ÉCOLE CENTRALE D'ÉLECTRONIQUE (ECE) PARIS
Promotion 2025 - Semestre 1

ALGÈBRE LINÉAIRE - SÉANCE 2
Espaces Vectoriels et Applications Linéaires

Enseignant : Prof. Marie Lefebvre
Date : 10 Octobre 2025
Département : Mathématiques Appliquées

CHAPITRE 1 : Espaces Vectoriels

1.1 Définition

Un espace vectoriel E sur un corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un ensemble muni de deux opérations :

- Addition vectorielle : $E \times E \to E$
- Multiplication par un scalaire : $K \times E \to E$

vérifiant 8 axiomes (associativité, commutativité, élément neutre, etc.).

Exemples classiques :

- $\mathbb{R}^n$ avec l'addition et multiplication usuelles
- L'ensemble des polynômes de degré $\leq n$
- L'espace des fonctions continues $C([a,b])$
- L'espace des matrices $M_{n,m}(\mathbb{R})$

1.2 Sous-espaces Vectoriels

Définition : Un sous-ensemble $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel si :

1. $0 \in F$ (contient le vecteur nul)
2. $\forall u,v \in F$, $u+v \in F$ (stable par addition)
3. $\forall \lambda \in K$, $\forall u \in F$, $\lambda u \in F$ (stable par multiplication scalaire)

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$, les droites et plans passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels.

1.3 Combinaisons Linéaires

Une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ est :
$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ sont des scalaires.

L'enveloppe linéaire (span) de $\{v_1, ..., v_n\}$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires possibles de ces vecteurs.

CHAPITRE 2 : Indépendance Linéaire et Bases

2.1 Indépendance Linéaire

Des vecteurs $v_1, v_2, ..., v_n$ sont linéairement indépendants si :
$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$$

Autrement dit, aucun vecteur ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exemple dans $\mathbb{R}^3$:
- (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) sont linéairement indépendants
- (1,2,3), (2,4,6), (1,1,1) sont linéairement dépendants car le deuxième vecteur = 2 × premier vecteur

2.2 Bases et Dimension

Une base d'un espace vectoriel E est une famille de vecteurs :
- Linéairement indépendants
- Qui engendrent E (tout vecteur s'écrit comme combinaison linéaire)

La dimension de E est le nombre de vecteurs dans une base.

Théorème fondamental : Toutes les bases d'un espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Exemples de bases :
- Base canonique de $\mathbb{R}^3$: {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}
- Base canonique des polynômes P_2 : $\{1, x, x^2\}$
- Base de Fourier pour fonctions périodiques : {sin(nx), cos(nx)}

CHAPITRE 3 : Applications Linéaires

3.1 Définition et Propriétés

Une application $f : E \to F$ est linéaire si :
1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$ (additivité)
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ (homogénéité)

Conséquence immédiate : $f(0) = 0$ pour toute application linéaire.

Exemples :
- Rotation dans le plan autour de l'origine
- Projection orthogonale sur un sous-espace
- Dérivation : $f(P) = P'$ pour les polynômes

3.2 Noyau et Image

Pour $f : E \to F$ linéaire :

Noyau : $\mathrm{Ker}(f) = \{v \in E \mid f(v) = 0\}$
- C'est un sous-espace vectoriel de E
- f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

Image : $\mathrm{Im}(f) = \{f(v) \mid v \in E\}$
- C'est un sous-espace vectoriel de F
- f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$

3.3 Théorème du Rang

Pour $f : E \to F$ linéaire avec E de dimension finie :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Ce théorème relie les dimensions du noyau et de l'image.

Exemple : Si $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ avec $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$, alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 3$.

CHAPITRE 4 : Matrices et Applications Linéaires

4.1 Représentation Matricielle

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaire et B, B' des bases.

La matrice A de f dans ces bases est définie par :

$$[f(v)]_{B'} = A \times [v]_B$$

où $[v]_B$ désigne les coordonnées de v dans la base B.

4.2 Changement de Base

Si P est la matrice de passage de la base B à la base B', alors la matrice A' de f dans la nouvelle base est :

$$A' = P^{-1} \times A \times P$$

Deux matrices sont similaires si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.

4.3 Opérations Matricielles

Addition de matrices : $(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$
Multiplication : $(AB)_{ij} = \Sigma_k A_{ik} \times B_{kj}$
Transposée : $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Propriétés importantes :

- $(AB)^T = B^T \times A^T$
- $(ABC) = A(BC)$ (associativité)
- $AB \neq BA$ en général (non commutativité)

CHAPITRE 5 : Déterminants

5.1 Définition

Pour une matrice carrée n×n, le déterminant est un scalaire calculé récursivement :

Matrice 2×2 :

$$\det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Matrice 3×3 (règle de Sarrus) :

$$\det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

5.2 Propriétés Fondamentales

1. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
2. $\det(A^T) = \det(A)$
3. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ si A inversible
4. Si deux lignes sont proportionnelles, $\det(A) = 0$
5. Échanger deux lignes change le signe du déterminant

5.3 Interprétation Géométrique

Le déterminant représente :
• Le volume (ou aire) du parallélépipède formé par les vecteurs colonnes
• Le facteur de changement de volume par la transformation linéaire

$\det(A) = 0 \iff$ Les vecteurs colonnes sont linéairement dépendants
$\iff$ A n'est pas inversible

EXERCICES

Exercice 1 : Vérifier que $\{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 : Pour $f(x,y,z) = (x+y, 2z)$, calculer Ker(f) et Im(f)

Exercice 3 : Calculer le déterminant de la matrice :

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4 : Trouver la matrice de la rotation d'angle θ dans le plan

RESSOURCES

• Axler, "Linear Algebra Done Right" (3rd ed.)
• MIT OCW 18.06 : Linear Algebra par Gilbert Strang
• Khan Academy : Linear Algebra course
• 3Blue1Brown : Essence of Linear Algebra (YouTube)

Prochain cours : Valeurs Propres et Diagonalisation