

异或问题与 Trie 树

Yazid Wong

一些约定

- w 一般表示位宽
- 未标注数据规模的题目默认输入规模为 10^5 级别

Part1 按位贪心

例题

- 给定一个有 n 个元素的集合，求集合内元素两两 `and` 和的最大值

bzoj 4245
[ONTAK2015]
OR-XOR

- 给定一个长度为 n 的序列 A ，要求将它划分为恰好 m 段连续的非空区间，设第 i 段的费用 c_i 为该段内所有数字的 xor 和，则总费用为 $c_1 \text{ or } c_2 \text{ or } \cdots \text{ or } c_m$
- 求总费用的最小值

APIO2015

巴厘岛的雕塑

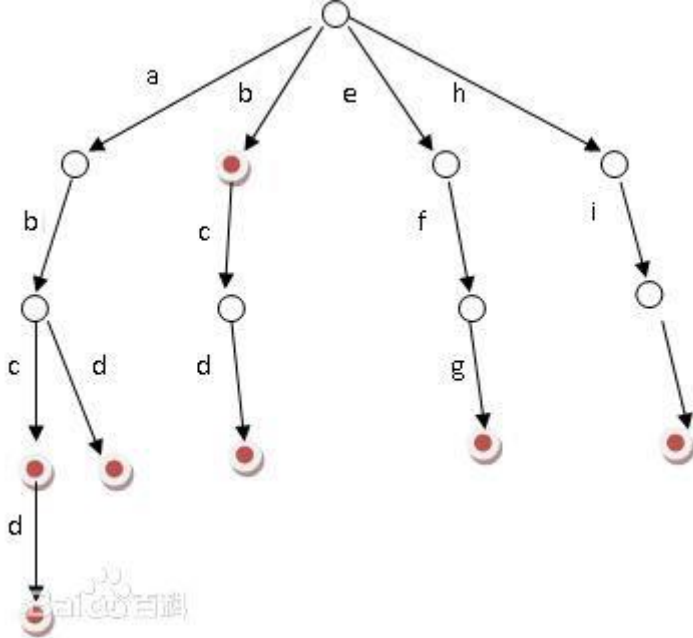
- 给定一个长度为 n 的序列，给定整数 A, B ，你需要将整个序列分成 x 段，要求 $x \in [A, B]$ ，且每段之和的 or 和最小。
- 求最小的 or 和
- $A=1$ 时： $n \leq 2000$
- $A \geq 1$ 时： $n \leq 100$



Part2 Trie

What is Trie?

- 字典树
- 一个整数本来就可以视作一个字符串



Method

- 动态维护一个集合，支持：
 - 插入新元素
 - 查询一个给定整数与集合中任一元素异或的最大（小）结果
- 使用类似权值线段树的思想维护集合
- 插入 $O(w)$
- 查询按位贪心

Bzoj 1954

- 给定一棵 n 个点的带边权树，求树上最长的异或和路径。

Bzoj 4260

- 给定一个长度为 n 的序列 A ，要求找出两个不相交连续区间，使得两区间内 `xor` 和相加最小。
- 求这个最小的相加和。

Bzoj 3261

- 给定一个初始长度为 n 的序列 A ，要求支持 2 种操作：
 - 在序列末尾插入一个元素 x
 - 给定 l, r, x ，需要找到一个位置 $p \in [l, r]$ ，并最大化 $A_p \text{ xor } A_{p+1} \text{ xor } \cdots \text{ xor } A_n \text{ xor } x$

Bzoj 4546

- 给定一个初始为空的序列，要求支持 5 种操作
 - 在序列末尾插入一个元素 x
 - 给定 l, r, x ，要求在下标区间 $[l, r]$ 中找到一个元素与 x 的异或和最大
 - 删除序列末尾的 K 个元素。
 - 给定 l, r, x ，询问下标区间 $[l, r]$ 中小于等于 x 的元素个数。
 - 给定 l, r, k ，询问下标区间 $[l, r]$ 中第 k 小的数。

Bzoj 4103

THUSC2015

异或运算

- 给定长度为 n 的序列 x 和长度为 m 的序列 y ，令矩阵 A 中第 i 行第 j 列的值 $A_{i,j} = x_i \text{ xor } y_j$
- 给出 p 个询问，每次询问给定矩形区域 $i \in [u, d], j \in [l, r]$ ，求第 k 大的 $A_{i,j}$
- 数据规模： $n \leq 1000, m \leq 300000, p \leq 500$

多省联考2019 异或粽子

- 给定一个序列 A ，求其所有子区间中异或和最大的 k 个
- 输出最大的 k 个异或和之和
- $n \leq 5 \times 10^5$
- $k \leq 2 \times 10^5$
- 进阶： $k \leq 10^9$

博弈论初步

NIM 游戏

- 二人游戏，若干堆石子，每堆石子的数量有限
- 合法的操作：选择一堆石子并拿走正整数颗（不能不拿）
- 若轮到某人时所有的石子堆都已经被拿空了，则判负
 - 本质：无合法操作可做时判负

NIM 游戏 必胜策略

- 2 堆石子 ?
- N 堆石子 ?

Bzoj 1115

- 有 N 堆石子，全局满足性质：除第一堆外，每堆石子个数都不少于前一堆的石子个数。两人轮流操作每次操作可以从一堆石子中移走任意多石子，但要保证操作后仍然满足性质
- 无操作可做者判负，问先手是否必胜。

阶梯博弈

- 和 NIM 游戏之间的关系？

Bzoj 1874

- 给定 n 堆石子，其中第 i 堆的石子数目为 a_i 。两人轮流操作，每次操作可以选择一堆，取走 x 个石子，其中 x 必须是集合 B 中的数。不能操作者判负。问是否有先手必胜策略。
- 数据范围： $n, a_i, |B| \leq 1000$

SG 函数

- 定义对于 DAG 上的节点 u : $sg(u) = \text{mex}\{sg(v) \mid v \in \text{succ}(u)\}$
 - mex 是施加于集合的运算, 表示最小的不属于此集合的非负整数

HNOI2007 分裂游戏

- 给定 n 堆石子从左到右排列，每次你可以选择一堆石子，从中取出一个石子，然后在它右边任选两堆（可以相同），并往这两堆中各放一个石子。不能操作者判负，求先手是否有必胜策略，如果有必胜策略，要求输出字典序最小的第一步操作。
- $n \leq 100$

Bzoj 1457

- 给定一张 100×100 的棋盘，在上面有一些“皇后”（可能有多个皇后在同一位置），两人轮流操作，每次操作可以选择一个皇后进行移动，但不能使其横或纵坐标变大，也不能原地不动。先将任意一个皇后移动至 $(0,0)$ 者判胜。求先手是否有必胜策略。

清华集训2016

Alice 与 Bob 又在玩游戏

- 有 n 个节点， m 条边（ $0 \leq m \leq n - 1$ ），构成若干棵有根树，每棵树的根节点是该连通块内编号最小的点。
- Alice 和 Bob 轮流操作（Alice 先手），每回合选择一个没有被删除的节点 x ，将 x 及其所有祖先全部删除，不能操作的人输。
- 需要注意的是，树的形态是在一开始就确定好的，删除节点不会影响剩余节点父亲和儿子的关系。
- 比如：1-3-2 这样一条链，1 号点是根节点，删除 1 号点之后，3 号点还是 2 号点的父节点。
- 假设 Alice 和 Bob 都足够聪明，问 Alice 有没有必胜策略。

