Projet Mogpl
Optimisation robuste dans l'incertain total

Partie 1

1.1. On traite la linéarisation du critère maximun dans le contexte de la sélection de projets sous incertitude. On cherche la solution dont l'évaluation dans le pire scénario est la meilleure possible.

Considérons l'ensemble de $p = 10$ projets, caractérisés comme suit par des coût (c) et deux variables d'utilités (s^1 et s^2) :

$$c = (60, 10, 15, 20, 25, 20, 5, 15, 20, 60)$$
$$s^1 = (70, 18, 16, 14, 12, 10, 8, 6, 4, 2)$$
$$s^2 = (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 70)$$

Dans ce contexte, une solution réalisable est caractérisée par un vecteur $x \in \{0,1\}^p$ satisfaisant la contrainte budgétaire $\sum_{j=1}^{p} c_j x_j \leq B$ avec $B = 100$. Pour toute solutoin x, on note $z(x) = (z_1(x), z_2(x))$ son vecteur image où l'utilité dans chaque scénario est donnée par :

$$\begin{cases} z_1(x) = \sum_{j=1}^{p} s_j^1 x_j \\ z_2(x) = \sum_{j=1}^{p} s_j^2 x_j \end{cases}$$

Le problème d'optimisation initial s'écrit alors :

$$\max_{x \in X} g(x) = \max_{x \in X} \min\{z_1(x), z_2(x)\}$$

où X représente l'ensemble des solutions réalisables défini par :

$$X = \left\{ x \in \{0,1\}^p : \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \leq B \right\}$$

Pour obtenir un programme linéraire en variables mixtes, nous introduisons une variable α représentant le minimum des utilités. Le problème se reformule alors :

$$\max \alpha$$
$$\begin{cases} \alpha \leq \sum_{j=1}^{p} s_j^1 x_j \\ \alpha \leq \sum_{j=1}^{p} s_j^2 x_j \\ \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \leq 100 \\ x_j \in \{0,1\} \quad \forall j \in \{1, ..., p\} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'implémentation de ce programme linéaire a été réalisée en Python à l'aide de la librairie `pulp` et du solveur `gurobi` (voir le fichier `src/q11.py`). La résolution nous fournit les résultats suivants.

La solution optimale x^* est un vecteur binaire où seuls les projets 2, 3, 4, 7, 8 et 9 sont sélectionnés, ce qui s'écrit :

Vecteur x^* : $(0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$
Coût total : $85K€$
Valeur image : $z(x^*) = (66, 66)$
Valeur optimale : $g(x^*) = 66$

Il est intéressant de noter que cette solution atteint exactement la même utilité dans les deux scénarios ($z_1(x^*) = z_2(x^*) = 66$), ce qui suggère un bon équilibre entre les deux scénarios.

Il est intéressant de noter que l'utilisation d'autres solveurs nous conduit à une solution alternative :

Vecteur x^* : $(0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0)$
Coût total : $100K€$
Valeur image : $z(x^*) = (66, 66)$
Valeur optimale : $g(x^*) = 66$

Bien que ces deux solutions soient équivalentes du point de vue de notre critère maxmin, atteignant la même valeur optimale $g(x^*) = 66$, elles diffèrent par leur efficience économique. En effet, la seconde solution mobilise l'intégralité du budget pour atteindre le même niveau d'utilité que la première qui n'en utilise que 85%. La minimisation des coûts n'étant pas un objectif de notre programme linéaire, ces deux solutions sont mathématiquement équivalentes, bien que la première apparaisse plus avantageuse d'un point de vue pratique.

1.2. Dans cette partie, nous traitons la linéarisation du critère minmax regret, qui est très similaire au problème précédent mais avec une approche différente de l'évaluation des solutions. En effet, plutôt que de considérer directement les utilités dans chaque scénario, nous nous intéressons maintenant au « regret » - c'est-à-dire à la différence entre l'utilité obtenue et la meilleure utilité possible dans chaque scénario.

Reprenons les données de la partie 1.1 avec les mêmes vecteurs de coûts et d'utilités.

La première étape consiste à déterminer les utilités optimales z_1^* et z_2^* pour chaque scénario, qui sont obtenues en résolvant deux problèmes d'optimisations distincts :

$$z_i^* = \max_{x \in X} z_{i(x)} = \max_{x \in X} \sum_{j=1}^{p} s_{i_j} x_j \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

où X représente toujours l'ensemble des solutions réalisables défini par :

$$X = \left\{ x \in \{0, 1\}^p : \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \leq B \right\}$$

Le critère minmax regret cherche alors à minimiser le regret maximum sur l'ensemble des scénarios. Pour toute solution x, le regret dans le scénario i est donné par $r(x, s_i) = z_1^* - z_{i(x)}$. Le problème se formule alors :

$$\min_{x \in X} g(x) = \min_{x \in X} \max\{r(x, s_1), r(x, s_2)\}$$

Pour obtenir un programme linéaire en variables mixtes, nous introduisons une variables β représentant le regret maximum. Le problème se reformule alors :

$$\min \beta$$
$$\begin{cases} \beta \geq z_1^* - \sum_{j=1}^{p} s_j^1 x_j \\ \beta \geq z_2^* - \sum_{j=1}^{p} s_j^2 x_j \\ \sum_{j=1}^{p} c_j x_j \leq 100 \\ x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in \{1, ..., p\} \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'implémentation de ce programme linéaire a été réalisée en Python (voir le fichier `src/q12.py`). La résolution nous fournit les résultats suivants.

Vecteur x^* : $(0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$
Coût total : $85K€$
Regrets : $r(x^*) = (50, 48)$
Valeur optimale : $g(x^*) = 50$

Le regret maximum est presque équilibré entre les deux scénarios (50 et 48), ce qui suggère que la solution est bien équilibrée au sens de ce nouveau critère. On note finalement que cette solution est différente de la solution proposée à la question 1.1, un nouveau critère résulte bien ici en une solution différente.

1.3. On cherche à représenter l'utilité de chacune des solutions x_1^*, x_2^*, x^* et x'^* dans chacun des scénarios. L'implémentation du calcul des points a été réalisée en Python (voir le fichier `src/q13.py`). On obtient les points $x_1^* = (112, 26)$, $x_2^* = (20, 118)$, $x^* = (66, 66)$ et $x'^* = (62, 70)$ illustrés dans le graphe suivant :

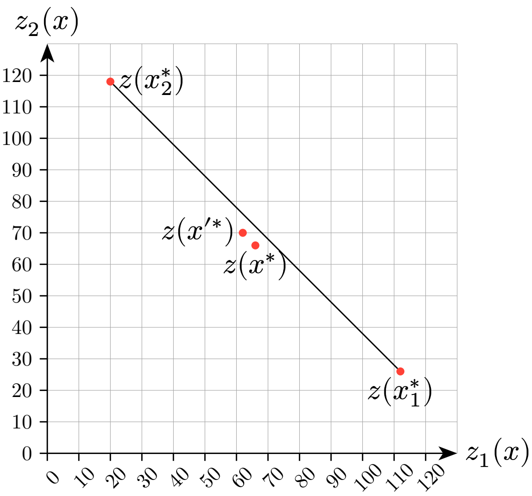

Fig. 4. – Représentation des différentes solutions dans chaque scénarios

Le segment ici représenté illustre le fait que ces nouveaux critères ne sont pas une simple pondération des solutions x_1^* et x_2^*. En effet, si on avait introduit une nouvelle variable $\lambda \in [0,1]$ et que l'on avait calculé par simple pondération des deux solutions une nouvelle solution en faisant :

$$(1-\lambda)x_1^* + \lambda x_2^*$$

Alors, on aurait obtenue une solution sur le segment. Cependant, graphiquement, on peut voir que nos deux solutions x^* et x'^* ne sont pas sur ce segment. Le critère maxmin et minmax regret sont donc bien différent et représente une nouvelle façon d'envisager le problème.

1.4. On s'intéresse maintenant à l'évolution des temps de résolution des deux critères (maxmin et minmax regret) en fonction du nombre de scénarios ($n = \{5, 10, 15, ..., 50\}$) et du nombre de projets ($p = \{10, 15, 20, ..., 50\}$). Pour évaluer systématiquement leurs performances respectives, nous générons pour chaque couple (n,p) un ensemble de 50 instances aléatoires. Les coûts et utilités de chaque instance sont tirés uniformément dans l'intervalle $[1, 100]$, avec un budget fixé à 50% de la somme totale des coûts des projets. Cette approche nous permet d'obtenir une distribution stastistiquement significative des temps de résolution pour différentes tailles de problèmes.

L'implémentation de ce programme linéaire a été réalisée en Python à l'aide de la librairie `pulp` et du solveur `gurobi` (voir le fichier `src/q14.py`). La résolution nous fournit les résultats suivants.

Fig. 5. – Temps de résolution de maxmin

Fig. 6. – Temps de résolution de minmax regret

L'analyse des temps de résolution révèle un comportement fondamentalement différent entre l'augmentation du nombre de scénarios et celle du nombre de projets. la croissance linéaire observée avec le nombre de scénarios s'explique par la structure même des programmes linéaires : chaque nouveau scénario ajoute simplement un nouvel ensemble de contraintes linéaires au problème, sans modifier la nature combinatoire du problème sous-jacent.

En revance, l'ajout de nouveaux projets impacte directement la complexité combinatoire du problème. Le problème de sélection de projets sous contrainte budgétaire est une variante du problème du sac à dos, connu pour être NP-complet. Chaque nouveau projet double potentiellement l'espace des solutions à explorer, ce qui explique la croissance exponentielle observée des temps de calcul. En effet, avec p projets, l'espace des solutions possibles est de taille 2^p, et même les algorithmes les plus sophistiqués ne peuvent échapper à cette complexité fondamentale dans les pires cas.

Cette analyse suggère qu'il est relativement peu coûteux d'envisager de nombreux scénarios différents, tandis que l'ajout de nouveux projets complexifie rapidement le problème. Cette propriété est particulièrement intéressante dans un contexte d'optimisation robuste, où l'on cherche à se prémunir contre différents scénarios possibles : on peut explorer un large éventail de futurs possibles sans que cela n'impacte drastiquement la complexité de résolution du problème.

Partie 2

2.1. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum.

2.2. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et.

2.3. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere, Tite!' hinc hostis mi Albucius, hinc inimicus. Sed iure Mucius.

2.4. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me.

2.5. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere.

2.6. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me accedis, saluto: 'chaere,' inquam, 'Tite!' lictores, turma omnis chorusque: 'chaere, Tite!' hinc hostis mi Albucius, hinc inimicus. Sed iure Mucius. Ego autem mirari satis non queo unde hoc sit tam.

Partie 3

3.1. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum.

3.2. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et voluptates repudiandae sint et molestiae non recusandae. Itaque earum rerum defuturum, quas natura non depravata desiderat. Et quem ad me.

3.3. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et aut officiis debitis aut rerum necessitatibus saepe eveniet, ut et.

3.4. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit, sed do eiusmod tempor incididunt ut labore et dolore magnam aliquam quaerat voluptatem. Ut enim aeque doleamus animo, cum corpore dolemus, fieri tamen permagna accessio potest, si aliquod aeternum et infinitum impendere malum nobis opinemur. Quod idem licet transferre in voluptatem, ut postea variari voluptas distinguique possit, augeri amplificarique non possit. At etiam Athenis, ut e patre audiebam facete et urbane Stoicos irridente, statua est in quo a nobis philosophia defensa et collaudata est, cum id, quod maxime placeat, facere possimus, omnis voluptas assumenda est, omnis dolor repellendus. Temporibus autem quibusdam et.