Der natürliche Logarithmus

ln

logarithmus naturalis

Zur Erinnerung:

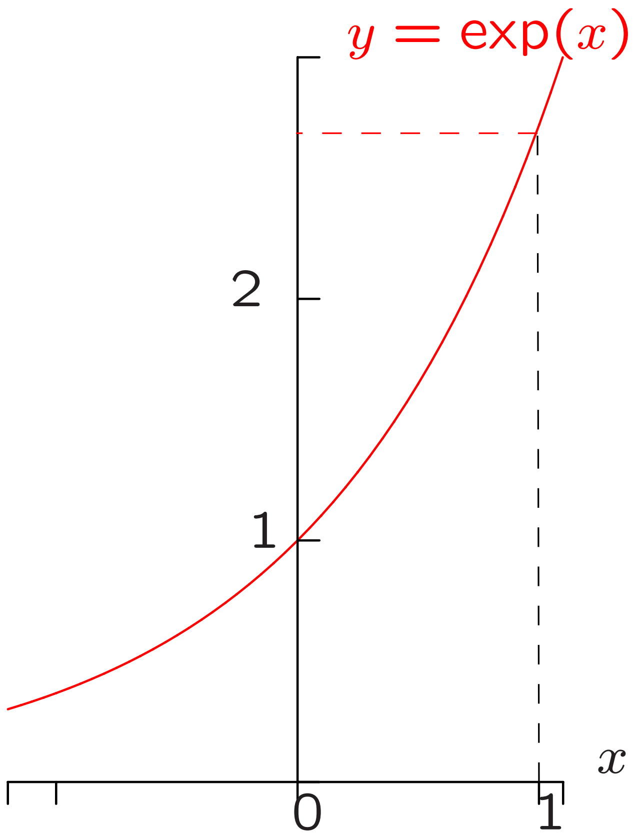
Die Exponentialfunktion

$y = \mathrm{exp}(x)$

ist festgelegt durch

$$y'(x) = y(x)$$

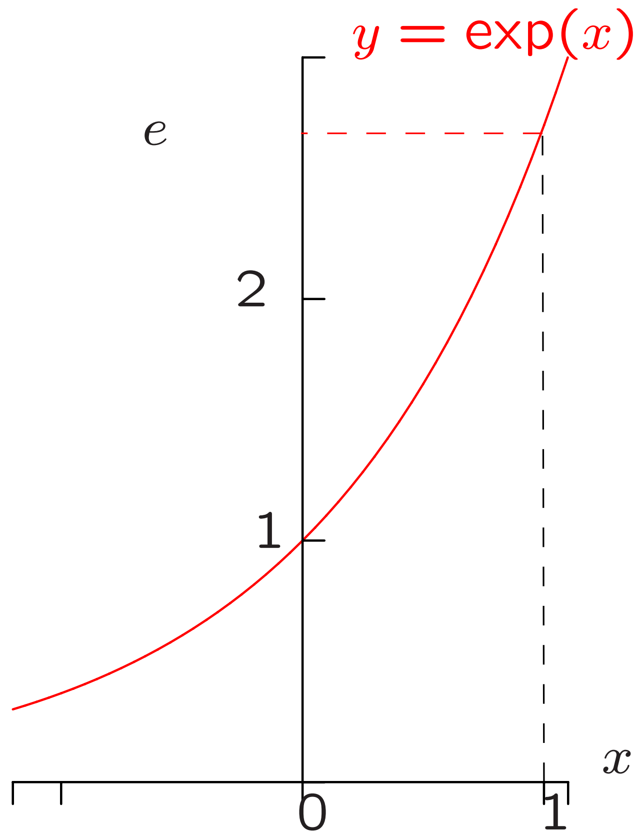
$$y(0) = 1$$



Zur Erinnerung:

$e := y(1) \approx 2.718$

$\exp(x) = e^x$

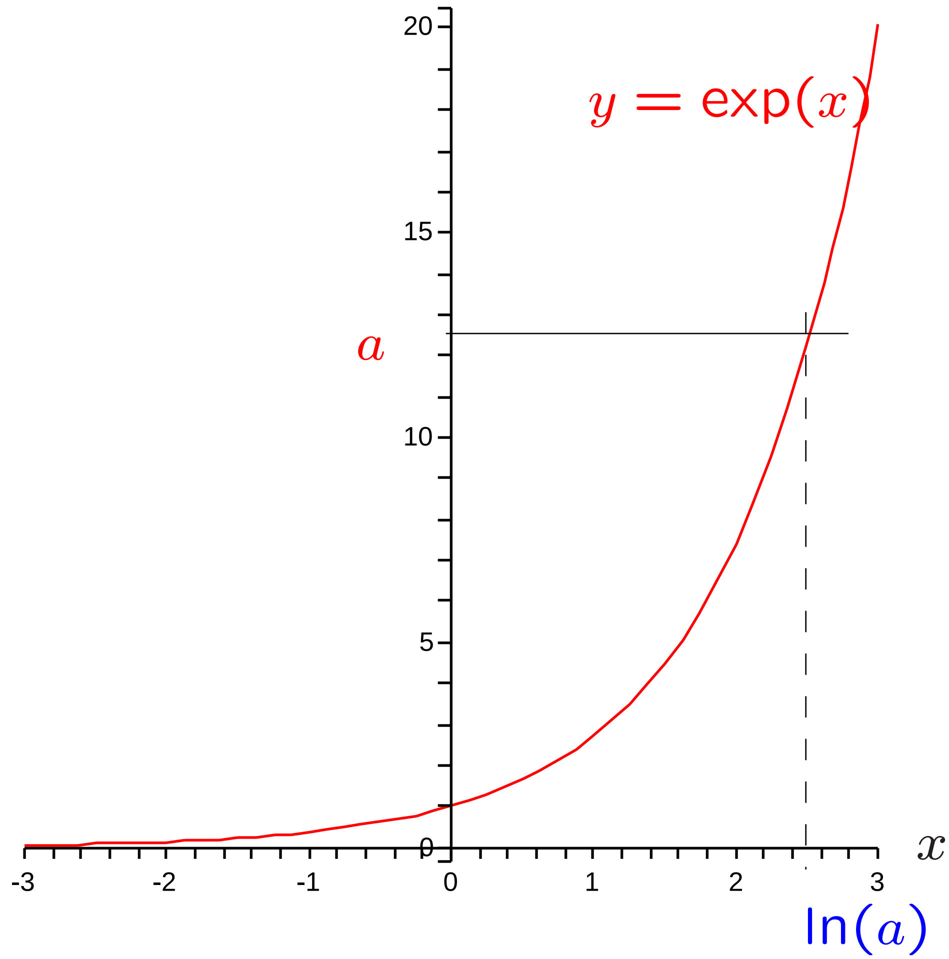


Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}_+$

gibt es genau

eine Zahl $\ln(a) \in \mathbb{R}$ mit

$$a = \exp(\ln(a)).$$



$\ln(a)$ heißt der natürliche Logarithmus von a
oder auch der Logarithmus von a zur Basis e.

$$e^{\ln(a)} = a$$

$\ln(a)$ ist diejenige Zahl (“derjenige Exponent”),
mit der man die Zahl e potenzieren muss,
um a zu erhalten.

Zum Beispiel:

$$\ln(e^2) = 2,$$

$$\ln(e) = \ln(e^1) = 1,$$

$$\ln(1) = \ln(e^0) = 0.$$

Die (natürliche) Logarithmusfunktion

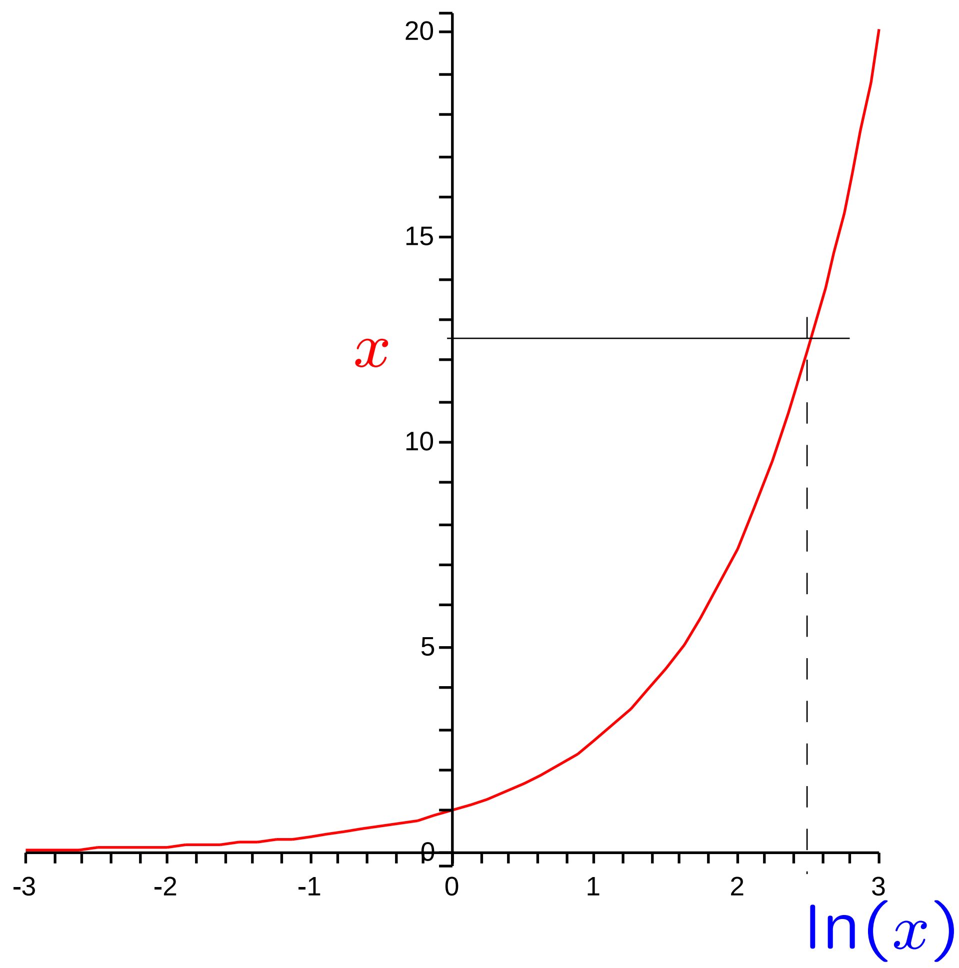
$$x \mapsto \ln(x)$$

ist definiert durch

$$e^{\ln(x)} = x.$$

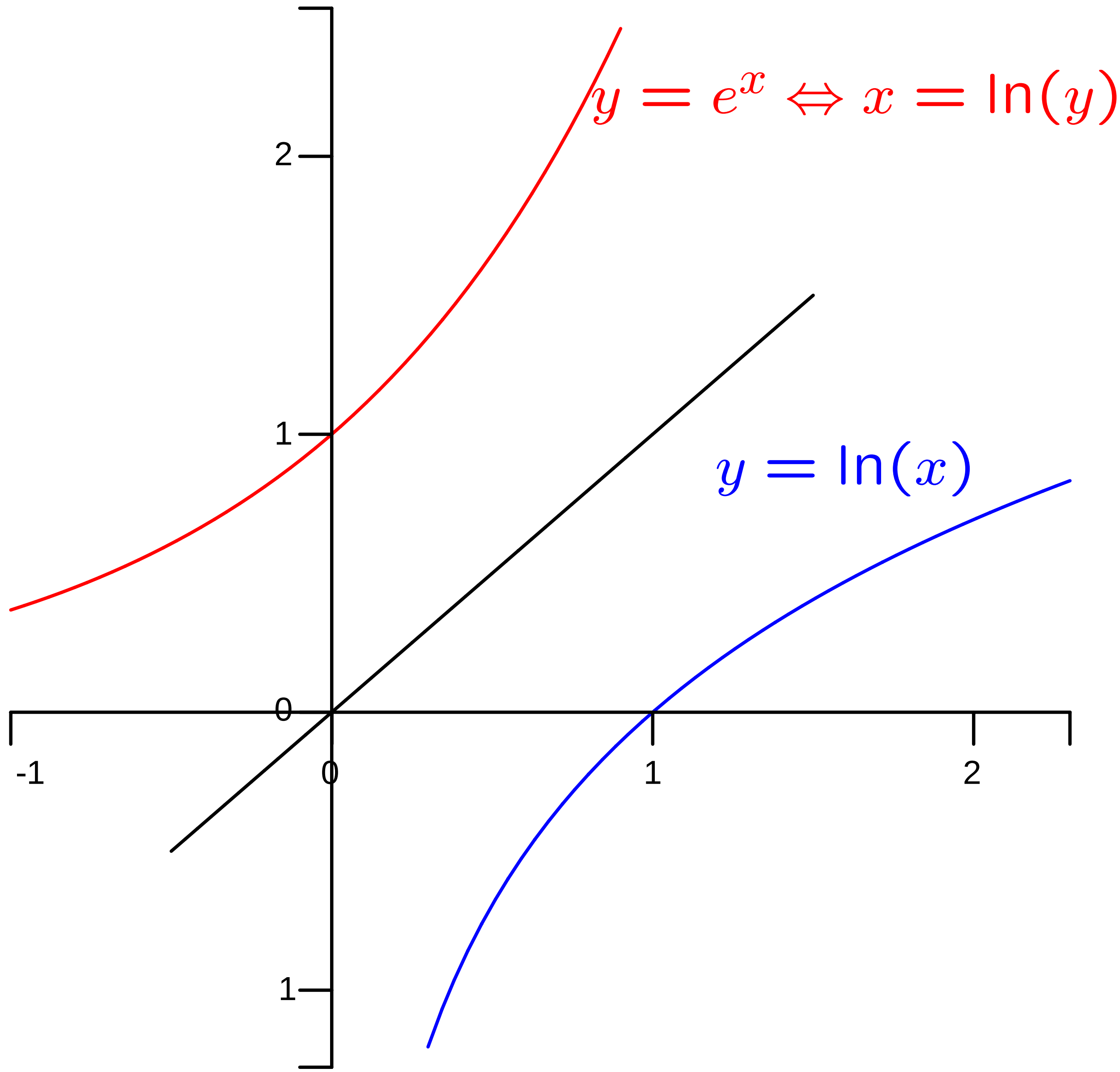
Sie ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion.

$$\boxed{e^{\ln x} = x, \quad \ln(e^x) = x.}$$


20
15
10
5
0
-3
-2
-1
0
1
2
3
x
$\ln(x)$

Wie bekommt man den Graph der Funktion

$y = \ln(x)$?



$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$
$y = \ln(x)$
2
1
0
1
-1
0
1
2

Merke:

Den Graph der Funktion

$$y = \ln(x)$$

bekommt man aus dem Graphen der Funktion

$$y = e^x,$$

indem man x mit y vertauscht,

d.h. die Kurve $y = e^x$

an der Diagonalen ($y = x$) spiegelt.

$\ln(x)$ ist nur für $x > 0$ definiert.

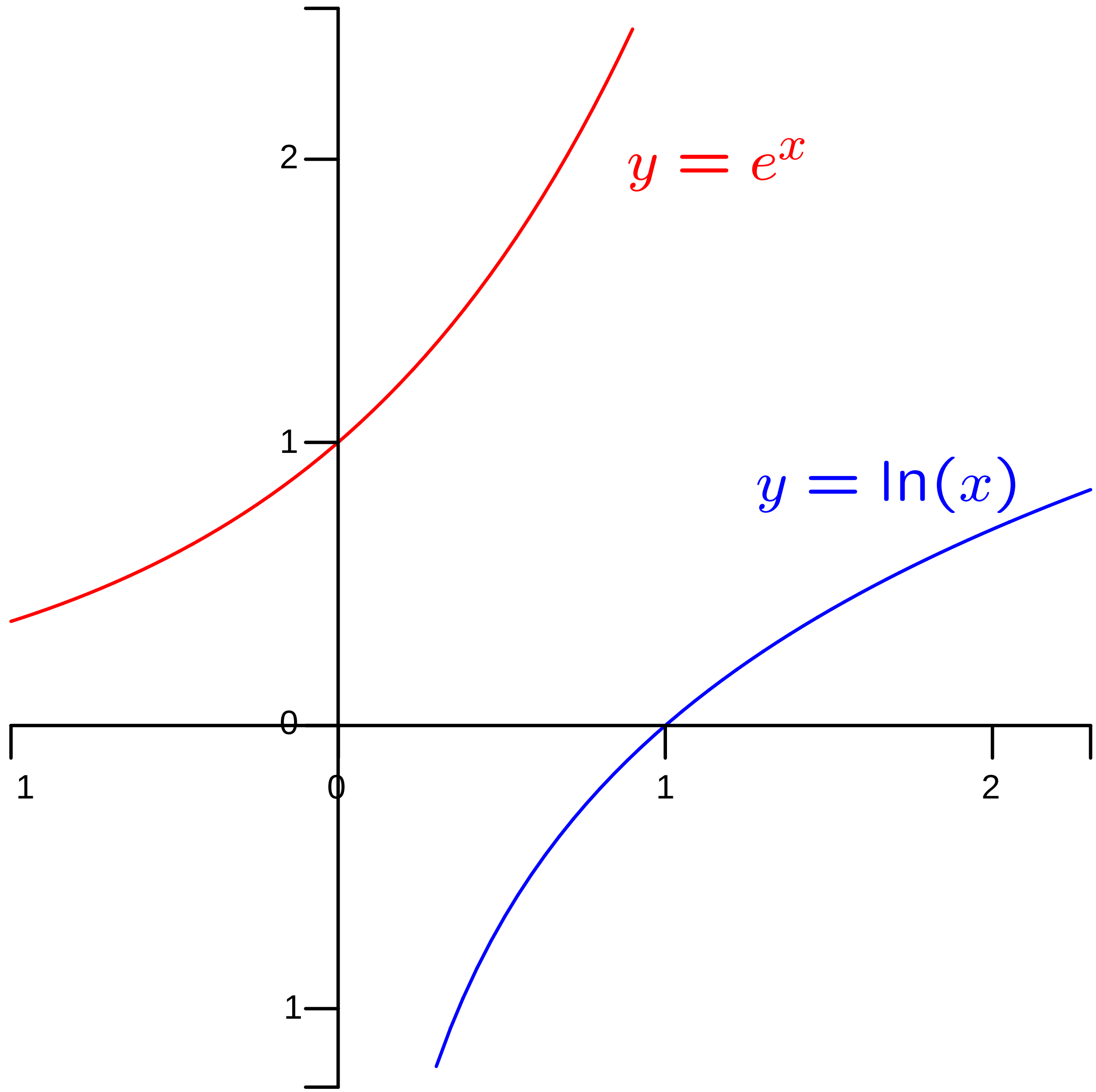
Merke:

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Der Definitionsbereich der Funktion $\ln$ ist $\mathbb{R}_+$,

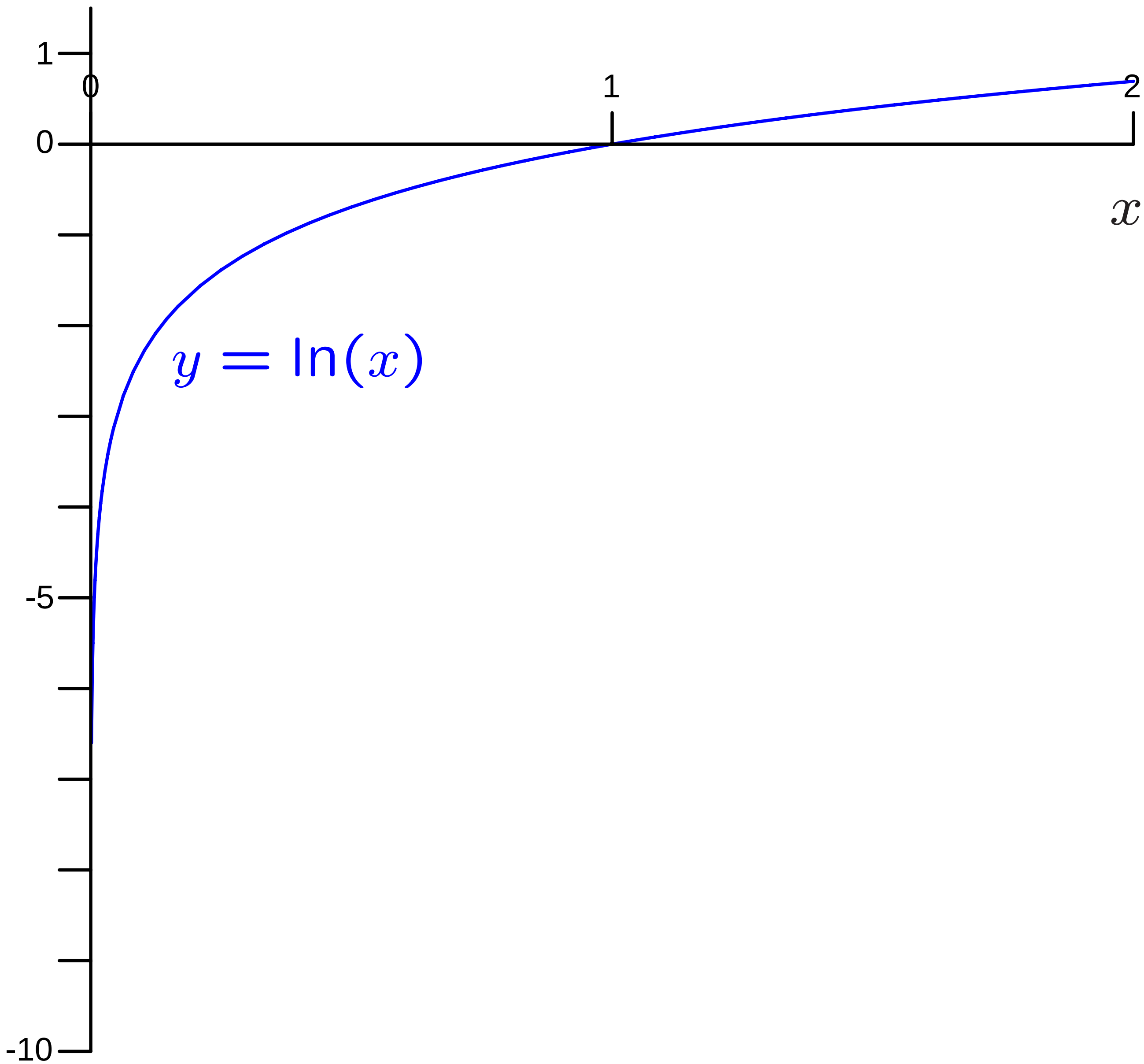
die Menge der positiven reellen Zahlen.



$y = e^x$
$y = \ln(x)$
2
1
0
1
1
0
1
2

Wenn x eine kleine positive Zahl ist,

dann ist $\ln(x)$ eine betragsmäßig große negative Zahl.



1
0
-5
-10
0
1
2
x
$y = \ln(x)$

Wenn x eine kleine positive Zahl ist,

dann ist $\ln(x)$ eine betragsmäßig große negative Zahl.

Es gilt:

$$\ln(x) \to -\infty \quad \text{für } x \downarrow 0.$$

Lies: $\ln(x)$ konvergiert gegen minus Unendlich,
wenn x (von oben) gegen Null geht.

Für $x \to \infty$ wächst $\ln(x)$ gegen ∞,

allerdings sehr langsam:

$$e^{6.9} \approx 10^3\,, \quad \text{also} \quad \ln 10^3 \approx 6.9$$

$$e^{13.8} \approx 10^6\,, \quad \text{also} \quad \ln 10^6 \approx 13.8$$

$$e^{20.7} \approx 10^9, \quad \text{also} \quad \ln 10^9 \approx 20.7$$

Die fundamentale Eigenschaft der Logarithmusfunktion:

$$\ln(rs) = \ln(r) + \ln(s)$$

denn

$$\begin{aligned}\exp(\ln(rs)) &= rs \\ &= \exp(\ln(r)) \cdot \exp(\ln(s)) \\ &= \exp\left(\ln(r) + \ln(s)\right)\end{aligned}$$

Aus

$$\ln(rs) = \ln(r) + \ln(s)$$

folgt sofort

$$\ln(1) = 0, \quad \text{denn} \quad \ln(1) = \ln(1) + \ln(1)$$

$$\ln(\tfrac{1}{u}) = -\ln(u), \quad \text{denn} \quad \ln(\tfrac{1}{u}) + \ln(u) = \ln(1) = 0$$

$$\ln(\sqrt{u}) = \tfrac{1}{2}\ln(u), \quad \text{denn} \quad \ln(\sqrt{u}) + \ln(\sqrt{u}) = \ln(u).$$

Potenzen und Logarithmen

Für $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$ ist

$$b^x = \left(e^{\ln(b)}\right)^x$$

$$= e^{\ln(b)\,x}$$

$$\boxed{\ln(b^x) = x \ln(b)}$$

Für eine positive Zahl b und $x > 0$

ist die Zahl $\log_b(x)$ definiert durch

$$b^{\log_b(x)} = x.$$

Die Funktion

$$x \mapsto \log_b(x),\ x > 0$$

heißt Logarithmusfunktion zur Basis b.

Sie ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto b^x$.

Speziell: $\log_e(x) = \ln(x)$.

Beispiele

$$\log_2 8 = 3$$

$$\log_2 64 = 6$$

$$\log_2 1024 = \log_2(2^{10}) = 10.$$

Beispiele

$$\log_{10} 10 = 1$$

$$\log_{10} 1000 = 3$$

$$\log_{10} 1\,000\,000 = 6$$

$$\log_{10} 1\,000\,000\,000 = 9$$

Wie hängt $\ln x$ mit $\log_b(x)$ zusammen?

Durch Logarithmieren der Gleichung $b^{\log_b(x)} = x$ sieht man:

$$\log_b(x)\ln(b) = \ln(x)$$

also

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

“Für $x \to \infty$ ist $\ln x$ klein gegen x.”

Zum Beispiel:

$$\ln 1\,000 \approx 6.9$$

$$\ln 1\,000\,000 \approx 13.8$$

$$\ln 1\,000\,000\,000 \approx 20.7$$

In der Tat gilt:

$$\frac{\ln(x)}{x} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow \infty$$

Denn mit $y := \ln x$ ist das gleichbedeutend mit

$$\frac{y}{e^y} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad y \longrightarrow \infty.$$

Und das wissen wir schon! Man erinnere sich:

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \ldots$$

Statt

$$\frac{\ln(x)}{x} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

schreibt man auch:

$$\ln(x) = o(x) \quad \text{für} \quad x \to \infty$$

und liest: $\ln(x)$ ist klein gegen x für x gegen Unendlich

oder auch

$\ln(x)$ ist klein o von x.

Zur Erinnerung:

Mit der Schreibweise

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to \infty$$

meint man:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

Beispiel:

$$x^2 = o(x^3) \quad \text{für } x \to \infty,$$

denn

$$\frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \infty.$$

$\sqrt{x} = o(x)$ für $x \longrightarrow \infty$, denn

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad x \longrightarrow \infty.$$

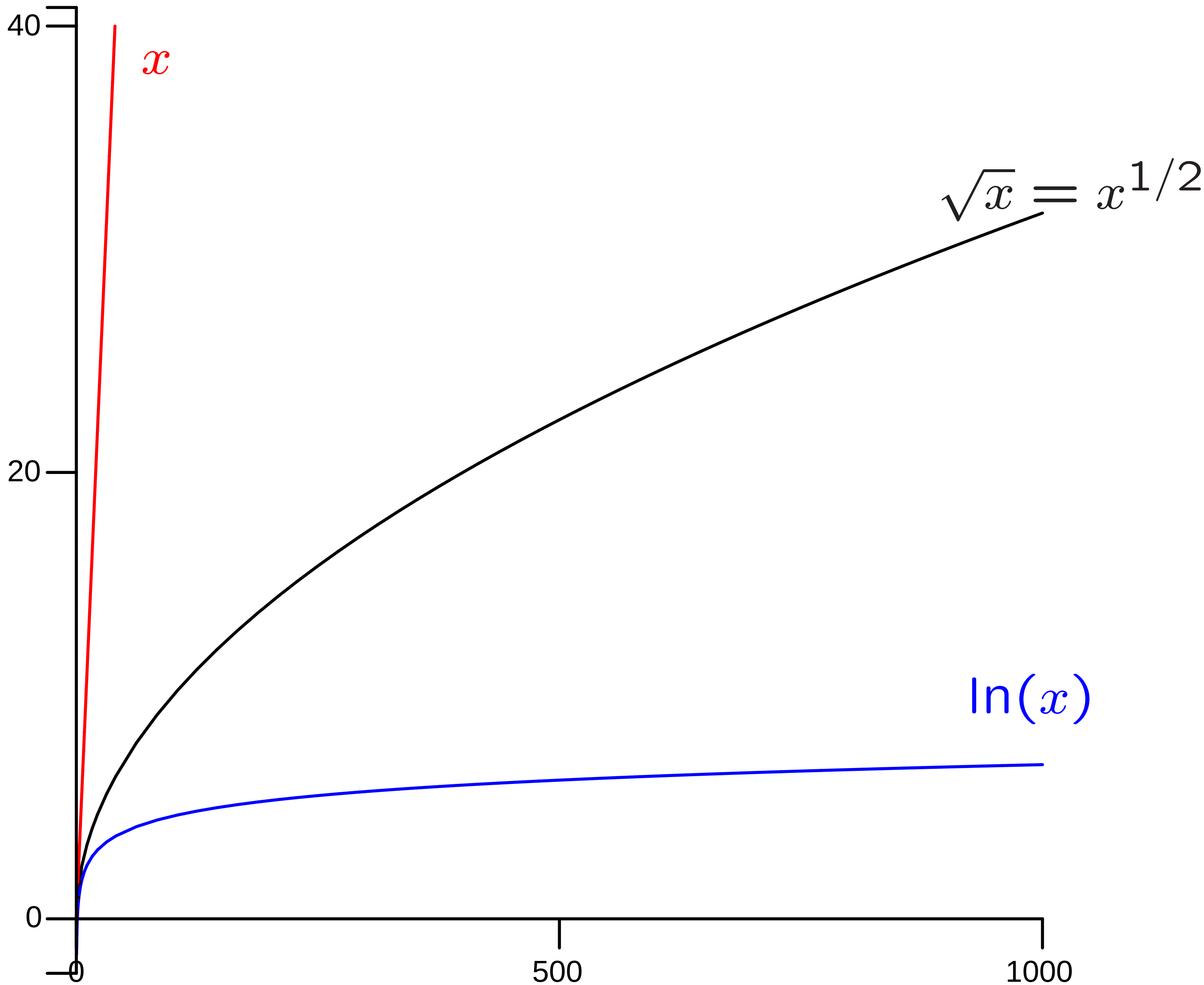
$$\ln(x) = o(x) \quad \text{und} \quad \sqrt{x} = o(x) \quad \text{für } x \to \infty.$$

Was bleibt kleiner, $\ln(x)$ oder $\sqrt{x}$?

Für große x ist $\ln(x)$ klein nicht nur gegen x,

sondern sogar auch gegen $\sqrt{x}$:

$$\ln(x) = o(\sqrt{x}) \text{ für } x \to \infty.$$



40
20
0
0
500
1000
x
$\sqrt{x} = x^{1/2}$
$\ln(x)$

Es gilt sogar:

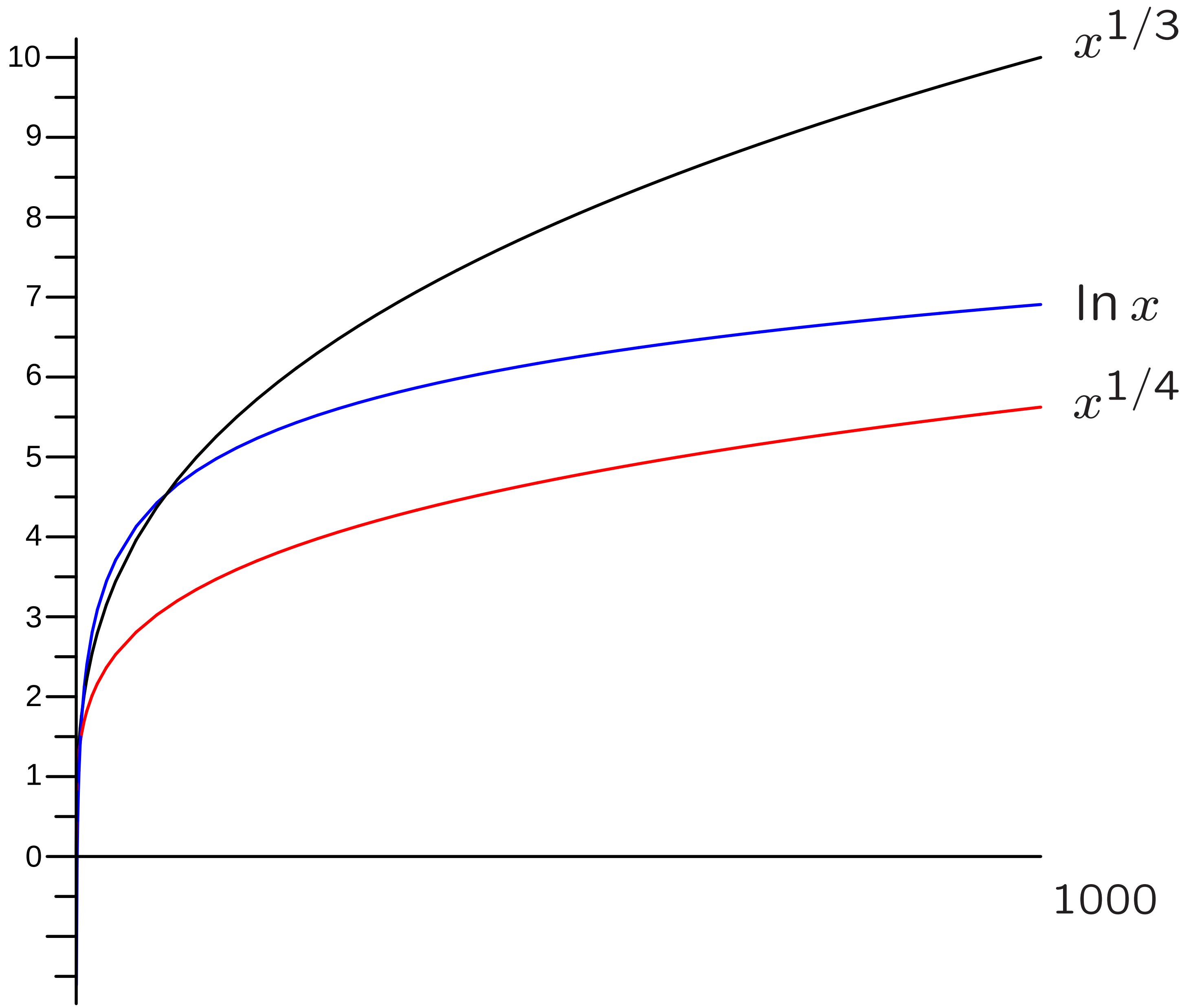
Für jede positive Zahl p ist

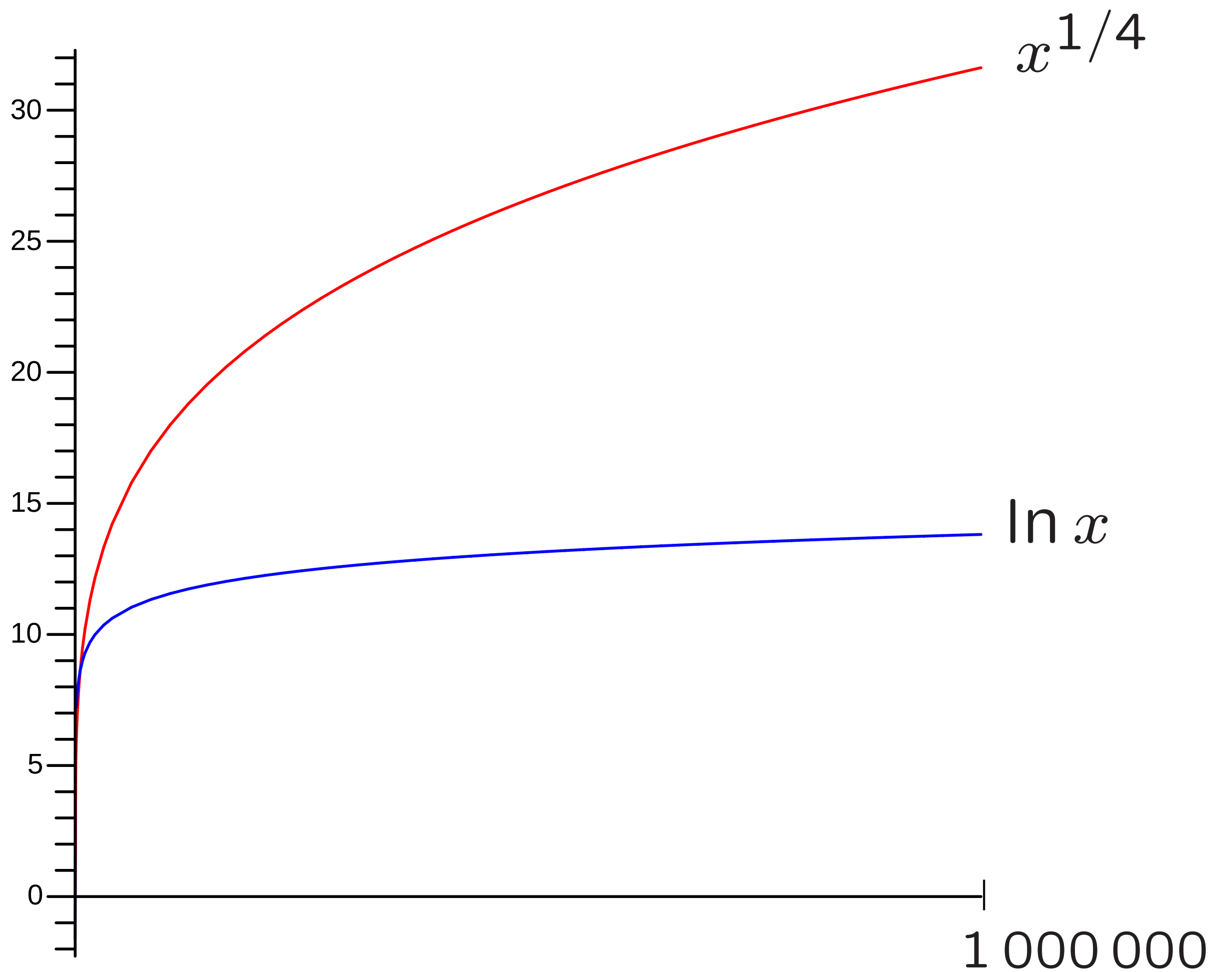
$\ln x$ klein gegen x^p für $x \to \infty$:

$$\boxed{\forall p > 0 : \ \ln(x) = o(x^p) \quad \text{für } x \to \infty.}$$

Denn:

$$\frac{\ln(x)}{x^p} = \frac{\ln\left((x^p)^{1/p}\right)}{x^p} = \frac{\frac{1}{p}\ln\left(x^p\right)}{x^p} \to 0 \quad \text{für } x \to \infty.$$


$x^{1/3}$
$\ln x$
$x^{1/4}$
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1000



$x^{1/4}$
$\ln x$
30
25
20
15
10
5
0
1 000 000

Merke:

Für $x \to \infty$ ist e^x größer als

jede noch so große Potenz von x

Für $x \to \infty$ ist $\ln(x)$ kleiner als

jede noch so kleine (positive) Potenz von x.

Heuristisch kann man sich das asymptotische Wachstum von

$\ln(x)$

als das von

x^{ε} mit ε “unendlich klein”

vorstellen.

Beispiel:

$$\ln(x) = o(x^{1/4})$$

denn

für kleines ε ist

$$\varepsilon < 1/4.$$

Beispiel:

$$x \ln(x) = o\left(\frac{x^{3/2}}{(\ln(x))^2}\right)$$

denn

für kleines ε ist

$$1 + \varepsilon < \tfrac{3}{2} - 2\varepsilon.$$