NOI模拟赛题解

2019.7.

分组游戏

按照组的人数从大到小的顺序考虑分组，令 $dp(i, j)$ 表示考虑完大小为 $[i, n]$ 的组，用了 j 个人的方案数。
从 i 转移到 $i-1$ 时，枚举一下大小为 $i-1$ 的组有多少个，这些组的人从 $a_x = i-1$ 和 $a_x \geq i$ 中没被分掉的人中选出，乘上这个系数即可。

函数

在递归版Min_25筛中搜每个质数 p 时会从 p^1，p^2，p^3，... 这样搜下去，如果每个都搜会超时。

函数

在递归版Min_25筛中搜每个质数 p 时会从 p^1，p^2，p^3，... 这样搜下去，如果每个都搜会超时。
注意到如果一个数 $X = A \cdot B$，$gcd(A, B) = 1$ 且 A 中所有质因数次数不超过 1，那么 $F(X) = A^k \cdot F(B)$。如果搜出了所有次数超过一次的质因数，也能算出答案。这样在做Min_25筛时只用从 p^2 开始搜了。

函数

在递归版Min_25筛中搜每个质数 p 时会从 p^1，p^2，p^3，... 这样搜下去，如果每个都搜会超时。
注意到如果一个数 $X = A \cdot B$，$gcd(A, B) = 1$ 且 A 中所有质因数次数不超过 1，那么 $F(X) = A^k \cdot F(B)$。如果搜出了所有次数超过一次的质因数，也能算出答案。这样在做Min_25筛时只用从 p^2 开始搜了。
令 $G(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k$。考虑容斥，我们只搜所有质因数次数均大于 1 的数 X，当搜到 X 时，将 $G(\frac{N}{X}) \cdot coef(X)$ 算入答案，不难发现当 $X = \Pi p_i^{q_i}$ 时，$coef(X) = \Pi(p_i^k - p_i^{2k})$。

收集

当没有坑时:
我们设 $F_z(x) = \sum_{i=0}^{z} P(i, z-i) * x^i \ mod \ (x^D - 1)$，那么有 $F_z(x) = F_{z-1}(x) * (Bx + A)$。所求即为 $[x^0] \sum_i [iD \le N] F_{iD}(x)$。
可以考虑通过倍增的思想进行。
我们另 $H(x) = (Bx + A)^D \ mod \ (x^D - 1)$,
$SH_n(x) = \sum_{i=1}^{n} H(x)$。
有转移
$SH_{n+1}(x) = SH_n(x) \cdot H(x) + H(x)$,
$SH_{2n}(x) = SH_n(x) \cdot H(x)^n + SH_n(x)$。

收集

现在考虑有坑怎么做。
在计算 $[x^0]\ \sum_i\ F_{iD}(x)$ 时，我们可以对一段连续的不包含坑的 $x+y$ 的值的区间 $[l,\ r]$ 计算贡献。如果我们能快速求出 $F_l(x)$，那么就能将问题转化为无坑的情况了。
我们设 $G_z(x) = \sum_{i=0}^{z} P(i,\ z-i) * x^i$。如果能得到 $G_l(x)$，就可以通过在原 $F_l(x)$ 的对应位置上减去相应的值得到有坑情况下的 $F_l(x)$。可以发现 G 的转移与 F 相同。又由于所有坑 $x \le M$，所以只用维护 $G(x)\ mod\ x^M$。
对于无坑区间 $[l,\ r]$，$G_r(x) = G_l(x)\cdot(Bx+A)^{r-l}\ mod\ x^M$，$[x^i](Bx+A)^m = \binom{m}{i}\ B^i\ A^{m-i}$。可以通过一次多项式乘法进行转移。
时间复杂度 $O(K(D\ log\ D + M\ log^2\ M)\ log\ N)$。

祝大家 NOI 取得好成绩!