PROBLEMA 2

- $\bar{Y}$ → promedio muestral de una v.a
- variable aleatoria con media μ y varianza σ^2
- dos estimadores de μ → W_1, W_2

- $W_1 = \frac{n-1}{n}\bar{Y}$

- $W_2 = \frac{\bar{Y}}{2}$

2a) $\text{sesgo}(\hat{\mu}) = E(\hat{\mu}) - \mu$

$$\text{sesgo}(W_1) = E(W_1) - \mu = E\left(\frac{n-1}{n}\bar{Y}\right) - \mu = \frac{n-1}{n}E(\bar{Y}) - \mu =$$

$$= \frac{n-1}{n}\mu - \mu = \mu\left[\frac{n-1}{n} - 1\right] = \mu\left[\frac{n-1-n}{n}\right] =$$

$$\mu\left[\frac{-1}{n}\right]$$

- $\boxed{\text{sesgo}(W_1) = \mu\left[\frac{-1}{n}\right]}$ → $\neq 0$ → sesgado para estimar μ

$$\lim_{n\to+\infty} \text{sesgo}(W_1) = \mu\left[\frac{-1}{n}\right] = 0$$

- El sesgo tiende a cero cuando n tiende a infinito

$$\text{sesgo}(W_2) = E(W_2) - \mu = E\left(\frac{\bar{Y}}{2}\right) - \mu = \frac{1}{2}E(\bar{Y}) - \mu = \frac{1}{2}\mu - \mu =$$

- $\boxed{\text{sesgo}(W_2) = -\frac{1}{2}\mu}$ → $\neq 0$ → W_2 es sesgado para estimar μ

$$\lim_{n\to+\infty} \text{sesgo}(W_2) = -\frac{1}{2}\mu = \frac{-1}{2\mu}$$ → NO se modificó, no depende de n

2b)

Un estimador es consistente si:

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Por Tchebychev: $P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(\hat{\theta}_n)}{\varepsilon^2}$

$$V(W_1) = V\left(\frac{n-1}{n}\bar{Y}\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2} V(\bar{Y}) = \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{\theta^2}{n} = \frac{(n-1)^2 \theta^2}{n^3}$$

• como es una probabilidad $\to \leq 1$

$$1 - \frac{(n-1)^2\theta^2}{n^3} \leq P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| < \varepsilon) \leq 1$$

aplico $\lim_{n\to+\infty}$

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - \underbrace{\frac{(n-1)^2\theta^2}{\varepsilon^2 n^3}}_{\sim \frac{n^2}{n^3} \sim \frac{1}{n} \sim 0} \leq \lim_{n\to+\infty} P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| < \varepsilon) \leq \lim_{n\to+\infty} 1$$

$$1 \leq \lim_{n\to+\infty} P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| < \varepsilon) \leq 1$$

ES CONSISTENTE W_1

• Consistente en media cuadratica:

$$\lim_{n\to+\infty} ECM(\hat{\theta}_n) = 0$$

$$ECM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) + [sesgo(\hat{\theta})]^2$$

$$ECM(W_1) = \frac{(n-1)^2\theta^2}{n^3} + \left[\mu\left[\frac{-1}{n}\right]\right]^2$$

$$\lim_{n\to+\infty} ECM(W_1) = 0$$

TEOREMA:

$\{\hat{\theta}_n\}$ es consistente en media cuadratica para estimar $\theta \rightarrow \{\hat{\theta}_n\}$ es consistente para estimar θ

$\rightarrow$ W_1 es consistente en media cuadratica $\rightarrow$ es consistente

$\boxed{W_2}$

$$V(W_2) = V\left(\frac{\bar{Y}}{2}\right) = \frac{1}{4} V(\bar{Y}) = \frac{1}{4}\frac{\theta^2}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 - \underbrace{\frac{\theta^2}{\varepsilon^2 4n}}_{\sim 0} \leq \lim_{n \to +\infty} P(|\hat{\theta}_n - E(\hat{\theta}_n)| < \varepsilon) \leq \lim_{n \to +\infty} 1$$

$$1 \leq \lim_{n \to +\infty} P(|\hat{\theta}_1 - E(\hat{\theta}_1)| < \varepsilon) \leq 1$$

W_2 es consistente

Hicamos esta parte con los apuntes de Estadistica I.

Luego lo hicamos de otra manera diferente viendo el libro recomendado por la letra

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} W_1 = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\bar{Y} = \frac{\cancel{n}\bar{Y}}{\cancel{n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\bar{Y}) = \mu$$

$\Rightarrow W_1$ es consistente

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} W_2 = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\bar{Y}}{2} \Rightarrow \lim \frac{\bar{Y}}{2} = \frac{\mu}{2} \neq \mu \Rightarrow W_2 \text{ no es consistente}$$

2c)

$$V(W1) = V\left(\frac{n-1}{n}\bar{V}\right) = \frac{(n-1)^2}{n^2} V(\bar{V})$$

$$= \frac{(n-1)^2}{n^2} \frac{\theta^2}{n} = \boxed{\frac{(n-1)^2 \theta^2}{n^3}}$$

$$V(W2) = V\left(\frac{\bar{V}}{2}\right) = \frac{1}{4} V(\bar{V}) = \boxed{\frac{1}{4}\frac{\theta^2}{n}}$$

Scanned with CamScanner

(3) $E(GPA/SAT) = 0.7 + 0.001SAT$

a) $E(GPA/SAT=800) = 1,5$

$E(GPA/SAT=1400) = 2,1$

Podemos ver como a mayor SAT se espera un mayor GPA. Están correlacionados positivamente

b) $E(SAT) = 1100 \Rightarrow E(GPA) = 0,7 + 0,001(1100) = 1,8$.

$E[E(Y/x)] = E(Y)$ → prop CE.4.