

NOI模拟赛题解

任轩笛
EECS, PKU

Graph

- 相当于要给每个点设定一个 $0 \leq A_i \leq p_i$ ，使得每条边两边的和都等于某个数。
- 只要确定一个数，所有的都能递推出来。
- 那么把某个点表示成 x ，然后所有点都能被表示成 $\pm x + b$ 。
- 如果一个点既有正的系数又有负的系数，那就能解出来，判一下就行了。
- 否则的话把的范围搞出来求个最小值最大值就可以了。
- 复杂度 $O(n+m)$ ，期望得分100。

Bear

- 20分做法：
- 直接枚举矩阵情况，暴力算下答案。
- $O(2^{\{nm\}}*nm)$.

Bear

- 对行进行状压DP，即记录这一行哪些位置被覆盖了，枚举每个点是S还是E，转移下。
- 如果直接暴力是 $O(3^m \dots)$ 。预计得分40分。
- 如果插头DP是 $O(2^m \dots)$ 。预计得分60分。

Bear

- 根据这个数据范围我们想要对列进行状压。
- 但是直接按列做会违反他推树的顺序。
- 那么直接枚举左下-右上的对角线，一条条Dp过去就可以了。
- 如果暴力是 $O(3^n \dots)$ 。
- 如果插头DP是 $O(2^n \dots)$ 。

Juice

- 从小到大枚举答案，设为 m ，把每个数都乘上 m ，现在变成了要把它们放 m 个桶内，每个桶容量为 S 。
- 引理1：如果某 a 个数和为 $(a-1)*S$ ，那一定能将它们放入 $(a-1)$ 个桶内。
 - $a=2$ 时显然成立。
 - $a>2$ 时，考虑 $\min+\max$ ，它们和一定 $\geq S$ （否则 $a-2$ 个数和 $>(a-2)*S$ ，最大值肯定 $>\max$ ，矛盾），那么把 \max 的一部分与 \min 一起放在一个桶里，变成了 $a-1$ 的情况。

Juice

- 引理2：如果存在一种方案把 a 个数放进 b 个桶内($b < a-1$)，那么一定可以拆成 $a-b$ 个部分，每部分都形如 x 个数和为 $(x-1)*S$ 。
 - 只要证明在那种方案中能划成这么多部分就行了。
 - 考虑 b 个桶最多只有 $2b$ 个“空档”，也就是除了 a 个数以外只能再分 $2b-a$ 个断点。把一个数分到的每个桶之间连起边，只有 $2b-a$ 条边，那么桶之间至少有 $b-(2b-a)=a-b$ 个连通块。观察这些连通块的结构：
 - 考虑形成连通块的某 x 个桶，有 $2x$ 个空档，连通块内部的每一条边都会使不同的果汁数-1，那么最多只有 $2x-(x-1)=x+1$ 种。
 - 如果某个连通块里有超过 $x-1$ 条边，那么总的连通块个数显然会增加，直接把这个连通块并到别的连通块里去就行了。

Juice

- 那么现在我们就只要考虑 a 个数和为 $(a-1)*S$ 的情况就行了。
- 答案就是分成尽量多的段，每一段都是 a 个数和为 $(a-1)*S$ 。
 - $O(3^n)$
- 每个数减去 S 之后，每段和都为 $-S$
 - $O(2^{n*n})$