Mathe-Notizen für Selbstudium

1. Auflage

vom 7. Juli 2017

Jens Kallup

Langensalzer Str. 30
99817 Eisenach
Tel.: 03691 /
E-Mail: jkallup@web.de

Inhalt:

Eigene Gedanken zu:

de.sci.mathematik
de.sci.informatik

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Vorwort

mit diesen Posting will ich versuchen, eine Zusammenfassung dessen zu geben, was hier seit Monaten Diskutiert wird. Falls was falsch sein sollte, bitte Feedback geben. Kann auch passieren das ich aus versehen eine falsche Taste beim schreiben drücke, und der Inhalt fehlt, ich bemühe mich durchgängig zu schreiben und im Zusammenhang zu posten. Ok, let's go...

Grundlagen - Informatik

2.1 Grundlagen

Die zum Erledigen einer Aufgabe erforderlichen Arbeitsschritte lassen einen immer wiederkehrenden Rhythmus erkennen:
E - ingabe
V - erarbeitung
A - usgabe .

Der Aufbau der Zentraleinheit aus elektronischen Schaltungen bringt es mit sich, dass zur Datendarstellung nur zwei Zustände gegeben sind.
"Ja" - Strom fließst und
"Nein" - kein Strom.
Diese beiden Zustände werden mit **1** oder **0** bezeichnet.
Das Bit ist ein Binärzeichen, das die Zustände 1 und 0 annehmen kann. Es ist zugleich die kleinste Informationseinheit, die Computer verstehen. Alle Informationen müssen auf dem Bit aufgebaut werden.

Hinweis: Für Grundlagen der in der Inforamtik verwendeten Zahlensysteme, finden Sie auch im Kapitel 3 - 3.1 auf Seite 11 .

Grundlagen - Mathematik

3.1 Zahlensysteme

In jedem Zahlensystem wird der Wert einer Ziffer durch ihre Stellung innerhalb einer Zahl bestimmt. Die Grundlage eines jedem Zahlensystems ist seine Basis.

Beispiel:	m * b^n	m	=	Ziffernwert
		b	=	Basis
		n	=	Exponent
		b^n	=	Zahlenbasis

$36_{(10)}$ Zahlenbasis : 10

Zehner und Einer benennen den Stellenwert.
Wählt man dagegen einen andere Zahlenbasis, so ändert sich der Wert beträchtlich.

$36_{(10)}$ Zahlenbasis : 16

Das egibt:

$$\begin{aligned} 3 * 16^1 &= 48 \\ + 6 * 16^0 &= 6 \\ = 6 * 16^0 &= 54 \end{aligned}$$

3.1.1 Dualsystem

Das duale System entspricht dem binären Aufbau der elektronischen Datenverarbeitunh. Es beruht auf der Basis 2 und benötigt nur die Ziffern 0 und 1.

Beispiel:
$$\begin{aligned} 10_{(2)} &= 1 * 2^1 = 2 \\ &+ 0 * 2^0 = 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

3.2 Umwandlung Dezimal - Dual

Im ersten Fall wird die Dezimalzahl so lange durch die Basis 2 geteilt, bis das Ergebnis Null erreicht ist. Die Reste der einzelnen Divisionen ergeben die Dualzahl. Im zweiten Fall werden die Ziffernwerte mit den Stellenwerten der Dualzahl multipliziert. Die Summe der Produkte ergibt die Dezimalzahl.

3.2.1 Dezimal nach Dual umwandeln

$$\begin{aligned} 29 : 2 &= 14 + \text{Rest } 1 \\ 14 : 2 &= 7 + \text{Rest } 0 \\ 7 : 2 &= 3 + \text{Rest } 1 \\ 3 : 2 &= 1 + \text{Rest } 1 \\ 1 : 2 &= 0 + \text{Rest } 1 \quad = 11101_{(2)} \end{aligned}$$

3.2.2 Dual in Dezimalzahl umwandeln

$$
\begin{array}{llrcrl}
1\,1\,1\,0\,1 & = 1\ * & 1 & = & 1 & \\
 & 0\ * & 0 & = & 0 & \\
 & 1\ * & 4 & = & 4 & \\
 & 1\ * & 8 & = & 8 & \\
 & 1\ * & 16 & = & 16 & = 29_{(10)}
\end{array}
$$

3.3 Hexadezimalsystem

In diesem System liegt die Basis 16 zu Grunde, d. h. es werden 16 Ziffern benötigt. Die ersten zehn Ziffern entstammen dem Dezimalsystem, 0 bis 9, die folgenden sechs Ziffern werden beginnend mit den ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet, also A bis F.

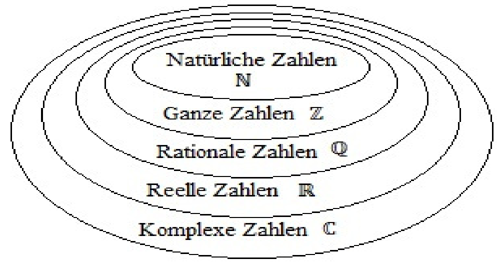
dual:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
hex:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

3.3.1 Umwandlung Hex nach Dezimal

Folgende Hexadezimalzahl ist gegeben: 2AE

$$
\begin{array}{lcrclcrl}
2 & = & 2 & * & 16^2 & = & 512_{(10)} & \\
A & = & 10 & * & 16^1 & = & 160_{(10)} & \\
E & = & 14 & * & 16^0 & = & 14_{(10)} & = 686_{(10)}
\end{array}
$$

3.4 Zeichen und Symbole



$\mathbb{C}$ = komplexe Zahl
$\mathbb{I}$ = irrationale Zahl
$\mathbb{N}$ = natürliche Zahl
$\mathbb{Q}$ = rationale Zahl
$\mathbb{R}$ = reelle Zahl
$\mathbb{Z}$ = ganze Zahl

f	= Funktion
x	= Argument, x-Wert, unabhängige Variable
y	= Funktionswert, y-Wert, abhängige Variable
$y = f(x)$	= Funktionsgleichung, Zuordnungsvorschrift
$f(x)$	= spricht man "f von x"
D (*oder* $\mathbb{D}$)	= Definitionsmenge, Definitionsbereich
W	= Wertemenge, Wertebereich
$f(x) = c$	= konstante Funktion
$f(x) = mx + n$	= lineare Funktion
$f(x) = ax^2 + bx + c$	= quadratische Funktion
$f(x) = \frac{a_n x_n^a + a_n - 1^{x^{n-1}} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_m x^m + b_m - 1^{x^{m-1}} + \ldots + b_1 x + b_0}$	= rationale gebrochene Funktion

Zahlen und Zahlenbereiche

4.1 Natürliche Zahlen

4.1.1 Einführung

Der Begriff Zahl ist vom althochdeutschen Wort "zala" abgeleitet. Dieser Begriff wurde mit "Einschnitt ins Kerbholz" übersetzt. Diese Übersetzung zeigt, welche Bedeutung der Zahlbegriff historisch hatte. Er sollte helfen, die Welt messbar und zählbar zu machen. Die Völker mit einer schriftlichen Kultur haben im Laufe der Geschichte verschiedene Zahlen- und Notationsysteme entwickelt.
Unser heutiges Zahlensystem wird arabisch-indisches System genannt. Es basiert auf dem Dezimalsystem und enthält die Ziffern 0 bis 9. Aus diesen Symbolen oder Zeichen lassen sich nach einfachen Gesetzmässigkeiten beliebige Zahlen bilden. Die beiden Begriffe Kardinalzahlen und Ordinalzahlen beschreiben jeweils die Tätigket des Ordnens und des Zählens. Unter Kardinalzahlen versteht man die ganzen Zahlen, mit denen gezählt wird und Mengen beschrieben werden. Beispielsweise spricht man von 2 Hunden, 4 Katzen, 32 Kilometer usw. Die Ordinalzahlen hingegen beschreiben Ordnungen, Rang- und Reihenfolgen. Jemand gewinnt den 2. Preis oder schaut zum 10ten Mal 425 Folge von BibBangTheory.

Natürliche Zahlen N sind **positive** Zahlen, die durch 0 bis 9 symbolisiert dargestellt werden. Natürliche Zahlen können gepaart werden, indem man an den Zahlen 1 bis 9 weitere natürliche Zahlen anfügt (zum Bsp.: 12, 34, 22). Bei der Aufstellung der natürlichen Zahlen ist wie in der mathelogie üblich eine einheitliche Form einzuhalten. So kann/darf man bei einer Definition nicht einfach: 12, 1 33 schreiben !!!
Es ist zwar keine feste Regel dafür manifestiert, aber der Übersichtlichkeit ist eine gewisse Disziplin der Ordnung nicht falsch.

Die Menge der natürlichen **positiven** Zahlen werden wie folgt definiert:
$N = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

Natürliche Zahlen sind nur innerhalb eines mehr oder weniger großen Bereichs abzählbar, da sie unendlich sind. Jede natürliche Zahl $\mathbf{n}$ hat immer einen unmittelbaren Nachfolger $\mathbf{n+1}$ hat.

4.2 ganze Zahlen

4.2.1 Einführung

Das Ergebnis einer Addition oder einer Multiplikation zweier natürlicher Zahlen is immer eine weitere natürliche Zahl. Man sagt, dass die Menge der nürllichen Zahlen bezüglich der Addition und der Multiplikation in sich abgeschlossen sind. Achtung: Dies gilt nicht für die Subtraktion und der Division !
Die Subtraktion zweier natürlichen Zahlen ist nur mit den im naürlichen Wertebereich der Zahlen 0

bis 9 möglich **und** wenn der Minuend größer ist als der Subtrahend. Ist jedoch der Minuend größer als der Subtrahend, ist das Ergebnis der Subtraktion keine natürliche Zahl mehr. Deshalb werden die natürlichen Zahlen um die negativen Zahlem ergängzt.
Ganze Zahlen Z erweitern die natürlichen Zahlen N.

4.3 rationale Zahlen

4.3.1 Einführung

Die Menge der natürlichen Zahlen ist abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation, nicht jedoch bezüglich der Subtraktion und Divison. Deshalb wurden die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen erweitert. Die Menge der ganzen Zahlen ist nun auch abgeschlossen. Allerdings ist die Division in den ganzen Zahlen nicht uneingeschränkt möglich.
Deshalb wird der Zahlenbereich nun ein zweites Mal erweitert, so dass er auch abgeschlossen ist. Die neu einzuführenden Zahlen sind die Brüche, die als:
$\frac{a}{b}$
geschrieben werden.

4.4 gebrochene Zahlen

4.4.1 Einführung

Gebrochene Zahlen $Q+$ oder $Q*$ sind eine Erweiterung der natürlichen Zahlen N, die gestattet, uneingeschränkt zu dividieren. Dazu werden natürliche Zahlen um den **negativen** Zahlenbereich von N sowie um Brüche (rationale Zahlen Q) ergänzt.

Addition und Maltiplikation können als "abgeschlossene Operationen" betrachtet werden. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ergibt immer eine weitere natürliche Zahl:
$3 + 5 = 8 \quad | \ 3 \in \mathbb{N};\ 5 \in \mathbb{N};\ 8 \in \mathbb{N}$
$3 * 5 = 15$
Minus und Division gelten als "nicht abgeschlossene Operationen". Die Differenz zweier natürlicher Zahlen muss nicht immer eine natürliche ergeben:
$3 - 5 = \ -2 \ \ | 3 \in \mathbb{N};\ 5 \in \mathbb{N}\ -2 \notin \mathbb{N}$
$3\ :5\ =\ 0,6\ | 3 \in \mathbb{N};\ 5 \in \mathbb{N}\ 0.6 \notin \mathbb{N}$

Bonus:
Im Internet habe ich ein etwas verunglücktes Beispiel zu unendliche N gefunden, das ich hier vorstellen, aber auch Kommentieren will.

- man denke sich ein kosmisches Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor.
- das Hotel ist *voll* belegt.
- Nun kommt noch ein Gast.

Frage: Kann er in einen voll belegten Hotel noch untergebracht werden? Antwort: = JA!

- da es unendlich viele Zimmer gibt, rückt jeder Gast nur ein Zimmer weiter und das erste wird frei.

- nach dem selben Prinzip können natürlich auch weitere 10 Gäste untergebracht werden.

Kommentar von mir dazu:
Der Sichtwinkel ist hierbei wichtig! Logisch ist es, wenn man von einen *vollen* Hotel spricht, das alle Betten belegt sind. Da aber der Begriff "unendlich", kein Ende oder *voll* definiert ist, können auch "unendlich" viele Betten/Zimmer bezogen werden.
Anders ausgedrückt kann die Zahl unendlich, kann an die Zahl unendlich angeknüpft werden, um wieder eine Menge von unendlich und nicht abzählbaren Zahlen zu bekommen.

4.5 reelle Zahlen

4.5.1 Einführung

Die Menge der rationalen Zahlen ist abgeschlossen bezüglich der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division. Es gibt jedoch Operationen, die aus den rationalen Zahlen herausführen. Eine dieser Operationen ist das Radizieren (wurzelziehen). Die Wurzeln der meisten natürlichen Zahlen sind keine rationalen Zahlen. Dies werde ich später für $\sqrt{2}$ zeigen.
Es existieren also Zahlen, die keine rationalen Zahlen sind. Um diese Lücke zhu schließen, benötigt man eine Erweiterung des Zahlenbereichs. Die Zahlen, die diese Lücke auf der Zahlengerade beschreiben, nennt man **irrationale Zahlen**. Sie lassen sich durch unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche darstellen. Die rationalen und irrationalen $\mathbb{I}$ Zahlen ergeben die Menge der reellen Zahlen. Sie wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Die positiven reellen Zahlen werden entsprechend mit $\mathbb{R}^+$ und die negativen mit $\mathbb{R}^-$ bezeichnet.
Bei den irrationalen Zahlen unterscheidet man zwischen algebraischen und transzendenten Zahlen. Eine Zahl heißt alghebraisch, wenn die Lösung einer Gleichung der Form:
$a_x^n + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$
ist.
Zahlen, die nicht algebraisch sind, nennt man transzendent. Transzendente Zahlen sind zum Beispiel die Kreiszahl $\pi = 3,1415...$ und die eulersche Zahl $e = 2,71...$. Die eulersche Zahl spielt bei den Exponential- und Logarithmusfunktionen eine wichtige Rolle.

4.5.2 Die Quadratwurzel aus 2 ist keine rationale Zahl

Ich will nun zeigen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. Angenommen, dies wäre der Fall, dann ließe sich $\sqrt{2}$ als Bruch: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ schreiben.
Man kann dabei ohne allgemeine Beschränkung annehmen, dass der Bruch eine Grunddarstellung ist. Die Zahlen a und b sind also teilerfremd. Quadriert man die obige Gleichung, dann erhält man: $2 = \frac{a^2}{b^2}$.
Diese Gleichung kann man mit b^2 multiplizieren: $2 * b^2 = a^2$.
Hieraus folgt, dass a^2 den Teiler 2 hat. Denn a^2 und b^2 sind ganze Zahlen. Somit besitzt auch a den Teiler 2. Man kann deshalb die Zahl a durch a = 2*k ersetzen, wobei k eine ganze Zahl ist.
Also muss auch b^2 den Teiler Teiler 2 haben. Dies steht aber im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass a und b teilerfremde Zahlen sind. Damit ist die Annahme, $\sqrt{2}$ sei eine rationale Zahl, falsch.

Auf die gleiche Art kann man auch zeigen, dass die Wurzel einer beliebigen Primzahl eine irrationale Zahl ist.

4.6 komplexe Zahlen

4.6.1 Einführung

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ erweitern den Zahlenbereich des reellen Zahlenbereichs.
Beispiele solcher Zahlen sind: $i, 7 + 3i, 3 - 4i$

Mit fortschreitender Erlangung von neuen Kenntnissen (z. Bsp. auch geprägt von der Nutzung elektronischer Einheiten; womit ich die Einführung des mathematische Binärsystems - n^2 andeuten will), wurde man dadurch motiviert, komplexe Zahlen einzuführen.
Man erkannte, das Gleichungen wie $x^2 = -1$ nicht lösbar sind. Da es nun aber auch die Zahl -1 (gesprochen: minus eins) in der Zahlentheorie gibt, wurde eine **imaginäre Einheit** eingeführt, die mit **i** - als Definition: $i^2 = -1$ manifestiert wurde. Mit komplexen Zahlen wurde somit das Problem behoben.

4.7 Beispiel aus de.sci.mathematik

Gegeben ist folgende Gleichung:

$\sqrt[n]{(e^{(i\phi)}) = e^{i*(\frac{\phi}{n}+k*2*\frac{\pi}{n})}}$ mit $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Hier die einfache Herleitung:
Für n = 2 und k = 0 aus der Gleichung:

e entspricht der Eulerzahl 1
i entspricht der imaginären Zahl: $i^2 = -1$
dann ergibt sich aus e und i: $1^2 = -1$
ϕ entsprich 1 * phi
$\frac{\pi}{2}$ entsprich die Hälfte der Kreiszahl π: $\frac{3.14}{2} = 1.57$

1. $\sqrt[2]{1^{-1*\phi} = 1^{-1*(\frac{\phi}{2}+0*2*\frac{\pi}{2})}}$
2. $\sqrt[2]{1^{-1*\phi} = 1^{-1*(\frac{\phi}{2}+0*2*1.57)}}$
3. $\sqrt[2]{1^{-\phi} = \frac{1*2}{1} * \frac{\phi}{2}}$ $\mid 2\, und\, 2\, kürzt\, sich\, weg.\ (\phi = 1)$
4. $\sqrt[2]{1^{-1} = 1 * 1}$
5. $\sqrt[2]{1 = 1} = \sqrt[2]{1} = \sqrt[2]{1}$
6. $1 = 1$

Gegeben ist:

1. $-1 = (e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (1 * e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (e^{2*i*\pi} * e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (e^{4*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = 1$

2. $-1 = (e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (e^{4*i*\pi})^{\frac{1}{2}}$
3. $-1 = (1^{2*-1*\pi})^{\frac{1}{2}} = (1^{4*-1*\pi})^{\frac{1}{2}}$
4. $-1 = (1^{2*-\pi})^{\frac{1}{2}} = (1^{4*-\pi})^{\frac{1}{2}}$
5. $-1 = (-3.14)^{\frac{1}{2}} = (-3.14)^{\frac{1}{2}}$
6. $-1 = -1.57 = -1.57$
7. $-1 = ((-1.57 \implies -1.57) = wahr = 1) = 1$
8. $-1 = 1 = 1$

nun wird jedes Glied mit -1 multipliziert:

9. $-1 * -1 = 1 \left\{ \underbrace{\begin{matrix} 1 * -1 = -1 \\ 1 * -1 = -1 \end{matrix}}_{= 0,\ \text{kürzt sich weg}} \right\} = 1 * -1 = -1$

Ergebnis: $-1 \mapsto 1 = richtig$!

Mengen

Mengen können auf zwei verschiedene weisen dargestellt werden:

1. **aufzählende Schreibweise:**
   Alle Elemente einer Menge in geschweifter Klammer: $M = \{1; 2; 3\}$

   Wenn in einer Menge ein längeres Intervall existiert, kann man sich durch Schreibweise ... bedienen. Diese Schreibweise kennzeichnet Elemente, die in der Menge *M* vorkommen können, jedoch aus Platzgründen nicht mit aufgeschrieben werden - man könnte es auch als Platzhalter verstehen.
   Und hier noch die Schreibweise: $M = \{1; 2; 3; \ldots; 10; 11\}$

2. **die beschreibende Schreibweise:**
   Mit dieser Schreibweise wird versucht, Elemente einer Menge mit mathematischen Aussagen zu beschreiben. Erfüllt ein Element eine Aussage, so ist dieses Element der Menge:
   $M = \{\, p \,|\, {''}p\,ist\,eine\,Primzahl{''} \,\}$

   Sei Menge M eine mathematisch beschreibende Aussage:
   $M = \{z \in N\}$

   dann spricht man von einer Menge M, in der "z Element von N ist".
   Wenn gilt: $M = \{z \leq 17\}$

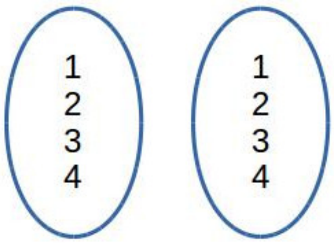
   dann spricht man von einer Menge, in der nur das Element z kleiner gleich 17 enthalten sein darf/ (oder alle Elemente von z kleiner gleich 17 sind).

Mengendiagramme sind Diagramme, die Elemente in einer geschlossener Umgebung enthalten.

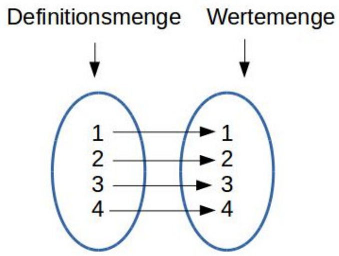
In der realen Welt begegnen uns häufig Abhängigkeiten zwischen zwei Größen.
Als Beispiel hierfür sei die Fläche einer geometrischen Grundkörpers ist abhängig von der Seitenlänge eines Quadrats, oder bei einen Kreis, dessen Radius.
Um die Abhängigkeiten besser verstehen zu können, spricht man auch von einer Zuordnung eines Wertes zu einen anderen Wert.

Beispiel:
Der Hefeteig eines Kuchens hat in der ersten Stunde das doppelte Volumen. In der zweiten Stunde hat der Teig das doppelte Volumen des Vorgängers.

Erst wenn wir verstanden haben, was eine Zuordnung ist, können wir uns mit Funktionen näher beschäftigen. Grund dafür ist, dass eine Funktion nichts anderes als eine Zuordnung mit bestimmten Eigenschaften ist.
Außerdem müssen wir unseren mathematischen Wortschatz um einige Vokabeln erweitern.

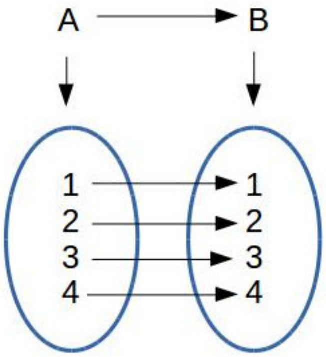


Die linke Mengen wird als Definitions(menge) bezeichnet, während die rechte Menge als Werte(menge) bezeichnet wird.

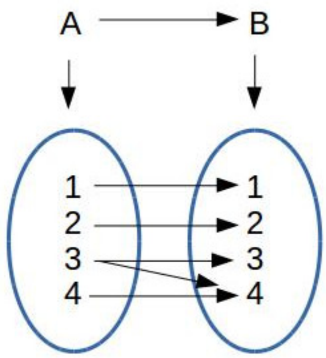


Wie wir bereits wissen, besteht zwischen den beiden Mengen eine Beziehung. Diese Beziehung lässt sich mit Zuordnungspfeilen verdeutlichen.

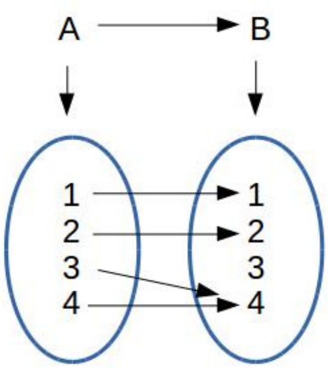
$1 \mapsto 1$
$\dots$
$4 \mapsto 4$



Bei $f : A \mapsto B$ handelt es sich um eine Funktion,
da jedem Element x der Menge A genau ein Element
y der Menge B zugeordnet ist.



Bei $f : A \mapsto B$ handelt es sich um keine Funktion,
da dem Element 3 der Menge A zwei Elemente
(3 und 4) der Menge B zugeordnet sind. 4



Bei $f : A \mapsto B$ handelt es sich um eine Funktion,
da jedem Element x der Menge A genau ein Element y der
Menge B zugeordnet ist.

Dass sich einem Element aus der Menge B zwei Elemente
der Menge A zuordnen lassen, spielt keine Rolle.
Es handelt sich laut Definition trotzdem um eine Funktion.

Die Erkenntnisse aus den obigen Beispielen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Eine Funktion liegt vor, wenn von jedem Element x der linken Menge (Definitionsmenge) genau ein Pfeil abgeht. Von wie vielen Pfeilen ein Element y der rechten Menge (Wertemenge) getroffen wird, spielt dagegen für die Definition einer Funktion keine Rolle.

Bezeichnungen und Schreibweisen
Leider verwenden nicht alle Autoren/Lehrer dieselben Begriffe. Es ist deshalb notwendig, dass man

die alternativen Bezeichnungen im Hinterkopf behält, um Verwirrungen beim Lesen verschiedener Mathematiktexte zu vermeiden.

Zwei Funktionen sind genau dann identisch, wenn sie in folgenden Teilen übereinstimmen:

* Funktionsgleichung
* Definitionsmenge
* Wertemenge

Demzufolge sind zwei Funktionen mit gleicher Funktionsgleichung, aber verschiedenen Definitionsmengen oder verschiedenen Wertemengen, nicht identisch und können somit unterschiedliche Eigenschaften besitzen.

Beispiele einer Funktion:
$y = 2x,\ D = \{1, 2, 3\},\ W = \{2, 4, 8\}$

Neuronale Netze

Tauchen Sie ein, in die wundersame Welt der künstlichen Intelligenz.
Ich beschreibe hier einen neuralen Netzwerk Simulator, der auch von nicht-technischen Leuten, einfach zu verstehen ist. Basierend auf backpropagation'es Lernen für das hier vorgestellte Tool, ist es möglich, Ihren Computer zu trainieren und zu lernen, was Sie von ihm erwarten.
Ich möchte Ihnen zugleich einen Vorrausblick geben, was uns in naher Zukunft erwartet.

7.1 Arten von Netzwerken

Folgende neurale Netzwerke, werde ich hier noch vorstellen:
* ein Netzwerk, um die Zahlen 1, 2, und 3 zu erkennen.
* ein Netzwerk, um die logische Funktion AND zu verarbeiten.
* ein Netzwerk, um die logische Funktion XOE zu verarbeiten.

7.2 Was sind Neuronale Netzwerke ?

Expert Definition:
Ein neurales Netzwerk ist eine parallel-laufende Informationsstruktur.

Überwachtes Lernen

Mit Lernen ist dabei die Fähigkeit gemeint, Gesetzmäßigkeiten nachzubilden. Die Ergebnisse sind durch Naturgesetze oder Expertenwissen bekannt und werden benutzt, um das System anzulernen. Ein Lernalgorithmus versucht, eine Hypothese zu finden, die möglichst zielsichere Voraussagen trifft. Unter Hypothese ist dabei eine Abbildung zu verstehen, die jedem Eingabewert den vermuteten Ausgabewert zuordnet. Dazu verändert der Algorithmus die freien Parameter der gewählten Hypothesenklasse. Oft wird als Hypothesenklasse die Menge aller Hypothesen, die durch ein bestimmtes künstliches neuronales Netzwerk modelliert werden kann, verwendet. In diesem Fall sind die frei wählbaren Parameter die Gewichte der Neuronen. Beim überwachten Lernen werden diese Gewichte derart angepasst, dass die Ausgabe der Neuronen denen eines vorgegebenen Teaching Vectors (engl., Lernvektor) möglichst nahekommt. Die Methode richtet sich also nach einer im Vorhinein festgelegten zu lernenden Ausgabe, deren Ergebnisse bekannt sind. Die Ergebnisse des Lernprozesses können mit den bekannten, richtigen Ergebnissen verglichen, also „überwacht“, werden.

Um zu wissen, wann eine Hypothese zielsicher ist, wird ein Fehlermaß eingeführt, das minimiert werden soll. Eine beliebte Wahl ist der mittlere quadratische Fehler aller Trainingsdaten.

8.1 Empirische Daten

Empirie (vom griechischen: empeiría ‚Erfahrung, Erfahrungswissen) ist eine methodisch-systematische Sammlung von Daten. Auch die Erkenntnisse aus empirischen Daten werden manchmal kurz Empirie genannt.

8.2 mittlerer quadratische Fehler

Die mittlere quadratische Abweichung, auch der mittlere quadratische Fehler genannt und MQF oder MSE (aus dem englischen für mean squared error) abgekürzt, ist ein Begriff der mathematischen Statistik. Er gibt in der Schätztheorie an, wie sehr ein Punktschätzer um den zu schätzenden Wert streut. Damit ist er ein zentrales Qualitätskriterium für Schätzer.

8.3 Punktschätzer

Als Punktschätzer bezeichnet man eine Schätzfunktion, die jeder Stichprobe einen Wert zuordnet, der eine gewisse Eigenschaft des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsmaßes schätzen soll. In den meisten Anwendungen ist die interessierende Größe ein Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Beobachtungen (wie z.B. der Mittelwert)

8.4 Schätzfunktion

Eine Schätzfunktion dient in der mathematischen Statistik dazu, aufgrund von vorhandenen empirischen Daten einer Stichprobe einen Schätzwert zu ermitteln und dadurch Informationen über unbekannte Parameter einer Grundgesamtheit zu erhalten. Schätzfunktionen sind die Basis zur Berechnung von Punktschätzungen und zur Bestimmung von Konfidenzintervallen mittels Bereichsschätzern und werden als Teststatistiken in Hypothesentests verwendet. Sie sind spezielle Stichprobenfunktionen und können durch Schätzverfahren, z. B. die Methode der kleinsten Quadrate bestimmt werden.
Im Rahmen der Entscheidungstheorie können Schätzfunktionen auch als Entscheidungsfunktionen bei Entscheidungen unter Unsicherheit betrachtet werden.

8.5 Grundgesamtheit

Bezeichnet zum Beispiel die Gesamtheit von Populationen. Die Menge aller Einheiten (auch Merkmalsträger, Untersuchungseinheit) mit übereinstimmenden Identifikationskriterien (sachlich, räumlich und zeitgleich).
Die Einheit ist Träger der Informationen für die Untersuchung

8.6 Stickprobe

Als Stichprobe bezeichnet man eine Teilmenge einer Grundgesamtheit, die unter bestimmten Gesichtspunkten ausgewählt wurde.

8.6.1 Auswahlverfahren

Ein Auswahlverfahren ist die Art und Weise, wie die Elemente der Stichprobe möglichst zweckmäßig ausgewählt werden. Es gibt verschiedene Auswahlverfahren, die nachfolgend beschrieben werden.

Zufallsauswahl

Eine Zufallsstichprobe ist notwendig, wenn die Stichprobe repräsentativ sein soll, d. h. wenn von ihr nach dem Induktionsprinzip auf die Grundgesamtheit geschlossen werden soll, da es oft nicht möglich ist, die Grundgesamtheit (etwa die Gesamtbevölkerung oder alle Exemplare eines bestimmten Produkts) zu untersuchen.

Bewusste Auswahl

Bei einer systematischen Stichprobenziehung werden bereits bekannte Informationen über die auszuwählenden Fälle genutzt. Die Auswahl erfolgt anhand von Listen und festgelegten Regeln. Mathematisch-statistische Modelle, etwa die Berechnung der Einschlusswahrscheinlichkeit, sind bei bewussten Auswahlen nicht anwendbar. Systematische Auswahlverfahren kommen zum Beispiel im kommerziellen Bereich vor, wenn es auf Repräsentativität nicht ankommt.

Willkürliche Auswahl

Bei willkürlichen Stichproben werden Elemente aus der Grundgesamtheit (etwa von einem Interviewer) mehr oder weniger willkürlich in die Stichprobe aufgenommen. Die Auswahl liegt im Ermessen des Interviewers.

8.7 Systematische Stischprobe

Als Systematische Stichprobe (auch Bewusste Auswahl) bezeichnet man Auswahlverfahren, bei denen subjektive Erwägungen die Auswahl der Zielpersonen bestimmen.

Beispiel: Alle Mitarbeiter mit mehr als 10 Jahren Betriebszugehörigkeit.

Es werden Vorinformationen über die auszuwählenden Fälle genutzt. Verallgemeinerungen sind auf der Basis mathematisch-statistischer Modelle bei bewussten Auswahlen nicht möglich.

8.8 Stichprobenvariable

An dieser Stelle setzt die statistische Modellierung an. Die Stichprobenvariable X_i, eine Zufallsvariable, beschreibt mit ihrer Verteilung die Wahrscheinlichkeit, mit der eine bestimmte Merkmalsausprägung bei der i i Ziehung aus der Grundgesamtheit auftritt. Jeder Beobachtungswert x_i ist die Realisierung einer Stichprobenvariable X_i.

8.9 Stichprobenfunktion

Die Definition von Stichprobenvariablen X_i erlaubt die Definition von Stichprobenfunktionen analog z. B. zu Kennwerten aus der deskriptiven Statistik:

8.9.1 Arithmetisches Mittel - Formel

$\bar{\mathrm{x}} = \frac{x_1+...+x_n}{n}$

8.9.2 Stichprobenfunktion - Formel

$\bar{\mathrm{X}} = \frac{X_1+...+X_n}{n}$

8.10 Stichprobenverteilung

Unter Stichprobenverteilung versteht man die Verteilung einer Stichprobenfunktion $g(X_1, \ldots, X_n)$ über alle möglichen Stichproben aus der Grundgesamtheit. Die Stichprobenfunktion g ist in der Regel eine Schätzfunktion für einen unbekannten Parameter der Grundgesamtheit oder eine Teststatistik für eine Hypothese über einen unbekannten Parameter der Grundgesamtheit. Daher spricht man statt von Stichprobenverteilung auch einfach von der Verteilung einer Schätzfunktion oder Teststatistik. Die Verteilung der Stichprobenfunktion dient der Gewinnung von Aussagen über unbekannte Parameter in der Grundgesamtheit aufgrund einer Stichprobe.

8.11 Hypothese

In der Statistik bezeichnet man mit Hypothese eine Annahme, die mit Methoden der mathematischen Statistik auf Basis empirischer Daten geprüft wird. Man unterscheidet als Gegensatzpaar Nullhypothese und Alternativhypothese (auch Gegenhypothese). Häufig sagt die Nullhypothese aus, dass kein Effekt bzw. Unterschied vorliegt oder dass ein bestimmter Zusammenhang nicht besteht. Diese These soll verworfen werden, so dass die Alternativhypothese als Möglichkeit übrig bleibt. Durch dieses indirekte Vorgehen soll die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Verwerfung der Nullhypothese kontrolliert klein bleiben. Oft entsteht jedoch Verwirrung beim Anwender, weil dieses Vorgehen die Möglichkeit nahelegt, dass – sofern die Nullhypothese nicht verworfen und die Alternativhypothese damit nicht angenommen werden kann – die Nullhypothese als erwiesen gilt. Dies ist allerdings nicht der Fall.

8.11.1 Alternativhypothese

Als Alternativhypothese H_1 oder H_A bezeichnet man in der empirischen Wissenschaft häufig eine durch Beobachtungen oder Überlegungen begründete Annahme oder Vermutung, die zur Erklärung bestimmter Phänomene dient und die einer möglicherweise verbreiteten Annahme oder Vermutung (nämlich der Nullhypothese) entgegensteht. Insofern kann die Alternativhypothese als innovativ betrachtet werden.

Formal zerlegen die Null- und Alternativhypothese einen Parameterraum Θ in zwei disjunkte nicht leere Teilmengen Θ_0 und Θ_1. Die Nullhypothese beinhaltet die Aussage, dass der unbekannte Parameter θ aus Θ_0 stammt, und die Alternativhypothese, dass der unbekannte Parameter θ aus Θ_1 stammt.
$H_0 \colon \theta \in \Theta_0$ vs.
$H_1 \colon \theta \in \Theta_1$

8.12 Teststatistik

Als Teststatistik (synonyme Begriffe: Testgröße, Prüfgröße, Prüffunktion) bezeichnet man eine bestimmte Stichprobenfunktion, die bei einem Hypothesentest dazu verwendet wird, die Testentscheidung - also Ablehnen oder Nichtablehnen der Nullhypothese - zu treffen.
Als Prüfwert wird die Realisation einer Teststatistik anhand einer Stichprobe bezeichnet.

8.12.1 Statistische Signifikanz

Statistisch signifikant wird das Ergebnis eines statistischen Tests genannt, wenn Stichprobendaten so stark von einer vorher festgelegten Annahme (der Nullhypothese) abweichen, dass diese Annahme nach einer vorher festgelegten Regel verworfen wird.

8.12.2 Verwendung bei festem Signifikanzniveau

Vor der Durchführung des Tests, das heißt auch vor der Ziehung der hierzu benötigten Stichprobe, ist die Teststatistik $\boldsymbol{T}$ eine Zufallsvariable. deren deren Wahrscheinlichkeitsverteilung von jener der Stichprobenvariablen $X_1, X_2, ..., Xn$ abhängt, wobei n der Stichprobenumfang ist. Unter der Annahme, dass die Nullhypothese (H_0) richtig ist, wird für die Verteilung der Teststatistik je nach Testverfahren ein bestimmtes Verteilungsmodell angenommen, dessen Verteilungsparameter sich aus der Nullhypothese ergeben. Anhand dieser angenommenen Verteilung sowie des zuvor festgelegten Signifikanzniveaus wird zugleich der Ablehnbereich bestimmt. Nun wird die Stichprobe gezogen und aus den sich dabei ergebenden Stichprobenwerten dem konkrete Wert t der Teststatistik errechnet.
Zur Ablehnung der Nullhypothese kommt es genau dann, wenn t in den Ablehnbereich fällt; anderenfalls wird unter dem verwendeten Signifikanzniveau die Nullhypothese beibehalten. Wenn nämlich die Nullhypothese gilt und damit die unterstellte Verteilung der Teststatistik als richtig angenommen werden kann, entspricht die Wahrscheinlichkeit, dass die Testgröße in den Ablehnbereich fällt und somit die Nullhypothese fälschlich abgelehnt wird (sogenannter Fehler 1. Art), genau dem festgelegten Signifikanzniveau. Das Fallen der Testgröße in den Ablehnbereich ist gleichbedeutend mit der (je nach Testproblem) Über- bzw. Unterschreitung eines bestimmten Schwellenwertes, der auch als ,,Kritischer Wert" bezeichnet wird.

8.12.3 Fehler 1. Art

Der Fehler 1. Art oder α-Fehler (Alpha-Fehler) ist ein Fachbegriff der Statistik. Er bezieht sich auf eine Methode der mathematischen Statistik, den sogenannten Hypothesentest. Beim Test einer Hypothese liegt ein Fehler 1. Art vor, wenn die Nullhypothese zurückgewiesen wird, obwohl sie in Wirklichkeit wahr ist (beruhend auf falsch positiven Ergebnissen).
Die Ausgangshypothese H_0 (Nullhypothese) ist hierbei die Annahme, die Testsituation befinde sich im „Normalzustand“. Wird also dieser NNormalzustandnnicht erkannt, obwohl er tatsächlich vorliegt, ergibt sich ein Fehler 1. Art. Beispiele für einen Fehler 1. Art sind:

- der Patient wird als krank angesehen, obwohl er in Wirklichkeit gesund ist (Nullhypothese: der Patient ist gesund),
- der Angeklagte wird als schuldig verurteilt, obwohl er in Wirklichkeit unschuldig ist (Nullhypothese: der Angeklagte ist unschuldig),
- der Person wird kein Zugang gewährt, obwohl sie eine Zugangsberechtigung hat (Nullhypothese: die Person hat Zugangsberechtigung)

Die vor einem Test bzw. einer Untersuchung festgelegte maximale Wahrscheinlichkeit, bei einer auf dem Ergebnis des Tests fußenden Entscheidung einen solchen Fehler 1. Art zu begehen (Risiko 1. Art), nennt man auch Signifikanzniveau oder Irrtumswahrscheinlichkeit. In der Regel wählt man ein Signifikanzniveau von 5 % (signifikant) oder 1 % (sehr signifikant).

Die andere mögliche Fehlentscheidung, nämlich die Alternativhypothese H_1 zurückzuweisen, obwohl sie wahr ist, heißt Fehler 2. Art.

	Wahrer Sachverhalt: H_0 (Es gibt keinen Unterschied)	**Wahrer Sachverhalt: H_1 (Es gibt einen Unterschied)**
durch einen statistischen Test fällt eine Entscheidung für: H_0	richtige Entscheidung (Spezifität) Wahrscheinlichkeit: 1-α	Fehler 2. Art Wahrscheinlichkeit: β
durch einen statistischen Test fällt eine Entscheidung für: H_1	Fehler 1. Art Wahrscheinlichkeit: α	richtige Entscheidung (Sensitivität) Wahrscheinlichkeit: 1-β

Sigmoid Funktion

Eine Sigmoidfunktion, Schwanenhalsfunktion oder S-Funktion ist eine mathematische Funktion mit einem S-förmigen Graphen. Oft wird der Begriff Sigmoidfunktion auf den Spezialfall logistische Funktion bezogen, die durch die Gleichung:

$$sig(t) = \frac{1}{1+e^{-t}} = \frac{e^t}{1+e^t} = \frac{1}{2} * (1 + \tanh \frac{t}{2})$$

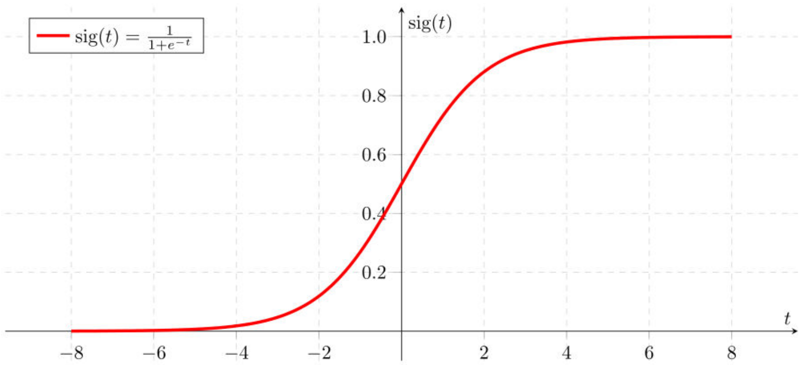


Abbildung 9.1: Graph der Sigmoid-Funktion

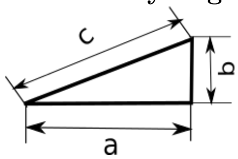
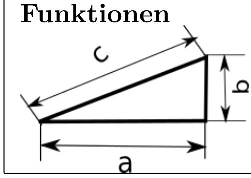
Formelsammlung

Anbei von mir für nützliche empfundene Formeln und Schaubilder:

10.1 Umrechnungen

Arbeit	$1J = 1 = \frac{W}{s} = 1Nm$	-
Leistung	$1W = 1 * \frac{Nm}{s}$	$1PS = 735,49875W$
Wärme	$1J = 1 * \frac{W}{s}$	$1kcal = 4,187kJ$ Wasser: $c = 4,187\frac{kJ}{kg*K}$
Kraft, Druck	$1N = \frac{WA_s}{m}$; $1bar = 10^5 * \frac{N}{m^2}$	1 kp = 9,81 N
Geschwindigkeit	$1 * \frac{m}{s} = 3,6 * \frac{km}{h}$	-
Magnetisches Feld	$1Wb = 1 * V_s$; $1T = 1 * \frac{V_s}{m^2}$	$\mu_0 = 4 * \pi * 10^{-7}\frac{V_s}{Am}$ $\mu_0 = 1,257 * 10^{-6}\frac{V_s}{Am}$
Spule	$1H = 1 * \frac{Vs}{A}$	
Elektrisches Feld Kondensator	- $1F = 1 * \frac{A_s}{V} = 1 * \frac{s}{\Omega}$	$s_0 = 8,854 * 10^{-12}\frac{A_s}{Vm}$

10.2 mathematische Formeln

Satz des Pythagoras 	a = Ankathete b = Gegenkathete c = Hypotenuse	$c^2 = a^2 + b^2$
Trigonometrische Funktionen 	a = Ankathete b = Gegenkathete c = Hypotenuse	sin $\varphi = b/c$ cos $\varphi = a/c$ tan $\varphi = b/a$

Anhang