DK 510.2 : 001.4 : 003.62 DEUTSCHE NORM Juli 1992

Logik und Mengenlehre

Zeichen und Begriffe

DIN 5473

Logic and set theory;
symbols and concepts

Ersatz für
Ausgabe 06.76
und DIN 5474/09.73

© DIN Deutsches Institut für Normung e.V. Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, gestattet.

Inhalt

Seite

1 Anwendungsbereich und Zweck 1
2 Festlegung des begrifflichen Rahmens 2
3 Logik 5
4 Klassen und Mengen 10
5 Standard-Zahlenmengen 13
6 Relationen 14
7 Funktionen 18
8 Strukturen 23
9 Kardinalzahlen 25
Anmerkungen 27

1 Anwendungsbereich und Zweck

In dieser Norm werden Zeichen und Begriffe der Logik und Mengenlehre behandelt. Eingeschlossen sind dabei Zeichen und Begriffe, die Relationen und Funktionen betreffen. Der Zweck der Norm ist es, für Anwender in Schule, Hochschule, Wissenschaft und Technik einen in sich konsistenten Satz von Bezeichnungen und Festlegungen auszuwählen, um dadurch zur Vereinheitlichung beizutragen und die Kommunikation zu erleichtern.

Gegenstand der Norm sind in erster Linie die Zeichen und Begriffe. Die angegebenen Sprechweisen können nicht in jedem Fall wörtlich eingehalten werden, wenn man formale Ausdrücke verbalisieren will; ähnliche Ausdrucksweisen können ebenfalls annehmbar sein.

Die vorliegende Norm ist mit DIN 1302/08.80 verträglich und entspricht ISO 31 – 11:1978, Abschnitte 1 und 2, führt aber darüber hinaus.

Fortsetzung Seite 2 bis 29

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

Alleinverkauf der Normen durch Beuth Verlag GmbH, Burggrafenstraße 6, 1000 Berlin 30
07.92

2 Festlegung des begrifflichen Rahmens

Diese Norm enthält begriffliche Festlegungen sehr allgemeiner Art. Es ist deshalb erforderlich, den zugrundegelegten begrifflichen Rahmen näher zu beschreiben.

2.1 Individuen

Es werden gewisse Objekte vorausgesetzt, die als Individuen bezeichnet werden und über die man Aussagen machen möchte. Individuen treten als Elemente von Klassen auf, zwischen Individuen können Relationen bestehen, Individuen können Argumente und Werte von Funktionen sein. Dabei brauchen Individuen nicht (wie es vielleicht der Name vermuten läßt) unteilbar und ohne innere Struktur zu sein, vielmehr können sie durchaus aus anderen Objekten aufgebaut sein. Es ist ein Zweck der Mengenlehre, möglichst viele Objekte als Individuen verfügbar zu machen, darunter insbesondere mathematische Objekte wie Zahlen, Punkte, Räume verschiedener Art, interessierende Relationen und Funktionen u. ä.

Die Gesamtheit der Individuen ist in der Mengenlehre möglichst umfassend intendiert. Daneben ist es oft zweckmäßig, Individuen einer bestimmten Sorte auszuzeichnen, etwa Zahlen einer bestimmten Art, Punkte eines Raumes, bestimmte physikalische Objekte, Schüler in einem Klassenzimmer o.ä., die dann einen (speziellen) Individuenbereich einer gewissen Sorte bilden.

2.2 Klassen und Mengen

Neben Individuen betrachtet man Zusammenfassungen von Individuen, die man Klassen (von Individuen) nennt. Die in eine Klasse zusammengefaßten Individuen sind die Elemente der Klasse.

Von besonderem Interesse sind Mengen. Das sind spezielle Klassen, die selbst auch Individuen sind. Die Axiome der Mengenlehre machen Aussagen darüber, welche Klassen Mengen sind. Die Norm enthält entsprechende Hinweise. Die bekannten Zahlenbereiche (siehe Abschnitt 5) und viele andere mathematische Objekte sind Mengen. Aber es ist aus logischen Gründen nicht möglich, daß alle Klassen Mengen sind. So ist die Klasse aller Mengen selbst keine Menge, und auch die Klasse aller Individuen (Allklasse) ist keine Menge.

Es wird hier ein begrifflicher Rahmen benutzt, der neben Mengen auch andere Klassen enthält. Man kann auch einen engeren Rahmen wählen, in dem nur Mengen vorkommen. Das wird in einer unreflektierten Weise oft gemacht, ist aber weder zwingend noch besonders vorteilhaft. Man muß dann z. B. in Kauf nehmen, daß gewisse sprachliche Ausdrücke (die Klassen bezeichnen, die keine Mengen sind) bedeutungsleer werden.

2.3 Relationen und Funktionen

In der Mengenlehre zeigt man, daß man (geordnete) Paare von Individuen definieren kann, die auch wieder Individuen sind. Dann lassen sich Relationen und Funktionen als spezielle Klassen auffassen, und zwar Relationen als Klassen von Paaren und Funktionen als rechtseindeutige Relationen. Relationen und Funktionen können insbesondere Mengen sein, und bei den in der Praxis auftretenden Relationen und Funktionen ist das gewöhnlich der Fall.

2.4 Objektsprache und Metasprache

In der Logik unterscheidet man bei der Untersuchung eines logischen Systems zwischen der Objektsprache, die die formale Logiksprache des betreffenden logischen Systems ist und die das Objekt der logischen Untersuchung ist, und der Metasprache, in der diese Untersuchung erfolgt.

Die Objektsprache hat eine genau festgelegte Syntax, welche die wohlgeformten Ausdrücke der Sprache festlegt, und eine Semantik, die angibt, wie die Sprache zu interpretieren ist. Die in dieser Norm eingeführten sprachlichen Ausdrucksmittel konstituieren eine reichhaltige logische Sprache, die geeignet ist, mathematische Sachverhalte auszudrücken.

Als Metasprache, deren inhaltliches Verständnis vorausgesetzt werden muß, dient zunächst die natürliche Sprache, die man aber zugleich mit der Explikation der Objektsprache präzisiert und erweitert, indem man die objektsprachlichen Bezeichnungen in inhaltlicher Weise übernimmt.

Für die mathematische Praxis ist die Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache nicht erforderlich und eine durchgängige Formalisierung gar nicht praktikabel. Es genügt, die objektsprachlichen formalen Ausdrücke bei Bedarf inhaltlich zu verwenden. Für eine systematische Explikation der Ausdrucksmittel ist jedoch eine Darstellung als formale logische Sprache zweckmäßig.

2.5 Variablen

In der Sprache verwendet man gebundene Variablen, um sich in allgemeiner Weise auf gewisse Objekte zu beziehen. Die Gesamtheit der Objekte, auf die sich eine Variable bezieht, bildet den Bereich der Variablen. In einer Interpretation der Sprache muß die Variable vereinbart sein, d. h. dieser Bereich muß festgelegt sein. Oft hat man eine einsortige Sprache, d. h. alle Variablen sind von derselben Sorte und haben bei Interpretationen jeweils denselben Bereich.

Die Bereiche von Individuenvariablen bestehen nur aus Individuen. Dabei redet man von universellen Individuenvariablen, wenn der Bereich die Allklasse ist, doch lassen sich auch Individuenvariablen spezieller Sorten einführen, deren Bereich jeweils aus den Individuen einer speziellen Sorte besteht. In dieser Norm stehen die Buchstaben x, y, z (bei Bedarf mit Unterscheidungsindizes) für Individuenvariablen, wobei darauf verzichtet wird, Voraussetzungen über die Bereiche genauer zu spezifizieren.

Wenn Variablen in einem Ausdruck frei vorkommen, so können sie - oft nur vorübergehend - mit einem Element aus ihrem Bereich belegt werden. Für eine Interpretation von Ausdrücken mit freien Variablen ist auch jeweils eine Belegung der freien Variablen erforderlich.

2.6 Konstanten

Konstanten sind Zeichen der Sprache, die für bestimmte Individuen, Klassen, Relationen oder Funktionen stehen. Eine Interpretation der Sprache legt diese Denotate für die Konstanten fest.

2.7 Formeln

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es insbesondere Formeln. Der Begriff "Formel" ist dabei im Sinne von "Aussageform" zu verstehen, d. h. es handelt sich um sprachliche Ausdrücke, die die Form einer Aussage haben, aber noch freie Variablen enthalten dürfen.

Man schreibt auch $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ für eine Formel φ, um Variablen $x_1, \ldots, x_n$ hervorzuheben, die in der Formel frei vorkommen können. Eine Interpretation muß dann auch eine Belegung dieser freien Variablen enthalten. Wenn keine freien Variablen vorkommen, so liegt eine Aussage vor. Dann reicht es für die Interpretation, daß für die gebundenen Variablen Bereiche und für die Konstantensymbole Denotate bereitgestellt werden.

Formeln drücken Behauptungen aus und werden durch Wahrheitswerte W oder F bewertet. Wenn eine Formel bei einer Interpretation durch den Wahrheitswert W bewertet wird, so sagt man auch, sie sei wahr oder erfüllt (in der Interpretation). In der Logik betrachtet man Formeln als syntaktische Objekte einer Metatheorie, die Syntax und Semantik umfaßt. Der normale inhaltliche Gebrauch der Sprache besteht darin, eine Formel hinzuschreiben und sie dadurch (als erfüllt) zu behaupten. Die gemeinte Interpretation ist dabei dem Kontext zu entnehmen. Oft sind mehrere Interpretationen gemeint, etwa daß die Behauptung für alle Belegungen der freien Variablen oder alle Interpretationen gemeint ist, oder es wird die Behauptung in Abhängigkeit von den Werten gewisser Variablen gesehen.

In dieser Norm stehen die Buchstaben φ, ψ, θ für Formeln (bei syntaktischer Betrachtung) bzw. Behauptungen (bei inhaltlicher Verwendung).

2.8 Terme

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es ferner Terme. Diese haben als semantische Werte Objekte und können als Namen dieser Objekte (relativ zu einer Interpretation) aufgefaßt werden. Man redet von Individuentermen, wenn diese Objekte Individuen sind, wie es z.B. bei den Individuenvariablen der Fall ist. Die Werte von Termen können auch Klassen von Individuen, Relationen zwischen Individuen und Funktionen von Individuen in Individuen sein. Entsprechend kann man solche Terme als Klassenterme, Relationsterme bzw. Funktionsterme bezeichnen.

In dieser Norm stehen a, b für Individuen, A, B für Klassen, Q, R für Relationen, f, g für Funktionen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Individuenterme, Klassenterme, Relationsterme, Funktionsterme (bei syntaktischer Betrachtung).

3 Logik

3.1 Junktoren

Junktoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, daß sie Formeln zu neuen Formeln verbinden. Semantisch ist ein Junktor durch eine Wahrheitstafel charakterisiert, die in der Definitionsspalte angegeben ist. Für die Wahrheitswerte wird hier W (wahr) und F (falsch) geschrieben. In der englischsprachigen Literatur findet man T (true) und F (false). Man schreibt auch 1 für W und 0 für F.

Zu Klammerregeln und weiteren Junktoren siehe Anmerkungen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.1.1	$\neg\varphi$	nicht φ Negation von φ	φ | $\neg\varphi$ W | F F | W	Die Negation einer Gleichung oder einer mit einem Relationszeichen gebildeten Formel wird oft durch Durchstreichen angegeben. Man schreibt: $a \neq b$ für $\neg(a=b)$, $a \notin A$ für $\neg(a \in A)$.
3.1.2	$\varphi \wedge \psi$	φ und ψ, Konjunktion von φ und ψ	φ | ψ | $\varphi \wedge \psi$ W | W | W F | W | F W | F | F F | F | F	
3.1.3	$\varphi \vee \psi$	φ oder ψ, Disjunktion von φ und ψ	φ | ψ | $\varphi \vee \psi$ W | W | W F | W | W W | F | W F | F | F	Es handelt sich um das einschließende Oder, bisweilen auch Und-oder genannt. Zum ausschließenden Entweder-oder siehe Anmerkungen. Als Merkhilfe: Das Zeichen $\vee$ erinnert an den ersten Buchstaben des lateinischen Wortes vel.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.1.4	$\varphi \longrightarrow \psi$	Wenn φ, so ψ, Subjunktion von φ und ψ, φ subjungiert ψ, φ impliziert ψ	φ | ψ | $\varphi \longrightarrow \psi$ W | W | W F | W | W W | F | F F | F | W	Für $\varphi \longrightarrow \psi$ wird auch $\varphi \Longrightarrow \psi$ geschrieben. Man beachte, daß Subjunktion nicht dasselbe besagt wie logische Folgerung. Aus einer Formel folgt logisch eine Formel, wenn die damit gebildete Subjunktion allgemeingültig ist.
3.1.5	$\varphi \longleftrightarrow \psi$	φ genau dann, wenn ψ Äquijunktion von φ und ψ, φ äquivalent zu ψ	φ | ψ | $\varphi \longleftrightarrow \psi$ W | W | W F | W | F W | F | F F | F | W	Für $\varphi \longleftrightarrow \psi$ wird auch $\varphi \Longleftrightarrow \psi$ geschrieben. Man beachte, daß Äquijunktion nicht dasselbe besagt wie logische Äquivalenz. Zwei Formeln sind logisch äquivalent, wenn die damit gebildete Äquijunktion allgemeingültig ist.
3.1.6	$\top$	Verum	$\top$ W	Verum ist eine logische Aussagenkonstante und kann als nullstelliger Junktor betrachtet werden, der für sich allein eine Formel ist.
3.1.7	$\bot$	Falsum	$\bot$ F	Falsum ist eine logische Aussagenkonstante und kann als nullstelliger Junktor betrachtet werden, der für sich allein eine Formel ist.
3.1.8	$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$	Konjunktion über φ_i von 1 bis n	$\bigwedge_{i=1}^{1} \varphi_i =_{\text{def}} \varphi_1$, $\bigwedge_{i=1}^{n+1} \varphi_i =_{\text{def}} (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \wedge \varphi_{n+1})$	Man schreibt auch $\bigwedge(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Als Grenzfall der leeren Konjunktion setzt man: $\bigwedge_{i=1}^{0} \varphi_i =_{\text{def}} \top$.
3.1.9	$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$	Disjunktion über φ_i von 1 bis n	$\bigvee_{i=1}^{1} \varphi_i =_{\text{def}} \varphi_1$, $\bigvee_{i=1}^{n+1} \varphi_i =_{\text{def}} (\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \vee \varphi_{n+1})$	Man schreibt auch $\bigvee(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Als Grenzfall der leeren Disjunktion setzt man: $\bigvee_{i=1}^{0} \varphi_i =_{\text{def}} \bot$.

3.2 Quantoren

Quantoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, daß sie aus einer Formel in Verbindung mit einer Variablen, die dabei gebunden wird, eine Formel bilden. Bei den relativierten Quantoren tritt noch ein Klassenterm hinzu, auf den relativiert wird.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.2.1	$\forall x\, \varphi(x)$ relativierter Allquantor: $\forall x \in A\ \varphi(x)$	Für alle x (gilt) $\varphi(x)$ Für alle x aus A (gilt) $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprechweise $\forall x (x \in A \longrightarrow \varphi(x))$	Man benutzt auch mehrstellige Allquantoren und Existenzquantoren : $\forall x_1 x_2 \ldots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ steht für $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\exists x_1 x_2 \ldots x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ steht für $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Ferner benutzt man mehrstellige relativierte Allquantoren und Existenzquantoren : $\forall x_1 \ldots x_n \in A\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ steht für $\forall x_1 \in A \ldots \forall x_n \in A\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ und $\exists x_1 \ldots x_n \in A\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ steht für $\exists x_1 \in A \ldots \exists x_n \in A\ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Die relativierte Form erspart die Vereinbarung des Bereichs für die Variablen. Man setzt dann automatisch voraus, daß der Bereich der Variablen die Klasse A umfaßt.
3.2.2	$\exists x\, \varphi(x)$ relativierter Existenzquantor: $\exists x \in A\ \varphi(x)$	Es gibt (wenigstens) ein x mit $\varphi(x)$ Es gibt (wenigstens) ein x aus A mit $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprechweise $\exists x (x \in A \wedge \varphi(x))$	
3.2.3	$\exists^1 x\ \varphi(x)$ in relativierter Form: $\exists^1 x \in A\ \varphi(x)$	Es gibt genau ein x mit $\varphi(x)$ Es gibt genau ein x aus A mit $\varphi(x)$	$\exists y \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow x = y)$ $\exists y \in A \forall x \in A (\varphi(x) \longleftrightarrow x = y)$	Man schreibt auch $\exists ! x\, \varphi(x)$. Das Zeichen $\exists^1$ wird empfohlen, da es sich leicht verallgemeinern läßt. So sind z. B. $\exists^n$ (es gibt genau n), $\exists^{>n}$ (es gibt mehr als n), $\exists^{\leq n}$ (es gibt höchstens n) sofort verständlich.

3.3 Kennzeichnungsoperator

Der Kennzeichnungsoperator ist syntaktisch dadurch charakterisiert, daß er aus einer Formel in Verbindung mit einer Variablen, die dabei gebunden wird, einen Term bildet. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\exists^1 x\, \varphi(x)$ erfüllt ist.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.3.1	$\iota x\, \varphi(x)$ in relativierter Form: $\iota x \in A\ \varphi(x)$	Das (eindeutig bestimmte) x mit $\varphi(x)$ Das (eindeutig bestimmte) x aus A mit $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprechweise $\iota x\,(x \in A \wedge \varphi(x))$	Es soll hier nicht festgelegt werden, wie zu verfahren ist, wenn $\neg \exists^1 x\, \varphi(x)$ erfüllt ist.

3.4 Modaloperatoren

Es wird in Abschnitt 3.4 ein Rahmen von Zuständen (möglichen Welten) und eine Erreichbarkeitsrelation zwischen Zuständen vorausgesetzt. Für die Bewertung einer Formel wird jeweils ein Zustand (Ausgangszustand, aktueller Zustand) zugrundegelegt.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.4.1	$\Box \varphi$	Es ist notwendig, daß φ	In allen erreichbaren Zuständen (möglichen Welten) ist φ erfüllt	
3.4.2	$\Diamond \varphi$	Es ist möglich, daß φ	Es gibt (wenigstens) einen erreichbaren Zustand (mögliche Welt), in dem φ erfüllt ist	
3.4.3	$[\alpha]\varphi$	Nach Ablauf von α gilt notwendigerweise φ	Wie in 3.4.1, wobei diejenigen Zustände erreichbar sind, zu denen das Programm α führt	Es wird in 3.4.3 und 3.4.4 vorausgesetzt, daß in der Sprache Ausdrücke für Programme vorhanden sind. Diese sind i. allg. indeterministisch, d. h. sie können von einem Ausgangszustand zu

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.4.4	$\langle\alpha\rangle\varphi$	Nach Ablauf von α gilt möglicherweise φ	Wie in 3.4.2, wobei diejenigen Zustände erreichbar sind, zu denen das Programm α führt	mehreren Endzuständen führen.

3.5 Metatheoretische Zeichen

Die folgenden Zeichen gehören nicht der Objektsprache an. Sie dienen dazu, Aussagen über diese Sprache zu machen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.5.1	$\mathcal{J} \models \varphi$	$\mathcal{J}$ erfüllt φ $\mathcal{J}$ ist Modell von φ	Die Interpretation $\mathcal{J}$ ordnet der Formel φ den Wahrheitswert W zu	Eine Interpretation $\mathcal{J}$ wird gegeben durch Bereiche für die gebundenen Variablen, durch Denotate für die Konstanten und durch eine Belegung, die den freien Variablen Werte aus ihrem Bereich zuweist. Die Bereiche und Konstantendenotate kann man zu einer Struktur zusammenfassen, wie es in Abschnitt 8 für den speziellen Fall, daß nur ein Bereich vorliegt, gemacht ist.
3.5.2	$\models \varphi$	φ ist allgemeingültig	Jede Interpretation erfüllt φ	
3.5.3	$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$	Aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ folgt φ	Jede Interpretation, die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ erfüllt, erfüllt auch φ	Man schreibt auch $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \Vdash \varphi$. Die Folgerung $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \varphi$ ist gleichbedeutend mit der Allgemeingültigkeit der Subjunktion $\models (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \longrightarrow \varphi)$.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.5.4	$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi$	Aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ist φ ableitbar	Aus $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ als Annahmen ist φ mit den Regeln eines Beweiskalküls ableitbar	Der Ableitungskalkül muß angegeben werden oder aus dem Kontext hervorgehen.

4 Klassen und Mengen

Es stehen A, B für Klassen und a, b für Individuen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Klassenterme und Individuenterme (bei syntaktischer Betrachtung). Als Elemente von Klassen treten genau die Individuen auf, die man deshalb auch oft einfach als Elemente bezeichnet.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
4.1	$a \in A$	a ist Element von A	Grundbegriff	Das Elementzeichen $\in$ ist ein stilisiertes kleines griechisches Epsilon.
4.2	$a \notin A$	a ist nicht Element von A	$\neg(a \in A)$	
4.3	$\{x \mid \varphi(x)\}$ in relativierter Form: $\{x \in A \mid \varphi(x)\}$	Klasse (Menge) aller x mit $\varphi(x)$ Klasse (Menge) aller x aus A mit $\varphi(x)$	Grundbegriff $\{x \mid x \in A \wedge \varphi(x)\}$	Man schreibt auch $\{x : \varphi(x)\}$. Der Klassenbildungsoperator $\{\ldots \mid \ldots\}$ macht aus einer Beschreibung $\varphi(x)$, welche Elemente eine Klasse hat, und einer Variablen x, die dabei gebunden wird, einen Namen der Klasse.
4.4	$\{a(x_1,..,x_n) \mid \varphi(x_1,..,x_n)\}$	Klasse (Menge) aller $a(x_1,..,x_n)$ mit $\varphi(x_1,..,x_n)$	$\{z \mid \exists x_1 \ldots \exists x_n (z = a(x_1,..,x_n) \wedge \varphi(x_1,..,x_n))\}$	Der allgemeine Klassenbildungsoperator benutzt an der Stelle der Variablen einen Term, der keine Variable ist. Die Variablen $x_1, \ldots, x_n$, über die sich

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
				die Klassenbildung erstreckt, sind dem Kontext zu entnehmen.
4.5	$\{a_1, \ldots, a_n\}$	Menge mit den Elementen $a_1, \ldots, a_n$	$\{x \mid x = a_1 \vee \ldots \vee x = a_n\}$	Für $n = 1$ handelt es sich um eine Einermenge (Singleton), für $n = 2$ und $a_1 \neq a_2$ um eine Zweiermenge.
4.6	$\emptyset$	leere Menge	$\{x \mid x \neq x\}$	Die leere Menge enthält keine Elemente. Zur Definition kann auch jede andere unerfüllbare Bedingung genommen werden.
4.7	$A \subseteq B$	A ist Teilklasse (Teilmenge) von B, A sub B	$\forall x\,(x \in A \longrightarrow x \in B)$	Man schreibt auch $A \subset B$, doch vermeide man Verwechslung mit der echten Inklusion Nr.4.8. Die Inklusionsbeziehung $\subseteq$ hat die Bedeutung von "enthalten **oder** gleich". Wenn B eine Menge ist, so auch A. $A \supseteq B$ ist gleichbedeutend mit $B \subseteq A$.
4.8	$A \subsetneqq B$	A ist echte Teilklasse (Teilmenge) von B, A echt sub B	$A \subseteq B \wedge A \neq B$	Man schreibt auch $A \subset B$, doch vermeide man Verwechslung mit der Inklusion Nr.4.7. Die echte Inklusionsbeziehung $\subsetneqq$ hat die Bedeutung von "enthalten **und** ungleich". $A \supsetneqq B$ ist gleichbedeutend mit $B \subsetneqq A$.
4.9	$A \cap B$	A geschnitten mit B, Durchschnitt von A und B	$\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	$A \cap B$ enthält die A und B gemeinsamen Elemente und ist Menge, wenn A oder B Menge ist. Für die in Nr.4.9 bis Nr.4.12 eingeführten Schreibweisen werden keine Klammerregeln vorgeschlagen. Man muß also bei verschachtelter Verwendung Klammern setzen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
4.10	$A \cup B$	A vereinigt mit B, Vereinigung von A und B	$\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	$A \cup B$ enthält die Elemente von A und die Elemente von B und ist Menge, wenn A und B Mengen sind.
4.11	$A \setminus B$	A ohne B, Differenz von A und B, relatives Komplement von B bzgl. A	$\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Man schreibt auch $\complement_A B$. $A \setminus B$ enthält die nicht in B liegenden Elemente von A und ist Menge, wenn A Menge ist. Es ist nicht erforderlich, daß B eine Teilklasse von A ist.
4.12	$\setminus B$	(absolutes) Komplement von B	$\{x \mid x \notin B\}$	Man schreibt auch $\overline{B}$ und $\complement B$. Es werden oft die Schreibweisen des absoluten Komplements verwendet, um damit das relative Komplement bezüglich einer nicht genannten (aus dem Kontext ersichtlichen) Menge zu bezeichnen. $\setminus B$ enthält die nicht in B liegenden Individuen. Wenn B eine Menge ist, so ist das absolute Komplement $\setminus B$ keine Menge.
4.13	$\bigcap_{i \in I} A_i$ $\bigcap A$	Durchschnitt über die A_i mit $i \in I$ Durchschnitt über A	$\{x \mid \forall i \in I\ x \in A_i\}$ $\{x \mid \forall y \in A\ x \in y\}$	$\bigcap_{i \in I} A_i$ enthält die allen A_i (für $i \in I$) gemeinsamen Elemente und ist Menge, wenn wenigstens ein A_i Menge ist.
4.14	$\bigcup_{i \in I} A_i$ $\bigcup A$	Vereinigung über die A_i mit $i \in I$ Vereinigung über A	$\{x \mid \exists i \in I\ x \in A_i\}$ $\{x \mid \exists y \in A\ x \in y\}$	$\bigcup_{i \in I} A_i$ enthält die Elemente aller A_i (für $i \in I$) und ist Menge, wenn I und alle A_i Mengen sind.
4.15	$\mathcal{P}(A)$	Potenzklasse (Potenzmenge) von A	$\{x \mid x \subseteq A\}$	Wenn A eine Menge ist, so enthält $\mathcal{P}(A)$ genau alle Teilmengen von A und ist auch Menge.

5 Standard-Zahlenmengen

Die unten eingeführten Zeichen haben eine Standardbedeutung. Sie sollen nicht zur Bezeichnung anderer Mengen oder als Variablen verwendet werden.

Die Herausnahme der Null aus einer dieser Mengen wird durch das Hochzeichen * gekennzeichnet. So ist z. B. $\mathbb{N}^*$ die Menge der natürlichen Zahlen ausschließlich 0. Einschränkung auf die positiven Zahlen der Menge wird durch das Hochzeichen $^+$ gekennzeichnet. So ist z. B. $\mathbb{Q}^+$ die Menge der positiven rationalen Zahlen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
5.1	$\mathbb{N}$ oder **N**	Doppelstrich-N	Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen. Menge der natürlichen Zahlen. Dieses sind die Kardinalzahlen der endlichen Mengen	$\mathbb{N}$ enthält die Zahl 0. Es ist auch üblich, die Menge der positiven ganzen Zahlen mit $\mathbb{N}$ zu bezeichnen und dann mit $\mathbb{N}_0$ die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen.
5.2	$\mathbb{Z}$ oder **Z**	Doppelstrich-Z	Menge der ganzen Zahlen	Hier handelt es sich genauer gesagt um ganzrationale Zahlen. In der Zahlentheorie definiert man auch ganzalgebraische Zahlen.
5.3	$\mathbb{Q}$ oder **Q**	Doppelstrich-Q	Menge der rationalen Zahlen	
5.4	$\mathbb{R}$ oder **R**	Doppelstrich-R	Menge der reellen Zahlen	
5.5	$\mathbb{C}$ oder **C**	Doppelstrich-C	Menge der komplexen Zahlen	

6 Relationen

Hier werden binäre, d. h. zweistellige Relationen betrachtet. Diese werden mit Klassen von geordneten Paaren identifiziert. (Bisweilen wird eine solche Klasse von Paaren als Graph der Relation bezeichnet und die Relation mit einem Tripel (A, B, R) mit $R \subseteq A \times B$ gleichgesetzt). Es stehen R, Q für Relationen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Relationsterme (bei syntaktischer Betrachtung).

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
6.1	(a, b) oder $\langle a, b \rangle$	(geordnetes) Paar von a und b	Charakteristische Eigenschaft: $(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \longleftrightarrow$ $a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$	Es gibt verschiedene mengentheoretische Definitionen von Paaren. In der Definitionsspalte ist nur die Eigenschaft angegeben, die alle solchen Definitionen liefern müssen. Es ist x die erste und y die zweite Koordinate (auch Komponente) von (x, y). Um (bei Zahlen als Koordinaten) Verwechslungen mit dem Dezimalkomma zu vermeiden, wird auch ; oder | als Trennzeichen genommen. n-Tupel lassen sich als iterierte Paare einführen: $(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) =_{\text{def}} ((a_1, \ldots, a_n), a_{n+1})$.
6.2	$\mathrm{Rel}(R)$	R ist eine Relation	$\forall z \in R\ \exists x y\ z = (x, y)$	Eine Relation ist hiernach eine Klasse, die nur Paare als Elemente hat. n-stellige Relationen sind entsprechend Klassen von n-Tupeln.
6.3	$a R b$	a steht in der Relation R zu b, R trifft zu auf a, b	$(a, b) \in R$	Die Schreibweise mit dem Relationszeichen zwischen den Argumenttermen bezeichnet man als Infixschreibweise. Bei n-stelligen Relationen setzt man auch das Relationszeichen vor die Argumente und schreibt $R a_1 \ldots a_n$ für $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ (Präfixschreibweise). Bei nachgestelltem Relations-

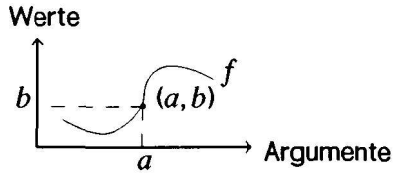
Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
				zeichen spricht man von Postfixschreibweise. Für die Negation $\neg aRb$ schreibt man auch mit Durchstreichung des Relationszeichens $a \not R b$.
6.4	$\{x,y \mid \varphi(x,y)\}$ in relativierter Form: $\{x \in A, y \in B \mid \varphi(x,y)\}$	Die Relation zwischen x,y mit $\varphi(x,y)$ Die Relation zwischen x aus A und y aus B mit $\varphi(x,y)$	$\{z \mid \exists x\, y\, (z=(x,y) \wedge \varphi(x,y))\}$ $\{z \mid \exists x \in A\, \exists y \in B (z=(x,y) \wedge \varphi(x,y))\}$	Der Relationsbildungsoperator $\{\ldots,\ldots \mid \ldots\}$ macht aus einer Beschreibung $\varphi(x,y)$, welche Individuen in der Relation stehen, und Variablen x,y, die dabei gebunden werden, einen Namen der Relation. Man schreibt auch mit Paarklammern $\{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}$ im Sinne von Nr.4.4.
6.5	$A \times B$	(kartesisches) Produkt von A und B, A Kreuz B	$\{x,y \mid x \in A \wedge y \in B\}$	$A \times B$ enthält als Elemente genau alle Paare mit erster Koordinate in A und zweiter Koordinate in B und ist Menge, wenn A und B Mengen sind. Man schreibt auch A^2 für $A \times A$ und A^n für die Klasse aller n-Tupel mit Koordinaten aus A. Siehe auch Nr. 7.13 und Nr. 7.14.
6.6	id_A	Identitätsrelation auf A	$\{x,y \mid x=y \wedge x \in A\}$	id_A enthält als Elemente genau alle Paare (x,x) mit $x \in A$ und ist eine Funktion. Der Index A wird auch weggelassen, wenn er ersichtlich ist.
6.7	R^{-1}	Umkehrrelation von R, inverse Relation zu R	$\{x,y \mid y\,R\,x\}$	R^{-1} enthält als Elemente genau die Paare (x,y) mit $(y,x) \in R$.
6.8	$\mathrm{D}(R)$	Vorbereich von R Definitionsbereich von R	$\{x \mid \exists y\, (x\,R\,y)\}$	Die Relation R kann insbesondere eine Funktion sein. In diesem Fall spricht man vom Definitionsbereich. Man schreibt auch $\mathrm{dom}(R)$ (engl. domain).

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
6.9	W(R)	Nachbereich von R Wertebereich von R	$\{y \mid \exists x\,(x\,R\,y)\}$	Die Relation R kann insbesondere eine Funktion sein. In diesem Fall spricht man vom Wertebereich. Man schreibt auch ran (R) (engl. range).
6.10	$R \circ Q$	Relationenprodukt von R und Q, R verkettet mit Q R hintereinandergeschaltet mit Q	$\{x, y \mid \exists z\,(xRz \wedge zQy)\}$	Die Relationen R, Q können insbesondere auch Funktionen sein. Dann ist $R \circ Q$ auch eine Funktion. Bei Funktionen verwendet man oft eine andere Reihenfolge der Hintereinanderausführung (siehe Nr. 7.6).
6.11	$R[A]$	das R-Bild von A, Bildklasse von A unter R	$\{y \mid \exists x \in A\,(x\,R\,y)\}$	Man schreibt auch mit runden Klammern $R(A)$ oder einfach $R\,A$. Man vermeide Verwechslungen von Bildklasse und Funktionswert.
6.12		R ist reflexiv auf A	$\forall x \in A\; xRx$	Gleichwertige Definition: $\mathrm{id}_A \subseteq R$.
6.13		R ist symmetrisch	$\forall x\,y\,(xRy \longrightarrow yRx)$	Gleichwertige Definition: $R^{-1} \subseteq R$.
6.14		R ist transitiv	$\forall x\,y\,z\,(xRy \wedge yRz \longrightarrow xRz)$	Gleichwertige Definition: $R \circ R \subseteq R$.
6.15		R ist komparativ, R ist euklidisch	$\forall x\,y\,z\,(xRz \wedge yRz \longrightarrow xRy)$	Gleichwertige Definition: $R \circ R^{-1} \subseteq R$.
6.16		R ist antisymmetrisch, R ist identitiv	$\forall x\,y\,(xRy \wedge yRx \longrightarrow x = y)$	Gleichwertige Definition für $R \subseteq A \times A$: $R \cap R^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$.
6.17		R ist asymmetrisch	$\forall x\,y\,\neg(xRy \wedge yRx)$	Gleichwertige Definition: $R \cap R^{-1} = \emptyset$.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
6.18		R ist konnex auf A	$\forall x\, y \in A\, (xRy \vee yRx)$	Gleichwertige Definition für $R \subseteq A \times A$: $R \cup R^{-1} = A \times A$.
6.19		R ist semikonnex auf A	$\forall x\, y \in A\, (xRy \vee yRx \vee x = y)$	Gleichwertige Definition für $R \subseteq A \times A$: $R \cup R^{-1} \cup \mathrm{id}_A = A \times A$.
6.20		R ist Äquivalenzrelation auf A	R ist reflexiv auf A, symmetrisch und transitiv	Beispiel: Wenn f eine Funktion ist, so ist $\{x, y \mid f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenzrelation auf dem Definitionsbereich von f. Äquivalenzrelationen werden oft durch Zeichen wie $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\equiv$ o. ä. bezeichnet.
6.21	a_R	Äquivalenzklasse von a unter R	$\{x \mid xRa\}$	Hierbei ist R eine Äquivalenzrelation auf A. Man sagt auch, daß a ein Repräsentant der Äquivalenzklasse a_R ist.
6.22	$A/_R$	Quotient von A nach R Klasse der Äquivalenzklassen	$\{x_R \mid x \in A\}$	Hierbei ist R eine Äquivalenzrelation auf A. Eine Teilklasse von A, die aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält, wird als Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen bezeichnet.

7 Funktionen

Hier werden einstellige Funktionen betrachtet. Diese werden mit rechtseindeutigen Relationen identifiziert. (Bisweilen wird eine solche Klasse von Paaren als Graph der Funktion bezeichnet und die Funktion mit einem Tripel (A, B, f) mit $f: A \dashrightarrow B$ gleichgesetzt). Es stehen f, g für Funktionen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Funktionsterme (bei syntaktischer Betrachtung).

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
7.1	Fkt(f)	f ist eine Funktion, f ist eine Abbildung	$\mathrm{Rel}(f) \wedge \forall x\, y_1 y_2 (xfy_1 \wedge xfy_2 \longrightarrow y_1 = y_2)$	Wenn f eine Funktion ist und $(a, b) \in f$, so ist a ein Argument von f und b der zugehörige (eindeutig bestimmte) Funktionswert. n-stellige Funktionen sind Funktionen, deren Definitionsbereich eine Klasse von n-Tupeln ist. Bei der graphischen Darstellung einer einstelligen Funktion mit reellen Argumenten und Werten notiert man die Argumente auf der waagerechten und die Werte auf der senkrechten Achse, siehe Bild: 
7.2	D(f)	Definitionsbereich von f	$\{x \mid \exists y\, (xfy)\}$	Es handelt sich im relationentheoretischen Sinne um den Vorbereich (siehe Nr. 6.8). Wenn D(f) eine Menge ist, so auch W(f).
7.3	W(f)	Wertebereich von f	$\{y \mid \exists x\, (xfy)\}$	Es handelt sich im relationentheoretischen Sinne um den Nachbereich (siehe Nr. 6.9).

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
7.4	$f(a)$ oder af	f angewendet auf a, f von a, oder a abgebildet mit f	$\iota y\,(afy)$	Es ist hierbei vorauszusetzen, daß f eine Funktion ist und $a \in \mathrm{D}(f)$, damit es genau ein y mit $(a,y) \in f$ gibt. Bei einer n-stelligen Funktion und dem Argument $(a_1,\ldots,a_n)$ schreibt man für den Funktionwert gewöhnlich $f(a_1,\ldots,a_n)$. Die Schreibweisen $f(a)$ bzw. $f(a_1,\ldots,a_n)$ sind Präfixschreibweisen. Bei nachgestelltem Funktionszeichen liegen Postfixschreibweisen vor. Bei zweistelligen Funktionen verwendet man auch eine Infixschreibweise (siehe Nr. 7.15).
7.5	$f\|A$	Einschränkung von f auf A	$f \cap (A \times \mathrm{W}(f))$	Oft wird $f\|A$ wieder mit f bezeichnet. Das kann jedoch zu Mißverständnissen führen.
7.6	fg	f nach g (angewendet), erst g, dann f (angewendet)	$g \circ f$	Es handelt sich um Hintereinanderanwendung, wobei f nach g, also erst g und dann f, auf Argumente angewendet werden. Wenn a aus dem Definitionsbereich dieser Funktion ist, so gelten $(fg)(a) = f(g(a))$ und $a(g \circ f) = (ag)f$. Mit der Präfixschreibweise für den Funktionswert empfiehlt sich die Schreibweise fg und die Sprechweise "f nach g". Mit der Postfixschreibweise für den Funktionswert empfiehlt sich die Schreibweise $g \circ f$ und die Sprechweise "erst g, dann f". Wenn die Werte von f und g Zahlen sind, so schreibt man fg auch für die punktweise ausgeführte Multiplikation $x \longmapsto f(x) \cdot g(x)$ und dann

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
				$f \circ g$ für die Hintereinanderanwendung "f nach g". Doch beachte man, daß das nicht mit der relationentheoretischen Verkettung übereinstimmt.
7.7	$f: A \longrightarrow B$	f ist Abbildung von A in B	$\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{D}(f) = A \wedge \mathrm{W}(f) \subseteq B$	In Nummer 7.7 bis 7.11 läßt man auch die Angabe von f mit dem Doppelpunkt fort und schreibt f über den Pfeil: $A \xrightarrow{f} B$, $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$, $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$ usw.
7.8	$f: A \twoheadrightarrow B$	f ist Surjektion von A auf B, f ist Abbildung von A auf B	$\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{D}(f) = A \wedge \mathrm{W}(f) = B$	Als Merkhilfe: Die doppelte Pfeilspitze weist auf die Besonderheit von B hin, nämlich daß jedes Element von B als Funktionswert auftritt. Man schreibt auch $f: A \xrightarrow{\text{auf}} B$.
7.9	$f: A \rightarrowtail B$	f ist Injektion von A in B, f ist umkehrbare Abbildung von A in B	$f: A \longrightarrow B \wedge \mathrm{Fkt}(f^{-1})$	Als Merkhilfe: Die Feder am linken Pfeilende weist auf die Besonderheit von A hin, nämlich daß verschiedene Elemente von A verschiedene Funktionswerte haben. Man schreibt auch $f: A \xrightarrow{1\text{-}1} B$. Wenn die Werte von f Zahlen sind, so schreibt man f^{-1} auch für die punktweise ausgeführte Reziprokenbildung $x \longmapsto f^{-1}(x)$. Man vermeide Verwechslungen mit der Umkehrrelation von f.
7.10	$f: A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$	f ist Bijektion von A auf B, f ist umkehrbare Abbildung von A auf B	$f: A \twoheadrightarrow B \wedge f: A \rightarrowtail B$	Man schreibt auch $f: A \xrightarrow[\text{auf}]{1\text{-}1} B$.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
7.11	$f: A \dashrightarrow B$	f ist (partielle) Abbildung aus A in B	$\mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{D}(f) \subseteq A \wedge \mathrm{W}(f) \subseteq B$	Als Merkhilfe: Der unterbrochene Pfeilschaft weist darauf hin, daß es nicht zu jedem Element von A einen Funktionswert in B geben muß.
7.12	$x \longmapsto a(x)$ oder $\lambda x . a(x)$ in relativierter Form: $x \in A \longmapsto a(x) \in B$	Die Funktion, die x auf $a(x)$ abbildet Die Funktion, die x aus A auf $a(x)$ aus B abbildet	$\{x, y \mid y = a(x)\}$ $(x \longmapsto a(x)) \cap (A \times B)$	Der Funktionsbildungsoperator $\ldots \longmapsto \ldots$ macht aus einer Beschreibung $a(x)$ der Funktionswerte und einer Variablen x, die dabei gebunden wird, einen Namen der Funktion. Oft wird der definierende Term $a(x)$, der neben der Variablen x, über die sich die Funktionsbildung erstreckt, noch weitere Parameter enthalten kann, zur Bezeichnung der Funktion genommen. Das kann zu Mißverständnissen führen. Bei mehrstelligen Funktionen schreibt man $x_1, \ldots, x_n \longmapsto a(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $\lambda x_1 \ldots x_n . a(x_1, \ldots, x_n)$. Für $x \in A \longmapsto a(x)$ findet man auch $\langle a(x) \mid x \in A \rangle$ oder $(a(x))_{x \in A}$.
7.13	$\prod_{i \in I} A_i$	kartesisches Produkt über A_i mit $i \in I$	$\{z \mid \mathrm{Fkt}(z) \wedge \mathrm{D}(z) = I \wedge \forall i \in I\ z(i) \in A_i\}$	Bei endlicher Indexmenge $I = \{1, \ldots, n\}$ besteht eine bijektive Abbildung zwischen der Klasse von n-Tupeln $A_1 \times \ldots \times A_n$ und der Klasse der auf $\{1, \ldots, n\}$ definierten Funktionen mit dem i-ten Funktionswert in A_i. Man schreibt dann auch dafür $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Siehe auch Nr. 6.5.
7.14	A^B	A hoch B	$\{z \mid z : B \longrightarrow A\}$	Es gilt $A^B = \prod_{i \in B} A_i$ (wobei $\forall i \in B\ A_i = A$ gilt).

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
				Um Verwechslungen mit Potenzen von Zahlen zu vermeiden, wird auch ${}^{B}A$ geschrieben.
7.15		f ist Verknüpfung (Operation) in A	$f: A \times A \longrightarrow A$	Es handelt sich um zweistellige Verknüpfungen. n-stellige Verknüpfungen sind entsprechend mit der Menge A^n als Definitionsbereich definiert. Eine partielle Abbildung von $A \times A$ in A wird auch als partielle Verknüpfung, eine Abbildung von $A \times B$ in A als äußere Verknüpfung auf A bezeichnet. Als Verknüpfungzeichen wählt man oft besondere Zeichen wie $+$, $\cdot$, $\sqcup$, $\sqcap$, $\circ$, $\bigcirc$ u. ä. und schreibt bei der Angabe des Funktionswertes das Funktionszeichen zwischen die Argumente (Infixschreibweise), z. B. $a+b$ statt $+(a, b)$, $a \bigcirc b$ statt $\bigcirc(a, b)$ u. ä.
7.16		$\bigcirc$ ist kommutativ	$\forall x\, y \in A \;\; x \bigcirc y = y \bigcirc x$	In Nr 7.16 bis Nr 7.18 ist $\bigcirc$ eine Verknüpfung auf A und e ein Element von A.
7.17		$\bigcirc$ ist assoziativ	$\forall x\, y\, z \in A$ $(x \bigcirc y) \bigcirc z = x \bigcirc (y \bigcirc z)$	
7.18		e ist neutrales Element für $\bigcirc$	$\forall x \in A \;\; x \bigcirc e = e \bigcirc x = x$	

8 Strukturen

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
8.1	$(A, c_i, \ldots, f_j, \ldots, R_k, \ldots)$	Struktur mit dem Träger A, den ausgezeichneten Elementen $c_i, \ldots$, Funktionen $f_j, \ldots$ und Relationen $R_k, \ldots$	Es gelten: $A \neq \emptyset$, $c_i \in A, \ldots$, $f_j : A^{n_j} \longrightarrow A, \ldots$, $R_k \subseteq A^{m_k}, \ldots$.	Der Träger wird auch als Individuenbereich oder Universum der Struktur bezeichnet. Die Angabe, von welcher Stellenzahl n_j bzw. m_k (mit $n_j \geq 1$, $m_k \geq 1$) die Funktionen $f_j, \ldots$ bzw. Relationen $R_k, \ldots$ sind, bezeichnet man als Signatur der Struktur. Siehe Anmerkungen.
8.2	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ist eine Substruktur von $\mathcal{B}$	Mit $\mathcal{A} = (A, c_i, \ldots, f_j, \ldots, R_k, \ldots)$, $\mathcal{B} = (B, d_i, \ldots, g_j, \ldots, Q_k, \ldots)$ gilt (für die i, j, k): $A \subseteq B$, $c_i = d_i$, $f_j = g_j \mid A^{n_j}$, $R_k = Q_k \cap A^{m_k}$.	Eine Substruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ enthält die ausgezeichneten Elemente von $\mathcal{B}$, und die ausgezeichneten Funktionen und Relationen von $\mathcal{A}$ sind Einschränkungen der entsprechenden Funktionen bzw. Relationen von $\mathcal{B}$ auf den Träger von $\mathcal{A}$.
8.3	$h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$	h ist ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$	Mit $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ wie in Nr.8.2, gilt (für die i, j, k): (a) $h : A \longrightarrow B$, (b) $h(c_i) = d_i$, (c) $h(f_j(x_1, \ldots, x_{n_j}) = g_j(h(x_1), \ldots, h(x_{n_j}))$, (d) $(x_1, \ldots, x_{m_k}) \in R_k \longrightarrow (h(x_1), \ldots, h(x_{m_k})) \in Q_k$.	Die Bedingungen (a), (b), (c), (d) sind die Homomorphiebedingungen. Wenn in (d) der Äquijunktionspfeil $\longleftrightarrow$ statt des Subjunktionspfeiles $\longrightarrow$ gesetzt wird, so liegt ein starker Homomorphismus vor. Wenn die Struktur keine ausgezeichneten Relationen enthält, so ist jeder Homomorphismus stark.
8.4		h ist ein Epimorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	h ist Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
8.5		h ist ein Monomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$	h ist starker injektiver Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$	h ist dann ein Isomorphismus auf Bild(h).
8.6		h ist ein Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	h ist Monomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	
8.7		h ist ein Endomorphismus von $\mathcal{A}$	h ist Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$	
8.8		h ist ein Automorphismus von $\mathcal{A}$	h ist Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}$	Die Automorphismen von $\mathcal{A}$ bilden mit der Hintereinanderanwendung als Verknüpfung eine Gruppe, die Automorphismengruppe Aut$(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$.
8.9		$\sim$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathcal{A}$	Mit $\mathcal{A}$ wie in Nr 8.1 gilt: (a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf A (b) $x_1 \sim y_1 \wedge \ldots \wedge x_{n_j} \sim y_{n_j} \longrightarrow f_j(x_1, \ldots, x_{n_j}) \sim f_j(y_1, \ldots, y_{n_j})$ (c) $x_1 \sim y_1 \wedge \ldots \wedge x_{m_k} \sim y_{m_k} \longrightarrow ((x_1, \ldots, x_{m_k}) \in R_k \longleftrightarrow (y_1, \ldots, y_{m_k}) \in R_k)$	Bei gewissen speziellen Arten von Strukturen lassen sich die Kongruenzrelationen durch gewisse Substrukturen (Normalteiler, Ideale, Filter o.ä.) charakterisieren. Die Quotientenstruktur führt dann auch andere Bezeichnungen, wie z. B. Faktorgruppe, Restklassenring o. ä.
8.10	$\mathcal{A}/_{\sim}$	Quotientenstruktur von $\mathcal{A}$ nach der Kongruenzrelation $\sim$	Struktur, auf welche die kanonische Abbildung $x \longmapsto x_{\sim}$ ein starker Epimorphismus von $\mathcal{A}$ ist	Dabei ist $x_{\sim}$ die Äquivalenzklasse von x nach der Äquivalenzrelation $\sim$ (siehe Nr. 6.21). Der Träger der Quotientenstruktur besteht also aus den Äquivalenzklassen, und Funktionen und Relationen sind repräsentantenweise definiert.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
8.11	Bild(h)	Bild von h	Die Substruktur von $\mathcal{B}$ mit dem Träger $h[A]$	Hierbei ist h als Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ vorausgesetzt. h ist ein Epimorphismus auf Bild(h).
8.12	Kern(h)	Kern von h	Die Kongruenzrelation $\{x, y \mid h(x) = h(y)\}$ auf $\mathcal{A}$	Hierbei ist h als starker Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ vorausgesetzt. Dann ist Bild(h) isomorph zur Quotientenstruktur $\mathcal{A}/_{\mathrm{Kern}(h)}$. In speziellen Fällen werden auch die Substrukturen, die die Kongruenzrelation charakterisieren (Normalteiler, Ideale, Filter o. ä.), als Kern bezeichnet.

9 Kardinalzahlen

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
9.1	$A \sim B$	A ist gleichzahlig (gleichmächtig, äquivalent) zu B	$\exists z\,(z : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)$	Die Gleichzahligkeit ist eine Äquivalenzrelation auf Mengen.
9.2	$\lvert A \rvert$	Kardinalzahl (Mächtigkeit, Anzahl) von A	charakteristische Eigenschaft: $\lvert A \rvert = \lvert B \rvert \longleftrightarrow A \sim B$	Man schreibt auch card(A), $\overline{\overline{A}}$ oder $\#(A)$. Es sind verschiedene mengentheoretische Definitionen von Kardinalzahlen möglich. In der Definitionsspalte ist die charakteristische Eigenschaft angegeben, die alle solchen Definitionen liefern müssen. Die Klasse der Kardinalzahlen ist keine Menge. Die endlichen Kardinalzahlen kann man mit den natürlichen Zahlen gleichsetzen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
9.3	$A \lesssim B$	A ist nicht mächtiger als B	$\exists z\,(z : A \rightarrowtail B)$	
9.4	$\lvert A\rvert \leq \lvert B\rvert$	$\lvert A\rvert$ ist kleiner oder gleich $\lvert B\rvert$	$A \lesssim B$	
9.5	$\lvert A\rvert + \lvert B\rvert$	Summe von $\lvert A\rvert$ und $\lvert B\rvert$, $\lvert A\rvert$ plus $\lvert B\rvert$	$\lvert A \cup B'\rvert$, wobei $B' \sim B$ und $A \cap B' = \emptyset$	
9.6	$\lvert A\rvert \cdot \lvert B\rvert$	Produkt von $\lvert A\rvert$ und $\lvert B\rvert$, $\lvert A\rvert$ mal $\lvert B\rvert$	$\lvert A \times B\rvert$	
9.7	$\lvert A\rvert^{\lvert B\rvert}$	Potenz von $\lvert A\rvert$ mit $\lvert B\rvert$, $\lvert A\rvert$ hoch $\lvert B\rvert$	$\lvert A^B\rvert$	
9.8	$\aleph_0$	Aleph Null	$\lvert \mathbb{N}\rvert$	$\aleph_0$ ist die kleinste unendliche Kardinalzahl, die Kardinalzahl der abzählbar unendlichen Mengen.
9.9	$\aleph_\alpha$	Aleph alpha	die α-te unendliche Kardinalzahl	Der Buchstabe α ist hier eine Variable für Ordinalzahlen. Die Funktion $\alpha \longmapsto \aleph_\alpha$ zählt die unendlichen Kardinalzahlen der Größe nach auf. Siehe Anmerkungen.

Anmerkungen

Zu 3.1

Weitere Junktoren

Die in der Norm angegebenen Junktoren werden in erster Linie zur Verwendung empfohlen. Die folgende Tabelle gibt weitere Junktoren an, zusammen mit Benennungen und Bezeichnungen:

Benennung		NAND	NOR, weder noch	Replikation, falls	Antivalenz, entweder oder, XOR
Zeichen		$\overline{\wedge}$	$\overline{\vee}$	$\longleftarrow$	$\leftrightarrow\!\!\!\!+$
Formel		$(\varphi \overline{\wedge} \psi)$	$(\varphi \overline{\vee} \psi)$	$(\varphi \longleftarrow \psi)$	$(\varphi \leftrightarrow\!\!\!\!+ \psi)$
W	W	F	F	W	F
F	W	W	F	F	W
W	F	W	F	W	W
F	F	W	W	W	F

Die Zeichen $\overline{\wedge}$, $\overline{\vee}$, $\leftrightarrow\!\!\!\!+$ werden in der Informatik für die Angabe von Schaltfunktionen verwendet (siehe DIN 44300 Teil 5/11.88 und DIN 66 000/11.85). Für NOR findet man in der Logik auch den Peirce-Pfeil $\downarrow$, der an ein durchgestrichenes $\vee$ erinnert, für NAND kann entsprechend $\uparrow$ verwendet werden.

Klammerregeln

Um deutlich zu machen, welche Teile eines sprachlichen Ausdrucks zusammengehören, kann man Klammern verwenden. Hier werden als Gliederungsklammern (die keine weitere Bedeutung tragen) ausschließlich runde Klammern (und) empfohlen, da andere Klammern oft zusätzlich eine spezifische Bedeutung haben. Gliederungsklammern dürfen entfallen, wenn auf Grund von Verabredungen klar ist, was zusammengehört. Es ist auch erlaubt, zusätzliche Klammern zu setzen, wenn das die Übersichtlichkeit des Ausdrucks erhöht.

Über die Bindungsstärke von Junktoren werden die folgenden Klammerregeln vorgeschlagen:

(a) $\neg$ bindet stärker als zweistellige Junktoren.

(b) $\wedge$, $\vee$ binden stärker als $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$, aber $\wedge$, $\vee$ unter sich sowie $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ unter sich binden gleichstark.

(c) In mehrgliedrigen Konjunktionen und in mehrgliedrigen Disjunktionen mit Klammerung nach links können diese Klammern weggelassen werden.

(d) Außenklammern einer einzeln stehenden Formel können gesetzt oder weggelassen werden.

Beispiele:

(1) Wenn man eine Formel $\varphi \wedge \psi$ (gemäß (d) ohne Außenklammern) quantifiziert, so müssen Klammern (die dann keine Außenklammern sind) gesetzt werden. Es hat $\forall x\, \varphi \wedge \psi$ eine andere

Bedeutung als $\forall x(\varphi \wedge \psi)$.

(2) Gemäß Regel (c) ist $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$ dasselbe wie $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$.

(3) Die Formel $(((\varphi \wedge \psi) \wedge \theta) \longrightarrow (\theta \longrightarrow \varphi))$ kann als $\varphi \wedge \psi \wedge \theta \longrightarrow (\theta \longrightarrow \varphi)$ abgekürzt werden. Weitere Klammern können nicht weggelassen werden.

In mehrgliedrigen Konjunktionen und Disjunktionen können Klammern generell entfallen, wenn es nur auf logische Äquivalenz ankommt, da diese Junktoren bis auf logische Äquivalenz assoziativ sind.

Klammerfreie mehrgliedrige Schreibweisen werden aber nur für Konjunktion und Disjunktion empfohlen, da nur sie dabei der natürlichen Bedeutung entsprechen. So ist z. B. die Antivalenz $\not\leftrightarrow$ zwar bis auf logische Äquivalenz assoziativ, aber iterierte Antivalenz ist kein mehrstelliges Entweder-oder.

Zu 8.1

Man bezeichnet gelegentlich auch das Tupel aus den ausgezeichneten Elementen, Funktionen und Relationen als Struktur auf dem Träger und das Paar aus Träger und der Struktur in diesem Sinne als System.

Zur Bezeichnung von Strukturen nimmt man meist große Buchstaben einer besonderen Schriftart wie Skript, Fraktur oder Schreibschrift und für den Träger dann den entsprechenden großen Antiquabuchstaben.

Der hier betrachtete Strukturbegriff ist der einfachste, doch fallen sehr viele in der Mathematik vorkommende Arten von Strukturen darunter, z. B. Gruppen, Ringe, Körper, Verbände, Ordnungsstrukturen. Es treten aber auch Strukturen mit mehreren Trägermengen auf (z. B. Vektorräume, geometrische Strukturen), Strukturen mit partiellen Verknüpfungen sowie Strukturen mit ausgezeichneten Mengensystemen (z. B. topologische Strukturen). Für weitere Einzelheiten wird auf DIN 13 302/06.78 verwiesen.

Zu 9.9

Ordinalzahlen sind Invarianten von Wohlordnungen bezüglich Isomorphie (so wie Kardinalzahlen Invarianten von Mengen bezüglich Gleichzahligkeit sind). Dabei ist eine Wohlordnung auf einer Klasse A eine strikte lineare Ordnung auf A (d.h. eine Relation, die transitiv, asymmetrisch und semikonnex auf A ist), so daß die Vorgänger jedes Elementes eine Menge bilden und jede nichtleere Teilmenge von A ein kleinstes Element hat. Auf einer endlichen Menge ist jede strikte lineare Ordnung eine Wohlordnung, und die endlichen Ordinalzahlen kann man mit den endlichen Kardinalzahlen, d.h. mit den natürlichen Zahlen gleichsetzen.

Die Ordinalzahlen sind selbst wohlgeordnet, bilden aber keine Menge. Sie werden oft, wie auch natürliche Zahlen, als Indizes verwendet. Sie sind dafür in universeller Weise brauchbar, da sich die Elemente jeder Menge mit Ordinalzahlen durchindizieren lassen.

Zitierte Normen

DIN 1302	Allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe
DIN 13 302	Mathematische Strukturen; Zeichen und Begriffe
DIN 44 300 Teil 5	Informationsverarbeitung; Begriffe, Aufbau digitaler Rechensysteme
DIN 66 000	Informationsverarbeitung: Mathematische Zeichen und Symbole der Schaltalgebra
ISO 31-11 : 1978	Mathematical signs and symbols for use in the physical sciences and technology

Weitere Unterlagen

BARWISE, Jon (Hrsg.) : Handbook of Mathematical Logic. Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1977

EBBINGHAUS, Heinz-Dieter ; FLUM, Jörg ; THOMAS, Wolfgang: Einführung in die mathematische Logik. 2. Aufl. Darmstadt : Wissensch. Buchges., 1986

LEVY, Azriel: Basic Set Theory, Berlin : Springer Verlag, 1979

Frühere Ausgaben

DIN 5473 : 11.74, 06.76, DIN 5474 : 09.73

Änderungen

Gegenüber der Ausgabe Juni 1976 und DIN 5474/09.73 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

a) DIN 5473 wurde mit DIN 5474 zusammengefaßt.

b) Als Quantoren werden nur noch die Zeichen $\forall, \exists$ empfohlen.

c) Die Zeichen $\bigwedge, \bigvee$ werden zur Darstellung iterierter Konjunktionen und Disjunktionen genommen.

d) Das Verkettungszeichen $\circledcirc$ wurde durch $\circ$ ersetzt, das Verkettungszeichen $\circ$ wird durch Hintereinanderschreiben der Operanden dargestellt.

e) Die Modaloperatoren $\Box, \Diamond$ und $[\alpha], \langle\alpha\rangle$ wurden aufgenommen.

f) Der Abschnitt über Strukturen ist wesentlich erweitert worden.

g) Der Inhalt wurde vollständig überarbeitet.