Mathe-Notizen für Selbstudium

1. Auflage

vom 19. Februar 2017

Jens Kallup

Langensalzer Str. 30
99817 Eisenach
Tel.: 03691 /
E-Mail: jkallup@web.de

Inhalt:
Eigene Gedanken
zu: de.sci.mathematik

1 Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Kapitel 1

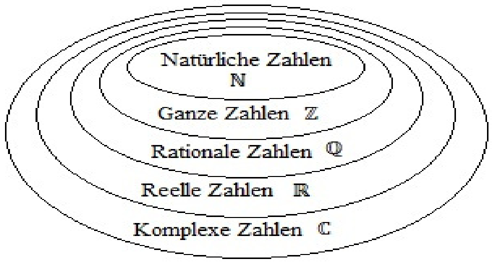
mit diesen Posting will ich versuchen, eine Zusammenfassung dessen zu geben, was hier seit Monaten Diskutiert wird. Falls was falsch sein sollte, bitte Feedback geben. Kann auch passieren das ich aus versehen eine falsche Taste beim schreiben drücke, und der Inhalt fehlt, ich bemühe mich durchgängig zu schreiben und im Zusammenhang zu posten. Ok, let's go...

Grundlagen

Kapitel 2

2.1 Zeichen und Symbole

$\mathbb{C}$ = komplexe Zahl
$\mathbb{I}$ = irrationale Zahl
$\mathbb{N}$ = natürliche Zahl
$\mathbb{Q}$ = rationale Zahl
$\mathbb{R}$ = reelle Zahl
$\mathbb{Z}$ = ganze Zahl



f	= Funktion
x	= Argument, x-Wert, unabhängige Variable
y	= Funktionswert, y-Wert, abhängige Variable
$y = f(x)$	= Funktionsgleichung, Zuordnungsvorschrift
$f(x)$	= spricht man "f von x"
D (*oder* $\mathbb{D}$)	= Definitionsmenge, Definitionsbereich
W	= Wertemenge, Wertebereich
$f(x) = c$	= konstante Funktion
$f(x) = mx + n$	= lineare Funktion
$f(x) = ax^2 + bx + c$	= quadratische Funktion
$f(x) = \frac{a_n x_n^a + a_n - 1^{x^{n-1}} + \ldots + a_1 x + a_0}{a_m x^m + b_m - 1^{x^{m-1}} + \ldots + b_1 x + b_0}$	= rationale gebrochene Funktion

Zahlen und Zahlenbereiche

Kapitel 3

3.1 Natürliche Zahlen

1. Natürliche Zahlen N sind **positive** Zahlen, die durch 0 bis 9 symbolisiert dargestellt werden. Natürliche Zahlen können gepaart werden, indem man an den Zahlen 1 bis 9 weitere natürliche Zahlen anfügt (zum Bsp.: 12, 34, 22). Bei der Aufstellung der natürlichen Zahlen ist wie in der mathelogie üblich eine einheitliche Form einzuhalten. So kann/darf man bei einer Definition nicht einfach: 12, 1 33 schreiben !!! Es ist zwar keine feste Regel dafür manifestiert, aber der Übersichtlichkeit ist eine gewisse Disziplin der Ordnung nicht falsch.

   Die Menge der natürlichen **positiven** Zahlen werden wie folgt definiert:
   $N = \{0; 1; 2; 3; \ldots\}$

   Natürliche Zahlen sind nur innerhalb eines mehr oder weniger großen Bereichs abzählbar, da sie unendlich sind. Jede natürliche Zahl **n** hat immer einen unmittelbaren Nachfolger **n + 1** hat.

2. ganze Zahlen Z erweitern die natürlichen Zahlen N.

3. rationale Zahlen Q entsprechen dem Verhältnis zweier ganzer Zahlen Z (siehe Bruchrechnen).

3.1. gebrochene Zahlen $Q+$ oder $Q*$ sind eine Erweiterung der natürlichen Zahlen N, die gestattet, uneingeschränkt zu dividieren. Dazu werden natürliche Zahlen um den **negativen** Zahlenbereich von N sowie um Brüche (rationale Zahlen Q) ergänzt.

3.2. Addition und Maltiplikation können als "abgeschlossene Operationen" betrachtet werden. Die Summe zweier natürlicher Zahlen ergibt immer eine weitere natürliche Zahl:
$3 + 5 = 8 \quad | \ 3 \in \mathbb{N};\ 5 \in \mathbb{N};\ 8 \in \mathbb{N}$
$3 \ * 5 = 15$

Minus und Division gelten als "nicht abgeschlossene Operationen". Die Differenz zweier natürlicher Zahlen muss nicht immer eine natürliche ergeben:

$3 - 5 = \ -2 \ | 3 \in \mathbb{N};\ 5 \in \mathbb{N}\ -2 \notin \mathbb{N}$
$3 \ : 5 \ = \ 0,6 \ | 3 \in \mathbb{N};\ 5 \in \mathbb{N}\ 0.6 \notin \mathbb{N}$

Bonus:

Im Internet habe ich ein etwas verunglücktes Beispiel zu unendliche N gefunden, das ich hier vorstellen, aber auch Kommentieren will.

- man denke sich ein kosmisches Hotel mit unendlich vielen Zimmern vor.
- das Hotel ist *voll* belegt.
- Nun kommt noch ein Gast.

Frage: Kann er in einen voll belegten Hotel noch untergebracht werden? Antwort: = JA!

- da es unendlich viele Zimmer gibt, rückt jeder Gast nur ein Zimmer weiter und das erste wird frei.
- nach dem selben Prinzip können natürlich auch weitere 10 Gäste untergebracht werden.

Kommentar von mir dazu:
Der Sichtwinkel ist hierbei wichtig! Logisch ist es, wenn man von einen *vollen* Hotel spricht, das alle Betten belegt sind. Da aber der Begriff "unendlich", kein Ende oder *voll* definiert ist, könnnen auch "unendlich" viele Betten/Zimmer bezogen werden.

Anders ausgedrückt kann die Zahl unendlich, kann an die Zahl unendlich angeknüpft werden, um wieder eine Menge von unendlich und nicht abzählbaren Zahlen zu bekommen.

4. reelle Zahlen $\mathbb{R}$ erweitern den Zahlenbereich der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sowie den Zehlenbereich der Brüche.

4.1. reelle Zahlen umfassen auch den Zahlenbereich der irrationalen Zahlen $\mathbb{I}$.

5. komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ erweitern den Zahlenbereich des reellen Zahlenbereichs.
Beispiel solcher Zahlen sind: $i, 7 + 3i, 3 - 4i$

Mit fortschreitender Erlangung von neuen Kenntnissen (z. Bsp. auch geprägt von der Nutzung elektronischer Einheiten; womit ich die Einführung des mathematische Binärsystems - n^2 andeuten will), wurde man dadurch motiviert, komplexe Zahlen einzuführen.
Man erkannte, das Gleichungen wie $x^2 = -1$ nicht lösbar sind. Da es nun aber auch die Zahl -1 (gesprochen: minus eins) in der Zahlentheorie gibt, wurde eine **imaginäre Einheit** eingeführt, die mit **i** - als Definition: $i^2 = -1$ manifestiert wurde. Mit komplexen Zahlen wurde somit das Problem behoben.

3.1.1 Beispiel aus de.sci.mathematik

Gegeben ist folgende Gleichung:

$\sqrt[n]{(e^{(i\phi)})} = e^{i*(\frac{\phi}{n}+k*2*\frac{\pi}{n})}$ mit $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Hier die einfache Herleitung:
Für n = 2 und k = 0 aus der Gleichung:

e entspricht der Eulerzahl 1
i entspricht der imaginären Zahl: $i^2 = -1$

dann ergibt sich aus e und i: $1^2 = -1$
ϕ entsprich 1 * phi
$\frac{\pi}{2}$ entsprich die Hälfte der Kreiszahl π: $\frac{3.14}{2} = 1.57$

1. $\sqrt[2]{1^{-1*\phi} = 1^{-1*(\frac{\phi}{2}+0*2*\frac{\pi}{2})}}$
2. $\sqrt[2]{1^{-1*\phi} = 1^{-1*(\frac{\phi}{2}+0*2*1.57)}}$
3. $\sqrt[2]{1^{-\phi} = \frac{1*2}{1} * \frac{\phi}{2}}$ $\mid 2\, und\, 2\, kürzt\, sich\, weg.\, (\phi = 1)$
4. $\sqrt[2]{1^{-1} = 1 * 1}$
5. $\sqrt[2]{1 = 1} = \sqrt[2]{1} = \sqrt[2]{1}$
6. $1 = 1$

Gegeben ist:

1. $-1 = (e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (1 * e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (e^{2*i*\pi} * e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (e^{4*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = 1$

2. $-1 = (e^{2*i*\pi})^{\frac{1}{2}} = (e^{4*i*\pi})^{\frac{1}{2}}$
3. $-1 = (1^{2*-1*\pi})^{\frac{1}{2}} = (1^{4*-1*\pi})^{\frac{1}{2}}$
4. $-1 = (1^{2*-\pi})^{\frac{1}{2}} = (1^{4*-\pi})^{\frac{1}{2}}$
5. $-1 = (-3.14)^{\frac{1}{2}} = (-3.14)^{\frac{1}{2}}$
6. $-1 = -1.57 = -1.57$
7. $-1 = ((-1.57 \implies -1.57) = wahr = 1) = 1$
8. $-1 = 1 = 1$

nun wird jedes Glied mit -1 multipliziert:

9. $-1 * -1 = 1 \left\{ \underbrace{\begin{array}{c} 1 * -1 = -1 \\ 1 * -1 = -1 \end{array}}_{= 0,\text{ kürzt sich weg}} \right\} = 1 * -1 = -1$

Ergebnis: $-1 \mapsto 1 = richtig$!

Mengen

Kapitel 4

Mengen können auf zwei verschiedene weisen dargestellt werden:

1. **aufzählende Schreibweise:**
   Alle Elemente einer Menge in geschweifter Klammer: $M = \{1; 2; 3\}$

   Wenn in einer Menge ein längeres Intervall existiert, kann man sich durch Schreibweise . . . bedienen. Diese Schreibweise kennzeichnet Elemente, die in der Menge *M* vorkommen können, jedoch aus Platzgründen nicht mit aufgeschrieben werden - man könnte es auch als Platzhalter verstehen.
   Und hier noch die Schreibweise: $M = \{1; 2; 3; \ldots; 10; 11\}$

2. **die beschreibende Schreibweise:**
   Mit dieser Schreibweise wird versucht, Elemente einer Menge mit mathematischen Aussagen zu beschreiben. Erfüllt ein Element eine Aussage, so ist dieses Element der Menge:
   $M = \{\, p \,|\, "p\, ist\; eine\; Primzahl" \,\}$

   Sei Menge M eine mathematisch beschreibende Aussage:
   $M = \{z \in N\}$

   dann spricht man von einer Menge M, in der "z Element von N ist".
   Wenn gilt: $M = \{z \leq 17\}$

   dann spricht man von einer Menge, in der nur das Element z kleiner gleich 17 enthalten sein darf/ (oder alle Elemente von z kleiner gleich 17 sind).

Mengendiagramme sind Diagramme, die Elemente in einer geschlossener Umgebung enthalten.

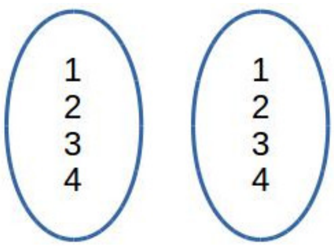
Funktionen

Kapitel 5

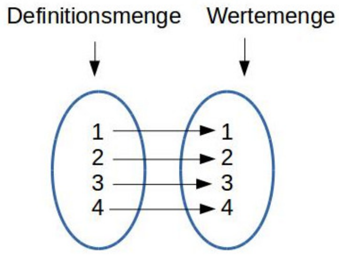
In der realen Welt begegnen uns häufig Abhängigkeiten zwischen zwei Größen.
Als Beispiel hierfür sei die Fläche einer geometrischen Grundkörpers ist abhängig von der Seitenlänge eines Quadrats, oder bei einen Kreis, dessen Radius.
Um die Abhängigkeiten besser verstehen zu können, spricht man auch von einer Zuordnung eines Wertes zu einen anderen Wert.

Beispiel:
Der Hefeteig eines Kuchens hat in der ersten Stunde das doppelte Volumen. In der zweiten Stunde hat der Teig das doppelte Volumen des Vorgängers.

Erst wenn wir verstanden haben, was eine Zuordnung ist, können wir uns mit Funktionen näher beschäftigen. Grund dafür ist, dass eine Funktion nichts anderes als eine Zuordnung mit bestimmten Eigenschaften ist.
Außerdem müssen wir unseren mathematischen Wortschatz um einige Vokabeln erweitern.

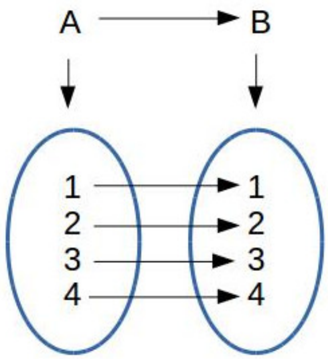


Die linke Mengen wird als Definitions(menge) bezeichnet, während die rechte Menge als Werte(menge) bezeichnet wird.

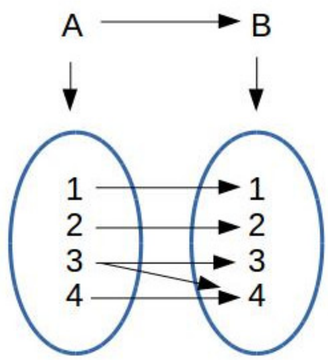


Wie wir bereits wissen, besteht zwischen den beiden Mengen eine Beziehung. Diese Beziehung lässt sich mit Zuordnungspfeilen verdeutlichen.

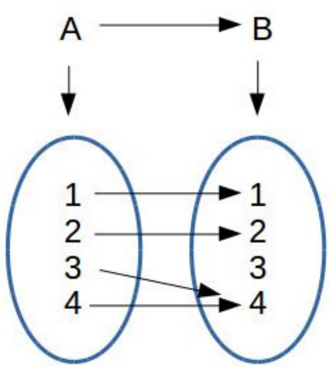
$1 \mapsto 1$
$\ldots$
$4 \mapsto 4$



Bei $f : A \mapsto B$ handelt es sich um eine Funktion,
da jedem Element x der Menge A genau ein Element
y der Menge B zugeordnet ist.



Bei $f : A \mapsto B$ handelt es sich um keine Funktion,
da dem Element 3 der Menge A zwei Elemente
(3 und 4) der Menge B zugeordnet sind. 4



Bei $f : A \mapsto B$ handelt es sich um eine Funktion,
da jedem Element x der Menge A genau ein Element y der
Menge B zugeordnet ist.

Dass sich einem Element aus der Menge B zwei Elemente
der Menge A zuordnen lassen, spielt keine Rolle.
Es handelt sich laut Definition trotzdem um eine Funktion.

Die Erkenntnisse aus den obigen Beispielen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen: Eine Funktion liegt vor, wenn von jedem Element x der linken Menge (Definitionsmenge) genau ein Pfeil abgeht. Von wie vielen Pfeilen ein Element y der rechten Menge (Wertemenge) getroffen wird, spielt dagegen für die Definition einer Funktion keine Rolle.

Bezeichnungen und Schreibweisen

Leider verwenden nicht alle Autoren/Lehrer dieselben Begriffe. Es ist deshalb notwendig, dass man die alternativen Bezeichnungen im Hinterkopf behält, um Verwirrungen beim Lesen verschiedener Mathematiktexte zu vermeiden.

Zwei Funktionen sind genau dann identisch, wenn sie in folgenden Teilen übereinstimmen:

* Funktionsgleichung
* Definitionsmenge
* Wertemenge

Demzufolge sind zwei Funktionen mit gleicher Funktionsgleichung, aber verschiedenen Definitionsmengen oder verschiedenen Wertemengen, nicht identisch und können somit unterschiedliche Eigenschaften besitzen.

Beispiele einer Funktion:
$y = 2x,\ D = \{1, 2, 3\},\ W = \{2, 4, 8\}$