ECE Lyon - ING 2 - Année 2023/2024

Cours de mathématiques

ANALYSE : Chapitre 8 - Intégrales généralisées

8.1 Définitions

8.1.1 Intégrale sur $[a, +\infty[$

Définition. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

— Si la limite de l'intégrale $\int_a^X f(x)\ dx$ quand X tend vers $+\infty$ **existe** et est **finie**, on dit que $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ **converge** ou que $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx$ est **définie** ou que la fonction f est **intégrable** sur $[a, +\infty[$ et on note : $\int_a^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{X \to +\infty} \int_a^X f(x)\ dx$.

— Dans le cas contraire, l'intégrale est **divergente** ou f est **non intégrable** sur $[a, +\infty[$.

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx$.

Remarque.

1. On définit de même l'intégrale $\int_{-\infty}^{b} f(x)\ dx$ pour une fonction continue sur $]-\infty, b]$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx + \int_c^{+\infty} f(x)\ dx$.
   L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx$ converge si et seulement si $\int_{-\infty}^{c} f(x)\ dx$ et $\int_c^{+\infty} f(x)\ dx$ sont convergentes.

8.1.2 Intégrale sur $[a, b[$ d'une fonction non bornée

Définition. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$.

— Si la limite de l'intégrale $\int_a^X f(x)\, dx$ quand X tend vers b **existe** et est **finie**, on dit que $\int_a^b f(x)\, dx$ **converge** ou que $\int_a^b f(x)\, dx$ est **définie** ou que la fonction f est **intégrable** sur $[a, b[$ et on note : $\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{X \to b} \int_a^X f(x)\, dx$.

— Dans le cas contraire, l'intégrale est **divergente** ou f est **non intégrable** sur $[a, b[$.

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale : $\int_0^1 \ln x\, dx$.

Remarque.

On définit de même l'intégrale $\int_a^b f(x)\, dx$ pour une fonction continue sur $]a, b]$ avec $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$.

8.2 Propriétés

Deux intégrales sont de même nature signifie que les deux intégrales sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.

8.2.1 Relation de Chasles

Propriété. Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$ et $a' \in [a, +\infty[$.
Alors $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ et $\int_{a'}^{+\infty} f(x)\, dx$ sont de même nature.
De plus, si ces intégrales convergent, $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \int_a^{a'} f(x)\, dx + \int_{a'}^{+\infty} f(x)\, dx$

Propriété. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ avec $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$ et $a' \in [a, b[$.
Alors $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_{a'}^b f(x)\, dx$ sont de même nature.
De plus, si ces intégrales convergent, $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{a'} f(x)\, dx + \int_{a'}^b f(x)\, dx$

8.2.2 Positivité de l'intégrale

Propriété. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent.

$$\text{Si } f \leq g \quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\text{Si} \quad f \geq 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \geq 0.$$

Propriété. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b[$ avec $\displaystyle\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$ telles que $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ convergent.

$$\text{Si } f \leq g \quad \text{alors} \quad \int_a^{b} f(x)\,dx \leq \int_a^{b} g(x)\,dx$$

En particulier, l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\text{Si} \quad f \geq 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^{b} f(x)\,dx \geq 0.$$

8.2.3 Linéarité de l'intégrale

Propriété. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ convergent.

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f+g)(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_a^{+\infty} (f+g)(x)\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$.
2. Pour tout réel λ, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

Par ces deux points, nous avons la **linéarité de l'intégrale** :
pour tous réels λ, μ, $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx$ converge et $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$

Propriété. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b[$ avec $\lim_{x \to b^-} f(x) = \infty$ telles que $\int_a^b f(x)\, dx$ et $\int_a^b g(x)\, dx$ convergent.

1. $\int_a^b (f+g)(x)\, dx$ converge et $\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$.
2. Pour tout réel λ, $\int_a^b \lambda f(x)\, dx$ converge et $\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$.

Par ces deux points, nous avons la **linéarité de l'intégrale** :
pour tous réels λ, μ, $\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx$ converge et $\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$

8.3 Intégrales de référence

8.3.1 Intégrale de Riemann

Intégrale de Riemann en $+\infty$

C'est l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **converge** si et seulement si $\alpha > 1$ et vaut $\frac{1}{\alpha - 1}$.

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ **diverge** si $\alpha \leq 1$.

Intégrale de Riemann en 0

C'est l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ où $\beta \in \mathbb{R}$.

$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ **converge** si et seulement si $\beta < 1$ et vaut $\frac{1}{1 - \beta}$.
$\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ **diverge** si $\beta \geq 1$.

8.4 Intégrales de fonctions positives

On suppose dans tout ce qui suit que soit $b = \infty$ ou que soit $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \infty$.

8.4.1 Critère de comparaison

Propriété. Soient deux fonctions f et g continues sur $[a, b[$ telles que

$$\forall\ x \in [a, b[, \quad 0 \leq f(x) \leq g(x)$$

Alors :

— si $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ **diverge** $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$ **diverge**.

— si $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$ **converge** $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ **converge**.

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ dx$.

8.4.2 Critère d'équivalence

Définition. Deux fonctions f et g sont **équivalentes** en un point b si et seulement si :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

On note alors : $f \underset{b}{\sim} g$

Propriété. Soient deux fonctions f et g continues positives sur $[a, b[$.

Si$f \underset{b}{\sim} g$ alors les $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\ dx$ sont **de même nature**.

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^4 + x^2 + 2}\ dx$.

8.4.3 Critère d'une fonction négligeable devant une autre

Définition. Soient deux fonctions f et g définies au voisinage de b.
On dit que f est **négligeable** devant g au voisinage de b si et seulement si :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors : $f \underset{b}{=} o(g)$

Propriété. Soient deux fonctions f et g continues positives sur $[a, b[$.
Si $f \underset{b}{=} o(g)$ alors :

— Si $\int_a^b g(x)\, dx$ **converge** $\int_a^b f(x)\, dx$ **converge**.

— Si $\int_a^b f(x)\, dx$ **diverge** $\int_a^b g(x)\, dx$ **diverge**

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

8.5 Intégrales de fonctions quelconques

8.5.1 Intégrales absolument convergentes

Définition. Soit f une fonction continue sur $[a, b[$.
$\int_a^b f(x)\, dx$ est **absolument convergente** si $\int_a^b |f(x)|\, dx$ est **convergente**.

Propriété. Si $\int_a^b f(x)\, dx$ est **absolument convergente** alors $\int_a^b f(x)\, dx$ est **convergente**.

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale : $\int_1^{+\infty} \frac{x\cos(x^2)}{x^3+1}\, dx$.

8.6 Comparaison intégrales et séries

Propriété. Soit $f : [0;+\infty[\to [0;+\infty[$ une fonction **positive** , **continue** et **décroissante** , alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_0^\infty f(x)\,dx$ sont de **même nature**.

Démonstration :

$\forall t \in [n-1, n],\ f(n) \leq f(t) \leq f(n-1)$ car f est décroissante.

On a donc : $\int_{n-1}^{n} f(n)\,dt \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq \int_{n-1}^{n} f(n-1)\,dt$

$\iff f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq f(n-1)$

$\iff \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n-1)$

D'une part, $\sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt = \int_0^N f(t)\,dt$

D'autre part, en posant : $S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$, on a : $S_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} f(n) = \sum_{n=2}^{N} f(n-1)$

Donc : $S_N \leq \int_0^N f(t)\,dt \leq S_{N-1} + f(0)$.

— Si S_N converge et a pour somme S, $\int_0^N f(t)\,dt$ est majorée.

Or $\int_0^x f(t)\,dt$ est une fonction croissante (car $\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = f(x)$ et $f(x) > 0$).

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

— Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, alors S_N est majorée.

Or S_N est croissante (car $S_N = \sum_{n=1}^{N} f(n)$ et $f(n) > 0$).

Donc S_N converge.

Exemple

Intégrale de Riemann en $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ est positive, continue et décroissante sur $[1;+\infty[$.

La série de terme général $u_n = f(n) = \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.