ECE LYON - ING 2 - ANNÉE 2023/2024

Cours de mathématiques

ALGEBRE : Chapitre 1 - Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1.1 Prérequis : Systèmes linéaires

1.1.1 Définition

Définition. Un **système linéaire** de n équations à p inconnues s'écrit sous la forme :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +... & +a_{1p}x_p & = b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +... & +a_{2p}x_p & = b_2 \\ ... & & & & \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +... & +a_{np}x_p & = b_n \end{cases} \quad \text{avec } a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$$

Résoudre (S) consiste à déterminer les p-uplets $(x_1, x_2, ..., x_p)$ qui vérifient simultanéments toutes les équations du système.

1.1.2 Opérations élémentaires

Définition. Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues.
Effectuer une **opération élémentaire** sur une ligne de (S) consiste à effectuer l'une de ces opérations :

- **Remplacer** la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$,
- **Echanger** deux lignes L_i et L_j : $L_i \leftrightarrow L_j$,
- **Multiplier** la ligne L_i par $\lambda \neq 0$: $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

Propriété. Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues.
Soit (S') un système linéaire obtenu effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de (S).
(S) et (S') sont équivalents, c'est à dire résoudre (S) revient à résoudre (S').

1.1.3 Résolution de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss

Résoudre un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss consiste à effectuer des opérations élémentaires sur le système dans le but de lui donner une forme « triangulaire ».

Remarque. Un système linéaire peut avoir :

— une unique solution
— une infinité de solutions
— aucune solution

Exemples

1. **Système ayant une unique solution** :
Soit le système linéaire :
$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ 4x_1 & & -x_3 & = 8 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{cases}$$
$a_{11} = 1$ est notre premier pivot. Il va nous servir à éliminer les termes non nuls de la première colonne situés sous le pivot en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ & -8x_2 & -5x_3 & = -8 \\ & 4x_2 & +3x_3 & = 4 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ & 4x_2 & +3x_3 & = 4 \\ & -8x_2 & -5x_3 & = -8 \end{cases} \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$
$a_{22} = 4$ est notre deuxième pivot. Il va nous servir à éliminer les termes non nuls de la deuxième colonne situés sous le pivot en faisant des opérations élémentaires sur les lignes.
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ & 4x_2 & +3x_3 & = 4 \\ & & x_3 & = 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$$
Le système a une forme « triangulaire » .
La troisième équation nous donne : $x_3 = 0$, on déduit de la deuxième équation : $x_2 = 1$, puis de la première équation : $x_1 = 2$.
Notre système a donc comme unique solution le triplet :
$$(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0).$$

2. **Système ayant une infinité de solutions** :
   On considère le système linéaire à deux équations et quatre inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = 7 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = 4 \\ & & -2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = 3 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

   Le système a une forme « triangulaire tronqué ».
   Un tel système a une infinité de solutions.

   Posons(par exemple) : $\begin{cases} x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$

   On a alors :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccl} x_1 & + & x_2 & + & \alpha & + & \beta & = 4 \\ & & -2x_2 & + & 3\alpha & - & 2\beta & = 3 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} x_1 & + & x_2 & = 4 - \alpha - \beta \\ & & -2x_2 & = 3 - 3\alpha + 2\beta \end{array}\right.$$

   Après résolution, on obtient : $\begin{cases} x_1 = \dfrac{11}{2} - \dfrac{5}{2}\alpha \\ x_2 = \dfrac{3}{2}\alpha - \dfrac{3}{2} - \beta \end{cases}$

   Une forme générale des solutions du système est :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{11}{2} - \frac{5}{2}\alpha, \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2} - \beta, \alpha, \beta\right), \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   Cette forme d'expression des solutions du système est appelée « solutions paramétrées ».

3. **Système n'ayant aucune solution** :
   Soit le système linéaire :

$$\left\{\begin{array}{cccl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ 4x_1 & +8x_2 & +4x_3 & = 8 \\ -x_1 & +2x_2 & +2x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = 4 \\ & & 0 & = -8 \\ & 4x_2 & +3x_3 & = 4 \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

   La deuxième ligne du système est une assertion fausse. Les 3 équations du système ne peuvent donc être vérifiées en même temps. Par conséquent le système n'admet aucune solution.

1.2 Espaces vectoriels

Définition.
Un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** ou un **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ est un ensemble non vide E muni :

— d'une **loi de composition interne** (addition), c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

— d'une **loi de composition externe** (multiplication), c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. **Commutativité de l'addition** : $\forall u, v \in E$, $u + v = v + u$
2. **Associativité de l'addition** : $\forall u, v, w \in E$, $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. L'addition possède un **élément neutre** $0_E \in E$: $\forall u \in E$, $u + 0_E = u$
4. Tout $u \in E$ admet un **symétrique** u' tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. **Associativité de la multiplication** : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
6. **Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition** : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall u, v \in E$, $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
7. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
8. La multiplication possède un **élément neutre** $1 \in \mathbb{K}$: $\forall u \in E$, $1 \cdot u = u$

On appelle alors **vecteurs** les éléments de E et **scalaires** les éléments de $\mathbb{K}$.

Exemples de référence

1. **Exemple 1 :** Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$).
   Un élément $u \in E$ est donc un couple (x, y) avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$:
   $$\mathbb{R}^2 = \Big\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\Big\}.$$
   — Loi interne : Si (x, y) et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, alors :
   $$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y').$$
   L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0)$.
   Le symétrique de (x, y) est $(-x, -y)$, que l'on note aussi $-(x, y)$.
   — Loi externe : Si λ est un réel et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :
   $$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$
2. **Exemple 2 :** Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^n$).
   Un élément $u \in E$ est donc un n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:
   $$\mathbb{R}^n = \Big\{(x_1, x_2..., x_n) \mid x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$
   — Loi interne : Si $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(x'_1, \ldots, x'_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :
   $$(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n).$$
   L'élément neutre de la loi interne est le vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$.
   Le symétrique de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \ldots, x_n)$.

   — Loi externe : Si λ est un réel et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors :
   $$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$
3. **Exemple 3 :** Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
4. **Exemple 4 :** $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
5. **Exemple 5 :** $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
6. **Exemple 6 :** $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, l'ensemble des suites numériques, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
7. **Exemple 7 :** $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices à coefficients réels, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
8. **Exemple 8 :** $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1.3 Sous-espaces vectoriels

Définition. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous ensemble de E. Si F, muni des mêmes lois que E, est lui même un $\mathbb{K}$ espace vectoriel alors on dit que F est **sous-espace vectoriel** de E.

Propriétés. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Une partie F de E est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si :

- $F \neq \emptyset$ (il suffit de montrer que $0 \in F$),
- $\forall u, v \in F$, $u + v \in F$ (on dit que F est **stable pour l'addition**),
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ et $\forall u \in F$, $\lambda \cdot u \in F$ (on dit que F est **stable pour la multiplication par un scalaire**).

Corollaire. Les deux dernières conditions peuvent être regroupées en une seule :
$\forall u, v \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot u + \beta \cdot v \in F$

Remarque. Pour montrer qu'un ensemble est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on montrera que c'est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de référence.

Exemples

1. L'ensemble $F = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\Big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:
   - $(0, 0) \in F$,
   - Soient $u = (x_1, y_1) \in F$ et $v = (x_2, y_2) \in F$, alors $x_1 + y_1 = 0$ et $x_2 + y_2 = 0$ donc $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = 0$. Ainsi $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in F$,
   - Soient $u = (x, y) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + y = 0$ donc $\lambda x + \lambda y = 0$. Ainsi $\lambda u \in F$.
2. L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
4. L'ensemble $F_1 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\Big\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:
   - le vecteur nul $(0, 0)$ n'appartient pas à F_1.
5. L'ensemble $F_2 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } y = 0\Big\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:
   - les vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (0, 1)$ appartiennent à F_2, mais pas le vecteur $u + v = (1, 1)$.
6. L'ensemble $F_3 = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\Big\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$:
   - le vecteur $u = (1, 1)$ appartient à F_3 mais, pour $\lambda = -1$, le vecteur $-u = (-1, -1)$ n'appartient pas à F_3.

Exercice

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$. Parmi les parties de E suivantes, lesquelles sont des sous-espaces vectoriels ?

1. $A = \{f \in E \mid f(1) = 2f(0)\}$
2. $B = \{f \in E \mid f(7) = f(1) + 2\}$
3. $C = \{f \in E \mid f(1) < 0\}$
4. $D = \{\text{fonctions polynômiales de degré} = 4\}$
5. $E = \{\text{fonctions polynômiales de degré} \leq 4\}$

1.4 Combinaisons linéaires

1.4.1 Définition

Définition. Soit $n \geq 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$

(où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $\mathbb{K}$) est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont appelés **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque. Si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est **colinéaire** à v_1.

Exemples

1. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $(3, 3, 1)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 1, 0)$ et $(1, 1, 1)$ car on a l'égalité $(3, 3, 1) = 2(1, 1, 0) + (1, 1, 1)$.
2. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, le vecteur $u = (2, 1)$ n'est pas colinéaire au vecteur $v_1 = (1, 1)$ car s'il l'était, il existerait un réel λ tel que $u = \lambda v_1$, ce qui équivaudrait à l'égalité $(2, 1) = (\lambda, \lambda)$.

Exercices

1. Soient $u = (1, 2, -1)$ et $v = (6, 4, 2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
   Montrer que $w = (9, 2, 7)$ est combinaison linéaire de u et v.
2. Soient $u = (1, 2, -1)$ et $v = (6, 4, 2)$.
   Montrons que $w = (4, -1, 8)$ n'est pas une combinaison linéaire de u et v.
3. Ecrire le vecteur $v = (1, -2, 5)$ comme combinaison linéaire de $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 2, 3)$ et $e_3 = (2, -1, 1)$.
4. Ecrire le vecteur $v = (2, -5, 3)$ comme combinaison linéaire de $e_1 = (1, -3, 2)$, $e_2 = (2, -4, -1)$ et $e_3 = (1, -5, 7)$.
5. Pour quelle valeur de k le vecteur $u = (1, 2, k)$ est-il combinaison linéaire de $e_1 = (3, 0, -2)$, $e_2 = (2, -1, 5)$) ?

1.4.2 Sous-espace vectoriel vect($\mathcal{A}$)

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Soit $\mathcal{A} = \{u_1, u_2, ..., u_p\}$ une famille de vecteurs de E.
L'ensemble noté **vect**($\mathcal{A}$) ou $< \mathcal{A} >$ est formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de $\mathcal{A}$:

$$< \mathcal{A} >= \text{vect}(\mathcal{A}) = \text{vect}(u_1, ..., u_p) = \{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i,\ \alpha_i \in \mathbb{K},\ 1 \leq i \leq p\}.$$

Propriété. Soient E un espace vectoriel et $F = \text{vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], u_i \in E$.
F est un sous-espace vectoriel de E et donc $F \subset E$.

Exemples

1. Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $u = (1, 2)$. Alors, $< u >= \text{vect}(u) = \{v = \alpha u,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$:
   ce sont donc tous les vecteurs colinéaires à u.
2. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Montrons que $E = \text{vect}\Big(u_1 = (1, 0), u_2 = (1, 1)\Big)$.
   - Montrons que $\text{vect}\Big(u_1, u_2\Big) \subset E$:
     On a $u_1,\ u_2 \in E$ donc $\text{vect}\Big(u_1, u_2\Big) \subset E$.
   - Montrons que $E \subset \text{vect}\Big(u_1, u_2\Big)$.
     Soit $u = (x, y) \in E$. Trouvons $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = u$.
     Cette égalité conduit au système suivant : $\alpha_1 + \alpha_2 = x$ et $\alpha_2 = y$.
     D'où, $\alpha_1 = x - y$ et $\alpha_2 = y$.
     Donc, $u \in \text{vect}\Big(u_1, u_2\Big)$.

   On a donc $E = \text{vect}\Big(u_1, u_2\Big)$.

Propriétés. Soient E un espace vectoriel et $F = \text{vect}(u_1, u_2, ..., u_p)$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], u_i \in E$.
Le sous-espace vectoriel F ne change pas si on effectue sur les vecteurs u_i un certain nombre d'opérations dites **élémentaires** qui sont :
- **échanger** deux vecteurs
- **multiplier** un des vecteurs par un scalaire non nul
- **remplacer** un des vecteurs u_i par $u_i - \lambda u_j$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \neq j$.

Propriétés. Soient E un espace vectoriel et $F = \text{vect}(u_1, u_2, ...u_p)$ où $\forall i \in [\![1, p]\!], u_i \in E$.
On a $F = \text{vect}(u_1, u_2, ..., u_j, ...u_p) = \text{vect}(u_1, u_2, ..., u_{j-1}, u_{j+1}, ...u_p)$ dans les cas suivants :
- $u_j = 0$,
- u_j est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple

Soient $v_1 = (1,2)$, $v_2 = (2,-1)$, $v_3 = (0,5)$ et $v_4 = (-3,9)$.
$v_3 = 2v_1 - v_2$ et $v_4 = 3v_1 - 3v_2$.
Donc $< v_1, v_2, v_3, v_4 >=< (1,2),\ (0,1) >$.

1.5 Familles génératrices

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
On dit que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est une **famille génératrice** de E si et seulement si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$:

$$\forall v \in E, \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p.$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ **engendre** ou est un **système de générateurs** de E :

$$E = \operatorname{vect}(v_1, \ldots, v_p).$$

Remarque. Une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E n'est pas unique.

Exemples

1. Considérons les vecteurs $v_1 = (1,0,0)$,$v_2 = (0,1,0)$ et $v_3 = (0,0,1)$ de $E = \mathbb{R}^3$.
   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est génératrice de E car tout vecteur $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire
   $$v = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$
   Les coefficients sont ici $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = y$, $\lambda_3 = z$. Donc tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2, v_3
2. Soient $v_1' = (2,1)$ et $v_2' = (1,1)$. Alors $\{v_1', v_2'\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.
   En effet, soit $v = (x,y)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$.
   Montrer que v est combinaison linéaire de v_1' et v_2' revient à démontrer l'existence de deux réels λ et μ tels que $v = \lambda v_1' + \mu v_2'$.
   Il s'agit donc de résoudre le système
   $$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= x \\ \lambda + \mu &= y \end{cases}$$
   Ce système a pour solution $\lambda = x - y$ et $\mu = -x + 2y$, et ceci, quels que soient les réels x et y. Donc tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est une combinaison linéaire des vecteurs v_1, v_2
3. La famille $\{1, i\}$ est génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exemple 2

1. Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$.
   Alors la famille $\{1, X, \ldots, X^n\}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
   Par contre, l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes ne possède pas de famille génératrice FINIE.

1.6 Familles libres ou liées

1.6.1 Familles libres

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
On dit que la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une **famille libre** ou **linéairement indépendante** si et seulement si aucun vecteur $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille libre si et seulement si toute combinaison linéaire nulle implique que tous ses coefficients sont nuls.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \lambda_i = 0$$

1.6.2 Familles liées

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
On dit que la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une **famille liée** ou **linéairement dépendante** si et seulement si au moins un vecteur de cette famille est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $v_1, \ldots, v_p$ des vecteurs de E.
$\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ est une famille liée si et seulement si il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls.

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}, (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \neq (0, \ldots, 0) \text{ tels que } \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0$$

Remarque. Interprétation géométrique.

— Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires. Ils sont donc sur une même droite vectorielle.

— Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires. Ils sont donc dans un même plan vectoriel.

Exercices

Pour des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, déterminer si une famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ est libre ou liée revient à résoudre un système linéaire.

1. Soient $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (2, -1, 0)$, $v_3 = (2, 1, 1)$.
   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ou liée ?
2. On considère les vecteurs $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (4, 5, 6)$, $v_3 = (2, 1, 0)$.
   La famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est-elle libre ou liée ?

Exemples

1. Les polynômes $P_1(X) = 1 - X$, $P_2(X) = 5 + 3X - 2X^2$ et $P_3(X) = 1 + 3X - X^2$ forment une famille liée dans $\mathbb{R}[X]$, car $3P_1(X) - P_2(X) + 2P_3(X) = 0$. Donc il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, donc la famille est liée.
2. On considère la famille $\{\cos, \sin\}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons que c'est une famille libre.
   Supposons que l'on ait $\lambda \cos + \mu \sin = 0$.
   Cela équivaut à $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x) = 0$.
   En particulier :
   — pour $x = 0$, cette égalité donne $\lambda = 0$.
   — pour $x = \frac{\pi}{2}$, l'égalité donne $\mu = 0$.
   Donc $(\lambda, \mu) = (0, 0)$, donc la famille $\{\cos, \sin\}$ est libre. En revanche la famille $\{\cos^2, \sin^2, 1\}$ est liée car on a la relation de dépendance linéaire $\cos^2 + \sin^2 - 1 = 0$.
   Les coefficients de dépendance linéaire sont $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Donc il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, donc la famille est liée.

1.7 Bases, dimension et rang

1.7.1 Base

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

Propriété. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E.
Tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon **unique** comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ **uniques** tels que :

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ s'appellent les **coordonnées** du vecteur v dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque. Il existe plusieurs bases possibles pour le même espace vectoriel.

Exemples

1. Soient les vecteurs $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$. Alors (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$, appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient les vecteurs $v_1 = (3,1)$ et $v_2 = (1,2)$. Alors (v_1, v_2) forment aussi une base de $\mathbb{R}^2$.
3. De même dans $\mathbb{R}^3$, si $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, alors (e_1, e_2, e_3) forment la **base canonique** de $\mathbb{R}^3$.
4. Les vecteurs de $\mathbb{R}^n$: $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, ... , $e_n = (0,\dots,0,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, appelée la **base canonique** de $\mathbb{R}^n$.
5. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !

Théorème. (**Existence d'une base**)
Si E est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors il existe une base de E.

Théorème. Si E est engendré par un nombre fini de vecteurs, alors toutes les bases ont le même nombre de vecteurs.

1.7.2 Dimension

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel engendré par un nombre fini de vecteurs.
Le nombre de vecteurs qui forment une base de E s'appelle **dimension** de E et se note $\dim(E)$.
Si $E = \{0_E\}$ alors $\dim(E) = 0$.

Exemples

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, car sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ contient n éléments.
2. $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, son cardinal est égal à $n+1$.

Théorème. Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Toute famille libre de E a **au plus** n éléments.
2. Toute famille génératrice de E a **au moins** n éléments.
3. Si $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ est une famille de **n** vecteurs de E, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\mathcal{A}$ est une base de E,
(ii) $\mathcal{A}$ est une famille libre de E,
(iii) $\mathcal{A}$ est une famille génératrice de E.

Remarque. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E. Le théorème précédent nous permet de dire :

— Si $p > n$ alors $\mathcal{A}$ est liée.
— Si $p < n$ alors $\mathcal{A}$ n'est pas génératrice de E.
— Si $p = n$ alors $\Big(\mathcal{A}$ libre $\Leftrightarrow \mathcal{A}$ génératrice de E$\Big)$

Ce théorème très important va être très utile pour résoudre certains exercices.
Par exemple, pour montrer que n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ forment une base de $\mathbb{R}^n$, il suffira de montrer que ces vecteurs sont libres.

> **Théorème.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Alors
>
> 1. F est de dimension finie et on a $\dim(F) \leq \dim(E)$;
> 2. Si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $E = F$.

Exemple

Comment déterminer une base d'un sous-espace vectoriel E ?
Il s'agit de determiner une famille génératrice de E

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On commence par déterminer une famille génŕatrice de E.
Soit $u = (x, y, z) \in E$ alors $x + y - z = 0 \Leftrightarrow z = x + y$
On a $u = (x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$.
u est combinaison linéaire des vecteurs $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$, la famille de vecteurs $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est génératrice de E.
Vérifions que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est une famille libre.
On considère la combinaison linéaire nulle : $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^3}$, alors :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ est libre, elle est génératrice de E, c'est donc une base de E et dim$E$=2.

Exercices

1. Soit l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0, -x + z = 0\}$.
   Donner une base de E et la dimension de E.
2. Soit l'espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z = 0, y + t = 0, x - z - 2t = 0\}$.
   Donner une base de E et la dimension de E.

1.7.3 Rang

Définition. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
Le **rang** de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $(v_1, \ldots, v_p)$:

$$\boxed{\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) = \dim(\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p))}$$

Propriété. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de p vecteurs de E.
On a :

- $0 \leq \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leq n$ et $0 \leq \mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) \leq p$
- $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) = p$ si et seulement si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre.

1.7.4 Théorèmes

Théorème. (**Théorème de la base incomplète**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Toute famille libre finie de E peut être complétée en une base de E.

Théorème. (**Théorème d'extraction de base**)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
De toute famille génératrice finie de E, on peut extraire une base de E.

Exemple1

Comment compléter une famille libre en une base d'un espace vectoriel ?
En rajoutant des vecteurs d'une autre base pour former une famille libre.
Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B = \{u_1 = (2, 1, 0), u_2 = (0, 1, 1)\}$. Compléter B en une base de E.
Tout d'abord, B est une famille libre (facile à vérifier).
Pour avoir une base de E, il nous faut 3 vecteurs libres. Il faut donc rajouter un vecteur u_3 à B de sorte que $\{B, u_3\}$ forme une famille libre.
On va choisir u_3 à partir de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Posons $u_3 = e_1$. Vérifions si $B' = \{B, u_3\}$ est libre.
Soit $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\lambda_1 + \lambda_3 & = & 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ \lambda_2 & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ et B' est donc une famille composée de 3 vecteurs libres dans $\mathbb{R}^3$ alors c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exemple2

Comment extraire une base à partir d'une famille génératrice ?
Il s'agit d'éliminer de la famille génératrice tous les vecteurs qui sont linéairement dépendants des autres.

Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $B = \{u_1 = (1, 0, 2), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 3), u_4 = (1, 2, 1)\}$.
Sachant que B engendre E, trouver une base de E contenue dans B.
Il faut trouver 3 vecteurs libres dans B.
$u_1 \neq 0$ est donc libre. On considère maintenant la famille $\{u_1, u_2\}$. Il est facile de voir que ces 2 vecteurs sont libres.
On continue en prenant $\{u_1, u_2, u_3\}$. On peut vérifier que cette famille est liée.
En effet, on a : $u_3 = u_1 + u_2$. Donc, le choix de u_3 ne convient pas.
On considère alors $\{u_1, u_2, u_4\}$. On vérifie que cette famille est libre. Donc, elle forme une base de E.