Parcial 1 - Señales y Sistemas 2024 - II

Nombre: Paul Irua Rosero   Fecha:

Profesor: Materia:

Institución: Curso: Nota:

Pregunta 1: ¿Cuál es la señal obtenida en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital de 5 bits con frecuencia de muestreo de 5 KHZ aplicado a la señal continua $x(t) = 0,3\cos(1000\pi t - \pi/4) + 0,6\,\text{Sen}(2000\pi t) + 0,1\cos(11000\pi t - \pi)$? Realizar la simulación del proceso de digitalización incluyendo al menos 3 ciclos de la señal $x(t)$

en caso de que la digitalización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada el conversor debe permitir configurar la cantidad de bits y la frecuencia de muestreo, indicando al usuario si dicha frecuencia es apropiada o no, y graficar la señal continua discreta y digital.

Solución:

tenemos la señal:

$$x(t) = 0,3\cos(1000\pi t - \pi/4) + 0,6\,\text{Sen}(2000\pi t) + 0,1\cos(11000\pi t - \pi)$$

$\omega_1 = 1000\pi$ $\qquad$ $\omega_2 = 2000\pi$ $\qquad$ $\omega_3 = 11000\pi$

Sabemos que: $\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$ por tanto

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = \boxed{500\ Hz}$ $\qquad$ $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = \frac{2000\pi}{2\pi} = \boxed{1000\ Hz}$

$f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = \boxed{5500\ Hz}$ $\qquad$ tomamos la frecuencia más alta y verificamos si cumple Nyquist

teorema de Nyquist: $F_s \geq 2 F_{max}$

$5000\ Hz \geq 2\ 5500\ Hz \rightarrow \boxed{5000\ Hz \geq 11000\ Hz}$

Podemos ver que no se cumple la inecuación, aún así vamos a realizar el proceso de discretización con la frecuencia de muestreo dada para observar el fenómeno de aliasing

$T_s = \frac{1}{F_s} = \boxed{\frac{1}{5000}}$ $\qquad$ $t = nT_s \quad n \in \mathbb{Z},\ T_s \in \mathbb{R}^+$

$$x[n] = 0,3\cos\left[1000\pi\left(\frac{n}{5000}\right) - \frac{\pi}{4}\right] + 0,6\,\text{Sen}\left[2000\pi\left(\frac{n}{5000}\right)\right]$$

$$+ 0,1\cos\left[11000\pi\left(\frac{n}{5000}\right) - \pi\right]$$

$$x[n] = 0,3\cos\left[\frac{\pi n}{5} - \frac{\pi}{4}\right] + 0,6\,\text{Sen}\left[\frac{2\pi n}{5}\right] + 0,1\cos\left[\frac{11\pi n}{5}\right]$$

ya discretizada la señal hallamos las frecuencias en discreto

$\Omega_1 = \frac{\pi}{5} \in [-\pi, \pi]$ $\quad$ $\Omega_2 = \frac{2\pi}{5} \in [-\pi, \pi]$ $\quad$ $\Omega_3 = \frac{11\pi}{5} \notin [-\pi, \pi]$

Original $\qquad$ Original $\qquad$ Copia

Ω_3 Original $= \frac{11\pi}{5} - 2\pi = \boxed{\frac{\pi}{5}}$ por tanto la señal discretizada es:

$$x[n] = 3\,Cos\left[\frac{\pi}{5}n - \frac{\pi}{4}\right] + 0{,}6\,Sen\left[\frac{2\pi}{5}n\right] + 0{,}1\,Cos\left[\frac{\pi}{5}n - \pi\right]$$

Ahora vamos a comprobar la discretización hallando las frecuencias originales.

$$\boxed{\Omega\,original = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{F\,original}{Fs}} \rightarrow \boxed{F\,original = \frac{\Omega\,Original \cdot Fs}{2\pi}}$$

$$F\,original_1 = \frac{\left(\frac{\pi}{5}\right) \cdot 5000}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = \boxed{500\ Hz}$$

$$F\,original_2 = \frac{\frac{2\pi}{5} \cdot 5000}{2\pi} = \frac{2000\pi}{2\pi} = \boxed{1000\ Hz}$$

$$F\,original_3 = \frac{\frac{\pi}{5} \cdot 5000}{2\pi} = \boxed{500\ Hz} \rightarrow \neq 5500\ Hz$$

dado que F original 3 no es igual a F_3, la frecuencia de muestreo Fs de 5000 Hz no es adecuada para discretizar la señal $x(t)$ ya demostrado esto, vamos a proponer una nueva frecuencia de muestreo que cumpla Nyquist

$Fs = 110\ KHz \rightarrow 110\ KHz \geq 2\,5500\,Hz$ Cumple Nyquist

$\boxed{Ts = \frac{1}{Fs}}$ Recordemos también que $t = n\,Ts$

$$\rightarrow x[n] = 0{,}3\,Cos\left[1000\pi\left(\frac{n}{110000}\right) - \frac{\pi}{4}\right] + 0{,}6\,Sen\left[2000\pi\left(\frac{n}{110000}\right)\right]$$

$$+ 0{,}1\,Cos\left[11000\pi\left(\frac{n}{110000}\right) - \pi\right]$$

$$\rightarrow \boxed{x[n] = 0{,}3\,Cos\left[\frac{\pi n}{110} - \frac{\pi}{4}\right] + 0{,}6\,Sen\left[\frac{\pi \cdot n}{55}\right] + 0{,}1\,Cos\left[\frac{\pi \cdot n}{10} - \pi\right]}$$

Señal discretizada.

Ahora hallamos las frecuencias en discreto

$\boxed{\Omega_1 = \frac{\pi}{110}}$ $\boxed{\Omega_2 = \frac{\pi}{55}}$ $\boxed{\Omega_3 = \frac{\pi}{10}}$ dado que Ω_1, Ω_2 y Ω_3 $\in [-\pi, \pi]$

$$f_1 = \frac{\Omega_1 \cdot fs}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{110} \cdot 110000}{2\pi} = \frac{1000\pi}{2\pi} = \boxed{500\ Hz}$$

$$f_2 = \frac{\Omega_2 \cdot fs}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{55} \cdot 110000}{2\pi} = \frac{2000\pi}{2\pi} = \boxed{1000\ Hz}$$

frecuencias originales de la señal $x(t)$ en análogo

$$f_3 = \frac{\Omega_3 \cdot fs}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{10} \cdot 110000}{2\pi} = \frac{11000\pi}{2\pi} = \boxed{5500\ Hz}$$

por tanto con $Fs = 110\ KHz$ es una buena frecuencia de muestreo ya que capta la mayor información posible

Ahora vamos a identificar si la señal $x(t)$ es cuasiperiódica

$\omega_1 = 1000\pi$ $\omega_2 = 2000\pi$ $\omega_3 = 11000\pi$

$\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{1000\cancel{\pi}}{2000\cancel{\pi}} = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ $\dfrac{\omega_1}{\omega_3} = \dfrac{1000\cancel{\pi}}{11000\cancel{\pi}} = \dfrac{1}{11} \in \mathbb{Q}$

$\dfrac{\omega_2}{\omega_3} = \dfrac{2000\cancel{\pi}}{11000\cancel{\pi}} = \dfrac{2}{11} \in \mathbb{Q}$

Como todas las relaciones $\dfrac{\omega_i}{\omega_j} \in \mathbb{Q}$ la señal es cuasiperiódica

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega}}$ Hallamos los periodos T_1, T_2, T_3

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1} = \dfrac{2\pi}{1000\pi} = \boxed{\dfrac{1}{500}}$ $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2} = \dfrac{2\cancel{\pi}}{2000\cancel{\pi}} = \boxed{\dfrac{1}{1000}}$

$T_3 = \dfrac{2\pi}{\omega_3} = \dfrac{2\cancel{\pi}}{11000\cancel{\pi}} = \boxed{\dfrac{1}{5500}}$ $K, L, r \in \mathbb{Z}$

$\boxed{T = KT_1 = LT_2 = rT_3} \rightarrow T = \dfrac{1}{500}K = \dfrac{1}{1000}L = \dfrac{1}{5500}r$

$100T = \dfrac{K}{5} = \dfrac{L}{10} = \dfrac{r}{55} \rightarrow 55.100T = 11K = \dfrac{11}{2}L = r$

$2.55.100T = 22K = 11L = 2r \rightarrow \boxed{11000T = 22K = 11L = 2r}$

Vamos a calcular el m.c.m $(22, 11, 2) = 22$

22	11	2	2
11	11	1	11
1	1	1	

$\rightarrow 22$ Por tanto: $11000T = 22$

$T = \dfrac{22}{11000} = \boxed{\dfrac{1}{500}}$

Por tanto el periodo mínimo de la señal cuasiperiódica es de $\dfrac{1}{500}$ seg necesario para la simulación