

DIN 5473 - Logik und Mengenlehre

Inhaltsverzeichnis

Lizenz - Bitte lesen !!!	3
Überblick	5
1. Festlegung des begrifflichen Rahmens	6
1.1. Individuen	7
1.2. Klassen und Mengen	8
1.3. Relationen und Funktionen	9
1.4. Objekt-Sprache und Meta-Sprache	10
1.5. Variablen	11
1.6. Konstanten	12
1.7. Formeln	13
1.8. Terme	14
2. Logik	15
2.1. Junktoren	16
2.2. Quantoren	19
2.3. Kennzeichnungs-Operator	20
2.4. Modaloperatoren	21
2.5. Metatheoretische Operatoren	22
3. Klassen und Mengen	23
4. Standard-Zahlen-Mengen	25
5. Relationen	26
6. Funktionen	27
7. Strukturen	28
8. Kardinalzahlen	29
Anhang	30
MIT - Lizenz - Deutsch	31
MIT - Lizenz - Englisch	32
MIT - Lizenz - Französisch	33
MIT - Lizenz - Spanisch	34
MIT - Lizenz - Polnisch	35
MIT - Lizenz - Russisch	36

Lizenz

Bitte lesen Sie diese Lizenz gründlich durch, bevor Sie Lazarus die Dokumentation oder Teile dieser Software verwenden wollen. Sollten Sie nicht mit den hier aufgeführten Bedingungen einverstanden sein, ist die Nutzung oder Verwendung des Quellcodes zu diesen Produkt (oder auch Teile davon) nicht gestattet.

Bei der Verwendung darf kein kommerzieller Zweck der Gewinnerzielung entstehen !

Freeware und Shareware-Programme zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass sie kostenlos beziehungsweise gegen einen relativ geringen Preis dem Nutzer die Verwendung teilweise hochwertiger Computerprogramme ermöglichen, die sich durchaus mit kommerziellen Produkten messen lassen können. Daher sind diese Softwaretypen gerade in Zeiten begrenzter finanzieller Mittel - auch im schulischen Umfeld sehr beliebt und kommen in vielfältigen Gebieten zum Einsatz (zum Beispiel bei der Netzwerkadministration, bei der Einrichtung von Servern, bei der Installation von Internet-Software auf den Nutzer-PCs oder bei Office-Anwendungen).

Da es sich auch bei Free- und Sharewareprogrammen um Computerprogramme handelt, die gemäß § 69a Urheberrechtsgesetz (UrhG) urheberrechtlich geschützt sind, liegt es bei diesen Softwareprodukten weitgehend in den Händen des Rechteinhabers zum Beispiel des Programmierers - zu bestimmen, in welchem Umfang diese durch dritte Personen genutzt werden dürfen.

Dabei können Freeware- und Sharewareprogramme nach den Lizenzbedingungen in der Regel beliebig kopiert und weitergegeben werden, dagegen ist vor allem eine Veränderung der Programme üblicherweise nicht gestattet. Es ist deshalb eigentlich auch nicht korrekt, wenn im Zusammenhang mit Free- und Shareware immer wieder der Begriff der "Public-Domain-Software" verwendet wird, der frei übersetzt "Software, die im öffentlichen Eigentum steht" bedeutet. Denn dies impliziert, dass die Software von der Öffentlichkeit beliebig genutzt und damit auch verändert werden darf (also gemeinfrei ist); letzteres ist bei Free- und Shareware aber gerade nicht der Fall.

Welche Arten von Shareware gibt es ?

Shareware kann man in zahlreiche Unterkategorien einteilen. So kann Shareware beispielsweise werbegestützte Software oder "Adware" sein, welche dem User Werbung anzeigen soll. Dies hat den Zweck Einnahmen für den Eigentümer zu generieren. Eine weitere Art bezeichnet man als Demoware, wobei es sich hier nur um eine Demoversion der Software handelt.

Dabei ist es oft eine Testversion mit einer festgelegten Zeitspanne ("Trialware"). In anderen Fällen kann die gesamte Funktionalität der Anwendung deaktiviert sein, so dass man zwar alle Funktionen sehen kannst, aber dafür bezahlen muss ("Crippleware").

Weiterhin gibt es auch "Freemium"-Shareware, bei welcher einige Funktionen in der kostenlosen Version verfügbar sind, Sie diese jedoch bezahlen müssen, um die volle Funktionalität freischalten zu können.

Obwohl Shareware eine gute Option für jeden ist, der Software testen möchte, bevor man sich zu einem Kauf verpflichtet, sollten Sie dennoch vorsichtig sein. Denn Cyberkriminelle sind nur allzu bereit, den Eifer der Menschen auszunutzen, etwas gratis zu bekommen.

Dieses Versprechen freier Software ist eine gängige Social-Engineering-Taktik, mit der sie Internetnutzer dazu bringen, bösartige Software herunterzuladen.

Bei Shareware gibt es ebenso wie bei anderen Softwareprodukten keine Garantie dafür, dass die Software virenfrei ist. Aus diesem Grund ist es wichtig, dass der Benutzer sein Antivirenprogramm auf dem aktuellen Stand hält, bevor er Shareware herunterlädt.

Prinzipiell kann jeder Shareware herunterladen, solange er einen Computer hat, der die Systemanforderungen des Programms erfüllt. Es gibt jedoch einige Seiten, die nur Benutzern in bestimmten Ländern das Herunterladen von Shareware erlauben.

Nicht alle Shareware-Programme werden überall zum Kauf angeboten. Der beste Weg, um zu sehen, wo man ein bestimmtes Programm kaufen kann, ist, die Website des Entwicklers zu besuchen und herauszufinden, auf welchen Plattformen das Programm erhältlich ist.

Freeware ist Software, die kostenlos heruntergeladen werden kann, aber keine Lizenzgebühren mehr verlangt. Im Gegensatz dazu erfordert Shareware normalerweise eine Lizenzgebühr für den vollen Zugang zu allen Funktionen. Beide Modelle ermöglichen es Benutzern, Software kostenlos auszuprobieren, aber Shareware ist normalerweise etwas umfangreicher und bietet mehr Funktionen.

Dieses Software-Produkt besitzt eine Hybrid-Lizenz zwischen Free- und Share-Ware. Sie können es kostenlos einsetzen und an andere Personen weitergeben, solange Sie keine Teile der Software ändern oder kopieren. Es bedarf einer schriftlichen Einwilligung des Entwicklers (Jens Kallup), sollten Teile geändert oder übernommen werden.

Sie können dieses Produkt auf mehreren lokalen Computer gleichzeitig nutzen. Eine öffentlich zugängliche Nutzung ist nicht bestrebt mit der aktuellen Version.

Obwohl bei der Entwicklung dieser Software viel Sorgfalt gepflegt wurde, können Fehler nicht ausgeschlossen werden.

Es werden daher keine Garantien auf entstanden Schäden oder Kosten übernommen, die während der Verwendung dieser Software entstehen. Alles erfolgt auf Eigenes Risiko !!!

Für zukünftige Entwicklungen können Sie jedoch einen kleinen Obolus in Form von Spenden hinterlegen.

Überblick

In dieser Norm werden Zeichen und Begriffe der Logik und Mengenlehre behandelt. Eingeschlossen sind dabei Zeichen und Begriffe der Relationen und Funktionen betreffen. Der Zweck der Norm ist es, für Anwender in Schule, Hochschule, Wissenschaft und Technik einen in sich konsistenten Satz von Bezeichnungen und Festlegungen auszuwählen, um dadurch zur Vereinheitlichung beizutragen und die Kommunikation zu erleichtern.

Gegenstand der Norm sind in erster Linie die Zeichen und Begriffe. Die angegebenen Sprachweisen können nicht in jedem Fall wörtlich eingehalten werden, wenn man formale Ausdrücke verbalisieren will; ähnliche Ausdrucksweisen können ebenfalls annehmbar sein.

Die vorliegende Norm ist mit **DIN 1302 / 08.08** verträglich und entspricht **ISO 31-11;1978** Abschnitte 1 und 2, führt aber darüber hinaus.

1. Festlegung des begrifflichen Rahmens

Diese Norm enthält begriffliche Festlegungen sehr allgemeiner Art. Es ist deshalb erforderlich, den zu Grunde liegenden begrifflichen Rahmen näher zu beschreiben.

1.1. Individuen

1.2. Klassen und Mengen

1.3. Relationen und Funktionen

1.4. Objekt-Sprache und Meta-Sprache

1.5. Variablen

1.6. Konstanten

1.7. Formeln

1.8. Terme

1.1. Individuen

Es werden gewisse Objekte vorausgesetzt, die als Individuen bezeichnet werden und über die man Aussagen machen möchte;

Individuen treten als Elemente von Klassen auf,

zwischen Individuen können Relationen bestehen,

Individuen können Argumente und Werte von Funktionen sein,

Dabei brauchen Individuen (*wie es vielleicht der Name vermuten läßt*) unteilbar und ohne innere Struktur zu sein. Vielmehr können sie durchaus aus anderen Objekten aufgebaut sein.

Es ist ein Zweck der Mengenlehre, möglichst viele Objekte als Individuen verfügbar zu machen.

Darunter zum Beispiel, und im insbesondere: mathematische Objekte wie Zahlen, Punkte, Räume verschiedener Art, Relationen und Funktionen.

Die Gesamtheit der Individuen ist in der Mengenlehre möglichst umfassend intendiert.

Daneben ist es oft zweckmäßig, Individuen einer bestimmten Sorte auszuzeichnen, bei denen es sich etwa um Zahlen einer bestimmten Art, Punkte eines bestimmten Raumes oder physikalische Objekte wie zum Beispiel: die Anzahl der Schüler in einem Klassenzimmer handelt, die dann einen (*speziellen*) Individuenbereich einer Sorte bilden.

1.2. Klassen und Mengen

Neben Individuen betrachtet man Zusammenfassungen von Individuen die man Klassen (*von Individuen*) nennt. Die in einer Klasse zusammengefaßten Individuen sind die Elemente der Klasse.

Von besonderen Interesse sind Mengen.
Das sind spezielle Klassen, die selbst auch Individuen sind.

Die Axiome der Mengenlehre machen Aussagen darüber, welche Klassen Mengen sind.

Die Norm enthält entsprechende Hinweise.

Die bekannten Zahlenbereiche (siehe Abschnitt 4) und viele andere mathematische Objekte sind Mengen.

So ist die Klasse aller Mengen selbst keine Menge, und auch die Klasse aller Individuen (Allklasse) ist keine Menge.

Es wird hier ein begrifflicher Rahmen benutzt, der neben Mengen auch andere Klassen enthält. Man kann auch einen engeren Rahmen wählen, in dem nur Mengen vorkommen. Das wird in einer unreflektierten Weise oft gemacht, ist aber weder zwingend noch vorteilhaft.

Man muß dann zum Beispiel in Kauf nehmen, dass gewisse sprachliche Ausdrücke (*die Klassen bezeichnen, die keine Mengen sind*) bedeutungsleer werden.

1.3. Relationen und Funktionen

In der Mengenlehre zeigt man, dass man (geordnete Paare von Individuen definieren kann, die auch wieder Individuen sind).

Dann lassen sich Relationen und Funktionen als spezielle Klassen auffassen, und zwar Relationen als Klassen von Paaren und Funktionen als rechtseindeutige Relationen.

Relationen und Funktionen können insbesondere Mengen sein, und bei den in der Praxis auftretenden Relationen und Funktionen ist das gewöhnlich der Fall.

1.4. Objekt-Sprache und Meta-Sprache

In der Logik unterscheidet man bei der Untersuchung eines logischen Systems zwischen der Objektsprache, die die formale Logiksprache des betreffenden logischen Systems ist und die das Objekt der logischen Untersuchung ist, und der Metasprache, in der diese Untersuchung erfolgt.

Die Objektsprache hat eine genau festgelegte Syntax, welche die wohlgeformten Ausdrücke der Sprache festlegt, und eine Semantik, die angibt, wie die Sprache zu interpretieren ist.

Die in dieser Norm eingeführten sprachlichen Ausdrucksmittel konstituieren eine reichhaltige logische Sprache, die geeignet ist, mathematische Sachverhalte auszudrücken.

Als Metasprache, deren inhaltliches Verständnis vorausgesetzt werden muß, die zunächst natürliche Sprache, die man aber zugleich mit der Explikation der Objektsprache präzisiert und erweitert, indem man die objektsprachlichen Bezeichnungen in inhaltlicher Weise übernimmt.

Für die mathematische Praxis ist die Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache nicht erforderlich und eine durchgängige Formulierung gar nicht praktikabel.

Es genügt, die objektsprachlichen formalen Ausdrücke bei Bedarf inhaltlich zu verwenden. Für eine systematische Explikation der Ausdrucksmittel ist jedoch eine Darstellung als formale logische Sprache zweckmäßig.

1.5. Variablen

In der Sprache verwendet man gebundene Variablen, um sich in allgemeiner Weise auf gewisse Objekte zu beziehen. Die Gesamtheit der Objekte, auf die sich eine Variable bezieht, bildet den Bereich der Variablen.

In einer Interpretation der Sprache muß die Variable verwendet sein, dass heißt: dieser Bereich muß festgelegt sein, Oft hat man eine einsortige Sprache, dass heißt: ALLE Variablen sind von derselben Sorte und haben bei Interpretationen jeweils denselben Bereich.

Die Bereiche von Individuen-Variablen bestehen nur aus Individuen. Dabei redet man von universellen Individuen-Variablen, wenn der Bereich die Allklasse ist. Es lassen sich auch Individuen-Variablen spezieller Sorten einführen, deren Bereich jeweils aus den Individuen einer speziellen Sorte besteht,

In dieser Norm stehen die Buchstaben **x**, **y**, **z** (bei Bedarf mit Unterscheidungs-Indizes) für Individuen-Variablen, wobei darauf verzichtet wird, Voraussetzungen über die Bereiche genauer zu spezifizieren.

Wenn Variablen in einen Ausdruck frei vorkommen, so können sie - oft nur vorübergehend - mit einem Element aus ihren Bereich belegt werden. Für eine Interpretation von Ausdrücken mit freien Variablen ist auch jeweils eine Belegung der freien Variablen erforderlich.

1.6. Konstanten

Konstanten sind Zeichen der Sprache, die für bestimmte Individuen, Klassen, Relationen oder Funktionen stehen. Eine Interpretation der Sprache legt diese Denotate für die Konstanten fest.

1.7. Formeln

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es insbesondere Formeln. Der Begriff "**Formel**" ist dabei im Sinne von "**Aussageform**" zu verstehen. Das heißt: es handelt sich um sprachliche Ausdrücke, die die Form einer Aussage haben, aber noch freie Variablen enthalten dürfen,

Man schreibt auch $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ für eine Formel φ , um Variablen x_0, \dots, x_n hervorzuheben, die in der Formel frei vorkommen können. Eine Interpretation muß dann auch eine Belegung dieser freien Variablen enthalten. Wenn keine freien Variablen vorkommen, so liegt eine Aussage vor.

Dann reicht es für die Interpretation, dass für die gebundenen Variablen Bereiche und für die Konstantensymbole Denotate bereitgestellt werden.

Formeln drücken Behauptungen aus und werden durch Wahrheitswerte **W** für wahr oder **F** für falsch bewertet.

Wenn eine Formel bei einer Interpretation durch den Wahrheitswert W bewertet wird, so sagt man auch sie sei wahr oder erfüllt die Interpretation.

In der Logik betrachtet man Formeln als syntaktische Objekte einer Metatheorie, die Syntax und Semantik umfaßt.

Der normale inhaltliche Gebrauch der Sprache besteht darin, eine Formel hinzuschreiben und sie dadurch (als erfüllt) zu behaupten. Die gemeinte Interpretation ist dabei dem Kontext zu entnehmen.

Oft sind mehrere Interpretationen gemeint:

etwa daß die Behauptung für alle Bedingungen der freien Variablen ist, oder

alle Interpretationen ist, oder

es wird die Behauptung aufgestellt, die in Abhängigkeit von den Werten gewisser Variablen steht.

In dieser Norm stehen die Buchstaben φ, ψ, θ für Formeln bei syntaktischer Betrachtung bzw. Behauptungen (bei inhaltlicher Verwendung).

1.8. Terme

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es ferner Terme. Diese haben als semantische Werte, Objekte und können als Namen dieser Objekte (relativ zu einer Interpretation) aufgefaßt werden. Man redet von Individuentermen, wenn diese Objekte Individuen sind, wie es zum Beispiel bei den Individuenvariablen der Fall ist.

Die Werte von Termen können auch Klassen von Individuen, Relationen zwischen Individuen und Funktionen von Individuen in Individuen sein.

Entsprechend kann man solche Terme als Klassenterme, Relationsterme bzw. Funktionsterme bezeichnen.

In dieser Norm stehen ***a***, ***b*** für Individuen, ***A***, ***B*** für Klassen, ***Q***, ***R*** für Relationen, ***f***, ***g*** für Funktionen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Individuenterne, Klassenterme, Relationsterme, Funktionsterme (bei syntaktischer Betrachtung).

2. Logik

2.1. Junktoren

2.2. Quantoren

2.3. Kennzeichnungs-Operator

2.4. Modaloperatoren

2.5. Metatheoretische Operatoren

2.1. Junktoren

Junktoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, dass sie Formeln zu neuen Formeln verbinden. Semantisch ist ein Junktor durch eine Wahrheitstafel charakterisiert, die in der Definitionsspalte angegeben ist. Für die Wahrheitswerte wird hier **W** (wahr) und **F** (falsch) geschrieben. In der englischsprachigen Literatur findet man **T** (true) und **F** (false). Man schreibt auch **1** für W und **0** für F.

Nr.	Zeichen / Verwendung	Sprachweise / Benennung	Definition	Bemerkungen															
2.1.1.	$\neg \varphi$	nicht φ Negation von φ	<table><tr><td>φ</td><td>$\neg \varphi$</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td></tr></table>	φ	$\neg \varphi$	W	F	F	W	<p>Die Negation einer Gleichung oder einer mit Relationszeichen gebildeten Formel wird oft durch Durchstreichen angegeben. Man schreibt dann:</p> <p>$a \neq b$ für $\neg (a = b)$, $a \notin A$ für $\neg (a \in A)$</p>									
φ	$\neg \varphi$																		
W	F																		
F	W																		
2.1.2.	$\varphi \wedge \psi$	φ und ψ . Konjunktion von φ und ψ	<table><tr><td>φ</td><td>ψ</td><td>$\varphi \wedge \psi$</td></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	W	W	W	F	W	F	W	F	F	F	F	F	LogischeUND Verknüpfung.
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$																	
W	W	W																	
F	W	F																	
W	F	F																	
F	F	F																	
2.1.3.	$\varphi \vee \psi$	φ oder ψ . Disjunktion von φ oder ψ	<table><tr><td>φ</td><td>ψ</td><td>$\varphi \vee \psi$</td></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	W	W	W	F	W	W	W	F	W	F	F	F	LogischeODER Verknüpfung
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$																	
W	W	W																	
F	W	W																	
W	F	W																	
F	F	F																	
2.1.4.	$\varphi \rightarrow \psi$	Wenn φ , so ψ . Subjunktion von φ und ψ . φ subjunktiert ψ . φ impliziert ψ .	<table><tr><td>φ</td><td>ψ</td><td>$\varphi \rightarrow \psi$</td></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>W</td></tr></table>	φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$	W	W	W	F	W	W	W	F	F	F	F	W	Fü $\varphi \rightarrow \psi$ wird auch: $\varphi \Rightarrow \psi$. geschrieben. Man beachte, dass Subjunktion nicht das selbe besagt wie logische Folgerung. Aus einer Formel folgt logisch eine Formel, wenn die damit gebildete Subjunktion allgemeingültig ist.
φ	ψ	$\varphi \rightarrow \psi$																	
W	W	W																	
F	W	W																	
W	F	F																	
F	F	W																	
2.1.5	$\varphi \leftrightarrow \psi$	φ genau dann, wenn ψ . Äquivalenz von φ und ψ .	<table><tr><td>φ</td><td>ψ</td><td>$\varphi \leftrightarrow \psi$</td></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>W</td></tr></table>	φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$	W	W	W	F	W	F	W	F	F	F	F	W	Fü $\varphi \leftrightarrow \psi$ wird auch $\varphi \Leftrightarrow \psi$ geschrieben. Man beachte, dass Äquivalenz nicht das selbe besagt wie logische Gleichheit. Zwei Formeln sind logisch gleich, wenn
φ	ψ	$\varphi \leftrightarrow \psi$																	
W	W	W																	
F	W	F																	
W	F	F																	
F	F	W																	

2.2. Quantoren

Quantoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, dass sie aus einer Formel in Verbindung mit einer Variablen, die dadurch gebunden wird, eine Formel bilden. Bei den relativierten Quantoren tritt noch ein Klassenterm hinzu, auf den relativiert wird.

Nr.	Zeichen / Verwendung	Sprachweise / Benennung	Definition	Bemerkungen
2.2.1.	$\forall x \varphi(x)$ relativierter Allquantor: $\forall x \in A \varphi(x)$	Für alle x (gilt) $\varphi(x)$. Für alle x aus A (gilt) $\varphi(x)$.	Semantik entsprechend der Sprachweise $\forall x (x \in A \longrightarrow \varphi(x))$	Man verwendet auch mehrstellige Allquantoren und Existenzquantoren: $\forall x_1 x_2 \dots x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für: $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ <hr/> $\exists x_1 x_2 \dots x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für: $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$
2.2.2	$\exists x \varphi(x)$ relativierter Allquantor: $\exists x \in A \varphi(x)$	Es gibt mindestens ein x mit $\varphi(x)$ Es gibt mindestens ein x aus A mit $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprachweise $\exists x (x \in A \wedge \varphi(x))$	<hr/> $\exists x_1 x_2 \dots x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für: $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$
2.2.3.	$\exists^1 x \varphi(x)$ relativierter Allquantor: $\exists^1 x \in A \varphi(x)$	Es gibt genau ein x mit $\varphi(x)$ Es gibt genau ein x aus A mit $\varphi(x)$	$\exists y \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow x = y)$ <hr/> $\exists y \in A \forall x \in A (\varphi(x) \longleftrightarrow x = y)$	Man schreibt auch $\exists! x \varphi(x)$. Das Zeichen \exists^1 wird empfohlen, da es sich nicht leicht vereingemallgemeinern lässt. $\exists^{>n}$ es gibt mehr als n $\exists^{<n}$ es gibt weniger als n

3. Klassen und Mengen

Es stehen **A**, **B** für Klassen und **a**, **b** für Individuen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Klassenterme und Individuenterme (bei syntaktischer Betrachtung). Als Elemente von Klassen treten genau die Individuen auf, die man deshalb auch oft einfach als Elemente bezeichnet.

Nr.	Zeichen / Verwendung	Sprachweise / Benennung	Definition	Bemerkungen
3.1.				
3.2.				
3.3.				
3.4.				
3.5.				
3.6.				
3.7.				
3.8.				
3.9				
3.10.				
3.11.				
3.12.				
3.13.				
3.14.				
3.15.				

--	--	--	--	--

4. Standard-Zahlen-Mengen

Die unten eingeführten Zeichen haben eine Standard-Bedeutung. Sie sollen nicht zur Bezeichnung anderer Mengen oder als Variablen verwendet werden.

Die Herausnahme der Null aus einer dieser Mengen wird durch das Hochzeichen $*$ gekennzeichnet. So ist zum Beispiel \mathbb{N}^* die Menge der natürlichen Zahlen ausschließlich 0. Einschränkung auf die positiven Zahlen der Menge wird durch das Hochzeichen $+$ gekennzeichnet. So ist zum Beispiel mit \mathbb{Q}^+ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

Nr.	Zeichen / Verwendung	Sprachweise / Benennung	Definition	Bemerkungen
4.1.				
4.2.				
4.3.				
4.4.				
4.5.				

Anhang

A. MIT - Lizenzen

A.1. Deutsch

A.2. Englisch

A.3. Französisch

A.4. Spanish

A.5. Polnisch

A.6. Russisch

MIT-Lizenz / MIT License

Deutsche Übersetzung (inoffiziell)

Copyright (c) 2025 Jens Kallup

Hiermit wird jeder Person, die eine Kopie dieser Software und der zugehörigen Dokumentationsdateien (die "Software") erhält, kostenlos die Erlaubnis erteilt, uneingeschränkt mit der Software zu handeln, einschließlich und ohne Einschränkung des Rechts, sie zu verwenden, zu kopieren, zu modifizieren, zusammenzuführen, zu veröffentlichen, zu verbreiten, zu unterlizenzieren und/oder zu verkaufen, und Personen, denen diese Software zur Verfügung gestellt wird, dies zu erlauben, unter den folgenden Bedingungen:

Der obige Urheberrechtshinweis und dieser Genehmigungshinweis sind in allen Kopien oder wesentlichen Teilen der Software beizufügen.

DIE SOFTWARE WIRD OHNE JEDE AUSDRÜCKLICHE ODER IMPLIZIERTE GARANTIE BEREITGESTELLT, EINSCHLIESSLICH DER GARANTIE DER MARKTGÄNGIGKEIT, DER EIGNUNG FÜR EINEN BESTIMMTEN ZWECK UND DER NICHTVERLETZUNG. IN KEINEM FALL SIND DIE AUTOREN ODER COPYRIGHTINHABER FÜR JEDLICHEN SCHADEN ODER SONSTIGE ANSPRÜCHE HAFTBAR, SEI ES AUFGRUND EINER VERTRAGSKLAGE, EINER UNERLAUBTEN HANDLUNG ODER ANDERWEITIG, DER AUS DER SOFTWARE ODER DER VERWENDUNG ODER ANDEREN GESCHÄFTEN MIT DER SOFTWARE ENTSTEHT.

Original English Version

Copyright (c) 2025 Jens Kallup

Permission is hereby granted, free of charge, to any person obtaining a copy of this software and associated documentation files (the "Software"), to deal in the Software without restriction, including without limitation the rights to use, copy, modify, merge, publish, distribute, sublicense, and/or sell copies of the Software, and to permit persons to whom the Software is furnished to do so, subject to the following conditions:

The above copyright notice and this permission notice shall be included in all copies or substantial portions of the Software.

THE SOFTWARE IS PROVIDED "AS IS", WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EXPRESS OR IMPLIED, INCLUDING BUT NOT LIMITED TO THE WARRANTIES OF MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE AND NONINFRINGEMENT. IN NO EVENT SHALL THE AUTHORS OR COPYRIGHT HOLDERS BE LIABLE FOR ANY CLAIM, DAMAGES OR OTHER LIABILITY, WHETHER IN AN ACTION OF CONTRACT, TORT OR OTHERWISE, ARISING FROM, OUT OF OR IN CONNECTION WITH THE SOFTWARE OR THE USE OR OTHER DEALINGS IN THE SOFTWARE.

Traduction française (traduction non officielle)

Copyright (c) 2025 Jens Kallup

La permission est accordée, gratuitement, à toute personne obtenant une copie de ce logiciel et des fichiers de documentation associés (le "Logiciel"), de traiter dans le Logiciel sans restriction, y compris sans limitation les droits d'utiliser, de copier, de modifier, de fusionner, de publier, de distribuer, de sous-licencier et/ou de vendre des copies du Logiciel, et de permettre aux personnes à qui le Logiciel est fourni de le faire, sous réserve des conditions suivantes:

La mention de copyright ci-dessus et la présente autorisation doivent être incluses dans toutes les copies ou parties substantielles du Logiciel.

LE LOGICIEL EST FOURNI "EN L'ÉTAT", SANS GARANTIE D'AUCUNE SORTE, EXPRESSE OU IMPLICITE, Y COMPRIS MAIS SANS S'Y LIMITER AUX GARANTIES DE QUALITÉ MARCHANDE, D'ADÉQUATION À UN USAGE PARTICULIER ET D'ABSENCE DE CONTREFAÇON. EN AUCUN CAS, LES AUTEURS OU LES DÉTENTEURS DES DROITS D'AUTEUR NE PEUVENT ÊTRE TENUS RESPONSABLES DE TOUTE RÉCLAMATION, DOMMAGE OU AUTRE RESPONSABILITÉ, QUE CE SOIT DANS LE CADRE D'UN CONTRAT, D'UN DÉLIT OU AUTREMENT, DÉCOULANT DE, EN RELATION AVEC LE LOGICIEL OU L'UTILISATION OU AUTRES RELATIONS DANS LE LOGICIEL.

Traducción al español (traducción no oficial)

Copyright (c) 2025 Jens Kallup

Por la presente se concede permiso, libre de cargos, a cualquier persona que obtenga una copia de este software y los archivos de documentación asociados (el "Software"), para tratar con el Software sin restricción, incluyendo sin limitación los derechos a usar, copiar, modificar, fusionar, publicar, distribuir, sublicenciar y/o vender copias del Software, y para permitir a las personas a las que se les proporcione el Software hacerlo, sujeto a las siguientes condiciones:

El aviso de copyright anterior y este aviso de permiso deberán incluirse en todas las copias o partes sustanciales del Software.

EL SOFTWARE SE PROPORCIONA "TAL CUAL", SIN GARANTÍA DE NINGÚN TIPO, EXPRESA O IMPLÍCITA, INCLUYENDO PERO NO LIMITADO A LAS GARANTÍAS DE COMERCIALIZACIÓN, IDONEIDAD PARA UN PROPÓSITO PARTICULAR Y NO INFRACCIÓN. EN NINGÚN CASO LOS AUTORES O TITULARES DE LOS DERECHOS DE AUTOR SERÁN RESPONSABLES DE NINGUNA RECLAMACIÓN, DAÑOS U OTRA RESPONSABILIDAD, YA SEA EN UNA ACCIÓN DE CONTRATO, AGRAVIO O DE OTRO TIPO, QUE SURJA DE, FUERA DE O EN CONEXIÓN CON EL SOFTWARE O EL USO U OTROS TRATOS EN EL SOFTWARE.

Tłumaczenie na j ęzyk polski (nieoficjalne tłumaczenie)

Copyright (c) 2025 Jens Kallup

Niniejszym udziela si ka dej osobie, która otrzyma kopi tego oprogramowania i powi zanych plików dokumentacji (dalej "Oprogramowanie"), bezpłatnego pozwolenia na korzystanie z Oprogramowania bez ogranicze , w tym bez ogranicze do praw u ywania, kopiowania, modyfikowania, ł czenia, publikowania, dystrybuowania, sublicencjonowania i/lub sprzeda y kopii Oprogramowania, a tak e zezwalania osobom, którym Oprogramowanie jest udost pniane, na to samo, z zastrze eniem nast puj cych warunków:

Powy sza informacja o prawach autorskich oraz niniejsza informacja o pozwoleniu musz by doł czone do wszystkich kopii lub istotnych cz ci Oprogramowania.

OPROGRAMOWANIE JEST DOSTARCZANE „TAK JAK JEST”, BEZ JAKIEJKOLWIEK GWARANCJI, WYRA NEJ LUB DOROZUMIANEJ, W TYM MI DZY INNYMI GWARANCJI PRZYDATNO CI HANDLOWEJ, PRZYDATNO CI DO OKRE LONEGO CELU ORAZ NARUSZENIA PRAW. W ADNYM WYPADKU AUTORZY LUB POSIADACZE PRAW AUTORSKICH NIE B D ODPOWIEDZIALNI ZA JAKIEJKOLWIEK ROSZCZENIA, SZKODY LUB INNE ODPOWIEDZIALNO CI, CZY TO W RAMACH UMOWY, CZYNNYCH CZY INNYCH, WYNIKAJ CYCH Z LUB ZWI ZANYCH Z OPROGRAMOWANIEM LUB JEGO U YTKOWANIEM.

()

Copyright (c) 2025 Jens Kallup

(" ,
), , / , , , ,
 , , :
 ,
 .
 " " , - , ,
 , ,
 , - , - , ,
 , - ,
 .

