ECE Lyon - ING 2 - Année 2023/2024

Cours de mathématiques

ANALYSE : Chapitre 7 - Séries numériques

7.1 Définition

Définition. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle ou complexe.
On appelle suite des **sommes partielles**, la suite $(S_N)_{N\geq 0}$ de terme général :

$$S_N = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

— Si (S_N) admet une limite finie quand N tend vers l'infini, on dit que la **série** de terme général u_n notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **convergente** et nous noterons $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa limite.
S est la **somme** de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

— Si (S_N) n'admet pas de limite finie quand N tend vers l'infini, on dit que la **série** de terme général u_n est **divergente** et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ n'a pas de sens.

Exemple

Soit la suite géométrique $u_n = a^n$, $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{N+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1, \\ N+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

— Si $|a| < 1$, S_N admet une limite finie quand N tend vers l'infini, la série de terme général a^n est donc **convergente** et $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.

— Si $|a| \geq 1$, la série est **divergente**.

7.2 Propriétés

Propriétés. Soit $\sum u_n$, une série de terme général u_n.

Si $\sum u_n$ converge alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse.

Donc si le terme général **ne tend pas vers** 0 , la série est **divergente**.
S'il tend vers 0, on ne peut rien dire.

Démonstration :
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ et $S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ donc $u_n = S_n - S_{n-1}$.
Supposons que $\sum u_n$ converge. Notons $\lim_{n \to +\infty} S_n = S$.
On a alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$.

Exemple

Donner la nature de $\sum \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Propriétés. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries **convergentes** telles que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ell \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} v_n = \ell'.$$

Alors la série $\sum u_n + v_n$ est **convergente** et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$.

Propriétés. Soit $\sum u_n$ une série **convergente** telle que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \ell$.

Alors la série $\sum \lambda u_n$ (où $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est **convergente** et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lambda \ell$.

Remarque. La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

7.3 Séries de référence

7.3.1 Série géométrique

C'est la série de terme général $u_n = a^n$ où $a \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Cette série **converge** si et seulement si $|a| < 1$ et dans ce cas $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
Sinon, si $|a| \geq 1$ la série **diverge**.

Exemple

Donner la nature et la somme de $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

7.3.2 Série de Riemann

C'est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cette série **converge** si et seulement si $\alpha > 1$, mais on ne connait pas en général sa somme.
Si $\alpha \leq 1$ la série **diverge**.

Remarque. Si $\alpha = 1$, on a $u_n = \frac{1}{n}$. Cette série s'appelle la série harmonique. Elle diverge.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$.

7.4 Séries positives

Ce sont des séries dont le terme général est positif. Les critères de convergence présentés dans ce paragraphe sont valables **uniquement pour des séries positives**. Il conviendra alors de vérifier ce point avant d'utiliser ces critères.

7.4.1 Critère de comparaison

Propriétés. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n positifs tels que :

$$\forall\, n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n$$

- Si la série $\sum u_n$ **diverge**, la série $\sum v_n$ **diverge**.
- Si la série $\sum v_n$ **converge**, alors la série $\sum u_n$ **converge**.

Démonstration :
Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n positifs tels que $\forall\ n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n$.
Si $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ et $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$ alors $S_N \leq T_N$.
Par ailleurs, puisque $u_n \geq 0$, on peut affirmer que (S_N) est une suite croissante.

1. Si $T_N = \sum_{n=0}^{N} v_n$ converge alors (S_N) est croissante et majorée donc elle converge.
2. Si $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ diverge alors, comme (S_N) est une suite croissante, $\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty$ donc $\lim_{N\to+\infty} T_N = +\infty$. Donc (T_N) diverge.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{1}{n!}$.

7.4.2 Critère d'équivalence

Propriétés. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n positifs.
Si (u_n) et (v_n) sont équivalentes à l'infini (i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, noté $u_n \sim_\infty v_n$) alors les deux séries sont **de même nature**.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{n^2+1}{n^3+1}$.

7.4.3 Critère d'une suite négligeable devant une autre

Propriétés. Soient deux séries de termes généraux u_n et v_n positifs.
Si (u_n) est négligeable devant (v_n) à l'infini (i.e. $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, noté $u_n = o(v_n)$ en $+\infty$). Alors :

— Si la série de terme général u_n **diverge** vers $+\infty$, la série de terme général v_n **diverge** vers $+\infty$.
— Si la série de terme général v_n **converge**, alors la série de terme général u_n **converge**.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{1}{e^n}$.

7.4.4 Critère de d'Alembert

Propriétés. Soit une série de terme général u_n positif.
On suppose que : $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

- Si $0 \leq \ell < 1$ alors $\sum u_n$ **converge**.
- Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ **diverge**.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{n!}{n^n}$.

7.4.5 Critère de Cauchy

Propriétés. Soit une série de termes général u_n positif.
On suppose que : $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$

- Si $0 \leq \ell < 1$ alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exemple

Donner la nature de $\sum \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$.

7.5 Séries quelconques

7.5.1 Séries absolument convergentes

Définition. Une série de terme général u_n est **absolument convergente** si la série de terme général $|u_n|$ est **convergente**.

Propriétés. La **convergence absolue** entraine la **convergence**, la réciproque est fausse.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{n\sin(n)}{n^3+1}$.

7.5.2 Critère d'Abel

Propriétés. Soit une série de terme général u_n telle que :

1. $u_n = v_n w_n$
2. (v_n) est une suite positive décroissante qui tend vers 0
3. (w_n) est une suite telle que $\exists M > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{n=0}^{N} w_n\right| \leq M$

alors la série $\sum u_n$ **converge**.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$.

7.5.3 Critère de Leibniz

Définition. Une série de terme général u_n est **alternée** si $u_n = (-1)^n v_n$ avec (v_n) une suite positive à partir d'un certain rang.

Propriétés. Si le terme v_n d'une série alternée $\sum(-1)^n v_n$ décroît et tend vers 0 alors la série **converge**.

Exemple

Donner la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.