

Trabajo Práctico N°1: Conjuntos finitos e infinitos. Relaciones. Inducción. Lenguajes Formales

PARTE I: Conjuntos Finitos e Infinitos

1. Expresar por extensión los siguientes conjuntos:

- (a) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x = 6i, i \in \mathbb{N} \wedge 4i + 1 < 9\}$
- (b) $\{n \mid n = \frac{1}{5}m \text{ para algún } m \text{ en } \mathbb{N} \wedge m \text{ impar} < 6\}$
- (c) $\{n \mid n \in \mathbb{Z} \wedge n = n - 4\}$

2. Expresar por comprensión los siguientes conjuntos

- (a) $\{64, 128, 256, 512, 1024, 2048\}$
- (b) $\{1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$
- (c) El conjunto que contiene los números 1, 30, 50, ..., 100

3. Calcular los conjuntos potencia de los siguientes conjuntos:

- (a) $\{x, y, z\}$
- (b) $\{\emptyset, 4, 7\}$
- (c) $\{\}$
- (d) $\{\{w, z\}, t, \{z\}\}$
- (e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

4. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 5, 9\}$. Calcular las siguientes operaciones

- (a) $(A \cup B) - [(A \cap B) - \{5\}]$
- (b) $A - (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap B)$
- (c) 2^{A-B}
- (d) $2^B \cap 2^{\{9\}}$

5. Proporcione un ejemplo de dos conjuntos disjuntos, no vacíos, A y B tales que:

- (a) $|A| < |B| < |A \cup B|$
- (b) $|A| < |B| = |A \cup B|$

PARTE II: Relaciones e Inducción Matemática

1. Sean los conjuntos $A = \{2, 4, 6, 9, 10\}$

- (a) Una relación en $A \times A$
 - (b) Una función $A \rightarrow A$
 - (c) Una relación en $A \times A$ que no sea función. Si la que propuso en el inciso (a) no es función, piense otro ejemplo.
2. De ejemplos de relaciones que cumplan las siguientes premisas:
 - (a) Que sea simétrica y transitiva, pero no reflexiva.
 - (b) Que sea reflexiva y simétrica, pero no transitiva
 - (c) Que sea reflexiva y transitiva, pero no simétrica.
3. Dado el conjunto $A = \{(a, b), (b, c), (d, a), (a, c)\}$ obtener:
 - (a) La clausura transitiva de A.
 - (b) La clausura reflexiva y transitiva de A.
 - (c) La clausura simétrica de A.
4. Defina *Relación de Equivalencia* y *Clases de Equivalencia*
5. En el conjunto de los números naturales se establece la siguiente relación:
 - El cero está relacionado sólo con el cero.
 - El uno está relacionado sólo con el uno.
 - Un número se relaciona con otro sólo si ambos son primos.
 - Un número se relaciona con otro sólo si ambos son compuestos.
 - (a) ¿La relación forma una partición de los naturales?
 - (b) Si la respuesta anterior es afirmativa demuestre que es una relación de equivalencia.
6. Dado el conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se establece la relación entre dos elementos del conjunto $(a, b)R(m, n) \Leftrightarrow a \cdot n = m \cdot b$.
 - (a) Demuestre que la relación es de equivalencia.
 - (b) Encuentre la partición que produce la relación.
7. Probar por inducción en naturales las siguientes igualdades:
 - (a) $\sum_{i=0}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
 - (b) $\sum_{i=0}^n i^3 = \left(\sum_{i=0}^n i \right)^2$
8. Muestre que el conjunto de los números naturales pares tiene la misma cardinalidad que el conjunto de números naturales impares.
9. Muestre que el conjunto de todos los números reales es incontable.

10. Dado un conjunto A , demuestre que $|2^A| = 2^{|A|}$ (El cardinal del conjunto potencia de A es igual a 2 elevado al cardinal de A)
11. Presente una lista de todos los elementos de $2^{\{x,y\}}$. Luego genere la lista de todos los elementos de $2^{2^{\{x,y\}}}$. Muestre que $|\{x,y\}| \leq |2^{\{x,y\}}| \leq |2^{2^{\{x,y\}}}|$

PARTE III: Lenguajes Formales

1. Teniendo en cuenta el concepto de Alfabeto, se pide:
 - (a) Defina alfabeto.
 - (b) ¿Los elementos de los siguientes conjuntos pueden constituir símbolos de un alfabeto?
 - i. $\{a,b,\dots,z,A,B,\dots,Z\}$.
 - ii. $\{1,1,2,3,5,8,13,\dots\}$.
 - iii. $\{\text{Class, Object, Method, Attribute, Message}\}$.
 - iv. $\{\#, \text{€}, \%, \&, /, !\}$.
2. Teniendo en cuenta el concepto de cadena, se pide:
 - (a) Defina Cadena, longitud de una cadena. Brinde ejemplos de cada concepto
 - (b) Defina Prefijo y Sufijo
 - (c) Dada la cadena “Avanzar” conteste los siguientes ítems:
 - i. ¿Cuál es el conjunto más pequeño que puede ser considerado alfabeto?
 - ii. Indique cuales son los prefijos de la cadena, señalando cuales son propios
 - iii. Haga lo mismo para los sufijos
 - (d) Defina subcadena y obtener las subcadenas de longitud mayor o igual a 4, en caso de ser posible, de las siguientes cadenas:
 - i. Oro
 - ii. Vinería
 - iii. Literatura
3. Teniendo en cuenta el concepto de lenguaje, se pide:
 - (a) Defina Lenguaje, Lenguaje Vacío
 - (b) Determine si los siguientes conjuntos, pueden ser considerados lenguajes:
 - i. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
 - ii. $\mathbb{X} = \{\lambda, |, ||, |||, \dots\}$.

En caso de respuesta afirmativa explique cual sería el alfabeto y cuales las reglas de formación.

4. Sobre el alfabeto $\Sigma = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ brinde ejemplos de un lenguaje:
 - (a) Finito por extensión.
 - (b) Finito por comprensión.

- (c) Infinito, distinto de Σ^* .
- 5. Defina Potencia del lenguaje, cerradura de Kleene. Brinde ejemplos para cada concepto.
- 6. Dados los lenguajes $L_1 = \{\varepsilon\}$, $L_2 = \{aa, b, bd\}$ y $L_3 = \{\}$
 - (a) Muestre $L_1 \cdot L_2$.
 - (b) Muestre $L_1^* \cup (L_2 \cap L_3)$.
 - (c) Muestre $(L_1 \cap L_2)^*$.