Gonzalo Avellanal, Juan Briozzo, Nicolás Stosico.

Problema 2

$Y \sim F(\mu, \theta^2)$
dist. cualquera.

2 estimadores de μ : $W_1 = \frac{n-1}{n} \cdot \bar{Y}$ $\quad W_2 = \frac{\bar{Y}}{2}$

2a) Demuestre que W_1 y W_2 son dos estimadores sesgados de μ y encuentre sus sesgos. ¿Qué sucede con los sesgos a medida que $n \to \infty$?

$E(W_1) = E\left(\frac{n-1}{n}\bar{Y}\right) = \frac{n-1}{n} E(\bar{Y}) = \frac{n-1}{n}\mu$ ⇒ El estimador es sesgado ya que $E(W_1) \neq \mu$.

$\text{sesgo}(W_1) = E(W_1) - \mu = \frac{n-1}{n}\mu - \mu = \frac{(n-1)\mu - n\mu}{n} = \frac{n\mu - \mu - n\mu}{n} = \frac{-\mu}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

⇒ El sesgo tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

$E(W_2) = E\left(\frac{\bar{Y}}{2}\right) = \frac{1}{2}E(\bar{Y}) = \frac{1}{2}\mu$ ⇒ El estimador es sesgado ya que $E(W_2) \neq \mu$.

$\text{sesgo}(W_2) = E(W_2) - \mu = \frac{1}{2}\mu - \mu = \frac{\mu - 2\mu}{2} = \frac{-\mu}{2}$ si $n \to \infty$ sesgo no cambia.

2b. Encuentre los límites de probabilidad de W_1 y W_2

2c. Encuentre $\text{var}(W_1)$ y $\text{var}(W_2)$.

$\text{var}(W_1) = \text{var}\left(\frac{n-1}{n}\bar{Y}\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \text{var}(\bar{Y}) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{\theta^2}{n} = \frac{(n-1)^2\theta^2}{n^3}$.

$\text{var}(W_2) = \text{var}\left(\frac{1}{2}\bar{Y}\right) = \frac{1}{2^2}\text{var}(\bar{Y}) = \frac{1}{4}\frac{\theta^2}{n} = \frac{\theta^2}{4n}$.

2b) $\text{plim}\, W_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n}\bar{Y} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\bar{Y} = \bar{Y}$.

$\text{plim}\, W_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{\bar{Y}}{2} = \frac{\bar{Y}}{2}$

2.b)

Consistencia. Sea W_n un estimador de θ basado en una muestra $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ del tamaño n.

Entonces, W_n es un **estimador consistente** de θ si para toda $\varepsilon > 0$,

$$P(|W_n - \theta| > \varepsilon) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.$$

Si W_n no es consistente para θ, entonces se dice que es **inconsistente**.

Cuando W_n es consistente, también se dice que θ es el **límite de probabilidad** de W_n, escrito como $\text{plim}(W_n) = \theta$.

Ley de los grandes números. Sea $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas con media μ. Entonces,

$$\text{plim}(\bar{Y}_n) = \mu.$$

La ley de los grandes números significa que, si interesa estimar el promedio poblacional μ, es posible aproximarse arbitrariamente a μ si se elige una muestra suficientemente grande. Este resultado fundamental se puede combinar con las propiedades básicas de los plim para mostrar que estimadores muy complejos son consistentes.

Propiedad PLIM 2: Si $\text{plim}(T_n) = \alpha$ y $\text{plim}(U_n) = \beta$, entonces

i) $\text{plim}(T_n + U_n) = \alpha + \beta$.

ii) $\text{plim}(T_n U_n) = \alpha\beta$.

iii) $\text{plim}(T_n / U_n) = \alpha / \beta$, siempre que $\beta \neq 0$.

$$\Rightarrow \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, W_1 = \underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, \frac{n-1}{n}\bar{Y} = \frac{\cancel{n}\bar{Y}}{\cancel{n}} = \bar{Y} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\bar{Y}) = \mu$$

$\Rightarrow W_1$ es consistente.

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} W_2 = \operatorname*{plim}_{n\to\infty} \frac{\bar{Y}}{2} \Rightarrow \lim \frac{\bar{Y}}{2} = \frac{\mu}{2} \neq \mu \Rightarrow W_2 \text{ no es consistente.}$$

Problema 3

$E(GPA / SAT) = 0.7 + 0,001\, SAT$

3a) Encuentre la esperanza de GPA cuando SAT = 800.

$E(GPA / SAT = 800) = 0,7 + 0,001(800) = 1,5.$

$E(GPA / SAT = 1.400) = 0,7 + 0,001(1400) = 2,1$

Cuando SAT varia en la proporción $\frac{800}{1400} = 0,57$ la esperanza de GPA condicional a SAT varia en la proporción $\frac{1,5}{2,1} = 0,714$.

→ La esperanza condicional de GPA depende positivamente de SAT.

b) Si el SAT promedio de los alumnos de esta universidad es 1.100 ¿cuál es el GPA?

Propiedad: $E[E(Y/X)] = E(Y)$.

$E[E(GPA / SAT)] = E[0,7 + 0,001\, SAT] = 0,7 + 0,001\, E(SAT)$

$= 0,7 + 0,001(1100) = \boxed{1,8}.$