

CSP-S 2019 模拟赛 Day 1 题解

CMXRYNP & Panole

1 流量

根据“每个点处流入的流量之和等于流出的流量之和”，当且仅当一个点仅有一条未知流量的边时，可以推断得知这条边的状态。

考虑未观察的边构成的集合，如果存在环，那么环上的边不可能被推断出来。只要不存在环，方案即是合法的。因此不选择的集合是原图的最大生成森林，需要注意的是负权边的一点点特判（良心的出题人在样例里提供了这种情况，不特判可以获得 10 分的好成绩）。

复杂度 $\mathcal{O}(m \log m + n \log n)$

题目提供了 `puts("0")` 的签到分，而稍稍观察后又可以得到更具一般性的做法，这 30 分的子任务，达到了人口普查的目的，无疑是出题人无私的馈赠，成为你 AK 路上的有力援助。

2 个人练习生

2.1 满分算法 1

将时间反转，从时刻 $n - 1$ 到时刻 0 依次释放一个 `zx2003`，祖先节点先于后代节点。

从根开始，每次选择当前可以选择的最小的点，并把其儿子加入待选集合。

用一个堆来简单维护，时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$

考虑这么做的正确性：假设有一个选择顺序与我们的方案不同，设其在第一个不同的位置选择了点 x ，我们选择了 y 。记点 i 到根的距离与 a_i 之和为 f_i （下放之后的额外时间消耗），则 $f_y \leq f_x$ 。把 y 提前，显然新的顺序仍是合法的，受到影响的是原先位于 x 和 y 中间的点，它们和 x 的最终结束时刻都提前了 1，而 y 的结束时刻也不会晚于原先的 x 。所以新的顺序不劣于原顺序。如此调整有限步后可以得到我们的方案，因此它不劣于任何方案。

2.2 满分算法 2

令

$$g_v = v \text{ 到根的距离} + \max_{u \text{ 是 } v \text{ 的祖先}} a_u$$

按照其从大到小的顺序选择即可。容易发现这是对的。
复杂度瓶颈是排序。

3 假摔

随机的性质非常优美，选手可以充分发挥主观能动性，创造出优秀的算法来通过 20 分的 Subtask 4，这无疑是出题人无私的馈赠。

3.1 算法 1

考虑如何用较优的复杂度处理单个询问。

不妨设元素两两不同。对于一种最优方案 (A, B, C) ：

- 若存在 $A < x < B$ 使得 $a_x > a_A$ ，则 (x, B, C) 是一组更优的合法解，因此 $a_x < a_A$ 。
- 若存在 $A < x < B$ 使得 $a_x > a_B$ ，则 (A, x, C) 是一组更优的合法解，因此 $a_x < a_B$ 。

于是这样的 (A, B) 二元组只有 $\mathcal{O}(n)$ 个，可以用单调栈处理，结合后缀最大值可以在 $\mathcal{O}(n)$ 的时间内处理单组询问。

可以通过 Subtask 1 & 3

3.2 算法 2

在上述观察的基础上进行优化。

从大到小枚举左端点，令 f_i 表示当前以 i 为 C 点的最大值。

在枚举到 A 时，处理所有二元组 (A, B) ：

对于 $i \geq 2B - A$ ，执行 $f_i \leftarrow \max(f_i, a_A + a_B + a_i)$ 。

在枚举到 l 时，处理所有询问 $[l, r]$ ：

答案即为 $\max_{i=l}^r f_i$ 。

利用线段树简单维护，时间复杂度 $\mathcal{O}((n + q) \log n)$

可以通过全部数据。