NOI 模拟赛 Solution

King_George (Problem Setter) diamond_duke (Editorialist)

2019 年 7 月 1 日

分组游戏

得分情况：

- 100 分：6 人；
- 90 分：1 人；
- 50 分：3 人；
- 10 分：2 人；
- 0 分：4 人；

Solution

$dp_{i,j,k}$ 表示现在最后一组的大小为 i，用了 j 个人，i 这个大小出现了 k 次的方案数。
则 $i \cdot k \leq n$，所以状态数为 $\Theta(n^2 \log_2 n)$。

Solution

$dp_{i,j,k}$ 表示现在最后一组的大小为 i，用了 j 个人，i 这个大小出现了 k 次的方案数。
则 $i \cdot k \leq n$，所以状态数为 $\Theta(n^2 \log_2 n)$。
考虑转移：
对再加一组 i 的情况直接暴力转移。而剩下的情况中，k 的取值不影响了，求和掉变成只有 i 和 j 的状态。这个状态对 $i' < i$ 的 DP 都有影响，把 j 相同的合起来即可转移。
时间复杂度：$\Theta(n^2 \log_2 n)$。

函数

得分情况：

- 100 分：1 人；
- 30 分：2 人；
- 20 分：2 人；
- 10 分：8 人；
- 0 分：3 人；

Solution

定义

我们称一个数字 n 是 powerful number，当且仅当他的每个质因子次数都至少是 2。

Solution

定义

我们称一个数字 n 是 powerful number，当且仅当他的每个质因子次数都至少是 2。

定理

n 以内的 powerful number 个数是 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 级别的。

Solution

定理

n 以内的 powerful number 个数是 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 级别的。

证明.

每个 powerful number 都可以被表示为 $a^2 \cdot b^3$ 的形式，其中 $a \le \sqrt{n}$。考虑枚举 a，则 powerful number 的个数为：

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{n}} \left\lfloor \sqrt[3]{n \cdot i^{-2}} \right\rfloor \tag{1}$$

同时，有：

$$\int_1^{\sqrt{n}} \sqrt[3]{n \cdot x^{-2}} \mathrm{d}x = 3\sqrt{n} - 3\sqrt[3]{n} \tag{2}$$

因此，1 式的结果是 $\mathcal{O}(\sqrt{n})$ 级别的。 □

Solution

则如果 $F = G * H$（其中 $*$ 为狄利克雷卷积），而 G 在非 powerful number 处均为 0，且 H 的前缀和是可以方便计算的。则我们可以枚举是 powerful number 的 d，然后只要求出 $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} H(i) = S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ 并乘上 $G(d)$ 后求和即为答案。

Solution

则如果 $F = G * H$（其中 $*$ 为狄利克雷卷积），而 G 在非 powerful number 处均为 0，且 H 的前缀和是可以方便计算的。则我们可以枚举是 powerful number 的 d，然后只要求出 $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} H(i) = S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ 并乘上 $G(d)$ 后求和即为答案。
G 在非 powerful number 处取值为 0，等价于对于任意质数 p，$G(p) = 0$，即 $F(p) \cdot H^{-1}(1) + F(1) \cdot H^{-1}(p) = 0$。而因为 H^{-1} 是积性函数，所以这等价于 $F(p) + H'(p) = 0$。而本题中 $F(p) = p^k$，所以令 $H^{-1} = \mu \cdot Id_k$，即 $H = Id_k$ 即可。则 H 的前缀和可以用拉格朗日插值方便地计算。

Solution

则如果 $F = G * H$（其中 $*$ 为狄利克雷卷积），而 G 在非 powerful number 处均为 0，且 H 的前缀和是可以方便计算的。则我们可以枚举是 powerful number 的 d，然后只要求出 $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} H(i) = S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$ 并乘上 $G(d)$ 后求和即为答案。
G 在非 powerful number 处取值为 0，等价于对于任意质数 p，$G(p) = 0$，即 $F(p) \cdot H^{-1}(1) + F(1) \cdot H^{-1}(p) = 0$。而因为 H^{-1} 是积性函数，所以这等价于 $F(p) + H'(p) = 0$。而本题中 $F(p) = p^k$，所以令 $H^{-1} = \mu \cdot Id_k$，即 $H = Id_k$ 即可。则 H 的前缀和可以用拉格朗日插值方便地计算。
然后考虑 G，根据积性函数的性质，我们只需要保证 $F = G * H$ 对于 $F(p^e)(e > 1)$ 满足即可。经过观察可以发现，令 $G(p^e) = p^k - p^{2k}(e > 1)$ 即可。
时间复杂度：$\Theta(\sqrt{n} \cdot k)$。

收集

得分情况:

- 21 分: 2 人;
- 12 分: 1 人;
- 9 分: 3 人;
- 0 分: 10 人;

Solution - $K = 0$

先考虑 $K = 0$ 的时候怎么做。

Solution - $K = 0$

先考虑 $K = 0$ 的时候怎么做。
按照 $x + y$ 从小到大的顺序考虑每个斜线的点，设 $P(x, y)$ 表示经过 (x, y) 的概率。设生成函数：

$$F_z(x) = \sum_{i=0}^{z} P(i, z - i) \cdot x^i \bmod \left(x^D - 1\right) \tag{3}$$

Solution - $K = 0$

先考虑 $K = 0$ 的时候怎么做。
按照 $x + y$ 从小到大的顺序考虑每个斜线的点，设 $P(x, y)$ 表示经过 (x, y) 的概率。设生成函数：

$$F_z(x) = \sum_{i=0}^{z} P(i, z-i) \cdot x^i \bmod \left(x^D - 1\right) \tag{3}$$

则有：

$$F_z(x) = F_{z-1}(x) \cdot (Bx + A) \tag{4}$$

而我们要求的即为：

$$[x^0] \sum_i [iD \le N] F_{iD}(x) \tag{5}$$

Solution - $K = 0$

考虑倍增，设：

$$H(x) = (Bx + A)^D \bmod \left(x^D - 1\right)$$
$$SH_n(x) = \sum_{i=1}^{n} H(x)^i$$

Solution - $K = 0$

考虑倍增，设：

$$H(x) = (Bx + A)^D \bmod \left(x^D - 1\right)$$
$$SH_n(x) = \sum_{i=1}^{n} H(x)^i$$

有转移：

- $SH_{n+1}(x) = SH_n(x) \cdot H(x) + H(x)$；
- $SH_{2n}(x) = SH_n(x) \cdot H(x)^n + SH_n(x)$。

时间复杂度：$\Theta(D^2 \log_2 N)$。

Solution

现在考虑有坑的情况。

Solution

现在考虑有坑的情况。
在计算 $[x^0]\sum_i F_{iD}(x)$ 时，我们可以对一段连续的不包含坑的 $x+y$ 的值的区间 $[l,r]$ 计算贡献。如果我们能快速求出 $F_l(x)$，那么就能将问题转化为无坑的情况了。

Solution

现在考虑有坑的情况。
在计算 $[x^0]\sum_i F_{iD}(x)$ 时，我们可以对一段连续的不包含坑的 $x+y$ 的值的区间 $[l,r]$ 计算贡献。如果我们能快速求出 $F_l(x)$，那么就能将问题转化为无坑的情况了。
设：

$$G_z(x)=\sum_{i=0}^{z}P(i,z-i)\cdot x^i \tag{6}$$

如果能得到 $G(l)$，就可以通过在原 $F(l)$ 的对应位置上减去相应的值得到有坑情况下的 $F_l(x)$。

Solution

现在考虑有坑的情况。
在计算 $[x^0]\sum_i F_{iD}(x)$ 时，我们可以对一段连续的不包含坑的 $x+y$ 的值的区间 $[l,r]$ 计算贡献。如果我们能快速求出 $F_l(x)$，那么就能将问题转化为无坑的情况了。
设：

$$G_z(x)=\sum_{i=0}^{z}P(i,z-i)\cdot x^i \tag{6}$$

如果能得到 $G(l)$，就可以通过在原 $F(l)$ 的对应位置上减去相应的值得到有坑情况下的 $F_l(x)$。
可以发现 G 的转移与 F 相同。又由于所有坑 $x\le M$，所以只用维护 $G(x) \bmod x^{M+1}$。可以发现对于无坑区间 $[l,r]$，G 的转移为：

$$G_r(x)=G_l(x)\cdot(Bx+A)^{r-l} \bmod x^M$$

而 $[x^i]\,(Bx+A)^m=\binom{m}{i}B^iA^{m-i}$，因此可以通过多项式乘法转移。
时间复杂度：$\Theta\left(K\left(D\log D+M\log^2 M\right)\log N\right)$。

Thank You!