DIN 5473 - Logik und Mengenlehre

Inhaltsverzeichnis

Lizenz

Bitte lesen Sie diese Lizenz gründlich durch, bevor Sie Lazarus die Dokimentation oder Teile dieser Software verwenden wollen. Sollten Sie nicht mit den hier aufgeführten Bedingungen einverstanden sein, ist die Nutzung oder Verwendung des Quellcodes zu diesen Produkt (oder auch Teile davon) nicht gestattet.

Bei der Verwendung darf kein kommerzieller Zweck der Gewinnerzielung entstehen !

Freeware und Shareware-Programme zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass sie kostenlos beziehungsweise gegen einen relativ geringen Preis dem Nutzer die Verwendung teilweise hochwertiger Computerprogramme ermöglichen, die sich durchaus mit kommerziellen Produkten messen lassen können. Daher sind diese Softwaretypen gerade in Zeiten begrenzter finanzieller Mittel - auch im schulischen Umfeld sehr beliebt und kommen in vielfältigen Gebieten zum Einsatz (zum Beispiel bei der Netzwerkadministration, bei der Einrichtung von Servern, bei der Installation von Internet-Software auf den Nutzer-PCs oder bei Office-Anwendungen).

Da es sich auch bei Free- und Sharewareprogrammen um Computerprogramme handelt, die gemäß § 69a Urheberrechtsgesetz (UrhG) urheberrechtlich geschützt sind, liegt es bei diesen Softwareprodukten weitgehend in den Händen des Rechteinhabers zum Beispiel des Programmierers - zu bestimmen, in welchem Umfang diese durch dritte Personen genutzt werden dürfen.

Dabei können Freeware- und Sharewareprogramme nach den Lizenzbedingungen in der Regel beliebig kopiert und weitergegeben werden, dagegen ist vor allem eine Veränderung der Programme üblicherweise nicht gestattet. Es ist deshalb eigentlich auch nicht korrekt, wenn im Zusammenhang mit Free- und Shareware immer wieder der Begriff der "Public-Domain-Software" verwendet wird, der frei übersetzt "Software, die im öffentlichen Eigentum steht" bedeutet. Denn dies impliziert, dass die Software von der Öffentlichkeit beliebig genutzt und damit auch verändert werden darf (also gemeinfrei ist); letzteres ist bei Free- und Shareware aber gerade nicht der Fall.

Welche Arten von Shareware gibt es ?

Shareware kann man in zahlreiche Unterkategorien einteilen. So kann Shareware beispielsweise werbegestützte Software oder “Adware” sein, welche dem User Werbung anzeigen soll. Dies hat den Zweck Einnahmen für den Eigentümer zu generieren. Eine weitere Art bezeichnet man als Demoware, wobei es sich hier nur um eine Demoversion der Software handelt.
Dabei ist es oft eine Testversion mit einer festgelegten Zeitspanne (“Trialware”). In anderen Fällen kann die gesamte Funktionalität der Anwendung deaktiviert sein, so dass man zwar alle Funktionen sehen kannst, aber dafür bezahlen muss (“Crippleware”).

Weiterhin gibt es auch “Freemium”-Shareware, bei welcher einige Funktionen in der kostenlosen Version verfügbar sind, Sie diese jedoch bezahlen müssen, um die volle Funktionalität freischalten zu können.
Obwohl Shareware eine gute Option für jeden ist, der Software testen möchte, bevor man sich zu einem Kauf verpflichtet, sollten Sie dennoch vorsichtig sein. Denn Cyberkriminelle sind nur allzu bereit, den Eifer der Menschen auszunutzen, etwas gratis zu bekommen.

Dieses Versprechen freier Software ist eine gängige Social-Engineering-Taktik, mit der sie Internetnutzer dazu bringen, bösartige Software herunterzuladen.
Bei Shareware gibt es ebenso wie bei anderen Softwareprodukten keine Garantie dafür, dass die Software virenfrei ist. Aus diesem Grund ist es wichtig, dass der Benutzer sein Antivirenprogramm auf dem aktuellen Stand hält, bevor er Shareware herunterlädt.

Prinzipiell kann jeder Shareware herunterladen, solange er einen Computer hat, der die Systemanforderungen des Programms erfüllt. Es gibt jedoch einige Seiten, die nur Benutzern in bestimmten Ländern das Herunterladen von Shareware erlauben.

Nicht alle Shareware-Programme werden überall zum Kauf angeboten. Der beste Weg, um zu sehen, wo man ein bestimmtes Programm kaufen kann, ist, die Website des Entwicklers zu besuchen und herauszufinden, auf welchen Plattformen das Programm erhältlich ist.

Freeware ist Software, die kostenlos heruntergeladen werden kann, aber keine Lizenzgebühren mehr verlangt. Im Gegensatz dazu erfordert Shareware normalerweise eine Lizenzgebühr für den vollen Zugang zu allen Funktionen. Beide Modelle ermöglichen es Benutzern, Software kostenlos auszuprobieren, aber Shareware ist normalerweise etwas umfangreicher und bietet mehr Funktionen.

Dieses Software-Produkt besitzt eine Hybrid-Lizenz zwischen Free- und Share-Ware. Sie können es kostenlos einsetzen und an andere Personen weitergeben, solange Sie keine Teile der Software ändern oder kopieren. Es bedarf einer schriftlichen Einwilligung des Entwicklers (Jens Kallup), sollten Teile geändert oder übernommen werden.

Sie können dieses Produkt auf mehreren lokalen Computer gleichzeitig nutzen. Eine öffentlich zugängliche Nutzung ist nicht bestrebt mit der aktuellen Version.
Obwohl bei der Entwicklung dieser Software viel Sorgfalt gepflegt wurde, können Fehler nicht ausgeschlossen werden.

Es werden daher keine Garantien auf entstanden Schäden oder Kosten übernommen, die während der Verwendung dieser Software entstehen. Alles erfolgt auf Eigenes Risiko !!!

Für zukünftige Entwicklungen können Sie jedoch einen kleinen Obolus in Form von Spenden hinterlegen.

Überblick

In dieser Norm werden Zeichen und Begriffe der Logik und Mengenlehre behandelt. Eingeschlossen sind dabei Zeichen und Begriffe der Relationen und Funktionen betreffen. Der Zweck der Norm ist es, für Anwender in Schule, Hochschule, Wissenschaft und Technik einen in sich konsistenten Satz von Bezeichnungen und Festlegungen auszuwählen, um dadurch zur Vereinheitlichung beizutragen und die Kommunikation zu erleichtern.

Gegenstand der Norm sind in erster Linie die Zeichen und Begriffe. Die angegebenen Sprachweisen können nicht in jedem Fall wörtlich eingehalten werden, wenn man formale Ausdrücke verbalisieren will; ähnliche Ausdrucksweisen können ebenfalls annehmbar sein.

Die vorliegende Norm ist mit **DIN 1302 / 08.08** verträglich und entspricht **ISO 31-11;1978** Abschnitte 1 und 2, führt aber darüber hinaus.

1. Festlegung des begrifflichen Rahmens

Diese Norm enthält begriffliche Festlegungen sehr allgemeiner Art. Es ist deshalb erforderlich, den zu Grunde liegenden begrifflichen Rahmen näher zu beschreiben.

1.1. Individuen
1.2. Klassen und Mengen
1.3. Relationen und Funktionen
1.4. Objekt-Sprache und Meta-Sprache
1.5. Variablen
1.6. Konstanten
1.7. Formeln
1.8. Terme

1.1. Individuen

Es werdeb gewisse Objekte vorausgesetzt, die als Individuen bezeichnet werden und über die man Aussagen machen möchte;

Individuen treten als Elemente von Klassen auf,

zwischen Indivuduen können Relationen bestehen,

Induviduen können Argumente und Werte von Funktionen sein,

Dabei brauchen Individuen (*wie es vielleicht der Name vermuten läßt*) unteilbar und ohne innere Struktur zu sein. Vielmehr können sie durchaus aus anderen Objekten aufgebaut sein.

Es ist ein Zweck der Mengenlehre, möglichst viele Objekte als Induviduen verfügbar zu machen.

Darunter zum Beispiel, und im insbesonderen: mathematische Objekte wie Zahlen, Punkte, Räume verschiedener Art, Relationen und Funktionen.

Die Gesamtheit der Individuen ist in der Mengenlehre möglichst umfassend intendiert.

Daneben ist es oft zweckmäßig, Individuen einer bestimmten Sorte auszuzeichnen, bei denen es sich etwa um Zahlen einer bestimmten Art, Punkte eines bestimmten Raumes oder physikalische Objekte wie zum Beispiel: die Anzahl der Schüler in einen Klassenzimmer handelt, die dann einen (*speziellen*) Individuenbereich einer Sorte bilden.

1.2. Klassen und Mengen

Neben individuen betrachtet man Zusammenfassungen von Individuen die man Klassen (*von Individuen*) nennt.
Die in einer Klasse zusammengefaßten Individuen sind die Elemente der Klasse.

Von besonderen Interesse sind Mengen.
Das sind spezielle Klassen, die selbst auch Indivduen sind.

Die Axiome der Mengenlehre machen Aussagen darüber, welche Klassen Mengen sind.

Die Norm enthält entsprechende Hinweise.
Die bekannten Zahlenbereiche (siehe Abschnitt 4) und viele andere mathematische Objekte sind Mengen.

So ist die Klasse aller Mengen selbst keine Menge, und auch die Klasse aller Individuen (Allklasse) ist keine Menge.

Es wird hier ein begrifflicher Rahmen benutzt, der neben Mengen auch andere Klassen enthält. Man kann auch einen engeren Rahmen wählen, in dem nur Mengen vorkommen. Das wird in einer unreflektierten Weise oft gemacht, ist aber weder zwingend noch vorteilhaft.
Man muß dann zum Beispiel in Kauf nehmen, dass gewisse sprachligee Ausdrücke (*die Klassen bezeichnen, die keine Mengen sind*) bedeutungsleer werden.

1.3. Relationen und Funktionen

In der Mengenlehre zeigt man, dass man (geordnete Paare von Individuen definieren kann, die auch wieder Individuen sind).
Dann lassen sich Relationen und Funktionen als spezielle Klassen auffassen, und zwar Relationen als Klassen von Paaren und Funktionen als rechtseindeutige Relationen.
Relationen und Funktionen können insbesondere Mengen sein, und bei den in der Praxis auftretenden Relationen und Funktionen ist das gewöhnlich der Fall.

1.4. Objekt-Sprache und Meta-Sprache

In der Logik unterscheidet man bei der Untersuchung eines logischen Systems zwischen der Objektsprache, die die formale Logiksprache des betreffemdem logischen System's ist und die das Objekt der logischen Untersuchung ist, und der Metasprache, in der diese Untersuchung erfolgt.

Die Objektsprache hat eine genau festgelegte Syntax, welche die wohlgeformten Ausdrücle der Sprache festlegt, und eine Semantik, die angibt, wie die Sprache zu interpretieren ist.
Die in dieser Norm eingeführten sprachlichen Ausdrucksmittel konstitulieren eine reichhaltige logische Sprache, die geeignet ist, mathematische Sachverhalte auszudrücken.

Als Metasprache, deren inhalticches Verständnis vorrausgesetzt werden muß, die zunächst natürliche Sprache, die man aber zugleich mit der Explikation det Objektsprache präzisiert und erweitert, indem man die objektsprachlichen Bezeichnungen in inhaltlicher Weise übernimmt.

Für die mathematische Praxis ist die Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache nicht erforderlich und eine durchgängige Formulierung gar nicht praktikabel.
Es genügt, die objektsprachlichen formalen Ausdrücke bei Bedarf inhaltlich zu verwenden. Für eine systematische Explikation der Ausdrucksmittel ist jedoch eine Darstellung als formale logische Sprache zweckmäßig.

1.5. Variablen

In der Sprache verwendet man gebundene Variablen, um sich in allgemeiner Weise auf gewisse Objekte zu beziehen. Die Gesamtheit der Objekte, auf die sich eine Variable bezieht, bildet den Bereich der Variablen.
In einer Interpretation der Sprache muß die Variable verwendet sein, dass heißt: dieser Bereich muß festgelegt sein, Oft hat man eine einsortige Sprache, dass heißt: ALLE Variablen sind von derselben Sorte und haben bei Interpretationen jeweils denselben Bereich.

Die Bereiche von Individuen-Variablen bestehen nur aus Individuen. Dabei redet man von universellen Individuen-Variablen, wenn der Bereich die Allklasse ist. Es lassen sich auch Individuen-Variablen spezieller Sorten einführen, deren Bereich jeweils aus den Individuen einer spezeillen Sorte besteht,

In dieser Norm stehen die Buchstaben **x**, **y**, **z** (bei Bedarf mit Unterscheidungs-Indizes).für Individuen-Variablen, wobei darauf verzichtet wird, Vorraussetzungen über die Bereiche genauer zu spezifizieren.

Wenn Variablen in einen Ausdruck frei vorkommen, so können sie - oft nur vorübergehend - mit einen Element aus ihren Bereich belegt werden. Für eine Interpretation von Ausdrüclen mit freien Variablen ist auch jeweils eine Belegung der freien Variablen erforderlich.

1.6. Konstanten

Konstanten sind Zeichen der Sprache, die für bestimmte Individuen, Klassen, Relationen oder Funktionen stehen.
Eine Interpretation der Sprache legt diese Denotate für die Konstanten fest.

1.7. Formeln

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es insbesondere Formeln. Der Begriff "**Formel**" ist dabei im Sinne von "**Aussageform**" zu verstehen. Das heißt: es handelt sich um sprachliche Ausdrücke, die die Form einer Aussage haben, aber noch freie Variablen enthalten dürfen,

Man schreibt auch φ**(x_0, ..., x_n)** für eine Formel φ, um Variablen **x_0, ..., x_n** hervorzuhben, die in der Formel frei vorkommen können. Eine Interpretation muß dann auch eine Belegung dieser freien Variablen enthalten. Wenn keine freien Variablen vorkommen, so liegt eine Aussage vor.
Dann reicht es für die Interpretation, dass für die gebundenen Variablen Bereiche und für die Konstantensymbole Denotate bereitgesteltt werden.

Formeln drücken Behauptungen aus und werden durch Wahrheitswerte **W** für wahr oder **F** für falsch bewertet.
Wenn eine Formel bei einer Interpretation durch den Wahrheitswert W bewertet wird, so sagt man auch sie sei wahr oder erfüllt die Interpretation.
In der Logik betrachtet man Formeln als syntaktische Objekte einer Metatheorie, die Syntax und Semantik umfaßt.

Der normale inhaltliche Gebrauch der Sprache besteht darin, eine Formel hinzuschreiben und sie dadurch (als erfüllt) zu behaupten. Die gemeinte Interpretation ist dabei dem Kontext zu entnehmen.

Oft sind mehrere Interpretationen gemeint:
etwa daß die Behauptung für alle Bedingungen der freien Variablen ist, oder
alle Interpretationen ist, oder
es wird die Behauptung aufgestellt, die in Abhängigkeit von den Werten gewisser Variablen steht.

In dieser Norm stehen die Buchstaben φ, ψ, θ für Formeln bei syntaktischer Betrachtung bzw. Behauptungen (bei inhaltlicher Verwendung).

1.8. Terme

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es ferner Terme. Diese haben als semantische Werte, Objekte und können als Namen dieser Objekte (relativ zu einer Interpretation) aufgefaßt werden. Man redet von Individuentermen, wenn diese Objekte Individuen sind, wie es zum Beispiel bei den Individuenvariablen der Fall ist.
Die Werte von Termen können auch Klassen von Individuen, Relationen zwischen Individuen und Funktionen von Individuen in Induviduen sein.
Entsprechend kann man solche Terme als Klassenterme, Relationsterme bzw. Funktionsterme bezeichnen.

In dieser Norm stehen ***a***, ***b*** für Induviduen, ***A***, ***B*** für Klassen, ***Q***, ***R*** für Relationen, ***f***, ***g*** für Funktionen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Individuenterme, Klassenterme, Relationsterme, Funktionsterme (bei syntaktischer Betrachtung).

2. Logik

2.1. Junktoren

Junktoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, dass sie Formeln zu neuen Formeln verbinden. Semantisch ist ein Junktor durch eine Wahrheitstafel charakterisiert, die in der Definitionsspalte angegeben ist. Für die Wahrheitswerte wird hier **W** (wahr) und **F** (falsch) geschrieben. In der englischsprachigen Literatur findet man **T** (true) und **F** (false). Man schreibt auch **1** für W und **0** für F.

<table>
<tr><th>Nr.</th><th>Zeichen / Verwendung</th><th>Sprachweise / Benennung</th><th>Definition</th><th>Bemerkungen</th></tr>
<tr><td>2.1.1.</td><td>$\neg \varphi$</td><td>nicht φ
Negation von φ</td><td><table><tr><th>φ</th><th>$\neg \varphi$</th></tr><tr><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td></tr></table></td><td>Die Negation einer Gleichung oder einer mit Relationszeichen gebildeten Formel wird oft durch Durchstreichen angegeben. Man schreibt dann:
a $\neq$ b für $\neg$ (a = b),
a $\notin$ A für $\neg$ (a $\in$ A)</td></tr>
<tr><td>2.1.2.</td><td>$\varphi \wedge \psi$</td><td>φ und ψ.
Konjunktion von φ und ψ</td><td><table><tr><th>φ</th><th>ψ</th><th>$\varphi \wedge \psi$</th></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table></td><td>LogischeUND Verknüpfung.</td></tr>
<tr><td>2.1.3.</td><td>$\varphi \vee \psi$</td><td>φ oder ψ.
Disjunktion von φ oder ψ</td><td><table><tr><th>φ</th><th>ψ</th><th>$\varphi \vee \psi$</th></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table></td><td>LogischeODER Verknüpfung</td></tr>
<tr><td>2.1.4.</td><td>$\varphi \rightarrow \psi$</td><td>Wenn φ, so ψ.
Subjunktion von φ und ψ.

φ subjunktiert ψ.
φ impliziert ψ.</td><td><table><tr><th>φ</th><th>ψ</th><th>$\varphi \rightarrow \psi$</th></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>W</td></tr></table></td><td>Fü $\varphi \rightarrow \psi$ wird auch: $\varphi \Rightarrow \psi$. geschrieben. Man beachte, dass Subjunktion nicht das selbe besagt wie logische Folgerung. Aus einer Formel folgt logisch eine Formel, wenn die damit gebildete Subjunktion allgemeingültig ist.</td></tr>
</table>

2.1.5	$\varphi \leftrightarrow \psi$	φ genau dann, wenn ψ. Äqualjunktion von φ und ψ. φ gleich zu ψ.	φ | ψ | $\varphi \leftrightarrow \psi$ W | W | W F | W | F W | F | F F | F | W	Für $\varphi \leftrightarrow \psi$ wird auch $\varphi \Leftrightarrow \psi$ geschrieben. **Man beachte, dass Äqualjunktion nicht das selbe besagt wie logische Gleichheit**. Zwei Formeln sind logisch gleich, wenn die damit gebildete Äquljunktion allgemeingültig ist.
2.1.6.	$\top$	Verum	$\top$ W	Verum ist eine logische Aussagekonstante und kann als nullstelliger Junktor betrachtet werden, der für sich allein eine Formel ist.
2.1.7.	$\perp$	Falsum	$\perp$ F	Falsum ist eine logische Aussagekonstante und kann als nullstelliger Junktor betrachtet werden, der für sich allein eine Formel ist.
2.1.8.	$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i$	Konjunktion über φ_i von 1 bis n	$\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \text{def } \varphi_i, n+1$ $\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i = \text{def } (\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i \wedge \varphi_n + 1)$	Man schreibt auch: $\wedge (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Als Grenzfall der leeren Konjunktion setzt man: $\bigwedge_{i=1}^{0} \varphi_i = \text{def } \top$.
2.1.9	$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i$	Disjunktion über φ_i von 1 bis n	$\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \text{def } \varphi_i, n+1$ $\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i = \text{def } (\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_i \vee \varphi_n + 1)$	Man schreibt auch: $\vee (\varphi_1,\dots,\varphi_n)$. Als Grenzfall der leeren Disjunktion setzt man: $\bigvee_{i=1}^{0} \varphi_i = \text{def } \perp$.

2.2. Quantoren

Quantoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, dass sie aus einer Formel in Verbindung mit einer Variablen, die dadurch gebunden wird, eine Formel bilden. Bei den relavantierten Quantoren tritt noch ein Klassenterm hinzu, auf den relaviert wird.

Nr.	Zeichen / Verwendung	Sprachweise / Benennung	Definition	Bemerkungen
2.2.1.	$\forall\ x\ \varphi\ (x)$ relativierter All-quantor: $\forall\ x \in A\ \ \varphi\ (x)$	Für alle x (gilt) φ (x). Für alle x aus A (gilt) $\varphi\ (x)$.	Semantik entsprechend der Sprachweise $\forall x\ (x \in A \longrightarrow \varphi\ (x))$	Man verwendet auch mehrstellige Allquantoren und Exostenzquant-oren: $\forall\ x_1 x_2 \ldots x_n\ \varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ steht für: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ \varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ ——— $\exists x_1 x_2 \ldots x_n\ \varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$ steht für: $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n\ \varphi\ (x_1, \ldots, x_n)$
2.2.2	$\exists\ x\ \ \varphi$ (x) relativierter All-quantor: $\exists\ x \in A\ \ \varphi\ (x)$	Es gibt midestens ein x mit $\varphi\ (x)$ Es gibt mindestens ein x aus *A mit* $\varphi\ (x)$	Semantik entsprechend der Sprachweise $\exists\ x\ (x \in A \wedge \varphi\ (x))$	
2.2.3.	$\exists^1 x\ \varphi\ (x)$ relativierter All-quantor: $\exists^1\ x \in A\ \ \varphi\ (x)$	Es gibt genau ein x mit $\varphi\ (x)$ Es gibt genau ein x aus *A* mit $\varphi\ (x)$	$\exists y\ \forall x\ (\varphi\ (x) \longleftrightarrow x = y)$ ——— $\exists y \in A\ \forall x \in A\ (\varphi\ (x) \longleftrightarrow x = y)$	Man schreibt auch $\exists!\ x\ \varphi$ (x). Das Zeichen $\exists^1$ wird empfohlen, da es sich nicht leicht vereingemallgmeinern läßt. $\exists^{>n}$ es gibt mehr als n $\exists^{<n}$ es gibt weniger als n

Anhang

Original English Version

Traduction française (traduction non officielle)