TEORÍA DE ALGORITMOS I

TP1

ALUMNO: MARÍA PAULA BRÜCK

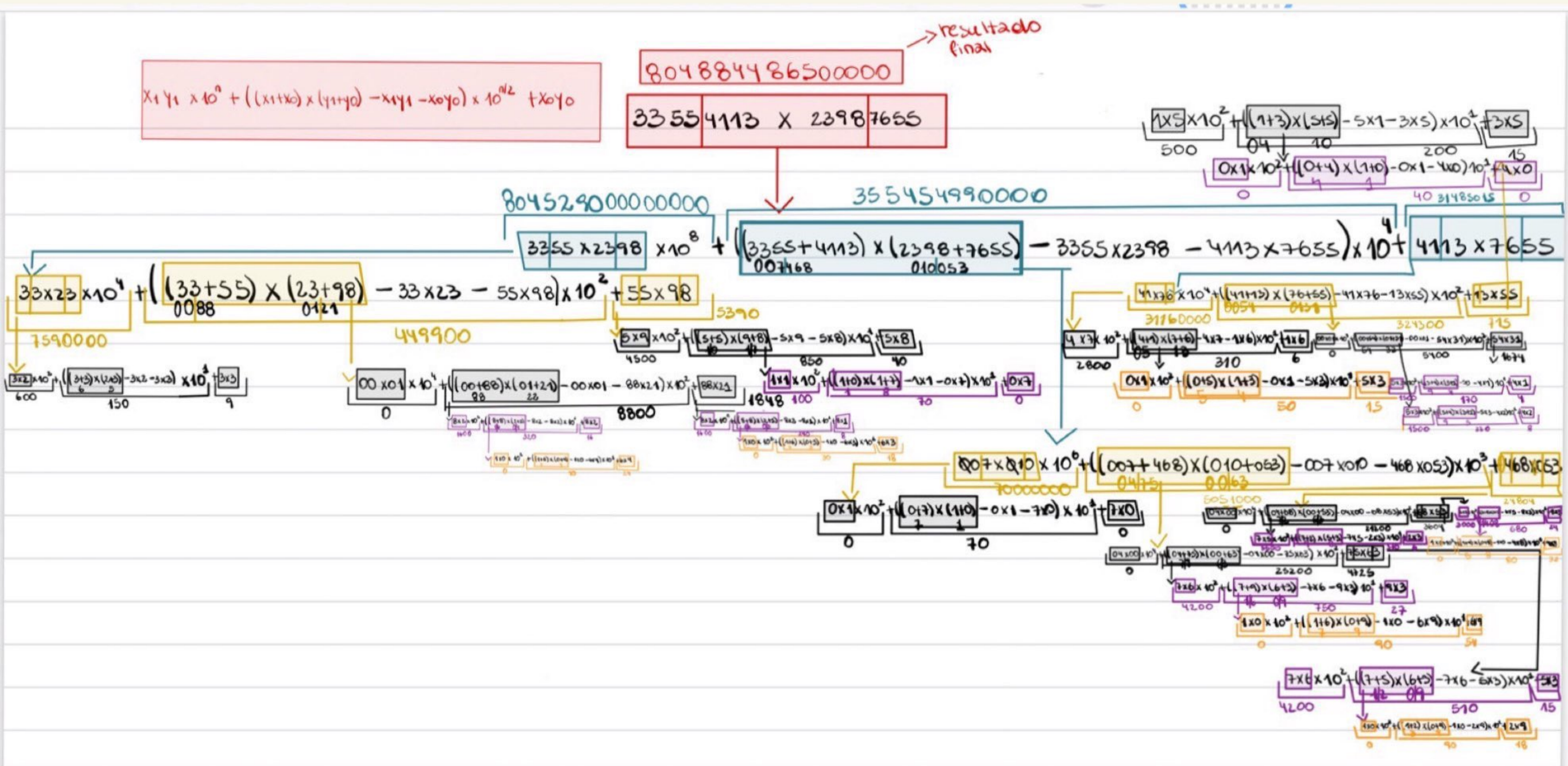
PADRON: 107533

FECHA DE ENTREGA: 27/09/2021

PARTE 1

- NUMEROS: 33554113
  23987655

1) MULTIPLICACION KARATSUBA



2) COMPLEJIDAD TEMPORAL

* El metodo de multiplicacion de Karatsuba conlleva reducir las multiplicaciones aumentando el numero de sumas. En vez de hacer 4 multiplicaciones como en el metodo tradicional se reducen a $\boxed{3}$ sin embargo el numero de sumas es mayor siendo este $\boxed{4}$. Este algoritmo reduce la complejidad temporal de $O(n^2)$ como es utilizando el metodo tradicional a $O(n^{1.59})$. Esto se puede demostrar a traves del teorema maestro:

al tener 13 casos base se realizaron 39 multiplicaciones como base cuyos resultados fueron combinandose para asi poder llegar a una unica solucion general.

por lo tanto la cantidad total de sumas en los casos base $13 \times 4 = \boxed{52}$

Nuestra relacion de recurrencia sería: $T(n) = \underbrace{3}_{}T(n/2) + cn$

Siendo este el numero de multiplicaciones

$$\boxed{(10^n)\, x_1 y_1 + ((x_1 y_2) + (x_2 y_1))\, 10^{n/2} + x_2 y_2}$$

$$\begin{cases} x_1 y_1 \\ (x_1+x_2)(y_1+y_2) \\ x_2 y_2 \end{cases}$$

$$T(n) = 3^k \times 1 + \sum_{i=0}^{k} \frac{3^i \times n}{2^i}$$

$K = \log_2 n$ } cant de veces que hago la sumatoria

$$T(n) = 3^{\log(n)} + n \times \sum_{i=0}^{\log(n)} \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

usando $\sum_{i=0}^{x} r^i = \frac{1 - r^{(x+1)}}{1-r}$

$$T(n) = 3^{\log(n)} + n \times \frac{\left(1 - (3/2)^{\log(n)+1}\right)}{(1 - 3/2)}$$

$$T(n) = 3^{\log(n)} + 2n \times \left((3/2)^{\log(n)+1} - 1\right)$$

$$T(n) = 3^{\log(n)} + 3n \times (3/2)^{\log(n)} - 2n$$

$$T(n) = 3^{\log(n)} + 3n \, \frac{3^{\log(n)}}{2^{\log(n)}} - 2n$$

$$T(n) = 3^{\log(n)} + 3 \times 3^{\log(n)} - 2n$$

$T(n) = 4 \times 3^{\log(n)} - 2n \longrightarrow$ usando $a^{\log_2 n} = n^{\log_2 a}$

$$T(n) = 4 \times n^{\log 3} - 2n$$

si $n \to \infty$

$$\boxed{O(n^{\log_2 3}) = O(n^{1.59})}$$

3) si comparamos el metodo de Karatsuba con el metodo tradicional podemos afirmar que es mas eficiente ya que para los n grandes reduce la complejidad temporal de $O(n^2)$ a $O(n^{1.59})$.

En el caso resuelto en el punto 1 si hubieramos usado el metodo tradicional hubieramos hecho:

33554113 $\longrightarrow n = 8 \longrightarrow$ 64 multiplicaciones digito x digito
x 2398 7655

$O(8^2) \longrightarrow O(n^2)$

5x3 5x3 5x5 5x5 5x4 5x1 5x1 5x3
5x3 5x3 5x5 5x5 5x4 5x1 5x1 5x3 0
6x3 6x5 6x5 6x4 6x1 6x1 6x3 0 0
7x3 7x5 7x5 7x4 7x1 7x1 7x3 0 0 0
8x3 8x5 8x5 8x4 8x1 8x1 8x3 0 0 0 0
9x3 9x3 9x5 9x5 9x4 9x1 9x1 9x3 0 0 0 0 0
3x3 3x3 3x5 3x5 3x4 3x1 3x1 3x3 0 0 0 0 0 0
2x3 2x5 2x5 2x4 2x1 2x1 2x3 0 0 0 0 0 0 0

804 0244 8650 0000

4) El algoritmo de Karatsuba es del tipo divide y conquista ya que el problema se resuelve de manera recursiva dividiendo el problema inicial en 2 subproblemas siendo estos de menor tamaño hasta llegar a un caso base y luego combina las soluciones de los subproblemas en una unica solucion general.

PARTE 2

- Ecuacion de Recurrencia: $T(n) = 2T(n/5) + O(n^2)$

1) Para utilizar teorema maestro nos falta decir que cuando se llegue al caso base este ultimo problema tiene que tener como complejidad de ejecucion una constante $(O(1)) \rightarrow \boxed{T(0) = cte}$

2, 3) Complejidad temporal aplicando Teorema Maestro

* teniendo esta ecuacion de recurrencia podemos decir:

$T(n) = 2T(n/5) + O(n^2)$ con $T(0) = cte$

$a = 2$ (cantidad de subproblemas)

$b = 5$ (fraccion de elementos por subproblema)

$f(n) = n^2$ (separacion y unión de los subproblemas)

* Para poder determinar la complejidad temporal debemos analizar cual de estos 3 casos se cumple

$\boxed{\text{Caso 1}}$ si $f(n) = \underbrace{O(n^{\log_b a - e})}_{\text{acotada superiormente}}$, $e > 0 \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

tiene que estar acotada superiormente

$\boxed{\text{Caso 2}}$ si $f(n) = \underbrace{\Theta(n^{\log_b a})}_{\text{acotada superiormente e inferiormente}} \rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \times \log n)$

tiene que estar acotada superiormente e inferiormente

$\boxed{\text{Caso 3}}$ si $f(n) = \underbrace{\Omega(n^{\log_b a + e})}_{\text{acotada inferiormente}}$, $e > 0 \rightarrow T(n) = \Theta(f(n))$

tiene que estar acotada inferiormente

$a f(n/b) \leq c f(n)$, $c < 1$ para un n suficientemente grande

* Comenzamos probando el $\boxed{\text{caso 2}}$

$n^2 = \Theta(n^{\log_5 2}) \rightarrow n^2 = \underbrace{\Theta(n^{0,43})}$

puede ser acotado inferiormente pero no superiormente por lo tanto este caso no nos sirve

* Probamos el $\boxed{\text{Caso 1}}$

$n^2 = O(n^{\log_5 2 - e}) \rightarrow n^2 = O(n^{0{,}43 - e})$ si $e = 0{,}43 \rightarrow n^2 = \underbrace{O(n)}$

no se puede acotar superiormente con $e>0$
por lo tanto este caso tampoco nos sirve

* Probamos finalmente el $\boxed{\text{Caso 3}}$

$n^2 = \Omega(n^{\log_5 2 + e})$ si $e = 0{,}1 \rightarrow \underbrace{n^2 = \Omega(n^{0{,}53})}_{\text{puede acotar inferiormente}}$

$\underbrace{\exists c < 1}_{\substack{\text{valor c cte} \\ \text{y } < 1}}$, $\underbrace{n >>}_{\substack{\text{n lo} \\ \text{suficientemente} \\ \text{grande}}}$ / $a \cdot f(n/b) \leq c \times f(n) \rightarrow 2((n/5)^2) \leq cn^2$ si $c = 2/5$

$\hookrightarrow \underbrace{2\frac{n^2}{25} \leq \frac{2}{5}n^2}_{\text{se cumple}}$

* Por lo tanto podemos decir que la complejidad temporal de $T(n) = 2T(n/5) + O(n^2)$ es $T(n) = \Theta(f(n))$, es decir $\boxed{T(n) = \Theta(n^2)}$