Fundamentos para al Análisis de Datos y la Investigación

Tema 3 - Fundamentos de Matemáticas para la Ciencia de Datos (3/3)

José María Sarabia

Máster Universitario en Ciencia de Datos
CUNEF Universidad

Contents

1 Introducción

Fundamentos de álgebra. Diagonalización y descomposición de matrices

- Autovalores y autovectores de una matriz.
- Diagonalización de matrices. Teorema de descomposición espectral. Descomposición de Cholesky. Descomposición en valores singulares.
- Aplicaciones en Data Science
- Casos Prácticos con R

1 Objetivos

Objetivos

- Entender el concepto de autovalor y autovector de una matriz
- Saber descomponer (diagonalizar) una matriz mediante Choleski, representación espectral y en valores singulares en R
- Aplicaciones en data science

Contents

2 Autovalores y Vectores Propios

- Desde el punto de vista geométrico, una matriz cuadrada $n \times n$ puede considerarse como una transformacion en $\mathbb{R}^n$.
- Si al vector $\mathbf{v} = (1, 3)^\top$ le aplicamos la matriz **A** más abajo definida obtenemos:

$$\mathbf{Av} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}$$

- Por tanto **A** traslada el vector **v** a otro vector que es un múltiplo de si mismo, es decir, se encuentra en la misma dirección.
- El vector **v** se denomina *vector propio o autovector* de **A** (puesto que se transforman en un múltiplo de ellos mismo por A) y la constante 2 *autovalor* de **A** asociado a **v**.

2 Autovalores y Vectores Propios

- De manera formal, si $\mathbf{A}$ es una matriz $n \times n$
  1. Cualquier vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ para alguna constante λ se denomina *autovector* de $\mathbf{A}$
  2. El valor λ es el *autovalor* asociado a $\mathbf{x}$.
- En otras palabras:
  1. Los autovectores son vectores que son trasladados por la matriz a otro vector en la misma dirección a través del origen
  2. El correspondiente autovalor de un autovector es un *factor de escala*.

2 Autovalores y Vectores Propios

- Si $\mathbf{x}$ es un autovector, entonces $k\mathbf{x}$ es también un autovector con el mismo autovalor
$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}; \ \ \mathbf{A}(k\mathbf{x}) = \lambda(k\mathbf{x})$$
- Para evitar esta indeterminación, en ocasiones, los autovectores se normalizan de modo que $|\mathbf{x}| = 1$. Sin embargo el signo no está determinado: si $\mathbf{x}$ es un vector propio, también los es $-\mathbf{x}$.

2 Autovalores y Vectores Propios

- Para calcular los autovectores y autovalores hacemos:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$$

  donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad $n \times n$

- Se trata de un sistema homogéneo que tendrá solución no nula si el determinante de la matriz es cero:

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$$

- A la expresión $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0$ se le denomina *polinomio característico* o *ecuación característica*.

2 Ejemplo

- Encontrar los autovalores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

- La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$$

- Las soluciones de la ecuación $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$, que son los autovalores de $\mathbf{A}$.
- Los autovalores y autovectores en `R` se obtienen mediante el comando (`A` matriz cuadrada):

```
eigen(A)
```

y para una matriz de correlaciones mediante:

```
eigen(cor(A))
```

2 Propiedades

- Una matriz **A** $n \times n$ tiene n autovalores. Sin embargo, algunos de ellos pueden ser cero, otros reales (y algunos repetidos) y pueder ser también números complejos.
- Si $\mathbf{x}$ es un autovector de **A**, $c\mathbf{x}$ es también un autovector de **A**.
- Si la matriz **A** es diagonal, sus autovalores son los elementos de la diagonal.
- Si la matriz **A** es simétrica, entonces los autovalores son números reales.
- Si **A** es simétrica, sus autovectores son ortogonales. Es decir, dos autovectores con diferente autovector tienen un producto escalar que es igual a cero.

2 Propiedades

- La *suma de los autovalores* de $\mathbf{A}$ es igual a la traza de $\mathbf{A}$:

$$\text{traza}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- El *producto de los autovalores* de $\mathbf{A}$ es igual al determinante de $\mathbf{A}$:

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- El rango de $\mathbf{A}$ es el número de autovalores no nulos.
- Si $\mathbf{B}$ es una matriz no singular, las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{B}$ tienen los mismos autovalores.

Contents

3 Descomposición y Diagonalización de matrices

- *Descomponer una matriz* $\mathbf{A}$ es escribirla como producto de otras dos: $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$

- *Diagnonalizar una matriz* $\mathbf{A}$ es escribirla como producto de tres matrices de la forma,

$$\mathbf{A} = \mathbf{BDC}$$

  donde $\mathbf{D}$ es una matriz diagonal y las matrices $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son ortogonales.

- Veremos tres resultados:
  - Descomposición de Cholesky
  - Teorema de descomposición espectral
  - Descomposición en valores singulares SVD

3 Descomposición y Diagonalización de matrices

- **Descomposición de Cholesky**. Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica semi definida positiva. La matriz de Cholesky asociada a la matriz $\mathbf{A}$ es una matriz triangular inferior que verifica

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^{\top}$$

- La matriz $\mathbf{C}$ se puede interpretar como la raíz cuadrada de $\mathbf{A}$
- Al igual que una raíz cuadrada, sólo existe si la matriz es semidefinida positiva
- La matriz no siempre es única

3 Diagonalización

- El siguiente resultado de diagnoalización se conoce como **teorema de descomposición espectral**.
- Cualquier matriz simétrica $\mathbf{A}$ se puede escibir como

$$\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^\top$$

donde $\mathbf{V}$ es la matriz ortogonal de los autovectores $\mathbf{v}_i$ normalizados y

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

es una matriz diagonal con los autovalores.
- Se cumple por tanto que,

$$\mathbf{V}^\top\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$$

3 Descomposición en Valores Singulares SVD

- El siguiente resultado se conoce como **descomposición en Valores Singulares o SVD**
- Se refiere a un resultado de diagonalización para matrices $\mathbf{A}$ no cuadradas
- Si $\mathbf{A}$ es $m \times n$ es una matriz real, los autovalores de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ son siempre reales y mayores o iguales que cero.
- Representamos dichos autovalores por

$$\lambda_1 \geq \ldots \lambda_m \geq 0$$

- A los valores $\tau_i = \sqrt{\lambda_i}$ se les denomina valores singulares de $\mathbf{A}$.

3 Diagonalización

- **Descomposición en Valores Singulares SVD**. Si $\mathbf{A}$ es $m \times n$ es una matriz real, admite una descomposición del tipo:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$$

donde $\mathbf{U}$ $m \times m$ y $\mathbf{V}$ $n \times n$ son matrices ortogonales, y $\mathbf{\Sigma}$ $m \times n$ es una matriz donde los elementos diagonales son los valores singulares antes definidos.

3 Diagonalización

Descomposición de matrices en R

Operador	**Descripcción**
`B <- chol(A)`	Factorización de Choleski A. Devuelve matriz triangular superior de modo que $B^\top B = A$
`y<-eigen(A)`	Teorema de representación espectral de A `y$val` autovalores de A `y$vec` autovectores de A
`y<-svd(A)`	Descomposición de valores singulares SVD de A `y$d` vector que contiene valores singulares de A `y$u` mat. con col. lado izq. de los vect. sing. de A `y$v` mat. con col. lado der. de los vect. sing. de A

Contents

4 Aplicaciones en Ciencia de Datos

- **Análisis de Componentes Principales: PCA**. Se disponen de varios índices correlacionados, y se construye un nuevo índice que sea *combinación lineal de los originales* y que *recoja el máximo de la variabilidad*. La varianza del índice viene dada por el *mayor autovalor* de la matriz de covarianzas
- **Simulación de datos de rendimientos de activos correlacionados**. Se trata de simular datos de activos, con una matriz de covarianzas dada.
- **Inversa generalizada** de una matriz de rango no completo. Si $\mathbf{A}$ es una matriz no cuadrada, la g-inversa $\mathbf{B}$ verifica

$$\mathbf{ABA} = \mathbf{A}$$

  Se usa en la resolución de sistemas de rango no completo.
- **Procesamiento de imágenes**. Por medio de SVD se comprimen imágenes, y se recuperan con diferentes números de dimensiones en escalas mutidimensionales métricas

4 Rendimientos correlacionados

- La obtención de **rendimientos correlacionados** (o más en general variables correlacionadas) son necesarios para cálcular medidas de riesgo en una cartera con activos dependientes. El proceso se realiza mediante simulación. Veamos como se generan dos muestras de activos *dependientes*. La extensión al caso de m activos dependientes es directa.
- Suponemos que los rendimientos de dos activos siguen distribuciones normales de medias μ_i, $i = 1, 2$ y matriz de covarianzas

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

simular las caracteristicas son los datos sinteticos, valores

- En primer término obtenemos la descomposición de Choleski $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}\mathbf{C}^\top$. Ahora elegimos dos v.a. independientes z_1 y z_2 y hacemos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

4 Rendimientos correlacionados

- Entonces:

$$\operatorname{var}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{C}\operatorname{var}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\mathbf{C}^\top = \mathbf{C}\mathbf{I}\mathbf{C}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$$

- Por tanto el nuevo vector tiene como matriz de covarianzas la matriz de covarianzas, que incluye dependencia entre los activos

Fundamentos para al Análisis de Datos y la Investigación

Tema 3 - Fundamentos de Matemáticas para la Ciencia de Datos (3/3)

José María Sarabia

Máster Universitario en Ciencia de Datos
CUNEF Universidad