

# Contraste de varianzas

Josep Gibergans Bàguena

P08/75057/02310



Universitat Oberta  
de Catalunya

[www.uoc.edu](http://www.uoc.edu)



# Índice

## Sesión 1

<b>Contraste de la varianza</b> .....	5
1. Introducción .....	5
2. La distribución $\chi^2$ .....	5
3. El contraste de la varianza .....	7
4. Intervalo de confianza de la varianza .....	10
5. Resumen .....	12
Ejercicios .....	13

## Sesión 2

<b>Comparación de varianzas</b> .....	16
1. Introducción .....	16
2. La distribución $F$ de Snedecor .....	16
3. Comparación de dos varianzas .....	18
4. Resumen .....	23
Ejercicios .....	24



## Contraste de la varianza

### 1. Introducción

En esta sesión estudiaremos cómo debemos hacer inferencia estadística sobre la varianza de una población a partir de los datos de una muestra.

#### Control de la varianza

Consideremos el caso de una industria que fabrica tornillos para las ruedas de una marca de automóviles. Estos tornillos deben tener un diámetro de 2,5 cm. Imaginemos que en el proceso de fabricación se ha introducido un cambio y queremos tener información sobre la calidad del proceso.

Establecer métodos para controlar la variabilidad de un proceso industrial es fundamental para su calidad. Con este objetivo tomamos una muestra de tornillos y medimos el diámetro de cada uno. Podemos hacer un contraste de hipótesis sobre la media de los diámetros para saber si ésta ha variado después de introducir los cambios en la fábrica. Es importante ver que aunque la media de los diámetros esté cerca de 2,5 cm, es posible que el proceso no sea satisfactorio, en caso de tener una varianza muy alta. Es posible que la media se mantenga, con lo que se compensarían diámetros muy grandes (tornillos que no podremos atornillar) con diámetros muy pequeños (que ruedan dentro del agujero). Es evidente que los dos casos son terriblemente negativos para la empresa. Así pues, además de tener controlada la media, también es necesario un control sobre la varianza. Cuanto menor sea ésta, de mayor calidad será la producción.

A continuación aprenderemos a hacer contrastes de hipótesis y a buscar intervalos de confianza para la varianza. Para poder hacerlo, antes deberemos introducir la distribución  $\chi^2$  y conocer sus propiedades más importantes.

### 2. La distribución $\chi^2$

Si  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  son variables aleatorias normales estándar independientes, entonces la variable que se obtiene al sumar los cuadrados de estas distribuciones:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2$$

se distribuye según una **distribución  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad**,  $\chi_n^2$ .

#### Notación

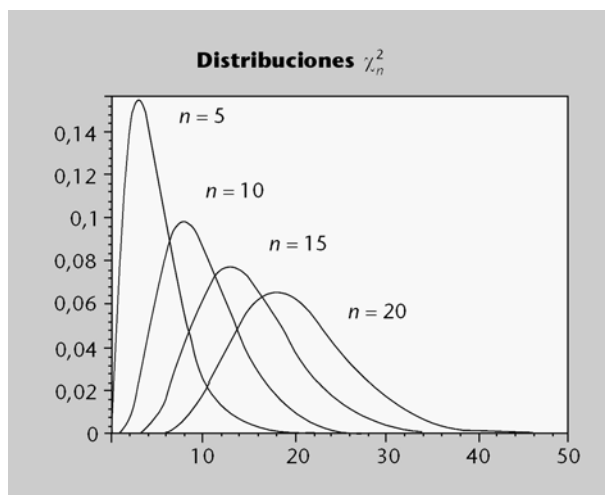
La distribución  $\chi^2$  también se conoce por la forma en que se lee, es decir, distribución ji cuadrado.

#### $\chi^2$ con 1 grado de libertad

En el caso de que consideremos sólo una variable normal estándar,  $Z$ , tendremos que la variable  $Z^2$  sigue una ley  $\chi^2$  con un grado de libertad.

Algunas características importantes de esta distribución son las siguientes:

1) Las distribuciones  $\chi_n^2$  no son simétricas. Tienen asimetría hacia la derecha, que disminuye a medida que  $n$  aumenta. Podemos verlo en la figura:



A la hora de calcular probabilidades con las distribuciones  $\chi_n^2$ , es muy importante tener presente que éstas no son simétricas.

2) Para cada valor entero positivo del número de grados de libertad ( $n$ ) hay una distribución  $\chi_n^2$ . Así pues, existe un número infinito. Dado que no podemos disponer de infinitas tablas, sólo las tenemos para unos determinados grados de libertad. En cada tabla, en la primera columna tenemos los grados de libertad  $n$  y en la primera fila, la probabilidad,  $\alpha$ , de que la variable  $\chi^2$  con  $n$  grados de libertad tome un valor superior a un valor  $a$ . La intersección de esta fila y columna da este valor  $a$ , es decir:

$$P(\chi_n^2 > a) = \alpha$$

Encontraréis las tablas de la distribución  $\chi^2$  en la web de la asignatura.

### Ejemplo de utilización de las tablas

1) Si queremos encontrar aquel valor  $a$  que hace que  $P(\chi_7^2 > a) = 0,025$ , buscaremos en la tabla la fila correspondiente a  $n = 7$  grados de libertad y la columna correspondiente a  $\alpha = 0,025$ , y en la intersección tenemos que  $a = 16,013$ .

2) También podemos utilizar estas tablas para encontrar probabilidades acumuladas. Si queremos encontrar aquel valor  $b$  tal que  $P(\chi_{16}^2 \leq b) = 0,05$ , deberemos tener en cuenta que si  $b$  deja a su izquierda un área igual a 0,05, a su derecha dejará un área igual a  $1 - 0,05 = 0,95$ ; por tanto, debemos encontrar el valor de  $b$  tal que  $P(\chi_{16}^2 > b) = 0,95$ . Y observando la tabla, tenemos que  $b = 7,962$ .

3) La esperanza de una variable  $\chi_n^2$  es  $E(\chi_n^2) = n$ . Esta propiedad se demuestra fácilmente, ya que  $\chi_n^2 = (Z_1^2 + \dots + Z_n^2)$ , entonces:

$$E(\chi_n^2) = E(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) = E(Z_1^2) + \dots + E(Z_n^2) = n E(Z_1^2)$$

Puesto que  $\text{Var}(Z_i) = 1$  y, por otro lado,  $\text{Var}(Z_i) = E(Z_i^2) - (E(Z_i))^2$ , tenemos que  $E(Z_i^2) = \text{Var}(Z_i) + (E(Z_i))^2 = 1 + 0 = 1$ , ya que la esperanza de una normal estándar es cero,  $E(Z_i) = 0$ . Finalmente, tenemos que:

$$E(\chi_n^2) = n E(Z_1^2) = n \cdot 1 = n$$

4) La varianza de una variable  $\chi_n^2$  es  $\text{Var}(\chi_n^2) = 2n$ . Para demostrar esta propiedad, debemos tener en cuenta que  $\chi_n^2 = (Z_1^2 + \dots + Z_n^2)$ , y que las variables  $Z_i$  son independientes; por tanto, tenemos que:

$$\text{Var}(\chi_n^2) = \text{Var}(Z_1^2 + \dots + Z_n^2) = \text{Var}(Z_1^2) + \dots + \text{Var}(Z_n^2) = n \text{Var}(Z_i^2)$$

$$\text{Entonces: } \text{Var}(Z_i^2) = E(Z_i^4) - (E(Z_i^2))^2.$$

Por un lado, antes hemos visto que  $E(Z_i^2) = 1$  y, por otro, podemos demostrar, aunque no lo haremos, que  $E(Z_i^4) = 3$ , de manera que  $\text{Var}(Z_i^2) = 3 - 1 = 2$ ; finalmente, obtenemos que:

$$\text{Var}(\chi_n^2) = n \cdot 2 = 2 \cdot n$$

### 3. El contraste de la varianza

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria de tamaño  $n$  obtenida de una población normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$  desconocidas. Queremos contrastar la hipótesis nula de que la varianza de la población es igual a un valor  $\sigma_0^2$ . Como en todos los contrastes de hipótesis, utilizaremos el procedimiento siguiente:

1) Estableceremos las hipótesis nula y alternativa:

a) Hipótesis nula:  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$

b) Hipótesis alternativa. La hipótesis alternativa ( $H_1$ ) puede ser bilateral (la varianza de la población es diferente de este valor  $\sigma_0^2$ ) o unilateral (la varianza de la población es mayor o menor que  $\sigma_0^2$ ):


- Bilateral:  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Unilateral:  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$
- Unilateral:  $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$

2) Calcularemos el estadístico de contraste. Consideremos una muestra con varianza muestral  $s^2$ , extraída de una población  $N(\mu, \sigma^2)$ .

Bajo el supuesto de la hipótesis nula cierta ( $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ ), tenemos que el estadístico de contraste:

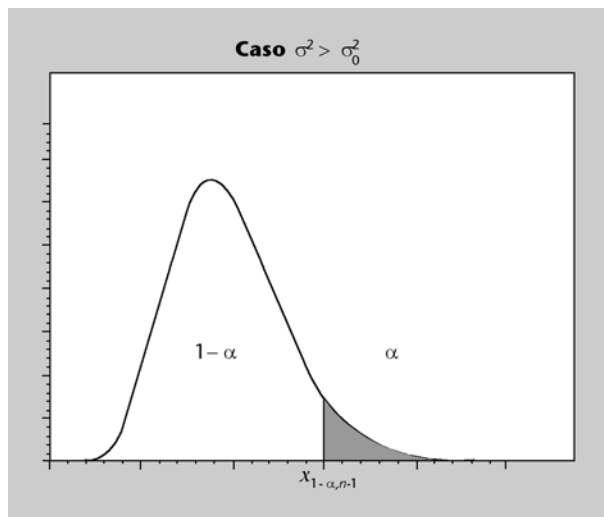
$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

donde  $s^2$  es la varianza de una muestra de tamaño  $n$ , es una observación de una variable  $\chi^2_{n-1}$ .

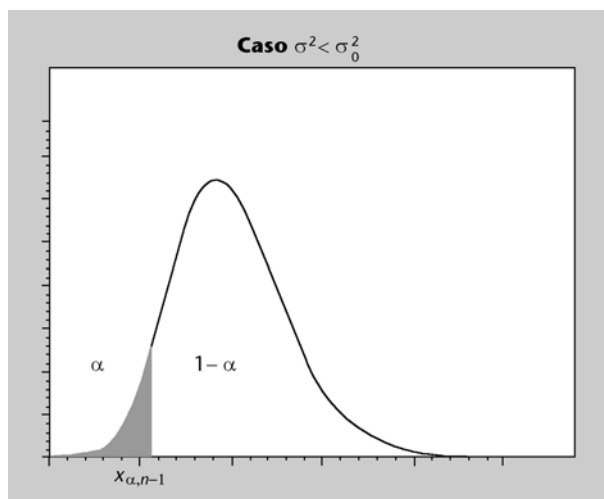
No demostramos este resultado porque está muy lejos de los objetivos de este curso de Estadística. 

3) Fijado un nivel de significación  $\alpha$ , determinamos un criterio de decisión. Para tomar una decisión, tendremos dos criterios: uno a partir del estadístico de contraste y los valores críticos y el otro, a partir del  $p$ -valor. Dado un nivel de significación  $\alpha$  y según cuál sea la hipótesis alternativa, tenemos tres casos posibles:

a) En caso de que  $H_1$  sea  $\sigma^2 > \sigma_0^2$ , escribimos el valor crítico como  $x_{1-\alpha, n-1}$ , y es aquel valor que hace que  $P(\chi^2_{n-1} > x_{1-\alpha, n-1}) = \alpha$ . Expresado gráficamente:

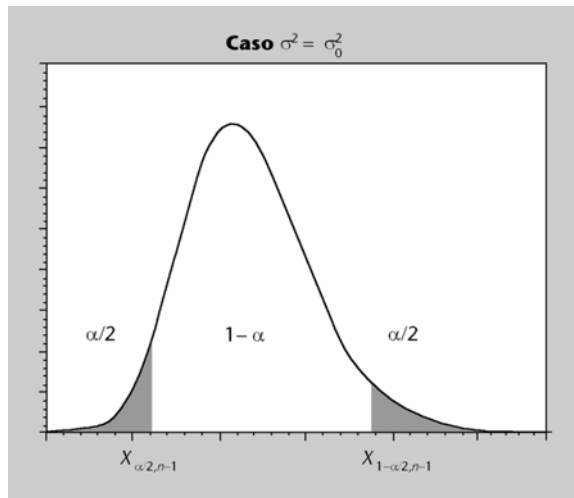


b) En caso de que  $H_1$  sea  $\sigma^2 < \sigma_0^2$ , escribimos el valor crítico como  $x_{\alpha, n-1}$  y es aquel valor que hace que  $P(\chi^2_{n-1} < x_{\alpha, n-1}) = \alpha$ . Gráficamente:





c) En caso de que  $H_1$  sea  $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ , entonces tenemos dos valores críticos (uno por cada cola), que escribiremos como  $x_{\alpha/2, n-1}$  y  $x_{1-\alpha/2, n-1}$  y que hacen que:  $P(\chi_{n-1}^2 < x_{\alpha/2, n-1}) = \alpha/2$  y  $P(\chi_{n-1}^2 > x_{1-\alpha/2, n-1}) = \alpha/2$ . Gráficamente:



A partir del valor calculado del estadístico de contraste:

$$x = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

y a partir de los valores críticos correspondientes a la hipótesis alternativa y al nivel de significación  $\alpha$ , **rechazaremos la hipótesis nula** en favor de la hipótesis alternativa si:

- En el caso  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$  se cumple que  $x > x_{1-\alpha, n-1}$
- En el caso  $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$  se cumple que  $x < x_{\alpha, n-1}$
- En el caso  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  se cumple que  $x < x_{\alpha/2, n-1}$  o  $x > x_{1-\alpha/2, n-1}$

La otra opción que tenemos para tomar una decisión es, como ya hemos dicho antes, por medio del  $p$ -valor.

El  $p$ -valor depende de la hipótesis alternativa planteada, de manera que si

$$x = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

es el valor del estadístico de contraste:

- En el caso  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ , entonces  $p = P(\chi_{n-1}^2 > x)$ .
- En el caso  $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$ , entonces  $p = P(\chi_{n-1}^2 < x)$ .
- En el caso  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$  no es fácil calcular el  $p$ -valor, dado que la distribución  $\chi^2$  no es simétrica. Siempre estudiaremos este caso con el estadístico de contraste y los valores críticos.

Diremos que este  $p$ -valor es significativo y **rechazaremos la hipótesis nula** si es menor que el nivel significativo  $\alpha$  escogido.

#### Rechazo o no rechazo de la hipótesis nula

Considerando los gráficos anteriores, si el estadístico de contraste se encuentra en la región sombreada, entonces rechazamos la hipótesis nula. En caso contrario, no la rechazamos.

#### Recordatorio

El  $p$ -valor es la probabilidad de que un resultado sea "al menos tan extremo" como el estadístico de contraste obtenido.

### Ejemplo de la variabilidad de unas piezas

La longitud de las piezas fabricadas en un proceso industrial sigue una distribución  $N(5; 0,0625)$ . Se considera que el tamaño de las piezas es demasiado variable y se implanta una nueva técnica para evitarlo. Una muestra de doce piezas ha dado, después de este cambio, las medidas: 5,02, 4,87, 4,95, 4,88, 5,01, 4,93, 4,91, 5,09, 4,96, 4,89, 5,06, 4,85.

Con un nivel de significación  $\alpha = 0,05$ , ¿podemos afirmar que efectivamente ha habido reducción en la variabilidad del tamaño de las piezas?

A partir de las observaciones calculamos la varianza muestral:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 = 0,006106$$

1) Establecemos las hipótesis nula,  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 0,0625$ , y alternativa,  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 0,0625$ .

La hipótesis alternativa es unilateral, ya que lo que nos preguntan es si podemos afirmar que la variabilidad de las piezas se ha reducido, es decir, si ahora la varianza es menor que la que se tenía antes.

2) Calculamos el estadístico de contraste:

$$x = \frac{(n-1) s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(12-1) 0,006106}{0,0625} = 1,07467$$

Bajo la hipótesis nula, es decir, suponiendo que  $\sigma_0^2 = 0,0625$  es una observación de una variable aleatoria  $\chi^2$  con  $12 - 1 = 11$  grados de libertad.

3) Fijado un nivel de significación  $\alpha = 0,05$ , con ayuda del ordenador, calcularemos el  $p$ -valor y veremos si está por debajo o no:

$$p = P(\chi^2 \leq 1,0767) = 0,00007257510$$

Tenemos un  $p$ -valor mucho menor que 0,05 (es lo bastante significativo); por tanto, rechazamos la hipótesis nula y podemos afirmar que la variabilidad se ha reducido.

Si queremos hacerlo a partir del estadístico de contraste, debemos buscar en las tablas el valor crítico  $x_{\alpha, n-1} = x_{0,05; 11} = 4,5748$ . Puesto que  $1,07467 < 4,5748$ , aceptamos  $H_1$ ; por tanto, la variabilidad se ha reducido.

## 4. Intervalo de confianza de la varianza

Supongamos que a partir de una muestra de tamaño  $n$  hemos obtenido el valor de la varianza  $s^2$ . ¿Cómo podemos construir un intervalo de confianza de la varianza poblacional?

Sabemos que si  $s^2$  es la varianza muestral de una muestra aleatoria de tamaño  $n$  tomada de una población normal de varianza  $\sigma^2$ , el estadístico:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

es una observación de una variable aleatoria  $\chi^2$  con  $n - 1$  grados de libertad.

Por otro lado, la probabilidad de que una variable aleatoria  $\chi^2$  con  $n - 1$  grados de libertad,  $\chi_{n-1}^2$ , se encuentre comprendida entre los valores críticos  $x_{\alpha/2, n-1}$  y  $x_{1-\alpha/2, n-1}$  es:

$$P(x_{\alpha/2, n-1} < \chi_{n-1}^2 < x_{1-\alpha/2, n-1}) = 1 - \alpha$$

Por tanto, tenemos una probabilidad del  $(1 - \alpha)$  de que el estadístico  $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$  se encuentre comprendido entre los valores críticos  $x_{\alpha/2, n-1}$  y  $x_{1-\alpha/2, n-1}$ , es decir:

$$x_{\alpha/2, n-1} < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < x_{1-\alpha/2, n-1}$$

Manipulando esta expresión:  $\frac{x_{\alpha/2, n-1}}{(n-1)s^2} < \frac{1}{\sigma^2} < \frac{x_{1-\alpha/2, n-1}}{(n-1)s^2}$

e invirtiendo las fracciones de la desigualdad anterior, finalmente obtenemos:

$$\frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2, n-1}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2, n-1}}$$

Para determinar un **intervalo de confianza** para la varianza a partir de una muestra de tamaño  $n$  y varianza muestral  $s^2$ :

- 1) Fijamos el nivel de confianza, que escribimos como  $1 - \alpha$ .
- 2) Encontramos los valores de la distribución  $\chi_{n-1}^2$  que cortan una probabilidad de  $\alpha/2$  en las dos colas, es decir, los puntos críticos  $x_{\alpha/2, n-1}$  y  $x_{1-\alpha/2, n-1}$ .
- 3) El intervalo de confianza viene dado por:  $\left[ \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2, n-1}} ; \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2, n-1}} \right]$

### Ejemplo de la variabilidad de unas piezas (II)

Queremos determinar un intervalo de confianza del 95% para la varianza de las piezas del ejemplo anterior. La varianza muestral es:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x} - x_i)^2 = 0,006106$$

A partir de las tablas podemos encontrar los puntos críticos  $x_{\alpha/2, n-1} = x_{0,025;11}$  y  $x_{1-\alpha/2, n-1} = x_{0,975;11}$  que cortan una probabilidad de  $\alpha/2$  en las dos colas:

$$x_{0,025;11} = 3,8157 \text{ y } x_{0,975;11} = 21,920$$

El intervalo de confianza viene dado por:

$$\left[ \frac{(12-1)0,006106}{21,920} ; \frac{(12-1)0,006106}{3,8157} \right]$$

#### Procedimiento

Dada la desigualdad:

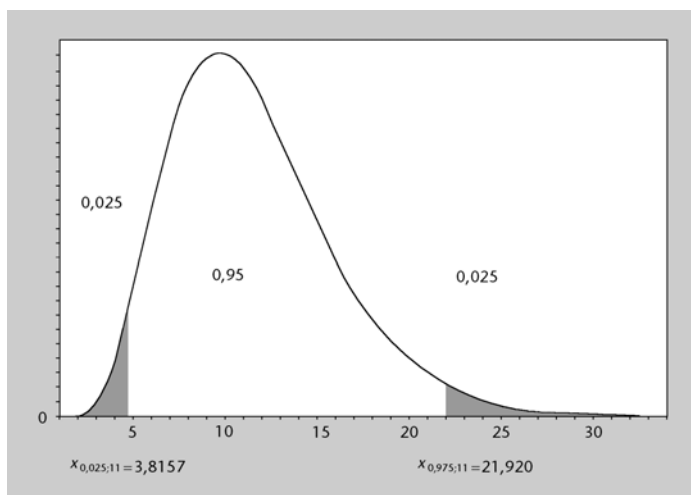
$$a < \frac{1}{b} < c$$

se tiene que:

$$\frac{1}{a} > b > \frac{1}{c}$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{1}{c} < b < \frac{1}{a}$$



Finalmente, obtenemos:  $[0,003064; 0,01760]$ .

Podemos observar que el intervalo de confianza para la varianza de la población nos muestra que ésta será mayor que 0,003064 y menor que 0,01760. Comparando con el resultado del contraste de hipótesis del ejemplo anterior, observamos que el valor 0,0625 no se encuentra en el intervalo. Este resultado es coherente con el del contraste, en el que hemos rechazado la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa de reducción de la varianza.

## 5. Resumen

En esta sesión hemos aprendido a hacer inferencia estadística sobre la varianza de una población normal. Sin embargo, antes hemos introducido la distribución  $\chi^2$  y estudiado sus propiedades más importantes. Después hemos definido el estadístico de contraste y hemos visto la forma de hacer un contraste de hipótesis y cómo podemos encontrar un intervalo de confianza para la varianza.

## Ejercicios

1. En un taller funcionan dos máquinas, A y B, para la producción de unas determinadas piezas. La experiencia demuestra que el peso medio de las piezas fabricadas por A es de 1.189 g, con una desviación típica de 90 g. El encargado del taller cree que, si bien el peso medio de las piezas fabricadas por B es el mismo que el de las fabricadas por A, la máquina B funciona con una regularidad diferente. Para confirmarlo, eligió al azar una muestra de 101 piezas fabricadas por la máquina B y obtuvo una desviación típica muestral de 80 g. Supongamos que el peso de las piezas de las dos máquinas está normalmente distribuido.

a) Haced un contraste de hipótesis con  $\alpha = 0,1$  para probar si el encargado tiene razón.

b) Encontrad un intervalo de confianza del 95% para la desviación típica.

2. El responsable de seguridad de una industria cree que el tiempo que tarda un vigilante nuevo en completar su ronda tiene una desviación típica inferior a dos minutos. En una muestra aleatoria de tamaño 12 de tiempo (en minutos), que es lo que el vigilante tarda en hacer una ronda, se obtuvieron los resultados siguientes: 20, 23, 18, 22, 18, 17, 20, 21, 21, 18, 21, 19. Supondremos que el tiempo de una ronda se distribuye según una ley normal.

a) Haced un contraste de hipótesis con  $\alpha = 0,05$  para determinar si el responsable de seguridad tiene razón.

b) Encontrad un intervalo de confianza del 90% para la desviación típica.

## Solucionario

1.

a) Para hacer el contraste de hipótesis, seguiremos el procedimiento mostrado en esta sesión:

1. Establecemos las hipótesis nula y alternativa:

- Hipótesis nula:  $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 = 90^2$
- Hipótesis alternativa:  $H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2 = 90^2$ , ya que según el enunciado el encargado sólo supone que la máquina B funciona con regularidad diferente.

2. Calculamos el estadístico de contraste:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(101-1)80^2}{90^2} = 79,012$$

3. Fijamos el nivel de significación que nos indica el enunciado del problema  $\alpha = 0,1$ . A continuación buscamos los valores críticos correspondientes teniendo en cuenta que la hipótesis alternativa es bilateral, de manera que  $\alpha/2 = 0,05$ .

De las tablas de la  $\chi^2$  tenemos los valores críticos siguientes:  $x_{0,95;100} = 124,342$  y  $x_{0,05;100} = 77,929$ . Puesto que el estadístico de contraste 79,012 pertenece al intervalo  $[77,929; 124,342]$ , se concluye que no hay evidencia suficiente para rechazar  $H_0$ . Y, por tanto, las sospechas del encargado no están justificadas.

b) El intervalo de confianza para la desviación típica viene dado por la expresión:

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2}} \right]$$

Ahora tenemos que  $\alpha = 0,05$ , por tanto,  $\alpha/2 = 0,025$  y  $1 - \alpha/2 = 0,975$ . De las tablas podemos sacar los valores críticos correspondientes:  $x_{0,975;100} = 129,561$  y  $x_{0,025;100} = 74,222$ . Así, tenemos el siguiente intervalo de confianza para la varianza:

$$[4939,758; 8622,780]$$

Y calculando la raíz cuadrada, obtenemos el intervalo de confianza para la desviación típica:

$$[70,283; 92,859]$$

Podemos observar que una desviación típica igual a 90 se encuentra dentro de estos intervalos de confianza, resultado que está de acuerdo con el obtenido en el contraste de hipótesis.

2. Lo primero que hacemos es calcular la media y la varianza del tiempo que se tarda en hacer una ronda:

- Media:  $\bar{x} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} x_i = 19,83$
- Varianza:  $s^2 = \frac{1}{1-12} \sum_{i=1}^{12} (x_i - 19,83)^2 = 3,42$

a) Una vez más, seguiremos los pasos que exponemos a continuación para hacer un contraste de hipótesis de la varianza:

1. Establecemos las hipótesis:

Hipótesis nula:  $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 2^2$ .

Hipótesis alternativa:  $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 = 2^2$ . En este caso la hipótesis alternativa es unilateral, ya que se quiere contrastar si la varianza es menor que un determinado valor.

#### Notación

Debemos tener mucho cuidado con la notación. Fijaos en que

$$x_{0,975;100} = 129,561$$

es el valor crítico de la cola derecha, de manera que el área que deja a su derecha es 0,025. Y es por esta probabilidad donde lo buscaremos en las tablas. El subíndice 0,975 no debe despistarnos.

De la misma manera,

$$x_{0,025;100} = 74,222$$

es el valor crítico de la cola izquierda, es decir, el valor que deja a su derecha un área igual a 0,975. Y con esta probabilidad lo buscamos en las tablas.

2. Determinamos un nivel de significación  $\alpha = 0,05$  y calculamos el estadístico de contraste a partir de los datos de la muestra de observaciones:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(12-1)3,42}{2^2} = 9,40$$

3. Con la ayuda del ordenador calculamos el  $p$ -valor correspondiente a un  $\alpha = 0,05$  para una hipótesis alternativa unilateral de cola izquierda, es decir:

$$p = P(\chi_{11}^2 < 9,40) = 0,4150$$

Dado que este valor es mayor que  $\alpha$ ,  $0,4150 > 0,05$ , no podemos rechazar la hipótesis nula y concluimos que la varianza del vigilante no es significativamente diferente de 4 s.

b) Ahora encontraremos un intervalo de confianza para la varianza del tiempo de ronda del vigilante. Tenemos que  $\alpha = 0,10$  y, por tanto,  $\alpha/2 = 0,05$  y  $1 - \alpha/2 = 0,95$ . De las tablas obtenemos los valores críticos correspondientes:

$$x_{0,05;11} = 4,575 \text{ y } x_{0,95;11} = 19,675$$

De manera que, sustituyendo estos valores en la expresión correspondiente al intervalo de confianza:

$$\left[ \frac{(n-1)s^2}{x_{1-\alpha/2}} ; \frac{(n-1)s^2}{x_{\alpha/2}} \right] = \left[ \frac{(12-1)3,42}{19,675} ; \frac{(12-1)3,42}{4,575} \right]$$

tenemos un intervalo de confianza del 95% igual a  $[1,91; 8,22]$ . Observamos que 4 se encuentra dentro de este intervalo, de manera que no tenemos ninguna evidencia para pensar que la varianza es diferente de 4.

## Comparación de varianzas

### 1. Introducción

Esta sesión está dedicada a la comparación de las varianzas de dos poblaciones normales, a partir de los datos obtenidos en dos muestras, una de cada población.

#### Comparación de la variabilidad de los errores de medida de dos aparatos

Supongamos que queremos comparar la precisión de dos aparatos de medida. La precisión de un aparato de medida viene determinada por la variabilidad de sus errores: cuanto menor sea esta variabilidad, más preciso es. Por tanto, deberemos comparar la variabilidad de los errores de medida de los dos aparatos, es decir, deberemos comparar sus varianzas.

Antes de comenzar con el contraste de igualdad de varianzas, deberemos introducir una nueva variable aleatoria: la distribución  $F$  de Snedecor.

#### Supuesto de varianzas iguales

Muchas veces, cuando hacemos un contraste de hipótesis sobre la diferencia de medias de dos poblaciones, suponemos que las varianzas de estas poblaciones son iguales. No existe ningún motivo para que esto sea cierto. Deberíamos comenzar por comprobar si las varianzas son iguales.

### 2. La distribución $F$ de Snedecor

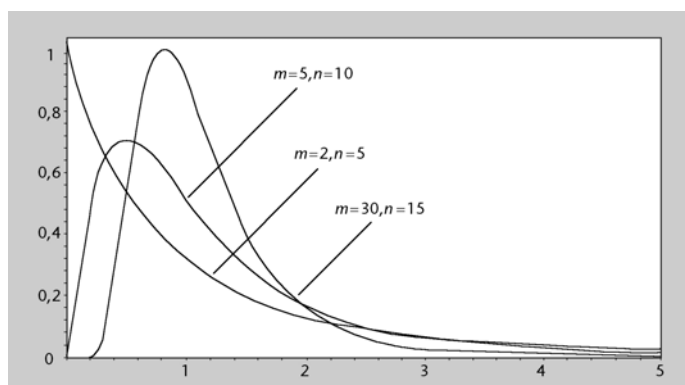
Si  $U$  y  $V$  son dos variables independientes que siguen distribuciones  $\chi^2$  con  $m$  y  $n$  grados de libertad, respectivamente, entonces la variable que se obtiene al hacer el cociente:

$$F_{m,n} = \frac{U/m}{V/n}$$

tiene una distribución  $F$  de Snedecor con  $m$  grados de libertad en el numerador y  $n$  grados de libertad en el denominador,  $F_{m,n}$ .

A continuación comentaremos muy brevemente las principales características de la distribución  $F$ .

1) Las distribuciones  $F$  no son simétricas. Todas presentan asimetría hacia la derecha, que decrece a medida que aumentan  $m$  y  $n$ .





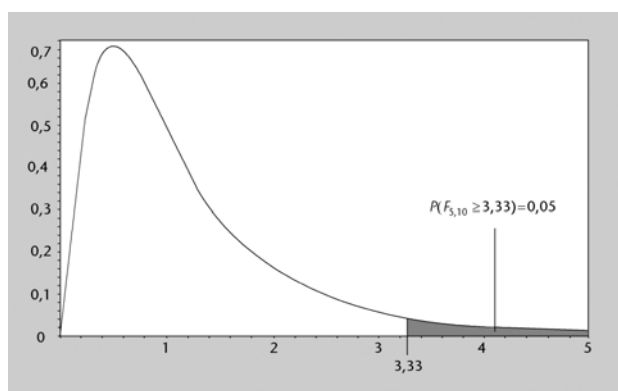
2) Para cada par de valores enteros positivos de  $m$  y  $n$  hay una distribución  $F$ . Así pues, también en este caso tenemos un número infinito de distribuciones. Sólo se dispone de tablas para unos determinados valores de los grados de libertad  $m$  y  $n$ .

Encontraréis las tablas de la distribución  $F$  en la web de la asignatura.

Dada una probabilidad  $\alpha$ , cada tabla nos da el valor  $b$ , que hace que  $\alpha$  sea la probabilidad de que la variable  $F$  con  $m$  grados de libertad en el numerador y  $n$  grados de libertad en el denominador sea mayor que  $b$ . La primera fila indica los grados de libertad del numerador ( $m$ ) y la primera columna indica los grados de libertad del denominador ( $n$ ). El valor  $b$  lo encontramos en la intersección de esta fila y esta columna.

### Ejemplo de utilización de las tablas

Queremos saber el valor  $a$  que hace que  $P(F_{5,10} \geq b) = 0,05$ . En la tabla correspondiente a  $\alpha = 0,05$ , primero buscaremos la columna de grados de libertad del numerador  $m = 5$  y después la fila de grados de libertad del denominador  $n = 10$ .

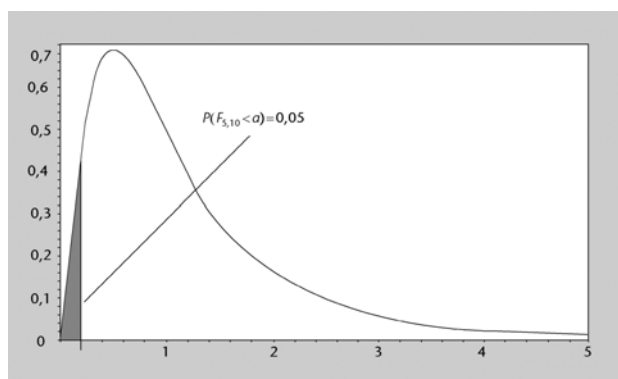


El valor  $b$  se encuentra en la intersección de estas filas y columnas. Tenemos que  $b = 3,33$ .

3) Propiedad recíproca: si  $U$  es una variable aleatoria  $F_{m,n}$ , entonces  $V = 1/U$  es una variable aleatoria  $F_{n,m}$ . Esta propiedad es de gran utilidad para encontrar valores que determinen probabilidades en la cola izquierda de la distribución.

### Ejemplo de utilización de las tablas mediante la propiedad recíproca

Queremos determinar el valor  $a$  que hace que  $P(F_{5,10} < a) = 0,05$ , es decir, el valor que acumula una probabilidad de 0,05 y, por tanto, que determina un área de 0,05 en la cola izquierda de la distribución.



Como ya se ha comentado antes, no se dispone de todas las tablas para todas las probabilidades. En este ejemplo nos haría falta la tabla correspondiente a  $\alpha = 0,95$ , tabla que

no tenemos. Lo que haremos será utilizar la propiedad recíproca para determinar dicha probabilidad.

Queremos encontrar el valor de  $a$  que hace que  $P(F_{5;10} < a) = 0,05$ . Aplicando la propiedad recíproca a esta expresión, tenemos que:

$$P\left(\frac{1}{F_{10;5}} < a\right) = 0,05$$

Manipulando un tanto la desigualdad del paréntesis, tenemos que:

$$P\left(F_{10;5} \geq \frac{1}{a}\right) = 0,05$$

Si ahora, para simplificar un poco la escritura, llamamos  $b = 1/a$ , nuestro problema se ha reducido a encontrar el valor  $b$  que hace que  $P(F_{10;5} \geq b) = 0,05$ . Y lo haremos de la forma que se ha mostrado en el apartado anterior. Buscaremos en la tabla de  $\alpha = 0,05$  el valor intersección de la fila correspondiente a  $m = 10$  grados de libertad del numerador y  $n = 5$  grados de libertad del denominador. Tenemos que  $b = 4,74$  y, por tanto:

$$a = \frac{1}{b} = \frac{1}{4,74} = 0,21$$

4) La esperanza de una variable  $F_{m,n}$  es:

$$E(F_{m,n}) = \frac{n}{n-2}, \text{ para } n > 2$$

y la varianza es:

$$\text{Var}(F_{m,n}) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}, \text{ para } n > 4$$

#### Sobre la esperanza de una variable $F, \dots$

... hay que destacar que la esperanza de un cociente no es necesariamente el cociente de las esperanzas: la esperanza de  $U$  es  $m$ , por tanto, la de  $U/m$  es 1. De la misma forma, la esperanza de  $V/n$  es 1 y el cociente es 1. En cambio, la esperanza del cociente es  $n/(n-2)$ , que es mayor que 1.

### 3. Comparación de dos varianzas

Consideremos que tenemos dos muestras aleatorias de dos poblaciones normales diferentes: una muestra de tamaño  $m$  obtenida de la población 1, que sigue una ley normal de media  $\mu_1$  y varianza  $\sigma_1^2$  desconocidas, y otra muestra de tamaño  $n$  obtenida de la población 2, distribuida según una normal de media  $\mu_2$  y varianza  $\sigma_2^2$  desconocidas.

Ahora nos interesa contrastar la hipótesis nula que asegura que las varianzas de las dos poblaciones son iguales, es decir,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , que también podemos expresar como  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$ . Una vez más utilizaremos la siguiente manera de proceder para hacer un contraste de hipótesis:

1) Establecemos las hipótesis nula y alternativa:

a) Hipótesis nula:  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$  ( $H_0 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 = 1$ )

b) Hipótesis alternativa. Puede ser bilateral (las varianzas de las dos poblaciones son distintas) o unilaterales (la varianza de una población es mayor que la de la otra):

- Bilateral:  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  ( $H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$ )
- Unilateral:  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  ( $H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$ )
- Unilateral:  $H_1 : (\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$  ( $H_1 : \sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1$ )

2) Cálculo del estadístico de contraste. Sabemos que, si consideramos una muestra de tamaño  $m$  de una población 1, distribuida según una  $N(\mu_1, \sigma_1^2)$  con varianza muestral  $s_1^2$ , se tiene que:

$$\frac{(m-1)s_1^2}{\sigma_1^2}$$

es una observación de una variable  $\chi^2$  con  $(m-1)$  grados de libertad.

Para una muestra de tamaño  $n$  y varianza muestral  $s_2^2$  de una población normal  $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , se tiene que:

$$\frac{(n-1)s_2^2}{\sigma_2^2}$$

es una observación de una variable  $\chi^2$  con  $(n-1)$  grados de libertad. El cociente de dos variables  $\chi^2$  divididas por sus grados de libertad sigue una distribución  $F$ . De esta manera:

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$$

es una observación de una variable  $F$  con  $(m-1)$  grados de libertad en el numerador y  $(n-1)$  grados de libertad en el denominador.

Bajo el supuesto de la hipótesis nula cierta  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , tenemos el estadístico **de contraste**:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2}$$

donde  $s_1^2$  y  $s_2^2$  son muestras aleatorias independientes de tamaños muestrales  $m$  y  $n$ , respectivamente.

Este estadístico de contraste es una observación de una variable  $F$  de Snedecor con  $(m-1)$  grados de libertad en el numerador y  $(n-1)$  grados de libertad en el denominador.

**Si  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ , entonces**

$$\frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{s_1^2 \sigma_1^2}{s_2^2 \sigma_1^2} = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

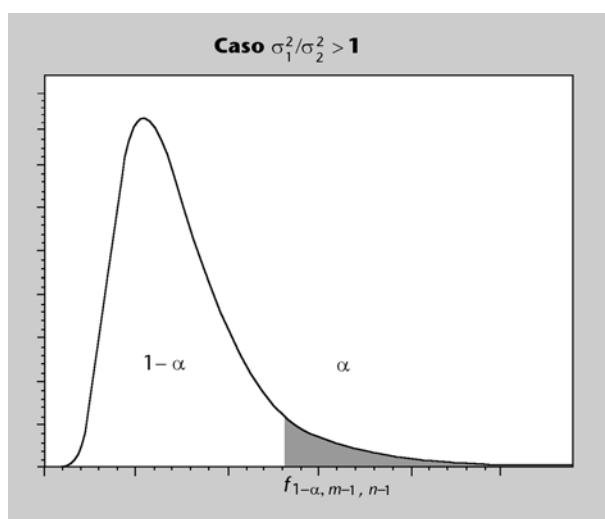
3) Fijado un nivel significativo  $\alpha$ , determinamos un criterio de decisión. Como siempre que hacemos un contraste de hipótesis, a la hora de escoger un criterio de decisión tenemos dos alternativas: a partir del estadístico de contraste y los valores críticos correspondientes a un nivel de significación  $\alpha$  o a partir del  $p$ -valor.

Dado un nivel de significación  $\alpha$  y según la hipótesis alternativa, tenemos:

a) En caso de que  $H_1$  sea  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 > 1$ , entonces escribimos el valor crítico como  $f_{1-\alpha, m-1, n-1}$  y es aquel valor que hace que:

$$P(F_{m-1, n-1} > f_{1-\alpha, m-1, n-1}) = \alpha$$

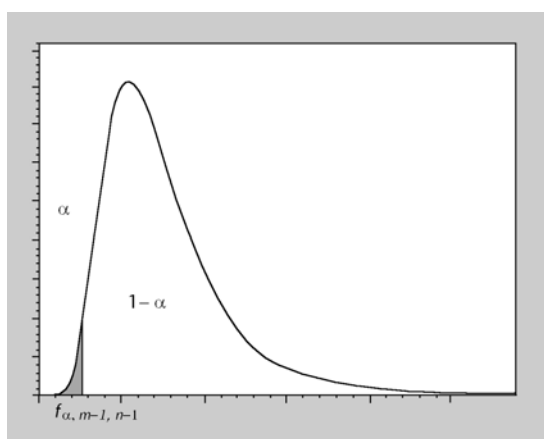
Gráficamente:



b) En caso de que  $H_1$  sea  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 < 1$ , entonces escribimos el valor crítico como  $f_{\alpha, m-1, n-1}$  y es aquel valor que hace que:

$$P(F_{m-1, n-1} < f_{\alpha, m-1, n-1}) = \alpha$$

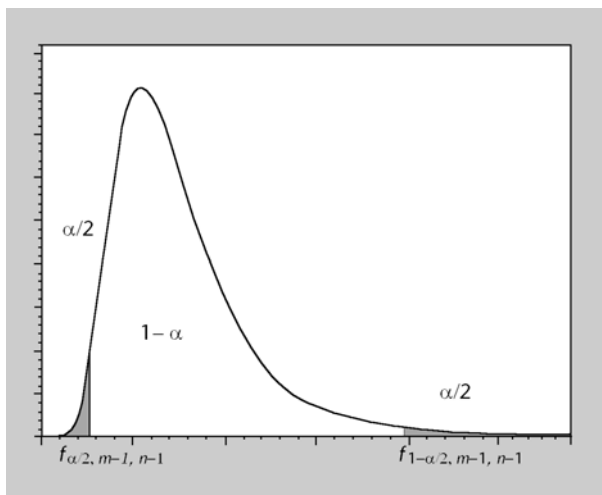
Gráficamente:



c) En caso de que  $H_1$  sea  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2 \neq 1$ , tenemos dos valores críticos (uno por cada cola), que escribiremos como  $f_{\alpha/2, m-1, n-1}$  y  $f_{1-\alpha/2, m-1, n-1}$  y que hacen que:

$$P(F_{m-1, n-1} < f_{\alpha/2, m-1, n-1}) = \alpha/2 \text{ y } P(F_{m-1, n-1} > f_{1-\alpha/2, m-1, n-1}) = \alpha/2$$

Gráficamente:



A partir del valor calculado del estadístico de contraste:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

y de los valores críticos correspondientes a la hipótesis alternativa y al nivel de significación  $\alpha$ , **rechazaremos la hipótesis nula** en favor de la hipótesis alternativa si:

- En el caso  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  se cumple que  $f > f_{1-\alpha, m-1, n-1}$
- En el caso  $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$  se cumple que  $f < f_{\alpha, m-1, n-1}$
- En el caso  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  se cumple que  $f < f_{\alpha/2, m-1, n-1}$  o  $f > f_{1-\alpha/2, m-1, n-1}$

#### Rechazo y no rechazo de la hipótesis nula

Considerando los gráficos anteriores, si el estadístico de contraste se encuentra en la región sombreada, entonces rechazamos la hipótesis nula. En caso contrario, no la rechazamos.

También podemos hacerlo a partir del  $p$ -valor. Una vez calculado el estadístico de contraste, calcularemos el  $p$ -valor correspondiente.

El  $p$ -valor depende de la hipótesis alternativa planteada, de manera que:

En el caso  $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$  se cumple que  $p = P(F_{m-1, n-1} > f)$

En el caso  $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$  se cumple que  $p = P(F_{m-1, n-1} < f)$

En el caso  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$  se cumple que  $p = 2P(F_{m-1, n-1} > f)$

Si  $p$  es menor que el nivel de significación  $\alpha$ , diremos que el  $p$ -valor es significativo y **rechazaremos la hipótesis nula**.

Vale la pena comentar por qué en el caso bilateral  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ , para calcular el  $p$ -valor, se multiplica por dos. En este caso debemos tener en cuenta que hemos elegido la población “1” arbitrariamente y, por tanto, habríamos podido calcular el estadístico de contraste como:

$$f_0 = \frac{s_2^2}{s_1^2}$$

Fijaos en que se trata de una observación de una variable aleatoria que sigue una ley  $F_{n-1, m-1}$ .

Calcularemos el  $p$ -valor teniendo en cuenta estas dos posibilidades. Así:

$$p = P(F_{m-1, n-1} > f) + P(F_{n-1, m-1} > f_0)$$

Observamos que aplicando la propiedad recíproca y el hecho de que  $f_0 = 1/f$ , podemos escribir:

$$P(F_{n-1, m-1} > f_0) = P\left(\frac{1}{F_{m-1, n-1}} > \frac{1}{f}\right) = P(F_{m-1, n-1} > f)$$

Finalmente obtenemos que el  $p$ -valor correspondiente a una hipótesis alternativa bilateral es  $p = 2P(F_{m-1, n-1} > f)$ .

### Ejemplo de comparación de dos varianzas

Se lleva a cabo un estudio para comparar el tiempo que tardan dos ordenadores de marcas diferentes (A y B) en ejecutar un programa. Experiencias anteriores indican que las distribuciones de tiempo son aproximadamente normales. Una muestra aleatoria de tiempo para once ordenadores de la marca A y otra para catorce de la marca B dan los siguientes resultados para las desviaciones típicas muestrales:

Ordenadores de la marca A:  $s_1 = 6,1$

Ordenadores de la marca B:  $s_2 = 5,3$

A la vista de estos resultados, ¿podemos pensar que los tiempos de ejecución de los ordenadores de la marca A presentan más variabilidad que los de la marca B?

Haremos un contraste de hipótesis de la igualdad de varianzas con un nivel de significación de 0,01.

1. Establecemos las hipótesis nula y alternativa:

Hipótesis nula:  $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$

Hipótesis alternativa:  $H_0 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

2. Fijamos un nivel de significación  $\alpha = 0,01$ , como dice el enunciado del ejercicio. A continuación calculamos el estadístico de contraste a partir de los datos muestrales:

$$\frac{s_A^2}{s_B^2} = \frac{6,1^2}{5,3^2} = 1,32$$

3. Con la ayuda del ordenador, calculamos el  $p$ -valor:  $p = P(F_{10,13} > 1,32) = 0,31$ . Puesto que  $0,31 > 0,01$ , no tenemos evidencias para rechazar la hipótesis nula. Concluimos,

**Es interesante observar que...**

... para la hipótesis alternativa bilateral el  $p$ -valor es dos veces el área de la cola de la derecha, aunque la distribución  $F$  de Snedecor no es simétrica.

pues, que las variabilidades de tiempo de ejecución de los ordenadores A y B no son significativamente diferentes.

También podemos hacerlo a partir del valor crítico: observando las tablas para  $m - 1 = 10$  y  $n - 1 = 13$  grados de libertad en el numerador y denominador, respectivamente, y para un nivel de significación  $\alpha = 0,01$ :

$$f_{0,99;10;13} = 4,10$$

Puesto que  $1,32 < 4,10$ , no rechazamos la hipótesis nula.

#### Notación

La tabla nos da siempre el valor crítico de la cola derecha; por tanto, si en la tabla pone, por ejemplo,  $\alpha = 0,01$  y buscamos para 10 grados de libertad del numerador y 13 grados de libertad del denominador, escribimos así el valor 4,10:

$$f_{0,99;10;13} = 4,10$$

## 4. Resumen

Hemos dedicado esta sesión a la comparación de dos varianzas en el caso de poblaciones normales. Hemos hecho contrastes de hipótesis sobre la igualdad de dos varianzas. Sin embargo, antes hemos introducido la distribución  $F$  de Snedecor y hemos estudiado sus propiedades más importantes; en particular, la propiedad recíproca, de gran importancia a la hora de calcular probabilidades en la cola izquierda de la distribución. Después hemos definido el estadístico de contraste correspondiente y hemos visto la manera de contrastar la igualdad de varianzas.

## Ejercicios

1. Los errores aleatorios de dos aparatos de medida siguen las distribuciones  $N(0, \sigma_1^2)$  y  $N(0, \sigma_2^2)$ . Durante un periodo de tiempo determinado se han detectado los errores siguientes:

Aparato 1	0,3	0,7	-1,1	2,0	1,7	-0,8	-0,5
Aparato 2	1,6	-0,9	-2,8	3,1	4,2	-1,0	2,1

Se quiere saber si el primer aparato es más preciso que el segundo. Haced un contraste de hipótesis con un nivel de significación del 0,05.

2. Se quiere comprobar el efecto de la humedad en el deterioro de dos materiales magnéticos diferentes. Con este objetivo se probaron diez piezas del material 1 sometiéndolo a una fuerte humedad. De la misma manera, se probaron trece piezas del material 2. La muestra del material 1 dio un deterioro medio de 83 con una varianza muestral de 25, mientras que la muestra del material 2 dio un valor medio de 83 con una varianza muestral de 16. Supondremos que las poblaciones son normales. ¿Podemos concluir con un nivel de significación  $\alpha = 0,1$  que las varianzas poblacionales de los materiales 1 y 2 son iguales?

## Solucionario

1. Es un problema de comparación de varianzas de dos poblaciones, ya que la precisión de un aparato viene dada por la magnitud de su desviación típica. Si las desviaciones de las dos poblaciones son iguales, entonces tendrán la misma precisión.

A partir de los datos de la tabla, calculamos las medias y las varianzas muestrales que necesitamos para realizar el ejercicio.

- Media de la muestra 1:  $\bar{x}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} = 0,32857$
- Varianza de la muestra 1:  $s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_1 - x_{1i})^2 = 1,46905$
- Media de la muestra 2:  $\bar{x}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i} = 0,900$
- Varianza de la muestra 2:  $s_2^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_2 - x_{2i})^2 = 6,36667$



A partir de ahora seguiremos el procedimiento establecido para hacer un contraste de igualdad de varianzas:

1. Expresamos las hipótesis:

- Hipótesis nula:  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ .
- Hipótesis alternativa:  $H_1 : (\sigma_1^2 < \sigma_2^2)$ . Establecemos esta hipótesis alternativa unilateral porque queremos saber si el primer aparato es más preciso que el segundo. Si lo es, entonces su varianza será menor.

2. Seleccionamos un nivel de significación  $\alpha = 0,05$  y calculamos el estadístico de contraste:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{1,469}{6,367} = 0,231$$

3. Observando las tablas, tenemos que:  $f_{0,95;6;6} = 4,28$ . Y aplicando la propiedad recíproca, tenemos que:

$$f_{0,05;6;6} = \frac{1}{f_{0,95;6;6}} = \frac{1}{4,28} = 0,234$$

Dado que  $0,231 < 0,234$ , rechazamos  $H_0$  y aceptamos que el primer aparato es más preciso que el segundo. También podemos llegar a esta misma conclusión a partir del  $p$ -valor. Con la ayuda del ordenador podemos calcular el  $p$ -valor:

$$P(F_{6,6} < 0,231) = 0,0489$$

Y dado que  $0,0489 < 0,05$ , rechazamos la hipótesis nula en favor de la hipótesis alternativa.

2. Sean  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  las varianzas poblacionales del deterioro de los materiales 1 y 2, respectivamente. Haremos un contraste de hipótesis sobre la igualdad de varianzas:

1. Establecemos las hipótesis nula y alternativa:

- Hipótesis nula:  $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- Hipótesis alternativa:  $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

2. Calculamos el estadístico de contraste:

$$\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{25}{16} = 1,562$$

3. Fijado el nivel de significación  $\alpha = 0,1$ , buscaremos el valor crítico de la cola derecha de la de la distribución  $F$  con  $m = 10 - 1 = 9$  y  $n = 13 - 1 = 12$  grados de libertad en el numerador y en el denominador, respectivamente, en la tabla correspondiente a  $\alpha/2 = 0,05$ :

$$f_{0,95;9;12} = 2,80$$

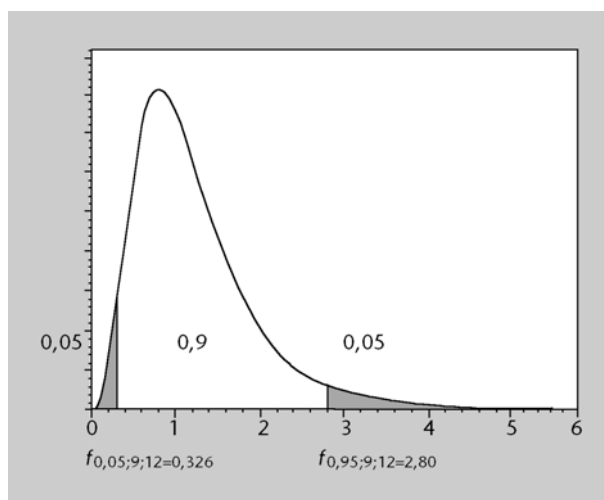
Para calcular el valor crítico correspondiente a la cola izquierda de la distribución, utilizamos la propiedad recíproca:

$$f_{0,05;9;12} = \frac{1}{f_{0,95;12;9}} = \frac{1}{3,07} = 0,326$$

Por tanto, rechazamos la hipótesis nula cuando el estadístico de contraste sea menor que 0,326 o mayor que 2,80. En este caso tenemos que el estadístico de contraste se encuentra entre estos dos valores:

$$0,326 < 1,562 < 2,8$$

Gráficamente:



Por tanto, no rechazamos la hipótesis nula. Y concluimos que no tenemos ninguna evidencia suficiente para pensar que las varianzas sean diferentes.

A esta misma conclusión podemos llegar calculando el  $p$ -valor con la ayuda del ordenador:

$$P = 2 \cdot P(F_{9,12} > 1,562) = 2 \cdot 0,2318 = 0,4636$$

Dado que  $0,4636 > 0,1$ , no rechazamos la hipótesis nula.