线性代数

kczno1

2019.7.8.

基本定义

线性组合：对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 和系数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ，称 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m$ 为其对应的线性组合。

向量空间：对于一个 n 维向量的集合 V ，我们称其是一个向量空间，当且仅当 V 中任意两个向量的任意线性组合仍 $\in V$ 。

生成空间:对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ，我们称其生成空间为其所有线性组合组成的集合。

基本定义

线性相关：对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ，我们称其为线性相关的，当且仅当它们可以通过系数不全为 0 的线性组合得到零向量。

线性无关：对于 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ ，我们称其为线性无关的，当且仅当它们不是线性相关的。

基本定义

基：对于一个向量空间 V，我们称 n 维向量组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ 是 V 的一组基，当且仅当 a 线性无关，且生成空间为 V。

线性基

例题1：给你 n 个数，问有多少个数能被这 n 个数的某个子集异或得到。

线性基

即这 n 个 L 维向量的生成空间的维数。

线性基

即这 n 个 L 维向量的生成空间的维数。
建一个 $n \times L$ 的矩阵 A，将这 n 个向量作为 A 的行向量。维数即 A 的秩。高斯消元即可。

线性基

例题2：给你 n 个数，m 次询问，每次给出一个 x ，问 x 能否被这 n 个数的某个子集异或得到。

线性基

即判断 x 是否在这 n 个 L 维向量的生成空间里。

线性基

即判断 x 是否在这 n 个 L 维向量的生成空间里。
考虑求出一组基。
建一个 $n \times L$ 的矩阵 A，将这 n 个向量作为 A 的行向量。对 A 高斯消元，最后得到的非零行向量即一组基。

线性基

即判断 x 是否在这 n 个 L 维向量的生成空间里。
考虑求出一组基。
建一个 $n \times L$ 的矩阵 A，将这 n 个向量作为 A 的行向量。对 A 高斯消元，最后得到的非零行向量即一组基。
每个基向量的最高非零位两两不同，对每一位记录它对应的基向量。
询问 x 时，只需从高到低枚举 x 的每一位，如果 x 的这一位为 1，如果这一位不存在对应的基向量，说明无解；否则将 x 异或这一位对应的基向量，然后递归操作。

线性基

例题3：一个集合 S ,初始为空，m 次操作，
每次操作要么给出一个 x ，问 x 能否被 S 的某个子集异或得到；
要么给出一个 x ，往 S 加入这个 x 。

线性基

实际上线性基是支持插入的。
插入 x 时，只需从高到低枚举 x 的每一位，如果 x 的这一位为 1 ，如果这一位不存在对应的基向量，则将这一位对应的基向量置为 x ；否则将 x 异或这一位对应的基向量，然后递归操作。

线性基

例题4：一个集合 S ,初始为空，m 次操作，
每次操作要么给出一个 x ，问 x 能否被 S 的某个子集异或得到；
要么给出一个 x ，往 S 加入这个 x ;
要么给出一个 x ，删除 S 中的 x 。
$m \leq 1000, x \leq 2^{1000}$

线性基

实际上线性基是支持删除的。
对于每个基向量和零向量都保存它是由哪些向量异或得到的。
在删除向量 x 时，查找零向量中是否存在包含 x 的，如果没有就找到基向量里位最低的包含 x 的，将它所保存的信息(由哪些向量异或得到以及值是多少)异或到其余所有含 x 的向量的信息里即可。
时间复杂度 $O(\frac{n^2L}{w})$ 。

行列式

对于一个 n 阶方阵 A，

$$det(A) = \sum_{p \in S(n)} sgn(p) \prod_{i=1}^{n} a_{i,p[i]}$$

其中 $det(A)$ 表示 A 的行列式，也记作 $|A|$；
$S(n)$ 表示 $1 \ldots n$ 的全排列；
$sgn(p)$ 表示 $(-1)^{s(p)}$，其中 $s(p)$ 是 p 的逆序对数量。

行列式的几何意义是 n 维平行体的有向体积。

特征多项式

对于一个 n 阶方阵 A，如果存在标量 λ 和非零向量 v，
使得 $Av = \lambda v$，
则称 λ 为 A 的一个特征值，v 为 A 的一个特征向量。

特征多项式

考虑如何判断一个 λ 是不是 A 的特征值。
即 $Av = \lambda v$ 存在非零解。
即 $(A - \lambda I)v = 0$ 存在非零解。
即 $rank(A - \lambda I) < n$ 。
即 $|A - \lambda I| = 0$ 。
$|A - \lambda I|$ 是一个关于 λ 的 n 次多项式 $p(\lambda)$，被称为 A 的特征多项式。

特征多项式

哈密尔顿–凯莱定理:
对于一个 n 阶方阵 A，A 的特征多项式是 A 的零化多项式。

题目

https://ac.nowcoder.com/acm/contest/133/E
https://ac.nowcoder.com/acm/contest/186/F
https://loj.ac/problem/6018
https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=5458