

COMBINATORICS

组合数学

MUSICAL WORLD

- ▶ 一个歌曲推荐系统会根据用户之前听过的歌来推荐新的歌曲。推荐过程分为N代。第一代有1首歌，之后的每一代由前一代的每首歌独立派生出来，但是数量是随机的。每首歌按照一定的分布在下一代中产生 0/1/2/3/4/5 首歌。这个分布对每一代可以不同。
- ▶ 输入有N行，每行一个数字M表示歌曲数，后面M+1个数字表示出现的概率
- ▶ 求 $C(X, 2)$ 的期望，其中 X 是表示最后一代（即N+1代）的歌曲数量。
- ▶ $N \leq 10^5$

MUSICAL WORLD

Output format

As the answer for the problem can be very large, calculate it as an irreducible fraction $\frac{A}{B}$ and output $(A \cdot B^{-1}) \bmod (10^9 + 7)$. Here, B^{-1} is the multiplicative inverse of B modulo $10^9 + 7$. The input constraints guarantee that B does not divide by $10^9 + 7$, so this expression is properly defined.

Sample 1

Input	Output
2	666666672
2 1 1 1	
2 1 1 1	

MUSICAL WORLD

Notes

In the first example, both generations produce 0 to 2 tracks with probability of $\frac{1}{3}$.

Generation 3 will hold the following number of songs:

- 0 with probability $\frac{13}{27}$,
- 1 with probability $\frac{5}{27}$,
- 2 with probability $\frac{2}{9}$,
- 3 with probability $\frac{2}{27}$,
- 4 with probability $\frac{1}{27}$.

The expected value is therefore $\frac{2}{9} \binom{2}{2} + \frac{2}{27} \binom{3}{2} + \frac{1}{27} \binom{4}{2} = \frac{2}{3}$.

逆元

▶ 逆元的求法:

- ▶ 一种是通过扩展欧几里得或者是 $\text{pow}(A, P-2)$, 如果 P 不是质数可以用 $\text{pow}(A, \text{phi}(P)-2)$;
- ▶ 另一种是递推求出1到 N 所有逆元: $\text{inv}[i] = ((1/\text{inv}[P\%i]) * (P - P/i)) \% P$ (除号是C++中的整数除法)

▶ 分数的等效表示:

- ▶ 对于一个分数, 如果化简后 A/B , 而 B 和 P 互质, 那么可以用整数 $A \cdot B^{-1}$ 来等效表示

解法

- ▶ 计算过程中使用分数的等效表示来计算，结果可以直接输出，例如 $1/3$ 就表示成 $3^{-1} = 3333333336$
- ▶ 假设第 i 代只有一首歌，记 $f1[i]$ 为 X 的期望，记 $f2[i]$ 为 $C(X, 2)$ 的期望。从最后一代向前推
- ▶ 扩展：如果 P 不是质数怎么办？

CHAMPIONS LEAGUE

- ▶ 问欧冠小组赛抽签总共可能的方案数
- ▶ 规则：
 - ▶ 32个球队，分成8个小组，每个小组4支球队
 - ▶ 为了公平，球队被分为4个档次，每个档次8支球队，每个档次的8支球队分别分在8个小组
 - ▶ 先将第一档次的球队分到各个小组，再分第二档次，以此类推
 - ▶ 每次随机在当前档次中取出一个球队，放入一个合法的小组
 - ▶ （分组的顺序不需计数，只考虑最终结果的不同）

CHAMPIONS LEAGUE

▶ 额外规则：

- ▶ 球队来自不同的国家，每个国家至多5支球队
- ▶ 来自相同国家的球队不能被分在同一个小组
- ▶ 前四个小组称为上半区，后四个小组称为下半区
- ▶ 在分组的过程中，必须始终保持同一个国家的球队在上下半区的数量均匀，相差不能超过1

CHAMPIONS LEAGUE

Note: Sample is the real data of Champion League 2015.

Sample Input

```
1
ESP GER ENG ITA POR FRA RUS NED
ESP ESP POR ENG ENG ESP ENG GER
UKR ESP FRA UKR GRE RUS TUR ITA
BLS GER GER CRO ISR BEL SWE KAZ
```

Sample Output

```
Case #1: 1370850443919360
```

解法

- ▶ 对于只有一支球队的国家，可以单独拿出来，最后随便填进去
- ▶ 枚举每个球队分到哪个半区
- ▶ 对于附加规则，只需要保证在分完每个档次后均匀即可
- ▶ 由于同一国家的球队是等价的，只需枚举每个档次每个半区的个数；最坏情况是每个国家有3支球队，这样需要分4种情况，所以总共最多 2^{21} 种情况

解法

- ▶ 之后可以两个半区分别考虑
- ▶ 每个半区同一个国家的球队至多只有3支，所以可以通过枚举3支和2支球队的国家数量来得到所有不同的国家分布，这个数量是很少的
- ▶ 不同的国家分布下的方案数可以暴力枚举， $(4!)^4 = 331,776$

BEACH UMBRELLAS

- ▶ 沙滩上有 m 个洞，排成一条直线，每个间隔1米，编号1到 m
- ▶ 有 n 个旅行团，每个旅行团有一把伞，半径分别为 R_i 米
- ▶ 每个旅行团选择一个洞放他们的伞，使得伞之间不相交，但是允许刚好接触，求方案数
- ▶ （不同的方案是指有一个旅行团的位置不同）（答案取模）
- ▶ $N \leq 2,000$

BEACH UMBRELLAS

- ▶ m 个相同的棋子放入一个 $1 \times n$ 棋盘，使得棋子各不相邻

BEACH UMBRELLAS

- ▶ m 个相同的棋子放入一个 $1 \times n$ 棋盘，使得棋子各不相邻
- ▶ 解法：考虑在棋盘左侧再加一个格子，这样问题可以转化为放 m 个棋子并且使得每个棋子左侧都有一个空格
- ▶ 这样变成 m 个(空格+棋子)和 $n-2m+1$ 个空格合并
- ▶ 所以答案是 $C(n-m+1, m)$

解法

- ▶ 一个半径为 R 的伞占据 $2R$ 个格子
- ▶ 不妨认为它占据了 $[x-R, x+R)$
- ▶ 两端的伞可以超出原有格子的范围
- ▶ 如果左侧的伞半径是 RL ，右侧的伞半径是 RR ，那么最左端可以占据 RL 个格子，最右端可以额外占据 $RR-1$ 个
- ▶ 于是问题就变成了总长度为 $2\sum Ri$ 的 n 个物品放进 $m+RL+RR-1$ 个格子，也就是 n 个物品和 $m+RL+RR-1-2\sum Ri$ 个空格组合
- ▶ 所以方案数是 $P(m+n+RL+RR-1-2\sum Ri, n) / n / (n-1)$
- ▶ 枚举两边的两个伞，再每个 $O(n)$ 求出来方案数即可