Parcial 1 · Señales y Sistemas 2024-I

a) La distancia media entre 2 señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas.

$$d^2(x_1, x_2) = P_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt$$

· Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales como se muestra a continuación

$$x_1(t) = A e^{jw_0 t} \qquad x_2(t) = B e^{j5w_0 t}$$

Con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T, A, B \in \mathbb{R}^+$

determine la distancia entre 2 señales

Solución:

- Hallamos la distancia media entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (A e^{jw_0 t} - B e^{j5w_0 t})^2 \, dt$$

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (A^2 e^{2jw_0 t} - 2AB e^{6jw_0 t} + B^2 e^{10jw_0 t}) \, dt$$

$$d^2(x_1, x_2) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \left(\int_0^T A^2 e^{2jw_0 t} \, dt - \int_0^T 2AB e^{6jw_0 t} \, dt + \int_0^T B^2 e^{10jw_0 t} \, dt \right)$$

Ahora vamos a usar la propiedad:

$$\boxed{\int e^{at} \, dt = \frac{1}{a} e^{at} + C}$$

Por tanto se tiene:

$$d(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\left[\frac{A^2 e^{2j\omega_0 t}}{2j\omega_0}\right]_0^T - \left[\frac{2AB\, e^{6j\omega_0 t}}{6j\omega_0}\right]_0^T + \left[\frac{B^2 e^{10j\omega_0 t}}{10j\omega_0}\right]_0^T\right.$$

Vamos a sustituir $\omega_0 = 2\pi/T$

$$d(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\left[\frac{A^2 e^{2j\left(\frac{2\pi}{T}\right)t}}{2j\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)}\right]_0^T - \left[\frac{2AB\, e^{6j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot t}}{6j\left(\frac{2\pi}{T}\right)}\right]_0^T + \left[\frac{B^2 e^{10j\cdot\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot t}}{10j\left(\frac{2\pi}{T}\right)}\right]_0^T\right]$$

evaluando los limites de integración

$$d(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\left(\frac{A^2 e^{2j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot T}}{4\pi j/T} - \frac{A^2 e^{2j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot 0}}{4\pi j/T}\right) - \left(\frac{2AB\, e^{6j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot T}}{12\pi j/T} - \frac{2AB\, e^{6j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot 0}}{12\pi j/T}\right) + \ldots\right.$$

$$\left.\ldots\left(\frac{B^2 e^{10j\left(\frac{2\pi}{T}\right)T}}{20\pi j/T} - \frac{B^2 e^{10j\left(\frac{2\pi}{T}\right)\cdot 0}}{20\pi j/T}\right)\right]$$

$$d(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\left(\frac{A^2 e^{4\pi j}}{4\pi j}\cdot T - \frac{A^2}{4\pi j}\cdot T\right) - \left(\frac{AB e^{12\pi j}}{6\pi j}\cdot T - \frac{AB\cdot T}{6\pi j}\right) + \left(\frac{B^2 e^{20\pi j}}{20\pi j}\cdot T - \frac{B^2\cdot T}{20\pi j}\right)\right]$$

Vamos a multiplicar cada termino por j/j

$$d(x_1,x_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left[\frac{j}{j}\frac{A^2 e^{4\pi j}}{4\pi j} - \frac{j}{j}\frac{A^2\cdot T}{4\pi j} - \frac{jAB\, e^{12\pi j}}{j\,6\pi j} + \frac{jAB\cdot T}{j\,6\pi j} + \frac{jB^2 e^{20\pi j}}{j\,20\pi j} - \frac{jB^2\cdot T}{j\,20\pi j}\right]$$

$$d(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\frac{-0{,}25\,jA^2Te^{4\pi j}}{\pi}+\frac{0{,}25\,jA^2T}{\pi}+\frac{0{,}1\bar{6}\,jABTe^{12\pi j}}{\pi}-\frac{0{,}1\bar{6}\,jABT}{\pi}\right.$$

$$\left.\frac{-0{,}05\,jB^2Te^{12\pi j}}{\pi}+\frac{0{,}05\,jB^2T}{\pi}\right]$$ Multiplicando cada termino por $1/T$ se tiene

$$d(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-0{,}25\,jA^2e^{4\pi j}}{\pi}+\frac{0{,}25\,jA^2}{\pi}+\frac{0{,}1\bar{6}\,jABe^{12\pi j}}{\pi}-\frac{0{,}16\,jAB}{\pi}\right.$$

$$\left.-\frac{0{,}05\,jB^2e^{12\pi j}}{\pi}+\frac{0{,}05\,jB^2}{\pi}\right)$$ Usamos $e^{kj}=\cos(k)+j\,\mathrm{Sen}(k)$

$$d(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-0{,}25\,jA^2(\cos(4\pi)+j\,\mathrm{sen}(4\pi))+0{,}25\,jA^2}{\pi}+\frac{0{,}16\,jAB(\cos(12\pi)+j\,\mathrm{sen}(12\pi))}{\pi}\right.$$

$$\left.-\frac{0{,}16\,jAB}{\pi}-\frac{0{,}05\,jB^2(\cos(12\pi)+j\,\mathrm{sen}(12\pi))j}{\pi}+\frac{0{,}05\,jB^2}{\pi}\right.$$

$$d(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{-0{,}25\,jA^2+0{,}25\,jA^2}{\pi}+\frac{0{,}1\bar{6}\,jAB-0{,}16\,jAB}{\pi}+\frac{(-0{,}05\,jB^2+0{,}05\,jB^2)}{\pi}\right]$$

$$d(x_1,x_2)=\lim_{T\to\infty}[\,0\,]=0$$ "La distancia entre $x_1(t)$ y $x_2(t)$ es 0"

b) Cual es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un Conversor análogo digital con frecuencia de maestreo de 5 KHZ, aplicado a la señal continua.

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\,\text{sen}(2000\pi t) + 10\cos(11.000\pi t)$$

Realizar el proceso de discretización, en caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un Conversor adecuado para la señal estudiada.

S/ Hallamos la frecuencia de cada señal

- $x_1(t) = 3\cos(1000\pi t)$
- $x_2(t) = 5\,\text{sen}(2000\pi t)$
- $x_3(t) = 10\cos(11000\pi t)$

- $\omega_1 = 2\pi f$ $\quad 1000\pi = 2\pi f \quad f = 500\ HZ$
- $\omega_2 = 2\pi f$ $\quad 2000\pi = 2\pi f \quad f = 1000\ HZ$
- $\omega_3 = 2\pi f$ $\quad 11000\pi = 2\pi f \quad f = 5500\ HZ$

Luego por el teorema de Nyquist, se determina si Fs es apropiada o no

$Fs \geq 2f$ $\qquad Fs \geq 2\max(f_1, f_2, f_3)$

$Fs \geq 2f_3$ $\qquad 5000 \geq 11000$ La inequación no se cumple.

de igual forma se va a discretizar la señal con $Fs = 5KHZ$ se comprobara que queda incorrecta

$t = \frac{n}{Fs}$ Por tanto:

$$x[n] = 3\cos\left(10.000\pi\left(\frac{n}{5000}\right)\right) + 5\,\text{sen}\left(2000\pi\left(\frac{n}{5000}\right)\right)$$

$$+ 10\cos\left(11000\pi\left(\frac{n}{5000}\right)\right)$$

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{2}{5}\pi n\right) + 10\cos\left(\frac{11}{5}\pi n\right)$$

Ya discretizada la señal se hallan las frecuencias en discreto Ω

$\Omega_1 = \frac{\pi}{5} \in [-\pi, \pi]$, Original

$\Omega_2 = \frac{2\pi}{5} \in [-\pi, \pi]$, Original

$\Omega_3 = \frac{11}{5}\pi \notin [-\pi, \pi]$, Copia.

$\Omega_{3orig} = \frac{11}{5}\pi - 2\pi = \frac{1}{5}\pi$ Por tanto la señal discretizada es:

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{5}n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{5}n\right)$$

Luego se comprueba la discretización hallando las frecuencias Originales

$$\Omega_{orig} = 2\pi f = 2\pi \frac{F_{orig}}{F_s}$$

$$F_{orig} = \frac{\Omega_{orig} \cdot F_s}{2\pi} \rightarrow F_{orig_1} = \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)(5000)}{2\pi} = 500 \text{ Hz}$$

$$F_{orig_2} = \frac{\left(\frac{2\pi}{5}\right)(5000)}{2\pi} = 1000 \text{ Hz}$$

$$F_{orig_3} = \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right)(5000)}{2\pi} = 500 \text{ Hz}$$

Como f_{orig3} no es igual a f_3, $f_s = 5\,kHz$ no es apropiado como se menciono anteriormente con el teorema de Nyquist por tanto se propone un nuevo f_s

$f_s = 110\ KHZ$

Asi, la señal discretizada es

$$x[n] = 3\cos\left(1000\pi \frac{n}{110000}\right) + 5\,\mathrm{Sen}\left(2000\pi \frac{n}{110000}\right)$$

$$+ 10\cos\left(11000\pi \frac{n}{110000}\right)$$

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi n}{110}\right) + 5\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi n}{55}\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{10} n\right)$$

Se hallan las frecuencias en discreto

$\Omega_1 = \frac{\pi}{110} \in [-\pi, \pi]$ $\qquad$ $\Omega_2 = \frac{\pi}{55} \in [-\pi, \pi]$

$\Omega_3 = \frac{\pi}{10} \in [-\pi, \pi]$ $\qquad$ ya que todos son originales. Hallando las frecuencias originales se tiene

$$f_1 = \frac{\Omega_1 \cdot f_s}{2\pi} \rightarrow f_1 = \frac{\frac{\pi}{110} \cdot 110\,000\ HZ}{2\pi} = 500\ HZ$$

$$f_2 = \frac{\Omega_2 \cdot f_s}{2\pi} \rightarrow f_2 = \frac{\frac{\pi}{55} \cdot 110\,000\ HZ}{2\pi} = 1000\ HZ$$

$$f_3 = \frac{\Omega_3 \cdot f_s}{2\pi} \rightarrow f_3 = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 110\,000\ HZ}{2\pi} = 5500\ HZ$$

Se ve que dan iguales las frecuencias con $F_s = 110\ KHZ$

$\Omega_1 = \frac{\pi}{110}$, $\Omega_2 = \frac{\pi}{55}$ y $\Omega_3 = \frac{\pi}{10}$

Por tanto la señal discretizada es

$$x[n] = 3\cos\left(\frac{\pi}{110} n\right) + 5\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{55} n\right) + 10\cos\left(\frac{\pi}{10} n\right)$$

Antes de realizar la simulación se observará si las señales son cuasiperiodicas y en dado caso hallamos:

$\cdot\ \omega_1 = 1000\pi$, $\quad \cdot\ \omega_2 = 2000\pi \quad \cdot\ \omega_3 = 11000\pi$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1000\pi}{2000\pi} = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \text{ (Racional)}$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{1000\pi}{11000\pi} = \frac{1}{11} \in \mathbb{Q}$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{2000\pi}{11000\pi} = \frac{2}{11} \in \mathbb{Q}$$

Como todas las relaciones $\frac{\omega_i}{\omega_j} \in \mathbb{Q}$

$x(t)$ es Cuasiperiodica

Hallamos T

$\omega_1 T = k2\pi$	$\frac{2\pi}{T_1}$	$k, L, r \in \mathbb{Z}$
$\omega_2 T = L2\pi$	$\frac{2\pi}{T_2}$	
$\omega_3 T = r2\pi$	$\frac{2\pi}{T_3}$	

Por tanto se tiene que

$T = kT_1 = \ell T_2 = rT_3 = mCm(T_1, T_2, T_3)$ donde

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{1000\pi} = \frac{1}{500}$ [5]

$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{11000\pi} = \frac{1}{5500}$ [5] por lo que:

$T = \frac{k}{500} = \frac{\ell}{1000} = \frac{r}{5500}$ Se multiplica las igualdades por: 11000

$11000\,T = 22k = 11\ell = 2r$

$m.c.m(22, 11, 2) = 22$

$11000\,T = 22$ $\quad T = \frac{1}{500}$

Por tanto se obtuvo el periodo de la señal Cuasiperiódica

$\boxed{T = \frac{1}{500}}$ [5] Necesario para la simulación