ECE Lyon - ING 2 - Année 2023/2024

Cours de mathématiques

ALGEBRE : Chapitre 3 - Matrices

3.1 Définition

3.1.1 Définition

Définition. Soient $m, n \in \mathbb{N}$.
Une **matrice** A de taille $m \times n$ est un tableau de nombres avec m lignes et n colonnes.
Les nombres du tableau sont appelés les **coefficients** de la matrice. Les coefficients peuvent être des réels ou des complexes.
On note :
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices m, n à coefficients réels,
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, l'ensemble des matrices m, n à coefficients complexes.

Le coefficient situé à la i-ème ligne et la j-ème colonne est noté a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice 2×4. On a : $a_{22} = 2$, $a_{13} = 3$

3.1.2 Matrices particulières

Matrice carrée

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Si $m = n$, la matrice est une **matrice carrée**. On note : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée.

Matrice triangulaire

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les coefficients a_{ii} forment la diagonale principale de la matrice carrée. Si tous les coefficients au dessous (respectivement au dessus) de la diagonale principale sont nuls, la matrice est une **matrice triangulaire supérieure (respectivement triangulaire inférieure)**.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.
$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure.

Matrice diagonale

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si tous les coefficients en dehors de la diagonale principale sont nuls, la matrice est une **matrice diagonale**.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Matrice identité

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale.
Une matrice diagonale dont tous les coefficients sont égaux à 1 est une **matrice identité**. Elle se note I_n.

Exemples

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice identité.

Matrice ligne

> **Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
> Si $m = 1$, la matrice est une **matrice ligne** ou un **vecteur ligne**.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

Matrice colonne

> **Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
> Si $n = 1$, la matrice est une **matrice colonne** ou un **vecteur colonne**.

Exemples

$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

Matrice nulle

> **Définition.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$
> Si tous les coefficients sont nuls, la matrice est la **matrice nulle**. Elle se note $0_{m,n}$.

3.2 Opérations

3.2.1 Addition

> **Définition.** Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (bij)$ deux matrices de taille $m \times n$.
> $C = A + B$ est une matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. $C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque. On ne peut additionner deux matrices de tailles différentes.

Propriétés. Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:

1. Associativité de $+$: $A + (B + C) = (A + B) + C$
2. Commutativité de $+$: $A + B = B + A$
3. $O_{m\times n}$ élément neutre de $+$: $A + O_{m\times n} = O_{m\times n} + A = A$
4. Si l'on note $-A = (-a_{ij})_{m\times n}$, on a : $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$.
   La matrice $-A$ est l'opposée de la matrice A pour $+$.

3.2.2 Multiplication par un scalaire

Définition. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
$C = \lambda A$ est une matrice de taille $m \times n$ dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\lambda = -2$. $C = \lambda A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

Propriétés. Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$:

1. Associativité de . : $(a.b).A = a.(b.A)$
2. Distributivité par rapport à $+$: $(a + b).A = a.A + b.A$ et $a.(A + B) = a.A + a.B$
3. 1 élément neutre de . : $1.A = A$

Remarque. L'ensemble $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ muni de l'addition et de la multiplication p par un scalaire noté $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

3.2.3 Multiplication de deux matrices

Définition. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (bij)$ deux matrices de taille $m \times n$ et $n \times p$.
$C = AB$ est une matrice de taille $m \times p$ dont les coefficients sont donnés par $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.

Le produit AB est défini si et seulement si $n = q$, c'est à dire, si et seulement si le nombre de colonne de A égal le nombre de ligne de B.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$

1. $AB \neq BA$: le produit de matrices n'est pas commutatif.
2. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
3. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

Propriétés.

1. Associativité de $\times$: Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A(BC) = (AB)C$
2. Distributivité par rapport à $+$:
   — Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $A(B + C) = AB + AC$
   — Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$: $(B + C)A = BA + CA$
3. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
4. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $AO_{n,p} = O_{m,p}$ et $O_{p,m}A = O_{p,n}$
5. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $I_m A = A$ et $AI_n = A$

3.2.4 Puissance d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On a :
— $A^0 = I_n$,
— $A^1 = A$,
— $A^2 = A \times A$,
...
— $A^p = \underbrace{A \times A ... \times A}_{p \text{ fois}}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

3.2.5 Transposée d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
La **transposée** de A se note ${}^tA$. ${}^tA \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$
.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ alors } {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Propriétés.

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda {}^tA$
3. ${}^t({}^tA) = A$
4. ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$

3.2.6 Opérations élémentaires

Définition. Effectuer une **opération élémentaire** sur la ligne d'une matrice consiste à effectuer l'une de ces opérations :

— **Remplacer** la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$,
— **Echanger** deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$,
— **Multiplier** la ligne L_i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Exemple

Soit $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Suite Exemple

En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ sur I_3, on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftrightarrow L_3$ sur I_3, on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En effectuant l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow 5L_2$ sur I_3, on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.2.7 Matrices équivalentes

Définition. Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
A et B sont **équivalentes par lignes** si l'une peut être obtenue à partir de l'autre par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim B$.

Propriété. Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Si $A \sim C$ et $B \sim C$ alors $A \sim B$.

3.3 Inverse d'une matrice

3.3.1 Définition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est **inversible** si il existe une matrice notée $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Dans ce cas, B est appelée inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible.
L'inverse de A est unique.

Propriétés. Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A est une matrice inversible, alors A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. Si A et B sont deux matrices inversibles, alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. Si A est inversible, alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

3.3.2 Méthode de Gauss

La méthode de Gauss pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée $(A|I)$ jusqu'à obtenir $(I|A^{-1})$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$a_{11} = 1$ est notre premier pivot. Il va nous servir à éliminer les termes non nuls de la première colonne situés sous le pivot en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

On multiplie la deuxième ligne par l'inverse du premier coefficient non nul.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\frac{1}{8}L_2$$

$a_{22} = 1$ est notre deuxième pivot. Il va nous servir à éliminer les termes non nuls de la deuxième colonne situés sous le pivot en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$$

On multiplie la troisième ligne par l'inverse du premier coefficient non nul.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 2L_3$$

$a_{33} = 1$ est notre troisième pivot. Il va nous servir à éliminer les termes non nuls de la troisième colonne situés au dessus du pivot en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8}L_3 \text{ et } L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

$a_{22} = 1$ est notre dernier pivot. Il va nous servir à éliminer les termes non nuls de la deuxième colonne situés au dessus du pivot en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.

Suite Exemple

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

3.4 Résolution de systèmes linéaires

3.4.1 Résolution de systèmes linéaires par inversion de matrice

Propriété. Soit un système linéaire de n équations à n inconnues.

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +... & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +... & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +... & +a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

(S) est équivalent à $AX = B$ avec $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$.

Donc si A est inversible, on a $X = A^{-1}B$.

Exemple

Soit

$$(S) : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ 4x_1 & & -x_3 & = 8 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$

$AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X = A^{-1}B$

Or $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Donc $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.5 Matrices et applications linéaires

3.5.1 Matrice d'une application linéaire

Définition.
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives q et p, avec $q, p \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_q)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$ une base de F.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
La **matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$** est notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
On a :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \text{ avec } \forall 1 \leq j \leq q, f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e'_i}$$

Autrement dit, la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_p)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} f(e_1) & ... & f(e_j) & ... & f(e_q) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1j} & ... & a_{1q} \\ a_{21} & ... & a_{2j} & ... & a_{2q} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{p1} & ... & a_{pj} & ... & a_{pq} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to E$ un endomorphisme.
Comme $E = F$, on pourra prendre $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. On aura donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
On notera $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ cette matrice qui sera la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exemple

Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\to (2x + y + z, y - z, x + y) \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, une base de $\mathbb{R}^3$.
$f((1, 0, 0)) = (2, 0, 1)$,
$f((0, 1, 0)) = (1, 1, 1)$,
$f((0, 0, 1)) = (1, -1, 0)$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.5.2 Matrice de passage

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.
La **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$**, notée $\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est une matrice carrée de taille $n \times n$.
On a :

$$\boxed{\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \text{ avec } \forall 1 \le j \le n, e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i}$$

Autrement dit, la $j^{\text{ième}}$ colonne est constituée des coordonnées du vecteur e'_j dans la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$.

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e'_1 & \dots & e'_j & \dots & e'_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
Soient $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$ et $\mathcal{B}' = \{(1,2),(5,4)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.
On a : $(1,2) = -(1,0) + 2(1,1)$ et $(5,4) = (1,0) + 4(1,1)$.

$$\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, ..., e'_n)$ deux bases de E.
La matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égal à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.

$$\boxed{(\mathrm{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}$$

3.5.3 Formule du changement de base

Propriété. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B'}_E$ deux bases de E et $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B'}_F$ deux bases de F.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
On note :

- $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B'}_E}$,
- $Q = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B'}_F}$,
- $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$,
- $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B'}_E,\mathcal{B'}_F}(f)$.

Alors

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Remarque. Cas d'un endomorphisme.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B'}_E$ deux bases de E.
Soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
Si on note : $P = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B'}_E}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B'}_E}(f)$.
On a : $B = P^{-1}AP$.