ECE Lyon - ING 2 - Année 2023/2024

Cours de mathématiques

ALGEBRE : Chapitre 4 - Déterminants

4.1 Définition

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
Le déterminant de A est un **scalaire** associé à A. Il se note **det**A.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, det$A$ se note $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$

4.2 Propriétés

4.2.1 Multiplication par un scalaire

Propriétés. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On note L_1, L_2 ... L_n ses lignes et C_1, C_2 ... C_n ses colonnes.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Det}(L_1, ..., \lambda L_i, ..., L_n) = \lambda \text{ Det}(L_1, ..., L_i, ..., L_n)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Det}(C_1, ..., \lambda C_i, ..., C_n) = \lambda \text{ Det}(C_1, ..., C_i, ..., C_n)$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Det}\lambda A = \lambda^n \text{ Det}A$

4.2.2 Echange de lignes ou de colonnes

Propriétés. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On note L_1, L_2 ... L_n ses lignes et C_1, C_2 ... C_n ses colonnes.

1. $\forall i, j \in \{1, n\}$, $\mathrm{Det}(L_1, ..., L_i, ..., L_j, ..., L_n) = -\ \mathrm{Det}(L_1, ..., L_j, ..., L_i, ..., L_n)$
2. $\forall i, j \in \{1, n\}$, $\mathrm{Det}(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n) = -\ \mathrm{Det}(C_1, ..., C_j, ..., C_i, ..., C_n)$

4.2.3 Combinaison linéaire de lignes ou de colonnes

Propriétés. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On note L_1, L_2 ... L_n ses lignes et C_1, C_2 ... C_n ses colonnes.

1. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall i, j \in \{1, n\}$, $\mathrm{Det}(L_1, ..., L_i + \lambda L_j, ..., L_j, ..., L_n) = \mathrm{Det}(L_1, ..., L_i, ..., L_j, ..., L_n)$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall i, j \in \{1, n\}$, $\mathrm{Det}(C_1, ..., C_i + \lambda C_j, ..., C_j, ..., C_n) = \mathrm{Det}(C_1, ..., C_i, ..., C_j, ..., C_n)$

4.2.4 Matrices particulières

Propriétés. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. Si A comporte une ligne (ou une colonne) nulle, alors $\det A = 0$.
2. Si A possède deux lignes (ou deux colonnes) proportionnelles (ou identiques), alors $\det A = 0$.
3. Si A possède une ligne (ou une colonne) combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes) alors $\det A = 0$.
4. Si A est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure), alors $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

4.2.5 Opérations sur les matrices

Propriétés. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

1. $\det(AB) = \det A \times \det B$
2. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$
3. $\det({}^t A) = \det A$

4.3 Calculs de déterminants

4.3.1 Matrice 2×2

Propriétés. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \times d - b \times c}$$

On trouve le déterminant d'une matrice de dimension 2 en effectuant la différence du produit de la diagonale principale et du produit de l'autre diagonale :

$$\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, det $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$

4.3.2 Matrice $n \times n$

Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Propriétés. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Notons A_{ij}, la matrice obtenue en rayant la i-ième ligne et la j-ième colonne :

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On note $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.
C_{ij} s'appelle le **cofacteur** de a_{ij}.

— Développement suivant la i-ième ligne : $\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}}$,

— Développement suivant la j-ième colonne : $\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}}$.

Exemple : développement suivant une ligne

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A}_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant suivant la $1^{\text{ière}}$ ligne, on a donc :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times ((-1) - 6) - 1 \times (1 - 9) + 0 \times (2 + 3) = -6$$

Exemple : développement suivant une colonne

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

On a :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{A}_{31} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En développant suivant la $1^{\text{ière}}$ colonne, on a donc :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times ((-1) - 6) - 1 \times (1 - 0) + 3 \times (3 - 0) = -6$$

Remarque. Pour calculer le déterminant d'une matrice en utilisant la méthode de développement suivant une ligne ou une colonne, on choisira une ligne ou une colonne avec, si possible, le plus de 0.

Opérations sur les lignes ou les colonnes

Propriétés. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).
On a vu précédemment :

- Si on multiplie une ligne (ou une colonne) de A par λ, son déterminant est multiplié par λ,
- Si on échange deux lignes (ou colonnes) de A, son déterminant est multiplié par -1,
- Si on ajoute à une ligne (ou une colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (ou colonnes), le déterminant de A reste inchangé.

Pour calculer det$A$, on effectuera donc des opérations sur les lignes (ou les colonnes) de A pour obtenir une matrice particulière.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\det A = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\det A = -3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\det A = -3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2$$

On obtient une matrice triangulaire inférieure. Donc det $A = -6$

4.4 Applications des déterminants

4.4.1 Inverse d'une matrice

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

On note $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$.
C_{ij} s'appelle le **cofacteur** de a_{ij}.

On note $\mathrm{Com}(A) = (C_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.
$\mathrm{Com}(A)$ s'appelle la **comatrice** de A (ou matrice des cofacteurs).

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Si A est inversible, $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{Com} A}$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Calcul du déterminant</u> :
En développant suivant la $2^{\text{ième}}$ colonne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det A = -2 \times 7 - 2 \times -5 = -4$
$\det A \neq 0$ donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{\det A} {}^t\mathrm{Com} A$

Suite Exemple

Calcul de la comatrice :

On a :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{31} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \mathrm{A}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc :

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2,\ C_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\,;\ C_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7,\ C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,;\ C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8,\ C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4\,;\ C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

Donc : $^t\mathrm{Com}\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

Donc $A^{-1} = -\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -7 & 3 & 5 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix}$

4.4.2 Résolution de systèmes linéaires

Méthode de Cramer

Propriété. Soit un système linéaire de n équations à n inconnues.

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\ldots & ++\,a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +\ldots & a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

(S) est équivalent à $AX = B$ avec $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$.

On définit $A_j = \begin{pmatrix} a_{1,1} & ... & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & .... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & ... & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & .... & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & ... & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & .... & a_{n,n} \end{pmatrix}$.

A_j est la matrice obtenue en remplaçant la $j^{ième}$ colonne de A par B.

(S) admet une unique solution $(x_1, ..., x_n)$ si et seulement si $\det A \neq 0$.

On a alors : $\boxed{x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}}$

Exemple

Soit

$(S) : \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ 4x_1 & & -x_3 & = 8 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$

$AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Calcul du déterminant</u> :

En développant suivant la $2^{\text{ième}}$ colonne, on a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det A = -2 \times 7 - 2 \times -5 = -4$

$\det A \neq 0$. (S) admet donc une unique solution $(x_1, ..., x_n)$ avec $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$

<u>Calcul de la solution</u> :

$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det A_1 = -2 \times 16 - 2 \times -12 = -8$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 8 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$\det A_2 = -4 \times 7 + 8 \times 3 = -4$

Suite Exemple

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$\det A_3 = -2 \times 8 - 2 \times (-8) = 0$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-8}{-4} = 2,\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-4}{-4} = 1,\ x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{0}{-4} = 0$$

Donc $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.4.3 Déterminants et base

Propriété. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\{v_1, ..., v_n\}$ une famille de n vecteurs de E. Soit A la matrice $n \times n$ dont les vecteurs colonnes sont les n vecteurs v_i alors $\mathbf{det}A \neq 0$ si et seulement si

- $\{v_1, ..., v_n\}$ est une base de E.
- $\{v_1, ..., v_n\}$ est une famille libre.
- $\{v_1, ..., v_n\}$ est une famille génératrice de E.

Exemple

Soient $v_1 = (1, 4, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2)$, $v_3 = (1, -1, 2)$.
La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ a 3 vecteurs, la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3. Soit A la matrice 3×3 dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs v_1, v_2, v_3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
$\mathbf{det}A = -4 \neq 0$ donc $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercices

1. La famille $\{(7, 2, 4), (1, 1, -3), (2, -1, 7)\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1), (-3, -1, 0, -1), (2, 1, 1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
3. A quelle condition sur a, la famille $\mathcal{B} = \{(1, a, 0, 0), (-1, 0, 0, 1), (0, -1, 0, 2), (0, 1, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^4$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
