# $min_25$筛

- 用来解决一些要求要用低于$O(n^{\frac{2}{3}})$的时间复杂度求解$\sum_{i=1}^{n} f(i)$，但要求$f(i)$是积性函数，且$f(p)$以及$\sum_p f(p)$能够快速求得
- 前置技能
  - $\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$
    - $$proof.\ k = \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor$$
      $$\Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = bk + c\ (c < b)$$
      $$\Rightarrow x = a(bk + c) + c'\ (c' < a)$$
      $$\Rightarrow x = abk + ac + c'\ (ac + c' < ac + a = a(c + 1) \le ab)$$
      $$\Rightarrow \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor = k$$
      $$\therefore \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$$
- $min_25$筛将这$1 \sim n$数分为两类：
  - 质数
  - 合数
- 对于质数，我们记$P = \{p|p \in prime\}$，特别的我们记$P_x$为从2开始第$x$个质数。同时，我们定义$g(x, j) = \sum_{i=2}^{x} f(i)[i \in P_{1..j}\ or\ min(p) > P_j, p|i, p \in P]$
- 这东西有啥用呢？我们可以注意到这东西的取值又分为两类：
  - $P_j^2 > x$
    - 当我们把$P_j$加进去的时候，对于$i \in P_{1..j}$没有任何贡献，而对于$min(p) > P_j, p|i, p \in P$最小的一个$i$为$P_j^2 > x$，因此这一部分也

没有贡献。$\therefore g(x,j)=g(x,j-1)$

  - $P_j^2 \le x$
    - 当我们把$P_j$加进去的时候，同样对于$i \in P_{1..j}$没有任何贡献，但对于$min(p) > P_j, p|i, p \in P$这一部分相比$P_{j-1}$的时候要加入的东西减少了，即$\{min(p) = P_j, p|i, p \in P\}$的这部分
    - 这部分的贡献为$f(P_j) * (g(\frac{x}{P_j}, j-1) - \sum_{i=1}^{j-1} f(P_j))$
- 因此$g(x,j)$的计算式可以改写成：
  - $$g(x,j)=\begin{cases} g(x,j-1) & P_j^2 > x \\ g(x,j-1) - f(P_j) * (g(\frac{x}{P_j}, j-1) - \sum_{i=1}^{j-1} f(P_i)) & P_j^2 \le x \end{cases}$$
  - $g()$的边界：$g(x,0) = \sum_{i=1}^{x} f(i, \text{把每个}i\text{都看成质数})$
- 说这么多有什么用?
  - 我们观察$g(x,j)$的计算式，不难发现$x$不是每个都出现的，结合$\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{x}{a} \rfloor}{b} \right\rfloor = \lfloor \frac{x}{ab} \rfloor$，我们不难发现$x$出现的都是$\lfloor \frac{n}{i} \rfloor$，$x$共$O(\sqrt{n})$个取值。
  - 并且通过$P_j^2 > n$时，$g()$值不再变，可知有效的$P_j < \sqrt{n}$，因此$j$共$O(\frac{\sqrt{n}}{ln\sqrt{n}})$
  - 再通过$P_j^2 \le x$限制，最后时间复杂度为$O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$
- 再来看一下$g(x,j)$的含义，它相当于是在$1 \sim x$中用$P_{1..j}$这些质数筛去后的数，而从$g(x,j-1)$推到$g(x,j)$就相当于是在$P_{1..j-1}$的基础上 用$P_j$筛去一些数。而最终$g(n,|P|)$就是所有$1 \sim n$的质数的函数和。
- 这样质数部分就全部做完了，然后就剩下合数部分。记$S(n,j) = \sum_{i=2}^{n} f(i)[min(p) > P_j, p|i, p \in P]$
- $S(n,j) = g(n,|P|) - \sum_{i=1}^{j-1} f(P_i) + \sum_{i \ge j} \sum_e f(P_i^e) * S(\frac{n}{P_i^e}, i+1) + f(P_i^{e+}$
- 同样$S(n,j)$中$n$只有$O(\sqrt{n})$种取值，$j$只有$O(\frac{\sqrt{n}}{\log\sqrt{n}})$，