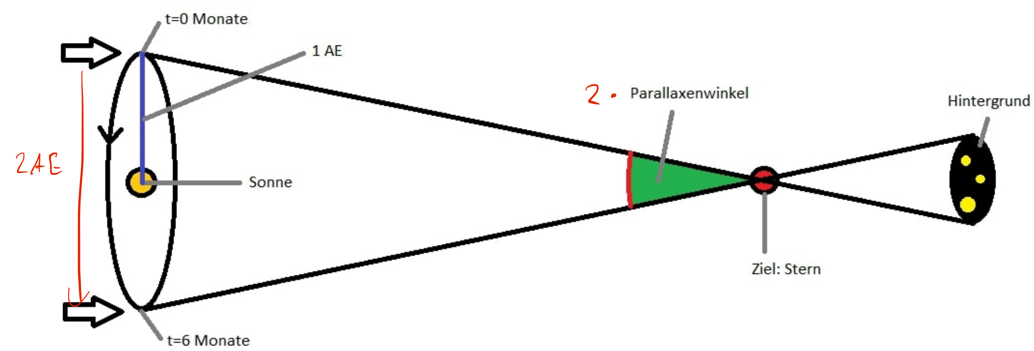
Eine wichtige Anwendung vom Distanzmodul ist die Entfernungsbestimmung kosmischer Objekte. Die scheinbare Helligkeit m ist als unmittelbare Messgröße immer bekannt. Kann nun die absolute Helligkeit eines Objektes bestimmt werden so kann hieraus mithilfe der oben gegebenen Formel die Entfernung bestimmt werden.

d) In der Vorlesung haben Sie mehrere Methoden kennengelernt, mit denen man auf die absolute Helligkeit eines Himmelsobjektes und somit auf die Entfernung schließen kann. Erklären Sie die einzelnen Methoden. Gehen Sie dabei auch darauf ein, welche Entfernungen die Objekte jeweils haben müssen.

e) Diskutieren Sie Gründe, warum auch bei gut bekannter absoluter Helligkeit von Objekten Fehler in der photometrischen Entfernungsbestimmung auftreten können.

2.1 a)

Ein Parsec, oder Parallaxen Sekunde wird verwendet um die Distanz entfernter Lichtquellen im Universum zu bestimmen. Dabei wird folgende Geometrie verwendet:



Wird der Stern in einem Abstand von sechs Monaten betrachtet, hat die Erde ihre Position um 2AE verändert. Unter betrachtung des vergleichsweise statischen Hintergrund fällt nun auf, dass sich der gesuchte Stern um einen Winkel verschoben hat. Dieser Winkel ist der Parallaxenwinkel und erlaubt es die Distanz zwischen Sonne und gesuchtem Stern zu ermitteln. Ein Parsec ist die Distanz des Fluchtpunkts bei einem Parallaxenwinkel von einer Bogensekunde.

Parallaxe: Abstand, unter dem 1AE unter einem Winkel von 1 Bogensekunde erscheint.

0,5/1

2.2 b)

$$m - M = 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{10pc}\right)$$
$$\Leftrightarrow M = m - 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{10\text{pc}}\right)$$

0,5 / 0,5

Werden nun für $m = -26.74\,\text{mag}$ und $r = 149.6 \cdot 10^6\text{km}$ eingesetzt, ergibt sich

$$M = 4{,}8323$$

2.3 c)

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \cdot \log_{10}\left(\frac{r}{10\text{pc}}\right) *) \qquad ((\,) \\ &= 5\left(\log_{10}\left(\frac{r}{\text{pc}}\right) - \log_{10}(10)\right) \\ &= 5\left(\log_{10}\left(\frac{r}{\text{pc}}\right) - 1\right) \\ \frac{m-M}{5} + 1 &= \log_{10}\left(\frac{r}{\text{pc}}\right) \\ \Rightarrow \frac{r}{\text{pc}} &= 10^{\left(\frac{m-M}{5} - 1\right)} \\ r &= 10^{\frac{m-M}{5}+1}\text{pc} \end{aligned}$$

0,5 / 0,5

Durch einsetzen von $m = -1.46\,\text{mag}$ und $M = 1.43\,\text{mag}$ ergibt sich:

$$r = 2{,}6424\,\text{pc}$$

2.4 d)

Die Parallaxenmethode kann bei einzelnen Sternen sowie bei Sternenhaufen angewandt werden. Bei Sternhaufen wird die Sternstromparallaxe verwendet, wo der Konvergenzpunkt einzelner geeigneter Sterne betrachtet wird. Dazu muss die Relativbewegung der Erde, sowie die spektral Verschiebung berücksichtigt werden. Diese Methode kann Distanzen bis zu 130 Lj/40 pc bestimmen.

Cepheiden sind pulsierende Riesen, die über eine bestimmte Periode T ihre Luminosität verändern. Die Luminosität hängt direkt mit der Länge der Periode zusammen, wodurch die wahre Leuchtkraft des Cepheids bestimmt werden kann. Mit bekannten Cepheiden (bekannte Luminosität und Periodendauer) kann mit $(*)$ auf den Abstand zu neuen Cepheiden geschlossen werden. Diese Methode kann Distanzen bis zu 10^7 Lj bestimmen.

Die Rotverschiebung ist ein Phenomen, welches der Ausdehnung des Raumes/des Universums zu verschulden ist. Durch die Expansion des Raumes wird ein relativistisch propagierendes Photon im Raum gedehnt, wodurch sich dessen Wellenlänge vergrößert.

Bei bekannten Spektren von Sternen oder Galaxien lässt sich diese Dehnung auf das ursprüngliche Spektrum zurückführen, wodurch die Distanz errechnet werden kann. Die Genauigkeit schwankt jedoch, da dem Licht unterwegs viel im Weg stehen kann, dass sich auf den Dopplereffekt auswirken kann. Demnach ist die Distanzmessung via Rotverschiebung nur bis auf ca. 100k Lj genau. was meint ihr damit?

Die letzte Methode ist die der Standardkerzen. Obgleich selten, haben Supernovae des Typus Ia eine bekannte Relation zwischen Luminosität und Breite der Lichtkurve. Hier tritt wieder die Rotverschiebung auf, welche zurückführt auf die Distanz. Diese Messung ist bis zu 10^{10} Lj genau. 2/2

2.5 e)

Wie bereits im Absatz der Rotverschiebung erklärt, kann dem Licht vieles im Weg stehen. Das Licht kann durch Gravitationsfelder gestreckt/gestaucht werden oder durch Gas/Staub an Intensität verlieren. Es ist zum Beispiel schwer bis unmöglich Objekte auf der uns gegenüberliegender Seite der Milchstraße genau zu bestimmen, da zu viele Leuchtende Körper im Weg sind. Schwächer leuchtende Objekte können demnach vom Hintergrund "verschluckt" werden. 0,5/1

4/5

Außerdem: Man braucht immer Vergleichsobjekte... siehe Übung

3 Aufgabe 12

Aufgabe 12: *Alter des Universums* **5 P.**

Edwin Hubble stellte 1929 das Hubble-Gesetz auf, welches eine Relation aus der radialen Geschwindigkeit v einer Galaxie und dessen Entfernung d darstellt,

$$v = H_0 d.$$

Die Hubble-Konstante beschreibt somit die derzeitige Expansion des Universums, $H_0 = H(t_0)$. Im Allgemeinen lässt sich der Hubble-Parameter über den Skalenfaktor $a(t)$ und dessen zeitliche Ableitung beschreiben,

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Zusätzlich lässt sich aus der ersten Friedmann-Gleichung ein Zusammenhang aus den prozentualen Anteilen Ω_i des Inhaltes des Universums und dem Hubble-Parameter über die kosmische Rotverschiebung z herstellen,

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{\text{Masse}}(1+z)^3 + \Omega_{\text{Strahlung}}(1+z)^4 + \Omega_{\text{Dunkle Energie}}}.$$

a) In der Literatur finden Sie verschiedene Werte für die Hubble-Konstante H_0 (siehe beispielsweise 1903.12097 oder 1903.07603) Geben Sie die Werte an und diskutieren Sie, warum es diese Unterschiede gibt? Geben Sie jeweils zu den unterschiedlichen Hubble-Konstanten eine einfache Abschätzung für das Alter des Universums an.

b) Stellen Sie mit Hilfe der Definition des Hubble-Parameters $H(a(t))$ und der kosmischen Rotverschiebung $a(t)(1+z) = a_0$ einen differentiellen Zusammenhang zwischen Zeit und Rotverschiebung der Art $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z}(z)$ her.

c) Bestimmen Sie analytisch, wie alt unser Universum wäre, wenn es nur aus Materie bestünde?

d) Der prozentuale Massengehalt des Universums wurde von der Planck Mission (1807.06209) auf $\Omega_{\text{Masse}} \approx 0{,}315$ bestimmt. Nehmen Sie an, dass der Rest des Universums aus Dunkler Energie besteht $\Omega_{\text{Dunkle Energie}} \approx 0{,}685$ (ohne Strahlung und Krümmung) und berechnen Sie das Alter des Universums.
Verwenden Sie eine Computersoftware Ihrer Wahl, um das Integral numerisch zu lösen.

3.1 a)

Zwei Werte aus verschiedenen Messungen für die Hubbelkonstanten sind

$$H_{0,1903.12097} = 67.4^{+6.0}_{-6.2}\,\mathrm{kms^{-1}Mpc^{-1}} \tag{1}$$
$$H_{0,1903.07603} = 74.22 \pm 1.82\,\mathrm{kms^{-1}Mpc^{-1}} \tag{2}$$

Die erste Hubbelkonstante entstammt aus einer Messung der Planck-Sonde im Jahr 2013. Diese hatte die Hubblekonstante und die Materiedichte des Universums über die Abschwächung hochenergetischer Gammaquanten. Die Menge an Gammaquanten hängt in einer Sichtlinie hängt von der Expansionsrate des Universums und der Materiedichte ab.
Die zweite Hubblekonstante ist vom Hubble-Weltraumteleskop gemessen worden. Dabei wurden 70 langperiodige Cepheiden in der Magellanschen Wolke beobachtet.
Diese hohe Abweichung zwischen den Messwerten ist sehr ungewöhnlich. Zum aktuellen Zeitpunkt gibt es keine Erklärungen für die Ursache. Ein Fehler in den Messungen ist dabei schon ausgeschlossen worden. Daher wird angenommen, dass es sich dabei um ein kosmische Eigenschaft handelt außerhalb des LambdaCDM

Abschätzung des Alters? −0,5 P

3.2 b)

$$H(a(t)) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{3}$$

$$a(t) = \frac{a_0}{1+z} \tag{4}$$

$$\dot{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{a_0}{1+z} \tag{5}$$

$$= a_0 \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{(1+z)^2}\right) \tag{6}$$

$$H(z) = \frac{-\frac{a_0}{(1+z)^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\frac{a_0}{1+z}} \tag{7}$$

$$H(z)dt = -\frac{1}{1+z}\,\mathrm{d}z \tag{8}$$

?

$$\frac{dift}{\mathrm{d}z}(z) = -\frac{1}{H(z)(1+z)} \tag{9}$$

3.3 c)

Betrachtung, dass unser Universum nur aus Materie bestehe:

$$\Omega_{\text{Dunkle Energie}} = \Omega_{\text{Strahlung}} = 0 \tag{10}$$

$$\Omega_{\text{Materie}} = 1 \tag{11}$$

$$H(z) = H_0\sqrt{(1+z)^3} \tag{12}$$

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{H_0\sqrt{(1+z)^5}}\,\mathrm{d}t \qquad = -\frac{1}{H_0\sqrt{(1+z)^5}}\,\mathrm{d}z \Big| \int \tag{13}$$

$$\int_t^0 \mathrm{d}t' = -\frac{1}{H_0}\int_0^\infty \frac{1}{(1+z)^{\frac{5}{2}}}\,\mathrm{d}z \tag{14}$$

In der Gleichung vorher eird das Alter das Universum berechnet, indem vom aktuellen Stand zurückgerechnet wird. Dabei gilt für die größte Rotverschiebung z, das früheste Stadium des Universums betrachtet wird und bei der kleinsten der aktuelle Stand.

$$u = z + 1 \tag{15}$$
$$= -\frac{1}{H_0}\left(-\frac{2}{3}\right)(u)^{-\frac{3}{2}}\Big|_{\infty}^{1} \tag{16}$$
$$= \frac{2}{3H_0} \tag{17}$$

3.4 d)

-1P

3,5 /5