

Percolación de nodos en redes cuadradas 2d

M. Caral* and I. Gómez F.**

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires,
Pabellón I, Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina.*

A partir de estudios computacionales se ha determinado el comportamiento crítico de una red de nodos bi-dimensional. Se calcularon, a través de simulaciones, la probabilidad crítica y los exponentes críticos que caracterizan la transición de fase de una red no-percolante a una percolante. La estimación de la probabilidad crítica $p_c = 0,594 \pm 0,002$ se solapa con el valor teórico $p_c = 0,592$. De igual manera, los exponentes críticos calculados (obtenidos a través de las leyes de potencia) contemplan en su rango de error a los valores sugeridos por la teoría (salvo para el caso de τ).

I. Introducción

La teoría de percolación ha madurado desde sus inicios en la década de 1950 para llegar a lo que es hoy: el modelo más simple que permite describir la transición de fase de un cierto tipo de sistemas. Este modelo considera una red infinita de dimensión d cuyos nodos pueden estar ocupados o desocupados con probabilidad p y $(1 - p)$, respectivamente, y de forma independiente respecto al estado de sus vecinos. La probabilidad p se conoce como la probabilidad de llenado de la red. Los nodos vecinos que están ocupados se agrupan en conjuntos llamados *clusters* y cuando uno de ellos atraviesa toda la red, decimos que esa red percola. A partir de una cierta probabilidad crítica de llenado p_c , la red presenta un cluster percolante al menos la mitad de las veces que es poblada y el sistema atraviesa una transición de fase. Esta transición puede estudiarse con simulaciones computacionales, estimando de forma precisa los exponentes críticos que la caracterizan.

Dado esto, el modelo permite estudiar el cambio de fase en diversos sistemas de interés que sean análogos a este (como incendio forestal, propagación de una enfermedad, etc) y por esto cobra real importancia.

En este trabajo se estudia el modelo de percolación para una red de dimensión $d = 2$ y se calculan los exponentes críticos que definen su transición de fase.

II. El modelo

A. Transición de fase

La transición de fase es un efecto que se puede encontrar en diversos sistemas termodinámicos y que describe el cambio de comportamiento en características intrínsecas de un sistema dada la modificación de algún agente externo (temperatura, presión, etc). Las transiciones de fase se estudian a través de un *parámetro de orden* que muestra en su comportamiento los

cambios asociados a la transición. Esta última se da cuando se cruza el umbral de un cierto parámetro y aparece un cambio repentino y notorio en las magnitudes que describen el sistema. A dicho umbral se lo denomina *punto crítico*.

Para el caso de estudio de este informe, los sistemas percolantes, el parámetro de orden será la intensidad del cluster percolante (definida como el número de nodos pertenecientes al cluster percolante, en relación al número total de nodos en la red). Esta magnitud cambiará drásticamente su comportamiento (de nulo a crecimiento exponencial) a partir de un valor específico de probabilidad de ocupación de la red que llamaremos *probabilidad crítica*. Es decir, la probabilidad de ocupación es el parámetro externo que se puede modificar para llevar al sistema a una transición de fase. Particularmente, la transición en un sistema percolante esta en que, justamente, el sistema percole o no: a partir de la probabilidad crítica, siempre se observa un cluster percolante en el sistema.

B. Leyes de potencia y exponentes críticos

En un entorno de la transición de fase (es decir, del punto crítico), las magnitudes del sistema presentan un comportamiento que puede ser descripto por leyes de potencia. Por esto, es necesario estimar los llamados *exponentes críticos* para poder estudiar el sistema cerca de la transición. Los exponentes críticos tienen particular importancia ya que definen universalidades: todos los sistemas que presenten los mismos exponentes críticos cerca de sus transiciones pertenecerán a un mismo grupo.

La Tabla I resume las principales leyes de potencia obtenidas en la literatura para redes percolantes en dos dimensiones.

* paulacaral@hotmail.com

** ignaao@gmail.com

Tabla I: Valores teóricos hallados en la literatura.

| Símbolo | Ley | Valor |
|----------|------------------------------------|----------------------------------|
| d | — | $d = 2$ |
| D | $M \sim L^D$ | $D = 91/48$ |
| ν | $\xi \sim p - p_c ^{-\nu}$ | $\nu = 4/3$ |
| τ | $n(p_c) \sim s^{-\tau}$ | $\tau = 1 + d/D$ |
| σ | $z = s^\sigma(p - p_c)$ | $\sigma = (\nu D)^{-1}$ |
| α | $m_0(p) \sim p - p_c ^{2-\alpha}$ | $\alpha = 2 - (\tau - 1)/\sigma$ |
| β | $m_1(p) \sim (p - p_c)^\beta$ | $\beta = \nu(d - D)$ |
| γ | $m_2(p) \sim p - p_c ^{-\gamma}$ | $\gamma = (3 - \tau)/\sigma$ |

Es importante recordar que las leyes descriptas en la tabla son válidas sólo en un entorno del punto crítico del sistema.

Con la motivación de introducir las ecuaciones utilizadas para el análisis de datos durante este trabajo, se desarrollan las ecuaciones de momento de orden 1 (m_1) y de orden 2 (m_2) por su definición. El momento de orden 1 es la intensidad del cluster percolante, definido como el cociente entre la masa de dicho cluster y la cantidad total de nodos en la red:

$$m_1(p) = P_\infty = \frac{M}{L^2} \sim (p - p_c)^\beta \quad (\text{II.1})$$

El momento de orden 2 se calcula por definición como:

$$m_2(p) = \sum_{s=0}^{\infty} n_s s^2 \sim (p - p_c)^{-\gamma} \quad (\text{II.2})$$

Estas ecuaciones se utilizaron para la determinación de los exponentes críticos β y γ .

C. Efectos de red finita

El modelo de percolación está pensado inicialmente para una red infinita de una cierta dimensión y topología. Sin embargo, las simulaciones computacionales no dan lugar a redes infinitas, sino que se estudia una ventana cuadrada de lado L en aproximación por lo que debería ser infinito. En principio esto no debería representar un problema para estudiar la transición de fase dado que allí el sistema es libre de escalas y podemos usar las leyes de potencia descriptas en la sección anterior. No obstante, existen *efectos de red finita* que alteran las relaciones entre magnitudes del sistema tanto dentro como fuera del entorno del punto crítico. Como consecuencia de estas alteraciones, la estimación de la probabilidad crítica y los exponentes no coincide completamente con la teoría y se vuelve necesaria una extrapolación cuidadosa para pasar al sistema infinito. Cabe aclarar que los efectos de red finita disminuyen conforme aumenta el tamaño de la ventana, como se verá en la sección de resultados.

D. Hipótesis de scaling y renormalización

Como fue mencionado en la sección II C, en el entorno del punto crítico el sistema es libre de escalas. Esta es la denominada *hipótesis de scaling*. Este planteo lleva a que la distribución de tamaños de clusters (n_s) debe respetar la siguiente forma funcional:

$$n_s(p) = q_0 s^{-\tau} f(z) \quad , \quad z = s^\sigma(p - p_c) \quad (\text{II.3})$$

donde q_0 es una constante dependiente de τ y $f(z)$ es la denominada función de scaling. Esta función debe garantizar la validez de la ley de potencias $n_s(p_c) \sim s^{-\tau}$ en el entorno al punto crítico. Para esto, se pide que $f(z = 0) = 1$ y que $f(z) \rightarrow 0$ para $z \rightarrow \pm\infty$. La determinación de esta función puede alcanzarse computacionalmente y se realizó para este trabajo.

Es posible explotar aún más el hecho de que cerca de la transición de fase el sistema se muestra libre de escalas. Si se *re-escala* el sistema, deben seguir siendo válidas las leyes de potencia de la tabla I. Entonces, mediante un proceso de *renormalización* observaremos que el análisis en escalas pequeñas nos permite revelar el comportamiento a escalas mayores, que usualmente no podríamos manejar computacionalmente.

La renormalización puede darse en celda grande (modificar el tamaño L de la ventana) o en celda chica (aproximar conjuntos de nodos vecinos por un único supernodo). A lo largo de este informe se presentan resultados para longitudes L contrastantes (celda grande), pero se calculará el exponente crítico ν por renormalización de celda pequeña, de forma teórica. Para esto introducimos la siguiente formalidad del proceso:

Al cambiar de un sistema original a uno re-escalado por celda pequeña, las leyes de potencia deben conservarse si nos encontramos en el punto crítico. Particularmente, nos interesa la ley que describe el comportamiento de la longitud de correlación, ξ .

Escala original: $\xi \sim |p - p_c|^{-\nu}$

Escala nueva: $\xi' \sim |p' - p'_c|^{-\nu'}$

La relación entre ξ y ξ' está dada por

$$\xi' = \xi/b \quad (\text{II.4})$$

donde b es el factor de re-escalamiento. Como no se modifica la topología de la red, la probabilidad crítica y el exponente ν deben ser iguales en ambos sistemas.

$$p'_c = p_c \quad , \quad \nu' = \nu$$

Entonces la ec. (II.4) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
\xi' &= |p' - p_c|^{-\nu} \\
&= \frac{|p - p_c|^{-\nu}}{b} \\
\Rightarrow \nu &= \frac{\ln\left(\frac{p' - p_c}{p - p_c}\right)}{\ln(b)} \quad (\text{II.5})
\end{aligned}$$

Entonces, el cambio de escala nos permite estimar ν . Si hacemos una aproximación a primer orden de p' :

$$p' \approx p + \frac{dp'}{dp}(p - p_c)$$

la ecuación (II.5) resulta

$$\nu \approx \frac{\ln(dp'/dp|_{p_c})}{\ln(b)} \quad (\text{II.6})$$

De esta ecuación se ve la dependencia con p' , es decir, con la probabilidad de ocupación que se le asigne al supernodo. ¿Cómo se define p' ? Hay distintos criterios que se pueden utilizar, entre ellos están el *criterio de percolación* y *criterio de mayoría simple*. Usando estos criterios se utilizará la ec. (II.6) para calcular el exponente crítico ν .

III. Simulaciones numéricas

Para estudiar la transición de fase en un sistema percolante de 2 dimensiones, se realizaron simulaciones numéricas de redes pobladas con diferentes probabilidades y se obtuvieron de ellas distintas magnitudes. Como no es viable la simulación de una red infinita, se tomaron ventanas cuadradas de lado finito L y se estudió la transición allí, considerando las limitaciones y efecto de red finita ya discutidos.

Los valores de L utilizados fueron $L = 4, 6, 16, 32, 64, 128$. Cada red fue poblada con una cierta probabilidad p de ocupación por nodo y luego se realizó una clasificación para determinar los clusters (con el algoritmo de Hoshen-Kopelman). Con la red ya clasificada, se calcularon diferentes magnitudes de interés como: la probabilidad crítica; la intensidad del cluster percolante; la masa del cluster percolante y la dimensión fractal; se verificó la hipótesis de scaling; y se calcularon además los exponentes críticos β , τ , σ , ν y γ .

Para obtener resultados con menor error, todas las magnitudes se calcularon usando estadística: se realizó un promedio de los resultados obtenidos tras repetir, según el caso, 27000 veces cada experimento. El detalle de cada simulación está explicado en el enlace de *github*[5] de este trabajo.

IV. Resultados

A. Determinación de p_c

Para calcular el valor de la probabilidad crítica p_c se utilizaron tres métodos distintos.

1. Convergencia de p por método de iteraciones

Se pobló la red con probabilidad de ocupación inicial $p = 0,5$. Dependiendo de si percolaba o no, se volvía a poblar la misma red pero con una probabilidad $p = p \pm \frac{1}{2^n}$. Este proceso se realizó 20 veces para una misma red, para tener mejor precisión. La última p calculada sería la probabilidad crítica. Este proceso se realizó 27000 veces y luego, realizando un promedio, se obtuvieron los valores de probabilidad crítica para los distintos tamaños de L , como se muestra en el gráfico 1.

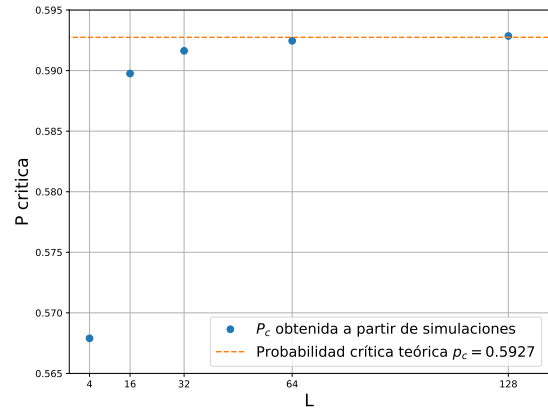


Figura 1: Estimaciones de la probabilidad crítica para cada tamaño de red L a partir del método 1.

Se puede ver cómo para ventanas de mayor tamaño la estimación de la probabilidad crítica se acerca cada vez más al valor informado por la teoría, como se predice por los efectos de red finita.

2. Aparición del cluster percolante el 50 % de las veces

En este método se calculó la probabilidad crítica como la probabilidad de llenado p tal que la probabilidad de percolación P_{perc} sea al menos $\frac{1}{2}$, es decir, se buscó que la red percole al menos la mitad de las veces para esa probabilidad de ocupación.

Para esto se pobló una red 1000 veces con una misma probabilidad y se calculó cuántas de esas veces la red percoló. Luego, se definió la probabilidad de

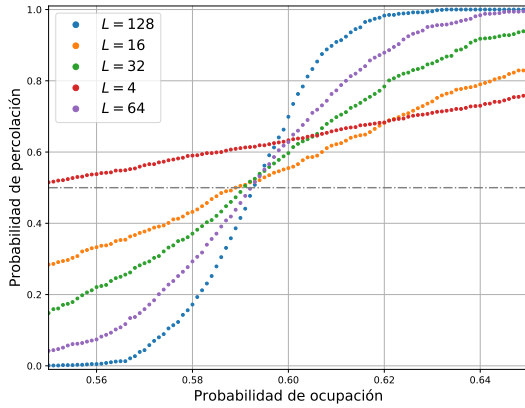


Figura 2: Curvas de probabilidad de percolación de una red en función de la probabilidad de ocupación de cada nodo, dado el tamaño L de la ventana.

cambio de comportamiento en un determinado valor de p en todas las curvas. Esto indica la aparición de un punto crítico: la tendencia a una función del tipo Θ de Heaviside conforme aumenta el tamaño de la ventana L muestra que, en la extrapolación a red infinita, la probabilidad de percolación tiene un cambio abrupto una vez cruzado un umbral de probabilidad de llenado $p = p_c$. Para $L = 4$ este fenómeno no se observa dado el pequeño tamaño de la ventana, en este caso los efectos de red finita prevalecen.

Para cada L se realizaron múltiples curvas como estas y se obtuvieron los valores de p para los cuales P_{perc} es aproximadamente 0,5. Luego se realizó un promedio entre todos los valores de p obtenidos y se determinaron los valores de la probabilidad crítica para cada tamaño de ventana. Los resultados se ven en el gráfico de la figura 3 junto con los resultados obtenidos a partir del primer método, a modo de comparación.

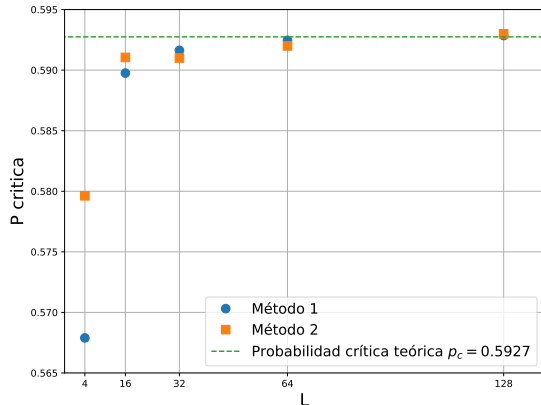


Figura 3: Estimaciones de la probabilidad crítica para cada tamaño de red L a partir de los métodos 1 y 2.

Es notable que ambos métodos convergen a valores de probabilidad crítica similares para el mismo ta-

maño de ventana (salvando el caso $L = 4$ que, como ya fue mencionado, tiene efectos de red finita importantes). No obstante, si se calcula la dispersión de estos valores de p_c , se puede ver que un método lleva a resultados más precisos.

3. Dispersión

Habiendo calculado la dispersión para cada valor de $p_c(L)$, se puede graficar la probabilidad crítica en función de la dispersión. Sabiendo que la probabilidad crítica correspondiente a ventana infinita, es decir, $p_c(\infty)$, debe tener dispersión nula, entonces la ordenada al origen del ajuste por una recta de ese gráfico nos da una nueva estimación de p_c . El gráfico y los resultados obtenidos se muestran en la figura 4.

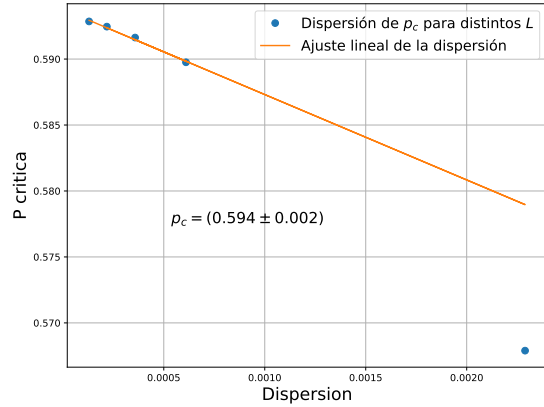


Figura 4: Probabilidad crítica en función de la dispersión para cada L . El ajuste lineal devuelve en su ordenada al origen el valor de $p_c = 0,594 \pm 0,002$.

El resultado $p_c = 0,594 \pm 0,002$ se solapa con el valor teórico $p_c = 0,592$.

B. Estimación del exponente crítico ν

El desplazamiento de las estimaciones de $p_c(L)$ respecto a $p_c(\infty)$ también se corresponde con una ley de potencias:

$$L \sim |p_c(L) - p_c(\infty)|^{-\nu}$$

Teniendo esto en cuenta, el gráfico de $\log(L)$ vs $\log(p_c(L) - p_c(\infty))$ puede ser ajustado por una recta cuya pendiente será el exponente crítico ν . Utilizando los valores de $p_c(L)$ calculados por el método 1, se realiza el gráfico de la figura 5. El valor de ν calculado $\nu = 0,65 \pm 0,29$ no contiene al valor teórico predicho para este exponente crítico $\nu_{teo} = 1,33$. Esta diferencia puede deberse a los efectos de red finita.

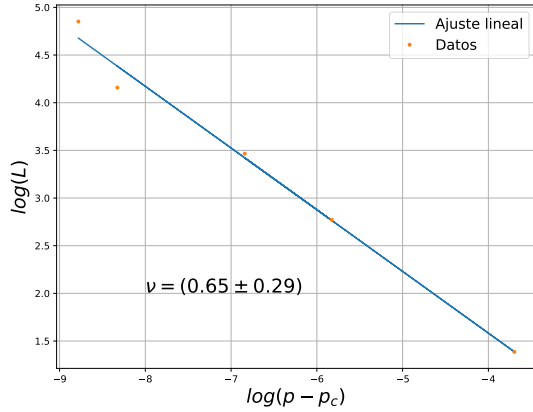


Figura 5: Logaritmo del tamaño de ventana en función de la diferencia de cada $p - c$ con la teórica. Se estima el valor de $\nu = 0,65 \pm 0,29$.

C. Intensidad del cluster percolante y estimación del exponente crítico β

Para calcular la intensidad del cluster percolante P_∞ , se realizaron 27000 iteraciones sobre una probabilidad de llenado p fija y se calculó la masa del cluster percolante en cada caso. Luego, realizando el promedio para cada p se obtiene un valor de masa percolante asociado a cada probabilidad de llenado. Finalmente, la intensidad se calcula como el cociente entre ese promedio y L^2 (ec. (II.1)). Graficando este valor en función de la probabilidad obtenemos el gráfico de la figura 6.

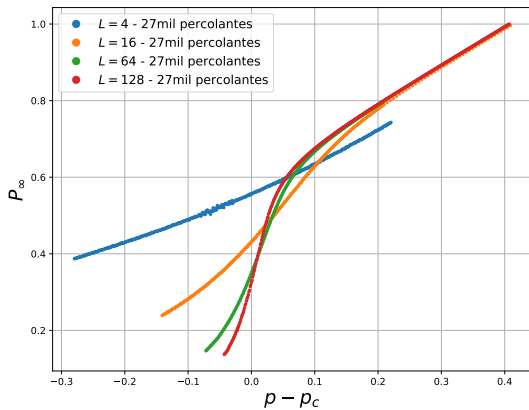


Figura 6: Probabilidad crítica en función de la dispersión para cada L . El ajuste lineal devuelve en su ordenada al origen el valor de $p_c = 0,594 \pm 0,002$.

Se puede ver, como se había anticipado, un cambio importante en el comportamiento de esta magnitud, que

tiene un crecimiento abrupto a partir de un cierto valor p , que debería corresponderse con la probabilidad crítica. La curva debería decaer a 0 para probabilidades menores a la graficada. Las simulaciones en ese rango no fueron posibles porque la percolación de redes tan grandes como $L = 64$ y $L = 128$ simplemente no se dan para probabilidades tan chicas.

Para el caso de $L = 4$ se logró obtener datos para probabilidades bajas, pero por efectos de red finita los resultados de esta ventana no son representativos de la transición de fase.

Conociendo la ley de potencias válida para esta magnitud en el entorno del punto crítico (ec. (II.1)), al tomar logaritmo de los datos se puede calcular la pendiente de una recta que nos da una buena estimación del exponente crítico β . En la figura 7 se muestra el ajuste lineal y el valor obtenido de la pendiente, correspondiente con el exponente crítico β .

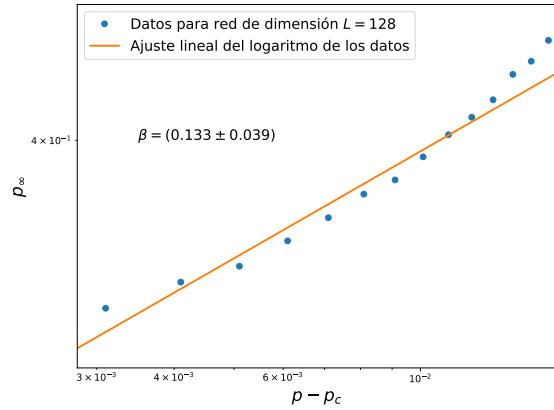


Figura 7: Ajuste lineal de intensidad del cluster percolante en función de $(p - p_c)$ en escala logarítmica para $L = 128$.

El resultado $\beta = 0,133 \pm 0,039$ se solapa con el valor teórico $\beta_{teo} = 0,138$.

D. Estudio de distribución de fragmentos y estimación del exponente crítico τ

Se realizó el estudio de la distribución de tamaños de clusters (percolantes y no percolantes) para redes de distinto tamaño y pobladas con diferente probabilidad. Dada la ley de potencias $n_s(p_c) \approx s^{-\tau}$ (ver tabla I), se pudo calcular el exponente crítico τ .

Del gráfico de n_s vs s en escala logarítmica se seleccionó la porción con comportamiento lineal (ya que es allí donde vale la ley de potencias y donde nos encontramos en un entorno del punto crítico) y se realizó el ajuste cuya pendiente se corresponde con el valor del exponente crítico τ . Como esta curva se obtuvo para varias probabilidades de ocupación, se obtuvieron varios valores de τ para un mismo tamaño L . Para elegir

el más apropiado se utilizó el criterio de χ^2 : se calculó el χ^2 del ajuste para cada p y se tomó para informar el valor de τ correspondiente a la p cuyo ajuste tuviera el menor χ^2 . Ejemplos de dicho ajuste se muestran en las figuras 8 y 9.

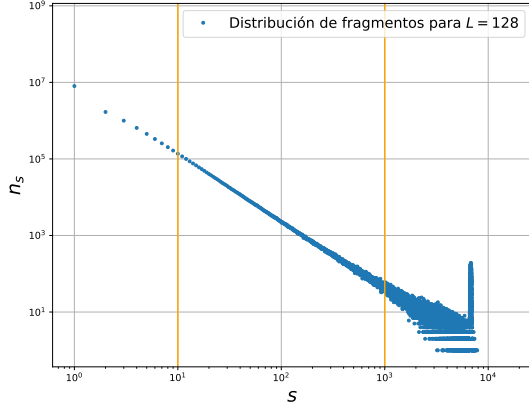


Figura 8: Distribución de fragmentos para una ventana $L = 128$ con el rango seleccionado para aplicar la ley de potencias. Ambos ejes en escala logarítmica.

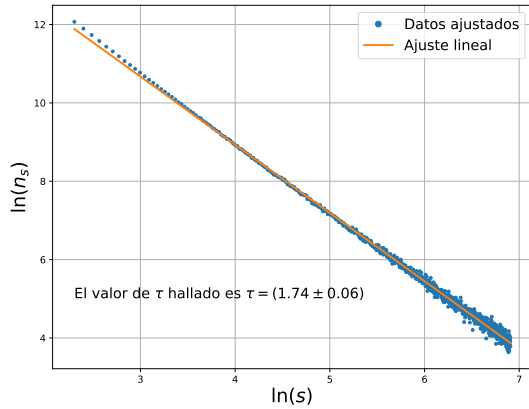


Figura 9: Ajuste lineal sobre el rango seleccionado para aplicar la ley de potencias, esta vez se aplicó logaritmo natural a los datos antes de ajustar. Se obtuvo un valor de pendiente $\tau = 1,74 \pm 0,06$. Ambos ejes en escala lineal.

Los valores de τ obtenidos para cada L se muestran en la tabla II.

Los valores de τ calculados por este método no contemplan al valor teórico $\tau_{teo} = 2,05$, salvo en el caso de $L = 4$ que es el de mayor dispersión. Esta discrepancia puede ser adjudicada directamente a los efectos de red finita y a las limitaciones de las simulaciones. Los errores informados corresponden con el error del parámetro de la pendiente al realizar el ajuste por cuadrados mínimos.

Tabla II: Valores de τ calculados utilizando la distribución de fragmentos para cada L .

| L | τ |
|-----|-----------------|
| 4 | $2,47 \pm 0,91$ |
| 16 | $1,53 \pm 0,18$ |
| 32 | $1,65 \pm 0,11$ |
| 64 | $1,69 \pm 0,06$ |
| 128 | $1,74 \pm 0,06$ |

E. Determinación de la dimensión fractal D

Para el cálculo de la dimensión fractal D se utilizó la relación $M \sim L^D$ referenciada en la tabla I. En base a esto, se calculó primero la masa del cluster percolante para $p = p_c$. El procedimiento consistió en aplicar el *método 1* para tener una aproximación a p_c y luego calcular la masa M del cluster percolante de esa red. Se realizaron 27000 iteraciones y se realizó un promedio de los valores de M obtenidos, hallando un valor de esta magnitud para cada tamaño de ventana L . El ajuste lineal sobre el gráfico de M en función del tamaño de la red da (en su pendiente) el valor de la dimensión fractal D . Los resultados se muestran en la figura 10.

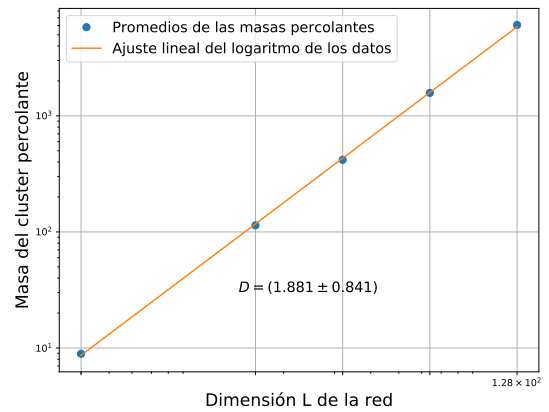


Figura 10: Masa del cluster percolante en función de la dimensión L de la red. La dimensión fractal obtenida del ajuste es $D = 1,881 \pm 0,841$.

El resultado para la dimensión fractal $D = 1,881 \pm 0,841$ contempla al valor teórico $D_{teo} = 1,895$.

F. Determinación de la función de scaling $f(z)$

Para corroborar la hipótesis de scaling planteada en la sección IID, se buscó la función de scaling $f(z)$. Para hacerlo se utilizó que

$$f(z) = \frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \quad (\text{IV.1})$$

entonces, con los datos de distribución de fragmentos ya obtenidos (para $41 \leq s \leq 491$) se calculó el cociente de la ec. (IV.1) para $L = 64$ y se lo graficó en función de $z = s^\sigma(p - p_c)$ (donde se utilizó el valor teórico de $\sigma = 0,3956$). Dicho gráfico se muestra para ciertos valores de s en la figura 11.

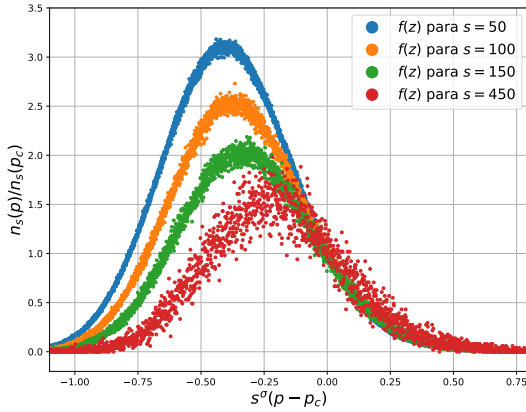


Figura 11: $f(z)$ en función de z para distintos valores de s , todos para tamaño de red $L = 64$. Se verifica la hipótesis de scaling.

En el gráfico de la figura 11 se observa que $f(z)$ respeta el comportamiento que predice la hipótesis de scaling para tamaños de cluster s diferentes: tener un único máximo, $f(z = 0) = 1$ y tender a 0 asintóticamente para $z \rightarrow \pm\infty$. Se puede decir entonces que se ha verificado la hipótesis de scaling.

G. Estimación del exponente crítico σ

Conociendo $f(z)$ podemos ver que existe un z_{max} para el cual la función es máxima, es decir, dado un valor fijo de s hay una probabilidad p que maximiza el conteo de fragmentos de tamaño s , el cual se refleja en un valor máximo de $f(z)$. Utilizaremos este recurso para estimar el exponente crítico σ : tomando la definición de z vale la ley de potencias de la ec. (IV.2):

$$\ln(p_{max} - p_c) = -\sigma \ln(s) + \ln(z_{max}) + C \quad (\text{IV.2})$$

Buscando el valor p_{max} que maximiza $n_s(p)$ (y, por ende, $f(z)$) se puede realizar el gráfico cuyo ajuste lineal devuelva en su pendiente la estimación del parámetro σ . Dicho gráfico se muestra en la figura 12.

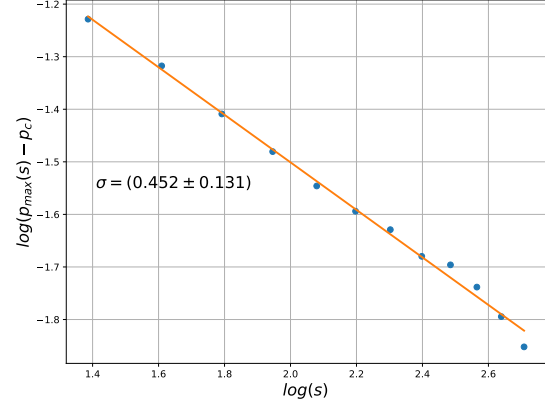


Figura 12: $f(z)$ en función de z para distintos valores de s , todos para tamaño de red $L = 64$. Se verifica la hipótesis de scaling.

El valor hallado de $\sigma = 0,453 \pm 0,131$ se solapa con el valor teórico $\sigma_{teo} = 0,395$.

H. Determinación del exponente crítico γ

Para calcular el exponente crítico γ se utilizó la ley de potencias que rige para el momento de orden 2 (ec.(II.2)).

Utilizando una distribución de fragmentos n_s que no contempla los clusters percolantes se calculó $m_2(p)$ y se lo graficó en función de ϵ obteniendo las figuras 13a y 14a.

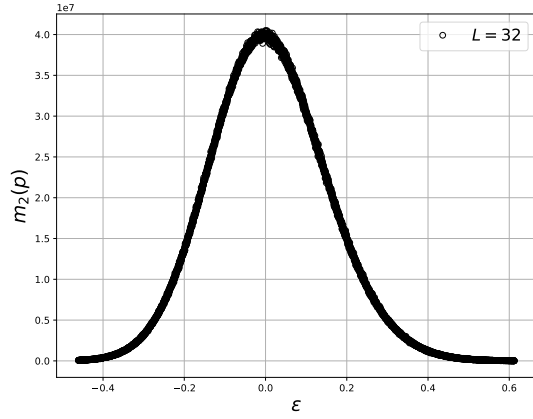
Esto se realizó para tamaños de ventana $L = 6, 32$ (la necesidad de nuevas simulaciones para no contar los clusters percolantes dejó afuera el tamaño $L = 128$ por cuestiones de tiempo).

Con esta información se tomó, a cada lado del máximo de la campana, la porción de curva que correspondiera a la ley de potencias (lejos del máximo y de las colas), como se muestra en las figuras 13b y 14b en escala logarítmica.

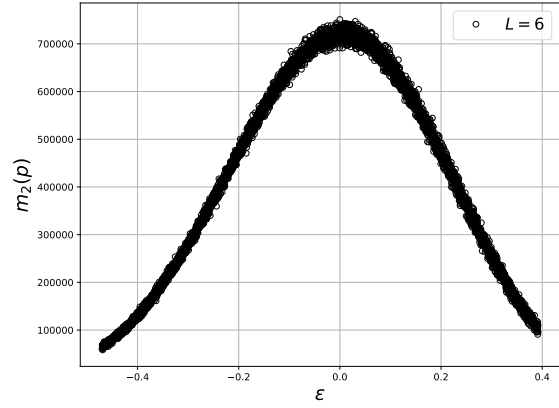
Cada una de estas secciones (izquierda y derecha) fueron separadas en conjuntos de N puntos que se ajustaron por una función lineal ($N = 30$ para $L = 6$ y $N = 25$ para $L = 32$). La pendiente de dicho ajuste debería devolver el valor del exponente crítico γ . Dado que se realizaron ajustes lineales por tramos, se obtuvieron varios valores de γ de la curva derecha y de la izquierda. Para concluir en un valor de este exponente se graficaron los resultados de γ_{izq} y γ_{der} en función de ϵ y se tomó el valor de γ como aquel para el cual hay intersección de las curvas. Dichos resultados se muestran en las figuras 13c y 14c.

Los valores de γ hallados son $\gamma_6 = 1,6 \pm 0,5$ y $\gamma_{32} = 1,8 \pm 0,6$ para $L = 6$ y $L = 32$, respectivamente.

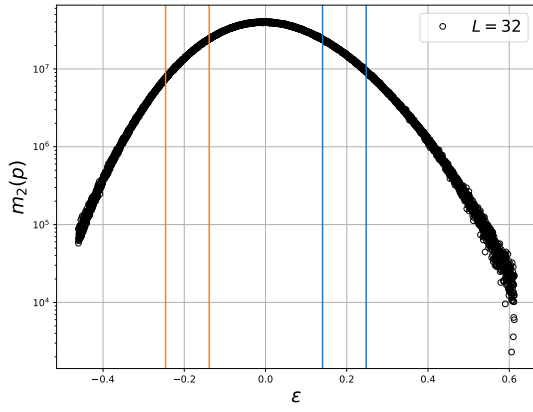
Si bien para el caso de γ_{32} el valor teórico $\gamma_{teo} =$



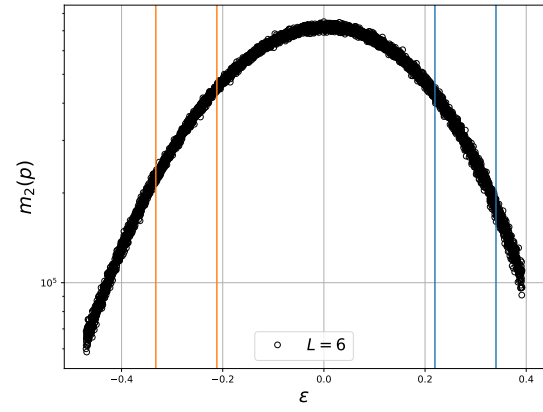
(a)



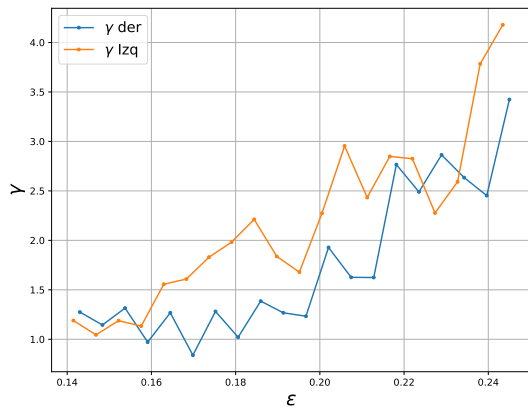
(a)



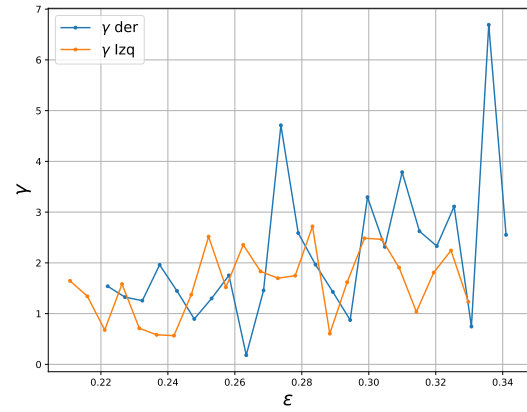
(b)



(b)



(c)



(c)

Figura 13: (a) Momento de orden 2 en función de ϵ para $L = 32$. (b) Momento de orden 2 en función de ϵ para $L = 32$ en escala logarítmica, mostrando los sectores utilizados para el ajuste lineal. (c) Gráfico de γ -matching para $L = 32$.

Figura 14: (a) Momento de orden 2 en función de ϵ para $L = 6$. (b) Momento de orden 2 en función de ϵ para $L = 6$ en escala logarítmica, mostrando los sectores utilizados para el ajuste lineal. (c) Gráfico de γ -matching para $L = 6$.

2,38 se solapa en el rango de error, se puede ver que las estimaciones no son las mejores, nuevamente debido a los efectos de red finita.

I. Renormalización y estimación del exponente crítico ν

Se aplican los criterios de percolación y mayoría simple sobre la ec. (II.6) para definir p' y calcular de forma teórica el valor del exponente crítico ν . La renormalización se realiza sobre una celda con $b = 2$. Las posibles configuraciones de nodos se muestran en las figuras 15 y 16.

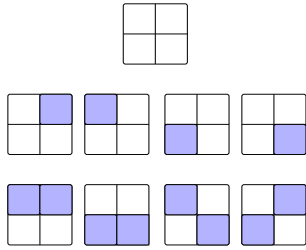


Figura 15: Caso de arreglos de clusters no percolantes para supernodo de tamaño $b = 2$

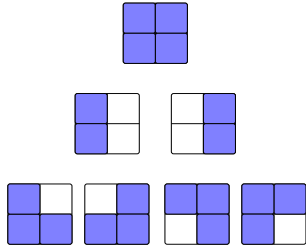


Figura 16: Caso de arreglos de clusters percolantes, para supernodo de tamaño $b = 2$

1. Criterio de percolación

Considerando las configuraciones percolantes del caso de estudio, la probabilidad de percolación del supernodo viene dada por

$$p' = 2(1-p)^2p^2 + 4(1-p)p^3 + p^4 \quad (\text{IV.3})$$

Evaluando en p_c :

$$p'_c = 2(1-p_c)^2p_c^2 + 4(1-p_c)p_c^3 + p_c^4$$

Pero $p'_c = p_c = p^*$ (ver sección II D), entonces tenemos una ecuación trascendente que resulta en la ec.

$$p^* = 2(p^*)^2 - (p^*)^4 \quad (\text{IV.4})$$

Entonces p^* es un punto fijo de la función $f(p) = 2p^2 - p^4$, es decir, $p^* = f(p^*)$. Iterando sobre esta ecuación se logra converger a un valor de p^* que será la probabilidad crítica. Según este criterio $p_c \approx 0,618$. Ahora, reemplazando la derivada de la ec. (IV.3) evaluada en dicha p_c en la ec. (II.6), obtenemos que el valor del exponente crítico es $\nu \approx 1,63$. Esta es una buena aproximación para el valor real de $\nu = 1,33$.

2. Criterio de mayoría simple

Para este caso la probabilidad p' estará definida según si hay mayoría de ocupados o desocupados en las configuraciones posibles. Así, resulta que

$$p' = 4(1-p)p^3 + p^4 \quad (\text{IV.5})$$

Con un procedimiento análogo al anterior se encuentra que $p_c \approx 0,767$ y $\nu \approx 1,82$.

Es claro que la estimación del criterio de percolación es más acertada que la del criterio de mayoría simple. Esto se debe a que existen configuraciones de “nodos tenues” que son descartadas en este último criterio y eso resulta en pérdida de definición en los resultados.

V. Conclusiones

Durante este trabajo se lograron realizar las simulaciones numéricas necesarias para el estudio de los fenómenos críticos de redes bidimensionales con ventanas de tamaño finito y topología cuadrada. A partir de estas simulaciones se han estimado los parámetros críticos correspondientes a las leyes de potencias que predominan cerca del punto crítico de percolación de las redes. Principalmente, se halló la probabilidad crítica (de aparición del cluster percolante) de las redes para tamaños $L = 4, 16, 32, 64$ y 128 mediante tres métodos diferentes alcanzando resultados, aunque distintos, muy cercanos entre sí, tales que sus diferencias pueden atribuirse más bien a los efectos de red finita que a los errores estadísticos.

Se hallaron los valores críticos p_c , β y D con sus errores dentro de las predicciones teóricas, sin embargo, los valores críticos τ , ν y γ obtenidos con sus errores no lograron solaparse con los valores teóricos. Especialmente γ resultó muy sensible a elección de la cantidad N de puntos a tomar para los ajustes lineales. En tanto que a ν y τ se les atribuyen los resultados informados en este trabajo como consecuencia de los efectos de red finita.

A su vez, se pudo verificar la hipótesis de scaling calculando numéricamente la función $f(z)$ que caracteriza el cambio de escala.

En conclusión, se ha logrado estudiar la transición de fase en el modelo de percolación, hallando el punto crítico y verificando las características principales por las que pasa el sistema durante dicha transición.

-
- [1] https://en.wikipedia.org/wiki/Percolation_critical_exponents /07/Hoshen_Kopelman.pdf
- [2] <http://web.mit.edu/ceder/publications/Percolation.pdf>
- [3] <http://materias.df.uba.ar/compua2017c1/files/2012>
- [4] <http://materias.df.uba.ar/compua2017c1/files/2012/07/Elliott.pdf>
- [5] [Hhttps://github.com/paulacaral/Computacional—Entrega](https://github.com/paulacaral/Computacional—Entrega)