
图论-续

生成树计数

- ▶ 如何求出连通无向简单图的不重复生成树个数？

生成树计数

- ▶ 如何求出连通无向简单图的不重复生成树个数？
- ▶ MatrixTree定理：
 - ▶ 假设图 G 是一个包含 n 个点无向图
 - ▶ 定义 G 的度数矩阵 $D[G]$ ，邻接矩阵 $A[G]$
 - ▶ Laplace算子 $C[G] = D[G] - A[G]$
 - ▶ $C[G]$ 的任意一个 $n-1$ 阶主子式的行列式的绝对值

欧拉回路

- ▶ 对于一个连通图，遍历所有边并回到起点的路径被称为是一条欧拉回路。
- ▶ 无向图欧拉回路的充要条件：
 - ▶ 联通并且每个点的度数都为偶数
- ▶ 有向图欧拉回路的充要条件：
 - ▶ 强连通并且每个点的入度和等于出度和

哈密顿回路

- ▶ 哈密顿回路：遍历图中所有点一次且仅有一次并最终回到起点的路径被称为哈密顿回路。
- ▶ 哈密顿通路：遍历图中所有点一次且仅有一次的路径被称为哈密顿通路。
- ▶ 哈密顿路的充分条件：
 - ▶ 无向简单图 G ，任意两个不相邻点的度数之和大于或等于
(哈密顿通路) $n-1$ / (哈密顿回路) n

欧拉回路

- ▶ 给定一张包含 N 个点 M 条边的图，其中有些单向边有些双向边，问是否存在欧拉回路。
- ▶ N, M 范围不限定，试给出尽量优秀的算法

欧拉回路

- ▶ 首先我们知道，若该混合图有欧拉回路，一定有一种方法使得该图中所有无向边定向后的有向图仍然有欧拉回路，给无向边随意定向。
- ▶ 每个点入度和=出度和，至少保证该图入度和-出度和是偶数
- ▶ 使用网络流，源点向入度和大的点连一条大小为 $|入度和-出度和|/2$ 的边，出度和大的点向汇点连一条 $|入度和-出度和|/2$ 的边
- ▶ 无向边 (v_i, v_j) 若变成有向图 (v_i, v_j) ，那么建一条容量为1的边 (v_j, v_i) 意为反悔。满流则有解。

二分图

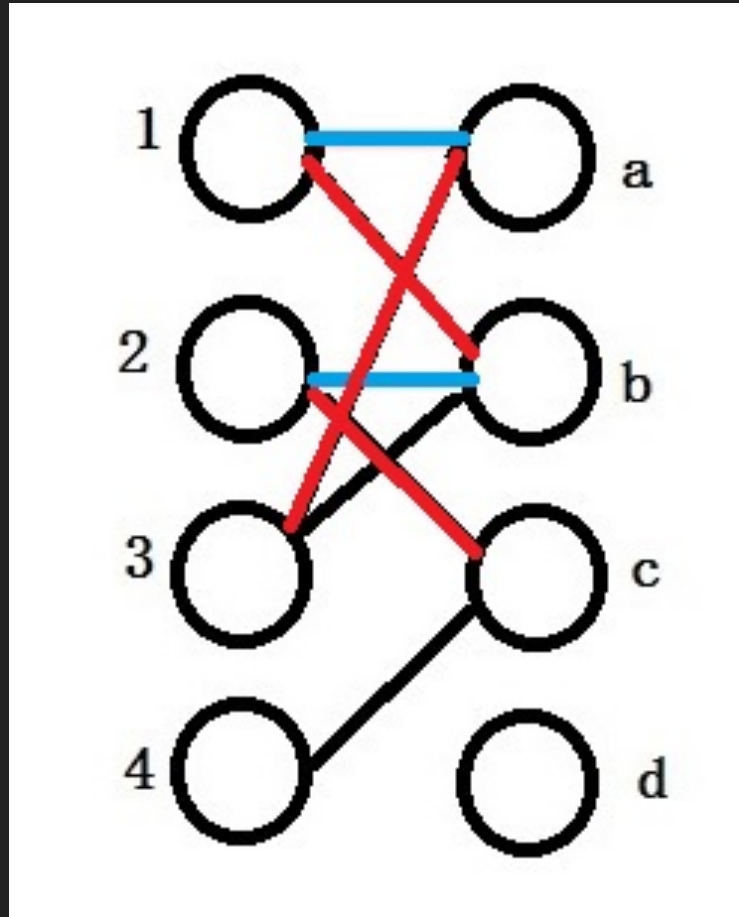
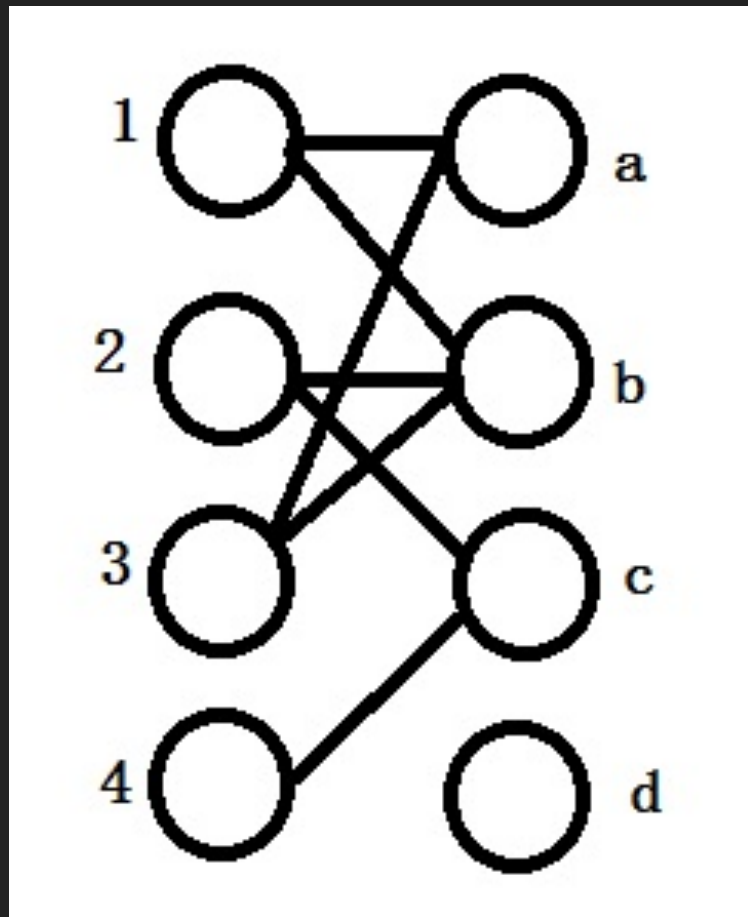
- ▶ 设 $G=(V,E)$ 是一个无向图，如果顶点 V 可分割为两个互不相交的子集 (A,B) ，并且图中每条边 (i,j) 所关联的两个顶点 i 和 j 分别属于这两个不同的顶点集($i \in A, j \in B$)，则称图 G 是一个二分图。
- ▶ 二分图的一个等价定义是：不含有 含奇数条边的环 的图

二分图匹配

- ▶ 边指向一个点成为匹配。已匹配的点不能够再次匹配。
- ▶ 最大匹配：最大基数的匹配
- ▶ 完美匹配：两个集合中的点，两两匹配

匈牙利算法

► 寻找二分图中的最大匹配



匈牙利算法

- ▶ 增广路径的首尾是非匹配点。因此，增广路径的第一条和最后一条边，必然是非匹配边；同时它的第二条边（如果有）和倒数第二条边（如果有），必然是匹配边；以及第三条边（如果有）和倒数第三条边（如果有），一定是非匹配边。
- ▶ 增广路径从非匹配边开始，匹配边和非匹配边依次交替，最后由非匹配边结束。这样一来，增广路径中非匹配边的数目会比匹配边大 1。

KM算法

- ▶ 完美匹配：最大匹配同时匹配边权之和最大，叫做完美匹配
- ▶ 给定一个函数 $L(\text{node})$ 求出结点的顶标值。我们用数组 $lx(x)$ 记录集合 X 中的结点顶标值，用数组 $ly(y)$ 记录集合 Y 中的结点顶标值。并且，对于原图中任意一条边 $\text{edge}(x,y)$ ，都满足： $lx(x)+ly(y) \geq \text{weight}(x,y)$
- ▶ KM算法就是求二分图最佳完美匹配
 - ▶ 初始化可行顶标的值 (设定 lx, ly 的初始值)
 - ▶ 用匈牙利算法寻找相等子图的完备匹配
 - ▶ 若未找到增广路则修改可行顶标的值
 - ▶ 重复(2)(3)直到找到相等子图的完备匹配为止

利用网络流求匹配

- ▶ $S \rightarrow u$
- ▶ $u \rightarrow v$
- ▶ $v \rightarrow T$
- ▶ 容量为1, (费用为负代价)