Rapport
Projet Phoenix

Amghar Sami
Gueguen Thomas
Hopin Manon
Okon N'Guessan
Taloub Lucas

09 avril 2023

Table des matières

1 Phoenix

Les produits Autocallables sont des produits structurés, offrant des rendements fixes intéressants et la possibilité de remboursement anticipé du capital. Au vu des niveaux extrênement bas des taux d'intérêt et des incertitudes régant sur les marchés, beaucoup d'investisseurs sont attirés par la combinaison entre rendements fixes bien supérieurs aux taux des marchés et une certaine forme de protection du capital. Nous allons nous intéresser particulièrement à un type de produit dérivé, nommé Phoenix.
Dans cette partie, nous allons décrire l'option Phoenix :

— expliciter son pay off et détailler ses avantages et risques,
— trouver le prix de l'option et tracer le graphe de prix.

Nous allons étudier les sensibilités du produit, par rapport à ses paramètres, puis par rapport aux paramètres du marché. Aussi, nous allons calculer la Value At Risk de ce produit.

2 Explicitation du Pay off de l'option Phoenix

Légende :

— BPh : Barrière Phoenix
— By : Barrière Yéti
— Bput : Barrière Put
— π_0 : Prix du Nominal
— T : Maturité
— Δt : Fréquence d'observation
— Cph : Coupon Phoenix
— Cy : Coupon Yéti
— K : Strike Put Down and in
— S_0 : Spot
— δ : Volatilité
— r : Taux sans risque annuel

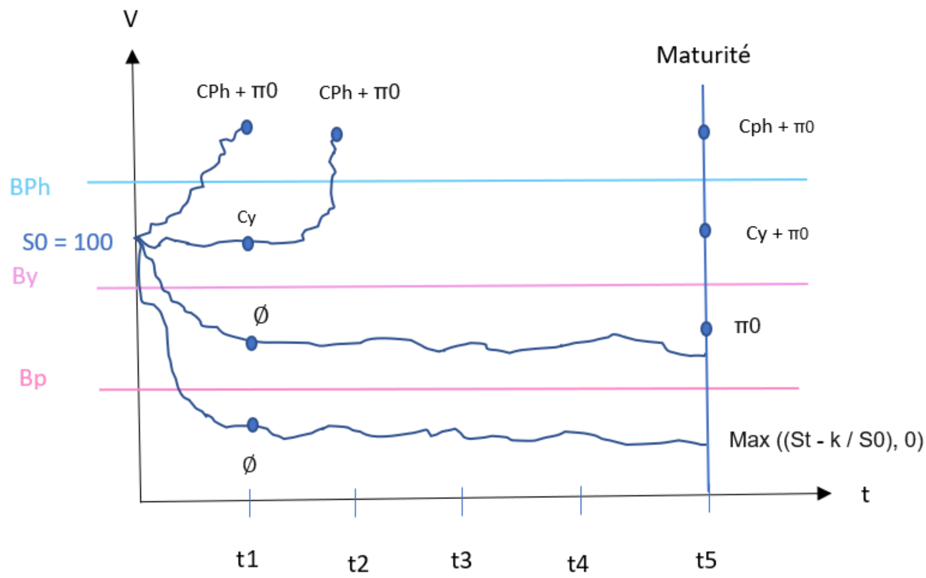


Figure 1 – Graphe d'explication

Explications du graphe :

Pour les dates t1, t2, t3 et t4 :

- Si l'actif passe au dessus de Bph, l'option est rappelée et finie, on récupère donc Cph + π_0 et un coupon (si déjà récupéré avant) ;
- Si l'actif est entre By et Bph, il récupère un coupon et il continue ;
- Si l'actif passe en dessous de By, il ne gagne rien mais il continue.

Pour la date t5 (Maturité) :
On distingue 4 cas différents, pour les 4 cas, l'actif va forcément s'arrêter étant donné qu'il s'agit de la dernière date.

- Si l'actif passe au dessus de de Bph, il récupère Cph + $\pi 0$;
- Si l'actif est entre By et Bph, il récupère Cy + π_0 ;
- Si l'actif est entre By et Bp,il récupère π_0
- Si l'actif passe en dessous de Bp, tout dépend du type du contrat choisi au préalable, soit il récupère $max(\frac{k-ST}{S0}, 0)$, soit il récupère le rendement $\frac{ST}{S0}$

Remarque :
En moyenne, on gagne la valeur nominale ou plus. Lorsque l'actif passe au dessus de Bph, l'option est rappelée et finie, c'est ce qui est traduit à chaque fois par un return dans le code du Pay off de l'option Phoenix.

3 Prix de l'option Phoenix

```
def PricingPhoenix(S0,r,sigma,M0,T,B1,B2,B3,C1,C2,Cas,Poff,Nmc):
  gain = 0
  for i in range(0,Nmc):
    gain = gain + PayOffPhoenixActualiser(S0,r,sigma,M0,T,B1,B2,B3,C1,C2,Cas,Poff)
  prix = gain/Nmc
  return(prix)

PricingPhoenix(100,0.02,0.3,1,5,1.2,0.8,0.7,0.1,0.05,1,1,1000)

1.0333884869055203
```

FIGURE 2 – Pricing

Prix de l'option = π_0 + α* π_0 = 1 + 0,0333*1 = 1,0333 €

Cas payoff du Put max ($\frac{K-ST}{S_0}$, 0) pour barrière fixe :

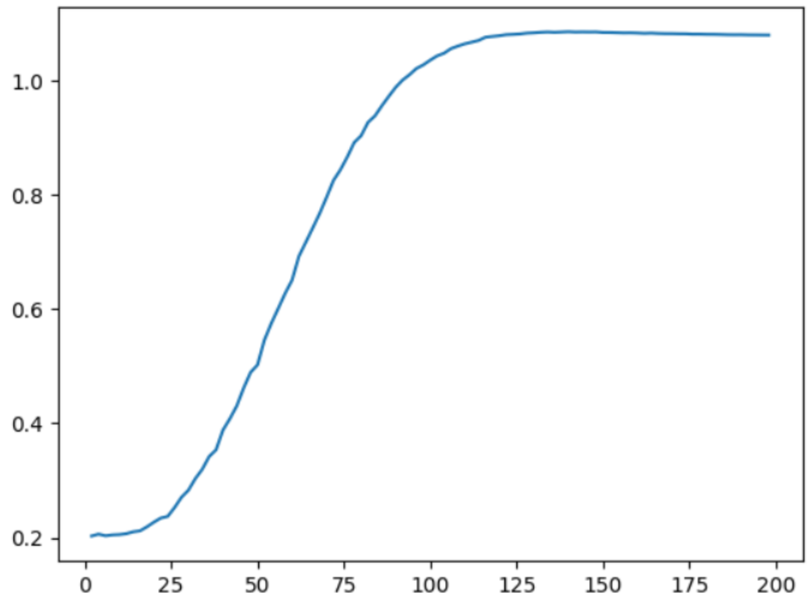


Figure 3 – Graphe du prix en fonction de S_0

Interprétation :
Plus S0 est grand, plus le prix de l'option a tendance à converger en moyenne vers (π_0 + Cph) e^{-r*1} car on prend un temps $t_1 = 1$ an. (t_1 : première date d'observation)
De la même manière, plus S_0 est petit, plus le prix est petit (car faible valeur de volatilité).

Cas du payoff du Put ST/S_0 pour barrière fixe :

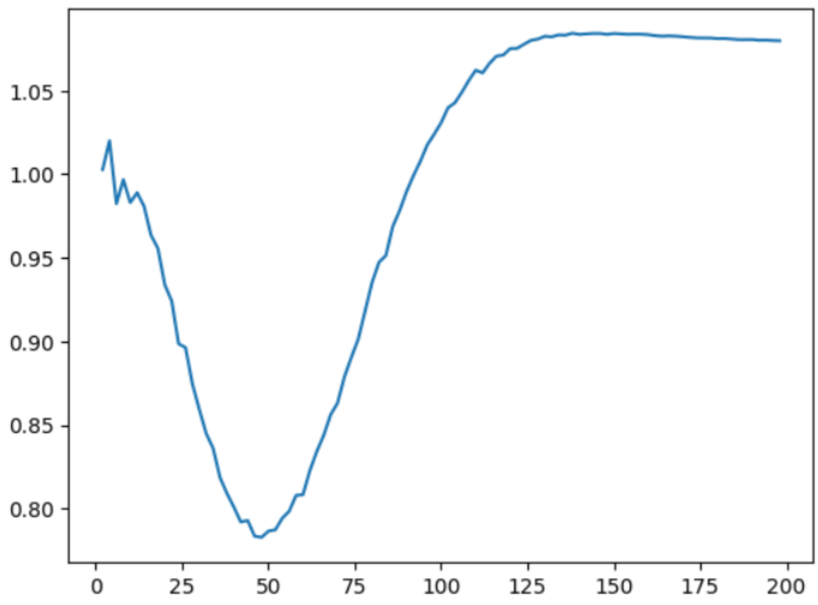


FIGURE 4 – Graphe du prix en fonction de S0

Interprétation :
On remarque un pic vers le bas, cela correspond au cas où le prix tend vers S_0, et dans ce cas il y a beaucoup de chance que l'actif exerce, là où il récupère $\frac{S_T}{S_0}$. Par rapport au graphe précédent, lorsque le prix tend vers S_0, il récupère $max(\frac{ST-k}{S0}, 0)$ supérieur à $\frac{S_T}{S_0}$.

Cas pay off du Put max (K - ST, 0)/S_0 pour barrière en fonction de S_0 :

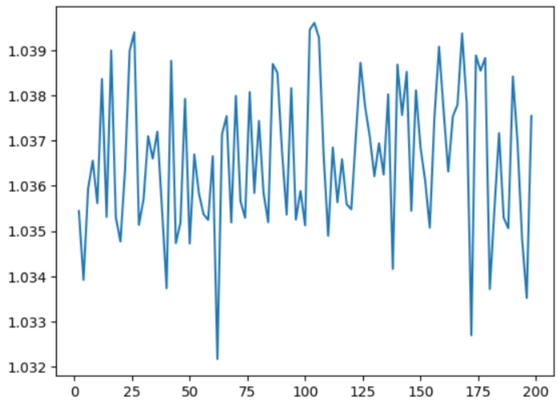


FIGURE 5 – Graphe du prix en fonction de S0

Interprétation :
Cas si S_0 augmente, les barrières augmentent proportionnellement donc la probabilité de franchir une des barrières et de faire un gain est la même pour tout S_0.

Cas du pay off du Put ST/S_0 pour barrière en fonction de S_0 :

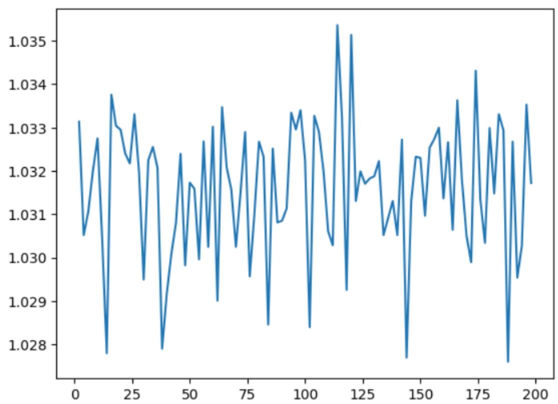


FIGURE 6 – Graphe du prix en fonction de S0

Interprétation :
Le processus prix (le portefeuille) actualise est une martingale et le prix de l'option est égale à l'éspérance du payoff ici le payoff est le même à chaque fois car la probabilité change pas (cf juste au dessus) donc le prix du de l'option a t=0 qu'on va noté P_0 = E[Payoff] = Payoff (car constant).

4 Sensibilité aux paramètres de l'option Phoenix

4.1 Sensibilité aux Coupons

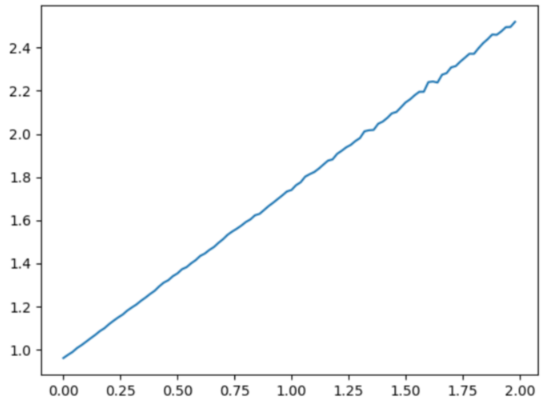


FIGURE 7 – Graphe du prix en fonction de Cph

Interprétation :
A S_0 fixe, la relation entre Cph et le prix d'option est une droite affine, elle varie proportionnellement car s'il franchit la barrière, le gain sera de plus en plus grand.

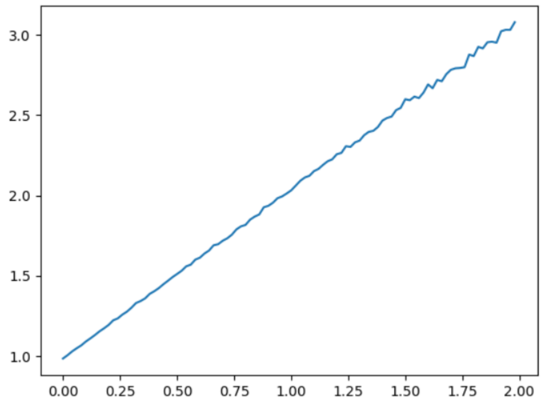


FIGURE 8 – Graphe du prix en fonction de Cy

Interprétation :
A S_0 fixe, la relation entre Cy et le prix d'option est une droite affine, elle varie proportionnellement car s'il franchit la barrière, le gain sera de plus en plus grand.

4.2 Sensibilité aux barrières

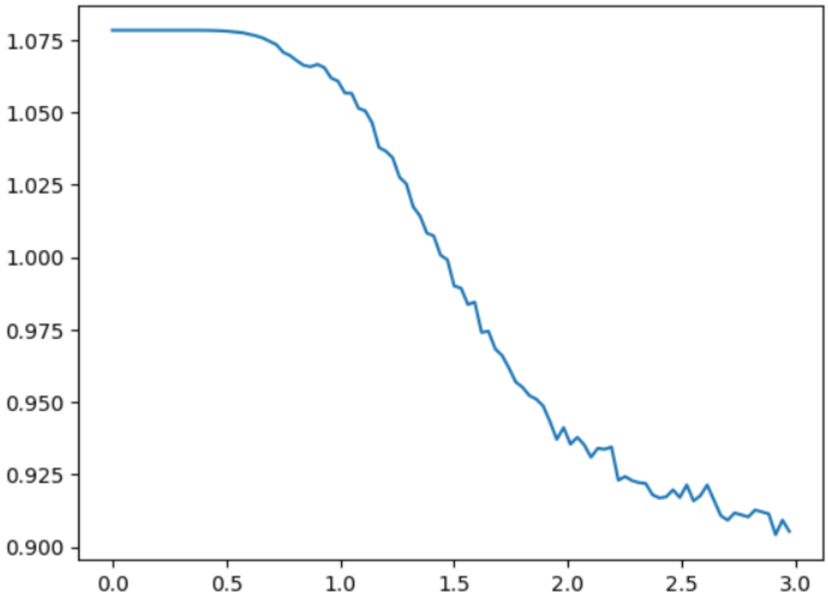


FIGURE 9 – Graphe du prix en fonction de BPh

Interprétation :
Ici, lorsque la barrière s'éloigne, le prix a moins de chance de la toucher.

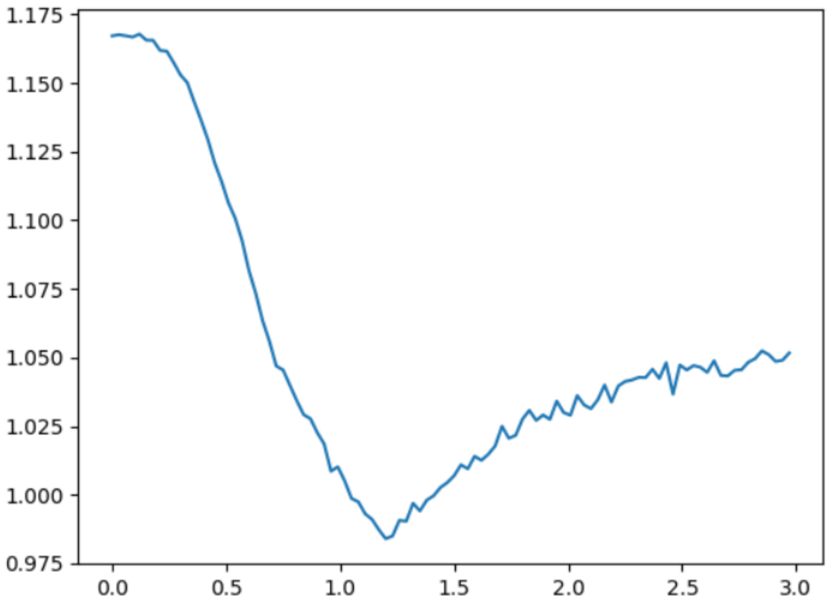


FIGURE 10 – Graphe du prix en fonction de By

Interprétation :
Lorsque By est nulle, le prix de l'option est toujours supérieure à By et inférieure à BPh. On remarque que le point le plus bas de la courbe correspond au point où By est le plus proche de S_0 car il la franchira (barrière By) avant t1 puisqu'il sera collé et récupérera presque jamais les coupons Cy.

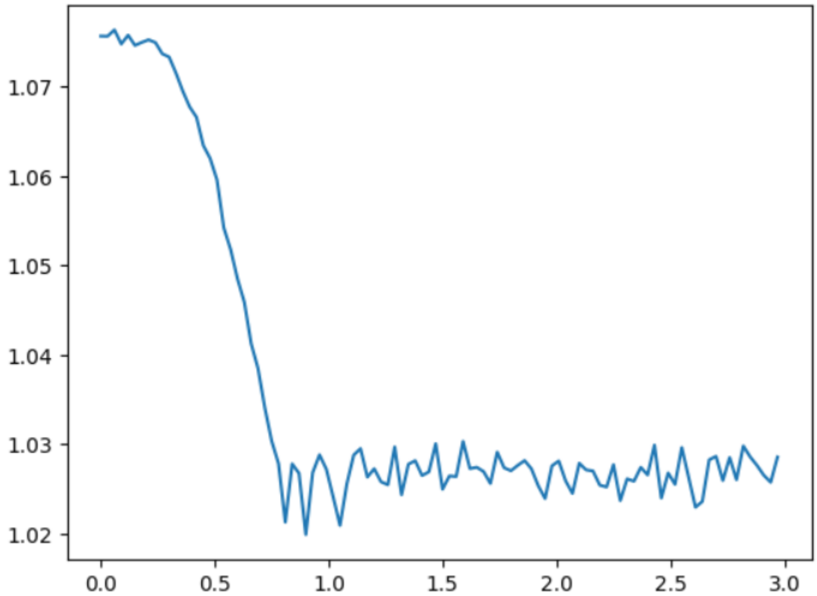


FIGURE 11 – Graphe du prix en fonction de BP

Interprétation :
Lorsque la valeur de la barrière est petite, on obtient un prix égal à notre Pay off normal (ici égal à 1.033). A partir d'une valeur de barrière supérieure à 1, on remarque des perturbations de la courbe qui s'explique par le fait que Bp devient supérieur à S_0. Or, dans notre contrat cela n'est pas possible puisque l'on doit avoir une barrière Down In Put.

4.3 Sensibilité aux paramètres du marché

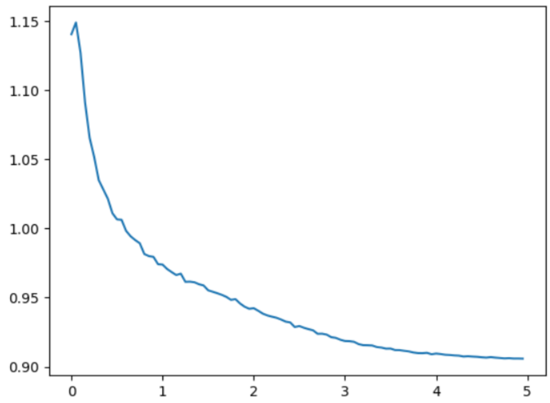


FIGURE 12 – Graphe du prix en fonction de Sigma pour barrière fixe

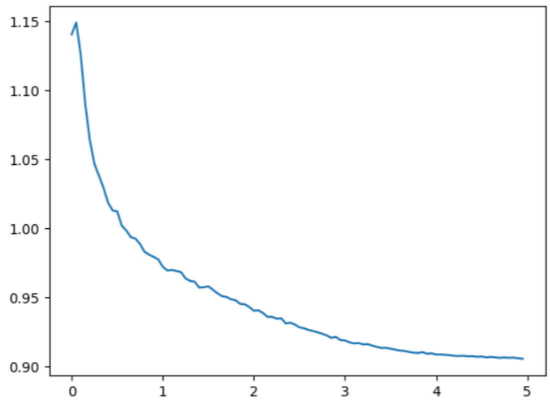


FIGURE 13 – Graphe du prix en fonction de sigma pour barrière en fonction de S_0

Interprétation :
Le prix de l'option varie inversement proportionnel par rapport à Sigma. Il faudrait plutôt un sigma très petit (très peu volatil).
On obtient le même graphe pour le cas où la barrière est en fonction de S_0 : il n'y a aucune incidence en fonction du type de barrière.

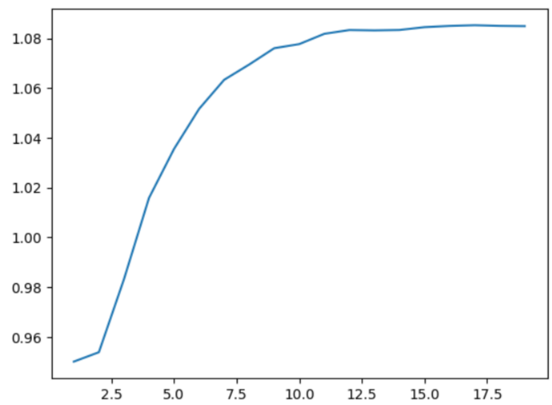


FIGURE 14 – Graphe du prix en fonction de T pour barrière fixe

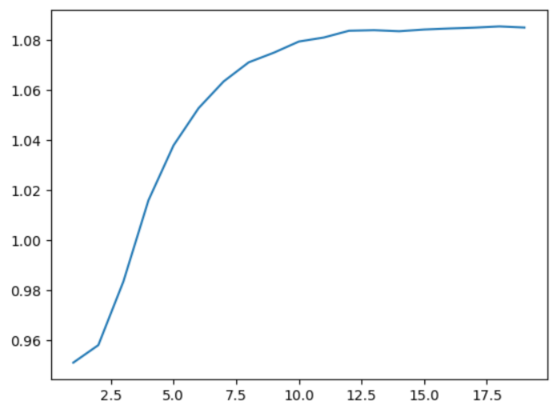


FIGURE 15 – Graphe du prix en fonction de T pour barrière en fonction de S_0

Interprétation :

Plus le temps est grand, plus l'option gagne de coupons. On obtient le même graphe dans le cas où la barrière est en fonction de S_0.

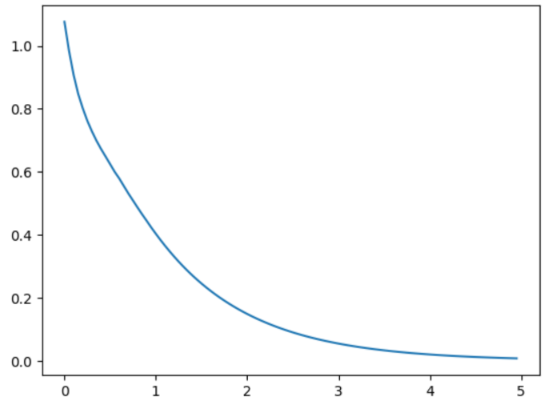


FIGURE 16 – Graphe du prix en fonction de r pour barrière fixe

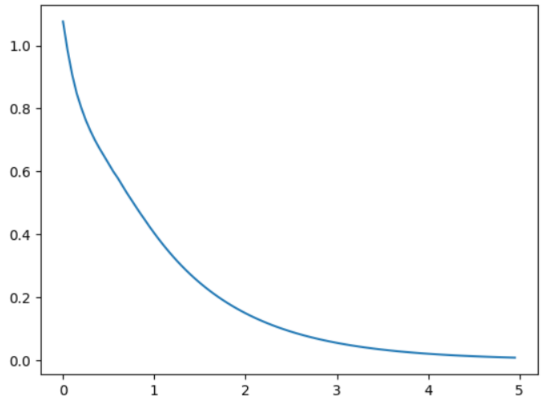


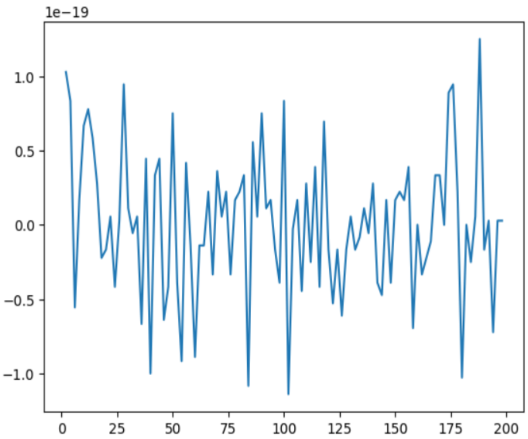
FIGURE 17 – Graphe du prix en fonction de r en fonction de S_0

Interprétation :

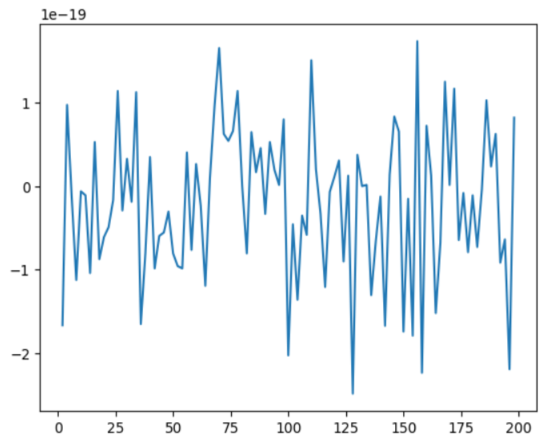
On obtient le même graphe dans le cas où la barrière est en fonction de S0. Le prix de la fonction varie inversement proportionnel en fonction du taux d'intérêt, ce qui est logique car ce dernier intervient dans la formule du Pay off sous la forme de e^{-r*T}. Donc plus r est grand, plus e^{-r*T}est petit, et plus le rapport en le Pay off et le Pay off actualisé est petit.

On obtient le même graphe dans le cas où la barrière est en fonction de S_0.

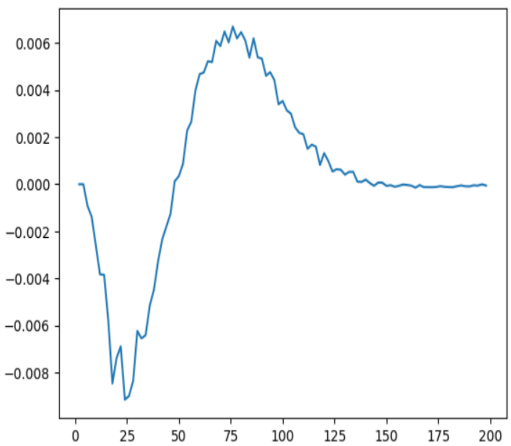
Figure 18 – Graphes de Delta en fonction de S_0



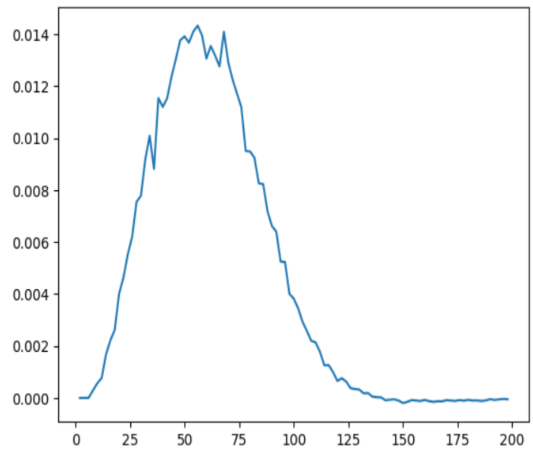
(a)



(b)



(c)



(d)

Légende :

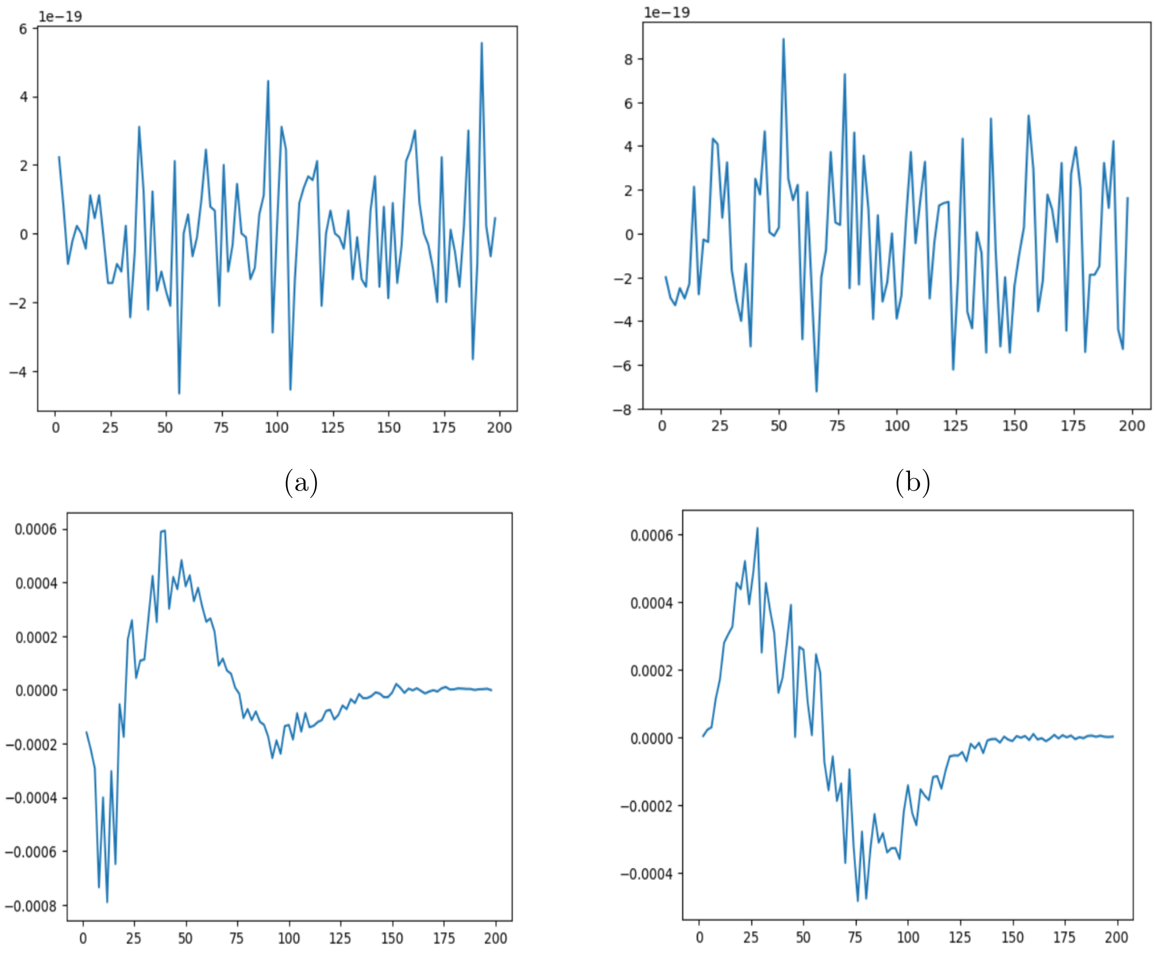
(a) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière en fonction de S_0
(b) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière en fonction de S_0
(c) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière fixe
(d) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière fixe

Interprétation :

On remarque que le prix est de l'ordre de 1*e-19, autrement dit, il est presque nul, ce qui s'explique par le fait que quand la barrière est en fonction de S_0, le prix est constant, donc sa dérivée est nulle.

Pour le cas 2 du Pay off, on obtient le même graphe et la même interprétation.

FIGURE 19 – Graphes de Gamma en fonction de S_0



(a) (b) (c) (d)

Légende :

(a) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière en fonction de S_0

(b) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière en fonction de S_0

(c) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière fixe

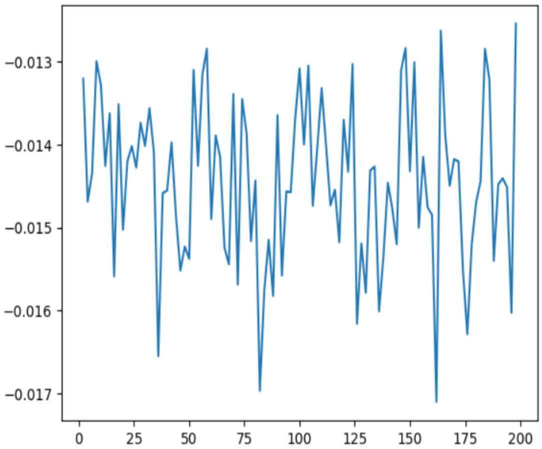
(d) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière fixe

Interprétation :

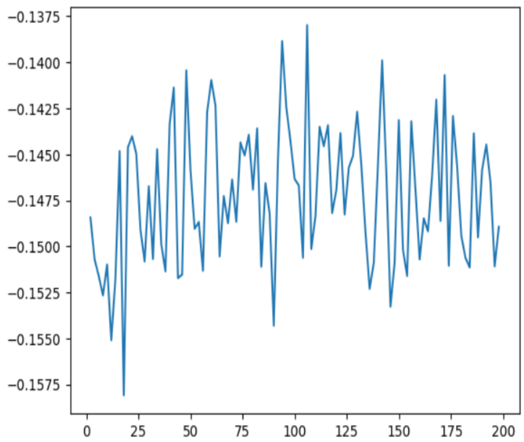
Gamma représente comment évolue le prix de l'option en fonction de l'actif. Si Gamma est positif, ils sont corrélés positivement, et inversement. Dans notre cas, on remarque que

Gamma est nulle, ce qui est logique car dérivée seconde d'une constante.

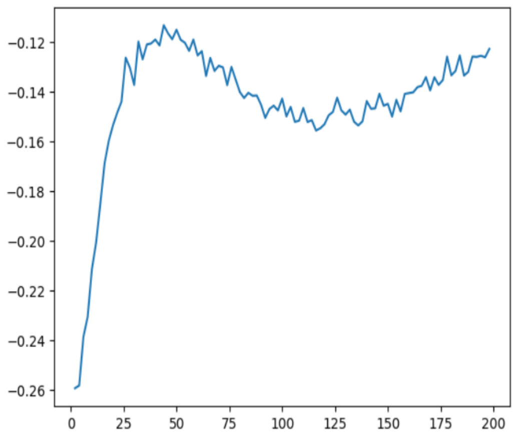
FIGURE 20 – Graphe du Vega en fonction de S_0



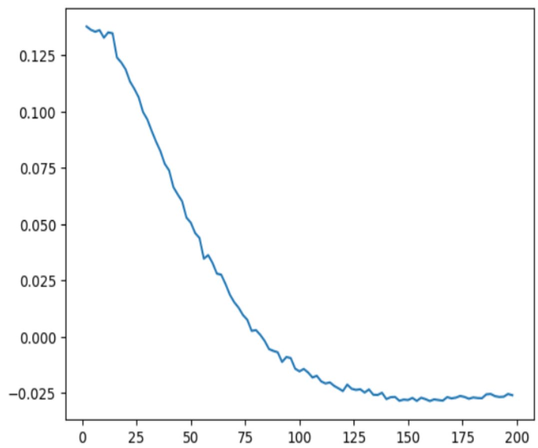
(a)



(b)



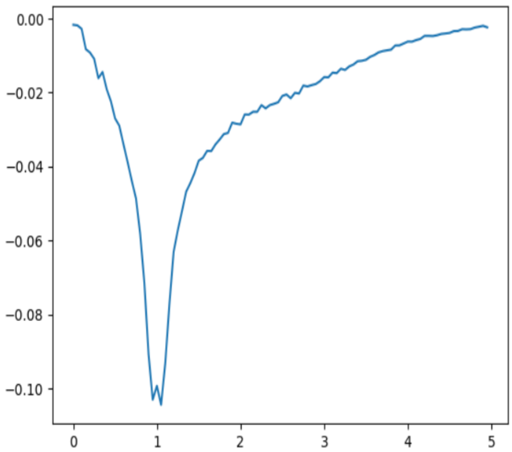
(c)



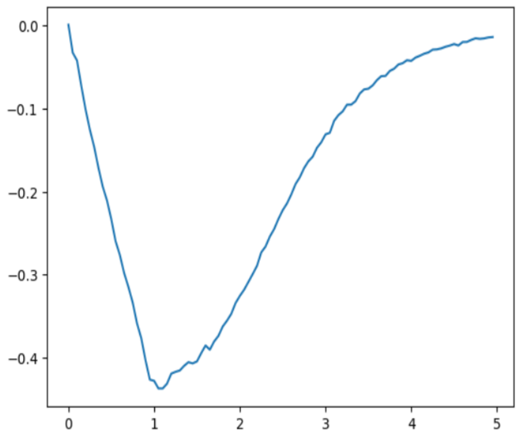
(d)

Légende :
(a) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière en fonction de S_0
(b) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière en fonction de S_0
(c) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière fixe
(d) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière fixe

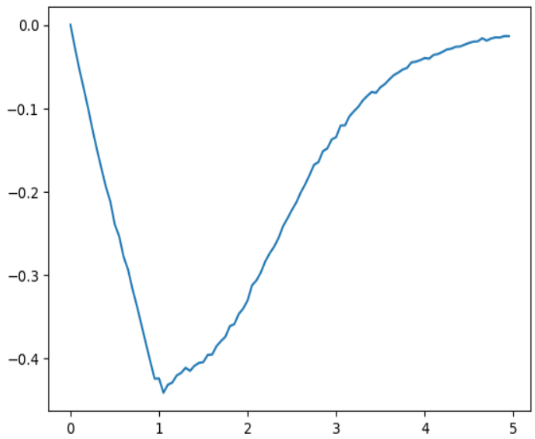
FIGURE 21 – Graphe de Vega en fonction de Sigma



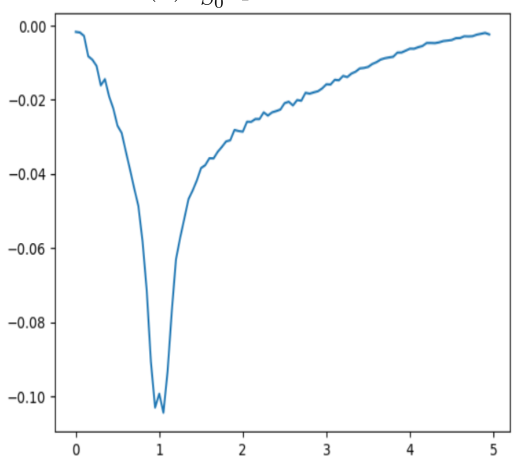
(a) Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ pour barrière fixe



(b) $\frac{ST}{S_0}$ pour barrière fixe



(c) $\frac{ST}{S_0}$ en fonction de S_0



(d) Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ en fonction de S_0

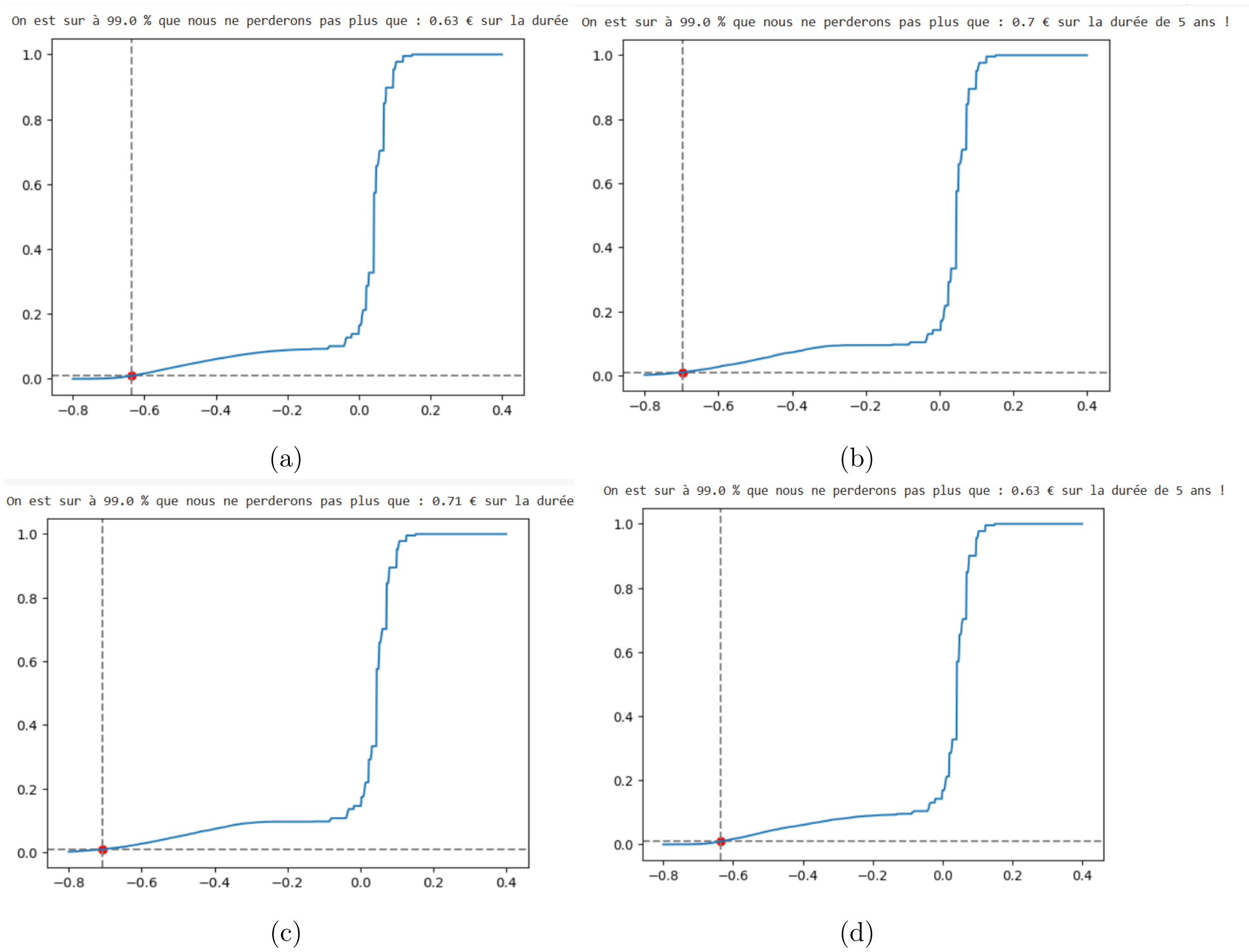
Légende :

(a) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière fixe
(b) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière fixe
(c) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière en fonction de S_0
(d) : Cas où le pay off du Max $(\frac{K-ST}{S_0}, 0)$ et barrière en fonction de S_0

5 Value at Risk

La VaR répond à l' affirmation suivante : " Nous sommes certains à la probabilité 1 - $\alpha = 90\%$ que nous n'allons pas perdre plus de VaR euros sur T prochains jours".

Figure 22 – Fonction de répartition de la perte



Légende :
(a) : Cas où le pay off du Max ($\frac{K-ST}{S_0}$, 0) et barrière fixe
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.63 € sur la durée de 5 ans!
(b) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière fixe
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.7 € sur la durée de 5 ans!

(c) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière en fonction de S_0
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.71 € sur la durée de 5 ans !
(d) : Cas où le pay off du Max ($\frac{K-ST}{S_0}$, 0) et barrière en fonction de S_0
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.63 € sur la durée de 5 ans !

5.1 Vérification par l'algorithme d'ordonnement

```python
def VaROrdonnemment(S0,r,sigma,M0,T,B1,B2,B3,C1,C2,Cas,Poff,Nmc, alpha):
  X = []
  X = VaR(S0,r,sigma,M0,T,B1,B2,B3,C1,C2,Cas,Poff,Nmc)
  X.sort()
  indice = int(Nmc*alpha)
  print("On est sur à " + str(100*(1-alpha)) + " % que nous ne perderons pas plus que : " + str(round(abs(X[indice]),2)) + " € sur la durée de "  + str(T)  + " ans !")


VaROrdonnemment(100,0.02,0.3,1,5,1.2,0.8,0.7,0.1,0.05,1,1,10000,0.01)
```

FIGURE 23 – VaR ordonnement

<u>On obtient :</u>
(a) : Cas où le pay off du Max ($\frac{K-ST}{S_0}$, 0) et barrière fixe
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.64 € sur la durée de 5 ans !
(b) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière fixe
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.7 € sur la durée de 5 ans !
(c) : Cas où le pay off du $\frac{ST}{S_0}$ et barrière en fonction de S_0
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.69 € sur la durée de 5 ans !
(d) : Cas où le pay off du Max ($\frac{K-ST}{S_0}$, 0) et barrière en fonction de S_0
On est sur à 99.0 % que nous ne perderons pas plus que : 0.62 € sur la durée de 5 ans !

Le cas le moins risqué est celui ayant la plus petite VaR, soit le cas où le pay off du Max ($\frac{K-ST}{S_0}$, 0) et barrière en fonction de S_0.