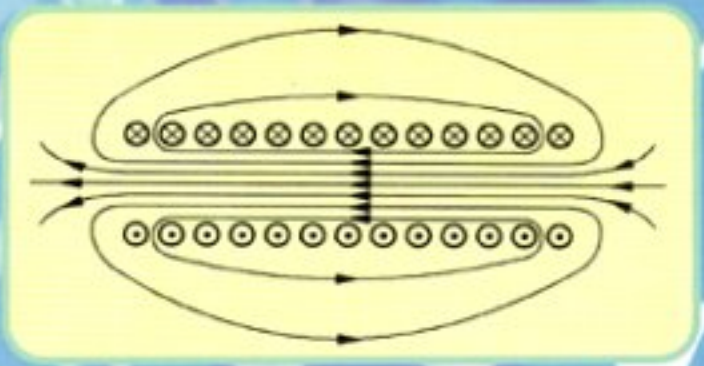
Gert Hagmann

Grundlagen der Elektrotechnik



8., korrigierte Auflage

Das bewährte Lehrbuch für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester

AULA

Prof. Dr.-Ing. Gert Hagmann
Fachbereich Elektrotechnik
Fachhochschule Münster

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Hagmann, Gert:
Grundlagen der Elektrotechnik : das bewährte Lehrbuch für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester / Gert Hagmann. - 8., korr. Aufl.. -
Wiebelsheim : AULA-Verl., 2001
ISBN 3-89104-661-8

8., korrigierte Auflage 2001

© 1986, 2001, AULA-Verlag GmbH, Verlag für Wissenschaft und Forschung, Wiebelsheim

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen auf fotomechanischem Wege (Fotokopie, Mikrokopie), Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen und digitalen Systemen (CD-ROM, DVD, Internet etc.).

Umschlaggestaltung: Klaus Neumann, Wiesbaden
Druck und Verarbeitung: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten
Printed in Germany/Imprimé en Allemagne

ISBN 3-89104-661-8

Gert Hagmann

Grundlagen der Elektrotechnik

Das bewährte Lehrbuch für Studierende der Elektrotechnik und anderer technischer Studiengänge ab 1. Semester

Mit 225 Abbildungen, 4 Tabellen, Aufgaben und Lösungen

8., korrigierte Auflage

AULA-Verlag

Inhalt

1 Physikalische Größen, Einheiten, Gleichungen 1
1.1 Physikalische Größen 1
1.2 Das internationale Einheitensystem 1
1.3 Gleichungen 5

2 Gleichstromkreise 6
2.1 Grundbegriffe der elektrischen Strömung 6
2.1.1 Aufbau der Materie, elektrische Ladungsträger 6
2.1.2 Freie Elektronen, Defektelektronen, Ionen 7
2.1.3 Der elektrische Strom 8
2.1.4 Die elektrische Stromdichte 10
2.1.5 Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen 10
2.1.6 Die elektrische Spannung 12
2.1.7 Das ohmsche Gesetz 13
2.1.8 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit 15
2.1.9 Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes 18
2.1.10 Arbeit und Leistung bei Gleichstrom 21
2.1.11 Bezugssinn und Pfeilsysteme 24
2.1.12 Die Kirchhoff'schen Gesetze 25
2.1.13 Quellenspannung und innerer Widerstand von realen Spannungsquellen 28
2.1.14 Stromquellen 29
2.2 Die Berechnung von Gleichstromkreisen 31
2.2.1 Reihenschaltung von Widerständen 31
2.2.2 Parallelschaltung von Widerständen 32
2.2.3 Dreieck-Stern- und Stern-Dreieck-Umwandlung 34
2.2.4 Netzwerkberechnung bei Schaltungen mit einer Spannungsquelle. 38
2.2.5 Netzwerkberechnung durch unmittelbare Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze 42
2.2.6 Netzwerkberechnung nach dem Maschenstromverfahren 45
2.2.7 Netzwerkberechnung nach dem Knotenpotenzial-Verfahren 53
2.2.8 Netzwerkberechnung durch Anwendung des Überlagerungsgesetzes 60
2.2.9 Leistungsanpassung 63
2.2.10 Die Ersatzspannungsquelle 65

2.2.11 Anwendung der Ersatzspannungsquelle zur Netzwerkberechnung ... 70
2.2.12 Die Ersatzstromquelle ... 74
2.3 Nichtlineare Gleichstromkreise ... 76
2.3.1 Allgemeines ... 76
2.3.2 Behandlung nichtlinearer Kreise ... 76

3 Das elektrische Feld ... 83
3.1 Die elektrische Ladung und ihre Wirkung ... 83
3.2 Die elektrischen Feldgrößen ... 84
3.2.1 Elektrische Feldstärke und elektrisches Potenzial ... 84
3.2.2 Der elektrische Fluss ... 89
3.2.3 Elektrische Flussdichte ... 90
3.2.4 Nichtleiter im elektrischen Feld ... 92
3.3 Berechnung elektrostatischer Felder ... 96
3.3.1 Das Feld der geladenen Kugel ... 96
3.3.2 Das Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen ... 98
3.3.3 Das Feld des geladenen langen geraden Leiters ... 101
3.4 Die Kapazität von Kondensatoren ... 103
3.4.1 Definition der Kapazität ... 103
3.4.2 Kapazität des Plattenkondensators ... 104
3.4.3 Kapazität des Kugelkondensators ... 105
3.4.4 Kapazität des Zylinderkondensators ... 106
3.4.5 Zusammenschaltung von Kondensatoren ... 106
3.5 Energie des elektrostatischen Feldes ... 111
3.5.1 Energie des geladenen Kondensators ... 111
3.5.2 Energiedichte im elektrostatischen Feld ... 113
3.6 Kräfte zwischen elektrischen Ladungen ... 118
3.6.1 Das Coulomb'sche Gesetz ... 118
3.6.2 Kräfte zwischen Elektroden ... 121

4 Das elektrische Strömungsfeld ... 124
4.1 Allgemeines ... 124
4.2 Feldgrößen des Strömungsfeldes ... 125
4.3 Bestimmung von Widerständen ... 128

5 Das magnetische Feld ... 131
5.1 Allgemeines zum magnetischen Feld ... 131
5.2 Die magnetischen Feldgrößen ... 133
5.2.1 Magnetische Feldstärke ... 133
5.2.2 Magnetische Flussdichte und Permeabilität ... 136
5.2.3 Der magnetische Fluss ... 138
5.2.4 Die magnetische Spannung ... 139
5.3 Das Durchflutungsgesetz ... 140

5.4 Der magnetische Kreis und das ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises ... 143
5.5 Berechnung magnetischer Felder ... 146
5.5.1 Magnetisches Feld in der Umgebung mehrerer stromführender gerader Leiter ... 147
5.5.2 Das Gesetz von Biot-Savart ... 150
5.6 Materie im magnetischen Feld ... 153
5.6.1 Allgemeines ... 153
5.6.2 Ferromagnetische Stoffe ... 154
5.6.3 Magnetische Kreise mit Eisen ... 157
5.6.4 Magnetischer Kreis mit Dauermagnet ... 166
5.7 Kräfte im magnetischen Feld ... 168
5.7.1 Stromführender Leiter im Magnetfeld ... 168
5.7.2 Bewegte Ladung im Magnetfeld ... 169
5.7.3 Der Halleffekt ... 172
5.7.4 Kräfte zwischen parallelen stromführenden Leitern ... 173
5.8 Induktionswirkung des magnetischen Feldes ... 176
5.8.1 Bewegter Leiter im Magnetfeld ... 176
5.8.2 Induktionswirkung des zeitlich veränderlichen Magnetfeldes ... 180
5.9 Die Selbstinduktion ... 183
5.10 Die gegenseitige Induktion ... 189
5.11 Die Energie des magnetischen Feldes ... 192
5.12 Kräfte an Grenzflächen ... 196

6 Grundbegriffe der Wechselstromtechnik ... 199
6.1 Allgemeines über Wechselgrößen ... 199
6.2 Sinusförmige Wechselgrößen und ihre Darstellung ... 200
6.3 Mittelwerte von periodisch zeitabhängigen Größen ... 203
6.3.1 Gleichrichtwert ... 203
6.3.2 Effektivwert ... 205
6.3.3 Formfaktor und Scheitelfaktor ... 211
6.4 Die Zeigerdarstellung von Sinusgrößen ... 212
6.5 Die komplexe Darstellung von Sinusgrößen ... 214
6.5.1 Grundbegriffe der komplexen Rechnung ... 215
6.5.2 Anwendung der komplexen Rechnung in der Wechselstromtechnik ... 218

7 Einfache Wechselstromkreise ... 221
7.1 Grundschaltungen ... 221
7.1.1 Kreis mit ohmschem Widerstand ... 221
7.1.2 Kreis mit Spule ... 223
7.1.3 Kreis mit Kondensator ... 226
7.1.4 Kreis mit Spule und Reihenwiderstand ... 230
7.1.5 Kreis mit Kondensator und Reihenwiderstand ... 235
7.1.6 Kreis mit Spule und Parallelwiderstand ... 238

7.1.7 Kreis mit Kondensator und Parallelwiderstand 241
7.1.8 Umwandlung von Reihen- und Parallelschaltung 245
7.2 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente 249
7.2.1 Spule mit Wirkwiderstand 249
7.2.2 Kondensator mit Verlustwiderstand 250
7.2.3 Widerstand mit Eigeninduktivität und Eigenkapazität 252

8 Leistung im Wechselstromkreis 255
8.1 Wirkleistung 255
8.2 Blindleistung 256
8.3 Scheinleistung 259
8.4 Komplexe Darstellung der Leistung 261

9 Berechnung von Wechselstromnetzen 263
9.1 Allgemeine Berechnungsverfahren 263
9.2 Leistungsanpassung in Wechselstromkreisen 272
9.3 Blindleistungskompensation 276

10 Ortskurven 280
10.1 Begriff der Ortskurve 280
10.2 Die Ermittlung von Ortskurven 283
10.2.1 Inversion einer Geraden 283
10.2.2 Inversion eines Kreises 287

11 Tief- und Hochpässe 292
11.1 Tiefpass 292
11.2 Hochpass 294

12 Schwingkreise 296
12.1 Freie und erzwungene Schwingungen 296
12.2 Der Reihenschwingkreis 297
12.2.1 Allgemeines 297
12.2.2 Verhalten bei Resonanz 298
12.2.3 Frequenzgang 301
12.3 Der Parallelschwingkreis 304
12.3.1 Allgemeines 304
12.3.2 Verhalten bei Resonanz 305
12.3.3 Frequenzgang 307

13 Drosselspulen und magnetisch gekoppelte Kreise 309
13.1 Drosselspule mit Eisenkern 309
13.1.1 Allgemeines 309
13.1.2 Hystereseverluste 311
13.1.3 Wirbelstromverluste 312
13.1.4 Ersatzschaltbild 313
13.2 Transformator mit Eisenkern 315

13.2.1 Der ideale Transformator 315
13.2.2 Verhalten und Ersatzschaltbild des realen Transformators 316
13.2.3 Leerlauf- und Kurzschlussversuch 319
13.3 Der eisenfreie Transformator 324
13.3.1 Der eisenfreie Transformator im unbelasteten Zustand 324
13.3.2 Der eisenfreie Transformator im belasteten Zustand 325
13.3.3 Reihenschaltung von magnetisch gekoppelten Spulen 326

14 Drehstromtechnik 330
14.1 Die Erzeugung von Drehstrom 330
14.1.1 Sternschaltung des Generators 331
14.1.2 Dreieckschaltung des Generators 333
14.2 Verbraucherschaltungen im Drehstromsystem 334
14.2.1 Sternschaltung mit angeschlossenem Neutralleiter 334
14.2.2 Sternschaltung ohne angeschlossenen Neutralleiter 337
14.2.3 Dreieckschaltung 341
14.3 Die Leistung im Drehstromsystem 345
14.3.1 Leistung bei symmetrischer Belastung 345
14.3.2 Leistung bei unsymmetrischer Belastung 348

15 Nichtsinusförmige periodische Vorgänge 349
15.1 Allgemeines 349
15.2 Darstellung von Funktionen durch Fourier-Reihen 349
15.3 Die Fourier-Analyse 351
15.4 Nichtsinusförmige Vorgänge in linearen Schaltungen 355
15.5 Effektivwert, Leistung, Verzerrung 356
15.5.1 Effektivwert nichtsinusförmiger Wechselgrößen 356
15.5.2 Wirk-, Blind- und Scheinleistung 358
15.5.3 Kenngrößen der Verzerrung 360

16 Schaltvorgänge 362
16.1 Allgemeines 362
16.2 Schaltvorgänge in RL- und RC-Schaltungen 363
16.2.1 Ohmsch-induktiver Gleichstromkreis 363
16.2.2 Ohmsch-kapazitiver Gleichstromkreis 366
16.2.3 Ohmsch-induktiver Wechselstromkreis 370
16.2.4 Ohmsch-kapazitiver Wechselstromkreis 374
16.3 Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen 376
16.3.1 Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen bei Gleichspannungsversorgung 376
16.3.2 Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen bei Wechselspannungsversorgung 387

Verzeichnis der wichtigsten Symbole 389
Literaturverzeichnis 391
Sachverzeichnis 392

Vorwort

In dem vorliegenden Band werden die Gebiete der Gleichstromtechnik, des elektrischen und magnetischen Feldes sowie der Wechselstromtechnik zusammenhängend dargestellt. Die Darbietung des Stoffes erfolgt nach dem Grundsatz, die Leserin und den Leser von einfachen Sachverhalten schrittweise zu komplexeren Problemstellungen zu führen. Dieser Leitlinie folgend wird bei der Herleitung der Gesetzmäßigkeiten vom elektrischen Stromkreis ausgegangen und nicht - wie vielfach üblich - zuerst das elektrische Feld behandelt.

Die große Stoffmenge erfordert mit Rücksicht auf den angestrebten Umfang des Buches eine straffe Darstellung. Dabei wird jedoch stets darauf geachtet, dass die Gesetzmäßigkeiten verständlich dargeboten werden.

Die in den einzelnen Abschnitten dargestellten Zusammenhänge werden durch Aufgaben mit vollständig angegebenen Lösungswegen ergänzt. Sie sind für die Verständlichkeit der Sachverhalte von großer Bedeutung und an vielen Stellen unerlässlich. Weitere Aufgaben mit ausführlichen Lösungswegen befinden sich in einem vom Verfasser herausgegebenen, im gleichen Verlag erschienenen Band mit dem Titel „Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik".

Die vorliegende achte Auflage stellt eine korrigierte Fassung der bisherigen Ausgabe dar.

Dem AULA-Verlag gilt mein Dank für die ausgezeichnete Zusammenarbeit.

Gert Hagmann

1.1 Physikalische Größen

Zur Beschreibung von Naturvorgängen sind zahlreiche **physikalische Größen** definiert worden. Bekannte Größen sind zum Beispiel Länge, Zeit, Geschwindigkeit, elektrische Spannung, Temperatur. Zur Messung und Darstellung von physikalischen Größen benötigt man **Einheiten**. Einheiten für die Länge sind zum Beispiel Meter, Zentimeter oder Millimeter, Einheiten für die Zeit Stunde oder Sekunde. Zur vereinfachten Darstellung verwendet man sowohl für die physikalische Größen als auch für die Einheiten *Abkürzungen* (Symbole). Zum Beispiel werden die Länge durch l, die Zeit durch t, das Meter durch m, die Sekunde durch s abgekürzt.

Jede physikalische Größe kann durch ein Produkt aus **Zahlenwert** und **Einheit** dargestellt werden. Wählen wir hierfür als Beispiel

$$l = 5\ \mathrm{m},$$

so sind l die physikalische Größe (Länge), 5 der Zahlenwert und m die Einheit (Meter).

1.2 Das internationale Einheitensystem

In Technik, Forschung und Wissenschaft werden, ebenso wie auch in Wirtschaft, Handel und Gewerbe, überwiegend **SI-Einheiten** verwendet. SI ist die Abkürzung für **Système Internationale d'Unités** (internationales Einheitensystem). Dieses international vereinbarte Einheitensystem enthält die in Tabelle 1.1 angegebenen sieben **Basiseinheiten**, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie willkürlich festgelegt sind und nicht aus anderen Einheiten abgeleitet werden.

Von diesen sieben Basiseinheiten sind für das Gebiet der Elektrotechnik nur die ersten vier von besonderer Bedeutung. Aus den folgenden Angaben ist zu ersehen, in welcher Weise diese vier Basiseinheiten festgelegt sind.

Das **Meter** ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von (1/299 792 458) Sekunden durchläuft.

Das **Kilogramm** ist die Einheit der Masse; es ist gleich der Masse des Internationalen Kilogrammprototyps.

Die **Sekunde** ist das 9 192 631 770-fache der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.

Das **Ampere** ist die Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ Newton hervorrufen würde.

Tabelle 1.1

Basisgrößen und Basiseinheiten des internationalen Einheitensystems

Basisgröße	Basiseinheit	Kurzzeichen
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

Von den in Tabelle 1.1 enthaltenen Basiseinheiten werden alle übrigen SI-Einheiten abgeleitet. Man bezeichnet sie als **abgeleitete Einheiten**. Sie haben zum Teil eigene Namen und eigene Einheitenzeichen, für andere abgeleitete Einheiten trifft dies nicht zu. An folgenden Beispielen sei gezeigt, wie aus den SI-Basiseinheiten andere SI-Einheiten abgeleitet werden.

Die SI-Einheit der **Geschwindigkeit** finden wir aus der Gleichung

$$v = \frac{l}{t},$$

die angibt, dass die Geschwindigkeit (v) eines Körpers gleich dem zurückgelegten Weg (l) dividiert durch die benötigte Zeit (t) ist. Die zugehörige Einheitenglei-chung lautet

$$[v] = \frac{[l]}{[t]}.$$

Darin bedeuten $[v]$ die Einheit der Geschwindigkeit, $[l]$ die Einheit des Weges und $[t]$ die Einheit der Zeit. Mit den SI-Basiseinheiten $[l]$ = m und $[t]$ = s wird die abgeleitete SI-Einheit der Geschwindigkeit

$$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Die SI-Einheit der **Kraft** finden wir aus der dynamischen Grundgleichung Kraft (F) gleich Masse (m) mal Beschleunigung (a), also aus

$$F = m\,a.$$

Die zugehörige Einheitengleichung lautet

$$[F] = [m]\,[a].$$

Mit $[m]$ = kg und $[a]$ = m/s^2 wird

$$[F] = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Hierfür verwendet man auch die Bezeichnung **Newton** (Einheitenzeichen: N). Somit ist die SI-Einheit der Kraft

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}. \tag{1.1}$$

Ein Newton ist also diejenige Kraft, die einem Körper der Masse 1 kg die Beschleunigung 1 m/s^2 erteilt.

Die Einheit der **Arbeit** (oder **Energie**) finden wir aus der Gleichung

$$W = F\,l,$$

die angibt, dass die geleistete Arbeit (W) sich aus dem Produkt der Kraft (F) und dem von der Kraft zurückgelegten Weg (l) ergibt. Die zugehörige Einheitengleichung

$$[W] = [F]\,[l]$$

liefert, wenn wir als Einheit der Kraft $[F]$ = N und als Einheit für den zurückgelegten Weg $[l]$ = m einsetzen,

$$[W] = \mathrm{N\,m}.$$

Hierfür verwendet man auch die Bezeichnung **Joule** (Einheitenzeichnen: J). Daher ist die SI-Einheit der Arbeit (oder Energie)

$$\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}. \tag{1.2}$$

Ein Joule ist also gleich der Arbeit, die geleistet wird, wenn eine Kraft von einem Newton um einen Meter verschoben wird.

SI-Einheiten sind dadurch gekennzeichnet, dass in den sie verbindenden Einheitengleichungen kein von eins verschiedener Zahlenfaktor auftritt. So ist zum Beispiel die Krafteinheit Newton (N) eine SI-Einheit, da sie durch $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ dargestellt werden kann. Dagegen ist die Krafteinheit Kilopond (kp) keine SI-Einheit, da $1\,\mathrm{kp} = 9{,}81\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$ ist.

Wenn eine Einheit eine ungünstige Größenordnung hat, verwendet man *dezimale Vielfache* oder *dezimale Teile*. Beispielsweise kann man für eine Länge von l = 10000 m besser l = 10 km schreiben. Die möglichen Vorsätze sowie ihre Abkürzungen und ihre Bedeutung sind in Tabelle 1.2 zusammengestellt.

Tabelle 1.2
Vorsätze und Bezeichnungen von dezimalen Vielfachen und dezimalen Teilen von Einheiten

Vorsatz	Vorsatzzeichen	Bedeutung
Tera	T	10^{12}
Giga	G	10^{9}
Mega	M	10^{6}
Kilo	k	10^{3}
Hekto	h	10^{2}
Deka	da	10^{1}
Dezi	d	10^{-1}
Zenti	c	10^{-2}
Milli	m	10^{-3}
Mikro	µ	10^{-6}
Nano	n	10^{-9}
Piko	p	10^{-12}
Femto	f	10^{-15}
Atto	a	10^{-18}

1.3 Gleichungen

Die Zusammenhänge zwischen den einzelnen physikalischen Größen werden durch **Gleichungen** beschrieben. Als Darstellungsform verwendet man überwiegend die **Größengleichung**. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass jedes einzelne Symbol eine physikalische Größe darstellt. Die Einheit des Ergebnisses folgt zwangsläufig aus den Einheiten, die eingesetzt werden. Dies sei an einem Beispiel erläutert. Legt ein Körper den Weg $l = 1800$ m in der Zeit $t = 180$ s zurück, so beträgt die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{l}{t} = \frac{1800\ \text{m}}{180\ \text{s}} = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Verwenden wir für die gleiche Aufgabe andere Einheiten, indem wir für l statt 1800 m den Wert 1,8 km einsetzen und für t statt 180 s den Wert 0,05 h (0,05 Stunden), so erhalten wir das Ergebnis

$$v = \frac{l}{t} = \frac{1{,}8\ \text{km}}{0{,}05\ \text{h}} = 36\ \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

Es unterscheidet sich von dem obigen Ergebnis lediglich dadurch, dass die berechnete Geschwindigkeit in einer anderen Einheit angegeben ist. Beide Ergebnisse sind also gleichermaßen korrekt.

Neben der Größengleichung gibt es als weitere Darstellungsform für eine Gleichung die **Zahlenwertgleichung**. Bei ihr stellt jedes einzelne Symbol einen Zahlenwert dar. Das hat zur Folge, dass jeweils anzugeben ist, welche Einheiten zu verwenden sind. Die Zahlenwertgleichung zur Berechnung der Geschwindigkeit eines Körpers kann zum Beispiel

$$v = 3{,}6\ \frac{l}{t}$$

lauten. Sie gilt jedoch nur unter der Voraussetzung, dass der zurückgelegte Wert l in m und die benötigte Zeit t in s eingesetzt werden, wobei man dann die mittlere Geschwindigkeit v des Körpers in km/h erhält.

Zahlenwertgleichungen werden nur noch selten angewendet. Daher wird bei den folgenden Betrachtungen auch auf ihre Formulierung ganz verzichtet. Die nachfolgenden Gleichungen stellen also ausschließlich Größengleichungen dar.

2 Gleichstromkreise

2.1 Grundbegriffe der elektrischen Strömung

2.1.1 Aufbau der Materie, elektrische Ladungsträger

Wird ein Stoff fortwährend mechanisch zerkleinert, so gelangt man zum **Molekül**. Eine weitere Zerkleinerung ist nur noch auf chemischem Wege möglich. Sie führt zum **Atom**.

Jedes Atom besteht aus einem **Kern** und aus **Elektronen**, die den Kern umkreisen. Der Kern wiederum besteht aus **positiv** geladenen **Protonen** und den ungeladenen **Neutronen**. Die Elektronen sind **negativ** geladen. Ein Atom besitzt im Allgemeinen ebenso viele Elektronen wie Protonen. Derartige Atome bezeichnet man als „elektrisch neutral". Ist dagegen die Zahl der Elektronen verschieden von der der Protonen, so spricht man von einem „elektrisch geladenen" Atom. Es gibt sowohl positiv als auch negativ geladene Atome. Protonen, Elektronen und geladene Atome stellen also „Träger von elektrischen Ladungen" dar und werden daher auch als **elektrische Ladungsträger** bezeichnet.

Kennzeichnend für elektrische Ladungen ist, dass sie (allgemein) Kräfte aufeinander ausüben. Diese bezeichnet man auch als **elektrostatische Kräfte**. Bezüglich ihrer Richtung zeigt sich, dass zwischen einer positiven und einer negativen Ladung eine Anziehungskraft besteht. Dagegen stoßen sich zwei positive Ladungen gegenseitig ab. Das Gleiche gilt für zwei negative Ladungen. Man sagt auch: Gleichartige Ladungen stoßen sich ab; ungleichartige Ladungen ziehen sich an.

Die zwischen den Protonen und den Elektronen eines Atom wirkenden elektrostatischen Anziehungskräfte sorgen dafür, dass die Elektronen auf ihren Bahnen gehalten werden halten. Dabei halten sich die genannten Anziehungskräfte und die durch die kreisförmigen Bewegung der Elektronen entstehenden Zentrifugalkräfte (Fliehkräfte) das Gleichgewicht. Die zwischen den einzelnen Protonen eines Atomkerns herrschenden elektrostatischen Abstoßungskräfte versuchen, die Ladungen auseinanderzutreiben; die Protonen werden jedoch durch die zusätzlich vorhandenen **Kernkräfte** (kurzer Reichweite) zusammengehalten.

Je nachdem, wie viel Protonen, Neutronen und Elektronen ein Atom besitzt, unterscheidet man über hundert verschiedene Atomarten. Aus ihnen setzen sich sämtliche Moleküle der verschiedenen Stoffe zusammen. Stoffe, die nur aus einer Atomart bestehen, werden als **chemische Elemente** bezeichnet.

Die Elektronen umkreisen den Atomkern nur auf bestimmten Bahnen. Dabei werden Elektronen mit annähernd gleichem Abstand vom Kern zu einer Gruppe zusammengefasst. Sie bilden jeweils eine **Elektronenschale**. Die Anzahl der zu einer Schale gehörenden Elektronen ist begrenzt. So enthält die Schale mit dem kleinsten Bahndurchmesser maximal zwei, die Schale mit dem nächstgrößeren Bahndurchmesser maximal acht Elektronen. Wird die betreffende Anzahl an Elektronen bei der entsprechenden Schale erreicht, so bezeichnet man diese als „vollständig besetzt".

Die Elektronen der in der Regel nicht vollständig besetzten äußeren Schale eines Atoms nennt man **Valenzelektronen**. Die Elektronen der darunter liegenden Schalen heißen **Rumpfelektronen**. Sie bilden zusammen mit dem Kern den Atomrumpf.

2.1.2 Freie Elektronen, Defektelektronen, Ionen

Ein Stoff ist nur dann elektrisch leitfähig, wenn er **bewegliche** Ladungsträger enthält und somit ein Ladungstransport möglich ist. Bei den beweglichen Ladungsträgern kann es sich um **freie Elektronen**, um **Defektelektronen** (auch **Löcher** genannt) oder um **Ionen** handeln.

Freie Elektronen treten insbesondere in Metallen auf. In dieser Materie können sich die Valenzelektronen, also die Elektronen der äußeren Schale, sehr leicht vom Atomrumpf lösen. Dies hat zur Folge, dass die Valenzelektronen überhaupt nicht mehr einem bestimmten Atom zugeordnet werden können, sondern sich frei im Stoff bewegen. Sie werden daher auch als **freie Elektronen** bezeichnet. Da sie sich ähnlich wie die Moleküle eines Gases verhalten, spricht man auch von einem **Elektronengas**.

Defektelektronen (oder **Löcher**) können neben freien Elektronen die Ursache für das Vorhandensein einer elektrischen Leitfähigkeit sein. Dies trifft insbesondere für **Halbleiter** zu. Halbleiter, zum Beispiel Silizium oder Germanium, sind Stoffe, die zwischen den Metallen und den Nichtmetallen eingeordnet werden. Sie besitzen **vier** Valenzelektronen, die für die Bindung der Atome im Kristallgitter benötigt werden. Daher haben reine Halbleiter nur eine sehr geringe Leitfähigkeit. Ersetzt man jedoch zum Beispiel einige Atome durch dreiwertige Fremdatome, also durch Atome mit drei Valenzelektronen, so fehlt jedem Fremdatom zur Herstellung einer vollständigen Bindung ein Elektron. Das Fremdatom kann deshalb leicht ein Valenzelektron eines benachbarten Halbleiteratoms aufnehmen. Durch ein solches Überwechseln eines Elektrons werden das Fremdatom negativ und das Nachbaratom positiv aufgeladen. Die Stelle, an der sich ein derartiges positives

Atom befindet, bezeichnet man als **Defektelektron** oder als **positives Loch**. Ein solches Loch kann nun wiederum leicht durch ein anderes Valenzelektron aufgefüllt werden, wodurch allerdings an anderer Stelle ein Loch entsteht. Die eigentliche Bewegung von positiven Löchern ist also ein ständiges Springen der Valenzelektronen von Nachbaratomen in freie Plätze, so dass diese scheinbar weiterwandern. Da auf diese Weise ein Ladungstransport möglich ist, handelt es sich um ein leitfähiges Material.

Ionen sind elektrisch geladene Atome. Löst sich zum Beispiel ein Elektron von einem Atom, so bleibt ein positiv geladenes Atom zurück, das als **positives Ion** bezeichnet wird. Lagert sich andererseits ein Elektron an ein neutrales Atom an, so entsteht ein negativ geladenes Atom, also ein **negatives Ion**. Befinden sich derartige Ionen in flüssiger Materie, so ist eine Bewegung dieser Ladungsträger und damit ein Ladungstransport möglich. Zu beachten ist hierbei, dass mit einem solchen Ladungstransport infolge der relativ großen Masse der Ladungsträger oft ein beträchtlicher **Materietransport** verbunden ist. Im Gegensatz zu Metallen oder Halbleitern, die durch das Fließen eines Elektronen- oder Löcherstromes nicht verändert werden, können sich Ionen enthaltende Flüssigkeiten (Elektrolyte) infolge der Ionenströmung chemisch verändern. In manchen Fällen wird der mit der Ionenströmung verbundene Materialtransport auch technisch ausgenutzt (zum Beispiel zum Verchromen von Werkstücken in galvanischen Bädern).

Abschließend sei festgestellt, dass zum Transport elektrischer Ladungen in erster Linie metallene Werkstoffe verwendet werden. Das bedeutet, dass als bewegliche Ladungsträger in den meisten Fällen freie Elektronen zum Einsatz kommen.

2.1.3 Der elektrische Strom

In elektrisch leitenden Stoffen führen die Ladungsträger ständig unregelmäßige Bewegungen aus. Überlagert sich dieser Bewegung eine Bewegung in eine bestimmte Richtung, so bezeichnet man dies als **elektrischen Strom**. Das Fließen eines solchen Stromes ist nur in einem *geschlossenen Kreislauf* möglich, den man als **elektrischen Stromkreis** bezeichnet. Weiterhin ist eine besondere Einrichtung erforderlich, die das Fließen des Stromes hervorruft. Sie wird als **Spannungsquelle** bezeichnet. Bild 2.1 zeigt einen einfachen Stromkreis.

Darin stellen 1 eine Spannungsquelle (zum Beispiel eine Taschenlampenbatterie) und 2 eine Glühlampe dar. Beide Teile sind durch Verbindungsleitungen (3) miteinander verbunden. Den im Stromkreis fließenden (zeitlich konstanten) Strom nennt man **Gleichstrom**. Die Größe (Stärke) der in Bild 2.1 auftretenden elektrischen Strömung bezeichnet man als **elektrische Stromstärke**, häufig auch nur kurz als **Strom**. Einheit der Stromstärke (Symbol: I) ist die in Abschnitt 1.2 definierte SI-Basiseinheit **Ampere** (Einheitenzeichen: A), so dass gilt:

$$[I] = \text{Ampere} = \text{A}$$

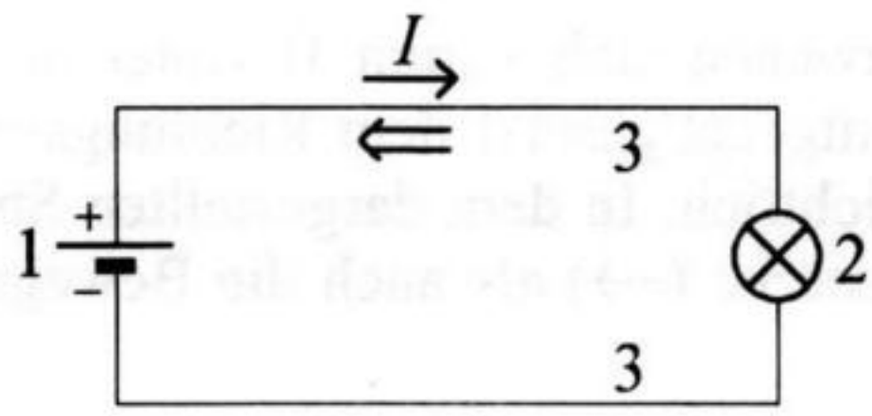


Bild 2.1 Einfacher Stromkreis. 1 Spannungsquelle, 2 Glühlampe, 3 Verbindungsleitungen
$\longrightarrow$ Richtungssinn der Stromstärke, $\Longleftarrow$ Bewegungsrichtung der Elektronen

Bei zeitlich konstanter Stromstärke I beträgt die während einer Zeit t durch den Querschnitt eines Leiters strömende Ladung

$$\boxed{Q = I\,t.} \tag{2.1}$$

Daraus folgt die SI-Einheit der Ladung als

$$[Q] = \text{Ampere}\cdot\text{Sekunde} = \text{As}.$$

Hierfür verwendet man auch die Bezeichnung **Coulomb** (Einheitenzeichen: C), so dass gilt:

$$1\ \text{C} = 1\ \text{As}.$$

Ein Coulomb ist also diejenige elektrische Ladung, die bei einer Stromstärke von einem Ampere in jeder Sekunde durch den Leiterquerschnitt fließt.

Die kleinstmögliche negative elektrische Ladung ist die eines Elektrons. Sie wird als **Elementarladung** bezeichnet und hat den Betrag

$$\boxed{e = 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}.}$$

Das Proton hat die gleich große positive Ladung. Jede Ladung, die größer als die Elementarladung ist, besteht aus ganzzahligen Vielfachen von e.

Enthält ein Leiter sowohl positive als auch negative bewegliche Ladungsträger, so bewegen sich die beiden Ladungsträgerarten beim Fließen eines Stromes in entgegengesetzte Richtungen. Daher ist eine Vereinbarung darüber notwendig, welche der beiden Bewegungsrichtungen als „Richtung des Stromes" anzusehen ist. Diese Vereinbarung ist in der Weise getroffen worden, dass die Bewegungsrichtung *positiver* Ladungsträger als „Richtung des Stromes" angesehen werden soll. Man bezeichnet die so festgelegte Richtung als **Richtungssinn der Stromstärke**.

Bei dieser Definition bewegen sich - zum Beispiel in metallenen Leitern - die (negativen) Elektronen entgegengesetzt dem Richtungssinn der Stromstärke. Dies ist auch aus Bild 2.1 ersichtlich. In dem dargestellten Stromkreis sind sowohl der Richtungssinn der Stromstärke (→) als auch die Bewegungsrichtung der Elektronen (⇐) eingetragen.

2.1.4 Die elektrische Stromdichte

Verteilt sich der elektrische Strom I gleichmäßig auf den zur Verfügung stehenden Leiterquerschnitt A, so stellt

$$\boxed{J = \frac{I}{A}} \tag{2.2}$$

den auf die Flächeneinheit entfallenden Strom dar. Man bezeichnet diese Größe als **elektrische Stromdichte**. Ihre SI-Einheit ist

$$[J] = \mathrm{A/m^2}.$$

Aus Zweckmäßigkeitsgründen wird jedoch häufig die Einheit $\mathrm{A/mm^2}$ verwendet.

2.1.5 Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen

Führt ein Leiter einen Strom, so stellt sich die Frage, wie groß die **Strömungsgeschwindigkeit** der Ladungsträger ist, wie schnell sich also beispielsweise die Elektronen in einem Kupferdraht fortbewegen. Wir wollen dies für einen beliebigen metallenen Leiter untersuchen. Dazu benötigen wir die **Elektronendichte** (n). Sie gibt an, wie groß die Anzahl der vorhandenen freien Elektronen je Volumeneinheit ist. Zum Beispiel gilt für Kupfer

$$n = 8{,}47 \cdot 10^{19}\ 1/\mathrm{mm}^3 .$$

Das bedeutet, dass in einem Kubikmillimeter Kupfer $8{,}47 \cdot 10^{19}$ freie Elektronen enthalten sind. Zur weiteren Untersuchung betrachten wir Bild 2.2. In dem dargestellten Leiter mit der Länge l und dem Querschnitt A ist bei der Elementarladung e sowie der Elektronendichte n die (bewegliche) Ladung

$$Q = e\, n\, A\, l$$

enthalten. Jedes Elektron benötigt nun eine bestimmte Zeit t, um den Leiter vollständig zu durchwandern und somit den Weg l zurückzulegen. Die gleiche Zeit wird benötigt, um die Ladung Q vollständig durch den Strömungsquerschnitt A zu bewegen.

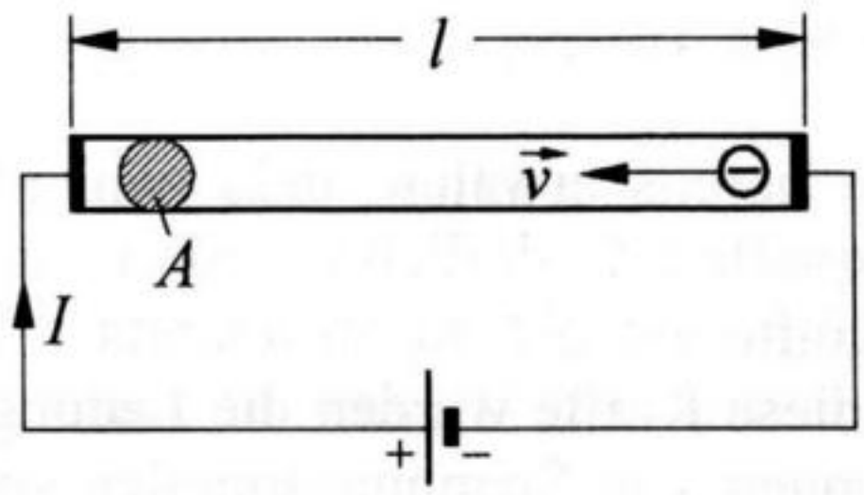


Bild 2.2 Zur Berechnung der Strömungsgeschwindigkeit von Elektronen

Für die Stromstärke gilt daher

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{e\,n\,A\,l}{t} = e\,n\,A\,v.$$

Hierin stellt $v = l/t$ die **mittlere Strömungsgeschwindigkeit** der Elektronen dar. Man bezeichnet sie auch als **mittlere Driftgeschwindigkeit**. Lösen wir die Gleichung nach v auf, so erhalten wir

$$\boxed{v = \frac{I}{e\,n\,A}.} \tag{2.3}$$

Diese Strömungsgeschwindigkeit ist in der Regel relativ gering und liegt oft unterhalb von 1 mm/s. Dagegen breitet sich die Ursache der Elektronenbewegung mit Lichtgeschwindigkeit aus. Das bedeutet, dass auch in einem langen Leiter die Elektronenbewegung praktisch überall gleichzeitig im Augenblick des Schließens des Stromkreises beginnt.

Aufgabe 2.1

Ein Kupferleiter von A = 1,5 mm² Querschnitt führt den Strom I = 15 A. Die Dichte der freien Elektronen beträgt $n = 8{,}47 \cdot 10^{19}\ 1/\mathrm{mm}^3$. Die Elementarladung hat den Betrag $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As.

Wie groß ist die mittlere Strömungsgeschwindigkeit v der Elektronen?

Lösung

Bei den angegebenen Daten beträgt die mittlere Strömungsgeschwindigkeit der Elektronen nach Gl. (2.3)

$$v = \frac{I}{e\,n\,A} = \frac{15\ \mathrm{A}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 8{,}47 \cdot 10^{19}\ \mathrm{mm}^{-3} \cdot 1{,}5\,\mathrm{mm}^2} = \underline{0{,}74\ \mathrm{mm/s}}.$$

2.1.6 Die elektrische Spannung

In Abschnitt 2.1.3 wurde bereits erwähnt, dass zum Fließen eines elektrischen Stromes eine **Spannungsquelle** erforderlich ist. Sie ist innerhalb des Stromkreises diejenige Stelle, in der Kräfte auf die im Stromkreis vorhandenen Ladungsträger ausgeübt werden. Durch diese Kräfte werden die Ladungsträger in Bewegung gesetzt. Wichtige Ausführungen von Spannungsquellen sind die **elektrochemische** Spannungsquelle (zum Beispiel die Taschenlampenbatterie) und die **elektromechanische** Spannungsquelle (zum Beispiel der Gleichspannungsgenerator). Bild 2.3 zeigt Schaltzeichen, die zur Darstellung von Spannungsquellen verwendet werden.

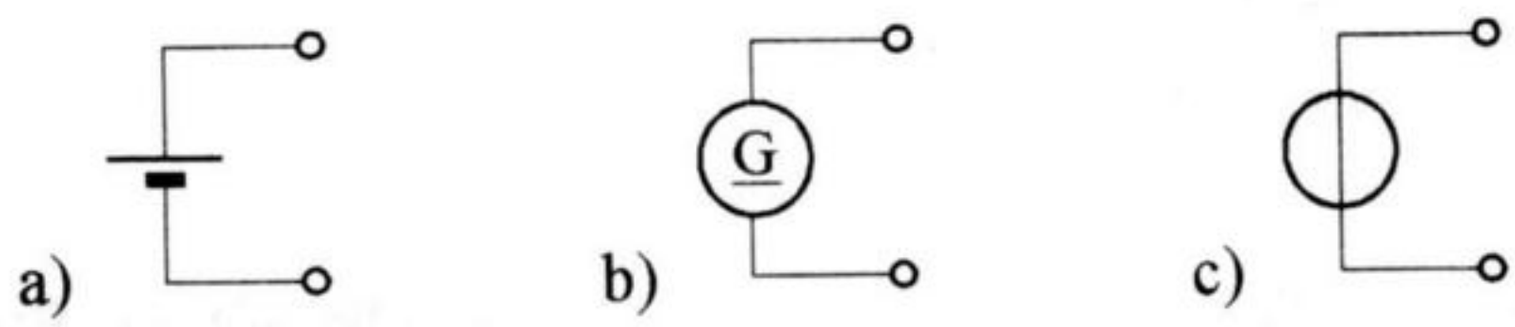


Bild 2.3 Schaltzeichen von Spannungsquellen. a) Elektrochemische Spannungsquelle, b) Gleichspannungsgenerator, c) Gleichspannungsquelle (allgemein)

Die in Spannungsquellen wirkende *elektrische* Größe, die das Fließen eines Stromes verursacht, bezeichnet man als **elektrische Spannung**. Sie ist der elektrische Ausdruck für die in Spannungsquellen erzeugten, auf Ladungsträger wirkenden Kräfte, die bei einem geschlossenen Stromkreis zu einem elektrischen Strom führen. Es stellt sich jetzt die Frage nach der genauen Definition der elektrischen Spannung. Wir betrachten dazu Bild 2.4.

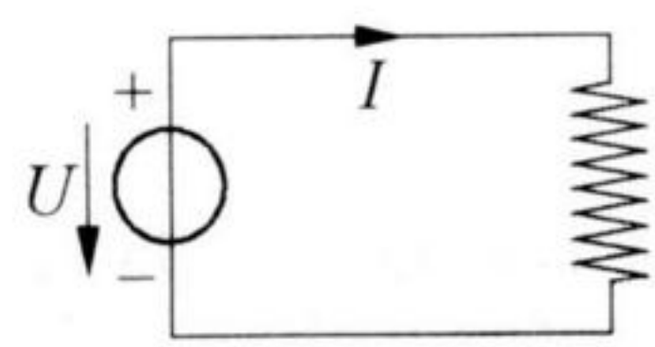


Bild 2.4 Spannungsquelle mit angeschlossenem elektrischen Leiter

Darin ist ein (widerstandsbehafteter) Leiter mit einer Spannungsquelle verbunden, so dass ein Strom I auftritt. Das Fließen des Stromes erfordert einen Energieaufwand, der sich in einer Erwärmung des Leiters äußert. Die Spannungsquelle gibt dabei elektrische Energie an den Leiter ab, die hier in Wärme umgesetzt wird.

Es zeigt sich nun, dass die im Leiter entstehende Wärmeenergie W proportional der Ladung Q ist, die durch den Querschnitt des Leiters fließt. Es gilt also

$$W \sim Q.$$

Diese Proportionalität kann auch durch die Gleichung

$$\boxed{W = U \cdot Q} \tag{2.4}$$

ausgedrückt werden. Die hierin enthaltene Proportionalitätskonstante U wird definitionsgemäß als (die von der Spannungsquelle gelieferte und somit am Leiter liegende) **elektrische Spannung** bezeichnet. Ihre Einheit finden wir mit Hilfe der sich aus Gl. (2.4) ergebenden Einheitengleichung

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]}.$$

Mit $[W]$ = Nm = kg m^2 / s^2 und $[Q]$ = As wird die SI-Einheit der Spannung

$$[U] = \frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{A\,s}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{A\,s^3}}. \tag{2.5}$$

Hierfür verwendet man die Bezeichnung **Volt** (Einheitenzeichen: V). Somit beträgt die Einheit der elektrischen Spannung

$$[U] = \mathrm{V}.$$

Abschließend sei erwähnt, dass die von einer Spannungsquelle gelieferte Spannung U in Schaltbildern grundsätzlich, so wie in Bild 2.4 dargestellt, durch einen Richtungspfeil angegeben wird, der vom **Pluspol** (+) zum **Minuspol** (–) zeigt. Man bezeichnet diese Richtung als **Richtungssinn der Spannung**. Der Strom I fließt entsprechend der in Abschnitt 2.1.3 erläuterten Festlegung außerhalb der Spannungsquelle vom Pluspol zum Minuspol (Richtungssinn der Stromstärke).

2.1.7 Das ohmsche Gesetz

In einem Stromkreis sind Spannung und Strom in bestimmter Weise voneinander abhängig. Zur Erläuterung betrachten wir Bild 2.5. Darin stellt das durch R gekennzeichnete Schaltzeichen einen **elektrischen Widerstand** dar. Er kann beispielsweise durch einen metallenen Leiter (Metalldraht) realisiert werden. Bei den mit V und A gekennzeichneten Schaltzeichen handelt es sich um *Messgeräte*, zum einen um ein **Voltmeter** (zur Messung der vorhandenen Spannung U) und zum anderen um eine **Amperemeter** (zur Messung des fließenden Stromes I).

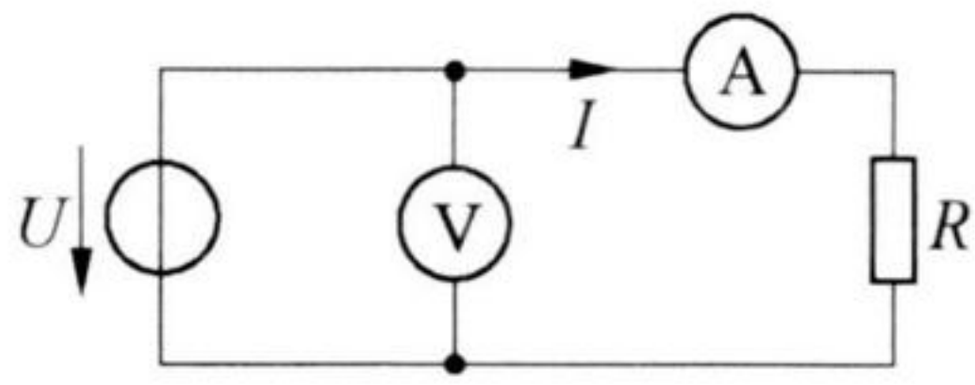


Bild 2.5 Einfacher Stromkreis mit Messgeräten zur Messung von Spannung und Strom

Variiert man nun die Spannung U, so stellt man fest, dass sich der Strom I proportional zu U verändert. Es gilt also

$$U \sim I.$$

Diese Proportionalität können wir durch die Gleichung

$$\boxed{U = I \cdot R} \tag{2.6}$$

ersetzen. Die Proportionalitätskonstante R bezeichnet man als **elektrischen Widerstand**. Dabei sei angemerkt, dass der Begriff „Widerstand" mit doppelter Bedeutung verwendet wird. Er wird zum einen für die hier beschriebene *Eigenschaft* eines Leiters verwendet und zum anderen für den Leiter selbst, also für den *Gegenstand.*

Die in Gl. (2.6) angegebene Beziehung bezeichnet man als **ohmsches Gesetz.** Der Widerstand R ist im Allgemeinen - unabhängig von der Größe des Stromes I - *konstant*. Leiter, die diese Bedingung erfüllen, nennt man *linear*. Man spricht dann von **linearen Stromkreisen**.

Die *Einheit* des elektrischen Widerstandes folgt aus Gl. (2.6) als

$$[R] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}.$$

Hierfür verwendet man die Bezeichnung **Ohm** (Einheitenzeichen: Ω). Es gilt also

$$1\,\Omega = 1\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}.$$

Ein Leiter besitzt einen Widerstand von einem Ohm, wenn eine zwischen den Leiterenden liegende elektrische Spannung von einem Volt einen Strom von einem Ampere verursacht.

Der Kehrwert des elektrischen Widerstandes

$$\boxed{G = \frac{1}{R}} \tag{2.7}$$

wird als **elektrischer Leitwert** bezeichnet. Seine Einheit heißt **Siemens** (Einheitenzeichen: S), so dass

$$1\,\mathrm{S} = \frac{1}{\Omega} = 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}}$$

ist. Das ohmsche Gesetz kann somit auch in der Form

$$\boxed{I = U \cdot G} \tag{2.8}$$

geschrieben werden.

Zu der in Bild 2.5 dargestellten Schaltung sei angemerkt, dass die notwendigen elektrischen Verbindungsleitungen in der Regel als *widerstandslos* angenommen werden. Auch bei den nachfolgend angegebenen Schaltungen setzen wir stets voraus, dass die eingezeichneten Verbindungsleitungen, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes festgestellt wird, einen vernachlässigbar kleinen Widerstand haben. Sind Leitungswiderstände nicht vernachlässigbar klein, so kann man sie sich in konzentrierten Widerstandselementen zusammengefasst denken, die über dann wiederum als widerstandslos anzunehmende Verbindungsleitungen angeschlossen werden.

2.1.8 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit

Der elektrische Widerstand eines Leiters lässt sich mit Hilfe einer Schaltung nach Bild 2.5 ermitteln. Dazu werden die anliegende Spannung U und der fließende Strom I messtechnisch bestimmt. Aus den Werten lässt sich der gesuchte Widerstand durch Anwendung des ohmschen Gesetzes

$$R = \frac{U}{I}$$

berechnen. Untersucht man nun verschiedene Leiteranordnungen, so stellt man fest, dass der Widerstand zum einen proportional zur Leiterlänge l und zum anderen umgekehrt proportional zum Leiterquerschnitt A ist. Es gilt also

$$R \sim \frac{l}{A}.$$

Diese Proportionalität können wir durch die Gleichung

$$\boxed{R = \frac{\rho\, l}{A}} \tag{2.9}$$

ersetzen. Die hierin enthaltene Proportionalitätskonstante ρ bezeichnet man als **spezifischen Widerstand**. Er beinhaltet die Eigenschaften des Leiterwerkstoffes und stellt somit eine *Materialkonstante* dar. Die Einheit folgt aus Gl. (2.9) als

$$[\rho] = \frac{\Omega\,\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = \Omega\,\mathrm{m}.$$

Der Kehrwert des spezifischen Widerstandes

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho}} \tag{2.10}$$

wird als **Leitfähigkeit** bezeichnet. Die Einheit ist

$$[\kappa] = \frac{1}{\Omega\,\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}.$$

Setzen wir Gl. (2.10) in Gl. (2.9) ein, so erhalten wir für den Widerstand eines Leiters die Beziehung

$$\boxed{R = \frac{l}{\kappa\, A}.} \tag{2.11}$$

Tabelle 2.1 gibt eine Übersicht über den spezifischen Widerstand ρ und die Leitfähigkeit κ einiger Leiterwerkstoffe. Der in dieser Tabelle ebenfalls eingetragene Widerstands-Temperaturkoeffizient α_{20} wird im folgenden Abschnitt 2.1.9 erläutert.

Tabelle 2.1

Spezifischer Widerstand ρ, Leitfähigkeit κ und Widerstands-Temperaturkoeffizient α_{20} einiger Leiterwerkstoffe bei 20 °C

Leiterwerkstoff	ρ in Ωm	κ in S/m	α_{20} in 1/K
Silber	$0{,}0165 \cdot 10^{-6}$	$60{,}6 \cdot 10^{6}$	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$
Kupfer	$0{,}0176 \cdot 10^{-6}$	$56{,}8 \cdot 10^{6}$	$3{,}9 \cdot 10^{-3}$
Aluminium	$0{,}0278 \cdot 10^{-6}$	$36{,}0 \cdot 10^{6}$	$3{,}7 \cdot 10^{-3}$
Messing (62 % Cu, 38 % Zn)	$0{,}075 \cdot 10^{-6}$	$13{,}3 \cdot 10^{6}$	$1{,}6 \cdot 10^{-3}$
Manganin (86 % Cu, 12 % Mn, 2 % Ni)	$0{,}43 \cdot 10^{-6}$	$2{,}3 \cdot 10^{6}$	$0{,}01 \cdot 10^{-3}$

Aufgabe 2.2

Ein Kupferdraht von $d = 1{,}38$ mm Durchmesser ist $l = 160$ m lang. Der spezifische Widerstand des Materials beträgt $\rho = 17{,}6 \cdot 10^{-9}\ \Omega\text{m}$.

Wie groß ist der Widerstand R des Leiters?

Lösung

Bei dem Drahtquerschnitt

$$A = \frac{d^2\,\pi}{4} = \frac{(1{,}38\ \text{mm}^2)\,\pi}{4} = 1{,}5\ \text{mm}^2$$

beträgt der Widerstand nach Gl. (2.9)

$$R = \frac{\rho\, l}{A} = \frac{17{,}6 \cdot 10^{-9}\ \Omega\text{m} \cdot 160\ \text{m}}{1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2} = \underline{1{,}88\ \Omega}.$$

Aufgabe 2.3

Es soll ein Widerstand von $R = 60\ \Omega$ aus Manganindraht von $A = 1\ \text{mm}^2$ Querschnitt gewickelt werden. Das Material hat die Leitfähigkeit $\kappa = 2{,}3 \cdot 10^6$ S/m.

Welche Drahtlänge l ist erforderlich?

Lösung

Die erforderliche Drahtlänge folgt aus Gl. (2.11) als

$$l = R\,\kappa\,A = 60\,\Omega \cdot 2{,}3 \cdot 10^6\ \text{S/m} \cdot 10^{-6}\ \text{m}^2 = \underline{138\ \text{m}}.$$

2.1.9 Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Legt man einen metallenen Leiter an eine Spannung, so setzt bekanntlich ein elektrischer Strom ein, der seine Ursache in der Fortbewegung der freien Elektronen hat. Dabei handelt es sich nicht um eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Vielmehr werden die einzelnen Elektronen jeweils beschleunigt; sie stoßen jedoch nach einer sehr kurzen zurückgelegten Wegstrecke mit Atomen zusammen und werden dadurch dauernd wieder abgebremst. Auf diese Weise stellt sich eine mittlere Strömungsgeschwindigkeit ein.

In jedem Stoff führen die Atome und Moleküle ständige Bewegungen (Schwingbewegungen) aus, deren Intensität mit der Temperatur zunimmt. Das hat zur Folge, dass das Fließen eines Stromes in Metallen mit steigender Temperatur zunehmend erschwert wird, da die statistische Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes von freien Elektronen und Atomen durch die stärkeren Schwingbewegungen der Atome größer wird. Der elektrische Widerstand von metallenen Leitern nimmt also mit der Temperatur zu.

Es gibt aber auch Stoffe, deren Widerstand mit der Temperatur abnimmt. Dazu gehören vor allen Dingen die Halbleiter (zum Beispiel Silizium oder Germanium). Bei diesen Stoffen nimmt die Zahl der vorhandenen beweglichen Ladungsträger (freie Elektronen und Löcher) mit steigender Temperatur stark zu, was zu einer deutlichen Erhöhung der Leitfähigkeit führt.

Ermittelt man nun durch einen Versuch beispielsweise die Abhängigkeit des Widerstandes eines metallenen Leiters von der Temperatur und stellt das Ergebnis grafisch dar, so erhält man, falls die Temperaturveränderung nicht zu groß ist und etwa 200 K nicht überschreitet, eine annähernd geradlinig verlaufende Kennlinie. Bild 2.6 zeigt eine derartige Widerstands-Temperatur-Kennlinie.

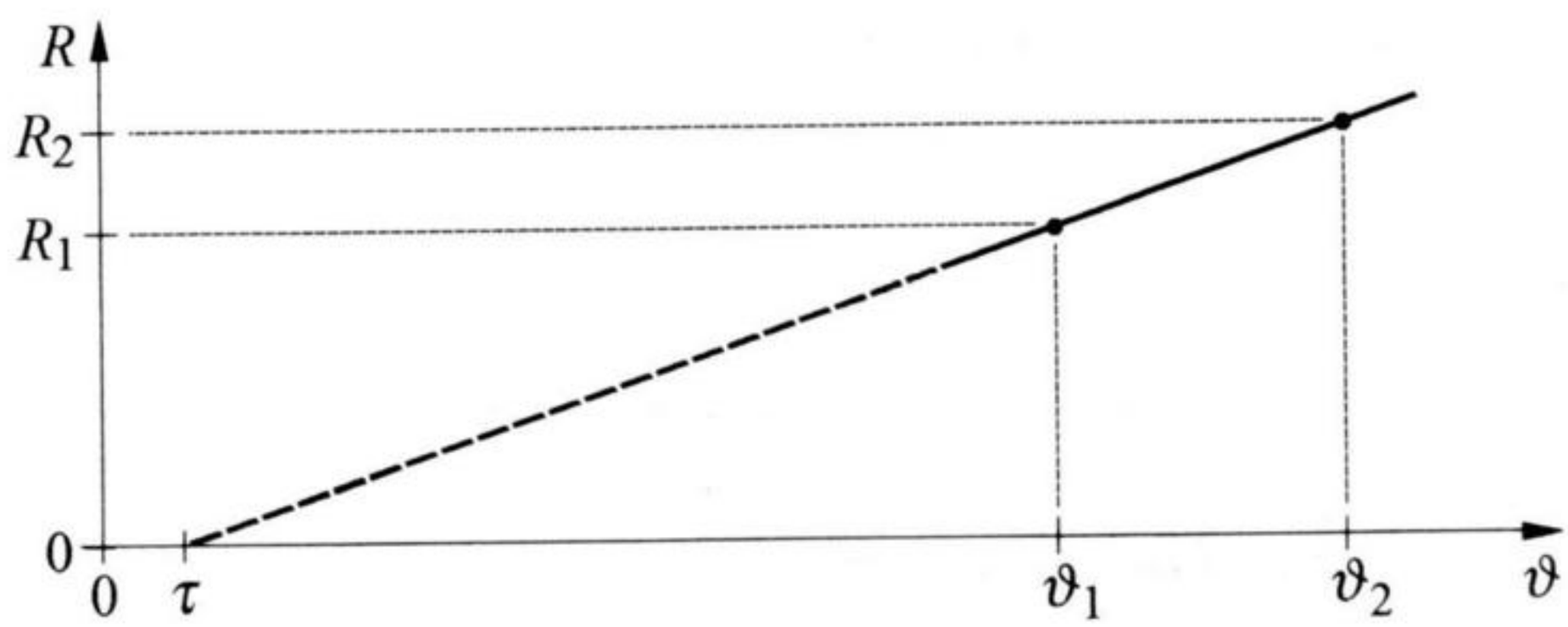


Bild 2.6 Widerstands-Temperatur-Kennlinie eines metallenen Leiters

R_1 und R_2 seien die bei den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 gemessenen Widerstandswerte. Verlängern wir die durch diese Punkte verlaufende Gerade nach links

(gestrichelt dargestellte Linie), so wird die Abszissenachse bei einer bestimmten Temperatur τ geschnitten. Dieser Temperaturkennwert τ stellt eine Materialkonstante dar und beträgt beispielsweise für Kupfer 38 K.

Aus Bild 2.6 folgt nach dem Strahlensatz

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\vartheta_2 - \tau}{\vartheta_1 - \tau}.$$

Hieraus ergibt sich nach einer einfachen Umformung

$$R_2 = R_1\left(1 + \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_1 - \tau}\right).$$

Mit der Abkürzung

$$\alpha_1 = \frac{1}{\vartheta_1 - \tau} \tag{2.12}$$

wird daraus

$$\boxed{R_2 = R_1\,[1 + \alpha_1\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)].} \tag{2.13}$$

Hierin bezeichnet man α_1 als **Widerstands-Temperaturkoeffizient.** Er ist, wie Gl. (2.12) zeigt, abhängig von der Ausgangstemperatur ϑ_1. Oft wird α_1 für die Ausgangstemperatur ϑ_1 = 20 °C = 293 K angegeben und als α_{20} bezeichnet. Zum Beispiel ergibt sich für Kupfer mit dem Temperaturkennwert τ = 38 K

$$\alpha_{20} = \frac{1}{\vartheta_1 - \tau} = \frac{1}{293\ \mathrm{K} - 38\ \mathrm{K}} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}.$$

Weitere α_{20}-Werte sind in Tabelle 2.1 enthalten. Bei vielen Metallen liegt α_{20} bei $4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$. Elektrische Leiter, deren Widerstand mit steigender Temperatur abnimmt, haben einen *negativen* Temperaturkoeffizienten.

Die beschriebene Definition des Widerstands-Temperaturkoeffizienten α_{20} kann man anschaulich folgendermaßen erklären: Hat ein Leiter einen Temperaturkoeffizienten von beispielsweise $\alpha_{20} = 4 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$, so nimmt sein Widerstand pro 1 °C Temperaturerhöhung um 4 ‰ zu. Das bedeutet, dass eine Temperaturerhöhung von 20 °C auf 270 °C zu einer Verdopplung des Widerstandes führt.

Bei manchen Leiterwerkstoffen sinkt der Widerstand bei sehr niedrigen Temperaturen (in der Nähe des absoluten Nullpunktes) sprunghaft auf unmessbar kleine Werte ab. Diese Erscheinung bezeichnet man als **Supraleitung.**

Aufgabe 2.4

Die Wicklung eines Motors hat bei der Temperatur $\vartheta_1 = 20$ °C den Widerstand $R_1 = 0{,}52\ \Omega$. Nach einer längeren Betriebsdauer ist der Wicklungswiderstand infolge der Erwärmung auf $R_2 = 0{,}67\ \Omega$ angestiegen. Der Temperaturkoeffizient beträgt $\alpha_{20} = 3{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}$.

Welche mittlere Temperatur ϑ_2 hat sich in der Wicklung eingestellt?

Lösung

Die gesuchte Temperatur der Wicklung folgt aus Gl. (2.13) mit $\alpha_1 = \alpha_{20}$ als

$$\vartheta_2 = \frac{1}{\alpha_{20}}\left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right) + \vartheta_1 = \frac{1}{3{,}9 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1}}\left(\frac{0{,}67\ \Omega}{0{,}52\ \Omega} - 1\right) + 20\ °\mathrm{C} = \underline{94\ °\mathrm{C}}.$$

Aufgabe 2.5

Erwärmt man einen Leiter von $\vartheta_1 = 20$ °C auf $\vartheta_2 = 60$ °C, so nimmt sein Widerstand um $p = 0{,}62$ % zu.

Wie groß ist der Temperaturkoeffizient α_{20} des Leitermaterials?

Lösung

Bezeichnen wir den bei der Temperatur ϑ_1 vorhandenen Widerstand als R_1 und den bei ϑ_2 vorhandenen als R_2, so gilt

$$R_2 = R_1\,(1 + p).$$

Außerdem ist nach Gl. (2.13) mit $\alpha_1 = \alpha_{20}$

$$R_2 = R_1\,[1 + \alpha_{20}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1)].$$

Durch Gleichsetzen finden wir

$$p = \alpha_{20}\,(\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Hieraus folgt der gesuchte Temperaturkoeffizient als

$$\alpha_{20} = \frac{p}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{0{,}0062}{60\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C}} = \underline{1{,}55 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{K}^{-1}}.$$

2.1.10 Arbeit und Leistung bei Gleichstrom

Einem entsprechend Bild 2.7 an der Spannung U liegenden Widerstand R wird nach Gl. (2.4) die **Energie** (oder **Arbeit**)

$$W = Q\,U$$

zugeführt. Hierin stellt Q die durch den Widerstand fließende Ladung dar. Mit Gl. (2.1) wird daraus

$$W = U\,I\,t, \tag{2.14}$$

wobei I die Stromstärke und t die Dauer des Stromflusses sind.

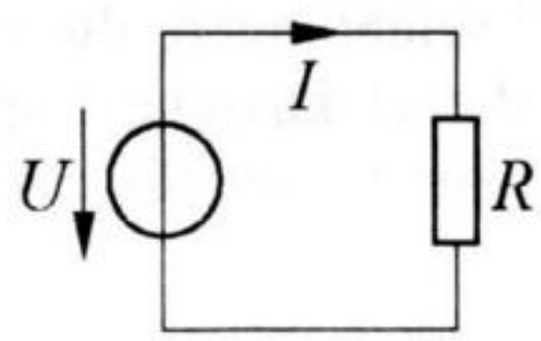


Bild 2.7 Einfacher Stromkreis (Umwandlung von elektrischer Energie in Wärmeenergie)

Die in einer *Zeiteinheit* gelieferte Energie bezeichnet man als **Leistung** (Symbol: P). Es gilt also

$$P = \frac{W}{t}.$$

Aus Gl. (2.14) folgt daher für die in Bild 2.7 dem Widerstand R zugeführte Leistung

$$\boxed{P = U\,I.} \tag{2.15}$$

Die Einheit ergibt sich aus Gl. (2.15) als

$$[P] = \mathrm{VA}\,.$$

Hierfür verwendet man die Bezeichnung **Watt** (Einheitenzeichen: W). Es gilt unter Berücksichtigung der Gln. (1.2) und (2.5)

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{VA} = 1\ \mathrm{J/s} = 1\ \mathrm{Nm/s} = 1\ \mathrm{kg\ m^2/s^3}. \tag{2.16}$$

Anschaulich kann man die Einheit „Watt“ wie folgt beschreiben:

Fließt in einem Widerstand bei einer anliegenden Spannung von einem Volt ein Strom von einem Ampere, so wird dem Widerstand eine Leistung von einem Watt zugeführt.

Aus Gl. (2.16) erhält man die Einheit der Energie als

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{Ws} = 1\ \mathrm{VAs} = 1\ \mathrm{Nm} = 1\ \mathrm{kg\ m^2/s^2}.$$

Durch Anwendung des ohmschen Gesetzes $U = I\,R$ findet man aus Gl. (2.15) für die Leistung die Ausdrücke

$$\boxed{P = U\,I = \frac{U^2}{R} = I^2\,R.} \tag{2.17}$$

Allgemein bezeichnet man Einrichtungen, die elektrische Energie abgeben, als **Erzeuger** und Einrichtungen, die elektrische Energie aufnehmen, als **Verbraucher**. So stellt in Bild 2.7 die Spannungsquelle einen Erzeuger dar und der Widerstand R einen Verbraucher. Dabei sei jedoch ausdrücklich festgestellt, dass Energie grundsätzlich weder *erzeugt* noch *verbraucht*, sondern lediglich *umgewandelt* werden kann. So wird zum Beispiel in einem Widerstand *elektrische* Energie in *Wärmeenergie* umgewandelt. Ein Generator wandelt *mechanische* Energie in *elektrische* Energie um.

Von Bedeutung ist hierbei der **Wirkungsgrad** der Energieumwandlung. Er sei am Beispiel eines Generators erläutert. Bezeichnet man die einem Generator über die Antriebswelle mechanisch zugeführte Leistung als P_1 und die vom Generator elektrisch abgegebene Leistung als P_2, so beträgt der Wirkungsgrad der Maschine

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

Die Differenz von P_1 und P_2 heißt **Verlustleistung**. Man spricht auch (kurz) von **Verlusten**. Diese werden nicht in die gewünschte Energieform umgewandelt (am Beispiel des Generators nicht in elektrische Energie, sondern in Wärmeenergie).

Allgemein ist der Wirkungsgrad das Verhältnis der bei einer Energieumwandlung abgegebenen (genutzten) Leistung zu der zugeführten (aufgebrachten) Leistung.

Aufgabe 2.6

Die an einem Elektrowärmegerät liegende Spannung U werde um $p = 20\ \%$ erhöht.

Um welchen Prozentsatz p' steigt hierdurch die Leistung P des Gerätes, wenn der Heizwiderstand R als konstant angenommen wird?

Lösung

Die dem Widerstand R zugeführte Leistung beträgt nach Gl. (2.17) bei der Spannung U

$$P = \frac{U^2}{R}$$

und bei einer um $p = 20\ \%$ höheren Spannung $U' = (1+p)U$

$$P' = \frac{(U')^2}{R} = \frac{\left[(1+p)U\right]^2}{R}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$P' = (1+p)^2\ P = (1+0{,}2)^2\ P = 1{,}44\ P.$$

Die Leistung des Gerätes steigt also um $\underline{p' = 44\ \%}$.

Aufgabe 2.7

Ein Gleichstrommotor wird mit dem Drehmoment $M = 35$ Nm belastet und hat hierbei die Drehzahl $n = 1500$ U/min. Die am Motor liegende Spannung beträgt $U = 230$ V, der aufgenommene Strom $I = 28$ A.

Wie groß ist der Wirkungsgrad η des Motors?

Lösung

Der Motor gibt bei der Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = 2\pi n = 2\pi \frac{1500}{60}\frac{1}{\mathrm{s}} = 157\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

die Leistung

$$P_2 = M\omega = 35\ \mathrm{Nm} \cdot 157\,\frac{1}{\mathrm{s}} = 5{,}50\ \mathrm{kW}$$

ab. Die aufgenommene Leistung beträgt nach Gl. (2.15)

$$P_1 = U\,I = 230\ \mathrm{V} \cdot 28\ \mathrm{A} = 6{,}44\ \mathrm{kW}.$$

Damit ist der Wirkungsgrad des Motors

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{5{,}50\,\text{kW}}{6{,}44\,\text{kW}} = \underline{0{,}85}.$$

2.1.11 Bezugssinn und Pfeilsysteme

In elektrischen Schaltungen werden Spannungs- und Stromrichtungen allgemein durch Pfeile gekennzeichnet. Wir betrachten dazu einen einfachen Stromkreis nach Bild 2.8a. Der Spannungspfeil ist von (+) nach (–) zeigend eingetragen (Richtungssinn der Spannung). Der Strompfeil gibt die Richtung des fließenden Stromes an (Richtungssinn der Stromstärke).

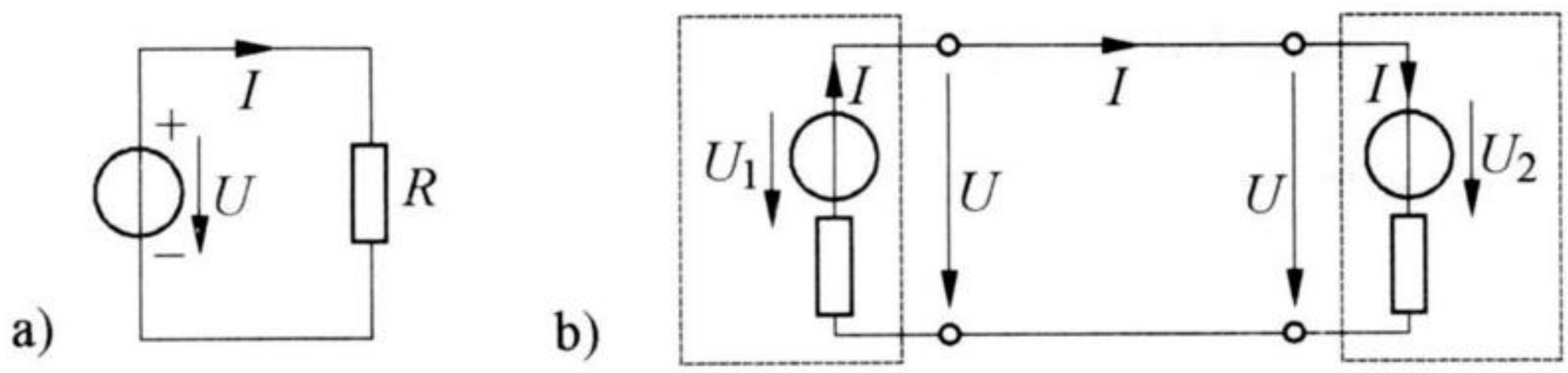


Bild 2.8 Schaltungsbeispiele zur Erläuterung von Bezugspfeilen und Pfeilsystemen

Liegt nun eine Schaltung nach Bild 2.8b vor, so hängt die Richtung (der Richtungssinn) des auftretenden Stromes von der Höhe der Spannungen U_1 und U_2 ab. In diesem Fall kann man für den Strom I willkürlich eine Richtung vorgeben und bezeichnet diese dann als **Bezugssinn**. Der entsprechende Strompfeil heißt **Bezugspfeil**. Fließt nun der Strom tatsächlich in der vorgegebenen Richtung, stimmen also Bezugssinn und Richtungssinn überein, so hat I einen positiven Wert. Andernfalls ist I negativ. Durch die Vorgabe des Bezugssinns wird also einem real fließenden Strom ein Vorzeichen zugeordnet. Entsprechend kann man auch für Spannungen Bezugspfeile vorgeben.

Für die weiteren Überlegungen wollen wir die in Bild 2.8b für U und I eingetragenen Pfeile als *Bezugspfeile* auffassen. Betrachten wir dabei nur die rechte Seite der Schaltung, so haben die Bezugspfeile für U und I die gleiche Richtung. Man bezeichnet diese Pfeilzuordnung als **Verbraucher-Pfeilsystem.** Diese Bezeichnung rührt daher, dass bei *positiver* Leistung

$$P = U\,I$$

die rechte Seite der Schaltung Leistung *aufnimmt* und daher als *Verbraucher* angesehen werden kann. Das bedeutet allerdings auch, dass bei negativer Leistung die rechte Seite der Schaltung Leistung abgibt.

Wir wollen jetzt die linke Seite der Schaltung in Bild 2.8b betrachten. Hier sind die Bezugspfeile für U und I einander entgegengerichtet. Diese Pfeilzuordnung nennt man **Erzeuger-Pfeilsystem**. Hier zeigt sich, dass bei *positiver* Leistung

$$P = U\,I$$

der betrachtete Schaltungsteil Leistung *abgibt* und daher als *Erzeuger* angesehen werden kann. Sollte die Leistung allerdings negativ sein, so nimmt der betreffende Schaltungsteil Leistung auf.

Grundsätzlich können die Bezugspfeile für U und I bei einem Schaltungselement beliebig gewählt werden. Es zeigt sich jedoch, dass das Verbraucher-Pfeilsystem im Allgemeinen Vorteile hat. Wir betrachten dazu Bild 2.9.

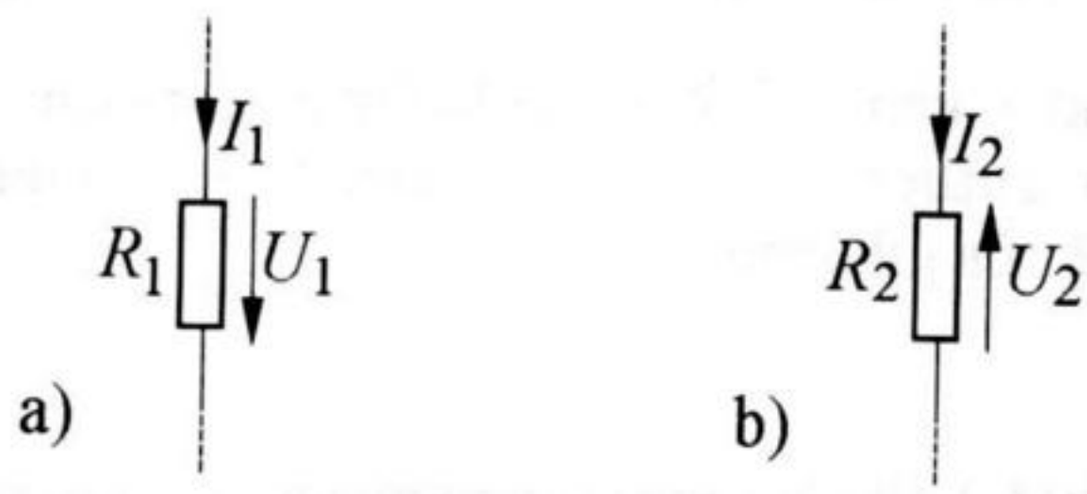


Bild 2.9 Pfeilzuordnung nach dem Verbraucher-Pfeilsystem (a) und nach dem Erzeuger-Pfeilsystem (b)

Ordnet man die Bezugspfeile einander entsprechend Bild 2.9a nach dem Verbraucher-Pfeilsystem zu, so lautet das ohmsche Gesetz

$$U_1 = I_1\,R_1.$$

Bei einer Pfeilzuordnung entsprechend Bild 2.9b (Erzeuger-Pfeilsystem) ist jedoch zu beachten, dass

$$U_2 = -\,I_2\,R_2$$

ist. Zur Vermeidung des hierin enthaltenen negativen Vorzeichens ist es ratsam, dass Verbraucher-Pfeilsystem nach Bild 2.9a zu verwenden.

2.1.12 Die Kirchhoff'schen Gesetze

Eine elektrische Schaltung besteht grundsätzlich aus mehreren Widerständen und Spannungsquellen, die durch Leitungen miteinander verbunden sind. Die gesamte Schaltung bezeichnet man auch als **elektrisches Netzwerk** oder (kurz) als **Netz**. Für die Berechnung von Strömen und Spannungen in einem solchen Netzwerk sind zwei Gesetze, die als **Kirchhoff'sche Gesetze** bezeichnet werden, von besonderer Bedeutung.

Das **erste Kirchhoff'sche Gesetz** bezieht sich auf *Verzweigungspunkte* von Netzwerken, zum Beispiel in Bild 2.10a auf die Punkte A und B. Man bezeichnet diese auch als **Knotenpunkte** oder als **Knoten**.

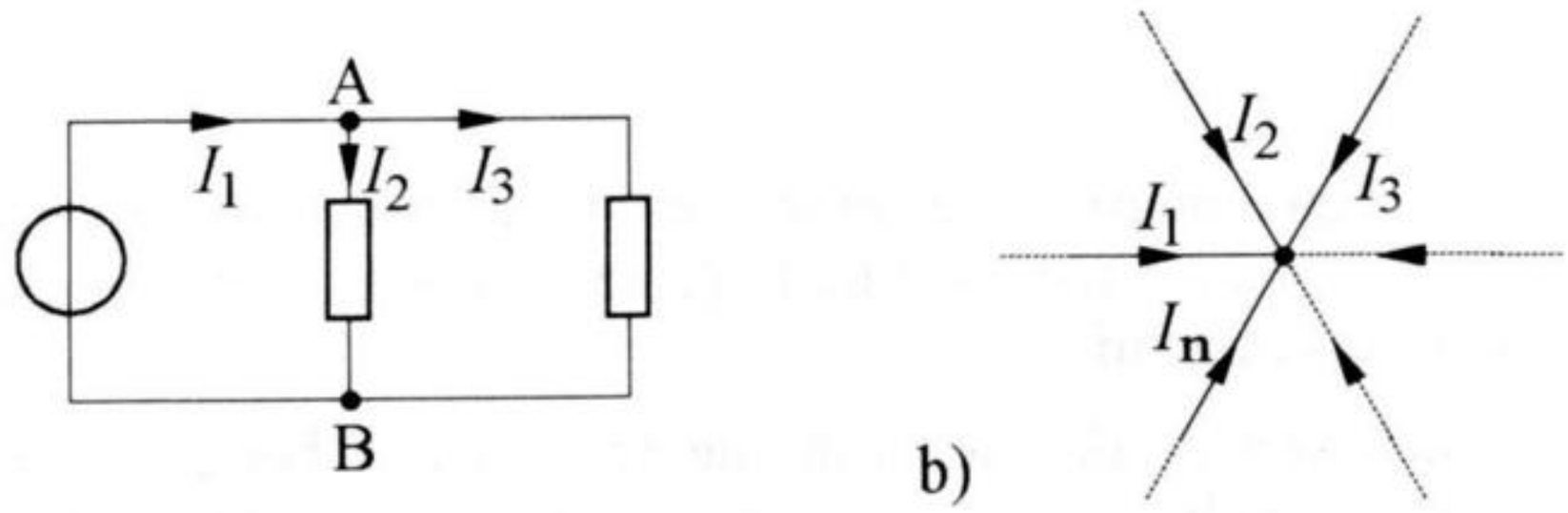


Bild 2.10 a) Einfache Schaltung zur Erläuterung des ersten Kirchhoff'schen Gesetzes, b) Knotenpunkt mit einheitlich nach innen weisenden Bezugspfeilen

Da in solchen Punkten keine elektrische Ladung gespeichert werden kann, muss stets die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein. In Bild 2.10a gilt also

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Wählt man nach Bild 2.10b bei einem beliebigen Knoten mit n Strömen die *Bezugspfeile* sämtlicher Ströme so, dass deren Richtungen auf den Knoten weisen, so ist die Summe aller Ströme stets gleich Null. Man kann dies durch

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots I_n = 0$$

oder durch die die gleiche Aussage enthaltene Gleichung

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} I_k = 0} \tag{2.18}$$

darstellen. Gl. (2.18) gibt (in allgemeiner Form) den Inhalt des **ersten Kirchhoff'schen Gesetzes** an und wird auch als **Knotengleichung**, als **Knotensatz** oder als **Knotenregel** bezeichnet. Das Gesetz gilt dabei nicht nur für einzelne Knoten, sondern auch für die Summe aller Ströme, die in Verbindungsleitungen zu ganzen (abgeschlossenen) Netzwerken fließen.

Das **zweite Kirchhoff'sche Gesetz** bezieht sich auf **Maschen** von Netzwerken. Als *Maschen* bezeichnet man die in Schaltungen auftretenden, in sich geschlossenen Wege. So enthält die Schaltung nach Bild 2.11 *zwei* Maschen (I und II). Masche I wird gebildet aus der vorhandenen Spannungsquelle sowie den Widerständen R_1 und R_2 (einschließlich der zugehörigen Verbindungsleitungen). Masche II besteht aus den Widerständen R_2, R_3, und R_4 (einschließlich der zugehörigen Verbindungsleitungen). Grundsätzlich muss der Weg einer Masche allerdings nicht unbedingt über einen Leiter führen.

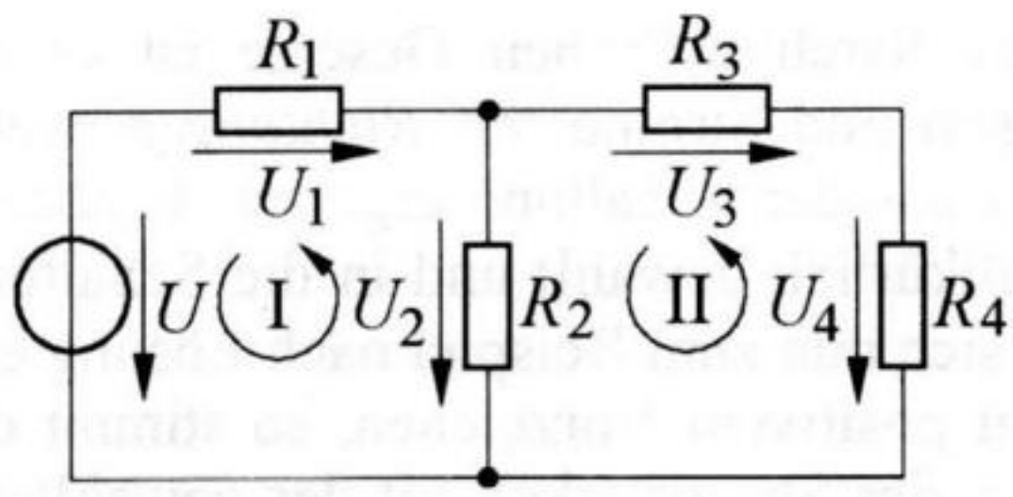


Bild 2.11 Einfache Schaltung zur Erläuterung des zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes

Das zweite Kirchhoff'sche Gesetz besagt nun, dass die Summe aller in einer Masche auftretenden Spannungen gleich Null ist. Bei seiner Anwendung gibt man zunächst für jede Masche einen **Umlaufsinn** vor und kennzeichnet diesen jeweils, wie in Bild 2.11 dargestellt, durch einen **Umlaufpfeil**. Die Richtungen der Umlaufpfeile können beliebig gewählt werden. Danach schreibt man alle in einer Masche vorkommenden Spannungen auf. Hierbei wählt man das Vorzeichen einer Spannung positiv, wenn der Umlaufpfeil und der Spannungspfeil in die gleiche Richtung zeigen, andernfalls negativ. Schließlich wird die Summe der aufgeschriebenen Spannungen gleich Null gesetzt. So gilt zum Beispiel in Bild 2.11 für die Masche I

$$U - U_2 - U_1 = 0$$

und für die Masche II

$$U_2 - U_4 - U_3 = 0.$$

Man kann das zweite Kirchhoff'sche Gesetz in Bild 2.11 auch für beide Maschen gemeinsam anwenden. Für diesen äußeren Umlauf lautet die Gleichung

$$U - U_4 - U_3 - U_1 = 0.$$

In einem größeren Netzwerk kann ein solcher Umlauf beliebig viele Maschen umfassen. Wählt man nun (allgemein) bei einem solchen Umlauf die Bezugspfeile aller dabei auftretenden Spannungen so, dass sie in Richtung des gewählten Umlaufsinns weisen, so ist die Summe aller Spannungen stets gleich Null. Dies kann man - analog zu Gl. (2.18) - durch

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} U_k = 0} \tag{2.19}$$

darstellen, wobei n die Zahl der in dem Umlauf vorkommenden Spannungen ist. Gl. (2.19) gibt (in allgemeiner Form) den Inhalt des **zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes** an und wird auch als **Maschengleichung**, als **Maschenregel** oder als **Maschensatz** bezeichnet.

Zur Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze ist es erforderlich, dass alle betreffenden Spannungen und Ströme mit *Richtungspfeilen* versehen sind. Falls sich diese nicht bereits aus der Schaltung ergeben, können sie, wie in Abschnitt 2.1.11 beschrieben, willkürlich gewählt und in die Schaltung eingetragen werden (Bezugspfeile). Ergibt sich nun zum Beispiel nach Lösung einer Aufgabe für einen Strom ein Ergebnis mit positivem Vorzeichen, so stimmt die tatsächliche Stromrichtung (Richtungssinn der Stromstärke) mit der gewählten Richtung des betreffenden Bezugspfeils überein. Bei einem Ergebnis mit negativem Vorzeichen trifft dies nicht zu.

2.1.13 Quellenspannung und innerer Widerstand von realen Spannungsquellen

Wird eine reale Spannungsquelle durch einen Widerstand belastet, so sinkt die zwischen den Polen (Klemmen) auftretende Spannung, die auch als **Klemmenspannung** bezeichnet wird, ab. Sie ist also im belasteten Zustand kleiner als im unbelasteten Zustand. Die Differenz stellt den Spannungsabfall am **inneren Widerstand** der Spannungsquelle dar. Ein solcher innerer Widerstand ist unvermeidbar, da jede reale Spannungsquelle widerstandsbehaftete Leiter (Drähte oder Flüssigkeiten) enthält.

Zur anschaulichen Darstellung der Zusammenhänge kann eine reale Spannungsquelle durch das in Bild 2.12 angegebene **Ersatzschaltbild** wiedergegeben werden. Darin ist der innere Widerstand R_i aus der Spannungsquelle herausgenommen, so dass diese als widerstandslos anzusehen ist. R_a stellt einen äußeren Belastungswiderstand dar.

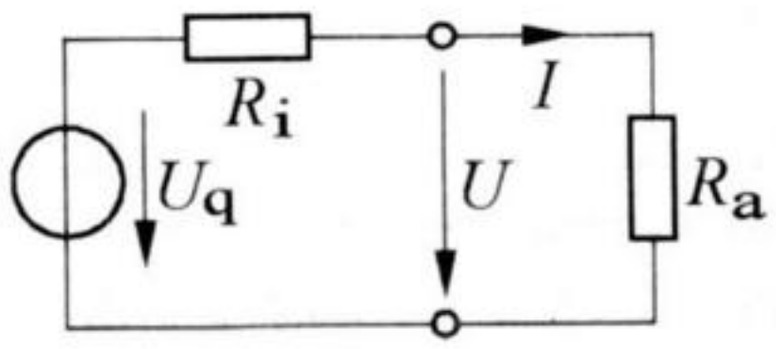


Bild 2.12 Ersatzschaltbild einer realen (verlustbehafteten) Spannungsquelle (mit äußerem Belastungswiderstand)

Bei einem Belastungsstrom I gilt für die Klemmenspannung

$$U = U_q - I R_i. \tag{2.20}$$

Die im unbelasteten Zustand zwischen den Klemmen liegende Spannung U_q wird als **Quellenspannung** oder als **Leerlaufspannung** bezeichnet.

Die Größen U_q und R_i sind im Allgemeinen nahezu unabhängig von der Höhe des fließenden Belastungsstromes I. Stellt man für diesen Fall die in Gl. (2.20) angegebene Funktion $U = f(I)$ grafisch dar, so erhält man für die sich ergebende Spannungs-Strom-Kennlinie (U-I-Kennlinie) eine *Gerade*. Man bezeichnet solche Spannungsquellen daher auch als **lineare Quellen**.

Eine Quelle mit dem Innenwiderstand $R_i = 0$ stellt eine **ideale Spannungsquelle** dar. Sie liefert eine vom Belastungsstrom unabhängige *konstante* Spannung und wird daher auch als **Konstantspannungsquelle** bezeichnet. Bei den nachfolgenden Betrachtungen fassen wir, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes festgestellt wird, die verwendeten Spannungsquellen stets als ideale Quellen auf.

2.1.14 Stromquellen

Neben der idealen Spannungsquelle gibt es auch die **ideale Stromquelle**. Sie liefert einen vom Belastungswiderstand unabhängigen konstanten Strom und wird daher auch als **Konstantstromquelle** bezeichnet. Eine solche Anordnung kann durch eine mit einer Stromregelung versehene elektronische Schaltung näherungsweise realisiert werden. Bild 2.13a enthält das für eine Konstantstromquelle verwendete Schaltzeichen. R stellt den angeschlossenen Belastungswiderstand dar. Der gelieferte Strom I wird auch als **Quellenstrom** bezeichnet.

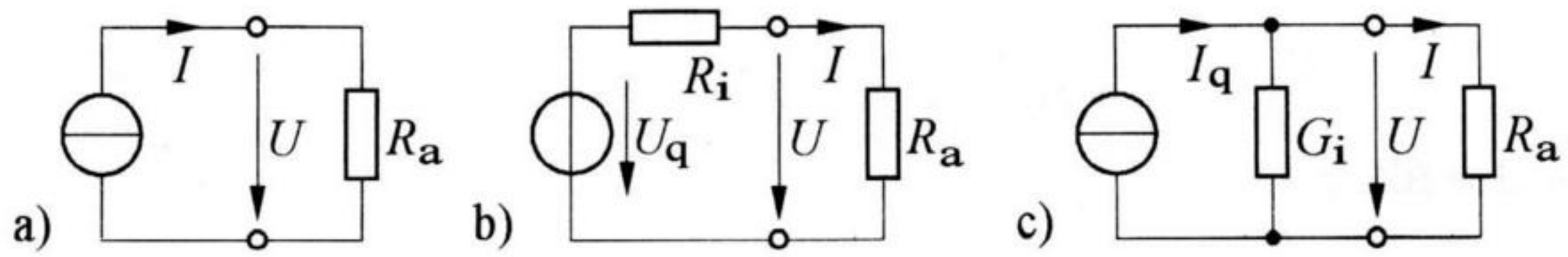


Bild 2.13 a) Konstantstromquelle, b) und c) Ersatzschaltungen von widerstandsbehafteten elektrischen Quellen (jeweils mit Belastungswiderstand)

Für die auftretende Klemmenspannung gilt

$$U = I R_a .$$

Erhöht man beispielsweise den Belastungswiderstand R_a, so steigt die von der Konstantstromquelle gelieferte Spannung U so weit an, dass der fließende Strom den gleichen Wert behält.

Wie in Abschnitt 2.1.13 beschrieben kann jede reale (widerstandsbehaftete) elektrische Quelle durch ein Ersatzschaltbild entsprechend Bild 2.13b wiedergegeben werden. Es zeigt sich, dass stattdessen auch eine Ersatzschaltung nach Bild 2.13c möglich ist. In der letztgenannten Darstellung wird die elektrische Quelle als Parallelschaltung einer Konstantstromquelle mit dem Quellenstrom I_q und eines

Widerstandes (Innenwiderstandes) aufgefasst. Wir wollen den Kehrwert dieses Widerstandes (also dessen Leitwert) als G_i bezeichnen. R_a stellt einen äußeren Belastungswiderstand dar.

Wir machen uns jetzt zur Aufgabe, den Quellenstrom I_q und den Leitwert G_i der in Bild 2.13c angegebenen Ersatzschaltung zu bestimmen und setzen dazu die Größen U_q und R_i in Bild 2.13b als bekannt voraus. Betrachten wir beide Ersatzschaltungen im Kurzschluss ($R_a = 0$), so folgt aus Bild 2.13b

$$I = \frac{U_q}{R_i}$$

und aus Bild 2.13c

$$I = I_q.$$

Durch Gleichsetzen ergibt sich für den Quellenstrom der Konstantstromquelle

$$\boxed{I_q = \frac{U_q}{R_i}.} \tag{2.21}$$

Bei unendlich großem Belastungswiderstand R_a gilt in Bild 2.13b

$$U = U_q$$

und in Bild 2.13c

$$U = \frac{I_q}{G_i}.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir für den Leitwert (Innenleitwert) in Bild 2.13c

$$\boxed{G_i = \frac{I_q}{U_q} = \frac{1}{R_i}.} \tag{2.22}$$

Dieses Ergebnis besagt, dass die *Innenwiderstände* der beiden in Bild 2.13b und in Bild 2.13c angegebenen Ersatzschaltungen übereinstimmen. Darüber hinaus gilt in Bild 2.13 für die Beziehung zwischen dem *Quellenstrom* I_q und der *Quellenspannung* U_q Gl. (2.21).

2.2 Die Berechnung von Gleichstromkreisen

Elektrische Schaltungen, die mit Gleichspannungs- oder Gleichstromquellen versorgt werden, nennt man **Gleichstromkreise**. Unter der **Berechnung** solcher Kreise versteht man die Ermittlung der in den Zweigen auftretenden Ströme oder auch die Bestimmung anderer Größen wie Spannungen, Leistungen, Widerstände. Hierzu gibt es verschiedene Verfahren, die nachfolgend vorgestellt werden. Wir setzen dabei stets voraus, dass die betrachteten Schaltungen **lineare Stromkreise** darstellen, also keine stromabhängigen Widerstände enthalten.

2.2.1 Reihenschaltung von Widerständen

Für die folgenden Betrachtungen wählen wir als Schaltungsbeispiel die in Bild 2.14a dargestellte Anordnung. Sie enthält drei in Reihe geschalteten Widerstände (R_1, R_2 und R_3).

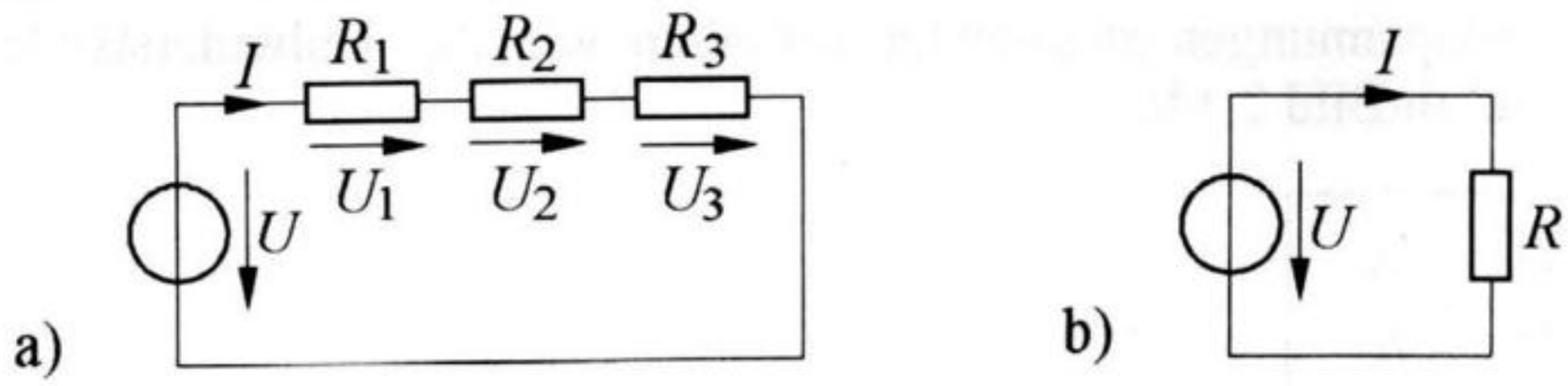


Bild 2.14 Reihenschaltung von Widerständen. a) Schaltungsbeispiel mit drei in Reihe liegenden Widerständen, b) zugehörige Ersatzschaltung

Es stellt sich die Frage, wie groß der Gesamtwiderstand R der Reihenschaltung ist, wie groß also nach Bild 2.14b ein Widerstand R sein muss, der bei gleicher Spannung U den gleichen Strom I aufnimmt. Nach dem ohmschen Gesetz gilt für den Gesamtwiderstand

$$R = \frac{U}{I}. \tag{2.23}$$

Die in Bild 2.14a an den einzelnen Widerständen liegenden (abfallenden) Teilspannungen betragen

$$U_1 = I\,R_1, \tag{2.24}$$

$$U_2 = I\,R_2, \tag{2.25}$$

$$U_3 = I\,R_3. \tag{2.26}$$

Weiterhin gilt nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz

$$U = U_1 + U_2 + U_3. \tag{2.27}$$

Setzen wir die Gln. (2.24) bis (2.26) in Gl. (2.27) ein und die sich ergebende Beziehung wiederum in Gl. (2.23), so ergibt sich der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung, wenn wir durch I teilen, als

$$R = R_1 + R_2 + R_3.$$

Allgemein gilt, dass bei der Reihenschaltung von Widerständen der Gesamtwiderstand gleich der Summe der Einzelwiderstände ist.

Dies lässt sich auch durch die Gleichung

$$\boxed{R = \sum_{k=1}^{n} R_k}$$

darstellen, wobei n die Anzahl der in Reihe liegenden Widerstände ist.

Weiterhin folgt aus den Gln. (2.24) bis (2.26) für eine Reihenschaltung, dass sich die Teilspannungen zueinander verhalten wie die Teilwiderstände. So gilt zum Beispiel in Bild 2.14a

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}}$$

und

$$\boxed{\frac{U_1}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_1}{R}.}$$

Man bezeichnet diese Gesetzmäßigkeiten als **Spannungsteilerregel**.

Abschließend sei festgestellt, dass der Gesamtwiderstand einer Widerstandsanordnung auch als **resultierender Widerstand** oder als **Ersatzwiderstand** bezeichnet wird. Der Begriff *Ersatzwiderstand* rührt daher, dass man sich die gegebene Widerstandsanordnung durch einen einzigen derartigen Widerstand ersetzt denken kann, der bei gleicher Spannung den gleichen Strom aufnimmt.

2.2.2 Parallelschaltung von Widerständen

Für die folgenden Betrachtungen wählen wir als Beispiel die in Bild 2.15a dargestellte Schaltung, in der drei Widerstände (R_1, R_2 und R_3) parallel geschaltet sind. Gesucht sei der Gesamtwiderstand (oder Ersatzwiderstand) R der drei parallel geschalteten Widerstände. Das ist derjenige Widerstand, der nach Bild 2.15b bei gleicher Spannung U den gleichen Strom I aufnimmt.

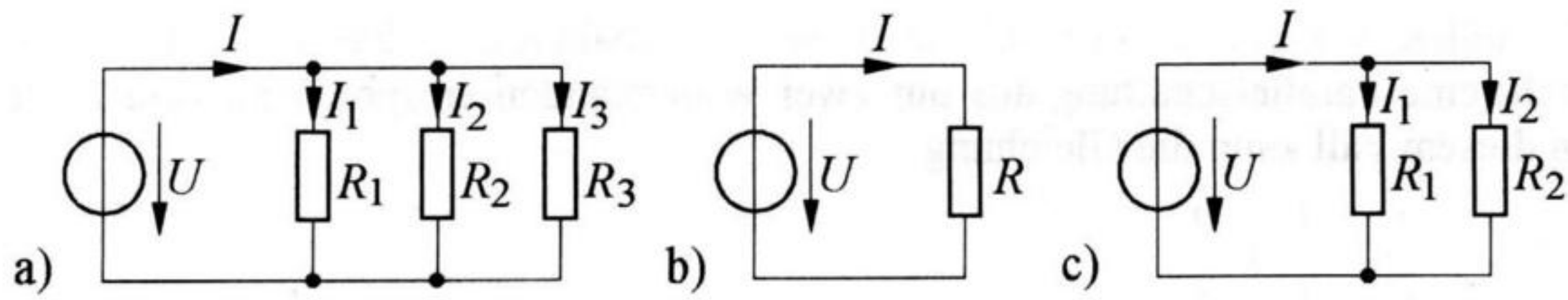


Bild 2.15 Parallelschaltung von Widerständen. a) Schaltung mit drei Widerständen, b) zugehörige Ersatzschaltung, c) Schaltung mit zwei Widerständen

Nach dem ohmschen Gesetz gilt in Bild 2.15b für den Gesamtstrom

$$I = \frac{U}{R} \tag{2.28}$$

und in Bild 2.15a für die in den einzelnen Widerständen fließenden Teilströme

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, \tag{2.29}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}, \tag{2.30}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3}. \tag{2.31}$$

Weiterhin gilt nach dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz

$$I = I_1 + I_2 + I_3. \tag{2.32}$$

Setzen wir die Gln. (2.28) bis (2.31) in Gl. (2.32) ein, so erhalten wir, wenn wir durch U teilen,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}. \tag{2.33}$$

Verwenden wir statt der Widerstände die entsprechenden Leitwerte nach Gl. (2.7), also $G = 1/R$, $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$ und $G_3 = 1/R_3$, so wird aus Gl. (2.33)

$$G = G_1 + G_2 + G_3.$$

Allgemein gilt, dass bei einer Parallelschaltung von Widerständen der Gesamtleitwert gleich der Summe der Einzelleitwerte ist.

Dies lässt sich auch durch die Gleichung

$$\boxed{G = \sum_{k=1}^{n} G_k} \tag{2.34}$$

darstellen, wobei n die Anzahl der parallel geschalteten Widerstände ist. Oft besteht eine Parallelschaltung aus nur zwei Widerständen entsprechend Bild 2.15c. In diesem Fall kann die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

umgewandelt werden in die zur Berechnung des Gesamtwiderstandes häufig verwendete Form

$$\boxed{R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.} \tag{2.35}$$

Aus den Gln. (2.29) bis (2.31) folgt, dass sich in einer Parallelschaltung die Teilströme umgekehrt wie die Widerstände verhalten. So gilt in Bild 2.15c

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}.}$$

Man bezeichnet diese Gesetzmäßigkeit als **Stromteilerregel**. In Bild 2.15c gilt ferner unter Berücksichtigung von Gl. (2.35)

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Daraus ergeben sich für die Teilströme die Beziehungen

$$\boxed{I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

und

$$\boxed{I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.}$$

Die durch diese beiden Gleichungen ausgedrückten Gesetzmäßigkeiten stellen eine andere (weitere) Darstellungsform der **Stromteilerregel** dar.

2.2.3 Dreieck-Stern- und Stern-Dreieck-Umwandlung

Bei der Berechnung des Gesamtwiderstandes einer Widerstandsanordnung ist es in der Regel möglich, schrittweise Reihen- und Parallelschaltungen zu jeweils einem

Widerstand zusammenzufassen. Dies sei am Beispiel der in Bild 2.16a dargestellten Anordnung erläutert.

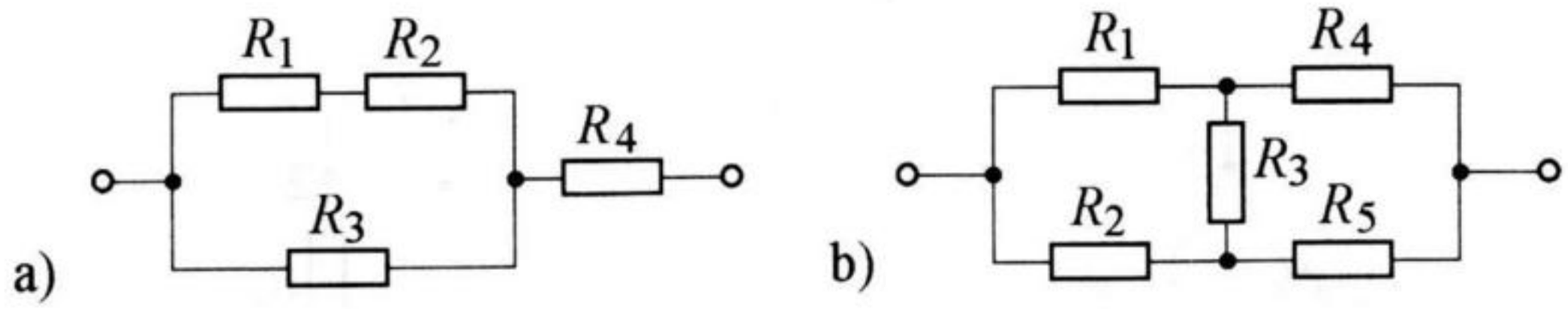


Bild 2.16 Schaltungsbeispiele (zur Bestimmung des Gesamtwiderstandes)

Wir fassen zunächst R_1 und R_2 zusammen zum resultierenden Widerstand

$$R_{12} = R_1 + R_2.$$

Der so ermittelte Ersatzwiderstand liegt parallel zu R_3 , so dass die beiden Zweige den Widerstand

$$R_{123} = \frac{R_{12}\,R_3}{R_{12} + R_3} = \frac{(R_1 + R_2)\,R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

haben. R_{123} wiederum liegt in Reihe mit R_4. Somit beträgt der Gesamtwiderstand der Anordnung nach Bild 2.16a

$$R = R_{123} + R_4 = \frac{(R_1 + R_2)\,R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4.$$

Betrachten wir nun die in Bild 2.16b angegebene Schaltung, so stellen wir fest, dass eine derartige Zusammenfassung von Widerständen nicht möglich ist. Zu einer Lösung des Problems gelangt man jedoch dadurch, dass man eine **Stern-Dreieck-Umwandlung** oder eine **Dreieck-Stern-Umwandlung** vornimmt. Dabei sei angemerkt, dass man eine Widerstandsanordnung entsprechend Bild 2.17a als **Dreieckschaltung** und eine entsprechend Bild 2.17b als **Sternschaltung** bezeichnet.

So ist es zum Beispiel möglich, die in Bild 2.16b aus den Widerständen R_1, R_3 und R_4 gebildete *Sternschaltung* in eine elektrisch gleichwertige *Dreieckschaltung* umzuwandeln. Andererseits kann aber auch beispielsweise die in Bild 2.16b aus den Widerständen R_1, R_2 und R_3 gebildete *Dreieckschaltung* in eine gleichwertige *Sternschaltung* umgewandelt werden. In beiden Fällen ergeben sich nach der Umwandlung Widerstandsanordnungen, die in der zuvor beschriebenen Weise zusammengefasst werden können.

Bild 2.17 zeigt in allgemeiner Form eine **Dreieck-** und eine **Sternschaltung** von Widerständen. Wir wollen untersuchen, wie die eine Schaltung in die andere umgewandelt werden kann (und umgekehrt).

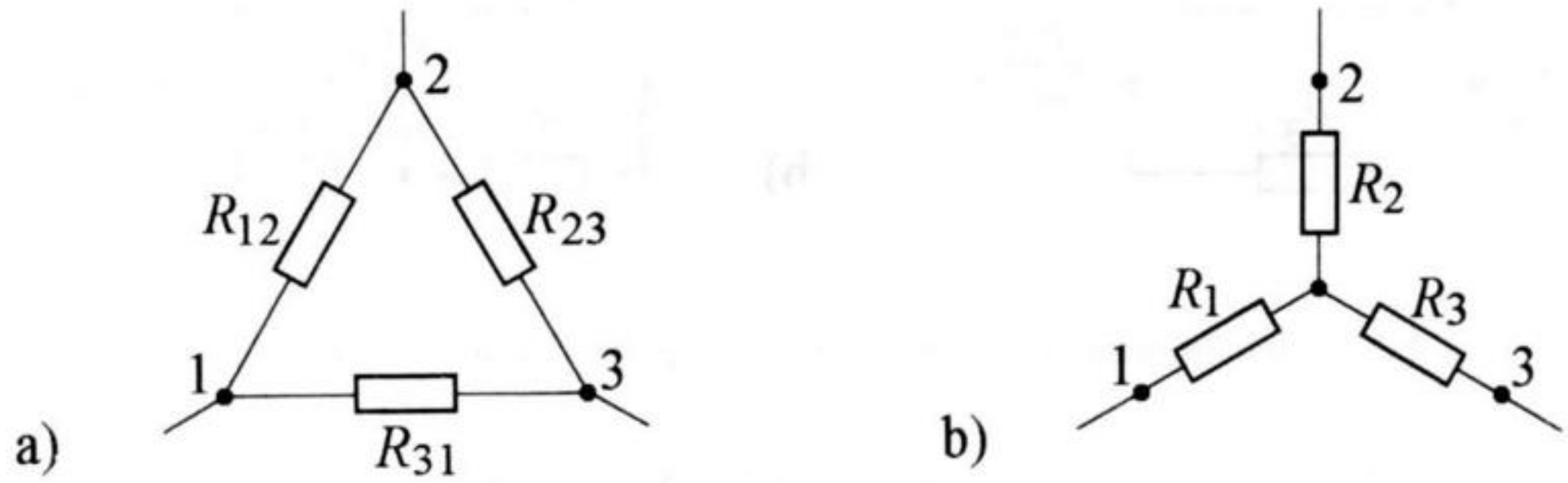


Bild 2.17 Dreieckschaltung (a) und Sternschaltung (b) von Widerständen

Dabei setzen wir zunächst die Dreieckwiderstände R_{12}, R_{23} und R_{31} als bekannt voraus. Gesucht seien die Widerstände R_1, R_2 und R_3 der elektrisch gleichwertigen Sternschaltung.

Beide Anordnungen sind gleichwertig, wenn die jeweils zwischen zwei Punkten bestehenden Widerstände in den Schaltungen übereinstimmen. Das bedeutet zum Beispiel für die Punkte 1 und 2, dass

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \tag{2.36}$$

sein muss. Entsprechend ergeben sich für die anderen Widerstände die Gleichungen

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{31} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \tag{2.37}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \tag{2.38}$$

Subtrahieren wir Gl. (2.37) von Gl. (2.36), so ergibt sich

$$R_1 - R_3 = \frac{R_{31}(R_{12} - R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Addieren wir hierzu Gl. (2.38) und teilen durch 2, so erhalten wir den gesuchten Sternwiderstand

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.} \tag{2.39}$$

Durch zyklische Vertauschung finden wir die beiden anderen Widerstände der Sternschaltung als

$$\boxed{R_2 = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},} \tag{2.40}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.} \tag{2.41}$$

Jeder der drei Sternwiderstände ergibt sich also aus dem Produkt der beiden jeweils anliegenden Dreieckwiderstände, dividiert durch den Umfangswiderstand des Dreiecks.

Bei **symmetrischer Sternschaltung** mit

$$R_{12} = R_{23} = R_{31} = R_\Delta$$

beträgt jeder Sternwiderstand

$$\boxed{R_* = \frac{R_\Delta^2}{3\,R_\Delta} = \frac{R_\Delta}{3}.} \tag{2.42}$$

Jetzt wollen wir in Bild 2.17 die Sternwiderstände R_1, R_2 und R_3 als bekannt voraussetzen. Gesucht seien die Widerstände R_{12}, R_{23} und R_{31} der elektrisch gleichwertigen Dreieckschaltung. Zur Ermittlung der dann geltenden Umrechnungsgleichungen stellen wir Gl. (2.40) so um, dass sich die Form

$$R_{12} = R_2 + \frac{R_{12}\,R_2}{R_{23}} + \frac{R_{31}\,R_2}{R_{23}} \tag{2.43}$$

ergibt. Entsprechend erhalten wir aus Gl. (2.41)

$$R_{23} = R_3 + \frac{R_{12}\,R_3}{R_{31}} + \frac{R_{23}\,R_3}{R_{31}} \tag{2.44}$$

und aus Gl. (2.39)

$$R_{31} = R_1 + \frac{R_{23}\,R_1}{R_{12}} + \frac{R_{31}\,R_1}{R_{12}}. \tag{2.45}$$

Weiterhin finden wir aus den Gln. (2.39) bis (2.41), wenn wir jeweils zwei Gleichungen durcheinander dividieren,

$$\frac{R_{12}}{R_{23}} = \frac{R_1}{R_3}, \qquad \frac{R_{23}}{R_{31}} = \frac{R_2}{R_1}, \qquad \frac{R_{31}}{R_{12}} = \frac{R_3}{R_2}.$$

Setzen wir diese Gleichungen schließlich in die Gln. (2.43) bis (2.45) ein, so ergeben sich die für eine Stern-Dreieck-Umwandlung nach Bild 2.17 geltenden Beziehungen

$$\boxed{R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1\,R_2}{R_3},} \tag{2.46}$$

$$\boxed{R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2\,R_3}{R_1},} \tag{2.47}$$

$$\boxed{R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3\,R_1}{R_2}.} \tag{2.48}$$

2.2.4 Netzwerkberechnung bei Schaltungen mit einer Spannungsquelle

Die Berechnung von Strömen und Spannungen (oder anderer Größen wie Leistungen, Widerstände) in einer beliebigen elektrischen Schaltung bezeichnet man als **Netzwerkberechnung.** Die Durchführung einer einfachen Netzwerkberechnung sei an der in Bild 2.18a dargestellten Schaltung erläutert. Wir setzen die Versorgungsspannung U und die Widerstände R_1 bis R_3 als bekannt voraus. Gesucht seien die Ströme I_1, I_2 und I_3 sowie die Teilspannung U_{23}.

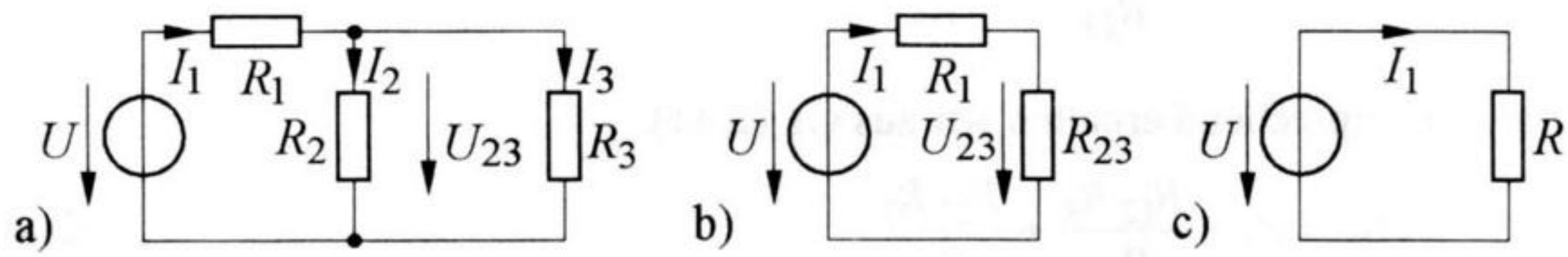


Bild 2.18 Beispiel eines einfachen Netzwerkes. a) Tatsächliche Schaltung, b) und c) elektrisch gleichwertige Ersatzschaltungen

Zur Lösung der Aufgabe fassen wir zunächst die Widerstände R_1, R_2 und R_3 *schrittweise* zusammen. So können in Bild 2.18a die parallel liegenden Widerstände R_2 und R_3 durch

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

ersetzt werden. Es entsteht die Schaltung nach Bild 2.18b. Darin liegen jetzt wiederum die Widerstände R_1 und R_{23} in Reihe. Fassen wir diese Widerstände zusammen, so erhalten wir die Schaltung nach Bild 2.18c, wobei

$$R = R_1 + R_{23} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \tag{2.49}$$

den *Gesamtwiderstand* darstellt. Damit beträgt der Gesamtstrom

$$I_1 = \frac{U}{R}.$$

Zur Bestimmung der übrigen gesuchten Größen wird die vereinfachte, in Bild 2.18c dargestellte Schaltung wieder schrittweise auf den ursprünglich vorhandenen Zustand zurückgeführt. So folgt zum Beispiel aus Bild 2.18b für die an den Widerständen R_2 und R_3 liegende Teilspannung

$$U_{23} = I_1 R_{23} = I_1 \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Damit ergeben sich aus Bild 2.18a die Teilströme

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2}, \tag{2.50}$$

$$I_3 = \frac{U_{23}}{R_3}. \tag{2.51}$$

Nach diesem Verfahren der schrittweisen Vereinfachung einer Schaltung und der anschließenden schrittweisen Zurückführung auf den ursprünglichen Zustand lassen sich grundsätzlich alle Netzwerke berechnen, die nur *eine* Spannungsquelle enthalten. Dabei kann es allerdings gegebenenfalls erforderlich sein, zusätzlich *Stern-Dreieck-* oder *Dreieck-Stern-Umwandlungen*, wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, vorzunehmen, falls eine Vereinfachung sonst nicht möglich ist.

Enthält ein Netzwerk jedoch mehr als eine Spannungsquelle, so lässt sich das beschriebene Verfahren in der Regel nicht anwenden. Das bedeutet aber nicht, dass nicht einzelne Zweige, die keine Spannungsquellen enthalten, in der angegebenen Weise vereinfacht werden können.

Aufgabe 2.8

Die in Bild 2.19a dargestellte Schaltung mit den Widerständen $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 10\ \Omega$ und $R_4 = 50\ \Omega$ liegt an der Spannung $U = 12$ V.

Es sind die Ströme I_1, I_2 und I_3 zu bestimmen.

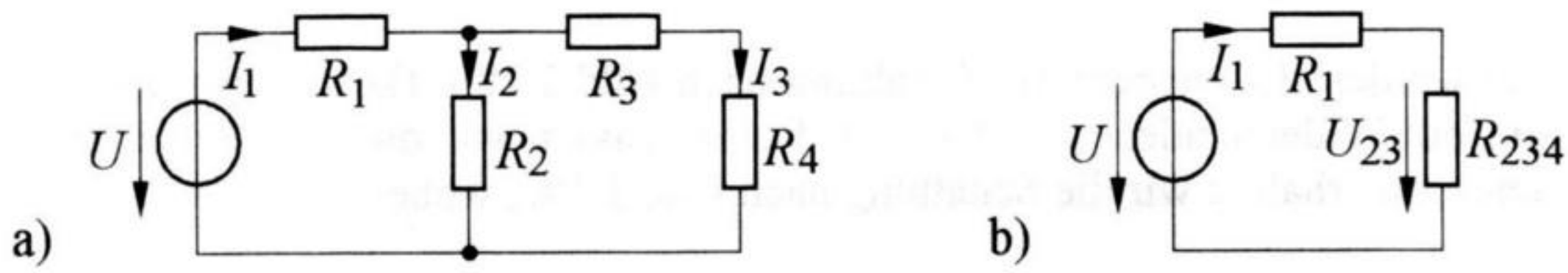


Bild 2.19 Einfaches Beispiel zur Netzwerkberechnung. a) Tatsächliche Schaltung, b) elektrisch gleichwertige Ersatzschaltung

Lösung

In Bild 2.19a liegen die Widerstände R_3 und R_4 in Reihe, so dass deren Gesamtwiderstand

$$R_{34} = R_3 + R_4 = 10\ \Omega + 50\ \Omega = 60\ \Omega$$

beträgt. Parallel zu dieser Reihenschaltung liegt der Widerstand R_2. Daher hat die aus R_2, R_3 und R_4 bestehende Anordnung den Widerstand

$$R_{234} = \frac{R_2\, R_{34}}{R_2 + R_{34}} = \frac{30 \cdot 60}{30 + 60}\ \Omega = 20\ \Omega.$$

Wir erhalten die in Bild 2.19b dargestellte Ersatzschaltung, aus der für den Gesamtstrom folgt

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R_{234}} = \frac{12\ \text{V}}{(20 + 20)\ \Omega} = \underline{0{,}30\ \text{A}}.$$

Damit ergibt sich aus Bild 2.19b die Teilspannung

$$U_{23} = I_1\, R_{234} = 0{,}30\ \text{A} \cdot 20\ \Omega = 6{,}0\ \text{V}.$$

Sie ermöglicht in Bild 2.19a die Berechnung der Teilströme

$$I_2 = \frac{U_{23}}{R_2} = \frac{6{,}0\ \text{V}}{30\ \Omega} = \underline{0{,}20\ \text{A}},$$

$$I_3 = I_1 - I_2 = (0{,}30 - 0{,}20)\ \text{A} = \underline{0{,}10\ \text{A}}.$$

Aufgabe 2.9

Die in Bild 2.20a dargestellte Schaltung liegt an der Spannung $U = 12$ V. Die Widerstände betragen $R_1 = R_4 = R_5 = 9\ \Omega$ und $R_2 = R_3 = R_6 = 18\ \Omega$.

Wie groß ist die Spannung U_x?

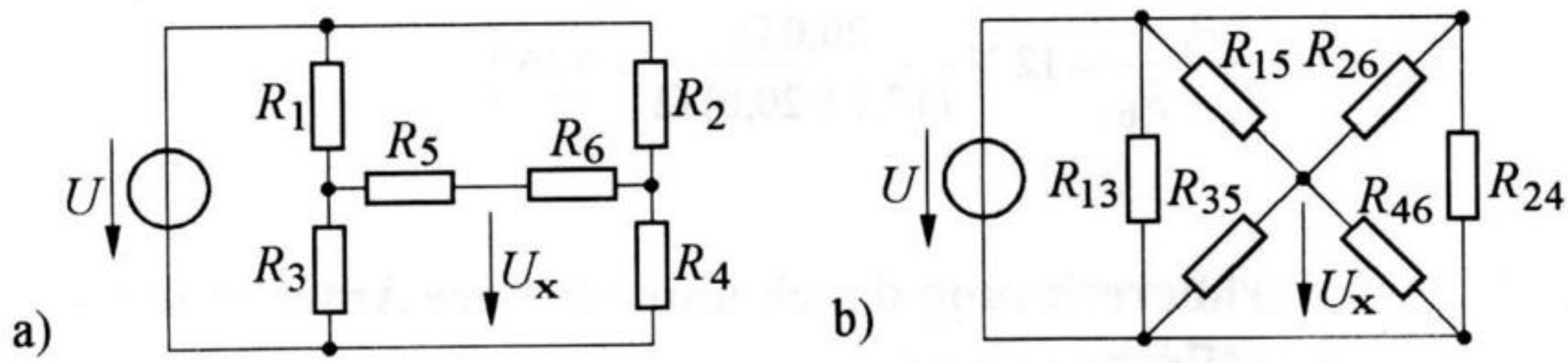


Bild 2.20 Schaltungsbeispiel zur Netzwerkberechnung. a) Tatsächliche Schaltung, b) elektrisch gleichwertige Ersatzschaltung

Lösung

Zur Berechnung der gesuchten Spannung wandeln wir die aus den Widerständen R_1, R_3 und R_5 bestehende Sternschaltung in eine elektrisch gleichwertige Dreieckschaltung um. Die gleiche Umwandlung nehmen wir für die aus den Widerständen R_2, R_4 und R_6 gebildete Sternschaltung vor. Auf diese Weise erhalten wir die in Bild 2.20b dargestellte Anordnung. Aus ihr ersehen wir, dass R_{13} und R_{24} keinen Einfluss auf die Höhe der Spannung U_x haben. Es brauchen also nur die übrigen Widerstände berechnet zu werden. Nach den Gln. (2.46) bis (2.48) erhalten wir

$$R_{15} = R_1 + R_5 + \frac{R_1 R_5}{R_3} = 9\,\Omega + 9\,\Omega + \frac{9 \cdot 9}{18}\,\Omega = 22{,}5\,\Omega,$$

$$R_{35} = R_3 + R_5 + \frac{R_3 R_5}{R_1} = 18\,\Omega + 9\,\Omega + \frac{18 \cdot 9}{9}\,\Omega = 45{,}0\,\Omega,$$

$$R_{26} = R_2 + R_6 + \frac{R_2 R_6}{R_4} = 18\,\Omega + 18\,\Omega + \frac{18 \cdot 18}{9}\,\Omega = 72{,}0\,\Omega,$$

$$R_{46} = R_4 + R_6 + \frac{R_4 R_6}{R_2} = 9\,\Omega + 18\,\Omega + \frac{9 \cdot 18}{18}\,\Omega = 36{,}0\,\Omega.$$

R_{15} und R_{26} liegen parallel zueinander. Das Gleiche gilt für R_{35} und R_{46}. Daher ergibt sich mit

$$R_a = \frac{R_{15} R_{26}}{R_{15} + R_{26}} = \frac{22{,}5 \cdot 72{,}0}{22{,}5 + 72{,}0}\,\Omega = 17{,}1\,\Omega$$

und

$$R_b = \frac{R_{35}\,R_{46}}{R_{35} + R_{46}} = \frac{45{,}0 \cdot 36{,}0}{45{,}0 + 36{,}0}\,\Omega = 20{,}0\,\Omega$$

die gesuchte Spannung als

$$U_x = U\,\frac{R_b}{R_a + R_b} = 12\text{ V}\,\frac{20{,}0\,\Omega}{(17{,}1 + 20{,}0)\,\Omega} = \underline{6{,}46\text{ V}}.$$

2.2.5 Netzwerkberechnung durch unmittelbare Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze

Das nachfolgend beschriebene Verfahren zur Berechnung von Netzwerken sei am Beispiel der in Bild 2.21a dargestellten Schaltung erläutert. Wir setzen die von den beiden Spannungsquellen gelieferten Spannungen U_1 und U_2 sowie die Widerstände R_1, R_2 und R_3 als bekannt voraus. Gesucht seien die in der Schaltung auftretenden Ströme.

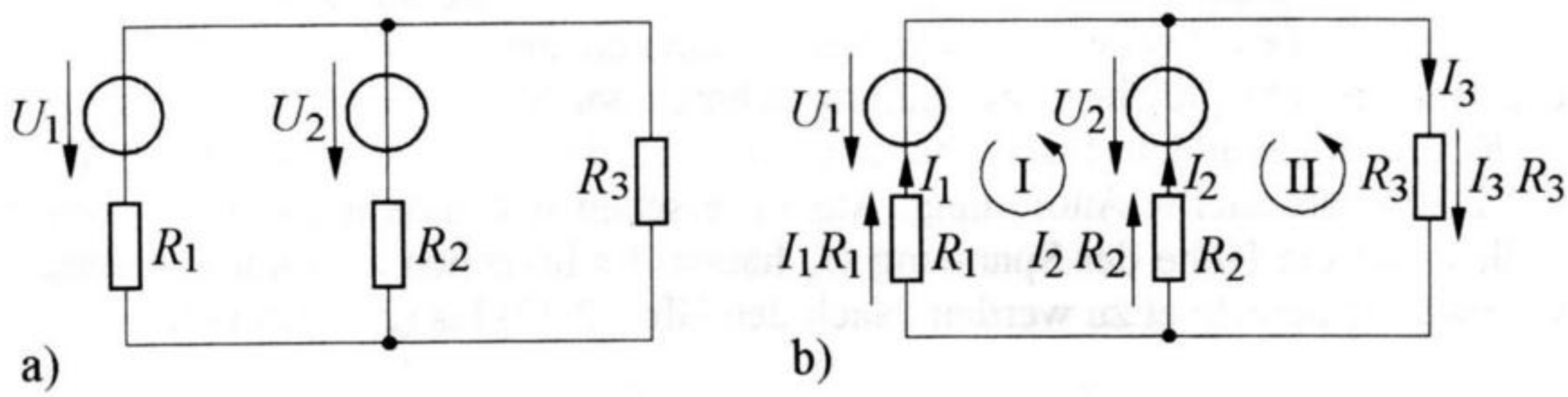


Bild 2.21 Schaltungsbeispiel zur Netzwerkberechnung durch Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze. a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit eingetragenen Bezugs- und Umlaufpfeilen

Man bezeichnet die zu bestimmenden Ströme auch als **Zweigströme**, da sie in den **Zweigen** des Netzwerkes fließen. Aus Bild 2.21a ist ersichtlich, dass die Schaltung drei Zweige enthält. Die an den Zweigen liegenden Spannungen heißen (allgemein) **Zweigspannungen**. In Bild 2.21a gibt es nur *eine* Zweigspannung, die an allen drei Zweigen anliegt. Das ist die zwischen den beiden vorhandenen Knotenpunkten liegende Spannung.

Zur Lösung der Aufgabe führen wir für die gesuchten Ströme Bezeichnungen ein und wählen hierfür die Symbole I_1, I_2 und I_3. Weiterhin geben wir für die Ströme Bezugspfeile mit beliebig angenommen Richtungen vor (vergl. Abschnitt 2.1.11) und tragen diese entsprechend Bild 2.21b in die gegebene Schaltung ein.

Die Richtungspfeile (Bezugspfeile) der Spannungen $I_1\ R_1$, $I_2\ R_2$ und $I_3\ R_3$ wählen wir in Bild 2.21b so, dass sie den vorgegebenen Stromrichtungen nach

dem in Abschnitt 2.1.11 beschriebenen **Verbraucher-Pfeilsystem** zugeordnet sind. Die Spannungspfeile erhalten also die gleiche Richtung wie die entsprechenden Strompfeile. Bei dieser Zuordnung sind für $I_1\ R_1$, $I_2\ R_2$ und $I_3\ R_3$ positive Vorzeichen zu verwenden. Bei anderer Pfeilzuordnung (Erzeuger-Pfeilsystem) sind negative Vorzeichen einzusetzen.

Nach dem Eintragen der Bezugspfeile stellt man mit Hilfe der Kirchhoff'schen Gesetze so viel Gleichungen auf, wie unbekannte Ströme vorhanden sind, im vorliegenden Fall also drei. Wir wollen mit der Anwendung des ersten Kirchhoff'schen Gesetzes beginnen. Dabei gilt (allgemein):

In einem beliebigen elektrischen Netzwerk mit k Knoten kann man stets $(k - 1)$ voneinander unabhängige Knotengleichungen aufstellen.

In Bild 2.21 ist $k = 2$, so dass nur *eine* Knotengleichung angegeben werden kann. Sie lautet bei den für die Ströme eingetragenen Bezugspfeilen

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0. \tag{2.52}$$

Die übrigen Gleichungen findet man durch Anwendung des zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes, also durch das Aufstellen von Maschengleichungen (bzw. Umlaufgleichungen). Hier zeigt sich (allgemein):

In einem beliebigen elektrischen Netzwerk mit m Maschen lassen sich m voneinander unabhängige Maschengleichungen (bzw. Umlaufgleichungen) aufstellen.

Im vorliegenden Fall ist $m = 2$. Aus Bild 2.21b erhalten wir bei dem angegebenen (gewählten) Umlaufsinn für die Maschen I und II die Maschengleichungen

$$U_1 - I_1 R_1 + I_2 R_2 - U_2 = 0, \tag{2.53}$$

$$U_2 - I_2 R_2 - I_3 R_3 = 0. \tag{2.54}$$

Ordnen wir die Gln. (2.52) bis (2.54) nach den drei Unbekannten I_1, I_2 und I_3, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 \quad + \quad I_2 \quad - \quad I_3 \quad &= \quad 0 \\ R_1 I_1 \quad - \quad R_2 I_2 \quad\quad\quad &= \quad U_1 - U_2 \\ R_2 I_2 \quad + \quad R_3 I_3 \quad &= \quad U_2 \end{aligned}$$

Dieses können wir in der **Matrizenschreibweise** folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & -R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_1 - U_2 \\ U_2 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

Aus diesem Gleichungssystem lassen sich die gesuchten Ströme I_1, I_2 und I_3 bestimmen. Ergeben sich dabei für einzelne Ströme negative Werte, so stimmt der Richtungssinn dieser Ströme nicht mit der gewählten Richtung der zugehörigen Bezugspfeile überein.

Mit dem beschriebenen Verfahren können grundsätzlich beliebige Netzwerke berechnet werden. Enthält eine Schaltung jedoch sehr viele Zweige, so ist auch eine entsprechend hohe Anzahl von Gleichungen aufzustellen. Daher wird das Verfahren im Allgemeinen nur bei relativ einfach aufgebauten Netzwerken angewendet.

Aufgabe 2.10

Die in Bild 2.22a dargestellte Schaltung enthält drei Spannungsquellen, die die Spannungen $U_1 = 36$ V, $U_2 = 24$ V und $U_3 = 12$ V liefern. Die Widerstände betragen $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 25\ \Omega$ und $R_3 = 30\ \Omega$.

Es sind alle auftretenden Ströme zu bestimmen.

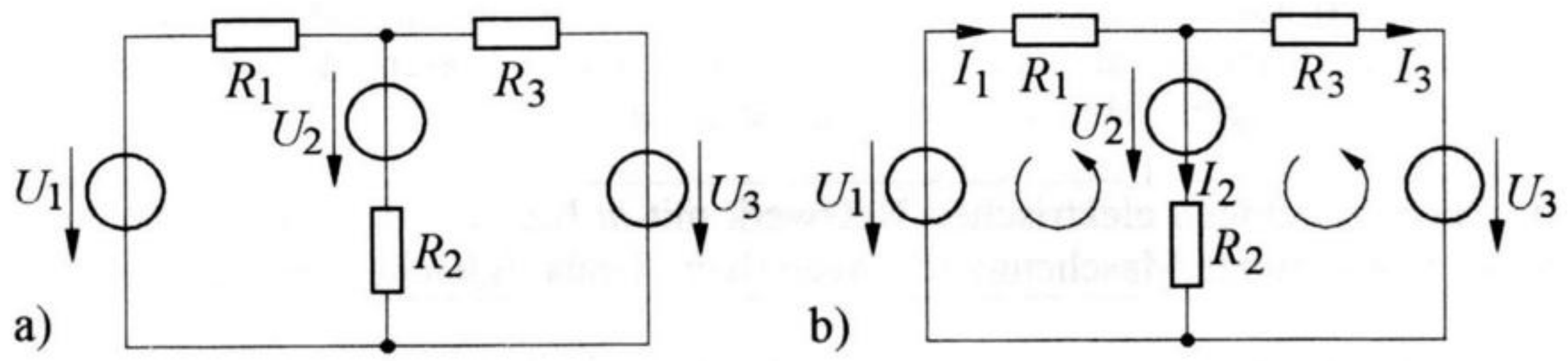


Bild 2.22 Netzwerk mit drei Spannungsquellen. a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit eingetragenen Stromrichtungen (Bezugspfeile) und eingetragenem Umlaufsinn

Lösung

Wir lösen die Aufgabe durch unmittelbare Anwendung der Kirchhoff'schen Gesetze. Dazu geben wir zunächst für die Ströme Bezugspfeile vor und tragen sie - beispielsweise so wie in Bild 2.22b dargestellt - in die gegebene Schaltung ein. Die Anordnung enthält $k = 2$ Knotenpunkte. Das bedeutet, dass wegen $(k - 1) = 1$ nur *eine* Knotengleichung aufgestellt werden kann. Sie lautet

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \tag{2.56}$$

Die Zahl der Maschen beträgt $m = 2$. Es können daher zwei voneinander unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden. Diese lauten - bei dem in Bild 2.22b eingetragenen (gewählten) Umlaufsinn - für die linke Masche

$$U_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - U_2 = 0 \tag{2.57}$$

und für die rechte

$$U_2 + I_2 R_2 - I_3 R_3 - U_3 = 0. \tag{2.58}$$

Setzen wir in die Gln. (2.56) bis (2.58) die gegebenen Werte ein und stellen dann das sich so ergebende Gleichungssystem in *Matrizenschreibweise* dar, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 20 & 25 & 0 \\ 0 & -25 & 30 \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} \text{V}. \tag{2.59}$$

Die Lösungen ermittelt man zweckmäßigerweise direkt mit einem geeigneten Taschenrechner. Man erhält die Ergebnisse

$$I_1 = \underline{519\ \text{mA}}, \quad I_2 = \underline{65\ \text{mA}}, \quad I_3 = \underline{454\ \text{mA}}.$$

Da alle Werte positiv sind, stimmt der Richtungssinn der Ströme mit den Richtungen der in Bild 2.22b eingetragenen Bezugspfeile überein.

2.2.6 Netzwerkberechnung nach dem Maschenstromverfahren

Die Berechnung von Netzwerken lässt sich durch die Einführung von **Maschenströmen** vereinfachen. Wir wollen zunächst Schaltungen untersuchen, die nur relativ wenig Maschen enthalten und betrachten dazu als Beispiel die in Bild 2.23a dargestellte Anordnung mit drei Maschen.

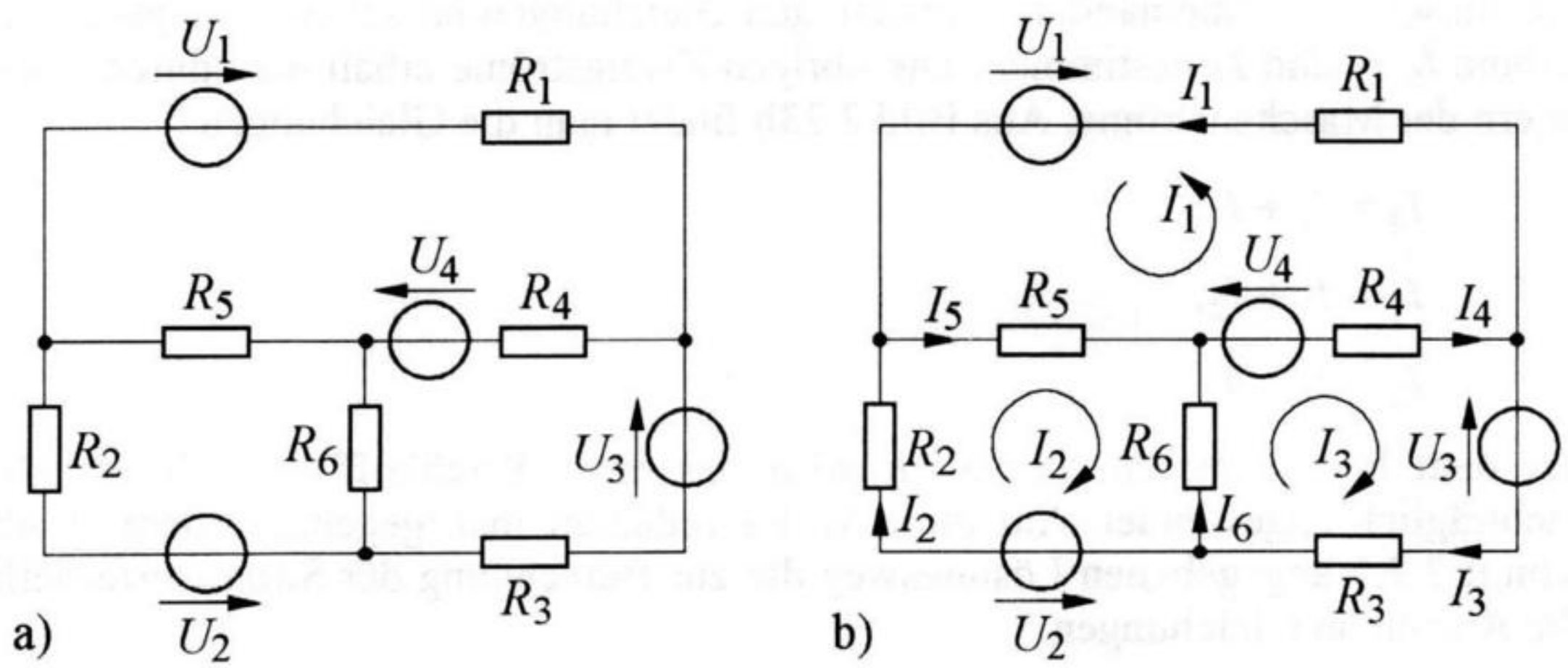


Bild 2.23 Schaltungsbeispiel zur Netzwerkberechnung mit Maschenströmen.
a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit eingetragenen Bezugspfeilen für die Zweig- und Maschenströme

Die Quellenspannungen U_1 bis U_4 sowie die Widerstände R_1 bis R_6 setzen wir als bekannt voraus. Gesucht seien alle auftretenden Zweigströme. Wir geben zunächst, wie in Bild 2.23b schon dargestellt, die Richtungen der gesuchten Zweigströme (I_1 bis I_6) willkürlich vor (Bezugspfeile). Die Zweigströme I_1, I_2 und I_3 fassen wir darüber hinaus gleichzeitig als **Maschenströme** auf, die ausschließlich jeweils eine Masche durchfließen. Sind sie bekannt, so lassen sich alle übrigen Zweigströme in einfacher Weise bestimmen.

Zur Ermittlung der Ströme I_1, I_2 und I_3 werden drei *Maschengleichungen* aufgestellt. Wählt man dafür in Bild 2.23b den Umlaufsinn so, dass er mit den eingetragenen Richtungen der betreffenden Maschenströme übereinstimmt, so erhalten wir für die obere Masche

$$-U_1 + (I_1 + I_2)R_5 - U_4 + (I_1 + I_3)R_4 + I_1 R_1 = 0, \tag{2.60}$$

für die linke untere

$$-U_2 + I_2 R_2 + (I_2 + I_1)R_5 + (I_2 - I_3)R_6 = 0 \tag{2.61}$$

und für die rechte untere Masche

$$-U_3 + I_3 R_3 + (I_3 - I_2)R_6 - U_4 + (I_3 + I_1)R_4 = 0. \tag{2.62}$$

Aus den Gln. (2.60) bis (2.62) wird, wenn wir nach den unbekannten Strömen ordnen,

$$(R_1 + R_4 + R_5)I_1 + R_5 I_2 + R_4 I_3 = U_1 + U_4, \tag{2.63}$$

$$R_5 I_1 + (R_2 + R_5 + R_6)I_2 - R_6 I_3 = U_2, \tag{2.64}$$

$$R_4 I_1 - R_6 I_2 + (R_3 + R_4 + R_6)I_3 = U_3 + U_4. \tag{2.65}$$

Aus diesen drei voneinander unabhängigen Gleichungen lassen sich die gesuchten Ströme I_1, I_2 und I_3 bestimmen. Die übrigen Zweigströme erhält man durch Überlagern der Maschenströme. Aus Bild 2.23b findet man die Gleichungen

$$I_4 = I_1 + I_3,$$

$$I_5 = I_1 + I_2,$$

$$I_6 = I_3 - I_2.$$

Bei dem beschriebenen Verfahren wird das erste Kirchhoff'sche Gesetz also nachträglich angewendet. Auf diese Weise reduziert man gegenüber dem in Abschnitt 2.2.5 angegebenen Lösungsweg die zur Berechnung der Ströme erforderliche Anzahl an Gleichungen.

Das Schema zum Aufstellen der Maschengleichungen

Es zeigt sich, dass das durch die Gln. (2.63) bis (2.65) dargestellte Gleichungssystem auch direkt (ohne die in den Gln. (2.60) bis (2.62) angegebenen Zwischen-

schritte) aufgestellt werden kann. Dazu stellen wir zunächst das in den Gln. (2.63) bis (2.65) angegebene Gleichungssystem in **Matrizenschreibweise** dar und erhalten dadurch

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_4+R_5) & R_5 & R_4 \\ R_5 & (R_2+R_5+R_6) & -R_6 \\ R_4 & -R_6 & (R_3+R_4+R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1+U_4 \\ U_2 \\ U_3+U_4 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

Das hierin auf der linken Seite aus den Widerständen gebildete Koeffizientenschema heißt **Widerstandsmatrix**. Darin wird die **Hauptdiagonale** aus den **Umlaufwiderständen** gebildet. Unter einem Umlaufwiderstand versteht man denjenigen Widerstand, den ein Maschenstrom in seinem Umlauf vorfindet. So findet der Maschenstrom I_1 in Bild 2.23b den Umlaufwiderstand $(R_1 + R_4 + R_5)$ vor. Entsprechend stellen $(R_2 + R_5 + R_6)$ den Umlaufwiderstand des Maschenstromes I_2 dar und $(R_3 + R_4 + R_6)$ den Umlaufwiderstand des Maschenstromes I_3.

Die übrigen in der Widerstandsmatrix von Gl. (2.66) enthaltenen Widerstände heißen **Kopplungswiderstände**. Ein Kopplungswiderstand ist dadurch gekennzeichnet, dass er noch zu einer weiteren Masche gehört und somit auch von einem weiteren Maschenstrom (oder von mehreren anderen Umlaufströmen) durchflossen wird. So wird beispielsweise in Bild 2.23b der Kopplungswiderstand R_5 außer von dem Maschenstrom I_1 auch noch von dem Maschenstrom I_2 durchflossen.

Soll nun für eine Schaltung das Gleichungssystem direkt aufgestellt werden, so geht man nach folgenden Schema vor:

- In die gegebene Schaltung werden *Maschenströme* eingetragen. Ihre Zahl muss gleich der Zahl der vorhandenen Maschen sein. In Bild 2.23b sind das die Ströme I_1, I_2 und I_3. Sie bilden in dem aufzustellenden Gleichungssystem die Unbekannten (vergl. Gl. (2.66)).
- Der Umlaufwiderstand einer Masche tritt als Koeffizient für den zugehörigen Maschenstrom auf. So steht in Gl. (2.66) in der ersten Zeile bei dem Maschenstrom I_1 der Umlaufwiderstand $(R_1 + R_4 + R_5)$.
- Die Koeffizienten für die anderen Maschenströme sind die Kopplungswiderstände. Ihr Vorzeichen ist positiv, wenn die Maschenströme in den betreffenden Kopplungswiderständen den gleichen Bezugssinn haben, andernfalls negativ. So steht in der Widerstandsmatrix von Gl. (2.66) in der ersten Zeile bei dem Maschenstrom I_2 der Kopplungswiderstand R_5 und bei dem Maschenstrom I_3 der Kopplungswiderstand R_4.
- Auf der rechten Seite des Gleichungssystems steht die Summe der Quellenspannungen, die in der betreffenden Masche auftreten. Jede Quellenspannung erhält hierbei ein Minuszeichen, wenn ihr Richtungssinn mit der Richtung des Maschenstromes übereinstimmt, andernfalls ein Pluszeichen. So steht in Gl. (2.66) in der ersten Zeile auf der rechten Seite die Spannung $(U_1 + U_4)$.

Bei dem in Gl. (2.66) dargestellten Gleichungssystem fällt noch auf, dass in der Widerstandsmatrix die Kopplungswiderstände symmetrisch zur Hauptdiagonalen liegen. Diese (allgemein gültige) Tatsache kann als (eine) Kontrollmöglichkeit zur Überprüfung der Richtigkeit des Gleichungssystems genutzt werden.

Behandlung von Stromquellen

Enthält eine Schaltung in einzelnen Zweigen (widerstandsbehaftete) Stromquellen, so wandelt man diese zweckmäßigerweise nach Bild 2.24 in äquivalente (widerstandsbehaftete) Spannungsquellen um.

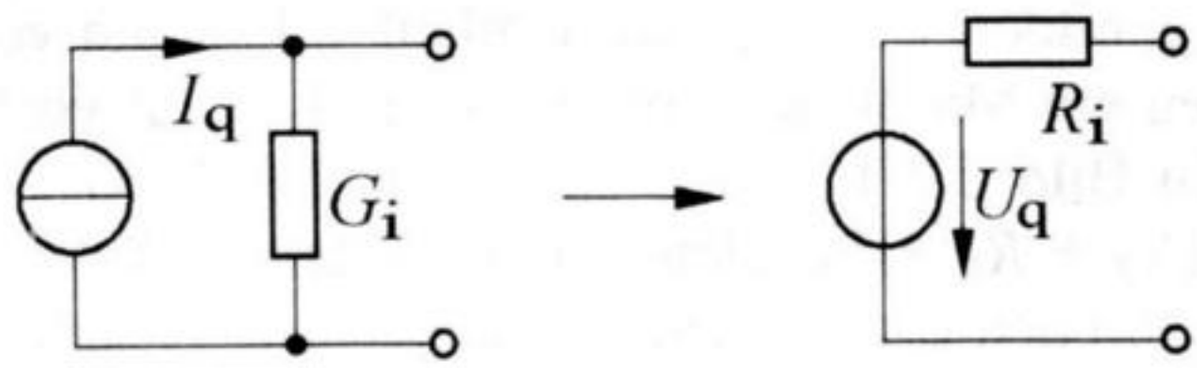


Bild 2.24 Umwandlung einer (widerstandsbehafteten) Stromquelle in eine äquivalente Spannungsquelle

Nach Gl. (2.22) gelten hierbei die Beziehungen

$$U_q = I_q \frac{1}{G_i}, \tag{2.67}$$

$$R_i = \frac{1}{G_i}. \tag{2.68}$$

Darin sind I_q der Quellenstrom und G_i der innere Leitwert der Stromquelle. Enthält ein Netzwerk **ideale Stromquellen**, so ist eine Umwandlung in Spannungsquellen in der beschriebenen Form nicht möglich. In diesem Fall sollte die Wahl der Maschenströme stets so vorgenommen werden, dass der betreffende Quellenstrom unbedingt auch einen Maschenstrom darstellt. Da dieser dann bekannt ist, wird das Gleichungssystem der Schaltung insgesamt einfacher. Wir wollen dies am Beispiel der in Bild 2.25a dargestellten Schaltung näher untersuchen.

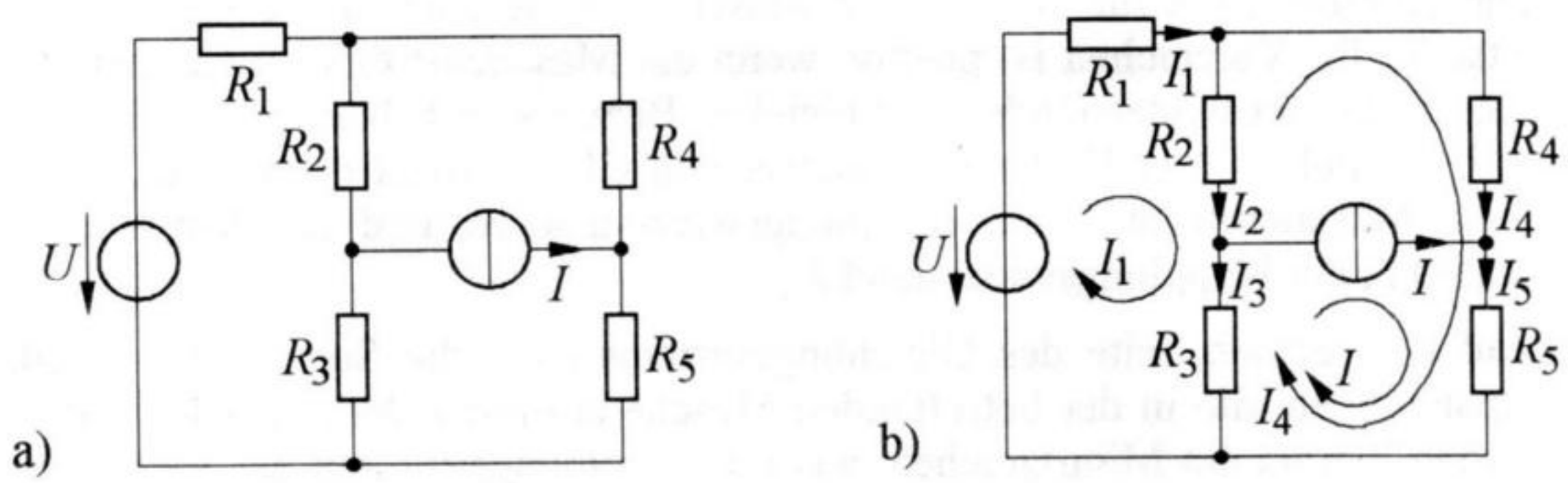


Bild 2.25 Zur Berechnung von Netzwerken, die eine ideale Stromquelle enthalten.
a) Gegebene Schaltung, b) Wahl der Maschenströme

Gegeben seien die Widerstände R_1 bis R_5, die Quellenspannung U und der Quellenstrom I. Gesucht seien alle auftretenden Zweigströme. Wir geben, wie in Bild 2.25b dargestellt, für die gesuchten Zweigströme (I_1 bis I_5) willkürlich Bezugspfeile vor. Die Ströme I_1, I_4 und I fassen wir gleichzeitig als Maschenströme (Umlaufströme) auf und wählen hierfür die dargestellten Umlaufwege. Dabei achten wir darauf, dass die ideale Stromquelle nicht von mehreren Umlaufströmen durchflossen wird.

Da der Maschenstrom I bereits bekannt ist, stellen wir nur für die beiden anderen Maschenströme (I_1 und I_4) die Maschengleichungen auf. Wir erhalten hierfür in Matrizenschreibweise, wenn wir die auf Seite 47 angegebenen Regeln anwenden,

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -(R_2+R_3) & -R_3 \\ -(R_2+R_3) & (R_2+R_3+R_4+R_5) & (R_3+R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.69}$$

Wir bringen die (bekannten) Ausdrücke $(-R_3\,I)$ und $(R_3+R_5)\,I$ auf die rechte Gleichungsseite und erhalten

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3) & -(R_2+R_3) \\ -(R_2+R_3) & (R_2+R_3+R_4+R_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U+R_3\,I \\ -(R_3+R_5)\,I \end{bmatrix}. \tag{2.70}$$

Hieraus lassen sich die Ströme I_1 und I_4 in einfacher Weise bestimmen. Für die übrigen Zweigströme finden wir aus Bild 2.25b die Gleichungen

$$I_2 = I_1 - I_4,$$

$$I_3 = I_1 - I_4 - I,$$

$$I_5 = I_4 + I.$$

Das Vorhandensein von idealen Stromquellen erweist sich also als Vorteil. Denn obwohl das in Bild 2.25a dargestellte Netzwerk *drei* Maschen besitzt, entsteht zur Bestimmung der Maschenströme nur ein Gleichungssystem mit *zwei* Unbekannten.

Behandlung größerer Netzwerke

Enthält ein Netzwerk viele Maschen, so ist - damit der Überblick nicht verloren geht - ein systematisches Vorgehen beim Aufstellen der Gleichungen notwendig. Für den dann zweckmäßigerweise zu beschreitenden Lösungsweg betrachten wir als Beispiel die in Bild 2.26a dargestellte Schaltung. Gegeben seien die Quellenspannungen U_1 und U_2 sowie die Widerstände R_1 bis R_6. Die Zweigströme I_1 bis I_6, deren Bezugspfeile bereits eingetragen sind, seien gesucht.

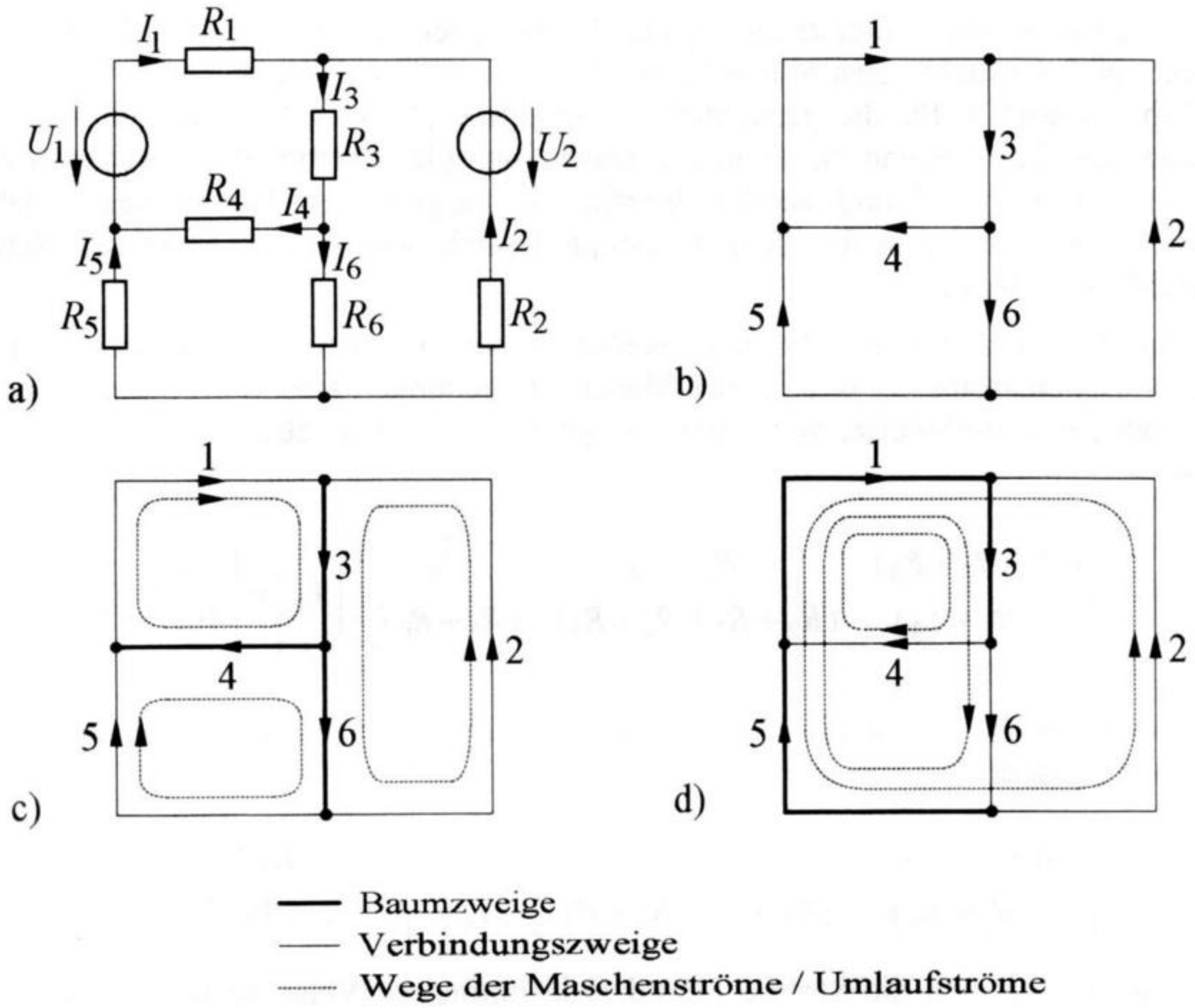


Bild 2.26 Schaltungsbeispiel zur Netzwerkberechnung. a) Gegebene Schaltung, b) zugehöriger Graph, c) und d) Lösungsbeispiele für die Wahl des vollständigen Baumes (jeweils mit Angabe der Wege der Maschenströme / Umlaufströme)

Wir bilden zunächst den **Graph** des Netzwerkes. Darunter versteht man nach Bild 2.26b eine vereinfachte Darstellung, in der jeder Zweig lediglich durch eine Linie angegeben wird. Die Bezugspfeile der Zweigströme tragen wir in diese Darstellung mit ein und versehen die Zweige mit den Ziffern 1 bis 6.

Jetzt tragen wir in den Graph nach Bild 2.26c einen **vollständigen Baum** ein. Darunter versteht man einen Linienzug, durch den sämtliche Knoten des Netzwerkes miteinander verbunden werden, ohne dass geschlossene Schleifen entstehen. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten, von denen Bild 2.26d eine weitere von mehreren zeigt. In Bild 2.26c wird der vollständige Baum durch die Zweige 3, 4 und 6 gebildet, und in Bild 2.26d sind es die Zweige 1, 3 und 5. Die Zweige des vollständigen Baumes nennt man **Baumzweige**, die übrigen im Netzwerk vorhandenen Zweige heißen **Verbindungszweige**.

Die in den *Verbindungszweigen* fließenden Ströme fassen wir als *Maschenströme* (Umlaufströme) auf und achten darauf, dass jeder so gewählte Umlauf-

strom keine weiteren Verbindungszweige durchfließt. In den Bildern 2.26c und 2.26d sind die jeweils sich ergebenden Wege der Umlaufströme eingetragen.

Jetzt können wir die Maschengleichungen aufstellen. So lautet das Gleichungssystem (in Matrizenschreibweise), das zu der in Bild 2.26c angegebenen Darstellung gehört, wenn wir die auf Seite 47 beschriebenen Regeln anwenden,

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_3+R_4) & R_3 & -R_4 \\ R_3 & (R_2+R_3+R_6) & R_6 \\ -R_4 & R_6 & (R_4+R_5+R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.71}$$

Hieraus lassen sich die Ströme I_1, I_2 und I_5 bestimmen. Sind sie bekannt, so erhält man die übrigen zu bestimmenden Ströme aus Bild 2.26c durch die Gleichungen

$$I_3 = I_1 + I_2,$$

$$I_4 = I_1 - I_5,$$

$$I_6 = I_2 + I_5.$$

Enthält ein Netzwerk ideale Stromquellen, so muss bei der Wahl des vollständigen Baumes darauf geachtet werden, dass die Stromquellen in Verbindungszweigen (und nicht in Baumzweigen) liegen. Dadurch werden die Quellenströme der idealen Stromquellen in jedem Fall *Maschenströme*.

Ginge man gedanklich von einem Netzwerk aus, bei dem sich in jedem Verbindungszweig eine ideale Stromquelle befände, so ließen sich deren Quellenströme unabhängig voneinander einstellen. Allgemein bezeichnet man daher die in den Verbindungszweigen fließenden Ströme als **unabhängige Ströme.** Im Gegensatz dazu nennt man die in den Baumzweigen fließenden Ströme **abhängige Ströme.**

Bei dem beschriebenen Verfahren, der Einführung eines vollständigen Baumes, wird sichergestellt, dass jeder Verbindungszweig nur von *einem* Maschenstrom durchflossen wird. Daher tritt die an diesem Verbindungszweig liegende Spannung auch nur in der *zugehörigen* Maschengleichung auf, nicht jedoch in den anderen Maschengleichungen. Somit ist gewährleistet, dass die aufgestellten Gleichungen in jedem Fall voneinander unabhängig sind. Vor allem diese Tatsache legt es nahe, bei der Berechnung größerer Netzwerke, das Hilfsmittel „vollständiger Baum" anzuwenden.

Aufgabe 2.11

Die in Bild 2.27a dargestellte Schaltung enthält zwei Spannungsquellen, die die Spannungen U_1 = 48 V und U_2 = 36 V liefern. Die Widerstände betragen $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 35\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$, $R_5 = 50\ \Omega$ und $R_6 = 45\ \Omega$.

Es sind die Zweigströme I_1 bis I_6 zu bestimmen.

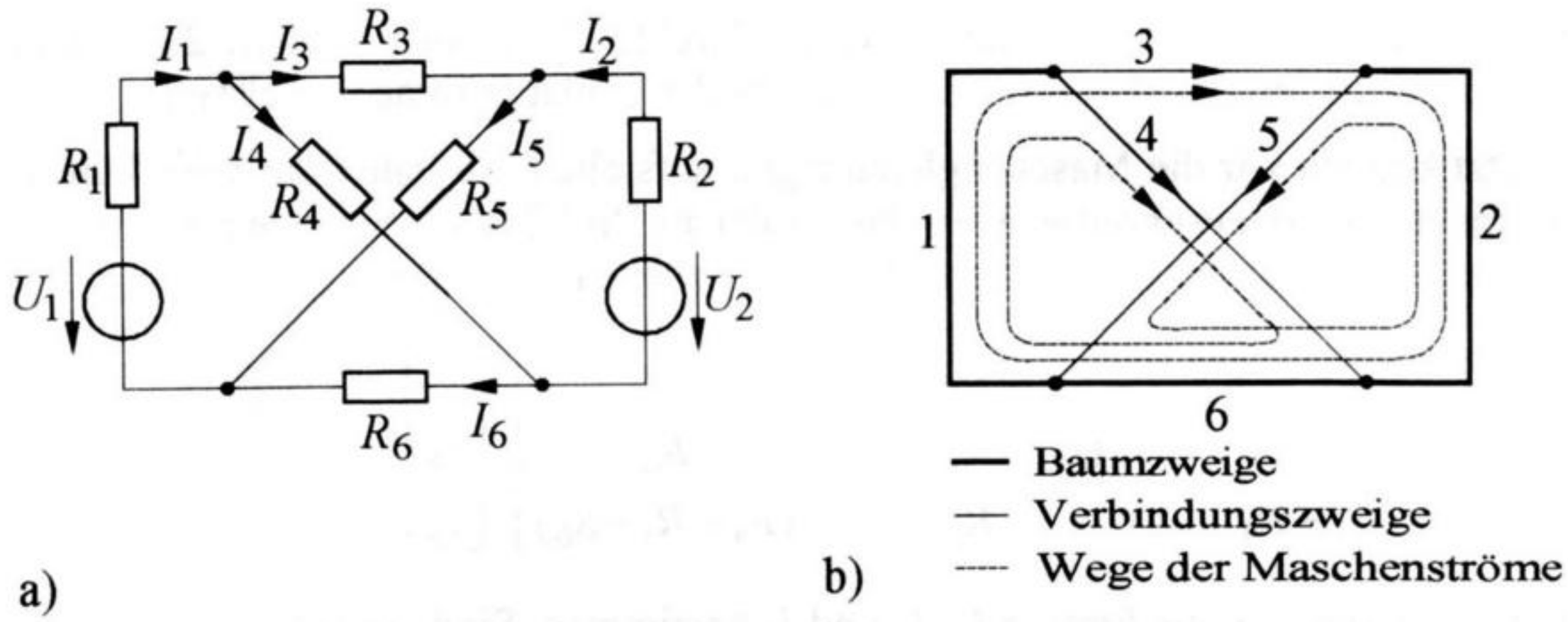


Bild 2.27 Schaltungsbeispiel zur Berechnung von Netzwerken nach dem Maschenstromverfahren. a) Gegebene Schaltung, b) Graph des Netzwerkes mit eingetragenem vollständigen Baum sowie den Wegen der Maschenströme / Umlaufströme

Lösung

Wir zeichnen nach Bild 2.27b zunächst den *Graph* des Netzwerkes und tragen darin den (durch die stark dargestellten Linien gekennzeichneten, willkürlich gewählten) *vollständigen Baum* ein. Damit werden die in den Verbindungszweigen fließenden Ströme I_3, I_4 und I_5 Maschenströme (Umlaufströme). Ihre Wege sind ebenfalls in Bild 2.27b eingetragen. Jetzt können wir nach den auf Seite 47 angegebenen Regeln unmittelbar das Gleichungssystem aufstellen. Wir erhalten (in Matrizenschreibweise)

$$\begin{bmatrix} (R_1+R_2+R_3+R_6) & (R_1+R_6) & -(R_2+R_6) \\ (R_1+R_6) & (R_1+R_4+R_6) & -R_6 \\ -(R_2+R_6) & -R_6 & (R_2+R_5+R_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1-U_2 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}.$$

Setzen wir die gegebenen Werte ein, so ergibt sich

$$\begin{bmatrix} 130 & 65 & -80 \\ 65 & 105 & -45 \\ -80 & -45 & 130 \end{bmatrix} \Omega \cdot \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 48 \\ 36 \end{bmatrix} \mathrm{V}.$$

Die Ergebnisse lauten

$$\underline{I_3 = 137\ \mathrm{mA}}, \qquad \underline{I_4 = 619\ \mathrm{mA}}, \qquad \underline{I_5 = 575\ \mathrm{mA}}.$$

Damit betragen die übrigen Zweigströme in Bild 2.27a

$$I_1 = I_3 + I_4 = \underline{756\ \text{mA}},$$

$$I_2 = I_5 - I_3 = \underline{438\ \text{mA}},$$

$$I_6 = I_3 + I_4 - I_5 = \underline{181\ \text{mA}}.$$

2.2.7 Netzwerkberechnung nach dem Knotenpotenzial-Verfahren

In einem beliebigen Netzwerk kann man jedem einzelnen Knotenpunkt ein bestimmtes **elektrisches Potenzial** zuordnen. Man versteht unter dem Potenzial eines Punktes diejenige elektrische Spannung, die der betreffende Punkt gegenüber einem beliebig wählbaren Bezugspunkt hat.

Wählt man nun *einen* der vorhandenen Knotenpunkte eines Netzwerkes als **Bezugspunkt** und nimmt dessen Potenzial als Null an, so stellen die Potenziale der übrigen Knotenpunkte diejenigen Spannungen dar, die die betreffenden Punkte gegenüber dem gewählten Bezugspunkt haben. Wir wollen diese Spannungen als **Knotenspannungen** bezeichnen. Bei dieser Definition treten in einem beliebigen Netzwerk mit k Knotenpunkten genau (k - 1) Knotenspannungen auf.

Zur weiteren Erläuterung betrachten wir Bild 2.28a. Wir setzen die Quellenspannung U und die Widerstände R_1 bis R_6 als bekannt voraus. Gesucht seien die auftretenden Ströme (Zweigströme).

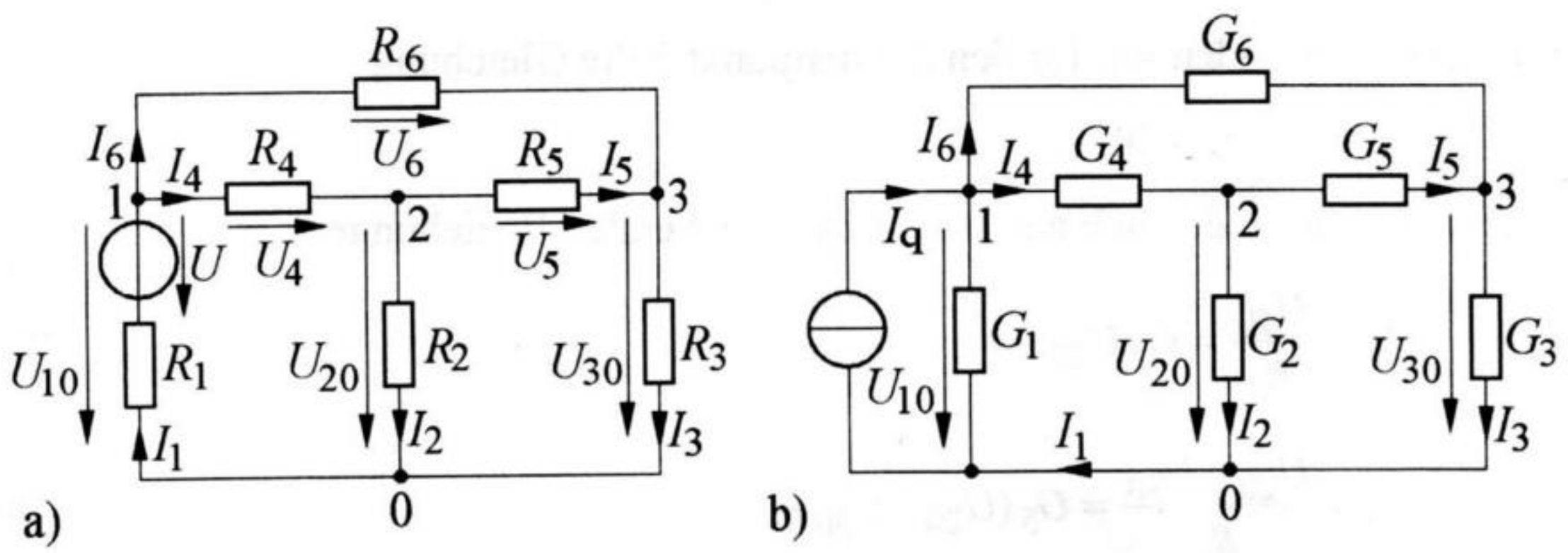


Bild 2.28 Schaltungsbeispiel zur Netzwerkberechnung nach dem Knotenpotenzialverfahren.
a) Gegebene Schaltung, b) Ersatzschaltung

Die Schaltung enthält die vier Knotenpunkte 0, 1, 2 und 3. Wählen wir den Punkt 0 als Bezugspunkt, so stellen die eingetragenen Spannungen U_{10}, U_{20} und U_{30} die drei vorhandenen Knotenspannungen dar. Sie sind gleichzeitig - zusammen mit den Spannungen U_4, U_5 und U_6 (Bild 2.28a) - die **Zweigspannungen** des betrachteten Netzwerkes, also die an den Zweigen des Netzwerkes liegenden Spannungen.

Zur Berechnung der gesuchten Zweigströme geben wir für diese, so wie in Bild 2.28a schon eingetragen, willkürlich Bezugspfeile vor. Außerdem erweist es sich als zweckmäßig, die vorhandenen Widerstände durch ihre Leitwerte zu ersetzen ($G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, $G_4 = 1/R_4$, $G_5 = 1/R_5$, $G_6 = 1/R_6$).

Für den Knotenpunkt 1 in Bild 2.28a gilt jetzt nach dem ersten Kirchhoff'schen Gesetz

$$I_1 - I_4 - I_6 = 0. \tag{2.72}$$

Hieraus wird, wenn wir für die Ströme die sich aus Bild 2.28a ergebenden Beziehungen

$$I_1 = \frac{U - U_{10}}{R_1} = G_1 (U - U_{10}), \tag{2.73}$$

$$I_4 = \frac{U_{10} - U_{20}}{R_4} = G_4 (U_{10} - U_{20}), \tag{2.74}$$

$$I_6 = \frac{U_{10} - U_{30}}{R_6} = G_6 (U_{10} - U_{30}) \tag{2.75}$$

einsetzen,

$$G_1 (U - U_{10}) - G_4 (U_{10} - U_{20}) - G_6 (U_{10} - U_{30}) = 0. \tag{2.76}$$

Entsprechend finden wir für den Knotenpunkt 2 die Gleichung

$$I_4 - I_2 - I_5 = 0.$$

Setzen wir hierin die sich aus Bild 2.28a ergebenden Beziehungen

$$I_2 = \frac{U_{20}}{R_2} = G_2 U_{20}, \tag{2.77}$$

$$I_5 = \frac{U_{20} - U_{30}}{R_5} = G_5 (U_{20} - U_{30}) \tag{2.78}$$

und außerdem Gl. (2.73) ein, so erhalten wir

$$G_4 (U_{10} - U_{20}) - G_2 U_{20} - G_5 (U_{20} - U_{30}) = 0. \tag{2.79}$$

Für den Knotenpunkt 3 gilt schließlich

$$I_5 + I_6 - I_3 = 0. \tag{2.80}$$

Mit der sich aus Bild 2.28a ergebenden Beziehung

$$I_3 = \frac{U_{30}}{R_3} = G_3 U_{30} \tag{2.81}$$

sowie den Gln. (2.75) und (2.78) wird aus Gl. (2.80)

$$G_5 (U_{20} - U_{30}) + G_6 (U_{10} - U_{30}) - G_3 U_{30} = 0. \tag{2.82}$$

Aus den Gln. (2.76), (2.79) und (2.82) erhalten wir, wenn wir nach den unbekannten Knotenspannung U_{10}, U_{20} und U_{30} ordnen,

$$(G_1 + G_4 + G_6) U_{10} - G_4 U_{20} - G_6 U_{30} = G_1 U, \tag{2.83}$$

$$- G_4 U_{10} + (G_2 + G_4 + G_5) U_{20} - G_5 U_{30} = 0, \tag{2.84}$$

$$- G_6 U_{10} - G_5 U_{20} + (G_3 + G_5 + G_6) U_{30} = 0. \tag{2.85}$$

Dieses Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der Knotenspannungen U_{10}, U_{20} und U_{30}. Sind sie bekannt, so lassen sich die gesuchten Zweigströme in einfacher Weise durch die Gln. (2.73), (2.74), (2.75), (2.77), (2.78) und (2.81) bestimmen.

Das beschriebene Verfahren zur Berechnung von Netzwerken ist besonders dann zweckmäßig, wenn die betreffende Anordnung relativ wenig Knotenpunkte (bei vergleichsweise vielen Maschen) hat. In diesem Fall benötigt man nur eine relativ geringe Anzahl von Gleichungen.

Das Schema zum Aufstellen der Knotengleichungen

Es zeigt sich, dass das in den Gln. (2.83) bis (2.85) dargestellte Gleichungssystem auch unmittelbar (ohne Zwischenschritte) aufgestellt werden kann. Zu diesem Zweck wandeln wir zunächst die in der Schaltung nach Bild 2.28a enthaltene Spannungsquelle (einschließlich des mit ihr in Reihe liegenden Widerstandes R_1) in eine *Ersatzstromquelle* um. Es entsteht die in Bild 2.28b angegebene Ersatzschaltung, wobei nach den Gln. (2.67) und (2.68)

$$G_1 = \frac{1}{R_1}, \tag{2.86}$$

$$I_q = \frac{U}{R_1} = U G_1 \tag{2.87}$$

sind. In der Darstellung sind zudem - im Gegensatz zu Bild 2.28a - alle Widerstände durch ihre Leitwerte wiedergegeben. Das in den Gln. (2.83) bis (2.85) an-

gegebene, für die Schaltung gültige Gleichungssystem lautet in *Matrizenschreibweise* (unter Berücksichtigung von Gl. (2.87))

$$\begin{bmatrix} (G_1+G_4+G_6) & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & (G_2+G_4+G_5) & -G_5 \\ -G_6 & -G_5 & (G_3+G_5+G_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

Das hierin enthaltene, aus den Leitwerten G_1 bis G_6 gebildete Koeffizientenschema nennt man **Leitwertmatrix**.

Ihre Hauptdiagonale wird von den **Knotenleitwerten** gebildet. Unter einem Knotenleitwert versteht man die Summe sämtlicher in diesem Knotenpunkt zusammentreffender Leitwerte. So ist der Knotenleitwert des Knotenpunktes 1 in Bild 2.28b gleich $(G_1 + G_4 + G_6)$. Entsprechend ergibt sich für den Knotenpunkt 2 der Knotenleitwert $(G_2 + G_4 + G_5)$ und für den Knotenpunkt 3 der Knotenleitwert $(G_3 + G_5 + G_6)$.

Die übrigen Koeffizienten der betrachteten Leitwertmatrix nennt man **Kopplungsleitwerte**. Durch sie werden zwei Knotenpunkte direkt verbunden. So tritt in Gl. (2.88) in der ersten Zeile bei der Knotenspannung U_{20} der Kopplungsleitwert G_4 auf, da dieser Leitwert in Bild 2.28b direkt zwischen den Knotenpunkten 1 und 2 liegt. Entsprechend tritt in der ersten Zeile von Gl. (2.88) bei der Knotenspannung U_{30} der Kopplungsleitwert G_6 auf. Alle Kopplungsleitwerte erscheinen in der Leitwertmatrix von Gl.(2.88) mit *negativem* Vorzeichen.

Soll für ein beliebiges elektrisches Netzwerk das Gleichungssystem zur Bestimmung der Knotenspannungen *direkt* aufgestellt werden, so geht man nach folgenden Regeln vor:

- Die in der Schaltung vorhandenen Spannungsquellen (mit den jeweils in Reihe liegenden Widerständen) werden in Ersatzstromquellen umgewandelt (vergl. Bild 2.28a und Bild 2.28b). Enthalten einzelne Zweige *ideale* (widerstandslose) Spannungsquellen, so ist eine solche Umwandlung nicht möglich. Auf solche Schaltungen wird später eingegangen.
- In der gegebenen Schaltung wird einer der vorhandenen Knotenpunkte als Bezugsknoten gewählt. In Bild 2.28b ist das der Punkt 0.
- Es werden sämtliche Knotenspannungen in die Schaltung eingetragen. Die Pfeilrichtungen werden so gewählt, dass sie auf den Bezugsknoten zeigen. In Bild 2.28b sind U_{10}, U_{20} und U_{30} die auftretenden Knotenspannungen.
- Die *Knotenleitwerte* treten als Koeffizienten bei der zugehörigen Knotenspannungen auf. So steht in Gl. (2.88) in der ersten Zeile bei der Knotenspannung U_{10} der Knotenleitwert $(G_1 + G_4 + G_6)$.
- Die *Kopplungsleitwerte* treten als Koeffizienten bei den anderen Knotenspannungen auf. In der ersten Zeile von Gl.(2.88) ist das bei der Knotenspannung

U_{20} der Kopplungsleitwert G_4 und bei der Knotenspannung U_{30} der Kopplungsleitwert G_6. Die Vorzeichen der Kopplungsleitwerte sind immer negativ.

- Auf der rechten Gleichungsseite stehen die Ströme (Quellenströme), die den betreffenden Knotenpunkten zugeführt werden. Das Vorzeichen ist positiv, wenn die Pfeilrichtung des Stromes auf den Knotenpunkt zeigt, andernfalls negativ. So steht in Gl.(2.88) in der ersten Zeile rechts der Quellenstrom I_q (vergl. Bild 2.28b).

Aus dem so aufgestellten Gleichungssystem lassen sich die gesuchten Knotenspannungen in einfacher Weise bestimmen. Bei dem in Gl.(2.88) dargestellten Gleichungssystem fällt noch auf, dass die Kopplungsleitwerte *symmetrisch* zur Hauptdiagonalen liegen. Diese (allgemein gültige) Tatsache kann als (eine) Kontrollmöglichkeit zur Überprüfung der Richtigkeit des Gleichungssystems eingesetzt werden.

Behandlung idealer Spannungsquellen

Enthält ein Netzwerk in einzelnen Zweigen *ideale Spannungsquellen* (ohne Reihenwiderstand), so ist deren Umwandlung in Ersatzstromquellen nicht möglich. Die Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens auf solche Anordnungen ist dennoch leicht möglich, wenn eine der folgenden Voraussetzungen zutrifft:

- Die Schaltung enthält nur *eine* ideale Spannungsquelle.
- Es sind zwar *mehrere* ideale Spannungsquellen vorhanden, sie sind jedoch alle an einem *gemeinsamen* Knotenpunkt angeschlossen.

Die nachfolgenden Untersuchungen wollen wir auf Netzwerke beschränken, bei denen eine der genannten Voraussetzungen zutrifft. Wir betrachten dazu die in Bild 2.29 dargestellte Schaltung. Sie enthält zwei ideale Spannungsquellen mit einem *gemeinsamen* Knotenpunkt. Die Quellenspannungen U_1 und U_2 sowie die Widerstände R_1 bis R_6 seien bekannt. Gesucht seien die Spannungen U_3 und U_4.

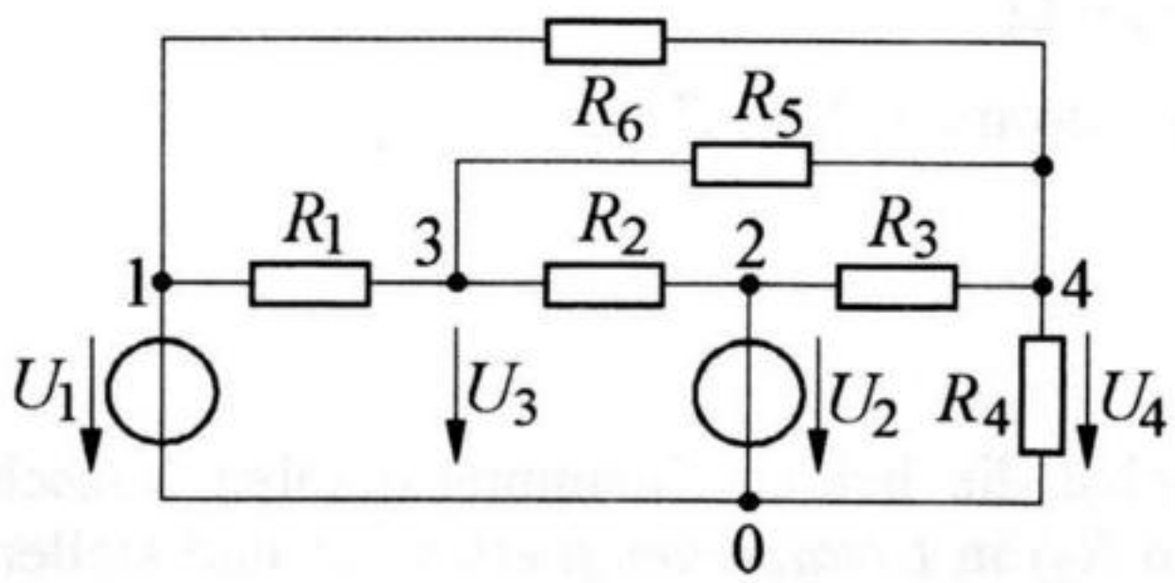


Bild 2.29 Schaltungsbeispiel zur Anwendung des Knotenpotenzialverfahrens beim Vorhandensein idealer Spannungsquellen

Zur Lösung der Aufgabe wählen wir den gemeinsamen Knotenpunkt der beiden Spannungsquellen - das ist der Punkt 0 - als Bezugsknoten. Dann sind die eingetragenen Spannungen U_1 bis U_4 gleichzeitig *Knotenspannungen*. Da die Spannungen U_1 und U_2 jedoch schon bekannt sind, brauchen wir zur Bestimmung von U_3 und U_4 nur die Knotengleichungen für die Knotenpunkte 3 und 4 aufzustellen. Das sich ergebende Gleichungssystem hierfür lautet in Matrizenschreibweise, wenn wir die auf den Seiten 56 und 57 dargestellten Regeln anwenden, mit $G_1 = 1/R_1$, $G_2 = 1/R_2$, $G_3 = 1/R_3$, $G_4 = 1/R_4$, $G_5 = 1/R_5$, $G_6 = 1/R_6$

$$\begin{bmatrix} -G_1 & -G_2 & (G_1+G_2+G_5) & -G_5 \\ -G_6 & -G_3 & -G_5 & (G_3+G_4+G_5+G_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.89$$

Hieraus wird, wenn wir die bekannten Ausdrücke $(-G_1\,U_1)$, $(-G_2\,U_2)$, $(-G_6\,U_1)$ und $(-G_3\,U_2)$ auf die rechte Seite des Gleichungssystems bringen,

$$\begin{bmatrix} (G_1+G_2+G_5) & -G_5 \\ -G_5 & (G_3+G_4+G_5+G_6) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1U_1+G_2U_2 \\ G_6U_1+G_3U_2 \end{bmatrix}. \quad (2.90)$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich U_3 und U_4 in einfacher Weise bestimmen. Das Vorhandensein idealer Spannungsquellen erweist sich also als Vorteil, da für die betrachtete Schaltung trotz *vier* vorhandener Knotenpunkte nur ein Gleichungssystem mit *zwei* Unbekannten entsteht.

Aufgabe 2.12

Die in Bild 2.30a dargestellte Schaltung enthält zwei Spannungsquellen mit den Quellenspannungen $U_1 = 36$ V und $U_2 = 24$ V, eine Stromquelle mit dem Quellenstrom $I = 200$ mA sowie die Widerstände $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 80\ \Omega$, $R_4 = 25\ \Omega$ und $R_5 = 20\ \Omega$.

Wie groß sind die Ströme I_1 bis I_5?

Lösung

Wir wandeln zunächst die beiden Spannungsquellen (einschließlich der beiden Widerstände R_1 und R_2) in *Ersatzstromquellen* um und stellen darüber hinaus die Widerstände R_1 bis R_5 durch ihre Leitwerte dar. Es entsteht die Schaltung nach Bild 2.30b. Dabei gilt (unter Berücksichtigung der Gln. (2.67) und 2.68))

$$I_{q1} = \frac{U_1}{R_1} = \frac{36\ \text{V}}{50\ \Omega} = 720\ \text{mA}, \qquad I_{q2} = \frac{U_2}{R_2} = \frac{24\ \text{V}}{40\ \Omega} = 600\ \text{mA},$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{50\ \Omega} = 20\ \text{mS}, \qquad G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{40\ \Omega} = 25\ \text{mS},$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{80\ \Omega} = 12{,}5\ \text{mS}, \qquad G_4 = \frac{1}{R_4} = \frac{1}{25\ \Omega} = 40\ \text{mS},$$

$$G_5 = \frac{1}{R_5} = \frac{1}{20\ \Omega} = 50\ \text{mS}.$$

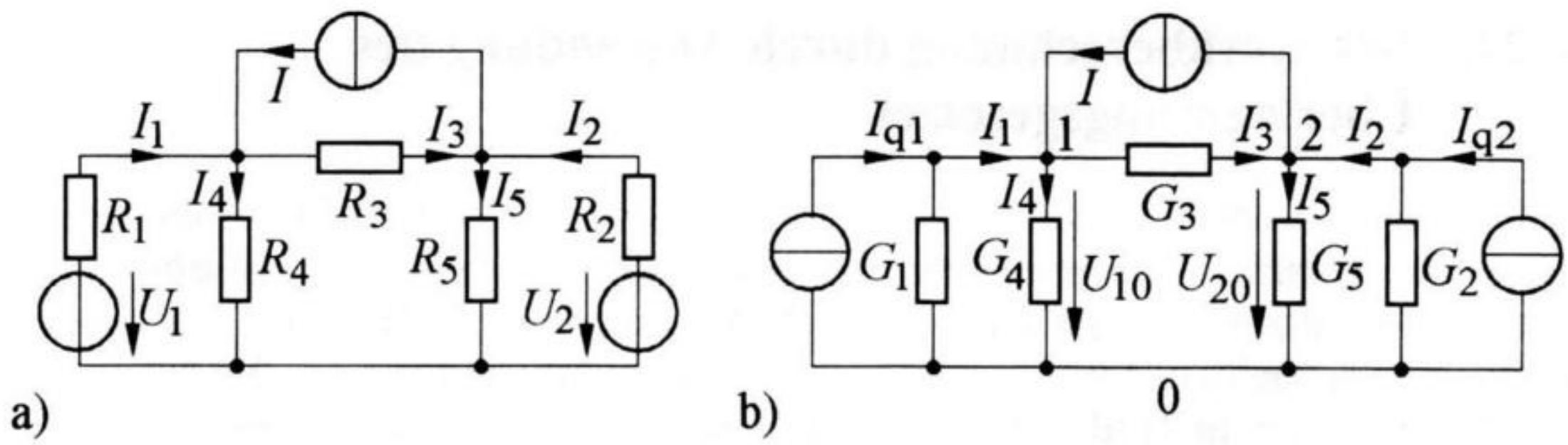


Bild 2.30 Schaltungsbeispiel zur Berechnung von Netzwerken nach dem Knotenpotenzialverfahren.
a) Tatsächliche Schaltung, b) Ersatzschaltung

Wir wählen in Bild 2.30b den Knotenpunkt 0 als Bezugsknoten. Dann sind die eingetragenen Spannungen U_{10} und U_{20} die beiden vorhandenen Knotenspannungen. Das Gleichungssystem - zur Bestimmung der Knotenspannungen - stellen wir nach den auf den Seiten 56 und 57 beschriebenen Regeln auf und erhalten (in Matrizenschreibweise)

$$\begin{bmatrix} (G_1+G_3+G_4) & -G_3 \\ -G_3 & (G_2+G_3+G_5) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{q1}+I \\ I_{q2}-I \end{bmatrix}.$$

Setzen wir hierin die gegebenen Werte ein, so erhalten wir

$$\begin{bmatrix} 72{,}5 & -12{,}5 \\ -12{,}5 & 87{,}5 \end{bmatrix} \text{mS} \cdot \begin{bmatrix} U_{10} \\ U_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 920 \\ 400 \end{bmatrix} \text{mA}.$$

Die Lösung sind

$$U_{10} = 13{,}82\ \text{V},$$

$$U_{20} = 6{,}55\ \text{V}.$$

Damit ergeben sich in Bild 2.30 für die gesuchten Ströme die Werte

$$I_4 = U_{10}\,G_4 = 13{,}82\ \text{V}\cdot 40\ \text{mS} = \underline{553\ \text{mA}},$$

$$I_5 = U_{20}\,G_5 = 6{,}55\ \text{V}\cdot 50\ \text{mS} = \underline{327\ \text{mA}},$$

$$I_3 = (U_{10} - U_{20})\,G_3 = (13{,}82 - 6{,}55)\ \text{V}\cdot 12{,}5\ \text{mS} = \underline{91\ \text{mA}},$$

$$I_1 = I_3 + I_4 - I = (91 + 553 - 200)\ \text{mA} = \underline{444\ \text{mA}},$$

$$I_2 = I_5 + I - I_3 = (327 + 200 - 91)\ \text{mA} = \underline{436\ \text{mA}}.$$

2.2.8 Netzwerkberechnung durch Anwendung des Überlagerungsgesetzes

Ein weiteres Verfahren zur Berechnung von Netzwerken besteht in der Anwendung des **Überlagerungsgesetzes**. Hiernach erhält man die Zweigströme eines Netzwerkes dadurch, dass man die von den einzelnen Spannungs- oder Stromquellen verursachten Teilströme *überlagert*. Die Anwendung des Verfahrens sei am Beispiel der in Bild 2.31a dargestellten Schaltung erläutert. Wir setzen die Quellenspannungen U_1 und U_2 sowie die Widerstände R_1, R_2 und R_3 als bekannt voraus. Gesucht sei beispielsweise der Strom I_1.

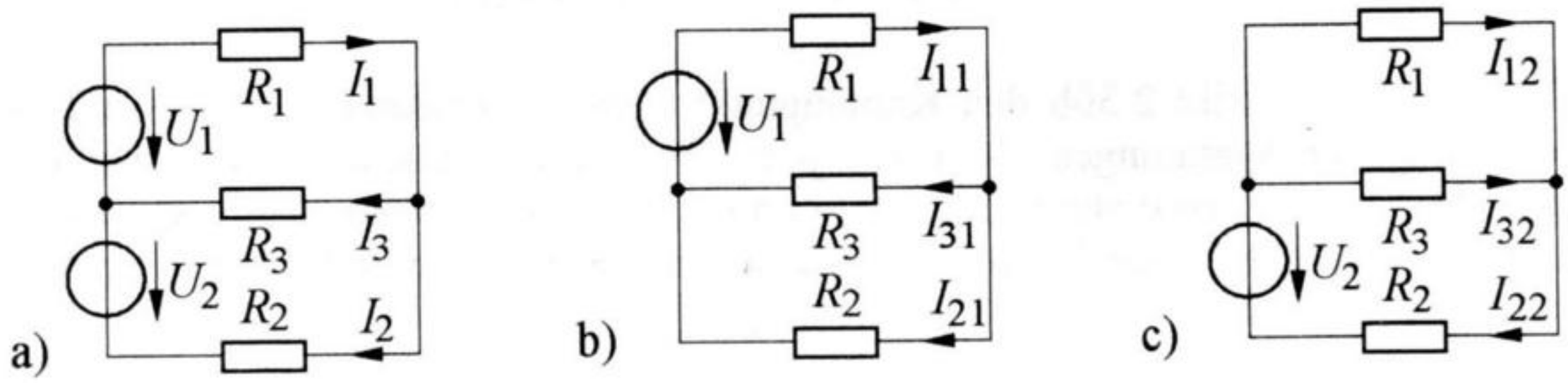


Bild 2.31 Schaltungsbeispiel zur Anwendung des Überlagerungsgesetzes.
a) Tatsächliche Schaltung, b) und c) Schaltungen zur Berechnung der Teilströme

Zu seiner Berechnung setzen wir zunächst alle Spannungen bis auf eine gleich Null. Im vorliegenden Fall bedeutet dies, dass U_2 gleich Null gesetzt und die betreffende Spannungsquelle somit durch eine Kurzschlussverbindung ersetzt wird. Auf diese Weise entsteht die in Bild 2.31b dargestellte Schaltung. Hieraus ersehen wir, dass die Spannung U_1 im Widerstand R_1 den Teilstrom

$$I_{11} = \frac{U_1}{R_1 + \dfrac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3}} = U_1\,\frac{R_2 + R_3}{R_1\,R_2 + R_2\,R_3 + R_3\,R_1} \tag{2.91}$$

verursacht. Danach setzen wir in Bild 2.31a die Spannung U_1 gleich Null, so dass sich die in Bild 2.31c dargestellte Schaltung ergibt. Zur Berechnung des nunmehr im Widerstand R_1 fließenden, von der Spannung U_2 verursachten Teilstromes I_{12} ermitteln wir zunächst den Strom I_{22}. Aus Bild 2.31c folgt

$$I_{22} = \frac{U_2}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}} = U_2 \frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \tag{2.92}$$

Mit Hilfe der *Stromteilerregel* finden wir

$$I_{12} = I_{22} \frac{R_3}{R_1 + R_3} = U_2 \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \tag{2.93}$$

Den tatsächlich im Widerstand R_1 fließenden Strom erhalten wir durch *Überlagerung* der in den Gln. (2.91) und (2.93) angegebenen Teilströme als

$$I_1 = I_{11} + I_{12} = U_1 \frac{R_2 + R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} + U_2 \frac{R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \tag{2.94}$$

In gleicher Weise lassen sich auch die Ströme I_2 und I_3 berechnen.

Enthält ein Netzwerk mehr als zwei Spannungs- oder Stromquellen, so setzt sich jeder Zweigstrom aus einer entsprechend höheren Anzahl von Teilströmen zusammen. Hieraus folgt, dass das beschriebene Verfahren umso mehr Rechenaufwand erfordert, je größer die Anzahl der vorhandenen Spannungs- oder Stromquellen ist.

Weiter sei darauf hingewiesen, dass bei der Bestimmung der Teilströme die jeweiligen Spannungsquellen nur dann durch Kurzschlussverbindungen ersetzt werden können, wenn sie vernachlässigbar kleine Innenwiderstände haben. Trifft dies nicht zu, so müssen die jeweils vorhandenen Innenwiderstände bei der Berechnung der Teilströme im Netzwerk verbleiben.

Enthält eine Schaltung *ideale Stromquellen*, also Quellen, die unabhängig von der Belastung einen konstanten Strom liefern, so ist deren Innenwiderstand als unendlich groß anzusehen.

Aufgabe 2.13

Die in Bild 2.32a dargestellte Schaltung enthält eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U = 120$ V und eine Stromquelle, die den Strom $I = 2{,}4$ A liefert. Die Widerstände betragen $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 20\ \Omega$ und $R_4 = 40\ \Omega$.

Es ist der Strom I_x zu bestimmen.

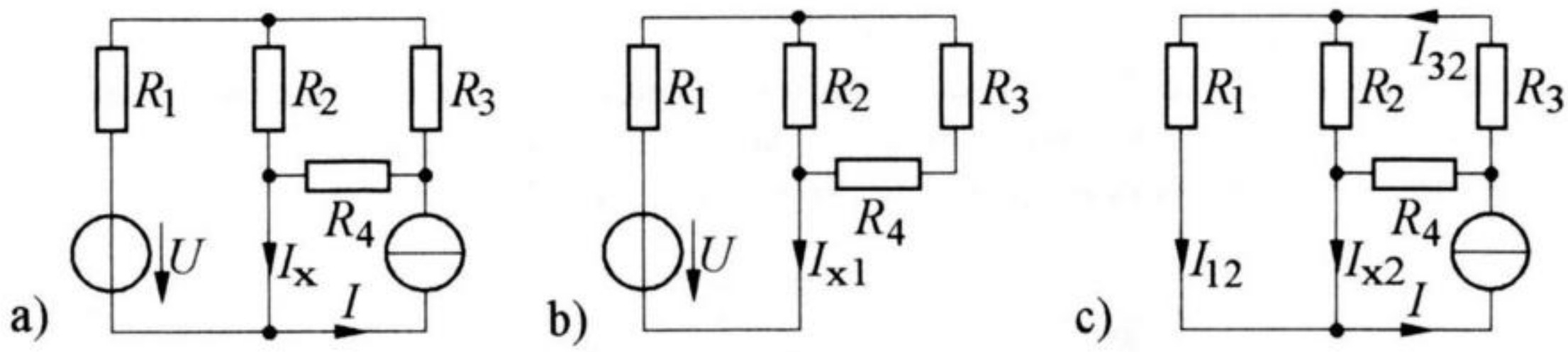


Bild 2.32 Netzwerk mit einer Spannungs- und einer Stromquelle. a) Tatsächliche Schaltung, b) und c) Schaltungen zur Berechnung der Teilströme

Lösung

Wir berechnen den gesuchten Strom durch Anwendung des Überlagerungsgesetzes. Dazu setzen wir zunächst den Strom I in Bild 2.32a gleich Null. Berücksichtigen wir noch, dass die betreffende Stromquelle als Quelle mit unendlich großem Innenwiderstand aufgefasst werden kann, so entsteht die in Bild 2.32b angegebene Schaltung. Hieraus erhalten wir mit

$$R_a = R_1 + \frac{R_2\,(R_3 + R_4)}{R_2 + R_3 + R_4} = 60\ \Omega + \frac{30 \cdot (20+40)}{30+20+40}\,\Omega = 80\ \Omega$$

den zu bestimmenden Teilstrom

$$I_{x1} = \frac{U}{R_a} = \frac{120\ \text{V}}{80\ \Omega} = 1{,}5\ \text{A}.$$

Jetzt setzen wir in Bild 2.32a die Spannung U gleich Null, so dass die in Bild 2.32c dargestellte Schaltung entsteht. Daraus erhalten wir mit

$$R_b = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} + R_3 = \frac{60 \cdot 30}{60+30}\,\Omega + 20\ \Omega = 40\ \Omega$$

den im Widerstand R_3 fließenden Strom durch Anwendung der Stromteilerregel als

$$I_{32} = I\,\frac{R_4}{R_b + R_4} = 2{,}4\ \text{A}\ \frac{40\ \Omega}{(40+40)\ \Omega} = 1{,}2\ \text{A}.$$

Wenden wir die Stromteilerregel ein zweites Mal an, so finden wir

$$I_{12} = I_{32}\,\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 1{,}2\ \text{A}\ \frac{30\ \Omega}{(30+60)\ \Omega} = 0{,}4\ \text{A},$$

so dass der in Bild 2.32c zu bestimmende Teilstrom

$$I_{x2} = I - I_{12} = 2{,}4\ \text{A} - 0{,}4\ \text{A} = 2{,}0\ \text{A}$$

beträgt. Überlagert man nun in Bild 2.32 die beiden Teilströme I_{x1} und I_{x2}, so findet man den gesuchten Strom als

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} = 1{,}5\ \text{A} + 2{,}0\ \text{A} = \underline{3{,}5\ \text{A}}.$$

2.2.9 Leistungsanpassung

Jede reale (widerstandsbehaftete) Spannungsquelle kann, wie in Abschnitt 2.1.13 erläutert, durch ein Ersatzschaltbild dargestellt werden, das aus einer als widerstandslos anzunehmenden Spannungsquelle mit der Quellenspannung U_q und einem in Reihe liegenden Innenwiderstand R_i besteht. Eine solche Spannungsquelle werde nun entsprechend Bild 2.33a durch einen einstellbaren äußeren Widerstand R_a belastet. (Anmerkung: Die Veränderbarkeit von Größen kann in Schaltbildern durch einen schrägen Pfeil gekennzeichnet werden.)

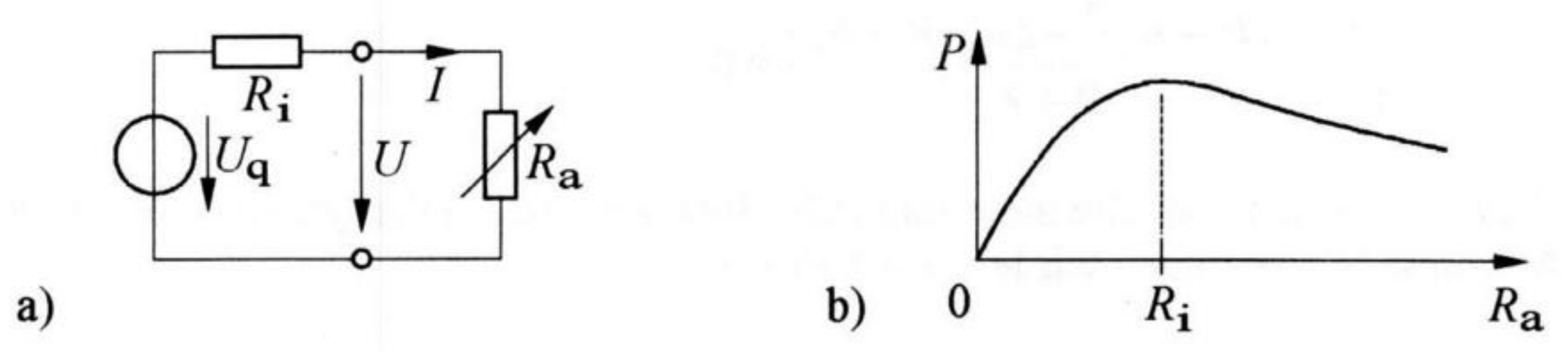


Bild 2.33 Zur Erläuterung des Begriffs „Leistungsanpassung".
a) Schaltung, b) Kennlinie $P = f(R_a)$

Wir wollen die Größen U_q und R_i als bekannt voraussetzen. Dann stellt sich die Frage, wie groß R_a sein muss, damit die von diesem Widerstand aufgenommene Leistung

$$P = U\,I \tag{2.95}$$

den maximal möglichen Wert erreicht. Dazu betrachten wir zunächst zwei Grenzfälle. Wählen wir beispielsweise $R_a = 0$, so ist wegen $U = 0$ auch $P = 0$. Ist andererseits R unendlich groß, so kann kein Strom fließen, und die Leistung ist daher ebenfalls Null. Es muss demnach einen endlichen Wert für R_a geben, bei dem die Leistung einen Maximalwert erreicht.

Zur Lösung des Problems setzen wir die sich aus Bild 2.33a ergebenden Beziehungen

$$I = \frac{U_q}{R_i + R_a},$$

$$U = I R_a = \frac{U_q}{R_i + R_a} R_a$$

in Gl. (2.95) ein, so dass die dem Widerstand R_a zugeführte Leistung durch

$$P = U_q^2 \frac{R_a}{(R_i + R_a)^2} \tag{2.96}$$

dargestellt werden kann. In dieser Gleichung sind die Größen U_q und R_i nach Voraussetzung konstant, während der Widerstand R_a als Variable anzusehen ist. Demzufolge stellt Gl. (2.96) eine Funktion der Form $P = f(R_a)$ dar. Stellt man sie grafisch dar, so ergibt sich der in Bild 2.33b dargestellte Verlauf. Der Maximalwert von P ist dadurch gekennzeichnet, dass die Steigung der Kennlinie an dieser Stelle gleich Null ist. Zur Ermittlung des zugehörigen R_a-Wertes differenzieren wir daher Gl. (2.96) nach R_a und setzen das Ergebnis gleich Null. Hierdurch ergibt sich

$$\frac{dP}{dR_a} = \frac{(R_i + R_a)^2 - 2 R_a (R_i + R_a)}{(R_i + R_a)^4} = 0.$$

Dieser Ausdruck verschwindet dadurch, dass wir den Zähler gleich Null setzen. Auf diese Weise finden wir leicht das Ergebnis

$$\boxed{R_a = R_i.} \tag{2.97}$$

Die von einer realen Spannungsquelle abgegebene Leistung ist also dann am größten, wenn der angeschlossene Belastungswiderstand (R_a) gleich dem Innenwiderstand (R_i) der Quelle ist. Man spricht dann von **Leistungsanpassung.**

Dabei ist zu beachten, dass die im Innenwiderstand der Spannungsquelle entstehende Wärmeleistung genauso groß wie die abgegebene Leistung ist. Der Wirkungsgrad beträgt also nur $\eta = 0{,}5$. Dies hat zur Folge, dass in Schaltungen für größere Leistungen eine derartige Anpassung nicht angewendet wird. Zu beachten ist auch, dass in vielen Fällen eine Leistungsanpassung allein schon deswegen nicht vorgenommen werden darf, weil dies zur Überlastung der Schaltung führt.

Angewendet wird die Leistungsanpassung dagegen beispielsweise bei der Übertragung von Informationen. Hier sind die auftretenden Leistungen meistens relativ klein, so dass weder eine Überlastung der Schaltung auftritt noch der Wirkungsgrad eine besondere Bedeutung hat.

2.2.10 Die Ersatzspannungsquelle

Eine beliebige elektrische Schaltung, die an nur zwei Punkten elektrisch zugänglich ist oder von nur zwei Punkten aus betrachtet wird, bezeichnet man als **Zweipol**. Enthält eine solche Anordnung keine Spannungs- oder Stromquellen, so spricht man von einem **passiven**, andernfalls von einem **aktiven Zweipol**.

Ein passiver Zweipol stellt demnach eine beliebige Anordnung von Widerständen dar. Fasst man sie zusammen, so erhält man den **Ersatzwiderstand** des Zweipols.

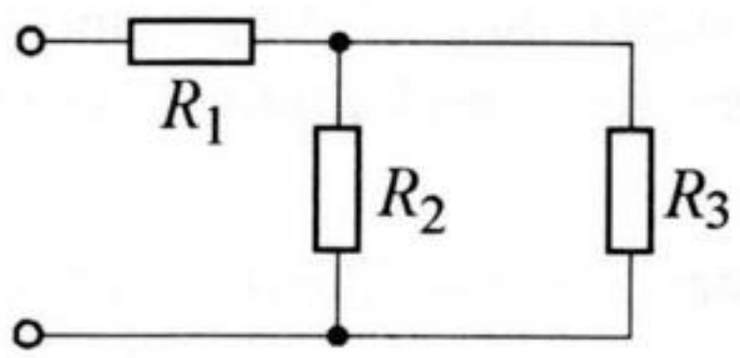


Bild 2.34 Beispiel für einen passiven Zweipol

Zum Beispiel beträgt der Ersatzwiderstand des passiven Zweipols nach Bild 2.34

$$R = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}. \tag{2.98}$$

So, wie jeder passive Zweipol durch einen Ersatzwiderstand dargestellt werden kann, lässt sich jeder aktive Zweipol durch eine aus einer Spannungsquelle und einem Widerstand bestehende Reihenschaltung nachbilden, die als **Ersatzspannungsquelle** bezeichnet wird. Zur weiteren Erläuterung betrachten wir Bild 2.35a.

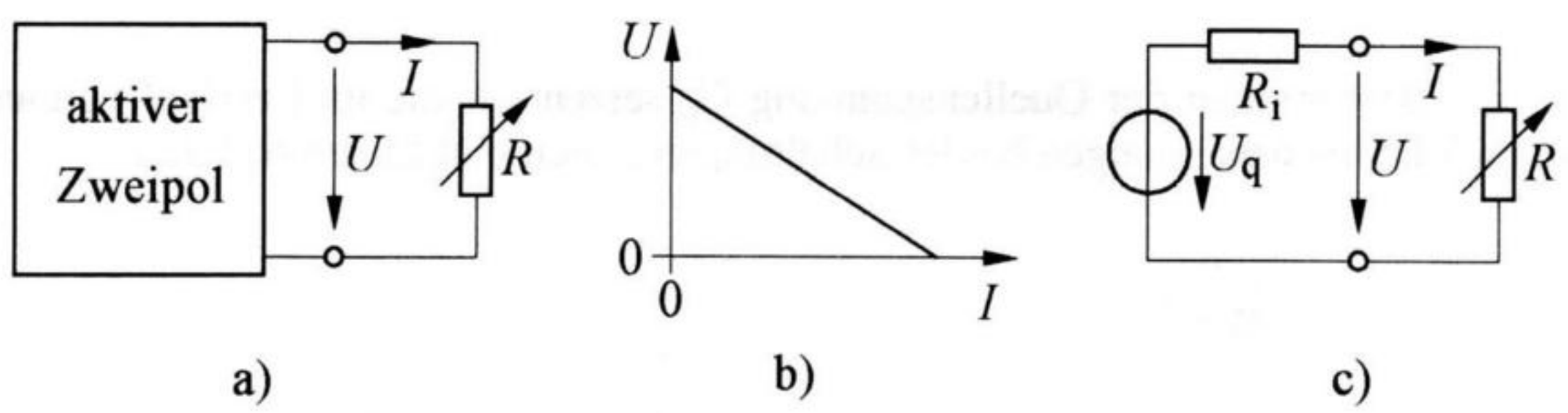


Bild 2.35 a) Aktiver Zweipol mit beliebigem inneren Aufbau (R = Belastungswiderstand), b) zugehörige Strom-Spannungs-Kennlinie, c) Ersatzspannungsquelle (R = Belastungswiderstand)

Darin möge der dargestellte aktive Zweipol innen beliebig aufgebaut und außen durch einen einstellbaren Widerstand R belastet sein. Wir setzen voraus, dass der Zweipol ausschließlich *lineare* Quellen und *lineare* Widerstände enthält. Ändert

man dann in Bild 2.35a den Außenwiderstand R, so besteht zwischen der auftretenden Spannung U und dem fließenden Strom I ein *linearer* Zusammenhang entsprechend dem in Bild 2.35b dargestellten Verlauf. Die sich ergebende Kennlinie können wir daher durch die Geradengleichung

$$U = U_q - I\,R_i \tag{2.99}$$

wiedergeben, wobei U_q und R_i Konstanten sind. Die Gleichung führt zu der in Bild 2.36c dargestellten einfachen Schaltung, in der die in Gl. (2.99) angegebene Beziehung ebenfalls gilt. Man findet auf diese Weise, dass jeder noch so komplex aufgebaute aktive Zweipol durch eine Reihenschaltung aus einer idealen Spannungsquelle (mit der Quellenspannung U_q) und einem Innenwiderstand (R_i) dargestellt werden kann. Diese Reihenschaltung bezeichnet man als **Ersatzspannungsquelle** des Zweipols.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie die Quellenspannung U_q und der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle bestimmt werden können. Zur Lösung dieses Problems geben wir als Beispiel den in Bild 2.36a dargestellten aktiven Zweipol vor. Die Größen U, R_1 und R_2 seien gegeben. Bild 2.36b zeigt die zugehörige Ersatzspannungsquelle mit den zu bestimmenden Größen U_q und R_i.

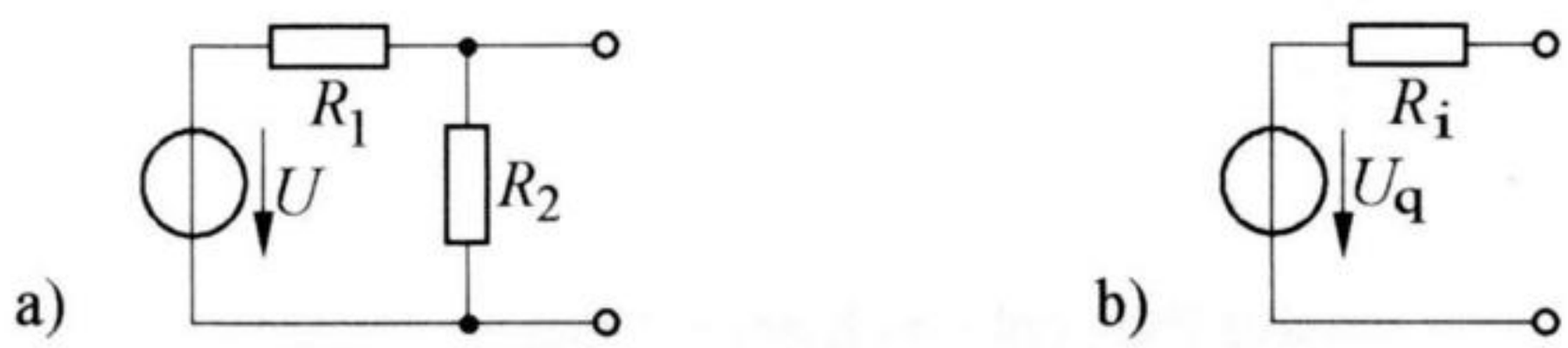


Bild 2.36 Zur Bestimmung der Quellenspannung einer Ersatzspannungsquelle.
a) Beispiel eines Zweipols, b) zugehörige Ersatzspannungsquelle

Für die Bestimmung der Quellenspannung U_q setzen wir die im Leerlauf vorhandenen Klemmenspannungen beider Schaltungen gleich und finden dadurch

$$U_q = U\frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2.100}$$

Die Quellenspannung U_q einer Ersatzspannungsquelle ist also stets gleich der im Leerlauf zwischen den Klemmen des gegebenen Zweipols vorhandenen Spannung.

Sie kann entweder, wie in obigem Beispiel, berechnet werden, oder sie lässt sich auch, falls die Schaltung aufgebaut wird, messtechnisch (mit einem Voltmeter) ermitteln.

Zur Bestimmung des Innenwiderstandes R_i der Ersatzspannungsquelle schließen wir beide in Bild 2.36 dargestellten Schaltungen ausgangsseitig kurz. Hierdurch entstehen die in Bild 2.37 angegebenen Anordnungen.

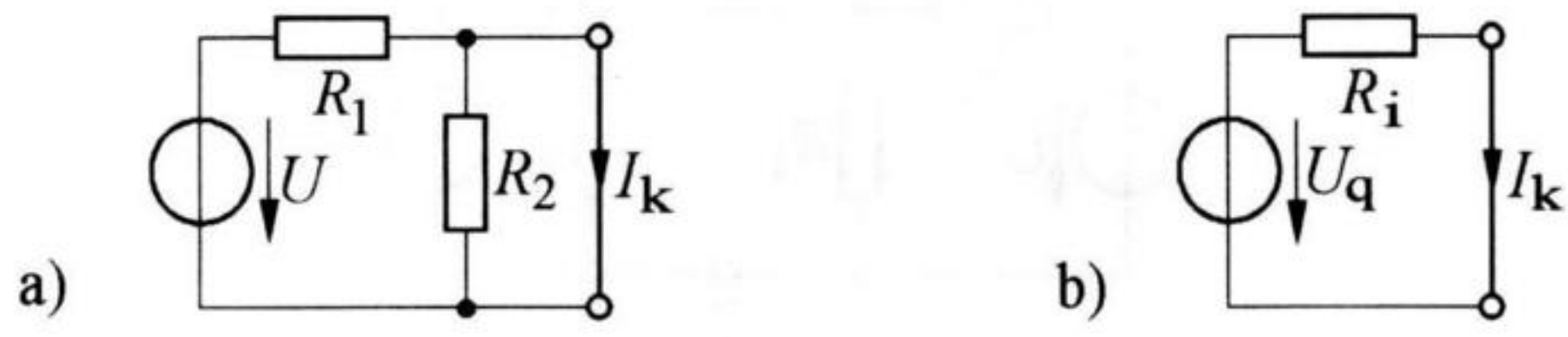


Bild 2.37 Zur Bestimmung der Kenngrößen von Ersatzspannungsquellen.
a) Beispiel eines aktiven Zweipols, b) zugehörige Ersatzspannungsquelle
(jeweils im kurzgeschlossenen Zustand)

Bedingung für die Gleichwertigkeit beider Schaltungen ist, dass ihre Kurzschlussströme (I_k) übereinstimmen. Aus Bild 2.37a ergibt sich der Kurzschlussstrom

$$I_k = \frac{U}{R_1}. \tag{2.101}$$

Nach Bild 2.37b gilt für den Innenwiderstand

$$R_i = \frac{U_q}{I_k}. \tag{2.102}$$

Setzen wir die Gln. (2.100) und (2.101) in Gl. (2.102) ein, so erhalten wir

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \tag{2.103}$$

Allgemein findet man den Innenwiderstand R_i also dadurch, dass man die im Leerlauf vorhandene Klemmenspannung des Zweipols, die ja gleich der Quellenspannung U_q der Ersatzspannungsquelle ist, durch den Kurzschlussstrom I_k des Zweipols teilt.

Hierbei kann I_k entweder, wie bei obigem Schaltungsbeispiel durchgeführt, rechnerisch bestimmt werden oder aber auch messtechnisch mit Hilfe eines Amperemeters, falls die entsprechende Schaltung aufgebaut wird. Zu beachten ist jedoch, dass in vielen Fällen ein Zweipol nicht kurzgeschlossen werden darf, da dies zu unzulässig hohen Strömen führen kann.

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Innenwiderstandes R_i der Ersatzspannungsquelle sei anhand von Bild 2.38 erläutert.

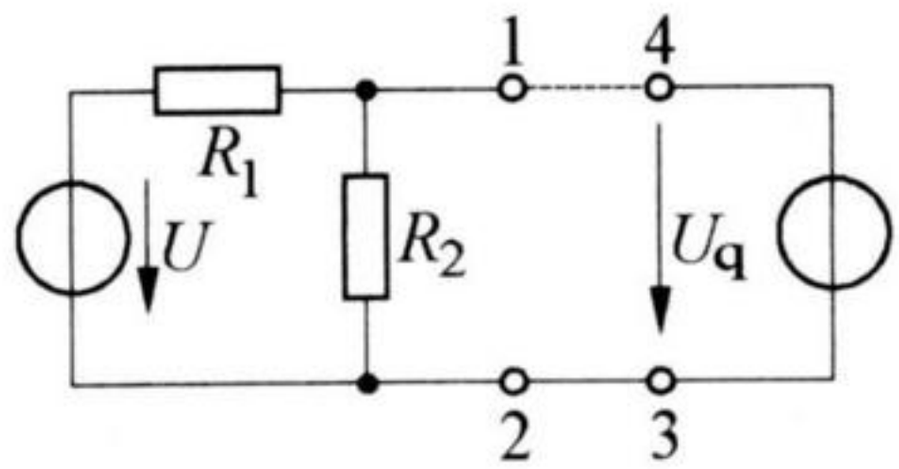


Bild 2.38 Zur Bestimmung des Innenwiderstandes einer Ersatzspannungsquelle

Der links dargestellte aktive Zweipol mit den Klemmen 1 und 2 ist einpolig über die zwischen den Punkten 2 und 3 bestehende Leitung mit einer Spannungsquelle verbunden. Wählt man nun

$$U_q = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U,$$

so besteht zwischen den Klemmen 1 und 4 keine Spannung. Man kann daher auch 1 und 4 verbinden, ohne dass ein Strom fließt. Diese Tatsache kann man jedoch auch folgendermaßen begründen:

Da die Spannungsquelle 3-4 keinen Innenwiderstand hat, schließt sie den Zweipol 1-2 kurz. Sein Kurzschlussstrom tritt jedoch nicht in Erscheinung, da er durch den ebenso großen, in entgegengesetzter Richtung fließenden Strom des Zweipols 3-4 kompensiert wird. Der gesuchte Innenwiderstand des Zweipols 1-2 ist also mit dem Belastungswiderstand des Zweipols 3-4 identisch. Diesen findet man nach dem in Abschnitt 2.2.8 beschriebenen Verfahren als denjenigen Widerstand, den der Zweipol 1-2 aufweist, wenn man die vorhandene Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung ersetzt. Aus Bild 2.38 ergibt sich auf diese Weise - in Übereinstimmung mit Gl. (2.103) - für den Innenwiderstand

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Allgemein gilt:

Der Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle ist gleich dem zwischen den Klemmen des betreffenden Zweipols bestehenden Widerstand unter der Voraussetzung, dass man sich alle vorhandenen inneren *Spannungsquellen* durch Kurzschlussverbindungen ersetzt denkt und alle vorhandenen inneren *Stromquellen* durch geöffnete Zweige.

Aufgabe 2.14

Die in Bild 2.39a dargestellte Schaltung enthält eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung $U = 48$ V sowie die Widerstände $R_1 = 50\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = 30\ \Omega$ und $R_4 = 60\ \Omega$. Die Anordnung soll bezüglich der Punkte A und B durch eine Ersatzspannungsquelle nach Bild 2.39b wiedergegeben werden.

Welche Werte sind für die Quellenspannung U_q und den Innenwiderstand R_i erforderlich?

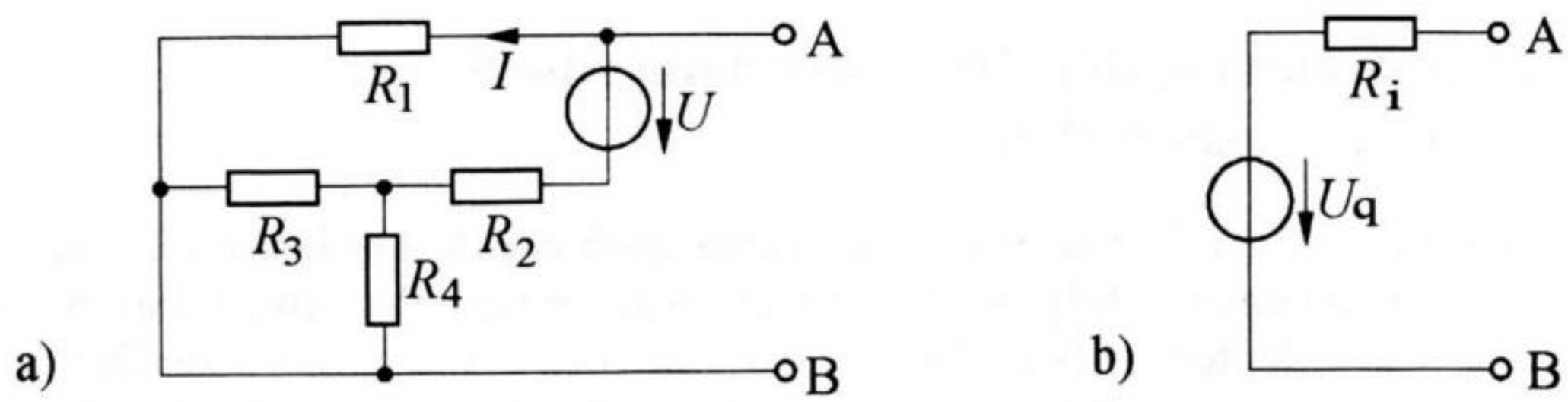


Bild 2.39 Zur Anwendung der Ersatzspannungsquelle. a) Tatsächliche Schaltung, b) elektrisch gleichwertige Ersatzspannungsquelle

Lösung

Die gesuchte Quellenspannung U_q ist gleich der in Bild 2.39a zwischen den Punkten A und B liegenden Spannung. Sie ist somit gleich der Spannung, die am Widerstand R_1 liegt. Mit dem Ersatzwiderstand

$$R_a = R_1 + R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 50\ \Omega + 40\ \Omega + \frac{30 \cdot 60}{30 + 60}\ \Omega = 110\ \Omega$$

ergibt sich für den von der Spannungsquelle gelieferten Strom

$$I = \frac{U}{R_a} = \frac{48\ \text{V}}{110\ \Omega} = 0{,}436\ \text{A}.$$

Für die Quellenspannung der Ersatzspannungsquelle erhalten wir somit

$$U_q = I R_1 = 0{,}436\ \text{A} \cdot 50\ \Omega = \underline{21{,}8\ \text{V}}.$$

Der gesuchte Innenwiderstand R_i ist gleich dem in Bild 2.39a zwischen den Punkten A und B liegenden Widerstand unter der Voraussetzung, dass die Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung ersetzt wird. Mit dem Ersatzwiderstand

$$R_b = R_2 + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = 40\,\Omega + \frac{30 \cdot 60}{30 + 60}\,\Omega = 60\,\Omega$$

finden wir

$$R_i = \frac{R_1 R_b}{R_1 + R_b} = \frac{50 \cdot 60}{50 + 60}\,\Omega = \underline{27{,}3\,\Omega}.$$

2.2.11 Anwendung der Ersatzspannungsquelle zur Netzwerkberechnung

Die Berechnung von Netzwerken kann außer nach den bisher beschriebenen Verfahren auch dadurch erfolgen, dass Ersatzspannungsquellen eingeführt werden. Zur weiteren Erläuterung betrachten wir die in Bild 2.40a dargestellte Schaltung. Wir setzen die Versorgungsspannung U sowie alle vorhandenen Widerstände als bekannt voraus. Gesucht sei der im Widerstand R_5 fließende Strom I_5.

Zu seiner Bestimmung trennen wir zunächst den Widerstand R_5 ab und erhalten dadurch die in Bild 2.40b dargestellte Anordnung. Dabei fassen wir R_5 als passiven Zweipol, die übrige Schaltung als aktiven Zweipol auf. Hiervon bestimmen wir die Quellenspannung U_q sowie den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle nach Bild 2.40c.

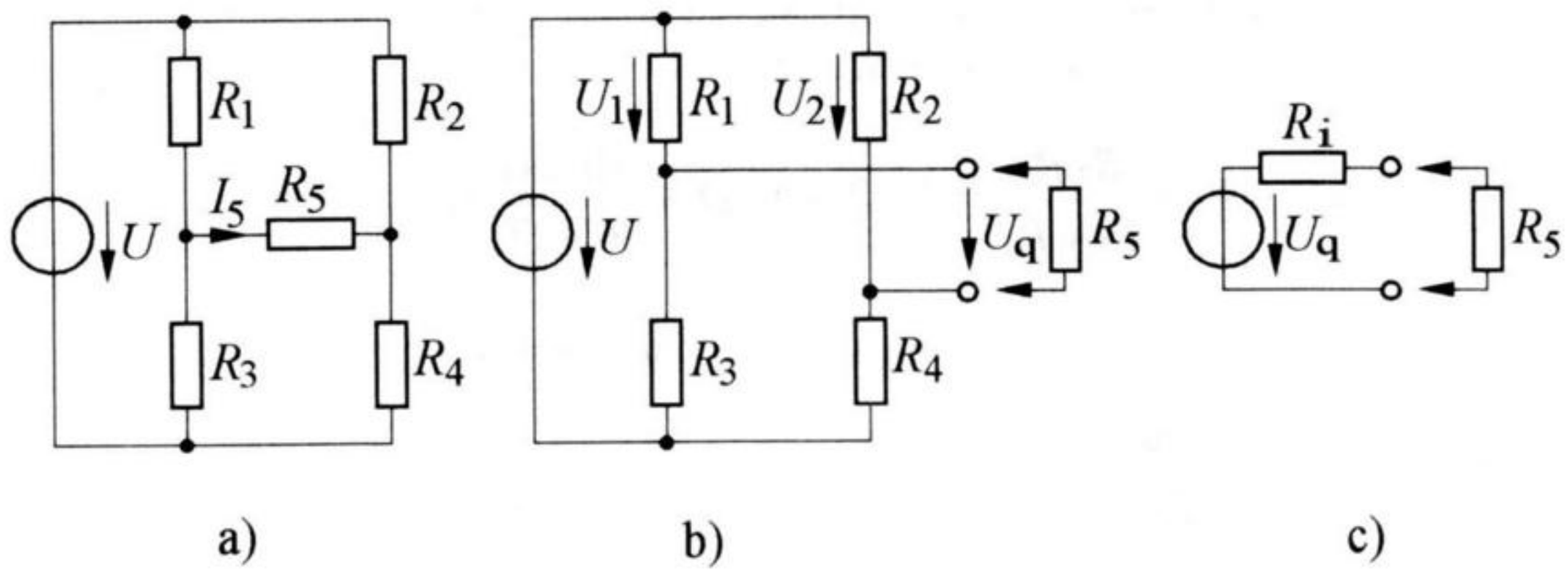


Bild 2.40 Netzwerkberechnung durch Anwendung der Ersatzspannungsquelle.
a) Tatsächliche Schaltung, b) Schaltung mit abgetrenntem Widerstand R_5, c) Ersatzspannungsquelle

Die Quellenspannung U_q ist, wie in Abschnitt 2.2.10 beschrieben, gleich der im Leerlauf zwischen den Klemmen des aktiven Zweipols vorhandenen Spannung. Mit den sich aus Bild 2.40b ergebenden Teilspannungen

$$U_1 = U\frac{R_1}{R_1 + R_3}$$

und

$$U_2 = U\frac{R_2}{R_2 + R_4}$$

wird

$$U_q = U_2 - U_1 = U\frac{R_2}{R_2 + R_4} - U\frac{R_1}{R_1 + R_3}.$$

Der Innenwiderstand R_i ist, wie ebenfalls in Abschnitt 2.2.10 beschrieben, gleich dem zwischen den Klemmen des aktiven Zweipols bestehenden Widerstand unter der Voraussetzung, dass man sich die Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung ersetzt denkt. Auf diese Weise finden wir aus Bild 2.40b

$$R_i = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}.$$

Wird der Widerstand R_5 in Bild 2.40c an die Ersatzspannungsquelle angeschlossen, so fließt in ihm der gleiche Strom wie in der tatsächlichen Schaltung. Daher ergibt sich der gesuchte Strom als

$$I_5 = \frac{U_q}{R_i + R_5}.$$

Aufgabe 2.15

Die in Bild 2.41a dargestellte Schaltung enthält eine Spannungsquelle mit der Quellenspannung U = 60 V. Die Widerstände betragen R_1 = 20 Ω, R_2 = 30 Ω, R_3 = 25 Ω, R_4 = 35 Ω und R_5 = 15 Ω.

Welcher Strom I_5 fließt im Widerstand R_5?

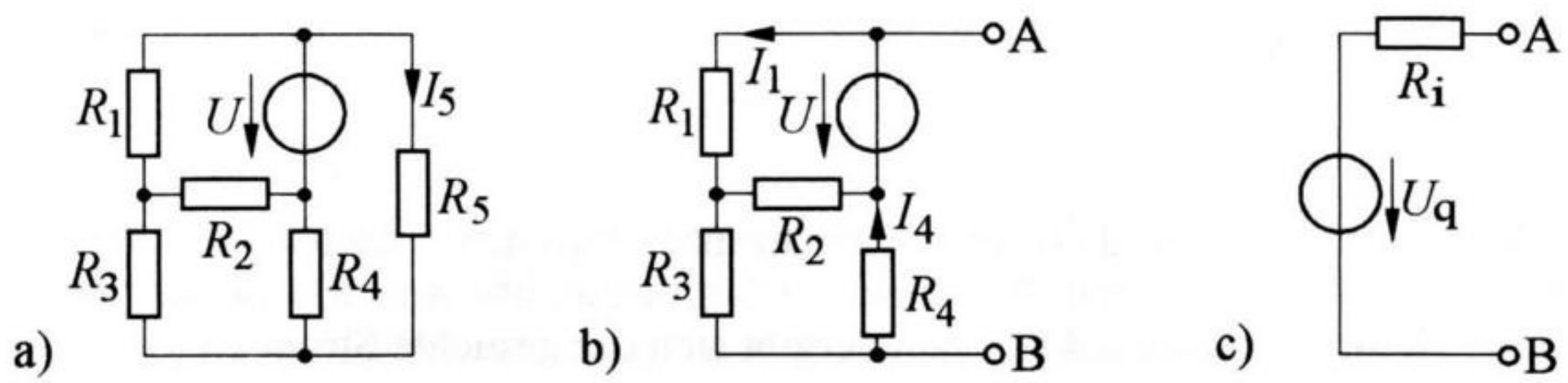


Bild 2.41 Schaltungsbeispiel zur Netzwerkberechnung durch Anwendung der Ersatzspannungsquelle. a) Tatsächliche Schaltung, b) Schaltung mit abgetrenntem Widerstand R_5, c) Ersatzspannungsquelle der letztgenannten Schaltung

Lösung

Zur Berechnung des Stromes trennen wir den Widerstand R_5 ab und bestimmen von der verbleibenden Schaltung (Bild 2.41b) die Größen U_q und R_i der elektrisch gleichwertigen Ersatzspannungsquelle nach Bild 2.41c.

Die Quellenspannung U_q ist gleich der in Bild 2.41b zwischen den Punkten A und B liegenden Spannung. Mit

$$R_{234} = \frac{R_2\,(R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4} = \frac{30(25+35)}{30+25+35}\,\Omega = 20\,\Omega$$

und

$$I_1 = \frac{U}{R_1+R_{234}} = \frac{60\text{ V}}{(20+20)\,\Omega} = 1{,}5\text{ A}$$

wird - durch Anwendung der Stromteilerregel -

$$I_4 = I_1\frac{R_2}{R_2+R_3+R_4} = 1{,}5\text{ A}\,\frac{30\,\Omega}{(30+25+35)\,\Omega} = 0{,}5\text{ A}.$$

Damit ergibt sich die gesuchte Spannung als

$$U_q = U - I_4\,R_4 = 60\text{ V} - 0{,}5\text{ A}\cdot 35\,\Omega = 42{,}5\text{ V}.$$

Der Innenwiderstand R_i ist gleich dem in Bild 2.41b zwischen den Punkten A und B liegenden Widerstand unter der Voraussetzung, dass die Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung ersetzt wird. Mit

$$R_{123} = \frac{R_1\,R_2}{R_1+R_2} + R_3 = \frac{20\cdot 30}{20+30}\,\Omega + 25\,\Omega = 37\,\Omega$$

erhalten wir den Wert

$$R_i = \frac{R_{123}\,R_4}{R_{123}+R_4} = \frac{37\cdot 35}{37+35}\,\Omega = 18\,\Omega.$$

Wird der Widerstand R_5 an die Ersatzspannungsquelle nach Bild 2.41c angeschlossen, so wird er von dem gleichen Strom durchflossen wie in der tatsächlichen Schaltung in Bild 2.41a. Daher ergibt sich der gesuchte Strom als

$$I_5 = \frac{U_q}{R_i+R_5} = \frac{42{,}5\text{ V}}{(18+15)\,\Omega} = \underline{1{,}29\text{ A}}.$$

Aufgabe 2.16

Die in Bild 2.42a dargestellte Schaltung enthält drei Spannungsquellen mit den Quellenspannungen $U_1 = 120$ V, $U_2 = 60$ V und $U_3 = 80$ V sowie die Widerstände $R_1 = 90\ \Omega$ und $R_2 = 45\ \Omega$.

a) Welchen Wert muss der Widerstand R_3 haben, damit er die maximal mögliche Leistung aufnimmt?

b) Wie groß ist diese maximale Leistung?

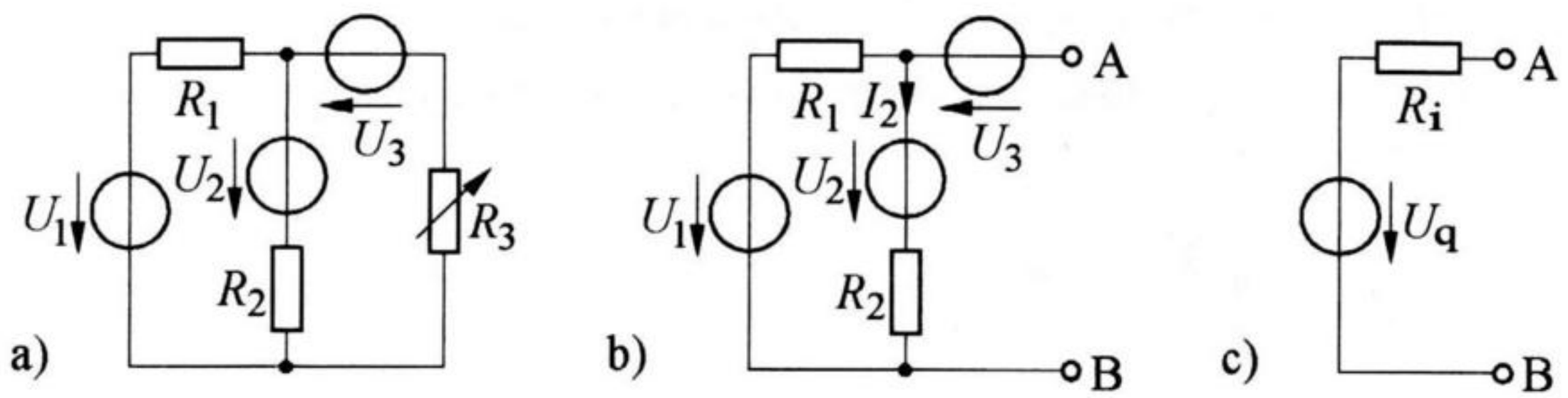


Bild 2.42 Schaltungsbeispiel zur Erläuterung des Begriffs „Leistungsanpassung".
a) Tatsächliche Schaltung, b) Schaltung mit abgetrenntem Widerstand R_3,
c) Ersatzspannungsquelle der letztgenannten Schaltung

Lösung

Zur Lösung der Aufgabe trennen wir zunächst in Bild 2.42a den Widerstand R_3 ab und bestimmen von der verbleibenden Schaltung (Bild 2.42b) die Größen U_q und R_i der elektrisch gleichwertigen Ersatzspannungsquelle nach Bild 2.42c.

Die Quellenspannung U_q ist gleich der in Bild 2.42b zwischen den Punkten A und B liegenden Spannung. Mit

$$I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_1 + R_2} = \frac{(120 - 60)\ \text{V}}{(90 + 45)\ \Omega} = 0{,}444\ \text{A}$$

wird diese Spannung

$$U_q = U_3 + U_2 + I_2 R_2 = 80\ \text{V} + 60\ \text{V} + 0{,}444\ \text{A} \cdot 45\ \Omega = 160\ \text{V}.$$

Der Innenwiderstand R_i ist gleich dem in Bild 2.42b zwischen den Punkten A und B liegenden Widerstand unter der Voraussetzung, dass alle Spannungsquellen durch Kurzschlussverbindungen ersetzt werden. Auf diese Weise finden wir leicht

$$R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{90 \cdot 45}{90 + 45}\,\Omega = 30\,\Omega.$$

a) Wird der Widerstand R_3 an die Ersatzspannungsquelle in Bild 2.42c angeschlossen, so liegt an ihm die gleiche Spannung wie in der tatsächlichen Schaltung nach Bild 2.42a. Er nimmt somit die größte Leistung dann auf, wenn die in Gl. (2.97) angegebene Bedingung erfüllt ist, wenn also

$$R_3 = R_i = \underline{30\,\Omega}$$

beträgt. Man spricht dann von **Leistungsanpassung.**

b) Die bei $R_3 = R_i = 30\,\Omega$ dem Widerstand R_3 zugeführte Leistung ergibt sich aus Bild 2.42c als

$$P_3 = \frac{\left(U_q/2\right)^2}{R_3} = \frac{(80\text{ V})^2}{30\,\Omega} = \underline{213\text{ W}}.$$

2.2.12 Die Ersatzstromquelle

Jeder aktive Zweipol kann statt durch eine Ersatzspannungsquelle auch durch eine **Ersatzstromquelle** wiedergegeben werden. Sie besteht entsprechend Bild 2.43a aus der Parallelschaltung einer Konstantstromquelle (mit einem Quellenstrom I_q) und einem Innenleitwert G_i. Bild 2.43b zeigt zum Vergleich eine Ersatzspannungsquelle.

Bild 2.43 Ersatzstromquelle (a) und Ersatzspannungsquelle (b)

Beide Ersatzschaltungen sind, wie schon in Abschnitt 2.1.14 beschrieben, dann gleichwertig, wenn die Beziehungen

$$U_q = \frac{I_q}{G_i} \qquad \text{und} \qquad R_i = \frac{1}{G_i}$$

erfüllt sind. Am Beispiel des in Bild 2.44a dargestellten aktiven Zweipols sei gezeigt, wie die Größen I_q und G_i der zugehörigen Ersatzstromquelle nach

Bild 2.44b bestimmt werden können. Wir setzen die Versorgungsspannung U sowie die Widerstände R_1 und R_2 in Bild 2.44a als bekannt voraus.

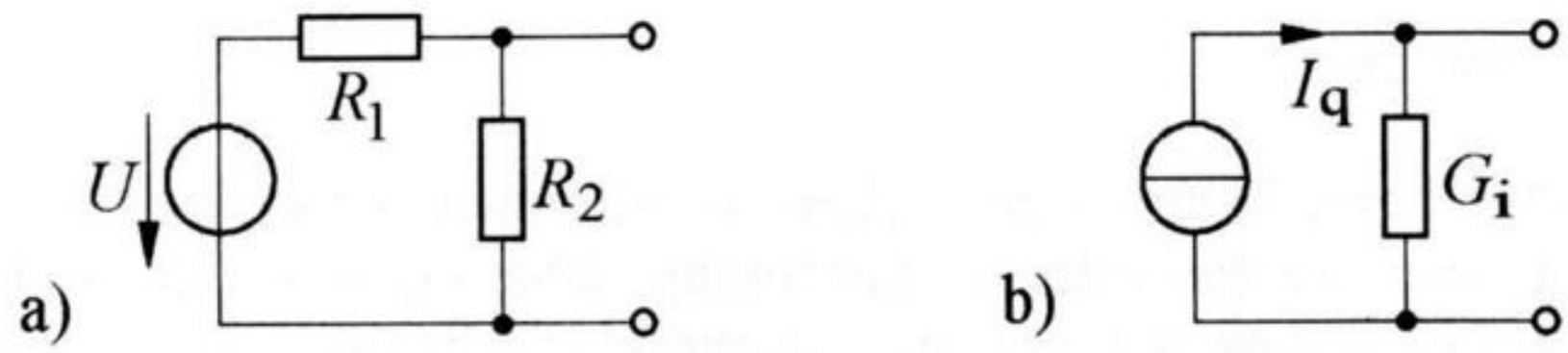


Bild 2.44 Zur Bestimmung der Kenngrößen einer Ersatzstromquelle.
a) Beispiel eines aktiven Zweipols, b) zugehörige Ersatzstromquelle

Zur Berechnung des Quellenstromes I_q gehen wir von der Annahme aus, dass beide in Bild 2.44 angegebenen Schaltungen kurzgeschlossen seien. Dann gilt für den Kurzschlussstrom in Bild 2.44a

$$I_k = \frac{U}{R_1}$$

und in Bild 2.44b

$$I_k = I_q .$$

Durch Gleichsetzen wird

$$I_q = \frac{U}{R_1} .$$

Der Quellenstrom der Ersatzstromquelle ist also stets gleich dem Kurzschlussstrom des betreffenden aktiven Zweipols.

Der Innenleitwert G_i - oder der Innenwiderstand $R_i = 1/G_i$ - können in gleicher Weise bestimmt werden, wie dies bei einer entsprechenden Berechnung für eine Ersatzspannungsquelle nach Abschnitt 2.2.10 erfolgt.

Der Innenleitwert ist also gleich dem zwischen den Klemmen des Zweipols bestehenden Leitwert unter der Voraussetzung, dass man alle Spannungs- und Stromquellen entfernt, wobei die Spannungsquellen durch Kurzschlussverbindungen zu ersetzen sind und die Stromquellen durch geöffnete Zweige.

Für die in Bild 2.44a dargestellte Schaltung wird der Innenleitwert somit

$$G_i = \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} .$$

2.3 Nichtlineare Gleichstromkreise

2.3.1 Allgemeines

Bei den bisher betrachteten elektrischen Schaltungen wurde stets vorausgesetzt, dass sie keine stromstärke- oder stromrichtungsabhängigen Widerstände enthalten. Derartige Netzwerke bezeichnet man bekanntlich als **linear**.

Jetzt sollen Schaltungen untersucht werden, die neben linearen Schaltelementen auch Widerstände enthalten, deren Ohmwert abhängig von der Höhe und / oder von der Richtung des Stromes ist. Man bezeichnet solche Widerstände - ebenso wie die betreffenden Netzwerke, in die sie eingebaut sind - als **nichtlinear**.

Die Widerstandseigenschaften von nichtlinearen Elementen werden in der Regel nicht durch die Angabe von Ohmwerten, sondern durch die Darstellung von Strom-Spannungs-Kennlinien beschrieben. Das hat zur Folge, dass auch die Bestimmung von Spannungen und Strömen in nichtlinearen Kreisen meistens auf grafischem Wege vorgenommen wird.

2.3.2 Behandlung nichtlinearer Kreise

Zur Erläuterung der Behandlung von nichtlinearen Stromkreisen wählen wir als Schaltungsbeispiel die in Bild 2.45a dargestellte Anordnung. Sie enthält eine Halbleiterdiode (D), die über einen stromunabhängigen (konstanten) Widerstand R mit einer Gleichspannungsquelle verbunden ist. Die Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode ist in Bild 2.45b dargestellt und mit 1 gekennzeichnet. Wir setzen diese Kennlinie sowie die Versorgungsspannung U und den Widerstand R als bekannt voraus. Gesucht seien der Strom I sowie die Teilspannungen U_D und U_R.

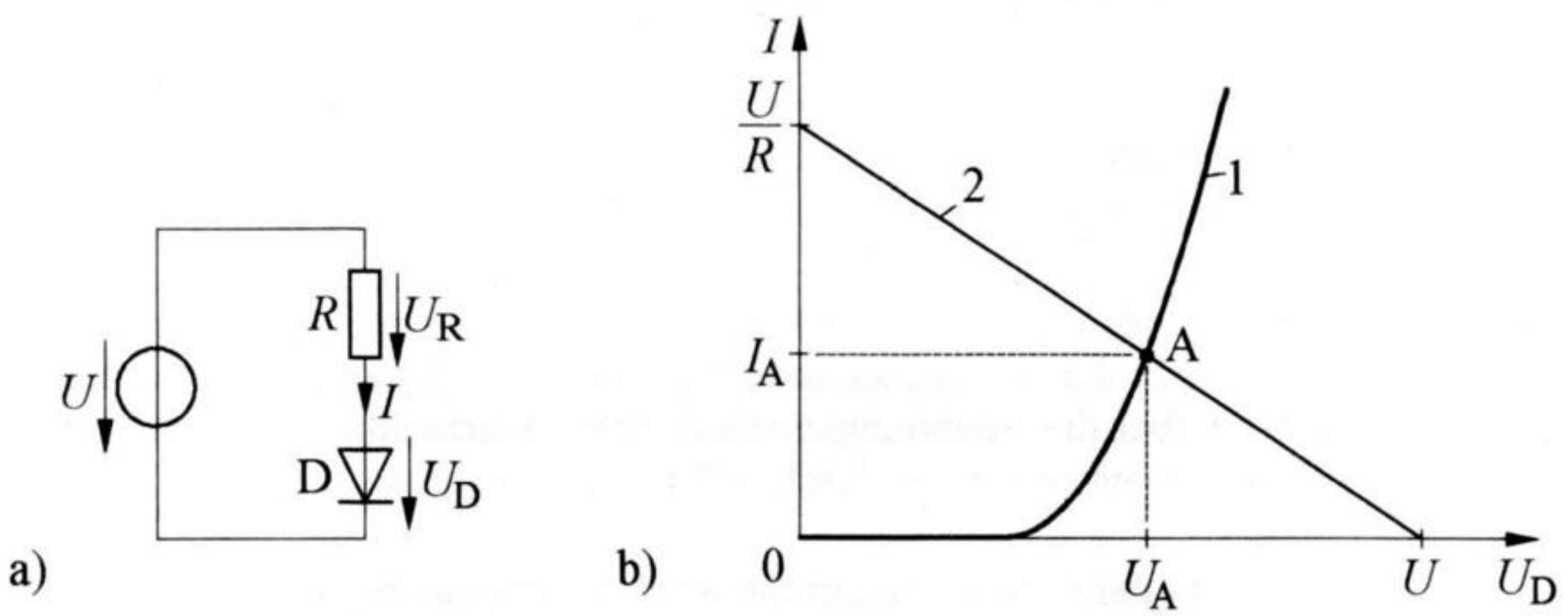


Bild 2.45 Beispiel eines einfachen nichtlinearen Stromkreises. a) Schaltung, b) Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode (1) und Widerstandsgerade (2)

Zur Bestimmung der genannten Größen setzen wir zunächst in die sich aus Bild 2.45a ergebende Gleichung

$$I = \frac{U_R}{R}$$

die Beziehung

$$U_R = U - U_D,$$

die ebenfalls aus Bild 2.45a folgt, ein und erhalten

$$I = \frac{U}{R} - \frac{U_D}{R}.$$

Werden hierin die Größen U_D und I als Variable aufgefasst, so stellt die angegebene Beziehung die Gleichung einer Geraden von der Form

$$I = f(U_D)$$

dar. Sie ist in Bild 2.45b eingetragen (Kennlinie 2) und schneidet die waagerechte Achse wegen $I = 0$ im Punkt $U_D = U$. Der Schnittpunkt mit der senkrechten Achse liegt wegen $U_D = 0$ im Punkt $I = U/R$. Die sich so ergebende Linie wird auch als **Widerstandsgerade** bezeichnet.

Aus Bild 2.45a ersehen wir, dass der Widerstand R und die Diode D den gleichen Strom I führen. Außerdem gilt für die Spannungen

$$U = U_R + U_D.$$

Diese Bedingungen sind in Bild 2.45b nur im Schnittpunkt der beiden Kennlinien 1 und 2 erfüllt. Der Schnittpunkt - auch als **Arbeitspunkt** (A) bezeichnet - liefert den im Kreis fließenden Strom $I = I_A$ und die an der Diode liegende Spannung $U_D = U_A$. Damit können wir auch die am Widerstand R liegende Spannung aus $U_R = U - U_A$ bestimmen.

Wir wollen das beschriebene Verfahren nachfolgend an einigen Beispielen anwenden.

Aufgabe 2.17

Eine Siliziumdiode mit der in Bild 2.46b dargestellten Strom-Spannungs-Kennlinie (1) wird nach Bild 2.46a über den Widerstand $R = 1{,}6\ \Omega$ an eine Spannungsquelle mit der Spannung $U = 2{,}0$ V angeschlossen.

Welcher Strom I fließt im Kreis, und wie groß sind die Teilspannungen U_D und U_R?

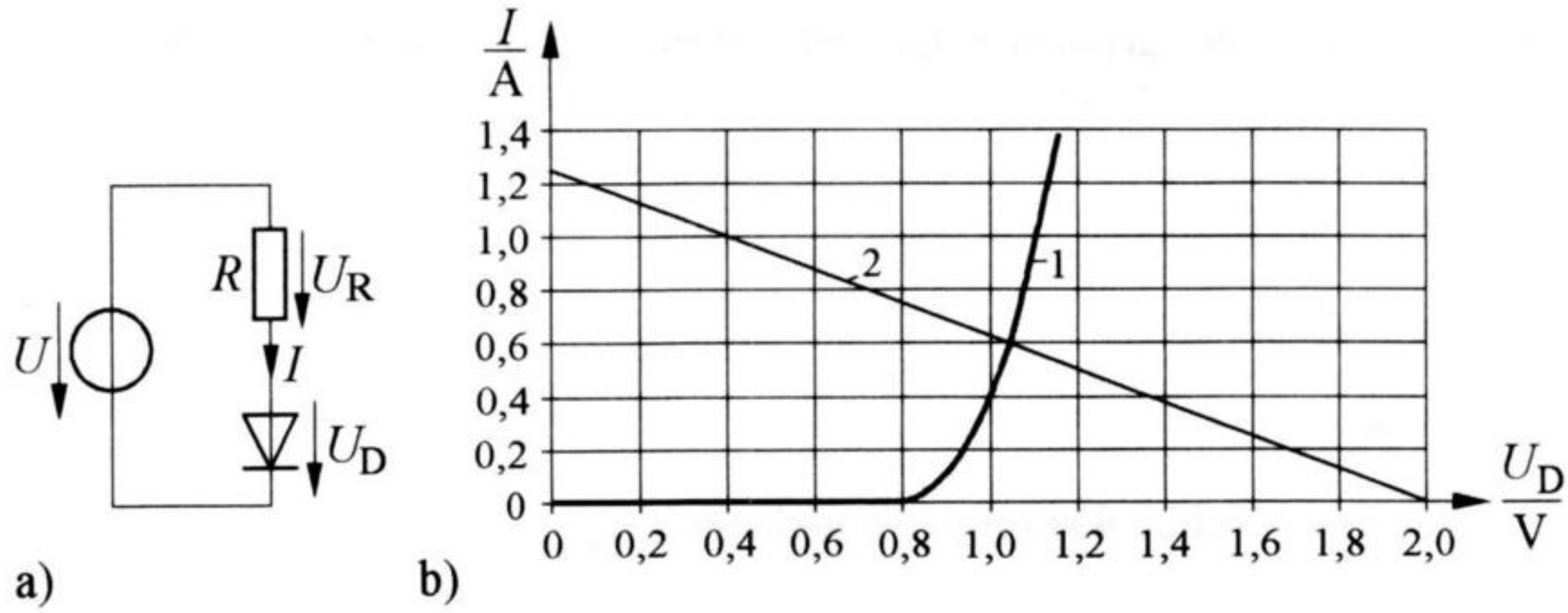


Bild 2.46 Beispiel eines nichtlinearen Stromkreises. a) Schaltung, b) Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode (1) und Widerstandsgerade (2)

Lösung

Zur Bestimmung der Größen benötigen wir die Kenngerade des Widerstandes R (Widerstandsgerade). Sie ist bereits in Bild 2.46b eingetragen und schneidet die waagerechte Achse an der Stelle $U_D = U = 2{,}0$ V und die senkrechte Achse in dem Punkt

$$I = \frac{U}{R} = \frac{2{,}0\ \text{V}}{1{,}6\ \Omega} = 1{,}25\ \text{A}.$$

Der Schnittpunkt beider Kennlinien liefert den Strom

$$I = \underline{0{,}6\ \text{A}}$$

und die an der Diode liegende Spannung

$$U_D = \underline{1{,}05\ \text{V}}.$$

Damit beträgt die am Widerstand R liegende Spannung

$$U_R = U - U_D = 2{,}0\ \text{V} - 1{,}05\ \text{V} = \underline{0{,}95\ \text{V}}.$$

Aufgabe 2.18

Die in Bild 2.47a angegebene Schaltung enthält eine Halbleiterdiode mit der in Bild 2.47b dargestellten Strom-Spannungs-Kennlinie (1). In Reihe mit der Diode liegt der Widerstand $R_1 = 6{,}0\ \Omega$. Die Schaltung liegt an der Spannung $U = 1{,}8$ V.

Um wie viel Prozent ändert sich die Spannung U_2, wenn der Widerstand $R_2 = 4{,}0\ \Omega$ parallel zu R_1 geschaltet wird?

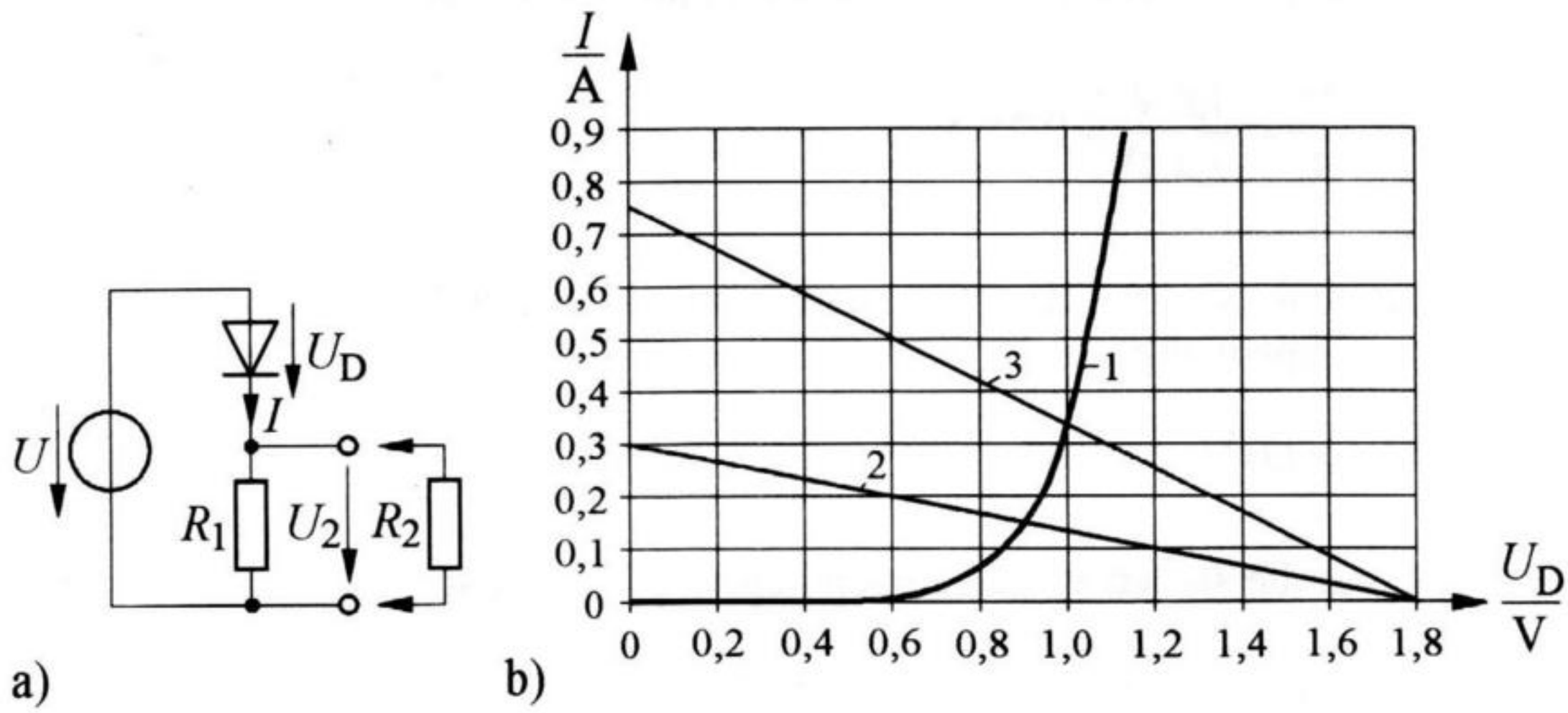


Bild 2.47 Beispiel einer nichtlinearen Schaltung. a) Gegebenes Schaltbild, b) Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode (1) und Widerstandsgeraden (2) und (3)

Lösung

Wir tragen zunächst in Bild 2.47b die Kenngerade des Widerstandes R_1 (Widerstandsgerade) ein. Sie schneidet die waagerechte Achse bei $U_D = U = 1{,}8$ V und die senkrechte Achse im Punkt

$$I = \frac{U}{R_1} = \frac{1{,}8\ \text{V}}{6{,}0\ \Omega} = 0{,}3\ \text{A}.$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden (2) mit der Strom-Spannungs-Kennlinie der Diode (1) liefert die Spannungen

$$U_D = 0{,}9\ \text{V},$$

$$U_2 = U - U_D = 1{,}8\ \text{V} - 0{,}9\ \text{V} = 0{,}9\ \text{V}.$$

Wird der Widerstand R_2 angeschlossen, so hat die entstehende Parallelschaltung den Gesamtwiderstand

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{6{,}0 \cdot 4{,}0}{6{,}0 + 4{,}0}\ \Omega = 2{,}4\ \Omega.$$

Die dazugehörende Widerstandsgerade (3) schneidet die waagerechte Achse in Bild 2.47b ebenfalls bei $U_D = U = 1{,}8$ V und die senkrechte Achse im Punkt

$$I = \frac{U}{R_p} = \frac{1{,}8\ \text{V}}{2{,}4\ \Omega} = 0{,}75\ \text{A}.$$

Der Schnittpunkt dieser Geraden mit der Diodenkennlinie (1) liefert die an der Diode liegende Spannung

$$U_D' = 1{,}0\ \text{V}.$$

Damit beträgt die an den Widerständen liegende Spannung

$$U_2' = U - U_D' = 1{,}8\ \text{V} - 1{,}0\ \text{V} = 0{,}8\ \text{V}.$$

Aus

$$\frac{U_2'}{U_2} = \frac{0{,}8\ \text{V}}{0{,}9\ \text{V}} = 0{,}89$$

ergibt sich, dass U_2' gleich 89 % von U_2 ist, die Ausgangsspannung also um <u>11 %</u> kleiner wird.

Aufgabe 2.19

Die in Bild 2.48a dargestellte Schaltung dient zur Stabilisierung (Konstanthaltung) der am Lastwiderstand R_L liegenden Spannung U_Z. Die verwendete Z-Diode (Zener-Diode) hat die in Bild 2.48c angegebene Strom-Spannungs-Kennlinie (1). Der Vorwiderstand beträgt $R_V = 60\ \Omega$. Die Schaltung liegt an der Versorgungsspannung $U = 9$ V.

Zwischen welchen Werten kann sich die Spannung U_Z in Bild 2.48a maximal ändern, wenn angenommen wird, dass der Lastwiderstand R_L beliebige Werte oberhalb von $R_{Lmin} = 120\ \Omega$ annehmen kann?

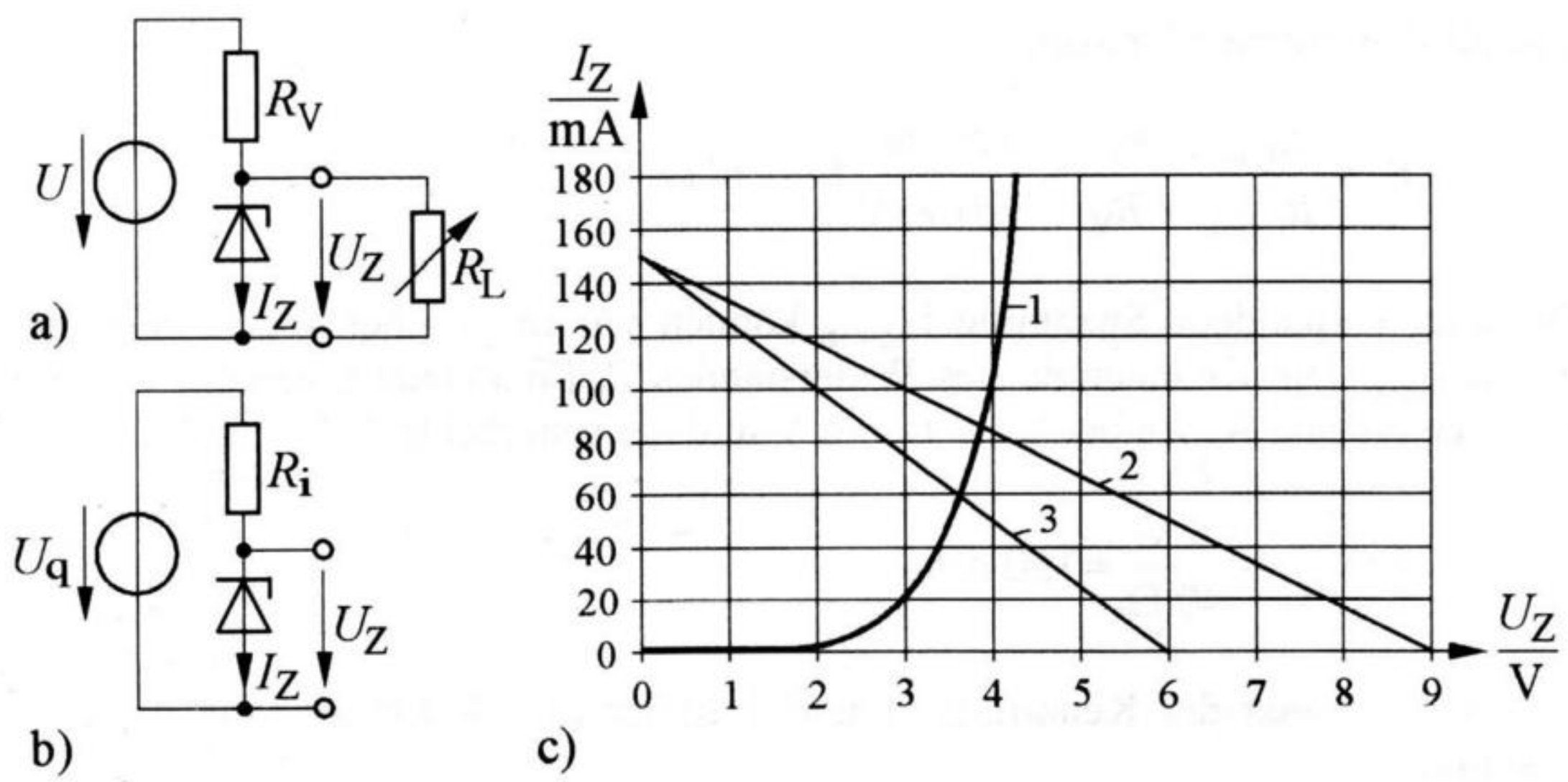


Bild 2.48 Schaltungsbeispiel für die Stabilisierung einer Spannung. a) Tatsächliche Schaltung, b) Ersatzschaltung, c) Strom-Spannungs-Kennlinie der Z-Diode (1) und Widerstandsgeraden (2) und (3)

Lösung

Die Spannung U_Z ist bei unendlich großem Lastwiderstand und somit offenem Lastkreis am größten. Zu ihrer Ermittlung tragen wir die Kenngerade des Widerstandes R_V (Widerstandsgerade) in Bild 2.48c ein. Sie schneidet die waagerechte Achse bei $U_Z = U = 9$ V und die senkrechte Achse im Punkt

$$I = \frac{U}{R_V} = \frac{9\ \text{V}}{60\ \Omega} = 150\ \text{mA}.$$

Der Schnittpunkt der Kennlinien 1 und 2 liefert die größtmögliche Ausgangsspannung

$$U_{Z\,max} = 3{,}9\ \text{V}.$$

Bei angeschlossenem Lastwiderstand können wir die aus der Spannungsquelle sowie aus den Widerständen R_V und R_L bestehende Schaltung durch eine *Ersatzspannungsquelle* (vergl. Abschnitt 2.2.10) wiedergeben, so dass das in Bild 2.48b dargestellte Schaltbild entsteht. Nehmen wir dabei an, dass der Lastwiderstand den kleinstmöglichen Wert $R_L = R_{L\,min} = 120\ \Omega$ hat, so gilt für die Quellenspannung

$$U_q = U\,\frac{R_{L\,min}}{R_V + R_{L\,min}} = 9\ \text{V}\,\frac{120\ \Omega}{(60 + 120)\ \Omega} = 6\ \text{V}$$

und für den Innenwiderstand

$$R_i = \frac{R_{L\,min} \cdot R_V}{R_{L\,min} + R_V} = \frac{120 \cdot 60}{120 + 60}\,\Omega = 40\,\Omega.$$

Die jetzt vorhandene Spannung U_{Zmin} können wir in gleicher Weise bestimmen wie U_{Zmax}. Die Kenngerade des Widerstandes R_i (Widerstandsgerade) schneidet die waagerechte Achse bei $U_Z = U_q = 6$ V und die senkrechte Achse im Punkt

$$I = \frac{U_q}{R_i} = \frac{6\text{ V}}{40\,\Omega} = 150\text{ mA}.$$

Der Schnittpunkt der Kennlinien 1 und 3 liefert die kleinstmögliche Ausgangsspannung

$$U_{Z\,min} = 3{,}6\text{ V}.$$

Die Spannung U_Z kann sich also maximal zwischen <u>3,6 V</u> und <u>3,9 V</u> ändern.

3 Das elektrische Feld

3.1 Die elektrische Ladung und ihre Wirkung

Atome bestehen, wie schon in Abschnitt 2.1.1 erläutert, aus *Protonen*, *Neutronen* und *Elektronen*. Das Elektron ist bekanntlich Träger der kleinstmöglichen negativen elektrischen Ladung. Sie hat den Betrag

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{A\,s}$$

und wird als **Elementarladung** bezeichnet. Das Proton trägt die gleich große positive Elementarladung. Neutronen verhalten sich elektrisch neutral.

Atome enthalten in der Regel ebenso viele Protonen wie Elektronen, so dass sich ihre elektrischen Wirkungen nach außen hin gegenseitig aufheben. Körper, die nur derartige Atome enthalten, wirken elektrisch neutral. Man spricht von *ungeladenen* Körpern. Ist dagegen die Zahl der Protonen verschieden von der Zahl der Elektronen, so tritt eine nach außen wirkende Ladung in Erscheinung. Man spricht von *geladenen Körpern*.

Unter der **Ladungsmenge** (oder **Ladung**) eines Raumes versteht man den Betrag der insgesamt vorhandenen positiven Ladungsmenge verringert um den Betrag der insgesamt vorhandenen negativen Ladungsmenge. Demzufolge gibt es zwei Arten von elektrischen Ladungen, positive und negative.

Elektrische Ladungen üben gegenseitig *Kräfte* aufeinander aus. Die Ursache hierfür lässt sich folgendermaßen erklären: Jede elektrische Ladung versetzt den ihr umgebenden Raum in einen besonderen Zustand, der sich dadurch äußert, dass auf *andere* Ladungen Kräfte ausgeübt werden. Diesen besonderen Raumzustand bezeichnet man als **elektrisches Feld**. Wird das elektrische Feld von einer ruhenden (sich nicht bewegenden) Ladung erzeugt, so spricht man auch von einem **elektrostatischen Feld**.

Die Erzeugung von elektrischen Ladungen und der von ihnen verursachten elektrischen Felder ist zum Beispiel dadurch möglich, dass man zwei sich nicht berührende leitfähige Körper mit einer Spannungsquelle verbindet. Man bezeichnet solche Körper auch als **Elektroden**. Bild 3.1 zeigt eine entsprechende Anordnung, bei der sich zwei Metallplatten in einem bestimmten Abstand gegenüberstehen.

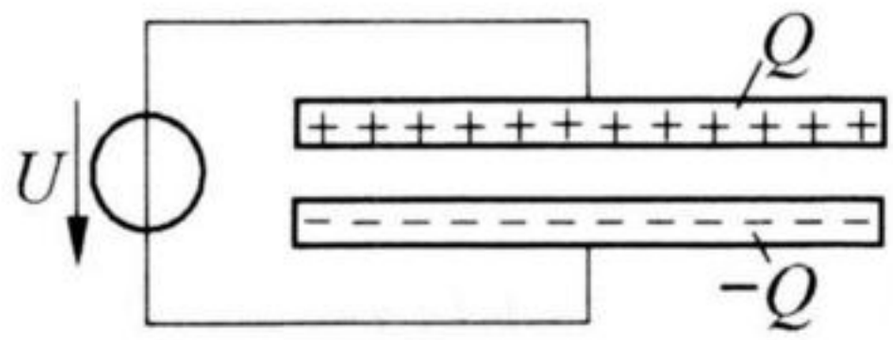


Bild 3.1 Erzeugung von elektrischen Ladungen mit Hilfe einer Spannungsquelle

Unter der Einwirkung der Spannung U werden von der oberen Platte Elektronen abgezogen und zur unteren befördert. Dadurch erhält die obere Elektrode eine positive Ladung (Q) und die untere die dem Betrage nach gleich große negative Ladung ($-Q$). Entfernt man die Spannungsquelle und betrachtet die beiden Platten unabhängig voneinander, so existiert zum einen ein positiv geladener Körper und zum anderen ein negativ geladener. Sie können beliebig voneinander entfernt werden, ohne dass sich ihre Ladung ändert. Beide Ladungen erfüllen den sie umgebenden Raum jeweils mit einem elektrischen Feld.

Elektrische Ladungen treten meistens paarweise auf, so beispielsweise auch in Bild 3.1, wo der positiven Ladung (Q) die gleich große negative Ladung ($-Q$) gegenübersteht. Sie können jedoch auch einzeln existieren. Letztlich gehört aber zu jeder Einzelladung (Q) eine gleich große Gegenladung ($-Q$). Bei der Betrachtung einer Einzelladung kann man sich die zugehörige Gegenladung als sehr weit entfernt vorstellen.

3.2 Die elektrischen Feldgrößen

3.2.1 Elektrische Feldstärke und elektrisches Potenzial

Ein elektrisches Feld hat, wie schon in Abschnitt 3.1 beschrieben, die Eigenschaft, auf eine eingebrachte elektrische Ladung eine Kraft auszuüben. Bringen wir nun eine kleine Ladung Q, die wir als *Probeladung* bezeichnen wollen, in ein vorhandenes elektrisches Feld ein, so zeigt sich, dass die auftretende Kraft F, je nach Größe der Probeladung, proportional zu ihr ansteigt. Es gilt also

$$F \sim Q.$$

Diese Abhängigkeit können wir auch durch die Gleichung

$$F = Q\,E \tag{3.1}$$

ersetzen, wobei E eine Proportionalitätskonstante darstellt, die eine Aussage über die Stärke des elektrischen Feldes in dem betreffenden Raumpunkt macht. Man bezeichnet E als **elektrische Feldstärke**. Aus Gl. (3.1) folgt

$$\boxed{E = \frac{F}{Q}.} \tag{3.2}$$

Hieraus finden wir für die elektrische Feldstärke die Einheit

$$[E] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\,s}} = \frac{\mathrm{V\,A\,s}}{\mathrm{A\,s\,m}} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Die in einem beliebigen Raumpunkt vorhandene elektrische Feldstärke ist also dadurch definiert, dass man die Kraft, die auf eine kleine eingebrachte Probeladung ausgeübt wird, durch die betreffende Probeladung teilt.

Wie die Kraft, so ist auch die elektrische Feldstärke eine *gerichtete Größe*, die durch einen **Vektor** dargestellt werden kann. Bezeichnen wir die Vektoren von Kraft und Feldstärke mit $\vec{F}$ und $\vec{E}$, so lässt sich die in Gl. (3.2) angegebene Beziehung auch in der Form

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q}} \tag{3.3}$$

darstellen. Gl. (3.3) beinhaltet, dass $\vec{F}$ und $\vec{E}$ bei positiver Ladung Q gleiche Richtungen haben und bei negativer Ladung entgegengesetzte.

Zur *anschaulichen Darstellung* eines elektrischen Feldes verwendet man **elektrische Feldlinien**. Sie geben an jeder Stelle des Feldes die *Richtung* der dort vorhandenen elektrischen Feldstärke an. In Bild 3.2 ist zum Beispiel das elektrische Feld, das in der Umgebung zweier Kugeln mit gleichen Ladungen verschiedenen Vorzeichens besteht, durch Feldlinien dargestellt. Alle Feldlinien beginnen bei der positiven und enden bei der negativen Ladung. Die Richtung wird durch Pfeile gekennzeichnet.

Betrachtet man das Feldlinienbild einer Einzelladung, so hat man sich vorzustellen, dass alle Feldlinien von ihr zu einer sehr weit entfernten Gegenladung verlaufen.

Ein Feldlinienbild gibt aber nicht nur Auskunft über die in bestimmten Punkten vorhandene *Richtung* des Feldes, sondern qualitativ auch über die *Stärke*. Je enger nämlich die Feldlinien an einer bestimmten Stelle beieinander liegen, umso größer ist dort die Feldstärke.

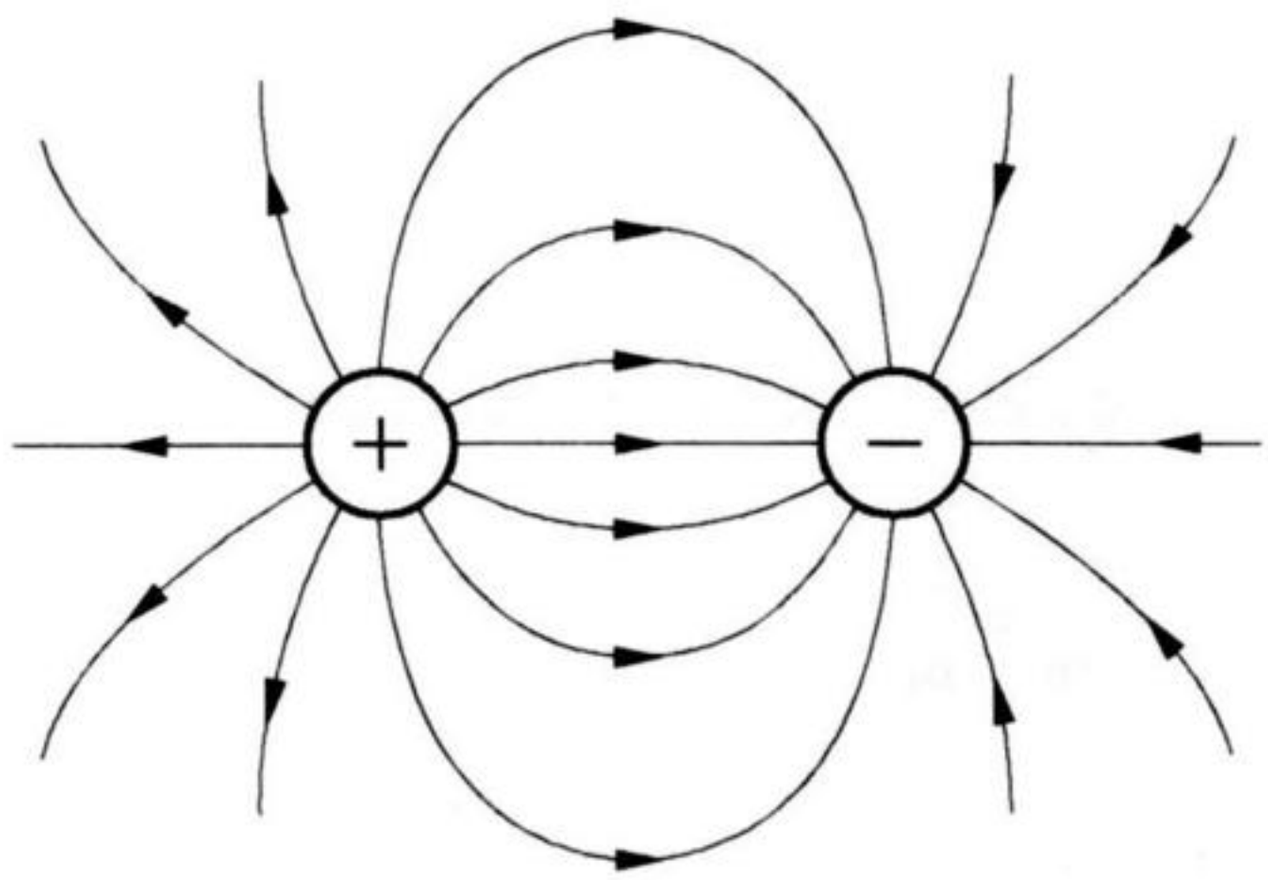


Bild 3.2 Darstellung des zwischen zwei geladenen Kugeln bestehenden elektrischen Feldes durch Feldlinien

Wir betrachten jetzt die in Bild 3.3 angegebene Anordnung, in der zwei parallel sich gegenüberstehende Metallplatten mit einer Spannungsquelle verbunden sind. Die dargestellte Elektrodenanordnung bezeichnet man als **Plattenkondensator**. Wir setzen voraus, dass der Plattenabstand (l) relativ klein im Vergleich zu der Fläche der Platten ist. In diesem Fall sind Randeinflüsse vernachlässigbar, so dass die im Plattenraum vorhandene elektrische Feldstärke überall die gleiche Größe und die gleiche Richtung hat. Man spricht dann von einem **homogenen** elektrischen Feld.

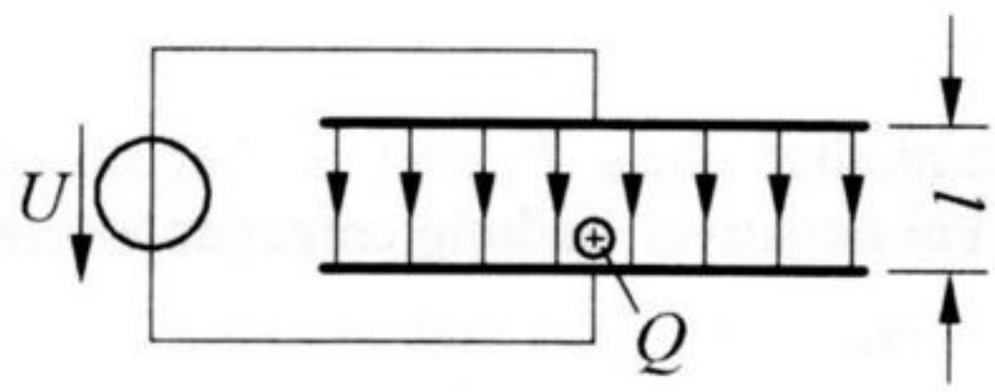


Bild 3.3 Zur Bestimmung der elektrischen Feldstärke im homogenen elektrischen Feld

Bringen wir jetzt eine positive Probeladung Q in den Plattenraum, und bewegen wir sie von der unteren Platte zur oberen, so haben wir nach Gl. (3.1) die Kraft

$$F = QE$$

zu überwinden. Hierbei stellt E die vorhandene elektrische Feldstärke dar. Bei dem Plattenabstand l beträgt die aufzuwendende Energie

$$W = Fl = QEl.$$

Nach Gl. (2.4) gilt jedoch auch

$$W = QU,$$

wobei U die von der Ladung Q durchlaufende Spannung, im vorliegenden Fall also die Kondensatorspannung ist. Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$U = El. \tag{3.4}$$

Hieraus folgt

$$\boxed{E = \frac{U}{l}.} \tag{3.5}$$

Die in einem Plattenkondensator nach Bild 3.3 vorhandene elektrische Feldstärke ergibt sich also dadurch, dass man die anliegende Spannung durch den Plattenabstand teilt. Allerdings gelten die in den Gln. (3.4) und (3.5) angegebenen Beziehungen nur im *homogenen* elektrischen Feld. Daher betrachten wir jetzt ein *inhomogenes* (nicht homogenes) Feld nach Bild 3.4.

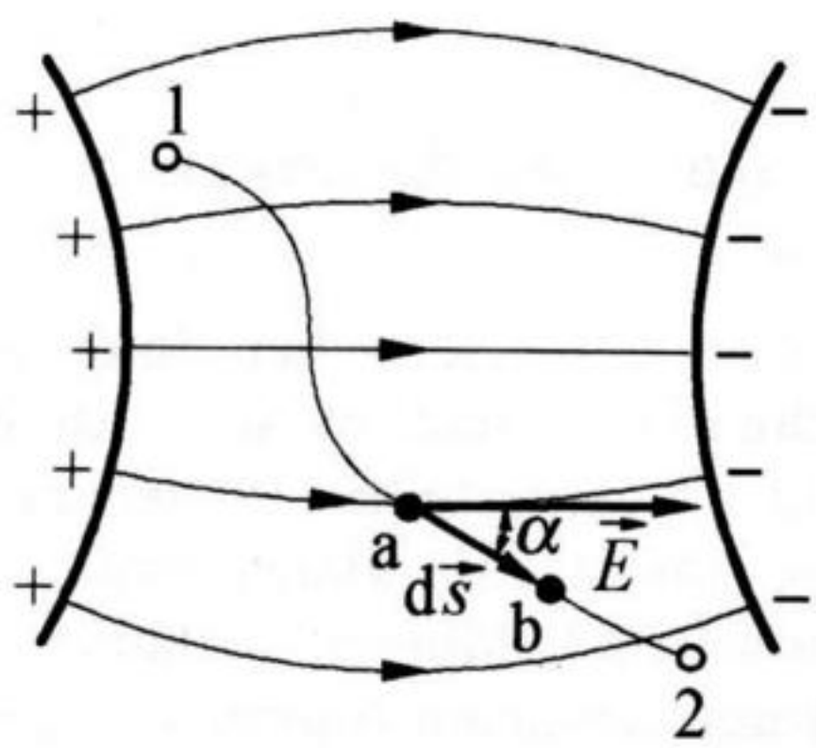


Bild 3.4 Zur Bestimmung von Spannungen im inhomogenen elektrischen Feld

Wir gehen von der Voraussetzung aus, dass die Feldstärke im gesamten Raum bekannt sei und machen uns zur Aufgabe, die zwischen den Punkten 1 und 2 bestehende Spannung zu bestimmen. Dazu geben wir zunächst eine beliebig verlaufende Linie vor, die die genannten Punkte miteinander verbindet. Die auf dieser Linie liegenden Punkte a und b seien Anfangs- und Endpunkt eines Wegelements $d\vec{s}$, das wir als Vektor auffassen. $\vec{E}$ sei der Vektor der an der betreffenden Stelle vorhandenen Feldstärke, α der zwischen $d\vec{s}$ und $\vec{E}$ bestehende Winkel. Bezeichnen wir den Betrag von $\vec{E}$ mit E, so hat die in Richtung von $d\vec{s}$ wirkende Feldstärkekomponente den Betrag $E\cos\alpha$. Daher ergibt sich die in Bild 3.4 zwischen a und b bestehende differenziell kleine Spannung mit $|d\vec{s}| = ds$ nach Gl. (3.4) als

$$dU = E\cos\alpha\, ds = \vec{E}\, d\vec{s}. \tag{3.6}$$

Hierin stellt $\vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}$ das **skalare Produkt** der beiden Vektoren $\vec{E}$ und $\mathrm{d}\vec{s}$ dar. Zur Bestimmung der zwischen den Punkten 1 und 2 bestehenden Spannung U müssen alle auf der Verbindungslinie 1 - 2 vorhandenen, differenziell kleinen Teilspannungen $\mathrm{d}U$ aufaddiert werden. Es gilt somit für diese Spannung

$$\boxed{U = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{s}.} \tag{3.7}$$

Die im elektrischen Feld zwischen zwei Punkten liegende Spannung ist also das **Wegintegral der elektrischen Feldstärke** zwischen diesen Punkten. Das Ergebnis ist im *elektrostatischen* Feld unabhängig vom Verlauf des gewählten Integrationsweges, in Bild 3.4 also unabhängig vom Verlauf der zwischen den Punkten 1 und 2 bestehenden Verbindungslinie.

Ein im elektrischen Feld vielfach verwendeten Begriff ist der des **elektrischen Potenzials**. Jedem Punkt innerhalb eines elektrischen Feldes kann ein bestimmtes Potenzial zugeordnet werden. Man versteht darunter diejenige elektrische Spannung, die der betreffende Punkt gegenüber einem bestimmten, beliebig festgelegten **Bezugspunkt** hat. Als Symbol für das elektrische Potenzial verwendet man φ, als Einheit **Volt** (V).

Verbindet man Punkte gleichen elektrischen Potenzials, so erhält man Flächen, die als **Äquipotenzialflächen** bezeichnet werden. Als Beispiel betrachten wir das elektrische Feld der in Bild 3.5 dargestellten Plattenanordnung. Die obere Elektrode trage eine positive, die untere eine gleich große negative Ladung. Die (mit Pfeilen versehenen) elektrischen Feldlinien verlaufen von oben nach unten, die durch φ_1, φ_2 und φ_3 gekennzeichneten Äquipotenzialflächen verlaufen senkrecht dazu. Sie erscheinen in Bild 3.5 - wegen der zweidimensionalen Wiedergabe - als **Äquipotenziallinien**.

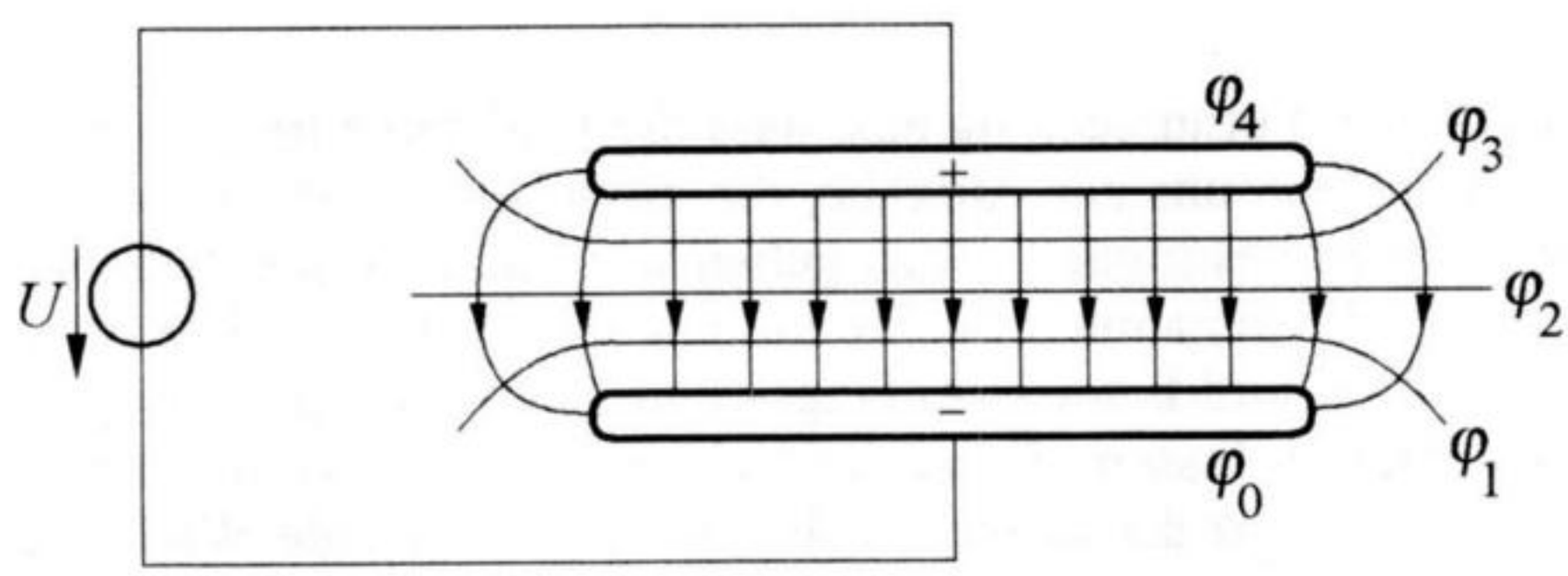


Bild 3.5 Zur Erläuterung der Begriffe "elektrisches Potenzial" und "Äquipotenzialfläche"

Jede Äquipotenzialfläche besitzt ein bestimmtes elektrisches Potenzial (φ). Wählen wir in Bild 3.5 beispielsweise die untere Platte als Bezugspunkt, und ist U

die zwischen den Elektroden liegende Spannung, so haben die eingetragenen Potenzialflächen die elektrischen Potenziale

$$\varphi_1 = \frac{U}{4}, \qquad \varphi_2 = \frac{U}{2}, \qquad \varphi_3 = \frac{3}{4}U.$$

Da die Oberflächen der beiden Elektroden ebenfalls Äquipotenzialflächen darstellen, gilt weiterhin

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_4 = U.$$

Leiteroberflächen sind im elektrostatischen Feld immer Äquipotenzialflächen. Das bedeutet auch, dass elektrische Feldlinien stets aus Leiteroberflächen senkrecht austreten oder auf Leiteroberflächen senkrecht auftreffen. Bei der beschriebenen Definition des Potenzials stellt die *Differenz der Potenziale* zweier Punkte stets die zwischen ihnen bestehende *elektrische Spannung* dar.

3.2.2 Der elektrische Fluss

In Bild 3.6 seien a und b die Elektroden eines Plattenkondensators, wobei a eine positive Ladung (Q) und b die dem Betrage nach gleich große negative Ladung ($-Q$) tragen möge.

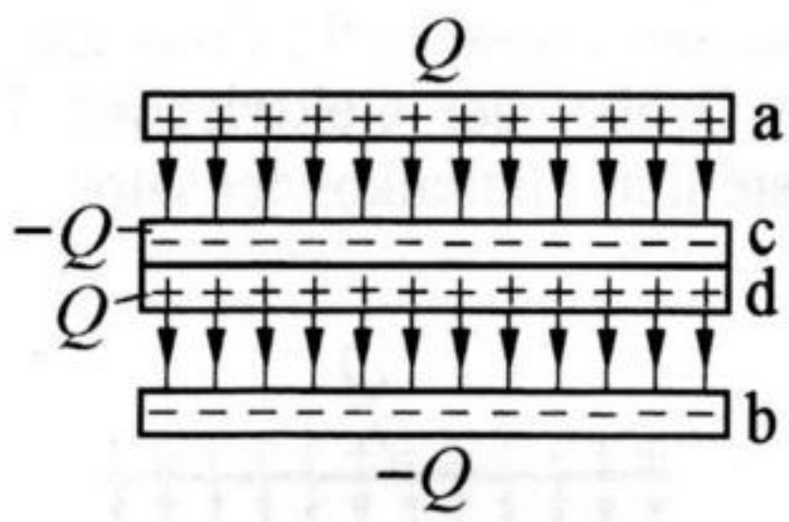


Bild 3.6 Zur Erläuterung des Begriffs „elektrischer Fluss"

Bringen wir jetzt die gleich großen, aufeinander liegenden Platten c und d in den Plattenraum, so übt das zwischen a und b bestehende elektrische Feld auf die in c und d vorhandenen Ladungsträger Kräfte aus. Dadurch bewegen sich freie Elektronen von unten nach oben, so dass sich die Platte c negativ auflädt und die Platte d positiv. Diese Trennung (Erzeugung) von elektrischen Ladungen wird als **Influenz** bezeichnet. Das vorhandene elektrische Feld influenziert auf die Elektrode c eine negative und auf die Elektrode d eine positive Ladung.

Da alle Elektroden in Bild 3.6 die gleiche Größe haben, werden die influenzierten Ladungen dem Betrage nach genauso groß wie die auf den äußeren Platten

sich befindenden. Dadurch wird das Innere der Platten c und d feldfrei, so dass anschließend keine weitere Ladungsverschiebung mehr erfolgt.

Die Gesamtheit des in Bild 3.6 von der Elektrode a ausgehenden und auf die Elektrode b auftreffenden Feldes bezeichnet man als **elektrischen Fluss**. Er verschiebt in den inneren Platten eine Ladung von der Größe, die gleich der auf den äußeren Platten sich befindenden ist. Es ist somit nahe liegend, die Größe des elektrischen Flusses mit der zugehörigen Ladung gleichzusetzen.

Dies hat zu folgender Definition geführt: Der von einer positiven Ladung (Q) ausgehende oder der auf eine negative Ladung ($-Q$) auftreffende elektrische Fluss (Ψ) ist stets gleich der betreffenden Ladung Q. Es gilt also

$$\boxed{\Psi = Q.} \tag{3.8}$$

Damit hat der elektrische Fluss auch die gleiche Einheit wie die Ladung, so dass

$$[\Psi] = \mathrm{A\,s} = \mathrm{C}$$

ist.

3.2.3 Elektrische Flussdichte

Die Einführung des elektrischen Flusses (Ψ) führt uns zu einer weiteren im elektrischen Feld verwendeten Größe, der **elektrischen Flusdichte**. Wir betrachten dazu den in Bild 3.7 dargestellten Plattenkondensator.

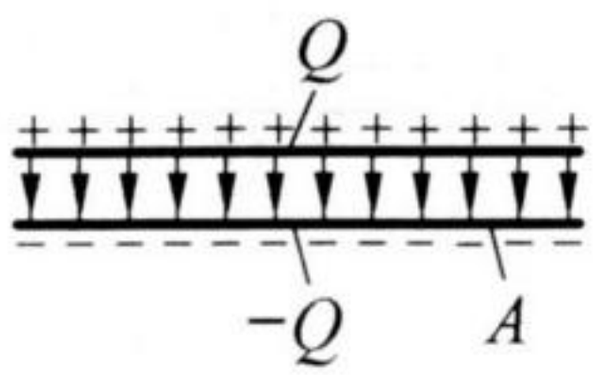


Bild 3.7 Zur Erläuterung des Begriffs „elektrische Flussdichte"

Die obere Platte trage eine positive Ladung (Q), die untere die dem Betrage nach gleich große negative Ladung ($-Q$). Der zwischen den Elektroden verlaufende elektrische Fluss (Ψ) ist nach Abschnitt 3.2.2 gleich der Ladung Q. Teilen wir nun diesen Fluss durch diejenige Fläche, auf die er sich verteilt, also durch die Plattenfläche A des Kondensators, so erhalten wir die **elektrische Flussdichte** (D). In Bild 3.7 herrscht also zwischen den Platten die Flussdichte

$$D = \frac{\Psi}{A}.$$

Da nach Gl. (3.8) $\Psi = Q$ ist, wird daraus

$$\boxed{D = \frac{Q}{A}.} \tag{3.9}$$

Die Einheit für D folgt aus Gl. (3.9) als

$$[D] = \frac{\mathrm{A\,s}}{\mathrm{m}^2}.$$

Gl. (3.9) gilt nur im *homogenen* elektrischen Feld, also zum Beispiel in der Anordnung nach Bild 3.7. In einem beliebigen inhomogenen Feld hat man sich unter der Flussdichte den auf das Flächenelement bezogenen Fluss vorzustellen. Die Flussdichte stellt daher eine dem Raumpunkt zugeordnete Feldgröße dar. Sie ist - ebenso wie die elektrische Feldstärke - eine *gerichtete* Größe, die somit durch einen Vektor dargestellt werden kann. Die Richtung der in einem bestimmten Raumpunkt vorhandenen Flussdichte $\vec{D}$ stimmt stets mit der Richtung der dort herrschenden Feldstärke $\vec{E}$ überein.

Zur weiteren Erläuterung betrachten wir das in Bild 3.8 dargestellte Flächenelement dA. Es kann durch einen Vektor d$\vec{A}$ dargestellt werden, dessen Betrag gleich der schraffierten Fläche ist und dessen Richtung senkrecht dazu verläuft. Das Flächenelement werde von einem elektrischen Feld der Flussdichte D durchsetzt. Die Feldrichtung ist durch die Richtung des Vektors $\vec{D}$ gegeben. α ist der zwischen d$\vec{A}$ und $\vec{D}$ bestehende Winkel.

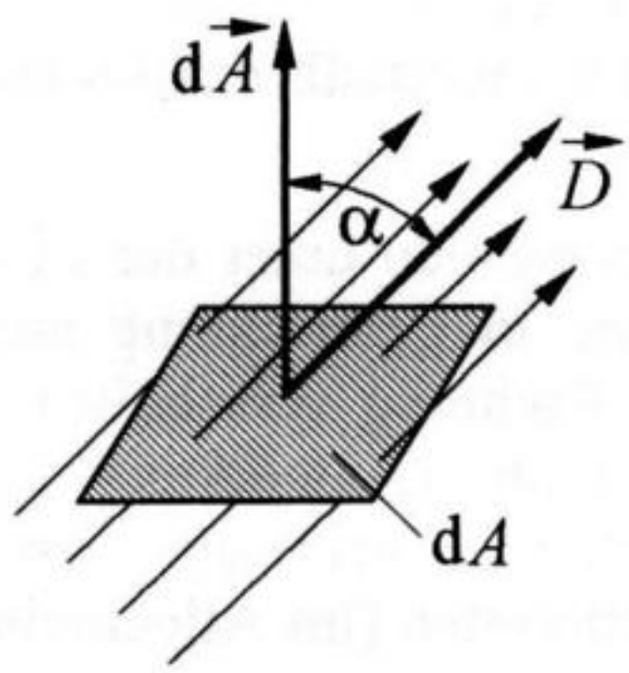


Bild 3.8 Zur Bestimmung des elektrischen Flusses im inhomogenen Feld

Da die in Richtung von d$\vec{A}$ wirkende Flussdichtekomponente den Betrag $D\cos\alpha$ hat, beträgt der das Flächenelement durchdringende elektrische Fluss

$$\mathrm{d}\Psi = D\,\mathrm{d}A\cos\alpha = \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

Hierbei stellt $\vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}$ das *skalare Produkt* der Vektoren $\vec{D}$ und $\mathrm{d}\vec{A}$ dar. Durch Integrieren findet man den durch eine beliebige Fläche A verlaufenden Fluss als

$$\Psi = \int_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}. \tag{3.10}$$

Bildet die Fläche A eine *geschlossene Hülle*, und befindet sich innerhalb der Hülle eine Ladung Q, so gilt unter Berücksichtigung von Gl. (3.8)

$$\boxed{Q = \oint_A \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{A}.} \tag{3.11}$$

Der hierbei im Integrationszeichen enthaltene Kreis bedeutet, dass die Integration über eine *geschlossene Fläche* vorzunehmen ist. Die rechte Seite von Gl. (3.11) stellt den von der Ladung Q ausgehenden elektrischen Fluss dar. Er ist stets gleich der innerhalb der Hülle vorhandenen Ladung. Befinden sich in der Hülle mehrere Ladungen, so ist der durch die Hülle verlaufende elektrische Fluss gleich der Summe der Ladungen. Gl. (3.11) gilt unabhängig von der Verteilung der Ladung innerhalb der Hülle und unabhängig von der Form der Hüllfläche. Die Gleichung wird auch als **Gauß'scher Satz der Elektrostatik** bezeichnet.

3.2.4 Nichtleiter im elektrischen Feld

Ein nicht leitender Stoff, der von einem elektrischen Feld durchsetzt wird, wird als **Dielektrikum** bezeichnet. Da sich die Ladungsträger in einem derartigen Stoff nicht frei bewegen können, ist kein Stromfluss möglich. Es kommt jedoch zu Verschiebungen der Ladungsträger innerhalb der Moleküle. Man unterscheidet dabei **unpolare** und **polare** Stoffe.

Bei den **unpolaren** Stoffen werden unter der Einwirkung des elektrischen Feldes die (positiven) Atomkerne *in* Feldrichtung und die (negativen) Elektronenschalen in *entgegengesetzter* Richtung verschoben. Die Atome werden somit *deformiert*, und es entstehen **Dipole**. (Anmerkung: Als Dipol bezeichnet man eine Anordnung aus zwei dem Betrage nach gleichen Ladungen mit verschiedenen Vorzeichen, die in einem bestimmten (im Allgemeinen geringen) Abstand voneinander angeordnet sind.)

Bei den **polaren** Stoffen sind die Atome oder Moleküle von Natur aus Dipole. Sie sind normalerweise ungeordnet. Wenn sie frei beweglich sind, was bei Flüssigkeiten und Gasen der Fall ist, stellen sie sich unter der Einwirkung eines elektrischen Feldes in Feldrichtung ein. Darüber hinaus werden auch hier die Atome (wie bei den unpolaren Stoffen) deformiert.

In beiden Fällen werden innerhalb der Atome oder Moleküle die Schwerpunkte der positiven Ladungen *in* Richtung und die der negativen Ladungen *entgegen* der Richtung des äußeren Feldes verschoben. Man bezeichnet diese Erscheinung als **dielektrische Polarisation**. Sie nimmt mit der Stärke des äußeren Feldes zu. Eine Sättigung (also eine Ausrichtung aller Dipole) ist im Allgemeinen nicht erreichbar. Mit dem Verschwinden des Feldes verschwindet auch die Polarisation.

Die beschriebene Polarisation hat zur Folge, dass sich dem äußeren elektrischen Feld ein durch die Ladungsverschiebung innerhalb der Atome oder Moleküle verursachtes „inneres" elektrisches Feld überlagert. Es führt bei vorgegebener Flussdichte zu einer Verringerung der Feldstärke oder bei vorgegebener Feldstärke zu einer Vergrößerung der Flussdichte.

Untersuchungen zeigen, dass in fast allen Stoffen die elektrische Flussdichte D und die elektrische Feldstärke E einander proportional sind. Es gilt dann

$$D \sim E.$$

Ersetzen wir diese Abhängigkeit durch die Gleichung

$$\boxed{D = \varepsilon E,} \tag{3.12}$$

so stellt ε eine Proportionalitätskonstante dar. Sie ist wegen der in verschiedenen Stoffen unterschiedlich stark auftretenden Polarisation vom Material abhängig. Man bezeichnet ε als **Permittivität**. Bei einigen Stoffen (zum Beispiel Bariumtitanat) ist ε nicht konstant, sondern von der vorhandenen Feldstärke E abhängig.

Im leeren Raum kann keine Polarisation auftreten. Die hier vorhandene Permittivität wird mit ε_0 bezeichnet und heißt **elektrische Feldkonstante** oder **Permittivität des leeren Raumes**. Sie beträgt bei der beschriebenen Festlegung von D und E

$$\boxed{\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}.} \tag{3.13}$$

Die Permittivität beliebiger Stoffe lässt sich dann in der Form

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0\, \varepsilon_\mathrm{r}} \tag{3.14}$$

angeben. Bei dieser Darstellungsweise wird die Polarisationseigenschaft des jeweils verwendeten Dielektrikums durch den dimensionslosen Faktor ε_r berücksichtigt, der als **Permittivitätszahl** bezeichnet wird. Definitionsgemäß ist ε_r im leeren Raum gleich eins. In Tabelle 3.1 sind die Permittivitätszahlen verschiedener Stoffe bei einer Temperatur von 20 °C angegeben.

Tabelle 3.1
Permittivitätszahlen verschiedener Stoffe bei 20 °C

Stoff	Permittivitätszahl ε_r
Bariumtitanat	> 1000
Glas	4 . . . 12
Glimmer	5 . . . 8
Luft	1,0006
Plexiglas	3
Porzellan	6
Transformatorenöl	2,3
Wasser (destilliert)	81

Aufgabe 3.1

In einem Kondensator nach Bild 3.9 sind $d_1 = 0{,}3$ mm und $d_2 = 0{,}5$ mm starke Isolierstoffplatten untergebracht. Ihre Permittivitätszahlen sind $\varepsilon_{r1} = 3{,}8$ und $\varepsilon_{r2} = 7$. Die Fläche einer Platte beträgt $A = 900$ cm^2. Die obere Platte trage die positive Ladung $Q = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$ As, die untere die dem Betrage nach gleich große negative Ladung $(-Q)$.

a) Wie groß sind die Flussdichten D_1 und D_2 sowie die zugehörigen Feldstärken E_1 und E_2 in den beiden Dielektrika?

b) Mit welchen Teilspannungen U_1 und U_2 werden die Isolierstoffplatten beansprucht?

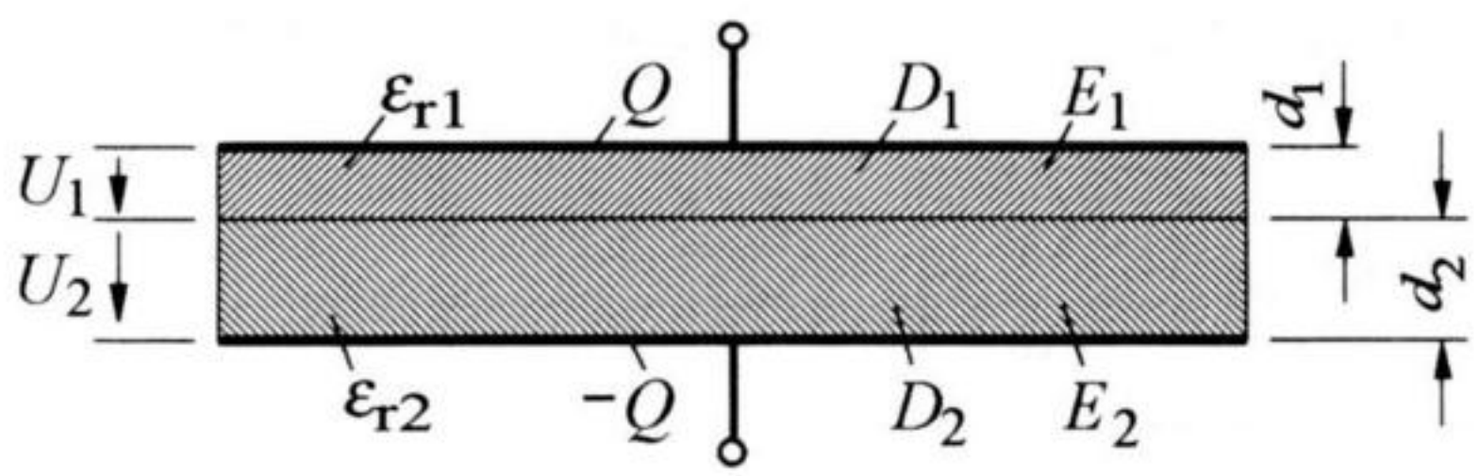


Bild 3.9 Plattenkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

Lösung

a) Der zwischen den Elektroden verlaufende elektrische Fluss Ψ ist nach Gl. (3.8) gleich der Ladung Q. Die Flussdichte ist daher in beiden Dielektrika gleich groß und beträgt nach Gl. (3.9)

$$D_1 = D_2 = \frac{Q}{A} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{As}}{900 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = \underline{27{,}8 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{As}}{\text{m}^2}}.$$

Daraus ergeben sich nach Gl. (3.12) in Verbindung mit Gl. (3.14) die Feldstärken

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\, \varepsilon_{r1}} = \frac{27{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{As/m}^2}{\left[8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{As/(Vm)}\right] \cdot 3{,}8} = 8{,}26 \cdot 10^5\ \frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{826\ \frac{\text{V}}{\text{mm}}},$$

$$E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0\, \varepsilon_{r2}} = \frac{27{,}8 \cdot 10^{-6}\ \text{As/m}^2}{\left[8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{As/(Vm)}\right] \cdot 4{,}7} = 6{,}68 \cdot 10^5\ \frac{\text{V}}{\text{m}} = \underline{668\ \frac{\text{V}}{\text{mm}}}.$$

b) Die obere Isolierstoffplatte wird nach Gl. (3.4) mit der Spannung

$$U_1 = E_1\, d_1 = 826\ \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0{,}3\ \text{mm} = \underline{248\ \text{V}}$$

beansprucht und die untere mit

$$U_2 = E_2\, d_2 = 668\ \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0{,}5\ \text{mm} = \underline{334\ \text{V}}.$$

Aufgabe 3.2

Ein Kondensator mit dem Plattenabstand $d = 1$ mm und Luft als Dielektrikum ist fest mit einer Gleichspannungsquelle von $U = 440$ V verbunden. In den Plattenraum wird bei unverändertem Elektrodenabstand eine $d_1 = 0{,}6$ mm starke Isolierstoffplatte mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 4$ eingebracht.

Mit welcher Spannung U_1 wird die Isolierstoffplatte beansprucht, und welche Spannung U_2 liegt am verbleibenden Luftraum?

Lösung

Bezeichnen wir die in der Isolierstoffplatte vorhandene elektrische Feldstärke als E_1 und die im verbleibenden Luftraum bestehende als E_2, so gilt unter Berücksichtigung von Gl. (3.4)

$$U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 (d - d_1).$$

Die elektrische Flussdichte D ist in beider Dielektrika (Isolierstoffplatte und Luftraum) gleich groß. Berücksichtigen wir, dass die Permittivitätszahl von Luft gleich eins ist, so folgt aus

$$D = \varepsilon_0\, \varepsilon_r\, E_1 = \varepsilon_0\, E_2$$

die Beziehung

$$E_2 = \varepsilon_r\, E_1.$$

Setzen wir sie in die oben angegebene Gleichung ein, so erhalten wir

$$U = E_1\, d_1 + \varepsilon_r\, E_1\, (d - d_1).$$

Hieraus ergibt sich die in der Isolierstoffplatte vorhandene Feldstärke als

$$E_1 = \frac{U}{d_1 + \varepsilon_r\,(d - d_1)} = \frac{440\ \text{V}}{0{,}6\ \text{mm} + 4\ (1{,}0 - 0{,}6)\ \text{mm}} = 200\ \frac{\text{V}}{\text{mm}},$$

so dass die Platte mit der Spannung

$$U_1 = E_1\, d_1 = 200\ \frac{\text{V}}{\text{mm}} \cdot 0{,}6\ \text{mm} = \underline{120\ \text{V}}$$

beansprucht wird. Am verbleibenden Luftraum liegt damit die Spannung

$$U_2 = U - U_1 = 440\ \text{V} - 120\ \text{V} = \underline{320\ \text{V}}.$$

3.3 Berechnung elektrostatischer Felder

Zur Beschreibung elektrischer Felder dienen, wie erläutert, die **elektrische Flussdichte** (D), die **elektrische Feldstärke** (E) und das **elektrische Potenzial** (φ). Es soll jetzt untersucht werden, in welcher Weise diese Größen in der Umgebung von elektrischen Ladungen bestimmt werden können. Dazu betrachten wir nachfolgend verschiedene Feldformen.

3.3.1 Das Feld der geladenen Kugel

Eine Metallkugel mit dem Radius r_0 trage nach Bild 3.10 eine positive Ladung Q. Die Betrachtung dieser Anordnung können wir (gedanklich) in der Annahme vornehmen, dass sich die Gegenladung ($-Q$) auf einer konzentrisch angeordneten Hohlkugel mit sehr großem (unendlich großem) Radius befindet.

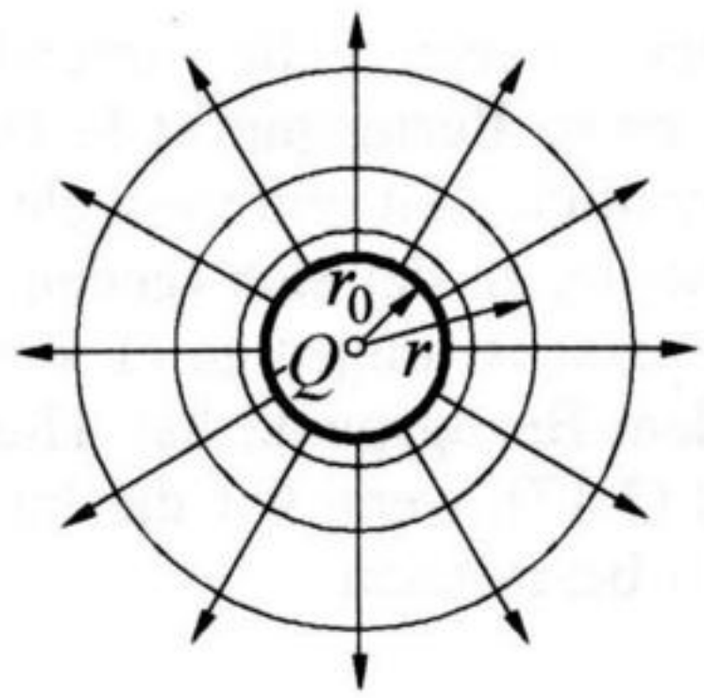


Bild 3.10 Elektrisches Feld in der Umgebung einer geladenen Kugel

Die elektrischen Feldlinien verlaufen daher radial nach außen und sind gleichmäßig verteilt. Äquipotenzialflächen sind die Oberflächen konzentrischer Kugeln. Die Oberflächengröße einer beliebigen Aquipotenzialfläche mit dem Radius r beträgt somit

$$\boxed{A = 4\pi r^2.} \tag{3.15}$$

Die dort vorhandene elektrische Flussdichte erhalten wir dadurch, dass wir den von der Ladung Q ausgehenden Fluss Ψ, der nach Gl. (3.8) stets gleich Q ist, durch A dividieren. Es gilt also

$$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{\Psi}{4\pi r^2}.$$

Mit $\Psi = Q$ wird daraus

$$\boxed{D = \frac{Q}{4\pi r^2}.} \tag{3.16}$$

Gl. (3.16) gibt damit (allgemein) die Flussdichte in der Umgebung einer geladenen Kugel im Abstand r vom Mittelpunkt an. Daraus folgt für die elektrische Feldstärke durch Anwendung der in Gl. (3.12) angegebenen Beziehung $E = D/\varepsilon$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}.} \tag{3.17}$$

Zur Bestimmung des an der gleichen Stelle vorhandenen elektrischen Potenzials ist es zunächst erforderlich, einen **Bezugspunkt** festzulegen. Zweckmäßigerweise wählt man hierfür einen unendlich weit entfernt gelegenen Punkt. Das ist in Bild 3.10 gleichzeitig diejenige Stelle, an der sich (gedanklich) die Gegenladung $(-Q)$ befindet. Das gesuchte Potenzial ist diejenige elektrische Spannung, die die betrachtete Stelle gegenüber dem Bezugspunkt hat. Hierfür erhalten wir durch Anwendung der Gln. (3.7) und (3.17), wenn wir die Integrationsvariable nicht mit s und nicht mit r, sondern mit x bezeichnen,

$$\varphi = \int_r^\infty \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_r^\infty .$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen der Grenzen für das elektrische Potenzial eines Punktes, der in Bild 3.10 den Abstand r vom Mittelpunkt hat,

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}.} \tag{3.18}$$

Ist der Radius r_0 der Metallkugel in Bild 3.10 verschwindend klein, so bezeichnet man die Ladung als **Punktladung**. Das elektrische Feld einer Punktladung unterscheidet sich also nicht von dem einer geladenen Kugel mit endlichem Radius.

3.3.2 Das Feld in der Umgebung mehrerer Ladungen

Eine positive Punktladung Q_1 und eine negative Punktladung Q_2 seien entsprechend Bild 3.11 angeordnet. Wir wollen uns mit der Frage befassen, welche elektrische Feldstärke im Punkt P herrscht und welches elektrisches Potenzial dieser Punkt hat.

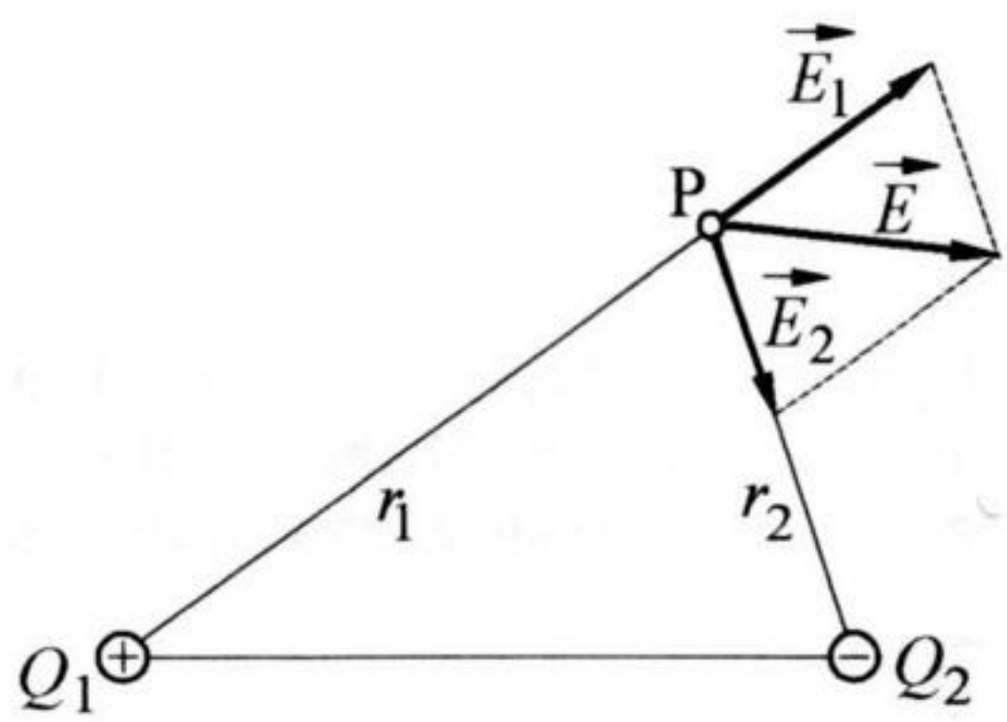


Bild 3.11 Zur Bestimmung von Feldgrößen in der Umgebung mehrerer Ladungen

Dazu betrachten wir zunächst nur die Ladung Q_1. Sie erzeugt nach Gl. (3.17) im Punkt P eine Feldstärke mit dem Betrag

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r_1^2}.$$

Entsprechend gilt für den Betrag der von der Ladung Q_2 erzeugte Feldstärke

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon r_2^2}.$$

Die Vektoren dieser Feldstärken sind in Bild 3.11 dargestellt. Die positive Ladung Q_1 erzeugt im Punkt P eine nach außen gerichtete Feldstärke $\vec{E}_1$. Die von der negativen Ladung Q_2 verursachte Feldstärke $\vec{E}_2$ zeigt in Richtung von Q_2. Die vektorielle Addition von $\vec{E}_1$ und $\vec{E}_2$ liefert die im Punkt P vorhandene Gesamtfeldstärke

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Zur Bestimmung des im Punkt P vorhandenen elektrischen Potenzials addieren wir diejenigen Potenziale, die von den Ladungen Q_1 und Q_2 erzeugt werden. Nach Gl. (3.18) finden wir das Ergebnis

$$\varphi = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon r_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2}\right). \tag{3.19}$$

Hierbei ist zu beachten, dass die Ladungen Q_1 und Q_2 unter Beachtung des Vorzeichens einzusetzen sind.

Die beschriebenen Verfahren zur Ermittlung der Feldstärke und des Potenzials können in gleicher Weise für beliebig viele im Raum vorhandene Punktladungen durchgeführt werden.

Aufgabe 3.3

Die Punktladungen $Q_1 = 2{,}5\cdot 10^{-8}$ As, $Q_2 = 1{,}5\cdot 10^{-8}$ As und $Q_3 = -2{,}0\cdot 10^{-8}$ As bilden nach Bild 3.12a Eckpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $a = 10$ cm. Die Permittivitätszahl beträgt $\varepsilon_r = 1$.

a) Welche elektrische Feldstärke E herrscht im Mittelpunkt P des Dreiecks, und welcher Winkel α besteht zwischen der Richtung dieser Feldstärke und der zwischen Q_1 und Q_3 bestehenden Verbindungslinie?

b) Welches elektrisches Potenzial φ herrscht im Punkt P?

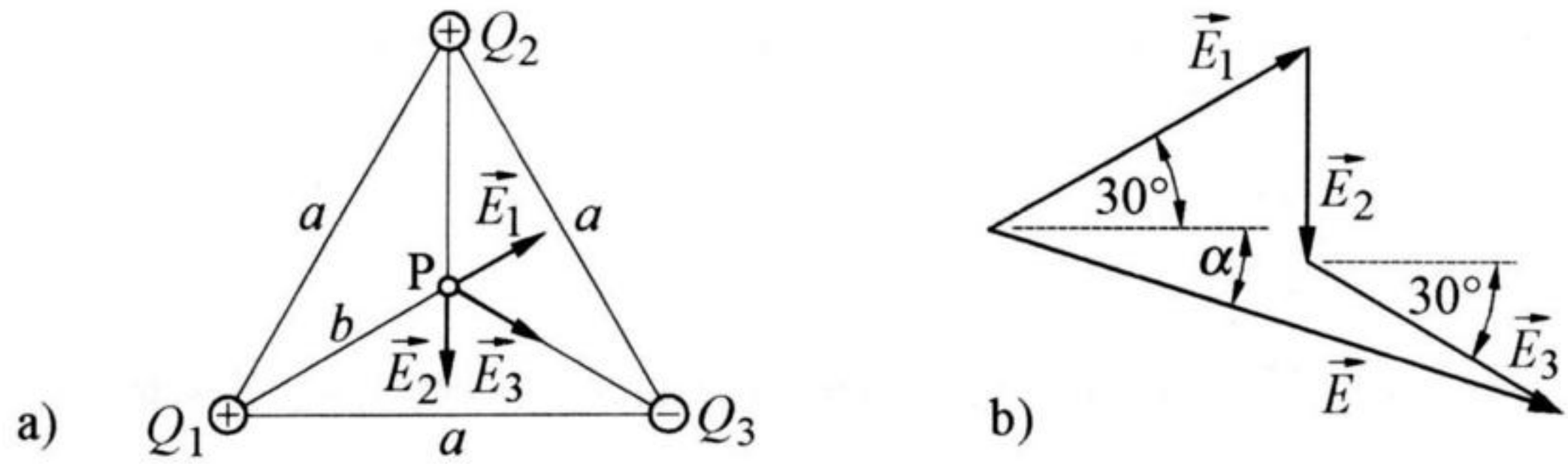


Bild 3.12 Zur Berechnung der Feldstärke und des Potenzials in der Umgebung von Punktladungen. a) Anordnung der Ladungen, b) vektorielle Addition der Feldstärkekomponenten

Lösung

a) Jede Punktladung hat vom Mittelpunkt des Dreiecks den Abstand

$$b = \frac{a/2}{\cos 30°} = \frac{5\text{ cm}}{\cos 30°} = 5{,}77\text{ cm}.$$

Die von den Ladungen im Punkt P erzeugten Feldstärkekomponenten haben nach Gl. (3.17) in Verbindung mit Gl. (3.14) bei $\varepsilon_r = 1$ die Beträge

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-8}\text{ As}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot(0{,}0577\text{ m})^2} = 6{,}74\cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{1{,}5\cdot 10^{-8}\text{ As}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot(0{,}0577\text{ m})^2} = 4{,}04\cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}},$$

$$E_3 = \frac{|Q_3|}{4\pi\varepsilon_0 b^2} = \frac{2{,}0\cdot 10^{-8}\text{ As}}{4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot(0{,}0577\text{ m})^2} = 5{,}39\cdot 10^4\,\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

Die Richtungen dieser Feldstärkekomponenten sind in Bild 3.12a eingetragen. Addieren wir sie entsprechend Bild 3.12b vektoriell, so erhalten wir die im Punkt P vorhandene Gesamtfeldstärke. Dazu kann man beispielsweise die komplexe Rechnung anwenden (vergl. Abschnitt 6.5.1), indem man die Vektoren $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ und $\vec{E}_3$ durch komplexe Ausdrücke darstellt und diese (mit einem Taschenrechner) addiert. So ersehen wir aus der Gleichung

$$6{,}74 \cdot e^{j30°} + 4{,}04 \cdot e^{-j90°} + 5{,}39 \cdot e^{-j30°} = 11{,}0 \cdot e^{-j17{,}8°},$$

dass die sich ergebende Gesamtfeldstärke den Betrag

$$\underline{E = 11{,}0 \cdot 10^4 \text{ V/m}}$$

hat und gegenüber der zwischen Q_1 und Q_3 bestehenden Verbindungslinie nach Bild 3.12b den Winkel

$$\underline{\alpha = 17{,}8°}$$

einschließt.

b) Der Punkt P hat nach Gl. (3.19) das elektrische Potenzial

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{b} + \frac{Q_2}{b} + \frac{Q_3}{b}\right),$$

$$\varphi = \frac{(2{,}5 + 1{,}5 - 2{,}0)10^{-8} \text{ As}}{4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12} \dfrac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 0{,}0577 \text{ m}} = \underline{3{,}12 \cdot 10^3 \text{ V}}.$$

3.3.3 Das Feld des geladenen langen geraden Leiters

Ein langer gerader Leiter nach Bild 3.13 mit dem Radius r_0 und der Länge l trage eine positive Ladung Q. Die Gegenladung $(-Q)$ sei sehr weit entfernt. Wir können uns vorstellen, dass sie sich auf einem koaxial angeordneten Rohr mit großem Durchmesser befindet.

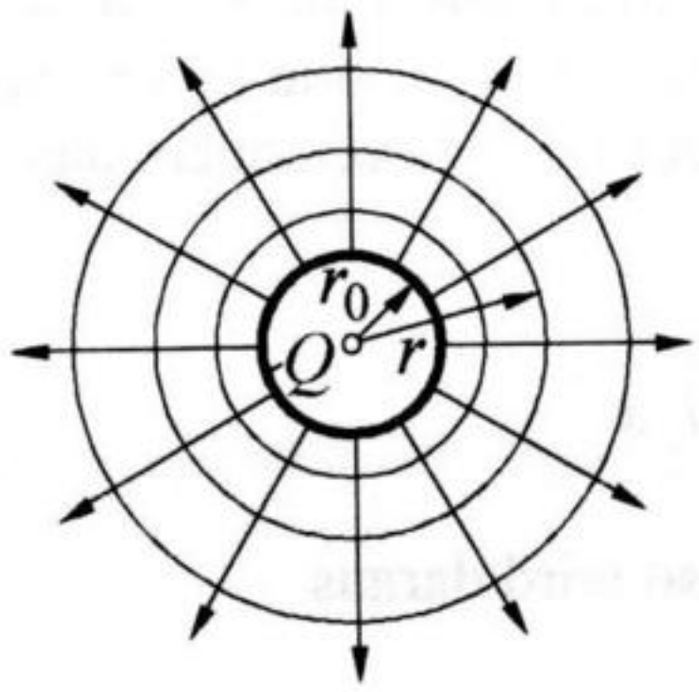


Bild 3.13 Elektrisches Feld in der Umgebung eines geladenen langen geraden Leiters

Die elektrischen Feldlinien verlaufen radial nach außen. Bei Vernachlässigung der Randeinflüsse sind sie gleichmäßig verteilt. Äquipotenzialflächen sind die Oberflächen koaxialer Zylinder. Der vom Leiter ausgehende elektrische Fluss Ψ verursacht im Abstand r von der Mittellinie die Flussdichte

$$D = \frac{\Psi}{A} = \frac{\Psi}{2\pi r l},$$

wobei

$$A = 2\pi r l$$

die Oberfläche einer Äquipotenzialfläche mit dem Radius r ist. Unter Beachtung von Gl. (3.8) wird daraus

$$\boxed{D = \frac{Q}{2\pi r l}.} \tag{3.20}$$

Damit gilt für die elektrische Feldstärke im Abstand r von der Mittellinie unter Berücksichtigung von Gl. (3.12)

$$\boxed{E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}.} \tag{3.21}$$

Wählen wir zur Berechnung des elektrischen Potenzials als Bezugspunkt einen unendlich weit entfernt liegenden Punkt, so erhalten wir für die Ergebnisse unendlich große Werte. Daher wollen wir das zu bestimmende Potenzial auf einen Bezugspunkt beziehen, der von der Mittellinie der in Bild 3.13 dargestellten Anordnung den Abstand r_a hat. In diesem Fall hat ein im Abstand r von der Mittellinie gelegener Punkt nach den Gln. (3.7) und (3.21), wenn wir die Integrationsvariable nicht mit s oder r, sondern mit x bezeichnen, das Potenzial

$$\varphi = \int_r^{r_a} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_r^{r_a} \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Setzen wir die Grenzen ein, so wird daraus

$$\boxed{\varphi = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_a}{r}.}$$

3.4 Die Kapazität von Kondensatoren

3.4.1 Definition der Kapazität

Eine beliebige Anordnung aus zwei Elektroden, die voneinander isoliert sind, bezeichnet man als **Kondensator**. Verbindet man eine solche Elektrodenanordnung mit einer Spannungsquelle, so werden von der *einen* Elektrode Ladungsträger abgezogen und zur *anderen* befördert. Beispielsweise wird in Bild 3.14a durch die Einwirkung der Spannung U der unteren Elektrode eine negative Ladung ($-Q$) zugeführt. Sie ist der oberen Elektrode entnommen worden, so dass diese die dem Betrage nach gleich große positive Ladung ($+Q$) trägt.

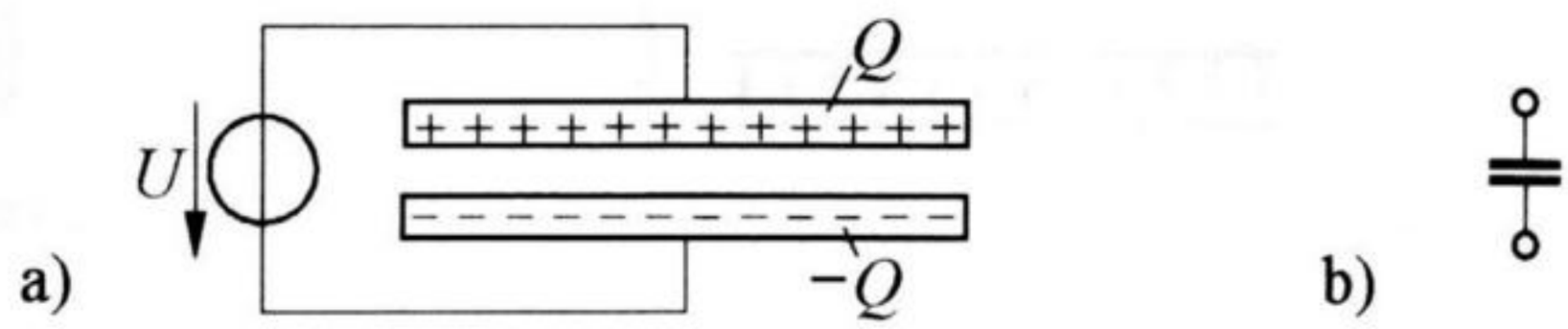


Bild 3.14 a) Beliebige Elektrodenanordnung (mit einer Spannungsquelle verbunden), b) Schaltzeichen eines Kondensators

Der Betrag der von der einen zur anderen Elektrode beförderten Ladung (Q) wird (allgemein) als die im Kondensator *gespeicherte* Ladung bezeichnet. Untersuchungen zeigen, dass Q sich proportional zur anliegenden Spannung U verhält. Es gilt also

$$Q \sim U.$$

Wir können diese Abhängigkeit durch die Gleichung

$$\boxed{Q = C\,U} \tag{3.22}$$

ersetzen, wobei C eine Proportionalitätskonstante darstellt. Sie wird als **Kapazität** des Kondensators bezeichnet. Die Einheit für C folgt aus Gl. (3.22) als As/V. Hierfür verwendet man die Bezeichnung **Farad** (Abkürzung: F). Es gilt also

$$[C] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{V}} = \mathrm{F}.$$

Die Kapazität eines Kondensators ist somit das Verhältnis der gespeicherten Ladung zu der anliegenden Spannung und gibt daher die pro Spannungseinheit ge-

speicherte Ladungsmenge an. In Schaltbildern verwendet man zur Darstellung eines Kondensators das in Bild 3.14b angegebene Symbol.

Nachfolgend wird für verschiedene Elektrodenanordnungen gezeigt, wie die Kapazität berechnet werden kann.

3.4.2 Kapazität des Plattenkondensators

Eine Anordnung aus zwei ebenen, parallel sich gegenüberstehenden Elektroden bezeichnet man bekanntlich als **Plattenkondensator**. Zur Berechnung der Kapazität eines solchen Kondensators betrachten wir Bild 3.15a.

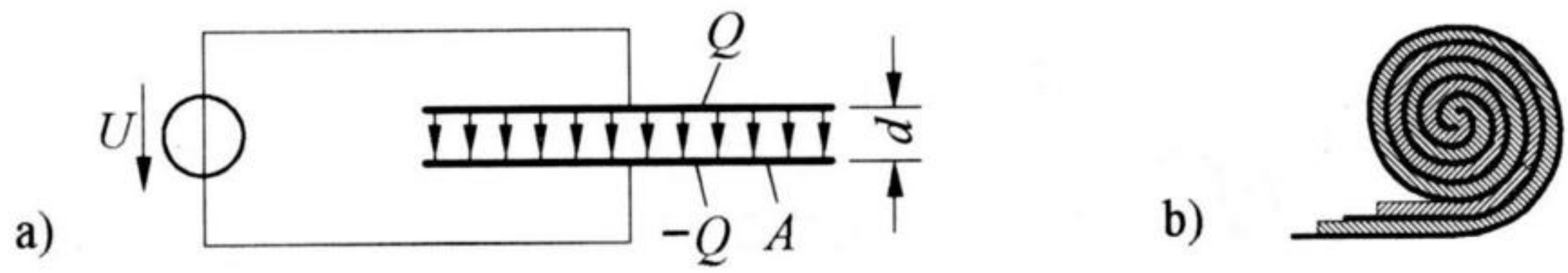


Bild 3.15 a) Zur Berechnung der Kapazität eines Plattenkondensators,
b) technische Ausführung eines Kondensators

Die Fläche einer Elektrode sei A, der Plattenabstand d. Bei relativ großer Plattenfläche und vergleichsweise kleinem Plattenabstand können Randeinflüsse unberücksichtigt bleiben, so dass das elektrische Feld als *homogen* anzusehen ist. Dann gilt für die gespeicherte Ladung unter Berücksichtigung der Gln. (3.5), (3.9) und (3.12)

$$Q = D\,A = \varepsilon\,E\,A = \varepsilon\,A\,\frac{U}{d}\,.$$

Hierin stellen D die im Plattenraum vorhandene Flussdichte, E die dort herrschende Feldstärke und ε die vorhandene Permittivität dar. Aus Gl. (3.22) folgt die Kapazität eines Kondensators als $C = Q/U$. Dividieren wir also obige Gleichung durch U, so erhalten wir für die gesuchte Kapazität des Plattenkondensators

$$\boxed{C = \varepsilon\,\frac{A}{d}\,.} \tag{3.23}$$

Die Kapazität ist also der Plattenfläche A proportional und dem Plattenabstand d umgekehrt proportional. Darüber hinaus hat die Materialeigenschaft des verwendeten Dielektrikums Einfluss auf die Höhe der Kapazität. Je höher nämlich die Permittivität ε des betreffenden Isolierstoffes ist, umso größer ist die Kapazität.

Die technische Ausführung eines Kondensators wird häufig entsprechend der aus Bild 3.15b ersichtlichen Darstellung vorgenommen. Zwei durch Isolierfolien getrennte Metallfolien werden aufgewickelt. Hierbei enthält - mit Ausnahme der äußeren Lage - jede Metallfolie auf beiden Seiten Ladungen. Daher wird die Kapazität - im Vergleich zu der der nicht aufgewickelten Folien - etwa doppelt so groß.

3.4.3 Kapazität des Kugelkondensators

Wir betrachten eine Anordnung aus zwei konzentrisch angeordneten Hohlkugeln nach Bild 3.16 mit den Radien r_1 und r_2. Zwischen beiden Elektroden befinde sich ein Isolierstoff mit der Permittivität ε.

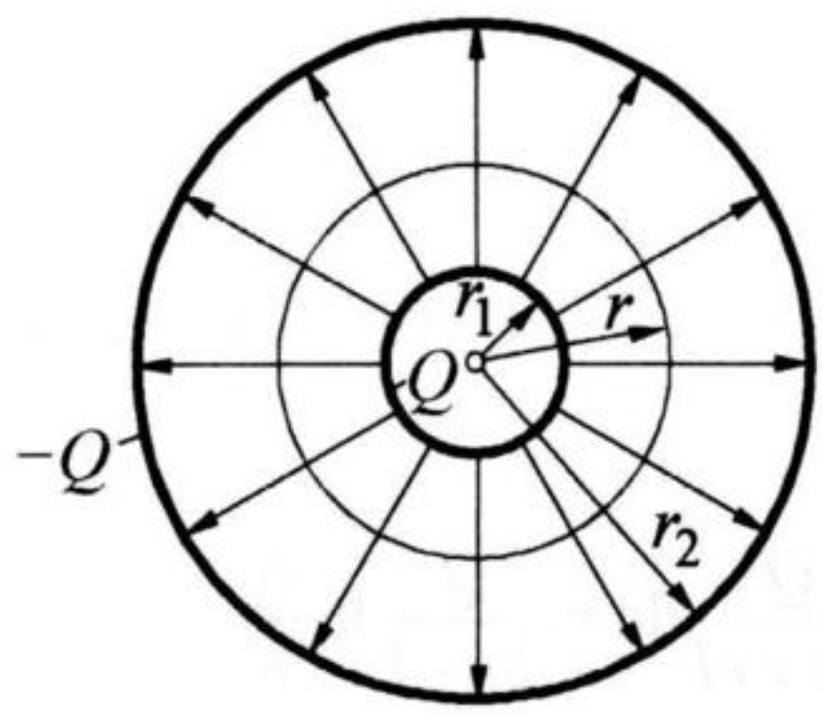


Bild 3.16 Zur Berechnung der Kapazität eines Kugelkondensators

Zur Berechnung der zwischen den Elektroden bestehenden Kapazität nehmen wir an, dass die innere Kugel eine positive Ladung (Q) trägt und die äußere die dem Betrage nach gleich große negative Ladung ($-Q$). Dann gilt für die elektrische Feldstärke im Abstand r vom Mittelpunkt zwischen beiden Kugeln nach Gl. (3.17)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}.$$

Hiermit finden wir unter Anwendung von Gl. (3.7) die zwischen den Elektroden bestehende Spannung als

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

Bilden wir hieraus das Verhältnis Q/U, so erhalten wir die gesuchte Kapazität der als **Kugelkondensator** bezeichneten Anordnung

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.} \tag{3.24}$$

3.4.4 Kapazität des Zylinderkondensators

Wir nehmen jetzt an, bei den in Bild 3.16 dargestellten Elektroden handele es sich nicht um Hohlkugeln, sondern um Hohlzylinder (also um Rohre). Die Länge l jedes Zylinders sei vergleichsweise groß gegenüber den Radien r_1 und r_2, so dass Randeinflüsse unberücksichtigt bleiben können. In diesem Fall gilt für die zwischen den Zylindern im Abstand r von der Mittellinie herrschende elektrische Feldstärke E nach Gl. (3.21)

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}.$$

Damit finden wir die zwischen den Elektroden liegende Spannung unter Anwendung von Gl. (3.7) als

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}\mathrm{d}r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

Lösen wir die Gleichung unter Beachtung von Gl. (3.22) nach Q/U auf, so erhalten wir die zwischen den Rohren bestehende Kapazität, also die Kapazität des **Zylinderkondensators**, als

$$\boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.} \tag{3.25}$$

3.4.5 Zusammenschaltung von Kondensatoren

Bei der Anwendung von Kondensatoren sind Parallel- und Reihenschaltungen möglich. Dabei stellt sich die Frage, wie groß die Gesamtkapazität der jeweiligen Anordnung bei gegebenen Einzelkapazitäten ist. Werden zum Beispiel entsprechend Bild 3.17a zwei Kondensatoren parallel geschaltet und mit einer Spannungsquelle verbunden, so ergibt sich die insgesamt gespeicherte Ladung als Summe der in den Einzelkondensatoren enthaltenen Ladungen.

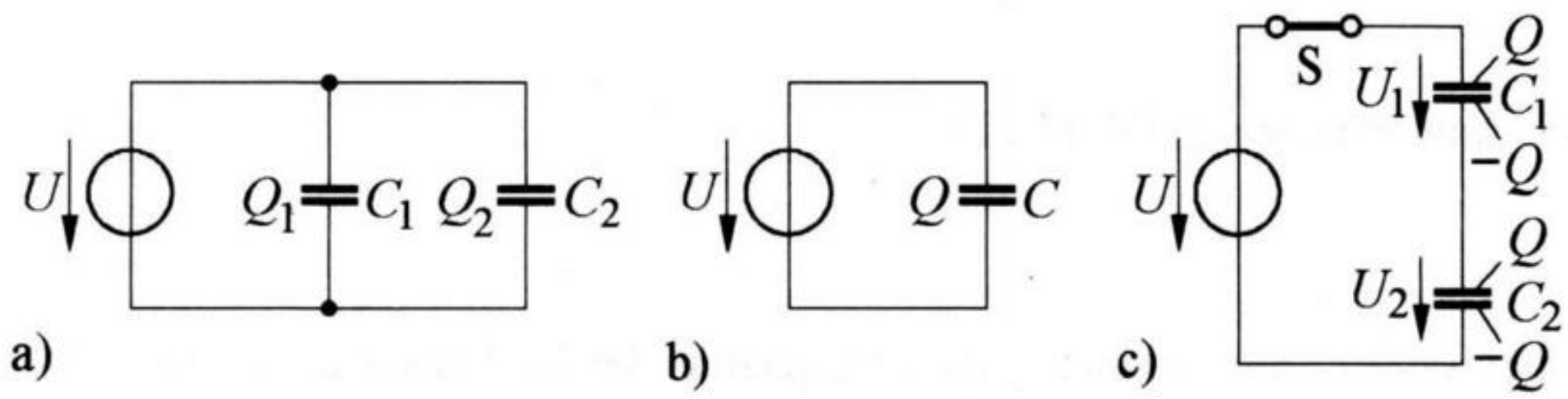


Bild 3.17 a) Parallelschaltung zweier Kondensatoren, b) zugehörige Gesamtkapazität, c) Reihenschaltung zweier Kondensatoren

Es gilt also

$$Q = Q_1 + Q_2 \,. \tag{3.26}$$

Ersetzt man die beiden parallel geschalteten Kondensatoren durch *einen* Kondensator nach Bild 3.17b, so muss dessen Kapazität C so groß sein, dass in ihm bei gleicher Spannung U die gleiche Ladung Q gespeichert ist. Durch Anwendung von Gl. (3.22) wird aus Gl. (3.26) bei der anliegenden Spannung U

$$CU = C_1 U + C_2 U \,, \tag{3.27}$$

wobei C die gesuchte Gesamtkapazität darstellt. Aus Gl. (3.27) folgt

$$C = C_1 + C_2 \,.$$

Bei der *Parallelschaltung* von Kondensatoren ist also die Gesamtkapazität gleich der Summe der Einzelkapazitäten. Dies lässt sich (allgemein) auch durch die Gleichung

$$\boxed{C = \sum_{k=1}^{n} C_k \,,} \tag{3.28}$$

darstellen, wobei n die Anzahl der parallel geschalteten Kondensatoren ist.

Jetzt wollen wir eine Reihenschaltung von zwei Kondensatoren entsprechend Bild 3.17c betrachten. Wir gehen davon aus, dass beide Kondensatoren vor dem Anlegen der Spannungsquelle ungeladen sind. Wird nun der Schalter S geschlossen, so werden durch *Influenz* negative Ladungsträger von der oberen Elektrode von C_2 zur unteren Elektrode von C_1 befördert. Diese Ladungstrennung erfolgt in gleicher Weise wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben. Sie führt dazu, dass beide Kondensatoren die gleiche Ladung Q speichern. Von der Spannungsquelle aus gesehen wirkt die Anordnung wie *ein* Kondensator, der die Ladung Q trägt. Daher folgt aus der Gleichung

$$U = U_1 + U_2$$

durch Anwendung von Gl. (3.22)

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}. \tag{3.29}$$

Hierbei stellt C die gesuchte Gesamtkapazität der Reihenschaltung dar. Dividiert man Gl. (3.29) durch Q, so erhält man

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \tag{3.30}$$

Allgemein gilt also für die *Reihenschaltung* von Kondensatoren, dass der Kehrwert der Gesamtkapazität gleich der Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten ist. Dies kann man auch durch die Gleichung

$$\boxed{\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_k}} \tag{3.31}$$

zum Ausdruck bringen, wobei n die Anzahl der in Reihe geschalteten Kondensatoren darstellt.

Zur Bestimmung der Kapazität von *zwei* in Reihe geschalteten Kondensatoren kann man Gl. (3.30) umwandeln in die häufig verwendete Form

$$\boxed{C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.} \tag{3.32}$$

Aufgabe 3.4

Bei einem Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 0{,}1\ \mathrm{m}^2$ beträgt der Abstand zwischen beiden Elektroden $d = 1$ mm. Die Kapazität des Kondensators soll nach Bild 3.18 durch Einbringen einer Isolierstoffplatte mit der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 5$ auf den Wert $C = 1{,}7$ nF gebracht werden.

Welche Stärke d_1 muss die Isolierstoffplatte haben?

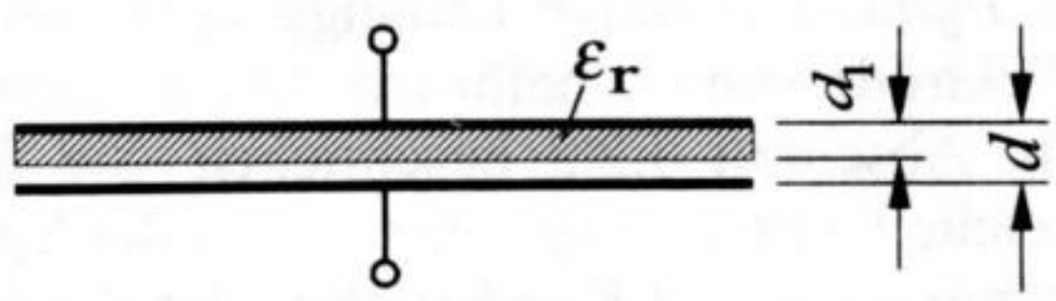


Bild 3.18 Plattenkondensator mit zwei verschiedenen Dielektrika

Lösung

Die Anordnung kann als Reihenschaltung zweier Kondensatoren aufgefasst werden. Ihre Kapazitäten betragen nach Gl. (3.23) in Verbindung mit Gl. (3.14), wenn wir berücksichtigen, dass die Permittivitätszahl von Luft gleich eins ist,

$$C_1 = \varepsilon_0\,\varepsilon_r\,\frac{A}{d_1}, \qquad C_2 = \varepsilon_0\,\frac{A}{d-d_1}.$$

Damit gilt für den Kehrwert der Gesamtkapazität nach Gl. (3.30)

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0\,\varepsilon_\mathrm{r}\,A} + \frac{d-d_1}{\varepsilon_0\,A}.$$

Lösen wir diese Gleichung nach der gesuchten Stärke der Isolierstoffplatte auf, so finden wir

$$d_1 = \frac{\varepsilon_\mathrm{r}\,(d\,C - \varepsilon_0\,A)}{C\,(\varepsilon_\mathrm{r}-1)},$$

$$d_1 = \frac{5\left(10^{-3}\ \mathrm{m}\cdot 1{,}7\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} - 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)}\cdot 0{,}1\ \mathrm{m}^2\right)}{1{,}7\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}\,(5-1)} = \underline{0{,}60\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}.$$

Aufgabe 3.5

Zwischen zwei konzentrisch angeordneten, dünnwandigen Metall-Hohlkugeln befinden sich nach Bild 3.19 zwei Isolationsschichten mit den Permittivitätszahlen $\varepsilon_{\mathrm{r}1} = 5$ und $\varepsilon_{\mathrm{r}2} = 3$. Die Radien betragen $r_1 = 10$ cm, $r_2 = 12$ cm und $r_3 = 16$ cm.

a) Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

b) Welche Spannung $U_{\max}$ darf maximal zwischen den Elektroden herrschen, damit die elektrische Feldstärke an keiner Stelle den Wert $E_{\max} = 4\cdot 10^6$ V/m übersteigt?

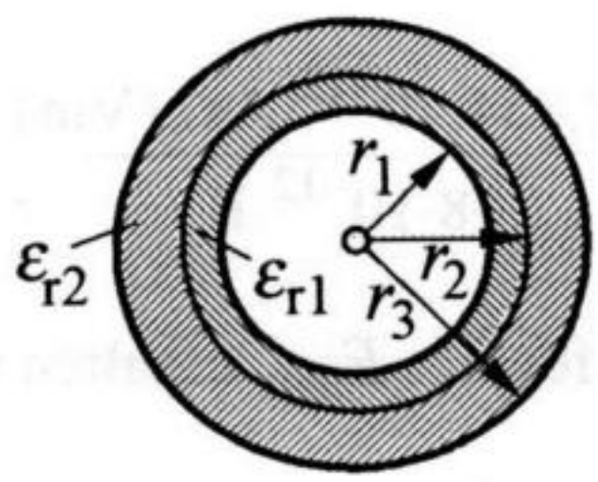


Bild 3.19 Kugelkondensator mit geschichtetem Dielektrikum

Lösung

a) Die Anordnung stellt eine Reihenschaltung zweier Kondensatoren dar. Ihre Kapazitäten betragen nach Gl. (3.24) in Verbindung mit Gl. (3.14)

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\frac{r_2\,r_1}{r_2 - r_1} = 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot 5\cdot\frac{0{,}12\cdot 0{,}10}{0{,}12-0{,}10}\,\text{m} = 334\ \text{pF},$$

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}\frac{r_3\,r_2}{r_3 - r_2} = 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot 3\cdot\frac{0{,}16\cdot 0{,}12}{0{,}16-0{,}12}\,\text{m} = 160\ \text{pF}.$$

Damit ergibt sich die Gesamtkapazität

$$C = \frac{C_1\,C_2}{C_1 + C_2} = \frac{334\cdot 160}{334+160}\,\text{pF} = \underline{108\ \text{pF}}.$$

b) Liegt der Kondensator an einer Spannung U, so beträgt die elektrische Feldstärke in Abhängigkeit vom Radius r zwischen beiden Elektroden nach Gl. (3.17) in Verbindung mit den Gln. (3.14) und (3.22)

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} = \frac{CU}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}. \tag{3.33}$$

E ist dort am größten, wo der Ausdruck $\varepsilon_r\cdot r^2$ seinen kleinsten Wert hat. Das bedeutet, dass die Feldstärke entweder im inneren Dielektrikum an der Stelle $r = r_1$ oder im äußeren Dielektrikum an der Stelle $r = r_2$ am größten ist. Lösen wir Gl. (3.33) nach U auf, und setzen wir für $\varepsilon_r = \varepsilon_{r1}$, für $r = r_1$ und für $E = E_{max}$ ein, so ergibt sich die zulässige Spannung

$$U_1 = \frac{E_{max}\,4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}r_1^2}{C},$$

$$U_1 = \frac{4\cdot 10^6\ \text{V/m}\cdot 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \text{As}/(\text{Vm})\cdot 5\cdot(0{,}1\ \text{m}^2)}{108\cdot 10^{-12}\ \text{F}} = 206\cdot 10^3\ \text{V}.$$

Für $\varepsilon_r = \varepsilon_{r2}$, für $r = r_2$ und für $E = E_{max}$ erhalten wir die zulässige Spannung

$$U_2 = \frac{E_{max}\,4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2}r_2^2}{C},$$

$$U_2 = \frac{4\cdot 10^6\ \mathrm{V/m}\cdot 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)}\cdot 3\cdot(0{,}12\ \mathrm{m}^2)}{108\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}} = 178\cdot 10^3\ \mathrm{V}.$$

Der kleinere der beiden berechneten Werte ist die maximal zulässige Spannung. Daher lautet das gesuchte Ergebnis $U_{\max} = U_2 = \underline{178\ \mathrm{kV}}$.

Aufgabe 3.6

Bei einem Koaxialkabel beträgt der Radius des Innenleiters $r_1 = 1$ mm und der des Außenleiters $r_2 = 20$ mm. Zwischen beiden Leitern herrscht die Spannung $U = 500$ V. Die Permittivitätszahl sei $\varepsilon_r = 1$.

a) Wie groß ist die Kapazität C des Kabels je Kilometer Leitungslänge?

b) Wie groß ist die maximal auftretende Feldstärke $E_{\max}$?

Lösung

a) Die Kapazität des Kabels beträgt nach Gl. (3.25) für eine Länge von $l = 1000$ m und der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 1$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln r_2/r_1} = \frac{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)}\cdot 1000\ \mathrm{m}}{\ln 20/1} = \underline{18{,}6\ \mathrm{nF}}.$$

b) Die größte Feldstärke herrscht auf der Oberfläche des Innenleiters und beträgt, wenn wir für $r = r_1$, für $Q = C\,U$ und für $\varepsilon = \varepsilon_0$ einsetzen, nach Gl. (3.21)

$$E_{max} = \frac{CU}{2\pi\varepsilon_0 r_1 l} = \frac{18{,}6\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}\cdot 500\ \mathrm{V}}{2\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)}\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\cdot 10^3\ \mathrm{m}},$$

$$E_{\max} = \underline{1{,}67\cdot 10^5\ \mathrm{V/m}}.$$

3.5 Energie des elektrostatischen Feldes

3.5.1 Energie des geladenen Kondensators

In jedem aufgeladenen Kondensator ist eine bestimmte Energiemenge gespeichert. Es stellt sich die Frage, wie diese Energie berechnet werden kann. Zur Lösung des Problems gehen wir von der Überlegung aus, dass die beim Aufladen an den Kon-

densator gelieferte Energie gleich der anschließend gespeicherten Energie sein muss. Dazu betrachten wir die in Bild 3.20 dargestellte Schaltung, in der ein Kondensator über einen Widerstand mit einer Spannungsquelle verbunden und dadurch auf die Spannung U aufgeladen wird.

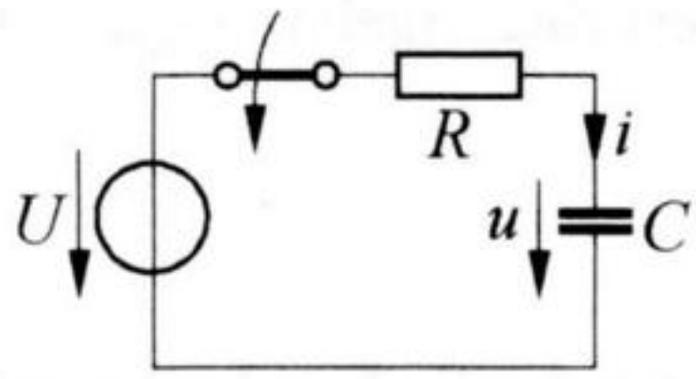


Bild 3.20 Zur Berechnung der in einem Kondensator gespeicherten Energie

Während des Aufladevorganges sind der Strom und die Kondensatorspannung zeitlich veränderlich. Diese Größen wollen wir deshalb durch kleine Buchstaben (i und u) kennzeichnen. Der Kondensator nimmt während des Aufladens in einer infinitesimal kleinen Zeit dt die Energie

$$\mathrm{d}W = u\,i\,\mathrm{d}t$$

auf. Die in dieser Zeit dem Kondensator zugeführte Ladung $i\,\mathrm{d}t$ muss gleich der Zunahme der gespeicherten Ladung $C\,\mathrm{d}u$ sein. Hierbei stellen C die Kapazität und du die in der Zeit dt auftretende Erhöhung der Kondensatorspannung dar. Somit gilt auch

$$\mathrm{d}W = u\,C\,\mathrm{d}u.$$

Während der gesamten Dauer des Aufladevorganges in Bild 3.20 steigt die Kondensatorspannung von $u = 0$ auf $u = U$. Folglich beträgt die dem Kondensator insgesamt zugeführte Energie

$$W = \int_0^U C\,u\,\mathrm{d}u.$$

Durch Einsetzen der Grenzen erhalten wir für diese Energie

$$\boxed{W = \frac{1}{2} C U^2.} \tag{3.34}$$

Sie stellt gleichzeitig diejenige Energie dar, die in einem Kondensator mit der Kapazität C bei der anliegenden Spannung U gespeichert ist. Durch Anwendung von Gl. (3.22) können wir für Gl. (3.34) auch schreiben:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}.} \tag{3.35}$$

3.5.2 Energiedichte im elektrostatischen Feld

Die in einem Kondensator enthaltene Energie haben wir uns nicht auf den Elektroden befindlich, sondern im elektrischen Feld gespeichert vorzustellen. Verallgemeinert bedeutet dies, dass in *jedem* elektrischen Feld Energie gespeichert ist. Eine wichtige Größe ist hierbei die **Energiedichte**. Man erhält sie dadurch, dass man die in einem bestimmten Feldvolumen enthaltene Energie durch das betreffende Volumen teilt. Betrachten wir ein infinitesimal kleines Volumenelement $\mathrm{d}V$, und bezeichnen wir die darin enthaltene Energie als $\mathrm{d}W$, so gilt für die Energiedichte in dem betreffenden Raumpunkt

$$w = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}V}. \tag{3.36}$$

Wir wollen jetzt untersuchen, wie die Energiedichte im elektrischen Feld berechnet werden kann. Dazu stellen wir uns vor, dass der in Bild 3.20 angegebene Kondensator aus parallelen Platten besteht, so dass das elektrische Feld als homogen angesehen werden kann. Dann gilt bei der Plattenfläche A, dem Plattenabstand d und der Permittivität ε nach Gl. (3.23) für die Kapazität

$$C = \varepsilon \frac{A}{d}. \tag{3.37}$$

Die am Kondensator liegende Spannung kann nach Gl. (3.4) durch

$$U = E\,d \tag{3.38}$$

ausgedrückt werden, wobei E die im Plattenraum vorhandene elektrische Feldstärke ist. Setzen wir die Gln. (3.37) und (3.38) in Gl. (3.34) ein, so gilt für die im Kondensator gespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\frac{A}{d}E^2 d^2 = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 A d.$$

Hierin stellt $V = A \cdot d$ das Volumen dar, das von einem elektrischen Feld erfüllt ist. Teilen wir W durch V, so erhalten wir die Energiedichte

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\varepsilon E^2.} \tag{3.39}$$

Durch Anwendung von Gl. (3.12) können wir Gl. (3.39) auch in der Form

$$w = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2} E\,D \tag{3.40}$$

darstellen, wobei D die im elektrischen Feld vorhandene Flussdichte ist.

Die ermittelten Gleichungen (3.39) und (3.40) gelten nicht nur im homogenen Feld, sondern geben allgemein die **Energiedichte** an, die in einem beliebigen Punkt innerhalb eines elektrischen Feldes besteht.

Die in einem bestimmten *Feldraum* enthaltene Energie erhalten wir (allgemein) dadurch, dass wir die Energiedichte (w) über das betreffende Raumvolumen (V) integrieren. Es gilt also

$$W = \int_V w\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V E\,D\,\mathrm{d}V. \tag{3.41}$$

Aufgabe 3.7

Ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 0{,}1\ \mathrm{m}^2$, dem Plattenabstand $d = 1{,}5$ mm und Luft als Dielektrikum wird kurzzeitig mit einer Spannungsquelle verbunden und dadurch auf die Spannung $U = 300$ V aufgeladen. Nach dem Entfernen der Spannungsquelle wird eine $d_1 = 1$ mm starke Isolierstoffplatte mit der gleichen Fläche A und der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 7$ in den Plattenraum eingebracht (Plattenabstand unverändert $d = 1{,}5$ mm).

Um welchen Betrag ΔW ändert sich durch das Einbringen der Isolierstoffplatte die im Kondensator gespeicherte Energie?

Lösung

Vor dem Einbringen der Isolierstoffplatte beträgt die Kapazität des Kondensators nach Gl. (3.23) in Verbindung mit Gl. (3.14), wenn wir berücksichtigen, dass die Permittivitätszahl von Luft gleich eins ist,

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}\cdot\frac{0{,}1\ \mathrm{m}^2}{1{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = 590\ \mathrm{pF}.$$

Damit ist die gespeicherte Energie nach Gl. (3.34)

$$W = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}\cdot 590\cdot 10^{-12}\ \mathrm{F}\cdot(300\ \mathrm{V})^2 = 26{,}6\cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}.$$

Nach dem Einbringen der Isolierstoffplatte liegt eine Reihenschaltung der Kapazitäten

$$C_1 = \varepsilon_0\,\varepsilon_r \frac{A}{d_1} = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot 7\cdot\frac{0{,}1\,\text{m}^2}{10^{-3}\,\text{m}} = 6{,}20\,\text{nF}$$

und

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{A}{d-d_1} = 8{,}854\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{As}}{\text{Vm}}\cdot\frac{0{,}1\,\text{m}^2}{0{,}5\cdot 10^{-3}\,\text{m}} = 1{,}77\,\text{nF}$$

vor, so dass die Gesamtkapazität nach Gl. (3.32)

$$C' = \frac{C_1\,C_2}{C_1+C_2} = \frac{6{,}20\cdot 1{,}77}{6{,}20+1{,}77}\,\text{nF} = 1{,}38\,\text{nF}$$

beträgt. Da die Ladung Q des Kondensators unverändert bleibt, fällt die Spannung auf

$$U' = \frac{Q}{C'} = \frac{CU}{C'} = \frac{0{,}59\,\text{nF}\cdot 300\,\text{V}}{1{,}38\,\text{nF}} = 128\,\text{V}$$

ab. Die gespeicherte Energie beträgt somit

$$W' = \frac{1}{2}C'\,(U')^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}38\cdot 10^{-9}\,\text{F}\cdot(128\,\text{V})^2 = 11{,}4\cdot 10^{-6}\,\text{J}.$$

Sie nimmt also um

$$\Delta W = W - W' = 26{,}6\cdot 10^{-6}\,\text{J} - 11{,}4\cdot 10^{-6}\,\text{J} = \underline{15{,}2\cdot 10^{-6}\,\text{J}}$$

ab. Die Differenzenergie ΔW wird in mechanische Energie umgewandelt, da die Isolierstoffplatte beim Einbringen in den Kondensator durch das elektrische Feld angezogen wird.

Aufgabe 3.8

In der Schaltung nach Bild 3.21a ist der Kondensator $C_1 = 4\ \mu\text{F}$ auf die Spannung $U = 120$ V aufgeladen. Die Kondensatoren $C_2 = 3\ \mu\text{F}$ und $C_3 = 6\ \mu\text{F}$ enthalten keine Ladung.

Welche Energie W_R wird beim Schließen des Schalters S dem Widerstand R zugeführt?

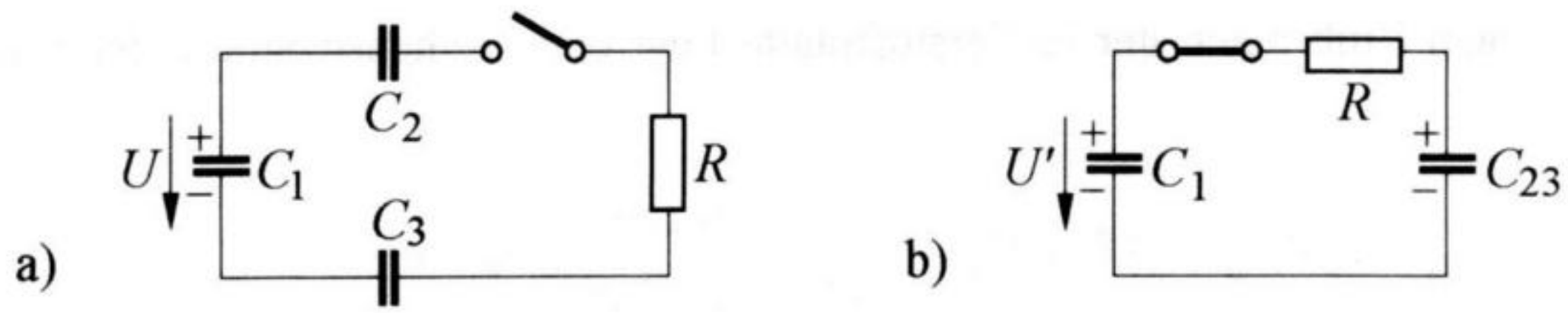


Bild 3.21 Zusammenschalten eines geladenen Kondensators und zweier ungeladener Kondensatoren. a) Tatsächliche Schaltung, b) Ersatzschaltung

Lösung

Wir fassen zunächst die in Reihe liegenden Kondensatoren C_2 und C_3 entsprechend Gl. (3.32) zu

$$C_{23} = \frac{C_2\,C_3}{C_2 + C_3} = \frac{3 \cdot 6}{3+6}\,\mu\text{F} = 2\,\mu\text{F}$$

zusammen, so dass die in Bild 3.21b dargestellte Schaltung entsteht. Beim Schließen des Schalters S verteilt sich die in C_1 gespeicherte Ladung

$$Q_1 = C_1 U = 4\,\mu\text{F} \cdot 120\text{ V} = 480 \cdot 10^{-6}\text{ As}$$

auf die beiden dann parallel geschalteten Kondensatoren C_1 und C_{23}. Daher beträgt die an ihnen liegende Spannung (bei geschlossenem Schalter)

$$U' = \frac{Q_1}{C_1 + C_{23}} = \frac{480 \cdot 10^{-6}\text{ As}}{(4+2) \cdot 10^{-6}\text{ F}} = 80\text{ V}.$$

Die gesuchte, dem Widerstand R zugeführte Energie W_R erhalten wir dadurch, dass wir die vor Schließen des Schalters gespeicherte Energie (Bild 3.21a)

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 U^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-6}\text{ F} \cdot (120\text{ V})^2 = 28{,}8 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

und die nachher in den Kondensatoren noch vorhandene Energie (Bild 3.21b)

$$W_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_{23})(U')^2 = \frac{1}{2} \cdot (4+2) \cdot 10^{-6}\text{ F} \cdot (80\text{ V})^2 = 19{,}2 \cdot 10^{-3}\text{ J}$$

voneinander abziehen. Dadurch ergibt sich

$$W_\text{R} = W_1 - W_2 = (28{,}8 - 19{,}2) \cdot 10^{-3}\text{ J} = \underline{9{,}6 \cdot 10^{-3}\text{ J}}.$$

Aufgabe 3.9

Die Schaltung nach Bild 3.22a enthält eine Spannungsquelle, die die Spannung $U = 120$ V liefert. Die Kondensatoren $C_1 = 6$ µF und $C_2 = 3$ µF sind auf die Spannungen $U_1 = 40$ V und $U_2 = 80$ V aufgeladen. Der Kondensator $C_3 = 9$ µF enthält keine Ladung.

a) Auf welche Spannung U_3' lädt sich der Kondensator C_3 auf, wenn der Schalter S geschlossen wird?

b) Welche Energie ΔW wird nach dem Schließen des Schalters S von der Spannungsquelle abgegeben?

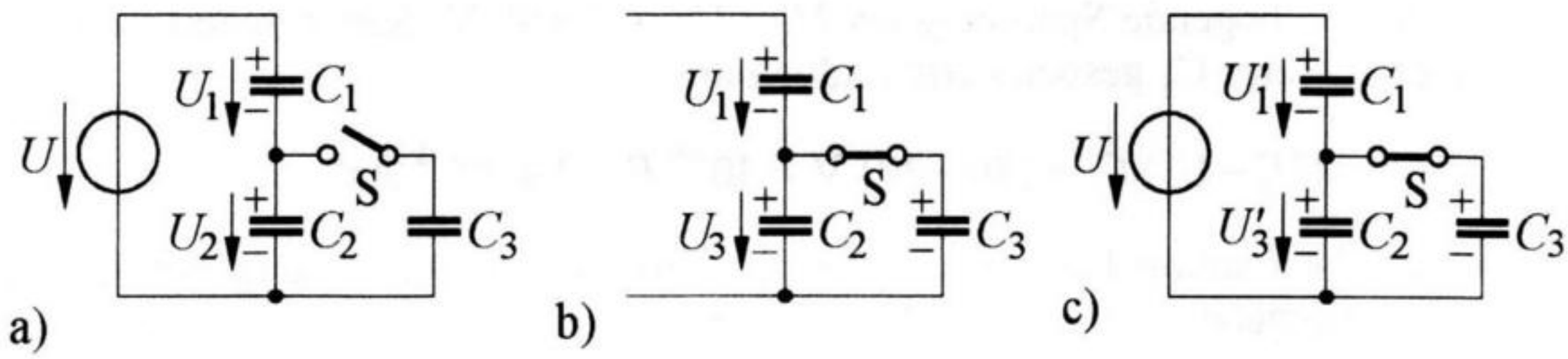


Bild 3.22 Zusammenschaltung von Kondensatoren

Lösung

a) Zur Berechnung der gesuchten Spannung nehmen wir zunächst an, dass der Schalter S bei abgetrennter Spannungsquelle nach Bild 3.22b geschlossen werde. In diesem Fall verteilt sich die im Kondensator C_2 gespeicherte Ladung

$$Q_2 = C_2 U_2 = 3 \cdot 10^{-6}\ \text{F} \cdot 80\ \text{V} = 240 \cdot 10^{-6}\ \text{As}$$

auf die Kondensatoren C_2 und C_3, so dass die Parallelschaltung an der Spannung

$$U_3 = \frac{Q_2}{C_2 + C_3} = \frac{240 \cdot 10^{-6}\ \text{As}}{(3+9) \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = 20\ \text{V}$$

liegt. Denken wir uns jetzt nach Bild 3.22c die Spannungsquelle wieder angeschlossen, so nimmt die in C_1 gespeicherte Ladung um den gleichen Betrag zu wie die in der Parallelschaltung von C_2 und C_3 enthaltene. Daher gilt

$$(U_1' - U_1) C_1 = (U_3' - U_3)(C_2 + C_3).$$

Weiterhin folgt aus Bild 3.22c

$$U_1' = U - U_3'.$$

Wir setzen diese Beziehung in die davor stehende ein und erhalten

$$(U - U_3' - U_1)\, C_1 = (U_3' - U_3)\,(C_2 + C_3).$$

Lösen wir diese Gleichung nach U_3' auf, so ergibt sich die gesuchte Spannung

$$U_3' = \frac{(U - U_1)\, C_1 + U_3\,(C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{(120 - 40)\ \mathrm{V} \cdot 6\ \mu\mathrm{F} + 20\ \mathrm{V} \cdot (3 + 9)\ \mu\mathrm{F}}{(6 + 3 + 9)\ \mu\mathrm{F}},$$

$$\underline{U_3' = 40\ \mathrm{V}.}$$

b) Aus Bild 3.22c erhalten wir die nach dem Schließen des Schalters S am Kondensator C_1 liegende Spannung als $U_1' = U - U_3' = 80$ V. Somit ändert sich die im Kondensator C_1 gespeicherte Ladung um

$$\Delta Q = (U_1' - U_1)\, C_1 = (80 - 40)\ \mathrm{V} \cdot 6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As}.$$

Die gleiche Ladung fließt auch über die Spannungsquelle. Daher beträgt die von ihr abgegebene Energie nach Gl. (2.4)

$$\Delta W = U\ \Delta Q = 120\ \mathrm{V} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{As} = \underline{28{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{J}}.$$

3.6 Kräfte zwischen elektrischen Ladungen

3.6.1 Das Coulomb'sche Gesetz

Zwischen zwei Punktladungen tritt stets eine Anziehungs- oder Abstoßungskraft auf. Es stellt sich die Frage, wie diese Kraft berechnet werden kann.

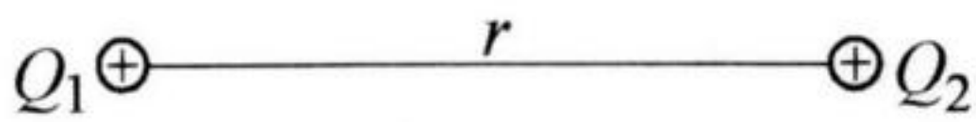


Bild 3.23 Zur Berechnung der zwischen Punktladungen wirkenden Kraft

Wir betrachten dazu die Darstellung nach Bild 3.23, in der sich zwei positive Punktladungen im Abstand r gegenüberstehen. Zunächst nehmen wir an, dass die Ladung Q_2 nicht vorhanden sei. Dann wird das elektrische Feld ausschließlich von Q_1 erzeugt, und im Abstand r von Q_1 herrscht nach Gl. (3.17) die Feldstärke

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\,\pi\,\varepsilon\, r^2}. \tag{3.42}$$

Bringen wir jetzt die Ladung Q_2 an die vorgesehene Stelle, so bedeutet dies, dass die Ladung in ein elektrisches Feld mit der in Gl. (3.42) angegebenen Feldstärke kommt. Folglich wird nach Gl. (3.1) auf Q_2 eine Kraft

$$F = E_1 Q_2$$

ausgeübt. Durch Einsetzen von Gl. (3.42) wird daraus

$$\boxed{F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon r^2}.} \tag{3.43}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man die von Q_2 auf Q_1 wirkende Kraft berechnet. Gl. (3.43) gibt damit allgemein diejenige Kraft an, die zwei Punktladungen aufeinander ausüben. Man bezeichnet die Gleichung als **Coulomb'sches Gesetz**. Der Betrag dieser Kraft ist unabhängig von den Vorzeichen der Ladungen. Jedoch stoßen sich gleichartige Ladungen (Ladungen mit gleichem Vorzeichen) stets ab, während sich ungleichartige Ladungen (verschiedene Vorzeichen) stets anziehen.

Aufgabe 3.10

Drei Punktladungen bilden nach Bild 3.24a Eckpunkte eines Dreiecks mit den Seitenlängen a = 6 cm, b = 4,5 cm und c = 5 cm. Die Permittivitätszahl beträgt $\varepsilon_r = 1$. Auf die positive Ladung $Q_2 = 2\cdot 10^{-8}$ As wirkt eine Kraft mit dem Betrag $F = 2\cdot 10^{-3}$ N, die entsprechend Bild 3.24a unter dem Winkel $\alpha = 50°$ angreift.

Welche Werte haben die Ladungen Q_1 und Q_3?

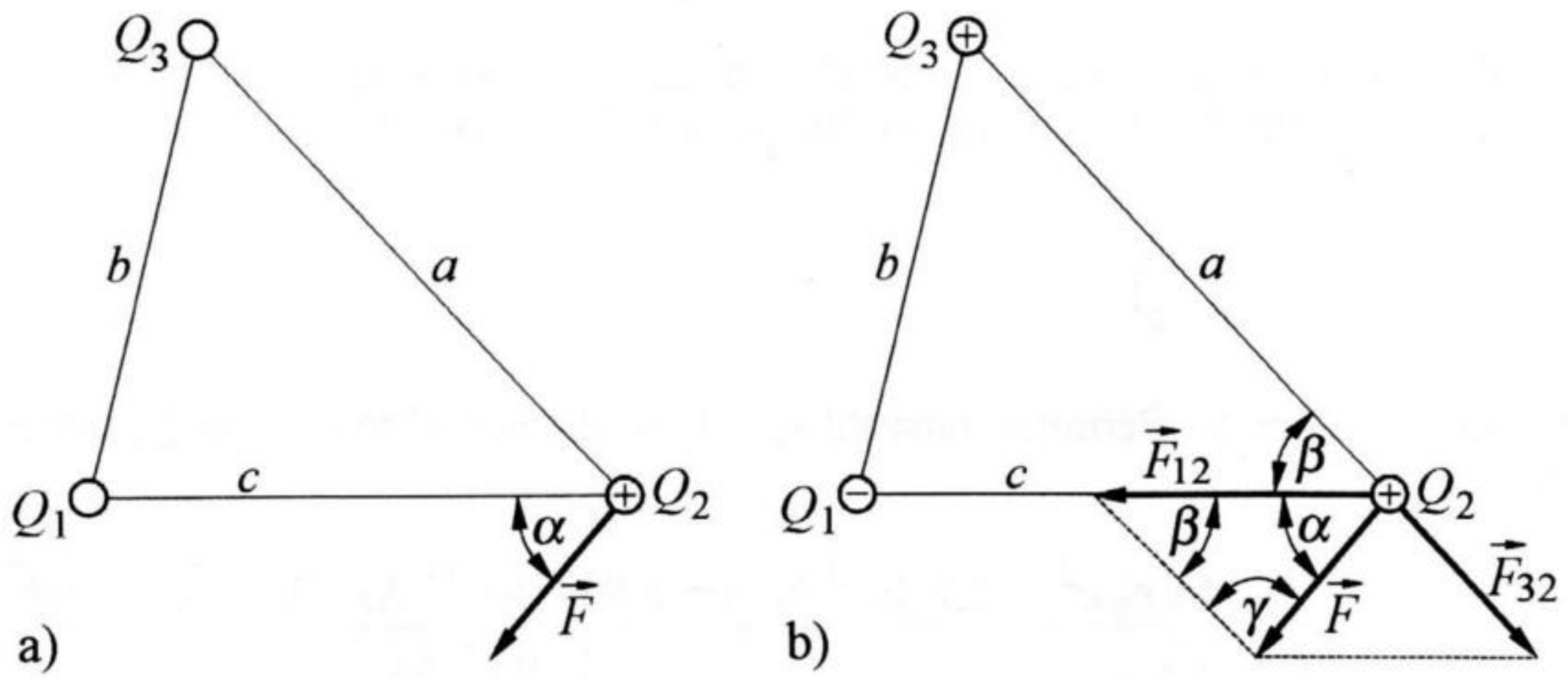


Bild 3.24 Zur Berechnung der zwischen Punktladungen wirkenden Kräfte

Lösung

Wir zerlegen die gegebene Kraft $\vec{F}$ nach Bild 3.24b in die Komponenten $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{32}$. Dadurch erhalten wir diejenigen Kräfte, die die Ladungen Q_1 und Q_3 jeweils auf die Ladung Q_2 ausüben müssen. Aus der Richtung der Kraftkomponente $\vec{F}_{12}$ ersehen wir, dass die Ladung Q_1 negativ sein muss, damit sie die Ladung Q_2 anzieht. Entsprechend muss Q_3 positiv sein, damit sie auf Q_2 eine nach außen wirkende Kraft ausübt. Zur Bestimmung der Beträge der beiden Kraftkomponenten berechnen wir in Bild 3.24b zunächst durch Anwendung des Kosinussatzes

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta$$

den Winkel

$$\beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c} = \arccos\frac{6^2 + 5^2 - 4{,}5^2}{2\cdot 6\cdot 5} = 47{,}2^\circ .$$

Damit wird

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 50^\circ - 47{,}2^\circ = 82{,}8^\circ .$$

Durch Anwendung des Sinussatzes finden wir für $\vec{F}_{12}$ und $\vec{F}_{32}$ die Beträge

$$F_{12} = F\,\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\,\frac{\sin 82{,}8^\circ}{\sin 47{,}2^\circ} = 2{,}7\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N},$$

$$F_{32} = F\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\,\frac{\sin 50^\circ}{\sin 47{,}2^\circ} = 2{,}1\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}.$$

Wenden wir jetzt das Coulomb'sche Gesetz nach Gl. (3.43) auf die Ladungen Q_1 und Q_2 an, so erhalten wir, wenn wir für Q_1 den Betrag einsetzen,

$$F_{12} = \frac{|Q_1|\,Q_2}{4\pi\varepsilon c^2}.$$

Hieraus folgt bei der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 1$ für die gesuchte Ladung Q_1 der Betrag

$$|Q_1| = \frac{F_{12}\,4\pi\varepsilon_0\,c^2}{Q_2} = \frac{2{,}7\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}\cdot 4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)}\cdot(0{,}05\,\mathrm{m})^2}{2\cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}},$$

$$|Q_1| = 3{,}8\cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}.$$

Damit wird

$$\underline{Q_1 = -3{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}}.$$

Entsprechend finden wir für die zweite gesuchte Ladung

$$Q_3 = \frac{F_{32}\, 4\pi\varepsilon_0\, a^2}{Q_2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} \cdot 4\pi \cdot 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{As/(Vm)} \cdot (0{,}06\ \mathrm{m})^2}{2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}},$$

$$\underline{Q_3 = 4{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{As}}.$$

3.6.2 Kräfte zwischen Elektroden

Das Coulomb'sche Gesetz nach Gl. (3.43) gilt nur für *Punktladungen*, nicht jedoch für Elektroden mit endlicher Ausdehnung. Nachfolgend sei untersucht, welche Kraft zwei geladene Körper mit endlichen Abmessungen aufeinander ausüben. Wir beschränken uns dabei auf Anordnungen, bei denen die sich gegenüberstehenden Ladungen dem Betrage nach gleich groß sind, jedoch entgegengesetzte Vorzeichen haben. In diesem Fall können die Anordnungen als *aufgeladene Kondensatoren* angesehen werden. Bild (3.25) zeigt beispielsweise eine derartige Anordnung.

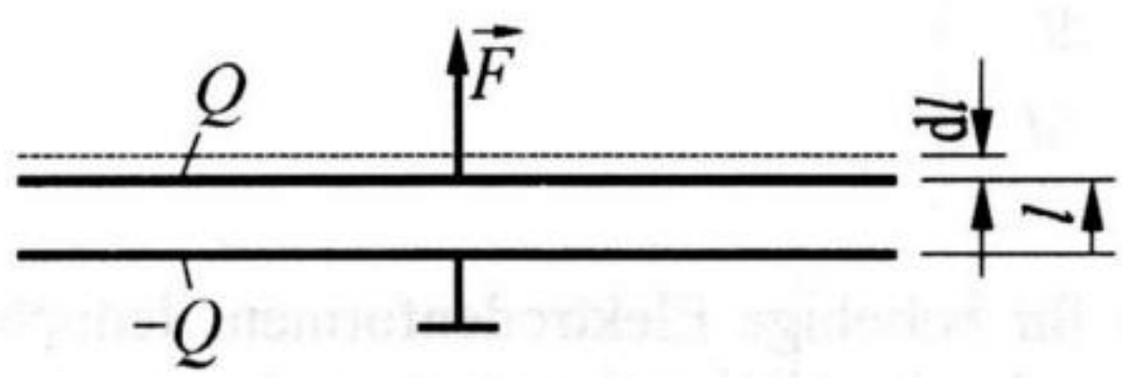


Bild 3.25 Zur Berechnung der zwischen Elektroden wirkenden Kraft

In dem dargestellten Kondensator ist bei der Kapazität C und der Ladung Q nach Gl. (3.35) die Energie

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \tag{3.44}$$

gespeichert. Zur Bestimmung der zwischen den Elektroden wirkenden Anziehungskraft (F) nehmen wir an, dass der Elektrodenabstand l um einen kleinen Betrag dl vergrößert wird. Die dafür aufzuwendende Energie beträgt

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}l. \tag{3.45}$$

Sie wird dem Kondensator zugeführt, so dass die gespeicherte Energie um den gleichen Betrag zunimmt. Durch die Vergrößerung des Elektrodenabstandes ändert sich auch die Kapazität des Kondensators um einen bestimmten Wert dC. Die Verknüpfung von Kapazitätsänderung (dC) und Änderung der im Kondensator gespeicherten Energie (dW) finden wir aus Gl. (3.44), indem wir diese nach C differenzieren. Wir erhalten

$$\mathrm{d}W = \frac{1}{2} Q^2 \left(-\frac{1}{C^2} \right) \mathrm{d}C = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \mathrm{d}C. \tag{3.46}$$

Durch Gleichsetzen der Gln. (3.45) und (3.46) ergibt sich

$$F \, \mathrm{d}l = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \mathrm{d}C.$$

Hieraus folgt für die zwischen den Elektroden wirkende Anziehungskraft

$$F = -\frac{Q^2}{2\,C^2} \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}l}.$$

Berücksichtigen wir, dass das Verhältnis Q/C gleich der Kondensatorspannung U ist, so wird daraus

$$\boxed{F = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}l}.} \tag{3.47}$$

Dieses Ergebnis gilt für beliebige Elektrodenformen. Jedoch gelingt es für viele Formen nicht, den Ausdruck dC/dl rechnerisch zu bestimmen. Das bedeutet, dass die *Berechnung* der zwischen den Elektroden wirkenden Anziehungskraft F nur für bestimmte (einfache) geometrische Elektrodenformen möglich ist.

Als Beispiel wollen wir den in Bild 3.25 dargestellten Plattenkondensator betrachten. Bei der Plattenfläche A, dem Plattenabstand l und der Permittivität ε beträgt die Kapazität nach Gl. (3.23)

$$C = \varepsilon \frac{A}{l}. \tag{3.48}$$

Wir differenzieren diese Gleichung nach l und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}l} = \varepsilon A \left(-\frac{1}{l^2} \right).$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (3.47) ein, so ergibt sich die zwischen den Platten wirkende Kraft als

$$F = -\frac{1}{2} U^2 \varepsilon A \left(-\frac{1}{l^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{U^2 \varepsilon A}{l^2}.$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.48) gilt auch

$$\boxed{F = \frac{1}{2} \frac{U^2 C}{l}.} \tag{3.49}$$

Aufgabe 3.11

Ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 0{,}6\ \mathrm{m}^2$ und dem Plattenabstand $d = 1$ mm ist auf die Spannung $U = 200$ V aufgeladen. Die Permittivitätszahl beträgt $\varepsilon_r = 1$.

Mit welcher Kraft F ziehen sich die beiden Elektroden an?

Lösung

Die Kapazität des Kondensators beträgt nach Gl. (3.23) bei der Permittivitätszahl $\varepsilon_r = 1$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}} \cdot \frac{0{,}6\ \mathrm{m}^2}{10^{-3}\ \mathrm{m}} = 5{,}31\ \mathrm{nF}.$$

Damit erhalten wir die zwischen den Elektroden wirkende Anziehungskraft nach Gl. (3.49) als

$$F = \frac{1}{2} \frac{U^2 C}{d} = \frac{(200\ \mathrm{V})^2 \cdot 5{,}31 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}}{2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}} = \underline{0{,}106\ \mathrm{N}}.$$

4 Das elektrische Strömungsfeld

4.1 Allgemeines

Das **elektrische Strömungsfeld** stellt eine Beschreibung der Ladungsbewegung in beliebig geformten elektrischen Leitern dar. Wir betrachten dazu als Beispiel eine Metallplatte nach Bild 4.1, von der zwei Punkte mit einer elektrischen Quelle verbunden sind, die den Strom I liefert.

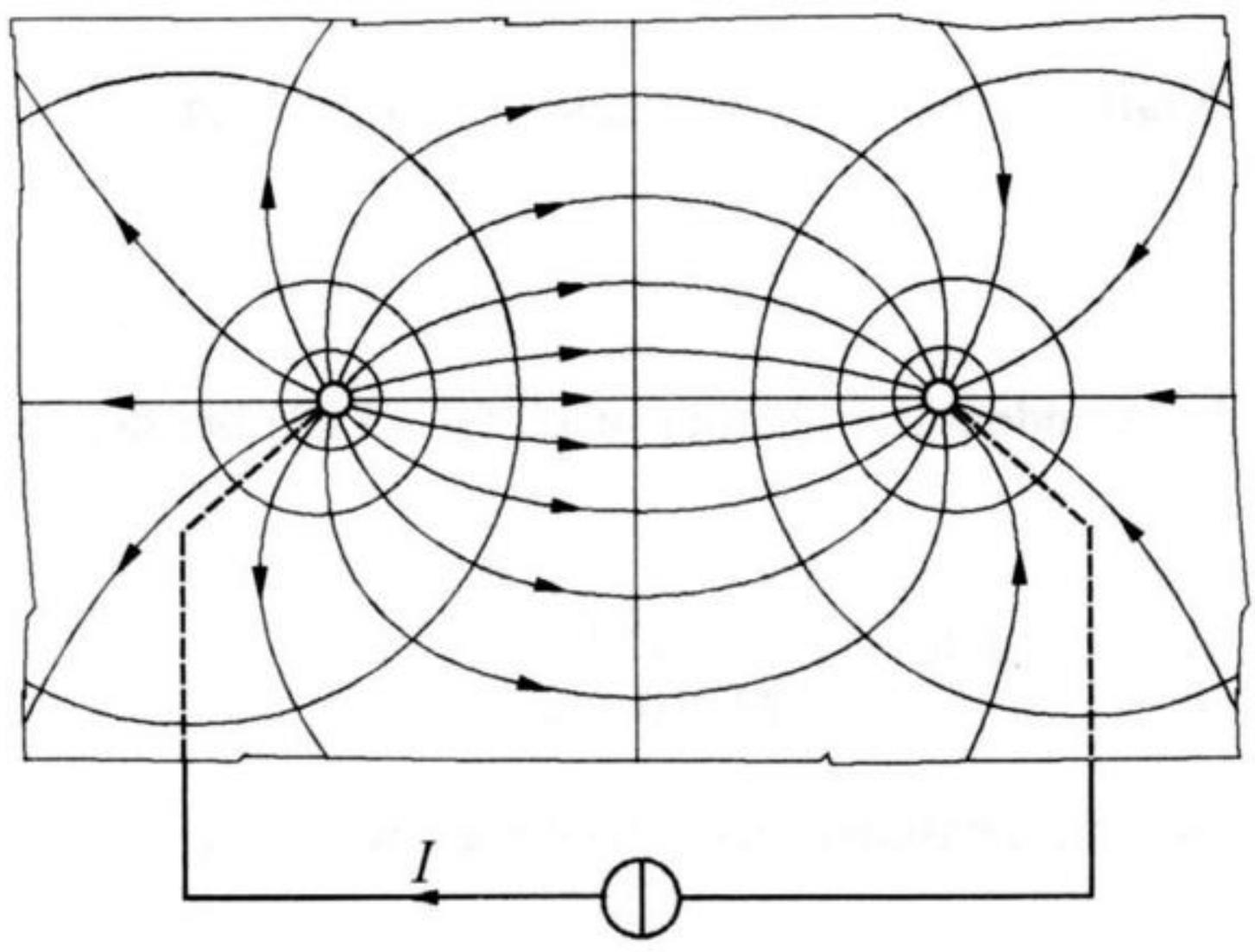


Bild 4.1 Beispiel eines elektrischen Strömungsfeldes

Die Ladungsträger bewegen sich auf den durch Pfeile gekennzeichneten Linien. Sie werden als **elektrische Feldlinien** oder als **elektrische Strömungslinien** bezeichnet. Dabei sei angemerkt, dass die tatsächliche Bewegungsrichtung der Elektronen in der Metallplatte entgegengesetzt der angegebenen Pfeilrichtung erfolgt. Die Pfeile geben die Bewegungsrichtung von *positiven* Ladungsträgern an (Richtungssinn der Strömung).

Verbindet man in der Darstellung Punkte mit gleichem elektrischen Potenzial, so erhält man Linien, die senkrecht zu den Strömungslinien verlaufen. Man bezeichnet sie als **Äquipotenziallinien.** In Bild 4.1 sind das diejenigen Linien, die keine Richtungspfeile enthalten.

4.2 Feldgrößen des Strömungsfeldes

Zur weiteren Untersuchung eines elektrischen Strömungsfeldes betrachten wir das in Bild 4.2 dargestellte Element eines Leiters. Es hat den Querschnitt dA (senkrecht zur Strömungsrichtung) und die Länge dl (in Strömungsrichtung).

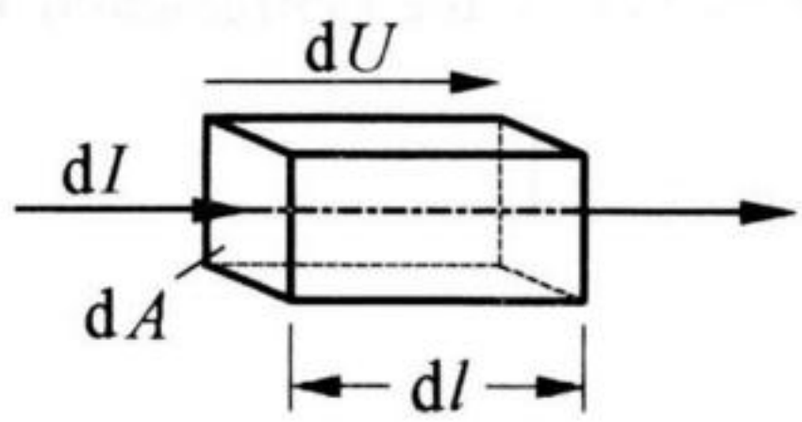


Bild 4.2 Zur Erläuterung der Feldgrößen des Strömungsfeldes

Nach dem ohmschen Gesetz besteht zwischen der anliegenden Spannung dU und dem im Leiterelement fließenden Strom dI die Beziehung

$$\mathrm{d}U = R\,\mathrm{d}I\,, \tag{4.1}$$

wobei R den elektrischen Widerstand darstellt. Die Spannung dU kann - ebenso wie im elektrostatischen Feld - als Produkt aus elektrischer Feldstärke E und Leiterlänge dl wiedergegeben werden. Daher gilt in Bild 4.2 nach Gl. (3.6)

$$\mathrm{d}U = E\,\mathrm{d}l\,. \tag{4.2}$$

Den Widerstand R des in Bild 4.2 dargestellten Leiterelements können wir nach Gl. (2.9) durch

$$R = \frac{\rho\,\mathrm{d}l}{\mathrm{d}A} \tag{4.3}$$

ausdrücken, wobei ρ der spezifische Widerstand des Leitermaterials ist. Der im Leiterelement fließende Strom dI lässt sich durch Einführen der Stromdichte J als

$$\mathrm{d}I = J\,\mathrm{d}A \tag{4.4}$$

angeben. Setzen wir die Gln. (4.2) bis (4.4) in Gl. (4.1) ein, so ergibt sich

$$E\,\mathrm{d}l = \frac{\rho\,\mathrm{d}l}{\mathrm{d}A}\,J\,\mathrm{d}A.$$

Hieraus folgt

$$\boxed{E = \rho J.} \tag{4.5}$$

Diese Gleichung besagt, dass die elektrische Feldstärke E, die nach Gl. (4.2) genauso definiert ist wie im elektrostatischen Feld, und die Stromdichte J einander proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor wird nach Gl. (4.5) durch den spezifischen Widerstand ρ des Leitermaterials gebildet. Verwenden wir in Gl. (4.5) statt des spezifischen Widerstandes ρ die Leitfähigkeit $\kappa = 1/\rho$, so ergibt sich

$$\boxed{J = \kappa E.} \tag{4.6}$$

Die Gln. (4.5) und (4.6) bezeichnet man auch als **ohmsches Gesetz des Strömungsfeldes**.

Stromdichte und Feldstärke sind *gerichtete* Größen, die somit durch *Vektoren* dargestellt werden können. Beide Vektoren haben in jedem beliebigen Punkt eines Raumes die gleiche Richtung. Sie stimmt mit der Bewegungsrichtung von positiven Ladungsträgern in dem betreffenden Punkt überein. Bezeichnet man die Vektoren der Feldstärke und der Stromdichte als $\vec{E}$ und $\vec{J}$, so wird aus Gl. (4.5)

$$\boxed{\vec{E} = \rho \vec{J}} \tag{4.7}$$

und aus Gl. (4.6)

$$\boxed{\vec{J} = \kappa \vec{E}.} \tag{4.8}$$

Die im Strömungsfeld zwischen zwei Punkten bestehende elektrische Spannung U ergibt sich - ebenso wie im elektrostatischen Feld - als Linienintegral der elektrischen Feldstärke längs eines zwischen den Punkten beliebig gewählten Weges. Entsprechend Gl. (3.7) gilt also, wenn wir die betreffenden Punkte mit 1 und 2 bezeichnen,

$$\boxed{U = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l}.} \tag{4.9}$$

Den durch eine Fläche A fließenden Strom können wir analog zu Gl. (3.10) darstellen durch das Flächenintegral

$$\boxed{I = \int_A \vec{J}\,\mathrm{d}\vec{A}\,.} \tag{4.10}$$

Eine weitere im Strömungsfeld verwendete Größe ist die pro Volumeneinheit auftretende (in Wärme umgesetzte) Leistung. Man bezeichnet diese Größe als **Leistungsdichte** (Symbol: S). Zu deren Bestimmung betrachten wir Bild 4.2. In dem dargestellten Leiterelement mit dem Volumen

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}A\,\mathrm{d}l$$

beträgt die in Wärme umgesetzte Leistung

$$\mathrm{d}P = \mathrm{d}U\,\mathrm{d}I\,.$$

Damit erhalten wir die in einer Volumeneinheit umgesetzte Leistung unter Verwendung der Gln. (4.2) und (4.4) als

$$S = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}U\,\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A\,\mathrm{d}l} = \frac{E\,\mathrm{d}l\,J\,\mathrm{d}A}{\mathrm{d}A\,\mathrm{d}l}.$$

Es gilt also

$$\boxed{S = E\,J.} \tag{4.11}$$

Die Leistungsdichte S stellt - ebenso wie die Feldstärke E und die Stromdichte J - eine ortsabhängige, jedem Punkt innerhalb eines Leiters zugeordnete Größe dar. Die in einem bestimmten Leitervolumen V in Wärme umgesetzte Leistung P ergibt sich dadurch, dass man die Leistungsdichte S über das Leitervolumen integriert. Unter Berücksichtigung von Gl. (4.11) gilt also

$$\boxed{P = \int_V E\,J\,\mathrm{d}V.} \tag{4.12}$$

4.3 Bestimmung von Widerständen

Wir betrachten die Anordnung nach Bild 4.3a und gehen davon aus, dass zwischen zwei konzentrisch angeordneten, **dünnwandigen Metallhohlkugeln** (mit den Radien r_1 und r_2) ein leitfähiges Medium mit dem spezifischen Widerstand ρ vorhanden ist. Gesucht sei der zwischen beiden Metallhohlkugeln bestehende elektrische Widerstand.

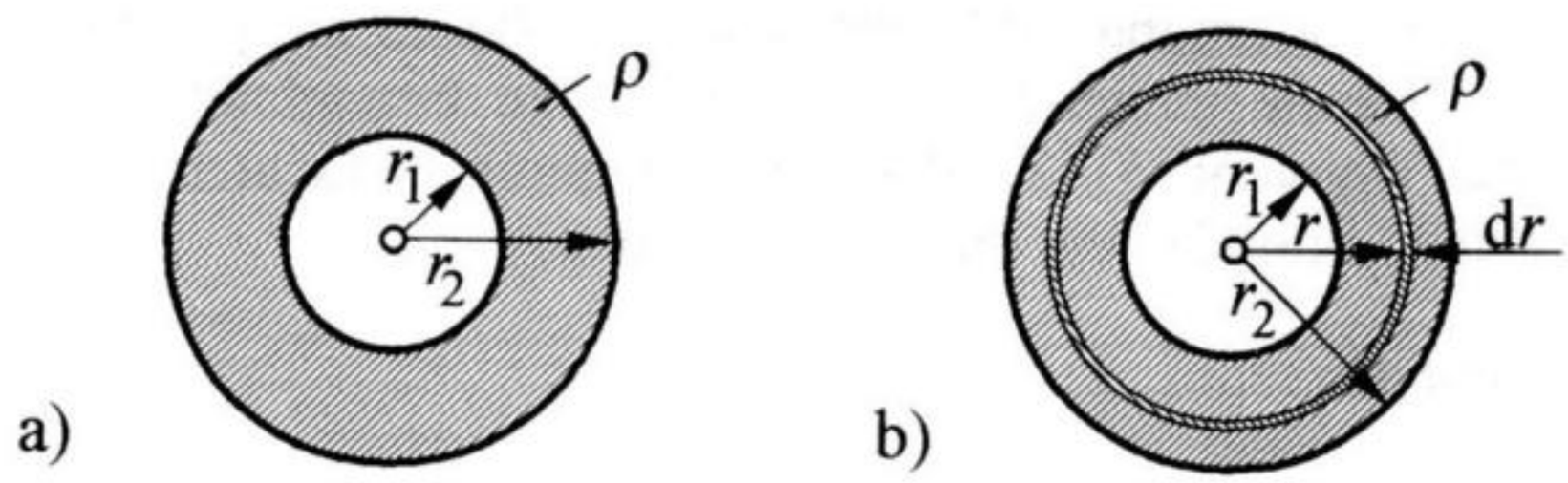


Bild 4.3 Zur Bestimmung von Widerständen im elektrischen Strömungsfeld.
a) Betrachtete Anordnung, b) Zerlegung des Mediums in Schichten

Zur Lösung der Aufgabe stellen wir uns den Raum zwischen den beiden Metallhohlkugeln als aus unendlich vielen, konzentrisch übereinander angeordneten, dünnwandigen Hohlkugeln bestehend vor. Wir betrachten nach Bild 4.3b eine dieser Hohlkugeln. Sie besitzt bei dem Radius r die Oberfläche $A = 4\pi r^2$. Damit beträgt der zwischen den Oberflächen der Innenseite und der Außenseite bestehende Widerstand der betrachteten Hohlkugel (bei der Wandstärke dr) nach Gl. (2.9)

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{A} = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{4\pi r^2}.$$

Addieren wir die (in Reihe liegenden) Widerstände dR aller Einzelhohlkugeln innerhalb der Grenzen $r = r_1$ und $r = r_2$, so erhalten wir den gesuchten Gesamtwiderstand

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}R = \frac{\rho}{4\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{\rho}{4\pi r}\bigg|_{r_1}^{r_2}.$$

Setzen wir die Grenzen ein, so finden wir das Ergebnis

$$\boxed{R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).} \tag{4.13}$$

Wir gehen jetzt davon aus, dass die in Bild 4.3a dargestellte Anordnung aus zwei koaxial angeordneten, **dünnwandigen Metallrohren** der Länge l besteht. Der zwischen beiden Rohren bestehende Raum möge ebenfalls mit einem Medium ausgefüllt sein, dessen spezifischer Widerstand ρ ist. Gesucht sei der zwischen den Rohren bestehende elektrische Widerstand.

Zur Lösung der Aufgabe stellen wir uns den Raum zwischen den beiden Metallrohren als aus unendlich vielen, koaxial übereinander angeordneten, dünnwandigen Rohren bestehend vor. Wir betrachten nach Bild 4.3b eines dieser Rohre. Es besitzt bei dem Radius r und der Länge l die Oberfläche $A = 2\pi r l$. Damit beträgt der zwischen den Oberflächen der Innenseite und der Außenseite bestehende Widerstand des betrachteten Rohres (bei der Wandstärke dr) nach Gl. (2.9)

$$\mathrm{d}R = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{A} = \frac{\rho\,\mathrm{d}r}{2\pi r l}.$$

Addieren wir die (in Reihe liegenden) Widerstände dR aller Einzelrohre innerhalb der Grenzen $r = r_1$ und $r = r_2$, so erhalten wir den gesuchten Gesamtwiderstand

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \mathrm{d}R = \frac{\rho}{2\pi l}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Führen wir die Integration aus und setzen die Grenzen ein, so finden wir das Ergebnis

$$\boxed{R = \frac{\rho}{2\pi l}\ln\frac{r_2}{r_1}.} \tag{4.14}$$

Aufgabe 4.1

An einem stromführenden Kupferdraht mit dem spezifischen Widerstand $\rho = 17{,}6\cdot 10^{-9}\ \Omega\mathrm{m}$ wird zwischen zwei l = 5,0 m voneinander entfernten Punkten die Spannung U = 550 mV gemessen.

Welche Stromdichte J herrscht im Leiter?

Lösung

Bei konstantem Drahtquerschnitt liegt ein homogenes elektrisches Strömungsfeld vor. Daher hat die elektrische Feldstärke an allen Stellen des Leiters den gleichen Wert. Er beträgt nach Gl. (4.2)

$$E = \frac{U}{l} = \frac{0{,}55\ \mathrm{V}}{5{,}0\ \mathrm{m}} = 0{,}11\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Die Feldstärke verursacht nach Gl. (4.5) die Stromdichte

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{0{,}11\ \mathrm{V/m}}{17{,}6\cdot 10^{-9}\ \Omega\mathrm{m}} = 6{,}25\cdot 10^{6}\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2} = \underline{6{,}25\ \mathrm{A/mm^2}}.$$

Aufgabe 4.2

Zwischen zwei koaxial angeordneten dünnwandigen Metallrohren nach Bild 4.3a der Länge $l = 2{,}0$ m mit den Radien $r_1 = 10$ mm und $r_2 = 20$ mm befindet sich ein Medium, dessen spezifischer Widerstand $\rho = 5{,}0\cdot 10^{6}\ \Omega\mathrm{m}$ beträgt. Das Medium möge (radial) von dem Strom $I = 5{,}0$ mA durchflossen werden.

Welche Spannung U besteht zwischen den Rohren?

Lösung

Im Abstand r von der Mittellinie verteilt sich der Strom I auf den Strömungsquerschnitt $A = 2\pi r l$. Somit herrscht hier die Stromdichte

$$J = \frac{I}{2\pi r l}.$$

An der gleichen Stelle beträgt nach Gl. (4.5) die elektrische Feldstärke

$$E = \rho J = \rho\frac{I}{2\pi r l}.$$

Damit ergibt sich nach Gl. (4.9) für die zwischen den Rohren bestehende Spannung

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} \rho\frac{I}{2\pi r l}\,\mathrm{d}r = \frac{\rho I}{2\pi l}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\rho I}{2\pi l}\cdot\ln\frac{r_2}{r_1},$$

$$U = \frac{5{,}0\cdot 10^{6}\ \Omega\mathrm{m}\cdot 5{,}0\cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}}{2\pi\cdot 2{,}0\ \mathrm{m}}\cdot\ln\frac{20\ \mathrm{mm}}{10\ \mathrm{mm}} = \underline{1{,}38\cdot 10^{3}\ \mathrm{V}}.$$

Anmerkung: Zur Lösung der Aufgabe kann auch zunächst nach Gl. (4.14) der zwischen den Rohren bestehende Widerstand R bestimmt werden. Dann erhält man durch Anwendung des ohmschen Gesetzes $U = I\,R$ die gesuchte Spannung.

5 Das magnetische Feld

5.1 Allgemeines zum magnetischen Feld

Ein elektrisch nicht geladener, stromführender Leiter übt auf einen anderen stromführenden Leiter eine Kraft aus. Die Ursache dieser Kraftwirkung kann nicht mit dem Vorhandensein eines elektrischen Feldes erklärt werden, da von den ungeladenen Leitern kein derartiges Feld ausgeht. Die beschriebene Kraftwirkung erklärt man vielmehr folgendermaßen: Jeder elektrische Strom versetzt den ihn umgebenden Raum in einen besonderen Zustand, der sich dadurch äußert, dass auf andere Ströme Kräfte ausgeübt werden. Diesen besonderen Raumzustand bezeichnet man als **magnetisches Feld**. Die Tatsache, dass das Fließen eines Stromes eine Bewegung von elektrischen Ladungsträgern darstellt, führt zu der Erkenntnis, dass jede sich bewegende Ladung ein magnetisches Feld verursacht.

Auch das von einem Dauermagneten erzeugte magnetische Feld hat seine Ursache in der Bewegung von elektrischen Ladungsträgern. Man kann die den Atomkern umkreisenden Elektronen als *Kreisströme* auffassen, die (kleinste) magnetische Felder erzeugen. Zusätzlich drehen sich die Elektronen um ihre eigene Achse. Diese Rotation wird als *Spin* bezeichnet und hat ebenfalls (kleinste) magnetische Felder zur Folge. In einem Dauermagneten heben sich die magnetischen Wirkungen der Kreisströme und des Spins nicht gegenseitig auf, so dass ein Magnetfeld nach außen in Erscheinung tritt.

Ein solches Magnetfeld wird auch von der Erde erzeugt. Es ist die Ursache dafür, dass sich eine drehbar gelagerte Magnetnadel (Kompassnadel) in Nord-Süd-Richtung einstellt. Dabei weist immer dasselbe Ende der Magnetnadel nach Norden. Man bezeichnet es als **Nordpol** und das gegenüberliegende Ende als **Südpol**. Bewegt man zwei Magnetnadeln aufeinander zu, so findet man, dass sowohl die beiden Nordpole als auch die beiden Südpole sich jeweils gegenseitig abstoßen. Dagegen zieht ein Nordpol einen Südpol an und umgekehrt. Gleichartige Magnetpole stoßen sich also ab, ungleichartige Pole ziehen sich an.

Die zwischen Magnetpolen auftretenden Kräfte erinnern somit an Kraftwirkungen, die zwischen elektrischen Ladungen bestehen. Ein wesentlicher Unterschied besteht jedoch darin, dass der Nord- und der Südpol eines Magneten nicht voneinander getrennt werden können. Zerbricht man beispielsweise einen Stabmagneten (Dauermagnet in Stabform), so entstehen zwei eigenständige Stabmagnete mit je einem Nord- und je einem Südpol. Es existieren also keine einzelnen Magnetpole.

Untersucht man das von einem Stabmagneten erzeugte magnetische Feld mit Hilfe einer Magnetnadel, so kommt man zu dem in Bild 5.1 dargestellten Ergebnis.

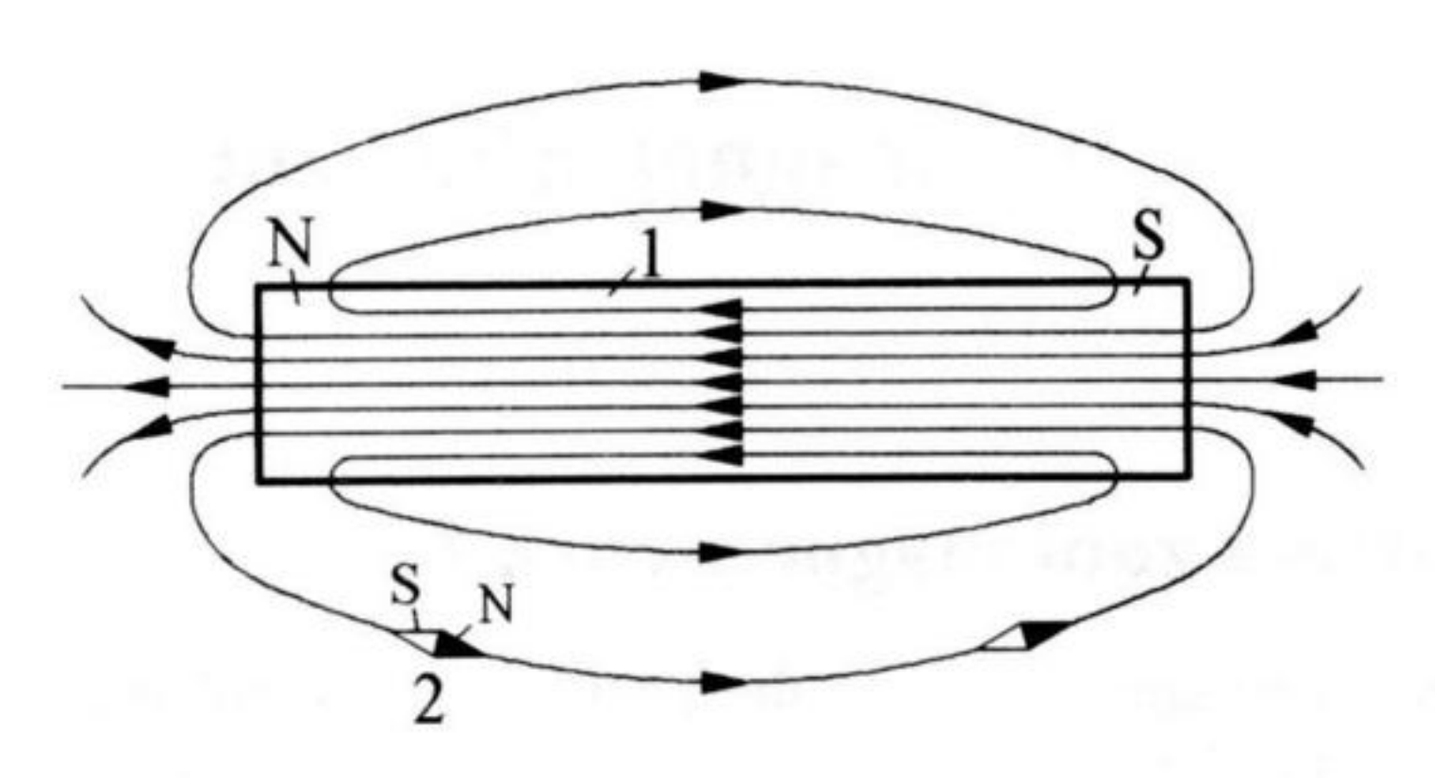


Bild 5.1 Ermittlung des Feldverlaufs eines Stabmagneten (1) mit Hilfe einer Magnetnadel (2)

Die sich in der Anordnung durch die Magnetnadel (2) ergebenden Richtungen kann man durch Linien darstellen, die man als **magnetische Feldlinien** bezeichnet. Nord- und Südpol des Stabmagneten (1) findet man aus der vorher erwähnten Erkenntnis, dass ungleichartige Pole sich anziehen. Beispielsweise wird der Südpol (S) der Magnetnadel vom Nordpol (N) des Stabmagneten angezogen.

Die magnetischen Feldlinien werden nach Bild 5.1 mit Richtungspfeilen versehen. Sie sind willkürlich so festgelegt worden, dass sie außerhalb des Magneten vom Nordpol zum Südpol zeigen. Magnetische Feldlinien sind, im Gegensatz zu den Feldlinien des elektrostatischen Feldes, stets in sich geschlossen. Beispielsweise schließen sich die in Bild 5.1 außerhalb des Magneten von Nordpol zum Südpol verlaufenden Feldlinien im Innern des Magneten.

Wir wollen jetzt das Magnetfeld eines langen geraden stromführenden Leiters untersuchen. In Bild 5.2a ist ein derartiger Leiter - senkrecht zur Zeichenebene verlaufend - dargestellt. Das eingetragene Kreuz bedeutet, dass der Strom I in die Zeichenebene hineinfließt. Die entgegengesetzte Stromrichtung wird nach Bild 5.2b durch einen Punkt gekennzeichnet.

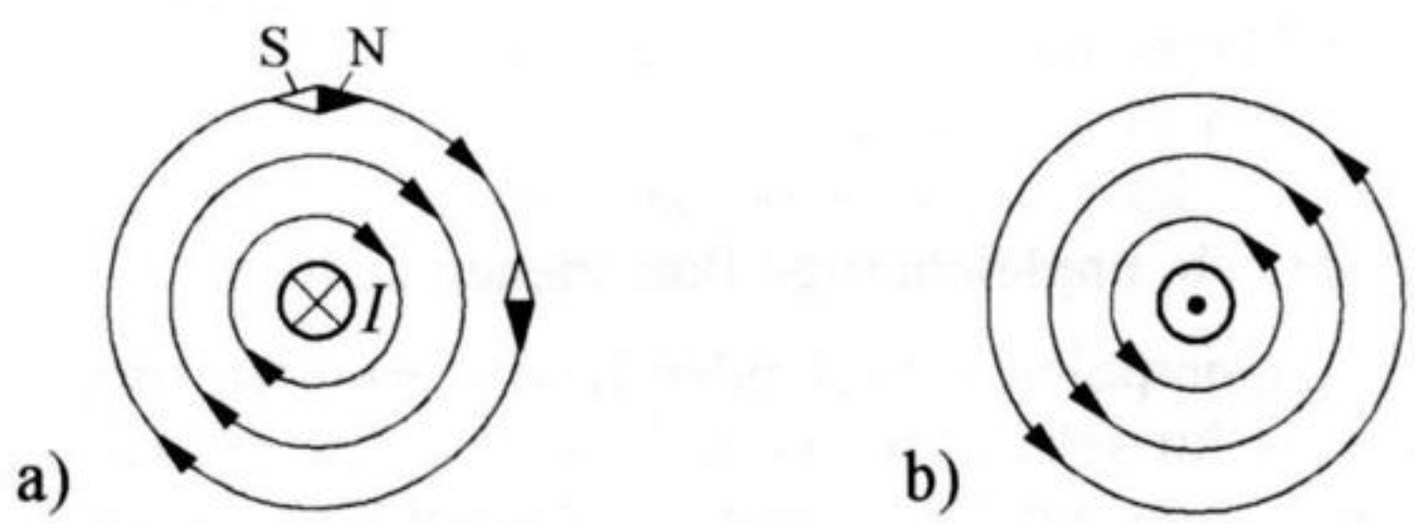


Bild 5.2 Ermittlung des Feldverlaufs eines stromdurchflossenen geraden Leiters.
a) Strom fließt in die Zeichenebene hinein, b) Strom fließt aus der Zeichenebene heraus

Untersucht man nun mit Hilfe einer Magnetnadel das vom Strom I erzeugte Magnetfeld, so findet man in Bild 5.2a, dass die Feldlinien kreisförmig im Uhrzeigersinn um den Leiter verlaufen. Diese zwischen Strom und Feld bestehende Richtungszuordnung kann man durch eine Merkregel beschreiben, die man als **Rechtsschraubenregel** bezeichnet. Sie lautet (vergl. Bild 5.2a und Bild 5.2b):

Dreht man eine rechtsgängige Schraube so, dass sie sich in Stromrichtung fortbewegt, so findet man die Richtung der magnetischen Feldlinien aus der Drehrichtung der Schraube.

Durch die Verwendung von *Spulen* können erheblich stärkere Magnetfelder erzeugt werden, als dies mit einem einzelnen Leiter möglich ist. Wir wollen daher noch zwei häufig angewendete Spulenformen betrachten. In Bild 5.3a ist ein Leiter zu einer **Zylinderspule** aufgewickelt. Der in der Spule fließende Strom erzeugt ein Magnetfeld, das annähernd mit dem eines Stabmagneten (vergl. Bild 5.1) übereinstimmt. Bild 5.3b zeigt eine kreisförmige **Ringspule**. Bei dieser Anordnung verläuft das Magnetfeld nur im Innern der Spule.

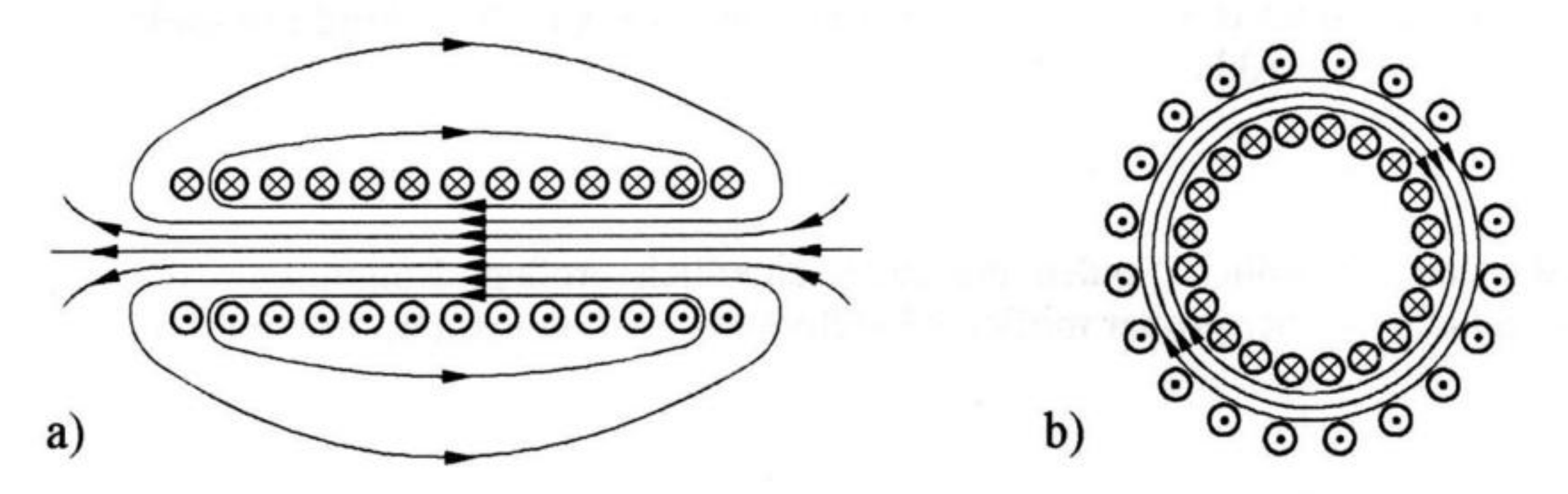


Bild 5.3 Verlauf der von stromführenden Spulen verursachten Magnetfelder
a) Zylinderspule, b) Ringspule

5.2 Die magnetischen Feldgrößen

5.2.1 Magnetische Feldstärke

Bringt man eine Magnetnadel in das magnetische Feld einer kreisförmigen Ringspule und stellt sie nach Bild 5.4 senkrecht zur Feldrichtung ein, so wird auf die Magnetnadel ein Drehmoment (M) ausgeübt. Es versucht, die Magnetnadel in Richtung des Feldes einzustellen. Die Höhe des Drehmomentes M stellt in Maß für die Stärke des in der Ringspule vorhandenen magnetischen Feldes dar.

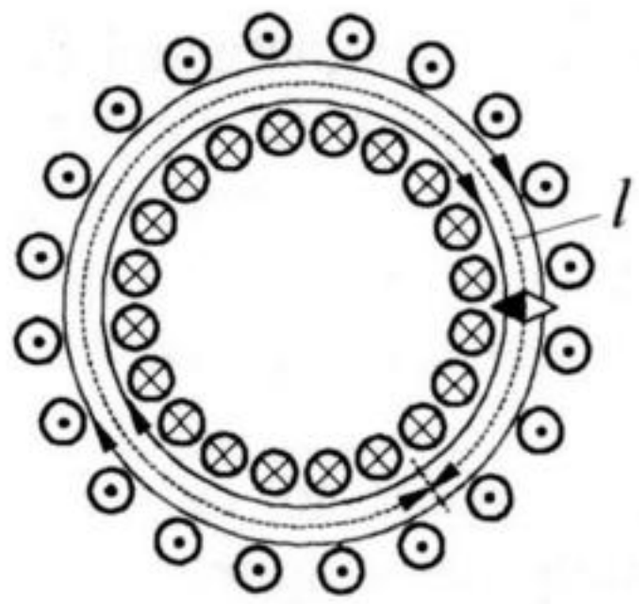


Bild 5.4 Zur Erläuterung des Begriffs „magnetische Feldstärke"

Untersucht man die in Bild 5.4 dargestellte Anordnung, indem man das Drehmoment bei unterschiedlich großen Spulenströmen I ermittelt, so findet man, dass M und I einander proportional sind. Es gilt also

$$M \sim I.$$

Verwendet man verschiedene Spulen mit unterschiedlichen Windungszahlen N, so ergibt sich die Abhängigkeit

$$M \sim N.$$

Werden schließlich Spulen mit unterschiedlich großem Ringumfang und damit unterschiedlicher großer mittlerer Feldlinienlänge l untersucht, so erhält man

$$M \sim \frac{1}{l}.$$

Fassen wir die angegebenen Abhängigkeiten zusammen, so ergibt sich

$$M \sim \frac{I\,N}{l}.$$

Der gefundene Ausdruck $I\,N/l$ ist also dem Drehmoment M und damit auch der Stärke des in der Ringspule nach Bild 5.4 vorhandenen Magnetfeldes proportional. Man bezeichnet $I\,N/l$ als **magnetische Feldstärke** (Symbol: H).

Dabei ist jedoch festzustellen, dass die Größe H nicht letztlich die Stärke des Magnetfeldes wiedergibt, da diese auch noch vom Material abhängt, das sich innerhalb der Spule befindet. Beispielsweise lässt sich bei gleicher Feldstärke H durch die Verwendung von Eisen ein erheblich stärkeres Magnetfeld erzeugen. Die magnetische Feldstärke H kann vielmehr als eine direkt mit dem Strom verknüpfte Größe aufgefasst werden, die - ohne Berücksichtigung von Materialeigenschaften - ein magnetisches Feld *verursacht*. H wird deshalb manchmal auch als *magnetische Erregung* bezeichnet.

Im Innern einer kreisförmigen Ringspule nach Bild 5.4 gilt also für die magnetische Feldstärke

$$\boxed{H = \frac{I\,N}{l}.} \tag{5.1}$$

Die Einheit folgt aus Gl. (5.1) als

$$[H] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}.$$

Hierbei sei angemerkt, dass die Windungszahl N in Gl. (5.1) eine dimensionslose Größe darstellt, so dass sie in der Einheit für H nicht auftritt. Den in Gl. (5.1) im Zähler vorhandenen Ausdruck $I\,N$ bezeichnet man als **elektrische Durchflutung** und verwendet hierfür das Symbol Θ. Es gilt also

$$\Theta = I\,N. \tag{5.2}$$

Die elektrische Durchflutung stellt in Bild 5.4 die Summe aller Ströme dar, die die kreisförmige Fläche mit dem Umfang l durchsetzt. Setzen wir Gl. (5.2) in Gl. (5.1) ein, so ergibt sich

$$H = \frac{\Theta}{l}. \tag{5.3}$$

Die magnetische Feldstärke H ist demnach das Verhältnis von Durchflutung Θ zur Feldlinienlänge l. Dies gilt allerdings nur unter der Voraussetzung, dass die Feldstärke längs des Umfangs überall gleich groß ist.

Wir wollen jetzt einen einzelnen geraden Leiter betrachten, der nach Bild 5.5 von einem Strom I durchflossen wird.

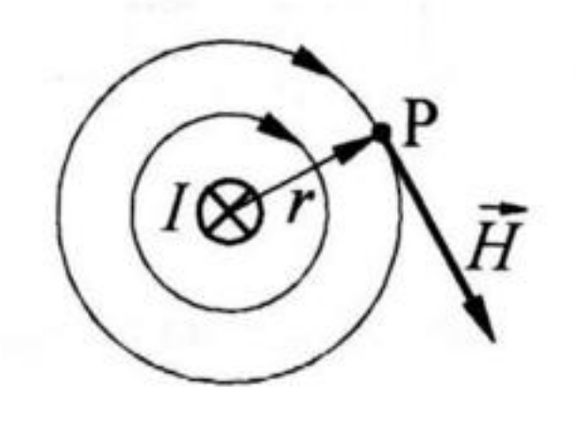


Bild 5.5 Zur Ermittlung der magnetischen Feldstärke in der Umgebung eines geraden stromführenden Leiters

Eine magnetische Feldlinie mit dem Radius r hat die Länge

$$l = 2\,\pi\,r.$$

Die Durchflutung ist

$$\Theta = I.$$

Folglich beträgt die magnetische Feldstärke im Abstand r von der Mittellinie nach Gl. (5.3)

$$\boxed{H = \frac{I}{2\pi r}.} \tag{5.4}$$

Die Feldstärke H ist somit eine Größe, die jedem Punkt eines Raumes zugeordnet werden kann. Sie ist zudem eine *gerichtete Größe*, die sich daher durch einen Vektor darstellen lässt. In Bild 5.5 ist $\vec{H}$ der Vektor der im Punkt P herrschenden Feldstärke. Die Richtung von $\vec{H}$ stimmt also mit der Richtung des magnetischen Feldes in dem betreffenden Punkt überein.

5.2.2 Magnetische Flussdichte und Permeabilität

Nach Abschnitt 5.2.1 gibt die **magnetische Feldstärke** (H) letztlich keine Auskunft über die Stärke eines Magnetfeldes, da in der Definition dieser Größe die Materialeigenschaften des betreffenden Raumes nicht enthalten sind. Daher ist eine weitere Feldgröße - die **magnetische Flussdichte** (B) - eingeführt worden. Zu ihrer Erläuterung betrachten wir Bild 5.6.

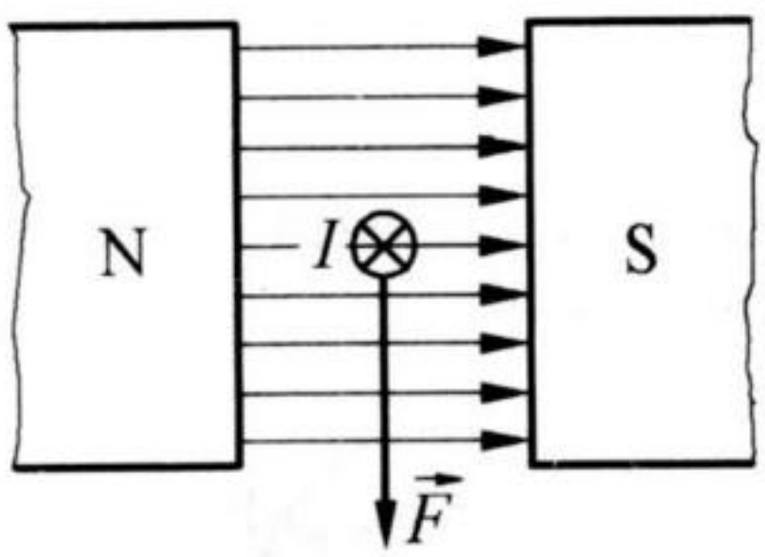


Bild 5.6 Stromführender Leiter im homogenen Magnetfeld

Es zeigt das vom einem Nordpol (N) zu einem Südpol (S) verlaufende magnetische Feld. Es habe überall die gleiche Stärke, so dass es als *homogen* angesehen werden kann. Ein im Feld liegender Leiter verlaufe senkrecht zur Feldrichtung und führe den Strom I. Das im Feld liegende Leiterstück habe die Länge l. Bei einer solchen Anordnung können wir beobachten, dass das Magnetfeld auf den stromführenden Leiter eine Kraft $\vec{F}$ ausübt, die senkrecht zur Feldrichtung und senkrecht zum Leiter wirkt. Messen wir diese Kraft bei verschiedenen Strömen I und

verschiedenen Leiterlängen l, so stellen wir fest, dass der Betrag von $\vec{F}$ sowohl zu I als auch zu l proportional ist. Es gilt also

$$F \sim I\,l.$$

Wir können diese Abhängigkeit durch die Gleichung

$$\boxed{F = B\,I\,l} \tag{5.5}$$

ersetzen, wobei B eine Proportionalitätskonstante darstellt. Sie gibt Auskunft über die Stärke des magnetischen Feldes, in dem sich der stromführende Leiter befindet. Man bezeichnet B als **magnetische Flussdichte** oder als **magnetische Induktion**. Diese Feldgröße stellt - ebenso wie die magnetische Feldstärke H - eine *gerichtete* Größe dar, die somit als *Vektor* (in Feldrichtung weisend) dargestellt werden kann. Die Einheit für B folgt aus Gl. (5.5) als

$$[B] = \frac{[F]}{[I][l]} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A\,m}} = \frac{\mathrm{V\,A\,s}}{\mathrm{m\,A\,m}} = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}.$$

Hierfür verwendet man auch die Bezeichnung **Tesla** (Abkürzung: T). Es gilt also

$$[B] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2} = \mathrm{Tesla} = \mathrm{T}. \tag{5.6}$$

Die unabhängig voneinander definierten Feldgrößen H (Feldstärke) und B (Flussdichte) lassen sich durch die Gleichung

$$\boxed{B = \mu H} \tag{5.7}$$

miteinander verbinden. Hierbei stellt μ eine Größe dar, die die magnetischen Eigenschaften des Raumes beinhaltet, in dem sich das Magnetfeld ausbreitet. Man bezeichnet μ als **Permeabilität**. Die Einheit folgt aus Gl. (5.7) als

$$[\mu] = \frac{[B]}{[H]} = \frac{\mathrm{Vs/m}^2}{\mathrm{A/m}} = \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}}.$$

Die **Permeabilität des leeren Raumes** beträgt

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}.} \tag{5.8}$$

Man bezeichnet diese Größe auch als **magnetische Feldkonstante**. Die Permeabilität beliebiger Stoffe lässt sich durch das Produkt

$$\boxed{\mu = \mu_0 \mu_r} \tag{5.9}$$

darstellen. Der Faktor μ_r heißt **Permeabilitätszahl**. Es handelt sich um eine stoffabhängige, dimensionslose Größe. Definitionsgemäß ist im Vakuum $\mu_r = 1$.

Die meisten Stoffe haben eine Permeabilitätszahl, die sich kaum von eins unterscheidet. Nur bei einigen Stoffen, zum Beispiel Eisen, Kobalt oder Nickel, ist μ_r sehr viel größer als eins. Auf diese wichtigen, als **ferromagnetisch** bezeichneten Stoffe wird in Abschnitt 5.5 näher eingegangen.

5.2.3 Der magnetische Fluss

Die magnetische Flussdichte B kann als die im magnetischen Feld herrschende *Feldliniendichte* angesehen werden. Daher ist es folgerichtig, zur Kennzeichnung der resultierenden Wirkung des magnetischen Feldes einen **magnetischen Fluss** einzuführen. Dazu betrachten wir zunächst ein homogenes Feld, wie es in Bild 5.7a zwischen den beiden Polen eines Magneten besteht.

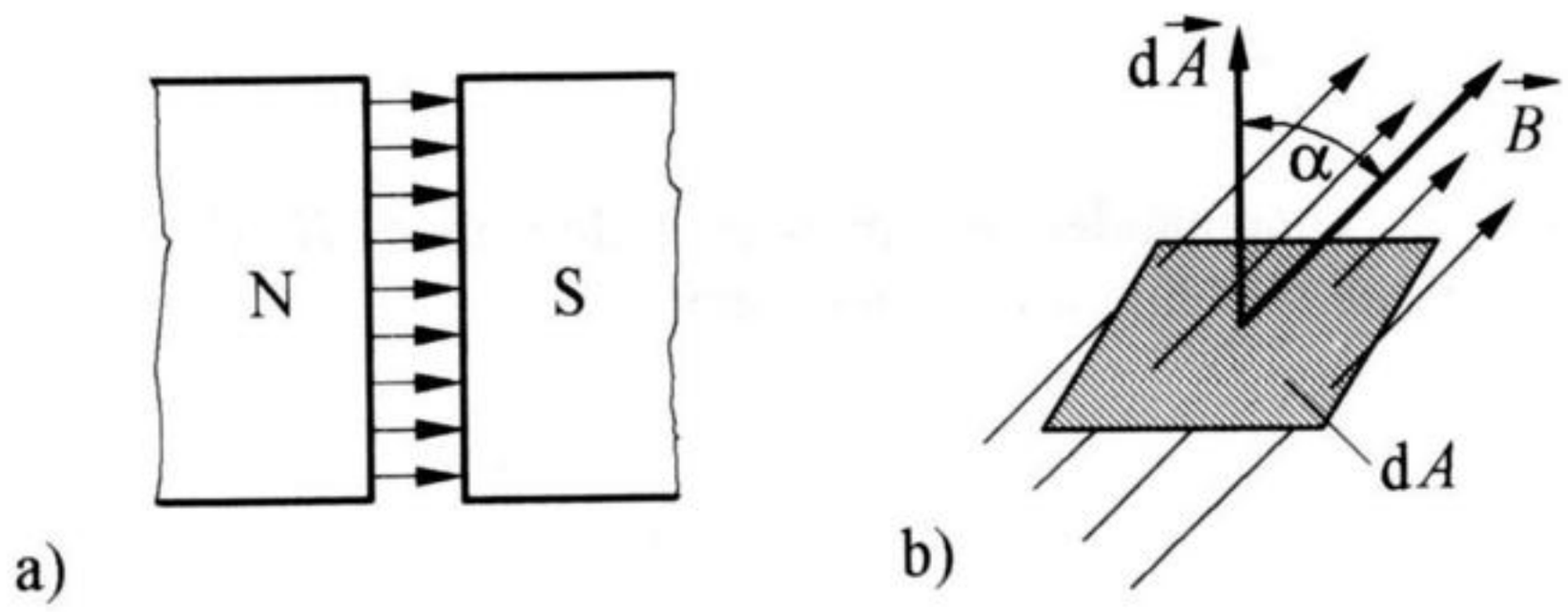


Bild 5.7 Zur Bestimmung des magnetischen Flusses a) im homogenen Feld, b) allgemein

Herrscht im Luftspalt die Flussdichte B, so bezeichnet man die Größe

$$\boxed{\Phi = B A} \tag{5.10}$$

als (den zwischen den Polen verlaufenden) **magnetischen Fluss**. Dabei ist A die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche, also diejenige Fläche, auf die sich der magnetische Fluss im Luftspalt verteilt. Sie ist nach Bild 5.7a gleich der Fläche der Magnetpole. Die Einheit von Φ ergibt sich aus Gl. (5.10) unter Berücksichtigung von Gl. (5.6) als

$$[\Phi] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}\,\mathrm{m}^2 = \mathrm{Vs}.$$

Hierfür verwendet man auch die Bezeichnung **Weber** (Abkürzung: Wb). Es gilt also

$$[\Phi] = \mathrm{Vs} = \mathrm{Weber} = \mathrm{Wb}. \tag{5.11}$$

Zur Bestimmung des magnetischen Flusses in einem beliebigen (inhomogenen) Feld betrachten wir das in Bild 5.7b dargestellte Flächenelement dA. Es kann durch einen Vektor $\mathrm{d}\vec{A}$ dargestellt werden, dessen Betrag gleich der schraffierten Fläche (dA) ist, und dessen Richtung senkrecht dazu verläuft. Das Flächenelement werde von einem magnetischen Feld der Flussdichte B durchsetzt. Der Vektor $\vec{B}$ gebe die Richtung des Feldes an. α sei der zwischen $\vec{B}$ und $\mathrm{d}\vec{A}$ bestehende Winkel. Da die in Richtung von $\mathrm{d}\vec{A}$ wirkende Flussdichtekomponente den Betrag $B\cos\alpha$ hat, beträgt der das Flächenelement durchdringende magnetische Fluss

$$\mathrm{d}\Phi = B\,\mathrm{d}A\cos\alpha = \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}.$$

Hierbei stellt $\vec{B}\,d\vec{A}$ das *skalare Produkt* der Vektoren $\vec{B}$ und $\mathrm{d}\vec{A}$ dar. Durch Integrieren findet man den durch eine beliebige Fläche A verlaufenden magnetischen Fluss als

$$\boxed{\Phi = \int_A \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{A}.} \tag{5.12}$$

5.2.4 Die magnetische Spannung

Wir betrachten zunächst ein homogenes Magnetfeld, wie es in Bild 5.8a zwischen den beiden Magnetpolen besteht.

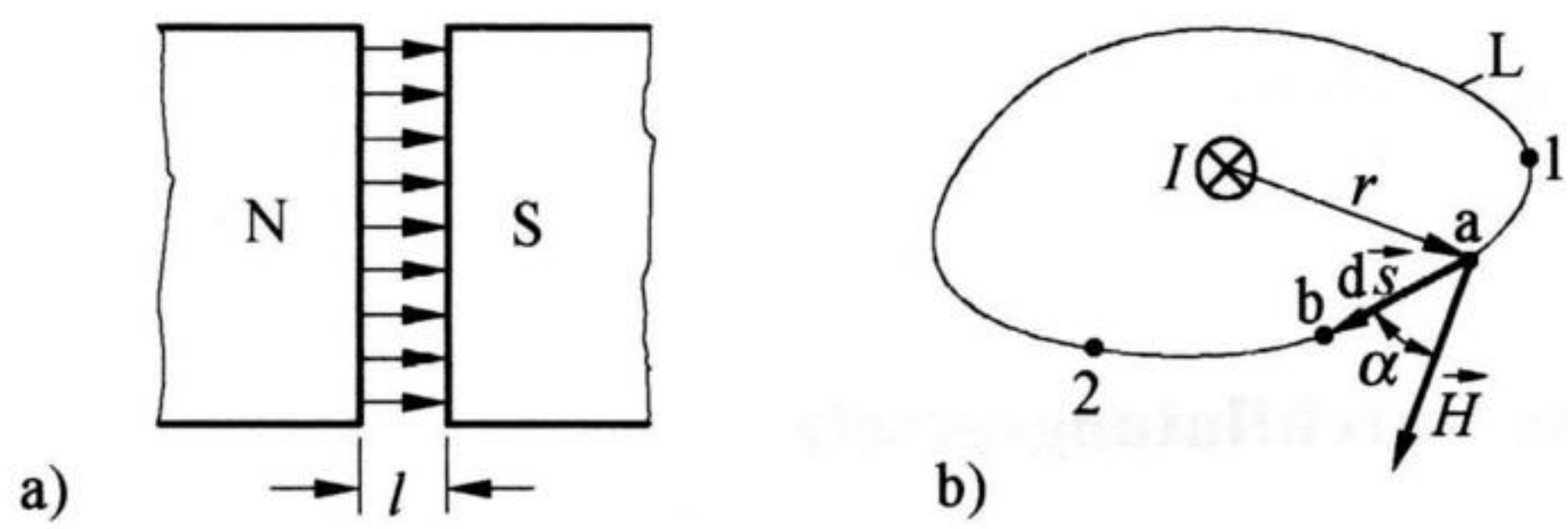


Bild 5.8 Zur Bestimmung der magnetischen Spannung
a) im homogenen Magnetfeld, b) im inhomogenen Magnetfeld

Die im Luftspalt herrschende magnetische Feldstärke sei H, die Länge des Luftspaltes l. Bildet man das Produkt aus H und l, so erhält man die Größe

$$\boxed{V_\mathrm{m} = H\,l.} \tag{5.13}$$

Man bezeichnet sie als **magnetische Spannung**. Sie stellt formal eine analoge Größe zu der im elektrischen Feld auftretenden *elektrischen* Spannung U dar, die im homogenen Feld nach Gl. (3.4) als Produkt aus elektrischer Feldstärke E und Weglänge l angegeben werden kann. Die Einheit für V_m folgt aus Gl. (5.13) als

$$[V_\mathrm{m}] = [H][l] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{m} = \mathrm{A}. \tag{5.14}$$

Gl. (5.13) gibt in Bild 5.8a die zwischen den Magnetpolen liegende *magnetische Spannung* an. Die Gleichung gilt nur im *homogenen* Feld. Zur Berechnung von magnetischen Spannungen in beliebigen (inhomogenen) Magnetfeldern betrachten wir Bild 5.8b. Es zeigt einen Leiter, der den Strom I führt. Um den Leiter herum ist eine Linie L dargestellt, deren Verlauf beliebig gewählt worden ist. Die Punkte a und b sind Anfangs- und Endpunkt eines auf der genannten Linie liegenden Wegelements $\mathrm{d}\vec{s}$, das wir als *Vektor* auffassen. $\vec{H}$ ist der Vektor der an der betreffenden Stelle herrschenden Feldstärke, α der zwischen $\mathrm{d}\vec{s}$ und $\vec{H}$ bestehende Winkel. Da die in Richtung von $\mathrm{d}\vec{s}$ wirkenden Feldstärkekomponente den Betrag $H\cos\alpha$ hat, gilt für die zwischen a und b bestehende magnetische Spannung

$$\mathrm{d}V_m = \mathrm{d}s\,H\cos\alpha = \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}. \tag{5.15}$$

Hierin stellt $\vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}$ das *skalare Produkt* der beiden Vektoren $\vec{H}$ und $\mathrm{d}\vec{s}$ dar. Zur Bestimmung der magnetischen Spannung V_m12, die zwischen den beliebig angenommenen Punkten 1 und 2 in Bild 5.8b besteht, müssen alle auf der Linie zwischen 1 und 2 vorhandenen Teilspannungen $\mathrm{d}V_\mathrm{m}$ addiert werden. Diese magnetische Spannung kann somit angegeben werden durch

$$V_\mathrm{m12} = \int_1^2 \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}. \tag{5.16}$$

5.3 Das Durchflutungsgesetz

Addieren wir in Bild 5.8b sämtliche nach Gl. (5.15) auftretenden magnetischen Teilspannungen $\mathrm{d}V_\mathrm{m}$ längs der *geschlossenen* Linie L, so bezeichnet man das Ergebnis als **magnetische Umlaufspannung**. Sie wird dargestellt durch

$$V_{\mathrm{m}} = \oint_s \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s}.$$

Es zeigt sich, dass dieses Ergebnis unabhängig vom Verlauf des Integrationsweges L ist. Wählen wir als Integrationsweg einen konzentrischen Kreis mit dem Radius r, so ist die Feldstärke H längs des Weges konstant. Darüber hinaus haben $\vec{H}$ und $\mathrm{d}\vec{s}$ an jeder Stelle des Kreises die gleiche Richtung. Somit gilt

$$H\,l = H\,2\pi r,$$

wobei $l = 2\pi r$ den Kreisumfang darstellt. Mit Gl. (5.4) wird daraus

$$H\,2\pi r = I. \tag{5.17}$$

Die magnetische Umlaufspannung ist also gleich dem Strom I, der vom Integrationsweg umschlossen wird. Sind mehrere Ströme am Zustandekommen des Magnetfeldes beteiligt, so ist die magnetische Umlaufspannung gleich der Summe der vom Integrationsweg umschlossenen Ströme. Man schreibt dann:

$$\boxed{\oint_s \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{s} = \Theta.} \tag{5.18}$$

Dabei ist Θ die elektrische Durchflutung derjenigen Fläche, die vom Integrationsweg eingeschlossen wird. Beispielsweise gilt in Bild 5.9 für den vorgegebenen Integrationsweg L

$$\Theta = I_1 + I_2 - I_3 + I_4.$$

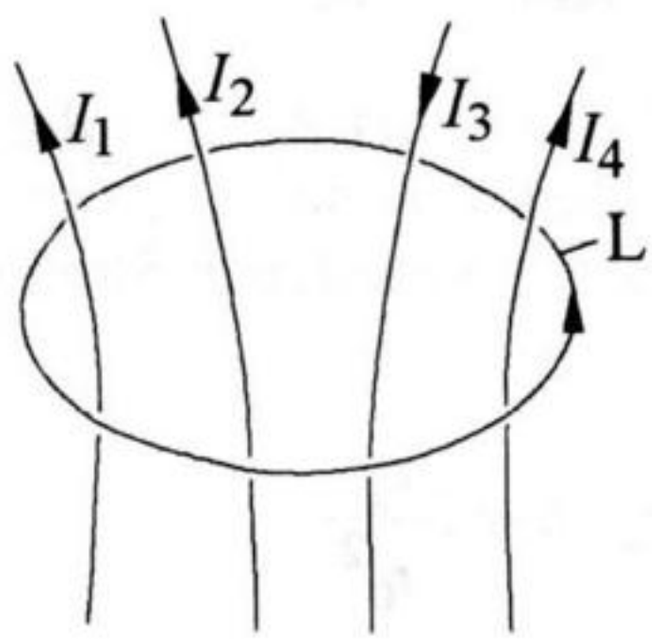


Bild 5.9 Zur Erläuterung des Begriffs „elektrische Durchflutung"

Den durch Gl. (5.18) ausgedrückten Zusammenhang bezeichnet man als **Durchflutungsgesetz**. Es besagt:

Das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs eines geschlossenen Weges (und somit die magnetische Umlaufspannung längs dieses Weges) ist gleich der elektrischen Durchflutung der Fläche, die von dem genannten Weg begrenzt wird.

Aufgabe 5.1

In einem langen geraden Leiter mit kreisförmigem Querschnitt fließt der Strom $I = 100$ A. Der Leiterradius beträgt $r_0 = 5$ mm, die Permeabilitätszahl $\mu_r = 1$.

a) Wie groß sind die Feldstärke H und die Flussdichte B in einem außerhalb des Leiters liegenden Punkt P_1, der von der Leiterachse $r_1 = 10$ cm entfernt ist?

b) Wie groß sind die Feldstärke H und die Flussdichte B in einem innerhalb des Leiters liegenden Punkt P_2, der von der Leitermittellinie den Abstand $r_2 = 3$ mm hat?

Lösung

a) Die außerhalb des Leiters vorhandene magnetische Feldstärke folgt aus Gl. (5.17) für $r = r_1$ als

$$H = \frac{I}{2\pi r_1} = \frac{100\,\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}1\,\text{m}} = \underline{159\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}.$$

Sie verursacht nach den Gln. (5.7) und (5.9) bei $\mu_r = 1$ die magnetische Flussdichte

$$B = \mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 159\,\frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{2{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{T}}.$$

b) Wir betrachten eine durch den Punkt P_2 verlaufende magnetische Feldlinie. Sie stellt einen Kreis mit dem Radius r_2 dar. Die von diesem Kreis eingeschlossene Fläche wird bei der im Leiter vorhandenen Stromdichte $J = I/(r_0^2\,\pi)$ von dem Strom

$$I' = J\,r_2^{\,2}\pi = \frac{I}{r_0^{\,2}\,\pi}\,r_2^{\,2}\,\pi = I\,\frac{r_2^{\,2}}{r_0^{\,2}}$$

durchflossen. Dieser Strom stellt damit die Durchflutung einer Fläche dar, die von einem Kreis mit dem Radius r_2 begrenzt wird. Teilen wir die Durchflutung durch den Umfang des Kreises, so erhalten wir die im Punkt P_2 vorhandene Feldstärke als

$$H = \frac{I'}{2\pi r_2} = \frac{I\, r_2^2 / r_0^2}{2\pi r_2} = I\,\frac{r_2}{2\pi {r_0}^2} = 100\,\text{A}\,\frac{0{,}003\,\text{m}}{2\,\pi\,(0{,}005\,\text{m})^2} = \underline{1910\,\frac{\text{A}}{\text{m}}}.$$

Sie verursacht bei $\mu_r = 1$ die magnetische Flussdichte

$$B = \mu_0\, H = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\text{Vs}}{\text{A m}}\cdot 1910\,\frac{\text{A}}{\text{m}} = \underline{2{,}4\cdot 10^{-3}\ \text{T}}.$$

5.4 Der magnetische Kreis und das ohmsche Gesetz des magnetischen Kreises

Wir wollen jetzt das Durchflutungsgesetz auf die in Bild 5.10a dargestellte Ringspule anwenden.

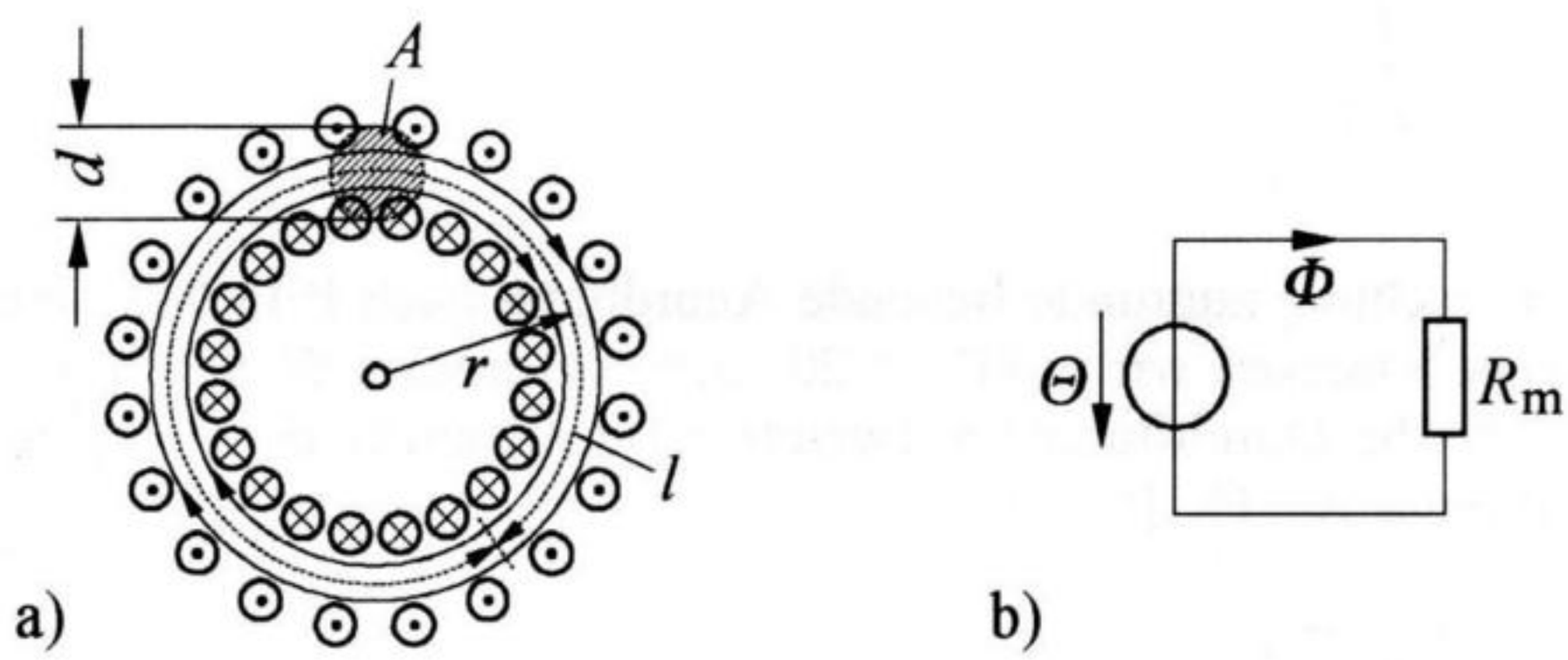


Bild 5.10 a) Ringspule als Beispiel für einen magnetischen Kreis,
b) zugehöriges Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises

Der mittlere Ringradius sei r und der Ringquerschnitt A. Die Spule habe die Windungszahl N und werde von dem Strom I durchflossen. Liegen die Windungen dicht beieinander, so bilden die magnetischen Feldlinien im Innern des Ringes konzentrische Kreise, längs derer die Feldstärke H aus Symmetriegründen konstant ist. Durch Anwendung des in Gl. (5.18) angegebenen Durchflutungsgesetzes ergibt sich daher bei dem mittleren Ringumfang $l = 2\pi r$

$$H\,l = H\cdot 2\pi r = I\,N. \tag{5.19}$$

Dabei ist H die in der Ringmitte vorhandene Feldstärke. Zu beachten ist, dass H in der Querschnittsfläche A nicht überall gleich groß ist, sondern nach außen mit $1/r$ abnimmt. Ist jedoch der mittlere Radius r relativ groß gegenüber dem Windungsdurchmesser d, so kann H innerhalb des Ringquerschnittes als konstant angenom-

men werden. Unter dieser Voraussetzung können wir den in der Ringspule verlaufenden magnetischen Fluss unter Berücksichtigung der Gln. (5.7), (5.10) und (5.19) darstellen als

$$\Phi = B\,A = \mu H\,A = \mu \frac{I\,N}{l} A.$$

Daraus folgt

$$I\,N = \Phi \frac{l}{\mu A}. \tag{5.20}$$

Der hierin enthaltene Ausdruck $l/(\mu A)$ hat formal den gleichen Aufbau wie der in Gl. (2.11) angegebene Ausdruck $l/(\kappa A)$, der den elektrischen Widerstand eines Leiters angibt. Man bezeichnet die Größe $l/(\mu A)$ daher als **magnetischen Widerstand** (Symbol: R_m). Es gilt also

$$\boxed{R_\mathrm{m} = \frac{l}{\mu A}.} \tag{5.21}$$

Die dieser Gleichung zugrunde liegende Anordnung nach Bild 5.10 heißt **magnetischer Kreis**. Ersetzen wir in Gl. (5.20) den Ausdruck $I\,N$ durch die allgemein für die elektrische Durchflutung verwendete Bezeichnung Θ, so ergibt sich unter Berücksichtigung von Gl. (5.21)

$$\boxed{\Theta = \Phi R_\mathrm{m}.} \tag{5.22}$$

Der durch diese Gleichung beschriebene Zusammenhang wird als **ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises** bezeichnet. Es besagt:

Die Durchflutung eines magnetischen Kreises ist gleich dem erzeugten magnetischen Fluss multipliziert mit dem magnetischen Widerstand des Kreises.

Die Gleichung hat formal den gleichen Aufbau wie das für einen elektrischen Kreis geltende ohmsche Gesetz $U = I\,R$. Daher kann man den in Bild 5.10a angegebenen magnetischen Kreis auch durch eine Ersatzschaltung nach Bild 5.10b wiedergeben. Man erhält eine Darstellung, die der eines elektrischen Kreises entspricht. Aus ihr ist ersichtlich, dass die „magnetische Quellenspannung" Θ den magnetischen Fluss Φ durch den magnetischen Widerstand R_m „treibt". Der sich aus Gl. (5.21) ergebende Kehrwert des magnetischen Widerstandes heißt **magnetischer Leitwert** (Symbol: Λ). Es gilt also

$$\boxed{\Lambda = \frac{\mu A}{l}.} \tag{5.23}$$

Die Einführung von magnetischen Widerständen nach Gl. (5.21) und von magnetischen Leitwerten nach Gl. (5.23) sowie die Anwendung von Gl. (5.22) ermöglicht die Berechnung von magnetischen Kreisen in einer Weise, die formal mit der Berechnung von elektrischen Kreisen übereinstimmt. Beispielsweise können in Reihe liegende magnetische Widerstände addiert werden. Bei parallel liegenden magnetischen Widerständen ergibt die Summe der magnetischen Leitwerte den magnetischen Gesamtleitwert (vergl. Aufgabe 5.8 auf Seite 165).

Eine Schwierigkeit bei der Anwendung der Berechnungsmethode besteht jedoch darin, dass magnetische Kreise häufig Eisen enthalten und die dann auftretenden magnetischen Widerstände keine konstanten Größen darstellen. Sie sind abhängig von der Stärke des vorhandenen Magnetfeldes und stellen somit *nichtlineare magnetische Widerstände* dar. Das hat zur Folge, dass die Berechnung von magnetischen *Eisenkreisen* nach der genannten Methode nur in bestimmten Fällen möglich ist, zum Beispiel dann, wenn die auftretende Flussdichte innerhalb bestimmter Grenzen liegt, so dass die magnetischen Widerstände (innerhalb dieser Grenzen) als konstante Größen angesehen werden können.

Aufgabe 5.2

Auf einem Ring aus Kunststoff (Permeabilitätszahl $\mu_r = 1$) mit kreisförmigem Querschnitt und dem mittleren Ringumfang $l = 250$ mm ist eine aus $N = 500$ Windungen bestehende Spule gleichmäßig am Umfang verteilt aufgebracht. Der Windungsdurchmesser beträgt $d = 10$ mm. In der Spule fließt der Strom $I = 600$ mA.

a) Welche magnetische Feldstärke H und welche magnetische Flussdichte B herrschen innerhalb der Spule in der Mitte des Ringquerschnitts?

b) Wie groß sind der magnetische Widerstand R_m und der magnetische Leitwert Λ im Innern der Spule längs des Umfangs?

c) Wie groß ist der in der Spule erzeugte magnetische Fluss Φ?

Lösung

a) Für die gegebene Ringspule gilt durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes nach Gl. (5.19)

$$H l = I N.$$

Hieraus ergibt sich die in der Ringmitte vorhandene magnetische Feldstärke als

$$H = \frac{I\,N}{l} = \frac{0{,}6\ \mathrm{A}\cdot 500}{0{,}25\ \mathrm{m}} = \underline{1200\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}}.$$

Sie verursacht nach den Gln. (5.7) und (5.9) für $\mu_\mathrm{r} = 1$ die Flussdichte

$$B = \mu_0\,H = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A\,m}}\cdot 1200\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \underline{1{,}51\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}}.$$

b) Der magnetische Widerstand ergibt sich bei der Windungsfläche

$$A = \frac{d^2\,\pi}{4} = \frac{(0{,}01\ \mathrm{m})^2\ \pi}{4} = 7{,}85\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2$$

nach Gl. (5.21) für $\mu = \mu_0$ als

$$R_\mathrm{m} = \frac{l}{\mu_0\,A} = \frac{0{,}25\ \mathrm{m}}{4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)}\cdot 7{,}85\cdot 10^{-5}\ \mathrm{m}^2} = \underline{2{,}53\cdot 10^9\ \mathrm{A/(Vs)}}.$$

Der magnetische Leitwert beträgt nach Gl. (5.23)

$$\Lambda = \frac{1}{R_\mathrm{m}} = \frac{1}{2{,}53\cdot 10^9}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \underline{3{,}95\cdot 10^{-10}\ \mathrm{Vs/A}}.$$

c) Der magnetische Fluss folgt aus Gl. (5.22) bei der Durchflutung $\Theta = I\,N$ als

$$\Phi = \frac{\Theta}{R_\mathrm{m}} = \frac{I\,N}{R_\mathrm{m}} = \frac{0{,}6\ \mathrm{A}\cdot 500}{2{,}53\cdot 10^9\ \mathrm{A/(Vs)}} = \underline{1{,}18\cdot 10^{-7}\ \mathrm{Wb}}.$$

Er kann nach Gl. (5.10) auch durch Anwendung der Beziehung $\Phi = B\,A$ berechnet werden.

5.5 Berechnung magnetischer Felder

Unter der Berechnung magnetischer Felder versteht man die Bestimmung von Feldgrößen (wie Feldstärke oder Flussdichte) in der Umgebung von stromführenden Leitern. Wir wollen dazu nachfolgend verschiedene Anordnungen näher betrachten.

5.5.1 Magnetisches Feld in der Umgebung mehrerer stromführender gerader Leiter

Befinden sich mehrere stromführende Leiter im Raum, so erhält man die in einem beliebigen Raumpunkt vorhandene magnetische Feldstärke dadurch, dass man die von den einzelnen Strömen erzeugten Feldstärkekomponenten vektoriell addiert. Dies sei am Beispiel zweier geradlinig verlaufender stromführender Leiter nach Bild 5.11 erläutert. Wir sehen die Ströme I_1 und I_2 mit den eingetragenen Richtungen sowie die Abstände r_1, r_2 und r_3 als gegeben an. Gesucht sei die im Punkt P vorhandene magnetische Feldstärke.

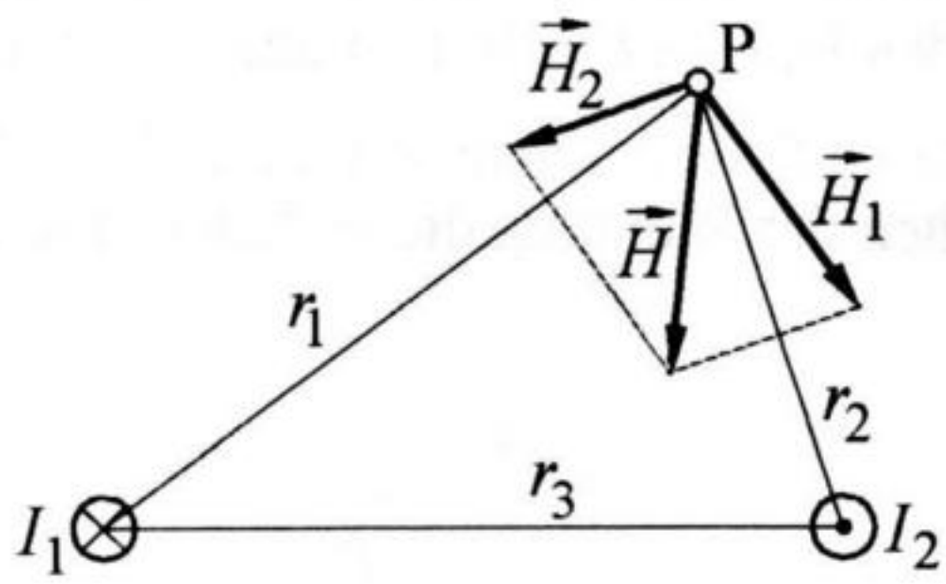


Bild 5.11 Zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke in der Umgebung von parallel verlaufenden stromführenden Leitern

Der Strom I_1 erzeugt im Punkt P nach Gl. (5.4) eine Feldstärke mit dem Betrag

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r_1}.$$

Nach Bild 5.11 fließt I_1 in die Zeichenebene hinein. Daher verlaufen die von I_1 erzeugten magnetischen Feldlinien im Uhrzeigersinn. Folglich zeigt der Vektor $\vec{H}_1$ nach rechts unten. Er bildet mit der Verbindungslinie r_1 einen rechten Winkel. Der Strom I_2 erzeugt im Punkt P eine Feldstärke mit dem Betrag

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi r_2}.$$

Das von I_2 erzeugte Magnetfeld verläuft entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn, da I_2 in Bild 5.11 aus der Zeichenebene herausfließt. Der Feldstärkevektor $\vec{H}_2$ zeigt daher, wie angegeben, nach links unten und bildet mit der Verbindungslinie r_2 einen rechten Winkel. Die gesuchte Gesamtfeldstärke erhält man durch die Überlagerung der beiden Magnetfelder. Dazu werden die beiden Feldstärkekomponenten $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$ vektoriell addiert. Es gilt also

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2. \tag{5.24}$$

Das beschriebene Verfahren zur Ermittlung der Feldstärke durch Überlagerung der von den einzelnen Strömen erzeugten Felder kann in gleicher Weise für beliebig viele Ströme durchgeführt werden.

Aufgabe 5.3

Zwei parallel verlaufende lange Leiter mit einem gegenseitigem Abstand von $a = 45$ mm führen nach Bild 5.12a die Ströme $I_1 = 90$ A und $I_2 = 70$ A. Der angegebene Punkt P ist von den Leitern $b = 50$ mm und $c = 30$ mm entfernt.

Wie groß ist die im Punkt P vorhandene magnetische Feldstärke H, und welcher Winkel α besteht zwischen der Richtung dieser Feldstärke und der Linie a?

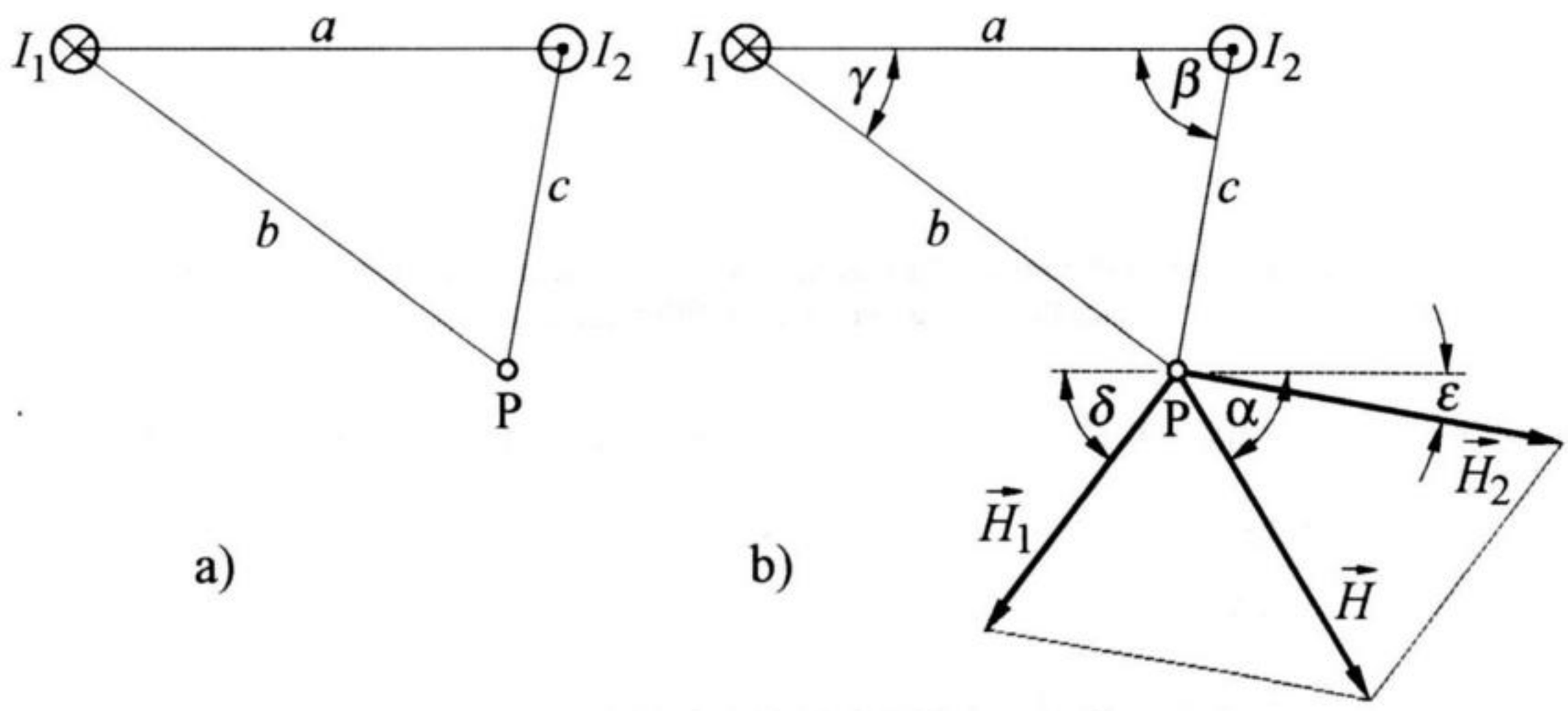


Bild 5.12 Zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke in der Umgebung von parallel verlaufenden stromführenden Leitern

Lösung

Die Ströme I_1 und I_2 erzeugen im Punkt P nach Gl. (5.4) Feldstärkekomponenten mit den Beträgen

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi b} = \frac{90\,\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}05\,\text{m}} = 286{,}5\,\frac{\text{A}}{\text{m}}$$

und

$$H_2 = \frac{I_2}{2\pi c} = \frac{70\,\text{A}}{2\pi \cdot 0{,}03\,\text{m}} = 371{,}4\,\frac{\text{A}}{\text{m}}.$$

Die Richtungen der beiden Komponenten sind aus Bild 5.12b ersichtlich. $\vec{H}_1$ bildet einen rechten Winkel mit der Linie b, $\vec{H}_2$ steht senkrecht auf der Linie c. Addieren wir $\vec{H}$ und $\vec{H}_2$ vektoriell entsprechend der Darstellung in Bild 5.12b, so ergibt sich die gesuchte magnetische Gesamtfeldstärke $\vec{H}$. Dazu bestimmen wir zunächst die in Bild 5.12b gekennzeichneten Winkel β und γ durch Anwendung des Kosinussatzes. Aus

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

finden wir

$$\gamma = \arccos\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \arccos\frac{45^2 + 50^2 - 30^2}{2 \cdot 45 \cdot 50} = 36{,}3°.$$

Entsprechend erhalten wir

$$\beta = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \arccos\frac{45^2 + 30^2 - 50^2}{2 \cdot 45 \cdot 30} = 80{,}9°.$$

Damit werden in Bild 5.12b

$$\delta = 90° - \gamma = 90° - 36{,}3° = 53{,}7°,$$

$$\varepsilon = 90° - \beta = 90° - 80{,}9° = 9{,}1°.$$

Zur Addition der Vektoren $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$ können wir die komplexe Rechnung anwenden (vergl. Abschnitt 6.5.1). Dazu stellen wir $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$ durch komplexe Ausdrücke dar und nehmen die Addition mit einem Taschenrechner vor. So finden wir aus

$$286{,}5 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(180° + 53{,}7°)} + 371{,}4 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}9{,}1°} = 350 \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}55{,}8°},$$

dass die gesuchte Gesamtfeldstärke $\vec{H}$ in Bild 5.12b den Betrag

$$\underline{H = 350\,\text{A/m}}$$

hat und gegenüber der Linie a (also gegenüber der Waagerechten) den Winkel

$$\underline{\alpha = 55{,}8°}$$

einschließt.

5.5.2 Das Gesetz von Biot-Savart

Die Berechnung von *magnetischen Feldstärken* oder *magnetischen Flussdichten* lässt sich mit Hilfe des *Durchflutungsgesetzes* oder des daraus resultierenden *ohmschen Gesetzes des magnetischen Kreises* nur dann vornehmen, wenn es sich um einfache geometrische Feldformen handelt. Zum Beispiel ist die Berechnung dann leicht möglich, wenn die Feldstärke längs der magnetischen Feldlinien überall den gleichen Betrag hat, wie dies etwa bei stromführenden Ringspulen oder bei einem stromführenden langen, geraden Leiter zutrifft.

Die Berechnung der magnetischen Feldstärke in der Umgebung von beliebig geformten stromführenden Leitern kann mit Hilfe eines anderen Gesetzes vorgenommen werden, das nachfolgend näher erläutert wird. Wir betrachten dazu Bild 5.13a.

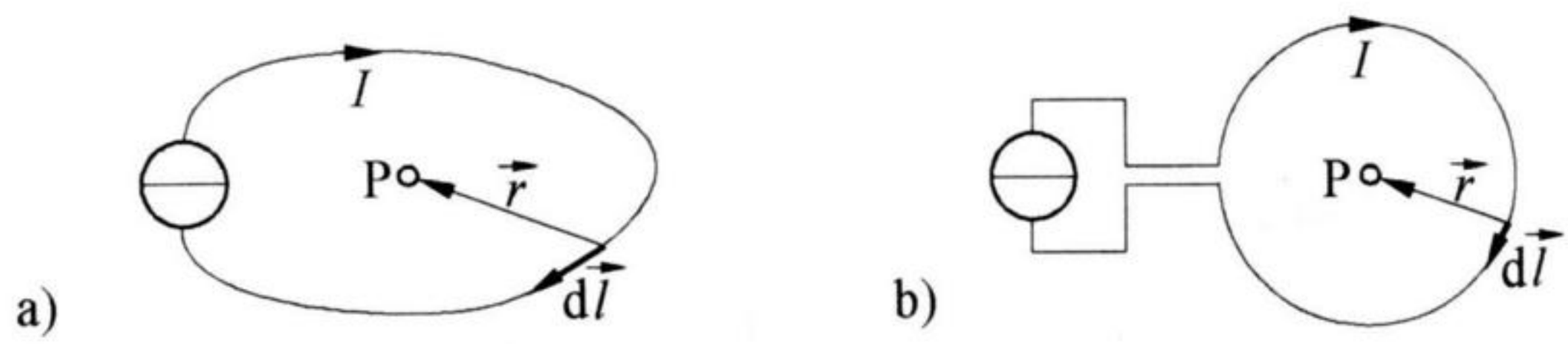


Bild 5.13 Zur Anwendung des Gesetzes von Biot-Savart. a) Beliebig geformter Stromkreis, b) Stromkreis mit kreisförmiger Leiterschleife

Darin ist ein beliebig geformter elektrischer Stromkreis dargestellt, der den Strom I führt. $\mathrm{d}\vec{l}$ ist ein im Leiter liegendes Wegelement mit dem Betrag $\mathrm{d}l$, das wir als einen in Richtung des Stromes I zeigenden Vektor auffassen. Dieses vom Strom I durchflossene Wegelement erzeugt in einem beliebigen Punkt P die magnetische Feldstärke

$$\mathrm{d}\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \tag{5.25}$$

Dabei stellt $\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}$ das Vektorprodukt der Vektoren $\mathrm{d}\vec{l}$ und $\vec{r}$ dar. Die in Gl. (5.25) angegebene Beziehung lässt sich aus dem Durchflutungsgesetz entwickeln. Da die Herleitung jedoch recht aufwendig ist, soll hier darauf verzichtet werden.

In Gl. (5.25) stellt $\vec{r}$ einen Vektor dar, der nach Bild 5.13a vom Wegelement $\mathrm{d}\vec{l}$ zum Punkt P zeigt. r ist der Betrag dieses Vektors. Die gesamte im Punkt P herrschende magnetische Feldstärke erhalten wir dadurch, dass wir eine Integration über die gesamte Leiterlänge L vornehmen. Wir erhalten dadurch aus Gl. (5.25)

$$\boxed{\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.} \tag{5.26}$$

Man bezeichnet diese Gleichung als **Gesetz von Biot-Savart**. Die Anwendung des Gesetzes wollen wir beispielhaft an der in Bild 5.13b dargestellten, vom Strom I durchflossenen kreisförmigen Leiteranordnung (Leiterradius r) vornehmen. Gesucht sei die im Kreismittelpunkt P herrschende Feldstärke H. Die magnetischen Wirkungen der zur kreisförmigen Leiterschleife führenden Zuleitungen wollen wir unberücksichtigt lassen. In Bild 5.13b bilden die Vektoren $\mathrm{d}\vec{l}$ und $\vec{r}$ einen rechten Winkel, so dass

$$\left|\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}\right| = \mathrm{d}l \cdot r$$

ist. Weiterhin ist in Bild 5.13b der Leiterradius r längs des Integrationsweges konstant. Daher kann diese Größe in Gl. (5.26) vor das Integralzeichen gesetzt werden, so dass das gesuchte Ergebnis lautet:

$$H = \frac{I}{4\pi r^2} \int_L \mathrm{d}l = \frac{I}{4\pi r^2}\, 2\pi r = \frac{I}{2r}.$$

Aufgabe 5.4

Eine Leiterschleife hat nach Bild 5.14a die Form eines Quadrats mit der Seitenlänge $2a = 10$ cm. Es fließt ein Strom von $I = 10$ A.

Wie groß ist die magnetische Feldstärke H im Punkt P in der Mitte des Quadrats? (Die magnetischen Wirkungen der Zuleitungen können vernachlässigt werden.)

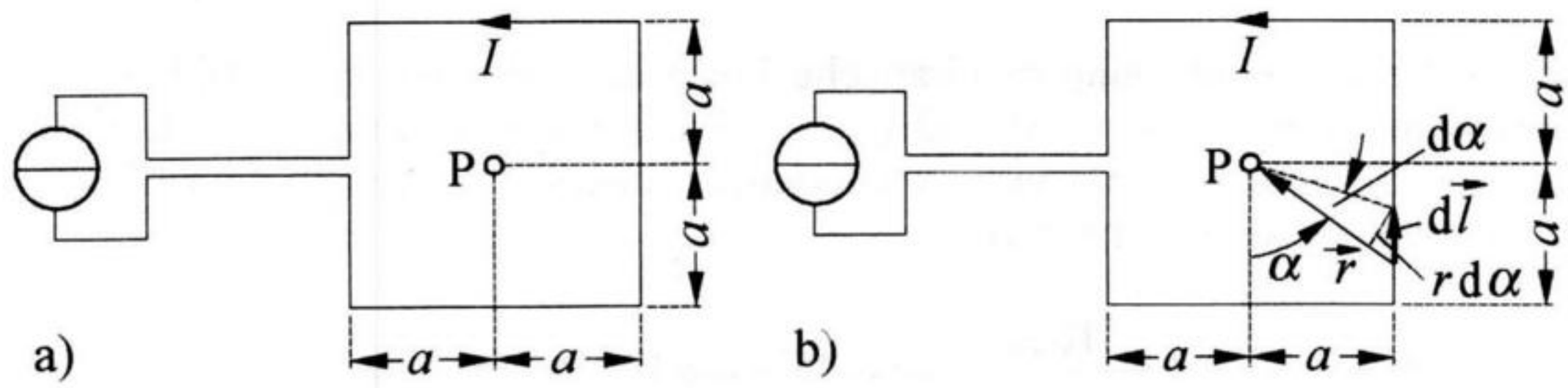


Bild 5.14 Zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke H im Mittelpunkt einer quadratischen Leiterschleife

Lösung

Wir betrachten zunächst nur *eine* Seite der quadratischen Leiterschleife und bezeichnen die von diesem Leiterstück im Punkt P verursachte Feldstärke als H_1. Nach Gl. (5.26) gilt für den Vektor dieser Feldstärke (allgemein)

$$\vec{H}_1 = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Die hierin enthaltenen Vektoren $\mathrm{d}\vec{l}$ und $\vec{r}$ sind in Bild 5.14b eingetragen. Führen wir weiterhin nach Bild 5.14b den Winkel α ein, so erhalten wir die Beziehungen

$$r = \frac{a}{\sin\alpha},$$

$$\mathrm{d}l = \frac{r\,\mathrm{d}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

und

$$\left|\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{r}\right| = \mathrm{d}l \cdot r \cdot \sin\alpha = \frac{a}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha \cdot \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}\mathrm{d}\alpha.$$

Setzen wir die gefundenen Beziehungen in die obige Gleichung ein, so erhalten wir für den Betrag von $\vec{H}_1$, wenn wir die Integrationsgrenzen α_1 und α_2 einführen,

$$H_1 = \frac{I}{4\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{a^2 \sin^3\alpha}{a^3 \sin^2\alpha}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{I}{4\pi a} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$H_1 = \frac{I}{4\pi a}(-\cos\alpha)\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} = \frac{I}{4\pi a}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Da die Leiterschleife eine quadratische Form hat, betragen nach Bild 5.14b die Integrationsgrenzen $\alpha_1 = 45°$ und $\alpha_2 = 135°$. Berücksichtigen wir noch, dass die gesuchte Feldstärke H bei vier vorhandenen Leiterseiten viermal so groß wie H_1 ist, so erhalten wir mit $a = 5$ cm

$$H = 4\,H_1 = 4\,\frac{10\ \mathrm{A}}{4\pi \cdot 0{,}05\ \mathrm{m}}(\cos 45° - \cos 135°) = \underline{90\ \mathrm{A/m}}.$$

5.6 Materie im magnetischen Feld

5.6.1 Allgemeines

Breitet sich ein Magnetfeld in einem materiellen Körper aus, so hat die magnetische Eigenschaft des Stoffes Einfluss auf die Stärke des Feldes. Die Flussdichte B weist also bei gleicher Feldstärke H nicht den gleichen Wert auf wie im Vakuum. Bei Betrachtung von Gl. (5.9) können wir auch sagen, dass die Permeabilitätszahl μ_r von Stoffen, im Gegensatz zu der des Vakuums, verschieden von eins ist.

Die Ursache für diese Erscheinung liegt in dem atomaren Aufbau der Stoffe. Die den Atomkern umkreisenden Elektronen stellen, wie schon in Abschnitt 5.1 erwähnt, Kreisströme dar. Sie erzeugen jeweils - senkrecht zur Kreisbahn gerichtete - magnetische Felder, die wir als *Elementarfelder* bezeichnen wollen. Auch die um ihre eigene Achse sich drehenden Elektronen (Elektronenspin) haben Elementarfelder zur Folge. Ihre Richtungen stimmen mit denen der jeweiligen Rotationsachsen überein. Wird ein Stoff nicht von einem äußeren Magnetfeld durchsetzt, so heben sich die Elementarfelder in der Regel gegenseitig auf. Dadurch tritt kein resultierendes Magnetfeld nach außen in Erscheinung. Wird ein Stoff jedoch von einem äußeren Magnetfeld durchsetzt, so trifft das nicht mehr zu. Es kommt zu einem resultierenden inneren Magnetfeld, das sich dem äußeren Feld überlagert. Je nach ihrem Verhalten unterscheidet man diamagnetische, paramagnetische und ferromagnetische Stoffe.

In **diamagnetischen Stoffen** heben sich im feldfreien Zustand alle durch Kreisströme und Elektronenspin verursachten magnetischen Wirkungen innerhalb eines Atoms gegenseitig auf. Beim Auftreten oder bei der Änderung eines äußeren Magnetfeldes werden jedoch zusätzliche Kreisströme in den Atomen *induziert*. Die dadurch verursachten Elementarfelder sind nach der in Abschnitt 5.8.2 beschriebenen *Lenzschen Regel* so gerichtet, dass sie der äußeren Flussänderung entgegenwirken. Da für die Elektronenbewegung keine Energiezufuhr notwendig ist, bleibt der Zustand solange erhalten, wie keine Änderung des äußeren Feldes erfolgt. Durch die induzierten Kreisströme kommt es bei gleicher Feldstärke H zu einer Verringerung der Flussdichte B, so dass die Permeabilitätszahl μ_r kleiner als eins wird. Das Gegenfeld ist jedoch sehr gering. So beträgt die Permeabilitätszahl von Wismut $\mu_r = 1{,}0 - 1{,}6 \cdot 10^{-4}$. Der diamagnetische Effekt tritt in allen Stoffen auf.

Bei **paramagnetischen Stoffen** wird der diamagnetische Effekt durch einen weiteren Effekt überdeckt. Bei diesen Stoffen heben sich die durch Kreisströme und Elektronenspin innerhalb eines Atoms verursachten magnetischen Wirkungen *nicht* gegenseitig auf. Diese Atome können daher als kleinste Magnete angesehen werden, die wir als *Elementarmagnete* bezeichnen wollen. Sie sind im feldfreien Zustand regellos angeordnet, so dass nach außen kein Magnetfeld in Erscheinung tritt. Ein äußeres Magnetfeld hat jedoch zur Folge, dass sich die Elementarmag-

nete - wie Magnetnadeln - ausrichten. Das dadurch verursachte innere Zusatzfeld bewirkt eine Verstärkung des äußeren Feldes, so dass die Permeabilitätszahl μ_r größer als eins wird. Das Zusatzfeld ist allerdings auch hier sehr gering. So ergibt sich zum Beispiel für Palladium eine Permeabilitätszahl von $\mu_r = 1 + 7 \cdot 10^{-4}$.

Bei **ferromagnetischen Stoffen** führt das innere Zusatzfeld zu einer hohen Verstärkung des äußeren Feldes. Wegen ihrer großen Bedeutung sollen diese Stoffe nachfolgend gesondert betrachtet werden.

5.6.2 Ferromagnetische Stoffe

Zu den ferromagnetischen Stoffen gehören Eisen, Nickel und Kobalt, darüber hinaus Legierungen dieser Metalle untereinander wie auch Legierungen mit einigen anderen Metallen. Es existieren auch einige ferromagnetische Legierungen aus ausschließlich nichtferromagnetischen Metallen wie Kupfer, Aluminium und Mangan. Die Permeabilitätszahl μ_r derartiger Stoffe erreicht Werte bis 10^4, bei einigen Spezialwerkstoffen sogar bis 10^6.

In den Atomen von ferromagnetischen Stoffen heben sich die inneren magnetischen Wirkungen nicht gegenseitig auf. Die Atome können daher - ebenso wie dies auch bei paramagnetischen Stoffen der Fall ist - als Elementarmagnete angesehen werden. Im Unterschied zu paramagnetischen Stoffen richten sich jedoch die Elementarmagnete von ferromagnetischen Materialien in großen Bezirken von selbst einheitlich in bestimmte Richtungen aus. Diese Bezirke werden als **Weiß'sche Bezirke** bezeichnet und umfassen jeweils $(10^6 \ldots 10^9)$ Elementarmagnete. Für die Magnetisierungsrichtungen der Weiß'schen Bezirke gibt es bestimmte *Vorzugsrichtungen*. Dies hat zur Folge, dass die Elementarmagnete beim Auftreten eines äußeren Magnetfeldes sich nicht in genau der gleichen Weise ausrichten, wie das bei paramagnetischen Stoffen der Fall ist. Nachfolgend wird erläutert, welche Vorgänge beim Auftreten eines äußeren Magnetfeldes ablaufen.

Ist kein äußeres Magnetfeld vorhanden, so kommen alle Ausrichtungen der Weiß'schen Bezirke durchschnittlich gleich oft vor, so dass sich die magnetischen Wirkungen nach außen hin aufheben.

Tritt ein äußeres Magnetfeld auf, und wird dessen Feldstärke allmählich gesteigert, so nimmt zunächst das Volumen derjenigen Weiß'schen Bezirke zu, deren Magnetisierungsrichtungen mit der äußeren Feldrichtung einen relativ kleinen Winkel bilden. Dafür werden andere Bezirke kleiner. Dies führt dazu, dass die magnetischen Wirkungen der Weiß'schen Bezirke sich nicht mehr gegenseitig aufheben, sondern zu einer Vergrößerung der Flussdichte führen.

Wird die Feldstärke des äußeren Feldes weiter erhöht, so klappen die Magnetisierungsrichtungen ganzer Bezirke sprunghaft in die Magnetisierungsrichtungen derjenigen Bezirke um, die mit der äußeren Feldrichtung einen kleinen Winkel

bilden. Die magnetischen Wirkungen der Weiß'schen Bezirke führen zu einer großen Zunahme der Flussdichte.

Bei noch weiterer Vergrößerung der Feldstärke des äußeren Feldes werden schließlich die Magnetisierungsrichtungen der einzelnen Weiß'schen Bezirke stetig in die Richtung des äußeren Feldes gedreht. Hierbei kommt es nur noch zu einer relativ geringen Zunahme der Flussdichte. Man bezeichnet diesen Zustand als **magnetische Sättigung**.

Bei extrem hohen Feldstärken sind alle Weiß'schen Bezirke ausgerichtet, und eine weitere Zunahme der Flussdichte kann nur entsprechend der Zunahme der Flussdichte des äußeren Feldes erfolgen.

Der Zusammenhang zwischen Flussdichte B und Feldstärke H wird bei ferromagnetischen Stoffen durch die **Magnetisierungskennlinie** beschrieben. Ihr grundsätzlicher Verlauf ist in Bild 5.15b dargestellt. Sie lässt sich - beispielsweise nach Bild 5.15a mit einer Spule, die auf einem ringförmigen Kern aus ferromagnetischem Material aufgebracht ist - experimentell aufnehmen. Dabei kann man die magnetische Feldstärke H nach Gl. (5.19) durch

$$H = \frac{I\,N}{l}$$

bestimmen, wobei I der Spulenstrom, N die Windungszahl der Spule und l der mittlere Ringumfang sind. Für die Ermittlung der magnetischen Flussdichte B gibt es verschiedene Messmethoden, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.

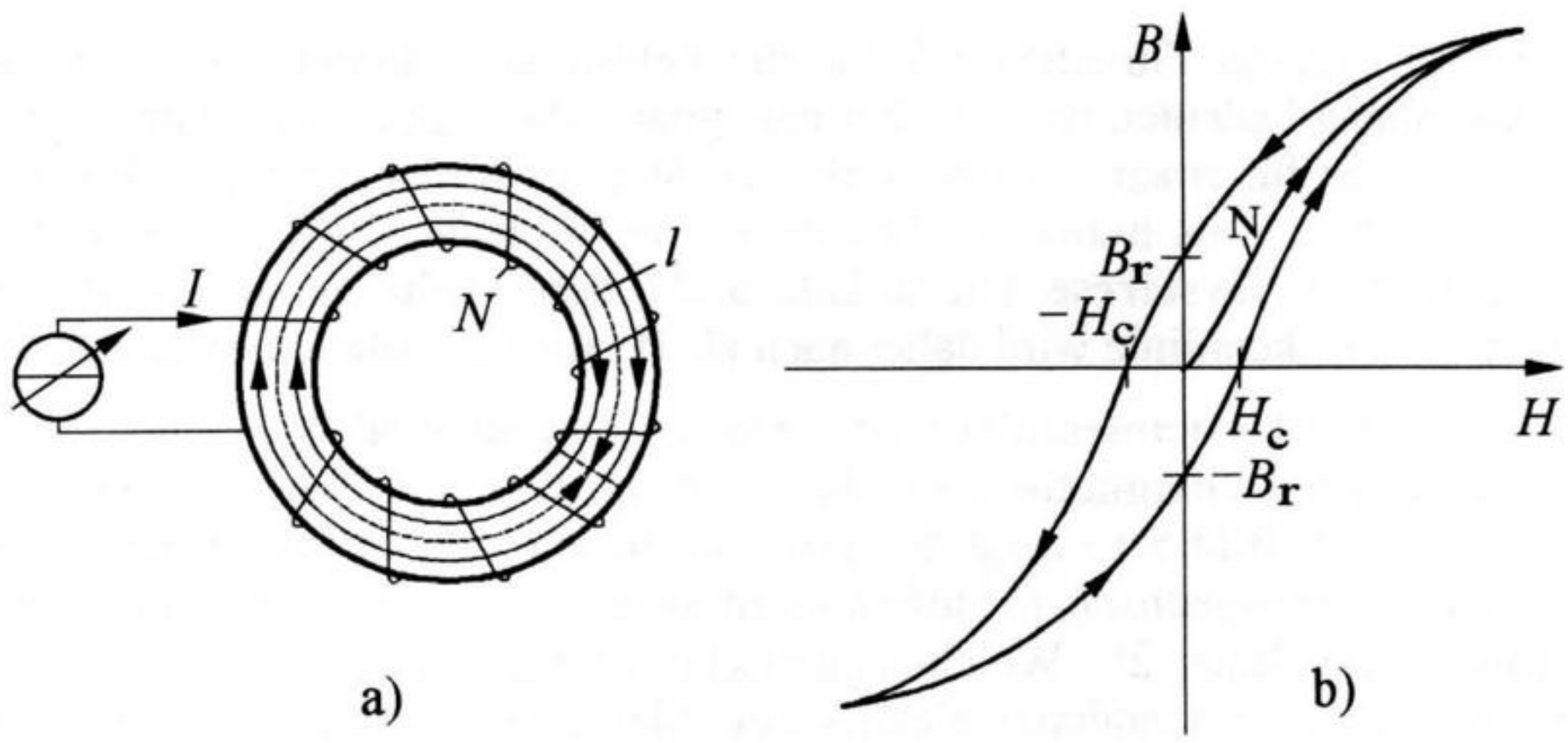


Bild 5.15 a) Anordnung zur Aufnahme der Magnetisierungskennlinie, b) Verlauf der Magnetisierungskennlinie (Hystereseschleife) eines ferromagnetischen Stoffes (N = Neukurve)

Bei der Aufnahme der Magnetisierungskennlinie wird der Strom I in Bild 5.15a von Null aus gesteigert. Wird das ferromagnetische Material dabei erstmalig von einem äußeren Magnetfeld durchsetzt, so besteht zwischen Flussdichte und Feld-

stärke der in Bild 5.15b durch die **Neukurve** (N) beschriebene Zusammenhang. Der untere, zunächst langsam ansteigende Teil der Kennlinie stellt denjenigen Bereich dar, in dem bestimmte Weiß'sche Bezirke sich, wie beschrieben, vergrößern. Im anschließenden steil ansteigenden Teil klappen die Magnetisierungsrichtungen ganzer Bezirke sprunghaft um. Der obere Teil stellt den Übergang in den Bereich der magnetischen Sättigung dar.

Wird nach dem Durchlaufen der Neukurve die Feldstärke des äußeren Magnetfeldes durch Herabsetzen des Stromes I wieder verkleinert, so wird die Abhängigkeit zwischen B und H durch eine zweite, oberhalb der Neukurve liegende Kennlinie beschrieben. Geht man mit dem Strom und somit auch der Feldstärke ganz auf Null zurück, so verbleibt nach Bild 5.15b sogar eine magnetische Flussdichte (B_r) zurück. Sie wird als **Remanenzflussdichte** bezeichnet. Die Ursache dafür liegt darin, dass nicht alle Weiß'schen Bezirke in ungeordnete Richtungen zurückklappen.

Um dies zu erreichen, muss in Bild 5.15a ein entgegengesetzt gerichteter Strom eingespeist werden, der in Bild 5.15b ein entgegengesetzt gerichtetes äußeres Feld verursacht. Die in Bild 5.15b mit H_c bezeichnete magnetische Feldstärke wird als **Koerzitivfeldstärke** bezeichnet.

Wird der Spulenstrom und damit auch die Feldstärke jetzt in der gleichen Richtung weiter erhöht und anschließend wieder verkleinert, so erhält man die im III. Quadranten von Bild 5.15b liegenden Kennlinienäste. Durch eine erneute Änderung der Richtung des äußeren Feldes und einem Steigern der Feldstärke ergibt sich schließlich die dargestellte vollständige Kennlinie.

Der zwischen der Flussdichte B und der Feldstärke H bestehende *nichtlineare* Zusammenhang bedeutet, dass die Permeabilitätszahl μ_r keine Konstante darstellt. Kennzeichnend für einen ferromagnetischen Stoff ist ferner, dass die Flussdichte, wie beschrieben, stets hinter der Feldstärke zurückbleibt. Diese Erscheinung bezeichnet man als **Hysterese**. Die in Bild 5.15b dargestellte, in sich geschlossene Magnetisierungskennlinie wird daher auch als **Hystereseschleife** bezeichnet.

Die Form der Hystereseschleife ist abhängig vom Material. Stoffe mit schmaler Schleife werden als **magnetisch weich**, solche mit breiter Schleife als **magnetisch hart** bezeichnet. Bild 5.16 zeigt den grundsätzlichen Verlauf der Hystereseschleifen eines *weichmagnetischen* Stoffes (Kennlinie 1) und eines *hartmagnetischen* Materials (Kennlinie 2). Weichmagnetische Stoffe werden beispielsweise in Transformatoren und anderen elektrischen Maschinen verwendet. Hartmagnetische Materialien dienen zur Herstellung von Dauermagneten.

Die ferromagnetischen Eigenschaften sind temperaturabhängig. Oberhalb einer bestimmten Temperatur, der **Curie-Temperatur**, verschwinden sie ganz. Beispielsweise liegt die Curie-Temperatur von Eisen bei 770 °C, die von Nickel bei 358 °C.

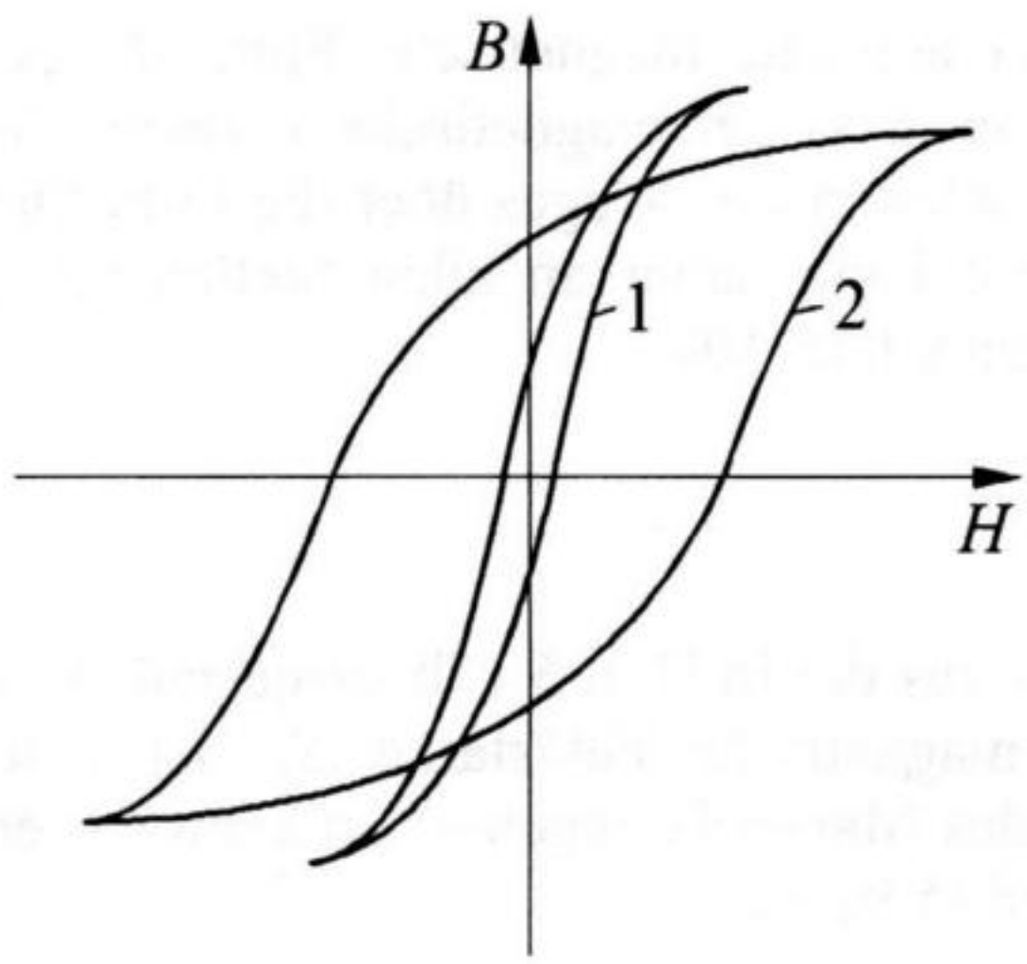


Bild 5.16 Prinzipieller Verlauf der Hystereseschleifen von magnetisch weichen Stoffen (Kennlinie 1) und von magnetisch harten Stoffen (Kennlinie 2)

5.6.3 Magnetische Kreise mit Eisen

Ein einfacher magnetischer Kreis ist der geschlossene Eisenkreis (ohne Luftspalt). Wir wollen dazu die in Bild 5.17a dargestellte Anordnung betrachten. Der Eisenkern habe längs des Umfangs l überall den gleichen Querschnitt A. Auf dem Kern ist eine Spule mit der Windungszahl N aufgebracht. Die in Bild 5.17b dargestellte Kennlinie sei die Magnetisierungskennlinie (Neukurve) des verwendeten Eisens. Wir gehen zunächst davon aus, dass im Eisenkern ein bestimmter magnetischer Fluss Φ erzeugt werden soll. Gesucht sei der dafür erforderliche Strom I.

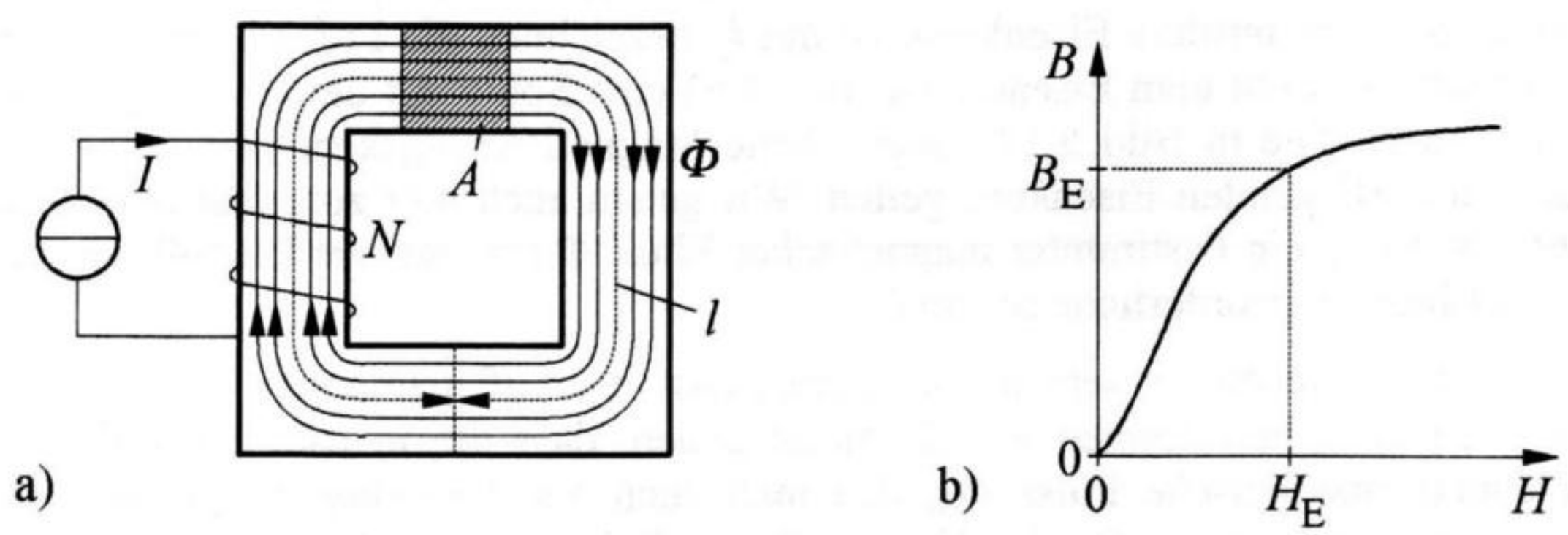


Bild 5.17 Magnetischer Kreis mit Eisen. a) Spule mit Eisenkern, b) Magnetisierungskennlinie des Eisens

Wie aus der in Bild 5.17a angegebenen Darstellung hervorgeht, ist die auf dem Eisenkern aufgebrachte Spule nicht gleichmäßig am Umfang verteilt. Es zeigt sich

aber dennoch, dass der erzeugte magnetische Fluss Φ fast vollständig im Eisen verläuft. Das liegt daran, dass der magnetische Leitwert des Eisenweges wesentlich größer ist als der Leitwert des Weges über die Luft. Die im Eisen vorhandene magnetische Flussdichte kann daher an allen Stellen als gleich groß angesehen werden. Sie beträgt nach Gl. (5.10)

$$B_{\mathrm{E}} = \frac{\Phi}{A}.$$

Hierfür entnehmen wir aus der in Bild 5.17b dargestellten Magnetisierungskennlinie die erforderliche magnetische Feldstärke H_{E}. Ist statt dieser Kennlinie die Permeabilitätszahl μ_{r} des Materials gegeben, so kann die erforderliche Feldstärke nach den Gln. (5.7) und (5.9) durch

$$H_{\mathrm{E}} = \frac{B_{\mathrm{E}}}{\mu_0\,\mu_{\mathrm{r}}}$$

bestimmt werden. Das Durchflutungsgesetz nach Gl. (5.19) liefert die Beziehung

$$H_{\mathrm{E}}\,l = I\,N.$$

Damit beträgt der notwendige Spulenstrom

$$I = \frac{H_{\mathrm{E}}\,l}{N}. \tag{5.27}$$

Ist die Aufgabenstellung umgekehrt, soll also zu einem vorgegebenen Strom I der erzeugte magnetische Fluss Φ bestimmt werden, so geht man zur Berechnung der gesuchten Größe in umgekehrter Reihenfolge vor.

Jetzt wollen wir einen magnetischen Eisenkreis *mit Luftspalt* nach Bild 5.18a betrachten. Die mittlere Eisenlänge ist mit l_{E} bezeichnet, die Luftspaltlänge mit l_{L}. Auf dem Kern mit dem Eisenquerschnitt A ist eine Spule mit der Windungszahl N aufgebracht. Die in Bild 5.17b angegebene Magnetisierungskennlinie möge auch für den vorliegenden Eisenkern gelten. Wir gehen auch hier zunächst davon aus, dass im Kreis ein bestimmter magnetischer Fluss Φ erzeugt werden soll. Gesucht sei der hierfür erforderliche Strom I.

Für die Berechnung setzen wir voraus, dass die Luftspaltlänge l_{L} relativ klein ist. In diesem Fall können wir davon ausgehen, dass der in Bild 5.18a gekennzeichnete magnetische Fluss Φ_{S}, den man auch als **Streufluss** bezeichnet, vernachlässigbar klein ist. Der im Kreis auftretende Fluss Φ ist dann an allen Stellen gleich groß und verteilt sich zudem im Luftspalt auf eine Fläche, die gleich dem Eisenquerschnitt A ist. Daher hat die im Eisen vorhandene Flussdichte B_{E} den gleichen Wert wie die Luftspaltflussdichte B_{L}. Es gilt nach Gl. (5.10)

$$B_{\mathrm{E}} = B_{\mathrm{L}} = \frac{\Phi}{A}. \tag{5.28}$$

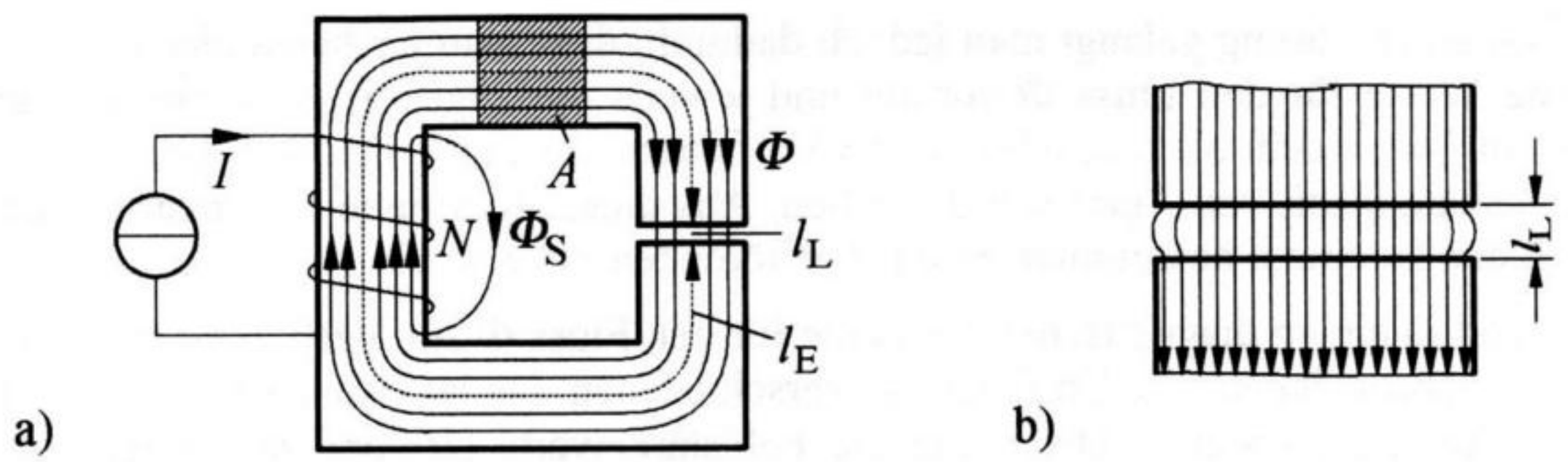


Bild 5.18 a) Magnetischer Eisenkreis mit Luftspalt,
b) Darstellung der Aufweitung der magnetischen Feldlinien im Luftspalt

Bei relativ großer Luftspaltlänge l_L ist der in Bild 5.18a eingetragene Streufluss Φ_S nicht mehr vernachlässigbar klein. Darüber hinaus ist dann zu beachten, dass für den magnetischen Fluss im Luftspalt ein größerer Querschnitt zur Verfügung steht als im Eisen, da nach Bild 5.18b eine Aufweitung der magnetischen Feldlinien im Luftspalt erfolgt. In einer solchen Anordnung gilt Gl. (5.28) nur näherungsweise. Die Ungenauigkeit ist dabei umso größer, je länger die Luftspaltlänge l_L ist.

Für die weitere Betrachtung des in Bild 5.18a dargestellten magnetischen Kreises gehen wir wieder von einer relativ geringen Luftspaltlänge l_L aus, so dass wir Gl. (5.28) in der dargestellten Form verwenden können. Zur Erzielung der sich aus dieser Gleichung ergebenden Flussdichte B_E muss im Eisen eine bestimmte Feldstärke H_E herrschen, die wir aus der Magnetisierungskennlinie nach Bild 5.17b entnehmen können. Im Luftspalt ist nach Gl. (5.7) die Feldstärke

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0} \tag{5.29}$$

erforderlich. Hierbei ist berücksichtigt, dass die Permeabilitätszahl μ_r von Luft gleich eins ist, so dass $\mu = \mu_0$ wird. Durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes nach Gl. (5.18) finden wir für die vorliegende Anordnung

$$H_E\, l_E + H_L\, l_L = I\, N. \tag{5.30}$$

Hieraus lässt sich der gesuchte Strom I bestimmen.

Ist die Aufgabenstellung umgekehrt, soll also in Bild 5.18a zu einem vorgegebenen Strom I der im Kreis erzeugte magnetische Fluss Φ bestimmt werden, so kann die Berechnung nicht ohne weiteres in umgekehrter Reihenfolge vorgenommen werden. Man kann zwar von dem in Gl. (5.30) angegebenen Durchflutungsgesetz ausgehen, jedoch enthält diese Gleichung dann zwei Unbekannte (H_E und H_L). Eine zweite Gleichung, welche H_E und H_L miteinander verbindet, existiert nicht, da die zwischen H_E und H_L bestehende Abhängigkeit durch den Verlauf der (empirisch aufgenommenen) Magnetisierungskennlinie bestimmt wird.

Zu einer Lösung gelangt man jedoch dadurch, dass man nacheinander verschiedene Werte für den Fluss Φ vorgibt und jeweils die zugehörigen Werte für den Strom I nach dem oben beschriebenen Verfahren berechnet. Dadurch kann man Φ in Abhängigkeit von I grafisch darstellen. Aus dieser Kennlinie liest man schließlich den zu einem bestimmten Strom I gehörenden Fluss Φ ab.

Sind in einem magnetischen Kreis die für den Fluss Φ zur Verfügung stehenden Querschnitte längs des Umfangs an verschiedenen Stellen verschieden groß, so sind für die einzelnen Abschnitte die Feldstärkewerte (H) und die zugehörigen Weglängen (l) getrennt zu bestimmen. Die für die Anwendung des Durchflutungsgesetzes erforderliche magnetische Umlaufspannung wird dann durch die Summe aller auftretenden $H \cdot l$-Werte gebildet. Die Anwendung der vorstehend beschriebenen Zusammenhänge soll nachfolgend an einigen Beispielen gezeigt werden.

Aufgabe 5.5

Ein Ringkern aus legiertem Blech mit der in Bild 5.19 angegebenen Magnetisierungskennlinie hat einen mittleren Umfang von $l = 35$ cm und den Eisenquerschnitt $A = 4{,}0\ \text{cm}^2$. Auf dem Kern ist eine aus $N = 200$ Windungen bestehende Spule aufgebracht. Im Kern soll der magnetische Fluss $\Phi = 5{,}0 \cdot 10^{-4}$ Wb erzeugt werden.

a) Welcher Strom I muss in der Spule fließen?

b) Welcher Strom I' wäre notwendig, wenn wir von der Annahme ausgehen, dass der Kern aufgetrennt und ein Luftspalt von $l_L = 0{,}3$ mm eingefügt wird?

Lösung

a) Die im Kern notwendige magnetische Flussdichte folgt aus Gl. (5.10) als

$$B = \frac{\Phi}{A} = \frac{5{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 1{,}25\ \text{T}.$$

Für diesen Wert entnehmen wir aus der in Bild 5.19 dargestellten Magnetisierungskennlinie die zugehörige magnetische Feldstärke

$$H = 800\ \text{A/m}.$$

Durch Anwendung des in der Form von Gl. (5.19) angegebenen Durchflutungsgesetzes finden wir den erforderlichen Strom als

$$I = \frac{H\,l}{N} = \frac{800\ \text{A/m} \cdot 0{,}35\ \text{m}}{200} = \underline{1{,}4\ \text{A}}.$$

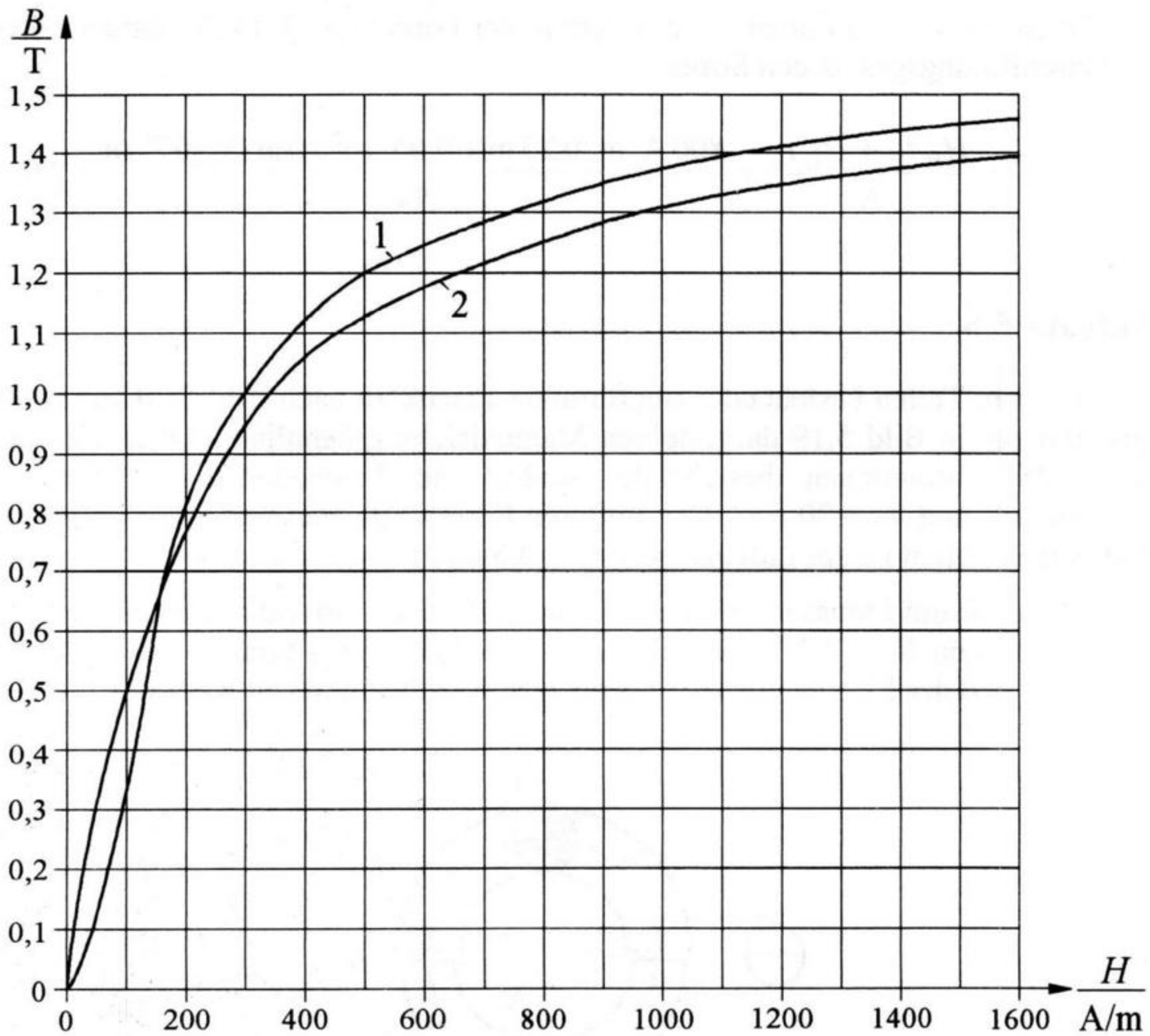


Bild 5.19 Magnetisierungskennlinien (Neukurven) von Dynamoblech und Stahlguss (Kennlinie 1) sowie legiertem Blech (Kennlinie 2)

b) Wird ein Luftspalt eingefügt, so besteht der magnetische Kreis aus zwei Abschnitten, dem Eisenweg mit der Länge $l_E = l$ und dem Luftspaltweg mit der Länge l_L. Die magnetische Flussdichte ist in beiden Abschnitten gleich groß und beträgt - wie bei a) - $B = \Phi/A = 1{,}25\,\mathrm{T}$. Die im Eisen erforderliche Feldstärke entnehmen wir - ebenso wie bei a) - der in Bild 5.19 dargestellten Magnetisierungskennlinie als

$$H = 800\ \mathrm{A/m}.$$

Die im Luftspalt notwendige Feldstärke beträgt nach Gl. (5.7) mit $\mu = \mu_0$

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0} = \frac{1{,}25\,\mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)}} = 9{,}95 \cdot 10^5\ \mathrm{A/m}.$$

Mit diesen Werten finden wir aus dem in der Form von Gl. (5.30) dargestellten Durchflutungsgesetz den Strom

$$I' = \frac{H_E\, l_E + H_L\, l_L}{N} = \frac{800\ \mathrm{A/m} \cdot 0{,}35\ \mathrm{m} + 9{,}95 \cdot 10^5\ \mathrm{A/m} \cdot 3 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}}{200} = \underline{2{,}9\ \mathrm{A}}.$$

Aufgabe 5.6

Ein aus zwei Teilen bestehender ringförmiger Eisenkern nach Bild 5.20 aus Stahlguss mit der in Bild 5.19 dargestellten Magnetisierungskennlinie enthält eine aus $N = 250$ Windungen bestehende Spule. Die Eisenquerschnitte betragen $A_1 = 40\ \mathrm{cm}^2$ und $A_2 = 30\ \mathrm{cm}^2$. Die mittleren Eisenweglängen sind $l_1 = l_2 = 50$ cm. Auf beiden Seiten ist ein Luftspalt von $l_L = 0{,}6$ mm Länge vorgesehen.

Welcher Strom I muss in der Spule fließen, damit im Luftspalt eine magnetische Flussdichte von $B_L = 1{,}2$ T herrscht? (Für die Berechnung können die Luftspaltfläche A_L und der Eisenquerschnitt A_2 als gleich groß angesehen werden.)

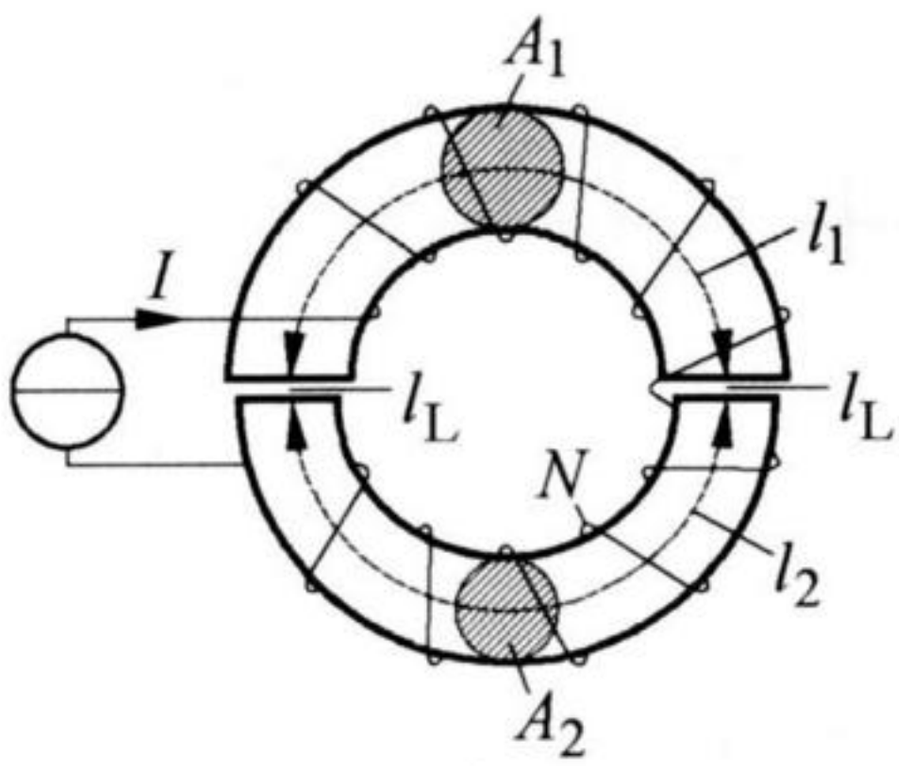


Bild 5.20 Magnetischer Eisenkreis mit Luftspalt

Lösung

In der unteren Eisenkernhälfte muss wegen $A_L = A_2$ die Flussdichte

$$B_2 = B_L = 1{,}2\ \mathrm{T}$$

herrschen. Dagegen ergibt sich im oberen Teil bei dem magnetischen Fluss $\Phi = B_L\, A_L$ eine Flussdichte von

$$B_1 = \frac{\Phi}{A_1} = \frac{B_L\, A_L}{A_1} = \frac{1{,}2\ \mathrm{T} \cdot 30\ \mathrm{cm}^2}{40\ \mathrm{cm}^2} = 0{,}90\ \mathrm{T}.$$

Die im Eisen erforderlichen magnetischen Feldstärken entnehmen wir der in Bild 5.19 dargestellten Magnetisierungskennlinie. Für $B_1 = 0{,}90\ \mathrm{T}$ lesen wir den Wert

$$H_1 = 240\ \mathrm{A/m}$$

ab, und für $B_2 = 1{,}2\ \mathrm{T}$ erhalten wir

$$H_2 = 500\ \mathrm{A/m}.$$

Die im Luftspalt erforderliche Feldstärke folgt aus Gl. (5.7) mit $\mu = \mu_0$ als

$$H_\mathrm{L} = \frac{B_\mathrm{L}}{\mu_0} = \frac{1{,}2\ \mathrm{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)}} = 9{,}55 \cdot 10^5\ \mathrm{A/m}.$$

Durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes finden wir den gesuchten Strom

$$I = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2 + 2 H_\mathrm{L} l_\mathrm{L}}{N},$$

$$I = \frac{240\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} + 500\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} + 2 \cdot 9{,}55 \cdot 10^5\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}}{250} = \underline{6{,}1\ \mathrm{A}}.$$

Aufgabe 5.7

Der in Bild 5.21a dargestellte Eisenkern aus Stahlguss mit der in Bild 5.19 angegebenen Magnetisierungskennlinie enthält zwei Spulen mit den Windungszahlen $N_1 = 200$ und $N_2 = 250$. Der Eisenquerschnitt ist an allen Stellen gleich groß und beträgt $A = 4\ \mathrm{cm}^2$. Die mittleren Eisenweglängen haben die Werte $l_1 = l_2 = 18$ cm und $l_3 = 8$ cm. Im Mittelschenkel soll ein magnetischer Fluss von $\Phi_3 = 5{,}8 \cdot 10^{-4}$ Wb erzeugt werden. In der rechten Spule fließt der Strom $I_2 = 0{,}7$ A.

Welcher Strom I_1 muss in der linken Spule fließen?

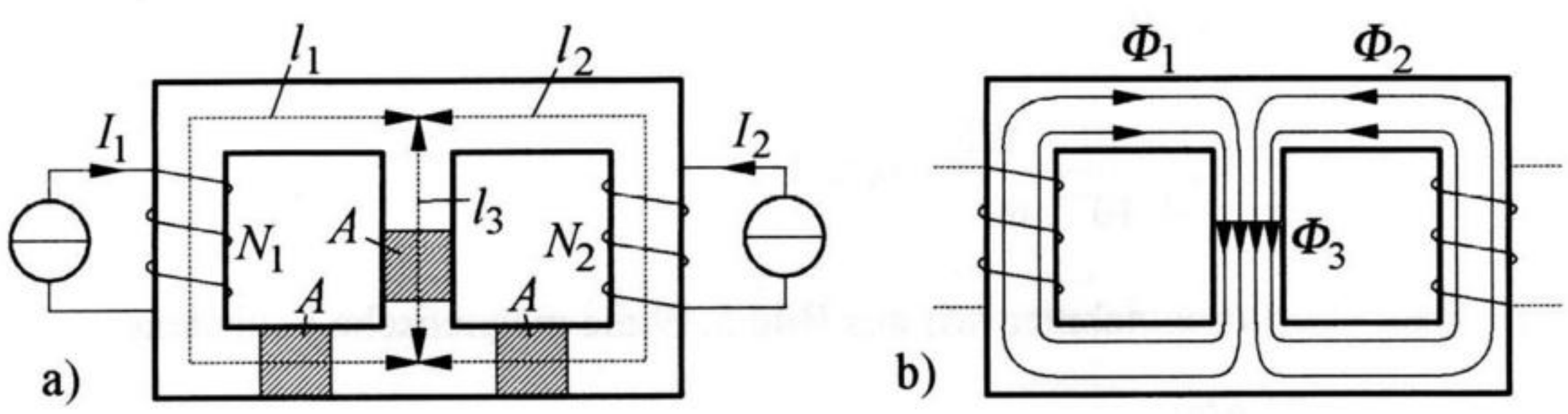


Bild 5.21 Magnetischer Kreis mit Verzweigung.
a) Gegebene Anordnung, b) Verlauf der auftretenden magnetischen Flüsse

Lösung

Im Mittelschenkel muss die magnetische Flussdichte

$$B_3 = \frac{\Phi_3}{A} = \frac{5{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 1{,}45\ \text{T}$$

herrschen. Für diesen Wert entnehmen wir aus Bild 5.19 die magnetische Feldstärke

$$H_3 = 1500\ \text{A/m}.$$

Wir wenden das Durchflutungsgesetz auf die rechte Seite der in Bild 5.21a dargestellten Anordnung an und erhalten dadurch

$$H_2\, l_2 + H_3\, l_3 = I_2\, N_2.$$

Hieraus folgt

$$H_2 = \frac{I_2\, N_2 - H_3\, l_3}{l_2} = \frac{0{,}7\ \text{A} \cdot 250 - 1500\ \text{A/m} \cdot 0{,}08\ \text{m}}{0{,}18\ \text{m}} = 305\ \text{A/m}.$$

Aus Bild 5.19 entnehmen wir für diesen Wert die magnetische Flussdichte

$$B_2 = 1{,}0\ \text{T}.$$

Somit besteht im rechten Schenkel des Eisenkerns der magnetische Fluss

$$\Phi_2 = B_2\, A = 1{,}0\ \text{T} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2 = 4{,}0 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}.$$

Folglich muss im linken Schenkel nach Bild 5.21b der magnetische Fluss

$$\Phi_1 = \Phi_3 - \Phi_2 = (5{,}8 - 4{,}0) \cdot 10^{-4}\ \text{Wb} = 1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

vorhanden sein und daher die Flussdichte

$$B_1 = \frac{\Phi_1}{A} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{4 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 0{,}45\ \text{T}$$

herrschen. Hierfür entnehmen wir aus Bild 5.19 die magnetische Feldstärke

$$H_1 = 75\ \text{A/m}.$$

Wenden wir das Durchflutungsgesetz auf die linke Seite der in Bild 5.21a dargestellten Anordnung an, so erhalten wir

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = I_1 N_1.$$

Hieraus ergibt sich der gesuchte Strom als

$$I_1 = \frac{H_1 l_1 + H_3 l_3}{N_1} = \frac{75\,\mathrm{A/m} \cdot 0{,}18\,\mathrm{m} + 1500\,\mathrm{A/m} \cdot 0{,}08\,\mathrm{m}}{200} = \underline{0{,}67\,\mathrm{A}}.$$

Aufgabe 5.8

Bei dem in Bild 5.22a dargestellten Eisenkern beträgt der Eisenquerschnitt des mittleren Schenkels $A_3 = 10\ \mathrm{cm}^2$. Die übrigen Eisenwege haben den Querschnitt $A_1 = A_2 = 5\ \mathrm{cm}^2$. Der vorhandene Luftspalt ist $l_\mathrm{L} = 0{,}3$ mm lang. Auf dem Mittelschenkel ist eine Spule mit $N = 100$ Windungen aufgebracht, die vom Strom $I = 2{,}1$ A durchflossen wird. Die mittleren Eisenlängen betragen $l_1 = l_2 = 160$ mm und $l_3 = 70$ mm. Die Permeabilitätszahl des Eisens kann als $\mu_\mathrm{r} = 3000$ angenommen werden.

Welcher magnetischer Fluss Φ_3 tritt im Mittelschenkel auf?

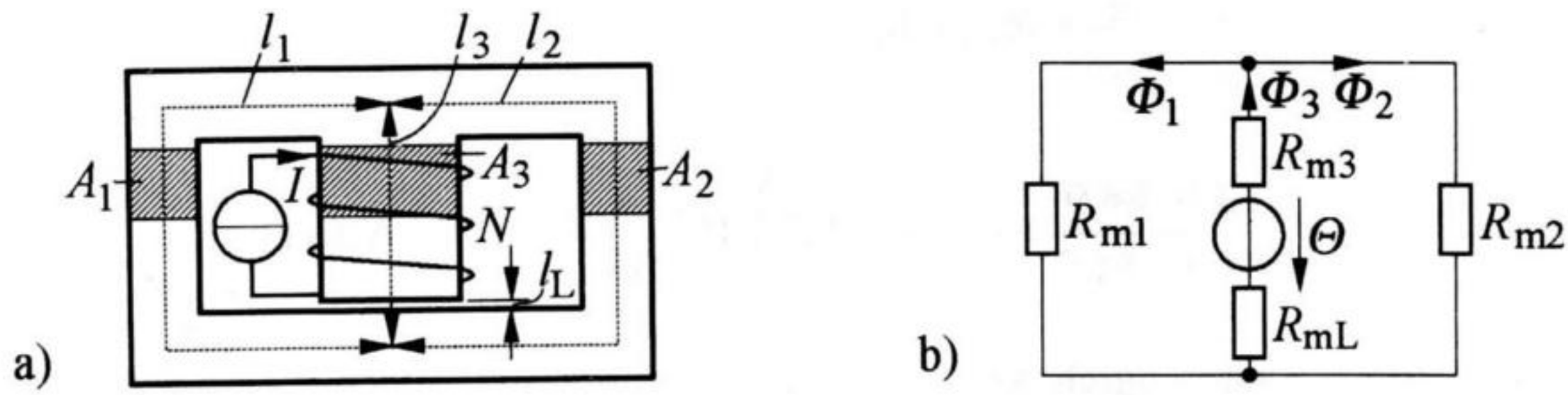


Bild 5.22 a) Verzweigter magnetischer Kreis mit Luftspalt, b) zugehörige magnetische Ersatzschaltung

Lösung

Von dem vorliegenden Eisenkern ist statt der Magnetisierungskennlinie die Permeabilitätszahl μ_r gegeben. Das bedeutet, dass alle magnetischen Widerstände konstante Werte haben. Zur Lösung der Aufgabe ist es daher sinnvoll, die gegebene Anordnung - wie in Abschnitt 5.4 beschrieben - durch die in Bild 5.22b dargestellte *magnetische Ersatzschaltung* wiederzugeben. Wir bestimmen zunächst nach Gl. (5.21) die vorhandenen magnetischen Widerstände. Jeder der beiden sich aus Bild 5.22a ergebenden *äußeren* Eisenwege hat den magnetischen Widerstand

$$R_{m1} = R_{m2} = \frac{l_1}{\mu_0\,\mu_r\,A_1} = \frac{0{,}16\ \text{m}}{4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\cdot 3000\cdot 5\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 84{,}9\cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{Vs}}.$$

Der magnetische Widerstand des *mittleren* Eisenweges beträgt, wenn wir berücksichtigen, dass $l_L << l_3$ ist,

$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu_0\,\mu_r\,A_3} = \frac{0{,}07\ \text{m}}{4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\cdot 3000\cdot 10\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 18{,}6\cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{Vs}}.$$

Der vorhandene Luftspalt hat bei der Luftspaltfläche A_L mit $A_L = A_3$ den magnetischen Widerstand

$$R_{mL} = \frac{l_L}{\mu_0\ A_L} = \frac{0{,}3\cdot 10^{-3}\ \text{m}}{4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}\cdot 10\cdot 10^{-4}\ \text{m}^2} = 238{,}7\cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{Vs}}.$$

In Bild 5.22b liegen R_{m1} und R_{m2} parallel. Diese Parallelschaltung liegt wiederum mit R_{m3} und R_{mL} in Reihe. Folglich beträgt der sich ergebende gesamte magnetische Widerstand

$$R_m = \frac{R_{m1}\,R_{m2}}{R_{m1} + R_{m2}} + R_{m3} + R_{mL},$$

$$R_m = \left(\frac{84{,}9\cdot 84{,}9}{84{,}9 + 84{,}9} + 18{,}6 + 238{,}7\right)\cdot 10^3\ \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = 3{,}0\cdot 10^5\ \text{A/(Vs)}.$$

Damit erhalten wir - durch Anwendung des ohmschen Gesetzes des magnetischen Kreises - für den gesuchten magnetischen Fluß nach Gl. (5.22)

$$\Phi_3 = \frac{\Theta}{R_m} = \frac{I\,N}{R_m} = \frac{2{,}1\,\text{A}\cdot 100}{3{,}0\cdot 10^5\ \text{A/(Vs)}} = \underline{7{,}0\cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}.$$

Er verläuft nach Bild 5.22b je zur Hälfte durch die beiden äußeren Schenkel, so dass $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3/2$ ist.

5.6.4 Magnetischer Kreis mit Dauermagnet

Wir betrachten nach Bild 5.23a einen Dauermagneten mit eingebrachtem Luftspalt. Von dem Kernmaterial des Magneten sei der in Bild 5.23b angegebene (im

zweiten Quadranten liegende) Teil der Hystereseschleife bekannt (Kennlinie 1). In der Darstellung sind B_r die Remanenzflussdichte und H_c die Koerzitivfeldstärke (vergl. Abschnitt 5.6.2).

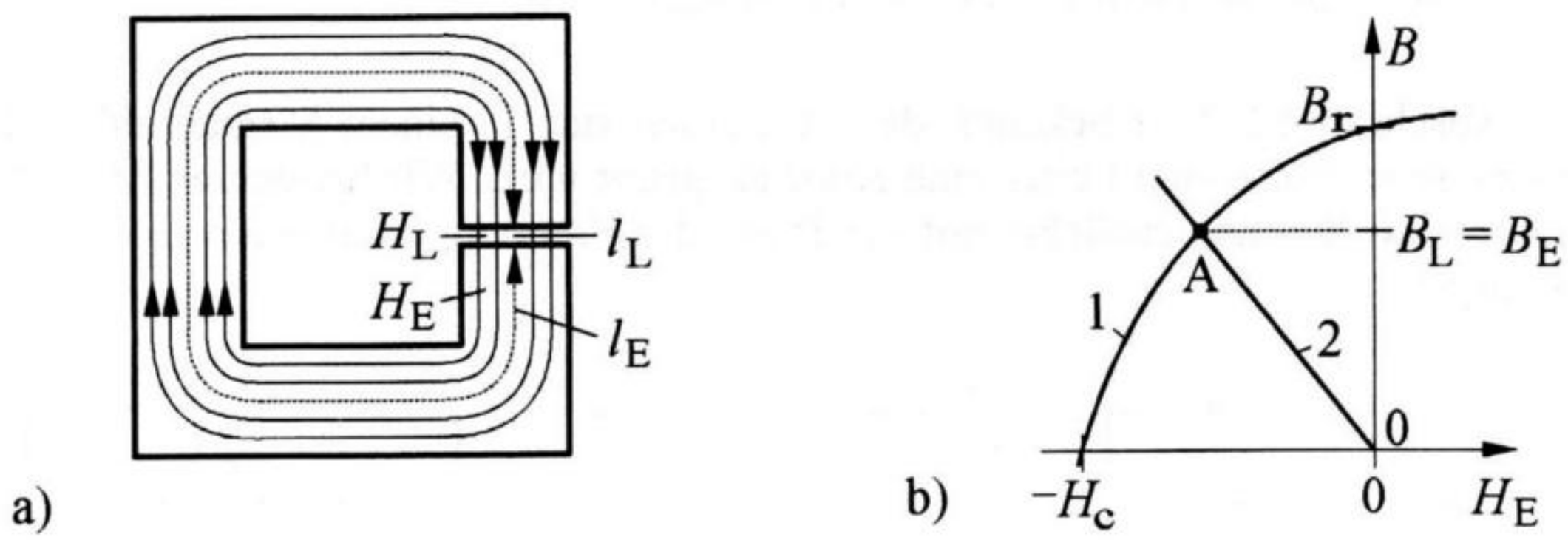


Bild 5.23 a) Magnetischer Kreis mit einem Dauermagneten,
b) Bestimmung der im Kreis auftretenden magnetischen Flussdichte

Es stellt sich jetzt die Frage, welche magnetische Flussdichte B_L im vorhandenen Luftspalt des Dauermagneten auftritt. Hierzu wenden wir zunächst das Durchflutungsgesetz auf den in Bild 5.23a dargestellten magnetischen Kreis an. Da die Durchflutung Null ist, ergibt sich, wenn wir die im Magnetmaterial vorhandene Feldstärke als H_E bezeichnen und die im Luftspalt vorhandene Feldstärke als H_L,

$$H_E\, l_E + H_L\, l_L = 0. \tag{5.31}$$

Hierbei sind l_E die mittlere Eisenlänge und l_L die Luftspaltlänge. Mit $H_L = B_L/\mu_0$ wird aus Gl. (5.31)

$$H_E\, l_E + \frac{B_L}{\mu_0} l_L = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung nach B_L auf und erhalten

$$B_L = -\mu_0 \frac{l_E}{l_L} H_E. \tag{5.32}$$

Fassen wir hierin die Größen H_E und B_L als Variable auf, so stellt Gl. (5.32) die Gleichung einer Geraden von der Form $B_L = f(H_E)$ dar. Wir tragen sie in Bild 5.23b ein und erhalten die dargestellte Kennlinie 2.

Aus Bild 5.23a ist ersichtlich, dass - bei relativ kleiner Luftspaltlänge l_L - im Luftspalt die gleiche Flussdichte herrscht wie im Magneten selbst. Diese Bedingung ist in Bild 5.23b nur im Schnittpunkt A erfüllt. Das bedeutet, dass die hier vorhandene Flussdichte $B_E = B_L$ die gesuchte magnetische Flussdichte darstellt.

5.7 Kräfte im magnetischen Feld

5.7.1 Stromführender Leiter im Magnetfeld

Aus Abschnitt 5.2.2 ist bekannt, dass auf einen sich in einem Magnetfeld befindenden stromführenden Leiter eine Kraft ausgeübt wird. Wir betrachten dazu Bild 5.24 und wollen uns zunächst mit der Frage der *Richtung* einer solchen Kraft beschäftigen.

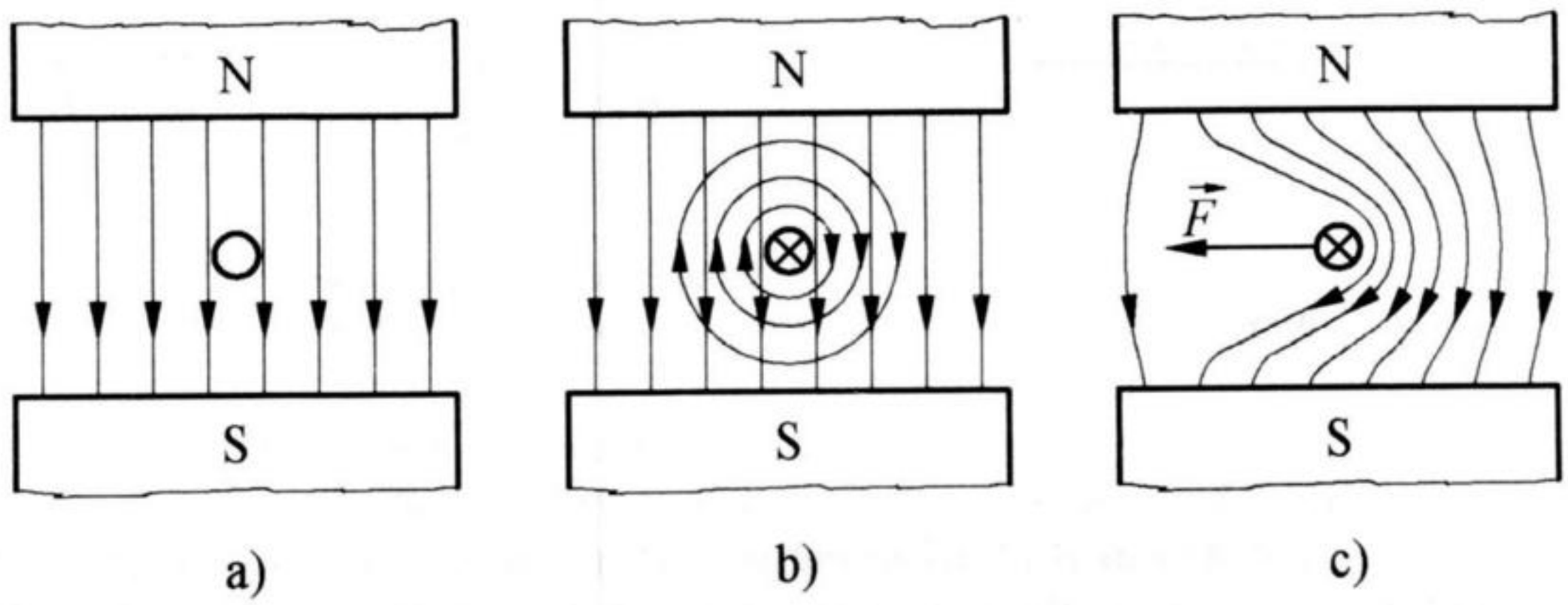


Bild 5.24 Stromführender gerader Leiter im Magnetfeld

Bild 5.24a zeigt ein zwischen einem Nordpol (N) und einem Südpol (S) vorhandenes Magnetfeld. Senkrecht zur Feldrichtung liegt ein elektrischer Leiter. Fließt in ihm ein elektrischer Strom, so umgibt er sich nach Bild 5.24b mit einem Magnetfeld, das zusätzlich zum ursprünglichen Feld auftritt. Das resultierende Gesamtmagnetfeld hat den in Bild 5.24c dargestellten Verlauf. Das Ergebnis zeigt, dass das ursprüngliche Feld durch das Magnetfeld des Stromes auf der einen Seite des Leiters verstärkt und auf der anderen Seite geschwächt wird. Es entsteht eine Kraft $\vec{F}$, die in Richtung des geschwächten Feldes wirkt.

Das Entstehen dieser Kraft kann man anschaulich auch dadurch beschreiben, dass man den magnetischen Feldlinien das Bestreben zuschreibt, sich zu verkürzen und sich darüber hinaus möglichst weit voneinander zu entfernen. Feldlinien erzeugen also einen *Längszug* und üben aufeinander einen *Querdruck* aus. Dies führt in Bild 5.24c zu einer Kraft in der angegebenen Richtung. Die Größe dieser Kraft beträgt, wenn wir einen geraden Leiter voraussetzen, der senkrecht zum Feld verläuft, nach Gl. (5.5)

$$F = B l I. \tag{5.33}$$

Dabei sind B die Flussdichte des ursprünglichen, als homogen anzusehenden Magnetfeldes, l die Länge des im Feld liegenden Leiters und I der Leiterstrom.

Besteht zwischen dem Leiter und der Feldrichtung kein rechter Winkel, sondern ein beliebiger Winkel α, so gilt für die Kraft

$$F = B\,l\,I \sin\alpha. \tag{5.34}$$

Aufgrund der sich nach Bild 5.24c ergebenden Kraftrichtung können wir die erzeugte Kraft auch durch das *Vektorprodukt*

$$\boxed{\vec{F} = I\,(\vec{l} \times \vec{B})} \tag{5.35}$$

angeben. Dabei stellt $\vec{l}$ einen Vektor dar, dessen Betrag gleich der Leiterlänge l ist und dessen Richtung mit der Richtung des Stromes I übereinstimmt. $\vec{B}$ ist der Vektor der magnetischen Flussdichte und $\vec{F}$ der Vektor der entstehenden Kraft.

Aufgabe 5.9

Ein gerader Leiter, der den Strom I = 50 A führt, befindet sich in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B = 1,0 T. Die im Feld liegende Leiterlänge beträgt l = 50 mm. Zwischen dem Leiter und der Feldrichtung besteht ein Winkel von $\alpha = 70°$.

Welche Kraft F wird auf den Leiter ausgeübt?

Lösung

Die auf den Leiter ausgeübte Kraft beträgt nach Gl. (5.34)

$$F = B\,l\,I \sin\alpha = 1{,}0\ \mathrm{T} \cdot 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot 50\ \mathrm{A} \cdot \sin 70° = \underline{2{,}35\ \mathrm{N}}.$$

5.7.2 Bewegte Ladung im Magnetfeld

Das Fließen eines elektrischen Stromes stellt bekanntlich eine Bewegung von Ladungsträgern dar. Das bedeutet, dass ein Magnetfeld nicht nur auf einen stromführenden Leiter eine Kraft ausübt, sondern auch auf jede sich bewegende Ladung. Zur weiteren Erläuterung betrachten wir Bild 5.25.

Es zeigt ein zwischen zwei Polen vorhandenes Magnetfeld, in dem sich eine positive elektrische Ladung Q senkrecht zur Feldrichtung mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt. Wir wollen uns zunächst mit der Frage befassen, welche Richtung die auf Q wirkende Kraft hat.

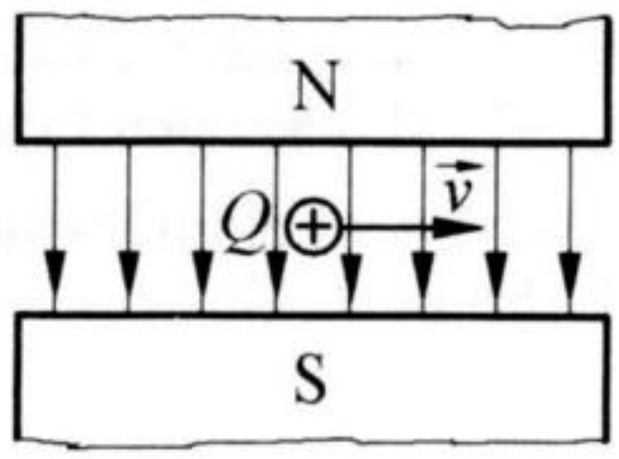


Bild 5.25 Bewegte Ladung im Magnetfeld

Die sich bewegende Ladung erzeugt, ebenso wie ein in einem Leiter geführter elektrischer Strom, ein Magnetfeld. Es hat in Bild 5.25 zur Folge, dass das zwischen den Magnetpolen verlaufende Feld oberhalb der Zeichenebene verstärkt und unterhalb derselben geschwächt wird. Hierdurch wirkt auf die Ladung Q eine Kraft, die in die Zeichenebene hineingerichtet ist. Für die Größe der Kraft gilt nach Gl. (5.33) unter Berücksichtigung von Gl. (2.1)

$$F = B\,l\,I = B\,l\frac{Q}{t}. \tag{5.36}$$

Dabei stellen B die Flussdichte des Magnetfeldes dar und

$$\frac{l}{t} = v$$

die Geschwindigkeit, mit der sich die Ladung im Magnetfeld bewegt. Somit wird aus Gl. (5.36)

$$F = Q\,v\,B. \tag{5.37}$$

Man bezeichnet diese Kraft, die eine bewegte Ladung im Magnetfeld erfährt, als **Lorentzkraft**. Bewegt sich die Ladung Q nicht, wie oben vorausgesetzt, senkrecht zur Feldrichtung, sondern besteht zwischen Feld- und Bewegungsrichtung ein beliebiger Winkel α, so wird aus Gl. (5.37)

$$F = Q\,v\,B\sin\alpha. \tag{5.38}$$

Diese Kraft können wir auch durch das *Vektorprodukt*

$$\boxed{\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})} \tag{5.39}$$

darstellen. $\vec{v}$ und $\vec{B}$ sind die Vektoren von Geschwindigkeit und Flussdichte, $\vec{F}$ ist der Vektor der auf die Ladung Q wirkenden Kraft.

Gl. (5.39) zeigt, dass auf eine *ruhende* Ladung im Magnetfeld *keine* Kraft ausgeübt wird. Das Gleiche gilt für eine Ladung, die sich in oder gegen die Feldrichtung bewegt, so dass der zwischen Feld- und Bewegungsrichtung bestehende Winkel 0° oder 180° beträgt. Im Übrigen wirkt die auf die Ladung ausgeübte Kraft stets senkrecht zur Feldrichtung und senkrecht zur Bewegungsrichtung.

Aufgabe 5.10

Ein Elektron durchfliegt nach Bild 5.26 mit der Geschwindigkeit $v = 3 \cdot 10^7$ m/s ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $B = 4 \cdot 10^{-3}$ T und der Länge l = 30 mm. (Die Ladung eines Elektrons hat den Betrag $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ As; die Masse beträgt $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.)

Um welchen Winkel α wird das Elektron abgelenkt?

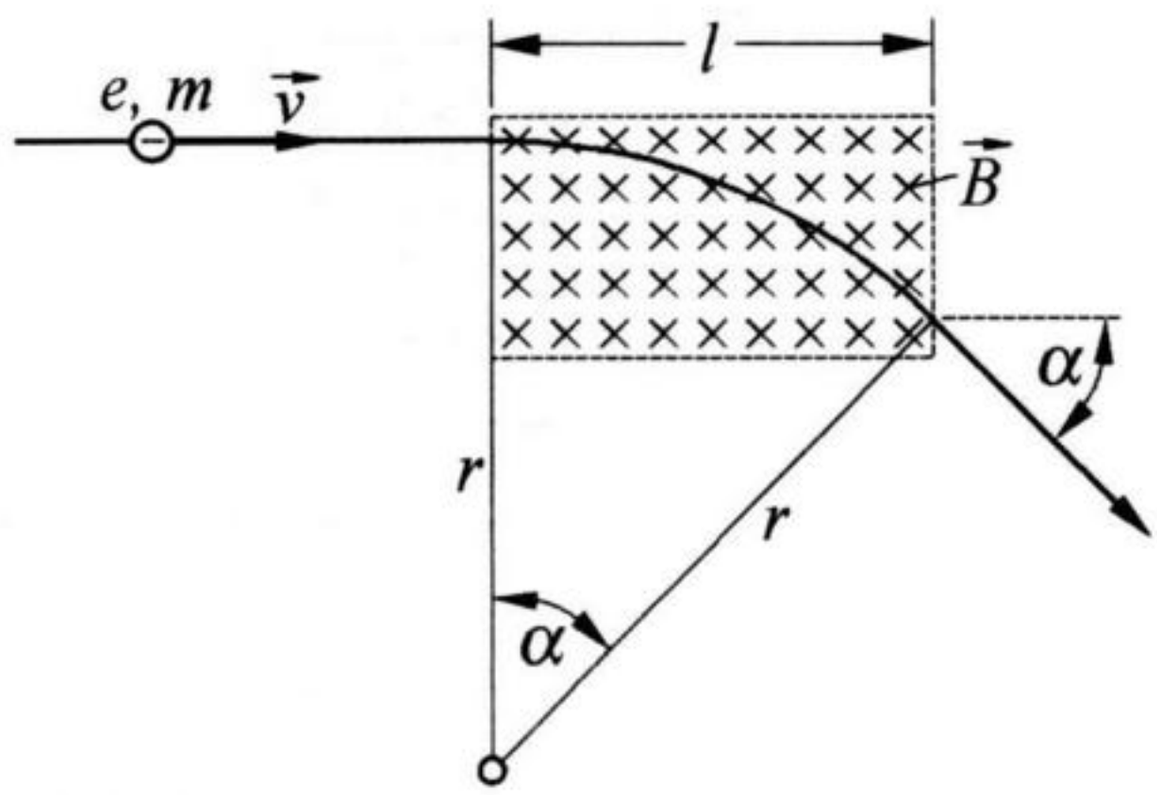


Bild 5.26 Bahnkurve eines Elektrons beim Durchfliegen eines Magnetfeldes

Lösung

Das Magnetfeld übt auf das Elektron eine Kraft aus, die nach Gl. (5.37) den Betrag

$$F = Bev$$

hat. Sie wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zur Feldrichtung. Die Kraft zwingt das Teilchen auf eine Kreisbahn. Dabei ist F gleich der Zentrifugalkraft mv^2/r der Kreisbewegung. Aus

$$Bev = \frac{mv^2}{r}$$

folgt der Radius der Kreisbahn als

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3 \cdot 10^7\ \text{m/s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{As} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{T}} = 42{,}6 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = 42{,}6\ \text{mm}.$$

Mit diesem Wert ergibt sich aus Bild 5.26 der gesuchte Winkel

$$\alpha = \arcsin\frac{l}{r} = \arcsin\frac{30\ \text{mm}}{42{,}6\ \text{mm}} = \underline{44{,}7°}.$$

5.7.3 Der Halleffekt

Wir betrachten nach Bild 5.27 ein dünnes rechteckförmiges Leiterplättchen (mit der Breite b und der Dicke d). Es wird von einem Magnetfeld durchsetzt, das - wie dargestellt - senkrecht zur Leiteroberfläche gerichtet ist und die Flussdichte $\vec{B}$ hat. Gleichzeitig wird der Leiter nach Bild 5.27 von einem Strom I durchflossen.

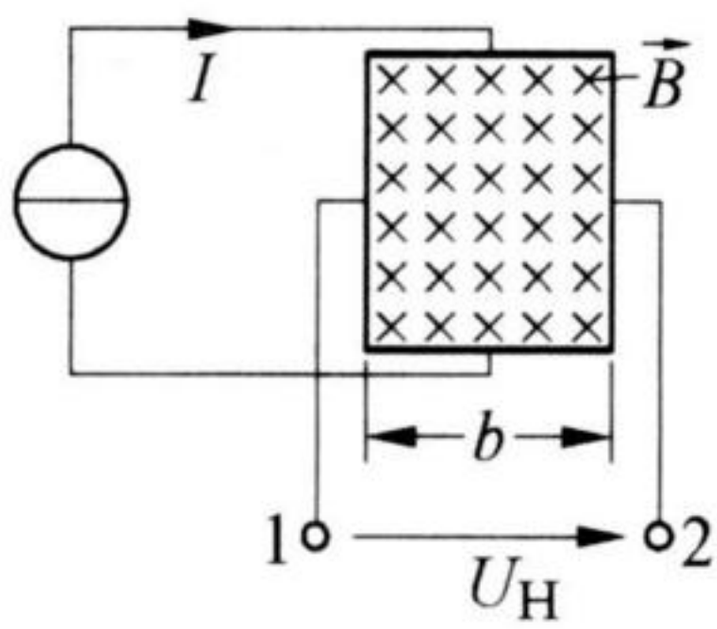


Bild 5.27 Anordnung zur Erläuterung des Halleffektes

Gehen wir davon aus, dass das Fließen des Stromes I auf einer Bewegung von *Elektronen* beruht, so bedeutet dies, dass sich die Elektronen in einem Magnetfeld bewegen. Auf sie wirkt folglich nach Gl. (5.37) eine *Lorentzkraft* mit dem Betrag

$$F_1 = e\,v\,B. \tag{5.40}$$

Hierin sind e der Betrag der Elementarladung und v die (mittlere) Geschwindigkeit der Elektronen. Durch die Lorentzkraft werden in Bild 5.27 die Elektronen nach rechts abgelenkt. Folglich lädt sich die rechte Leiterseite (Punkt 2) negativ auf und die linke Leiterseite (Punkt 1) positiv. Das dadurch verursachte, in Bild 5.27 von links nach rechts wirkende *elektrische Feld* übt auf die Elektronen ebenfalls eine Kraft aus. Sie hat nach Gl. (3.1) den Betrag

$$F_2 = e\,E, \tag{5.41}$$

wobei E die elektrische Feldstärke des Feldes ist. Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand mit $F_1 = F_2$ ein. Durch Gleichsetzen der Gln. (5.40) und (5.41) ergibt sich

$$e\,E = e\,v\,B.$$

Hieraus folgt für die auftretende elektrische Feldstärke

$$E = v\,B.$$

Damit erhalten wir für die in Bild 5.27 zwischen den Punkten 1 und 2 auftretende elektrische Spannung nach Gl. (3.5)

$$U_{\mathrm{H}} = E\,b = v\,B\,b. \tag{5.42}$$

Berücksichtigen wir jetzt, dass nach Gl. (2.3) bei der Elektronendichte n die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen

$$v = \frac{I}{e\,n\,A}$$

beträgt, so wird aus Gl. (5.42) mit dem Leiterquerschnitt $A = b\,d$

$$\boxed{U_{\mathrm{H}} = \frac{I\,B}{e\,n\,d}.} \tag{5.43}$$

Man bezeichnet U_{H} als **Hallspannung** und die Ursache ihrer Entstehung als **Halleffekt**. Bewegen sich in dem betrachteten Leiterplättchen nicht (negative) Elektronen, sondern stattdessen *positive* Ladungsträger, so hat die Hallspannung U_{H} eine andere Polarität.

Aus Gl. (5.43) ist ersichtlich, dass die Hallspannung U_{H} proportional zur Flussdichte B des Magnetfeldes ansteigt. Der Halleffekt wird daher insbesondere zur Messung der Flussdichte von magnetischen Feldern angewendet. Man bezeichnet ein Leiterplättchen nach Bild 5.27 daher auch als **Hallsonde**.

5.7.4 Kräfte zwischen parallelen stromführenden Leitern

Stromführende Leiter üben bekanntlich gegenseitig Kräfte aufeinander aus. Zu deren Berechnung betrachten wir Bild 5.28.

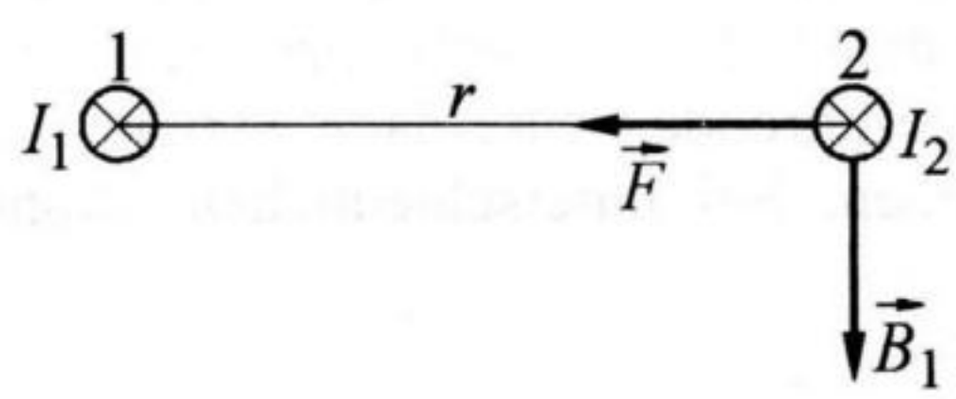


Bild 5.28 Zur Berechnung der Anziehungs- und der Abstoßungskraft zwischen parallelen stromführenden Leitern

Es zeigt zwei gerade, parallel verlaufende Leiter (1 und 2) mit dem Abstand r. Der Durchmesser der einzelnen Leiter sei klein gegenüber r. I_1 und I_2 sind die Leiterströme. Wir gehen zunächst davon aus, dass der Strom I_2 Null sei. Der Strom I_1 erzeugt in der Mittellinie des Leiters 2 (senkrecht zur Leiterachse) nach Gl. (5.4) die magnetische Feldstärke

$$H_1 = \frac{I_1}{2\pi r} \tag{5.44}$$

und damit nach Gl. (5.7) bei der Permeabiltät μ die magnetische Flussdichte

$$B_1 = \mu H_1 = \frac{\mu I_1}{2\pi r}. \tag{5.45}$$

Das Magnetfeld verläuft kreisförmig (im Uhrzeigersinn) um den Strom I_1, so dass es in der Mittellinie des Leiters 2 senkrecht (von oben nach unten) gerichtet ist. Der Flussdichtevektor $\vec{B}_1$ gibt diese Richtung in Bild 5.28 an. Fließt jetzt im Leiter 2 ein Strom (I_2), so bedeutet dies, dass sich ein vom Strom I_2 durchflossener Leiter in einem Magnetfeld der Flussdichte B_1 befindet. Folglich wirkt nach Gl. (5.33) auf den Leiter 2 die Kraft

$$F = B_1 I_2 l, \tag{5.46}$$

wobei l die Leiterlänge darstellt. Setzen wir Gl. (5.45) in Gl. (5.46) ein, so ergibt sich

$$\boxed{F = \frac{\mu I_1 I_2 l}{2\pi r}.} \tag{5.47}$$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man, wenn man in entsprechender Weise die auf den Leiter 1 ausgeübte Kraft bestimmt. Gl. (5.47) gibt damit allgemein diejenige Kraft an, die stromführende Leiter aufeinander ausüben.

Die *Richtung* der in Bild 5.28 auf den Leiter 2 wirkenden Kraft kann man mit Hilfe eines Feldlinienbildes entsprechend Bild 5.24 ermitteln. Man findet dadurch die in Bild 5.28 durch den Vektor $\vec{F}$ gekennzeichnete Kraftrichtung. Allgemein gilt, dass sich zwei stromführende Leiter dann anziehen, wenn die beiden Stromrichtungen übereinstimmen. Bei unterschiedlichen Stromrichtungen stoßen sich die Leiter ab.

Aufgabe 5.11

Drei gerade, parallellaufende, lange Leiter (1, 2 und 3) bilden nach Bild 5.29a Eckpunkte eines Dreiecks mit den Seitenlängen a = 45 mm, b = 35 mm,

$c = 40$ mm. Die Leiter führen die Ströme $I_1 = 20$ A, $I_2 = 25$ A und $I_3 = 30$ A. Die Stromrichtungen ergeben sich aus Bild 5.29a. Die Permeabilitätszahl sei $\mu_r = 1$.

Welche Kraft F wird je Meter Leitungslänge auf den Leiter 3 ausgeübt, und welcher Winkel α besteht zwischen der Richtung dieser Kraft und der Linie c?

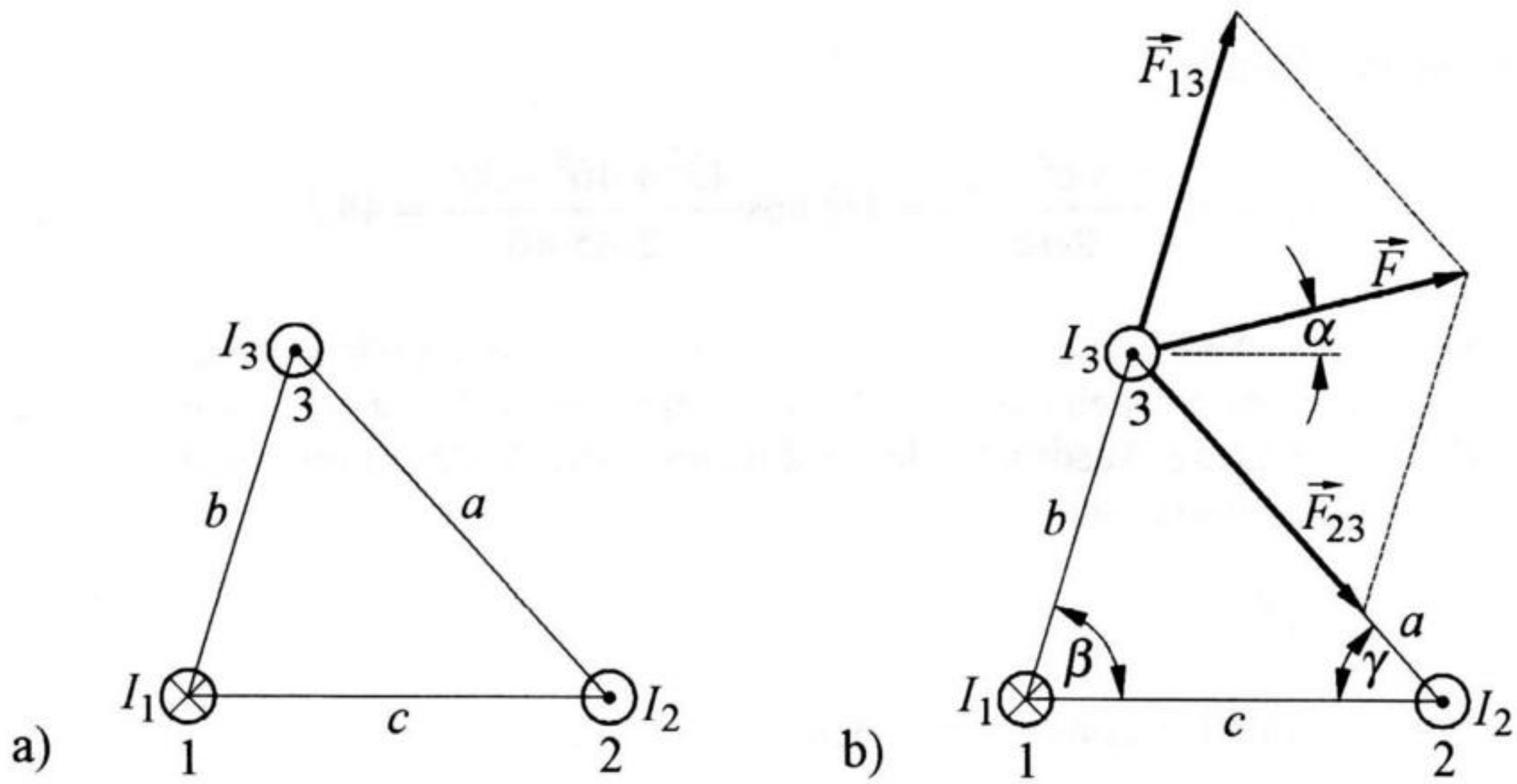


Bild 5.29 Zur Bestimmung der zwischen stromführenden Leitern wirkenden Kräfte

Lösung

Der Leiter 1 übt auf den Leiter 3 eine nach außen gerichtete Kraft aus, die nach Gl. (5.47) für eine Leiterlänge von $l = 1$ m und $\mu = \mu_0$ den Betrag

$$F_{13} = \frac{\mu_0 I_1 I_3 l}{2\pi b} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)} \cdot 20\ \mathrm{A} \cdot 30\ \mathrm{A} \cdot 1\ \mathrm{m}}{2\pi \cdot 0{,}035\ \mathrm{m}} = 3{,}43 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}$$

hat. Entsprechend hat die Kraft, die der Leiter 2 auf den Leiter 3 ausübt, für $l = 1$ m den Betrag

$$F_{23} = \frac{\mu_0 I_2 I_3 l}{2\pi a} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)} \cdot 25\ \mathrm{A} \cdot 30\ \mathrm{A} \cdot 1\ \mathrm{m}}{2\pi \cdot 0{,}045\ \mathrm{m}} = 3{,}33 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}.$$

Sie wirkt in Richtung des Leiters 2. In Bild 5.29b sind die Richtungen der beiden Kräfte $\vec{F}_{13}$ und $\vec{F}_{23}$ eingetragen. Ihre vektorielle Addition liefert die gesuchte Gesamtkraft. Dazu bestimmen wir zunächst mit Hilfe des Kosinussatzes die in Bild 5.29b gekennzeichneten Winkel β und γ. Aus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\beta$$

folgt

$$\beta = \arccos\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \arccos\frac{35^2 + 40^2 - 45^2}{2\cdot 35\cdot 40} = 73{,}4°.$$

Entsprechend wird

$$\gamma = \arccos\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \arccos\frac{45^2 + 40^2 - 35^2}{2\cdot 45\cdot 40} = 48{,}2°.$$

Die vektorielle Addition der Vektoren $\vec{F}_{13}$ und $\vec{F}_{23}$ können wir mit Hilfe der komplexen Rechnung vornehmen (vergl. Abschnitt 6.5.1). Dazu stellen wir $\vec{F}_{13}$ und $\vec{F}_{23}$ durch komplexe Ausdrücke dar und nehmen die Addition mit einem Taschenrechner vor. So finden wir aus

$$3{,}43\cdot e^{j73{,}4°} + 3{,}33\cdot e^{-j48{,}2°} = 3{,}30\cdot e^{j14{,}0°},$$

dass die gesuchte Gesamtkraft den Betrag

$$\underline{F = 3{,}30\cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}$$

hat und gegenüber der Linie c (also gegenüber der Waagerechten) den Winkel

$$\underline{\alpha = 14{,}0°}$$

einschließt.

5.8 Induktionswirkung des magnetischen Feldes

5.8.1 Bewegter Leiter im Magnetfeld

Bewegt man einen Leiter in einem Magnetfeld, so werden auf die im Material vorhandenen Ladungsträger Kräfte ausgeübt. Sie wirken, wie in Abschnitt 5.7.2 beschrieben, senkrecht zur Feldrichtung und senkrecht zur Bewegungsrichtung. Wir betrachten dazu Bild 5.30. Es zeigt einen zu einem Rechteck gebogenen Leiter, von dem sich *eine* Seite mit der Länge l in einem Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ befindet. Der Leiter möge sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in der angegebenen Richtung bewegen.

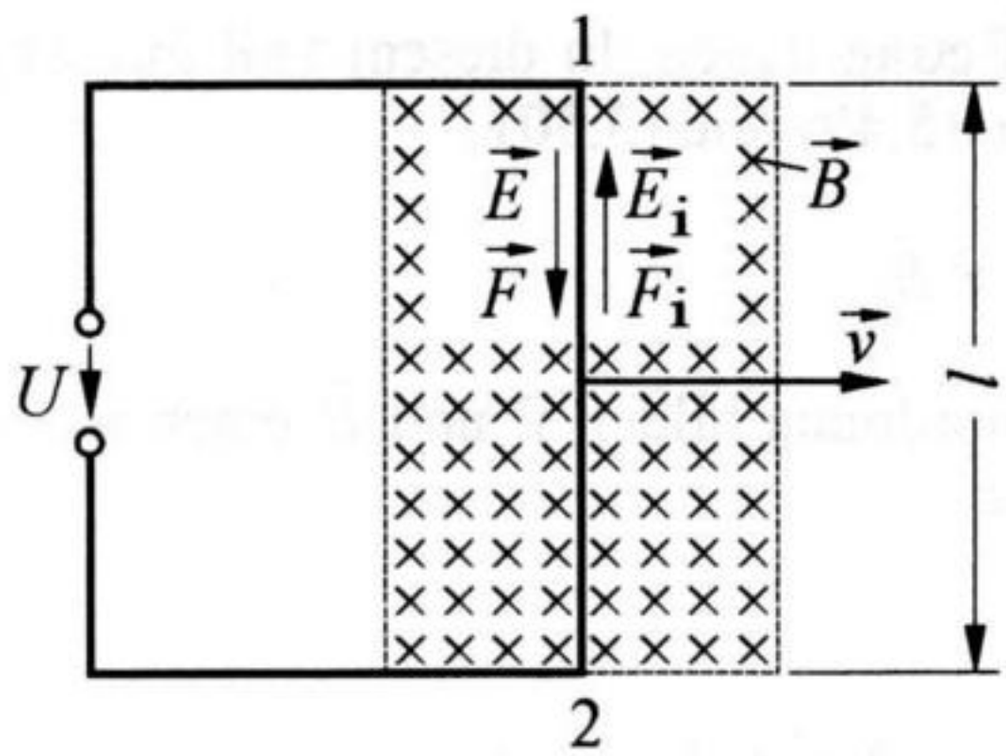


Bild 5.30 Bewegter Leiter im Magnetfeld

Bezeichnen wir die Ladung eines beliebigen im Leiter vorhandenen Ladungsträgers als Q, so wird hierauf nach Gl. (5.39) die *Lorentzkraft*

$$\vec{F}_i = Q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{5.48}$$

ausgeübt. Sie wirkt in Bild 5.30 auf positive Ladungsträger nach oben und auf negative nach unten. Wir können diese Kraft auch über eine durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld verursachte elektrische Feldstärke ($\vec{E}_i$) beschreiben und somit nach Gl. (3.3) durch

$$\vec{F}_i = Q\vec{E}_i \tag{5.49}$$

darstellen. Durch Gleichsetzen der Gln. (5.48) und (5.49) erhalten wir

$$\vec{E}_i = \vec{v} \times \vec{B}. \tag{5.50}$$

Die so definierte elektrische Feldstärke wollen wir als **induzierte Feldstärke** bezeichnen. Sie hat zur Folge, dass freie Elektronen in Bild 5.30 nach unten wandern. Hierdurch lädt sich das untere Leiterende (Punkt 2) negativ auf und das obere Leiterende (Punkt 1) positiv. Die so entstehenden Ladungen verursachen ein elektrisches Feld, das in Bild 5.30 von oben nach unten gerichtet ist. Bezeichnen wir die dadurch verursachte, in der rechten Leiterseite vorhandene Feldstärke mit $\vec{E}$, so übt es nach Gl. (3.3) auf die Ladungsträger die Kraft

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

aus. Diese Kraft wirkt der durch die Lorentzkraft ($\vec{F}_i$) verursachten Verschiebung von Ladungsträgern entgegen und beendet schließlich die Verschiebung. Ein Gleichgewichtszustand ist erreicht, wenn die entgegengesetzt gerichteten Kräfte $\vec{F}$

und $\vec{F}_i$ den gleichen Betrag haben. In diesem Fall gilt wegen $\vec{F} = -\vec{F}_i$ unter Berücksichtigung der Gln. (5.49) und (5.50)

$$\vec{E} = -\vec{E}_i = -\vec{v} \times \vec{B}. \tag{5.51}$$

In der vorliegenden Anordnung bilden $\vec{v}$ und $\vec{B}$ einen rechten Winkel, so dass der Betrag der Feldstärke $\vec{E}$

$$E = v\,B \tag{5.52}$$

ist. Die Feldstärken $\vec{E}_i$ und $\vec{E}$ heben sich im Leiter gegenseitig auf. Daher ist das Leiterinnere feldfrei. Zwischen den Leiterenden (außerhalb des Magnetfeldes) liegt nach Gl. (3.5) die Spannung

$$U = E\,l.$$

Hieraus wird unter Berücksichtigung von Gl. (5.52)

$$\boxed{U = B\,l\,v.} \tag{5.53}$$

Durch die Bewegung des Leiters im Magnetfeld entsteht also zwischen den Leiterenden in Bild 5.30 eine elektrische Spannung (U). Man sagt: Im Leiter wird eine Spannung **induziert**. Man bezeichnet U daher auch als **induzierte Spannung**.

Gl. (5.53) gilt nur im homogenen magnetischen Feld und nur dann, wenn die Größen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ jeweils mit dem Leiter einen rechten Winkel bilden. Außerdem müssen $\vec{v}$ und $\vec{B}$ senkrecht aufeinander stehen. Trifft das nicht zu, so kann man nach Gl. (3.7) die in Bild 5.30 zwischen den Punkten 1 und 2 induzierte Spannung unter Berücksichtigung von Gl. (5.51) darstellen als

$$U = \int_1^2 \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\int_1^2 \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \mathrm{d}\vec{l}. \tag{5.54}$$

Die in den Gleichungen enthaltene Geschwindigkeit ($\vec{v}$) ist stets als *Relativgeschwindigkeit* des Leiters gegenüber dem Magnetfeld anzusehen. Dabei ist es gleichgültig, ob der Leiter bewegt wird oder das Feld.

Aufgabe 5.12

Ein zu einem Rechteck gebogener Leiter L wird nach Bild 5.31 mit der Geschwindigkeit v senkrecht zu einem Magnetfeld der Flussdichte B bewegt. Der magnetische Fluss verteilt sich auf die Fläche eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Grundlinie a und der Höhe h.

Wie groß ist die im Leiter induzierte Spannung u in Abhängigkeit von der Zeit t, wenn der Leiter im Zeitpunkt $t = 0$ entsprechend Bild 5.31 in das Magnetfeld eintaucht?

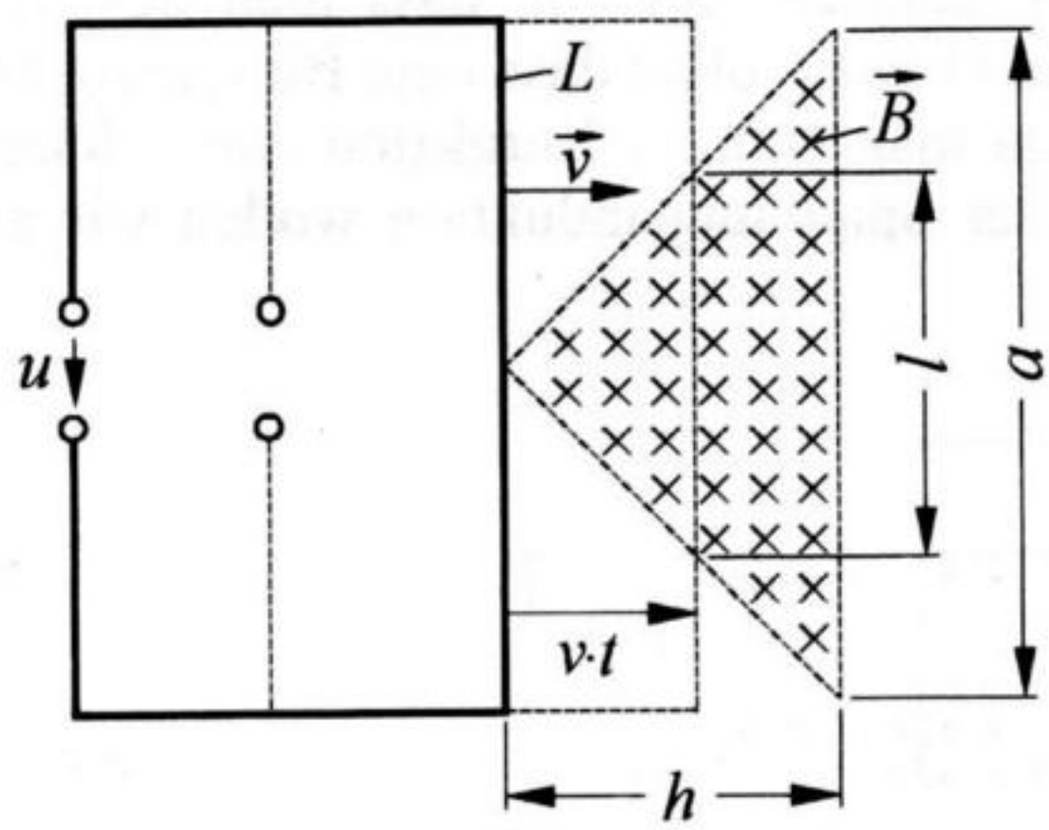


Bild 5.31 Bewegter Leiter im Magnetfeld

Lösung

In einem beliebigen Zeitpunkt t hat der Leiter den Weg vt zurückgelegt. Die sich dann im Magnetfeld befindende Leiterlänge erhalten wir durch Anwendung des Strahlensatzes. Er liefert in Bild 5.31 die Beziehung

$$\frac{a}{h} = \frac{l}{vt}.$$

Hieraus folgt

$$l = \frac{a}{h} vt.$$

Damit gilt für die Höhe der im Leiter induzierten Spannung nach Gl. (5.53)

$$u = Bvl = \underline{B\frac{a}{h}v^2 t}.$$

Im Zeitpunkt $t = h/v$ verlässt der Leiter das Magnetfeld wieder, so dass das angegebene Ergebnis nur im Bereich $0 \le t < h/v$ gilt.

5.8.2 Induktionswirkung des zeitlich veränderlichen Magnetfeldes

Neben der in Abschnitt 5.8.1 beschriebenen Spannungserzeugung durch Bewegung eines Leiters in einem magnetischen Feld ist die Erzeugung einer elektrischen Spannung auch dadurch möglich, dass man den von einer *Leiterschleife umfassten magnetischen Fluss* - ohne dass eine Bewegung erfolgt - *zeitlich ändert.* In beiden Fällen spricht man von der **Induktion** einer elektrischen Spannung. Die zuletzt genannte Art der Spannungsinduktion wollen wir anhand von Bild 5.32a näher betrachten.

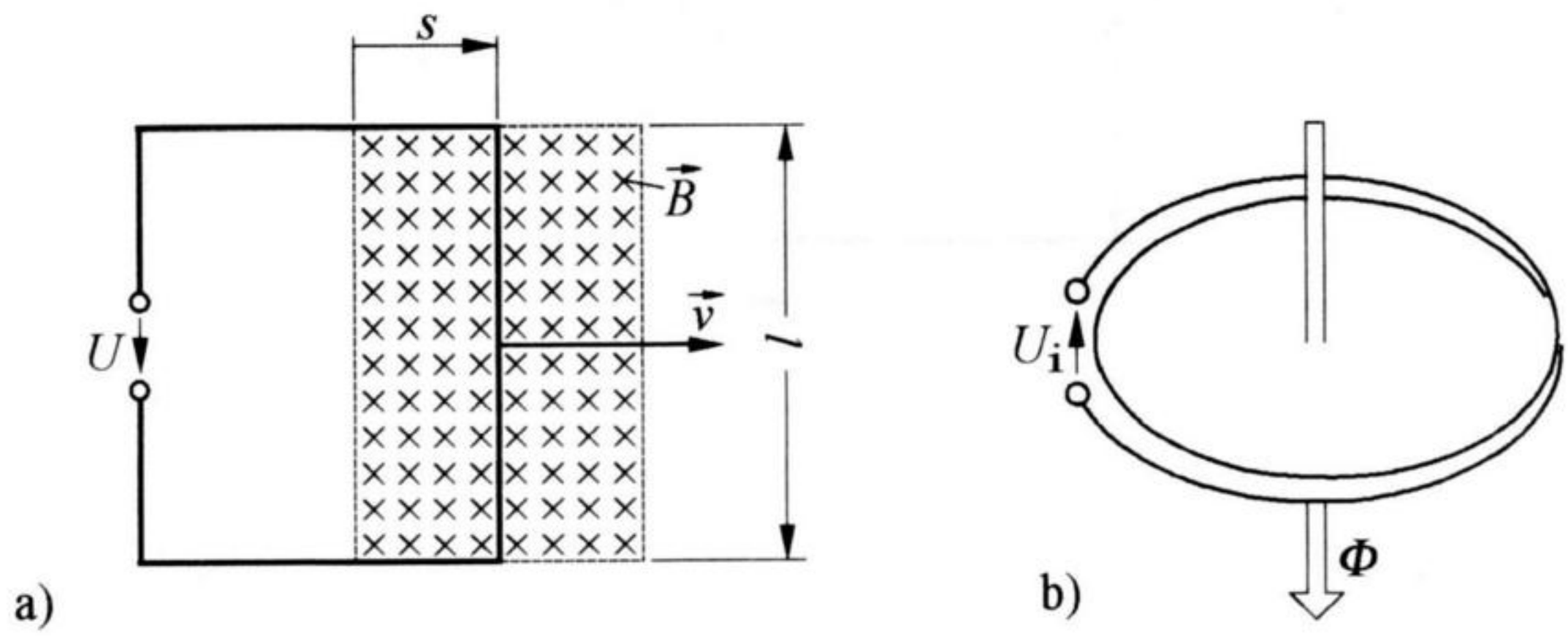


Bild 5.32 Zur Erläuterung des Induktionsgesetzes. a) Leiterschleife im Magnetfeld, b) Zuordnung der Bezugspfeile nach der Rechtsschraubenregel

Bewegt man, wie in Bild 5.32a dargestellt, einen zu einer Schleife gebogenen Leiter, der sich mit der Länge l in einem Magnetfeld der Flussdichte B befindet, mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in der angegebenen Richtung, so wird nach Gl. (5.53) in der Leiterschleife die Spannung

$$U = B l v \tag{5.55}$$

induziert. Bezeichnen wir den vom Leiter zurückgelegten Weg als s, so gilt, wenn wir die Zeit mit t bezeichnen, wegen $v = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ auch

$$U = B l \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \tag{5.56}$$

Hierin stellt $B l \mathrm{d}s$ die *Änderung* des von der Leiterschleife umfassten magnetischen Flusses Φ innerhalb der Zeit $\mathrm{d}t$ dar. Mit $\mathrm{d}\Phi = B l \mathrm{d}s$ wird aus Gl. (5.56)

$$U = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{5.57}$$

Hiermit haben wir eine andere Darstellung für die induzierte Spannung gefunden. Man bezeichnet Gl. (5.57) allgemein als **Induktionsgesetz**. Es besagt:

Die in einer Leiterschleife induzierte Spannung ist stets gleich der pro Zeiteinheit auftretenden Änderung des von der Schleife umfassten magnetischen Flusses.

Dabei ist es völlig gleich, auf welche Weise die Flussänderung zustande kommt. In Bild 5.32a wird beispielsweise angenommen, dass der von der Leiterschleife umfasste Fluss durch die Bewegung des Leiters verändert wird. Der gleiche Effekt tritt aber auch auf, wenn in Bild 5.32a bei ruhendem Leiter und ruhendem Magnetfeld eine *zeitliche Veränderung* des umfassten magnetischen Flusses durch Vergrößern oder Verkleinern der Flussdichte vorgenommen wird. Wir können also zwei Möglichkeiten der Spannungsinduktion unterscheiden.

1. Ein Leiter wird in einem Magnetfeld bewegt, beziehungsweise Leiter und Magnetfeld bewegen sich relativ zueinander.
2. Der von einer Leiterschleife umfasste magnetische Fluss wird bei ruhendem Leiter und ruhendem Magnetfeld verändert.

Selbstverständlich können auch beide Möglichkeiten bei einer Leiteranordnung gleichzeitig auftreten. Das in Gl. (5.57) angegebene Induktionsgesetz gibt dabei in jedem Fall die Spannung an, die durch magnetische Induktion zwischen den Enden der Leiterschleife entsteht. Ersetzt man die Leiterschleife nach Bild 5.32a durch eine Spule mit der Windungszahl N, so wird der magnetische Fluss N-mal umfasst. In diesem Fall gilt für die induzierte Spannung

$$\boxed{U = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.} \tag{5.58}$$

Vielfach wird bei der Formulierung des Induktionsgesetzes von einer Darstellung nach Bild 5.32b ausgegangen. Dabei werden für den magnetischen Fluss (Φ) und für die induzierte Spannung *Bezugspfeile* eingeführt, deren Richtungen einander nach der *Rechtsschraubenregel* zugeordnet sind. In diesem Fall lautet das Induktionsgesetz, wenn wir die induzierte Spannung wegen der gegenüber Bild 5.32a anderen Pfeilrichtung mit U_i bezeichnen,

$$\boxed{U_\mathrm{i} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.} \tag{5.59}$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Spannung U_i bei *zunehmendem* magnetischen Fluss *negativ* und bei *abnehmendem* Fluss *positiv* ist. Ob das Induktionsgesetz mit einem negativen Vorzeichen versehen wird oder nicht, hängt also

davon ab, wie die Richtungen der Bezugspfeile für den magnetischen Fluss und für die induzierte Spannung einander zugeordnet sind.

Die *Polarität* der induzierten Spannung wurde bei den bisherigen Betrachtungen aus der Richtung der Kraft ermittelt, die nach Gl. (5.48) auf die im Leiter vorhandenen Ladungsträger ausgeübt wird. Wir wollen hierzu noch einige weitere Überlegungen anstellen und betrachten dazu Bild 5.33.

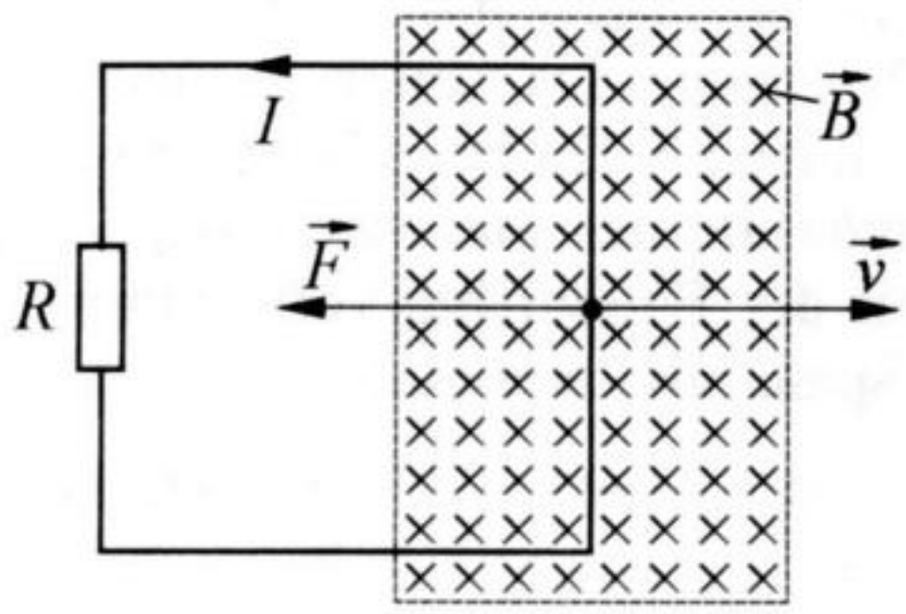


Bild 5.33 Zur Erläuterung der Lenz'schen Regel

Es zeigt eine im Magnetfeld (mit der Flussdichte $\vec{B}$) von links nach rechts bewegte Leiterschleife, an der ein Widerstand R angeschlossen ist. Die im Kreis induzierte Spannung führt nach Gl. (5.50) zu einem Strom I in der angegebenen Richtung.

Das Magnetfeld induziert aber nicht nur eine Spannung in den Kreis, sondern übt auf den im Kreis fließenden Strom auch eine Kraft aus. Deren Richtung können wir mit Hilfe eines Feldlinienbildes entsprechend Bild 5.24 ermitteln. Dabei zeigt sich, dass die Kraft ($\vec{F}$) entgegengesetzt der Bewegungsrichtung ($\vec{v}$) wirkt. Die Kraft sucht also die Leiterbewegung zu verhindern.

Jetzt wollen wir annehmen, dass sich die in Bild 5.33 dargestellte Leiterschleife gegenüber dem Magnetfeld nicht bewegt. Dafür möge der von der Leiterschleife umfasste magnetische Fluss durch Vergrößern der Flussdichte zunehmen. Die dadurch im Kreis induzierte Spannung führt ebenfalls zu einem Strom I in der angegebenen Richtung. Das durch diesen Strom verursachte Magnetfeld ist so gerichtet, dass es die Zunahme des von der Leiterschleife umfassten magnetischen Flusses zu verhindern sucht.

Die beiden beschriebenen Beobachtungen führen zu einem bei Induktionsvorgängen allgemein gültigen Gesetz, das als **Lenz'sche Regel** bezeichnet wird. Sie lautet:

Die induzierte Spannung ist stets so gerichtet, dass ein durch sie hervorgerufener Strom der Ursache ihrer Entstehung entgegenwirkt.

Die Richtung einer induzierten Spannung lässt sich somit auch immer durch Anwendung der Lenz'schen Regel ermitteln.

5.9 Die Selbstinduktion

Wir betrachten eine stromführende Ringspule nach Bild 5.34a mit der Windungszahl N. Der im Kreis fließende Strom i sei einstellbar. (An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass *veränderliche* Spannungen und Ströme durch *kleine* Buchstaben gekennzeichnet werden.)

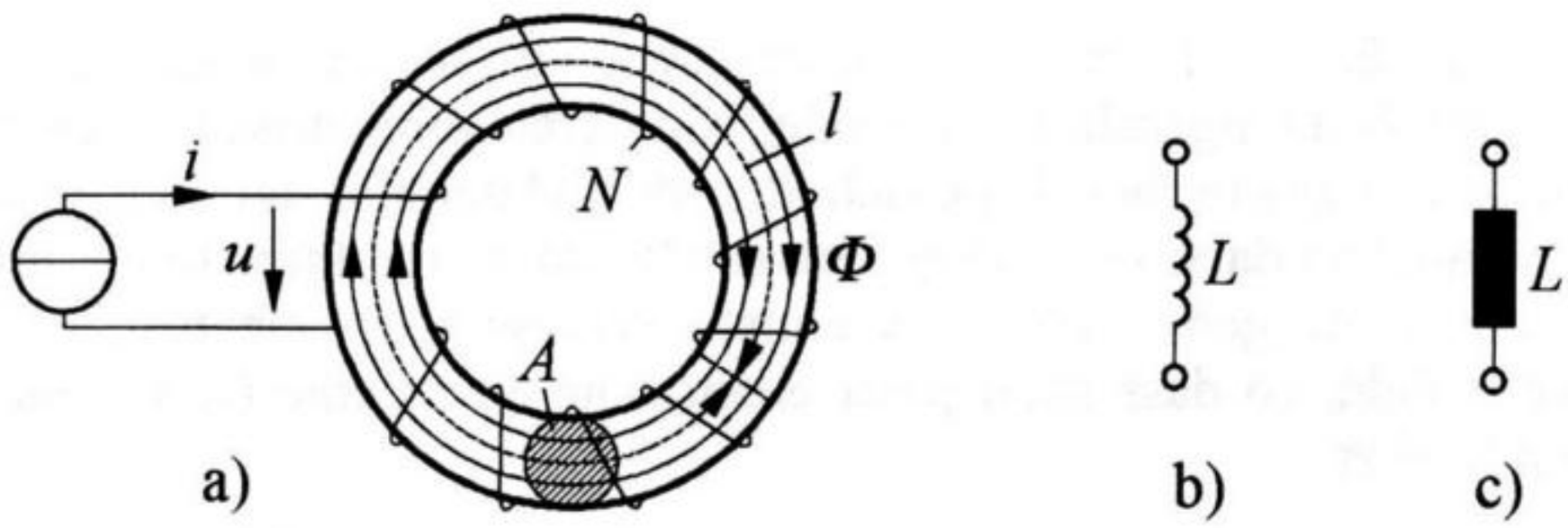


Bild 5.34 Zur Erläuterung der Selbstinduktion. a) Stromführende Ringspule, b) und c) für eine Spule oder eine Induktivität verwendete Schaltzeichen

Ändert man den eingespeisten Strom i , so ändert sich auch der vom Strom erzeugte magnetische Fluss Φ. Hierdurch kommt es zu einer Spannungsinduktion in der Spule. Man bezeichnet diese Erscheinung als **Selbstinduktion** und die induzierte Spannung als **Selbstinduktionsspannung**. Vernachlässigen wir in Bild 5.34a den Drahtwiderstand (Wirkwiderstand) der Spule, so ist die Selbstinduktionsspannung gleich der an der Spule anliegenden Spannung u. Die Richtungen der in Bild 5.34a für Φ und für u eingetragenen Bezugspfeile entsprechen der Darstellung nach Bild 5.32a. Daher gilt nach Gl. (5.58)

$$u = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{5.60}$$

Gehen wir für die folgenden Betrachtungen von der Voraussetzung aus, dass die Spule kein ferromagnetisches Material enthält, so sind der Strom i und der Fluss Φ nach Gl. (5.20) einander proportional. Daher können wir die in Gl. (5.60) angegebene Spannung auch in der Form

$$\boxed{u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}} \tag{5.61}$$

darstellen. Die hierin enthaltene Konstante L bezeichnet man **Selbstinduktivität** oder (kurz) als **Induktivität**. Ihre Einheit folgt aus Gl. (5.61) als Vs/A. Hierfür verwendet man auch die Bezeichnung **Henry** (Abkürzung: H). Es gilt also

$$[L] = \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}} = \mathrm{Henry} = \mathrm{H}. \tag{5.62}$$

Die Selbstinduktionsspannung u in Bild 5.34a ist nach Gl. (5.61) bei steigendem Strom positiv. Das bedeutet, dass die Spannung eine Zunahme des Stromes zu verhindern sucht. Bei fallendem Strom ändert die Spannung ihre Polarität. Jetzt wirkt sie einer Abnahme des Stromes entgegen. Die Selbstinduktionsspannung ist also - in Übereinstimmung mit der Lenz'schen Regel - stets so gerichtet, dass sie eine *Stromänderung* zu verhindern sucht. Bei zeitlich konstantem Strom tritt keine Selbstinduktionsspannung auf.

Die Induktivität L stellt eine charakteristische Größe von Spulen dar. L ist abhängig von der Windungszahl einer Spule, von deren geometrischen Abmessungen sowie von den magnetischen Eigenschaften des Materials, das sich in der Spule befindet. Ergänzend dazu sei jedoch festgestellt, dass eine Induktivität nicht unbedingt an eine Spule gebunden ist. Vielmehr erzeugt jeder elektrische Strom ein magnetisches Feld, so dass auch jeder elektrische Kreis eine (wenn auch kleine) Induktivität besitzt.

Wir wollen uns jetzt mit der Frage der Berechnung von Induktivitäten befassen. Dazu setzen wir die Gln. (5.60) und (5.61) gleich und lösen die sich ergebende Beziehung nach L auf. Es ergibt sich

$$L = N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i}. \tag{5.63}$$

Diese Gleichung ermöglicht die rechnerische Bestimmung der Induktivität einer Anordnung jedoch nur für bestimmte (einfache) geometrische Formen. Als Beispiel soll die Induktivität der in Bild 5.34a dargestellten Ringspule berechnet werden. Enthält diese, wie vorausgesetzt, kein ferromagnetisches Material, so sind die Größen i und Φ bekanntlich einander proportional. Das bedeutet, dass Gl. (5.63) in der Form

$$L = N \frac{\Phi}{i} \tag{5.64}$$

dargestellt werden kann. Weiterhin gilt nach Gl. (5.20)

$$i\,N = \Phi \frac{l}{\mu A}. \tag{5.65}$$

Dabei sind A der Ringquerschnitt, l der mittlere Ringumfang und μ die Permeabilität. Lösen wir Gl. (5.65) nach Φ auf und setzen das Ergebnis in Gl. (5.64) ein, so erhalten wir die gesuchte Induktivität der Ringspule als

$$\boxed{L = N^2 \frac{\mu A}{l}.} \tag{5.66}$$

Berücksichtigen wir noch, dass nach Gl. (5.23)

$$\Lambda = \frac{\mu A}{l}$$

den **magnetischen Leitwert** darstellt und nach Gl. (5.21)

$$R_{\mathrm{m}} = \frac{l}{\mu A}$$

den **magnetischen Widerstand**, so kann die Induktivität auch in der Form

$$\boxed{L = N^2 \Lambda = N^2 \frac{1}{R_{\mathrm{m}}}} \tag{5.67}$$

angegeben werden.

Enthält die Spule ferromagnetisches Material, so ist die Permeabilität μ nicht konstant, sondern abhängig vom Magnetisierungszustand des Spulenkerns. Entsprechend ist dann auch die Spuleninduktivität L keine konstante Größe mehr. Für diesen Fall können wir Gl. (5.63) in der Form

$$L = N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i} = N \frac{A\,\mathrm{d}B}{\mathrm{d}i} = N A \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H} \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}i}. \tag{5.68}$$

darstellen. Dabei sind B die in der Spule vorhandene Flussdichte und H die zugehörige Feldstärke. Nach Gl. (5.1) gilt weiterhin

$$H = \frac{i N}{l}.$$

Hieraus folgt, wenn wir die Gleichung nach i differenzieren,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}i} = \frac{N}{l}. \tag{5.69}$$

Wir setzen Gl. (5.69) in Gl. (5.68) ein und erhalten

$$L = N^2 \frac{A}{l} \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}. \tag{5.70}$$

Bezeichnen wir

$$\mu_{\mathrm{dif}} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}H}$$

als **differenzielle Permeabilität**, so gilt für die Induktivität der Ringspule nach Bild 5.34a

$$L = N^2 \frac{\mu_{\text{dif}}\, A}{l}.$$

$\mu_{\text{dif}} = \mathrm{d}B/\mathrm{d}H$ stellt die *Steilheit* der Magnetisierungskennlinie dar. Die Steilheit ist, wie auch Bild 5.15b zeigt, zum einen von der Höhe der vorhandenen Feldstärke abhängig, zum anderen aber auch von der Vorgeschichte, von den Feldstärkewerten also, die vorher aufgetreten sind.

Vergleicht man Eisenkernspulen mit eisenlosen Spulen, so kann man bezüglich ihrer Induktivität folgende Feststellungen treffen:

1. Eisenkernspulen haben bei gleicher Größe und gleicher Windungszahl gegenüber eisenlosen Spulen in der Regel eine um mehrere Zehnerpotenzen höhere Induktivität.

2. Die Induktivität von Eisenkernspulen ist im Gegensatz zu der von eisenlosen Spulen nicht konstant, sondern abhängig vom Spulenstrom. Die bei größeren Strömen auftretende magnetische Eisensättigung kann dazu führen, dass die Induktivität gegenüber dem ungesättigten Zustand um mehrere Zehnerpotenzen kleiner wird.

Abschließend sei noch erwähnt, dass zur Darstellung von Induktivitäten oder Spulen die in Bild 5.34b oder in Bild 5.34c angegebenen Schaltzeichen verwendet werden.

Aufgabe 5.13

Eine Ringspule mit dem mittleren Ringumfang $l = 30$ cm besteht aus $N = 1000$ Windungen. Die mittlere von einer Windung eingeschlossene Fläche beträgt $A = 6\ \text{cm}^2$. Die Spule enthält kein ferromagnetisches Material, so dass die Permeabilitätszahl $\mu_r = 1$ ist.

Wie groß ist die Induktivität L der Spule?

Lösung

Nach Gl. (5.66) ergibt sich die Induktivität der Spule bei $\mu_r = 1$ als

$$L = N^2 \frac{\mu_0\, A}{l} = 1000^2 \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 6 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}{0{,}3\ \text{m}} = 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{H} = \underline{2{,}5\ \text{mH}}.$$

Aufgabe 5.14

Auf dem in Bild 5.35 dargestellten Eisenkern (mit Luftspalt) ist eine Spule aufgebracht, die aus $N = 300$ Windungen besteht. Die Luftspaltlänge soll so gewählt werden, dass die Induktivität der Spule $L = 300$ mH wird. Für die Berechnung kann die Permeabilitätszahl des Eisen als $\mu_r = 2500$ angenommen werden.

Welche Luftspaltlänge l_L ist auf beiden Seiten des Eisenkerns vorzusehen?

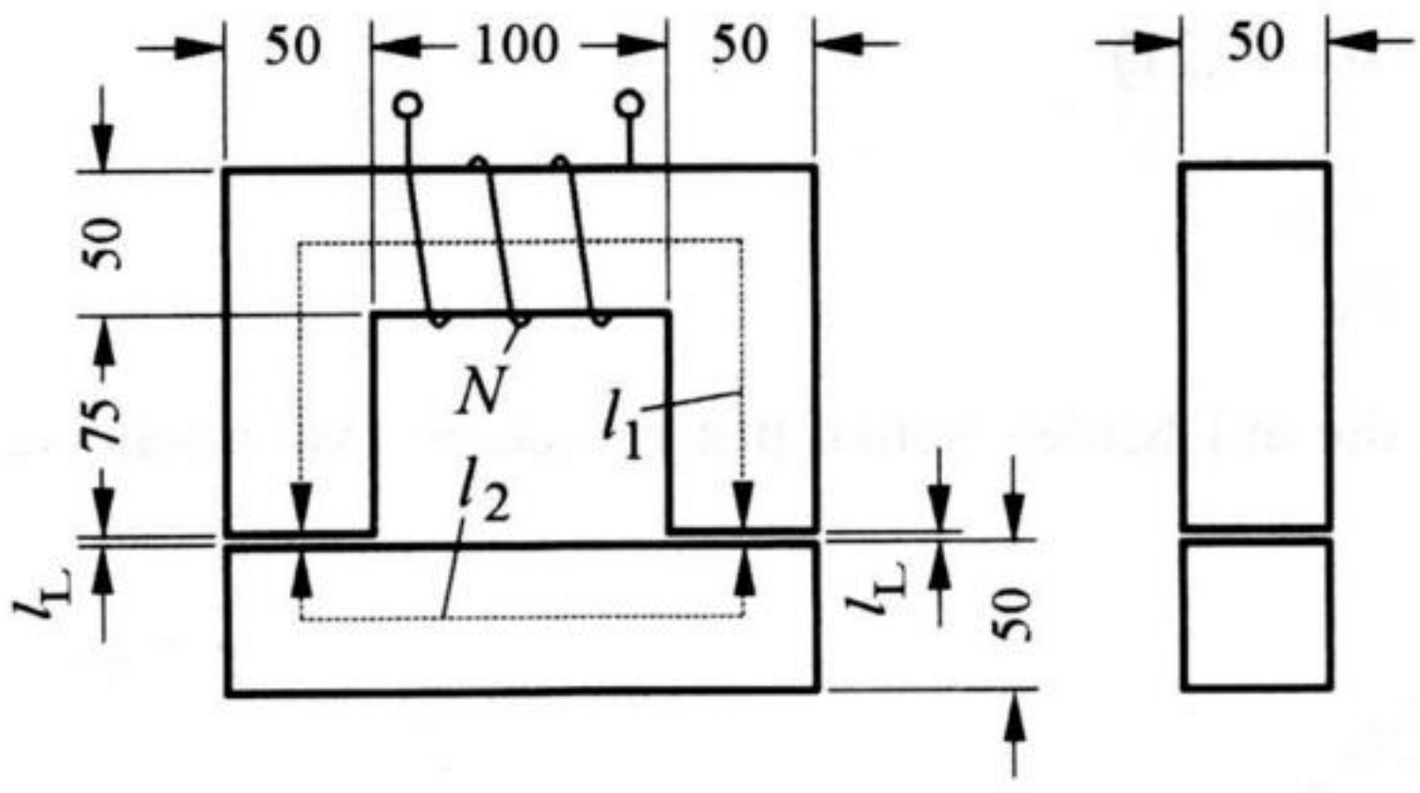


Bild 5.35 Spule mit Eisenkern (Maße in mm)

Lösung

Zur Erzielung der geforderten Induktivität muss der magnetische Kreis nach Gl. (5.67) den magnetischen Widerstand

$$R_m = \frac{N^2}{L} = \frac{300^2}{0{,}3\ \mathrm{H}} = 3 \cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{H}}$$

haben. Er wird durch den magnetischen Widerstand des Eisens (R_{mE}) und den der beiden Luftspalte (R_{mL}) gebildet. Für den magnetischen Widerstand des Eisens finden wir bei dem Querschnitt

$$A = 50 \cdot 50\ \mathrm{mm}^2 = 2500\ \mathrm{mm}^2$$

und dem sich aus Bild 5.35 ergebenden mittleren Kernumfang

$$l_E = l_1 + l_2 = 350\ \mathrm{mm} + 200\ \mathrm{mm} = 550\ \mathrm{mm}$$

nach Gl. (5.21)

$$R_{\mathrm{mE}} = \frac{l_{\mathrm{E}}}{\mu_0\,\mu_{\mathrm{r}}\,A} = \frac{0{,}55\,\mathrm{m}}{4\pi\cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)}\cdot 2500\cdot 25\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2} = 7\cdot 10^4\ \frac{1}{\mathrm{H}}.$$

Damit müssen die beiden Luftspalte insgesamt einen magnetischen Widerstand von

$$R_{\mathrm{mL}} = R_{\mathrm{m}} - R_{\mathrm{mE}} = 3\cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{H}} - 7\cdot 10^4\ \frac{1}{\mathrm{H}} = 2{,}3\cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{H}}$$

haben. Da nach Gl. (5.21)

$$R_{\mathrm{mL}} = \frac{2\,l_{\mathrm{L}}}{\mu_0\,A}$$

ist, ergibt sich die auf beiden Seiten des Eisenkerns vorzusehende Luftspaltlänge als

$$l_{\mathrm{L}} = \frac{R_{\mathrm{mL}}\,\mu_0\,A}{2} = \frac{2{,}3\cdot 10^5\ \frac{1}{\mathrm{H}}\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 25\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{2} = \underline{0{,}36\ \mathrm{mm}}.$$

Aufgabe 5.15

Eine Spule mit der Induktivität L = 100 mH und einem vernachlässigbar kleinen Widerstand führt nach Bild 5.36a einen zeitlich veränderlichen Strom mit dem in Bild 5.36b dargestellten Verlauf.

Es ist der zeitliche Verlauf der an der Spule liegenden Spannung u zu bestimmen und grafisch darzustellen.

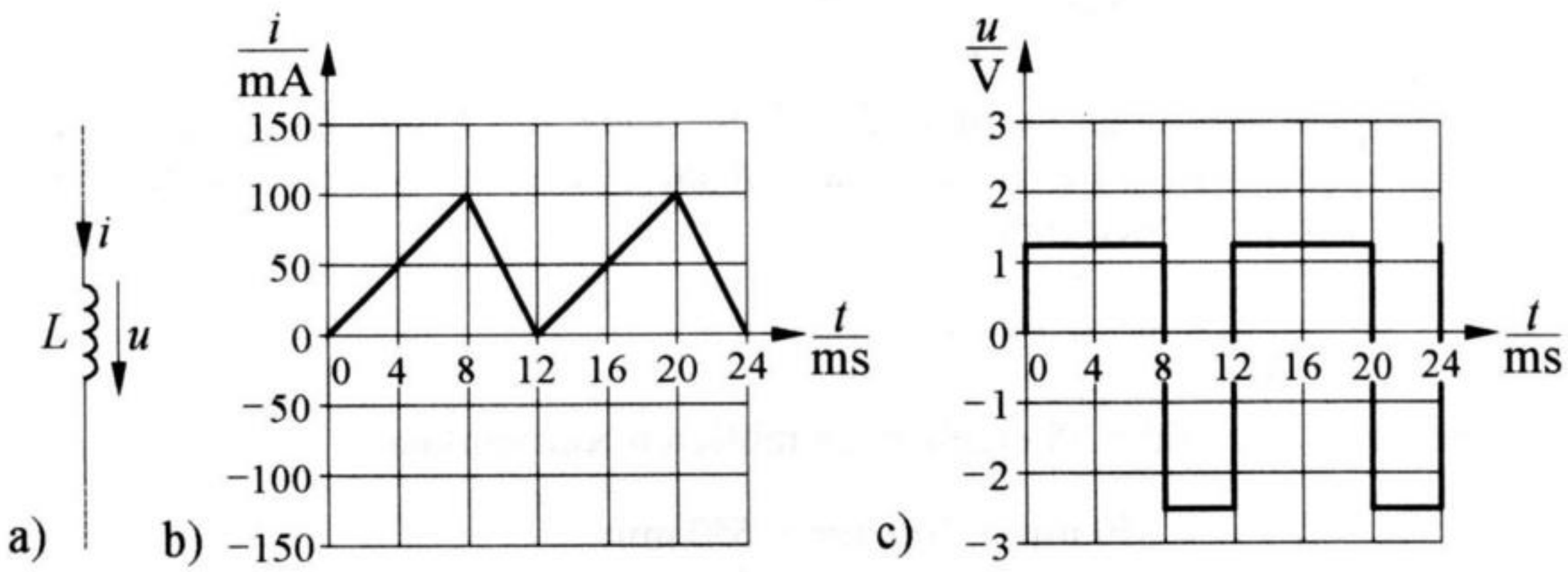


Bild 5.36 Strom- und Spannungsverlauf bei einer Spule. a) Schaltsymbol mit eingetragenen Bezugspfeilen, b) vorgegebener Stromverlauf, c) auftretender Spannungsverlauf

Lösung

Die an der Spule liegende Spannung ergibt sich nach Gl. (5.61) aus

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Nach Bild 5.36b steigt der Strom im Zeitbereich $0 < t < 8$ ms linear von 0 auf 100 mA an, so dass während dieser Zeit an der Spule die Spannung

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0{,}1\,\mathrm{H}\,\frac{100\,\mathrm{mA}}{8\,\mathrm{ms}} = 1{,}25\,\mathrm{V}$$

liegt. Im anschließenden Zeitbereich $8\,\mathrm{ms} < t < 12\,\mathrm{ms}$ fällt der Strom wieder auf Null ab. Hier gilt für die Spannung

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0{,}1\,\mathrm{H}\,\frac{(-100\,\mathrm{mA})}{4\,\mathrm{ms}} = -2{,}5\,\mathrm{V}.$$

Danach wiederholen sich die Vorgänge. Für die gesuchte Spannung ergibt sich somit der in Bild 5.36c dargestellte Verlauf.

5.10 Die gegenseitige Induktion

Befindet sich in der Nähe einer stromführenden Spule eine zweite Spule, so verläuft ein Teil des von der ersten Spule erzeugten magnetischen Flusses auch durch die andere Spule. Man bezeichnet die Spulen dann als **magnetisch gekoppelt**. Ändert sich der in der ersten Spule fließende Strom, so tritt nicht nur in dieser die in Abschnitt 5.9 beschriebene Selbstinduktionsspannung auf, sondern es wird auch in der anderen Spule eine Spannung induziert. Diese Erscheinung bezeichnet man als **gegenseitige Induktion**. Zur weiteren Erläuterung betrachten wir den in Bild 5.37 dargestellten Ringkern, auf dem zwei Spulen (1 und 2) mit den Windungszahlen N_1 und N_2 aufgebracht sind.

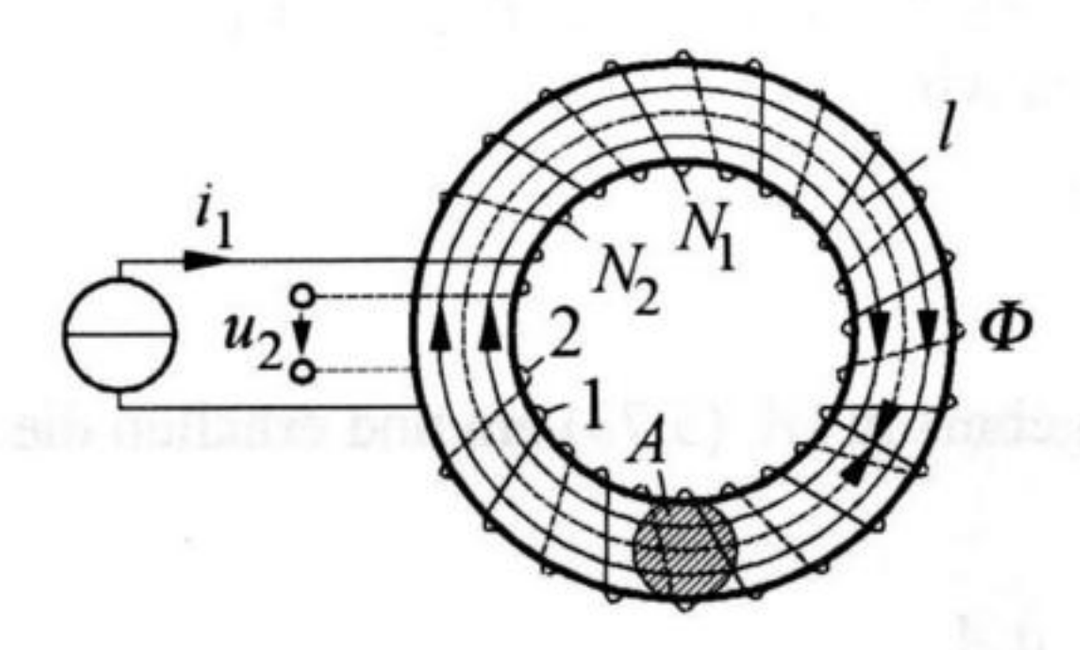


Bild 5.37 Ringkern mit zwei Spulen (zur Erläuterung der gegenseitigen Induktion)

Wir setzen voraus, dass die Windungen dicht beieinander liegen und gleichmäßig am Umfang verteilt sind. In diesem Fall ist die Annahme zulässig, dass der vom Strom i_1 erzeugte magnetische Fluss vollständig durch beide Spulen verläuft. Man spricht dann von einer **idealen Kopplung** der Spulen. Weiterhin wollen wir annehmen, dass der Ringkern kein ferromagnetisches Material enthält.

Ändert sich der Strom i_1, so ist damit auch eine entsprechende Änderung des magnetischen Flusses Φ verbunden. Folglich wird nach Gl. (5.58) in der Spule 2 eine Spannung

$$u_2 = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{5.71}$$

induziert. Da Φ und i_1 einander proportional sind, können wir Gl. (5.71) auch in der Form

$$u_2 = L_{12} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{5.72}$$

darstellen. Die hierin enthaltene Größe L_{12} bezeichnet man als **gegenseitige Induktivität**. Sie hat die gleiche Einheit wie die Induktivität, also die Einheit Henry (Abkürzung: H).

Wir wollen uns jetzt mit der Frage der Berechnung der gegenseitigen Induktivität L_{12} befassen. Dazu setzen wir die Gln. (5.71) und (5.72) gleich und lösen die sich ergebende Beziehung nach L_{12} auf. Es ergibt sich

$$L_{12} = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i_1}. \tag{5.73}$$

Weiterhin gilt in Bild 5.37 nach Gl. (5.20)

$$i_1 N_1 = \Phi \frac{l}{\mu A}. \tag{5.74}$$

Hierbei sind A der Ringquerschnitt, l der mittlere Ringumfang und μ die Permeabilität. Lösen wir Gl. (5.74) nach Φ auf, und differenzieren wir die Gleichung dann nach i_1, so finden wir

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}i_1} = N_1 \frac{\mu A}{l}. \tag{5.75}$$

Wir setzen dieses Ergebnis in Gl. (5.73) ein und erhalten die gesuchte gegenseitige Induktivität als

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu A}{l}. \tag{5.76}$$

Nehmen wir jetzt an, dass in der Spule 2 nach Bild 5.37 ein zeitlich veränderlicher Strom i_2 fließt, so können wir die in der Spule 1 induzierte Spannung entsprechend Gl. (5.72) in der Form

$$u_1 = L_{21} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

darstellen. Berechnen wir L_{21} in der gleichen Weise wie L_{12} , so finden wir das gleiche Ergebnis. Es gilt also mit $L_{21} = L_{12}$

$$\boxed{L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu A}{l}.} \tag{5.77}$$

Die Gleichung gilt nur unter der Voraussetzung, dass beide Spulen, wie vorausgesetzt, magnetisch *ideal gekoppelt* sind.

Allgemein ist die gegenseitige Induktivität L_{12} eine zwei magnetisch gekoppelten Spulen zugeordnete Größe. L_{12} ist abhängig von den Abmessungen und den Windungszahlen der Spulen, von den magnetischen Eigenschaften des Raumes und von der Art der Kopplung.

Aufgabe 5.16

Ein Ringkern aus Kunststoff (Permeabilitätszahl $\mu_r = 1$) enthält nach Bild 5.37 zwei gleichmäßig am Umfang verteilte Spulen mit den Windungszahlen $N_1 = 800$ und $N_2 = 500$. Die mittlere von einer Windung eingeschlossene Fläche beträgt $A = 7{,}5\ \mathrm{cm}^2$, der mittlere Ringumfang $l = 25$ cm.

a) Welche gegenseitige Induktivität L_{12} besteht zwischen den Spulen, wenn diese als magnetisch ideal gekoppelt angesehen werden?

b) Die Spule mit der Windungszahl N_1 werde von einem Strom i_1 mit dem in Bild 5.38a dargestellten zeitlichen Verlauf durchflossen. Die dabei in der anderen Spule induzierte Spannung u_2 ist zu ermitteln und grafisch darzustellen.

Lösung

a) Die zwischen den Spulen bestehende gegenseitige Induktivität beträgt bei $\mu_r = 1$ nach Gl. (5.77)

$$L_{12} = N_1 N_2 \frac{\mu_0 A}{l} = 800 \cdot 500 \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{Vs/(Am)} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2}{0{,}25\ \mathrm{m}} = \underline{1{,}5\ \mathrm{mH}}.$$

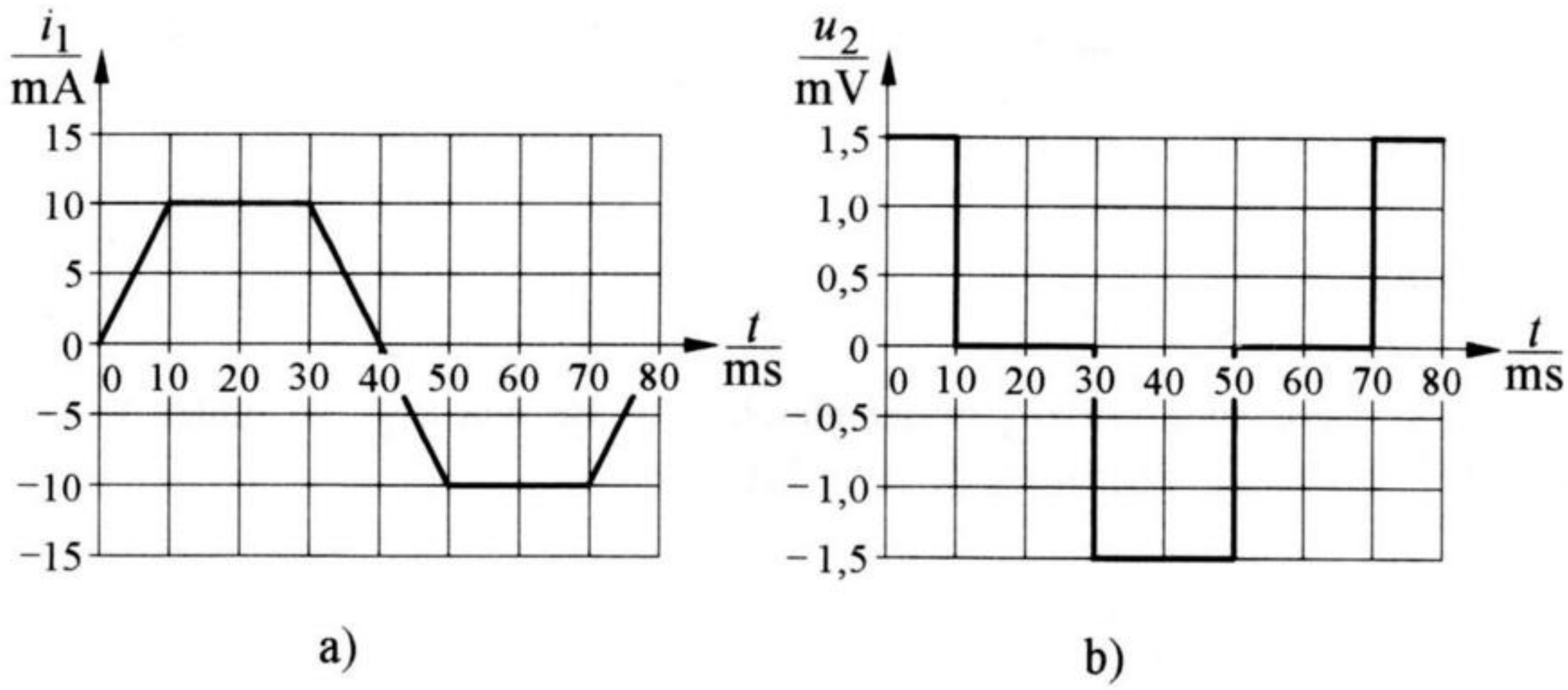


Bild 5.38 Zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung bei magnetisch gekoppelten Spulen. a) Vorgegebener Stromverlauf, b) auftretender Spannungsverlauf

b) Die gesuchte Spannung lässt sich mit Hilfe von Gl. (5.72) abschnittsweise ermitteln. Im Zeitbereich $0 < t < 10$ ms steigt der Strom nach Bild 5.38a linear von 0 auf 10 mA an. Hier gilt

$$u_2 = L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}\cdot\frac{10\ \mathrm{mA}}{10\ \mathrm{ms}} = 1{,}5\ \mathrm{mV}.$$

Im Bereich 10 ms $< t <$ 30 ms ändert sich der Strom nicht, so dass auch $u_2 = 0$ ist. Im Bereich 30 ms $< t <$ 40 ms fällt der Strom wieder auf Null ab. Hier gilt

$$u_2 = L_{12}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 1{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}\cdot\frac{(-10\ \mathrm{mA})}{10\ \mathrm{ms}} = -1{,}5\ \mathrm{mV}.$$

Die Werte ergeben den in Bild 5.38b dargestellten Spannungsverlauf.

5.11 Die Energie des magnetischen Feldes

In jeder stromführenden Spule ist Energie gespeichert. Diese befindet sich jedoch nicht in der Spule selbst, sondern im **magnetischen Feld**, das von der stromführenden Spule erzeugt wird. Verallgemeinert bedeutet dies, dass in *jedem* Magnetfeld Energie gespeichert ist. Zur Berechnung dieser Energie betrachten wir eine Ringspule, die nach Bild 5.39a mit einer Spannungsquelle verbunden wird. Der Widerstand der Spule sei vernachlässigbar.

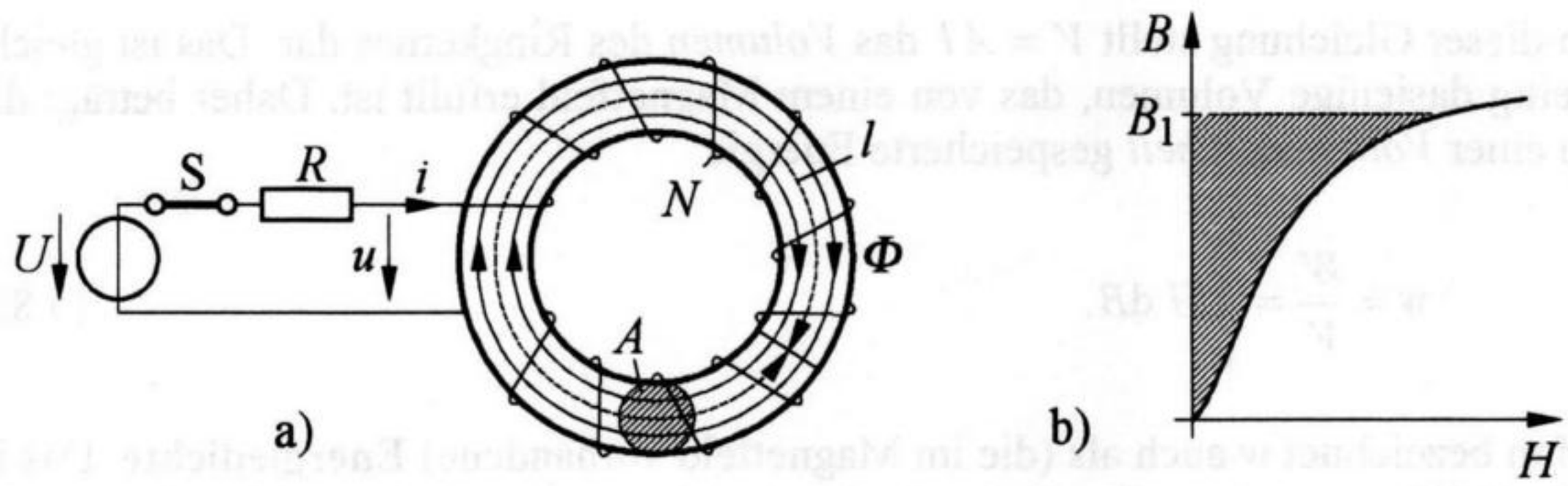


Bild 5.39 Zur Berechnung der im Magnetfeld gespeicherten Energie.
a) Ringspule, b) Magnetisierungskennlinie des Spulenkerns

Nach dem Schließen des Schalters S wird der Spule innerhalb einer Zeit dt bei der anliegenden Spannung u und dem Strom i die Energie

$$\mathrm{d}W = u\,i\,\mathrm{d}t \tag{5.78}$$

zugeführt und im Magnetfeld gespeichert. Bei vernachlässigbarem Spulenwiderstand besteht zwischen der anliegenden Spannung u und dem in der Spule auftretenden Fluss Φ nach Gl. (5.60) die Beziehung

$$u = N\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N\,A\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}. \tag{5.79}$$

Hierbei stellen N die Windungszahl der Spule, A den Ringquerschnitt und B die magnetische Flussdichte dar. Weiterhin gilt für die betrachtete Ringspule nach Gl. (5.19)

$$i = \frac{H\,l}{N}. \tag{5.80}$$

H ist die magnetische Feldstärke und l der mittlere Ringumfang. Setzen wir die Gln. (5.79) und (5.80) in Gl. (5.78) ein, so ergibt sich

$$\mathrm{d}W = N\,A\,\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\,\frac{H\,l}{N}\,\mathrm{d}t = A\,l\,H\,\mathrm{d}B. \tag{5.81}$$

Beim Aufbau des in der Spule vorhandenen Magnetfeldes steigt die Flussdichte von $B = 0$ auf einen bestimmten Wert $B = B_1$ an. Folglich beträgt die der Spule zugeführte, im Magnetfeld gespeicherte Energie insgesamt

$$W = \int_0^{B_1} A\,l\,H\,\mathrm{d}B = V\int_0^{B_1} H\,\mathrm{d}B. \tag{5.82}$$

In dieser Gleichung stellt $V = A\,l$ das *Volumen* des Ringkernes dar. Das ist gleichzeitig dasjenige Volumen, das von einem Magnetfeld erfüllt ist. Daher beträgt die in einer *Volumeneinheit* gespeicherte Energie

$$w = \frac{W}{V} = \int_0^{B_1} H\,\mathrm{d}B. \tag{5.83}$$

Man bezeichnet w auch als (die im Magnetfeld vorhandene) **Energiedichte**. Das in Gl. (5.83) angegebene Ergebnis gilt dabei nicht nur für die betrachtete Ringspule, sondern ist allgemein gültig.

Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass der Spulenkern aus *ferromagnetischem Material* besteht, so wird die Energiedichte w durch die in Bild 5.39b schraffiert dargestellte, zwischen der Magnetisierungskennlinie und der Ordinatenachse liegende Fläche wiedergegeben.

Besteht der Kern aus *nichtferromagnetischem Material*, so ist die Permeabilität konstant. In diesem Fall wird mit $H = B/\mu_0$ aus Gl. (5.83)

$$w = \int_0^{B_1} \frac{B}{\mu_0}\,\mathrm{d}B = \frac{1}{\mu_0}\int_0^{B_1} B\,\mathrm{d}B = \frac{{B_1}^2}{2\,\mu_0}.$$

Ersetzen wir B_1 wieder durch B, so gilt für die Energiedichte

$$\boxed{w = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0\,H^2 = \frac{1}{2}\,H\,B.} \tag{5.84}$$

Die in einem beliebigen Volumen V eines Magnetfeldes gespeicherte Energie können wir allgemein durch

$$\boxed{W = \int_V w\,\mathrm{d}V}$$

darstellen.

Wir wollen jetzt von der Voraussetzung ausgehen, dass die *Induktivität* L der Spule nach Bild 5.39a bekannt sei. In diesem Fall lässt sich die in Gl. (5.79) angegebene, beim Aufbau des Magnetfeldes an der Spule liegende Spannung nach Gl. (5.61) in der Form

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

ausdrücken. Damit wird aus Gl. (5.78)

$$\mathrm{d}W = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,i\,\mathrm{d}t = L\,i\,\mathrm{d}i.$$

Beim Aufbau des Magnetfeldes steigt der in der Spule nach Bild 5.39a fließende Strom von $i = 0$ auf $i = U/R = I$. Daher beträgt die der Spule zugeführte und somit im Magnetfeld gespeicherte Energie

$$W = \int_0^I L\,i\,\mathrm{d}i. \tag{5.85}$$

Enthält die Spule kein ferromagnetisches Material, so ist L konstant, und aus Gl. (5.85) ergibt sich die gespeicherte Energie als

$$W = L\int_0^I i\,\mathrm{d}i = L\left.\frac{i^2}{2}\right|_0^I.$$

Setzen wir die Grenzen ein, so ergibt sich

$$\boxed{W = \frac{1}{2}L\,I^2.} \tag{5.86}$$

Bei Eisenkernspulen kann die Induktivität nur unter der Voraussetzung, dass das Eisen nicht magnetisch gesättigt ist, als annähernd konstant angesehen werden. Daher wird die gespeicherte Energie auch nur unter dieser Voraussetzung mit guter Annäherung durch Gl. (5.86) wiedergegeben.

Aufgabe 5.17

Eine Spule mit der Induktivität $L = 50$ mH führt den Strom $I = 10$ A.

Welche Energie W ist im Magnetfeld der Spule gespeichert?

Lösung

Die gespeicherte Energie beträgt nach Gl. (5.86)

$$W = \frac{1}{2}L\,I^2 = \frac{1}{2}\cdot 50\cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}\cdot(10\ \mathrm{A})^2 = \underline{2{,}5\ \mathrm{J}}.$$

5.12 Kräfte an Grenzflächen

Tritt ein magnetischen Fluss von einem Medium in ein anderes über, so wird - bei unterschiedlich großer Permeabilität der Stoffe - auf die Grenzfläche eine Kraft ausgeübt. Sie wirkt stets zum Medium mit der kleineren Permeabilität. So werden zum Beispiel Eisenkörper in Magnetfelder hineingezogen. Zur weiteren Erläuterung betrachten wir die Anordnung nach Bild 5.40, in der sich die beiden Eisenteile infolge der beschriebenen Ursache gegenseitig anziehen. Für die nachstehenden Untersuchungen wollen wir die Permeabilitätszahl des Eisens als sehr groß (unendlich groß) ansehen.

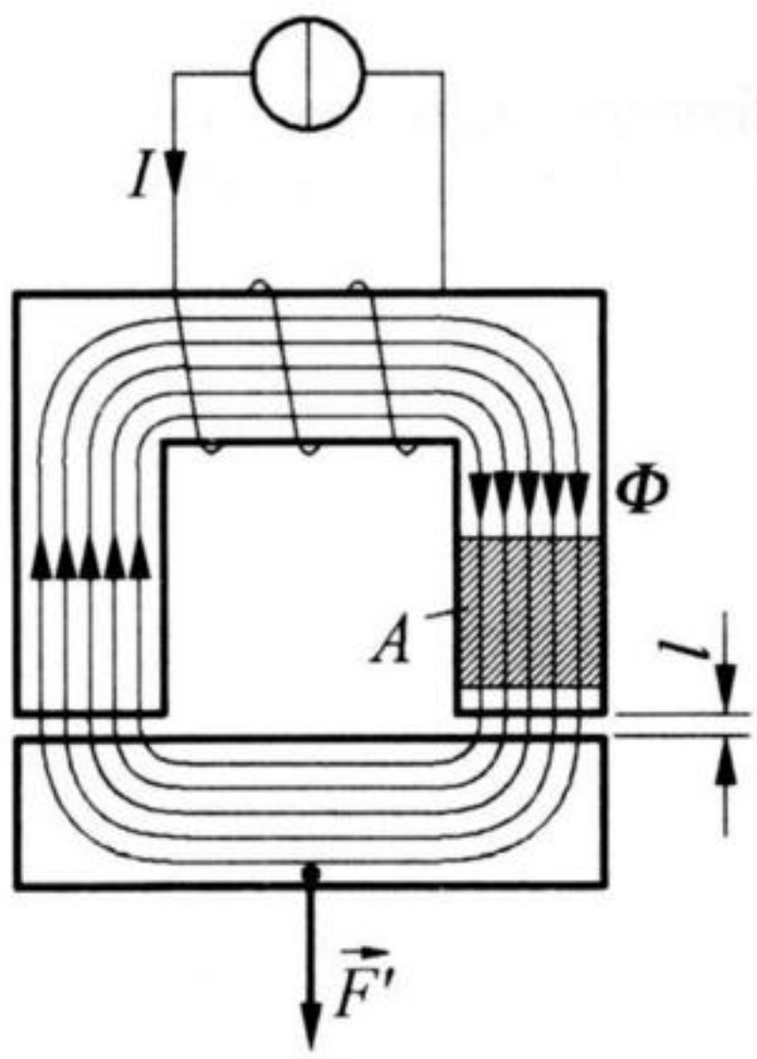


Bild 5.40 Zur Berechnung der an Grenzflächen auftretenden Kräfte

Ist die Luftspaltlänge l klein gegenüber den Abmessungen des Eisenquerschnittes A, so können wir davon ausgehen, dass sich der magnetische Fluss Φ im Luftspalt gleichmäßig auf die Fläche A verteilt.

Wir wollen uns jetzt mit der Frage befassen, welche Kraft beide Eisenteile in Bild 5.40 aufeinander ausüben. Dazu nehmen wir an, dass durch Einwirken einer äußeren Kraft $\vec{F}'$ die Luftspaltlänge um $\mathrm{d}l$ vergrößert wird. Gleichzeitig möge der Spulenstrom I so nachgestellt werden, dass der im Kreis vorhandene magnetische Fluss Φ unverändert bleibt. Unter dieser Voraussetzung wird bei der Luftspaltvergrößerung, wenn wir eine verlustfreie Spule voraussetzen, von der Stromquelle keine Energie an die Spule geliefert, da keine Selbstinduktionsspannung auftritt. Bei unendlich großer Permeabilität des Eisens ist nach Gl. (5.82) in Verbindung mit Gl. (5.7) im Eisenraum keine Energie gespeichert. Folglich muss die bei der Luftspaltvergrößerung von außen zugeführte mechanische Energie

$$\mathrm{d}W = F' \,\mathrm{d}l \tag{5.87}$$

gleich der Zunahme der im Luftspaltvolumen gespeicherten magnetischen Feldenergie sein. Die im Luftspalt vorhandene Energiedichte beträgt bei der Flussdichte B nach Gl. (5.84)

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Durch die Vergrößerung der Luftspaltlänge l in Bild 5.40 nimmt das Luftspaltvolumen auf beiden Seiten um insgesamt $\mathrm{d}V = 2\,A\,\mathrm{d}l$ zu. Daher beträgt die Zunahme der im Luftspalt gespeicherten Energie

$$\mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}V = \frac{B^2}{2\mu_0} 2\,A\,\mathrm{d}l. \tag{5.88}$$

Setzen wir die Gln. (5.87) und (5.88) gleich, so finden wir die Kraft, mit der sich die beiden Eisenteile in Bild 5.40 anziehen, als

$$F' = \frac{B^2}{2\mu_0} 2A. \tag{5.89}$$

Die auf jeder Seite auftretende Kraft beträgt damit

$$\boxed{F = \frac{B^2}{2\mu_0} A.} \tag{5.90}$$

Die zwischen zwei Magnetpolen wirkende Anziehungskraft ist also zum einen der Polfläche A und zum anderen dem Quadrat der Flussdichte B proportional. Führen wir den magnetischen Fluss $\Phi = B\,A$ ein, so wird aus Gl. (5.90)

$$\boxed{F = \frac{\Phi^2}{2\mu_0 A}.} \tag{5.91}$$

Aufgabe 5.18

Der in Bild 5.41 dargestellte Elektromagnet enthält einen Eisenkern aus Stahlguss mit der in Bild 5.19 (Seite 161) angegebenen Magnetisierungskennlinie. Auf dem Kern ist eine Spule aufgebracht, die aus $N = 450$ Windungen besteht. Die auf beiden Seiten des Magneten vorhandene Luftspaltlänge betrage $l_\mathrm{L} = 0{,}5$ mm. Der Anker (2) soll mit der Kraft $F = 2000$ N angezogen werden.

Welcher Strom I muss in der Spule fließen?

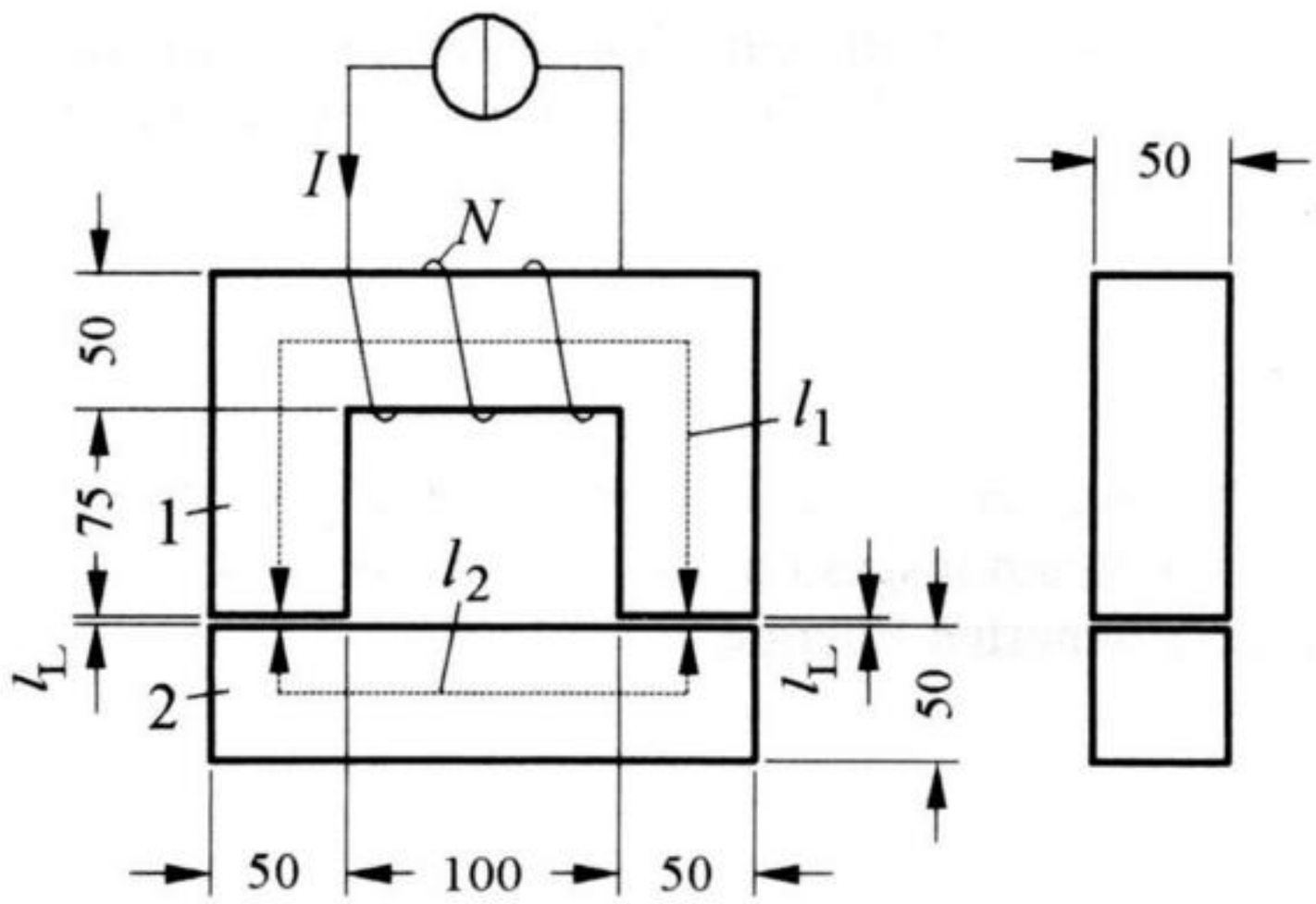


Bild 5.41 Elektromagnet. 1 Kern, 2 Anker (Maße in mm)

Lösung

Für die vom Magnetkern (1) auf den Anker (2) ausgeübte Gesamtkraft gilt nach Gl. (5.90), wenn wir berücksichtigen, dass der Magnet *zwei* Pole (zwei Seiten) hat,

$$F = 2 \cdot \frac{B^2}{2\mu_0} A.$$

Bei einer Luftspaltfläche (Polfläche) von $A = 50 \cdot 50\ \text{mm}^2 = 2500\ \text{mm}^2$ muss die im Luftspalt erforderliche Flussdichte somit

$$B = \sqrt{\frac{F\,\mu_0}{A}} = \sqrt{\frac{2000\ \text{N} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs}/(\text{Am})}{25 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2}} = 1{,}0\ \text{T}.$$

betragen. Die zugehörige magnetische Feldstärke wird nach Gl. (5.29)

$$H_\text{L} = \frac{B}{\mu_0} = \frac{1{,}0\ \text{T}}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{Vs}/(\text{Am})} = 8{,}0 \cdot 10^5\ \text{A/m}.$$

Im Eisen herrscht die gleiche Flussdichte wie im Luftspalt. Die im Eisen erforderliche magnetische Feldstärke entnehmen wir der Magnetisierungskennlinie in Bild 5.19 (Seite 161) für B = 1,0 T als H_E = 300 A/m. Durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes finden wir bei der sich aus Bild 5.41 ergebenden Eisenlänge $l_\text{E} = l_1 + l_2 = (350 + 200)$ mm den erforderlichen Strom als

$$I = \frac{H_\text{E} l_\text{E} + 2 H_\text{L} l_\text{L}}{N} = \frac{300\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0{,}55\ \text{m} + 2 \cdot 8{,}0 \cdot 10^5\,\frac{\text{A}}{\text{m}} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{m}}{450} = \underline{2{,}1\ \text{A}}.$$

6 Grundbegriffe der Wechselstromtechnik

6.1 Allgemeines über Wechselgrößen

Bei den bisher betrachteten Vorgängen wurde überwiegend vorausgesetzt, dass die auftretenden Größen (Spannung, Strom) zeitlich konstant sind. Große Bedeutung haben aber auch zeitlich veränderliche Größen, insbesondere *periodisch zeitabhängige* Größen. Letztere sind dadurch gekennzeichnet, dass sich die Art der Änderung periodisch wiederholt. Dies sei anhand von Bild 6.1 näher erläutert.

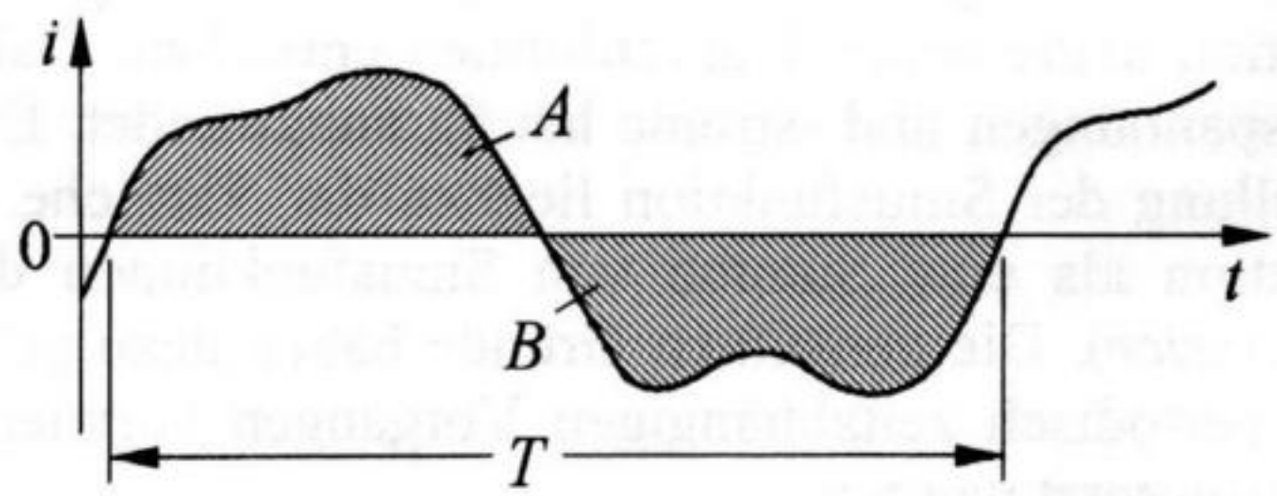


Bild 6.1 Darstellung eines periodisch zeitabhängigen Stromes

Die Darstellung zeigt die Abhängigkeit eines beliebig angenommenen Stromes i von der Zeit t. Man bezeichnet den in einem bestimmten Zeitpunkt vorhandenen Strom als **Augenblickswert** oder als **Momentanwert**. Die periodische Zeitabhängigkeit äußert sich darin, dass jeweils nach Ablauf einer bestimmten Zeit, der **Periodendauer** (T), der gleiche Augenblickswert auftritt. Es gilt also

$$i(t) = i(t+T) = i(t+nT).$$

Hierbei ist n eine beliebige ganze Zahl. Sind die Flächen A und B in Bild 6.1 gleich groß, ist also der zeitliche Mittelwert der Funktion gleich Null, so spricht man von einem **Wechselstrom**.

Entsprechend bezeichnet man eine periodisch zeitabhängige Spannung, deren Mittelwert gleich Null ist, als **Wechselspannung**. Wechselströme und Wechselspannungen nennt man (allgemein) **Wechselgrößen**. Zusammengefasst gilt somit:

Wechselgrößen sind dadurch gekennzeichnet, dass sich der Augenblickswert periodisch ändert und der zeitliche Mittelwert Null ist.

Ist bei einem periodisch zeitabhängigen Strom der Mittelwert nicht Null, so kann man die betreffende Größe als *Überlagerung* eines Gleich- und eines Wechselstromes auffassen. Man spricht dann auch von einem **Mischstrom**. Eine entsprechend verlaufende Spannung heißt **Mischspannung**. Mischströme und Mischspannungen nennt man (allgemein) **Mischgrößen**.

6.2 Sinusförmige Wechselgrößen und ihre Darstellung

Die angegebene Beschreibung einer Wechselgröße enthält keine Vorgaben für die Kurvenform. Sie kann somit beliebig sein. Das bedeutet aber nun nicht, dass wir der Kurvenform keine Beachtung zu schenken brauchen. Die Kurvenform ist im Gegenteil von großer Bedeutung.

Von allen denkbaren Kurvenformen haben sinusförmig verlaufende Funktionen eine wichtige Sonderstellung. Das rührt daher, dass nur bei ihnen sowohl bei der Addition von Funktionen - gleiche Periodendauer T vorausgesetzt - als auch bei deren Differentiation keine neuen Kurvenformen entstehen. Daher werden sinusförmige Wechselspannungen und -ströme häufig angewendet. Ein weiterer Grund für die Sonderstellung der Sinusfunktion liegt in der Tatsache, dass jede andere periodische Funktion als eine Summe von Sinusfunktionen dargestellt werden kann (Satz von *Fourier*). Die genannten Gründe haben dazu geführt, dass bei der Betrachtung von periodisch zeitabhängigen Vorgängen vorwiegend sinusförmige Änderungen vorausgesetzt werden.

Das Auftreten von sinusförmigen Wechselgrößen setzt eine sinusförmige Versorgungsspannung voraus. Zu deren Erzeugung eignet sich beispielsweise die in Bild 6.2a dargestellte Anordnung.

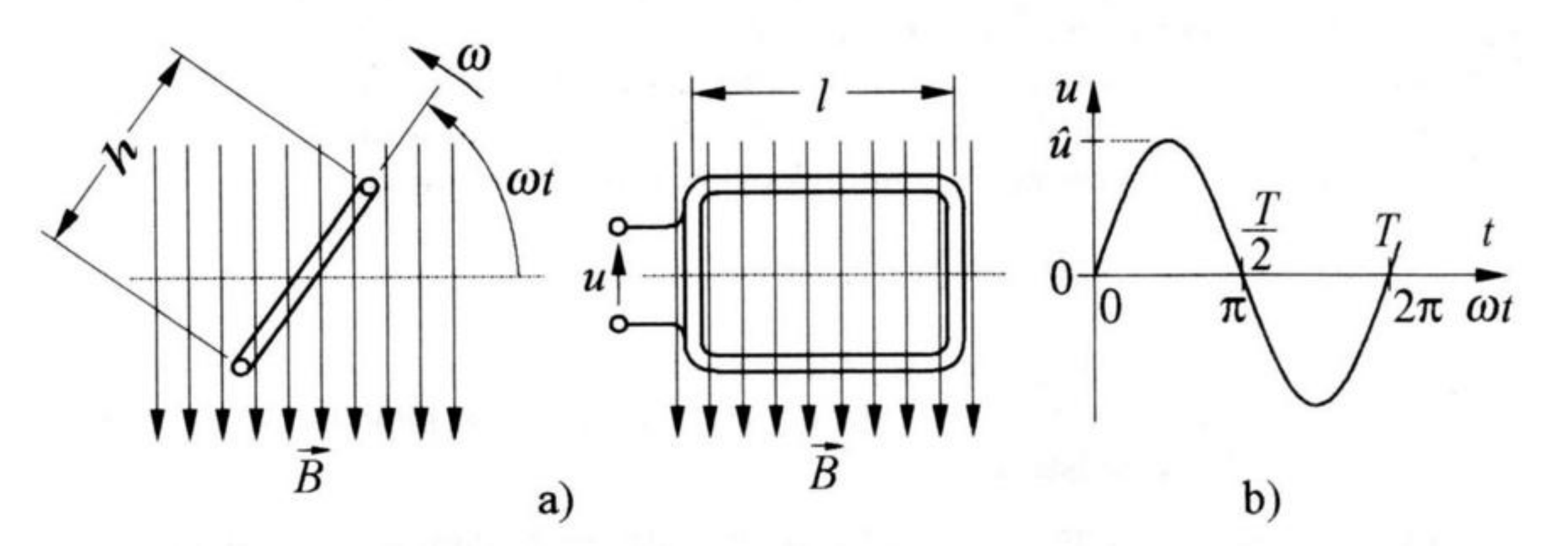


Bild 6.2 a) Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung,
b) zeitlicher Verlauf dieser Spannung

Eine Rechteckspule mit der Höhe h und der Länge l rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω in einem homogenen Magnetfeld der Flussdichte B. Ordnen wir

der waagerechten Lage der Spule den Zeitpunkt $t = 0$ zu, so bildet die Spule in einem beliebigen Zeitpunkt t, wie in Bild 6.2a dargestellt, mit der Waagerechten den Winkel ωt. In dieser Lage wird die Spule nach Gl. (5.10) von dem magnetischen Fluss

$$\Phi = B\,A = B\,h\,l \cos \omega t$$

durchsetzt. Nach dem Induktionsgesetz in der Form von Gl. (5.59) wird in der Spule, wenn diese aus N Windungen besteht, die Spannung

$$u = -N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N\,B\,h\,l\,\omega \sin \omega t \tag{6.1}$$

induziert. Die in Gl. (6.1) enthaltene Größe $\sin \omega t$ kann maximal den Wert eins annehmen. Daher beträgt der größte Augenblickswert der induzierten Spannung

$$\hat{u} = N\,B\,h\,l\,\omega. \tag{6.2}$$

Man bezeichnet $\hat{u}$ als **Scheitelwert**. Unter Berücksichtigung von Gl. (6.2) wird aus Gl. (6.1)

$$\boxed{u = \hat{u} \sin \omega t.} \tag{6.3}$$

In Bild 6.2b ist diese Funktion grafisch dargestellt. Die sich ergebende Kurve heißt **Liniendiagramm**. Dabei kann man auf der waagerechten Achse entweder die Zeit t oder den ihr proportionalen Winkel ωt auftragen. Die sich aus Bild 6.2b ergebende Beziehung

$$\omega T = 2\pi$$

liefert die *Periodendauer* der Spannung als

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}.} \tag{6.4}$$

Die Anzahl der Perioden (Schwingungen) pro Zeiteinheit beträgt demnach

$$\boxed{f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.} \tag{6.5}$$

Man bezeichnet f als **Frequenz**. Die Einheit folgt aus Gl. (6.5) als 1/s. Hierfür verwendet man jedoch stets die Bezeichnung **Hertz** (Abkürzung: Hz). Es gilt also

$$[f] = \frac{1}{\mathrm{s}} = \text{Hertz} = \text{Hz}. \tag{6.6}$$

Die Größe ω, die in der Anordnung nach Bild 6.2a die Winkelgeschwindigkeit der Spule darstellt, wird in der Wechselstromtechnik allgemein als **Kreisfrequenz** bezeichnet. Aus den Gln. (6.4) und (6.5) folgt für die Kreisfrequenz

$$\boxed{\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T}.} \tag{6.7}$$

Ihre Einheit ist

$$[\omega] = \frac{1}{s}. \tag{6.8}$$

Dabei sei angemerkt, dass als Einheit für die Kreisfrequenz stets 1/s verwendet wird, während die Bezeichnung Hz ausschließlich der Frequenz vorbehalten bleibt.

Bei der Darstellung einer Wechselgröße entsprechend Bild 6.2b braucht der Anfang einer Periode nicht unbedingt mit dem Beginn der Zeitzählung zusammenzufallen. Bei dem in Bild 6.3a dargestellten Wechselstrom beispielsweise liegt zwischen dem Beginn der positiven Halbperiode und dem Beginn der Zeitzählung der Winkel φ_i, der als **Nullphasenwinkel** bezeichnet wird. Er wird mit nur *einer* Pfeilspitze versehen, die auf die Ordinatenachse zeigt.

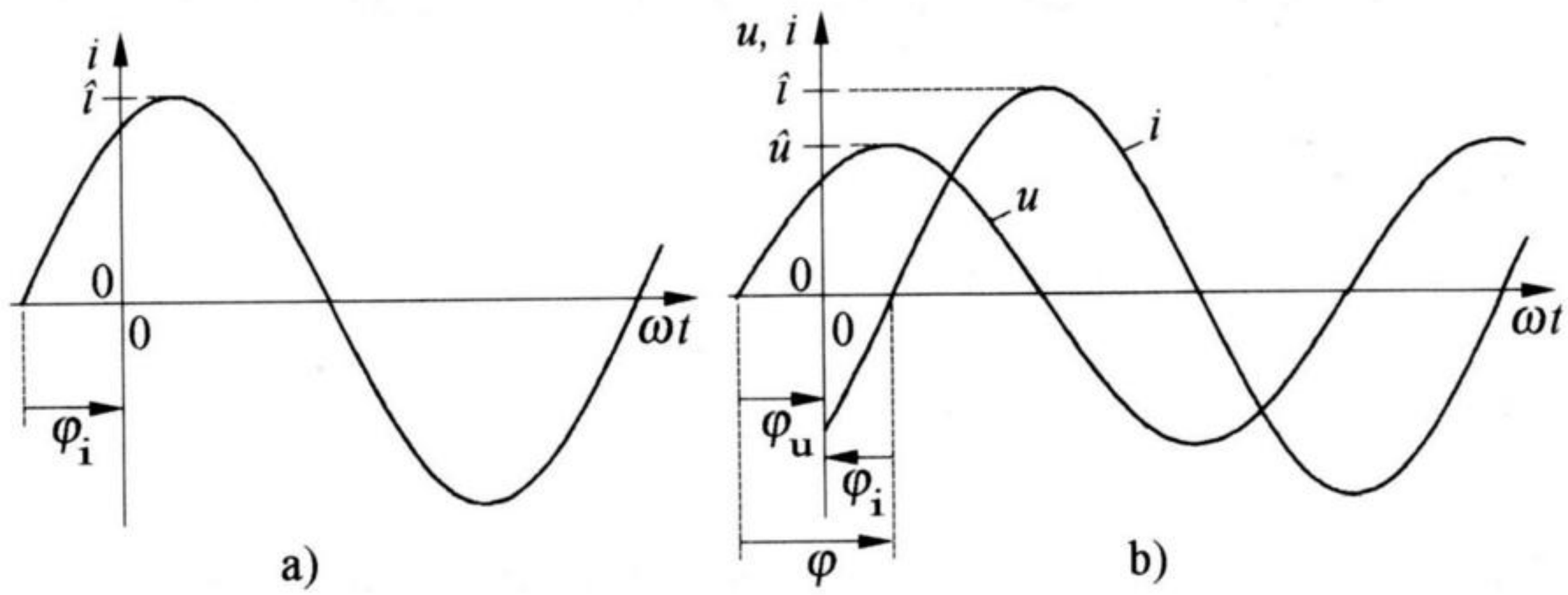


Bild 6.3 Zur Erläuterung der Begriffe „Nullphasenwinkel" (a) und „Phasenverschiebungswinkel" (b)

Für die Kurve gilt die Gleichung

$$i = \hat{\imath}\ \sin(\omega t + \varphi_i).$$

In Bild 6.3b sind der zeitliche Verlauf einer Spannung (u) und der eines Stromes (i) angegeben. In der Darstellung geht die Spannungskurve links von der Ordina-

tenachse durch Null. Daher ist der Nullphasenwinkel der Spannung positiv (zum Beispiel $\varphi_u = 50°$). Dagegen liegt der Nulldurchgang der Stromkurve rechts von der Ordinatenachse, so dass der zugehörige Nullphasenwinkel negativ ist (zum Beispiel ($\varphi_i = -40°$). Den dargestellten Kurven entsprechen die Gleichungen

$$u = \hat{u}\ \sin(\omega t + \varphi_u), \tag{6.9}$$

$$i = \hat{i}\ \sin(\omega t + \varphi_i). \tag{6.10}$$

Ein Nullphasenwinkel ist also positiv, wenn die Pfeilspitze in Richtung der positiven Winkelzählrichtung zeigt (in Bild 6.3 also nach rechts). Zeigt die Pfeilspitze in die entgegengesetzte Richtung, so ergibt sich für den betreffenden Winkel ein negativer Wert.

Von besonderer Bedeutung ist die zwischen Spannung und Strom bestehende **Phasenverschiebung**. Sie wird, wie in Bild 6.3b dargestellt, durch den Winkel

$$\boxed{\varphi = \varphi_u - \varphi_i} \tag{6.11}$$

angegeben. Man bezeichnet φ als **Phasenverschiebungswinkel**. Im vorliegenden Fall geht die Spannung früher durch Null als der Strom. Man sagt dann auch, dass die Spannung gegenüber dem Strom voreilt. Dies führt nach Gl. (6.11) zu einem positiven Phasenverschiebungswinkel φ. Geht dagegen die Spannung später durch Null als der Strom, eilt also die Spannung dem Strom nach, so nimmt der Phasenverschiebungswinkel φ nach Gl. (6.11) einen negativen Wert an.

6.3 Mittelwerte von periodisch zeitabhängigen Größen

Da sich der Augenblickswert einer periodisch zeitabhängigen Größe dauernd ändert, ist eine Vereinbarung darüber notwendig, wie der Wert der Größe angegeben werden soll. Der arithmetische (zeitliche) Mittelwert ist zur Kennzeichnung im Allgemeinen nicht geeignet, da er beispielsweise bei Wechselgrößen definitionsgemäß Null ist. Denkbar wäre die Angabe des Scheitelwertes, jedoch wird dann der übrige Verlauf der Funktion nicht berücksichtigt. Zweckmäßiger ist daher die Angabe von Kenngrößen, die die *mittleren* Wirkungen von Spannungen und Strömen wiedergeben. Das hat zu der Einführung der nachstehend beschriebenen Mittelwerte von periodisch zeitabhängigen Größen geführt.

6.3.1 Gleichrichtwert

Bildet man von einer periodisch zeitabhängigen Größe den zeitlichen Mittelwert des *Betrages* der Funktion, so erhält man eine Kenngröße, die als **Gleichrichtwert** bezeichnet wird. Der Gleichrichtwert stellt also den Mittelwert einer Kurve dar,

von der die negativen Bereiche ins Positive geklappt werden. In Bild 6.4 ist dies für einen periodisch zeitabhängigen Strom beispielhaft dargestellt.

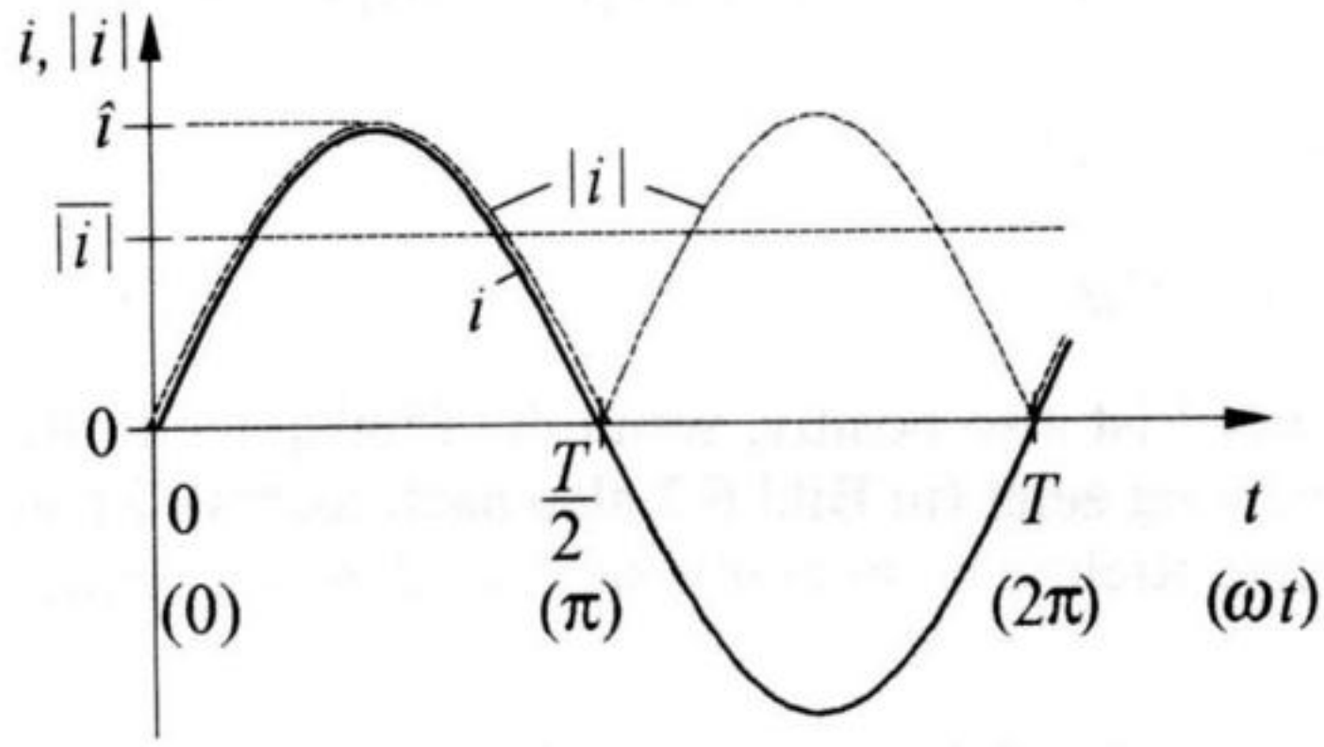


Bild 6.4 Zur Erläuterung des Gleichrichtwertes einer periodisch zeitabhängigen Größe

Der Gleichrichtwert des Stromes kann somit durch

$$\boxed{\overline{|i|} = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\,\mathrm{d}t} \tag{6.12}$$

wiedergegeben werden. Entsprechend lässt sich der Gleichrichtwert einer periodisch zeitabhängigen Spannung darstellen als

$$\boxed{\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|\,\mathrm{d}t.} \tag{6.13}$$

Die in den Gln. (6.12) und (6.13) angegebenen Beziehungen gelten allgemein (für beliebige Kurvenformen) und ermöglichen im Einzelfall - bei gegebenem zeitlichen Verlauf einer periodisch zeitabhängigen Größe - die genaue Bestimmung des Gleichrichtwertes. Dies sei an einem Beispiel erläutert. Wir nehmen dazu den in Bild 6.4 dargestellten Strom als sinusförmig verlaufend an. Der Strom kann dann nach Gl. (6.3) durch

$$i = \hat{\imath}\sin\omega t \tag{6.14}$$

wiedergegeben werden. Sehen wir hierbei statt der Zeit t den ihr proportionalen Winkel ωt als Variable an, so wird aus Gl. (6.12) mit $\omega T = 2\pi$

$$\overline{|i|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |i| \, \mathrm{d}\omega t. \tag{6.15}$$

Die Integration führen wir zweckmäßigerweise über eine halbe Periode aus. Wir erhalten

$$\overline{|i|} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \hat{i} \, \sin \omega t \, \mathrm{d}\omega t = \frac{1}{\pi} \left(-\cos \omega t\right)\Big|_0^{\pi}.$$

Setzen wir die Grenzen ein, so ergibt sich der Gleichrichtwert eines sinusförmigen Stromes als

$$\boxed{\overline{|i|} = \frac{2}{\pi} \hat{i}.} \tag{6.16}$$

Für eine sinusförmige Spannung gilt entsprechend

$$\boxed{\overline{|u|} = \frac{2}{\pi} \hat{u}.} \tag{6.17}$$

Der Gleichrichtwert ist beispielsweise beim Betrieb von Gleichrichterschaltungen von Bedeutung, da die von diesen Schaltungen gelieferte *elektrische Ladung* vom Gleichrichtwert des Stromes abhängig ist. Die Ladung ist wiederum insbesondere bei elektrolytischen Vorgängen oder beim Aufladen von Akkumulatoren eine wichtige Größe.

6.3.2 Effektivwert

Von größerer Bedeutung als der Gleichrichtwert ist der **Effektivwert** einer periodisch zeitabhängigen Größe. Seine Definition lässt sich beispielsweise für einen periodisch zeitabhängigen Strom wie folgt beschreiben:

Erzeugt ein periodisch zeitabhängiger Strom in einem Widerstand im Mittel die gleiche Wärmeleistung wie ein Gleichstrom, so ist der Effektivwert des Stromes gleich dem Wert des Gleichstromes.

Der Effektivwert einer periodisch zeitabhängigen Spannung kann in gleicher Weise beschrieben werden.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie der Effektivwert - bei gegebenem Kurvenverlauf - berechnet werden kann. Wir geben dazu als Beispiel einen periodisch zeit-

abhängigen Strom i mit beliebiger Kurvenform vor, der einen Widerstand R durchließt. Die dabei entstehende Wärmeleistung (Augenblicksleistung) beträgt

$$p = i^2 R .$$

Hat der vorgegebene Strom i beispielsweise die in Bild 6.5 dargestellte Kurvenform, so ergibt sich für die Augenblicksleistung p der angegebene zeitliche Verlauf.

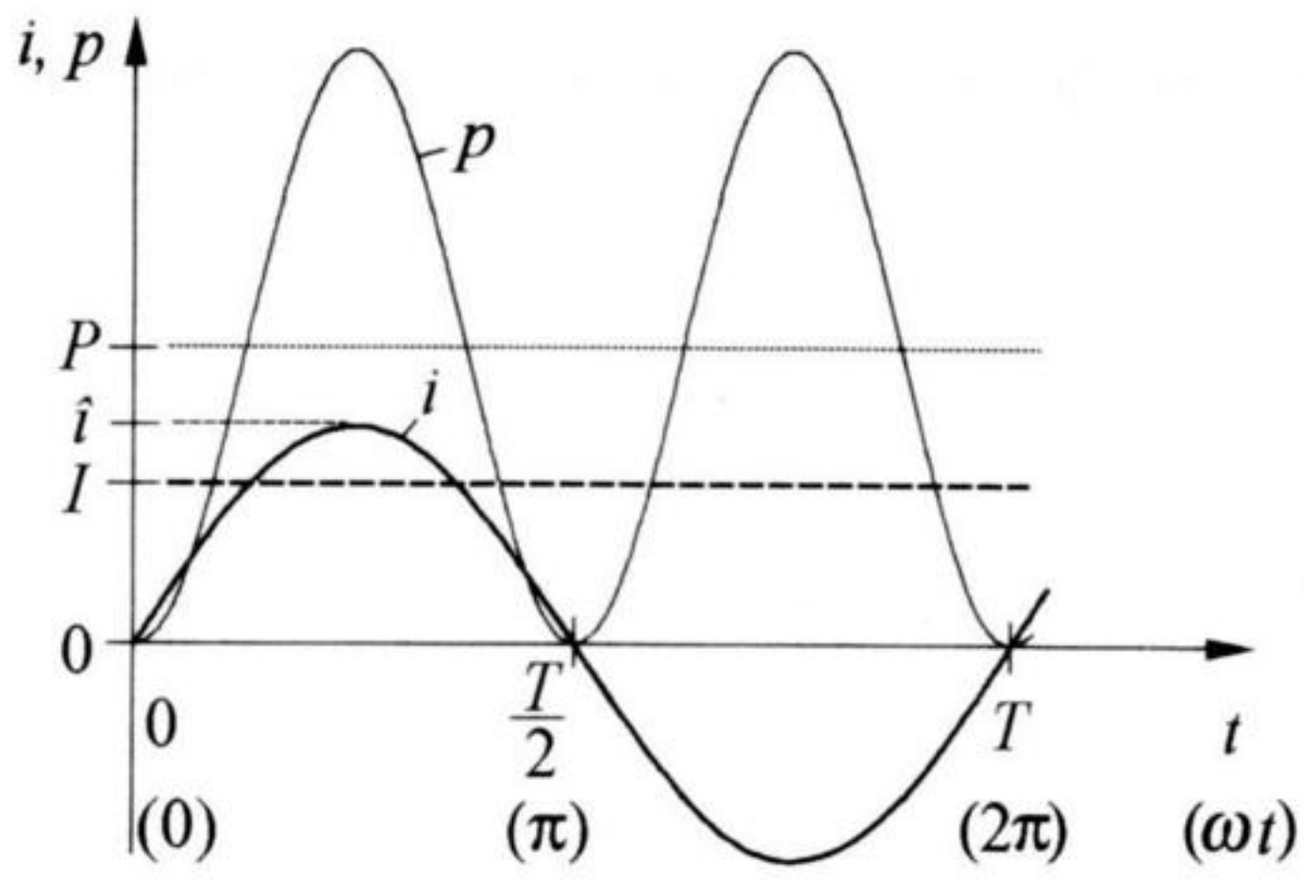


Bild 6.5 Zur Erläuterung des Effektivwertes einer periodisch zeitabhängigen Größe

Die in einer Periode erzeugte Wärmeenergie beträgt bei der Periodendauer T

$$W = \int_0^T p \, \mathrm{d}t = \int_0^T i^2 \, R \, \mathrm{d}t .$$

Hieraus ergibt sich die mittlere erzeugte Wärmeleistung als

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, R \, \mathrm{d}t .$$

P stellt also, wie in Bild 6.5 angegeben, den *zeitlichen Mittelwert* der Augenblicksleistung p dar. Ein Gleichstrom I erzeugt im gleichen Widerstand R die Wärmeleistung

$$P' = I^2 R .$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$I^2 R = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R \, \mathrm{d}t \, .$$

Lösen wir diese Gleichung nach I auf, so ergibt sich entsprechend der auf Seite 205 angegebenen Definition der Effektivwert des periodisch zeitabhängigen Stromes als

$$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, \mathrm{d}t} \, .} \tag{6.18}$$

Für den Effektivwert einer periodisch zeitabhängigen Spannung gilt entsprechend

$$\boxed{U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 \, \mathrm{d}t} \, .} \tag{6.19}$$

Effektivwerte werden üblicherweise - ebenso wie Gleichspannungen und Gleichströme - durch große Buchstaben dargestellt.

Die in den Gln. (6.18) und (6.19) angegebenen Beziehungen gelten für beliebige Kurvenformen und ermöglichen im Einzelfall - bei gegebenem zeitlichen Verlauf einer periodisch zeitabhängigen Größe - die Berechnung des Effektivwertes. Dies sei am Beispiel eines sinusförmigen Wechselstromes erläutert, dessen Scheitelwert $\hat{\imath}$ wir als gegeben ansehen. Wir können dazu den in Bild 6.5 dargestellten Strom i als sinusförmig verlaufend ansehen. Er lässt sich nach Gl. (6.14) durch

$$i = \hat{\imath} \sin \omega t \tag{6.20}$$

darstellen. Wählen wir zur Berechnung des Effektivwertes statt der Zeit t den ihr proportionalen Winkel ωt als Variable (Bild 6.5), so wird mit $\omega T = 2\pi$ aus Gl. (6.18)

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 \, \mathrm{d}\omega t} \, . \tag{6.21}$$

Wir setzen Gl. (6.20) in Gl. (6.21) ein und erhalten für den gesuchten Effektivwert

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\imath}^2 \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}\omega t} \, .$$

Als Lösung finden wir, wenn wir berücksichtigen, dass

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t \, \mathrm{d}\omega t = \left(\frac{1}{2} \omega t - \frac{1}{4} \sin 2\omega t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

ist,

$$\boxed{I = \frac{\hat{\imath}}{\sqrt{2}}.} \tag{6.22}$$

Dieser Wert ist ebenfalls in Bild 6.5 eingetragen. Den Effektivwert eines *sinusförmigen* Wechselstromes erhält man also dadurch, dass man den Scheitelwert durch den Faktor $\sqrt{2}$ teilt. Entsprechend gilt für den Effektivwert einer *sinusförmigen* Wechselspannung bei dem Scheitelwert $\hat{u}$

$$\boxed{U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}.} \tag{6.23}$$

Aufgabe 6.1

Ein periodisch zeitabhängiger Strom mit dem Scheitelwert $\hat{\imath} = 10$ A hat den in Bild 6.6 dargestellten Verlauf. T ist die Periodendauer des Stromes.

Es sind

a) der Gleichrichtwert $\overline{|i|}$,

b) der Effektivwert I

des Stromes zu bestimmen.

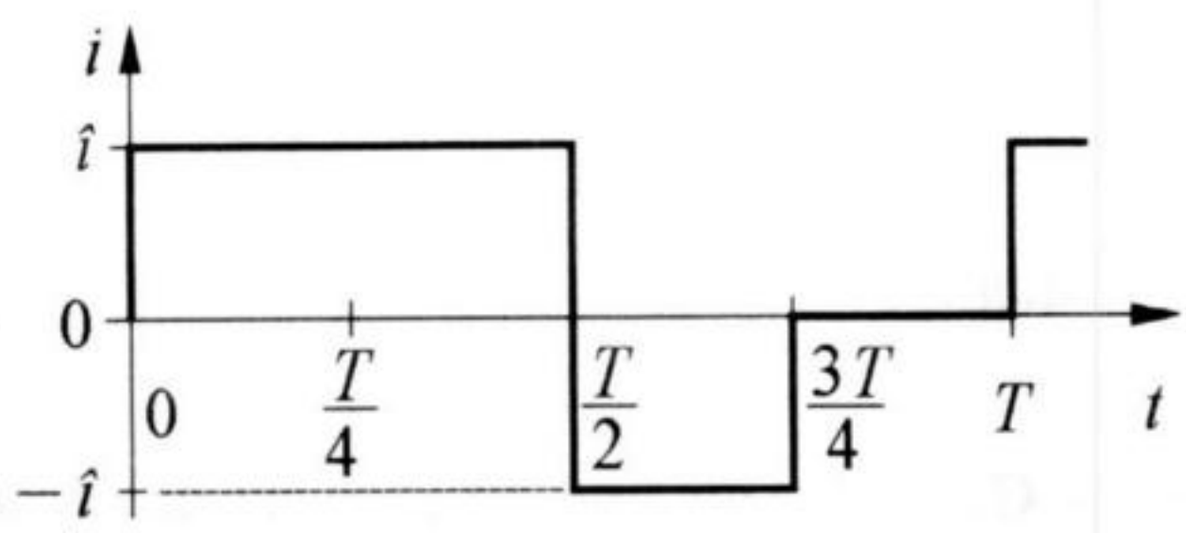


Bild 6.6 Beispiel für den Verlauf eines periodisch zeitabhängigen Stromes

Lösung

a) Für den Gleichrichtwert gilt nach Gl. (6.12)

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\int_0^T |i|\,\mathrm{d}t.$$

Dabei entspricht das Integral des Strombetrages $|i|$ über die Zeit t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ der Fläche, die zwischen der Funktion $|i| = f(t)$ und der Abszissenachse in den genannten Grenzen liegt. Hierfür entnehmen wir aus Bild 6.6

$$\int_0^T |i|\,\mathrm{d}t = \hat{i}\,\frac{T}{2} + \left|-\hat{i}\right|\frac{T}{4} = \hat{i}\,\frac{3}{4}T.$$

Damit wird der gesuchte Gleichrichtwert

$$\overline{|i|} = \frac{1}{T}\,\hat{i}\,\frac{3}{4}T = \frac{3}{4}\,\hat{i} = 0{,}75\cdot 10\,\mathrm{A} = \underline{7{,}5\,\mathrm{A}}.$$

b) Für den Effektivwert gilt nach Gl. (6.18)

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t}\,.$$

Das Integral von i^2 über t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ entspricht der Fläche, die zwischen der Funktion $i^2 = f(t)$ und der Abszissenachse in den genannten Grenzen liegt. Hierfür ergibt sich aus Bild 6.6

$$\int_0^T i^2\,\mathrm{d}t = \hat{i}^2\,\frac{T}{2} + \left(-\hat{i}^2\right)\frac{T}{4} = \frac{3}{4}\,\hat{i}^2\,T.$$

Setzen wir dieses Ergebnis in die obige Gleichung ein, so erhalten wir den gesuchten Effektivwert als

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\,\frac{3}{4}\,\hat{i}^2\,T} = 0{,}866\,\hat{i} = 0{,}866\cdot 10\,\mathrm{A} = \underline{8{,}66\,\mathrm{A}}.$$

Aufgabe 6.2

Eine periodisch zeitabhängige Spannung hat den in Bild 6.7 dargestellten Verlauf. Der größte Augenblickswert beträgt $\hat{u} = 100$ V. T stellt die Periodendauer dar.

a) Welchen Gleichrichtwert $\overline{|u|}$ hat die Spannung?

b) Wie groß ist der Effektivwert U?

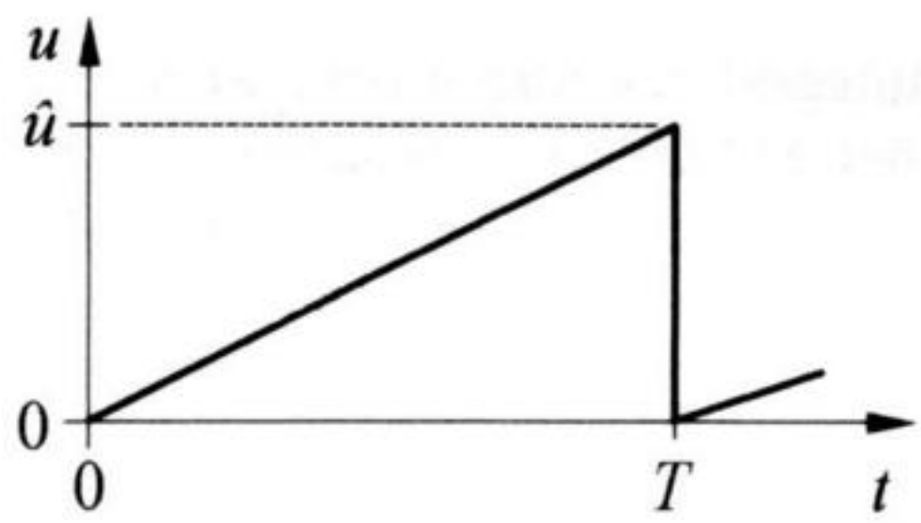


Bild 6.7 Beispiel für den Verlauf einer periodisch zeitabhängigen Spannung

Lösung

a) Die Bestimmung des Gleichrichtwertes erfolgt durch Anwendung von Gl. (6.13). Dabei entspricht das Integral von $|u|$ über t in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$ in Bild 6.7 der Fläche zwischen der Funktion und der Abszissenachse in den genannten Grenzen. Hierfür ergibt sich

$$\int_0^T |u| \, \mathrm{d}t = \frac{\hat{u}\,T}{2}.$$

Damit beträgt der gesuchte Gleichrichtwert nach Gl. (6.13)

$$\overline{|u|} = \frac{1}{T}\int_0^T |u| \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\frac{\hat{u}\,T}{2} = \frac{\hat{u}}{2} = \frac{100\ \mathrm{V}}{2} = \underline{50\ \mathrm{V}}.$$

b) Der Effektivwert lässt sich mit Hilfe von Gl. (6.19) bestimmen. Dazu benötigen wir zunächst die Gleichung für den zeitlichen Verlauf der gegebenen Spannung in den Grenzen $t = 0$ und $t = T$. Aus Bild 6.7 geht hervor, dass die Funktion in diesem Bereich durch

$$u = \frac{\hat{u}}{T}t$$

wiedergegeben wird (Gleichung einer durch den Ursprung verlaufenden Geraden). Damit beträgt

$$\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\frac{\hat{u}}{T}t\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{\hat{u}^2}{T^2}\,\frac{t^3}{3}\bigg|_0^T = \frac{\hat{u}^2}{3}T,$$

so dass der gesuchte Effektivwert nach Gl. (6.19)

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{1}{T}\,\frac{\hat{u}^2}{3}T} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{3}} = \frac{100\ \mathrm{V}}{\sqrt{3}} = \underline{57{,}7\ \mathrm{V}}$$

wird.

6.3.3 Formfaktor und Scheitelfaktor

Bei Wechselgrößen bezeichnet man das Verhältnis des Effektivwertes zum Gleichrichtwert als **Formfaktor** (Symbol: F). Betrachten wir beispielsweise einen Wechselstrom, so gilt für den Formfaktor bei beliebiger Kurvenform

$$\boxed{F = \frac{I}{\overline{|i|}}\,.} \tag{6.24}$$

Hierin sind I der Effektivwert und $\overline{|i|}$ der Gleichrichtwert. Verläuft der Strom *sinusförmig*, so ist unter Berücksichtigung der Gln. (6.16) und (6.22)

$$F = \frac{I}{\overline{|i|}} = \frac{\hat{i}/\sqrt{2}}{2\hat{i}/\pi} = 1{,}111\,. \tag{6.25}$$

Das Verhältnis des Scheitelwertes zum Effektivwert heißt **Scheitelfaktor** (Symbol: σ). Er lässt sich für einen Wechselstrom mit beliebiger Kurvenform somit durch

$$\boxed{\sigma = \frac{\hat{i}}{I}} \tag{6.26}$$

darstellen. Bei sinusförmigem Verlauf gilt, wenn wir Gl. (6.22) berücksichtigen,

$$\sigma = \frac{\hat{i}}{I} = \frac{\hat{i}}{\hat{i}/\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \tag{6.27}$$

Die in den Gln. (6.24) und (6.26) dargestellten Kenngrößen können in gleicher Weise für Wechselspannungen angegeben werden.

6.4 Die Zeigerdarstellung von Sinusgrößen

Die Darstellung von sinusförmigen Spannungen und Strömen durch Liniendiagramme, wie dies beispielsweise in Bild 6.3b der Fall ist, erweist sich bei der Anwendung auf Wechselstromkreise als aufwendig. Das Gleiche gilt, wenn statt der Liniendiagramme die ihnen entsprechenden Gleichungen (zum Beispiel die Gln. (6.9) und (6.10)) verwendet werden. Diese Tatsache hat dazu geführt, zur Wiedergabe von sinusförmigen Wechselgrößen die nachfolgend beschriebene **Zeigerdarstellung** einzuführen.

Zur weiteren Erläuterung betrachten wir Bild 6.8. Die Darstellung enthält links einen vom Mittelpunkt M ausgehenden Strahl, dessen Länge dem Scheitelwert $\hat{u}$ einer beispielsweise betrachteten Wechselspannung u entspricht. Man bezeichnet ihn als **Zeiger**. Wir wollen ihn durch ein unterstrichenes Symbol ($\underline{\hat{u}}$) kennzeichnen. Der Zeiger möge aus der eingezeichneten waagerechten Lage heraus mit der Winkelgeschwindigkeit ω, die gleich der Kreisfrequenz der Wechselspannung ist, entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn um M rotieren. Im Zeitpunkt t_1 hat der Zeiger den Winkel ωt_1 zurückgelegt und im Zeitpunkt t_2 den Winkel ωt_2. Die senkrecht verlaufende, mit Z gekennzeichnete Linie heißt *Zeitlinie*.

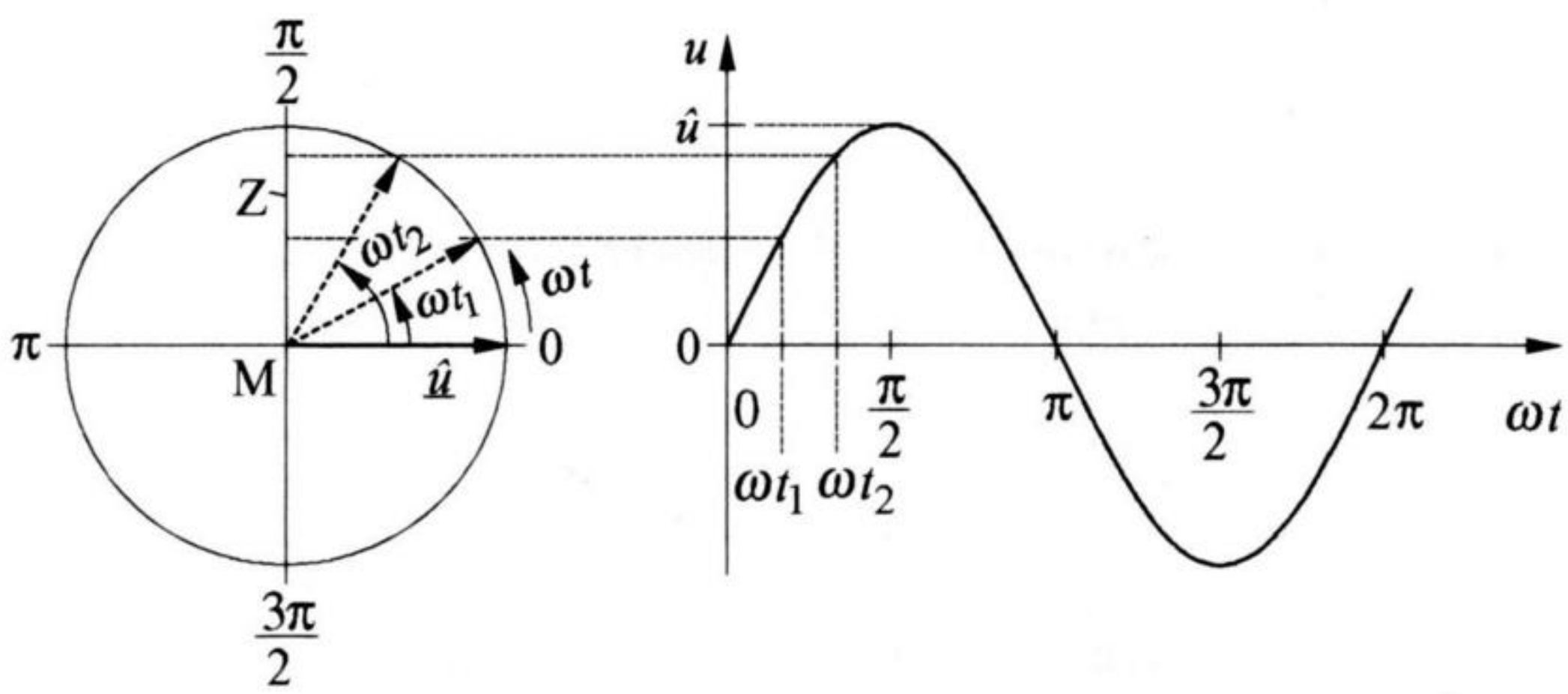


Bild 6.8 Zeigerdarstellung (links) und Darstellung des zeitlichen Verlaufs (rechts) einer sinusförmigen Spannung

Tragen wir jetzt rechts in Bild 6.8 den zurückgelegten Winkel ωt waagerecht auf und die Projektion von $\underline{\hat{u}}$ auf die Zeitlinie senkrecht, so erhalten wir die dargestellte Sinuskurve. Verzichtet man auf die beschriebene Konstruktion der Sinuskurve, so kann man den sich drehenden Zeiger dennoch als Möglichkeit zur Darstellung einer sinusförmigen Wechselgröße ansehen, da eine Konstruktion der zugehörigen Sinusfunktion jederzeit erfolgen könnte. Man bezeichnet diese Art der Wiedergabe von Wechselgrößen als **Zeigerdarstellung**.

Werden mehrere Zeiger in einem gemeinsamen Bild dargestellt, so spricht man von einem **Zeigerbild** oder einem **Zeigerdiagramm**. Beispielsweise zeigt Bild 6.9 rechts den zeitlichen Verlauf einer Spannung u und den eines Stromes i sowie links das zugehörige Zeigerdiagramm. Der Strom i verläuft im Liniendiagramm (rechts) nicht durch den Ursprung, sondern hat den negativen Nullphasenwinkel φ_i. Im Zeigerdiagramm ist daher der Zeiger $\underline{\hat{i}}$ gegenüber der Waagerechten um diesen Winkel verschoben.

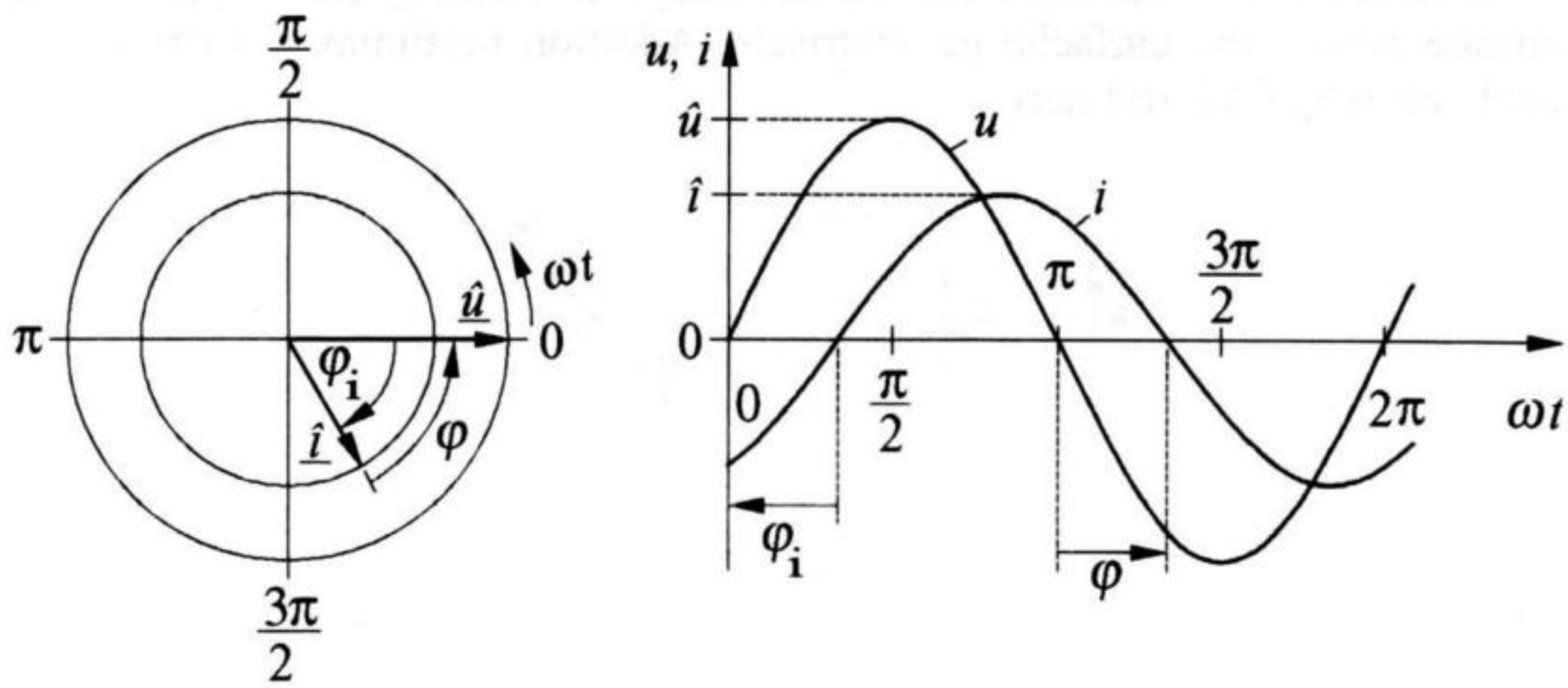


Bild 6.9 Zeigerdiagramm (links) und zeitlicher Verlauf (rechts) einer Spannung (u) und eines Stromes (i)

Der in Bild 6.9 eingetragene Winkel φ stellt den **Phasenverschiebungswinkel** dar, um den die Spannung u gegenüber dem Strom i verschoben ist. Im vorliegenden Fall ist $\varphi = -\varphi_i$. Da die Augenblickswerte von Wechselgrößen im Allgemeinen nicht benötigt werden, kann man sich bei der Darstellung eines Zeigerdiagramms auch gedanklich von den zugehörigen Sinuskurven lösen. Das Achsenkreuz mit seiner Zeitlinie wird dann überflüssig (Bild 6.10a). Man kann das Zeigerdiagramm auch um einen bestimmten Winkel verdrehen (Bild 6.10b) oder einzelne Zeiger parallel verschieben (Bild 6.10c).

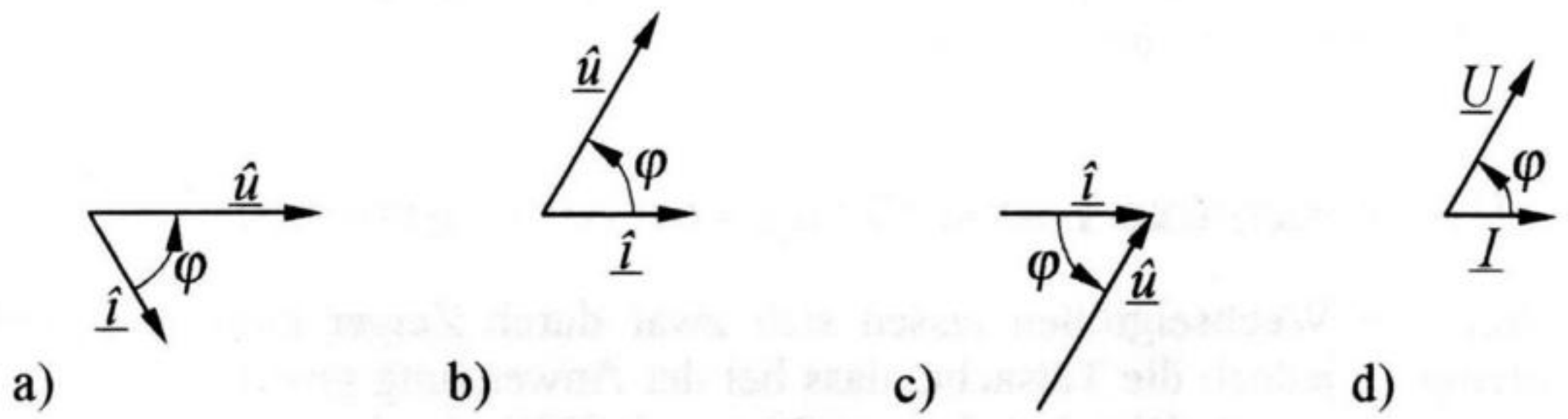


Bild 6.10 a) Zeigerdiagramm entsprechend Bild 6.9 (jedoch ohne Achsenkreuz), b) gedrehtes Zeigerdiagramm, c) Parallelverschiebung eines Zeigers, d) Zeigerdiagramm mit Effektivwertdarstellung

Da Wechselgrößen meist durch ihre Effektivwerte wiedergegeben werden, liegt es nahe, diese auch bei der Zeigerdarstellung zu verwenden. Die Zeiger sind dann nach Bild 6.10d mit einer um den Faktor $\sqrt{2}$ kleineren Länge anzugeben, da der Effektivwert um diesen Faktor kleiner ist als der Scheitelwert.

Der Vorteil der Zeigerdarstellung zeigt sich insbesondere bei der oft notwendigen Addition zweier phasenverschobener Wechselgrößen (mit gleicher Frequenz). Während für die analytische Lösung dieser Aufgabe ein nicht unerheblicher Rechenaufwand erforderlich ist, kann bei der Zeigerdarstellung der Zeiger der Summengröße durch eine einfache geometrische Addition bestimmt werden. Dies sei anhand von Bild 6.11 erläutert.

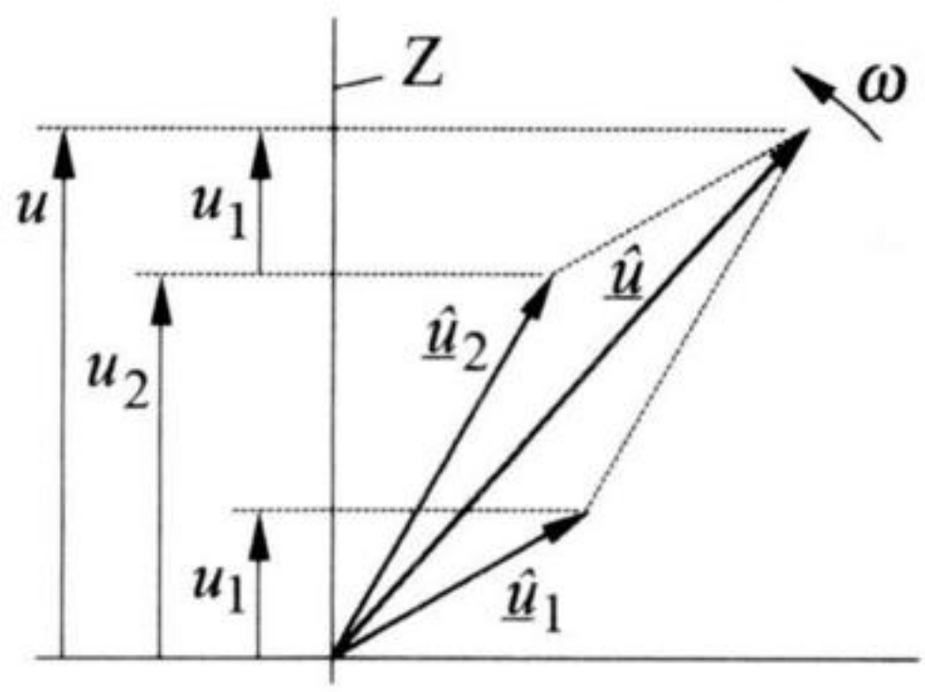


Bild 6.11 Addition zweier phasenverschobener sinusförmiger Wechselspannungen im Zeigerbild

Darin sind zwei phasenverschobene Wechselspannungen gleicher Frequenz durch ihre Zeiger $\underline{\hat{u}}_1$ und $\underline{\hat{u}}_2$ dargestellt. Die geometrische Addition beider Zeiger ergibt den Zeiger $\underline{\hat{u}}$. Denkt man sich das Diagramm rotierend, so sind u_1, u_2 und u die Projektionen auf die Zeitlinie Z und damit die Augenblickswerte der Spannungen. Da jedoch für jede beliebige Lage des Diagramms in Bild 6.11 stets

$$u = u_1 + u_2$$

ist, stellt der Betrag des Zeigers $\underline{\hat{u}}$ den Scheitelwert derjenigen Wechselspannung dar, die sich durch die Addition der beiden phasenverschobenen Spannungen mit den Scheitelwerten $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ ergibt.

6.5 Die komplexe Darstellung von Sinusgrößen

Sinusförmige Wechselgrößen lassen sich zwar durch Zeiger einfach darstellen. Nachteilig ist jedoch die Tatsache, dass bei der Anwendung *grafische Darstellungen* notwendig sind. Dies hat dazu geführt, mit Hilfe der **komplexen Rechnung** eine mathematische Beschreibung des Zeigerdiagramms vorzunehmen. Bevor wir auf die Anwendung der komplexen Rechnung in der Wechselstromtechnik eingehen, wollen wir zunächst die wichtigsten Begriffe und Rechenregeln betrachten.

6.5.1 Grundbegriffe der komplexen Rechnung

Zusätzlich zu den reellen Zahlen werden in der komplexen Rechnung **imaginäre Zahlen** verwendet. Deren Einheit wird mit j bezeichnet, wobei

$$\boxed{\mathrm{j} = \sqrt{-1}.} \tag{6.28}$$

ist. Die Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl heißt **komplexe Zahl**. Komplexe Zahlen lassen sich in der **Gauß'schen Zahlenebene** grafisch darstellen. Sie besteht nach Bild 6.12 aus einem Koordinatensystem, auf dessen Abszissenachse die reellen und auf dessen Ordinatenachse die imaginären Zahlen aufgetragen sind.

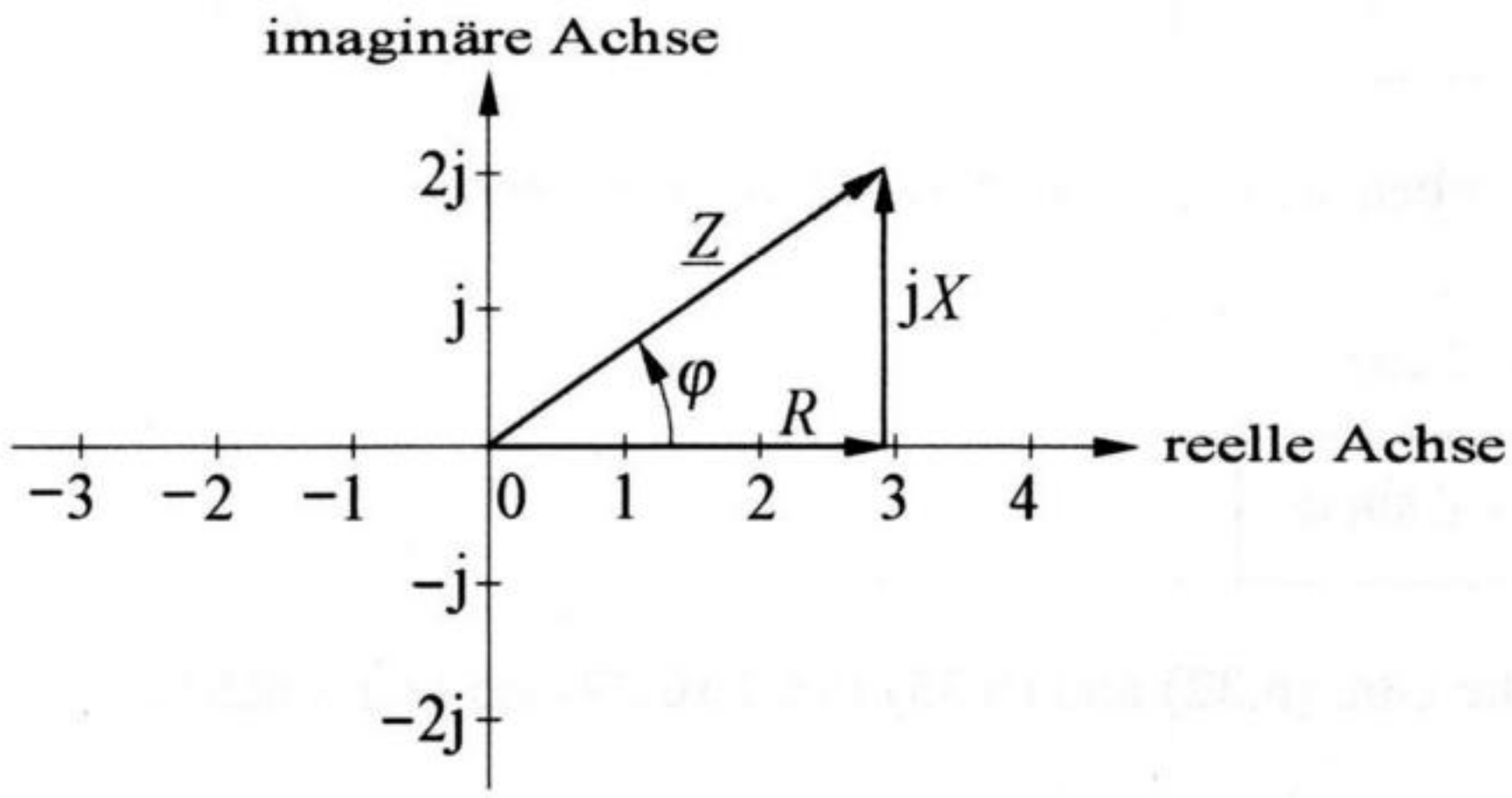


Bild 6.12 Darstellung einer komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene

Jede komplexe Zahl lässt sich durch einen Punkt in der Ebene wiedergeben. Zur Kennzeichnung dient ein Zeiger, der vom Ursprung zum betreffenden Punkt verläuft. Als Symbol verwenden wir einen unterstrichenen Buchstaben. So lässt sich die in Bild 6.12 eingetragene komplexe Zahl darstellen durch

$$\boxed{\underline{Z} = R + \mathrm{j}X.} \tag{6.29}$$

Sie kann als Summe zweier Komponenten, des **Realteils** von $\underline{Z}$

$$\mathrm{Re}(\underline{Z}) = R$$

und des mit j multiplizierten **Imaginärteils** von $\underline{Z}$

$$\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(\underline{Z}) = \mathrm{j}X$$

wiedergegeben werden. Die Darstellung einer komplexen Zahl entsprechend Gl. (6.29) heißt **Komponentenform.**

Daneben gibt es eine weitere Darstellungsform, die wir nachfolgend entwickeln wollen. Der durch den Abstand vom Ursprung gegebene *Betrag* der komplexen Zahl ergibt sich aus Bild 6.12 als

$$\boxed{|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + X^2}\,.} \tag{6.30}$$

Der eingetragene Richtungswinkel beträgt

$$\boxed{\varphi = \arctan \frac{X}{R}.} \tag{6.31}$$

Weiterhin ergeben sich aus Bild 6.12 die Beziehungen

$$\boxed{R = Z \cos \varphi,} \tag{6.32}$$

$$\boxed{X = Z \sin \varphi.} \tag{6.33}$$

Wir setzen die Gln. (6.32) und (6.33) in Gl. (6.29) ein und erhalten

$$\underline{Z} = Z\left(\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi\right). \tag{6.34}$$

Berücksichtigen wir, dass nach dem **Euler'schen Satz**

$$\cos \varphi + \mathrm{j} \sin \varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{6.35}$$

ist, so kann die in Bild 6.12 eingetragene komplexe Zahl durch

$$\boxed{\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} \tag{6.36}$$

wiedergegeben werden. Diese Art der Darstellung heißt **Polarform** oder **Exponentialform**.

Jede komplexe Zahl kann damit entweder in der Komponentenform nach Gl. (6.29) oder in der Polarform nach Gl. (6.36) angegeben werden. Für die Umrechnung von der Komponentenform in die Polarform gelten die Gln. (6.30) und (6.31), für den umgekehrten Rechnungsweg die Gln. (6.32) und (6.33).

Zu jeder komplexen Zahl kann man eine **konjugiert komplexe Zahl** angeben. Beide unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen des Imaginärteils. Beispielsweise gehört zur komplexen Zahl

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{6.37}$$

die konjugiert komplexe Zahl

$$\underline{Z}^* = R - \mathrm{j}X = Z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}. \tag{6.38}$$

Wir wollen jetzt die wichtigsten Rechenregeln für komplexe Zahlen betrachten.

Die **Addition** erfolgt in der Komponentenform. Sind zum Beispiel die komplexen Zahlen $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1$ und $\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2$ gegeben, so beträgt ihre Summe

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = R_1 + R_2 + \mathrm{j}(X_1 + X_2). \tag{6.39}$$

Man addiert komplexe Zahlen, indem man die reellen und die imaginären Komponenten für sich addiert. Die **Subtraktion** wird in entsprechender Weise durchgeführt.

Für die **Multiplikation** eignet sich am besten die Polarform. Geben wir beispielsweise die komplexen Zahlen

$$\underline{Z}_1 = Z_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} \quad \text{und} \quad \underline{Z}_2 = Z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2}$$

vor, so beträgt das Produkt

$$\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 = Z_1\,Z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{6.40}$$

Man multipliziert komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Richtungswinkel addiert.

Die **Division** liefert das Ergebnis

$$\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1}{Z_2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{6.41}$$

Man dividiert komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge dividiert und ihre Richtungswinkel subtrahiert.

Multiplikationen und Divisionen sind auch in der Komponentenform möglich. Geben wir beispielsweise die komplexen Zahlen $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1$ und $\underline{Z}_2 = R_2 + \mathrm{j}X_2$ vor, so beträgt ihr Produkt

$$\underline{Z}_1\,\underline{Z}_2 = (R_1 + \mathrm{j}X_1)(R_2 + \mathrm{j}X_2) = R_1\,R_2 - X_1\,X_2 + \mathrm{j}(R_1\,X_2 + R_2\,X_1).$$

Man erhält also wieder einen Ausdruck, in dem die reelle und die imaginäre Komponente gesondert ausgewiesen sind.

Führt man die Division in der Komponentenform durch, so sind in dem Ausdruck

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{R_1 + \mathrm{j}X_1}{R_2 + \mathrm{j}X_2} \tag{6.42}$$

die reelle und die imaginäre Komponente nicht zu erkennen. Um sie zu ermitteln, multipliziert man den Zähler und den Nenner mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners. Dadurch wird der Nenner reell. Es ergibt sich

$$\underline{Z} = \frac{R_1 + \mathrm{j}X_1}{R_2 + \mathrm{j}X_2} \cdot \frac{R_2 - \mathrm{j}X_2}{R_2 - \mathrm{j}X_2} = \frac{R_1\,R_2 + X_1\,X_2}{R_2^{\,2} + X_2^{\,2}} + \mathrm{j}\,\frac{R_2\,X_1 - R_1\,X_2}{R_2^{\,2} + X_2^{\,2}}. \tag{6.43}$$

Dieses Ergebnis weist wieder die reelle und die imaginäre Komponente gesondert aus.

Als Division besonderer Art sei noch die Berechnung des Kehrwertes einer komplexen Zahl betrachtet. In der Polarform ist

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} = \frac{1}{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}. \tag{6.44}$$

In der Komponentenform werden analog zu Gl. (6.43) Zähler und Nenner mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners multipliziert. Es ergibt sich

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X} \cdot \frac{R - \mathrm{j}X}{R - \mathrm{j}X} = \frac{R}{R^2 + X^2} - \mathrm{j}\,\frac{X}{R^2 + X^2}. \tag{6.45}$$

Bei der Anwendung der komplexen Rechnung verwendet man zur Durchführung von Rechenoperationen geeignete Taschenrechner. Dies hat zur Folge, dass die in den Gln. (6.39) bis (6.45) angegebenen Beziehungen nur von geringer praktischer Bedeutung sind.

6.5.2 Anwendung der komplexen Rechnung in der Wechselstromtechnik

Sinusförmige Wechselgrößen lassen sich, wie in Abschnitt 6.4 beschrieben, durch Zeiger darstellen. Trägt man nun einen solchen Zeiger in die komplexe Ebene ein,

so kann man ihn durch einen komplexen Ausdruck beschreiben. Dadurch wird es beispielsweise möglich, eine geometrische Addition von Zeigern mit Hilfe der komplexen Rechnung vorzunehmen, statt eine grafische Addition durchzuführen, wie dies in Bild 6.11 erfolgt ist. Zur weiteren Erläuterung geben wir eine sinusförmige Wechselspannung vor, die wir nach Gl. (6.9) durch

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{6.46}$$

darstellen können. Diese Spannung lässt sich nach Abschnitt 6.4 durch einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierenden Zeiger wiedergeben, dessen Länge dem Effektivwert U der Spannung entspricht. Wir tragen den Zeiger in die komplexe Ebene nach Bild 6.13 ein und bezeichnen ihn mit $\underline{U}$. Im Zeitpunkt $t = 0$ schließt er mit der positiv reellen Achse den Winkel φ_u ein. In einem beliebigen Zeitpunkt t hat er den Winkel ωt zurückgelegt.

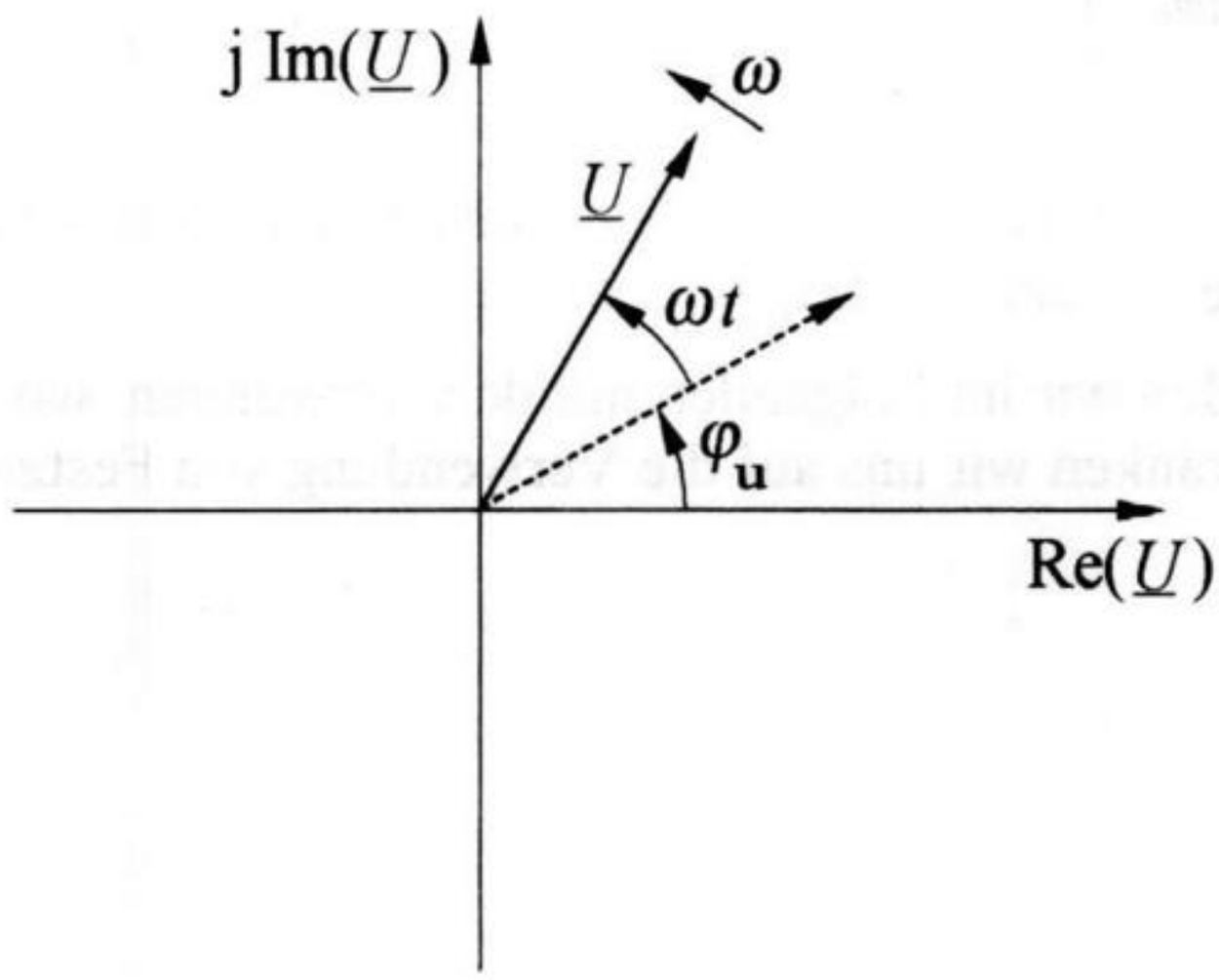


Bild 6.13 Darstellung eines Spannungszeigers in der komplexen Ebene

Der rotierende Zeiger kann im Zeitpunkt t nach Gl. (6.36) durch den komplexen Ausdruck

$$\boxed{\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}} \tag{6.47}$$

beschrieben werden. Dies ist die Darstellung in Polarform. In Komponentenform nach Gl. (6.29) ergibt sich durch Anwendung der Gln. (6.32) und (6.33)

$$\underline{U} = U \cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j}\,U \sin(\omega t + \varphi_u). \tag{6.48}$$

Vergleicht man nun die Gln. (6.46) und (6.48), so stellt man fest, dass der zeitliche Verlauf der Spannung durch

$$u = \sqrt{2}\ \mathrm{Im}(\underline{U}) = \sqrt{2}\ U\ \sin\left(\omega t + \varphi_{\mathrm{u}}\right) \tag{6.49}$$

wiedergegeben wird. Der Augenblickswert der Spannung ergibt sich also dadurch, dass man den Imaginärteil des Zeigers $\underline{U}$ mit dem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert.

Wie schon erwähnt, interessieren die Augenblickswerte von Wechselgrößen nur in seltenen Fällen. Daher kann auf die Verwendung von rotierenden Zeigern meistens verzichtet werden. In der Regel reicht es aus, eine „Momentaufnahme" des rotierenden Zeigerdiagramms zu betrachten. Wählen wir in Bild 6.13 für eine solche Momentaufnahme beispielsweise den Zeitpunkt $t = 0$, so schließt der Zeiger $\underline{U}$ den Winkel φ_{u} mit der positiv reellen Achse ein. Der Zeiger wird dann durch

$$\boxed{\underline{U} = U\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_{\mathrm{u}}}} \tag{6.50}$$

dargestellt. Aus dem in Gl. (6.47) angegebenen **Drehzeiger** ist durch Eliminieren des **Drehfaktors** $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ ein **Festzeiger** geworden.

Drehzeiger wollen wir im Folgenden nur dort verwenden, wo es erforderlich ist. Im Übrigen beschränken wir uns auf die Verwendung von Festzeigern.

7 Einfache Wechselstromkreise

7.1 Grundschaltungen

Wir wollen jetzt verschiedene Anordnungen (Widerstände, Spulen, Kondensatoren) an eine Wechselspannungsquelle mit sinusförmiger Ausgangsspannung anschließen und die zwischen Strom und Spannung bestehende Abhängigkeit ermitteln.

Die gesuchten Ergebnisse werden anfangs sowohl nach dem analytischen Verfahren (Darstellung im reellen Zeitbereich) als auch mit Hilfe der komplexen Rechnung hergeleitet. Hierdurch wird ein Vergleich der beiden Rechenverfahren möglich. Bei der Darstellung im reellen Zeitbereich treten die physikalischen Vorgänge deutlicher in Erscheinung. Das Verfahren ist jedoch, sofern nicht ausschließlich sehr einfache Schaltungen betrachtet werden, im Vergleich zur komplexen Darstellung sehr aufwendig. Daher wird im weiteren Verlauf der Betrachtungen auf das analytische Verfahren verzichtet.

Die in den Schaltungen eingetragenen Spannungs- und Strompfeile stellen *Bezugspfeile* dar, die angeben, dass die betreffenden Größen in der angegebenen Richtung positiv gezählt werden. Bei der Darstellung der zwischen Spannung und Strom bestehenden Phasenverschiebung wird der Strom als *Bezugsgröße* gewählt. Das bedeutet, dass der angegebene Phasenverschiebungswinkel φ - in Übereinstimmung mit Gl. (6.11) - jeweils denjenigen Winkel darstellt, um den die Spannung gegenüber dem Strom verschoben ist. Hieraus folgt, dass φ positiv ist, wenn die Spannung gegenüber dem Strom voreilt. Eilt dagegen die Spannung gegenüber dem Strom nach, so ist φ negativ. Zur Angabe der *Höhe* von Spannungen oder Strömen werden im Allgemeinen deren *Effektivwerte* verwendet.

7.1.1 Kreis mit ohmschem Widerstand

Wir betrachten zunächst eine Anordnung, in der nach Bild 7.1a ein Widerstand mit einer Wechselspannungsquelle verbunden ist. Die sinusförmige Versorgungsspannung können wir in analytischer Darstellung nach Gl. (6.3) durch

$$u = \hat{u} \sin \omega t \tag{7.1}$$

wiedergeben. Dann ergibt sich nach dem ohmschen Gesetz für den im Kreis fließenden Strom

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\hat{u}}{R} \sin \omega t. \tag{7.2}$$

Er hat also den gleichen Kurvenverlauf und die gleiche Phasenlage wie die Spannung. Man sagt auch: Strom und Spannung sind in Phase. In Bild 7.1b ist der Verlauf beider Größen dargestellt.

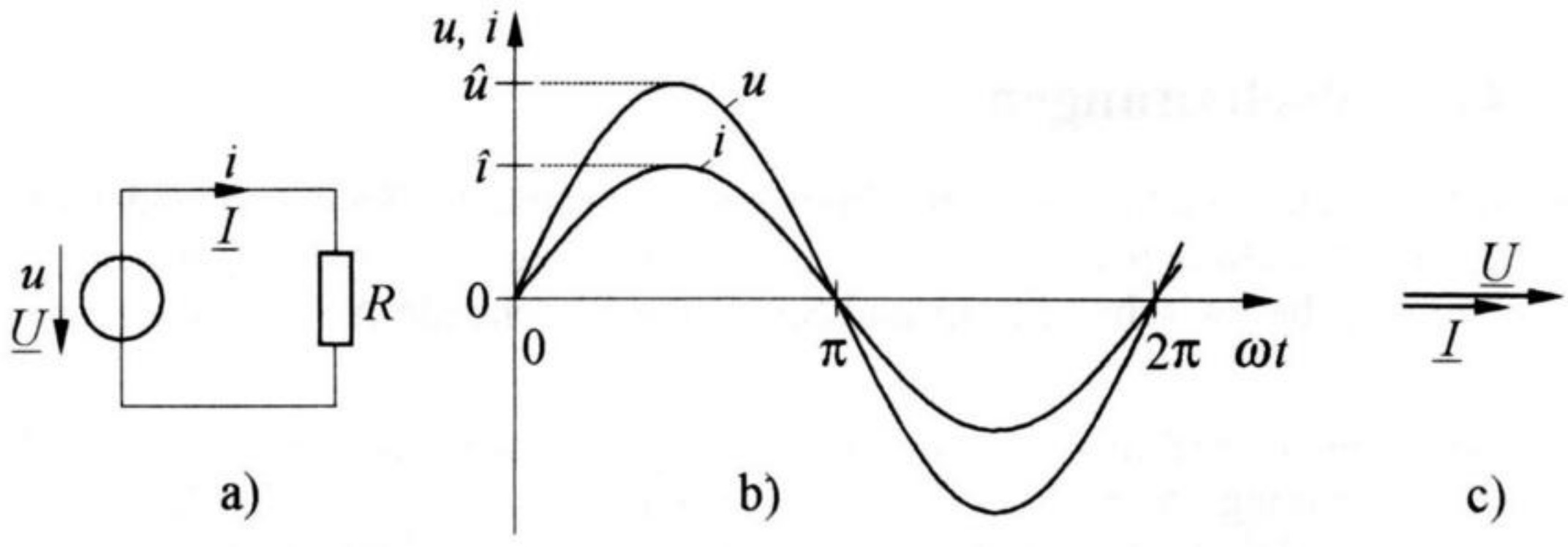


Bild 7.1 Kreis mit ohmschem Widerstand. a) Schaltung, b) Verlauf von Spannung und Strom, c) zugehöriges Zeigerdiagramm

Der Strom erreicht seinen Scheitelwert bei $\omega t = \pi/2$. Er beträgt

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{R}. \tag{7.3}$$

Teilen wir beide Seiten durch $\sqrt{2}$, so erhalten wir die zwischen den Effektivwerten geltende Beziehung

$$\boxed{I = \frac{U}{R}.} \tag{7.4}$$

R wird in der Wechselstromtechnik - zur Unterscheidung von später noch zu erläuternden anderen Widerständen - als **Wirkwiderstand**, als **Resistanz** oder als **ohmscher Widerstand** bezeichnet. Sein Kehrwert

$$G = \frac{1}{R} \tag{7.5}$$

heißt **Wirkleitwert**, **Konduktanz** oder **ohmscher Leitwert**.

Wir wollen jetzt die Ermittlung des in der Schaltung nach Bild 7.1a fließenden Stromes in *komplexer* Darstellungsweise vornehmen. Die sinusförmige Versorgungsspannung können wir nach Gl. (6.47) durch den sich drehenden Zeiger

$$\underline{U} = U\, e^{\mathrm{j}\omega t} \tag{7.6}$$

wiedergeben. Den in Gl. (6.47) enthaltenen Nullphasenwinkel φ_u setzen wir aus Zweckmäßigkeitsgründen gleich Null. Die Anwendung des ohmschen Gesetzes liefert den Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{U}{R}\, e^{\mathrm{j}\omega t}. \tag{7.7}$$

Dieses Ergebnis besagt, dass zwischen den Beträgen (Effektivwerten) von Spannung und Strom die in Gl. (7.4) angegebene Beziehung $I = U/R$ besteht. Weiterhin erkennen wir, dass die in den Gln. (7.6) und (7.7) dargestellten rotierenden Zeiger $\underline{U}$ und $\underline{I}$ in jedem beliebigen Zeitpunkt t die gleiche Richtung haben. Das bedeutet, dass Spannung und Strom in Phase sind. In Bild 7.1c sind die Zeiger von Spannung und Strom für den Zeitpunkt $t = 0$ dargestellt.

Die komplexe Rechnung liefert also - ebenso wie vorher die Rechnung nach dem analytischen Verfahren - sowohl den Effektivwert des Stromes als auch die gegenüber der Spannung bestehende Phasenlage.

7.1.2 Kreis mit Spule

An eine Wechselspannungsquelle werde jetzt nach Bild 7.2a eine Spule mit der Induktivität L angeschlossen. Der Wirkwiderstand sei vernachlässigbar klein. Weiterhin wollen wir annehmen, dass die Spule keinen Kern aus ferromagnetischem Material enthält.

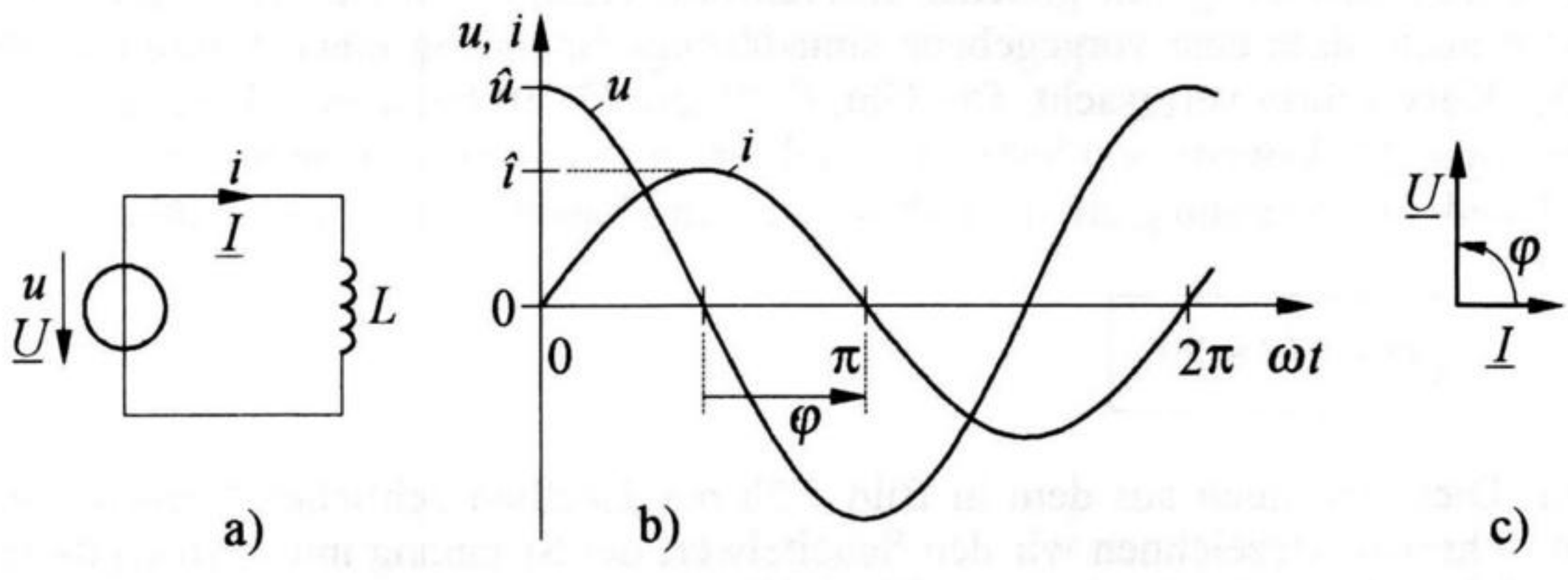


Bild 7.2 Kreis mit Spule. a) Schaltung, b) Verlauf von Spannung und Strom, c) zugehöriges Zeigerdiagramm

Der im Kreis fließende Strom i erzeugt in der Spule ein magnetisches Feld, das sich mit dem Strom ändert. Hierdurch kommt es - wie in Abschnitt 5.9 beschrieben - zu einer Spannungsinduktion, die man bekanntlich als **Selbstinduktion** be-

zeichnet. Dabei besteht (bei vernachlässigbarem Wirkwiderstand) in Bild 7.2a zwischen den Augenblickswerten von Spannung und Strom nach Gl. (5.61) die Beziehung

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{7.8}$$

Gl. (7.8) besagt, dass die Spannung u stets gleich der durch die Änderung des magnetischen Flusses verursachten Selbstinduktionsspannung $L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ ist. Im vorliegenden Fall wird u durch die vorhandene Spannungsquelle vorgegeben. Hierbei folgt aus Gl. (7.8), dass der Strom i bei positiver Spannung u zunimmt und bei Spannungswerten mit entgegengesetzter Polarität abnimmt. Es stellt sich jetzt die Frage, welchen zeitlichen Verlauf der Strom i hat, wenn sich die anliegende Spannung sinusförmig ändert. Die Ermittlung dieses Stromverlaufs (bei vorgegebener Spannung) wollen wir in der Weise vornehmen, dass wir zunächst für den Strom einen Verlauf in der Form

$$i = \hat{i}\,\sin\omega t \tag{7.9}$$

vorgeben. Dann erhalten wir durch Anwendung von Gl. (7.8) für den zeitlichen Verlauf der Spannung

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}(\hat{i}\,\sin\omega t)}{\mathrm{d}t} = \hat{i}\,\omega L\cos\omega t\,. \tag{7.10}$$

Das Ergebnis besagt, dass zur Erzeugung eines Stromes mit sinusförmiger Kurvenform eine Spannung mit gleicher Kurvenform erforderlich ist. Damit gilt umgekehrt auch, dass eine vorgegebene sinusförmige Spannung einen Strom mit gleicher Kurvenform verursacht. Die Gln. (7.9) und (7.10) besagen jedoch auch, dass die Augenblickswerte von Spannung und Strom (u und i) *nicht* einander proportional sind. Die Spannung eilt dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel

$$\boxed{\varphi = \pi/2 = 90^\circ} \tag{7.11}$$

vor. Dies geht auch aus dem in Bild 7.2b dargestellten zeitlichen Verlauf von u und i hervor. Bezeichnen wir den Scheitelwert der Spannung mit $\hat{u}$, so ergibt sich der Scheitelwert des Stromes aus Gl. (7.10), wenn wir für ωt Null einsetzen, als

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\omega L}. \tag{7.12}$$

Wir teilen beide Seiten durch $\sqrt{2}$ und erhalten als Beziehung zwischen den Effektivwerten von Spannung und Strom

$$\boxed{I = \frac{U}{\omega L}.} \tag{7.13}$$

Vergleicht man Gl. (7.13) mit dem ohmschen Gesetz $I = U/R$, so entspricht der Ausdruck ωL formal dem eines Widerstandes. Für den Ausdruck ωL kann auch die Symbole X oder X_{L} verwendet werden, so dass gilt

$$\boxed{X_{\mathrm{L}} = \omega L.} \tag{7.14}$$

Man bezeichnet diese Größe als **Blindwiderstand**, als **Reaktanz** oder als **induktiven Blindwiderstand.** Er ist der Frequenz proportional (im Gegensatz zum ohmschen Widerstand, der unabhängig von der Frequenz ist). Als Einheit verwendet man - ebenso wie für den Wirkwiderstand - **Ohm** (Ω). Der Kehrwert des Blindwiderstandes heißt **Blindleitwert** oder **Suszeptanz** oder **induktiver Blindleitwert.** Als Symbol wird B oder B_{L} verwendet und als Einheit **Siemens** (S). Zur Unterscheidung von dem in Abschnitt 7.1.3 erläuterten kapazitiven Blindleitwert (B_{C}) wird der induktive Blindleitwert vielfach durch *negative Zahlenwerte* angegeben. Unter dieser Voraussetzung gilt

$$\boxed{B_{\mathrm{L}} = -\frac{1}{\omega L}.} \tag{7.15}$$

In *komplexer* Darstellung wird aus Gl. (7.8)

$$\underline{U} = L\frac{\mathrm{d}\underline{I}}{\mathrm{d}t}. \tag{7.16}$$

Geben wir den Strom analog zu Gl. (7.6) in der Form des sich drehenden Zeigers

$$\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{7.17}$$

vor, so erhalten wir durch Anwendung von Gl. (7.16) für die Spannung

$$\underline{U} = \mathrm{j}\omega L\, I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L\,\underline{I}. \tag{7.18}$$

Das Ergebnis besagt zum einen, dass zwischen den Beträgen (Effektivwerten) von Spannung und Strom die in Gl. (7.13) angegebene Beziehung $U = I\,\omega L$ besteht, und dass zum anderen der Spannungszeiger $\underline{U}$ um 90° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gegenüber dem Stromzeiger $\underline{I}$ gedreht wird. Letzteres bedeutet, dass die Spannung gegenüber dem Strom - in Übereinstimmung mit Gl. (7.11) - um $\varphi = 90°$ voreilt. Dies geht auch aus dem Zeigerdiagramm nach Bild 7.2c hervor. Unter Berücksichtigung von Gl. (7.14) bezeichnet man den in Gl. (7.18) enthaltenen Ausdruck

$$\boxed{\mathrm{j}X_\mathrm{L} = \mathrm{j}\omega L.} \tag{7.19}$$

als **Impedanz** der Spule. Der Kehrwert von $\mathrm{j}X_\mathrm{L}$

$$\boxed{\mathrm{j}B_\mathrm{L} = \frac{1}{\mathrm{j}X_\mathrm{L}} = -\mathrm{j}\frac{1}{X_\mathrm{L}} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega L}} \tag{7.20}$$

heißt **Admittanz**. Teilen wir Gl. (7.20) durch j, so ergibt sich der **Blindleitwert**

$$B_\mathrm{L} = -\frac{1}{\omega L}. \tag{7.21}$$

Er nimmt bei Anwendung der komplexen Rechnung - in Übereinstimmung mit Gl. (7.15) - *negative* Werte an.

Aufgabe 7.1

Eine Spule mit der Induktivität L = 10 mH ist an einer Spannungsquelle angeschlossen, die eine sinusförmige Spannung der Frequenz f = 800 Hz liefert. Der im Kreis fließende Strom hat den Effektivwert I = 120 mA. Der Wirkwiderstand der Spule sei vernachlässigbar klein.

Wie groß ist der Effektivwert U der anliegenden Spannung?

Lösung

Die Spule hat nach Gl. (7.14) den Blindwiderstand

$$X_\mathrm{L} = \omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 800\,\mathrm{Hz} \cdot 0{,}01\,\mathrm{H} = 50{,}27\,\Omega.$$

Damit beträgt der Effektivwert der Spannung nach Gl. (7.13)

$$U = X_\mathrm{L}\, I = 50{,}27\,\Omega \cdot 0{,}12\,\mathrm{A} = \underline{6{,}03\,\mathrm{V}}.$$

7.1.3 Kreis mit Kondensator

Jetzt wollen wir einen elektrischen Kreis betrachten, der nach Bild 7.3a aus einer Wechselspannungsquelle und einem Kondensator mit der Kapazität C besteht. Da die Spannung u dauernd ihre Höhe und ihre Richtung ändert, wird der Kondensator ständig aufgeladen und entladen. Zwischen den Augenblickswerten der Span-

nung u und der im Kondensator gespeicherten Ladung q besteht nach Gl. (3.22) die Beziehung

$$q = C\,u\,. \tag{7.22}$$

Wird die Spannung beispielsweise um du erhöht, so nimmt die gespeicherte Ladung um

$$\mathrm{d}q = C\,\mathrm{d}u$$

zu. Diese Ladungsänderung kann auch durch

$$\mathrm{d}q = i\,\mathrm{d}t$$

dargestellt werden, wobei i der Augenblickswert des fließenden Ladestromes ist und dt diejenige Zeit, in der die Ladungsänderung um dq erfolgt. Durch Gleichsetzen wird

$$i\,\mathrm{d}t = C\,\mathrm{d}u\,.$$

Hieraus folgt

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,.} \tag{7.23}$$

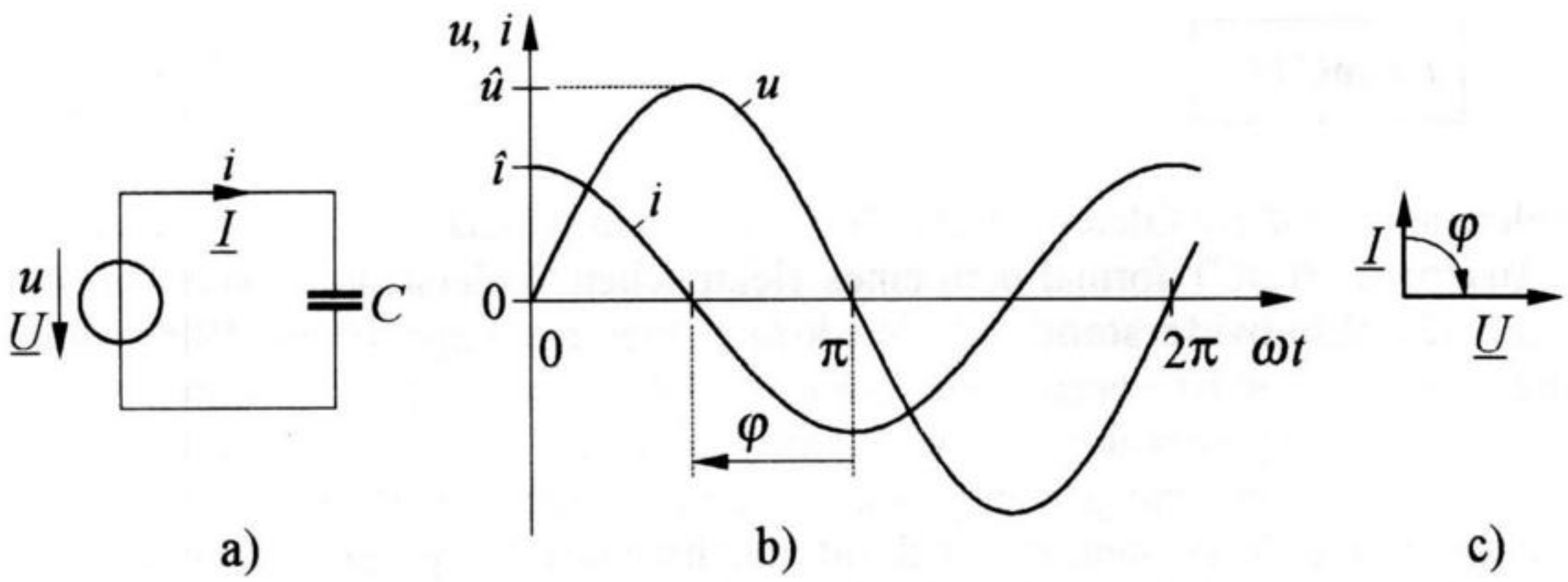


Bild 7.3 Kreis mit Kondensator. a) Schaltung, b) Verlauf von Spannung und Strom, c) zugehöriges Zeigerdiagramm

Geben wir die von der Spannungsquelle in Bild 7.3a gelieferte Spannung durch

$$u = \hat{u}\sin\omega t \tag{7.24}$$

vor, so erhalten wir durch Anwendung von Gl. (7.23) für den zeitlichen Verlauf des Stromes

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}(\hat{u}\sin\omega t)}{\mathrm{d}t} = \omega C\,\hat{u}\cos\omega t. \tag{7.25}$$

Die Kurvenform des Stromes stimmt also auch hier wieder mit der der Spannung überein. Jedoch besteht eine Phasenverschiebung zwischen beiden Größen. Der Strom eilt der Spannung um 90° vor, was auch aus der grafischen Darstellung des zeitlichen Verlaufs in Bild 7.3b hervorgeht. Bei der Angabe des Phasenverschiebungswinkels φ geht man - wie auch in Abschnitt 7.1 erläutert - im Allgemeinen vom Strom aus und gibt den Winkel an, um den die Spannung gegenüber dem Strom verschoben ist. Das führt im vorliegenden Fall zu dem Ergebnis

$$\boxed{\varphi = -90°.} \tag{7.26}$$

Das negative Vorzeichen besagt, dass die Spannung gegenüber dem Strom **nacheilend** phasenverschoben ist. Aus Gl. (7.25) folgt für die *Scheitelwerte* von Strom und Spannung die Beziehung

$$\hat{i} = \omega C\,\hat{u}. \tag{7.27}$$

Wir teilen beide Seiten durch $\sqrt{2}$ und erhalten so wir für die Effektivwerte

$$\boxed{I = \omega C\,U.} \tag{7.28}$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit dem ohmschen Gesetz $U = I\,R$, so entspricht der Ausdruck $1/(\omega C)$ formal dem eines elektrischen Widerstandes. Man bezeichnet ihn als **Blindwiderstand**, als **Reaktanz** oder als **kapazitiven Blindwiderstand**. Diese Größe ist - ebenso wie der in Gl. (7.14) angegebene Blindwiderstand einer Spule - frequenzabhängig. Während jedoch der induktive Blindwiderstand mit steigender Frequenz größer wird, zeigt der kapazitive Blindwiderstand das entgegengesetzte Verhalten. Er wird mit zunehmender Frequenz kleiner. Zur Unterscheidung vom induktiven Blindwiderstand (X_L) wird der kapazitive Blindwiderstand (X_C) im Allgemeinen durch *negative* Zahlenwerte angegeben. Das bedeutet, dass

$$\boxed{X_\mathrm{C} = -\frac{1}{\omega C}} \tag{7.29}$$

ist. Der Kehrwert des Blindwiderstandes heißt **Blindleitwert** oder **Suszeptanz** oder **kapazitiver Blindleitwert** (Symbol: B_C). Er wird durch positive Zahlenwerte angegeben, so dass gilt

$$\boxed{B_C = \omega C = -\frac{1}{X_C}.} \tag{7.30}$$

In *komplexer* Darstellung wird aus Gl. (7.23)

$$\underline{I} = C\frac{\mathrm{d}\underline{U}}{\mathrm{d}t}. \tag{7.31}$$

Stellen wir die am Kondensator anliegende Spannung nach Gl. (7.6) durch den sich drehenden Zeiger

$$\underline{U} = U\,e^{\mathrm{j}\omega t} \tag{7.32}$$

dar, so erhalten wir durch Anwendung von Gl. (7.31) für den Strom

$$\underline{I} = \mathrm{j}\omega C\,U\,e^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega C\,\underline{U}. \tag{7.33}$$

Dieses Ergebnis beinhaltet zum einen, dass zwischen den Beträgen (Effektivwerten) von Spannung und Strom die in Gl. (7.28) angegebene Beziehung $I = \omega C\,U$ besteht. Zum anderen ist $\underline{I}$ um 90° entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn gegenüber $\underline{U}$ gedreht, wie auch aus der Darstellung der Zeiger in Bild 7.3c hervorgeht. Das bedeutet, dass - in Übereinstimmung mit dem in Gl. (7.26) angegebenen Ergebnis - der Strom gegenüber der Spannung um 90° voreilt. Unter Berücksichtigung von Gl. (7.30) bezeichnet man den in Gl. (7.33) enthaltenen Ausdruck

$$\boxed{\mathrm{j}B_C = \mathrm{j}\omega C} \tag{7.34}$$

als **Admittanz** des Kondensators. Der Kehrwert

$$\boxed{\mathrm{j}X_C = \frac{1}{\mathrm{j}B_C} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}} \tag{7.35}$$

heißt **Impedanz**. Teilen wir Gl. (7.35) durch j, so erhalten wir den Blindwiderstand

$$X_C = -\frac{1}{B_C} = -\frac{1}{\omega C}.$$

Er nimmt bei Anwendung der komplexen Rechnung - in Übereinstimmung mit Gl. (7.30) - negative Werte an.

Aufgabe 7.2

Ein an einer sinusförmigen Wechselspannung mit dem Effektivwert $U = 110$ V liegender Kondensator nimmt einen Strom mit dem Effektivwert $I = 120$ mA auf. Die Frequenz beträgt $f = 500$ Hz.

Wie groß ist die Kapazität C des Kondensators?

Lösung

Der Blindleitwert des Kondensators ergibt sich aus Gl. (7.30) in Verbindung mit Gl. (7.28) als

$$B_C = \omega C = \frac{I}{U} = \frac{0{,}12\ \text{A}}{110\ \text{V}} = 1{,}09 \cdot 10^{-3}\ \text{S}.$$

Damit beträgt die gesuchte Kapazität

$$C = \frac{B_C}{\omega} = \frac{1{,}09 \cdot 10^{-3}\ \text{S}}{2\pi \cdot 500\ \text{Hz}} = 347 \cdot 10^{-9}\ \text{F} = \underline{347\ \text{nF}}.$$

7.1.4 Kreis mit Spule und Reihenwiderstand

An eine Wechselspannungsquelle sei jetzt nach Bild 7.4a eine Reihenschaltung aus einer Spule mit der Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R angeschlossen.

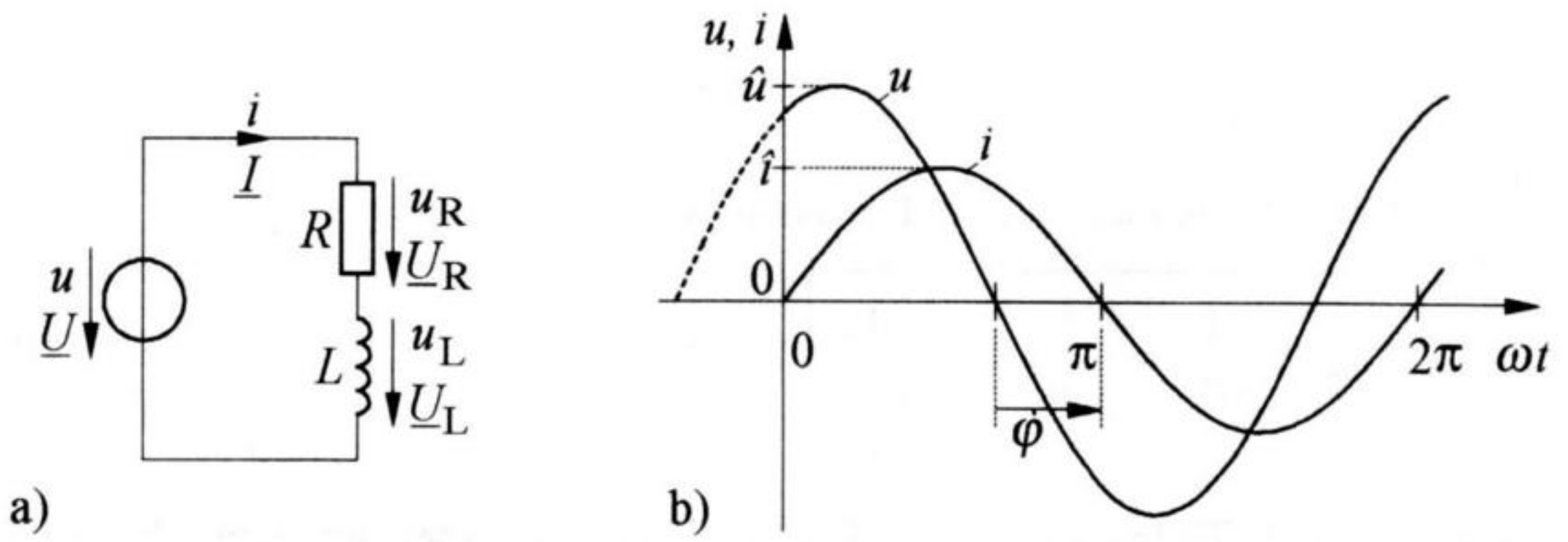


Bild 7.4 Kreis mit Spule und Reihenwiderstand. a) Schaltung, b) zeitlicher Verlauf von Spannung und Strom

In analytischer Darstellungsweise gilt für die Augenblickswerte der Spannungen in Bild 7.4a

$$u = u_R + u_L. \tag{7.36}$$

Nach den bisher gewonnenen Erkenntnissen ist zu erwarten, dass bei sinusförmiger Versorgungsspannung der Strom ebenfalls sinusförmig verläuft, und dass dabei zwischen Spannung und Strom ein Phasenverschiebungswinkel besteht, der zwischen 0° und 90° liegt. Wir verwenden daher für den Strom den Ansatz

$$i = \hat{i} \sin \omega t \tag{7.37}$$

und stellen die sinusförmige Versorgungsspannung in der Form

$$u = \hat{u} \sin (\omega t + \varphi) \tag{7.38}$$

dar. Hierbei sind $\hat{u}$ und ω als gegeben anzusehen, während $\hat{i}$ und φ die zu bestimmenden Größen sind. Setzen wir Gl. (7.38) in Gl. (7.36) ein, und berücksichtigen wir, dass $u_R = Ri$ ist und $u_L = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, so erhalten wir

$$\hat{u} \sin (\omega t + \varphi) = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \tag{7.39}$$

Durch Einsetzen von Gl. (7.37) in Gl. (7.39) ergibt sich

$$\hat{u} \sin (\omega t + \varphi) = R\,\hat{i} \sin \omega t + \omega L\,\hat{i} \cos \omega t. \tag{7.40}$$

Diese Gleichung muss für jeden beliebigen Wert von ωt gelten. Für $\omega t = -\varphi$ wird aus Gl. (7.40)

$$0 = R\,\hat{i} \sin (-\varphi) + \omega L\,\hat{i} \cos (-\varphi). \tag{7.41}$$

Daraus ergibt sich der gesuchte Phasenverschiebungswinkel

$$\boxed{\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R}.} \tag{7.42}$$

Zur Bestimmung von $\hat{i}$ setzen wir in Gl. (7.40) den Wert $\omega t = (90° - \varphi)$ ein. Hierdurch erhalten wir

$$\hat{u} \sin 90° = R\,\hat{i} \sin (90° - \varphi) + \omega L\,\hat{i} \cos (90° - \varphi).$$

Dafür können wir auch schreiben

$$\hat{u} = R\,\hat{i} \cos \varphi + \omega L\,\hat{i} \sin \varphi. \tag{7.43}$$

Quadrieren wir die Gln. (7.41) und (7.43), so erhalten wir

$$0 = R^2\,\hat{i}^2 \sin^2\varphi + (\omega L)^2\,\hat{i}^2 \cos^2\varphi - 2\,R\,\omega L\,\hat{i}^2 \sin\varphi\,\cos\varphi,$$

$$\hat{u}^2 = R^2\,\hat{i}^2 \cos^2\varphi + (\omega L)^2\,\hat{i}^2 \sin^2\varphi + 2\,R\,\omega L\,\hat{i}^2 \sin\varphi\,\cos\varphi.$$

Die Addition dieser beiden Gleichungen ergibt, wenn wir berücksichtigen, dass $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ ist

$$\hat{u}^2 = R^2\,\hat{i}^2 + (\omega L)^2\,\hat{i}^2.$$

Hieraus folgt für den gesuchten Scheitelwert des Stromes

$$\hat{i} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \tag{7.44}$$

Damit ist der zeitliche Verlauf des Stromes bekannt. In Bild 7.4b sind Strom und Spannung in Abhängigkeit von ωt grafisch dargestellt. Aus Gl. (7.44) folgt für die Effektivwerte von Strom und Spannung, wenn wir durch $\sqrt{2}$ teilen,

$$\boxed{I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}.} \tag{7.45}$$

Man bezeichnet den hierin auf der rechten Seite im Nenner enthaltenen Ausdruck als **Scheinwiderstand** (Symbol: Z). Es gilt also

$$\boxed{Z = \frac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.} \tag{7.46}$$

Der Wirkwiderstand R und der in Reihe liegende Blindwiderstand ωL werden also nicht arithmetisch addiert, sondern nach Gl. (7.46) zum Scheinwiderstand Z zusammengefasst. Die am Wirkwiderstand R liegende Spannung beträgt

$$\boxed{U_\mathrm{R} = I\,R} \tag{7.47}$$

und die am Blindwiderstand ωL auftretende Spannung

$$\boxed{U_\mathrm{L} = I\,\omega L.} \tag{7.48}$$

Wir wollen jetzt die in Bild 7.4a dargestellte Schaltung noch einmal betrachten mit der Maßgabe, dass die entsprechenden Gleichungen in *komplexer Darstellung* angegeben werden. Die in der Schaltung auftretenden Teilspannungen können wir nach den Gln. (7.7) und (7.18) durch

$$\underline{U}_{\mathrm{R}} = R\,\underline{I}, \tag{7.49}$$

$$\underline{U}_{\mathrm{L}} = \mathrm{j}\omega L\ \underline{I} \tag{7.50}$$

darstellen, so dass die Gesamtspannung unter Anwendung des zweiten Kirchhoff'schen Gesetzes als

$$\underline{U} = \underline{U}_{\mathrm{R}} + \underline{U}_{\mathrm{L}} = R\,\underline{I} + \mathrm{j}\omega L\,\underline{I} \tag{7.51}$$

wiedergegeben werden kann. Daraus folgt für den Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + \mathrm{j}\omega L} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}, \tag{7.52}$$

wobei der hierin enthaltenen komplexe Ausdruck

$$\boxed{\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L} \tag{7.53}$$

als **Impedanz** bezeichnet wird. Für die weiteren Betrachtungen wollen wir die Größen $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{U}_{\mathrm{R}}$ und $\underline{U}_{\mathrm{L}}$ gemeinsam in einem Zeigerdiagramm darstellen. Dazu ist die in Bild 7.4a angegebene Schaltung noch einmal in Bild 7.5a dargestellt. Wir wählen zunächst eine der genannten Größen aus und legen ihre Richtung beliebig fest. Im vorliegenden Fall bietet sich hierfür der Strom $\underline{I}$ an, da keine weiteren Ströme auftreten. Wir tragen $\underline{I}$, wie in Bild 7.5b dargestellt, willkürlich waagerecht ab und bezeichnen diese Größe als *Bezugsgröße*.

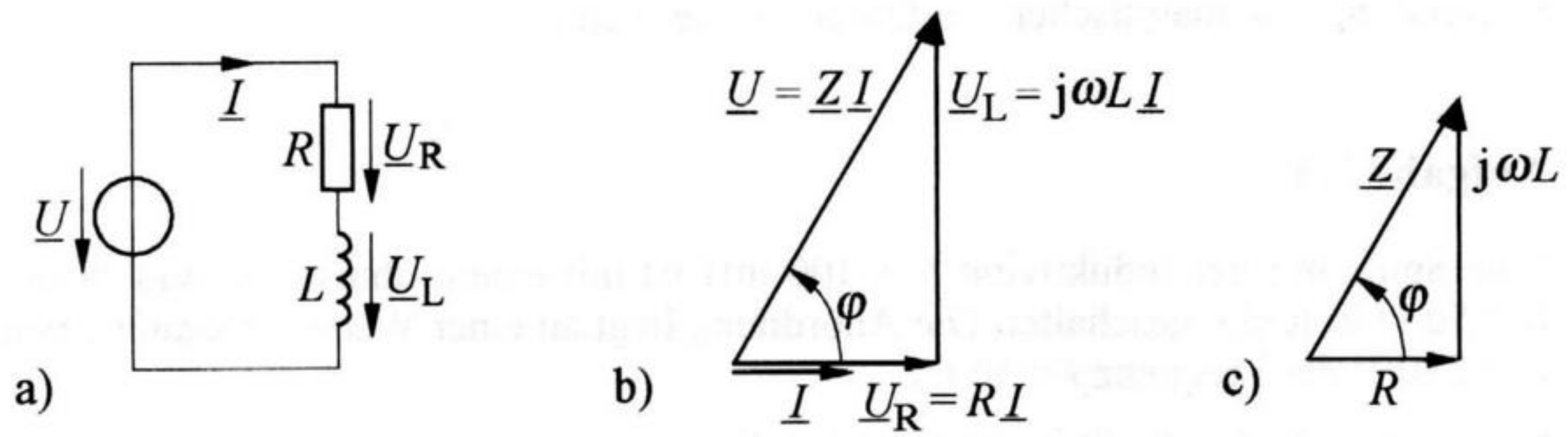


Bild 7.5 a) Reihenschaltung aus Spule und Wirkwiderstand. b) Zugehöriges Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes, c) zugehöriges Widerstandsdreieck

Die Teilspannung $\underline{U}_{\mathrm{R}} = R\,\underline{I}$ ist mit dem Strom $\underline{I}$ in Phase. Beide Größen haben daher im Zeigerdiagramm die gleiche Richtung. Dagegen eilt die Teilspannung

$\underline{U}_L = j\omega L\,\underline{I}$ dem Strom $\underline{I}$ um 90° vor. $\underline{U}_L$ zeigt daher in Bild 7.5b nach oben. Die geometrische Summe der Teilspannungen $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_L$ ergibt nach Gl. (7.51) die Gesamtspannung $\underline{U}$. Sie kann nach Gl. (7.52) auch durch $\underline{U} = \underline{I}\,\underline{Z}$ dargestellt werden. Der in Bild 7.5b eingetragene Winkel φ stellt den Phasenverschiebungswinkel dar, um den die Spannung gegenüber dem Strom voreilt. Teilen wir in Bild 7.5b alle Spannungen durch den Strom $\underline{I}$, so erhalten wir das in Bild 7.5c dargestellte **Widerstandsdreieck**. Beide Dreiecke sind einander ähnlich. Ihre Winkel stimmen also überein. Aus den Bildern 7.5b und 7.5c können wir eine Reihe von Beziehungen ablesen. Beispielsweise gilt für den Phasenverschiebungswinkel

$$\boxed{\varphi = \arctan \frac{U_L}{U_R} = \arctan \frac{\omega L}{R}.} \tag{7.54}$$

Die Impedanz, deren Betrag Z in Gl. (7.46) angegeben ist, lässt sich darstellen als

$$\boxed{\underline{Z} = Z\,e^{j\varphi}.}$$

Für die Beträge der Teilspannungen gilt

$$U_R = U\cos\varphi = R\,I, \tag{7.55}$$

$$U_L = U\sin\varphi = \omega L\,I. \tag{7.56}$$

Abschließend sei eine Anmerkung zur Rechenmethode gegeben. Im vorstehenden Abschnitt hat sich gezeigt, dass zur Berechnung von Wechselstromkreisen die im ersten Teil angewendete Darstellung im reellen Zeitbereich (analytische Methode) wesentlich aufwendiger ist als die anschließend durchgeführte komplexe Darstellung. Dies wollen wir zum Anlass nehmen, nachfolgend auf die weitere Anwendung des analytischen Verfahrens zu verzichten.

Aufgabe 7.3

Eine Spule mit der Induktivität L = 100 mH ist mit einem ohmschen Widerstand R = 50 Ω in Reihe geschaltet. Die Anordnung liegt an einer Wechselspannung von U = 230 V der Frequenz f = 50 Hz.

a) Welcher Strom I fließt in der Schaltung?

b) Wie groß ist der Phasenverschiebungswinkel φ, um den die Spannung gegenüber dem Strom voreilt?

c) Wie groß sind die am ohmschen Widerstand und an die an der Spule auftretenden Teilspannungen U_R und U_L?

Lösung

a) Die Spule hat bei der angegebenen Frequenz nach Gl. (7.14) den Blindwiderstand

$$\omega L = 2\pi f L = 2\pi \cdot 50\ \text{Hz} \cdot 0{,}1\ \text{H} = 31{,}4\ \Omega,$$

so dass der Scheinwiderstand der Reihenschaltung nach Gl. (7.46)

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{50^2 + 31{,}4^2}\ \Omega = 59{,}1\,\Omega$$

beträgt. In der Reihenschaltung fließt nach Gl. (7.52) somit der Strom

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{230\ \text{V}}{59{,}1\,\Omega} = \underline{3{,}89\ \text{A}}.$$

b) Nach Gl. (7.54) beträgt der Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R} = \arctan \frac{31{,}4\ \Omega}{50\ \Omega} = \underline{32{,}1°}$$

c) Am ohmschen Widerstand liegt nach Gl. (7.55) die Spannung

$$U_\text{R} = R I = 50\,\Omega \cdot 3{,}89\ \text{A} = \underline{195\ \text{V}}$$

und an der Spule nach Gl. (7.56)

$$U_\text{L} = \omega L I = 31{,}4\ \Omega \cdot 3{,}89\ \text{A} = \underline{122\ \text{V}}.$$

7.1.5 Kreis mit Kondensator und Reihenwiderstand

Wir betrachten jetzt die in Bild 7.6a dargestellte Schaltung, in der ein Kondensator mit der Kapazität C über einen ohmschen Widerstand R mit einer Wechselspannungsquelle verbunden ist. Der im Kreis fließende Strom $\underline{I}$ führt nach den Gln. (7.7) und (7.33) zu den Teilspannungen

$$\underline{U}_\text{R} = R\underline{I}, \tag{7.57}$$

$$\underline{U}_\text{C} = \frac{1}{\text{j}\omega C}\,\underline{I} = -\text{j}\frac{1}{\omega C}\,\underline{I}. \tag{7.58}$$

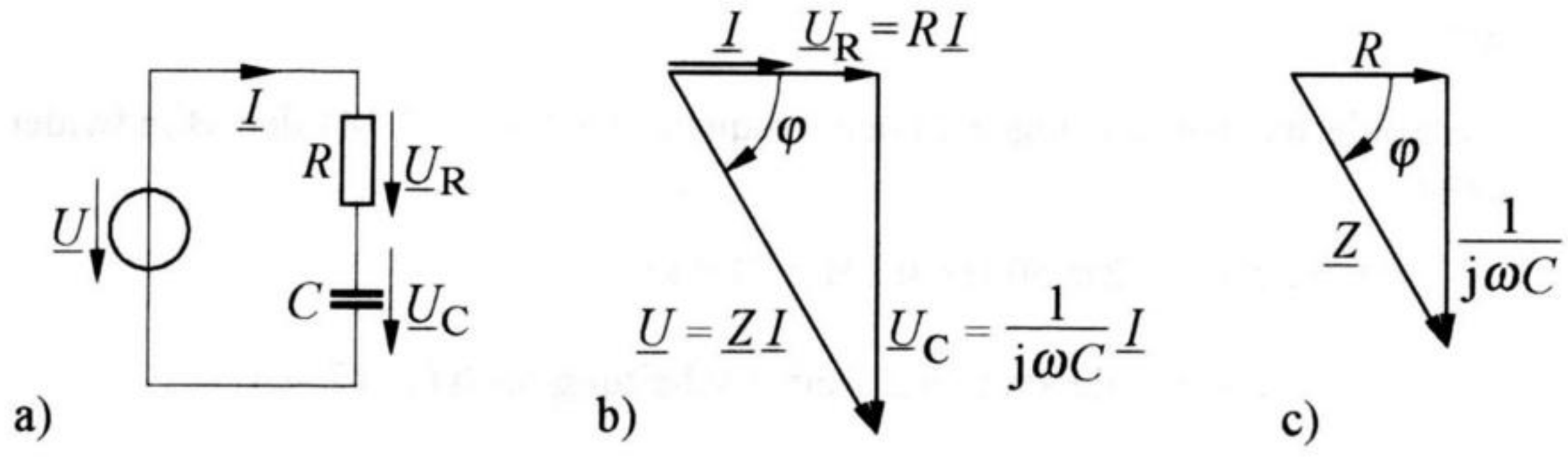


Bild 7.6 Kreis mit Kondensator und Reihenwiderstand. a) Schaltung, b) Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes, c) Widerstandsdreieck

Damit gilt für die Gesamtspannung in Bild 7.6a

$$\underline{U} = \underline{U}_{\mathrm{R}} + \underline{U}_{\mathrm{C}} = \left(R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}. \tag{7.59}$$

Hieraus folgt für den Strom

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R - \mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}\,.} \tag{7.60}$$

Der in dieser Gleichung auf der rechten Seite im Nenner enthaltene Ausdruck wird als **Impedanz** (Symbol: $\underline{Z}$) bezeichnet, so dass gilt

$$\boxed{\underline{Z} = R - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\,.} \tag{7.61}$$

Der Betrag der Impedanz

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{7.62}$$

heißt **Scheinwiderstand**. Damit gilt für den Betrag (Effektivwert) des Stromes

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}\,. \tag{7.63}$$

Für die weiteren Betrachtungen konstruieren wir zunächst ein Zeigerdiagramm nach Bild 7.6b. Dazu wählen wir den Strom $\underline{I}$ als Bezugsgröße und tragen ihn waagerecht ab. Die Teilspannung $\underline{U}_R$ ist mit $\underline{I}$ in Phase, während die Teilspannung $\underline{U}_C$ dem Strom um 90° nacheilt. Die geometrische Addition von $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$ ergibt die Gesamtspannung $\underline{U}$. Teilen wir in Bild 7.6b alle Spannungen durch den Strom $\underline{I}$, so erhalten wir das in Bild 7.6c dargestellte **Widerstandsdreieck**.

Aus den in Bild 7.6 dargestellten Diagrammen können wir eine Reihe von Beziehungen ablesen. Beispielsweise gilt für den Phasenverschiebungswinkel, um den die Spannung $\underline{U}$ gegenüber dem Strom $\underline{I}$ verschoben ist, nach Bild 7.6c

$$\boxed{\varphi = -\arctan \frac{1}{\omega C R}.} \tag{7.64}$$

Das negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, dass die Spannung gegenüber dem Strom *nacheilt* und entspricht der in den Diagrammen für φ eingetragenen Richtung. Aus Bild 7.6b ergeben sich die Gleichungen

$$U_R = U \cos \varphi, \tag{7.65}$$

$$U_C = U \sin \varphi, \tag{7.66}$$

wobei U_R und U_C die Beträge der in Bild 7.6a auftretenden Teilspannungen sind. Für den Betrag der Gesamtspannung gilt

$$U = \sqrt{U_R{}^2 + U_C{}^2}. \tag{7.67}$$

Aufgabe 7.4

Eine Glühlampe, die bei der Spannung $U_R = 230\,\text{V}$ den Strom $I = 0{,}27\,\text{A}$ aufnimmt, soll über einen Kondensator an die Spannung $U = 400\,\text{V}$ gelegt werden. Die Frequenz der Spannung beträgt $f = 50\,\text{Hz}$.

Welche Kapazität C muss der Kondensator haben, damit die Glühlampe an der Spannung $U_R = 230\,\text{V}$ liegt?

Lösung

Die Glühlampe stellt einen ohmschen Widerstand dar, so dass die vorliegende Anordnung entsprechend Bild 7.6a als Reihenschaltung eines Wirkwiderstandes und eines Kondensators aufgefasst werden kann. Am Kondensator muss nach Gl. (7.67) daher eine Spannung mit dem Betrag

$$U_C = \sqrt{U^2 - U_R{}^2} = \sqrt{400^2 - 230^2}\ \text{V} = 327\ \text{V}$$

abfallen. Die erforderliche Kapazität ergibt sich aus Gl. (7.58) somit als

$$C = \frac{I}{\omega\, U_C} = \frac{0{,}27\ \text{A}}{2\pi \cdot 50\ \text{Hz} \cdot 327\ \text{V}} = 2{,}63 \cdot 10^{-6}\ \text{F} = \underline{2{,}63\ \mu\text{F}}.$$

7.1.6 Kreis mit Spule und Parallelwiderstand

An eine Spannungsquelle sei jetzt nach Bild 7.7a eine Parallelschaltung aus einer Spule mit der Induktivität L und einem ohmschen Widerstand R angeschlossen.

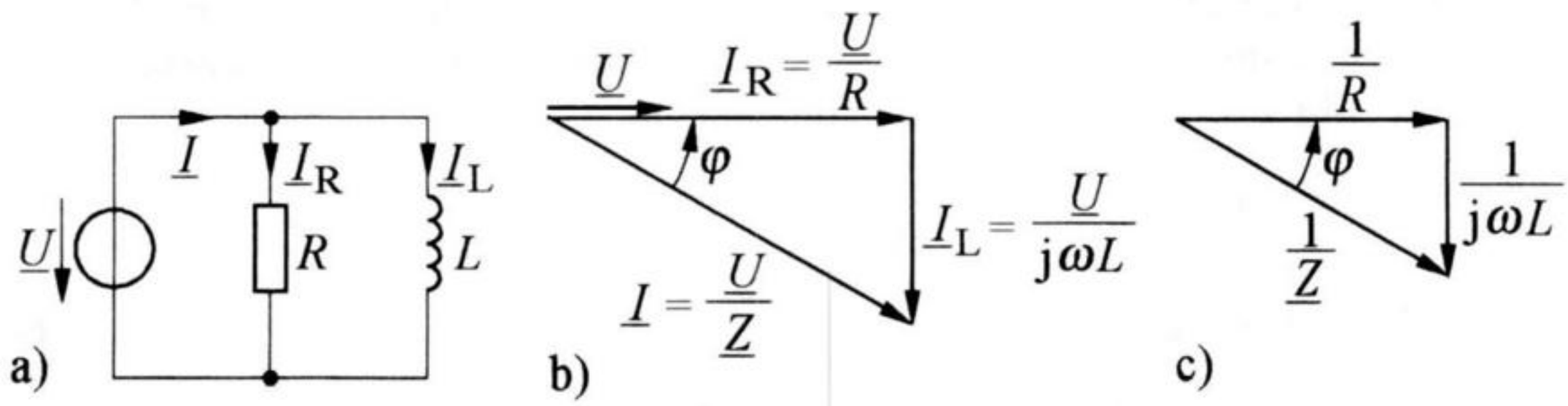


Bild 7.7 Kreis mit Spule und Parallelwiderstand. a) Schaltung, b) Zeigerdiagramm der Spannung und der Ströme, c) Leitwertdreieck

Die an der Parallelschaltung liegende Spannung $\underline{U}$ ruft die Teilströme

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}}{R}, \tag{7.68}$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{\mathrm{j}\omega L} = -\mathrm{j}\,\frac{\underline{U}}{\omega L} \tag{7.69}$$

hervor. Damit gilt für den Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \left(\frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L}\right)\underline{U}. \tag{7.70}$$

Man bezeichnet den hierin enthaltenen, auf der rechten Seite in Klammern stehenden Ausdruck als **Admittanz** (Symbol: $\underline{Y}$). Somit gilt

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L}.} \tag{7.71}$$

Die Admittanz besteht aus dem **Wirkleitwert**

$$\boxed{G = \frac{1}{R}} \tag{7.72}$$

sowie dem mit j multiplizierten **Blindleitwert**

$$\boxed{B_\mathrm{L} = -\frac{1}{\omega L}.} \tag{7.73}$$

und kann daher auch durch

$$\underline{Y} = G + \mathrm{j}B_\mathrm{L}$$

dargestellt werden. Der Betrag der Admittanz

$$\boxed{Y = \sqrt{G^2 + B_\mathrm{L}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}} \tag{7.74}$$

wird als **Scheinleitwert** bezeichnet. Damit gilt für den Betrag (Effektivwert) des Gesamtstromes

$$I = UY = U\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L}\right)^2}. \tag{7.75}$$

Für die weiteren Überlegungen konstruieren wir zunächst ein Zeigerdiagramm nach Bild 7.7b. Hierbei wählen wir die Spannung $\underline{U}$ als Bezugsgröße und tragen sie, wie angegeben, waagerecht ab. Der Teilstrom $\underline{I}_\mathrm{R}$ ist mit $\underline{U}$ in Phase, während der Teilstrom $\underline{I}_\mathrm{L}$ der Spannung um 90° nacheilt. Die geometrische Summe der beiden Teilströme ergibt den Gesamtstrom $\underline{I}$. Er kann auch, wie in Bild 7.7b dargestellt, durch

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

wiedergegeben werden, wobei $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ die **Impedanz** der Parallelschaltung darstellt. Teilen wir in Bild 7.7b alle Ströme durch die Spannung $\underline{U}$, so erhalten wir das in Bild 7.7c angegebene **Leitwertdreieck**.

Aus den beiden in Bild 7.7 angegebenen Diagrammen können wir eine Reihe von Beziehungen ablesen. So gilt beispielsweise für den Phasenverschiebungswinkel, um den die Spannung gegenüber dem Strom verschoben ist, nach Bild 7.7c

$$\boxed{\varphi = \arctan \frac{1/(\omega L)}{1/R}.} \tag{7.76}$$

Die Beträge (Effektivwerte) der in der Parallelschaltung auftretenden Teilströme ergeben sich aus Bild 7.7b als

$$\boxed{I_\mathrm{R} = I \cos\varphi,} \tag{7.77}$$

$$\boxed{I_\mathrm{L} = I \sin\varphi.} \tag{7.78}$$

Der Gesamtstrom hat den Betrag

$$\boxed{I = \sqrt{I_\mathrm{R}^{\,2} + I_\mathrm{L}^{\,2}}.} \tag{7.79}$$

Aufgabe 7.5

Eine nach Bild 7.7a aus einer Spule mit der Induktivität L = 100 mH und einem ohmschen Widerstand R = 300 Ω bestehende Parallelschaltung ist mit einer Spannungsquelle verbunden, die bei der Frequenz f = 800 Hz die Spannung U = 48 V liefert.

Wie groß ist der von der Spannungsquelle gelieferte Strom I, und um welchen Phasenverschiebungswinkel φ ist die Spannung gegenüber dem Strom verschoben?

Lösung

Die Spule hat den Blindwiderstand

$$\omega L = 2\pi \cdot 800\ \mathrm{Hz} \cdot 0{,}1\ \mathrm{H} = 503\ \Omega$$

und führt somit nach Gl. (7.69) einen Strom mit dem Betrag (Effektivwert)

$$I_{\mathrm{L}} = \frac{U}{\omega L} = \frac{48\ \mathrm{V}}{503\ \Omega} = 95{,}5\ \mathrm{mA}.$$

Im ohmschen Widerstand fließt nach Gl. (7.68) ein Strom mit dem Betrag (Effektivwert)

$$I_{\mathrm{R}} = \frac{U}{R} = \frac{48\ \mathrm{V}}{300\ \Omega} = 160\ \mathrm{mA},$$

so dass der Gesamtstrom nach Gl. (7.79) den Betrag

$$I = \sqrt{I_{\mathrm{R}}{}^2 + I_{\mathrm{L}}{}^2} = \sqrt{160^2 + 95{,}5^2}\ \mathrm{mA} = \underline{186\ \mathrm{mA}}$$

hat. Die Spannung ist gegenüber dem Strom nach Gl. (7.76) um den Winkel

$$\varphi = \arctan \frac{1/(\omega L)}{1/R} = \arctan \frac{300\ \Omega}{503\ \Omega} = \underline{30{,}8^\circ}$$

phasenverschoben. Der Strom eilt also der Spannung um 30,8° nach.

7.1.7 Kreis mit Kondensator und Parallelwiderstand

Wir betrachten jetzt die in Bild 7.8a dargestellte Schaltung, in der eine Parallelschaltung aus einem Kondensator mit der Kapazität C und einem ohmschen Widerstand R mit einer Spannungsquelle verbunden ist.

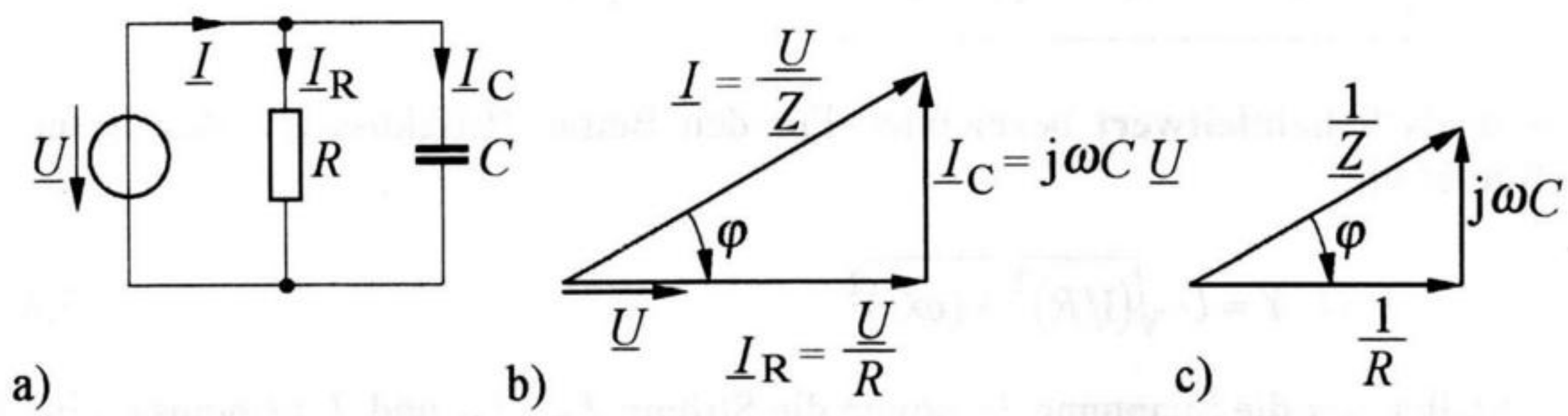


Bild 7.8 Kreis mit Kondensator und Parallelwiderstand. a) Schaltung, b) Zeigerdiagram der Spannung und der Ströme, c) Leitwertdreieck

Die Spannung $\underline{U}$ verursacht die Teilströme

$$\underline{I}_{\mathrm{R}} = \frac{\underline{U}}{R}, \tag{7.80}$$

$$I_{\mathrm{C}} = \mathrm{j}\omega C\,\underline{U}. \tag{7.81}$$

Somit gilt für den Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_{\mathrm{R}} + \underline{I}_{\mathrm{C}} = \frac{\underline{U}}{R} + \mathrm{j}\omega C\,\underline{U} = \underline{U}\left(\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C\right). \tag{7.82}$$

Der hierin enthaltene auf der rechten Seite in Klammern stehende Ausdruck stellt die **Admittanz** der Schaltung (Symbol: $\underline{Y}$) dar, so dass gilt

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C. \tag{7.83}$$

Die Admittanz besteht aus dem **Wirkleitwert**

$$\boxed{G = \frac{1}{R}} \tag{7.84}$$

und dem mit j multiplizierten **Blindleitwert**

$$\boxed{B_{\mathrm{C}} = \omega C.} \tag{7.85}$$

Der Betrag der Admittanz

$$\boxed{Y = \sqrt{G^2 + B_{\mathrm{C}}{}^2} = \sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}} \tag{7.86}$$

wird als **Scheinleitwert** bezeichnet. Für den Betrag (Effektivwert) des Gesamtstromes gilt

$$I = U\,Y = U\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}. \tag{7.87}$$

Stellen wir die Spannung $\underline{U}$ sowie die Ströme $\underline{I}_{\mathrm{R}}$, $\underline{I}_{\mathrm{C}}$ und $\underline{I}$ gemeinsam in einem Zeigerdiagramm dar, so erhalten wir die in Bild 7.8b angegebene Darstellung. Aus diesem Diagramm ergibt sich, wenn wir alle Ströme durch die Spannung $\underline{U}$ teilen, das in Bild 7.8c angegebene **Leitwertdreieck**. Der Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_{\mathrm{R}} + \underline{I}_{\mathrm{C}}$$

kann, wie in Bild 7.8b dargestellt, auch durch

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \tag{7.88}$$

angegeben werden, wobei $\underline{Z} = 1/\underline{Y}$ die **Impedanz** der Parallelschaltung ist. Aus den in Bild 7.8 angegebenen Diagrammen lassen sich weitere Beziehungen ablesen. So gilt für den Phasenverschiebungswinkel, um den die Spannung $\underline{U}$ gegenüber dem Strom $\underline{I}$ verschoben ist,

$$\boxed{\varphi = -\arctan\frac{I_{\mathrm{C}}}{I_{\mathrm{R}}} = -\arctan\frac{\omega C}{1/R}.} \tag{7.89}$$

Das in dieser Gleichung enthaltene negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, dass die Spannung gegenüber dem Strom *nacheilt*.

Aufgabe 7.6

In der Schaltung nach Bild 7.9a sollen die Kapazität C und die anliegende Spannung U so gewählt werden, dass beide Glühlampen an der Spannung $U_1 = U_2 = 230\ \mathrm{V}$ liegen. Die von den Glühlampen aufgenommenen Ströme betragen bei dieser Spannung $I_1 = 0{,}26\ \mathrm{A}$ und $I_2 = 0{,}17\ \mathrm{A}$.

Welche Werte sind für C und U erforderlich, wenn die Frequenz der Spannung $f = 50\ \mathrm{Hz}$ beträgt?

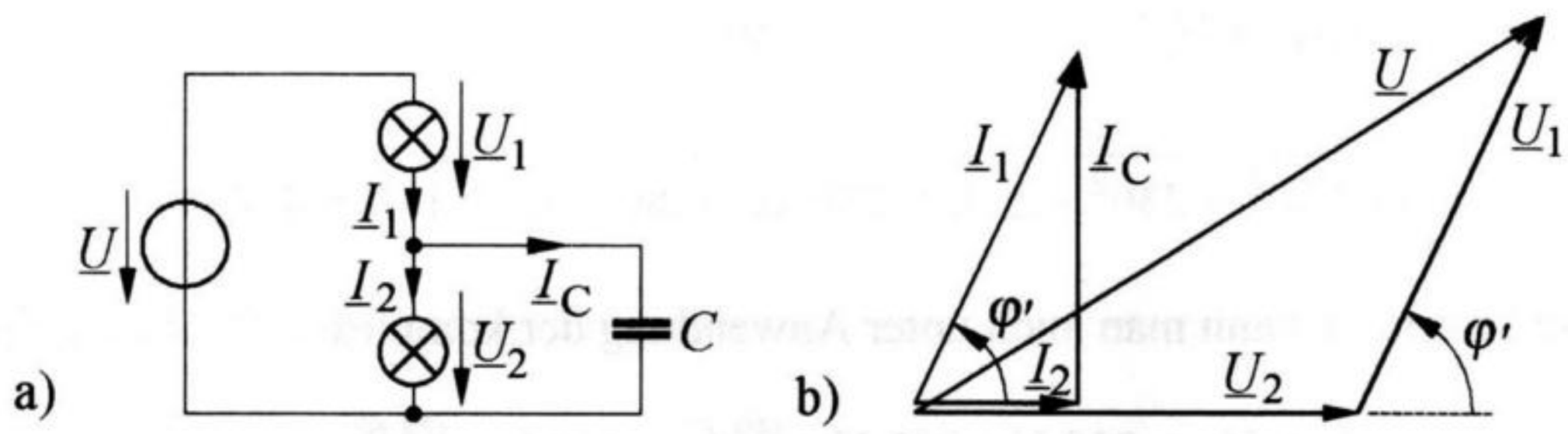


Bild 7.9 a) Schaltung zur Erzielung einer gleichmäßigen Spannungsaufteilung an in Reihe geschalteten Glühlampen, b) zugehöriges Zeigerdiagramm

Lösung

Zur Bestimmung der gesuchten Größen konstruieren wir zunächst ein Zeigerdiagramm nach Bild 7.9b. Dazu wählen wir die Spannung $\underline{U}_2$ als Bezugsgröße und tragen sie willkürlich waagerecht ab. Jede der beiden Glühlampen stellt einen Wirkwiderstand dar. Daher ist $\underline{I}_2$ mit $\underline{U}_2$ in Phase. Dagegen eilt der Strom $\underline{I}_C$ der Spannung $\underline{U}_2$ um 90° vor. Die geometrische Summe von $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_C$ muss aufgrund der Knotenregel gleich $\underline{I}_1$ sein. Aus Bild 7.9b ersehen wir, dass der Kondensator folglich einen Strom mit dem Betrag (Effektivwert)

$$I_C = \sqrt{I_1^2 - I_2^2} = \sqrt{0{,}26^2 - 0{,}17^2}\ \text{A} = 0{,}197\ \text{A}$$

aufnehmen muss. Die dazu erforderliche Kapazität ergibt sich bei der anliegenden Spannung U_2 aus

$$I_C = \omega C\, U_2$$

als

$$C = \frac{I_C}{\omega U_2} = \frac{0{,}197\ \text{A}}{2\pi \cdot 50\ \text{Hz} \cdot 230\ \text{V}} = \underline{2{,}72\ \mu\text{F}}.$$

Zur Bestimmung der Spannung U gehen wir von der Überlegung aus, dass $\underline{U}_1$ und $\underline{I}_1$ in Phase sind und die geometrische Summe der Spannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$ die gesuchte Spannung $\underline{U}$ ergibt. Wir ermitteln dazu zunächst den in Bild 7.9b eingetragenen Winkel φ'. Er hat den Wert

$$\varphi' = \arccos\frac{I_2}{I_1} = \arccos\frac{0{,}17\ \text{A}}{0{,}26\ \text{A}} = 49{,}2°.$$

Damit ergibt sich die gesuchte Spannung durch Anwendung des Kosinussatzes als

$$U = \sqrt{U_1^2 + U_2^2 - 2\, U_1 U_2 \cos(180° - \varphi')},$$

$$U = \sqrt{230^2 + 230^2 - 2 \cdot 230 \cdot 230 \cdot \cos(180° - 49{,}2°)}\ \text{V} = \underline{418\ \text{V}}.$$

Diese Spannung kann man auch unter Anwendung der komplexen Rechnung durch

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = 230\ \text{V} + 230\ \text{V} \cdot \text{e}^{\text{j}49{,}2°} = 418\ \text{V} \cdot \text{e}^{\text{j}24{,}6°}$$

ermitteln. Selbstverständlich ist auch eine zeichnerische Addition mit Hilfe eines maßstäblichen Zeigerdiagramms nach Bild 7.9b möglich.

7.1.8 Umwandlung von Reihen- und Parallelschaltung

Jede aus einem Wirk- und einem Blindwiderstand bestehende Reihenschaltung kann in eine elektrisch gleichwertige Parallelschaltung umgewandelt werden (und umgekehrt). Zur Erläuterung dieser Tatsache wollen wir als Beispiel eine Reihenschaltung aus einem ohmschen Widerstand R_1 und einem Blindwiderstand X_1 entsprechend Bild 7.10a vorgeben und diese in eine gleichwertige Parallelschaltung nach Bild 7.10b umwandeln.

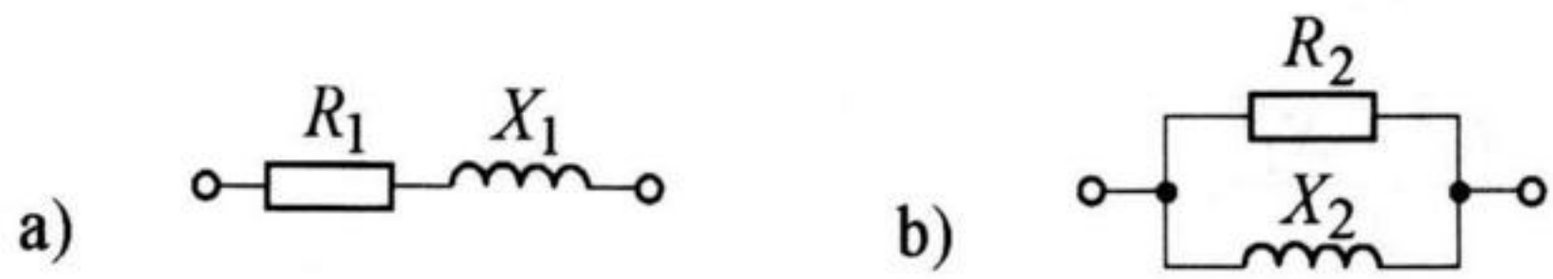


Bild 7.10 Zur Umwandlung einer ohmsch-induktiven Reihenschaltung (a) in eine gleichwertige Parallelschaltung (b) (und umgekehrt)

Dabei gehen wir von der Überlegung aus, dass die dargestellten Schaltungen dann elektrisch gleichwertig sind, wenn sie bei gleicher Spannung den gleichen Strom aufnehmen, und wenn darüber hinaus die zwischen Spannung und Strom bestehenden Phasenverschiebungswinkel übereinstimmen. Zur Erfüllung der genannten Bedingungen ist es erforderlich, dass die *Impedanzen* (oder die *Admittanzen*) beider Schaltungen gleich sind.

Die in Bild 7.10a dargestellte Reihenschaltung hat nach Gl. (7.53) die Impedanz

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1 \tag{7.90}$$

und damit die Admittanz

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + \mathrm{j}X_1}. \tag{7.91}$$

Für die Admittanz der in Bild 7.10b angegebenen Parallelschaltung gilt nach Gl. (7.71)

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{X_2}. \tag{7.92}$$

Durch Gleichsetzen der Gln. (7.91) und (7.92) erhalten wir

$$\frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{X_2} = \frac{1}{R_1 + \mathrm{j}X_1}. \tag{7.93}$$

Wir multiplizieren den Zähler und den Nenner der rechten Seite dieser Gleichung mit der konjugiert komplexen Größe des Nenners. Dadurch wird

$$\frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{X_2} = \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} - \mathrm{j}\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2}. \tag{7.94}$$

Hieraus ergeben sich die gesuchten Größen, wenn wir die Realteile und die Imaginärteile der Gleichung jeweils für sich gleichsetzen, als

$$R_2 = \frac{R_1^2 + X_1^2}{R_1}, \tag{7.95}$$

$$X_2 = \frac{R_1^2 + X_1^2}{X_1}. \tag{7.96}$$

Entsprechend lässt sich auch der entgegengesetzte Rechnungsweg vornehmen, der zur Umwandlung einer Parallelschaltung nach Bild 7.10b in eine gleichwertige Reihenschaltung nach Bild 7.10a führt. Ohmsch-kapazitve Schaltungen können in gleicher Weise umgewandelt werden. Sind in Schaltungen statt der Blindwiderstände die ihnen zugeordneten Induktivitäten oder Kapazitäten gegeben, so ist zu beachten, dass die Ergebnisse abhängig von der verwendeten Frequenz sind. Dies ist auch aus der folgenden Aufgabe 7.7 ersichtlich.

Aufgabe 7.7

Eine nach Bild 7.11a aus einem ohmschen Widerstand $R_1 = 180\,\Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C_1 = 1{,}5\,\mu\mathrm{F}$ bestehende Reihenschaltung soll für die Frequenz $f = 500\,\mathrm{Hz}$ in eine elektrisch gleichwertige Parallelschaltung nach Bild 7.11b umgewandelt werden.

Welche Werte sind für den ohmschen Widerstand R_2 und die Kapazität C_2 der entsprechenden Parallelschaltung erforderlich?

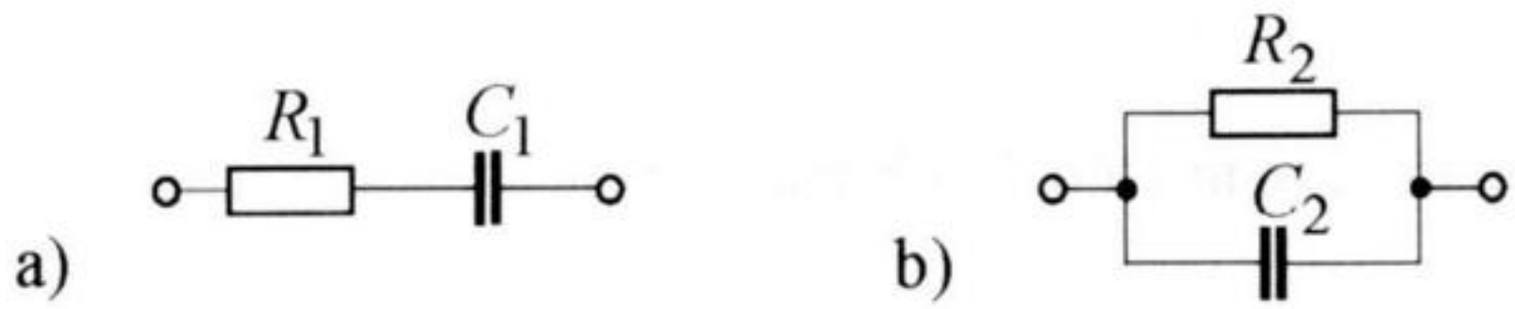


Bild 7.11 Umwandlung einer ohmsch-kapazitiven Reihenschaltung in eine elektrisch gleichwertige Parallelschaltung

Lösung

Die Reihenschaltung nach Bild 7.11a hat die Impedanz

$$\underline{Z}_1 = R_1 - \mathrm{j}\frac{1}{\omega C_1} = 180\,\Omega - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi \cdot 500\,\mathrm{Hz} \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = (180 - \mathrm{j}212)\,\Omega.$$

Damit beträgt die Admittanz der Schaltung

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{(180 - \mathrm{j}212)\,\Omega} = (2{,}32 + \mathrm{j}2{,}74)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}.$$

Berücksichtigen wir, dass die Admittanz der Parallelschaltung nach Bild 7.11b durch

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2$$

dargestellt werden kann, so erhalten wir durch Gleichsetzen von $\underline{Y}_2$ und $\underline{Y}_1$

$$\frac{1}{R_2} + \mathrm{j}\omega C_2 = (2{,}32 + \mathrm{j}2{,}74)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}.$$

Damit finden wir die Ergebnisse

$$R_2 = \frac{1}{2{,}32\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}} = \underline{430\,\Omega},$$

$$C_2 = \frac{2{,}74\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}}{2\pi\cdot 500\ \mathrm{Hz}} = 872\cdot 10^{-9}\ \mathrm{F} = \underline{872\ \mathrm{nF}}.$$

Aufgabe 7.8

Ein Verbraucher nimmt bei der Spannung $U = 48$ V den Strom $I = 0{,}30$ A auf. Dabei eilt die Spannung dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 60°$ vor.

a) Wie groß sind der Wirkwiderstand R_1 und der Blindwiderstand X_1, wenn der Verbraucher nach Bild 7.12a als *Reihenschaltung* dieser Widerstände aufgefasst wird?

b) Welche Werte ergeben sich für den Wirkwiderstand R_2 und den Blindwiderstand X_2, wenn der Verbraucher nach Bild 7.12b als *Parallelschaltung* dieser Widerstände dargestellt wird?

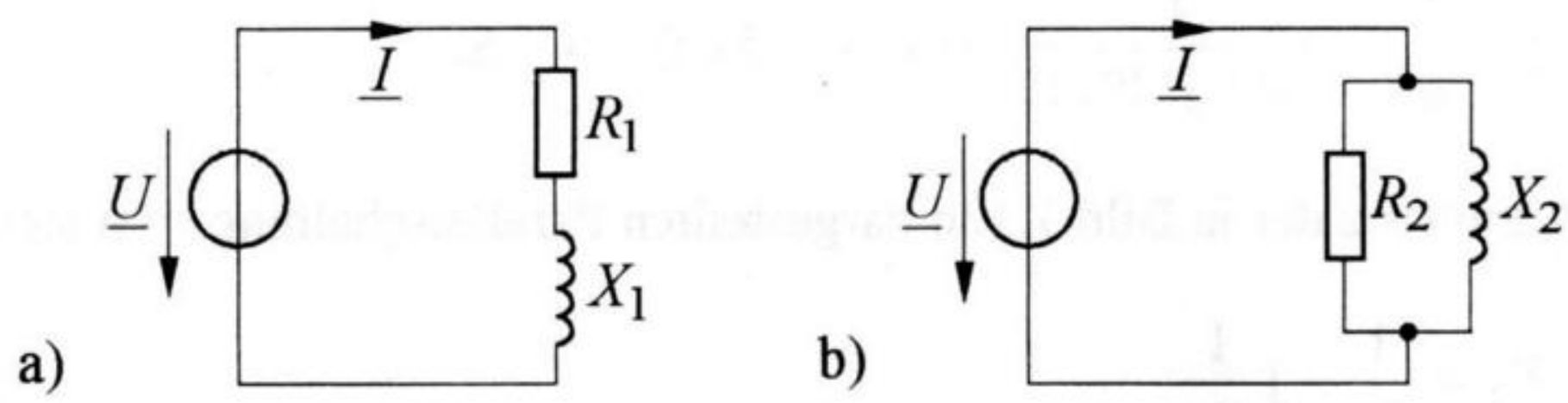


Bild 7.12 Darstellung eines ohmsch-induktiven Verbrauchers
a) durch eine R-X-Reihenschaltung, b) durch eine R-X-Parallelschaltung

Lösung

a) Wir wollen zunächst den Strom und die Spannung in komplexer Form darstellen. Wählen wir dazu den Strom als Bezugsgröße und geben ihn durch

$$\underline{I} = I = 0{,}30\ \mathrm{A}$$

willkürlich reell vor, so erhalten wir für die um $\varphi = 60°$ voreilende Spannung

$$\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = 48\ \mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}60°}.$$

Damit beträgt die Impedanz des Verbrauchers

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{48\ \mathrm{V}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{j}60°}}{0{,}30\ \mathrm{A}} = (80 + \mathrm{j}139)\ \Omega.$$

Berücksichtigen wir, dass die Impedanz der Reihenschaltung nach Bild 7.12a durch

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \mathrm{j}X_1$$

dargestellt werden kann, so wird durch Gleichsetzen von $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}$

$$R_1 + \mathrm{j}X_1 = (80 + \mathrm{j}139)\ \Omega.$$

Daraus finden wir die Ergebnisse

$$\underline{R_1 = 80\ \Omega},$$

$$\underline{X_1 = 139\ \Omega}.$$

b) Aus der Impedanz $\underline{Z}$ ergibt sich durch Bildung des Kehrwertes die Admittanz des Verbrauchers als

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{(80 + \mathrm{j}139)\ \Omega} = (3{,}13 - \mathrm{j}5{,}41)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}.$$

Die Admittanz der in Bild 7.12b dargestellten Parallelschaltung lässt sich durch

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{X_2}$$

wiedergeben. Durch Gleichsetzen von $\underline{Y}_2$ und $\underline{Y}$ wird

$$\frac{1}{R_2} - \mathrm{j}\frac{1}{X_2} = (3{,}13 - \mathrm{j}5{,}41)\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}.$$

Daraus folgt

$$R_2 = \frac{1}{3{,}13\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}} = \underline{320\ \Omega},$$

$$X_2 = \frac{1}{5{,}41\cdot 10^{-3}\ \mathrm{S}} = \underline{185\ \Omega}.$$

7.2 Ersatzschaltungen für reale Bauelemente

Induktivitäten, Kapazitäten und ohmsche Widerstände lassen sich durch reale Bauelemente in idealisierter Form nicht verwirklichen. Beispielsweise enthält eine Spule neben der erwünschten Induktivität stets auch einen Wirkwiderstand. Daneben bestehen zwischen den Windungen der Spule Kapazitäten. Die Berücksichtigung der nicht erwünschten Einflüsse - bei der Spule sind es der Wirkwiderstand und die Windungskapazitäten - führt zu elektrischen Schaltungen, die man als **Ersatzschaltungen** bezeichnet. Solche Ersatzschaltungen stellen, je nach der Bauform des betrachteten Bauelements, grundsätzlich sehr komplexe Gebilde dar. Sie können jedoch unter bestimmten Bedingungen mit guter Annäherung durch einfache Schaltungen ersetzt werden.

7.2.1 Spule mit Wirkwiderstand

Jede Spule enthält, wie beschrieben, neben einer Induktivität auch einen Wirkwiderstand und Windungskapazitäten. Die bei Spulen verwendeten Frequenzen sind jedoch in den meisten Fällen nicht so hoch, dass die Windungskapazitäten das elektrische Verhalten merklich beeinflussen. In der Regel reicht es daher aus, wenn neben der Induktivität der Spule nur noch deren Wirkwiderstand berücksichtigt wird, so dass sich die in Bild 7.13a dargestellte Ersatzschaltung ergibt. Bild 7.13b zeigt das zugehörige Widerstandsdreieck.

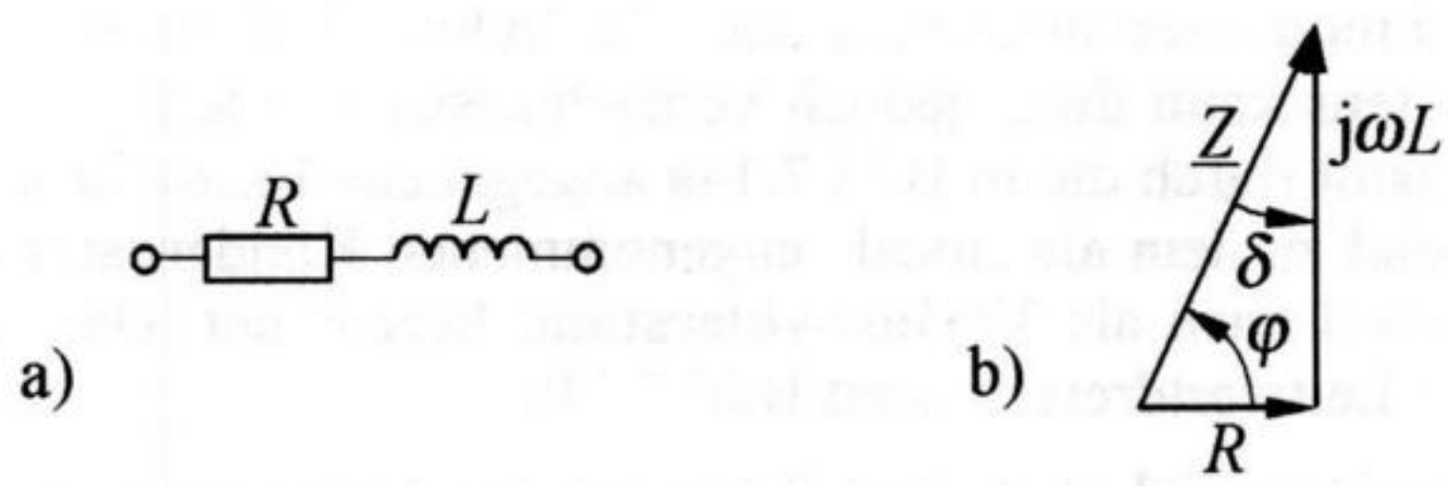


Bild 7.13 a) Ersatzschaltung einer Spule für niedrige und mittlere Frequenzen, b) zugehöriges Widerstandsdreieck

Man bezeichnet das Verhältnis von ωL zu R als **Spulengüte** (Symbol: Q_L), so dass gilt

$$\boxed{Q_L = \frac{\omega L}{R}.} \tag{7.97}$$

Der Kehrwert heißt **Verlustfaktor** (Symbol: d). Er kann nach Bild 7.13b durch

$$\boxed{d = \tan\delta = \frac{R}{\omega L}} \tag{7.98}$$

dargestellt werden, wobei der hierin enthaltene Winkel δ als der **Verlustwinkel** bezeichnet wird. Dieser lässt sich nach Bild 7.13b auch durch

$$\boxed{\delta = 90° - \varphi} \tag{7.99}$$

wiedergeben. In dieser Gleichung ist φ der Phasenverschiebungswinkel der Spule. Er weicht infolge des vorhandenen Wirkwiderstandes von 90° ab.

Abschließend sei festgestellt, dass die in Bild 7.13a dargestellte Ersatzschaltung nur für Spulen *ohne* Eisenkern gilt. Ist ein Eisenkern vorhanden, so kommt es durch das magnetische Wechselfeld zu einer Erwärmung des Kerns. Auf diese Erscheinung und ihre Berücksichtigung im Ersatzschaltbild der Spule wird in Abschnitt 13.1.4 näher eingegangen.

7.2.2 Kondensator mit Verlustwiderstand

Zwischen den Elektroden eines Kondensators besteht nicht nur die erwünschte Kapazität, das Dielektrikum besitzt auch stets eine, wenn auch geringe, Leitfähigkeit. Für hohe Frequenzen muss man noch die Induktivität des Kondensatorkreises beachten. Meistens kann diese jedoch vernachlässigt werden. Dann lässt sich ein realer Kondensator durch die in Bild 7.14a angegebene Ersatzschaltung darstellen. Der darin parallel zu dem als „ideal" angenommenen Kondensator liegende Wirkwiderstand R wird auch als **Verlustwiderstand** bezeichnet. Das zur Ersatzschaltung gehörende Leitwertdreieck zeigt Bild 7.14b.

Der Verlustwiderstand R in Bild 7.14a hat bei Versorgung mit Wechselspannung einen wesentlich kleineren Wert als der (bei Gleichspannung vorhandene) Isolationswiderstand des Dielektrikums. Die Ursache dafür liegt darin, dass die am Kondensator anliegende Wechselspannung im Dielektrikum einen ständigen

Wechsel der Polarisationsrichtung zur Folge hat. Das bedeutet, dass die gebildeten Dipole (vergl. Abschnitt 3.2.4) Schwingungen ausführen. Hierdurch wird im Dielektrikum elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Die Berücksichtigung dieser Wärmeleistung führt im Ersatzschaltbild nach Bild 7.14a zu einer (frequenzabhängigen) Verkleinerung des Verlustwiderstandes R. Man bezeichnet den sich aus Bild 7.14b ergebenden Winkel δ als **Verlustwinkel**. Er beträgt

$$\boxed{\delta = 90° - |\varphi|,} \tag{7.100}$$

wobei φ der dem Kondensator zugeordnete Phasenverschiebungswinkel ist. Dessen Betrag weicht infolge des vorhandenen Verlustwiderstandes von 90° ab. Der sich aus Bild 7.14b ergebende Faktor

$$\boxed{d = \tan\delta = \frac{1/R}{\omega C}} \tag{7.101}$$

heißt **Verlustfaktor**.

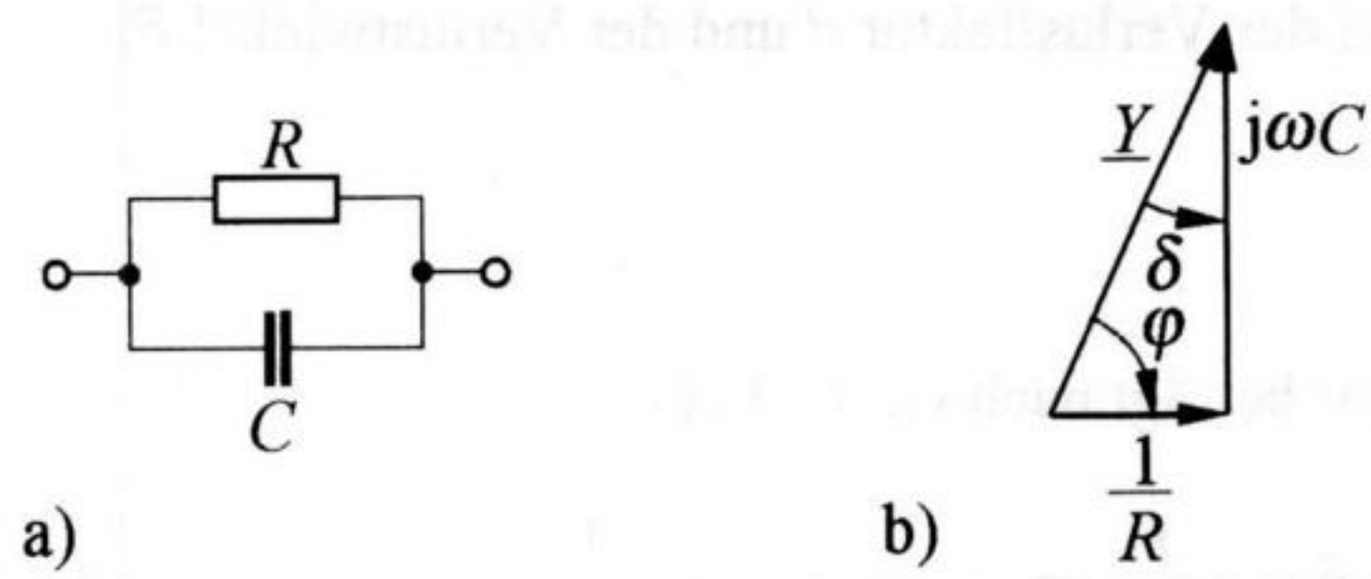


Bild 7.14 a) Ersatzschaltung eines realen Kondensators, b) zugehöriges Leitwertdreieck

Zur weiteren Erläuterung wollen wir annehmen, dass ein betrachteter realer Kondensator aus parallelen Platten mit dem Plattenabstand d und der Plattenfläche A besteht. Die Permittivitätskonstante sei ε, die dem Verlustwiderstand R entsprechende Leitfähigkeit des Dielektrikums κ. Dann gilt nach Gl. (3.23) für die Kapazität des Kondensators

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \tag{7.102}$$

und nach Gl. (2.11) für den Verlustwiderstand

$$R = \frac{d}{\kappa A}. \tag{7.103}$$

Setzen wir die Gln. (7.102) und (7.103) in Gl. (7.101) ein, so erhalten wir

$$\boxed{d = \tan\delta = \frac{\kappa}{\omega\varepsilon}.} \tag{7.104}$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass der Verlustfaktor d unabhängig von der Kapazität eines Kondensators ist und eine (frequenzabhängige) **Materialgröße** darstellt. Sie gibt Auskunft über die Güte des verwendeten Dielektrikums. Je kleiner der Verlustfaktor eines Dielektrikums ist, umso höher ist die Güte.

Aufgabe 7.9

Die Ersatzschaltung eines realen Kondensators ist für die Frequenz $f = 1\,\text{kHz}$ durch die Parallelschaltung eines idealen Kondensators mit der Kapazität $C = 100\,\text{nF}$ und eines Verlustwiderstandes von $R = 3{,}3\ \text{M}\Omega$ gegeben.

Wie groß sind der Verlustfaktor d und der Verlustwinkel δ?

Lösung

Der Verlustfaktor beträgt nach Gl. (7.101)

$$d = \tan\delta = \frac{1}{R\,\omega C} = \frac{1}{3{,}3\cdot 10^6\ \Omega\cdot 2\pi\cdot 10^3\ \text{Hz}\cdot 10^{-7}\ \text{F}} = \underline{4{,}8\cdot 10^{-4}}.$$

Damit ergibt sich ein Verlustwinkel von

$$\underline{\delta = 0{,}028^\circ}.$$

7.2.3 Widerstand mit Eigeninduktivität und Eigenkapazität

Die Herstellung eines ohmschen Widerstandes kann beispielsweise dadurch erfolgen, dass nach Bild 7.15a ein Metalldraht (mit großem spezifischen Widerstand) auf einen Keramikzylinder aufwickelt wird. Diese Ausführungsform hat allerdings den Nachteil, dass sich die durch die Spulenform bedingte, relativ große Indukti-

vität der Anordnung bei hohen Frequenzen störend auswirkt. Eine deutliche Verringerung der Induktivität erzielt man dadurch, dass der Metalldraht entsprechend Bild 7.15b aufgebracht wird. Man spricht dann von einer *bifilaren* Wicklung.

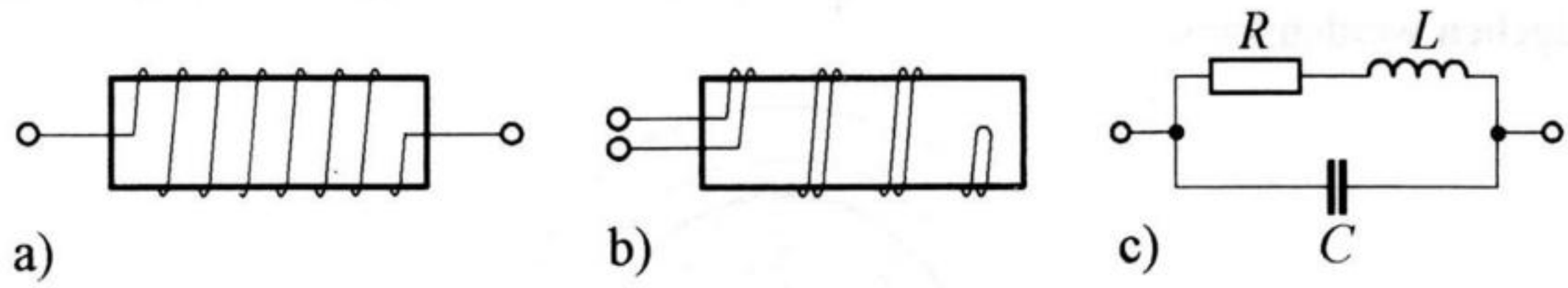


Bild 7.15 Realisierung von ohmschen Widerständen. a) Drahtwiderstand (Normalausführung), b) Drahtwiderstand mit bifilarer Wicklung, c) Ersatzschaltung eines realen ohmschen Widerstandes

Eine weitere Bauform für einen ohmschen Widerstand besteht darin, dass ein rohrförmiger Körper aus Isoliermaterial außen mit einer dünnen leitfähigen Schicht versehen wird. Je nach Art des verwendeten Schichtmaterials spricht man dann von einem **Kohleschichtwiderstand** oder von einem **Metallschichtwiderstand**. Bei höheren Widerstandswerten wird die Schicht meist wendelförmig auf den rohrförmigen Körper aufgebracht.

Die jeweilige Anordnung enthält, unabhängig von ihrer Bauform, stets neben dem erwünschten Wirkwiderstand auch eine Induktivität. Darüber hinaus bestehen zwischen verschiedenen Stellen der Anordnung Kapazitäten. Die sich ergebende Ersatzschaltung stellt somit - ebenso wie dies bei der in Abschnitt 7.2.1 betrachteten Spule der Fall ist - ein sehr komplexes Gebilde dar. Sie kann jedoch näherungsweise durch die in Bild 7.15c dargestellte Anordnung ersetzt werden. Dabei wollen wir L als *Eigeninduktivität* und C *als Eigenkapazität* des Widerstandes bezeichnen.

Die Größen L und C sind von der Bauform des betreffenden Widerstandes abhängig. So hat der in Bild 7.15a dargestellte Widerstand, wie oben beschrieben, eine relativ große Eigeninduktivität. Dagegen besitzt die in Bild 7.15b dargestellte Bauform eine vergleichsweise große Eigenkapazität, da die beiden Widerstandshälften dicht beieinander liegen.

Unabhängig davon zeigt sich jedoch, dass (allgemein) bei kleinen Werten für R (also bei niederohmigen Widerständen) die Eigenkapazität in der Regel keinen Einfluss auf die elektrischen Eigenschaften hat und daher unberücksichtigt bleiben kann. Dies setzt allerdings voraus, dass die verwendete Frequenz nicht ausgesprochen hoch ist. Umgekehrt ist bei großen Werten für R (bei hochohmigen Widerständen also) häufig die Eigeninduktivität vernachlässigbar. Auf diese Weise lassen sich für reale Widerstände vielfach Ersatzschaltungen verwenden, die nicht, wie in Bild 7.15c dargestellt, *drei* Schaltelemente enthalten, sondern nur *zwei*.

Zu beachten ist noch, dass der Wirkwiderstand eines Leiters bei Verwendung von Wechselstrom höher ist als bei Verwendung von Gleichstrom. Zur Erläute-

rung dieser Tatsache betrachten wir Bild 7.16. Es zeigt einen senkrecht zur Zeichenebene verlaufenden Leiter mit kreisförmigem Querschnitt. Der Leiter möge einen in die Ebene hineinfließenden Strom (i) führen, so dass das erzeugte Magnetfeld durch die dargestellten, im Uhrzeigersinn verlaufenden Feldlinien (B) angegeben werden kann.

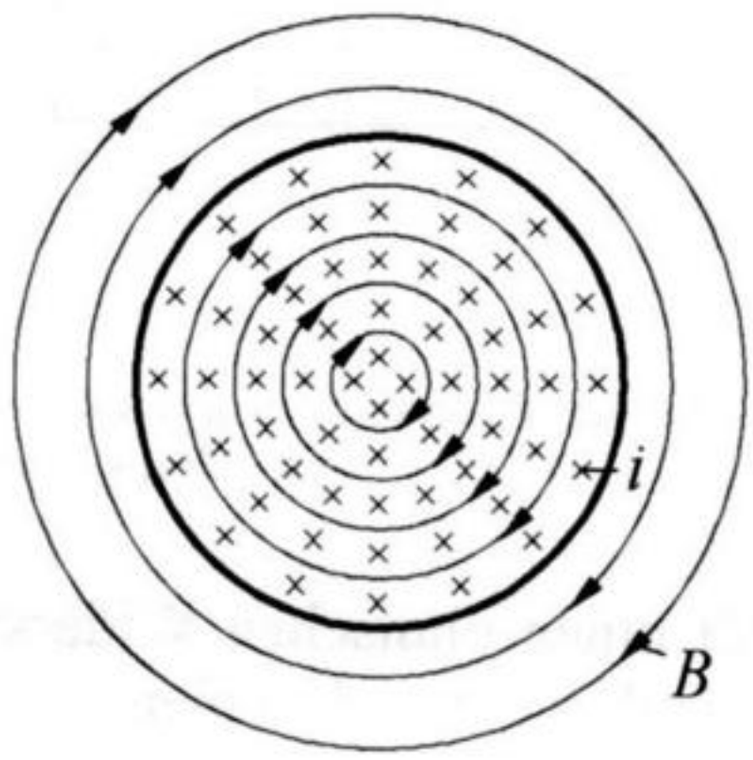


Bild 7.16 Zur Erläuterung der Stromverdrängung

Wir stellen uns nun vor, der Leiter sei nicht kompakt, sondern bestehe aus einer großen Anzahl parallel geschalteter dünner Drähte. Jeder von ihnen hat eine bestimmte Impedanz $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L$, wobei R den Wirkwiderstand darstellt, ω die Kreisfrequenz und L die Induktivität. Aus der Darstellung ist ersichtlich, dass die innen liegenden Drähte von mehr magnetischen Feldlinien umschlossen werden als die am Rande liegenden. Das bedeutet, dass die Induktivität L der einzelnen Drähte umso größer ist, je geringer ihr Abstand von der Leiterachse ist. Die in der Mitte liegenden Drähte übernehmen daher wegen ihres größeren Scheinwiderstandes Z einen kleineren Anteil am Gesamtstrom als die am Rand liegenden.

Gehen wir jetzt wieder von einem kompakten Leiter aus, so folgt aus den Betrachtungen, dass die Stromdichte am Rande des Leiters größer ist als in seinem Innern. Man bezeichnet diese Erscheinung als **Stromverdrängung**. Sie ist umso ausgeprägter, je höher die Frequenz ist. Die Verdrängung des Stromes auf eine kleinere Fläche bedeutet eine Zunahme des ohmschen Widerstandes. Bei sehr hohen Frequenzen fließt annähernd der gesamte Strom in einer dünnen Schicht unmittelbar an der Leiteroberfläche. Man bezeichnet die Erscheinung deshalb auch als **Skineffekt** (Hauteffekt).

8 Leistung im Wechselstromkreis

8.1 Wirkleistung

Wir betrachten einen beliebigen Wechselstromverbraucher ($\underline{Z}$), der nach Bild 8.1a mit einer Spannungsquelle verbunden ist.

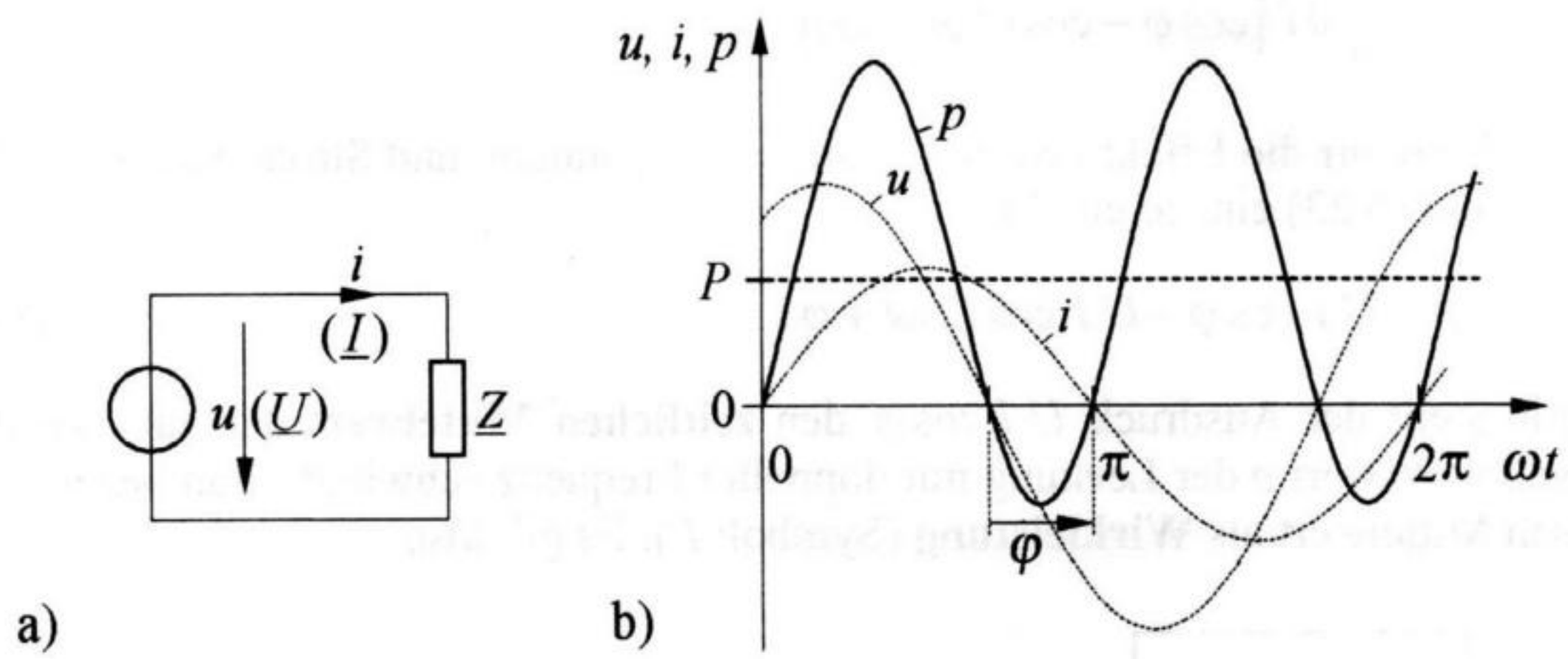


Bild 8.1 Zur Erläuterung des Begriffs „Wirkleistung". a) Einfacher Wechselstromkreis, b) zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom und Leistung

Die von der Spannungsquelle gelieferte Spannung sei sinusförmig. Daher können wir sie durch

$$u = \hat{u}\ \sin(\omega t + \varphi) \tag{8.1}$$

darstellen und den im Kreis fließenden Strom durch

$$i = \hat{i}\ \sin \omega t. \tag{8.2}$$

Hierbei sind $\hat{u}$ und $\hat{i}$ die Scheitelwerte von Spannung und Strom, φ ist der zugehörige Phasenverschiebungswinkel. Für die in einem beliebigen Zeitpunkt an den Verbraucher gelieferte Leistung gilt somit

$$p = u\,i = \hat{u}\,\hat{i} \cdot \sin \omega t \cdot \sin(\omega t + \varphi). \tag{8.3}$$

Man bezeichnet p auch als *Augenblickswert* der Leistung. In Bild 8.1b ist der zeitliche Verlauf der Größen u, i und p grafisch dargestellt.

Der Augenblickswert der Leistung ist im Allgemeinen nicht von Interesse. Von Bedeutung ist dagegen die *mittlere* (von der Spannungsquelle an den Verbraucher gelieferte) Leistung. Zu ihrer Bestimmung bilden wir deshalb den *zeitlichen Mittelwert* der in Gl. (8.3) angegebenen Funktion. Dazu formen wir Gl. (8.3) durch Anwendung der trigonometrischen Beziehung

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\right] \tag{8.4}$$

mit $\alpha = \omega t$ und $\beta = (\omega t + \varphi)$ sowie $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ in

$$p = \frac{1}{2}\,\hat{u}\,\hat{i}\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\right] \tag{8.5}$$

um. Führen wir die Effektivwerte U und I von Spannung und Strom nach den Gln. (6.22) und (6.23) ein, so erhalten wir

$$p = U\,I\cos\varphi - U\,I\cos(2\omega t + \varphi). \tag{8.6}$$

Hierin stellt der Ausdruck $U\,I\cos\varphi$ den **zeitlichen Mittelwert** dar, um den der Augenblickswert p der Leistung mit doppelter Frequenz schwingt. Man bezeichnet diesen Mittelwert als **Wirkleistung** (Symbol: P). Es gilt also

$$\boxed{P = U\,I\cos\varphi.} \tag{8.7}$$

Die Wirkleistung wird - ebenso wie die Leistung im Gleichstromkreis - in der Einheit **Watt** angegeben. Nach Gl. (8.7) erhält man die einem Verbraucher zugeführte Wirkleistung also nicht aus dem Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom, sondern dadurch, dass man dieses Produkt zusätzlich mit dem Kosinus des Phasenverschiebungswinkels φ multipliziert.

8.2 Blindleistung

Wir wollen jetzt eine Schaltung betrachten, in der der Phasenverschiebungswinkel φ einen Betrag von 90° hat. Dies trifft beispielsweise in der Schaltung nach Bild 8.2a zu. Zur Darstellung von Spannung und Strom verwenden wir die Gln. (8.1) und (8.2), wobei wir $\varphi = -90°$ setzen. Dann gilt für den Augenblickswert der Leistung in Bild 8.2a nach Gl. (8.6) mit $\cos(-90°) = 0$

$$p = -U\,I\cos(2\omega t - 90°). \tag{8.8}$$

In Bild 8.2b ist der zeitliche Verlauf der Spannung u, des Stromes i und der Leistung p grafisch dargestellt. Der zeitliche Mittelwert der Leistung p ist Null. Das bedeutet, dass der Kondensator keine Wirkleistung aufnimmt.

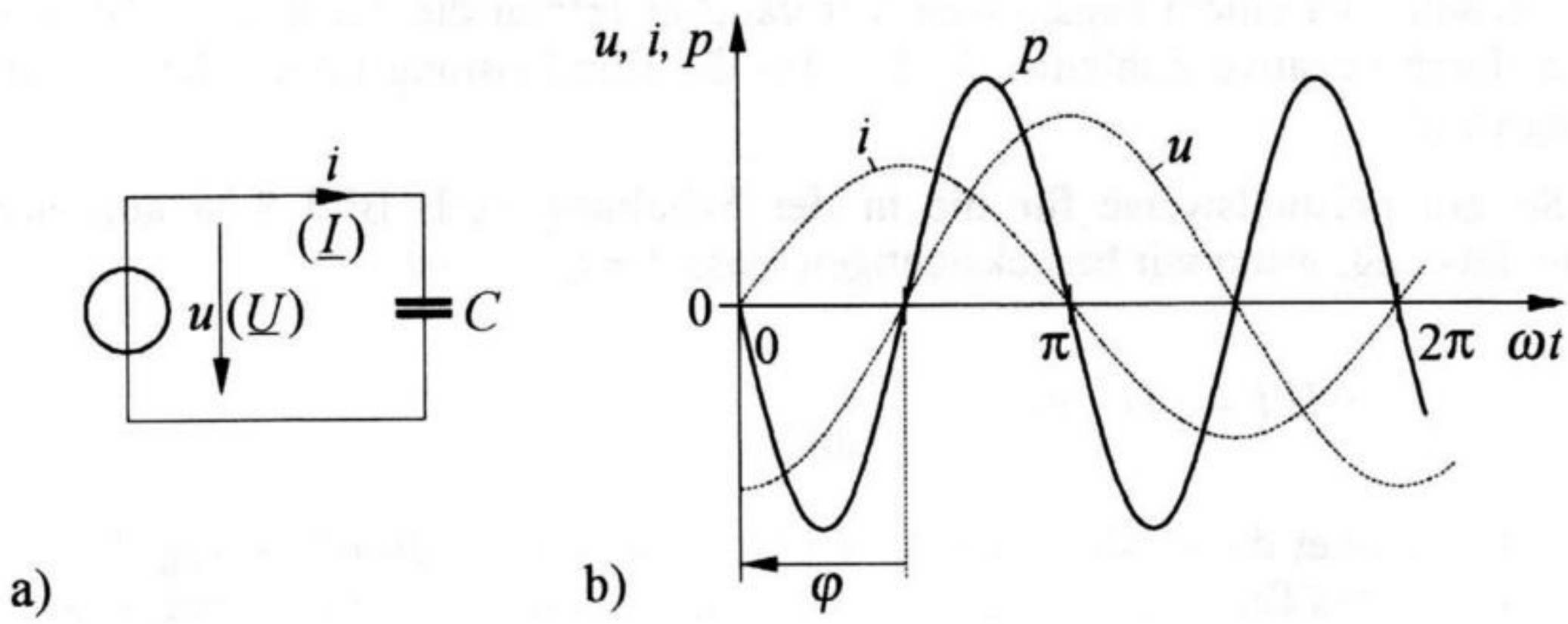


Bild 8.2 Zur Erläuterung des Begriffs „Blindleistung". a) Kreis mit einem reinen Blindwiderstand als Belastung, b) zeitlicher Verlauf von Spannung, Strom und Leistung

Zu beachten ist jedoch, dass zwar die Wirkleistung Null ist, dass dies aber nicht für die Augenblickswerte der Leistung zutrifft. Nach Bild 8.2b steigt die Spannung u im Bereich $\pi/2 \le \omega t \le \pi$ von Null auf den Scheitelwert an. Das hat zur Folge, dass der Kondensator aufgeladen wird und somit Energie von der Spannungsquelle an den Kondensator geliefert und hier im elektrischen Feld gespeichert wird. Der Augenblickswert p der Leistung ist positiv. In der folgenden Viertelperiode der Spannung fällt diese vom Scheitelwert auf Null ab. In dieser Zeit entlädt sich der Kondensator wieder, wobei die gespeicherte Energie in die Spannungsquelle zurückfließt. Die Augenblickswert p der Leistung ist negativ.

Bei der sich anschließenden negativen Spannungshalbschwingung wiederholt sich dieser Vorgang in entsprechender Weise. Es fließt somit dauernd Energie zwischen der Spannungsquelle und dem Kondensator hin und her. Man bezeichnet die hierbei auftretende Leistung, die somit periodisch ihre Richtung ändert und deren Mittelwert Null ist, als **Blindleistung**.

Wird in Bild 8.2a der Kondensator durch eine Spule ersetzt, so laufen die Vorgänge ähnlich ab. Steigt dann der fließende Strom von Null auf den Scheitelwert an, so wird Energie von der Spannungsquelle an die Spule geliefert und hier im Magnetfeld gespeichert. Geht anschließend der Strom wieder auf Null zurück, so wird die gespeicherte Energie wieder an die Spannungsquelle zurückgeliefert.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie die Blindleistung *quantitativ* angegeben werden kann. Hierzu ist festgelegt worden, dass bei einem Verbraucher, der aus einem reinen Blindwiderstand besteht, der Betrag der Blindleistung durch das Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom gebildet werden soll. Das ist nach Gl. (8.8) gleichzeitig auch der Scheitelwert der auftretenden Leistungsschwingung. Handelt es sich um einen induktiven Verbraucher, so wird die Blindleistung positiv gezählt. Bei einem kapazitiven Verbraucher erfolgt die Angabe der Blindleistung durch negative Zahlenwerte. Die für die Blindleistung verwendete Bezeichnung ist Q.

So gilt beispielsweise für die in der Schaltung nach Bild 8.2a auftretende Blindleistung, wenn wir berücksichtigen, dass $I = U\,\omega C$ ist,

$$Q = -U\,I = -U^2\,\omega C = -I^2\,\frac{1}{\omega C}. \tag{8.9}$$

Man bezeichnet diese Blindleistung auch als **kapazitive Blindleistung**. Wird der Kondensator in Bild 8.2a durch eine Spule mit der Induktivität L ersetzt, so gilt für die Blindleistung (mit $U = I\,\omega L$)

$$Q = U\,I = \frac{U^2}{\omega L} = I^2\,\omega L. \tag{8.10}$$

Sie wird als **induktive Blindleistung** bezeichnet.

Betrachten wir jetzt einen beliebigen ohmsch-induktiven oder ohmsch-kapazitiven Verbraucher, so können wir ihn stets als Reihenschaltung eines Wirkwiderstandes und eines Blindwiderstandes darstellen. Dabei gilt für die am Blindwiderstand liegende Spannung bei der Verbraucherspannung U und dem Phasenverschiebungswinkel φ nach Gl. (7.56) oder nach Gl. (7.66)

$$U_\mathrm{b} = U\,\sin\varphi.$$

Multiplizieren wir sie mit dem Strom I, so erhalten wir die Blindleistung

$$\boxed{Q = U\,I\,\sin\varphi.} \tag{8.11}$$

Die Blindleistung eines Verbrauchers erhält man also allgemein dadurch, dass man das Produkt der Effektivwerte von Spannung und Strom mit dem Sinus des Phasenverschiebungswinkels φ multipliziert. Zur Unterscheidung von der Wirkleistung wird für die Blindleistung als Einheit nicht Watt verwendet, sondern **var**. Das ist die Abkürzung für **v**olt **a**mpere **r**eactive.

8.3 Scheinleistung

Multipliziert man in einer Schaltung nach Bild 8.3 die Beträge (Effektivwerte) der Spannung U und des Stromes I miteinander, so erhält man eine Größe, die man als **Scheinleistung** (Symbol: S) bezeichnet. Es gilt also

$$\boxed{S = U\,I.} \tag{8.12}$$

Zur Unterscheidung von Wirk- und Blindleistung wird als Einheit für die Scheinleistung VA (Volt · Ampere) verwendet.

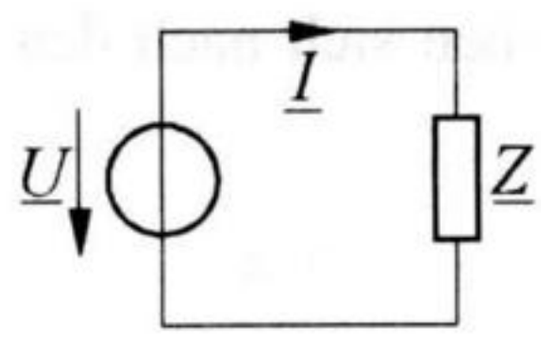


Bild 8.3 Zur Erläuterung der Scheinleistung

Die Scheinleistung ist beispielsweise für die Bemessung von elektrischen Maschinen (Generatoren, Transformatoren) von Bedeutung, da diese - unabhängig vom Phasenverschiebungswinkel - einerseits für einen bestimmten Strom und zum anderen für eine bestimmte Spannung ausgelegt werden müssen.

Das Verhältnis von Wirkleistung P zu Scheinleistung S, das nach Gl. (8.7) in Verbindung mit Gl. (8.12) durch

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{P}{S}} \tag{8.13}$$

dargestellt werden kann, bezeichnet man als **Leistungsfaktor**. Damit gelten unter Berücksichtigung der Gln. (8.7) und (8.11) sowie unter Beachtung der Gleichung $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ auch folgende Beziehungen:

$$\boxed{P = S\cos\varphi,} \tag{8.14}$$

$$\boxed{Q = S\sin\varphi,} \tag{8.15}$$

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}.} \tag{8.16}$$

Aufgabe 8.1

Ein Verbraucher nimmt bei der Spannung $U = 230$ V den Strom $I = 5{,}0$ A auf. Dabei eilt die Spannung dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel $\varphi = 40°$ vor.

Wie groß sind die Scheinleistung S, die Wirkleistung P, die Blindleistung Q und der Leistungsfaktor $\cos\varphi$ des Verbrauchers?

Lösung

Für die gesuchten Größen ergeben sich nach den Gln. (8.12), (8.14), (8.15) und (8.13) die Ergebnisse

$$S = U\,I = 230\ \text{V} \cdot 5{,}0\ \text{A} = \underline{1150\ \text{VA}},$$

$$P = S\cos\varphi = 1150\ \text{VA} \cdot \cos 40° = \underline{881\ \text{W}},$$

$$Q = S\sin\varphi = 1150\ \text{VA} \cdot \sin 40° = \underline{739\ \text{var}},$$

$$\cos\varphi = \cos 40° = \underline{0{,}766}.$$

Aufgabe 8.2

Ein Verbraucher mit dem Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}85$ nimmt bei der Spannung $U = 400$ V die Wirkleistung $P = 2000$ W auf.

Wie groß ist der Strom I?

Lösung

Der Strom folgt aus Gl. (8.7) als

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{2000\ \text{W}}{400\ \text{V} \cdot 0{,}85} = \underline{5{,}88\ \text{A}}.$$

8.4 Komplexe Darstellung der Leistung

Wir geben nach Bild 8.4a einen an Spannung liegenden Verbraucher ($\underline{Z}$) vor, stellen die anliegende Spannung nach Gl. (6.50) in der Form

$$\underline{U} = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{u}} \tag{8.17}$$

dar und den fließenden Strom entsprechend durch

$$\underline{I} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{i}}\,. \tag{8.18}$$

In Bild 8.4b sind diese beiden Zeiger dargestellt. Die Spannung ist gegenüber dem Strom um den Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i} \tag{8.19}$$

verschoben.

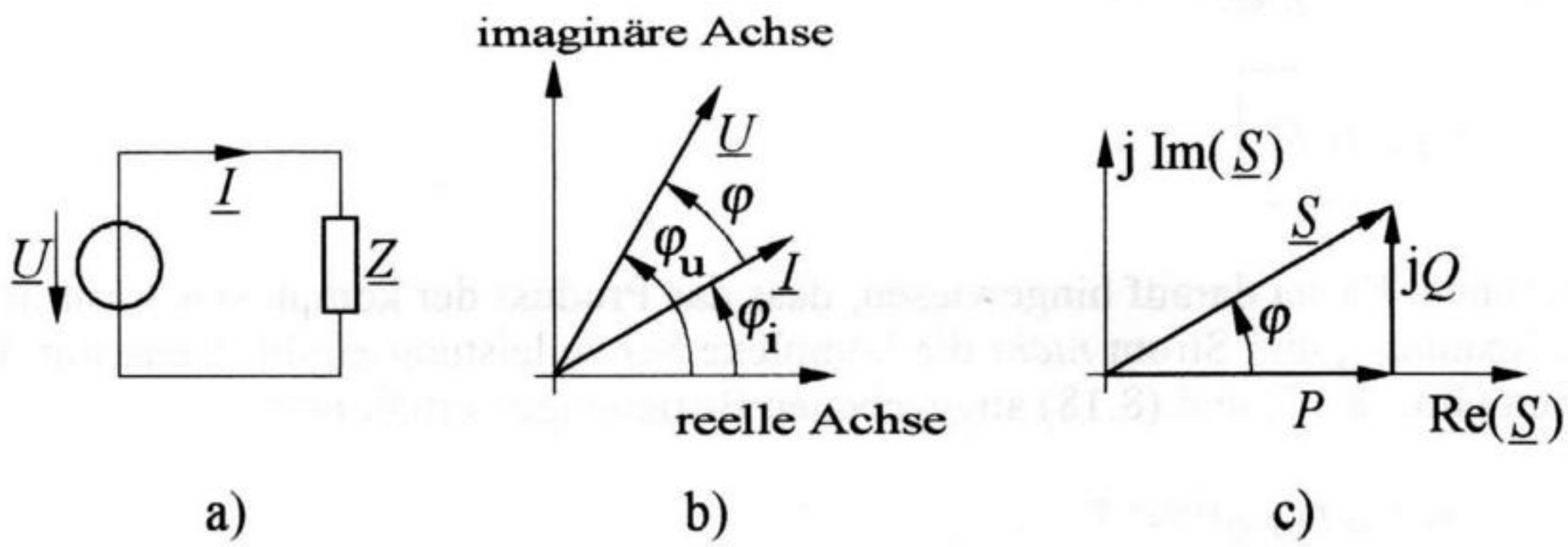


Bild 8.4 Zur komplexen Darstellung der Leistung. a) Vorgegebene Schaltung, b) Spannungs- und Stromzeiger in der komplexen Ebene, c) zugehöriges Leistungsdreieck

Bilden wir nun willkürlich das Produkt aus $\underline{U}$ und $\underline{I}^*$, wobei

$$\underline{I}^* = I\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_\mathrm{i}} \tag{8.20}$$

die *konjugiert komplexe Größe* von $\underline{I}$ ist, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gln. (8.12) und (8.19)

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = U\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_\mathrm{u}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_\mathrm{i}} = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}\,. \tag{8.21}$$

Durch Umformung in die Komponentenform erhalten wir

$$\underline{S} = S\cos\varphi + \mathrm{j}S\sin\varphi\,.$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis mit den Gln. (8.14) und (8.15) und erhalten

$$\boxed{\underline{S} = P + \mathrm{j}Q.} \tag{8.22}$$

Trägt man diese Größe in die komplexe Ebene ein, so entsteht die Darstellung nach Bild 8.4c. Man bezeichnet das sich ergebende Dreieck auch als **Leistungsdreieck**. Das Ergebnis zeigt, dass der Realteil von $\underline{S}$ die Wirkleistung P ergibt und der Imaginärteil von $\underline{S}$ die Blindleistung Q. Darüber hinaus findet man aus dem Vorzeichen von Q die Art der Blindleistung. Bei einem induktiven Verbraucher ist der Phasenverschiebungswinkel φ nach Gl. (8.19) positiv, so dass auch die Blindleistung Q positiv wird. Bei einem kapazitiven Verbraucher nimmt der Phasenverschiebungswinkel φ dagegen negative Werte an. Damit wird auch die Blindleistung Q negativ.

Man bezeichnet die Größe $\underline{S}$ als **komplexe Scheinleistung**. Durch die Einführung von $\underline{S}$ lassen sich also Wirk- und Blindleistung unmittelbar aus den komplexen Ausdrücken von Spannung und Strom durch eine Produktbildung entsprechend Gl. (8.21), also durch

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*} \tag{8.23}$$

berechnen. Es sei darauf hingewiesen, dass das Produkt der komplexen Ausdrücke von Spannung und Strom *nicht* die komplexe Scheinleistung ergibt. Denn mit den in den Gln. (8.17) und (8.18) angegebenen Beziehungen erhält man

$$\underline{U}\,\underline{I} = U\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_\mathrm{u}+\varphi_\mathrm{i})} = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_\mathrm{u}+\varphi_\mathrm{i})}.$$

Der Phasenverschiebungswinkel des Verbrauchers ist aber nicht $(\varphi_\mathrm{u} + \varphi_\mathrm{i})$, sondern $(\varphi_\mathrm{u} - \varphi_\mathrm{i})$.

9 Berechnung von Wechselstromnetzen

Schaltungen mit mindestens einer Stromverzweigung bezeichnet man bekanntlich als **elektrische Netze** oder als **elektrische Netzwerke**. Unter der Berechnung eines Netzes versteht man - wie schon in Abschnitt 2.2.4 beschrieben - die Ermittlung der in den Zweigen auftretenden Ströme oder auch die Bestimmung anderer Größen wie Spannungen, Leistungen, Widerstände. Wir wollen uns nachfolgend mit der Frage befassen, wie Wechselstromnetze (allgemein) berechnet werden können.

9.1 Allgemeine Berechnungsverfahren

Die in den Gln. (7.52) und (7.71) angegebenen Beziehungen $\underline{I} = \underline{U}/\underline{Z}$ und $\underline{I} = \underline{U}\,\underline{Y}$ können wir auch auf beliebige Verbraucher anwenden. Liegt also ein bestimmter Verbraucher mit der Impedanz $\underline{Z}$ (und der daraus folgenden Admittanz $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$) an einer Spannung $\underline{U}$, so gilt für den fließenden Strom

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \underline{U}\,\underline{Y}.}$$

Diese Gleichung entspricht der von der Gleichstromtechnik bekannten Beziehung $I = U/R = U\,G$ (vergl. Gln. (2.6) und (2.8)) und kann als das auf Wechselstromkreise erweiterte **ohmsche Gesetz** angesehen werden.

Auch die **Kirchhoff'schen Gesetze**, die neben dem ohmschen Gesetz die Grundlage aller Netzwerkberechnungen darstellen, haben in der Wechselstromtechnik die gleiche Form wie in der Gleichstromtechnik, sofern alle auftretenden Spannungen und Ströme durch komplexe Ausdrücke dargestellt werden.

Die Berechnung von Wechselstromkreisen führt also - bei Anwendung der komplexen Rechnung - zu Gleichungen, die genauso aufgebaut sind wie die entsprechenden Gleichungen zur Berechnung von Gleichstromkreisen. Die verschiedenen aus der Gleichstromtechnik bekannten Verfahren zur Netzwerkberechnung können daher analog in der Wechselstromtechnik angewendet werden. Es erübrigt sich somit, die genannten Verfahren an dieser Stelle noch einmal detailliert zu behandeln. Stattdessen soll nachfolgend an einer Reihe von Beispielen die Anwendung der Verfahren gezeigt werden.

Aufgabe 9.1

Die in Bild 9.1 dargestellte Schaltung enthält zwei Kondensatoren mit den Kapazitäten $C_1 = 10\,\mu\text{F}$ und $C_2 = 3{,}18\,\mu\text{F}$ sowie den Widerstand $R = 2{,}0\ \text{k}\Omega$. Die anliegende Spannung beträgt $U = 100$ V und ihre Frequenz $f = 50$ Hz.

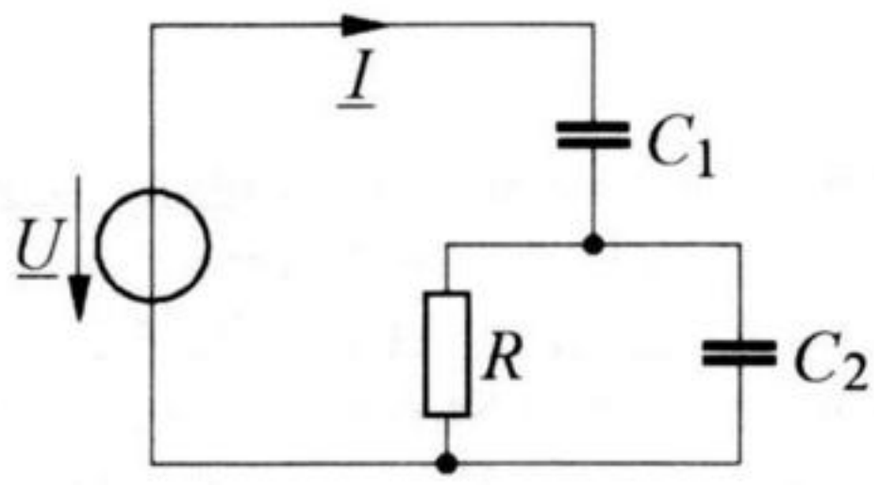


Bild 9.1 Belastung einer Spannungsquelle durch eine ohmsch-kapazitive Widerstandsschaltung

Welchen Strom I liefert die Spannungsquelle, und um welchen Phasenverschiebungswinkel φ ist die Spannung gegenüber dem Strom verschoben?

Lösung

Die aus R und C_2 bestehende Parallelschaltung hat nach Gl. (7.83) die Admittanz

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C_2,$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{2{,}0\cdot 10^3\ \Omega} + \mathrm{j}\,2\pi\cdot 50\ \text{Hz}\cdot 3{,}18\cdot 10^{-6}\ \text{F} = (0{,}5 + \mathrm{j}\,1{,}0)\cdot 10^{-3}\ \text{S}.$$

Bilden wir hiervon den Kehrwert, so erhalten wir die Impedanz der Parallelschaltung als

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\underline{Y}_2} = \frac{1}{(0{,}5 + \mathrm{j}\,1{,}0)\cdot 10^{-3}\ \text{S}} = (400 - \mathrm{j}\,800)\ \Omega.$$

Der mit der Parallelschaltung in Reihe liegende Kondensator hat die Impedanz

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} = \frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi\cdot 50\ \text{Hz}\cdot 10^{-5}\ \text{F}} = -\mathrm{j}\,318\ \Omega,$$

so dass die Impedanz der Gesamtschaltung

$$\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C_1} + \underline{Z}_2 = (-\mathrm{j}\,318 + 400 - \mathrm{j}\,800)\,\Omega = 1188\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}70{,}3^\circ}$$

beträgt. Wählen wir die anliegende Spannung als Bezugsgröße, indem wir sie willkürlich als reelle Größe ansetzen ($\underline{U} = 100$ V), so erhalten wir für den Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{100\ \mathrm{V}}{1188\,\Omega \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}70{,}3^\circ}} = 84{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}70{,}3^\circ} = 84{,}2\ \mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}70{,}3^\circ}.$$

Dieser Ausdruck enthält zwei Ergebnisse. Zum einen hat der gesuchte Strom den Betrag (Effektivwert)

$$I = |\underline{I}| = \underline{84{,}2\ \mathrm{mA}}.$$

Zum anderen eilt der Strom gegenüber der Spannung um 70,3° vor. Das bedeutet gleichzeitig, dass die Spannung gegenüber dem Strom um den gleichen Winkel nacheilt. Da als Phasenverschiebungswinkel nach Gl. (6.11) im Allgemeinen derjenige Winkel angegeben wird, um den die *Spannung* gegenüber dem *Strom* verschoben ist, lautet das gesuchte Ergebnis

$$\underline{\varphi = -70{,}3^\circ}.$$

Das negative Vorzeichen bringt zum Ausdruck, dass die Spannung gegenüber dem Strom *nacheilt*.

Aufgabe 9.2

Die in Bild 9.2 dargestellte Schaltung mit dem Widerstand $R = 35\ \Omega$, einer Spule mit der Induktivität $L = 10$ mH und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 1{,}0\ \mu\mathrm{F}$ liegt an der Spannung $U = 36$ V. Die Frequenz beträgt $f = 800$ Hz.

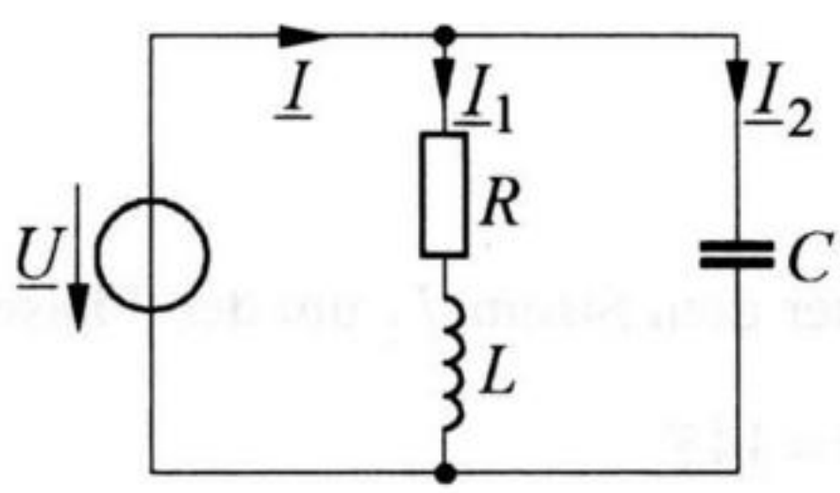


Bild 9.2 Belastung einer Spannungsquelle durch eine R-L-C-Schaltung

a) Welchen Strom I liefert die Spannungsquelle?

b) Um welchen Phasenverschiebungswinkel φ' eilt der Strom $\underline{I}_2$ gegenüber dem Strom $\underline{I}_1$ vor?

Lösung

Die Spule hat nach Gl. (7.19) bei der angegebenen Frequenz die Impedanz

$$\mathrm{j}\omega L = \mathrm{j}\,2\pi \cdot 800\ \mathrm{Hz} \cdot 0{,}01\ \mathrm{H} = \mathrm{j}\,50{,}3\ \Omega,$$

so dass die aus R und L bestehende Reihenschaltung nach Gl. (7.53) die Impedanz

$$\underline{Z}_1 = R + \mathrm{j}\omega L = (35 + \mathrm{j}\,50{,}3)\ \Omega$$

besitzt. Wählen wir die anliegende Spannung $\underline{U}$ als Bezugsgröße, indem wir sie willkürlich als reelle Größe ansehen ($\underline{U} = 36$ V), so ergibt sich für den in R und L fließenden Teilstrom

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} = \frac{36\ \mathrm{V}}{(35 + \mathrm{j}\,50{,}3)\ \Omega} = 0{,}59\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,55^\circ}.$$

Für den im Kondensatorzweig fließenden Teilstrom erhalten wir nach Gl. (7.33)

$$\underline{I}_2 = \underline{U}\ \mathrm{j}\omega C = 36\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{j} \cdot 2\pi \cdot 800\ \mathrm{Hz} \cdot 10^{-6}\ \mathrm{F} = 0{,}18\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ}.$$

Damit beträgt der Gesamtstrom

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 0{,}59\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}55^\circ} + 0{,}18\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}90^\circ} = 0{,}45\ \mathrm{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}41^\circ}.$$

Aus den berechneten Werten ergibt sich, dass

a) der Gesamtstrom den Betrag

$$\underline{I = 0{,}45\ \mathrm{A}}$$

hat und

b) der Strom $\underline{I}_2$ gegenüber dem Strom $\underline{I}_1$ um den Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi' = 90^\circ - (-55^\circ) = \underline{145^\circ}$$

voreilt.

Aufgabe 9.3

Die in Bild 9.3a dargestellte Schaltung mit den Widerständen $R_1 = 60\,\Omega$, $R_2 = 100\,\Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität $C = 2{,}5\ \mu\text{F}$ soll für die Frequenz $f = 800$ Hz durch die in Bild 9.3b angegebene Reihenersatzschaltung ersetzt werden.

Welche Werte sind für den Widerstand R_r und die Kapazität C_r erforderlich, damit beide Schaltungen bei der angegebenen Frequenz elektrisch gleichwertig sind?

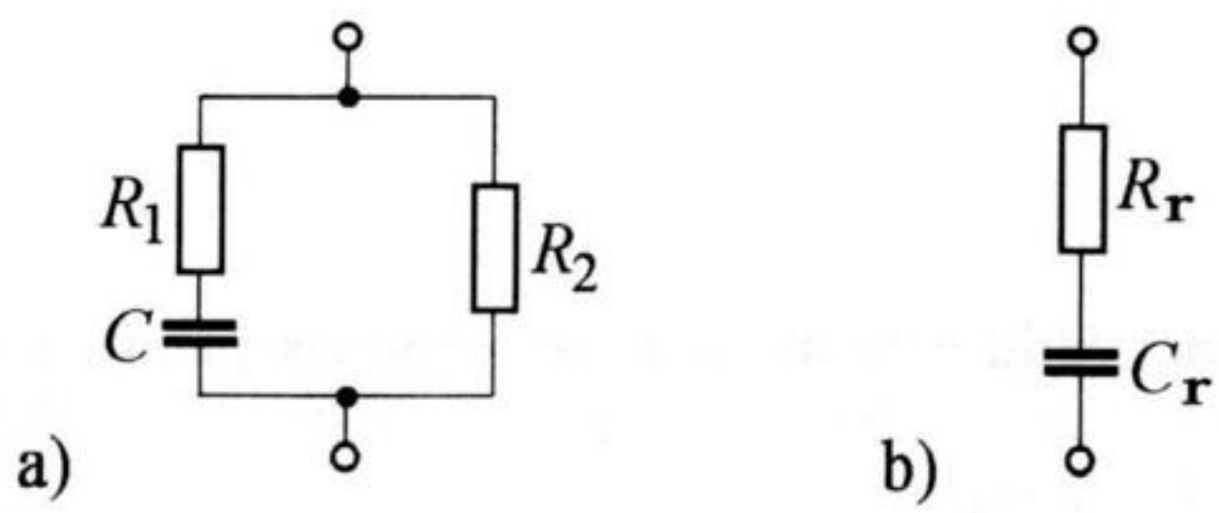


Bild 9.3 Beispiel für die Umwandlung einer vorliegenden Schaltung in eine Reihenersatzschaltung. a) Gegebene Schaltung, b) elektrisch gleichwertige Ersatzschaltung

Lösung

Der vorhandene Kondensator hat bei der angegebenen Frequenz die Impedanz

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi \cdot 800\ \text{Hz} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{F}} = -\mathrm{j}79{,}6\,\Omega,$$

so dass die aus R_1 und C bestehende Reihenschaltung die Impedanz

$$\underline{Z}_1 = R_1 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = (60 - \mathrm{j}79{,}6)\,\Omega$$

besitzt. Damit erhalten wir für die Impedanz der gesamten Schaltung

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 R_2}{\underline{Z}_1 + R_2} = \frac{(60 - \mathrm{j}79{,}6) \cdot 100}{60 - \mathrm{j}79{,}6 + 100}\,\Omega = (49{,}9 - \mathrm{j}24{,}9)\,\Omega.$$

Die in Bild 9.3b dargestellte Schaltung muss die gleiche Impedanz haben. Daher finden wir aus

$$R_r - j\frac{1}{\omega C_r} = (49{,}9 - j24{,}9)\,\Omega,$$

wenn wir die Realteile und die Imaginärteile für sich gleichsetzen, die Ergebnisse

$$\underline{R_r = 49{,}9\,\Omega},$$

$$C_r = \frac{1}{2\pi \cdot 800\text{ Hz} \cdot 24{,}9\,\Omega} = 7{,}98 \cdot 10^{-6}\text{ F} = \underline{7{,}98\,\mu\text{F}}.$$

Aufgabe 9.4

In der Schaltung nach Bild 9.4a mit der Versorgungsspannung $U = 60$ V und dem Widerstand $R_2 = 240\,\Omega$ fließen bei der Frequenz $f = 200$ Hz die Ströme $I_1 = 450$ mA und $I = 600$ mA.

Welche Werte haben der Widerstand R_2 und die Kapazität C?

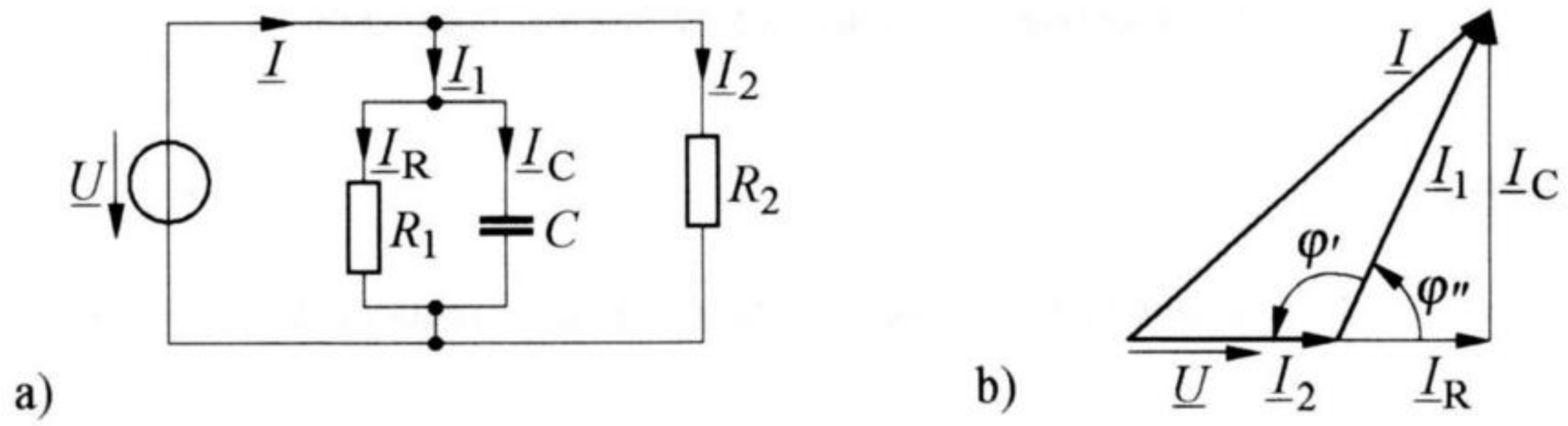


Bild 9.4 a) Schaltung zur Bestimmung der Werte einer ohmsch-kapazitiven Parallelschaltung, b) Zeigerdiagramm der Spannung und der Ströme

Lösung

Wir bestimmen zunächst den im Widerstand R_2 fließenden Stromes als

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{60\text{ V}}{240\,\Omega} = 250\text{ mA}$$

und erstellen dann ein prinzipiell richtiges (nicht maßstäbliches) Zeigerdiagramm nach Bild 9.4b. Hierbei wählen wir $\underline{U}$ als Bezugsgröße und tragen diese willkürlich waagerecht ab. $\underline{I}_2$ ist mit $\underline{U}$ in Phase, da der betreffende Zweig in Bild 9.4a

einen Wirkwiderstand (R_2) enthält. Aufgrund der Knotenregel ist die geometrische Summe der Ströme $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_1$ gleich dem Gesamtstrom $\underline{I}$. Daher können wir auch die Zeiger $\underline{I}_1$ und $\underline{I}$ eintragen. Durch Zerlegung des Zeigers $\underline{I}_1$ in die Komponenten $\underline{I}_R$ und $\underline{I}_C$ erhalten wir die in R_1 und C fließenden Teilströme. Bei der Zerlegung berücksichtigen wir, dass in Bild 9.4a die Zeiger $\underline{I}_R$ und $\underline{U}$ in Phase sind, während $\underline{I}_C$ der Spannung $\underline{U}$ um 90° voreilt.

Zur Ermittlung der Beträge von $\underline{I}_R$ und $\underline{I}_C$ bestimmen wir zunächst mit Hilfe des Kosinussatzes den in Bild 9.4b eingetragenen Winkel φ'. Aus

$$I^2 = I_1^{\,2} + I_2^{\,2} - 2\,I_1\,I_2 \cos\varphi'$$

folgt

$$\varphi' = \arccos\frac{I_1^{\,2} + I_2^{\,2} - I^2}{2\,I_1\,I_2} = \arccos\frac{450^2 + 250^2 - 600^2}{2\cdot 450\cdot 250} = 115°.$$

Damit erhalten wir aus Bild 9.4b mit $\varphi'' = 180° - \varphi' = 65°$ für die Ströme $\underline{I}_R$ und $\underline{I}_C$ die Beträge

$$I_R = I_1 \cos\varphi'' = 450\ \text{mA}\cdot\cos 65° = 190\ \text{mA},$$

$$I_C = I_1 \sin\varphi'' = 450\ \text{mA}\cdot\sin 65° = 408\ \text{mA}.$$

Hiermit finden wir aus Bild 9.4a die Ergebnisse

$$R_1 = \frac{U}{I_R} = \frac{60\ \text{V}}{0{,}190\ \text{A}} = \underline{316\ \Omega},$$

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{0{,}408\ \text{A}}{2\pi\cdot 200\ \text{Hz}\cdot 60\ \text{V}} = 5{,}41\cdot 10^{-6}\ \text{F} = \underline{5{,}41\ \mu\text{F}}.$$

Aufgabe 9.5

In der Schaltung nach Bild 9.5a soll zwischen den Punkten A und B eine Spannung $\underline{U}_{AB}$ erzeugt werden, die gegenüber der Versorgungsspannung $\underline{U}$ um den Phasenverschiebungswinkel $\varphi' = 60°$ voreilt. Die Kapazitäten der drei vorhandenen Kondensatoren sind gleich groß und betragen $C_1 = C_2 = C_3 = 100\ \text{nF}$. Die Versorgungsspannung hat die Frequenz $f = 400$ Hz.

Welchen Wert muss der Widerstand R haben?

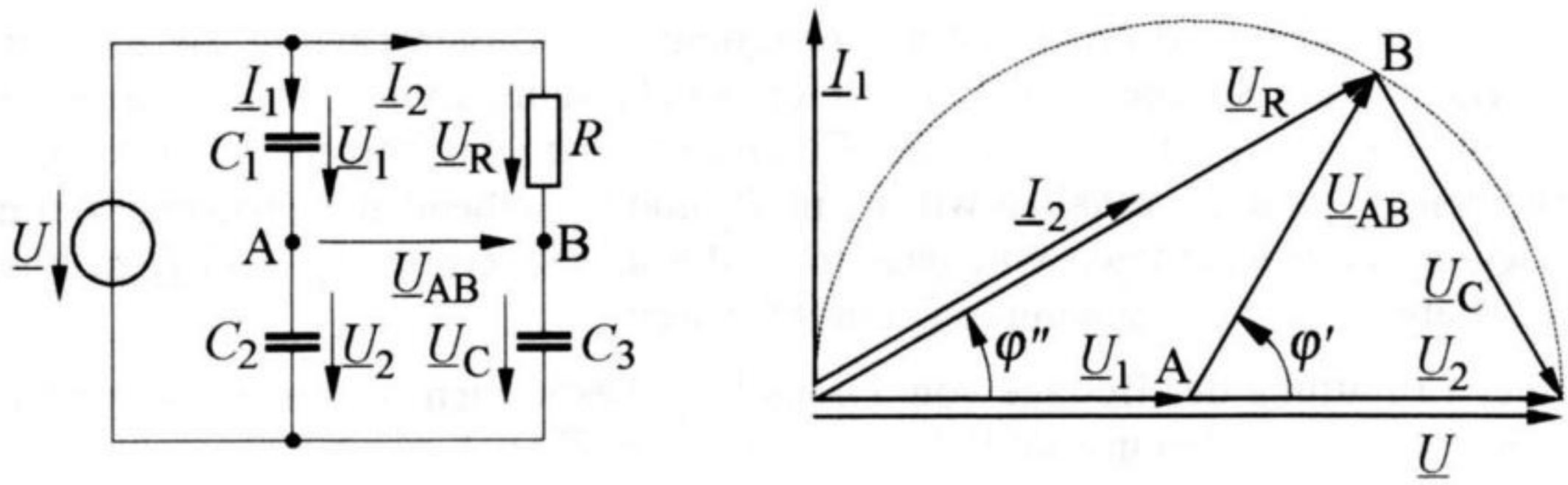


Bild 9.5 a) Schaltung zur Erzeugung einer gegenüber der Versorgungsspannung phasenverschobenen Spannung, b) zugehöriges Zeigerdiagramm

Lösung

Wir erstellen zunächst ein prinzipiell richtiges (nicht maßstäbliches) Zeigerdiagramm nach Bild 9.5b. Der Teilstrom $\underline{I}_1$ eilt der Spannung $\underline{U}$ um 90° vor. Die beiden links angeordneten Kondensatoren mit den gleich großen Kapazitäten C_1 und C_2 bilden einen Spannungsteiler, so dass

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}/2$$

wird. Der Teilstrom $\underline{I}_2$ eilt gegenüber der Spannung $\underline{U}$ vor, wobei der in Bild 9.5b eingetragene Winkel φ'' zwischen 0 und 90° liegt. $\underline{U}_R$ ist mit $\underline{I}_2$ in Phase, während $\underline{U}_C$ gegenüber $\underline{I}_2$ um 90° nacheilt. Die in Bild 9.5a angegebenen Punkte A und B können wir nach Bild 9.5b übertragen. Der in Bild 9.5b zwischen diesen Punkten liegende Zeiger ist die Spannung $\underline{U}_{AB}$.

Da $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$ einen rechten Winkel bilden, stellt der in Bild 9.5b eingetragene Kreis einen Thales-Kreis dar. Sehen wir den Spannungszeiger $\underline{U}_C$ als Sehne des Kreises an, so sind φ' der *Mittelpunktswinkel* und φ'' der *Umfangswinkel* des Kreises. Da der Umfangswinkel stets halb so groß ist wie der Mittelpunktswinkel, gilt

$$\varphi'' = \frac{\varphi'}{2} = \frac{60°}{2} = 30°.$$

Weiterhin folgt aus Bild 9.5b

$$\tan\varphi'' = \frac{U_C}{U_R} = \frac{I_2 \dfrac{1}{\omega C_3}}{I_2 R} = \frac{1}{R\,\omega C_3}.$$

Hieraus ergibt sich der gesuchte Widerstand als

$$R = \frac{1}{\omega C_3 \tan\varphi''} = \frac{1}{2\pi \cdot 400\ \text{Hz} \cdot 10^{-7}\ \text{F} \cdot \tan 30°} = 6{,}89 \cdot 10^3\ \Omega = \underline{6{,}89\ \text{k}\Omega}.$$

Aufgabe 9.6

Die Schaltung nach Bild 9.6a enthält die Widerstände $R_1 = 300\,\Omega$, $R_2 = 600\,\Omega$ und $R_3 = 100\,\Omega$, die (induktiven) Blindwiderstände $X_1 = 800\,\Omega$ und $X_2 = 400\,\Omega$ sowie den (kapazitiven) Blindwiderstand $X_C = -50\,\Omega$. Die vorhandene Spannungsquelle liefert die Spannung $U = 120$ V.

Es ist der Strom I_x zu bestimmen.

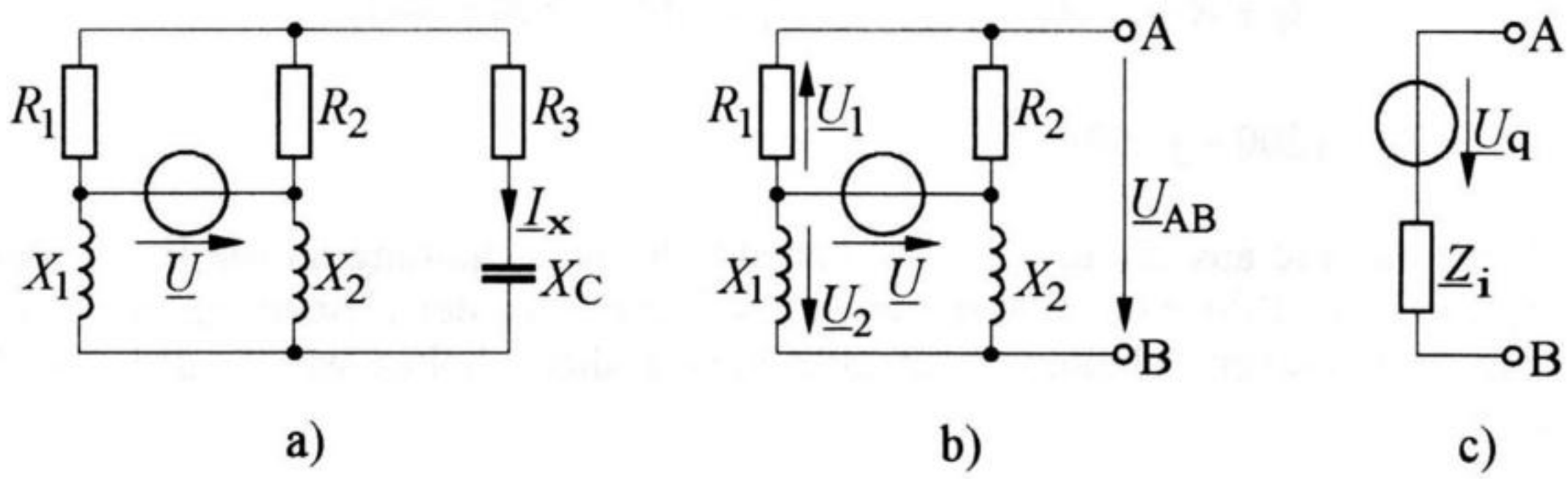


Bild 9.6 Schaltungsbeispiel zur Anwendung der Ersatzspannungsquelle. a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit abgetrenntem Lastzweig, c) zugehörige Ersatzspannungsquelle

Lösung

Wir lösen die Aufgabe dadurch, dass wir eine *Ersatzspannungsquelle* (vergl. Abschnitt 2.2.10) einführen. Dazu trennen wir zunächst in Bild 9.6a den aus den Widerständen R_3 und X_C bestehenden Zweig, den wir als Lastzweig ansehen wollen, von der Schaltung ab. Auf diese Weise entsteht die Anordnung nach Bild 9.6b. Hiervon bestimmen wir die Quellenspannung $\underline{U}_q$ sowie den komplexen Innenwiderstand (die Impedanz) $\underline{Z}_i$ der elektrisch gleichwertigen Ersatzspannungsquelle nach Bild 9.6c.

Die Quellenspannung $\underline{U}_q$ der Ersatzspannungsquelle ist gleich der in Bild 9.6b zwischen den Punkten A und B liegenden Spannung $\underline{U}_{AB}$. Zu deren Bestimmung berechnen wir die in Bild 9.6b gekennzeichneten Spannungen $\underline{U}_1$ und $\underline{U}_2$. Sie betragen, wenn wir die Spannung $\underline{U}$ als Bezugsgröße wählen ($\underline{U} = 120$ V),

$$\underline{U}_1 = \underline{U}\frac{R_1}{R_1 + R_2} = 120\ \text{V}\frac{300\,\Omega}{(300 + 600)\,\Omega} = 40\ \text{V},$$

$$\underline{U}_2 = \underline{U}\frac{\mathrm{j}X_1}{\mathrm{j}\,(X_1 + X_2)} = 120\ \mathrm{V}\frac{\mathrm{j}\,800\ \Omega}{\mathrm{j}\,(800 + 400)\ \Omega} = 80\ \mathrm{V}.$$

Durch Anwendung der Maschenregel ergibt sich

$$\underline{U}_\mathrm{q} = \underline{U}_\mathrm{AB} = \underline{U}_2 - \underline{U}_1 = 80\ \mathrm{V} - 40\ \mathrm{V} = 40\ \mathrm{V}.$$

Den komplexen Innenwiderstand (die Impedanz) $\underline{Z}_\mathrm{i}$ der Ersatzspannungsquelle finden wir dadurch, dass wir in Bild 9.6b die vorhandene Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung ersetzen und dann die zwischen den Punkten A und B vorhandene Impedanz bestimmen. Sie beträgt

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \mathrm{j}\frac{X_1 X_2}{X_1 + X_2} = \left(\frac{300 \cdot 600}{300 + 600} + \mathrm{j}\frac{800 \cdot 400}{800 + 400}\right)\ \Omega,$$

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = (200 + \mathrm{j}\,267)\ \Omega.$$

Wird nun die aus R_3 und X_C bestehende Reihenschaltung an die Ersatzspannungsquelle in Bild 9.6c angeschlossen, so fließt in ihr der gleiche Strom $\underline{I}_\mathrm{x}$ wie in der tatsächlichen Schaltung nach Bild 9.6a. Daher erhalten wir für den gesuchten Strom

$$\underline{I}_\mathrm{x} = \frac{\underline{U}_\mathrm{q}}{\underline{Z}_\mathrm{i} + R_3 + \mathrm{j}X_\mathrm{C}} = \frac{40\ \mathrm{V}}{(200 + \mathrm{j}\,267 + 100 - \mathrm{j}\,50)\ \Omega} = 108\ \mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,35{,}9^\circ}.$$

Dieser Strom hat somit den Betrag

$$\underline{I}_\mathrm{x} = 108\ \mathrm{mA}.$$

9.2 Leistungsanpassung in Wechselstromkreisen

In Abschnitt 2.2.9 wurde eine reale Gleichspannungsquelle (mit dem Innenwiderstand R_i) betrachtet, die mit einem Außenwiderstand R_a belastet ist. Es zeigte sich, dass die Quelle dann die größte Leistung abgibt, wenn R_a den gleichen Wert wie R_i hat. Man spricht dann von *Leistungsanpassung*. Es stellt sich jetzt die Frage, unter welchen Bedingungen bei Wechselstromkreisen eine solche Leistungsanpassung besteht. Dazu betrachten wir die in Bild 9.7 dargestellte Schaltung. Sie besteht aus einer realen Wechselspannungsquelle mit dem komplexen Innenwiderstand (der Impedanz) $\underline{Z}_\mathrm{i}$, an die ein Verbraucher mit der Impedanz $\underline{Z}_\mathrm{a}$ angeschlossen ist.

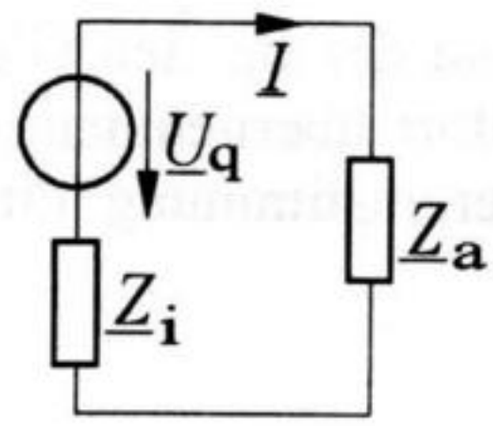


Bild 9.7 Zur Erläuterung der Leistungsanpassung in Wechselstromkreisen

Stellen wir den komplexen Innenwiderstand der realen Spannungsquelle durch

$$\underline{Z}_\mathrm{i} = R_\mathrm{i} + \mathrm{j}X_\mathrm{i} \tag{9.1}$$

dar und die Impedanz des Verbrauchers durch

$$\underline{Z}_\mathrm{a} = R_\mathrm{a} + \mathrm{j}X_\mathrm{a}, \tag{9.2}$$

so gilt für den Betrag des im Kreis fließenden Stromes bei der Quellenspannung U_q

$$I = \frac{U_\mathrm{q}}{\sqrt{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})^2 + (X_\mathrm{i} + X_\mathrm{a})^2}}. \tag{9.3}$$

Damit können wir die dem Verbraucher (der Impedanz $\underline{Z}_\mathrm{a}$) zugeführte **Wirkleistung** durch

$$P = I^2\, R_\mathrm{a} = \frac{U_\mathrm{q}^{\,2}\, R_\mathrm{a}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})^2 + (X_\mathrm{i} + X_\mathrm{a})^2} \tag{9.4}$$

darstellen. Wir wollen uns jetzt mit der Frage befassen, wie groß der Wirkwiderstand R_a und der Blindwiderstand X_a gewählt werden müssen, damit bei gegebenen Werten für R_i und X_i die Wirkleistung P nach Gl. (9.4) am größten wird. Dazu setzen wir zunächst bestimmte (feste) Werte für R_i und R_a voraus. Dann erreicht die Wirkleistung in Gl. (9.4) ein Maximum für

$$X_\mathrm{a} = -X_\mathrm{i}. \tag{9.5}$$

Dieses Ergebnis besagt, dass bei einem induktiv wirkenden Innenwiderstand ein kapazitiv wirkender Verbraucher erforderlich ist (und umgekehrt). Darüber hinaus müssen die Beträge beider Blindwiderstände übereinstimmen. Sie heben sich dann gegenseitig auf. Ist Gl. (9.5) erfüllt, so wird aus Gl. (9.4)

$$P = \frac{U_\mathrm{q}^{\,2}\, R_\mathrm{a}}{(R_\mathrm{i} + R_\mathrm{a})^2}. \tag{9.6}$$

Diese Beziehung entspricht genau der für den Gleichstromkreis angegebenen Gl. (2.96). Wir können somit von dort übernehmen, dass die dem Außenwiderstand zugeführte Wirkleistung - in Übereinstimmung mit Gl. (2.97) - für

$$R_a = R_i \tag{9.7}$$

den größten Wert annimmt. Die in den Gln. (9.5) und (9.7) angegebenen Bedingungen lassen sich zusammenfassen. Dazu führen wir die konjugiert komplexe Größe von $\underline{Z}_i$ ein und bezeichnen diese mit $\underline{Z}_i^*$. Bei dieser Vorgabe liefert eine reale Spannungsquelle dann die größte Wirkleistung an einen Außenwiderstand, wenn

$$\boxed{\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*.} \tag{9.8}$$

ist. Man bezeichnet diesen Zustand auch als **Wirkleistungsanpassung**.

Aufgabe 9.7

Die Schaltung nach Bild 9.8a mit dem Widerstand $R_1 = 300\,\Omega$ und einem Kondensator mit der Kapazität C = 500 nF liegt an der Spannung U = 48 V. Die Frequenz beträgt f = 800 Hz. Der Widerstand R_2 und die Induktivität L sollen so gewählt werden, dass R_2 die maximal mögliche Wirkleistung aufnimmt.

a) Welche Werte sind für R_2 und L erforderlich?

b) Welche Wirkleistung P wird dann dem Widerstand R_2 zugeführt?

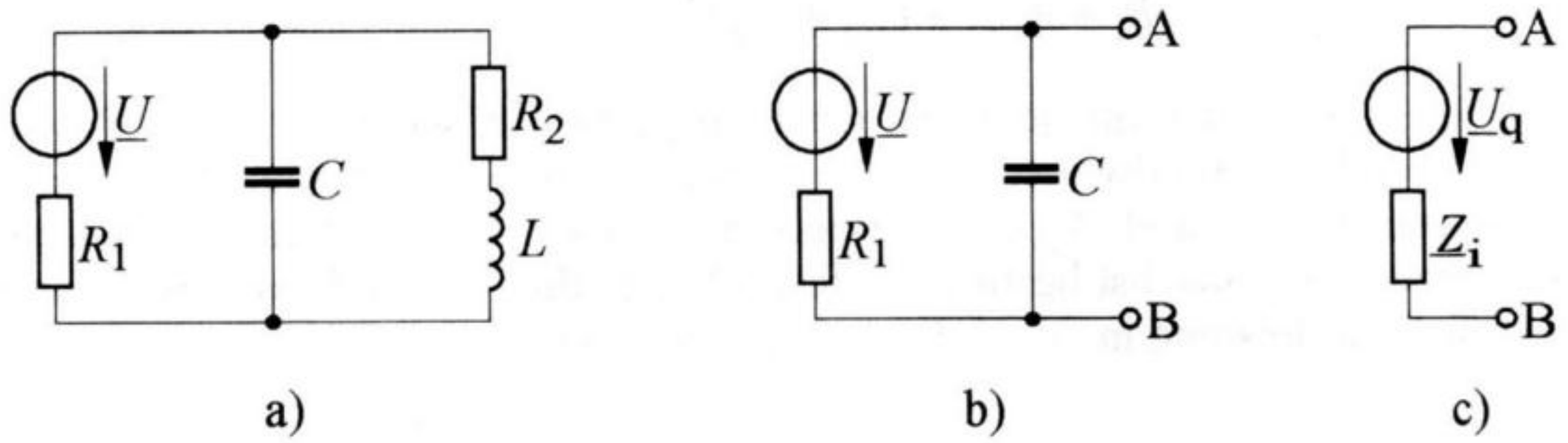


Bild 9.8 Schaltungsbeispiel zum Begriff „Wirkleistungsanpassung".
a) Gegebene Schaltung, b) Schaltung mit abgetrenntem Belastungszweig,
c) Ersatzspannungsquelle zu der unter b) dargestellten Schaltung

Lösung

Wir trennen zunächst in Bild 9.8a die aus R_2 und L bestehende Reihenschaltung von der gegebenen Schaltung ab und erhalten so die Anordnung nach Bild 9.8b.

Diese ersetzen wir durch eine *Ersatzspannungsquelle* nach Bild 9.8c und bestimmen von dieser die Quellenspannung $\underline{U}_q$ und den komplexen Innenwiderstand (die Impedanz) $\underline{Z}_i$.

Die Quellenspannung $\underline{U}_q$ der Ersatzspannungsquelle ist gleich der in Bild 9.8b zwischen den Punkten A und B liegenden Spannung. Berücksichtigen wir, dass die Impedanz des Kondensators den Wert

$$\mathrm{j}X_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = \frac{1}{\mathrm{j}\,2\pi \cdot 800\ \mathrm{Hz} \cdot 500 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{F}} = -\mathrm{j}\,398\ \Omega$$

hat, so erhalten wir für die gesuchte Quellenspannung

$$\underline{U}_q = \underline{U}\,\frac{\mathrm{j}X_C}{R_1 + \mathrm{j}X_C} = 48\ \mathrm{V}\,\frac{-\mathrm{j}\,398\ \Omega}{(300 - \mathrm{j}\,398)\ \Omega} = 38{,}3\ \mathrm{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,37{,}0°}.$$

Der komplexe Innenwiderstand (die Impedanz) $\underline{Z}_i$ der Ersatzspannungsquelle ist gleich der in Bild 9.8b zwischen den Punkten A und B liegenden Impedanz unter der Voraussetzung, dass die vorhandene Spannungsquelle durch eine Kurzschlussverbindung ersetzt wird. Es ergibt sich

$$\underline{Z}_i = \frac{R_1 \cdot \mathrm{j}X_C}{R_1 + \mathrm{j}X_C} = \frac{300 \cdot (-\mathrm{j}\,398)}{300 - \mathrm{j}\,398}\ \Omega = (191 - \mathrm{j}\,144)\ \Omega.$$

a) Wird die aus R_2 und L bestehende Reihenschaltung mit der Impedanz

$$\underline{Z}_a = R_2 + \mathrm{j}\omega L$$

an die Ersatzspannungsquelle in Bild 9.8c angeschlossen, so nimmt R_2 nach Gl. (9.8) dann die größte Wirkleistung auf, wenn

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_i^*$$

und somit

$$R_2 + \mathrm{j}\omega L = (191 + \mathrm{j}\,144)\ \Omega$$

ist. Daraus finden wir die Ergebnisse

$$\underline{R_2 = 191\ \Omega},$$

$$L = \frac{144\ \Omega}{2\pi \cdot 800\ \mathrm{Hz}} = 28{,}7 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H} = \underline{28{,}7\ \mathrm{mH}}.$$

b) Da die Imaginärteile von $\underline{Z}_a$ und $\underline{Z}_i$ sich gegenseitig aufheben und die Realteile gleich groß sind, ergibt sich für die vom Widerstand R_2 aufgenommene Wirkleistung

$$P = \frac{\left(U_q/2\right)^2}{R_2} = \frac{(38{,}3\ \mathrm{V}/2)^2}{191\,\Omega} = \underline{1{,}92\ \mathrm{W}}.$$

9.3 Blindleistungskompensation

Wir betrachten einen ohmsch-induktiven Verbraucher ($\underline{Z}$), der nach Bild 9.9a mit einer Spannungsquelle verbunden ist.

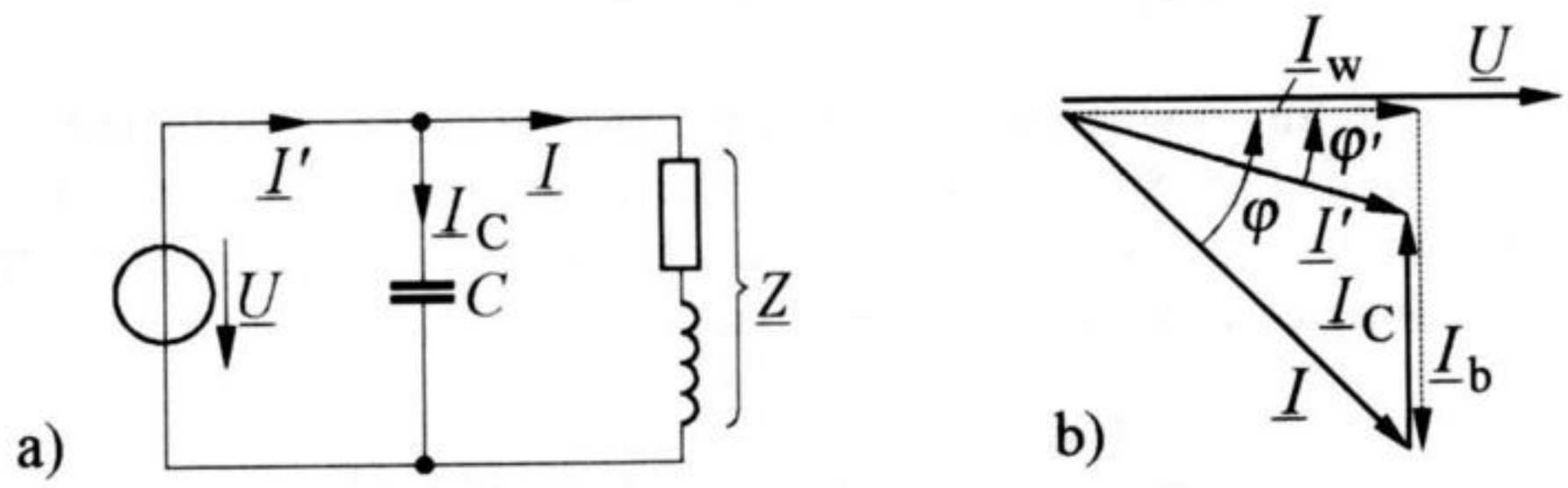


Bild 9.9 Ohmsch-induktiver Verbraucher mit parallelliegendem Kondensator zur Blindstromkompensation. a) Schaltung, b) Zeigerdiagramm

Der aufgenommene Strom $\underline{I}$ möge nach Bild 9.9b gegenüber der Spannung $\underline{U}$ um den Phasenverschiebungswinkel φ nacheilen. Wir können diesen Strom nach Bild 9.9b in die Komponenten $\underline{I}_w$ und $\underline{I}_b$ mit den Beträgen

$$I_w = I \cos\varphi, \tag{9.9}$$

$$I_b = I \sin\varphi \tag{9.10}$$

zerlegen. Man bezeichnet die mit der Spannung $\underline{U}$ in Phase liegende Stromkomponente $\underline{I}_w$ auch als **Wirkstrom** und die um 90° nacheilende Stromkomponente $\underline{I}_b$ als (induktiven) **Blindstrom**. Schaltet man einen Kondensator nach Bild 9.9a parallel zum Verbraucher, so fließt zusätzlich ein Strom $\underline{I}_C$, der gegenüber der Spannung $\underline{U}$ um 90° voreilt. Hierdurch wird nach Bild 9.9b der Blindstrom $\underline{I}_b$ (ganz oder teilweise, je nach der Höhe des Betrages von $\underline{I}_C$) **kompensiert**, so dass der Betrag des von der Spannungsquelle gelieferten Gesamtstromes $\underline{I}'$ kleiner als der Betrag des Verbraucherstromes $\underline{I}$ wird. Das bedeutet, dass durch das Zuschalten des Kondensators sowohl die Spannungsquelle als auch die zum Verbraucher führenden Leitungen *entlastet* werden. Man spricht bei dieser Maßnahme von

einer **Blindstromkompensation** oder von einer **Blindleistungskompensation**. Sie wird in der Regel bei induktiv wirkenden Verbrauchern vorgenommen, da diese sehr viel häufiger auftreten als kapazitiv wirkende.

Wir wollen uns daher mit der Frage der Bestimmung der Kapazität C zur Kompensation des Blindstromes befassen. Dazu nehmen wir an, dass in Bild 9.9b die Größen $\underline{U}$ und $\underline{I}$ bekannt sind. Gesucht sei die notwendige Kapazität C zur Erzielung eines bestimmten Gesamtleistungsfaktors $\cos\varphi'$. Zur Lösung dieser Aufgabe entnehmen wir aus Bild 9.9b, dass der Kondensatorstrom $\underline{I}_\mathrm{C}$ den Betrag

$$I_\mathrm{C} = I_\mathrm{w} \tan\varphi - I_\mathrm{w} \tan\varphi'. \tag{9.11}$$

haben muss, wobei der Betrag des Wirkstromes (I_w) sich aus Gl. (9.9) ergibt. Damit erhalten wir aus $I_\mathrm{C} = U\,\omega C$ die erforderliche Kapazität als

$$C = \frac{I_\mathrm{C}}{U\,\omega}. \tag{9.12}$$

Wir wollen jetzt noch ein anderes Verfahren zur Bestimmung der erforderlichen Kapazität betrachten. Dabei gehen wir von der Schaltung nach Bild 9.10a aus.

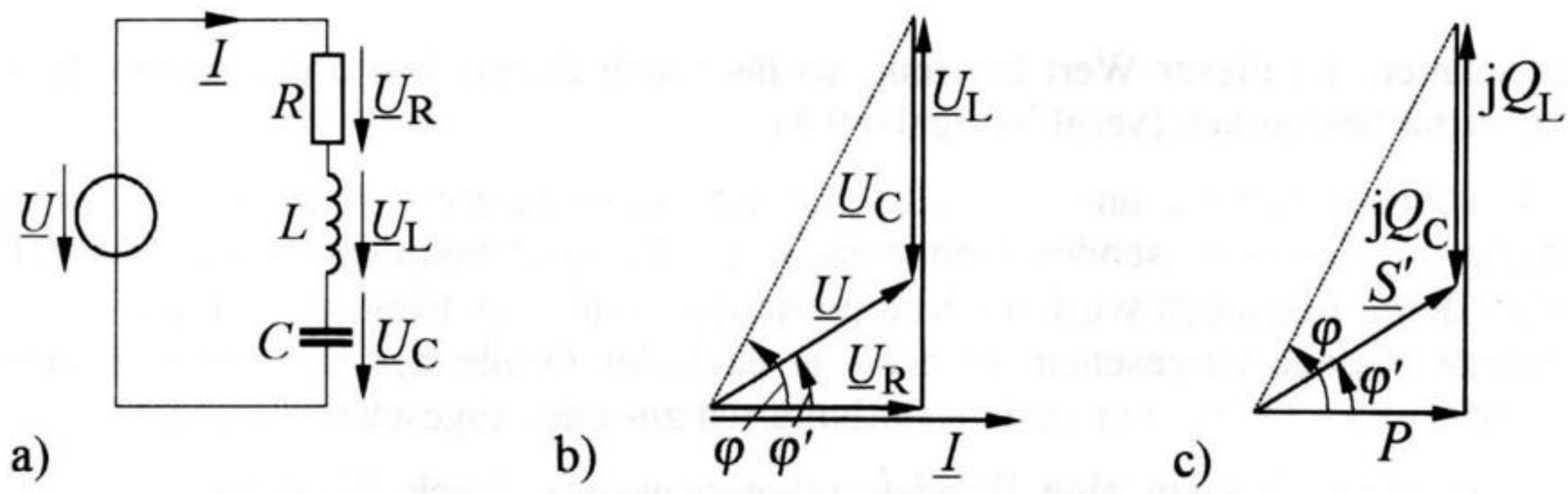


Bild 9.10 Zur Erläuterung der Blindleistungskompensation. a) Betrachtete Schaltung, b) zugehöriges Zeigerdiagramm, c) Diagramm der Leistungen

Das zur Schaltung gehörende Zeigerdiagramm des Stromes und aller Spannungen ist in Bild 9.10b dargestellt. Hierin sind φ der Phasenverschiebungswinkel der aus R und L bestehenden Teilschaltung und φ' der Phasenverschiebungswinkel der Gesamtschaltung. Multiplizieren wir in Bild 9.10a den Betrag der Teilspannung $\underline{U}_\mathrm{R}$ mit dem Betrag des Stromes $\underline{I}$, so erhalten wir die **Wirkleistung**

$$P = U_\mathrm{R}\, I.$$

Entsprechend stellen

$$Q_L = U_L I$$

die auftretende **induktive Blindleistung**,

$$Q_C = -U_C I$$

die auftretende **kapazitive Blindleistung** und

$$S' = U I$$

die insgesamt auftretende **Scheinleistung** dar. Geben wir die Scheinleistung in komplexer Form (vergl. Abschnitt 8.4) durch

$$\underline{S}' = P + \mathrm{j}(Q_L + Q_C)$$

an, entsteht die Darstellung nach Bild 9.10c. Dieses Diagramm können wir verallgemeinern. Ist beispielsweise die Wirkleistung P eines ohmsch-induktiven Verbrauchers bekannt, und soll der Leistungsfaktor der Schaltung durch Zuschalten eines Kondensators von $\cos\varphi$ auf $\cos\varphi'$ (induktiv) vergrößert werden, so muss der Kondensator nach Bild 9.10c eine Blindleistung mit dem Betrag

$$|Q_C| = P \tan\varphi - P \tan\varphi' = P(\tan\varphi - \tan\varphi') \tag{9.13}$$

aufnehmen. Ist dieser Wert bekannt, so lässt sich daraus leicht die erforderliche Kapazität bestimmen (vergl. Aufgabe 9.8).

Leuchtstofflampen und vergleichbare ohmsch-induktive Verbraucher werden häufig mit einem passenden Kondensator zur Blindstromkompensation versehen. In größeren Betrieben wird zur Kompensation induktiver Blindleistung meist eine zentrale Anlage vorgesehen, in der - je nach der Größe des vorhandenen Leistungsfaktors - Teile von Kondensatorbatterien zu- oder abgeschaltet werden.

Grundsätzlich kann eine Blindstromkompensation durch Wahl einer entsprechenden Kapazität so vorgenommen werden, dass der Gesamtleistungsfaktor $\cos\varphi' = 1$ wird. Meist wird jedoch nur auf etwa $\cos\varphi' = 0{,}9$ (induktiv) kompensiert. Eine darüber hinausgehende Kompensation hat nur noch eine unwesentliche Verringerung des Betrages des Gesamtstromes zur Folge.

Aufgabe 9.8

Ein ohmsch-induktiver Verbraucher mit dem Leistungsfaktor $\cos\varphi = 0{,}5$ nimmt bei der Spannung $U = 230$ V und der Frequenz $f = 50$ Hz die Wirkleistung $P = 700\,\mathrm{W}$ auf. Der Leistungsfaktor soll durch Zuschalten eines Kondensators nach Bild 9.11a auf $\cos\varphi' = 0{,}9$ (induktiv) erhöht werden.

a) Welchen Strom I nimmt der Verbraucher (ohne Kondensator) auf?

b) Welche Kapazität C muss der Kondensator haben, und welcher Strom I' wird bei zugeschaltetem Kondensator insgesamt von der Schaltung aufgenommen?

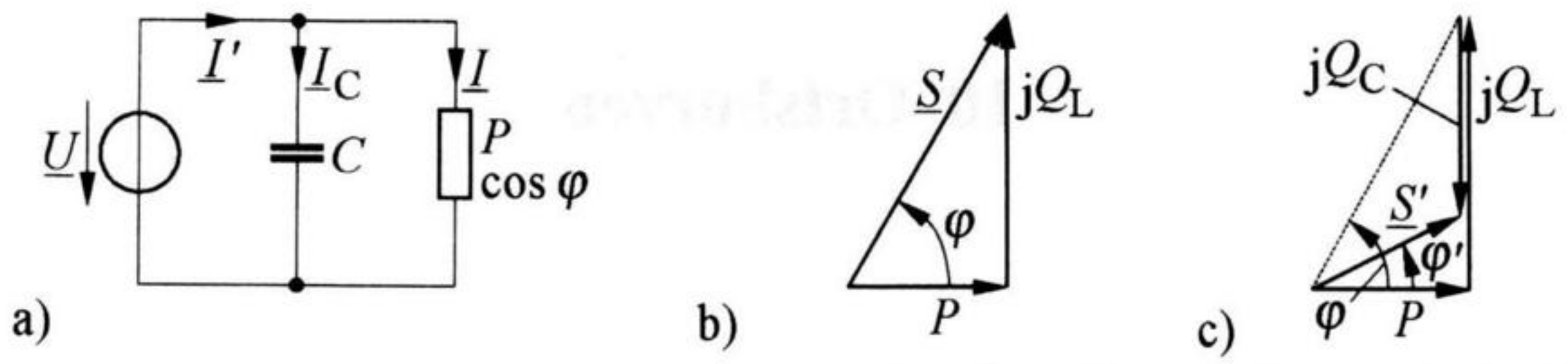


Bild 9.11 Schaltungsbeispiel zur Blindleistungskompensation.
a) Vorgegebene Schaltung, b) Leistungsdreieck ohne Blindleistungskompensation,
c) Diagramm der Leistungen bei vorliegender Blindleistungskompensation

Lösung

a) Der vom Verbraucher (ohne Kondensator) aufgenommene Strom beträgt nach Gl. (8.7)

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{700\ \text{W}}{230\ \text{V}\cdot 0{,}5} = \underline{6{,}09\ \text{A}}.$$

b) Wirk-, Blind- und Scheinleistung des Verbrauchers (P, Q_L und S) können nach Bild 9.11b in komplexer Form dargestellt werden. Der eingetragene Phasenverschiebungswinkel ergibt sich aus $\cos\varphi = 0{,}5$ als $\varphi = 60°$. Durch das Zuschalten des Kondensators kommt noch eine kapazitive Blindleistung Q_C dazu, wodurch induktive Blindleistung kompensiert wird. Es entsteht die Darstellung nach Bild 9.11c. Der hier eingetragene Phasenverschiebungswinkel φ' folgt aus $\cos\varphi' = 0{,}9$ als $\varphi' = 25{,}84°$. Aus Bild 9.11c ist ersichtlich, dass der Kondensator - in Übereinstimmung mit Gl. (9.13) - eine Blindleistung mit dem Betrag

$$|Q_\text{C}| = P\tan\varphi - P\tan\varphi' = 700\ \text{W}(\tan 60° - \tan 25{,}84°) = 873\ \text{var}$$

aufnehmen muss. Die dafür erforderliche Kapazität folgt aus Gl. (8.9) als

$$C = \frac{|Q_\text{C}|}{\omega U^2} = \frac{873\ \text{var}}{2\pi\cdot 50\ \text{Hz}\cdot(230\ \text{V})^2} = 52{,}5\cdot 10^{-6}\ \text{F} = \underline{52{,}5\ \mu\text{F}}.$$

Durch das Zuschalten des Kondensators sinkt der Betrag (Effektivwert) des aufgenommenen Stromes von $I = 6{,}09\ \text{A}$ auf

$$I' = \frac{P}{U\cos\varphi'} = \frac{700\ \text{W}}{230\ \text{V}\cdot 0{,}9} = \underline{3{,}38\ \text{A}}.$$

10 Ortskurven

10.1 Begriff der Ortskurve

Wir betrachten einen einfachen Wechselstromkreis nach Bild 10.1a und setzen voraus, dass der Wirkwiderstand R veränderbar ist. Geben wir ihn in der Form

$$R = p\,R_0$$

an, so können wir R_0 als konstanten Widerstand ansehen, während p einen variablen Zahlenfaktor darstellt. Der Blindwiderstand ωL sei konstant.

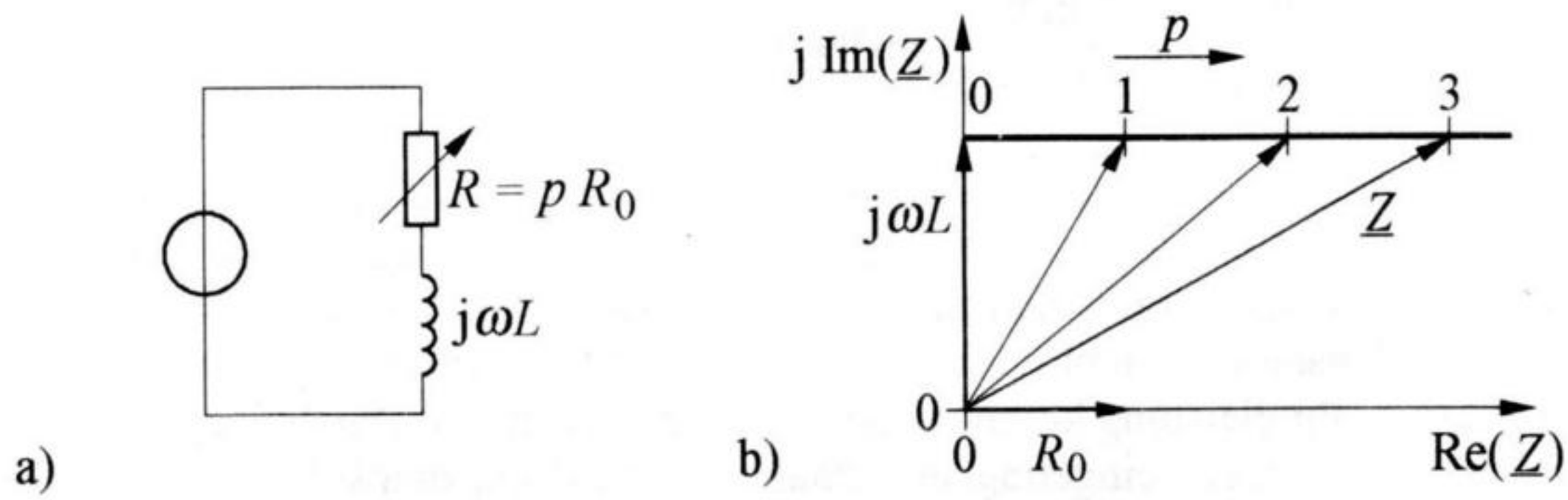


Bild 10.1 a) Einfacher Wechselstromkreis, b) Ortskurve der Impedanz des Stromkreises bei veränderlichem Wirkwiderstand

Für die Impedanz der aus R und ωL bestehenden Reihenschaltung gilt

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\omega L = p\,R_0 + \mathrm{j}\omega L.$$

Stellen wir diese Größe für verschiedene Werte von p in der komplexen Ebene dar, so erhalten wir Bild 10.1b. Die Verbindung der Pfeilspitzen ergibt eine Linie, die man als **Ortskurve** bezeichnet. Im vorliegenden Fall verläuft sie parallel zur Abszissenachse. Der veränderliche Faktor p wird als **Parameter** bezeichnet.

Häufig werden Ortskurven mit einer *Bezifferung* versehen. So enthält die Ortskurve nach Bild 10.1b beispielsweise eine Bezifferung nach p. Stattdessen kann die Ortskurve auch mit Werten der Variablen R beziffert werden. Mit Hilfe

solcher Bezifferungen findet man für jeden Wert der betreffenden Variablen leicht den zugehörigen Punkt der Ortskurve.

Neben der Impedanz können auch andere komplexe Größen durch Ortskurven dargestellt werden. Wir wollen daher noch als weitere Anordnung die Schaltung nach Bild 10.2a betrachten. Gesucht sei die Ortskurve des Stromes $\underline{I}$ bei veränderlicher Frequenz f unter der Voraussetzung, dass die Spannung $\underline{U}$ als reelle Größe (Bezugsgröße) angesehen wird.

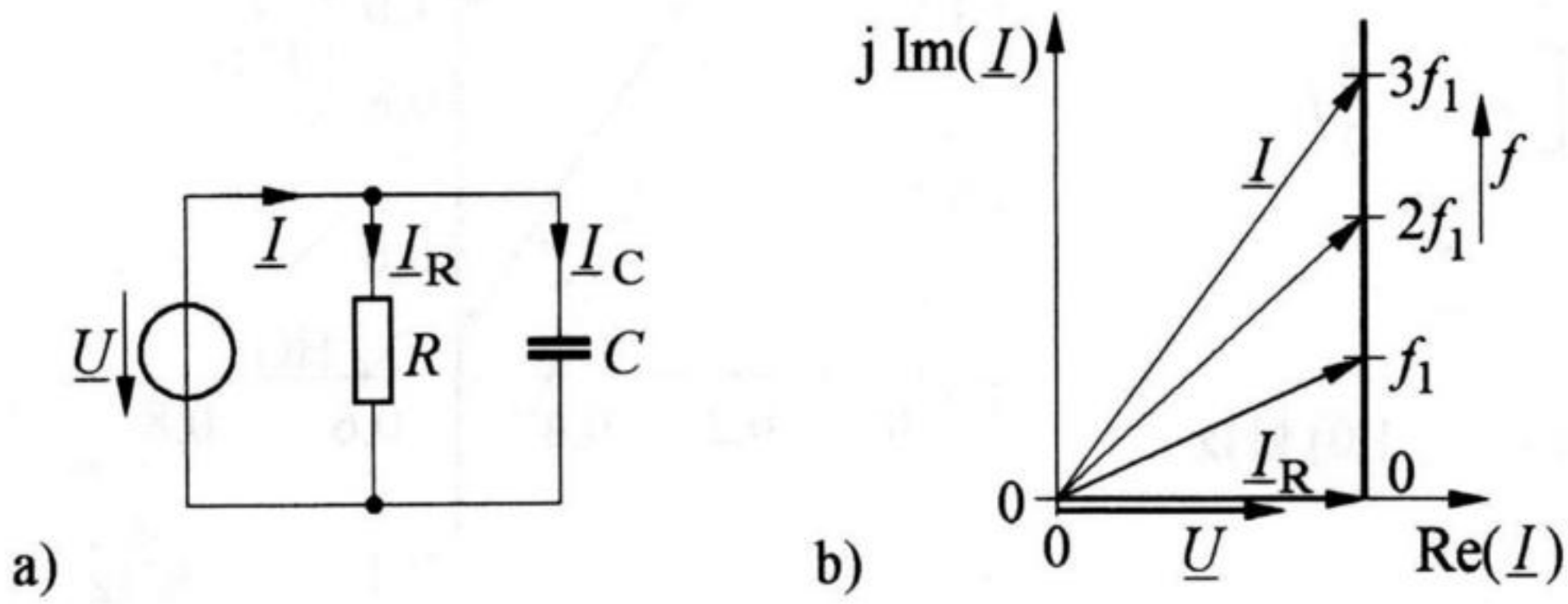


Bild 10.2 a) Ohmsch-kapazitiver Wechselstromkreis,
b) Ortskurve des Stromes bei veränderlicher Frequenz

Nach Bild 10.2a ist

$$\underline{I} = \underline{I}_\mathrm{R} + \underline{I}_\mathrm{C} = \frac{\underline{U}}{R} + \underline{U}\,\mathrm{j}\omega C.$$

Tragen wir diesen Stromzeiger für verschiedene Werte der Frequenz in die komplexe Ebene ein, so erhalten wir die Darstellung nach Bild 10.2b. Die Verbindung der Zeigerspitzen liefert die gesuchte Ortskurve. Sie kann, wie dargestellt, mit einer Bezifferung von Werten der Frequenz f versehen werden. In Bild 10.2b ist außerdem der Zeiger der Spannung $\underline{U}$ - in Richtung der reellen Achse zeigend - eingetragen.

Aufgabe 10.1

Die in Bild 10.3a dargestellte Schaltung besteht aus dem Wirkwiderstand $R = 200\,\Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 39{,}8$ mH.

Es ist die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung für die Frequenz $f = (0{,}4\ldots1{,}0)$ kHz darzustellen und mit Werten von f zu beziffern.

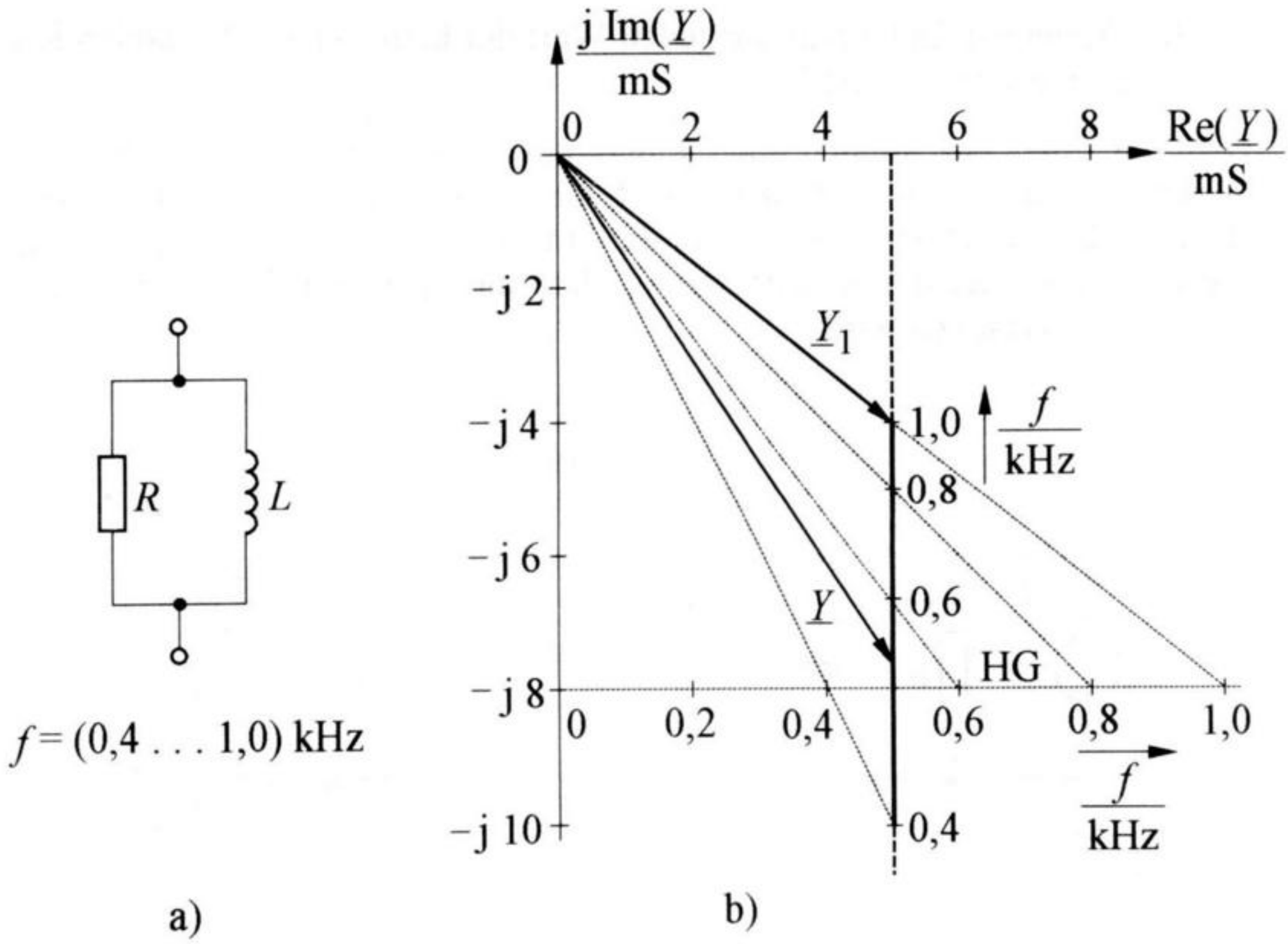


Bild 10.3 a) Parallelschaltung eines Wirkwiderstandes und einer Spule,
b) Ortskurve der Admittanz der Schaltung bei veränderlicher Frequenz

Lösung

Für die Admittanz der Schaltung gilt

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}\omega L} = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L}.$$

Bei variabler Frequenz ändert sich der Blindleitwert der Schaltung, während der Wirkleitwert konstant bleibt. Die gesuchte Ortskurve verläuft somit nach Bild 10.3b parallel zur Ordinatenachse durch den Punkt

$$\mathrm{Re}(\underline{Y}) = \frac{1}{R} = \frac{1}{200\,\Omega} = 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{S} = 5\ \mathrm{mS}.$$

Da sich der Blindleitwert $1/(\omega L)$ der Schaltung proportional zum *Kehrwert* der Frequenz ändert, ergibt sich für die Ortskurve eine nichtlineare Bezifferung. Sie kann jedoch aufgrund des Strahlensatzes durch Verwendung einer linear bezifferten *Hilfsgerade* ermittelt werden. Dazu bestimmen wir zunächst die Admittanz der Schaltung bei der Frequenz $f = 1$ kHz als

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R} - \mathrm{j}\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{200\,\Omega} - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi \cdot 10^3\ \mathrm{Hz} \cdot 39{,}8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{H}} = (5 - \mathrm{j}4)\ \mathrm{mS}$$

und tragen diesen Wert in Bild 10.3b ein. Die Hilfsgerade (HG) wird waagerecht eingetragen, wobei der Abstand von der Abszissenachse beliebig ist. Die Verlängerung von $\underline{Y}_1$ schneidet die Hilfsgerade im Punkt f = 1 kHz. Letztere wird anschließend linear geteilt. Die sich ergebende Bezifferung wird danach, wie dargestellt, auf die Ortskurve übertragen.

10.2 Die Ermittlung von Ortskurven

Zur Ermittlung von Ortskurven ist es häufig notwendig, von komplexen Größen die Kehrwerte zu bilden. Eine solche Kehrwertbildung bezeichnet man als **Inversion**. Soll beispielsweise die Impedanz

$$\underline{Z} = Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$$

in eine Admittanz umgerechnet werden, so ergibt sich

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}.$$

Das Ergebnis besagt, dass der Betrag von $\underline{Y}$ gleich dem Kehrwert des Betrages von $\underline{Z}$ ist, und dass die Richtung von $\underline{Y}$ sich durch Spiegelung von $\underline{Z}$ an der reellen Achse ergibt. Stellt man $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ in der komplexen Ebene dar, so ist zu beachten, dass man für $\underline{Z}$ nicht dieselbe Ebene verwenden kann wie für $\underline{Y}$. Die Ursache dafür liegt darin, dass für $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$ verschiedene Einheiten verwendet werden. Daher sind zwei komplexe Ebenen notwendig, wobei zur Bezifferung der Koordinatenachsen jeweils beliebige Maßstäbe gewählt werden können. Man kann jedoch auch beide Ebenen übereinander legen. Dann müssen die Koordinatenachsen mit zwei Bezifferungen versehen werden (für $\underline{Z}$ und $\underline{Y}$).

Die Inversion einer Ortskurve kann grundsätzlich dadurch vorgenommen werden, dass man punktweise eine Kehrwertbildung vornimmt. Das Verfahren ist jedoch häufig mit einem erheblichen Aufwand verbunden. In vielen Fällen ist es möglich, die gesuchten inversen Ortskurven, wie nachfolgend beschrieben, geometrisch zu konstruieren.

10.2.1 Inversion einer Geraden

Ortskurven haben häufig die Form einer Geraden. Wir wollen uns daher zunächst mit deren Inversion befassen. Dazu betrachten wir eine Gerade (G) in beliebiger Lage nach Bild 10.4.

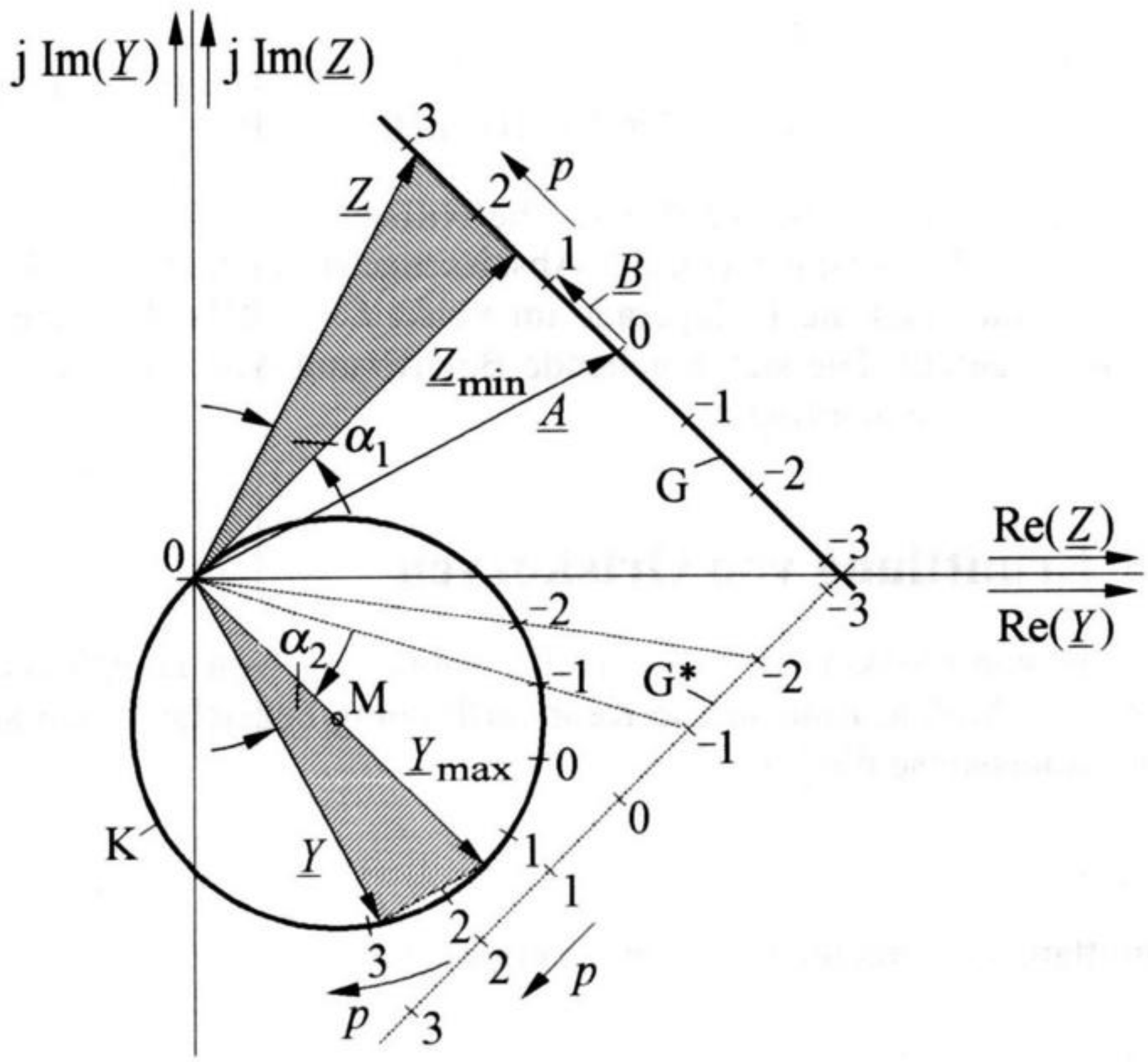


Bild 10.4 Inversion einer beliebig verlaufenden Geraden

Wir können die Gerade durch

$$\underline{Z} = \underline{A} + p\,\underline{B} \tag{10.1}$$

wiedergeben. Dabei sind $\underline{A}$ und $\underline{B}$ als gegebene *konstante komplexe Größen* anzusehen, während p eine *reelle Variable* darstellt. Sie wird bekanntlich auch als *Parameter* bezeichnet. In Bild 10.4 ist die Gerade nach p beziffert. Zur Ermittlung des Verlaufs der inversen Ortskurve

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{A} + p\,\underline{B}} \tag{10.2}$$

tragen wir in Bild 10.4 zunächst den Zeiger $\underline{Z}_{\min}$ ein. Er ist dadurch gekennzeichnet, dass er von allen $\underline{Z}$-Werten den kleinsten Betrag hat und daher mit der Geraden (G) einen rechten Winkel bildet. Den Kehrwert von $\underline{Z}_{\min}$ können wir darstellen durch

$$\underline{Y}_{\max} = \frac{1}{\underline{Z}_{\min}}\,. \tag{10.3}$$

Die Richtung dieses Zeigers erhalten wir dadurch, dass wir $\underline{Z}_{\min}$ an der reellen Achse spiegeln. Entsprechend finden wir nach Bild 10.4 für einen beliebigen Zeiger $\underline{Z}$ den Kehrwert

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}. \tag{10.4}$$

Durch die vorgenommene Spiegelung an der reellen Achse wird in Bild 10.4

$$\alpha_1 = \alpha_2. \tag{10.5}$$

Teilen wir Gl. (10.4) durch Gl. (10.3), so erhalten wir, wenn wir nur die Beträge darstellen,

$$\frac{Y}{Y_{\max}} = \frac{Z_{\min}}{Z}. \tag{10.6}$$

Aus den Gln. (10.5) und (10.6) geht hervor, dass die schraffierten Dreiecke in Bild 10.4 *ähnlich* und somit *beide* Dreiecke *rechtwinklig* sind. Verändern wir nun den Zeiger $\underline{Z}$ im oberen Dreieck, so wandert die Spitze des zugehörigen inversen Zeigers $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ im unteren Dreieck auf einem *Thaleskreis*. Die in Gl. (10.2) dargestellte Ortskurve wird somit in Bild 10.4 durch den Kreis K wiedergegeben.

Zur Konstruktion des Kreises bilden wir zunächst von dem Zeiger $\underline{Z}_{\min}$ den Kehrwert $\underline{Y}_{\max}$ und tragen diesen in die Ebene ein. In seiner Mitte liegt der Mittelpunkt M. Nach Darstellung des Kreises werden die Werte des Parameters p mit Hilfe der gespiegelten Geraden G^* auf den Kreis übertragen.

Aufgabe 10.2

In der Reihenschaltung nach Bild 10.5a mit dem Blindwiderstand $X = 5\,\Omega$ sei der Wirkwiderstand R im Bereich (0 . . . 10) Ω beliebig einstellbar.

Es sind die Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung darzustellen und jeweils mit Werten des Widerstandes R zu beziffern.

Lösung

Da der Blindwiderstand der Reihenschaltung konstant ist, stellt die Ortskurve der Impedanz

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$$

der Schaltung eine parallel zur Abszissenachse verlaufende Gerade dar.

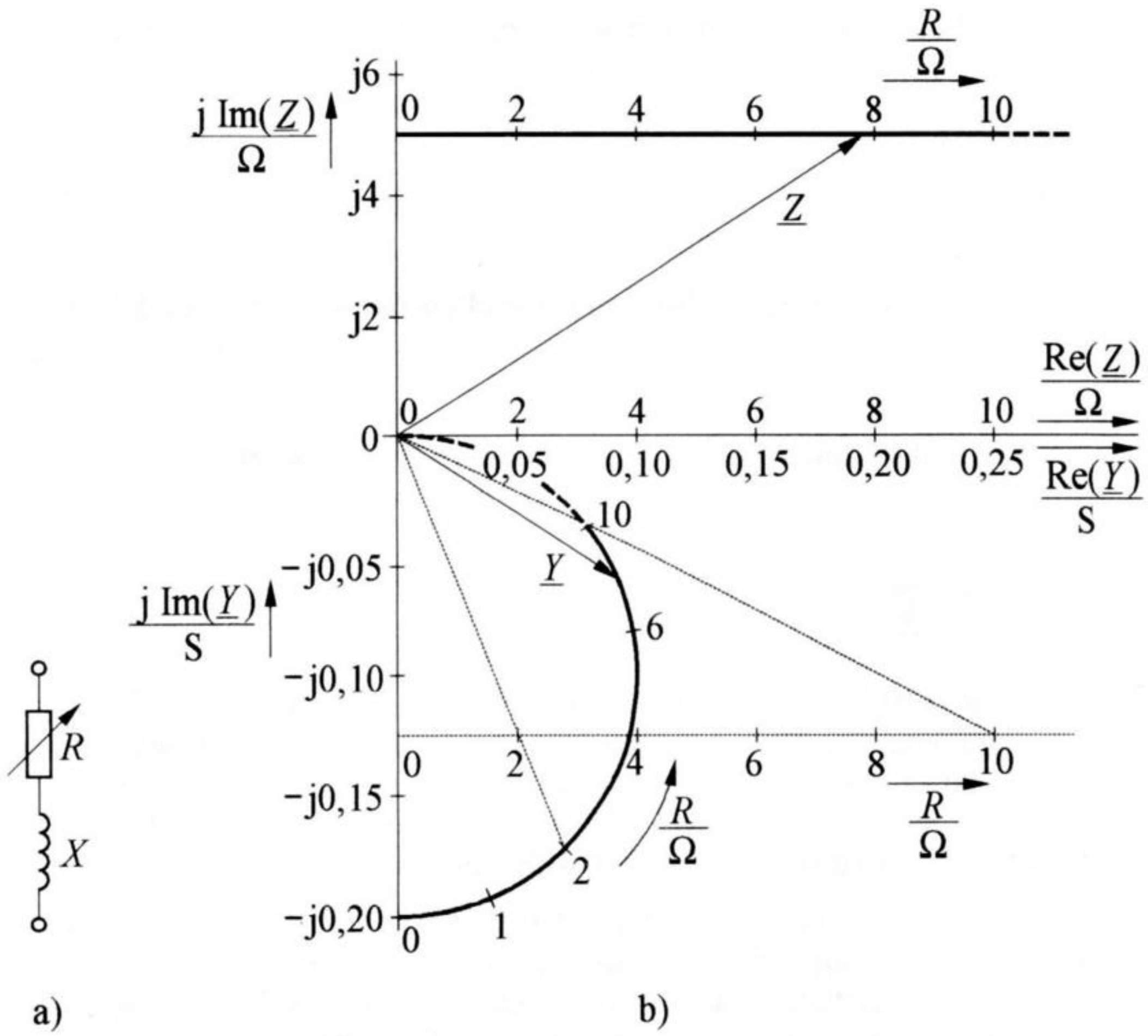


Bild 10.5 a) ohmsch-induktive Reihenschaltung mit veränderlichem Wirkwiderstand, b) Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung

Sie beginnt auf der Ordinatenachse im Punkt

$$\mathrm{j}\,\mathrm{Im}(\underline{Z}) = \mathrm{j}X = \mathrm{j}\,5\,\Omega$$

und verläuft von hier aus nach rechts. Die Gerade kann, wie in Bild 10.5b dargestellt, leicht mit Werten des Widerstandes R beziffert werden. Durch Inversion dieser Geraden erhalten wir die Ortskurve der Admittanz

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \mathrm{j}X},$$

die bekanntlich einen durch den Koordinatenursprung verlaufenden Kreis ergibt. Zur Ermittlung des Kreismittelpunktes entnehmen wir aus Bild 10.5b denjenigen $\underline{Z}$-Wert, der den kleinsten Betrag hat. Hierfür finden wir

$$\underline{Z}_{\min} = \mathrm{j}\,5\,\Omega.$$

Damit liegt der Kreismittelpunkt in der $\underline{Y}$-Ebene bei

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{\underline{Z}_{\min}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{j}5\,\Omega} = -\,\mathrm{j}\,0{,}1\ \mathrm{S}.$$

Für die Bezifferung des Kreises spiegeln wir die Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}$ an der reellen Achse. Die vom Koordinatenursprung zur gespiegelten Geraden verlaufenden Strahlen liefern auf dem Kreis die Markierungen für die Werte des Widerstandes R.

10.2.2 Inversion eines Kreises

Neben der Geraden ist der Kreis eine häufig vorkommende Form für eine Ortskurve. Wir wollen uns daher nachfolgend mit der Inversion von kreisförmigen Ortskurven befassen. Nach den in Abschnitt 10.2.1 gewonnenen Erkenntnissen kann ein durch den Koordinatenursprung verlaufender Kreis entsprechend Gl. (10.2) durch

$$\underline{Y}' = \frac{1}{\underline{A} + p\,\underline{B}}$$

wiedergegeben werden. Addieren wir hierzu eine beliebige (konstante) komplexe Größe $\underline{C}$, so wird der Kreis in der Ebene verschoben. Daher stellt der Ausdruck

$$\underline{Y} = \underline{Y}' + \underline{C} = \frac{1}{\underline{A} + p\,\underline{B}} + \underline{C}$$

die Gleichung eines Kreises in allgemeiner Lage dar. Daraus erhalten wir durch Umformen

$$\underline{Y} = \frac{1 + \underline{A}\,\underline{C} + p\,\underline{B}\,\underline{C}}{\underline{A} + p\,\underline{B}}. \tag{10.7}$$

Führen wir die Größen $\underline{D} = 1 + \underline{A}\,\underline{C}$ und $\underline{E} = \underline{B}\,\underline{C}$ ein, so wird aus Gl. (10.7)

$$\underline{Y} = \frac{\underline{D} + p\,\underline{E}}{\underline{A} + p\,\underline{B}}. \tag{10.8}$$

Bildet man hiervon den Kehrwert, so erhält man die Gleichung der inversen Ortskurve

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{\underline{A} + p\underline{B}}{\underline{D} + p\underline{E}}. \tag{10.9}$$

Aus dem gleichartigen Aufbau der Gln. (10.8) und (10.9) erkennt man, dass die Inversion eines Kreises wieder einen Kreis ergibt. Anhand von Bild 10.6 sei erläutert, wie zu einem gegebenen Kreis (1) der zugehörige inverse Kreis konstruiert werden kann.

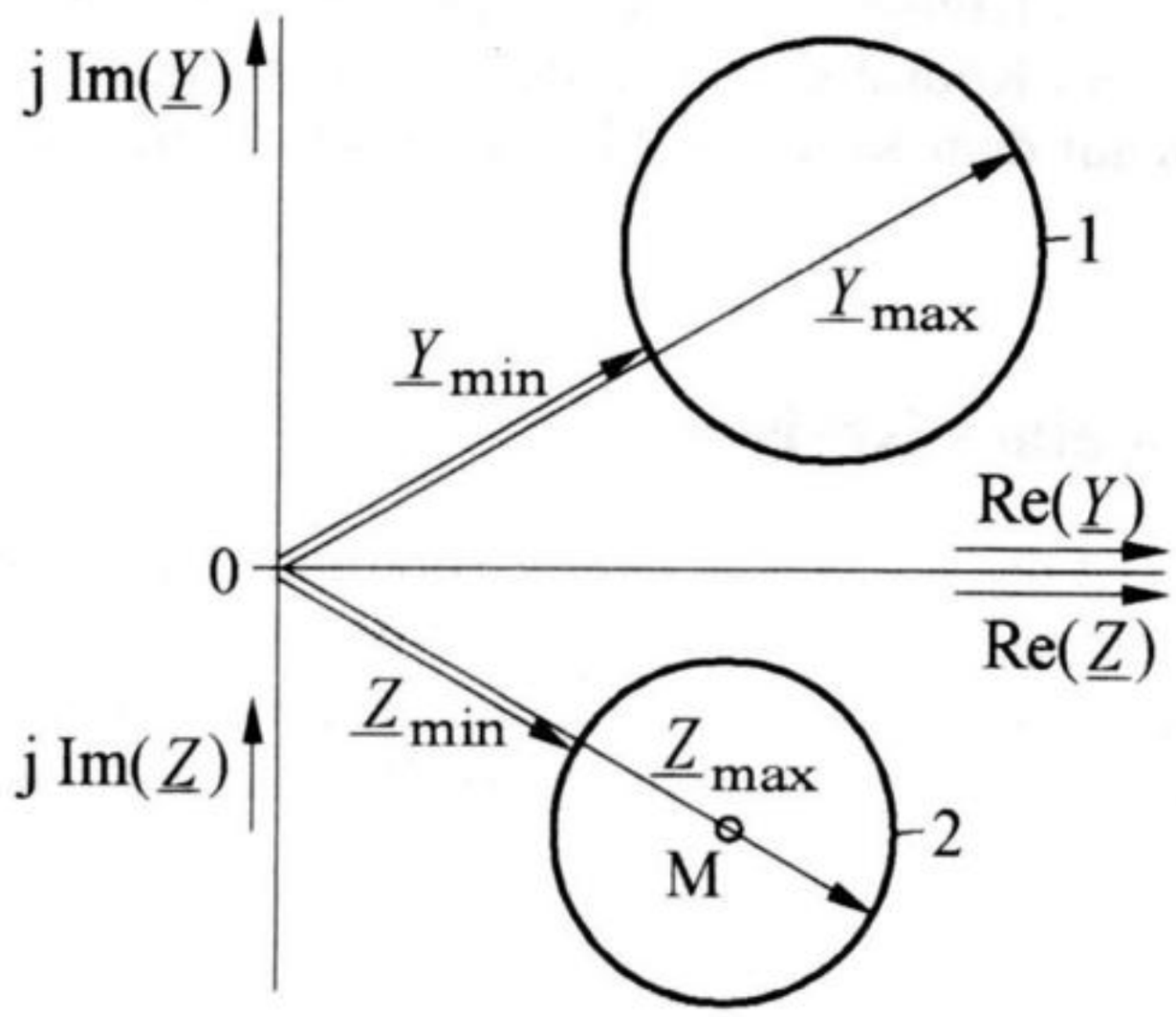


Bild 10.6 Inversion eines Kreises in allgemeiner Lage

Wir entnehmen zunächst aus der gegebenen, in der $\underline{Y}$-Ebene dargestellten Ortskurve (1) die Werte der beiden Zeiger $\underline{Y}_{\min}$ und $\underline{Y}_{\max}$. Hiervon bestimmen wir die Kehrwerte

$$\underline{Z}_{\max} = \frac{1}{\underline{Y}_{\min}}, \qquad \underline{Z}_{\min} = \frac{1}{\underline{Y}_{\max}}.$$

Die sich so ergebenden Zeiger werden in die $\underline{Z}$-Ebene eingetragen. Dazu ist es bei maßstabgerechter Darstellung erforderlich, den Maßstab dieser Ebene so zu wählen, dass sich eine passende Bildgröße ergibt. Der Mittelpunkt M des gesuchten inversen Kreises liegt in der Mitte zwischen den beiden Zeigerspitzen von $\underline{Z}_{\max}$ und $\underline{Z}_{\min}$, so dass der Kreis (2) leicht eingetragen werden kann.

Sollen (im Labor) von vorhandenen Netzwerken Ortskurven aufgenommen werden, so stehen hierfür spezielle computergesteuerte Messeinrichtungen zur Verfügung. Durch sie lassen sich Ortskurven leicht erfassen und mit geeigneten Maßstäben auf dem Bildschirm darstellen. Auf diese Weise erhält man relativ einfach Informationen über die elektrischen Eigenschaften der betreffenden Netzwerke.

Aufgabe 10.3

Die in Bild 10.7a dargestellte Schaltung besteht aus den Wirkwiderständen $R_1 = 400\,\Omega$ und $R_2 = 200\,\Omega$ sowie einem Kondensator mit der Kapazität $C = 79{,}6\,\text{nF}$.

Es sind die Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung für die Frequenz $f = (1\ldots8)$ kHz darzustellen und jeweils mit Werten der Frequenz zu beziffern.

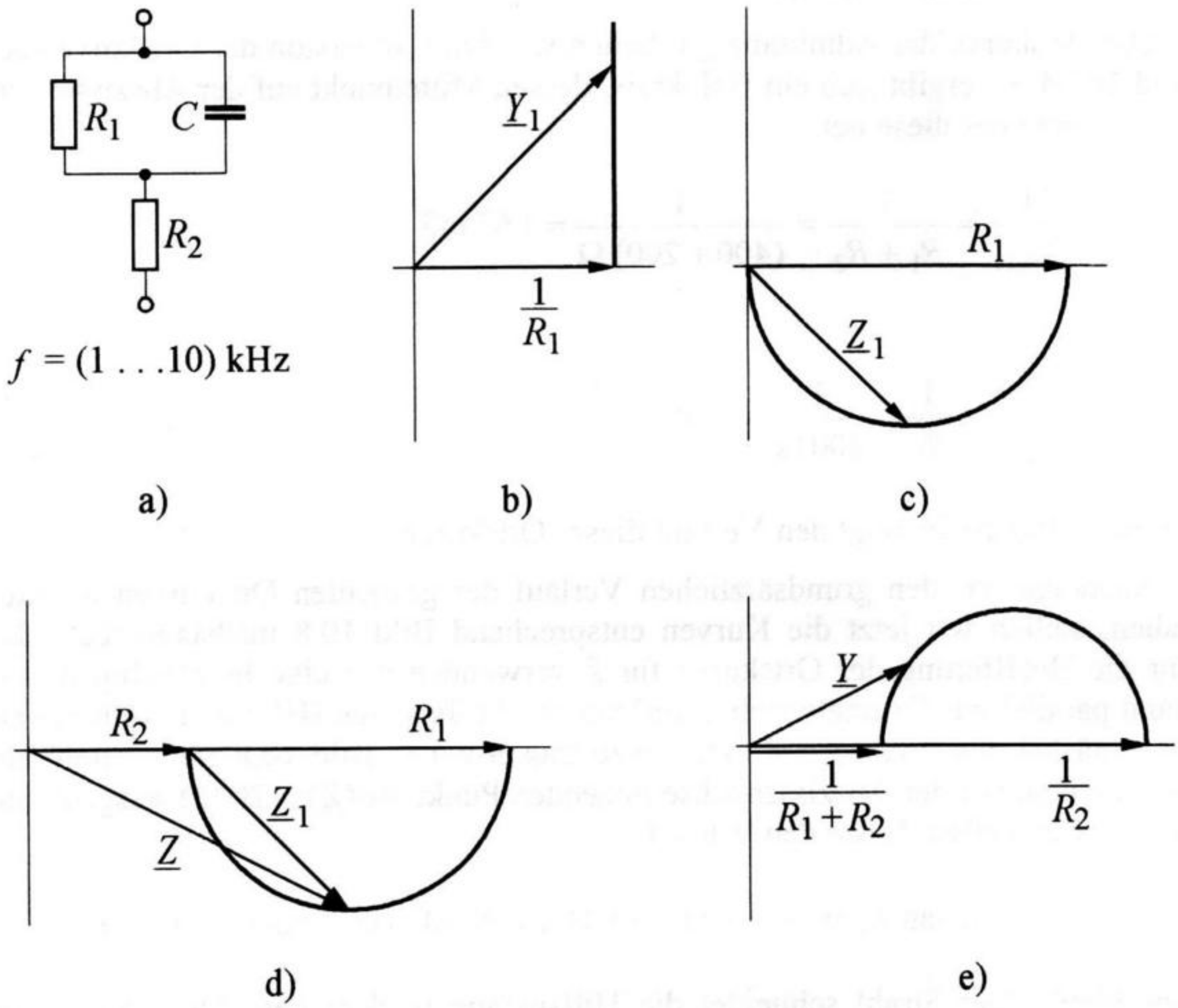


Bild 10.7 a) Ohmsch-kapazitive Widerstandsanordnung,
b) bis e) Ortskurven für veränderliche Frequenz (Erläuterung im Text)

Lösung

Wir betrachten zunächst nur die aus R_1 und C bestehende Parallelschaltung. Hierfür erhalten wir als Ortskurve der Admittanz ($\underline{Y}_1$) eine parallel zur Ordinatenach-

se verlaufende Gerade, deren Verlauf in Bild 10.7b prinzipiell dargestellt ist. Die Ortskurve der zugehörigen Impedanz ($\underline{Z}_1$) ist somit nach Bild 10.7c ein durch den Koordinatenursprung verlaufender Kreis (Halbkreis), dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse bei $R_1/2 = 200\,\Omega$ liegt.

Berücksichtigen wir jetzt, dass der Widerstand R_2 mit der bisher betrachteten Parallelschaltung in Reihe liegt, so verschiebt sich die in Bild 10.7c angegebene Ortskurve um $R_2 = 200\,\Omega$ nach rechts, so dass die Darstellung nach Bild 10.7d entsteht. Wir haben damit den grundsätzlichen Verlauf der Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung ermittelt.

Die Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}$ erhalten wir durch Inversion der Ortskurve nach Bild 10.7d. Es ergibt sich ein Halbkreis, dessen Mittelpunkt auf der Abszissenachse liegt, und der diese bei

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\max}} = \frac{1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{(400+200)\,\Omega} = 1{,}67\ \text{mS}$$

und

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\min}} = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200\,\Omega} = 5\,\text{mS}$$

berührt. Bild 10.7e zeigt den Verlauf dieser Ortskurve.

Nachdem wir den grundsätzlichen Verlauf der gesuchten Ortskurven ermittelt haben, stellen wir jetzt die Kurven entsprechend Bild 10.8 maßstabgerecht dar. Für die Bezifferung der Ortskurve für $\underline{Z}$ verwenden wir eine in beliebigem Abstand parallel zur Ordinatenachse verlaufende Hilfsgerade (HG) und ermitteln auf ihr zunächst den Punkt f = 8 kHz. Dazu tragen wir in Bild 10.8 einen Strahl ein, der von dem auf der Abszissenachse liegenden Punkt $\text{Re}(\underline{Z}) = 200\,\Omega$ ausgeht, und der mit der reellen Achse den Winkel

$$\varphi_1 = \arctan R_1\,\omega C = \arctan 400\,\Omega \cdot 2\pi \cdot 8 \cdot 10^3\ \text{Hz} \cdot 79{,}6 \cdot 10^{-9}\ \text{F} = 58{,}0^\circ$$

einschließt. Der Strahl schneidet die Hilfsgerade in dem gesuchten Punkt. Anschließend wird die Gerade linear geteilt. Die durch die Markierungspunkte der Geraden verlaufenden Strahlen liefern, wie dargestellt, auf der Ortskurve die Bezifferung nach der Frequenz f.

Für die Bezifferung der Ortskurve der Admittanz $\underline{Y}$ spiegeln wir die bezifferte Ortskurve der Impedanz $\underline{Z}$ an der reellen Achse. Die vom Koordinatenursprung zu den Markierungen des gespiegelten Halbkreises verlaufenden Strahlen ergeben die gesuchte Bezifferung.

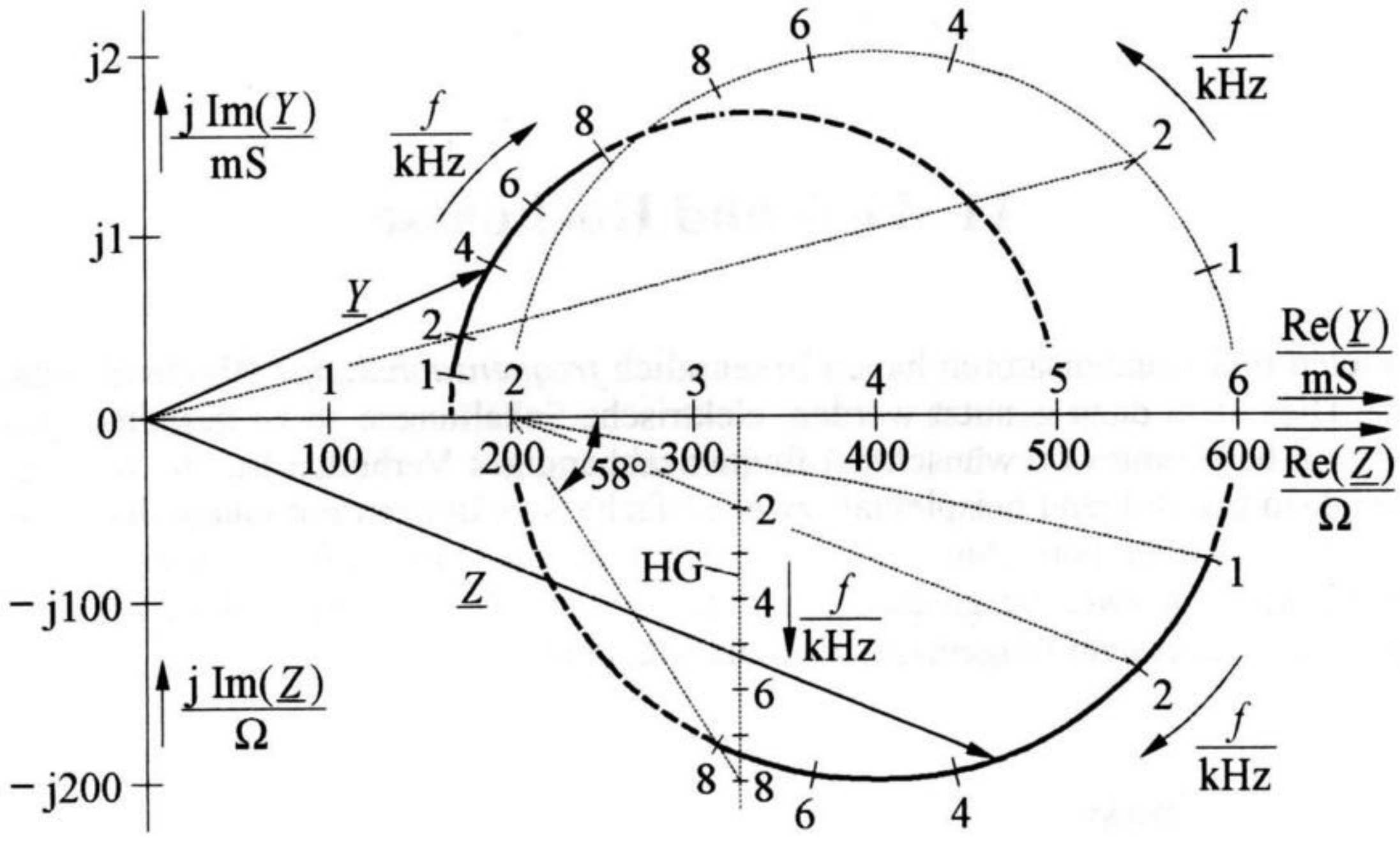


Bild 10.8 Maßstabgerechte Darstellung der Ortskurven der Impedanz $\underline{Z}$ und der Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung nach Bild 10.7a für veränderliche Frequenz

11 Tief- und Hochpässe

Spulen und Kondensatoren haben bekanntlich *frequenzabhängige* Blindwiderstände. Dies kann dazu genutzt werden, elektrische Schaltungen so zu gestalten, dass sie ein bestimmtes (gewünschtes) frequenzabhängiges Verhalten haben. Wir wollen dazu nachfolgend beispielhaft zwei einfache Schaltungen mit einem derartigen Verhalten näher betrachten. Beide sind dadurch gekennzeichnet, dass sie zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen (also vier Pole) besitzen. Solche Schaltungen bezeichnet man (allgemein) auch als **Vierpole**.

11.1 Tiefpass

Eine Reihenschaltung aus einem Wirkwiderstand R und einem Kondensator mit der Kapazität C sei nach Bild 11.1a mit einer Wechselspannungsquelle verbunden. Die Frequenz dieser Quelle möge veränderbar sein.

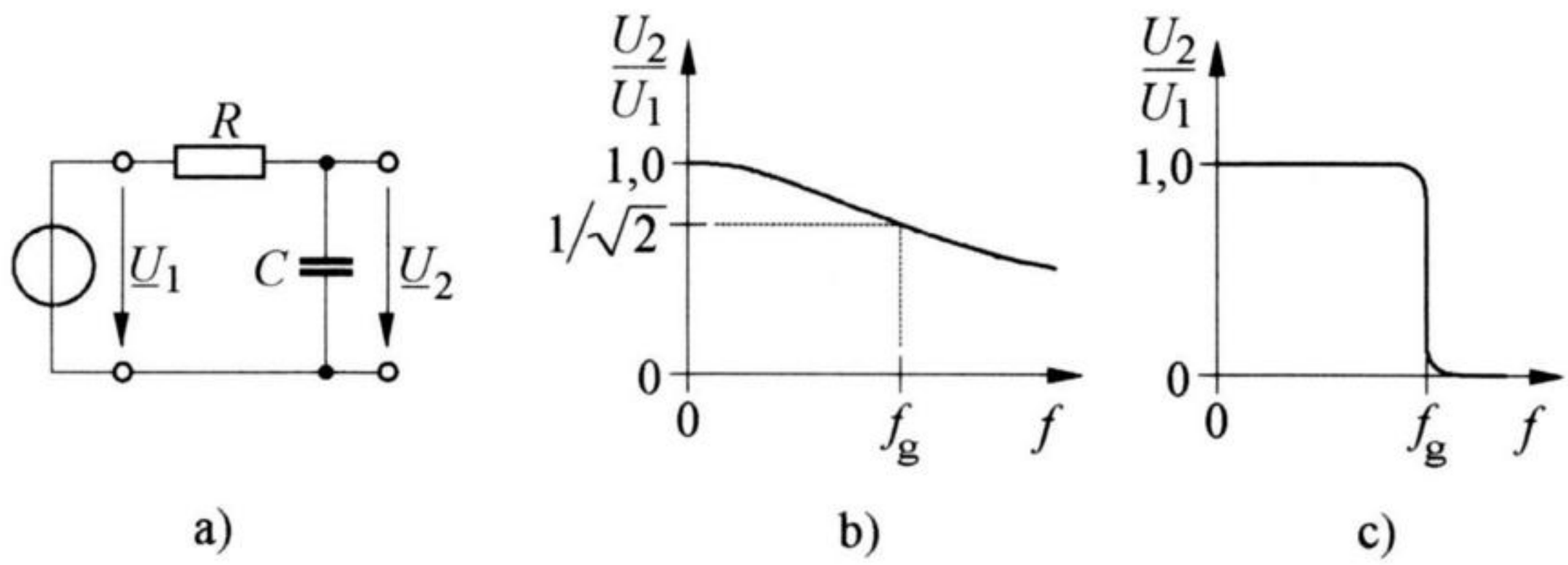


Bild 11.1 a) Schaltung eines einfachen Tiefpasses, b) zugehöriger Frequenzgang, c) Frequenzgang eines Tiefpasses in idealisierter Form

In der Schaltung gilt für das Verhältnis der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ zur Eingangsspannung $\underline{U}_1$ nach der Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{1/(\mathrm{j}\omega C)}{R + 1/(\mathrm{j}\omega C)} = \frac{1}{1 + R\,\mathrm{j}\omega C}. \tag{11.1}$$

Für den Betrag dieses Quotienten ergibt sich

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1+(R\omega C)^2}}.} \tag{11.2}$$

Gl. (11.2) besagt, dass der Wert von U_2/U_1 mit zunehmender Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ kleiner wird. In Bild 11.1b ist der Verlauf dieser Funktion prinzipiell dargestellt. Man bezeichnet die angegebene Kennlinie auch als **Frequenzgang**. Bei niedrigen (tiefen) Frequenzen ist die Ausgangsspannung U_2 etwa gleich der Eingangsspannung U_1. Dieser Bereich heißt **Durchlassbereich**. Bei hohen Frequenzen geht U_2 gegen Null. Das ist der **Sperrbereich**. Zur Trennung von Durchlass- und Sperrbereich dient die **Grenzfrequenz** (f_g). Sie ist definiert als diejenige Frequenz, bei der

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \tag{11.3}$$

ist. Bei der Grenzfrequenz ist also die Ausgangsspannung um den Faktor $\sqrt{2}$ kleiner als die Eingangsspannung. Dies bedeutet gleichzeitig, dass in Bild 11.1a zwischen der Eingangsspannung $\underline{U}_1$ und der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ ein Phasenverschiebungswinkel von 45° besteht. Zudem haben hierbei der Wirkwiderstand R und der Blindwiderstand $1/(\omega C)$ den gleichen Betrag. Setzen wir die Gln. (11.2) und (11.3) gleich, so finden wir mit $\omega = \omega_g$

$$R \cdot \omega_g C = 1\,. \tag{11.4}$$

Hieraus folgt für die Grenzfrequenz der in Bild 11.1a dargestellten Schaltung mit $f_g = \omega_g/(2\pi)$

$$\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi RC}\,.} \tag{11.5}$$

Besteht die in Bild 11.1a verwendete Eingangsspannung aus der Überlagerung mehrerer sinusförmiger Teilspannungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so werden tiefe Frequenzen nahezu ungehindert „durchgelassen", während hohe Frequenzen nahezu „gesperrt" werden. Man bezeichnet die Schaltung deshalb als **Tiefpass**. Er ermöglicht somit die „Unterdrückung" von Spannungen mit höheren Frequenzen. Bild 11.1a zeigt dabei eine *einfache* Ausführungsform eines Tiefpasses mit dem zugehörigen, in Bild 11.1b dargestellten Frequenzgang. Man kann Tiefpässe jedoch auch so konzipieren, dass Durchlass- und Sperrbereich schärfer voneinander getrennt sind. Solche Anordnungen können beispielsweise einen Frequenzgang haben, wie er in Bild 11.1c in idealisierter Form dargestellt ist.

Die Grenzfrequenz ist bei beliebig konzipierten Tiefpässen definiert als diejenige Frequenz bei der

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{U_2}{U_1}\right)_{\max}} \tag{11.6}$$

ist. Hierbei stellt $(U_2/U_1)_{\max}$ dasjenige Verhältnis der Ausgangsspannung zur Eingangsspannung dar, dass im Frequenzbereich $0 < f < \infty$ den größten Wert hat.

11.2 Hochpass

Vertauscht man in Bild 11.1a den Widerstand (R) und den Kondensator (C), so erhält man die Schaltung nach Bild 11.2a.

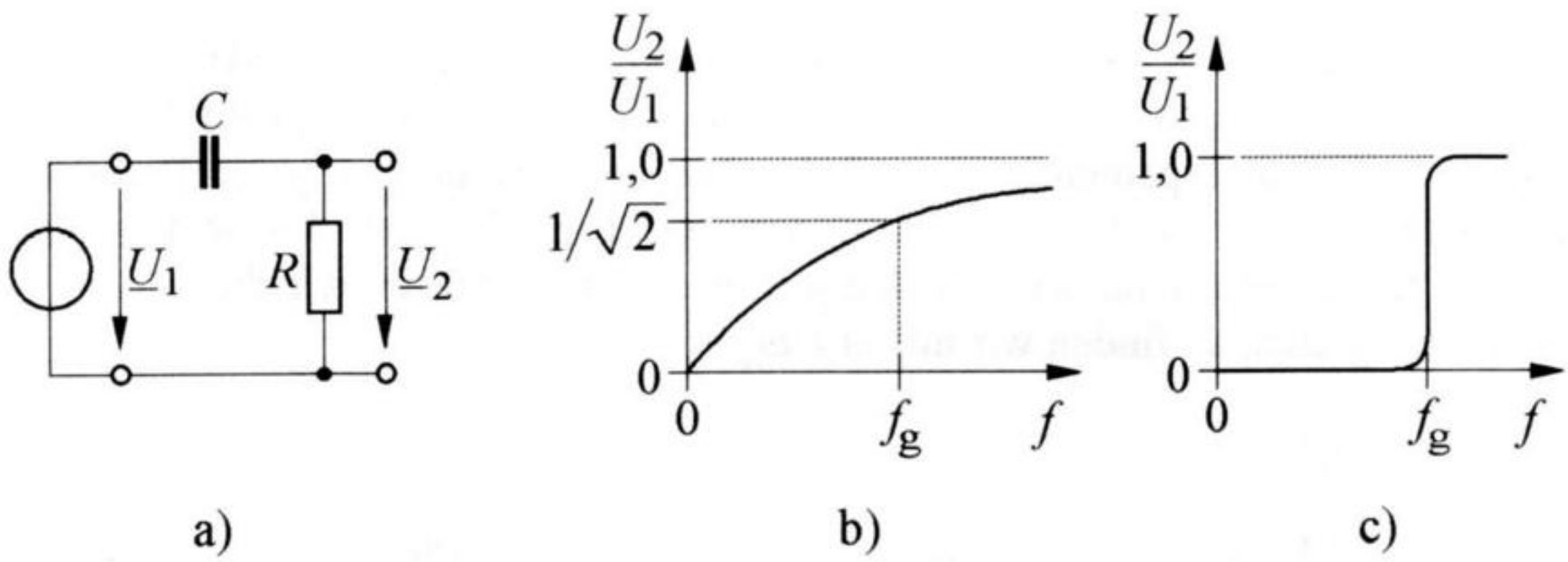


Bild 11.2 a) Schaltung eines einfachen Hochpasses, b) zugehöriger Frequenzgang, c) Frequenzgang eines Hochpasses in idealisierter Form

In dieser Anordnung gilt für das Verhältnis der Ausgangsspannung $\underline{U}_2$ zur Eingangsspannung $\underline{U}_1$ nach der Spannungsteilerregel

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C \cdot R}}\,. \tag{11.7}$$

Für den Betrag dieses Quotienten ergibt sich

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\omega C R}\right)^2}}\,.} \tag{11.8}$$

Aus der Gleichung ist zu ersehen, dass der Quotient U_2/U_1 mit zunehmender Frequenz $f = \omega/(2\pi)$ größer wird. In Bild 11.2b ist der Verlauf der Funktion in Abhängigkeit von der Frequenz f prinzipiell dargestellt. Man bezeichnet diese Kennlinie als **Frequenzgang**. Bei niedrigen Frequenzen ist U_2/U_1 sehr klein. Man spricht hier vom **Sperrbereich**. Bei hohen Frequenzen geht U_2/U_1 gegen den Wert eins. Das ist der **Durchlassbereich**. Durchlass- und Sperrbereich werden durch die **Grenzfrequenz** (f_g) getrennt. Sie ist - ebenso wie beim Tiefpass - definiert als diejenige Frequenz, bei der

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \tag{11.9}$$

ist. Diese Definition bedeutet auch hier gleichzeitig, dass bei der Grenzfrequenz der Wirkwiderstand R und der Blindwiderstand $1/(\omega C)$ den gleichen Betrag haben und zudem zwischen $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_1$ ein Phasenverschiebungswinkel von 45° besteht. Setzen wir die Gln. (11.8) und (11.9) gleich, so erhalten wir mit $\omega = \omega_g$

$$\frac{1}{\omega_g C R} = 1.$$

Hieraus folgt für die Grenzfrequenz mit $f_g = \omega_g/(2\pi)$

$$\boxed{f_g = \frac{1}{2\pi R C}.} \tag{11.10}$$

Wir erhalten also das gleiche Ergebnis wie beim Tiefpass (vergl. Gl. (11.5)).

Besteht die in Bild 11.2a verwendete Eingangsspannung aus der Überlagerung mehrerer sinusförmiger Teilspannungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so werden hohe Frequenzen nahezu ungehindert „durchgelassen" und tiefe nahezu „gesperrt". Man bezeichnet die Schaltung deshalb als **Hochpass**. Er ermöglicht somit die „Unterdrückung" von Spannungen mit niedrigen Frequenzen. Bild 11.2a zeigt dabei eine einfache Ausführungsform eines Hochpasses. Man kann diesen jedoch auch so konzipieren, dass man nahezu den in Bild 11.2c dargestellten Frequenzgang erhält. Darin sind - im Vergleich zu Bild 11.2b - Durchlass- und Sperrbereich schärfer voneinander getrennt. Bezüglich der Grenzfrequenz bei beliebig konzipierten Hochpässen gilt Gl. (11.6) hier entsprechend.

12 Schwingkreise

12.1 Freie und erzwungene Schwingungen

Ein aufgeladener Kondensator (C) möge nach Bild 12.1a durch Schließen des Schalters über die Reihenschaltung eines Widerstandes (R) und einer Spule (L) entladen werden.

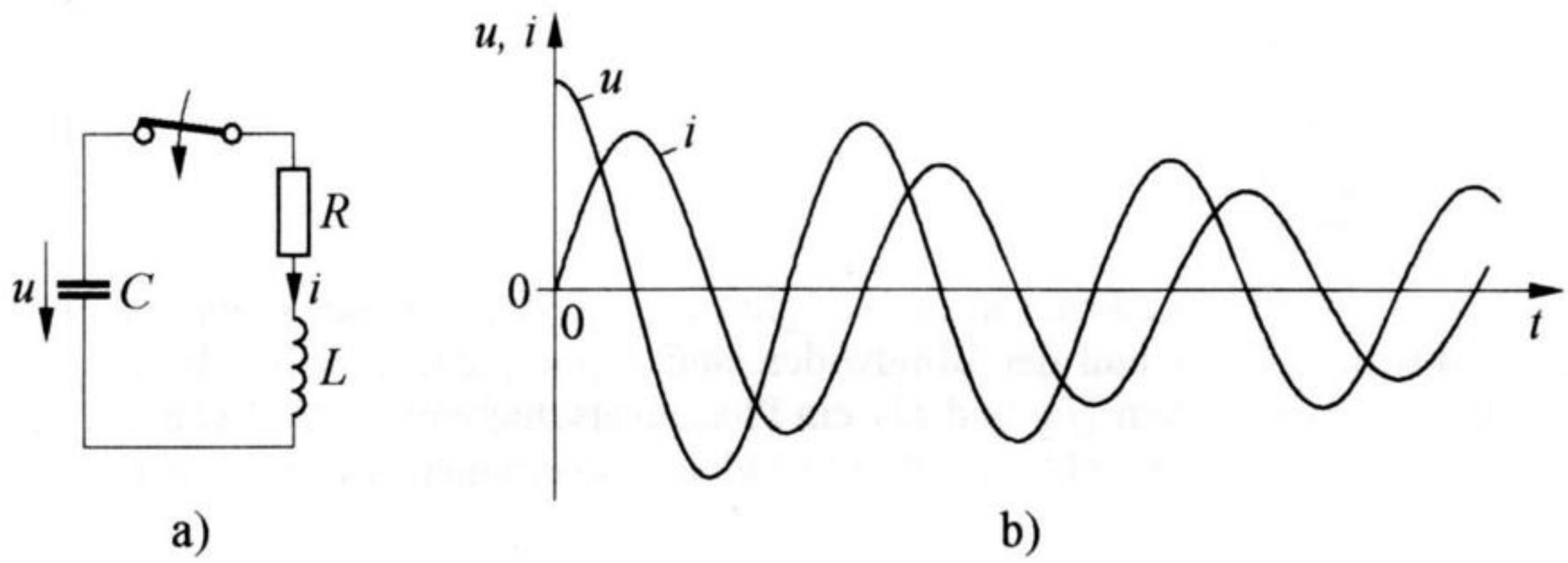


Bild 12.1 Entladung eines Kondensators über eine R-L-Reihenschaltung (als Beispiel für das Auftreten von freien Schwingungen).
a) Schaltung, b) zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung u und des Stromes i

Wir setzen voraus, dass der Wert des Widerstandes R relativ gering ist. Unter dieser Voraussetzung treten sowohl bei der Kondensatorspannung u als auch beim Strom i Schwingungen nach Bild 12.1b auf. Die Kondensatorspannung u nimmt dabei unmittelbar nach dem Schließen des Schalters zunächst ab, während der Strom i zunimmt. Ist der Kondensator nahezu entladen ($u \approx 0$), so erreicht der Strom i seinen Höchstwert. Danach treibt die in der Spule auftretende *Selbstinduktionsspannung* den Strom i in gleicher Richtung weiter mit der Folge, dass der Kondensator mit umgekehrter Spannungspolarität wieder aufgeladen wird (u wird somit negativ). Bei diesem Vorgang nimmt der Strom i ab. Wird er Null, so setzt anschließend ein neuer Kondensatorentladevorgang (mit umgekehrter Stromrichtung) ein.

Die in dieser Weise auftretenden Schwingungen bezeichnet man als **freie Schwingungen**. Deren Frequenz heißt **Eigenfrequenz**. Sie wird durch die Werte von L, C und R bestimmt. Bei dem Schwingungsvorgang wird in dem vorhandenen

Widerstand R elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Das hat zur Folge, dass die Scheitelwerte von u und i nach und nach kleiner werden. Man spricht daher von einer **gedämpften Schwingung**. Überschreitet der Widerstand R in Bild 12.1a einen bestimmten Wert, so wird der Kondensator schwingungsfrei entladen.

Da in einer Schaltung entsprechend Bild 12.1a freie Schwingungen auftreten können, bezeichnet man die Anordnung selbst als **Schwingkreis**. Grundsätzlich enthält ein Schwingkreis mindestens eine Spule (eine Induktivität) und mindestens einen Kondensator (eine Kapazität). Eine genauere Betrachtung der in Schwingkreisen auftretenden *freien Schwingungen* wird in Abschnitt 16.3 vorgenommen.

Wird ein Schwingkreis mit einer Wechselspannungs- oder einer Wechselstromquelle verbunden, so treten in der Schaltung - ebenso wie auch in allen anderen Wechselstromkreisen - Schwingungen auf, deren Frequenz gleich der der Versorgungsquelle ist. Man spricht dann von **erzwungenen Schwingungen**. Stimmt hierbei die Frequenz dieser Schwingungen nahezu (oder genau) mit der Eigenfrequenz überein, so zeigt die Schaltung ein besonderes Verhalten. Dabei kann man zwei Grundformen derartig betriebener Schwingkreise unterscheiden, den **Reihenschwingkreis** (Spule und Kondensator liegen in Reihe) und den **Parallelschwingkreis** (Spule und Kondensator liegen parallel).

12.2 Der Reihenschwingkreis

12.2.1 Allgemeines

Der Betrachtung eines Reihenschwingkreises legen wir die in Bild 12.2a dargestellte Schaltung zugrunde.

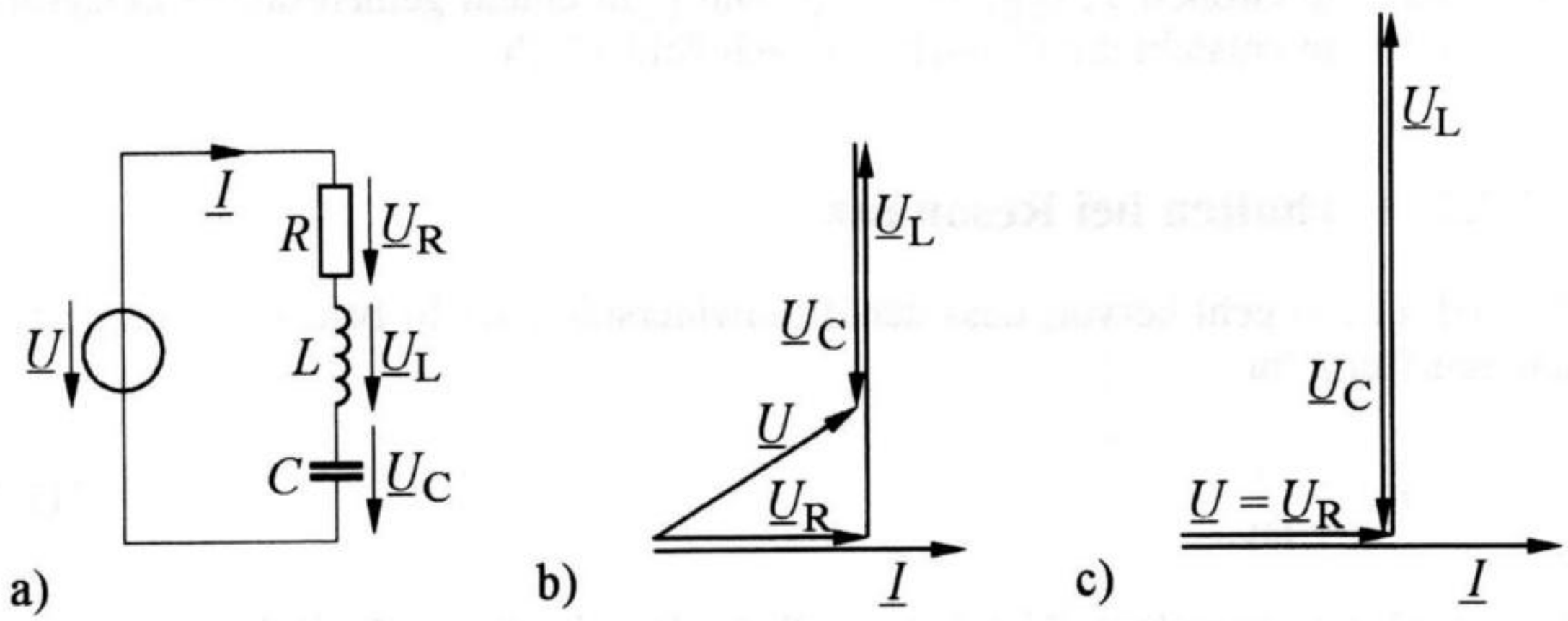


Bild 12.2 Reihenschwingkreis. a) Schaltung, b) Zeigerdiagramm (allgemein), c) Zeigerdiagramm im Resonanzzustand

Die Anordnung hat die Impedanz

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \tag{12.1}$$

so dass die anliegende Spannung $\underline{U}$ den Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{R + \mathrm{j}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{12.2}$$

mit dem Betrag

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{12.3}$$

verursacht. Für die Beträge der an den Widerständen auftretenden Teilspannungen gilt

$$U_\mathrm{R} = I\,R, \tag{12.4}$$

$$U_\mathrm{L} = I\,\omega L, \tag{12.5}$$

$$U_\mathrm{C} = I\,\frac{1}{\omega C}. \tag{12.6}$$

Stellt man die Größen $\underline{I}$, $\underline{U}_\mathrm{R}$, $\underline{U}_\mathrm{L}$, $\underline{U}_\mathrm{C}$ und $\underline{U}$ in einem gemeinsamen Zeigerdiagramm dar, so entsteht die Darstellung nach Bild 12.2b.

12.2.2 Verhalten bei Resonanz

Aus Gl. (12.1) geht hervor, dass der Blindwiderstand der in Bild 12.2a dargestellten Schaltung für

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \tag{12.7}$$

Null wird. Die Impedanz $\underline{Z}$ ist dann reell, so dass der Strom $\underline{I}$ mit der Spannung $\underline{U}$ in Phase ist. Man bezeichnet diesen Zustand als **Resonanz**. Zur Erzielung dieser Bedingung kann entweder die Induktivität oder die Kapazität oder die Frequenz so

verändert werden, dass Gl. (12.7) erfüllt ist. Geht man von einer variablen Frequenz aus, so bezeichnet man diejenige Kreisfrequenz, bei der Resonanz besteht, als **Resonanzkreisfrequenz** (ω_r). Hierfür erhalten wir aus Gl. (12.7) mit $\omega = \omega_r$

$$\boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.} \tag{12.8}$$

Daraus folgt für die **Resonanzfrequenz** (f_r) mit $f_r = \omega_r/(2\pi)$

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.} \tag{12.9}$$

Der Betrag der Blindwiderstände bei Resonanz

$$X_r = \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \tag{12.10}$$

wird als **Kennwiderstand** des Schwingkreises bezeichnet. Unter Berücksichtigung von Gl. (12.8) gilt auch

$$X_r = \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{12.11}$$

Die in Bild 12.2a bei Resonanz an den Blindwiderständen auftretenden Spannungen U_L und U_C können erheblich größere Werte annehmen als die Versorgungsspannung U. Dies geht auch aus dem in Bild 12.2c) dargestellten Zeigerdiagramm hervor, das für den Resonanzzustand gilt. Der *Grad* der *Spannungsüberhöhung* wird durch den Quotienten

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_C}{U} = \frac{\omega_r L}{R} = \frac{1}{R\,\omega_r C} \tag{12.12}$$

gekennzeichnet, wobei U_L und U_C die im *Resonanzzustand* vorhandenen Spannungen sind. Man bezeichnet Q als **Güte** oder **Gütefaktor**. Der Kehrwert (Symbol: d) wird als **Dämpfung** oder **Dämpfungsfaktor** bezeichnet. Es gilt also

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\omega_r L}. \tag{12.13}$$

Ist der in Bild 12.2a enthaltene Kondensator verlustbehaftet, so kann man ihn als Parallelschaltung eines idealen Kondensators und eines Wirkwiderstandes auffassen. Bestimmt man jetzt die Resonanzfrequenz, also diejenige Frequenz, bei der

der Blindwiderstand der Schaltung gleich Null ist, so erhält man ein Ergebnis, das von dem in Gl. (12.9) angegebenen abweicht.

Allgemein kann die Bestimmung der Resonanzfrequenz eines Schwingkreises dadurch vorgenommen werden, dass man die Impedanz $\underline{Z}$ der Schaltung ermittelt und dann den Imaginärteil von $\underline{Z}$ gleich Null setzt. Die **Resonanzbedingung** lautet also

$$\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0. \tag{12.14}$$

Aufgabe 12.1

In der Schaltung nach Bild 12.3 sind die Induktivität L, die Kapazität C und der Wirkwiderstand R als gegeben anzusehen.

Es ist die Resonanzkreisfrequenz ω_r der Schaltung in allgemeiner Form anzugeben.

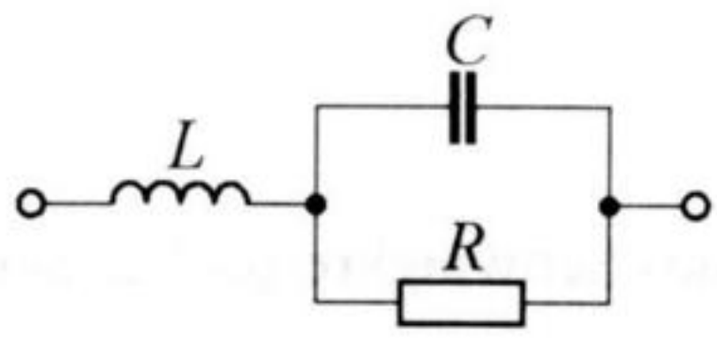


Bild 12.3 Schaltungsbeispiel (zur Bestimmung der Resonanzkreisfrequenz)

Lösung

Die Impedanz der Schaltung beträgt

$$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}\omega C}.$$

Multiplizieren wir den Zähler und den Nenner von $1/(1/R + \mathrm{j}\omega C)$ mit dem konjugiert komplexen Wert des Nenners, so erhalten wir

$$\underline{Z} = \mathrm{j}\omega L + \frac{\frac{1}{R}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} - \mathrm{j}\frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2}.$$

Wenden wir auf dieses Ergebnis die in Gl. (12.14) angegebene Resonanzbedingung $\mathrm{Im}(\underline{Z}) = 0$ an, so ergibt sich

$$\omega L - \frac{\omega C}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + (\omega C)^2} = 0.$$

Wir lösen diese Gleichung nach ω auf und erhalten dadurch die gesuchte Resonanzkreisfrequenz der Schaltung mit $\omega = \omega_r$ als

$$\underline{\omega_r = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{1}{RC}\right)^2}}.$$

12.2.3 Frequenzgang

Bei einem Schwingkreis interessiert nicht nur das Verhalten bei der Resonanzfrequenz, sondern auch in deren Umgebung. Wir wollen uns daher jetzt mit der Frequenzabhängigkeit der elektrischen Größen einer derartigen Schaltung befassen. Man bezeichnet die die Frequenzabhängigkeit beschreibenden Funktionen auch als **Frequenzgang**. Bei den nachfolgenden Betrachtungen gehen wir wieder von dem in Bild 12.2a dargestellte Reihenschwingkreis aus. Für den fließenden Strom I gilt Gl. (12.3). Die an den Blindwiderständen auftretenden Teilspannungen ergeben sich aus den Gln. (12.5) und (12.6). Stellen wir diese drei Größen in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω (bei konstanter Versorgungsspannung U) grafisch dar, so entstehen die in Bild 12.4 angegebenen Kurven.

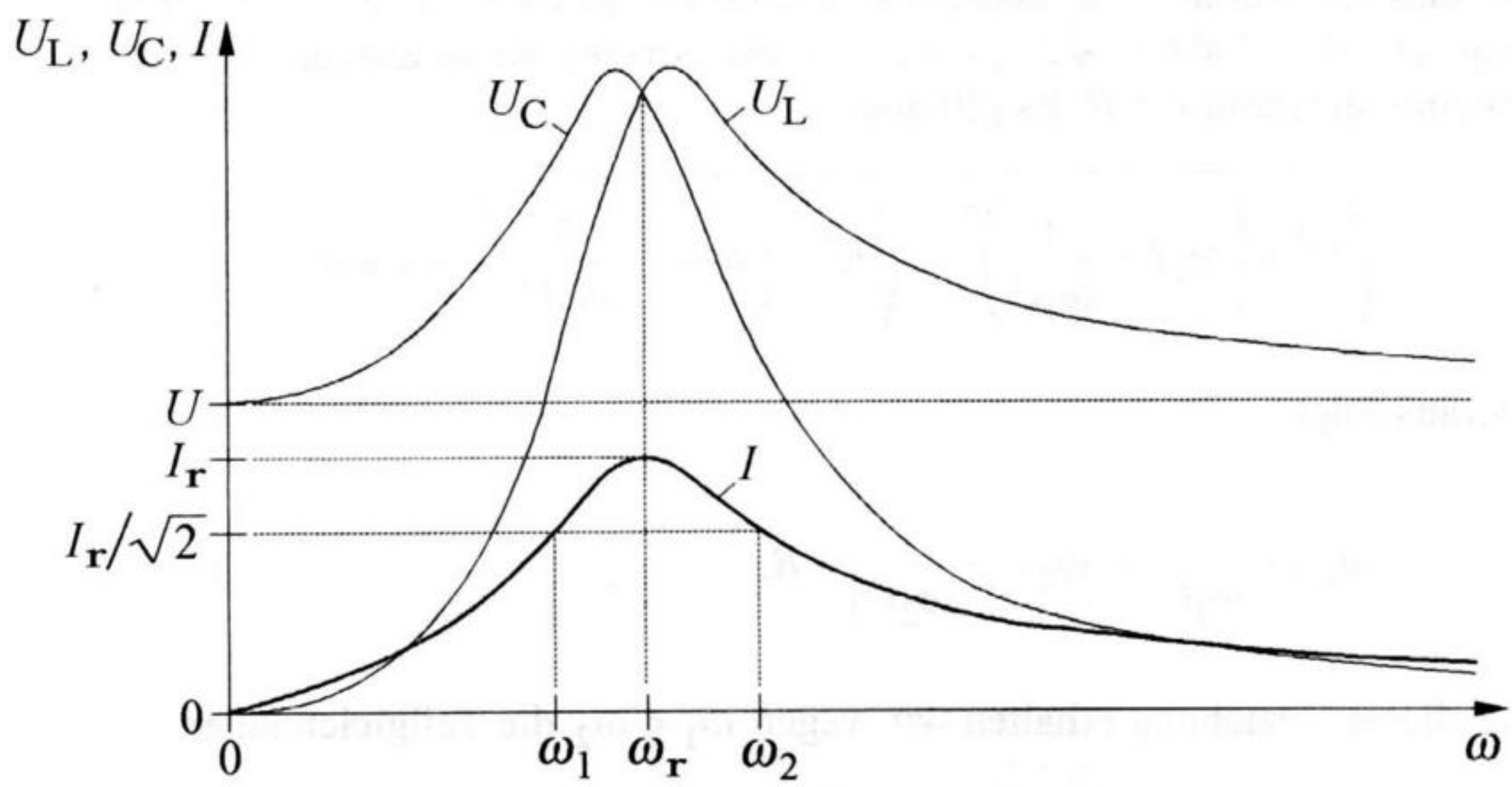


Bild 12.4 Resonanzkurven des Stromes I sowie der Teilspannungen U_L und U_C des in Bild 12.2a dargestellten Reihenschwingkreises

Man bezeichnet sie auch als **Resonanzkurven**. Der Strom I ist bei der Resonanzkreisfrequenz ω_r am größten. Die Maximalwerte der Spannungen U_L und U_C liegen zwar bei einer von ω_r abweichenden Kreisfrequenz, jedoch ist diese Abweichung in der Regel relativ gering.

Besteht nun beispielsweise die anliegende Spannung U aus einer Überlagerung mehrerer sinusförmiger Teilspannungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so verursacht diejenige Teilspannung, deren Frequenz mit der Resonanzfrequenz der Schaltung übereinstimmt, den größten Strom. Die Schaltung ist daher in der Lage, diese Frequenz aus einem Frequenzgemisch „herauszusieben". Soll dieses „Aussieben" möglichst ohne die Mitnahme von benachbarten Frequenzen erfolgen, so muss die Resonanzkurve auf beiden Seiten der Resonanzfrequenz steil abfallen. Eine charakteristische Größe ist hierbei die **Bandbreite**. Zur Erläuterung dieser Größe betrachten wir Bild 12.4. Darin ist der bei der Resonanzkreisfrequenz ω_r auftretende Strom mit I_r bezeichnet. Teilen wir diesen Strom durch den Faktor $\sqrt{2}$, so ergeben sich die gekennzeichneten Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2. Die zugehörigen Frequenzen $f_1 = \omega_1/(2\pi)$ und $f_2 = \omega_2/(2\pi)$ heißen **Grenzfrequenzen**. Deren Differenz

$$b = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \tag{12.15}$$

wird als *Bandbreite* des Schwingkreises bezeichnet.

Es stellt sich jetzt die Frage, wie die so definierte Bandbreite berechnet werden kann. Dazu gehen wir von der Überlegung aus, dass der bei den Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 vorhandene Scheinwiderstand der in Bild 12.2a dargestellten Schaltung um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist als der im Resonanzzustand vorhandene Scheinwiderstand $Z = R$. Es gilt also

$$\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2} = \sqrt{2}\,R.$$

Hieraus folgt

$$\left|\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right| = \left|\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right| = R.$$

Aus dieser Beziehung erhalten wir wegen $\omega_1 < \omega_2$ die Teilgleichungen

$$\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -R, \tag{12.16}$$

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R. \tag{12.17}$$

Löst man Gl. (12.16) nach ω_1 auf, so findet man das Ergebnis

$$\omega_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Entsprechend folgt aus Gl. (12.17)

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{1}{LC} + \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Setzen wir diese beiden Ergebnisse in Gl. (12.15) ein, so erhalten wir die Bandbreite

$$b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L}. \tag{12.18}$$

Eine andere Darstellungsweise für die Bandbreite finden wir dadurch, dass wir Gl. (12.13) nach R/L auflösen und das Ergebnis in Gl. (12.18) einsetzen. Dadurch ergibt sich

$$b = \frac{1}{2\pi} d\,\omega_\mathrm{r}.$$

Führen wir die Resonanzfrequenz f_r ein, so erhalten wir mit $\omega_\mathrm{r} = 2\pi f_\mathrm{r}$

$$\boxed{b = d\,f_\mathrm{r}.} \tag{12.19}$$

Die Bandbreite des Schwingkreises ist demnach gleich der Resonanzfrequenz f_r multipliziert mit der Dämpfung d des Kreises. Die Dämpfung ist nach Gl. (12.13) vom Wirkwiderstand R der Schaltung abhängig, so dass die Bandbreite sich durch eine entsprechende Wahl von R verändern lässt.

Aufgabe 12.2

Der in Bild 12.5 dargestellte Reihenschwingkreis mit der Induktivität L = 15 mH soll so ausgelegt werden, dass die Resonanzfrequenz $f_\mathrm{r} = 8\,\mathrm{kHz}$ wird und die Bandbreite b = 500 Hz beträgt.

Welche Werte sind für die Kapazität C und den Wirkwiderstand R vorzusehen?

Bild 12.5 Dimensionierung eines Reihenschwingkreises

Lösung

Zur Berechnung der erforderlichen Kapazität lösen wir Gl. (12.9) nach C auf und erhalten dadurch den gesuchten Wert

$$C = \frac{1}{(2\pi f_r)^2 L} = \frac{1}{(2\pi \cdot 8000\ \text{Hz})^2 \cdot 0{,}015\ \text{H}} = 26{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{F} = \underline{26{,}4\ \text{nF}}.$$

Den erforderlichen Wirkwiderstand finden wir aus Gl. (12.13) in Verbindung mit Gl. (12.19) als

$$R = d\,\omega_r L = \frac{b}{f_r}\ 2\pi f_r L = b\ 2\pi L = 500\ \text{Hz} \cdot 2\pi \cdot 0{,}015\ \text{H} = \underline{47{,}1\ \Omega}.$$

12.3 Der Parallelschwingkreis

12.3.1 Allgemeines

Der Untersuchung eines Parallelschwingkreises legen wir die in Bild 12.6a dargestellte Schaltung zugrunde.

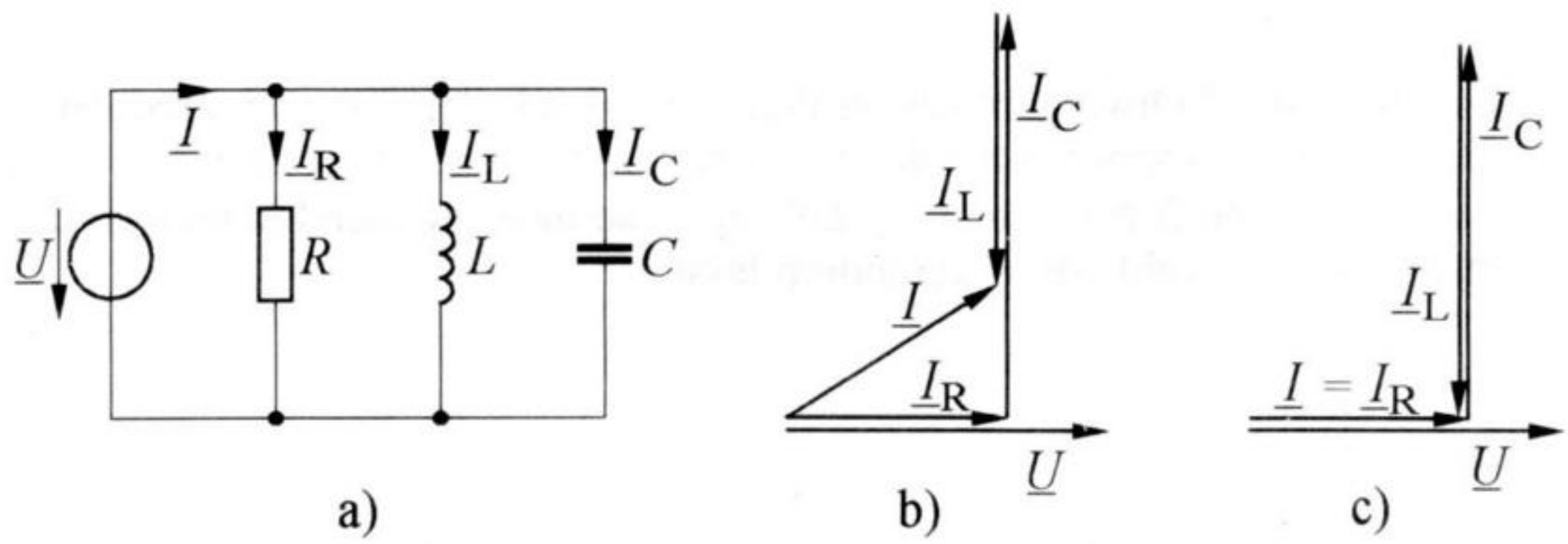


Bild 12.6 Parallelschwingkreis. a) Schaltung, b) Zeigerdiagramm (allgemein), c) Zeigerdiagramm im Resonanzzustand

Die Anordnung hat die Admittanz

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \mathrm{j}\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{12.20}$$

mit dem Betrag (Scheinleitwert)

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}\,. \tag{12.21}$$

Damit gilt für den Betrag des Gesamtstromes

$$I = U\,Y. \tag{12.22}$$

Die auftretenden Teilströme haben die Beträge

$$I_{\mathrm{R}} = \frac{U}{R}, \tag{12.23}$$

$$I_{\mathrm{C}} = U\,\omega C, \tag{12.24}$$

$$I_{\mathrm{L}} = \frac{U}{\omega L}. \tag{12.25}$$

Im Zeigerdiagramm nach Bild 12.6b sind die Versorgungsspannung und die auftretenden Ströme dargestellt.

12.3.2 Verhalten bei Resonanz

Aus Gl. (12.20) geht hervor, dass der Blindleitwert der in Bild 12.6a dargestellten Schaltung für

$$\omega C = \frac{1}{\omega L} \tag{12.26}$$

Null wird. Die Admittanz $\underline{Y}$ ist dann reell, so dass der Strom $\underline{I}$ mit der Spannung $\underline{U}$ in Phase ist. Man bezeichnet diesen Zustand - ebenso wie beim Reihenschwingkreis - als **Resonanz**. Nach Gl. (12.26) kann zur Herstellung des Resonanzzustandes entweder die Kapazität C oder die Induktivität L oder die Frequenz verändert werden. Gehen wir von einer variablen Frequenz aus, so folgt aus Gl. (12.26), dass bei der Kreisfrequenz

$$\boxed{\omega = \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \tag{12.27}$$

Resonanz besteht. Man bezeichnet ω_r als **Resonanzkreisfrequenz**. Damit beträgt die **Resonanzfrequenz** des Schwingkreises mit $f_r = \omega_r/(2\pi)$

$$\boxed{f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.} \tag{12.28}$$

Wir finden also das gleiche Ergebnis wie beim Reihenschwingkreis, dessen Resonanzfrequenz in Gl. (12.9) angegeben ist.

Die bei Resonanz in den Blindwiderständen fließenden Teilströme I_C und I_L können erheblich größer werden als der Gesamtstrom I. Dies geht auch aus dem in Bild 12.6c dargestellten Zeigerdiagramm hervor, das für den Resonanzzustand gilt. Der *Grad* der *Stromüberhöhung* wird durch den Quotienten

$$Q = \frac{I_C}{I} = \frac{I_L}{I} = \frac{\omega_r C}{1/R} = \frac{1/(\omega_r L)}{1/R} \tag{12.29}$$

gekennzeichnet und als **Güte** oder **Gütefaktor** bezeichnet. Der Kehrwert

$$d = \frac{1}{Q} \tag{12.30}$$

heißt - ebenso wie beim Reihenschwingkreis - **Dämpfung** oder **Dämpfungsfaktor**.

Weicht die Schaltung eines Parallelschwingkreises von der in Bild 12.6a dargestellten Form ab, beispielsweise dadurch, dass der Wirkwiderstand der Spule nicht vernachlässigbar klein ist, so stimmt die Resonanzfrequenz nicht mit dem in Gl. (12.28) angegebenen Ergebnis überein.

Allgemein kann die Resonanzfrequenz dadurch bestimmt werden, dass man zunächst die Admittanz $\underline{Y}$ der Schaltung ermittelt und dann den Imaginärteil von $\underline{Y}$ gleich Null setzt. Die Resonanzbedingung lautet also (allgemein)

$$\mathrm{Im}(\underline{Y}) = 0. \tag{12.31}$$

Aufgabe 12.3

Ein Parallelschwingkreis nach Bild 12.7 besteht aus einem Kondensator mit der Kapazität C = 200 nF und aus einer Spule, die als Reihenschaltung des Wirkwiderstandes R = 50 Ω und der Induktivität L = 15 mH dargestellt werden kann.

Wie groß ist die Resonanzfrequenz f_r der Schaltung?

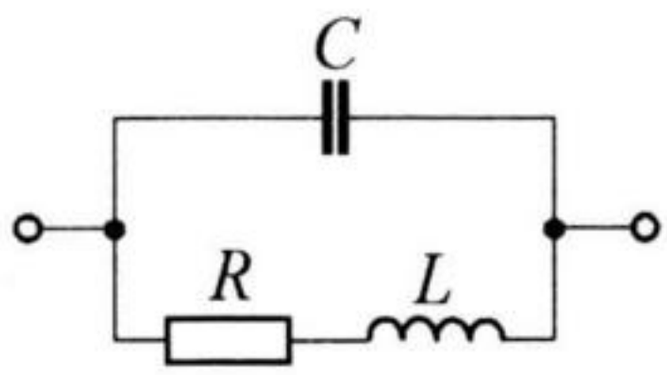


Bild 12.7 Schaltungsbeispiel eines Parallelschwingkreises

Lösung

Die Admittanz der Schaltung beträgt

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega L}.$$

Multiplizieren wir den Zähler und den Nenner von $1/(R + \mathrm{j}\omega L)$ mit $(R - \mathrm{j}\omega L)$, so ergibt sich

$$\underline{Y} = \mathrm{j}\omega C + \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} - \mathrm{j}\frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Die in Gl. (12.31) angegebene Resonanzbedingung führt zu der Beziehung

$$\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach ω auf, so erhalten wir die gesuchte Resonanzfrequenz, wenn wir berücksichtigen, dass $f_r = \omega_r/(2\pi)$ ist, mit $f_r = f$ als

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{15 \cdot 2 \cdot 10^{-10}} - \left(\frac{50}{0{,}015}\right)^2}\ \mathrm{Hz} = \underline{2{,}86\ \mathrm{kHz}}.$$

12.3.3 Frequenzgang

Wir wollen jetzt die in Bild 12.6a dargestellte Schaltung unter der Voraussetzung betrachten, dass die Frequenz der anliegenden Spannung verändert wird, ihre Höhe (ihr Effektivwert) jedoch konstant bleibt. Stellt man dann die auftretenden, in

den Gln. (12.22) bis (12.25) wiedergegebenen Ströme in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz ω grafisch dar, so erhält man die in Bild 12.8 angegebenen **Resonanzkurven**.

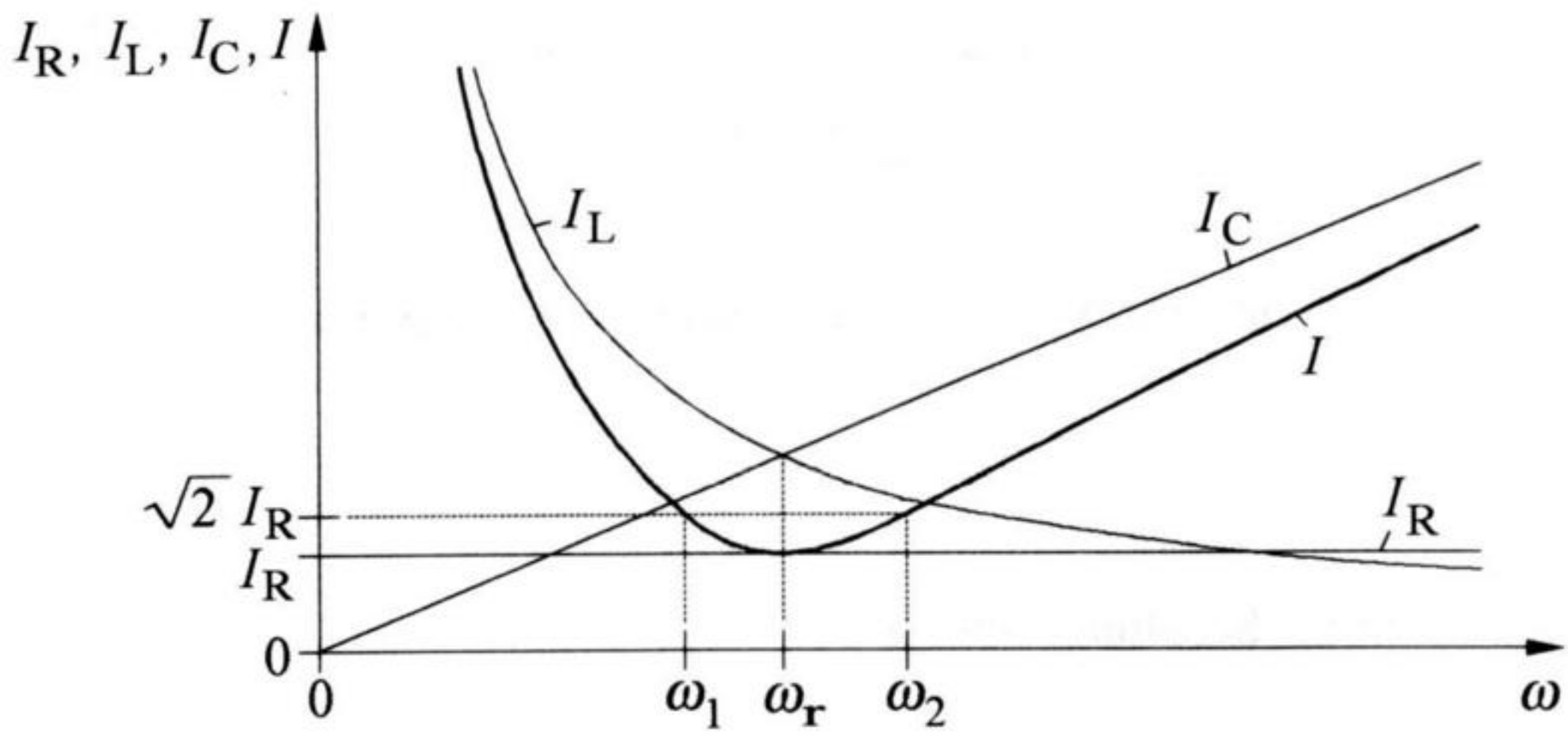


Bild 12.8 Resonanzkurven der in dem Parallelschwingkreis nach Bild 12.6a auftretenden Ströme

Die Darstellung zeigt, dass der von der Schaltung aufgenommene Gesamtstrom I bei der Resonanzkreisfrequenz ω_r seinen *kleinsten* Wert erreicht. Bei dieser Kreisfrequenz hat die Schaltung also den *größten* Scheinwiderstand. Der Parallelschwingkreis kann daher als „Sperrkreis" eingesetzt werden. Besteht die anliegende Spannung beispielsweise aus der Überlagerung mehrerer sinusförmiger Teilspannungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so wird derjenige Teilstrom, dessen Frequenz gleich der Resonanzfrequenz ist, durch den hohen Schwingkreiswiderstand nahezu „gesperrt".

Die in Bild 12.8 eingetragenen Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 sind dadurch gekennzeichnet, dass der fließende Strom jeweils um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist als im Resonanzzustand. Die zugehörigen Frequenzen $f_1 = \omega_1/(2\pi)$ und $f_2 = \omega_2/(2\pi)$ heißen **Grenzfrequenzen**. Deren Differenz wird als **Bandbreite** (b) des Schwingkreises bezeichnet. In Übereinstimmung mit Gl. (12.15) ergibt sich

$$b = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}.$$

Die Bandbreite kann analog zu Gl. (12.19) auch durch

$$b = d\, f_r$$

dargestellt werden. Hierbei sind f_r die Resonanzfrequenz des Schwingkreises und d die in Gl. (12.30) angegebene Dämpfung.

13 Drosselspulen und magnetisch gekoppelte Kreise

In der Wechselstromtechnik setzt man zum Herabsetzen (Drosseln) von Verbraucherspannungen vielfach Spulen ein. Nach dieser Anwendung werden solche Spulen (allgemein) auch als **Drosselspulen** oder (kurz) als **Drosseln** bezeichnet. Sie enthalten meistens einen Eisenkern, da hierdurch die erforderliche Windungszahl der Spule relativ klein gehalten werden kann. Der Vorteil von Drosselspulen gegenüber ohmschen Vorschaltwiderständen liegt vor allem darin, dass nur geringe Verlustleistungen auftreten.

Magnetisch gekoppelte Kreise dienen im Allgemeinen zum Herab- oder Heraufsetzen von Wechselspannungen, wobei in der Regel gleichzeitig eine galvanische Trennung zwischen den beiden Kreisen besteht. Man bezeichnet solche Anordnungen auch als **Transformatoren**. Auch hier verwendet man meistens Eisenkerne, um niedrige Windungszahlen verwenden zu können.

Spulen und magnetisch gekoppelte Kreise sind zwar schon in den Abschnitten 5.9 und 5.10 behandelt worden. Sie sollen nachfolgend jedoch noch unter der wichtigen Voraussetzung betrachtet werden, dass die anliegende Spannung eine Wechselspannung (mit sinusförmigem Verlauf) ist.

13.1 Drosselspule mit Eisenkern

13.1.1 Allgemeines

Ein Eisenkern nach Bild 13.1 mit dem Kernquerschnitt A trage eine Spule mit der Windungszahl N.

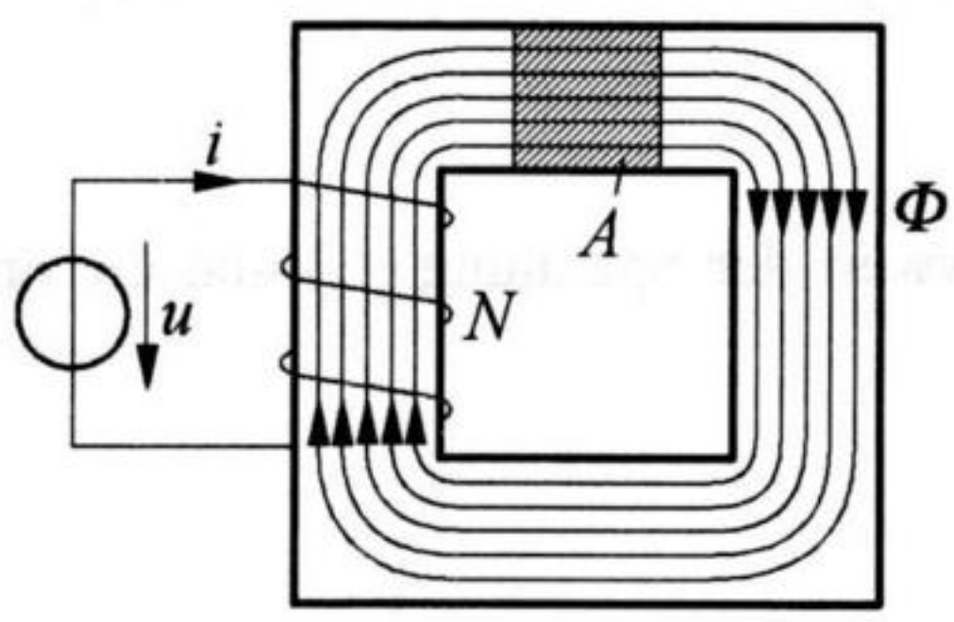


Bild 13.1 Spule mit Eisenkern (an einer Wechselspannungsquelle angeschlossen)

Die Spule sei mit einer Wechselspannungsquelle verbunden, wobei u der Augenblickswert der gelieferten Spannung ist. Der im Kreis fließende Strom mit dem Augenblickswert i erzeugt im Eisenkern den magnetischen Fluss Φ. Dieser verläuft - wie in Abschnitt 5.6.3 beschrieben - auch außerhalb der Spule nahezu vollständig im Eisen, so dass die magnetische Flussdichte an allen Stellen des Eisens als gleich groß angesehen werden kann. Vernachlässigt man den Wirkwiderstand der Spule, so besteht zwischen dem Fluss Φ und der Spannung u nach Gl. (5.60) die Beziehung

$$u = N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{13.1}$$

Gl. (13.1) besagt, dass die Spannung u stets gleich der durch die Flussänderung verursachten *Selbstinduktionsspannung* $N\,\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ ist. Im vorliegenden Fall wird u durch die Spannungsquelle vorgegeben. Dabei folgt aus Gl. (13.1), dass der Fluss Φ bei positiver Spannung u zunimmt und bei Spannungswerten mit entgegengesetzter Polarität abnimmt. Bei $u = 0$ bleibt Φ konstant.

Es stellt sich jetzt die Frage, welchen zeitlichen Verlauf der im Eisenkern vorhandene Fluss Φ hat, wenn die an der Spule liegende Spannung u zeitlich sinusförmig verläuft. Zur Lösung dieser Frage wollen wir zunächst für den magnetischen Fluss einen Verlauf in der Form

$$\Phi = \hat{\Phi} \sin \omega t \tag{13.2}$$

vorgeben, wobei $\hat{\Phi}$ den Scheitelwert des magnetischen Flusses darstellt. Dann erhalten wir durch Anwendung von Gl. (13.1)

$$u = N \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = N \frac{\mathrm{d}\,(\hat{\Phi} \sin \omega t)}{\mathrm{d}t} = N \hat{\Phi}\, \omega \cos \omega t. \tag{13.3}$$

Das Ergebnis besagt, dass eine sinusförmige Spannung u einen magnetischen Fluss Φ mit ebenfalls sinusförmiger Kurvenform erzeugt, wobei Φ gegenüber u um 90° nacheilt. Aus Gl. (13.3) folgt für den *Scheitelwert* der Spannung

$$\hat{u} = N \hat{\Phi}\, \omega. \tag{13.4}$$

Führen wir den Effektivwert der Spannung (U) und die Frequenz (f) ein, so wird mit den Beziehungen

$$\hat{u} = \sqrt{2}\, U, \tag{13.5}$$

$$\omega = 2 \pi f \tag{13.6}$$

aus Gl. (13.4)

$$\sqrt{2}\,U = N\,\hat{\Phi}\,2\pi f.$$

Wir lösen diese Gleichung nach U auf und erhalten

$$\boxed{U = 4{,}44\ N\,f\,\hat{\Phi}.} \tag{13.7}$$

Mit $\hat{\Phi} = \hat{B}\,A$, wobei $\hat{B}$ den Scheitelwert der magnetischen Flußdichte darstellt, wird daraus

$$\boxed{U = 4{,}44\ N\,f\,A\,\hat{B}.} \tag{13.8}$$

Beim Betrieb einer solchen Spule ist zu beachten, dass die magnetische Flussdichte $\hat{B}$ nicht zu groß werden darf. Sonst kann es zu einer magnetischen Sättigung des Eisens kommen, wobei die gewünschten (guten) magnetischen Eigenschaften des Materials verloren gehen. Im Allgemeinen gibt man für $\hat{B}$ einen bestimmten (zulässigen) Wert vor, so dass sich mit Hilfe von Gl. (13.8) diejenige Spannung berechnen lässt, die maximal an die Spule angelegt werden darf.

Für die weiteren Betrachtungen wollen wir von einer *realen* Drosselspule ausgehen. Dann ist bei der Anwendung der Spule noch Folgendes zu beachten:

1. Die verwendete Spule besitzt stets einen Wirkwiderstand. Die hierin in Wärme umgesetzte Leistung (Wirkleistung) bezeichnet man auch als **Kupferverluste**.
2. Zusätzlich kommt es zu einer Erwärmung des vorhandenen Eisenkerns. Die dadurch entstehende Wärmeleistung nennt man **Eisenverluste**. Sie setzen sich zusammen aus den **Hystereseverlusten** und den **Wirbelstromverlusten**.

13.1.2 Hystereseverluste

Zur Erläuterung der Hystereseverluste gehen wir von einer auf einem Eisenkern aufgebrachten Spule aus. Sie möge von einem Strom durchflossen werden, der von Null aus gesteigert wird. Dies hat zur Folge, dass im Eisenkern durch den ansteigenden Strom ein Magnetfeld aufgebaut wird. Nehmen wir hierbei an, dass vorher kein remanentes Magnetfeld vorhanden war, so wird der zwischen der Flussdichte B und der Feldstärke H bestehende Zusammenhang durch die in Bild 13.2a dargestellte Kennlinie 1 beschrieben.

Wie in Abschnitt 5.11 erläutert, stellt die in Bild 13.2a zwischen dieser Kennlinie und der B-Achse (schraffiert dargestellte) Fläche ein Maß für dem Eisenkern pro Volumeneinheit *zugeführte* - und damit im Magnetfeld gespeicherte - Energie dar. Stellt man anschließend den Spulenstrom auf Null zurück, so wird in Bild 13.2a Kennlinie 2 durchlaufen. Jetzt ist die zwischen dieser Kennlinie und der

B-Achse vorhandene Fläche ein Maß für die vom Eisenkern pro Volumeneinheit *abgegebene* Energie. Das bedeutet, dass die beim Aufbau des Magnetfeldes im Eisenkern gespeicherte Energie anschließend nicht in voller Höhe wieder zurückgewonnen werden kann. Die Differenz verbleibt im Eisenkern und wird hier in Wärme umgewandelt.

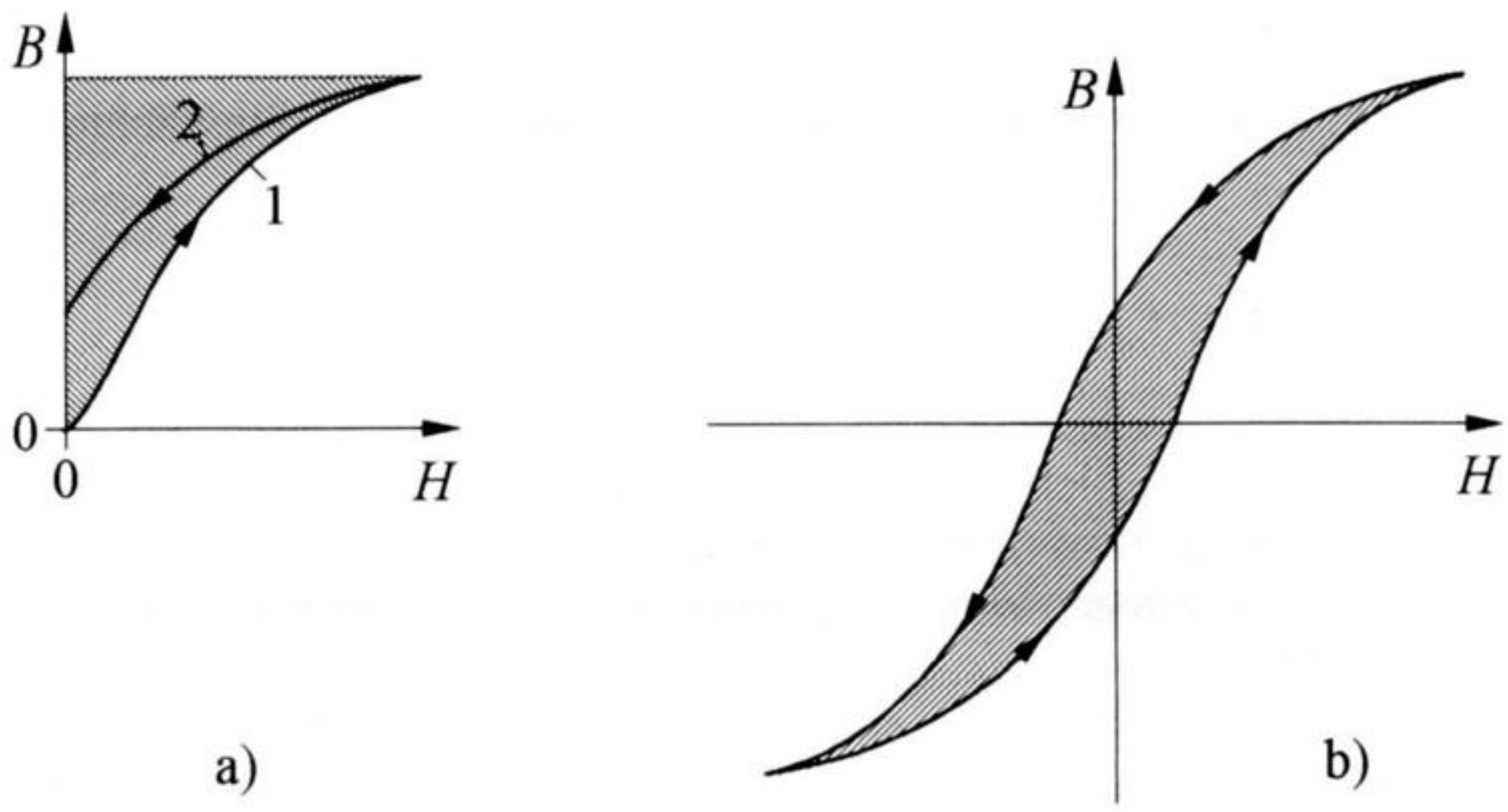


Bild 13.2 Zur Erläuterung der Hystereseverluste. a) Verlauf der Magnetisierungskennlinien beim Auf- und Abmagnetisieren eines Eisenkerns, b) Verlauf der vollständigen Hystereseschleife

Legt man die Spule an *Wechselspannung*, so wird entsprechend Bild 13.2b eine Hystereseschleife dauernd durchlaufen. Dabei stellt die von der Hystereseschleife eingeschlossene (schraffiert dargestellte) Fläche ein Maß für diejenige Energie dar, die pro Periode der Wechselspannung im Eisenkern in Wärme umgesetzt wird. Das bedeutet, dass die auftretende (mittlere) Wärmeleistung (P_H) proportional zur Frequenz f der Wechselspannung ansteigt. Es gilt also

$$P_H \sim f.$$

Man bezeichnet P_H als **Hystereseverluste** oder auch als **Ummagnetisierungsverluste**.

13.1.3 Wirbelstromverluste

Zur Erläuterung der Wirbelstromverluste gehen wir von Bild 13.3a aus. Es zeigt einen - senkrecht zur Zeichenebene verlaufenden - massiven Eisenkern mit quadratischem Querschnitt. Der Kern möge einen magnetischen Fluss (Φ) führen, dessen Feldlinien in die Zeichenebene hinein gerichtet sind. Nimmt dieser Fluss zu, so werden im Kern Spannungen induziert, die - wie in Bild 13.3a dargestellt -

kreisförmig verlaufende Ströme (i) zur Folge haben. Bei einer Flussabnahme ändern diese Ströme ihre Richtung. Man bezeichnet diese Ströme als **Wirbelströme**. Sie führen zu einer Erwärmung des Eisens. Die entsprechende (mittlere) Wärmeleistung (P_W) nennt man **Wirbelstromverluste**.

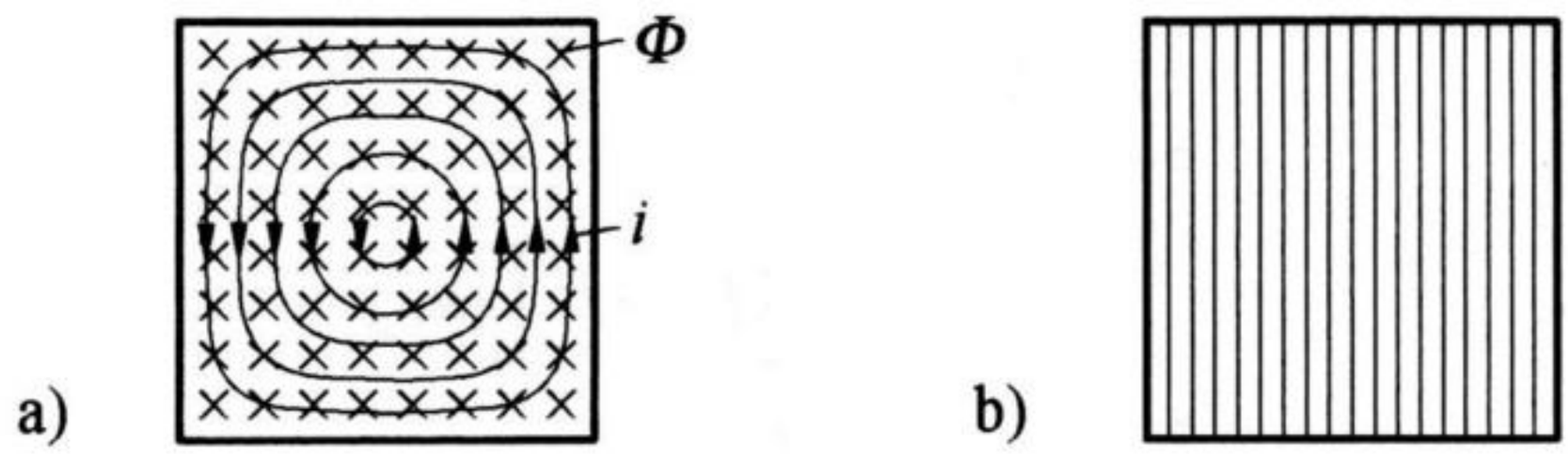


Bild 13.3 Zur Erläuterung der Wirbelstromverluste. a) massiver, b) geblechter Eisenkern

Nach Gl. (13.8) steigen die im Eisen induzierten Spannungen proportional zur Frequenz f an. Da die dadurch verursachte Wärmeleistung nach Gl. (2.17) quadratisch mit der Spannung zunimmt, gilt

$$P_W \sim f^2.$$

Die Wirbelstromverluste steigen also quadratisch mit der Frequenz an. Bei einem massiven Eisenkern sind die Wirbelstromverluste im Allgemeinen so groß, dass sie eine sehr starke Erwärmung des Kerns verursachen. Zur Reduzierung der Verluste wird daher grundsätzlich eine der beiden folgenden Maßnahmen getroffen:

1. Der Eisenkern wird aus Blechen zusammengesetzt, die voneinander isoliert sind (Bild 13.3b). Dadurch können sich die Wirbelströme nicht mehr entsprechend Bild 13.3a über den gesamten Kernquerschnitt ausbreiten, so dass die Wirbelstromverluste deutlich geringer sind als bei einem massiven Eisenkern.
2. Es werden Ferritkerne verwendet. Ferrite sind Verbindungen von Eisenoxid (Fe_2O_3) mit anderen Metalloxiden. Bei der Herstellung der Kerne werden die Ausgangsstoffe im feinpulvrigen Zustand durch Sintern (bei entsprechend hohen Temperaturen) zusammengefügt. Ferrite verhalten sich etwa so wie andere ferromagnetische Stoffe, besitzen jedoch eine sehr geringe elektrische Leitfähigkeit. Dadurch können kaum Wirbelströme auftreten.

13.1.4 Ersatzschaltbild

Die Summe aus den Hystereseverlusten (P_H) und den Wirbelstromverlusten (P_W) ergeben die insgesamt im Eisen auftretenden Verluste. Man bezeichnet sie bekanntlich als **Eisenverluste** (P_{Fe}). Es gilt also

$$P_{\mathrm{Fe}} = P_{\mathrm{H}} + P_{\mathrm{W}}.$$

Berücksichtigt man bei einer Spule sowohl die Kupfer- als auch die Eisenverluste, so kann man für die Spule das in Bild 13.4 dargestellte Ersatzschaltbild verwenden.

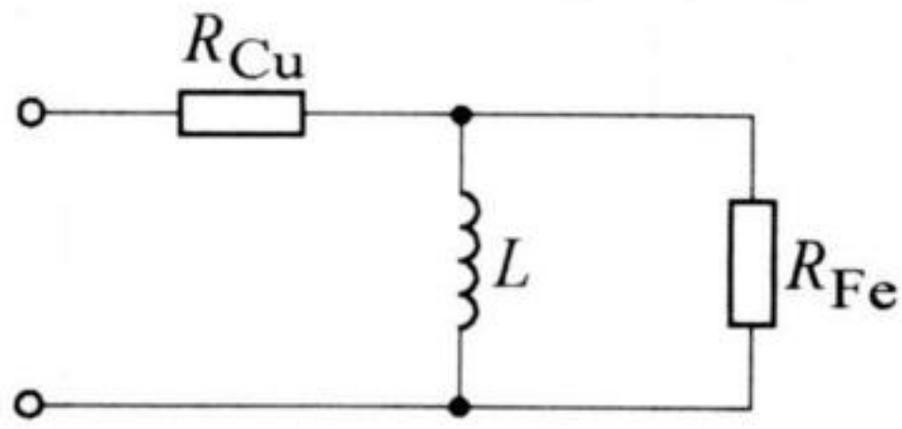


Bild 13.4 Ersatzschaltbild einer Spule (mit Eisenkern)

Darin stellen R_{Cu} den **ohmschen Wicklungswiderstand** der Spule, L deren **Induktivität** und R_{Fe} einen die *Eisenverluste* berücksichtigenden ohmschen Widerstand dar. Letzterer wird als **Eisenverlustwiderstand** bezeichnet. Er wird so gewählt, dass die in diesem Widerstand auftretende Wirkleistung genau der vorhandenen Eisenverlustleistung (den Eisenverlusten) entspricht.

Aufgabe 13.1

Eine Drosselspule (mit Eisenkern) soll als Vorschaltgerät für einen Verbraucher eingesetzt werden. Die Anordnung ist so auszulegen, dass bei dem Strom $I = 0{,}5$ A und der Frequenz $f = 50$ Hz an der Spule die Spannung $U = 150$ V abfällt. Der Kernquerschnitt des Eisens betrage $A = 6\,\mathrm{cm}^2$. Ein vorhandener Luftspalt mit einstellbarer Luftspaltlänge ermögliche die Veränderung der Induktivität. Der Wirkwiderstand der Spule sowie die Eisenverluste seien vernachlässigbar.

a) Welche Windungszahl N ist für die Spule vorzusehen, damit zur Vermeidung einer magnetischen Eisensättigung die magnetische Flussdichte nicht größer als $\hat{B} = 1{,}2$ T wird?

b) Wie groß muss die Induktivität L der Spule sein?

Lösung

a) Bei vernachlässigbarem Wirkwiderstand ergibt sich die erforderliche Windungszahl aus Gl. (13.8) als

$$N = \frac{U}{4{,}44\, f\, A\, \hat{B}} = \frac{150\ \mathrm{V}}{4{,}44 \cdot 50\ \mathrm{Hz} \cdot 6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 \cdot 1{,}2\ \mathrm{T}} = \underline{938}.$$

b) Die Induktivität folgt aus $U = I\,\omega L$ als

$$L = \frac{U}{\omega I} = \frac{150\ \text{V}}{2\pi \cdot 50\ \text{Hz} \cdot 0{,}5\ \text{A}} = \underline{955\ \text{mH}}.$$

13.2 Transformator mit Eisenkern

13.2.1 Der ideale Transformator

Eine Anordnung aus zwei magnetisch gekoppelten Spulen bezeichnet man als **Transformator**. Er wird meistens mit einem Eisenkern versehen. In Bild 13.5 ist der Aufbau einer solchen Anordnung prinzipiell dargestellt.

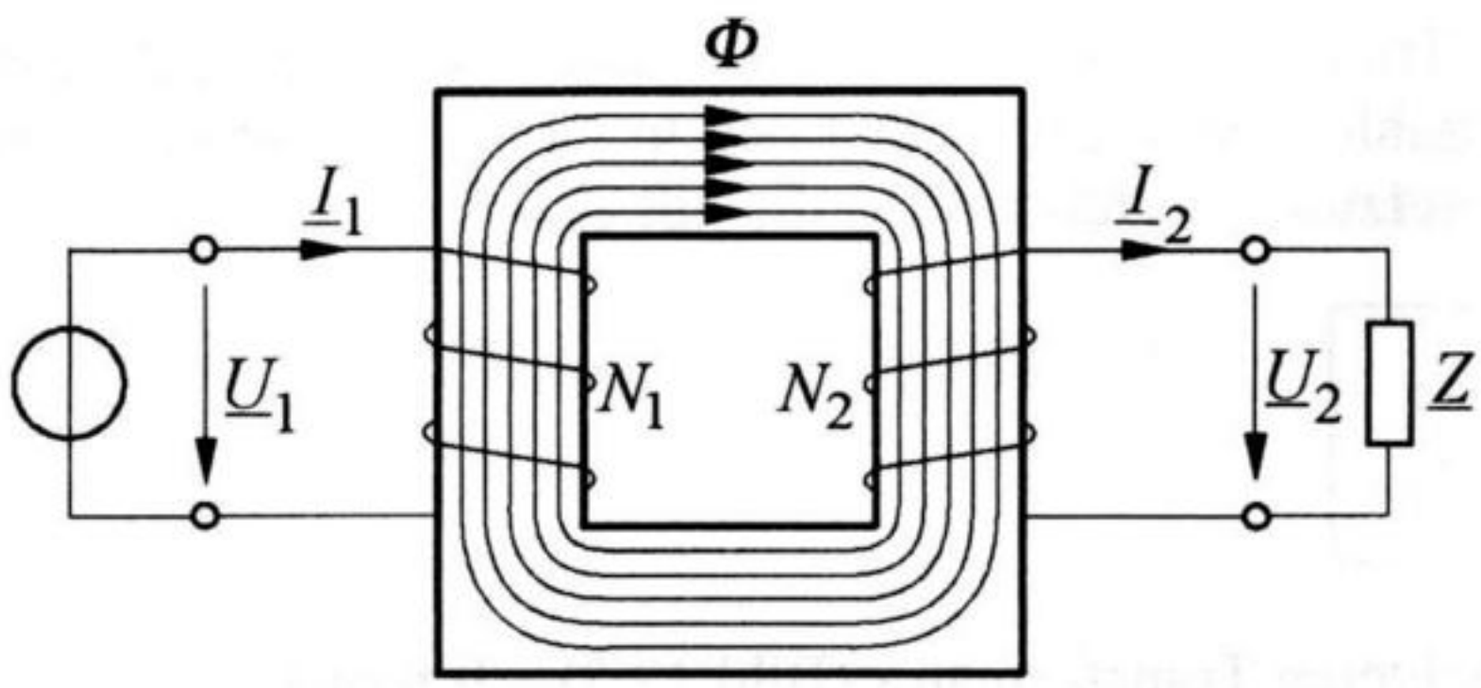


Bild 13.5 Prinzipieller Aufbau eines Transformators (mit Eisenkern)

N_1 und N_2 sind die Windungszahlen der beiden auf dem Eisenkern aufgebrachten Spulen. $\underline{Z}$ sei die Impedanz eines beliebigen Belastungswiderstandes. Man bezeichnet diejenige Spule, die mit der Spannungsquelle (Versorgungsquelle) verbunden ist, als **Primärwicklung** (oder als Primärseite), die andere - mit dem Belastungswiderstand verbundene - Spule heißt **Sekundärspule** (oder Sekundärseite).

Wir wollen zunächst einen Transformator mit „idealem Verhalten" betrachten. Darunter stellen wir uns eine Anordnung vor, in der folgende Voraussetzungen gelten:

- Die ohmschen Widerstände der Wicklungen sind vernachlässigbar.
- Beide Spulen sind magnetisch ideal gekoppelt. Das bedeutet, dass der von der Primärwicklung erzeugte magnetische Fluss Φ vollständig durch die Sekundärwicklung verläuft.
- Der magnetische Widerstand des Eisenkerns ist vernachlässigbar klein.
- Die Eisenverluste sind vernachlässigbar.

Unter diesen Bedingungen gilt nach Gl. (13.7) für die Primärspannung

$$U_1 = 4{,}44\ N_1\, f\, \hat{\Phi} \tag{13.9}$$

und für die Sekundärspannung

$$U_2 = 4{,}44\ N_2\, f\, \hat{\Phi}. \tag{13.10}$$

Hierbei sind f die Frequenz und $\hat{\Phi}$ der Scheitelwert des auftretenden magnetischen Flusses. Teilen wir die Gln. (13.9) und (13.10) durcheinander, so erhalten wir

$$\boxed{\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}.} \tag{13.11}$$

Beim idealen Transformator verhalten sich also die Spannungen zueinander wie die Windungszahlen. Man bezeichnet den in Gl. (13.11) angegebenen Quotienten auch als **Übersetzungsverhältnis** ($\ddot{u}$). Es gilt also

$$\boxed{\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2}.} \tag{13.12}$$

Bei dem betrachteten Transformator (Bild 13.5) gilt ferner

$$U_1 I_1 = U_2 I_2.$$

Die auftretenden Scheinleistungen sind also primär- und sekundärseitig gleich groß. Hieraus folgt unter Berücksichtigung von Gl. (13.11)

$$\boxed{\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}.} \tag{13.13}$$

Beim idealen Transformator verhalten sich also die Ströme umgekehrt zueinander wie die Windungszahlen.

13.2.2 Verhalten und Ersatzschaltbild des realen Transformators

Wir wollen jetzt einen *realen* Transformator betrachten. In dessen Eisenkern treten - ebenso wie in dem Kern der in Abschnitt 13.1 beschriebenen Drosselspule - Eisenverluste auf. Darüber hinaus ist der magnetische Widerstand des Eisenkerns

nicht vernachlässigbar klein, so dass zum Aufbau des Magnetfeldes ein Strom benötigt wird. Berücksichtigt man ihn sowie die oben erwähnten Eisenverluste, so kann man nach Bild 13.6 die Widerstände X_h und R_{Fe} einführen, die man sich - wie dargestellt - aus dem Transformator herausgezogen denkt.

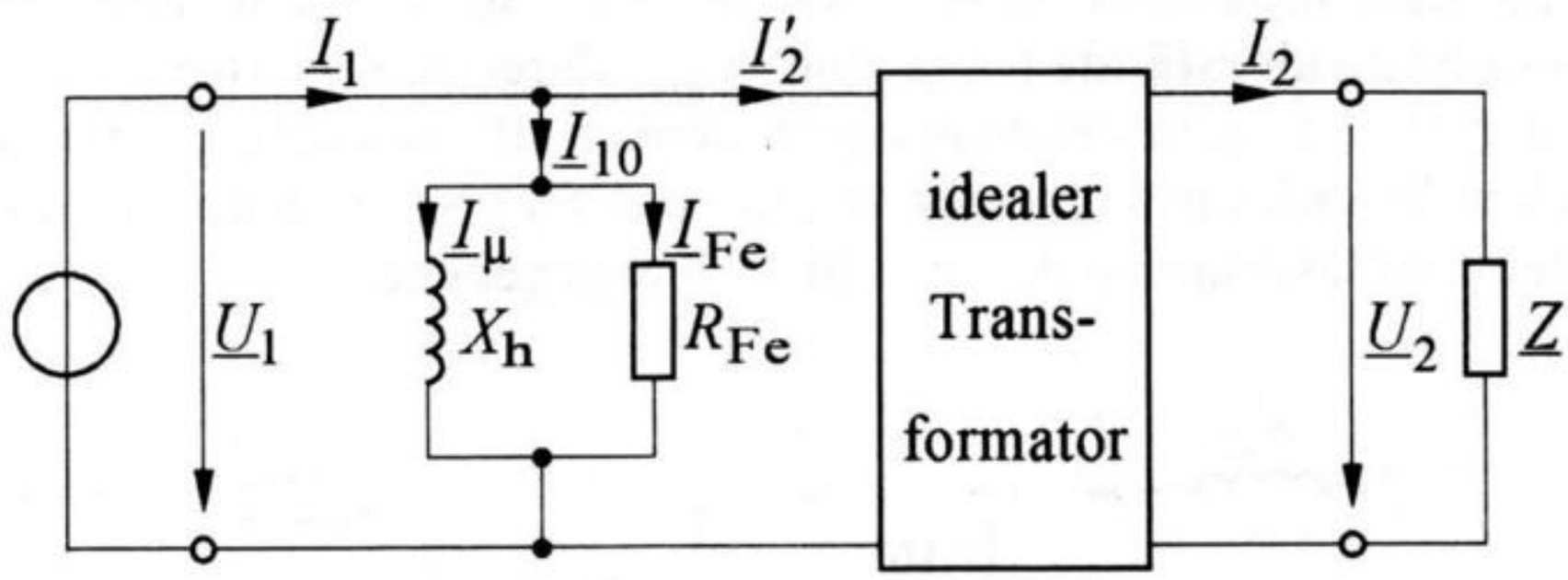


Bild 13.6 Ersatzschaltbild eines Transformators unter Berücksichtigung des Magnetisierungsstromes (I_μ) und des Eisenverluststromes (I_{Fe})

In dem sich so ergebenden Ersatzschaltbild bezeichnet man X_h als **Hauptblindwiderstand** und R_{Fe} als **Eisenverlustwiderstand**. Im Hauptblindwiderstand fließt der zum Aufbau des Magnetfeldes notwendige **Magnetisierungsstrom** ($\underline{I}_\mu$). Der Eisenverlustwiderstand führt den zur Deckung der Eisenverluste erforderlichen **Eisenverluststrom** ($\underline{I}_{Fe}$). Die Summe dieser beiden Ströme ergibt den vom Transformator im unbelasteten Zustand benötigten Strom $\underline{I}_{10}$, den man **Leerlaufstrom** nennt.

Bei der weiteren Betrachtung eines realen Transformators wollen wir uns jetzt mit der Tatsache befassen, dass die Wicklungen nicht ideal magnetisch gekoppelt sind. Dies ist auch aus Bild 13.7 ersichtlich.

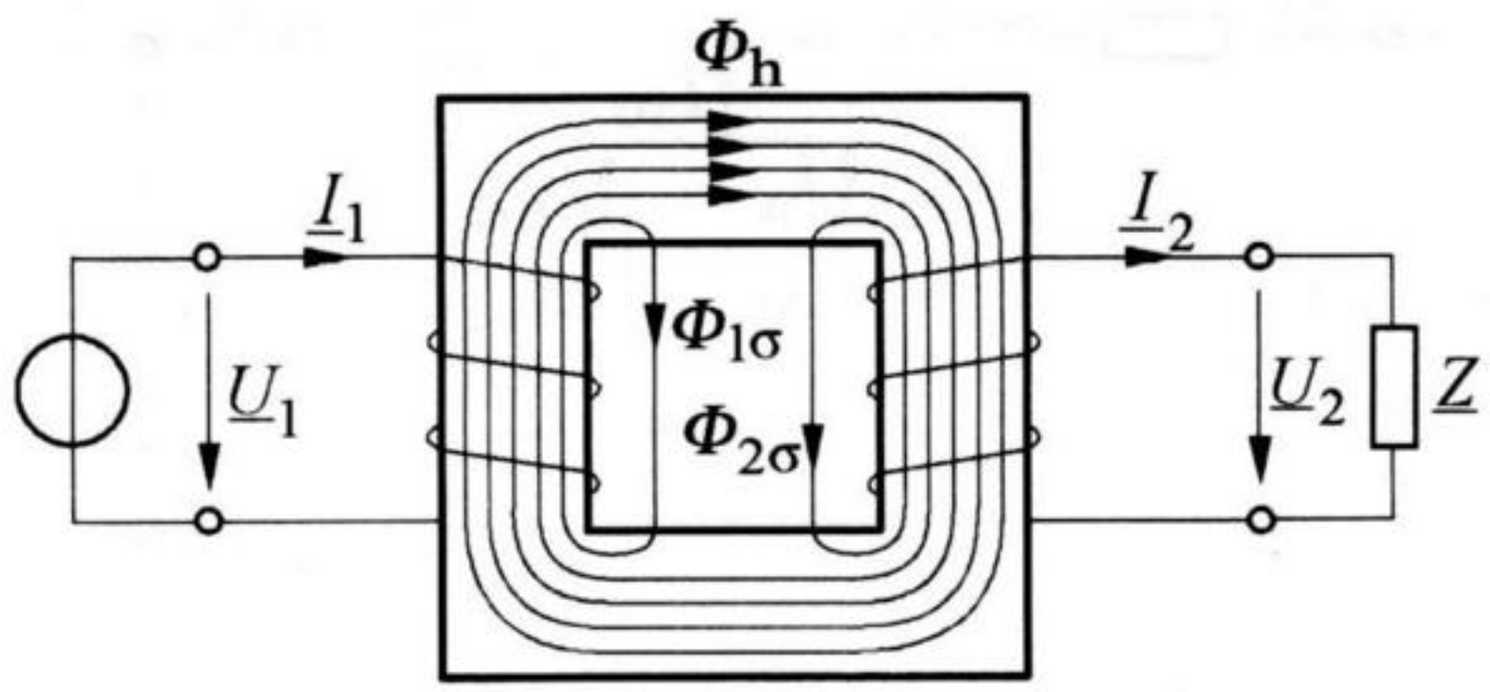


Bild 13.7 Grundsätzlicher Verlauf der in einem Transformator auftretenden magnetischen Flüsse

Aus der Darstellung geht hervor, dass ein Teil des von der Primärwicklung umfassten magnetischen Flusses nicht durch die Sekundärwicklung verläuft. Dieser

vom Primärstrom erzeugte Flussanteil ($\Phi_{1\sigma}$) heißt **primärer Streufluss**. Entsprechend gibt es einen **sekundären Streufluss** ($\Phi_{2\sigma}$), der vom Sekundärstrom erzeugt wird und nicht durch die Primärwicklung verläuft. Der durch beide Wicklungen verlaufende magnetische Fluss (Φ_h) heißt **Hauptfluss**.

Die Streuflüsse induzieren jeweils nur in *einer* Spule Spannungen und können durch **Streublindwiderstände** ($X_{1\sigma}$ und $X_{2\sigma}$) dargestellt werden. Man kann sich diese aus den Wicklungen herausgezogen denken. Berücksichtigt man dabei noch die **ohmschen Wicklungswiderstände** (R_1 und R_2), so wird aus der in Bild 13.6 dargestellten Ersatzschaltung die in Bild 13.8 angegebene.

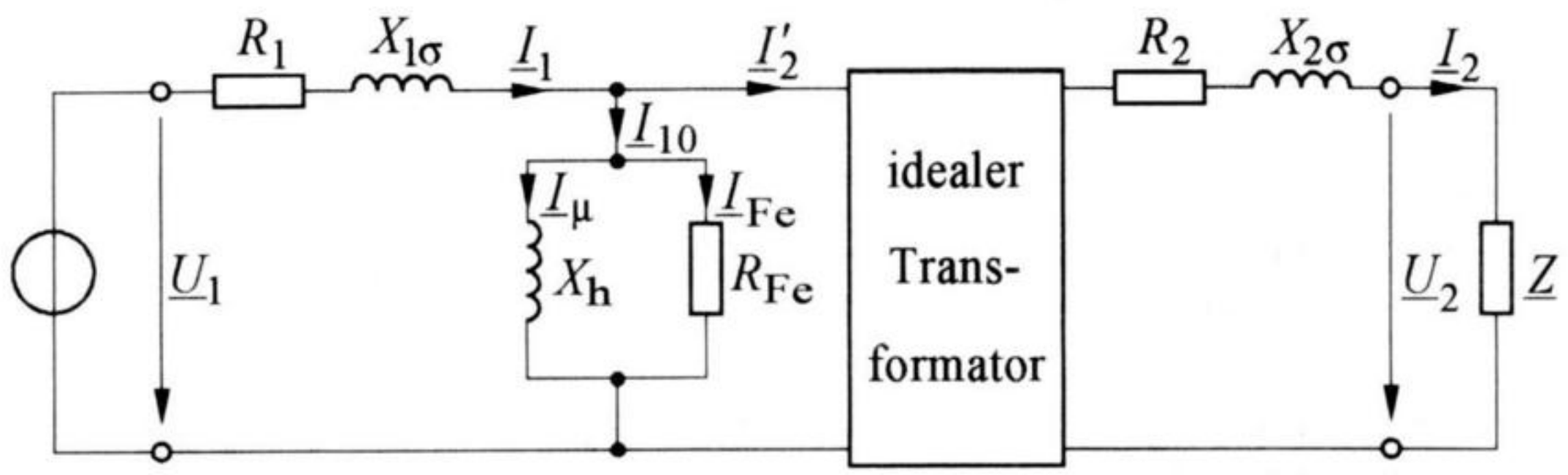


Bild 13.8 Ersatzschaltbild eines realen Transformators (mit idealem Übersetzer)

In dieser Schaltung kann man wiederum die sekundärseitig vorhandenen Größen R_2, $X_{2\sigma}$, $\underline{Z}$, $\underline{U}_2$ und $\underline{I}_2$ auf die Primärseite umrechnen. Dadurch wird der in Bild 13.8 enthaltene „ideale Transformator" überflüssig, und es entsteht das Ersatzschaltbild nach Bild 13.9.

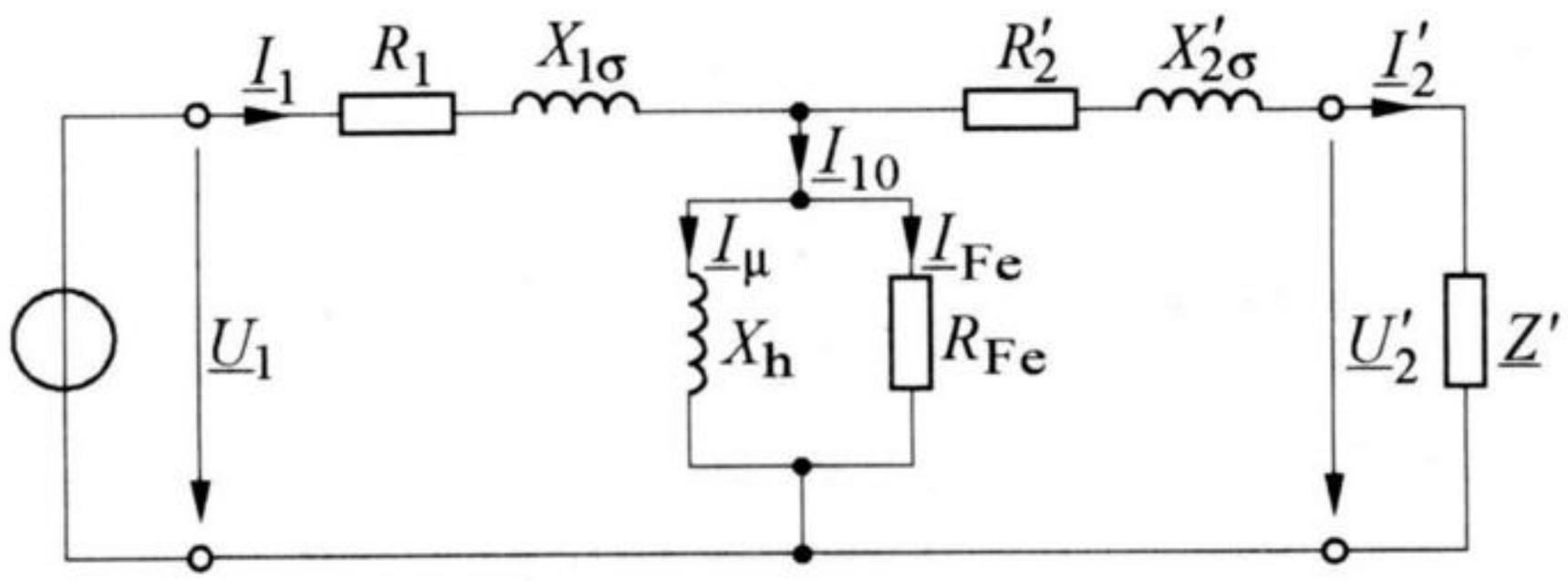


Bild 13.9 Ersatzschaltbild eines Transformators

Zur Umrechnung der Widerstände stellen wir Leistungsbilanzen auf. So gilt für die Umrechnung des sekundären Wicklungswiderstandes R_2 (Bild 13.8) auf die Primärseite (Bild 13.9)

$$(I_2')^2 R_2' = I_2{}^2 R_2.$$

Hieraus folgt unter Berücksichtigung der Gln. (13.12) und (13.13)

$$\boxed{R_2' = \ddot{u}^2 R_2.} \tag{13.14}$$

R_2' ist der auf die Primärseite umgerechnete sekundäre ohmsche Wicklungswiderstand. Entsprechend erhalten wir

$$\boxed{X_{2\sigma}' = \ddot{u}^2 X_{2\sigma}.} \tag{13.15}$$

$$\boxed{\underline{Z}' = \ddot{u}^2 \underline{Z}.} \tag{13.16}$$

Aus den Gln. (13.11) und (13.12) folgt für die Umrechnung der Sekundärspannung $\underline{U}_2$ auf die Primärseite

$$\boxed{\underline{U}'_2 = \ddot{u}\, \underline{U}_2} \tag{13.17}$$

und aus den Gln. (13.12) und (13.13) für die Umrechnung des Sekundärstromes auf die Primärseite

$$\boxed{\underline{I}'_2 = \frac{1}{\ddot{u}} \underline{I}_2.} \tag{13.18}$$

Mit Hilfe des gefundenen Ersatzschaltbildes ist es möglich, das Verhalten des Transformators - zum Beispiel bei unterschiedlichen Belastungen - zu ermitteln. So kann insbesondere die Ausgangsspannung bei gegebener Eingangsspannung und einer bestimmten (vorgegebenen) Belastung berechnet werden. Das setzt natürlich voraus, dass die Größen (Widerstände) des Ersatzschaltbildes bekannt sind. Es stellt sich daher die Frage, wie man diese Größen bei einem vorhandenen Transformator (im Labor) bestimmen kann und welche Messungen dazu notwendig sind. Wir wollen dies in dem folgenden Abschnitt näher untersuchen.

13.2.3 Leerlauf- und Kurzschlussversuch

Bei dem in Bild 13.9 dargestellten Ersatzschaltbild eines Transformators kann man im Allgemeinen davon ausgehen, dass die Widerstände X_h und R_{Fe} sehr viel

größer sind als die übrigen vorhandenen Widerstände. Das bedeutet in Bild 13.9, dass bei einem leerlaufenden (nicht belasteten) Transformator die Widerstände R_1 und $X_{1\sigma}$ näherungsweise gegenüber X_h und R_{Fe} vernachlässigt werden können. Dies führt zu dem in Bild 13.10a dargestellten - im Leerlauf geltenden - vereinfachten Ersatzschaltbild. Bild 13.10b zeigt das zugehörige Zeigerdiagramm der Spannung und der Ströme.

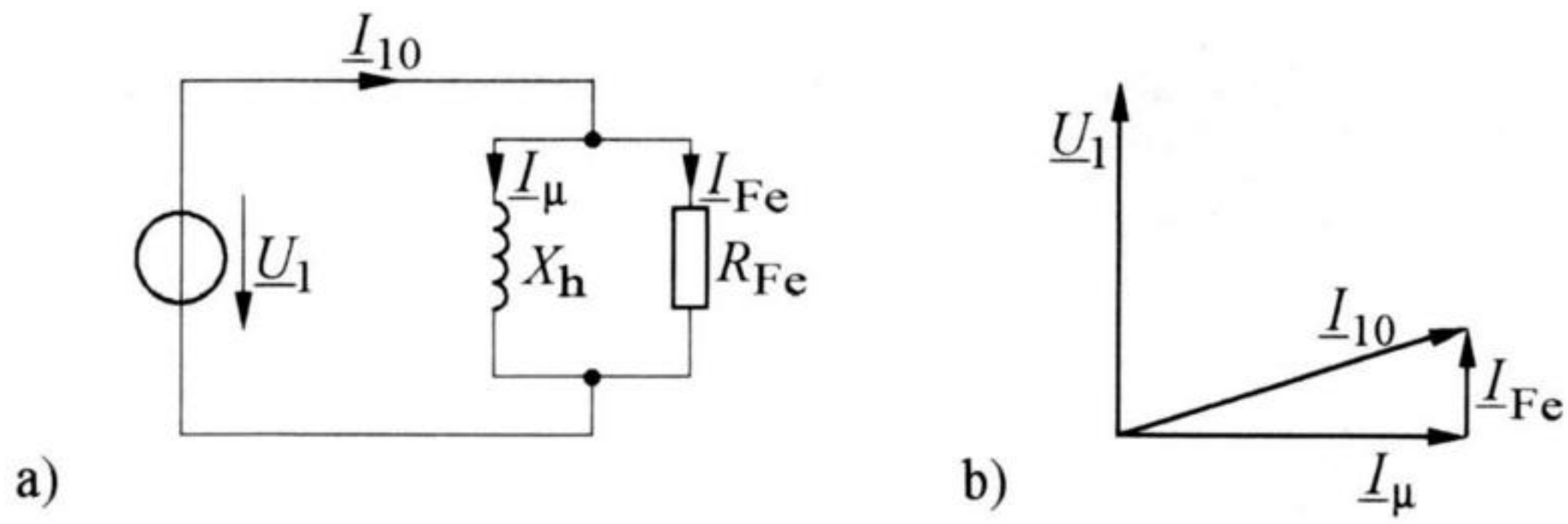


Bild 13.10 a) Vereinfachtes Ersatzschaltbild des Transformators im Leerlauf, b) zugehöriges Zeigerdiagramm der Spannung und der Ströme

Zur Ermittlung von X_h und R_{Fe} kann man einen **Leerlaufversuch** durchführen. Dabei legt man den Transformator - bei offenem Sekundärkreis - primärseitig an die Nennspannung (U_{1N}). Das ist diejenige Spannung, für die der Transformator primärseitig ausgelegt ist. Gemessen werden die Nennspannung (U_{1N}), der auftretende Leerlaufstrom (I_{10}) und die aufgenommene Wirkleistung (P_{10}). Aus diesen Werten lassen sich die Größen X_h und R_{Fe} berechnen (vergl. Aufgabe 13.2).

Zur Bestimmung der übrigen im Ersatzschaltbild (Bild 13.9) vorhandenen Widerstände kann man einen **Kurzschlussversuch** durchführen. Dabei wird der Transformator sekundärseitig kurzgeschlossen. Primärseitig wird eine Spannung angelegt, die man von Null aus so weit erhöht, bis hier der Nennstrom (I_{1N}) fließt. Gemessen werden die anliegende Spannung (U_{1K}), der fließende Primärstrom (I_{1N}) und die aufgenommene Wirkleistung (P_{1K}). Bei diesem Versuch kann man die Widerstände X_h und R_{Fe} vernachlässigen. Fasst man dann die in Bild 13.9 verbleibenden Widerstände zu

$$R_K = R_1 + R_2', \tag{13.19}$$

$$X_K = X_{1\sigma} + X_{2\sigma}' \tag{13.19}$$

zusammen, so entsteht die in Bild 13.11a dargestellte - im Kurzschlussfall geltende - vereinfachte Ersatzschaltung. Bild 13.11b zeigt das zugehörige Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes.

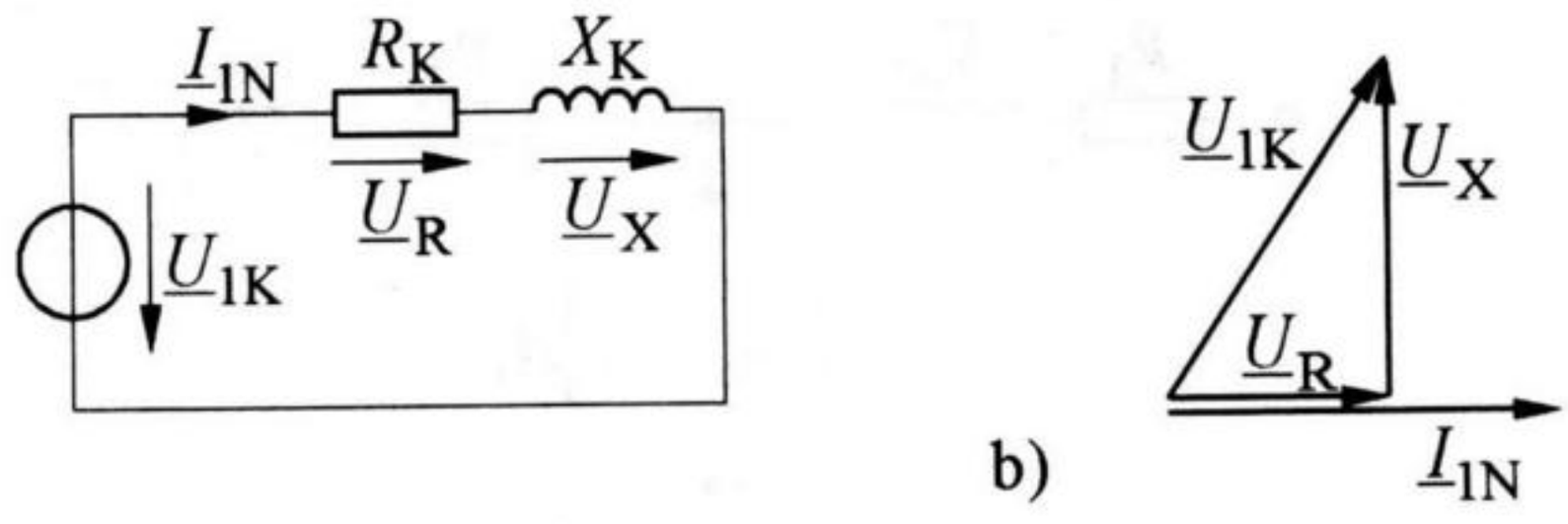


Bild 13.11 a) Vereinfachtes Ersatzschaltbild des Transformators für den Kurzschlussfall, b) zugehöriges Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes

Aus den im Kurzschlussversuch gewonnenen Werten für U_{1K}, I_{1N} und P_{1K} kann man die Größen R_K und X_K berechnen. Berücksichtigt man ferner, dass bei einem Transformator im Allgemeinen näherungsweise

$$R_1 = R_2' \tag{13.21}$$

und

$$X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' \tag{13.22}$$

ist, so kann man aus R_K und X_K leicht die ohmschen Wicklungswiderstände und die induktiven Streublindwiderstände bestimmen (vergl. Aufgabe 13.2).

Aufgabe 13.2

An einem Transformator mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 2$ werden ein Leerlaufversuch und ein Kurzschlussversuch durchgeführt. Folgende Werte werden gemessen:

Leerlaufversuch: $U_{1N} = 230\,\text{V}$, $I_{10} = 1{,}2\,\text{A}$, $P_{10} = 75\,\text{W}$,
Kurzschlussversuch: $U_{1K} = 13\,\text{V}$, $I_{1N} = 15\,\text{A}$, $P_{1K} = 85\,\text{W}$.

a) Es sind die Größen des in Bild 13.12 dargestellten Ersatzschaltbildes des Transformators zu bestimmen. (Für die Berechnung können folgende Annahmen getroffen werden: $X_h, R_{Fe} >> R_1, X_{1\sigma}$ und $R_1 = R_2'$ sowie $X_{1\sigma} = X_{2\sigma}'$.)

b) Wie groß sind der ohmsche Widerstand R_2 und der Streublindwiderstand $X_{2\sigma}$ der Sekundärwicklung?

c) Wie groß ist die Sekundärspannung U_2, wenn der Transformator rein ohmsch belastet wird und mit Nennlast arbeitet? (Für die Berechnung dieser Spannung können die Größen X_h und R_{Fe} vernachlässigt werden.)

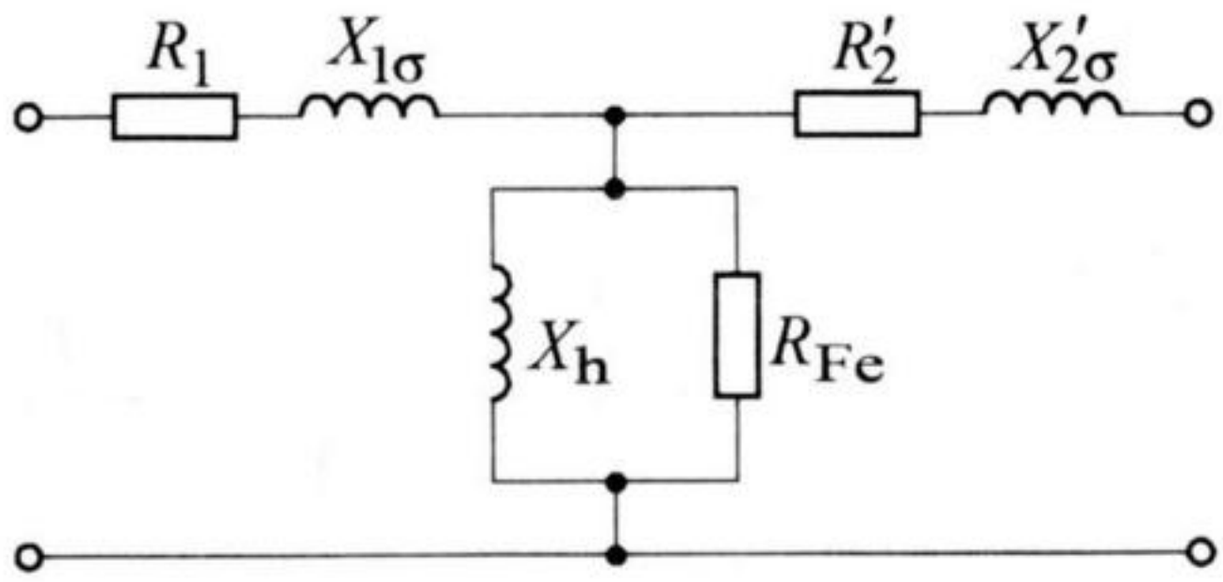


Bild 13.12 Ersatzschaltbild eines Transformators

Lösung

a) Im Leerlaufversuch können wir wegen $X_h, R_{Fe} >> R_1, X_{1\sigma}$ das in Bild 13.10a dargestellte (vereinfachte) Ersatzschaltbild verwenden. Darin gilt

$$I_{Fe} = \frac{P_{10}}{U_{1N}} = \frac{75\,\text{W}}{230\,\text{V}} = 0{,}326\,\text{A}.$$

Aus Bild 13.10b folgt

$$I_\mu = \sqrt{I_{10}{}^2 - I_{Fe}{}^2} = \sqrt{1{,}2^2 - 0{,}326^2}\ \text{A} = 1{,}155\,\text{A}.$$

Damit erhalten wir aus Bild 13.10a für den Hauptblindwiderstand

$$X_h = \frac{U_{1N}}{I_\mu} = \frac{230\,\text{V}}{1{,}155\,\text{A}} = \underline{199\,\Omega}$$

und für den Eisenverlustwiderstand

$$R_{Fe} = \frac{U_{1N}}{I_{Fe}} = \frac{230\,\text{V}}{0{,}326\,\text{A}} = \underline{706\,\Omega}.$$

Im Kurzschlussversuch gilt das in Bild 13.11a dargestellte (vereinfachte) Ersatzschaltbild. Darin gilt

$$U_R = \frac{P_{1K}}{I_{1N}} = \frac{85\,\text{W}}{15\,\text{A}} = 5{,}67\,\text{V}.$$

Aus Bild 13.11b folgt

$$U_X = \sqrt{U_{1K}{}^2 - U_R{}^2} = \sqrt{13^2 - 5{,}67^2}\ \text{V} = 11{,}70\,\text{V}.$$

Damit erhalten wir aus Bild 13.11a

$$R_K = \frac{U_R}{I_{1N}} = \frac{5{,}67\ \text{V}}{15\ \text{A}} = 0{,}38\ \Omega,$$

$$X_K = \frac{U_X}{I_{1N}} = \frac{11{,}70\ \text{V}}{15\ \text{A}} = 0{,}78\ \Omega.$$

Unter Berücksichtigung der Annahmen $R_1 = R_2'$ und $X_{1\sigma} = X_{2\sigma}'$ ergibt sich

$$R_1 = R_2' = \frac{R_K}{2} = \frac{0{,}38\ \Omega}{2} = \underline{0{,}19\ \Omega},$$

$$X_{1\sigma} = X_{2\sigma}' = \frac{X_K}{2} = \frac{0{,}78\ \Omega}{2} = \underline{0{,}39\ \Omega}.$$

b) Aus Gl. (13.14) folgt für den ohmschen Widerstand der Sekundärwicklung

$$R_2 = \frac{R_2'}{\ddot{u}^2} = \frac{0{,}19\ \Omega}{2^2} = \underline{0{,}048\ \Omega}$$

und aus Gl. (13.15) für den Streublindwiderstand der Sekundärwicklung

$$X_{2\sigma} = \frac{X_{2\sigma}'}{\ddot{u}^2} = \frac{0{,}39\ \Omega}{2^2} = \underline{0{,}098\ \Omega}.$$

c) Zur Berechnung der gesuchten Ausgangsspannung des belasteten Transformators können wir - wie vorgegeben - die Widerstände X_h und R_{Fe} vernachlässigen. Somit gilt das in Bild 13.13a dargestellte (vereinfachte) Ersatzschaltbild. Bild 13.13b zeigt das zugehörige Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes.

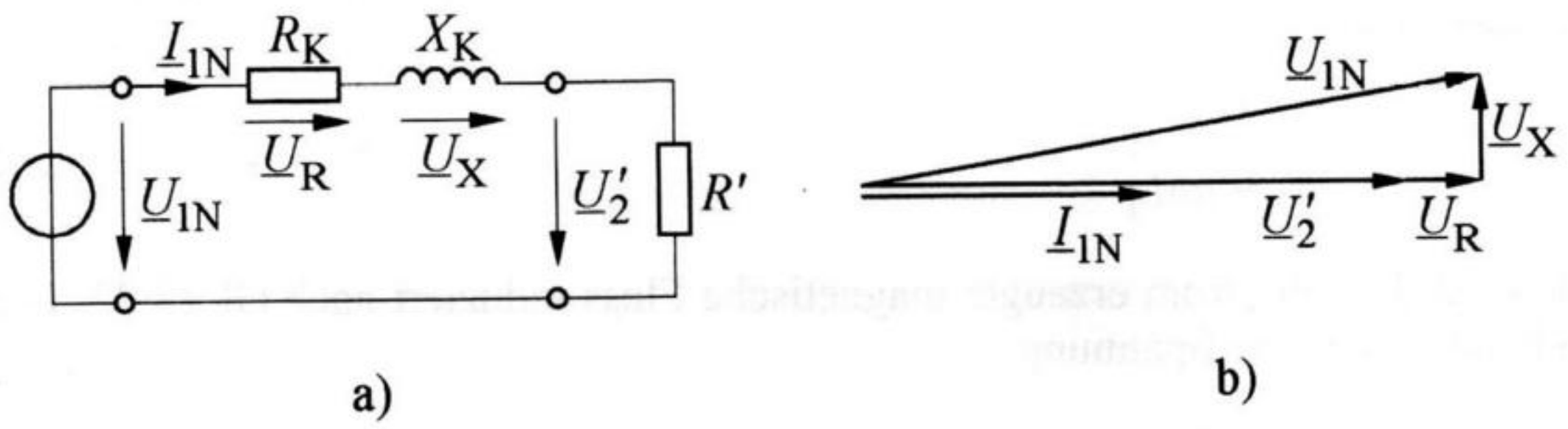


Bild 13.13 a) Vereinfachtes Ersatzschaltbild des belasteten Transformators, b) zugehöriges Zeigerdiagramm der Spannungen und des Stromes

Aus Bild 13.13b folgt

$$U_2' = \sqrt{U_{1N}^2 - U_X^2} - U_R = \sqrt{230^2 - 11{,}70^2}\ \text{V} - 5{,}67\ \text{V} = 224\ \text{V}.$$

Damit erhalten wir für die gesuchte Ausgangsspannung nach Gl. (13.17)

$$U_2 = \frac{U_2'}{\ddot{u}} = \frac{224\ \text{V}}{2} = \underline{112\ \text{V}}.$$

13.3 Der eisenfreie Transformator

13.3.1 Der eisenfreie Transformator im unbelasteten Zustand

Wir wollen jetzt einen Transformator ohne Eisenkern betrachten und gehen hierzu von Bild 13.14 aus.

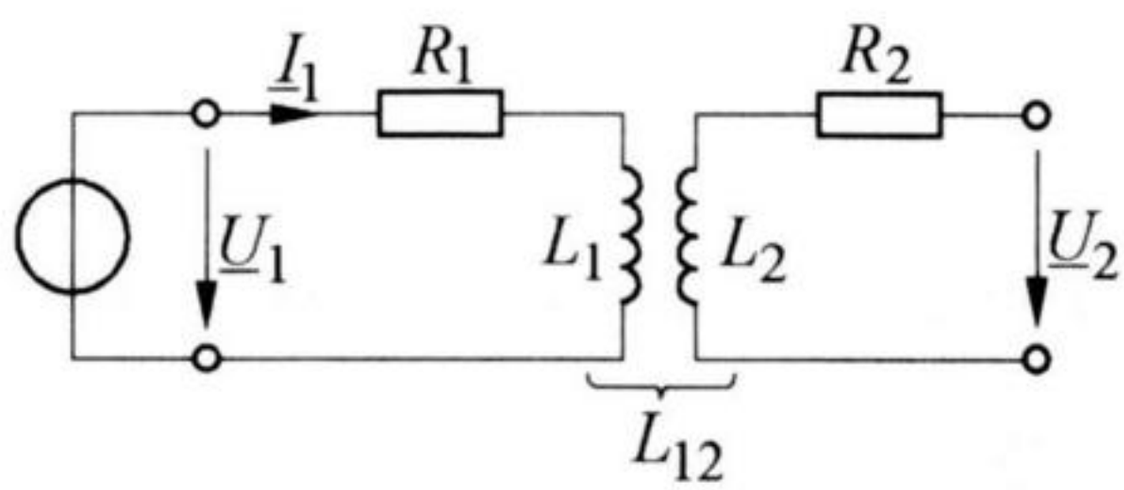


Bild 13.14 Eisenfreier Transformator im unbelasteten Zustand

Die beiden dargestellten magnetisch gekoppelten Spulen haben die **ohmschen Widerstände** R_1 und R_2 sowie die **Induktivitäten** L_1 und L_2. Zwischen den Spulen besteht die **gegenseitige Induktivität** L_{12} (vergl. Abschnitt 5.10). Im unbelasteten Zustand - bei offener Sekundärwicklung - gilt für den primärseitig fließenden Strom

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}. \tag{13.23}$$

Der von diesem Strom erzeugte magnetische Fluss induziert nach Gl. (5.72) in die Sekundärspule die Spannung

$$\underline{U}_2 = L_{12}\frac{\mathrm{d}\underline{I}_1}{\mathrm{d}t}. \tag{13.24}$$

Stellen wir den (sinusförmigen) Strom nach Gl. (7.17) durch

$$\underline{I}_1 = I_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{13.25}$$

dar, so wird aus Gl. (13.24)

$$\underline{U}_2 = L_{12} \frac{\mathrm{d}\left(I_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega L_{12} \, I_1 \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \mathrm{j}\omega L_{12} \, \underline{I}_1 . \tag{13.26}$$

Das Ergebnis besagt, dass durch den Strom $\underline{I}_1$ in die Sekundärspule eine Spannung mit dem Betrag

$$U_2 = \omega L_{12} \, I_1 \tag{13.27}$$

hervorgerufen wird, und dass $\underline{U}_2$ gegenüber $\underline{I}_1$ um 90° voreilt. Setzt man Gl. (13.23) in Gl. (13.26) ein, so ergibt sich für die sekundärseitige Spannung des unbelasteten Transformators

$$\boxed{\underline{U}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega L_{12}}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1} \, \underline{U}_1 .} \tag{13.28}$$

13.3.2 Der eisenfreie Transformator im belasteten Zustand

Wir wollen jetzt den Transformator unter der Voraussetzung betrachten, dass er nach Bild 13.15 mit einer beliebigen Impedanz $\underline{Z}$ belastet wird.

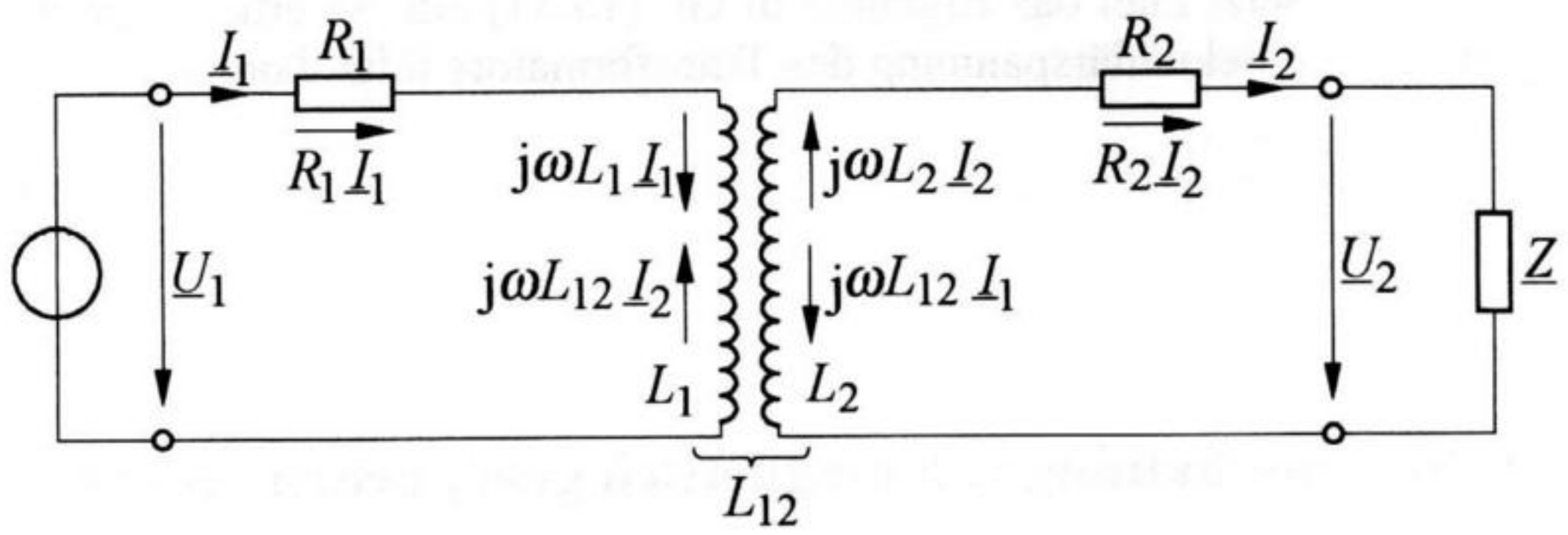


Bild 13.15 Eisenfreier Transformator im belasteten Zustand

In diesem Fall wird zum einen durch den Strom $\underline{I}_1$ in der Sekundärwicklung die Spannung $\mathrm{j}\omega L_{12}\,\underline{I}_1$ hervorgerufen. Zum anderen entsteht aber auch rückwirkend durch den Strom $\underline{I}_2$ in der Primärwicklung die Spannung $\mathrm{j}\omega L_{12}\,\underline{I}_2$. Daneben treten die in Bild 13.15 eingetragenen ohmschen und induktiven Spannungsabfälle auf. Somit ergeben sich für die beiden Kreise nach dem zweiten Kirchhoff'schen Gesetz die Gleichungen

$$\underline{U}_1 + \mathrm{j}\omega L_{12}\,\underline{I}_2 - (R_1 + \mathrm{j}\omega L_1)\,\underline{I}_1 = 0, \tag{13.29}$$

$$\mathrm{j}\omega L_{12}\,\underline{I}_1 - (R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + \underline{Z})\,\underline{I}_2 = 0. \tag{13.30}$$

Aus Gl. (13.30) folgt für den Sekundärstrom

$$\boxed{\underline{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega L_{12}}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + \underline{Z}}\,\underline{I}_1.} \tag{13.31}$$

Setzen wir diese Beziehung in Gl. (13.29) ein, und lösen wir die Gleichung dann nach $\underline{I}_1$ auf, so ergibt sich für den Primärstrom

$$\boxed{\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \dfrac{(\omega L_{12})^2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + \underline{Z}}}.} \tag{13.32}$$

Sind also beispielsweise die Daten des Transformators sowie die Impedanz $\underline{Z}$ des angeschlossenen Belastungswiderstandes und die Primärspannung U_1 bekannt, so lässt sich der Primärstrom mit Hilfe von Gl. (13.32) bestimmen (vergl. Aufgabe 13.3). Setzt man das Ergebnis in Gl. (13.31) ein, so erhält man den Sekundärstrom. Die Sekundärspannung des Transformators folgt dann aus

$$\boxed{\underline{U}_2 = \underline{I}_2\,\underline{Z}.} \tag{13.33}$$

13.3.3 Reihenschaltung von magnetisch gekoppelten Spulen

Wir wollen jetzt zwei magnetisch gekoppelte Spulen in Reihe schalten, wobei die Induktivitäten der einzelnen Spulen (L_1 und L_2) wie auch die gegenseitige Induktivität (L_{12}) bekannt seien. Es stellt sich die Frage, wie groß die Gesamtin-

duktivität der Reihenschaltung wird. Dabei ist zu beachten, dass es für die Reihenschaltung der Spulen die beiden in Bild 13.16 dargestellten Möglichkeiten gibt.

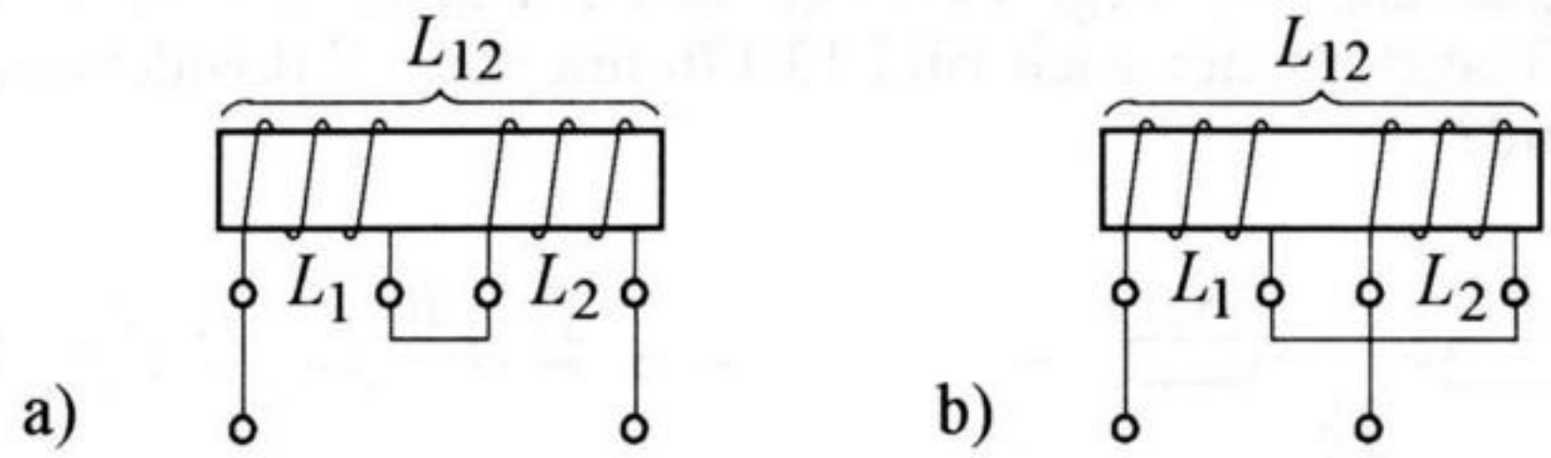


Bild 13.16 Reihenschaltung von magnetisch gekoppelten Spulen.
a) Spulen mit gleichem Wickelsinn, b) Spulen mit entgegengesetztem Wickelsinn

In der Anordnung nach Bild 13.16a sind die Spulen so in Reihe geschaltet, dass der Wickelsinn beider Spulen übereinstimmt. In diesem Fall beträgt die wirksame Induktivität nach den in Abschnitt 13.3.2 (Bild 13.15) gewonnenen Erkenntnissen

$$\boxed{L = L_1 + L_2 + 2\,L_{12}.} \tag{13.34}$$

Polt man in Bild 13.16a die rechte Spule um, so entsteht die Anordnung nach Bild 13.16b. Jetzt stimmt der Wickelsinn beider Spulen nicht mehr überein. Die wirksame Induktivität beträgt dann

$$\boxed{L = L_1 + L_2 - 2\,L_{12}.} \tag{13.35}$$

Die Ergebnisse zeigen, dass die Gesamtinduktivität L nicht nur von der Höhe der Induktivitäten der einzelnen Spulen (L_1 und L_2) abhängig ist, sondern auch von der gegenseitigen Induktivität (L_{12}) und darüber hinaus von der Art der Reihenschaltung. Gestaltet man die Spulen so, dass sich ihre Lage zueinander verändern lässt, erhält man eine Anordnung mit einstellbarer Gesamtinduktivität.

Aufgabe 13.3

Ein eisenfreier Transformator liegt nach Bild 13.17 primärseitig an der Spannung $U_1 = 3{,}6\,\text{V}$. Die Frequenz beträgt $f = 500$ Hz. Die Primärwicklung hat den Wirkwiderstand $R_1 = 25\,\Omega$ und die Induktivität $L_1 = 20\,\text{mH}$. Die entsprechenden Daten der Sekundärwicklung sind $R_2 = 15\,\Omega$ und $L_2 = 12\,\text{mH}$. Zwischen den Spulen besteht die gegenseitige Induktivität $L_{12} = 13\,\text{mH}$.

a) Wie groß ist die Sekundärspannung U_{20} im unbelasteten Zustand (Bild 13.17a)?

b) Welche Spannung U_2 liegt zwischen den Klemmen der Sekundärwicklung, wenn der Transformator nach Bild 13.17b mit dem Wirkwiderstand $R = 60\,\Omega$ belastet wird?

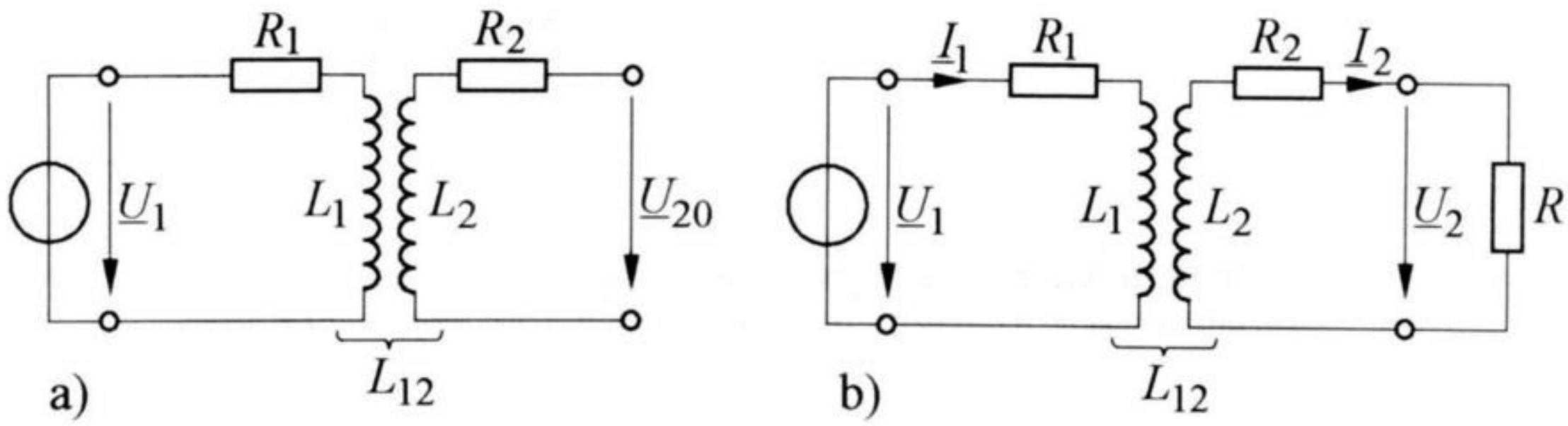


Bild 13.17 Eisenfreier Transformator. a) Unbelasteter Zustand, b) belasteter Zustand

Lösung

a) Die im unbelasteten Zustand (Bild 13.17a) vorhandene Sekundärspannung folgt aus Gl. (13.28) mit

$$\omega L_{12} = 2\pi \cdot 500\ \text{Hz} \cdot 0{,}013\ \text{H} = 40{,}84\ \Omega,$$

$$\omega L_1 = 2\pi \cdot 500\ \text{Hz} \cdot 0{,}020\ \text{H} = 62{,}83\ \Omega$$

als

$$\underline{U}_{20} = \frac{\mathrm{j}\omega L_{12}}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1}\,\underline{U}_1 = \frac{\mathrm{j}\,40{,}84\ \Omega}{(25 + \mathrm{j}\,62{,}83)\ \Omega}\,3{,}6\ \text{V} = 2{,}17\ \text{V} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}21{,}6^\circ}.$$

Die Spannung hat somit den Betrag

$$\underline{U_{20} = 2{,}17\ \text{V}}.$$

b) Wird der Transformator nach Bild 13.17b mit dem Widerstand $R = 60\ \Omega$ belastet, so fließt mit

$$\omega L_2 = 2\pi \cdot 500\ \text{Hz} \cdot 0{,}012\ \text{H} = 37{,}7\ \Omega$$

nach Gl. (13.32) primärseitig der Strom

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{R_1 + \mathrm{j}\omega L_1 + \dfrac{(\omega L_{12})^2}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + R}},$$

$$\underline{I}_1 = \frac{3{,}6\ \mathrm{V}}{\left(25 + \mathrm{j}\,62{,}83 + \dfrac{40{,}84^2}{15 + \mathrm{j}\,37{,}7 + 60}\right)\ \Omega} = 52{,}3\ \mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}51{,}6^\circ}.$$

Damit ergibt sich nach Gl. (13.31) für den Sekundärstrom

$$\underline{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega L_{12}}{R_2 + \mathrm{j}\omega L_2 + R}\,\underline{I}_1,$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\,40{,}84\ \Omega}{(15 + \mathrm{j}\,37{,}7 + 60)\ \Omega} \cdot 52{,}3\ \mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}51{,}6^\circ} = 25{,}5\ \mathrm{mA} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}11{,}7^\circ}.$$

Mit diesem Wert erhalten wir für die gesuchte Spannung den Betrag

$$U_2 = I_2\,R = 25{,}5\ \mathrm{mA} \cdot 60\ \Omega = \underline{1{,}53\ \mathrm{V}}.$$

14 Drehstromtechnik

14.1 Die Erzeugung von Drehstrom

Dreht man eine Rechteckspule nach Bild 14.1 mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (ω) in einem homogenen Magnetfeld ($\vec{B}$), so wird, wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, in der Spule eine sinusförmige Spannung induziert. Die Frequenz der erzeugten Spannung stimmt bei der dargestellten Anordnung mit der Drehzahl überein.

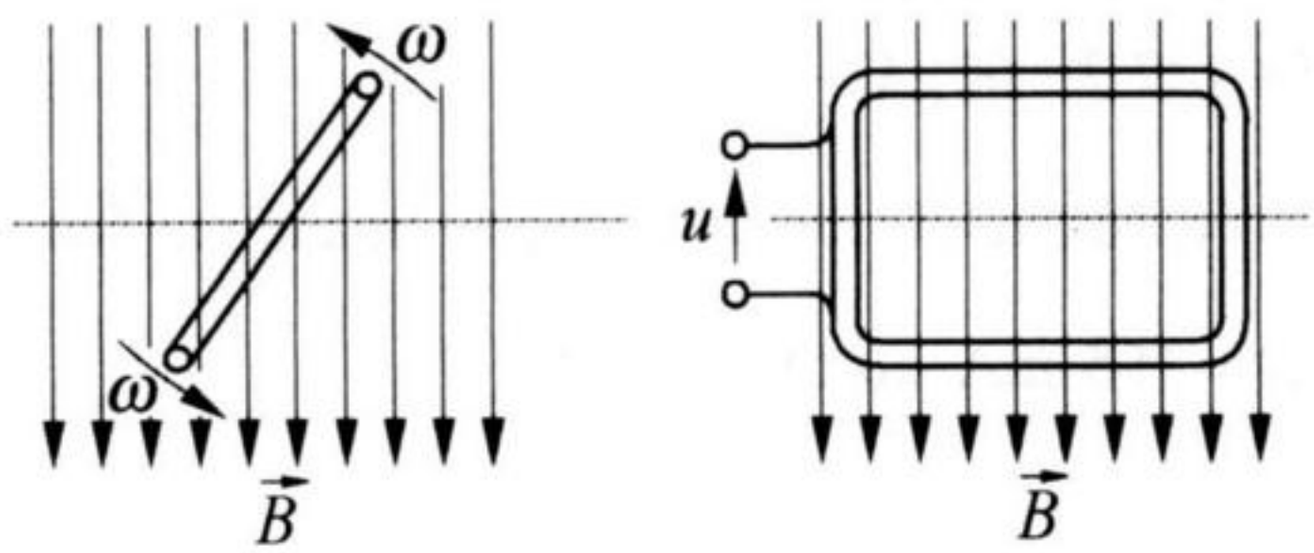


Bild 14.1 Anordnung zur Erzeugung einer sinusförmigen Wechselspannung

Ordnet man auf der Achse mehrere, um bestimmte Winkel gegeneinander versetzte Spulen an, so werden in ihnen Spannungen induziert, die um diese Winkel gegeneinander phasenverschoben sind. Die Spannungen bilden ein **Mehrphasensystem**. Haben alle Spannungen den gleichen Scheitelwert, und sind sie um gleiche Winkel gegeneinander phasenverschoben, so spricht man von einem **symmetrischen Mehrphasensystem**.

Von besonderer Bedeutung ist das symmetrische **Dreiphasensystem**. Es wird auch als **Drehstromsystem** bezeichnet. Zu seiner Erzeugung ist eine Anordnung mit *drei* räumlich versetzten Spulen erforderlich. Man bezeichnet die Spulen auch als **Stränge**. In ihnen werden drei gleich große Wechselspannungen induziert, die um jeweils 360°/3 = 120° gegeneinander phasenverschoben sind. Sie lassen sich daher durch

$$u_1 = \hat{u} \sin \omega t, \tag{14.1}$$

$$u_2 = \hat{u}\ \sin(\omega t - 120°), \tag{14.2}$$

$$u_3 = \hat{u}\ \sin(\omega t - 240°) \tag{14.3}$$

wiedergeben, wobei $\hat{u}$ der Scheitelwert der induzierten Spannung ist. Die Anordnung zur Erzeugung dieser Spannungen stellt einen **Drehstromgenerator** dar.

Soll der Generator mit einem Verbraucher verbunden werden, so könnte man für jeden Strang zwei Leitungen vorsehen. Man bekäme auf diese Weise sechs zum Verbraucher führende Leitungen. Es zeigt sich jedoch, dass die drei Stränge untereinander in geeigneter Weise miteinander verbunden werden können, so dass die Anzahl der zum Verbraucher führenden Leitungen kleiner als sechs gehalten werden kann. Die dafür wichtigsten Schaltungsarten sind die **Sternschaltung** und die **Dreieckschaltung**.

14.1.1 Sternschaltung des Generators

Bei der Sternschaltung des Generators werden die *Enden* der drei Wicklungen nach Bild 14.2 miteinander verbunden. Es entsteht ein Knotenpunkt (N), an den ein Leiter (N) angeschlossen werden kann. Er heißt **Neutralleiter**.

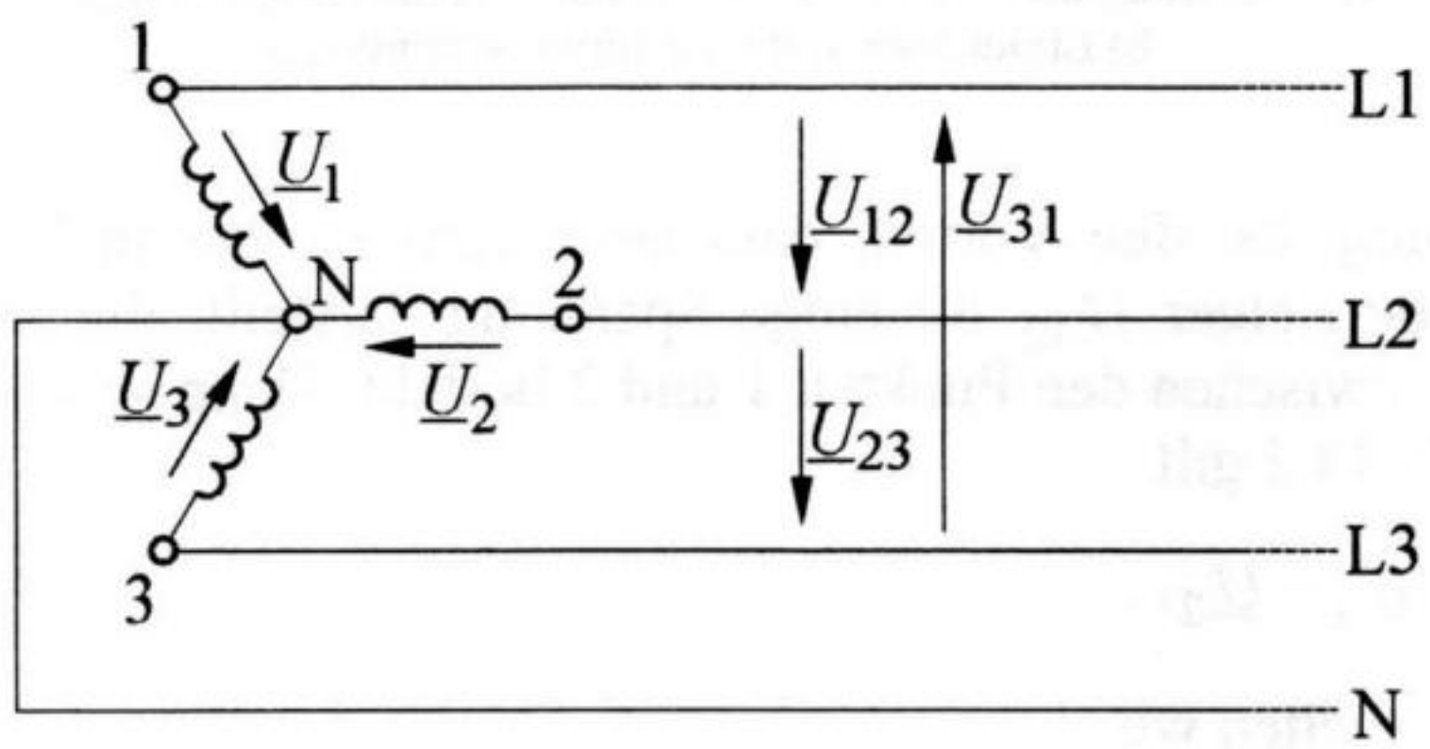


Bild 14.2 Sternschaltung eines Drehstromgenerators

An die drei anderen Wicklungsanschlüsse (1, 2 und 3) werden Leitungen (L1, L2 und L3) angeschlossenen, die man als **Außenleiter** bezeichnet. Die in Bild 14.2 dargestellte Anordnung stellt ein **Vierleitersystem** dar. Man kann jedoch auch auf die Herausführung des Neutralleiters (N) verzichten. In diesem Fall spricht man von einem **Dreileitersystem**.

Stellt man die in den drei Wicklungssträngen induzierten, in den Gln. (14.1) bis (14.3) angegebenen Wechselspannungen in Abhängigkeit von ωt grafisch dar, so erhält man das Liniendiagramm nach Bild 14.3b. Man bezeichnet diese Spannun-

gen auch als **Strangspannungen**. Die zugehörigen Zeiger $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_3$ ergeben sich aus Bild 14.3a. Die Zeiger sind hier so dargestellt, dass ihre Pfeile nach innen zeigen. Dadurch können die in Bild 14.2 enthaltenen Punkte 1, 2, 3 und N in das Zeigerdiagramm nach Bild 14.3a übertragen werden.

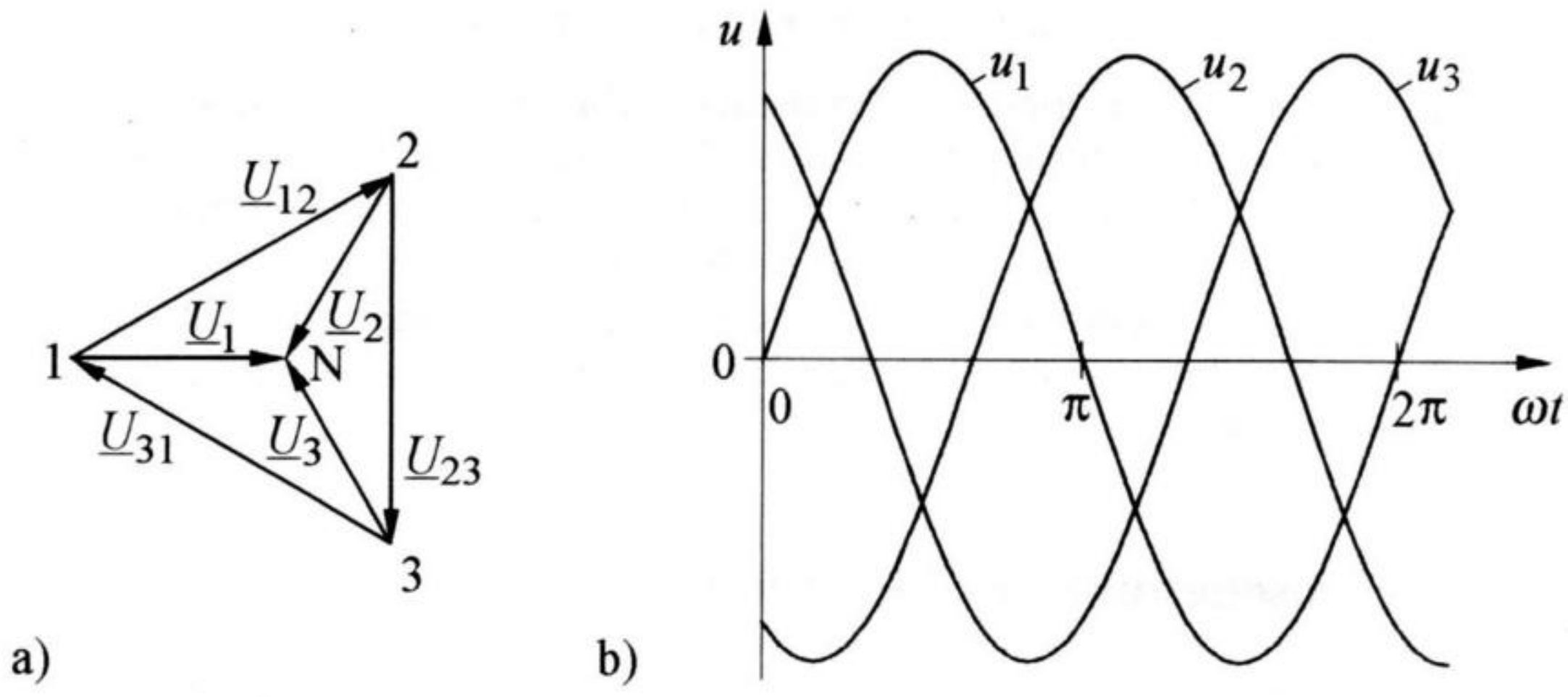


Bild 14.3 Darstellung der Spannungen eines Vierleiter-Drehstromsystems.
a) Zeigerdiagramm der Strang- und der Außenleiterspannungen,
b) Liniendiagramm der Strangspannungen

Diese Darstellung hat den Vorteil, dass beispielsweise der in Bild 14.3a von 1 nach 2 zeigende Zeiger $\underline{U}_{12}$ diejenige Spannung darstellt, die in der Schaltung nach Bild 14.2 zwischen den Punkten 1 und 2 besteht. Denn sowohl in Bild 14.3a als auch in Bild 14.2 gilt

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2 .$$

Entsprechend erhalten wir

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3 ,$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1 .$$

Die Spannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ und $\underline{U}_{31}$ heißen **Außenleiterspannungen**. Der Betrag (Effektivwert) der an jeder Wicklung liegenden Spannung

$$U_1 = U_2 = U_3 = U_{\mathrm{St}} \tag{14.4}$$

wird als **Sternspannung** bezeichnet und der Betrag (Effektivwert) der zwischen zwei Außenleitern liegenden Spannung

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = U \tag{14.5}$$

als **Außenleiterspannung**. Aus der Geometrie des Zeigerdiagramms nach Bild 14.3a ergibt sich, dass unter Berücksichtigung der Gln. (14.4) und 14.5)

$$U = 2\, U_{\mathrm{St}} \cos 30°$$

ist. Mit $2 \cdot \cos 30° = \sqrt{3}$ wird daraus

$$\boxed{U = \sqrt{3} \cdot U_{\mathrm{St}}\,.} \tag{14.6}$$

Bei einem in Stern geschalteten Drehstromgenerator ist also die Außenleiterspannung um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die Sternspannung.

14.1.2 Dreieckschaltung des Generators

Bei der Dreieckschaltung wird jeweils das Ende eines Wicklungsstranges mit dem Anfang des nächsten Wicklungsstranges verbunden. Auf diese Weise entsteht die Schaltung nach Bild 14.4.

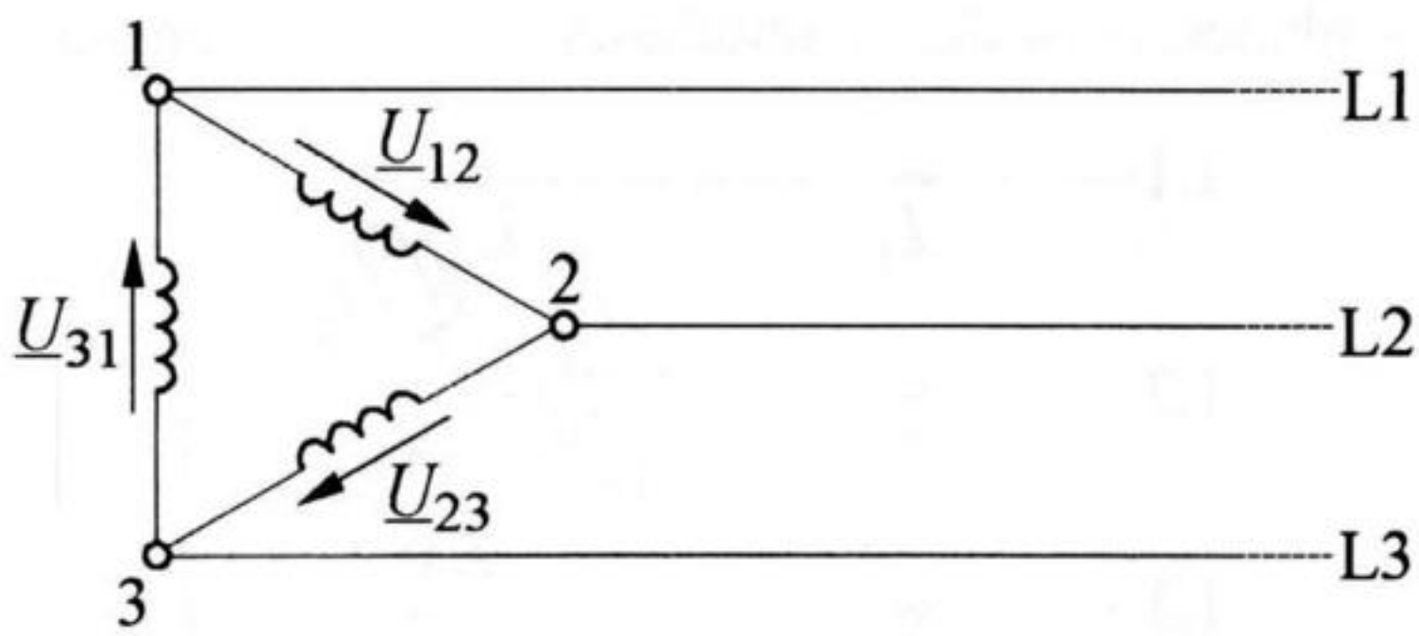


Bild 14.4 Dreieckschaltung eines Drehstromgenerators

Die entstehenden Punkte (1, 2 und 3) werden über drei Leitungen (L1, L2 und L3) herausgeführt. Sie bilden die **Außenleiter**. Bei dieser Schaltung gibt es keinen Neutralleiter. Die drei in den Wicklungssträngen induzierten Spannungen, die wir mit $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ und $\underline{U}_{31}$ bezeichnen wollen, sind dem Betrage nach gleich groß und um 120° gegeneinander phasenverschoben. Daher ist

$$\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0. \tag{14.7}$$

Das bedeutet, dass in der in Bild 14.4 durch die Wicklungen gebildeten Masche durch diese Spannungen kein Strom verursacht wird. Das gilt selbstverständlich nur unter der Voraussetzung, dass der Generator nicht durch einen Verbraucher belastet wird.

Bei der Dreieckschaltung sind die Beträge der Außenleiterspannungen gleich den Beträgen der Strangspannungen. Es gilt somit, wenn wir die Strangspannung mit U_{St} bezeichnen und die Außenleiterspannung mit U,

$$\boxed{U = U_{St}.} \tag{14.8}$$

14.2 Verbraucherschaltungen im Drehstromsystem

Ein Drehstromverbraucher besteht grundsätzlich aus drei einzelnen Widerständen (Verbrauchern), die man auch als **Stränge** bezeichnet. Sie sind in der Regel entweder in Stern oder in Dreieck geschaltet. Bei der Sternschaltung ist zwischen Schaltungen mit angeschlossenem Neutralleiter und solchen ohne angeschlossenen Neutralleiter zu unterscheiden.

14.2.1 Sternschaltung mit angeschlossenem Neutralleiter

Wir wollen zunächst eine Sternschaltung nach Bild 14.5 betrachten. L1, L2 und L3 sind die Außenleiter, N ist der Neutralleiter eines Vierleiter-Drehstromnetzes.

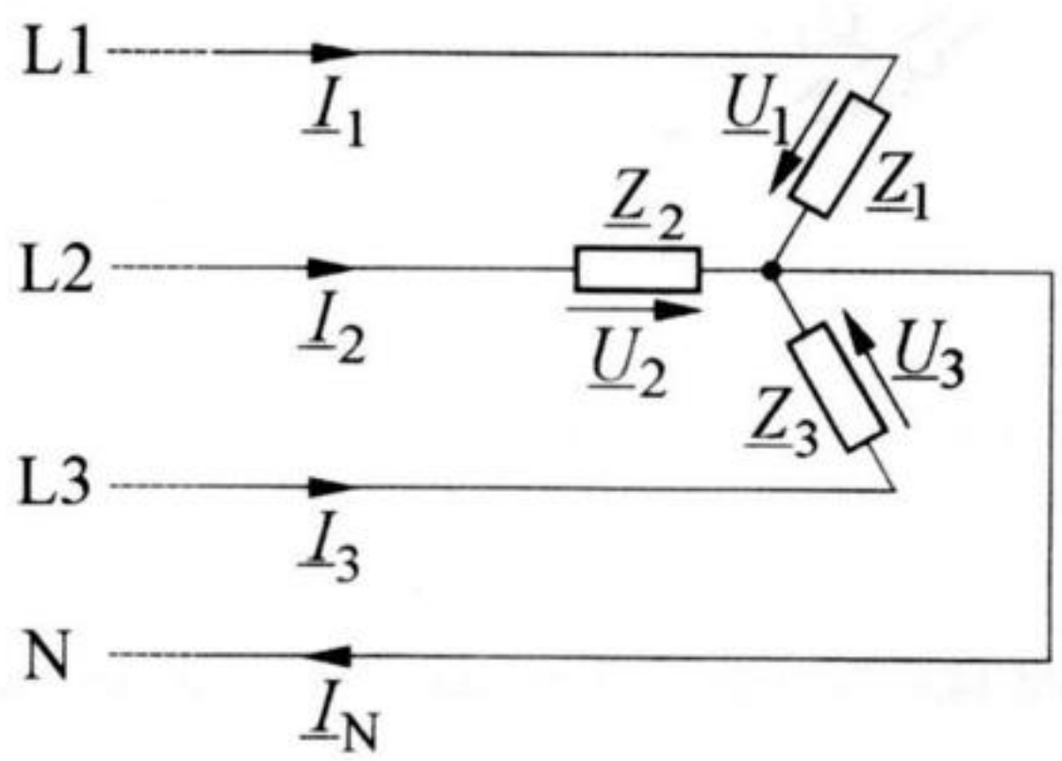


Bild 14.5 Sternschaltung eines Drehstromverbrauchers (mit angeschlossenem Neutralleiter)

An jedem der drei Stränge mit den Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$, die verschiedene Werte haben können, liegt nach Gl. (14.6) eine Spannung mit dem Betrag

$$U_{St} = \frac{U}{\sqrt{3}}. \tag{14.9}$$

Hierbei stellen U die Außenleiterspannung und U_{St} die Sternspannung dar. Damit können wir die an den Strängen liegenden, um jeweils 120° gegeneinander phasenverschobenen Spannungen (Strangspannungen) durch

$$\underline{U}_1 = U_{\mathrm{St}}\,, \tag{14.10}$$

$$\underline{U}_2 = U_{\mathrm{St}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,120^\circ}\,, \tag{14.11}$$

$$\underline{U}_3 = U_{\mathrm{St}} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,240^\circ} \tag{14.12}$$

darstellen. Für die Außenleiterströme erhalten wir

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}, \tag{14.13}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}, \tag{14.14}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}, \tag{14.15}$$

Der im Neutralleiter fließende Strom lässt sich aus Bild 14.5 durch Anwendung der Knotenregel ermitteln. Es gilt

$$\underline{I}_{\mathrm{N}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3\,. \tag{14.16}$$

Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge ist in Bild 14.6a das Zeigerdiagramm der Strangspannungen $\underline{U}_1$ bis $\underline{U}_3$ und der Außenleiterströme $\underline{I}_1$ bis $\underline{I}_3$ beispielhaft dargestellt. φ_1 bis φ_3 sind die angenommenen Phasenverschiebungswinkel der drei vorhandenen Stränge. Bild 14.6b zeigt die geometrische (komplexe) Addition der Außenleiterströme zur Ermittlung des Neutralleiterstromes $\underline{I}_{\mathrm{N}}$.

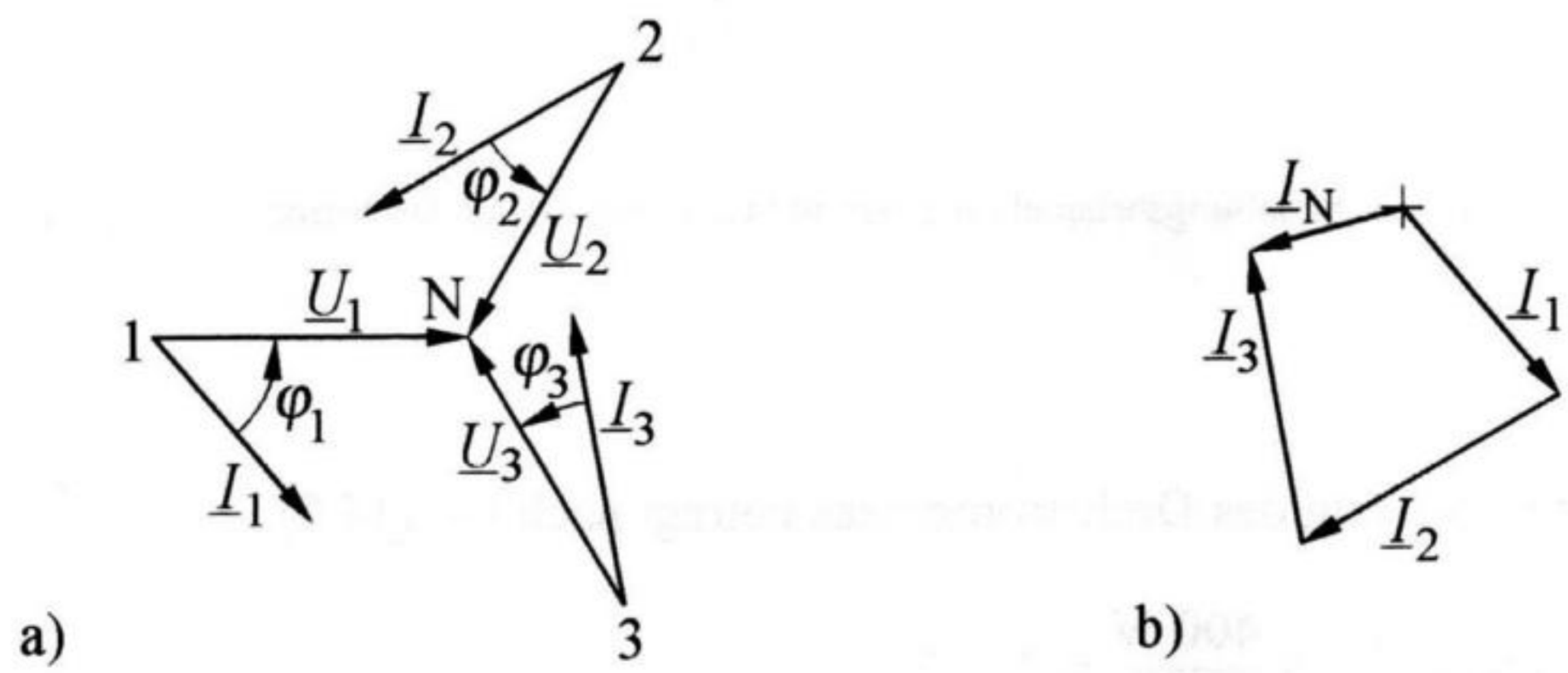


Bild 14.6 a) Zeigerdiagramm der Strangspannungen und der Außenleiterströme eines in Stern geschalteten Drehstromverbrauchers, b) Zeigerdiagramm aller auftretenden Ströme

Abschließend wollen wir als wichtigen Sonderfall einen Drehstromverbraucher betrachten, bei dem die Impedanzen der drei Stränge gleich sind, in Bild 14.5 also

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 \tag{14.17}$$

ist. Man spricht dann von **symmetrischer Belastung**. In diesem Fall sind die drei Außenleiterströme $\underline{I}_1$ bis $\underline{I}_3$ aus Symmetriegründen dem Betrage nach gleich groß und um jeweils 120° gegeneinander phasenverschoben. Die geometrische Summe dieser Ströme ist dann gleich Null, so dass nach Gl. (14.16) auch der Neutralleiterstrom $\underline{I}_N = 0$ ist. Bei einer solchen Belastung kann der zum Verbraucher führende Neutralleiter des Drehstromnetzes entfallen, ohne dass sich die in der Schaltung auftretenden Spannungen und Ströme verändern. Das hat zur Folge, dass bei symmetrischen, in Stern geschalteten Drehstromverbrauchern der Neutralleiter im Allgemeinen *nicht* angeschlossen wird.

Aufgabe 14.1

An einem Vierleiter-Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400$ V sind nach Bild 14.7 die Widerstände $R_1 = 300\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$, $R_3 = 150\ \Omega$, $X_L = 250\ \Omega$ und $X_C = -350\ \Omega$ angeschlossen.

Es sind die Ströme I_1, I_2, I_3 und I_N zu bestimmen.

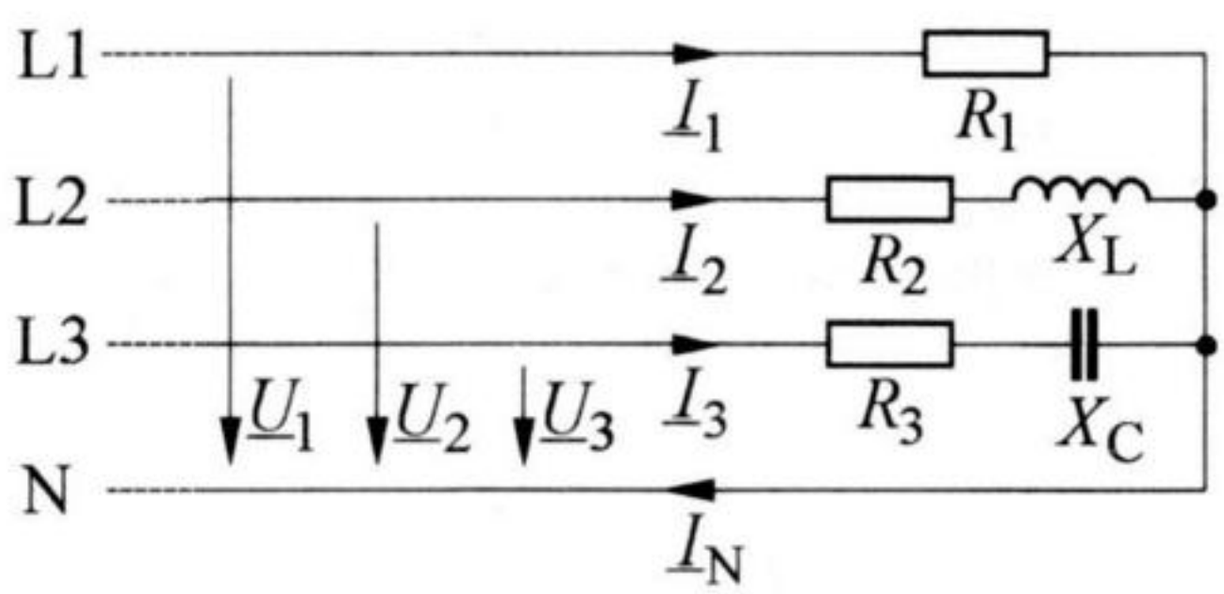


Bild 14.7 Schaltungsbeispiel für einen in Stern geschalteten Drehstromverbraucher

Lösung

Die Sternspannung des Drehstromnetzes beträgt nach Gl. (14.9)

$$U_{St} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{400\ \text{V}}{\sqrt{3}} = 231\ \text{V}.$$

Die an den Strängen liegenden Spannungen können wir nach den Gln. (14.10) bis (14.12) mit $U_{St} = 231$ V daher durch

$$\underline{U}_1 = 231\,\text{V},$$

$$\underline{U}_2 = 231\ \text{V}\cdot \text{e}^{-\text{j}120°},$$

$$\underline{U}_3 = 231\ \text{V}\cdot \text{e}^{-\text{j}240°}$$

darstellen. Bei den Impedanzen

$$\underline{Z}_1 = R_1 = 300\ \Omega,$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 + \text{j}X_\text{L} = (200 + \text{j}250)\ \Omega,$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + \text{j}X_\text{C} = (150 - \text{j}350)\ \Omega$$

ergeben sich die Außenleiterströme

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{231\ \text{V}}{300\ \Omega} = 770\ \text{mA},$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{231\ \text{V}\cdot \text{e}^{-\text{j}120°}}{(200 + \text{j}250)\ \Omega} = 722\ \text{mA}\cdot \text{e}^{-\text{j}171{,}3°},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{231\ \text{V}\cdot \text{e}^{-\text{j}240°}}{(150 - \text{j}350)\ \Omega} = 606\ \text{mA}\cdot \text{e}^{-\text{j}173{,}2°}.$$

Den im Neutralleiter fließenden Strom erhalten wir durch Anwendung von Gl. (14.16) als

$$\underline{I}_\text{N} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \left(770 + 722\cdot \text{e}^{-\text{j}171{,}3°} + 606\cdot \text{e}^{-\text{j}173{,}2°}\right)\ \text{mA},$$

$$\underline{I}_\text{N} = 575\ \text{mA}\cdot \text{e}^{-\text{j}162°}.$$

Die Ströme haben somit die Beträge

$$I_1 = \underline{770\ \text{mA}},\quad I_2 = \underline{772\ \text{mA}},\quad I_3 = \underline{606\ \text{mA}},\quad I_\text{N} = \underline{575\ \text{mA}}.$$

14.2.2 Sternschaltung ohne angeschlossenen Neutralleiter

Wir wollen jetzt eine Sternschaltung nach Bild 14.8 betrachten, bei der der Neutralleiter N des Drehstromnetzes nicht mit dem Verbraucherknoten N' verbunden ist.

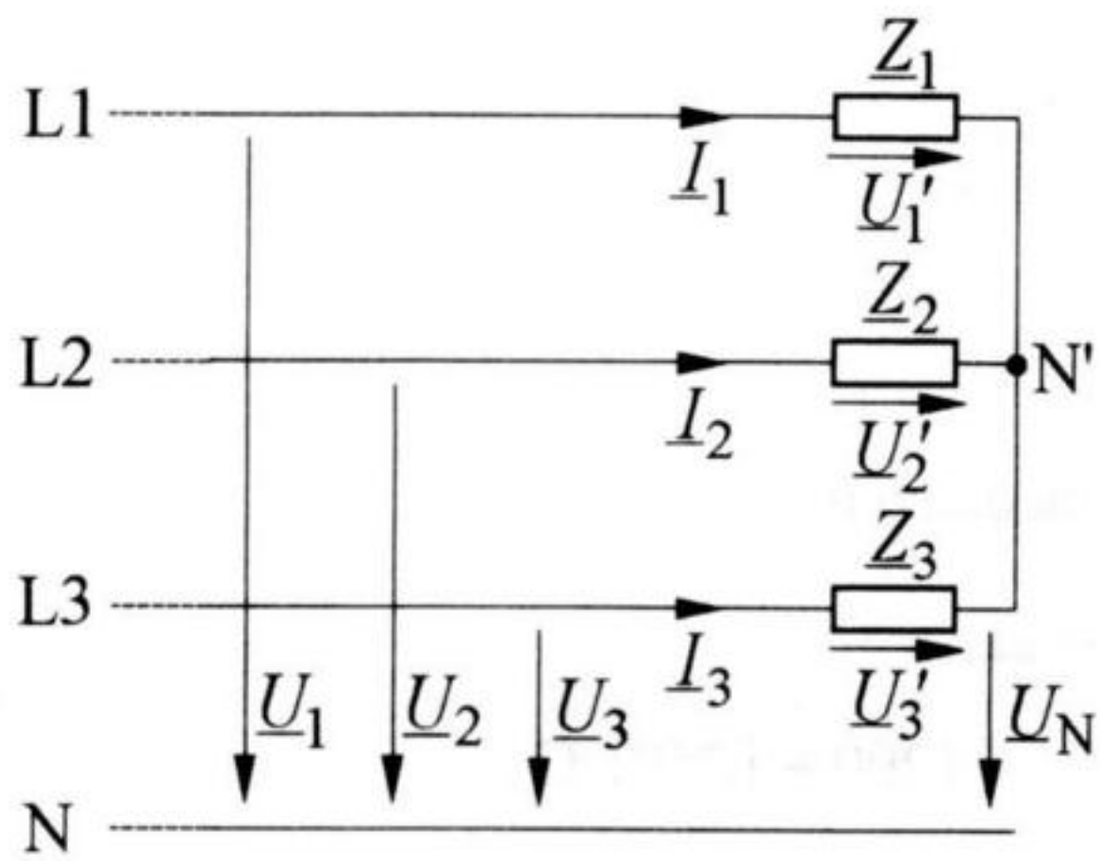


Bild 14.8 Sternschaltung eines Drehstromverbrauchers (ohne angeschlossenen Neutralleiter)

Zunächst ersetzen wir die drei vorhandenen Impedanzen durch die Admittanzen

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}, \qquad \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}, \qquad \underline{Y}_3 = \frac{1}{\underline{Z}_3}.$$

Haben $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$ und $\underline{Z}_3$ verschiedene Werte, so besteht zwischen dem Verbraucherknotenpunkt N' und dem Neutralleiter N eine Spannung, die wir als **Sternpunktspannung** ($\underline{U}_N$) bezeichnen wollen. Damit können wir die in Bild 14.8 an den drei Strängen liegenden Spannungen unter Anwendung der Maschenregel darstellen durch

$$\underline{U}'_1 = \underline{U}_1 - \underline{U}_N,$$

$$\underline{U}'_2 = \underline{U}_2 - \underline{U}_N,$$

$$\underline{U}'_3 = \underline{U}_3 - \underline{U}_N.$$

Berücksichtigen wir diese Beziehungen, so gilt für die auftretenden Ströme

$$\underline{I}_1 = \underline{U}'_1 \underline{Y}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_N)\,\underline{Y}_1, \tag{14.18}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{U}'_2 \underline{Y}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_N)\,\underline{Y}_2, \tag{14.19}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{U}'_3 \underline{Y}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_N)\,\underline{Y}_3. \tag{14.20}$$

Da ihre Summe aufgrund der Knotenregel Null sein muss, wird

$$(\underline{U}_1 - \underline{U}_N)\underline{Y}_1 + (\underline{U}_2 - \underline{U}_N)\underline{Y}_2 + (\underline{U}_3 - \underline{U}_N)\underline{Y}_3 = 0.$$

Lösen wir diese Gleichung nach $\underline{U}_N$ auf, so ergibt sich

$$\boxed{\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}.} \tag{14.21}$$

Hierbei können die drei Sternspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_3$ durch die in den Gln. (14.10) bis (14.12) angegebenen Ausdrücke dargestellt werden. Nach Bestimmung von $\underline{U}_N$ lassen sich die Ströme mit Hilfe der Gln. (14.18) bis (14.20) berechnen.

Bei **symmetrischer Belastung** ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$) wird $\underline{U}_N$ gleich Null. In diesem Fall besteht also zwischen dem Verbraucherknotenpunkt N' und dem Neutralleiter N keine Spannung. Es ist dann ohne Bedeutung, ob N' mit N verbunden ist oder nicht. Jeder Verbraucherstrang liegt an der Sternspannung $U_{St} = U/\sqrt{3}$, wobei U die Außenleiterspannung ist. Bezeichnen wir den Scheinwiderstand eines Verbraucherstranges als Z, so gilt für den bei symmetrischer Belastung in jedem Außenleiter fließenden Strom

$$\boxed{I = \frac{U_{St}}{Z} = \frac{U}{\sqrt{3}\,Z}.} \tag{14.22}$$

Aufgabe 14.2

Ein Drehstromverbraucher, der aus drei gleichen, in Stern geschalteten Strängen mit je einer Impedanz von $\underline{Z} = (60 + \mathrm{j}80)\ \Omega$ besteht, liegt an einem Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400$ V.

Welcher Strom I fließt in jedem Außenleiter?

Lösung

Die Sternschaltung stellt einen symmetrischen Drehstromverbraucher dar. Jeder Strang hat den Scheinwiderstand

$$Z = \sqrt{60^2 + 80^2}\ \Omega = 100\ \Omega$$

und liegt an der Sternspannung

$$U_{St} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{400\ \text{V}}{\sqrt{3}} = 231\ \text{V}.$$

Folglich fließt in jedem Außenleiter der Strom

$$I = \frac{U_{St}}{Z} = \frac{231\ \text{V}}{100\ \Omega} = \underline{2{,}31\ \text{A}}.$$

Aufgabe 14.3

Der nach Bild 14.9 in Stern geschaltete, aus den Widerständen $R_1 = 250\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$ und $R_3 = 500\ \Omega$ bestehende Drehstromverbraucher liegt an einem Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400$ V. Der Neutralleiter des Drehstromnetzes ist nicht mit dem Verbraucher verbunden.

Es sind die Außenleiterströme I_1, I_2 und I_3 zu bestimmen.

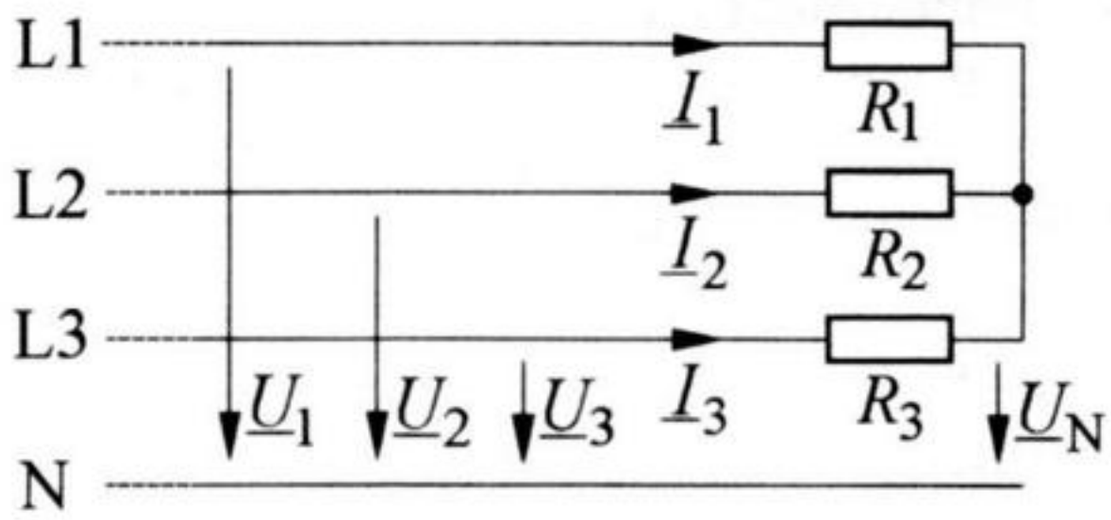


Bild 14.9 Beispiel eines unsymmetrischen Drehstromverbrauchers in Sternschaltung (ohne angeschlossenen Neutralleiter)

Lösung

Die Admittanzen der drei Stränge betragen

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{250\ \Omega} = 4\ \text{mS},$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{200\ \Omega} = 5\ \text{mS},$$

$$\underline{Y}_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{500\ \Omega} = 2\ \text{mS}.$$

Die Sternspannung des Drehstromnetzes hat den Wert

$$U_{\text{St}} = \frac{U}{\sqrt{3}} = \frac{400\ \text{V}}{\sqrt{3}} = 231\ \text{V}.$$

Somit können die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ und $\underline{U}_3$ nach den Gln. (14.10) bis (14.12) durch

$$\underline{U}_1 = 231\ \text{V},$$

$$\underline{U}_2 = 231\ \text{V} \cdot \text{e}^{-\text{j}120^\circ},$$

$$\underline{U}_3 = 231\ \text{V} \cdot \text{e}^{-\text{j}240^\circ}$$

dargestellt werden. Damit ergibt sich für die Sternpunktspannung nach Gl. (14.21)

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{U}_1 \underline{Y}_1 + \underline{U}_2 \underline{Y}_2 + \underline{U}_3 \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3},$$

$$\underline{U}_N = \frac{231\,\text{V} \cdot 4\,\text{mS} + 231\,\text{V} \cdot e^{-j120°} \cdot 5\,\text{mS} + 231\,\text{V} \cdot e^{-j240°} \cdot 2\,\text{mS}}{(4+5+2)\ \text{mS}},$$

$$\underline{U}_N = 56\ \text{V} \cdot e^{-j79°}.$$

Für die Außenleiterströme erhalten wir nach den Gln. (14.18) bis (14.20)

$$\underline{I}_1 = (\underline{U}_1 - \underline{U}_N) = \left(231 - 56 \cdot e^{-j79°}\right)\ \text{V} \cdot 4 \cdot 10^{-3}\ \text{S} = 0{,}91\ \text{A} \cdot e^{j14°},$$

$$\underline{I}_2 = (\underline{U}_2 - \underline{U}_N) = \left(231 \cdot e^{-j120°} - 56 \cdot e^{-j79°}\right)\text{V} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\text{S} = 0{,}96\,\text{A} \cdot e^{-j131°}$$

$$\underline{I}_3 = (\underline{U}_3 - \underline{U}_N) = \left(231 \cdot e^{-j240°} - 56 \cdot e^{-j79°}\right)\text{V} \cdot 2 \cdot 10^{-3}\text{S} = 0{,}57\,\text{A} \cdot e^{j116°}.$$

Die gesuchten Ströme haben somit die Beträge (Effektivwerte)

$$I_1 = \underline{0{,}91\ \text{A}}, \qquad I_2 = \underline{0{,}96\ \text{A}}, \qquad I_3 = \underline{0{,}57\ \text{A}}.$$

14.2.3 Dreieckschaltung

Wir betrachten eine Dreieckschaltung nach Bild 14.10.

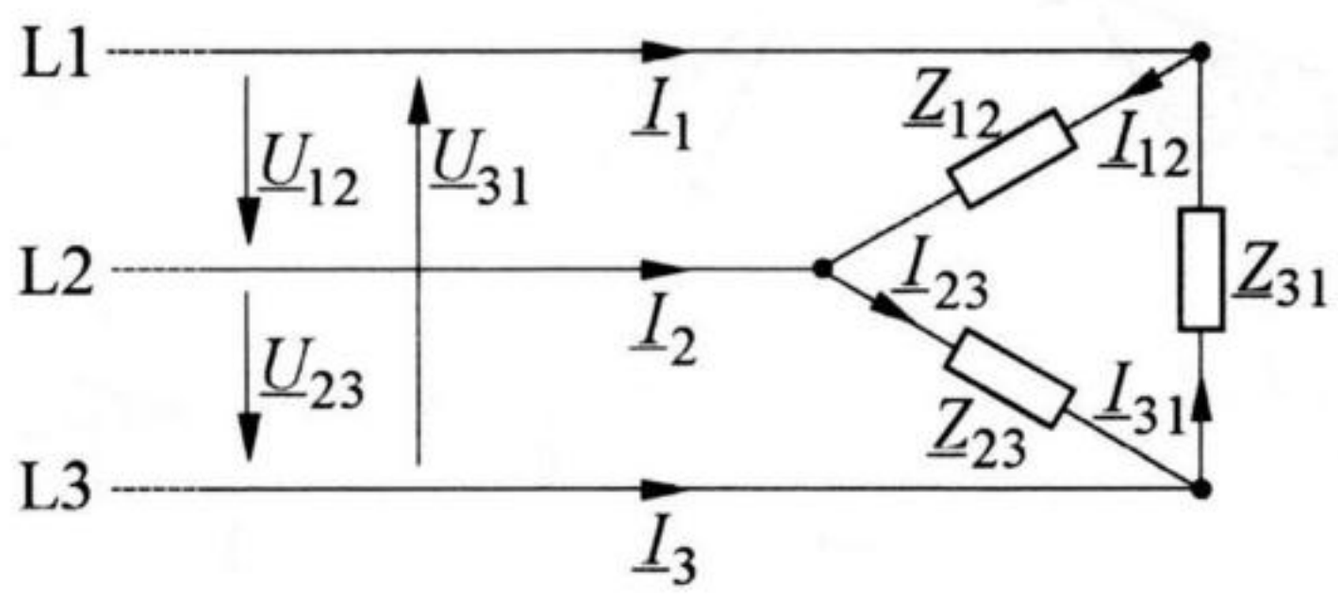


Bild 14.10 Drehstromverbraucher in Dreieckschaltung

Die drei Außenleiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$ und $\underline{U}_{31}$ haben den gleichen Betrag (U) und sind um 120° gegeneinander phasenverschoben. Wir können sie daher durch

$$\underline{U}_{12} = U\,, \tag{14.23}$$

$$\underline{U}_{23} = U \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,120^\circ}\,, \tag{14.24}$$

$$\underline{U}_{31} = U \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,240^\circ} \tag{14.25}$$

darstellen. Damit erhalten wir für die Strangströme

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}\,, \tag{14.26}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}\,, \tag{14.27}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}\,. \tag{14.28}$$

Hieraus ergeben sich die Außenleiterströme durch Anwendung der Knotenregel als

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}\,, \tag{14.29}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}\,, \tag{14.30}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}\,. \tag{14.31}$$

Zur Veranschaulichung der Zusammenhänge ist in Bild 14.11a das Zeigerdiagramm der drei Außenleiterspannungen und der drei Strangströme beispielhaft angegeben.

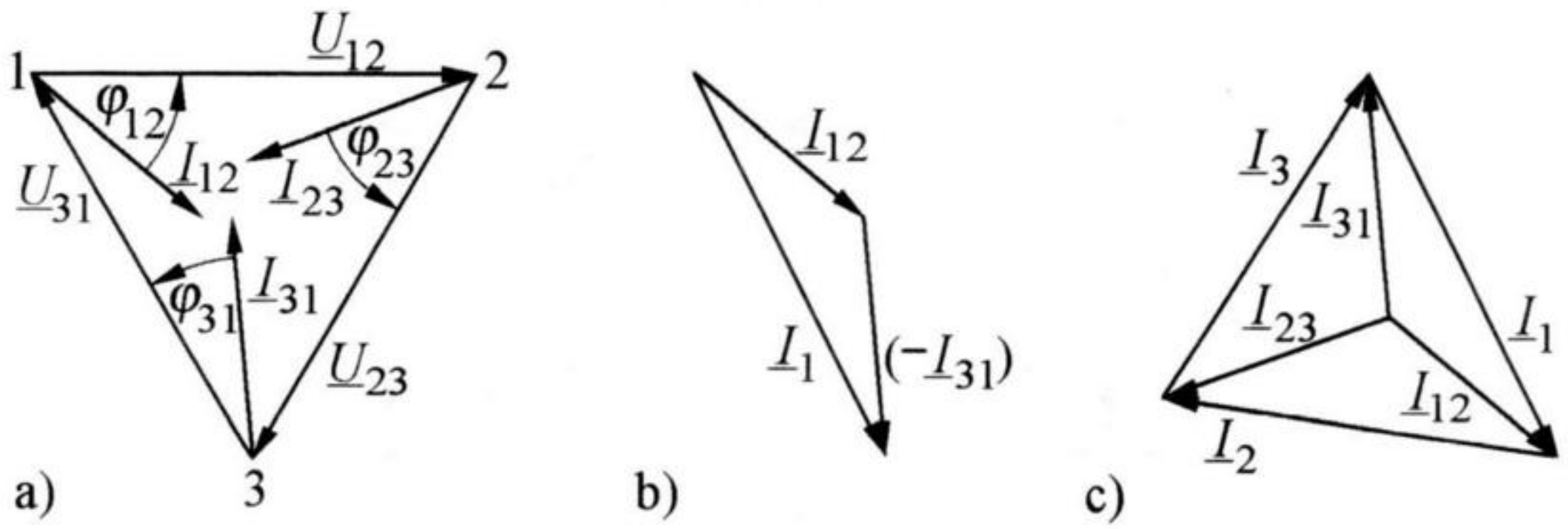


Bild 14.11 Zur Bestimmung der Außenleiterströme bei einer unsymmetrischen Dreieckschaltung.
a) Zeigerdiagramm der Außenleiterspannungen und der Strangströme,
b) und c) Zeigerdiagramme zur Ermittlung der Außenleiterströme aus den Strangströmen

In der Darstellung sind φ_{12}, φ_{23} und φ_{31} die (angenommenen) Phasenverschiebungswinkel der betreffenden Stränge. Bild 14.11b zeigt die nach Gl. (14.29) zur Bestimmung des Außenleiterstromes $\underline{I}_1$ durchzuführende Subtraktion der Ströme $\underline{I}_{12}$ und $\underline{I}_{31}$. Man kann diese Subtraktion jedoch auch so vornehmen, dass man nach Bild 14.11c zunächst die Strangströme $\underline{I}_{12}$, $\underline{I}_{23}$ und $\underline{I}_{31}$ sternförmig wiedergibt. Verbindet man danach die Zeigerspitzen, so erhält man die Außenleiterströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$ und $\underline{I}_3$. Dieses Verfahren hat den Vorteil, dass man in *einem* Zeigerdiagramm alle sechs auftretenden Ströme gemeinsam darstellen kann.

Bei einer **symmetrischen Dreieckschaltung** ($\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31}$) sind die Strangströme dem Betrage nach gleich groß und um jeweils 120° gegeneinander phasenverschoben. In diesem Fall stellt das Zeigerdiagramm nach Bild 14.11c ein gleichseitiges Dreieck dar. Aus der Geometrie dieses Dreiecks ergibt sich, dass der Betrag des Außenleiterstromes um den Faktor $\sqrt{3}$ größer ist als der Betrag des Strangstromes. Es gilt also mit $I_1 = I_2 = I_3 = I$ und $I_{12} = I_{23} = I_{31} = I_{\mathrm{St}}$

$$\boxed{I = \sqrt{3}\, I_{\mathrm{St}}\,.} \tag{14.32}$$

Der Betrag des Strangstromes (I_{St}) wir bei symmetrischer Belastung auch als **Dreieckstrom** bezeichnet.

Aufgabe 14.4

Ein symmetrischer Drehstromverbraucher, der aus drei gleichen, in Dreieck geschalteten Strängen mit je einer Impedanz von $\underline{Z} = (160 + \mathrm{j}\,120)\ \Omega$ besteht, liegt an einem Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400$ V.

Welcher Strom I fließt in jedem Außenleiter?

Lösung

In jedem Strang mit dem Scheinwiderstand

$$Z = \sqrt{160^2 + 120^2}\ \Omega = 200\ \Omega$$

fließt bei der anliegenden Spannung $U = 400$ V der Strom (Dreieckstrom)

$$I_{\mathrm{St}} = \frac{U}{Z} = \frac{400\ \mathrm{V}}{200\ \Omega} = 2{,}0\ \mathrm{A}\,.$$

Damit beträgt der in jedem Außenleiter fließende Strom nach Gl. (14.32)

$$I = \sqrt{3}\, I_{\mathrm{St}} = \sqrt{3} \cdot 2{,}0\ \mathrm{A} = \underline{3{,}46\ \mathrm{A}}\,.$$

Aufgabe 14.5

Der nach Bild 14.12 in Dreieck geschaltete unsymmetrische Drehstromverbraucher besteht aus den Widerständen $R_1 = 150\ \Omega$, $X_L = 50\ \Omega$, $R_2 = 170\ \Omega$, $R_3 = 160\ \Omega$ und $X_C = -70\ \Omega$. Die Schaltung ist mit einem Drehstromnetz verbunden, dessen Außenleiterspannung $U = 400$ V beträgt.

Es sind die Außenleiterströme I_1, I_2 und I_3 zu bestimmen.

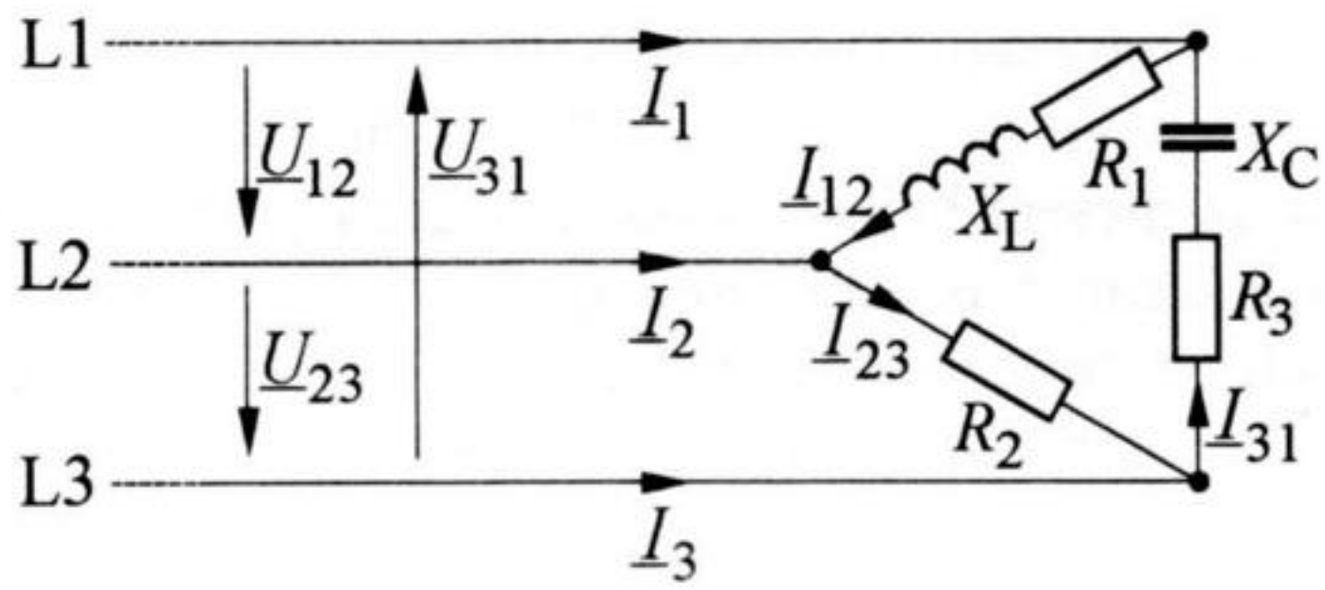


Bild 14.12 Belastung eines Drehstromnetzes durch eine unsymmetrische Dreieckschaltung

Lösung

Wir stellen zunächst die drei Außenleiterspannungen nach den Gln. (14.23) bis (14.25) durch

$$\underline{U}_{12} = 400\ \text{V},$$

$$\underline{U}_{23} = 400\ \text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ},$$

$$\underline{U}_{31} = 400\ \text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}240^\circ}$$

dar. Dann erhalten wir für die Strangströme nach den Gln. (14.26) bis (14.28)

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{R_1 + \mathrm{j}X_L} = \frac{400\ \text{V}}{(150 + \mathrm{j}50)\ \Omega} = 2{,}53\ \text{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}18{,}4^\circ},$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{R_2} = \frac{400\ \text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ}}{170\ \Omega} = 2{,}35\ \text{A} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ},$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{R_3 + \mathrm{j}X_C} = \frac{400\ \text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}240^\circ}}{(160 - \mathrm{j}70)\ \Omega} = 2{,}29\ \text{A} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}143{,}6^\circ}.$$

Durch Anwendung der Gln. (14.29) bis (14.31) finden wir für die Außenleiterströme

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 2{,}53\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}18{,}4^\circ} - 2{,}29\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}143{,}6^\circ} = 4{,}76\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}27{,}0^\circ},$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 2{,}35\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ} - 2{,}53\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}18{,}4^\circ} = 3{,}79\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}160{,}9^\circ},$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 2{,}29\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}143{,}6^\circ} - 2{,}35\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}120^\circ} = 3{,}46\,\mathrm{A}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}101{,}0^\circ}.$$

Deren Beträge (Effektivwerte) sind somit

$$I_1 = 4{,}76\ \mathrm{A}, \qquad I_2 = 3{,}79\ \mathrm{A}, \qquad I_3 = 3{,}46\ \mathrm{A}.$$

14.3 Die Leistung im Drehstromsystem

Ein Drehstromgenerator (G) sei nach Bild 14.13 mit einem in Stern geschalteten Drehstromverbraucher (V) verbunden. Die vom Generator an den Verbraucher gelieferte Leistung (Augenblicksleistung) ist gleich der Summe der Augenblicksleistungen der einzelnen Stränge. Dabei können wir zwischen symmetrischer und unsymmetrischer Belastung unterscheiden.

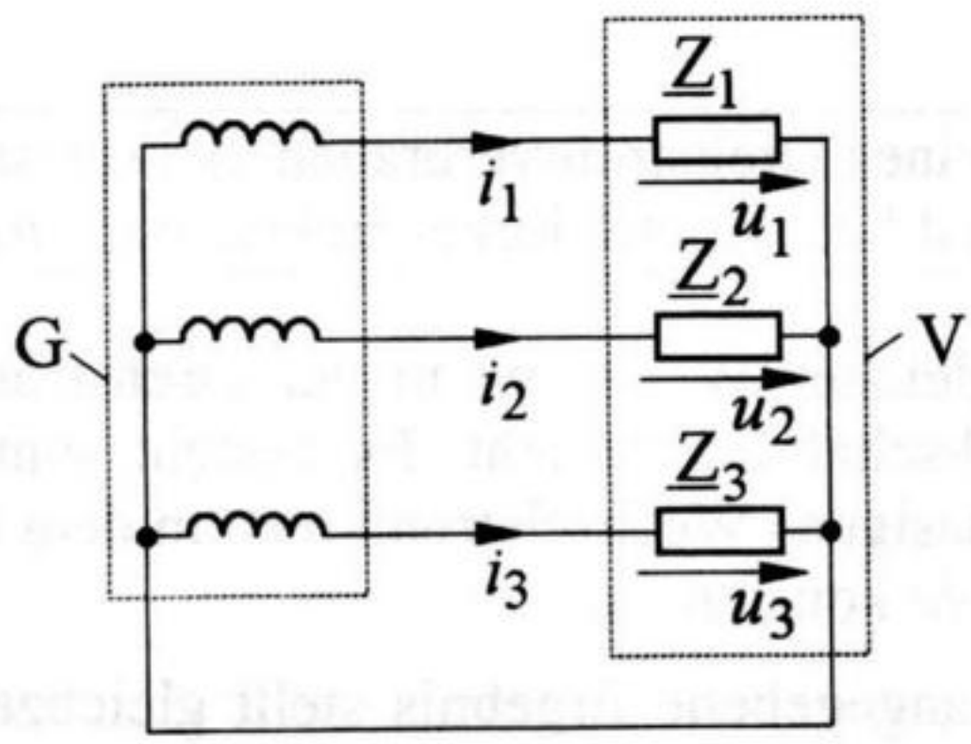


Bild 14.13 Zur Bestimmung der Leistung im Drehstromsystem

14.3.1 Leistung bei symmetrischer Belastung

Bei symmetrischer Belastung ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$) lassen sich in Bild 14.13 die Augenblickswerte der Leistungen der drei Stränge nach den Gln. (8.1) bis (8.3) darstellen durch

$$p_1 = u_1\, i_1 = \hat{u}_{\mathrm{St}} \sin(\omega t + \varphi) \cdot \hat{i} \sin \omega t, \tag{14.33}$$

$$p_2 = u_2\, i_2 = \hat{u}_{\mathrm{St}} \sin(\omega t - 120^\circ + \varphi) \cdot \hat{i} \sin(\omega t - 120^\circ), \tag{14.34}$$

$$p_3 = u_3\, i_3 = \hat{u}_{\mathrm{St}} \sin(\omega t - 240^\circ + \varphi) \cdot \hat{i} \sin(\omega t - 240^\circ). \tag{14.35}$$

Hierbei sind $\hat{u}_{\mathrm{St}}$ der Scheitelwert der Sternspannung (Strangspannung) und $\hat{i}$ der Scheitelwert des Stromes (Außenleiterstromes). φ ist der Phasenverschiebungswinkel, um den die Strangspannung gegenüber dem zugehörigen Strangstrom (Außenleiterstrom) verschoben ist. Durch Anwendung der in Gl. (8.4) angegebenen trigonometrischen Beziehung wird aus den Gln. (14.33) bis (14.35)

$$p_1 = \frac{1}{2}\,\hat{u}_{\mathrm{St}}\,\hat{i}\,\left[\cos\varphi - \cos\left(2\omega t + \varphi\right)\right], \tag{14.36}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\,\hat{u}_{\mathrm{St}}\,\hat{i}\,\left[\cos\varphi - \cos\left(2\omega t - 240^\circ + \varphi\right)\right], \tag{14.37}$$

$$p_3 = \frac{1}{2}\,\hat{u}_{\mathrm{St}}\,\hat{i}\,\left[\cos\varphi - \cos\left(2\omega t - 480^\circ + \varphi\right)\right]. \tag{14.38}$$

Werden diese drei Augenblicksleistungen addiert, so heben sich die *zeitabhängigen* Glieder gegenseitig auf, und es ergibt sich

$$p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3}{2}\,\hat{u}_{\mathrm{St}}\,\hat{i}\,\cos\varphi\,. \tag{14.39}$$

Dieses Ergebnis besagt:

Die den drei Strängen eines Drehstromverbrauchers insgesamt zugeführte Leistung (Augenblicksleistung) ist bei symmetrischer Belastung zeitlich konstant.

Die Aussage gilt in gleicher Weise, wenn der Drehstromverbraucher aus einer symmetrischen Dreieckschaltung besteht. Es besteht somit ein wichtiger Unterschied zu einem (einphasigen) Wechselstromkreis, in dem die Augenblicksleistung bekanntlich zeitlich *nicht* konstant ist.

Das in Gl. (14.39) angegebene Ergebnis stellt gleichzeitig auch die Wirkleistung (P) dar, die dem Drehstromverbraucher insgesamt zugeführt wird. Führen wir die Effektivwert der Sternspannung (U_{St}) und des Außenleiterstromes (I) ein, so wird mit $\hat{u}_{\mathrm{St}} = \sqrt{2}\,U_{\mathrm{St}}$ und $\hat{i} = \sqrt{2}\,I$ aus Gl. (14.39)

$$P = p = 3\,U_{\mathrm{St}}\,I\cos\varphi\,. \tag{14.40}$$

Schließlich kann man noch die Sternspannung (U_{St}) durch die Außenleiterspannung (U) ausdrücken, und man erhält mit $U_{\mathrm{St}} = U/\sqrt{3}$ für die **Wirkleistung**

$$\boxed{P = \sqrt{3}\,U\,I\cos\varphi\,.} \tag{14.41}$$

Im Gegensatz zu der *Summe* der Augenblicksleistungen der drei Stränge ist die Augenblicksleistung der *einzelnen* Stränge zeitabhängig. Das bedeutet, dass jeder Strang im Allgemeinen sowohl Wirkleistung wie auch Blindleistung benötigt. Die

gesamte im Drehstromsystem auftretende **Blindleistung** wird dargestellt als Summe der Blindleistungen der einzelnen Stränge. Hierfür erhalten wir bei symmetrischer Belastung analog zu Gl. (14.41)

$$\boxed{Q = \sqrt{3}\, U\, I \sin\varphi .} \tag{14.42}$$

Damit beträgt die **Scheinleistung**

$$\boxed{S = \sqrt{3}\, U\, I .} \tag{14.43}$$

Da jede Sternschaltung in eine elektrisch gleichwertige Dreieckschaltung umgewandelt werden kann, gelten die in den Gln. (14.41) bis (14.43) angegebenen Ergebnisse auch dann, wenn der Verbraucher aus einer (symmetrischen) Dreieckschaltung besteht. Die Ergebnisse gelten somit unabhängig von der Schaltung des Verbrauchers. Zu beachten ist jedoch, dass der Phasenverschiebungswinkel φ stets derjenige Winkel ist, um den die Strangspannung gegenüber dem zugehörigen Strangstrom verschoben ist.

Aufgabe 14.6

Ein symmetrischer Drehstromverbraucher liegt an einem Drehstromnetz mit der Außenleiterspannung $U = 400$ V. In jedem der drei Außenleiter fließt der Strom $I = 6{,}0$ A. Der Leistungsfaktor des Verbrauchers beträgt $\cos\varphi = 0{,}80$ (induktiv).

Es sind die vom Verbraucher aufgenommene Wirkleistung P, Blindleistung Q und Scheinleistung S zu bestimmen.

Lösung

Die Wirkleistung beträgt nach Gl. (14.41)

$$P = \sqrt{3}\, U\, I \cos\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\ \text{V}\cdot 6{,}0\ \text{A}\cdot 0{,}80 = \underline{3{,}33\ \text{kW}},$$

die Blindleistung nach Gl. (14.42) mit $\varphi = 36{,}87°$

$$Q = \sqrt{3}\, U\, I \sin\varphi = \sqrt{3}\cdot 400\ \text{V}\cdot 6{,}0\ \text{A}\cdot \sin 36{,}87° = \underline{2{,}49\ \text{kvar}}$$

und die Scheinleistung nach Gl. (14.43)

$$S = \sqrt{3}\, U\, I = \sqrt{3}\cdot 400\ \text{V}\cdot 6{,}0\ \text{A} = \underline{4{,}16\ \text{kVA}}.$$

14.3.2 Leistung bei unsymmetrischer Belastung

Bei einem unsymmetrisch belasteten Drehstromnetz kann man die einzelnen Verbraucherstränge als einphasige Verbraucher ansehen. Gehen wir von der in Bild 14.13 dargestellten Schaltung aus, so kann beispielsweise die dem Drehstromverbraucher insgesamt zugeführte Wirkleistung dargestellt werden durch

$$P = U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + U_3 I_3 \cos\varphi_3 . \tag{14.44}$$

Hierin sind U_1, U_2, U_3 die Effektivwerte der Strangspannungen und I_1, I_2, I_3 die Effektivwerte der Außenleiterströme. Die Phasenverschiebungswinkel φ_1, φ_2, φ_3 sind diejenigen Winkel, um die die Strangspannungen gegenüber den zugehörigen Strömen verschoben sind. Zu beachten ist, dass die Summe der Augenblicksleistungen der drei Stränge bei unsymmetrischer Belastung - im Gegensatz zur symmetrischen Belastung - zeitlich *nicht* konstant ist.

15 Nichtsinusförmige periodische Vorgänge

15.1 Allgemeines

In den vorangegangenen Abschnitten wird vorausgesetzt, dass die betrachteten Spannungen und Ströme zeitlich sinusförmig verlaufen. Solche Größen werden zwar in Schaltungen häufig angewendet; es gibt aber auch nicht selten Fälle, in denen die auftretenden Spannungen und Ströme anderen Kurvenformen haben.

Die Ursache hierfür kann zum einen darin liegen, dass die Spannungsquelle - obwohl gewünscht - keine rein sinusförmige Spannung liefert. Zum anderen können *nichtlineare* Widerstände (zum Beispiel Eisenkernspulen oder Halbleiterbauelemente) zu einer Veränderung der Kurvenform der auftretenden Spannungen und Ströme führen. Desweiteren werden in der Elektrotechnik auch bewusst neben sinusförmigen Spannungen solche mit anderer Kurvenform verwendet (zum Beispiel rechteckförmige, dreieckförmige oder sägezahnförmige Spannungen). Wir wollen uns nachfolgend allgemein mit nichtsinusförmigen periodischen Vorgängen befassen.

15.2 Darstellung von Funktionen durch Fourier-Reihen

Jede beliebige nichtsinusförmige periodische Funktion $f(t)$ kann durch eine Reihe von der Form

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_1 t + \varphi_n)} \tag{15.1}$$

dargestellt werden. Man bezeichnet sie als **Fourier-Reihe**. Sie stellt eine Zerlegung einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion in sinusförmige Teilschwingungen und einer Konstanten (A_0) dar. Die Reihe besteht in der Regel zwar aus unendlich vielen Gliedern. Sie kann bei der praktischen Anwendung jedoch mit genügender Genauigkeit meistens schon nach einigen Gliedern abgebrochen werden.

Die Konstante A_0 stellt den zeitlichen Mittelwert (Gleichanteil) der Funktion dar. Die Frequenzen der auftretenden sinusförmigen Teilschwingungen sind stets ganzzahlige Vielfache der kleinsten vorkommenden Frequenz

$$f_1 = \frac{1}{T}, \tag{15.2}$$

wobei T die Periodendauer der betreffenden nichtsinusförmigen Ausgangsfunktion ist. Die in Gl (15.1) enthaltene (kleinste vorkommende) Kreisfrequenz beträgt

$$\omega_1 = 2\pi f_1 . \tag{15.3}$$

Man bezeichnet die Schwingung mit der kleinsten vorkommenden Frequenz (f_1) als **Grundschwingung** oder als **1. Harmonische**. Die übrigen Schwingungen heißen **Oberschwingungen** oder **höhere Harmonische**. Teilt man die Frequenz einer bestimmten Harmonischen durch die Frequenz der Grundschwingung, so erhält man die **Ordnungszahl** (n) der betreffenden Harmonischen.

C_n stellt in Gl. (15.1) eine Konstante dar, deren Betrag dem Scheitelwert der n-ten Harmonischen entspricht. φ_n ist der zugehörige Nullphasenwinkel. Die Fourier-Reihe nach Gl. (15.1) kann durch Zerlegung in Kosinus- und Sinusglieder auch in der Form

$$\boxed{f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_\mathrm{n} \cos n\,\omega_1 t + B_\mathrm{n} \sin n\,\omega_1 t\right)} \tag{15.4}$$

angegeben werden. In dieser Darstellung treten keine Nullphasenwinkel auf. A_n und B_n werden als **Fourierkoeffizienten** bezeichnet. Soll die Darstellung einer Fourier-Reihe gemäß Gl. (15.4) in eine solche nach Gl. (15.1) überführt werden, so gelten die Beziehungen

$$C_\mathrm{n} = \sqrt{A_\mathrm{n}^2 + B_\mathrm{n}^2}\,, \tag{15.5}$$

$$\varphi_\mathrm{n} = \arctan \frac{A_\mathrm{n}}{B_\mathrm{n}}. \tag{15.6}$$

Die Zerlegung einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion in sinusförmige Teilschwingungen sei am Beispiel einer rechteckförmigen Spannung u nach Bild 15.1 erläutert. Bei der Zerlegung ergibt sich eine unendlich große Anzahl von sinusförmigen Teilschwingungen, von denen neben der Grundschwingung (u_1) lediglich die 3. Oberschwingung (u_3) und die 5. Oberschwingung (u_5) eingetragen sind. Addiert man jedoch die Spannungen u_1, u_3 und u_5, so erhält man schon mit guter Annäherung die vorgegebene rechteckförmige Spannung u. Es ist daher vielfach ausreichend, Oberschwingungen mit höherer Ordnungszahl als beispielsweise $n = 5$ zu vernachlässigen.

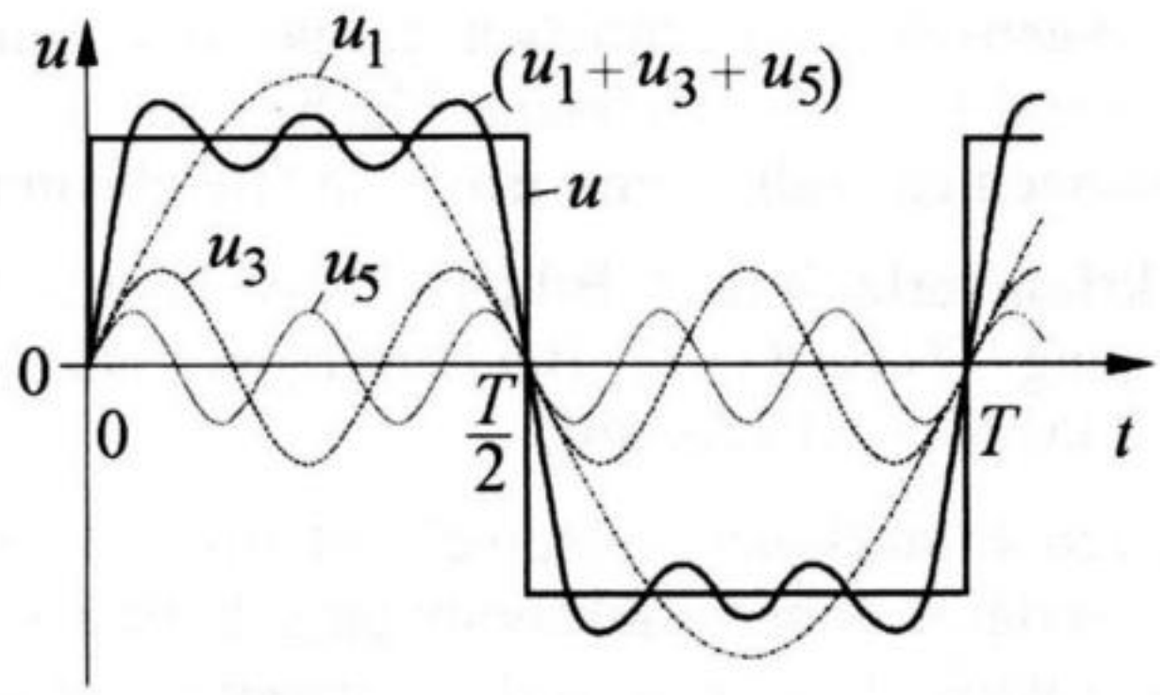


Bild 15.1 Zerlegung einer rechteckförmigen Spannung in sinusförmige Teilspannungen

15.3 Die Fourier-Analyse

Die Zerlegung einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion in einzelne sinusförmige Teilschwingungen bezeichnet man als **Fourier-Analyse**. Wir gehen nachfolgend von der Voraussetzung aus, dass eine bestimmte nichtsinusförmige periodisch zeitabhängige Funktion $f(t)$ in mathematischer Form als Gleichung vorliegt. Dann sind zur Ermittlung der sinusförmigen Teilschwingungen die Fourierkoeffizienten A_n und B_n zu bestimmen. Ist der arithmetische Mittelwert der Funktion $f(t)$ nicht Null, so tritt ein Gleichanteil auf, den wir durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes als

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t} \tag{15.7}$$

erhalten. Für die Bestimmung der Fourierkoeffizienten gelten die aus der Mathematik bekannten Gleichungen

$$\boxed{A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \cos n\omega_1 t\ \mathrm{d}t\,,} \tag{15.8}$$

$$\boxed{B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \sin n\omega_1 t\ \mathrm{d}t\,.} \tag{15.9}$$

Die Bestimmung der Fourierkoeffizienten vereinfacht sich bei den nachfolgend beschriebenen **Sonderfällen**.

Bei einer **reinen Wechselgröße** schließen die positive und die negative Halbschwingung entsprechend Bild 15.2a gleiche Flächen ein. Der arithmetische Mittelwert solcher Funktionen ist Null. Somit tritt kein Gleichanteil A_0 auf.

Eine **gerade Funktion** verläuft nach Bild 15.2b symmetrisch zur Ordinatenachse. Es gilt die Bedingung $f(t) = f(-t)$. Bei derartigen Funktionen wird B_n gleich Null. Es treten also keine Sinusglieder auf.

Bei einer **ungeraden Funktionen** entsprechend Bild 15.2c gilt die Bedingung $f(t) = -f(-t)$. Sie verläuft daher punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung. Bei diesen Funktionen wird A_n gleich Null. Es treten somit keine Kosinusglieder auf.

Eine **alternierende Funktion** entsprechend Bild 15.2d erfüllt die Bedingung $f(t) = -f(t + T/2)$. Das bedeutet, dass die positive und die negative Halbschwingung die gleiche Form haben. Solche Funktionen enthalten nur Glieder mit ungerader Ordnungszahl.

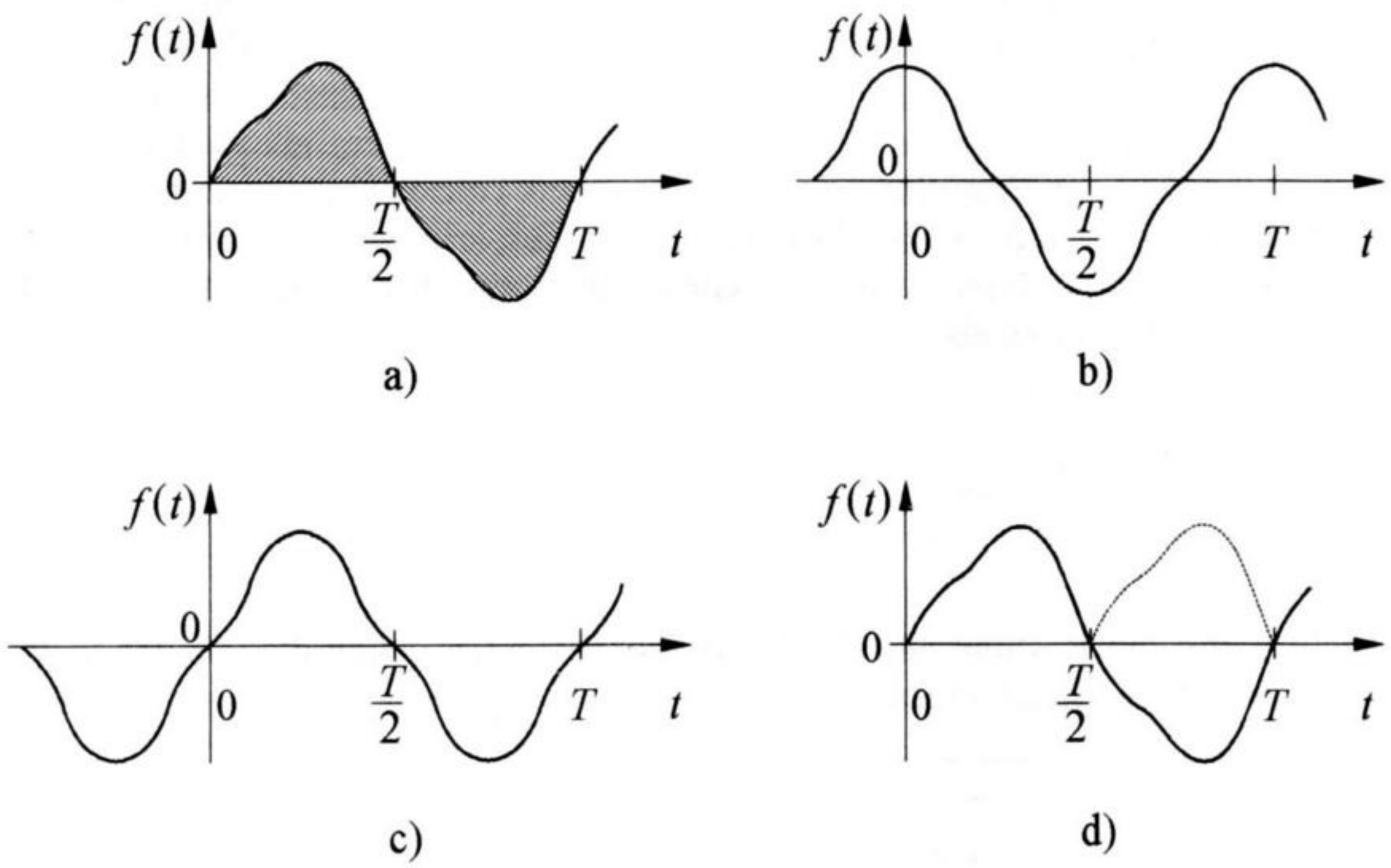


Bild 15.2 Sonderfälle von periodischen Funktionen. a) Reine Wechselgröße, b) gerade, c) ungerade und d) alternierende Funktion

Trägt man die sich durch die Bestimmung der Fourierkoeffizienten ergebenden Amplituden (Scheitelwerte) der einzelnen Harmonischen in Abhängigkeit von der Ordnungszahl auf, so erhält man das **Amplitudenspektrum** der Funktion. Es gibt eine gute Übersicht über den Anteil der einzelnen Harmonischen an der Gesamtschwingung.

Die Zerlegung einer nichtsinusförmigen periodischen Funktion in sinusförmige Teilschwingungen sowie die Darstellung des sich ergebenden Amplitudenspektrums sei nachfolgend an einem Beispiel erläutert. Desweiteren sei darauf hingewiesen, dass die Zerlegung auch **messtechnisch** vorgenommen werden kann. Hierzu setzt man **Frequenzanalysatoren** ein. Sie ermöglichen in einfacher Weise die Bestimmung der beispielsweise in einer vorgegebenen Spannung oder einem vorgegebenen Strom enthaltenen Frequenzen mit den zugehörigen Amplituden.

Aufgabe 15.1

Eine sägezahnförmige Spannung mit dem Scheitelwert $\hat{u} = 10$ V und der Periodendauer $T = 2$ ms hat den in Bild 15.3a angegebenen Verlauf.

Es ist die Fourier-Reihe bis zur Ordnungszahl $n = 5$ zu ermitteln. Das sich ergebende Amplitudenspektrum ist darzustellen.

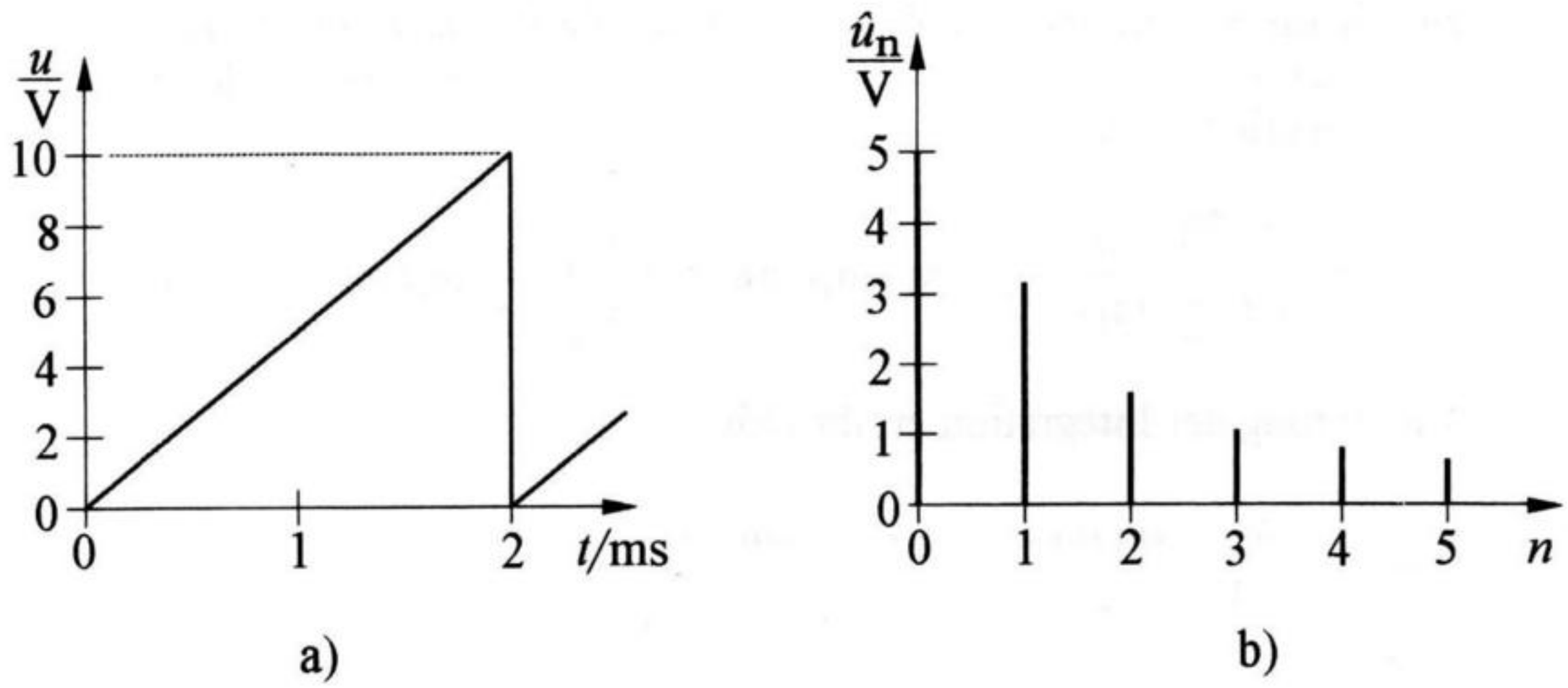


Bild 15.3 Beispiel für den Verlauf einer nichtsinusförmigen periodisch zeitabhängigen Spannung (a) mit zugehörigem Amplitudenspektrum (b)

Lösung

Nach Gl. (15.7) erhält man den Gleichanteil durch Bildung des arithmetischen Mittelwertes der Funktion. Aus Bild 15.3a ist zu ersehen, dass der Mittelwert und damit der Gleichanteil

$$A_0 = \frac{\hat{u}}{2} = \frac{10\ \text{V}}{2} = 5\ \text{V}$$

beträgt. A_0 stellt den *Gleichspannungsanteil* dar, der in der vorliegenden Spannung enthalten ist. Zieht man den Gleichspannungsanteil von der gegebenen

Spannung ab, so erhält man den *Wechselspannungsanteil*. Dessen zeitlicher Verlauf stellt eine *ungerade* Funktion dar, auf die somit die Bedingung $f(t) = -f(-t)$ zutrifft. Daher treten keine Kosinusglieder auf.

Zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten der Sinusglieder benötigen wir die *Gleichung* der in Bild 15.3a dargestellten Funktion. Im Bereich $0 < t < T$ stellt die Funktion eine durch den Koordinatenursprung verlaufende Gerade mit der Gleichung

$$f(t) = \frac{\hat{u}}{T} t$$

dar. Damit wird nach Gl. (15.9)

$$B_\mathrm{n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \ \sin n\omega_1 t \ \mathrm{d}t = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{\hat{u}}{T} t \ \sin n\omega_1 t \ \mathrm{d}t .$$

Ersetzen wir die Integrationsvariable t durch die Größe $\omega_1 t$, und verwenden wir darüber hinaus die sich aus den Gln. (15.2) und (15.3) ergebende Beziehung $\omega_1 T = 2\pi$, so erhalten wir

$$B_\mathrm{n} = \frac{2}{\omega_1 T} \int_0^{\omega_1 T} \frac{\hat{u}}{\omega_1 T} \omega_1 t \ \sin n\omega_1 t \ \mathrm{d}\omega_1 t = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\hat{u}}{2\pi} \omega_1 t \sin n\omega_1 t \, \mathrm{d}\omega_1 t .$$

Nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$B_\mathrm{n} = \frac{\hat{u}}{2\pi^2} \left(\frac{\sin n\omega_1 t}{n^2} - \frac{\omega_1 t \cos n\omega_1 t}{n} \right) \Bigg|_0^{2\pi} .$$

Durch Einsetzen der Grenzen wird

$$B_\mathrm{n} = -\frac{\hat{u}}{\pi n} = -\frac{10 \ \mathrm{V}}{\pi n} .$$

Setzen wir die für n die Werte 1, 2, 3 . . . ein, so erhalten wir die gesuchte Fourier-Reihe entsprechend Gl. (15.4) als

$$u = 5 \ \mathrm{V} - 3{,}18 \ \mathrm{V} \cdot \sin \omega_1 t - 1{,}59 \ \mathrm{V} \cdot \sin 2\omega_1 t - 1{,}06 \ \mathrm{V} \cdot \sin 3\omega_1 t$$
$$- 0{,}80 \ \mathrm{V} \cdot \sin 4\omega_1 t - 0{,}64 \ \mathrm{V} \cdot \sin 5\omega_1 t - \ldots$$

Hierin beträgt nach den Gln. (15.2) und (15.3) die Kreisfrequenz der ersten Harmonischen $\omega_1 = 2\pi / T = 2\pi / (2 \cdot 10^{-3} \ \mathrm{s}) = 3142 \ \mathrm{s}^{-1}$. Das sich ergebende Amplitudenspektrum ist in Bild 15.3b dargestellt.

15.4 Nichtsinusförmige Vorgänge in linearen Schaltungen

Die Zerlegung von nichtsinusförmigen Wechselgrößen in sinusförmige Teilschwingungen ermöglicht die Berechnung von Netzwerken mit den gleichen Lösungsverfahren, die für sinusförmige Vorgänge gelten. Beispielsweise kann man sich eine Spannungsquelle, die eine nichtsinusförmige Spannung liefert, durch mehrere in Reihe geschaltete Spannungsquellen ersetzt denken, die jeweils sinusförmige Spannungen erzeugen. Den fließenden Strom erhält man dadurch, dass man die von den einzelnen Spannungsquellen verursachten Teilströme überlagert. Dieses Verfahren setzt allerdings voraus, dass keine nichtlinearen Widerstände vorhanden sind. Zur Veranschaulichung betrachten wir das nachfolgende Beispiel.

Aufgabe 15.2

Die Schaltung nach Bild 15.4 enthält eine Spule mit der Induktivität L = 100 mH und den Widerstand R = 900 Ω. Die Eingangsspannung hat den zeitlichen Verlauf $u_e = 120\ \text{V} \cdot \sin \omega_1 t + 40\ \text{V} \cdot \sin 3\omega_1 t$. Die Frequenz der Grundschwingung beträgt $f_1 = \omega_1/(2\pi) = 800\ \text{Hz}$.

Es ist der zeitliche Verlauf der Ausgangsspannung u_a zu ermitteln.

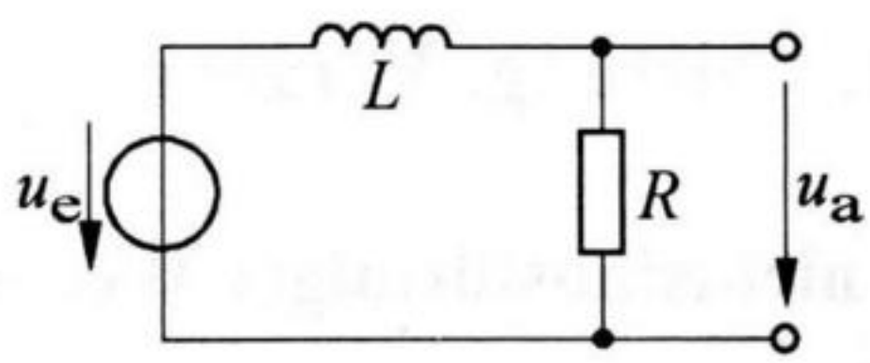


Bild 15.4 Ohmsch-induktiver Spannungsteiler mit nichtsinusförmiger Eingangsspannung

Lösung

Die Spule hat bei der Frequenz $f_1 = 800\ \text{Hz}$ den Blindwiderstand

$$\omega_1 L = 2\pi \cdot 800\ \text{Hz} \cdot 0{,}1\ \text{H} = 503\ \Omega.$$

Die in der Eingangsspannung enthaltene Grundschwingung mit dem Scheitelwert $\hat{u}_{e1} = 120\text{V}$ verursacht am Ausgang der Schaltung nach der Spannungsteilerregel eine Spannung mit dem Scheitelwert

$$\hat{u}_{a1} = \hat{u}_{e1} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega_1 L)^2}} = 120\ \text{V} \frac{900\ \Omega}{\sqrt{900^2 + 503^2}\ \Omega} = 104{,}8\ \text{V}.$$

Dabei eilt die Spannung u_{e1} der Spannung u_{a1} um den Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi_1 = \arctan \frac{\omega_1 L}{R} = \arctan \frac{503\,\Omega}{900\,\Omega} = 29{,}2°$$

vor. Entsprechend gilt für die vorhandene 3. Oberschwingung, wenn wir berücksichtigen, dass der Blindwiderstand der Spule in diesem Fall $3\omega_1 L$ beträgt,

$$\hat{u}_{a3} = \hat{u}_{e3} \frac{R}{\sqrt{R^2 + (3\omega_1 L)^2}} = 40\text{ V} \frac{900\,\Omega}{\sqrt{900^2 + (3\cdot 503)^2}\ \Omega} = 20{,}5\text{ V},$$

$$\varphi_3 = \arctan \frac{3\omega_1 L}{R} = \arctan \frac{3\cdot 503\,\Omega}{900\,\Omega} = 59{,}2°.$$

Damit erhalten wir mit $\omega_1 = 2\pi f_1 = 2\pi \cdot 800\text{ Hz} = 5027\text{ s}^{-1}$ für die gesuchte Ausgangsspannung den zeitlichen Verlauf

$$u_a = \underline{104{,}8\text{ V}\cdot \sin(\omega_1 t - 29{,}2°) + 20{,}5\text{ V}\cdot \sin(3\omega_1 t - 59{,}2°)}.$$

15.5 Effektivwert, Leistung, Verzerrung

15.5.1 Effektivwert nichtsinusförmiger Wechselgrößen

Der Effektivwert einer periodisch zeitabhängigen Größe lässt sich außer durch Anwendung des in Abschnitt 6.3.2 beschriebenen Verfahrens auch aus den Ergebnissen einer durchgeführten Fourier-Analyse bestimmen. Zur Erläuterung des letztgenannten Verfahrens gehen wir von Gl. (6.21) aus, die die Berechnung des Effektivwertes eines beliebigen periodisch zeitabhängigen Stromes ermöglicht. Die in dieser Gleichung enthaltene Kreisfrequenz ω wollen wir für die folgenden Betrachtungen als Kreisfrequenz der Grundschwingung (ω_1) ansehen, so dass gilt

$$I = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 \, \mathrm{d}\omega_1 t}\,. \tag{15.10}$$

Für die weiteren Betrachtungen geben wir einen Strom i entsprechend Gl. (15.1) durch die Fourier-Reihe

$$i = I_0 + \hat{i}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \hat{i}_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_2) + \ldots$$

vor und setzen diese Beziehung in Gl. (15.10) ein. Dabei zeigt sich, dass alle sich ergebenden Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{i}_\mathrm{m}\sin(m\omega_1 t+\varphi_\mathrm{m})\cdot\hat{i}_\mathrm{n}\sin(n\omega_1 t+\varphi_\mathrm{n})\cdot\mathrm{d}\omega_1 t$$

für $m \neq n$ Null sind und für $m = n$ den Wert

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\hat{i}_\mathrm{m}^2\sin^2(m\omega_1 t+\varphi_\mathrm{m})\cdot\mathrm{d}\omega_1 t=\frac{1}{2}\hat{i}_\mathrm{m}^2$$

haben. Daher erhalten wir für den gesuchten Effektivwert die Lösung

$$I=\sqrt{I_0^2+\frac{\hat{i}_1^2}{2}+\frac{\hat{i}_2^2}{2}+\ldots}\,. \tag{15.11}$$

Drücken wir die Scheitelwerte durch die Effektivwerte aus, so wird mit $\hat{i}_1=\sqrt{2}\,I_1$ und $\hat{i}_2=\sqrt{2}\,I_2$ aus Gl. (15.11)

$$\boxed{I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\ldots}\,.} \tag{15.12}$$

Hierin stellt I_0 den im Strom i enthaltenen Gleichanteil dar. I_1, $I_2,\ldots$ sind die Effektivwerte der einzelnen Harmonischen. Entsprechend gilt für den Effektivwert einer Spannung

$$\boxed{U=\sqrt{U_0^2+U_1^2+U_2^2+\ldots}\,.} \tag{15.13}$$

Aufgabe 15.3

Bei der Fourier-Analyse eines periodisch zeitabhängigen Stromes sind für den Gleichanteil $I_0=5{,}0\ \mathrm{A}$, für den Effektivwert der Grundschwingung $I_1=3{,}2\ \mathrm{A}$ und für den Effektivwert der dritten Harmonischen $I_3=1{,}0\ \mathrm{A}$ ermittelt worden. Die Effektivwerte der übrigen Oberschwingungen seien vernachlässigbar klein.

Es ist der Effektivwert I des Stromes zu bestimmen.

Lösung

Der Effektivwert des Stromes beträgt nach Gl. (15.12)

$$I=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_3^2}=\sqrt{5{,}0^2+3{,}2^2+1{,}0^2}\ \mathrm{A}=\underline{6{,}0\ \mathrm{A}}\,.$$

15.5.2 Wirk-, Blind- und Scheinleistung

Liegt ein Verbraucher an einer beliebigen zeitlich periodisch verlaufenden Spannung, so können die Augenblickswerte von Spannung (u) und Strom (i) entsprechend Gl. (15.1) durch die Fourier-Reihen

$$u = U_0 + \hat{u}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{1u}) + \hat{u}_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_{2u}) + \ldots,$$

$$i = I_0 + \hat{i}_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_{1i}) + \hat{i}_2 \sin(2\omega_1 t + \varphi_{2i}) + \ldots$$

dargestellt werden. Die vom Verbraucher aufgenommene **Wirkleistung** (P) erhält man bekanntlich dadurch, dass man, wie in Abschnitt 8.1 beschrieben, den *zeitlichen Mittelwert der Augenblicksleistung* bildet. Es gilt also

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\, i \, \mathrm{d}\omega_1 t \, .$$

Setzen wir hierin die angegebenen Fourier-Reihen ein, so zeigt sich, dass alle sich ergebenden Ausdrücke von der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}_\mathrm{m} \sin(m\omega_1 t + \varphi_\mathrm{mu}) \cdot \hat{i}_\mathrm{n} \sin(n\omega_1 t + \varphi_\mathrm{ni}) \cdot \mathrm{d}\omega_1 t$$

für $m \neq n$ Null werden. Teilschwingungen von Spannung und Strom mit unterschiedlicher Ordnungszahl (und damit unterschiedlicher Frequenz) tragen also nicht zur Wirkleistung bei. Für $m = n$ tritt hingegen entsprechend den in Abschnitt 8.1 gefundenen Ergebnissen eine Wirkleistung

$$P_\mathrm{n} = \frac{\hat{u}_\mathrm{n} \hat{i}_\mathrm{n}}{2} \cos(\varphi_\mathrm{nu} - \varphi_\mathrm{ni}) = U_\mathrm{n} I_\mathrm{n} \cos\varphi_\mathrm{n}$$

auf. Hierbei sind U_n und I_n die Effektivwerte von Spannung und Strom der n-ten Harmonischen, φ_n ist der zwischen diesen Teilschwingungen bestehende Phasenverschiebungswinkel. Die gesamte Wirkleistung beträgt damit

$$\boxed{P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_2 \cos\varphi_2 + \ldots .} \tag{15.14}$$

Sie setzt sich also aus der Leistung des Gleichanteils sowie den Wirkleistungen der einzelnen Harmonischen zusammen.

Das Produkt der Effektivwerte von Spannung (U) und Strom (I) wird - ebenso wie bei sinusförmigen Vorgängen - als **Scheinleistung** (S) bezeichnet. Es gilt also

$$\boxed{S = U\, I \, .} \tag{15.15}$$

Damit erhält man für die **Blindleistung**

$$\boxed{Q = \sqrt{S^2 - P^2}\,.} \tag{15.16}$$

Häufig treten in Schaltungen trotz sinusförmiger Versorgungsspannung nichtsinusförmige Ströme auf. Das ist dann der Fall, wenn der Verbraucher **nichtlineare Widerstände** (beispielsweise Gleichrichter) enthält. Dann können wir die Scheinleistung nach Gl. (15.15) unter Berücksichtigung von Gl. (15.12) darstellen durch

$$S = U\,\sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}\,. \tag{15.17}$$

und die Wirkleistung nach Gl. (15.14) mit $U_1 = U$ durch

$$P = U\,I_1 \cos\varphi_1\,. \tag{15.18}$$

Setzen wir die Gln. (15.17) und (15.18) in Gl. (15.16) ein, so erhalten wir für die Blindleistung

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{U^2\left(I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots\right) - U^2\,I_1^2\cos^2\varphi_1}\,.$$

Durch Umformen wird daraus

$$Q = \sqrt{U^2\,I_1^2\,\left(1 - \cos^2\varphi_1\right) + U^2\left(I_0^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots\right)}. \tag{15.19}$$

Die Blindleistung kann somit in zwei Teile zerlegt werden. Berücksichtigen wir, dass

$$1 - \cos^2\varphi_1 = \sin^2\varphi_1$$

ist, so wird *ein* Teil der in Gl. (15.19) dargestellten Blindleistung gebildet durch den Ausdruck

$$\boxed{Q_1 = U\,I_1\,\sin\varphi_1\,.} \tag{15.20}$$

Dieser Blindleistungsanteil wird durch die zwischen der Strom-Grundschwingung und der Spannung bestehende *Phasenverschiebung* verursacht und als **Grundschwingungsblindleistung** bezeichnet. Der *zweite* in Gl. (15.19) enthaltene Blindleistungsanteil wird gebildet durch den Ausdruck

$$\boxed{D = U\,\sqrt{I_0^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}\,.} \tag{15.21}$$

Er wird durch die Stromoberschwingungen (und gegebenenfalls einem im Strom enthaltenen Gleichanteil) verursacht. Man bezeichnet D als **Oberschwingungsblindleistung** oder als **Verzerrungsleistung**. D ist *nicht* von der Phasenlage der Stromoberschwingungen abhängig, sondern lediglich von deren Höhe. Setzen wir die Gln. (15.20) und (15.21) in Gl. (15.19) ein, so erhalten wir

$$\boxed{Q = \sqrt{Q_1^2 + D^2}\,.} \tag{15.22}$$

Grundschwingungsblindleistung und Verzerrungsleistung werden also nicht algebraisch addiert, sondern nach Gl. (15.22) zur Gesamtblindleistung Q zusammengefasst.

Das Verhältnis von Wirkleistung (P) zur Scheinleistung (S) bezeichnet man - ebenso wie bei sinusförmigen Vorgängen - als **Leistungsfaktor**. Er kann jedoch infolge der vorhandenen Oberschwingungen nicht durch den Kosinus eines Phasenverschiebungswinkels angegeben werden. Daher verwendet man ein anderes (besonderes) Symbol (λ). Es gilt also für den Leistungsfaktor

$$\boxed{\lambda = \frac{P}{S}.} \tag{15.23}$$

15.5.3 Kenngrößen der Verzerrung

Weicht die Kurvenform einer Wechselgröße von der Sinusform ab, so spricht man von einer **Verzerrung**. Der Grad der Verzerrung wird durch den **Klirrfaktor** (Symbol: k) ausgedrückt. Darunter versteht man das Verhältnis des Effektivwertes aller Oberschwingungen zu dem Effektivwert der Gesamtschwingung. Der Klirrfaktor einer *Wechselspannung* beträgt also

$$\boxed{k_\mathrm{u} = \frac{\sqrt{U_2^2 + U_3^2 + \ldots}}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots}}.} \tag{15.24}$$

Hierin stellen U_1, U_2, $U_3 \ldots$ die Effektivwerte der einzelnen Harmonischen dar. Entsprechend gilt für den Klirrfaktor eines *Wechselstromes*

$$\boxed{k_\mathrm{i} = \frac{\sqrt{I_2^2 + I_3^2 + \ldots}}{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \ldots}}.} \tag{15.25}$$

Eine andere bei nichtsinusförmigen Wechselgrößen verwendete Kenngröße ist der **Grundschwingungsgehalt** (Symbol: g). Er stellt das Verhältnis des Effektivwertes der Grundschwingung zum Effektivwert der Gesamtschwingung dar. So gilt beispielsweise für den Grundschwingungsgehalt einer Wechselspannung

$$\boxed{g_{\mathrm{u}} = \frac{U_1}{\sqrt{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + \ldots}}.} \tag{15.26}$$

Zwei weitere für die Beurteilung des Kurvenverlaufs verwendete Größen, der **Formfaktor** (F) und der **Scheitelfaktor** (σ), wurden bereits in Abschnitt 6.3.3 eingeführt.

16 Schaltvorgänge

16.1 Allgemeines

Bei den bisher betrachteten Schaltungen wird stets vorausgesetzt, dass nicht unmittelbar vorher eine Schalthandlung stattgefunden hat. Denn es zeigt sich, dass die gleich nach dem Einschalten eines Stromkreises auftretenden Spannungen und Ströme sich im Allgemeinen von den nach einiger Zeit vorhandenen Größen unterscheiden. Das Gleiche gilt, wenn in Schaltungen ein Stromzweig unterbrochen oder durchgeschaltet, eine Versorgungsspannung verstellt oder ein Widerstand verändert wird.

Man spricht bei den unmittelbar nach einer Schaltungsänderung auftretenden Vorgängen von **Schaltvorgängen** oder von **Ausgleichsvorgängen**. Sie gehen über in die **stationären Vorgänge**, die dadurch gekennzeichnet sind, dass die vorhandenen Spannungen und Ströme entweder - bei Gleichspannungsversorgung - zeitlich konstant sind oder aber - beim Vorhandensein von Wechselspannungsquellen - zeitlich periodisch verlaufen.

Die Ursache für das Auftreten von Ausgleichsvorgängen liegt darin, dass die in Spulen und Kondensatoren gespeicherten Energien sich nicht sprunghaft ändern können. Das würde eine unendlich große Leistung erfordern. Die in einer Spule mit der Induktivität L gespeicherte Energie beträgt bei dem Strom i nach Gl. (5.86)

$$W_{\mathrm{L}} = \frac{1}{2} L i^2 .$$

Daraus folgt, dass sich der in einer Spule fließende Strom nur *stetig* ändern kann. Eine Kondensator mit der Kapazität C, der auf die Spannung u aufgeladen ist, enthält nach Gl. (3.34) die Energie

$$W_{\mathrm{C}} = \frac{1}{2} C u^2 .$$

Das bedeutet, dass eine sprunghafte Änderung der Kondensatorspannung nicht möglich ist.

16.2 Schaltvorgänge in RL- und RC-Schaltungen

16.2.1 Ohmsch-induktiver Gleichstromkreis

Eine Spule mit der Induktivität L werde nach Bild 16.1a über einen Widerstand R mit einer Gleichspannungsquelle verbunden, die die Spannung U liefert. Gesucht sei der zeitliche Verlauf des Stromes i. Der Einschaltaugenblick möge dem Zeitpunkt $t = 0$ entsprechen.

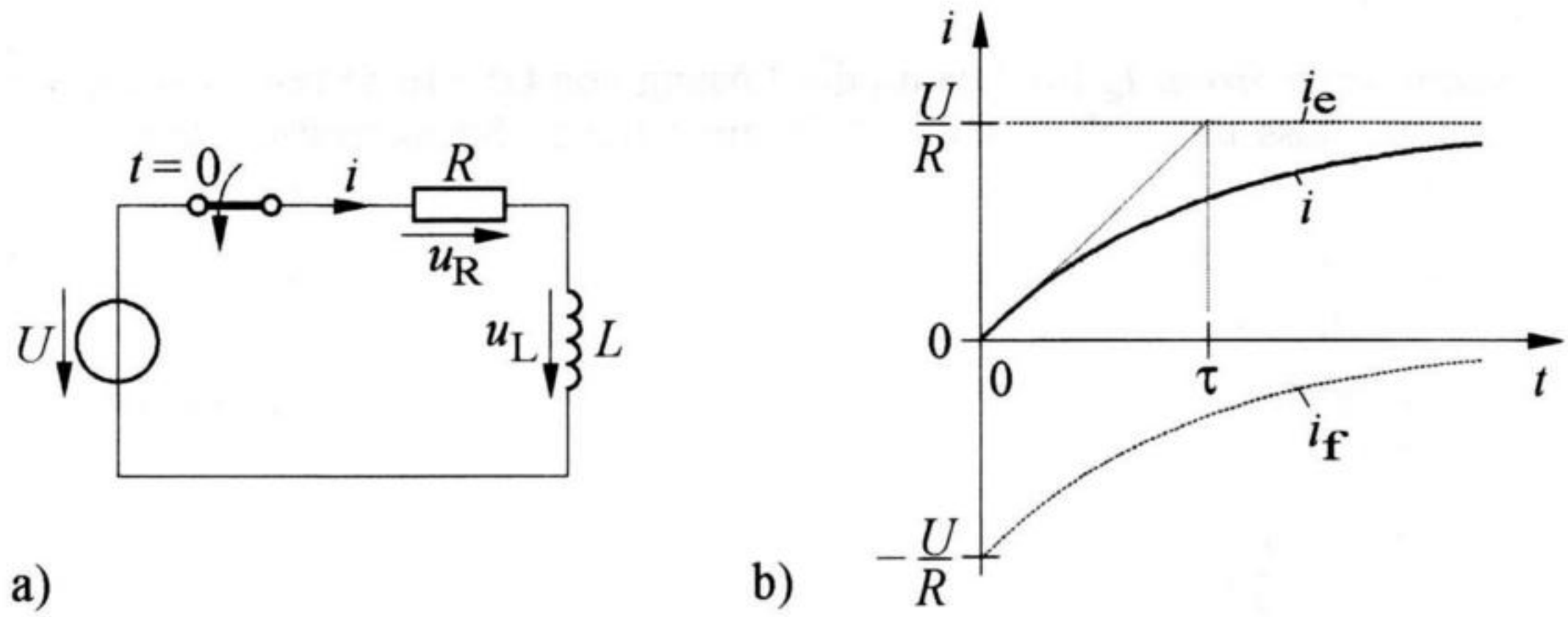


Bild 16.1 Anlegen einer Spule mit Reihenwiderstand an Gleichspannung.
a) Schaltung, b) zeitlicher Verlauf des Stromes

In der Schaltung nach Bild 16.1a gilt für $t \geq 0$

$$u_L + u_R = U\,. \tag{16.1}$$

Da nach Gl. (5.61) die Spannung u_L dargestellt werden kann durch $u_L = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, wird aus Gl. (16.1) mit $u_R = Ri$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U\,. \tag{16.2}$$

Für die Lösung dieser **Differenzialgleichung** zerlegen wir den gesuchten Strom in

$$i = i_e + i_f\,. \tag{16.3}$$

Hierbei sei i_e derjenige Strom, der sich nach längerer Zeit einstellt. Er wird als **stationärer** oder **eingeschwungener Strom** bezeichnet. Damit ist i_f ein vorübergehend auftretender Strom, den man auch **freien** oder **flüchtigen Strom** nennt. Setzen wir Gl. (16.3) in Gl. (16.2) ein, so ergibt sich

$$L\frac{\mathrm{d}(i_e + i_f)}{\mathrm{d}t} + R(i_e + i_f) = U\,. \tag{16.4}$$

Da der Strom i in den stationären Strom i_e übergeht, muss Gl. (16.2) auch für $i = i_e$ gelten, so dass

$$L\frac{\mathrm{d}i_e}{\mathrm{d}t} + Ri_e = U \tag{16.5}$$

ist. Subtrahieren wir Gl. (16.5) von Gl. (16.4), so erhalten wir

$$L\frac{\mathrm{d}i_f}{\mathrm{d}t} + Ri_f = 0. \tag{16.6}$$

Den *stationären Strom* i_e (und damit die Lösung von Gl. (16.5) finden wir aus der Überlegung, dass der sich in Bild 16.1a einstellende Strom zeitlich konstant ist und daher

$$i_e = \frac{U}{R} \tag{16.7}$$

beträgt. Zur Ermittlung des *freien Stromes* trennen wir in Gl. (16.6) die Variablen und erhalten

$$\frac{\mathrm{d}i_f}{i_f} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t. \tag{16.8}$$

Bezeichnen wir den im Zeitpunkt $t = 0$ vorhandenen freien Strom als i_{f0} und den in einem beliebigen Zeitpunkt t_1 vorhandenen als i_{f1}, so wird aus Gl. (16.8)

$$\int_{i_{f0}}^{i_{f1}} \frac{\mathrm{d}i_f}{i_f} = -\frac{R}{L}\int_0^{t_1} \mathrm{d}t.$$

Durch Ausführen der Integration und Einsetzen der Grenzen finden wir

$$\ln\frac{i_{f1}}{i_{f0}} = -\frac{R}{L}t_1.$$

Hieraus folgt, wenn wir i_{f1} und t_1 nachfolgend als Variable ansehen mit $i_{f1} = i_f$ und $t_1 = t$,

$$i_f = i_{f0}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}. \tag{16.9}$$

Setzen wir die in den Gln. (16.7) und (16.9) angegebenen Ergebnisse in Gl. (16.3) ein, so erhalten wir

$$i = i_e + i_f = \frac{U}{R} + i_{f0}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}. \tag{16.10}$$

Zur Bestimmung des Stromes (der Konstanten) i_{f0} betrachten wir die Schaltung im Zeitpunkt $t = 0$. Da sich der im Kreis fließende Strom infolge der vorhandenen

Induktivität nicht sprunghaft ändern kann, muss bei $t = 0$ auch $i = 0$ sein. Setzen wir diese **Anfangsbedingung** in Gl. (16.10) ein, so ergibt sich

$$0 = \frac{U}{R} + i_{\mathrm{f}0}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}0}.$$

Hieraus folgt, wenn wir berücksichtigen, dass $\mathrm{e}^0 = 1$ ist,

$$i_{\mathrm{f}0} = -\frac{U}{R}.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in Gl. (16.10) ein und erhalten so als Lösung für den gesuchten Strom

$$\boxed{i = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),} \tag{16.11}$$

wobei

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R}} \tag{16.12}$$

ist und als **Zeitkonstante** bezeichnet wird. In Bild 16.1b ist der zeitliche Verlauf des Stromes i sowie der Größen i_{e} und i_{f} dargestellt. Die im Zeitpunkt $t = 0$ eingetragene Tangente schneidet die Kennlinie $i_{\mathrm{e}} = f(t)$ im Zeitpunkt $t = \tau$. Es zeigt sich, dass nach Ablauf der Zeit 3τ der Strom i auf etwa 95 % seines Endwertes angestiegen ist. Der Ausgleichsvorgang ist also nach Ablauf einer Zeit, die etwa dem dreifachen Wert der Zeitkonstanten entspricht, im Wesentlichen abgeschlossen.

Die in Bild 16.1a auftretenden Teilspannungen ergeben sich aus dem in Gl. (16.11) angegebenen Ergebnis als

$$u_{\mathrm{R}} = Ri = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),$$

$$u_{\mathrm{L}} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = U\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} = U\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Diese beiden Ergebnisse zeigen, dass sich die Spannung u_{R} - ebenso wie der Strom i - *nicht* sprunghaft ändert. Dagegen springt die an der Spule liegende Spannung im Schaltaugenblick von $u_{\mathrm{L}} = 0$ auf $u_{\mathrm{L}} = U$.

Aufgabe 16.1

Die Reihenschaltung einer Spule mit der Induktivität L = 100 mH und eines Widerstandes $R = 20\ \Omega$ wird nach Bild 16.1 an eine Gleichspannung U gelegt.

Nach Ablauf welcher Zeit t hat der Strom 99 % seines Endwertes erreicht?

Lösung

Nach Gl. (16.11) hat der Strom den zeitlichen Verlauf

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Der Strom hat dann 99 % seines Endwertes (U/R) erreicht, wenn mit $p = 0{,}99$

$$i = p\frac{U}{R}\ .$$

wird. Durch Gleichsetzen beider Gleichungen ergibt sich

$$p\frac{U}{R} = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right).$$

Hieraus finden wir bei der Zeitkonstanten $\tau = L/R = 0{,}1\ \mathrm{H}/(20\ \Omega) = 5\ \mathrm{ms}$ die gesuchte Zeit als

$$t = -\tau\ \ln(1-p) = -5\ \mathrm{ms}\cdot\ln(1-0{,}99) = \underline{23\ \mathrm{ms}}.$$

16.2.2 Ohmsch-kapazitiver Gleichstromkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität C werde nach Bild 16.2a über einen Widerstand R an eine Gleichspannung U gelegt. Gesucht sei der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung u_C und der des Stromes i. Der Schaltaugenblick entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$. Nach der Maschenregel gilt in Bild 16.2a

$$Ri + u_\mathrm{C} = U\ . \tag{16.13}$$

Berücksichtigen wir, dass nach Gl. (7.23)

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} \tag{16.14}$$

ist, wird aus Gl. (16.13)

$$RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} = U\,.$$

Diese Differenzialgleichung hat die gleiche Form wie die in Gl. (16.2) angegebene, so dass wir auch die Lösung in gleicher Weise vornehmen können.

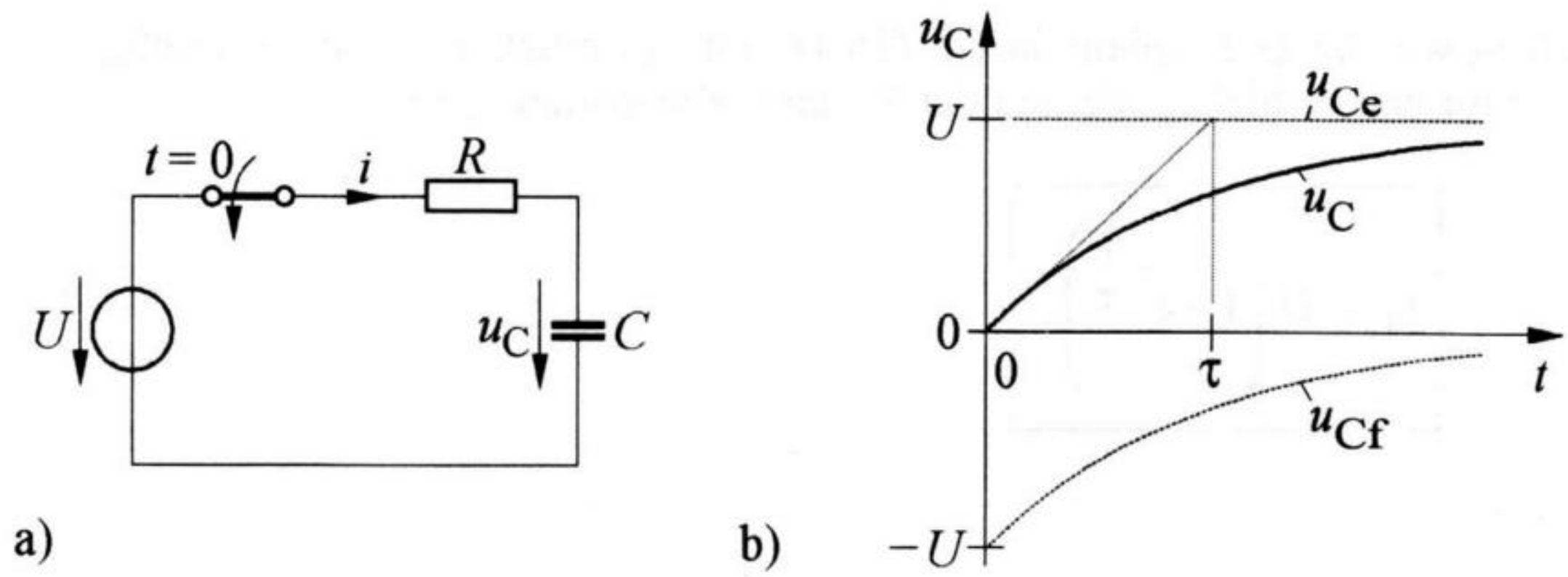


Bild 16.2 Anlegen eines Kondensators mit Reihenwiderstand an Gleichspannung. a) Schaltung, b) zeitlicher Verlauf der Kondensatorspannung

Die Kondensatorspannung wird - analog zu Gl. (16.3) - in

$$u_\mathrm{C} = u_\mathrm{Ce} + u_\mathrm{Cf} \tag{16.15}$$

zerlegt. u_Ce ist die (sich einstellende) **stationäre Kondensatorspannung**. Aus Bild 16.2a ist zu ersehen, dass

$$u_\mathrm{Ce} = U \tag{16.16}$$

wird. Für die **freie Kondensatorspannung** u_Cf ergibt sich entsprechend Gl. (16.9) eine Lösung in der Form

$$u_\mathrm{Cf} = u_\mathrm{Cf0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,, \tag{16.17}$$

wobei u_Cf0 eine noch zu bestimmende Konstante darstellt. Setzen wir die Gln. (16.16) und (16.17) in Gl. (16.15) ein, so erhalten wir

$$u_\mathrm{C} = U + u_\mathrm{Cf0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\,. \tag{16.18}$$

Zur Bestimmung der hierin enthaltenen Konstanten (Spannung) u_Cf0 betrachten wir die Schaltung im Schaltaugenblick und berücksichtigen dabei die Tatsache, dass sich die Kondensatorspannung nicht sprunghaft ändern kann. Enthält der Kondensator beispielsweise im Zeitpunkt $t = 0$ keine Ladung, so ist in diesem Zeitpunkt auch $u_\mathrm{C} = 0$. Setzen wir diese **Anfangsbedingung** in Gl. (16.18) ein, so ergibt sich

$$0 = U + u_{\mathrm{Cf0}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{RC}} .$$

Hieraus folgt mit $\mathrm{e}^0 = 1$

$$u_{\mathrm{Cf0}} = -U .$$

Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (16.18) ein, so erhalten wir die endgültige Lösung für den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung als

$$\boxed{u_{\mathrm{C}} = U\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right),} \tag{16.19}$$

wobei

$$\boxed{\tau = RC}$$

ist und als **Zeitkonstante** (des Aufladevorganges) bezeichnet wird. Bild 16.2b zeigt den Verlauf der Spannungen u_{C}, u_{Ce} und u_{Cf}.

Der Aufladestrom ergibt sich aus Gl. (16.19) mit $\tau = RC$ durch Anwendung von Gl. (16.14) als

$$\boxed{i = \frac{U}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} .} \tag{16.20}$$

Das Ergebnis zeigt, dass der Aufladestrom im Zeitpunkt $t = 0$ sprunghaft von $i = 0$ auf $i = U/R$ ansteigt und anschließend nach einer e-Funktion wieder auf Null zurückgeht.

Aufgabe 16.2

Ein Kondensator mit der Kapazität $C = 75$ nF, der nach Bild 16.3a auf die Spannung $U_{\mathrm{C0}} = 25$ V aufgeladen ist, wird über einen Widerstand $R = 10$ kΩ an eine Gleichspannung von $U = 200$ V gelegt.

Es ist der zeitliche Verlauf der am Kondensator liegenden Spannung u_{C} (Bild 16.3b) zu bestimmen. (Der Schaltaugenblick entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$.)

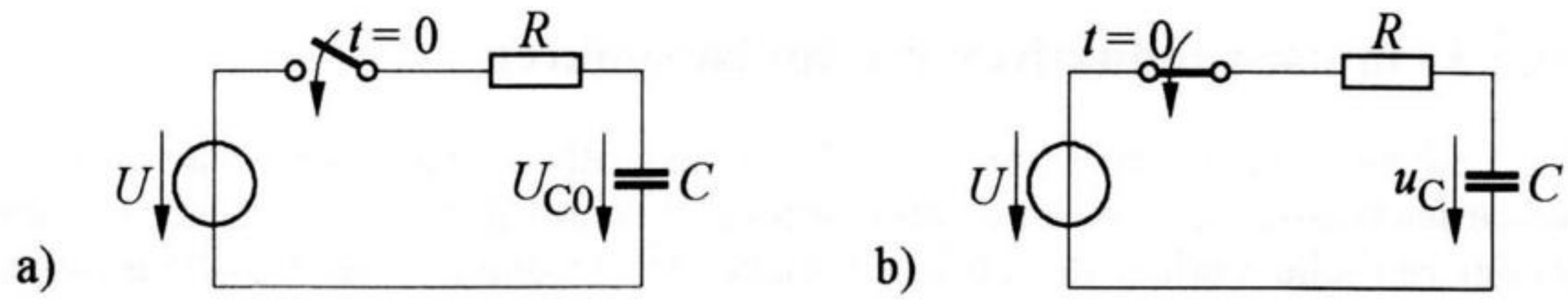


Bild 16.3 Anlegen einer RC-Reihenschaltung an Gleichspannung.
a) Schaltung bei (noch) geöffnetem Schalter, b) Schaltung bei geschlossenem Schalter

Lösung

Wir stellen die Kondensatorspannung nach Gl. (16.15) durch

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf}$$

dar. Die sich einstellende (stationäre) Kondensatorspannung ergibt sich aus Bild 16.3 als

$$u_{Ce} = U = 200\ \text{V}.$$

Für die freie Kondensatorspannung gilt nach Gl. (16.17)

$$u_{Cf} = u_{Cf0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}},$$

wobei u_{Cf0} eine noch zu bestimmende Konstante darstellt. Damit wird

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf} = U + u_{Cf0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{16.21}$$

Die hierin enthaltene Konstante (Spannung) u_{Cf0} erhalten wir aus der *Anfangsbedingung*, also aus der Tatsache, dass sich die Kondensatorspannung nicht sprunghaft ändern kann und daher im Zeitpunkt $t = 0$ den Wert $u_C = U_{C0} = 25\ \text{V}$ haben muss. Setzen wir diese Bedingung in Gl. (16.21) ein, so ergibt sich

$$25\ \text{V} = 200\ \text{V} + u_{Cf0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{0}{RC}}.$$

Hieraus folgt, wenn wir berücksichtigen, dass $\mathrm{e}^0 = 1$ ist,

$$u_{Cf0} = 25\ \text{V} - 200\ \text{V} = -175\ \text{V}.$$

Mit der Zeitkonstanten $\tau = RC = 10^4\ \Omega \cdot 75 \cdot 10^{-9}\ \text{F} = 750 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 750\ \mu\text{s}$ lautet das gesuchte Ergebnis

$$u_C = \underline{200\ \text{V} - 175\ \text{V} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{750\,\mu\text{s}}}}.$$

16.2.3 Ohmsch-induktiver Wechselstromkreis

Die Reihenschaltung einer Spule mit der Induktivität L und eines Widerstandes R werde nach Bild 16.4 an eine sinusförmige Wechselspannung u gelegt. Gesucht sei der zeitliche Verlauf des im Kreis fließenden Stromes i. Der Schaltaugenblick entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$.

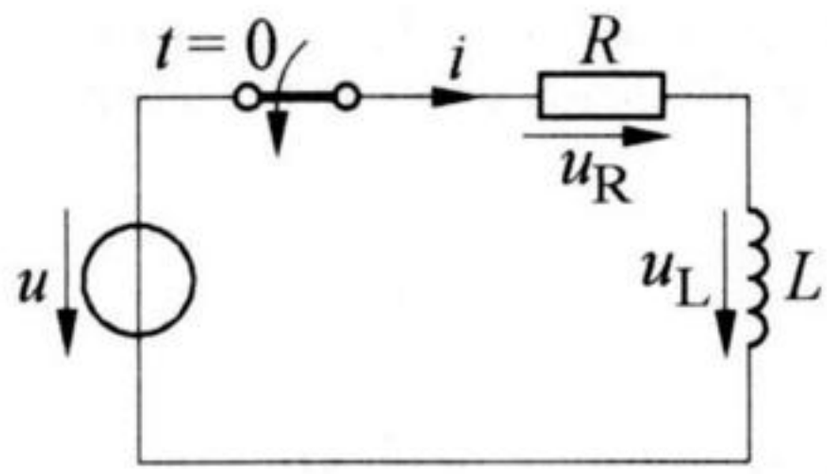


Bild 16.4 Anlegen einer Spule mit Reihenwiderstand an Wechselspannung

Bei geschlossenem Schalter gilt in Bild 16.4 für die Augenblickswerte der vorhandenen Spannungen

$$u_L + u_R = u. \tag{16.22}$$

Hierbei können wir die anliegende sinusförmige Wechselspannung nach Gl. (6.9) durch

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{16.23}$$

darstellen. Die auftretenden Teilspannungen lassen sich durch

$$u_L = L\frac{di}{dt} \qquad \text{und} \qquad u_R = Ri$$

wiedergeben. Damit wird aus Gl. (16.22)

$$L\frac{di}{dt} + Ri = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u). \tag{16.24}$$

Hierin ist φ_u derjenige Winkel, um den der positive Nulldurchgang der anliegenden Wechselspannung u vor dem Schaltzeitpunkt ($t = 0$) liegt.

Zur Lösung der in Gl. (16.24) angegebenen Differenzialgleichung zerlegen wir den gesuchten Strom i in den (sich einstellenden) *stationären* Strom i_e und den (vorübergehend auftretenden) *freien* Strom i_f. Es gilt somit

$$i = i_e + i_f. \tag{16.25}$$

Da der nach dem Schließen des Schalters auftretende Strom i in den stationären Strom i_e übergeht, muss Gl. (16.24) auch für $i = i_e$ gelten. Deshalb ist

$$L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{e}}{\mathrm{d}t} + Ri_\mathrm{e} = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u}). \tag{16.26}$$

Subtrahieren wir Gl. (16.26) von Gl. (16.24), so erhalten wir unter Berücksichtigung von Gl. (16.25)

$$L\frac{\mathrm{d}i_\mathrm{f}}{\mathrm{d}t} + Ri_\mathrm{f} = 0. \tag{16.27}$$

Den *stationären* Strom können wir nach den für sinusförmige Vorgänge bekannten Verfahren ermitteln. Der Strom hat nach Gl. (7.44) den Scheitelwert

$$\hat{i}_\mathrm{e} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \tag{16.28}$$

und eilt nach Gl. (7.54) der anliegenden Wechselspannung u um den Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R} \tag{16.29}$$

nach. Damit lautet die Gleichung für den zeitlichen Verlauf unter Beachtung von Gl. (16.23)

$$i_\mathrm{e} = \hat{i}_\mathrm{e}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u} - \varphi). \tag{16.30}$$

Die für den *freien* Strom geltende Gl. (16.27) stimmt mit Gl. (16.6) überein. Daher können wir als Lösung das in Gl. (16.9) angegebene Ergebnis

$$i_\mathrm{f} = i_\mathrm{f0}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \tag{16.31}$$

übernehmen, wobei i_f0 eine noch zu bestimmende Konstante ist. Setzen wir die Gln. (16.30) und (16.31) in Gl. (16.25) ein, so ergibt sich

$$\boxed{i = i_\mathrm{e} + i_\mathrm{f} = \hat{i}_\mathrm{e}\sin(\omega t + \varphi_\mathrm{u} - \varphi) + i_\mathrm{f0}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}.} \tag{16.32}$$

Die hierin enthaltene Konstante i_f0 erhalten wir aus der Überlegung, dass sich der Strom i infolge der vorhandenen Induktivität nicht sprunghaft ändern kann. Daher muss für $t = 0$ auch $i = 0$ sein. Verwenden wir diese *Anfangsbedingung* in Gl. (16.32), so finden wir

$$0 = \hat{i}_\mathrm{e}\sin(\omega\cdot 0 + \varphi_\mathrm{u} - \varphi) + i_\mathrm{f0}\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\cdot 0}.$$

Hieraus folgt mit $\mathrm{e}^0 = 1$

$$i_\mathrm{f0} = -\hat{i}_\mathrm{e}\sin(\varphi_\mathrm{u} - \varphi). \tag{16.33}$$

Damit stellt Gl. (16.32) in Verbindung mit den in den Gln. (16.28), (16.29) und (16.33) angegebenen Ergebnissen den gesuchten zeitlichen Verlauf des Stromes dar. In Bild 16.5 sind dieser Verlauf sowie der der Größen u, i_e und i_f dargestellt.

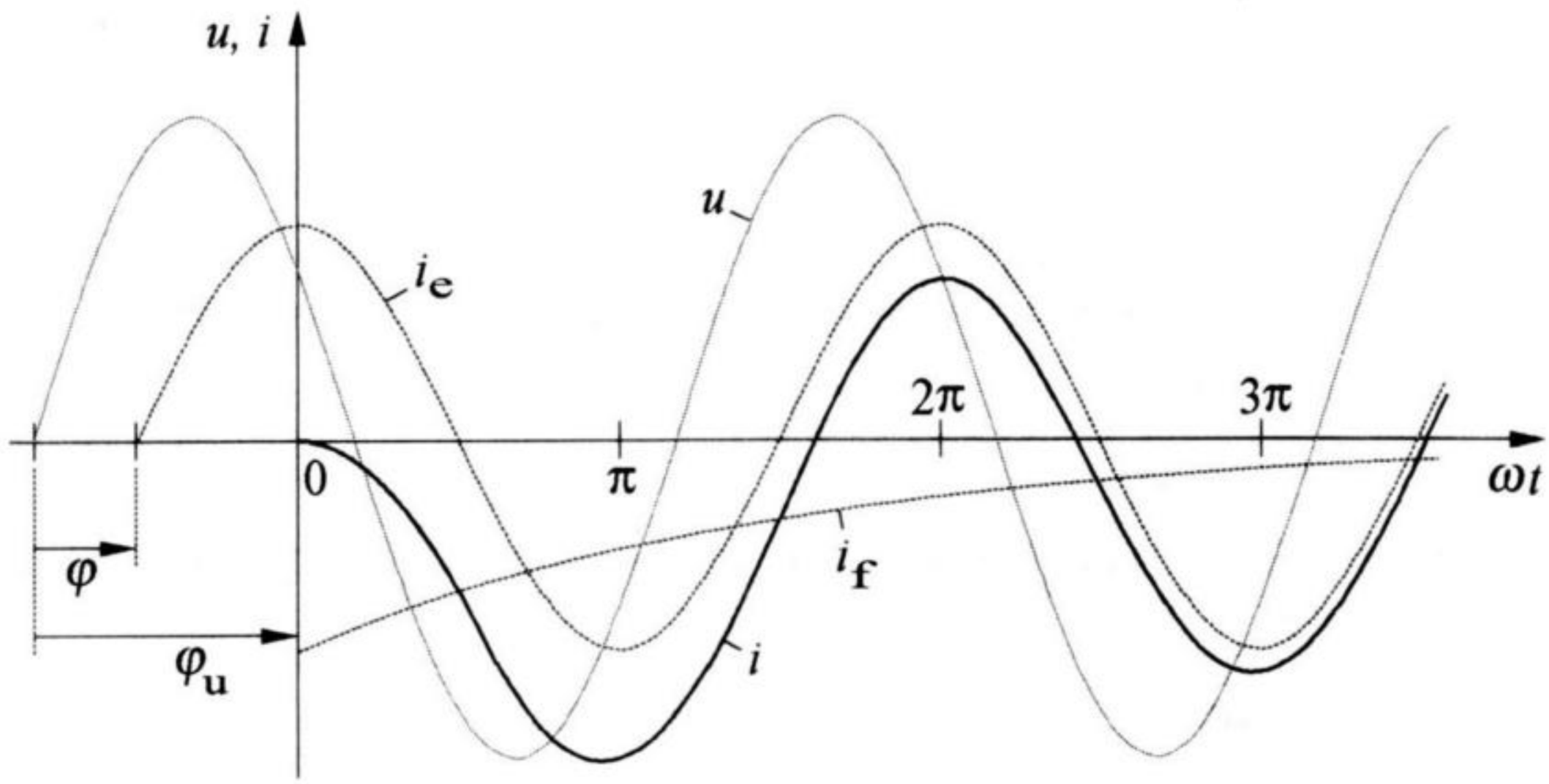


Bild 16.5 Zeitlicher Verlauf des Stromes (i) als Summe des stationären Stromes (i_e) und des freien Stromes (i_f) bei Anlegen einer RL-Reihenschaltung an Wechselspannung

Dem sinusförmig verlaufenden stationären Strom i_e ist der nach einer e-Funktion abklingende freie Strom i_f überlagert. Beide Ströme heben sich im Zeitpunkt $t = 0$ gegenseitig auf, so dass im Schaltzeitpunkt keine sprunghafte Änderung des Gesamtstromes i auftritt.

Aufgabe 16.3

Die in Bild 16.6 dargestellte Schaltung enthält die Widerstände $R_1 = 600\ \Omega$ und $R_2 = 200\ \Omega$ sowie eine Spule mit der Induktivität L = 100 mH. Die anliegende Wechselspannung hat den Scheitelwert $\hat{u} = 35$ V und die Frequenz f = 1 kHz.

Es ist die Abhängigkeit des Stromes i von der Zeit t anzugeben unter der Voraussetzung, dass der Schalter im positiven Nulldurchgang der Spannung u geschlossen wird. (Der Schaltaugenblick entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$.)

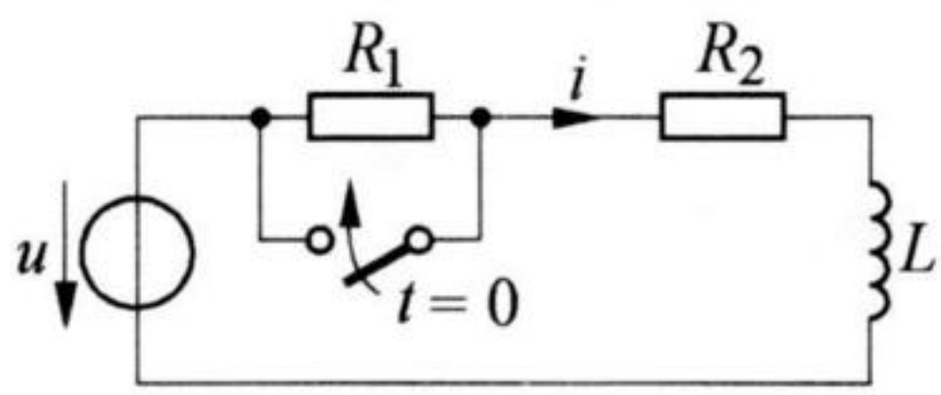


Bild 16.6 Schaltungsbeispiel zur Berechnung des Einschwingvorgangs in einem Wechselstromkreis

Lösung

Wir stellen den gesuchten Strom nach Gl. (16.25) durch

$$i = i_e + i_f$$

dar. Der *stationäre* Strom i_e hat nach Gl. (16.28), wenn wir berücksichtigen, dass der Blindwiderstand der Spule $\omega L = 2\pi \cdot 1000\ \text{Hz} \cdot 0{,}1\ \text{H} = 628\ \Omega$ beträgt, den Scheitelwert

$$\hat{i}_e = \frac{\hat{u}}{\sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2}} = \frac{35\ \text{V}}{\sqrt{200^2 + 628^2}\ \Omega} = 53{,}1\ \text{mA}$$

und eilt nach Gl. (16.29) der Spannung u um den Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L}{R_2} = \arctan \frac{628\ \Omega}{200\ \Omega} = 72{,}3°$$

nach. Da der Schalter im positiven Nulldurchgang der Spannung u geschlossen wird, muss zur Darstellung der Spannung gemäß Gl. (16.23) der Nullphasenwinkel φ_u gleich Null gesetzt werden, so dass

$$u = \hat{u} \sin \omega t$$

ist. Folglich gilt für den zeitlichen Verlauf des stationären Stromes

$$i_e = \hat{i}_e \sin(\omega t - \varphi) = 53{,}1\ \text{mA} \cdot \sin(\omega t - 72{,}3°).$$

Für den *freien* Strom gilt nach Gl. (16.31)

$$i_f = i_{f0}\, e^{-\frac{R_2}{L} t},$$

wobei i_{f0} eine noch zu bestimmende Konstante ist. Damit ergibt sich für den Gesamtstrom

$$i = i_e + i_f = 53{,}1\ \text{mA} \cdot \sin(\omega t - 72{,}3°) + i_{f0}\, e^{-\frac{R_2}{L} t}. \tag{16.34}$$

Zur Bestimmung der hierin enthaltenen Konstanten i_{f0} benötigen wir den im Zeitpunkt $t = 0$ fließenden Strom i. Dazu betrachten wir die Schaltung nach Bild 16.6 vor dem Schließen des Schalters. Der dann fließende Strom hat den Scheitelwert

$$\hat{i}' = \frac{\hat{u}}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}} = \frac{35\ \text{V}}{\sqrt{(600 + 200)^2 + 628^2}\ \Omega} = 34{,}4\ \text{mA}$$

und eilt gegenüber der Spannung u um Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi' = \arctan \frac{\omega L}{R_1 + R_2} = \arctan \frac{628\ \Omega}{(600+200)\ \Omega} = 38{,}15°$$

nach. Der Strom hat im Zeitpunkt $t = 0$ somit den Wert

$$i'(0) = \hat{i}' \sin(\omega \cdot 0 - \varphi') = 34{,}4\ \text{mA} \cdot \sin(-38{,}15°) = -21{,}3\ \text{mA}.$$

Da sich der Strom nicht sprunghaft ändern kann, muss *nach* dem Schließen des Schalters im Zeitpunkt $t = 0$ ebenfalls $i = -21{,}3$ mA sein. Setzen wir diese *Anfangsbedingung* in Gl. (16.34) ein, so erhalten wir

$$-21{,}3\ \text{mA} = 53{,}1\ \text{mA} \cdot \sin(\omega \cdot 0 - 72{,}3°) + i_{f0}\, e^{-\frac{R_2}{L} \cdot 0}.$$

Daraus folgt mit $e^0 = 1$

$$i_{f0} = 53{,}1\ \text{mA} \cdot \sin 72{,}3° - 21{,}3\ \text{mA} = 29{,}3\ \text{mA}.$$

Somit lautet das gesuchte Ergebnis mit der Zeitkonstanten $\tau = L/R_2 = 500\ \mu\text{s}$

$$i = \underline{53{,}1\ \text{mA} \cdot \sin(\omega t - 72{,}3°) + 29{,}3\ \text{mA} \cdot e^{-\frac{t}{500\ \mu s}}},$$

wobei $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 1000\ \text{Hz} = 6{,}28 \cdot 10^3\ \text{s}^{-1}$ beträgt.

16.2.4 Ohmsch-kapazitiver Wechselstromkreis

Die Reihenschaltung eines Kondensators mit der Kapazität C und eines Widerstandes R werde nach Bild 16.7 an eine sinusförmige Wechselspannung u gelegt. Gesucht sei der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung u_C. Der Schaltaugenblick entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$.

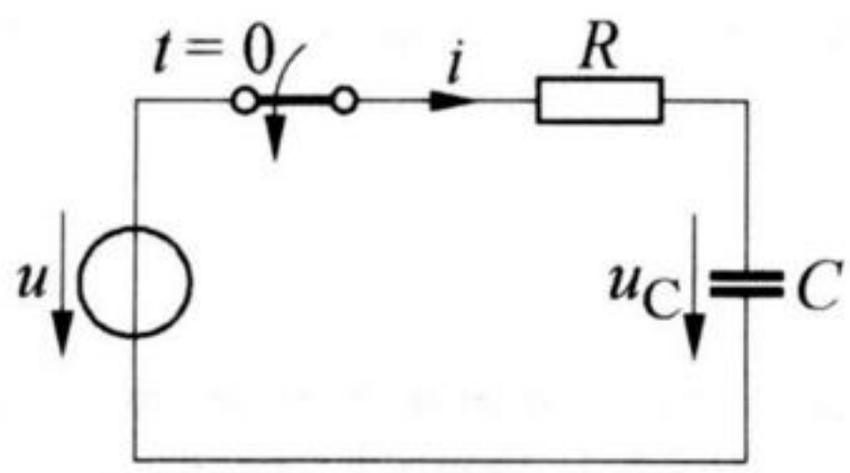


Bild 16.7 Anlegen eines Kondensators mit Reihenwiderstand an Wechselspannung

Die anliegende Wechselspannung können wir entsprechend Gl. (16.23) durch

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{16.35}$$

darstellen. Die zu bestimmende Kondensatorspannung zerlegen wir in

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf} \,. \tag{16.36}$$

Die hierin enthaltene *stationäre* Kondensatorspannung u_{Ce} hat nach den Gln. (7.58) und (7.63) den Scheitelwert

$$\hat{u}_{Ce} = \hat{u} \frac{\dfrac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \,. \tag{16.37}$$

Die anliegende Spannung (u) ist gegenüber dem stationären Strom (i_e) nach Gl. (7.64) um

$$\varphi = -\arctan \frac{1/(\omega C)}{R} \tag{16.38}$$

phasenverschoben. Da u_{Ce} wiederum gegenüber i_e um 90° nacheilt, erhalten wir für den Verlauf der stationären Kondensatorspannung durch Vergleich mit Gl. (16.35)

$$u_{Ce} = \hat{u}_{Ce} \sin(\omega t + \varphi_u - 90° - \varphi) \,. \tag{16.39}$$

Für die *freie* Kondensatorspannung gilt nach Gl. (16.17)

$$u_{Cf} = u_{Cf0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \,. \tag{16.40}$$

Setzen wir die Gln. (16.39) und (16.40) in Gl. (16.36) ein, so ergibt sich

$$\boxed{u_C = u_{Ce} + u_{Cf} = \hat{u}_{Ce} \sin(\omega t + \varphi_u - 90° - \varphi) + u_{Cf0} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \,.} \tag{16.41}$$

Die hierin noch zu bestimmende Konstante u_{Cf0} erhalten wir aus der *Anfangsbedingung*. Ist der Kondensator im Zeitpunkt $t = 0$ beispielsweise auf eine Spannung U_{C0} aufgeladen, so wird aus Gl. (16.41), wenn wir $t = 0$ setzen,

$$U_{C0} = \hat{u}_{Ce} \sin(\omega \cdot 0 + \varphi_u - 90° - \varphi) + u_{Cf0} \cdot e^{-\frac{0}{RC}} \,.$$

Hieraus folgt mit $e^0 = 1$

$$u_{Cf0} = U_{C0} - \hat{u}_{Ce} \sin(\varphi_u - 90° - \varphi) \,. \tag{16.42}$$

Damit stellt Gl. (16.41) unter Berücksichtigung der in den Gln. (16.37), (16.38) und (16.42) angegebenen Ergebnisse den gesuchten zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung dar. φ_u ist derjenige Winkel, um den der positive Nulldurchgang der anliegenden Wechselspannung u vor dem Schaltzeitpunkt ($t = 0$) liegt.

16.3 Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen

16.3.1 Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen bei Gleichspannungsversorgung

Eine aus einem Widerstand R, einer Spule (mit der Induktivität L) und einem Kondensator (mit der Kapazität C) bestehende Reihenschaltung werde nach Bild 16.8a an eine Gleichspannungsquelle (mit der Spannung U) angeschlossen.

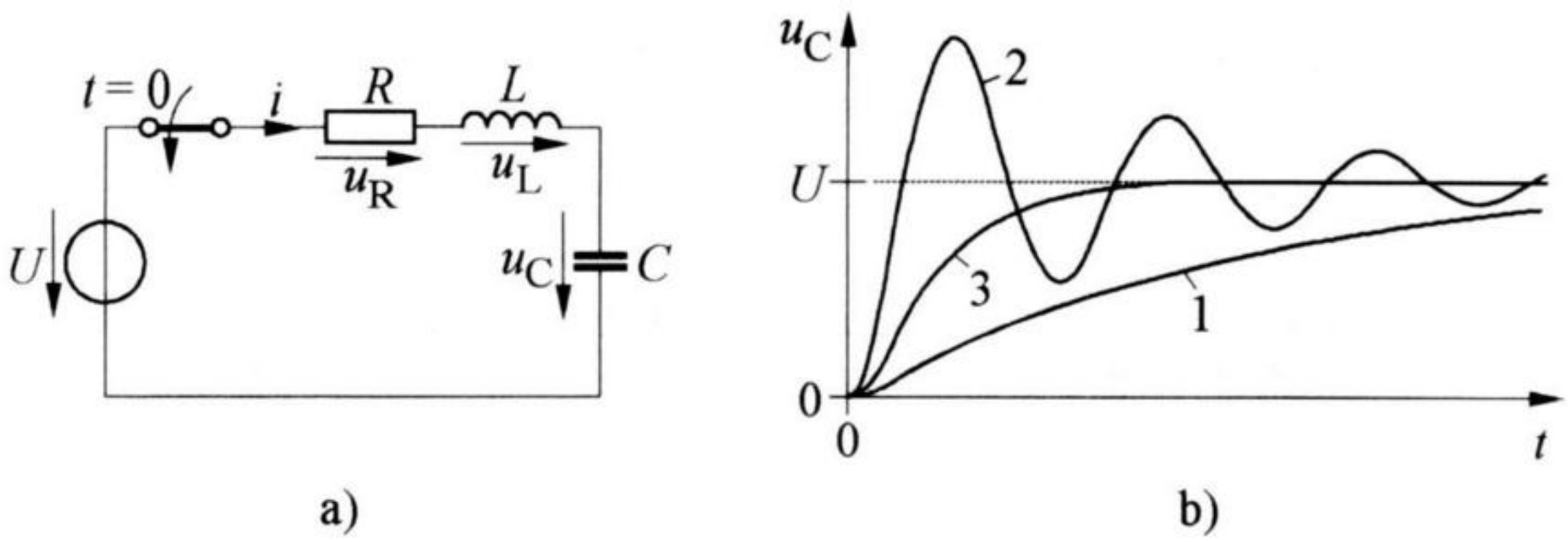


Bild 16.8 Anlegen einer RLC-Reihenschaltung an Gleichspannung. a) Schaltung, b) zeitlicher Verlauf von u_C (1 aperiodischer Fall, 2 periodischer Fall, 3 aperiodischer Grenzfall)

Der Schaltzeitpunkt entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$. Es stellt sich die Frage, welchen zeitlichen Verlauf die Kondensatorspannung u_C hat. Dazu ersehen wir aus Bild 16.8a, dass bei geschlossenem Schalter

$$u_L + u_R + u_C = U \tag{16.43}$$

ist. Nach Gl. (16.14) gilt

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.$$

Damit wird

$$u_R = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \tag{16.44}$$

und

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}. \tag{16.45}$$

Setzen wir die Gln. (16.44) und (16.45) in Gl. (16.43) ein, so ergibt sich

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} = U\,. \tag{16.46}$$

Wir erhalten also eine *inhomogene Differenzialgleichung 2. Ordnung*. Zu deren Lösung verwenden wir den Ansatz

$$u_\mathrm{C} = u_\mathrm{Ce} + u_\mathrm{Cf}\,. \tag{16.47}$$

Hierin stellt u_Ce die sich (nach längerer Zeit) einstellende *stationäre* Kondensatorspannung dar. Da u_C in u_Ce übergeht, muss Gl. (16.46) auch für $u_\mathrm{C} = u_\mathrm{Ce}$ gelten, so dass

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{Ce}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{Ce}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{Ce} = U \tag{16.48}$$

ist. Ziehen wir unter Berücksichtigung von Gl. (16.47) die Gln. (16.46) und (16.48) voneinander ab, so erhalten wir

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{Cf}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{Cf}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{Cf} = 0.$$

Hieraus folgt, wenn wir alle Ausdrücke durch LC teilen,

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{Cf}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{Cf}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_\mathrm{Cf} = 0. \tag{16.49}$$

Die Bestimmung der *stationären* Kondensatorspannung u_Ce (und damit die Lösung von Gl. (16.48)) können wir anhand von Bild 16.8a leicht vornehmen. Aus der Schaltung ersehen wir, dass sich nach längerer (unendlich langer) Zeit am Kondensator die Spannung

$$u_\mathrm{Ce} = U \tag{16.50}$$

einstellt. Zur Ermittlung der *freien* Kondensatorspannung u_Cf (und damit zur Lösung von Gl. (16.49)) verwenden wir den Lösungsansatz

$$u_\mathrm{Cf} = k\,\mathrm{e}^{pt}\,. \tag{16.51}$$

Darin sind k und p noch zu bestimmende Konstanten. Aus Gl. (16.51) folgt

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{Cf}}{\mathrm{d}t} = p\,k\,\mathrm{e}^{pt}\,, \tag{16.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{Cf}}{\mathrm{d}t^2} = p^2\,k\,\mathrm{e}^{pt}\,. \tag{16.53}$$

Setzen wir die Gln. (16.52) und (16.53) in Gl. (16.49) ein, so ergibt sich

$$p^2\, k\,\mathrm{e}^{pt} + \frac{R}{L}\, p\, k\,\mathrm{e}^{pt} + \frac{1}{LC}\, k\,\mathrm{e}^{pt} = 0.$$

Wir teilen alle Ausdrücke durch $k\,\mathrm{e}^{pt}$ und erhalten die quadratische Gleichung

$$p^2 + \frac{R}{L}\, p + \frac{1}{LC} = 0. \tag{16.54}$$

Ihre beiden Lösungen lauten

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}. \tag{16.55}$$

Damit erhalten wir nach Gl. (16.51) für die freie Kondensatorspannung die allgemeine Lösung

$$u_{\mathrm{Cf}} = k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}, \tag{16.56}$$

wobei k_1 und k_2 noch zu bestimmende Konstanten darstellen. Je nachdem, welche Werte sich in Gl. (16.55) für p_1 und p_2 ergeben, kann man drei Fälle unterscheiden.

1. aperiodischer Fall

Ist in Gl. (16.55)

$$\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC},$$

so sind p_1 und p_2 reell und negativ. Setzen wir die Gln. (16.50) und (16.56) in Gl. (16.47) ein, so erhalten wir als allgemeine Lösung für die gesuchte Kondensatorspannung

$$\boxed{u_{\mathrm{C}} = U + k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}.} \tag{16.57}$$

Das bedeutet, dass die Kondensatorspannung u_{C} in Bild 16.8a nach zwei e-Funktionen (schwingungsfrei) den stationären Endwert U erreicht. Man spricht daher vom **aperiodischen Fall**. In Bild 18.8b ist der Verlauf von u_{C} prinzipiell dargestellt (Kennlinie 1).

2. periodischer Fall

Für den Fall, dass in Gl. (16.55)

$$\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$$

ist, ergeben sich für p_1 und p_2 konjugiert komplexe Werte. Sie lauten

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \mathrm{j}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \tag{16.58}$$

Mit den Abkürzungen

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

und

$$\omega_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

lässt sich Gl. (16.58) durch

$$p_{1,2} = -\delta \pm \mathrm{j}\omega_\mathrm{e} \tag{16.59}$$

darstellen. Setzen wir dieses Ergebnis in Gl. (16.56) ein, so erhalten wir

$$u_\mathrm{Cf} = k_1 \mathrm{e}^{(-\delta + \mathrm{j}\omega_\mathrm{e})t} + k_2 \mathrm{e}^{(-\delta - \mathrm{j}\omega_\mathrm{e})t}.$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$u_\mathrm{Cf} = e^{-\delta t}\left(k_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{e} t} + k_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{e} t}\right). \tag{16.60}$$

Da die Spannung u_Cf eine *reelle* Größe ist, müssen die in dieser Gleichung enthaltenen Konstanten k_1 und k_2 konjugiert komplex zueinander sein. Daher können wir die Ansätze

$$k_1 = a + \mathrm{j}b,$$

$$k_2 = a - \mathrm{j}b$$

einführen, wobei a und b andere (neue) Konstanten sind. Wir setzen diese Ausdrücke in Gl. (16.60) ein und erhalten

$$u_\mathrm{Cf} = \mathrm{e}^{-\delta t}\left[a\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{e} t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{e} t}\right) - b\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_\mathrm{e} t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_\mathrm{e} t}}{\mathrm{j}}\right)\right]. \tag{16.61}$$

Berücksichtigen wir, dass

$$e^{j\omega_e t} + e^{-j\omega_e t} = 2\cos\omega_e t$$

ist und

$$\frac{e^{j\omega_e t} - e^{-j\omega_e t}}{j} = 2\sin\omega_e t\,,$$

so kann Gl. (16.61) in der Form

$$u_{Cf} = e^{-\delta t}\left(C_1\cos\omega_e t + C_2\sin\omega_e t\right) \tag{16.62}$$

dargestellt werden. Hierbei sind C_1 und C_2 andere (noch zu bestimmende) Konstanten. Gl. (16.62) lässt sich mit

$$C_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$$

und

$$\psi = \arctan\frac{C_2}{C_1}$$

ersetzen durch

$$u_{Cf} = e^{-\delta t}\,C_0\cos(\omega_e t - \psi)\,. \tag{16.63}$$

Setzen wir die in den Gln. (16.50) und (16.63) gefundenen Ergebnisse in Gl. (16.47) ein, so erhalten wir als allgemeine Lösung

$$\boxed{u_C = U + e^{-\delta t}\,C_0\cos(\omega_e t - \psi)\,.} \tag{16.64}$$

Das bedeutet, dass die Kondensatorspannung u_C in Bild 16.8a mit der Kreisfrequenz ω_e um den stationären Endwert U schwingt, wobei die Scheitelwerte der Schwingungen nach einer e-Funktion abnehmen. Es handelt sich also um eine **gedämpfte Schwingung**. Man bezeichnet den betreffenden Einschwingvorgang als **periodischen Fall**. Der Verlauf von u_C ist in Bild 18.8b prinzipiell dargestellt (Kennlinie 2). Die sich aus der Kreisfrequenz ω_e ergebende Frequenz der auftretenden Schwingung

$$f_e = \frac{\omega_e}{2\pi}$$

heißt **Eigenfrequenz**. Man bezeichnet die auftretenden Schwingungen auch als **freie Schwingungen** (vergl. Abschnitt 12.1).

3. aperiodischer Grenzfall

Ist in Gl. (16.55)

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}, \tag{16.65}$$

so erhält man für $p_{1,2}$ die Doppelwurzel

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} = -\delta. \tag{16.66}$$

Dann wird aus Gl. (16.56) - auf die Herleitung soll hier verzichtet werden -

$$u_{\mathrm{Cf}} = \mathrm{e}^{-\delta t}\,(K_1 + K_2 t). \tag{16.67}$$

Setzen wir die in den Gln. (16.50) und (16.67) gefundenen Ergebnisse in Gl. (16.47) ein, so erhalten wir als allgemeine Lösung

$$\boxed{u_{\mathrm{C}} = U + \mathrm{e}^{-\delta t}\,(K_1 + K_2 t),} \tag{16.68}$$

wobei K_1 und K_2 noch zu bestimmende Konstanten sind. Im vorliegenden Fall erreicht die Kondensatorspannung u_{C} in Bild 18.8a den Endwert U schneller als bei jedem anderen aperiodischen Fall. Man bezeichnet den Vorgang als **aperiodischen Grenzfall**. In Bild 18.8b ist der Verlauf von u_{C} prinzipiell dargestellt (Kennlinie 3).

Nach Ermittlung der für u_{C} geltenden *allgemeinen* Lösungen für die drei möglichen Fälle (aperiodischer Fall, periodischer Fall, aperiodischer Grenzfall) soll jetzt untersucht werden, wie die noch zu bestimmenden Konstanten (k_1, k_2, C_0, ψ, K_1, K_2) berechnet werden können. Wir benötigen dazu zwei **Anfangsbedingungen**.

Ist zum Beispiel in Bild (16.8a) der Kondensator vor dem Schließen des Schalters nicht aufgeladen, so lautet *eine* der Anfangsbedingungen

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad u_{\mathrm{C}} = 0.$$

Die *andere* Anfangsbedingung erhalten wir aus der Tatsache, dass in Bild 16.8a bei $t = 0$ - wegen der vorhandenen Spule - auch $i = 0$ sein muss. Da nach Gl. (15.14)

$$i = C\frac{\mathrm{d}\,u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t}$$

ist, lautet diese Anfangsbedingung somit

$$t = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Setzt man diese Anfangsbedingungen in die in den Gln. (16.57) oder (16.64) oder (16.68) angegebenen allgemeinen Lösungen ein, so lassen sich die gesuchten Konstanten bestimmen. Damit sind die endgültigen Lösungen für den Verlauf der Kondensatorspannung u_C in Bild 18.8a bekannt.

Aufgabe 16.4

Ein nach Bild 16.9a auf die Spannung $U = 230$ V aufgeladener Kondensator mit der Kapazität $C = 3$ µF soll über eine Reihenschaltung aus dem Widerstand $R = 750\ \Omega$ und einer Spule mit der Induktivität $L = 250$ mH entladen werden.

Es ist der zeitliche Verlauf des Stromes i nach Bild 16.9b zu bestimmen, der nach dem Schließen des Schalters auftritt. Der Schaltzeitpunkt entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$.

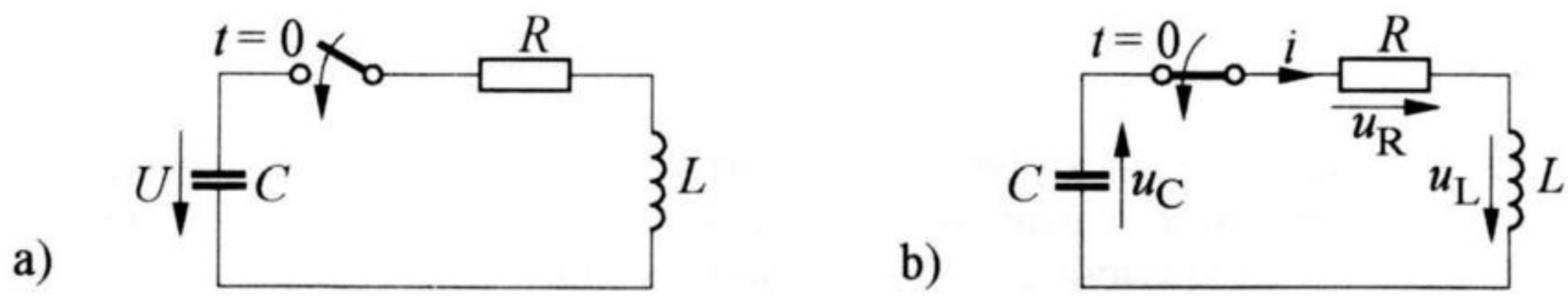


Bild 16.9 Entladung eines Kondensators über eine RL-Reihenschaltung.
a) Zustand vor dem Einsetzen des Entladevorgangs, b) Zustand während des Entladevorgangs

Lösung

Wir geben für die auftretenden Spannungen die in Bild 16.9b eingetragenen Bezugspfeile vor. Die Vorgaben führen zu der Gleichung

$$u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R} + u_\mathrm{C} = 0.$$

Mit den in den Gln. (16.44) und (16.45) angegebenen Beziehungen

$$u_\mathrm{R} = Ri = RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t}$$

und

$$u_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2}$$

wird daraus

$$LC\frac{\mathrm{d}^2 u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} + u_\mathrm{C} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen Differenzialgleichung 2. Ordnung lautet nach Gl. (16.56)

$$u_\mathrm{C} = k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}, \tag{16.69}$$

wobei nach Gl. (16.55)

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

ist. Setzen wir hierin die gegebenen Werte ein, so erhalten wir

$$p_{1,2} = -\frac{750\,\Omega}{2\cdot 0{,}25\,\mathrm{H}} \pm \sqrt{\frac{(750\,\Omega)^2}{4\cdot(0{,}25\,\mathrm{H})^2} - \frac{1}{0{,}25\,\mathrm{H}\cdot 3\cdot 10^{-6}\ \mathrm{F}}},$$

$$p_1 = -543\,\frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad p_2 = -2457\,\frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{16.70}$$

Die Ergebnisse sind also reell, so dass der *aperiodische Fall* vorliegt. Die in Gl. (16.69) enthaltenen Konstanten k_1 und k_2 gewinnen wir aus den *Anfangsbedingungen*. So ersehen wir aus Bild 16.9, dass bei $t = 0$ die Kondensatorspannung $u_\mathrm{C} = -U$ sein muss. Setzen wir diese Bedingung in Gl. (16.69) ein, so finden wir

$$-U = k_1\,\mathrm{e}^{p_1 0} + k_2\,\mathrm{e}^{p_2 0}.$$

Hieraus folgt mit $\mathrm{e}^0 = 1$

$$k_1 + k_2 = -U. \tag{16.71}$$

Weiterhin ersehen wir aus Bild 16.9, dass infolge der vorhandenen Spule bei $t = 0$ auch $i = 0$ sein muss. Da wiederum $i = C\,\mathrm{d}u_\mathrm{C}/\mathrm{d}t$ ist, muss bei $t = 0$ auch $\mathrm{d}u_\mathrm{C}/\mathrm{d}t = 0$ sein. Aus Gl. (16.69) ergibt sich durch Differenzieren nach der Zeit t

$$\frac{\mathrm{d}u_\mathrm{C}}{\mathrm{d}t} = p_1 k_1\,\mathrm{e}^{p_1 t} + p_2 k_2\,\mathrm{e}^{p_2 t}.$$

Setzen wir hierin die Anfangsbedingung $\mathrm{d}u_\mathrm{C}/\mathrm{d}t = 0$ für $t = 0$ ein, so wird

$$0 = p_1 k_1\,\mathrm{e}^{p_1 0} + p_2 k_2\,\mathrm{e}^{p_2 0}.$$

Hieraus folgt mit $\mathrm{e}^0 = 1$

$$p_1 k_1 + p_2 k_2 = 0. \tag{16.72}$$

Damit stellen die Gln. (16.71) und (16.72) zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten (k_1 und k_2) dar. Die Lösungen lauten:

$$k_1 = -295\ \text{V}, \qquad k_2 = 65\ \text{V}.$$

Setzen wir diese Ergebnisse in Gl. (16.69) ein, so erhalten wir den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung u_C. Jedoch ist nicht dieser Verlauf gesucht, sondern der des Stromes i. Daher bilden wir zunächst aus Gl. (16.69)

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = C\left(p_1 k_1 \mathrm{e}^{p_1 t} + p_2 k_2 \mathrm{e}^{p_2 t}\right).$$

In diese Gleichung setzen wir die vorhandenen Werte ein und finden dadurch die endgültige Lösung

$$\underline{i = 0{,}48\ \text{A}\left(\mathrm{e}^{-543\frac{1}{\text{s}}t} - \mathrm{e}^{-2457\frac{1}{\text{s}}t}\right)}.$$

Aufgabe 16.5

In der in Bild 16.10a dargestellten Schaltung mit U = 120 V, $R_1 = 400\,\Omega$, $R_2 = 600\,\Omega$, L = 50 mH und C = 200 nF wird der Schalter S geschlossen. Der Schaltzeitpunkt entspreche dem Zeitpunkt $t = 0$.

Es ist der zeitliche Verlauf der Kondensatorspannung u_C für $t \geq 0$ zu bestimmen.

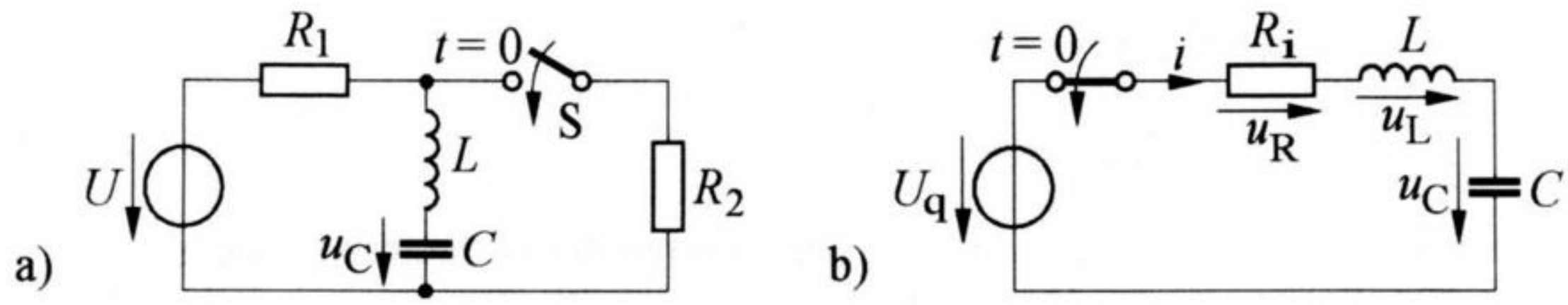


Bild 16.10 Schaltvorgang in einer RLC-Schaltung. a) Zustand vor dem Schaltvorgang, b) Ersatzschaltung nach Vornahme des Schaltvorgangs

Lösung

Bei geschlossenem Schalter S können wir die vorliegende Schaltung durch Einführen einer *Ersatzspannungsquelle* in die in Bild 16.10b dargestellte Ersatzschaltung umwandeln. Dabei gilt (vergl. Abschnitt 2.2.10):

$$U_q = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 120\ \text{V}\frac{600\ \Omega}{(400 + 600)\ \Omega} = 72\ \text{V},$$

$$R_i = \frac{R_1\ R_2}{R_1 + R_2} = \frac{400 \cdot 600}{(400 + 600)}\ \Omega = 240\ \Omega.$$

Die entstandene Schaltung stimmt mit der in Bild 16.8a angegebenen überein. Daher lautet die Differenzialgleichung zur Bestimmung der gesuchten Spannung u_C nach Gl. (16.46)

$$LC\frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_q\,. \tag{16.73}$$

Zur Lösung dieser Gleichung verwenden wir den Ansatz

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf}\,, \tag{16.74}$$

wobei u_{Ce} die sich (nach längerer Zeit) einstellende *stationäre* Kondensatorspannung ist. Dadurch zerfällt Gl. (16.73) in die beiden voneinander unabhängigen Differenzialgleichungen

$$LC\frac{d^2 u_{Ce}}{dt^2} + RC\frac{du_{Ce}}{dt} + u_{Ce} = U_q\,. \tag{16.75}$$

und

$$LC\frac{d^2 u_{Cf}}{dt^2} + RC\frac{du_{Cf}}{dt} + u_{Cf} = 0. \tag{16.76}$$

Die sich einstellende (stationäre) Kondensatorspannung - und damit die Lösung der in Gl. (16.75) angegebenen Differenzialgleichung - erhalten wir aus Bild 16.10b als

$$u_{Ce} = U_q\,. \tag{16.77}$$

Die allgemeine Lösung der in Gl. (16.76) angegebenen Differenzialgleichung lautet nach Gl. (16.56)

$$u_{Cf} = k_1\,e^{p_1 t} + k_2\,e^{p_2 t}. \tag{16.78}$$

Dabei gilt nach Gl. (16.55):

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}, \tag{16.79}$$

$$p_{1,2} = -\frac{200\,\Omega}{2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{H}} \pm \sqrt{\frac{(240\,\Omega)^2}{4 \cdot (0{,}05\,\mathrm{H})^2} - \frac{1}{0{,}05\,\mathrm{H} \cdot 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{F}}}$$

$$p_{1,2} = (-2400 \pm \mathrm{j}\,9708)\ \frac{1}{\mathrm{s}}. \tag{16.80}$$

Es ergeben sich also konjugiert komplexe Werte, so dass der *periodische Fall* vorliegt. Nach Gl. (16.64) können wir die in Gl. (16.78) angegebene Lösung daher auch durch

$$u_{\mathrm{Cf}} = \mathrm{e}^{-\delta t}\, C_0 \cos(\omega_{\mathrm{e}} t - \psi) \tag{16.81}$$

ersetzen, worin durch Vergleich mit Gl. (16.80) gilt:

$$\delta = 2400\ \frac{1}{\mathrm{s}}, \qquad \omega_{\mathrm{e}} = 9708\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung für die Kondensatorspannung durch Anwendung von Gl. (16.74) unter Berücksichtigung der Gln. (16.77) und (16.81)

$$u_{\mathrm{C}} = u_{\mathrm{Ce}} + u_{\mathrm{Cf}} = U_{\mathrm{q}} + \mathrm{e}^{-\delta t}\, C_0 \cos(\omega_{\mathrm{e}} t - \psi). \tag{16.82}$$

Zur Bestimmung der hierin noch unbekannten Konstanten C_0 und ψ betrachten wir die *Anfangsbedingungen* der Schaltung. So ist zum Beispiel aus Bild 16.10a zu ersehen, dass der Kondensator im Zeitpunkt $t = 0$ auf die Spannung $u_{\mathrm{C}} = U$ aufgeladen ist. Setzen wir diese Bedingung in Gl. (16.82) ein, so erhalten wir

$$U = U_{\mathrm{q}} + \mathrm{e}^{-\delta \cdot 0}\, C_0 \cos(\omega_{\mathrm{e}} \cdot 0 - \psi).$$

Daraus wird mit $\cos(-\psi) = \cos(\psi)$

$$U = U_{\mathrm{q}} + C_0 \cos\psi. \tag{16.83}$$

Weiterhin muss im Zeitpunkt $t = 0$ wegen $i = 0$ auch $\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}/\mathrm{d}t = 0$ sein. Aus Gl. (16.82) folgt durch Differenzieren nach der Zeit t

$$\frac{\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{-\delta t}\,(-\delta)\, C_0 \cos(\omega_{\mathrm{e}} t - \psi) + \mathrm{e}^{-\delta t}\, C_0 \left[-\sin(\omega_{\mathrm{e}} t - \psi)\right] \omega_{\mathrm{e}}.$$

Setzen wir hierin die Bedingung $\mathrm{d}u_{\mathrm{C}}/\mathrm{d}t = 0$ ein, so erhalten wir

$$0 = -\,\mathrm{e}^{-\delta\cdot 0}\,\delta\,C_0\cos(\omega_\mathrm{e}\cdot 0-\psi)-\mathrm{e}^{-\delta\cdot 0}\,C_0\,\omega_\mathrm{e}\sin(\omega_\mathrm{e}\cdot 0-\psi)\,.$$

Hieraus folgt

$$\psi = \arctan\frac{\delta}{\omega_\mathrm{e}} = \arctan\frac{2400}{9708} = 13{,}89°\,.$$

Damit erhalten wir aus Gl. (16.83)

$$C_0 = \frac{U-U_\mathrm{q}}{\cos\psi} = \frac{(120-72)\ \mathrm{V}}{\cos 13{,}89°} = 49{,}45\ \mathrm{V}\,.$$

Setzen wir die gefundenen Werte in Gl. (16.82) ein, so finden wir die endgültige Lösung für den Verlauf der Kondensatorspannung als

$$\underline{u_\mathrm{C} = 72\ \mathrm{V} + \mathrm{e}^{-2400\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,t}\cdot 49{,}45\ \mathrm{V}\cdot\cos\left(9708\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,t - 13{,}89°\right)}\,.$$

Die Kondensatorspannung erreicht also mit einer gedämpften Schwingung der Kreisfrequenz $\omega_\mathrm{e} = 9708\ 1/\mathrm{s}$ den Endwert $u_\mathrm{C} = U_\mathrm{q} = 72\ \mathrm{V}$.

16.3.2 Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen bei Wechselspannungsversorgung

Es sollen jetzt Schaltvorgänge in RLC-Schaltungen unter der Voraussetzung betrachtet werden, dass die betreffenden Stromkreise mit Wechselspannungen versorgt werden. Dazu gehen wir von Bild 16.11 aus, in der eine RLC-Reihenschaltung mit einer Wechselspannungsquelle verbunden wird.

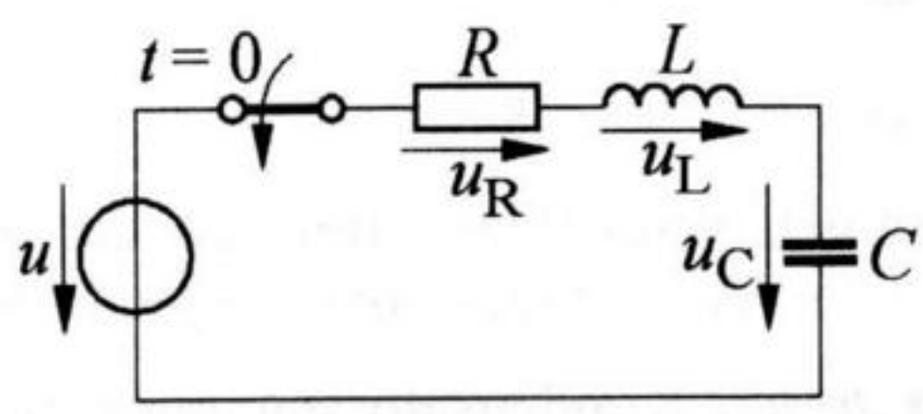


Bild 16.11 Anlegen einer RLC-Reihenschaltung an Wechselspannung

In der Schaltung gilt

$$u_\mathrm{L} + u_\mathrm{R} + u_\mathrm{C} = u\,. \tag{16.84}$$

Hierbei sei u eine gegebene sinusförmige Wechselspannung (Versorgungsspannung), die nach Gl. (6.9) durch

$$u = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \tag{16.85}$$

dargestellt werden kann. Berücksichtigen wir ferner, dass wir für u_L und u_R die in den Gln. (16.44) und (16.45) angegebenen Beziehungen verwenden können, so wird aus Gl. (16.84)

$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = \hat{u}\sin(\omega t + \varphi_u). \tag{16.86}$$

Zur Lösung dieser Differenzialgleichung verwenden wir den Ansatz

$$u_C = u_{Ce} + u_{Cf}, \tag{16.87}$$

wobei u_{Ce} die sich einstellende (eingeschwungene) Kondensatorspannung ist. Sie hat nach Gl. (12.6) in Verbindung mit Gl. (12.3) den Scheitelwert

$$\hat{u}_{Ce} = \hat{u}\frac{\frac{1}{\omega C}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{16.88}$$

Die Versorgungsspannung u ist in Bild 16.11 gegenüber dem fließende Strom i um

$$\varphi = \arctan\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{16.89}$$

phasenverschoben. Da u_{Ce} gegenüber i wiederum um 90° nacheilt, erhalten wir für den zeitlichen Verlauf der sich einstellenden (eingeschwungenen) Kondensatorspannung unter Beachtung von Gl. (16.85)

$$u_{Ce} = \hat{u}_{Ce}\sin(\omega t + \varphi_u - \varphi - 90°). \tag{16.90}$$

Hierbei stellt φ_u denjenigen Winkel dar, um den der Schaltzeitpunkt nach dem positiven Nulldurchgang der Versorgungsspannung u liegt.

Die Bestimmung der *freien* Kondensatorspannung u_{Cf} führt zu den gleichen Ergebnissen wie in Abschnitt 16.3.1 beschrieben. Es können also der *aperiodische Fall*, der *periodische Fall* oder der *aperiodische Grenzfall* auftreten. Die allgemeinen Lösungen für u_{Cf} sind in den Gln. (16.56) oder (16.63) und (16.67) angegeben. Setzt man diese sowie das in Gl. (16.90) dargestellte Ergebnis in Gl. (16.87) ein, erhält man die allgemeine Lösung für die Kondensatorspannung u_C. Die in dieser Lösung noch zu bestimmenden Konstanten gewinnt man, so wie in Abschnitt 16.3.1 beschrieben, aus den Anfangsbedingungen.

Verzeichnis der wichtigsten Symbole

(Abschnittsnummer des erstmaligen Auftretens in Klammern)

A Fläche; Querschnitt (2.1.4)
A Fourierkoeffizient (15.2)
a Länge, Abstand (3.3.2)
B magnetische Flussdichte (5.2.2)
B Blindleitwert, allgemein (7.1.2)
B Fourierkoeffizient (15.2)
$\hat{B}$ Scheitelwert der magnetischen Flussdichte (13.1.1)
B_C kapazitiver Blindleitwert (7.1.3)
B_L induktiver Blindleitwert (7.1.2)
B_r Remanenzflussdichte (5.6.2)
b Länge, Abstand (3.3.2)
b Bandbreite (12.2.3)
C Kapazität (3.4.1)
c Konstante (2.2.10)
c Länge, Abstand (3.6.1)
D elektrische Flussdichte (3.2.3)
D Verzerrungsleistung (15.5.2)
d Verlustfaktor (7.2.1)
d Dämpfungsfaktor (12.1.2)
E elektrische Feldstärke (3.2.1)
E_i induzierte Feldstärke (5.8.1)
e Elementarladung (2.1.3)
e (= 2,718 . . .) Basis des natürlichen Logarithmus (6.5.1)
F Kraft (1.2)
F Formfaktor (6.3.3)
f Frequenz (6.2)
f_g Grenzfrequenz (11.1)
f_r Resonanzfrequenz (12.1.2)
G Leitwert (2.1.7), Wirkleitwert (7.1.1)
g Grundschwingungsgehalt (15.5.3)
H magnetische Feldstärke (5.2.1)
H_C Koerzitivfeldstärke (5.6.2)
h Höhe (6.2)
I elektrische Stromstärke (2.1.3)
$\underline{I}$ elektrischer Strom, komplex dargestellt (7.1.1)
I_b Blindstrom (9.3)
I_N Neutralleiterstrom (14.2.1)
I_q Quellenstrom (2.1.14)
I_{St} Strangstrom (14.2.3)
I_w Wirkstrom (9.3)
i zeitabhängiger Strom (3.5.1)
$\hat{i}$ Scheitelwert des Stromes (6.2)
i_e eingeschwungener Strom (16.2.1)
i_f freier Strom (16.2.1)
J elektrische Stromdichte (2.1.4)
j ($= \sqrt{-1}$) Einheit der imaginären Zahlen (6.5.1)
k Konstante (2.2.10)
k Klirrfaktor (15.5.3)
L Induktivität (5.9)
L_{12} gegenseitige Induktivität (5.10)
l Länge (1.1)
M Drehmoment (2.1.10)
m Masse (1.2)
N Windungszahl einer Spule (5.2.1)
n Elektronendichte (2.1.5)
n Drehzahl (2.1.10)
n ganze Zahl (6.1)
n Ordnungszahl (15.2)
P Leistung (2.1.10), Wirkleistung (8.1)

p zeitabhängige Leistung (6.3.2)
p reeller Zahlenfaktor (10.1)
Q elektrische Ladung (2.1.3)
Q Blindleistung, allgemein (8.2)
Q Gütefaktor (12.1.2)
Q_C kapazitive Blindleistung (8.2)
Q_L induktive Blindleistung (8.2)
q zeitabhängige elektrische Ladung (7.1.3)
R reelle Zahl (6.5.1)
R Widerstand (2.1.7)
Wirkwiderstand (7.1.1)
R_a Außenwiderstand (2.2.9)
R_i Innenwiderstand (2.1.13)
R_m magnetischer Widerstand (5.4)
r Radius (3.3.1)
S Leistungsdichte (4.1)
S Scheinleistung (8.3)
$\underline{S}$ komplexe Scheinleistung (8.4)
s Länge, Weglänge (5.8.2)
T Periodendauer (6.1)
t Zeit (1.1)
U elektrische Spannung (2.1.6)
U_N Sternpunktspannung (14.2.2)
U_q Quellenspannung (2.1.13)
U_{St} Sternspannung (14.1.1)
u zeitabhängige Spannung (3.5.1)
$\hat{u}$ Scheitelwert einer Spannung (7.2)
$\overline{|u|}$ Gleichrichtwert einer Spannung (6.3.1)
V Volumen (3.5.2)
V_m magnetische Spannung (5.2.4)
v Geschwindigkeit (1.2)
W Energie (1.2)
w Energiedichte (3.5.2)
X Betrag einer imaginären Zahl (6.5.1)
X Blindwiderstand, allgemein (7.1.2)
X_C kapazitiver Blindwiderstand (7.1.3)
X_L induktiver Blindwiderstand (7.1.2)
X_r Kennwiderstand eines Schwingkreises (12.1.2)
Y Scheinleitwert
$\underline{Y}$ Admittanz (7.1.6)
Z Scheinwiderstand (8.1.4)
$\underline{Z}$ komplexe Zahl (6.5.1)
$\underline{Z}$ Impedanz (7.1.4)

α Widerstands-Temperaturkoeffizient (2.1.9)
α Winkel (3.2.1)
δ Verlustwinkel (7.2.1)
ε Permittivität (3.2.4)
ε_0 elektrische Feldkonstante (3.2.4)
ε_r Permittivitätszahl (4.2.4)
η Wirkungsgrad (2.1.10)
Θ elektrische Durchflutung (5.2.1)
ϑ Temperatur (2.1.9)
κ Leitfähigkeit (2.1.8)
Λ magnetischer Leitwert (5.4)
λ Leistungsfaktor (15.5.2)
μ Permeabilität (5.2.2)
μ_d differenzielle Permeabilität (5.9)
μ_0 magnetische Feldkonstante (5.2.2)
μ_r Permeabilitätszahl (5.2.2)
π (= 3,141 . . .) Kreiszahl (3.3.1)
ρ spezifischer Widerstand (2.1.8)
σ Scheitelfaktor (6.3.3)
τ Temperaturkennwert (2.1.9)
τ Zeitkonstante (16.2.1)
Φ magnetischer Fluss (5.2.3)
$\hat{\Phi}$ Scheitelwert des magnetischen Flusses (13.1.1)
φ elektrisches Potenzial (3.2.1)
φ Phasenverschiebungswinkel (6.2)
Ψ elektrischer Fluss (3.2.2)
ω Winkelgeschwindigkeit (2.1.10)
ω Kreisfrequenz (12.2.2)

Literaturverzeichnis

Altmann, S., Schlayer, D.: Lehr- und Übungsbuch Elektrotechnik. 2. Aufl., Fachbuchverlag Leipzig 2000

Clausert, H., Wiesemann, G.: Grundgebiete der Elektrotechnik. Bd. 1: Gleichstromnetze, Operationsverstärkerschaltungen, elektrische und magnetische Felder, 7. Aufl., 1999. Bd. 2: Wechselströme, Drehstrom, Leitungen, Anwendungen der Fourier-, der Laplace- und der Z-Transformation, 7. Aufl., 2000. R. Oldenbourg, München

Führer, A., Heidemann, K., Nerreter, W.: Grundgebiete der Elektrotechnik. Bd. 1: Stationäre Vorgänge, 6. Aufl., 1997. Bd. 2: Zeitabhängige Vorgänge, 6. Aufl., 1998. C. Hanser, München

Hagmann, G.: Aufgabensammlung zu den Grundlagen der Elektrotechnik. 9. Aufl., AULA-Verlag, Verlag für Wissenschaft und Forschung, Wiebelsheim 2001

Küpfmüller, K., Kohn, G.: Theoretische Elektrotechnik und Elektronik, 15. Aufl., Springer, Berlin 2000

Lunze, K.: Einführung in die Elektrotechnik. 7. Aufl., Verlag Technik, Berlin 1991

Moeller, F., Frohne, H., Loechle, W.: Grundlagen der Elektrotechnik. 18. Aufl., Teubner-Verlag, Stuttgart 1996

Pregla, R.: Grundlagen der Elektrotechnik, 6. Aufl., Hüthig Verlag, Heidelberg 2000

Unbehauen, R.: Grundlagen der Elektrotechnik. Bd. 1: Allgemeine Grundlagen, Lineare Netzwerke, Stationäres Verhalten, 5. Aufl., 1999. Bd. 2: Einschwingvorgänge, nichtlineare Netzwerke, theoretische Erweiterungen, 5. Aufl., 2000. Springer, Berlin

Sachverzeichnis

abhängige Ströme 51
Admittanz 226, 229, 238, 242, 263
aktiver Zweipol 65
alternierende Funktion 352
Ampere 2, 8
Amplitudenspektrum 352
analytisches Verfahren 221
Anfangsbedingung 365, 367, 371, 375
aperiodischer Fall 376, 378, 383
aperiodischer Grenzfall 376, 381
Aquipotenzialfläche 88, 97, 102,
Äquipotenziallinien 88, 125
Arbeit 3, 21
Arbeitspunkt 77
Atom 6
Atomrumpf 7
Aufweitung der magnetischen Feldlinien 159
Augenblicksleistung 345
Augenblickswert 199
Augenblickswert der Leistung 256
Ausgleichsvorgänge 362
Außenleiter 331, 333
Außenleiterspannung 333
Außenleiterspannungen 332
Außenleiterströme 335, 342

Bandbreite 302, 303, 308
Basiseinheiten 1
Baumzweige 50
bewegliche Ladungsträger 7
Bezifferung 280
Bezugsgröße 221
Bezugspfeil 24, 42, 221
Bezugspunkt 53, 88, 98
Bezugssinn 24
bifilare Wicklung 253
Blindarbeit 258
Blindleistung 256, 257, 347, 359
Blindleistungskompensation 276, 277
Blindleitwert 225, 226, 229, 239, 242
Blindstrom 276
Blindstromkompensation 276, 277
Blindwiderstand 225, 228

chemische Elemente 7
Coulomb 9
Coulomb'sches Gesetz 118, 119, 121
Curie-Temperatur 156

Dämpfung 306
Defektelektronen 7
diamagnetische Stoffe 153
diamagnetischer Effekt 153
Dielektrikum 92
dielektrische Polarisation 93
Differenzialgleichung 363
differenzielle Permeabilität 186
Dipole 92
Drehfaktor 220
Drehstromgenerator 331
Drehstromsystem 330
Drehstromtechnik 330
Drehzeiger 220
Dreieckschaltung 35, 333, 341
Dreieck-Stern-Umwandlung 35
Dreieckstrom 343
Dreieckwiderstände 36, 37
Dreileitersystem 331
Dreiphasensystem 330
Driftgeschwindigkeit 11
Drosseln 309
Drosselspule mit Eisenkern 309

Drosselspulen 309
Durchflutung 135
Durchflutungsgesetz 140, 141, 143, 150, 158, 159
Durchlassbereich 294

Effektivwert 205, 356
Eigenfrequenz 296, 380
Eigeninduktivität 252
Eigenkapazität 252
eingeschwungener Strom 363
Einheiten 1
Einheitensystem 1
Eisenfreier Transformator 324, 325
Eisenverluste 311, 313
Eisenverluststrom 317
Eisenverlustwiderstand 314, 317
elektrische Durchflutung 135, 141
elektrische Feldgrößen 84
elektrische Feldkonstante 93
elektrische Feldlinien 85, 88, 124
elektrische Feldstärke 84, 96, 125
elektrische Flussdichte 83, 90, 96
elektrische Ladungsträger 6
elektrische Netze 263
elektrische Netzwerke 263
elektrische Spannung 12
elektrische Stromdichte 10
elektrische Stromstärke 8
elektrische Strömungslinien 124
elektrischer Widerstand 13
elektrischer Fluss 89, 90
elektrischer Leitwert 14, 15
elektrisches Feld 83
elektrisches Potenzial 53, 84, 88, 96
elektrisches Strömungsfeld 124
elektrochemische Spannungsquelle 12
Elektroden 83, 103
Elektrodenanordnung 103
elektromechanische Spannungsquelle 12
Elektronen 6, 83
Elektronendichte 10
Elektronengas 7
Elektronenschale 7
Elektronenspin 153
elektrostatische Kräfte 6
elektrostatisches Feld 83
Elementarfelder 153
Elementarladung 9, 83
Elementarmagnete 153, 154
Energie 3, 21
Energie des elektrostatischen Feldes 111
Energie des geladenen Kondensators 111
Energie des magnetischen Feldes 192
Energiedichte 113, 114, 194
Ersatzschaltbild 28, 313, 316
Ersatzschaltbild des magnetischen Kreises 143
Ersatzschaltungen 249
Ersatzspannungsquelle 65, 66, 70, 271
Ersatzstromquelle 55, 74
Ersatzwiderstand 32, 65
Erzeuger 22
Erzeuger-Pfeilsystem 25, 43
Erzeugung von Drehstrom 330
erzwungene Schwingungen 297
Euler'scher Satz 216
Exponenzialform 216

Farad 103
Feldgrößen des Strömungsfeldes 125
Feldlinien 132
Feldlinienbild 85
Feldliniendichte 138
Feldlinienlänge 134, 135
Feldstärke 126
Feldstärkekomponenten 147
Feldstärkevektor 147
Ferrite 313
Ferritkerne 313
Ferromagnetische Stoffe 154
Festzeiger 220
Flächenintegral 127
flüchtiger Strom 363

Flussdichte 136
Formfaktor 211
Fourier-Analyse 351, 356
Fourierkoeffizienten 350, 351
Fourier-Reihe 349
freie Elektronen 7
freie Kondensatorspannung 367
freie Schwingungen 296, 380
freier Strom 363
Frequenz 201
Frequenzanalysator 353
Frequenzgang 293, 295, 301, 307

Gauß'sche Zahlenebene 215
Gauß'scher Satz der Elektrostatik 92
gedämpfte Schwingung 297, 380, 387
Gegenladung 84
gegenseitige Induktion 189
gegenseitige Induktivität 190, 324
geladener Körper 83
gerade Funktion 352
Gesamtfeldstärke 147
Gesamtkapazität 106
Gesamtwiderstand 31
Gesetz von Biot-Savart 150, 151
Gleichrichtwert 203
Gleichspannungsanteil 353
Gleichstrom 8
Gleichstromkreise 31
Graph 50
Grenzfrequenz 293, 295, 302, 308
Größengleichung 5
Grundschwingung 350
Grundschwingungsblindleistung 359
Grundschwingungsgehalt 361
Gütefaktor 306

Halbleiter 7
Halleffekt 172, 173
Hallsonde 173
Hallspannung 173
Harmonische 350
hartmagnetisches Material 156
Hauptblindwiderstand 317
Hauptdiagonale 47
Hauptfluss 318
Hauteffekt 254
Henry 183
Hertz 201
Hilfsgerade 282
Hochpass 294, 295
höhere Harmonische 350
Hohlzylinder 106
homogenes elektrisches Feld 86
Hysterese 156
Hystereseschleife 156, 157, 167, 312
Hystereseverluste 311

ideale Kopplung 190
ideale Spannungsquelle 29
ideale Stromquelle 29, 48, 51
idealer Transformator 315
imaginäre Zahlen 215
Imaginärteil 215
Impedanz 226, 229, 233, 236, 240, 243
Induktion 180
Induktionsgesetz 180, 181
Induktionswirkung des magnetischen Feldes 176
induktive Blindleistung 258, 278
induktiver Blindleitwert 225
induktiver Blindwiderstand 225
Induktivität 183
induzierte Feldstärke 177
induzierte Spannung 178
Influenz 89
inhomogene Differenzialgleichung 377
inhomogenes elektrisches Feld 87
Innenleitwert 30
Innenwiderstand 30, 66
innerer Widerstand 28
Integrationsweg 141
inverse Ortskurve 287
inverser Kreis 288
Inversion 283
Inversion eines Kreises 287
Ionen 7

Joule 4

Kapazität 103
kapazitive Blindleistung 258, 278
kapazitiver Blindleitwert 229
kapazitiver Blindwiderstand 228
Kenngerade 78
Kenngrößen der Verzerrung 360
Kennwiderstand 299
Kernkräfte 6
Kilogramm 2
Kirchhoff'sche Gesetze 25, 42, 263
Klemmenspannung 28
Klirrfaktor 360
Knoten 26, 43
Knotengleichung 26, 43, 55
Knotenregel 26
Knotensatz 26
Knotenleitwert 56
Knotenpotenzial-Verfahren 53
Knotenpunkt 26
Knotenspannungen 53
Koerzitivfeldstärke 156, 167
Kohleschichtwiderstand 253
Kompassnadel 131
komplexe Darstellung von Sinusgrößen 214
komplexe Darstellungsweise 222
komplexe Rechnung 214, 215, 221
komplexe Scheinleistung 262
komplexe Zahlen 215
Komponentenform 216
Kondensator 103, 226, 250
Konduktanz 222
konjugiert komplexe Größe 261
konjugiert komplexe Zahl 217
Konstantspannungsquelle 29
Konstantstromquelle 29, 74
Kopplungsleitwert 56
Kopplungswiderstand 47
Kräfte an Grenzflächen 196
Kräfte im magnetischen Feld 168
Kreisfrequenz 202
Kreisströme 131, 153
Kugelkondensator 105
Kupferverluste 311
Kurzschlussversuch 320

Ladung 83
Ladungsmenge 83
Leerlaufspannung 28
Leerlaufstrom 317
Leerlaufversuch 320
Leistung 21
Leistung im Drehstromsystem 345
Leistungsanpassung 63, 272
Leistungsdichte 127
Leistungsdreieck 261, 262
Leistungsfaktor 259, 360
Leitfähigkeit 15
Leitwertdreieck 240, 242, 251
Leitwertmatrix 56
Lenz'sche Regel 182
lineare Quellen 29, 65
lineare Schaltelemente 76
lineare Widerstände 65
Liniendiagramm 201
Linienintegral 126
Löcher 7
Lorentzkraft 170, 172, 177

magnetisch gekoppelte Kreise 309
magnetisch gekoppelte Spulen 189, 326
magnetisch harte Stoffe 157
magnetisch weiche Stoffe 157
magnetische Erregung 134
magnetische Ersatzschaltung 165
magnetische Feldkonstante 138
magnetische Feldlinien 132
magnetische Feldstärke 133, 134, 136
magnetische Flussdichte 136, 137
magnetische Induktion 137
magnetische Kreise mit Eisen 157
magnetische Sättigung 155, 156
magnetische Spannung 139, 140
magnetische Umlaufspannung 140, 141
magnetischer Eisenkreis 162

magnetischer Fluss 138
magnetischer Kreis 143, 144, 157
magnetischer Kreis mit Dauermagnet 166
magnetischer Kreis mit Verzweigung 163
magnetischer Leitwert 144, 185
magnetischer Widerstand 144, 185
magnetisches Feld 131
Magnetisierungskennlinie 155, 157, 161
Magnetisierungsstrom 317
Magnetnadel 131
Magnetpole 131
Masche 26, 45, 46
Maschengleichung 27, 43, 46
Maschenregel 27
Maschensatz 27
Maschenströme 45, 46, 50, 51
Maschenstromverfahren 45
Materialgröße 252
Matrizenschreibweise 43, 47, 49, 51, 56
Mehrphasensystem 330
Metallschichtwiderstand 253
Meter 2
Mischgrößen 200
Mischspannung 200
Mischstrom 200
Molekül 6
Momentanwert 199

negatives Ion 8
Netzwerkberechnung 38, 42
Neukurve 156, 157
Neutralleiter 331, 334
Neutralleiterstrom 335
Neutronen 6, 83
Newton 3
nichtlineare Elemente 76
nichtlineare Gleichstromkreise 76
nichtlineare magnetische Widerstände 145
nichtlineare Stromkreise 76
nichtlineare Verbraucher 359
nichtsinusförmige periodische Vorgänge 349
Nordpol 131
Nullphasenwinkel 202, 213

Oberschwingungen 350
Oberschwingungsblindleistung 360
Ohm 14, 225
ohmscher Leitwert 222
ohmscher Widerstand 222
ohmsches Gesetz 14, 263
ohmsches Gesetz des magnetischen Kreises 144, 150, 166
ohmsches Gesetz des Strömungsfeldes 126
Ordnungszahl 350
Ortskurven 280

Parallelschaltung 32
Parallelschwingkreis 304
paramagnetischen Stoffe 153
Parameter 280, 284
Periodendauer 199, 201
periodisch zeitabhängige Größen 199, 203
periodischer Fall 376, 379, 386
Permeabilität 136, 137
Permeabilität des leeren Raumes 137
Permeabilitätszahl 138
Permittivität 93
Permittivität des leeren Raumes 93
Permittivitätszahl 93
Pfeilsysteme 24
Phasenverschiebung 203
Phasenverschiebungswinkel 203, 221, 237
physikalische Größen 1
Plattenkondensator 86, 104
polare Stoffe 92
Polarform 216
Polarisation 93
positives Ion 8
positives Loch 8
Primärseite 315
Primärwicklung 315

Probeladung 84
Proportionalitätskonstante 103
Protonen 6, 83
Punktladung 98

Quellenspannung 28, 30, 66
Quellenstrom 29, 30, 48, 49, 74

Reaktanz 225, 228
reale Bauelemente 249
Realteil 215
Rechtsschraubenregel 133, 181
Reihenschaltung 31
Reihenschwingkreis 297
reine Wechselgröße 352
Remanenzflussdichte 156, 167
Resistanz 222
Resonanz 298, 305
Resonanzbedingung 300
Resonanzfrequenz 299, 306
Resonanzkreisfrequenz 299, 306
Resonanzkurven 301, 308
resultierender Widerstand 32
Richtungspfeile 28, 132
Richtungssinn der Spannung 13, 24
Richtungssinn der Stromstärke 9, 24
Ringspule 133
Rumpfelektronen 7

Satz von Fourier 200
Schaltvorgänge 362, 363, 376
Scheinleistung 259, 278, 347, 358
Scheinleitwert 239, 242
Scheinwiderstand 232, 236
Scheitelfaktor 211
Scheitelwert 201
Schwingkreis 296, 297
Sekundärseite 315
Sekundärspule 315
Sekunde 2
Selbstinduktion 183, 223
Selbstinduktionsspannung 183, 224, 310
Selbstinduktivität 183
SI-Basiseinheiten 2
SI-Einheiten 1, 2
Siemens 15, 225
sinusförmige Teilschwingungen 349
sinusförmige Wechselgrößen 200
skalares Produkt 88, 139, 140
Skineffekt 254
Spannungsinduktion 180
Spannungsquelle 8, 12
Spannungsteilerregel 32
Spannungsüberhöhung 299
Sperrbereich 294
spezifischer Widerstand 15
Spin 131
Spule 223, 249
Spulengüte 250
Stabmagnet 131
stationäre Kondensatorspannung 367
stationäre Vorgänge 362
Stern-Dreieck-Umwandlung 34, 38
Sternpunktspannung 338
Sternschaltung 35, 331
Sternspannung 332
Sternwiderstände 37
Stränge 330, 334
Strangspannungen 332
Strangströme 342
Streublindwiderstände 318
Streufluss 158, 318
Stromdichte 125
Stromquellen 29
Strom-Spannungs-Kennlinie 76
Stromteilerregel 34
Strömungsfeld 125
Stromverdrängung 254
Südpol 131
Supraleitung 19
Suszeptanz 225, 229
symmetrische Belastung 336, 339
symmetrische Dreieckschaltung 343
symmetrische Sternschaltung 37
symmetrisches Mehrphasensystem 330

Temperaturkennwert 19
Temperaturkoeffizient 19

Tesla 137
Thaleskreis 285
Tiefpass 292, 293
Transformator 309, 315
Transformator mit Eisenkern 315

Überlagerungsgesetz 60
Übersetzungsverhältnis 316
Umlaufpfeil 27
Umlaufsinn 27
Umlaufwiderstand 47
Ummagnetisierungsverluste 312
unabhängige Ströme 51
ungeladene Körper 83
ungerade Funktion 352
unpolare Stoffe 92
unsymmetrische Dreieckschaltung 344

Valenzelektronen 7
var 258
Vektor 85, 91, 136, 137
Vektorprodukt 169
Verbindungszweige 50
Verbraucher 22
Verbraucher-Pfeilsystem 24, 43
Verbraucherschaltungen 334
Verluste 22
Verlustfaktor 250, 251
Verlustleistung 22
Verlustwiderstand 250
Verlustwinkel 250, 251
Verzerrungsleistung 360
Verzweigter magnetischer Kreis 165
Vierleiter-Drehstromnetz 334
Vierleitersystem 331
Vierpole 292
vollständiger Baum 50
Volt 13
Vorzugsrichtungen 154

Watt 21, 256
Weber 139
Wechselgrößen 199
Wechselspannung 199
Wechselspannungsanteil 354
Wechselstrom 199
Wechselstromkreise 221
Wechselstromnetze 263
Wechselstromtechnik 199
Wegintegral der elektrischen Feldstärke 88
weichmagnetische Stoffe 156
Weiß'sche Bezirke 154, 155
Widerstandsdreieck 234, 237, 249
Widerstandsgerade 77
Widerstandsmatrix 47
Widerstands-Temperatur-Kennlinie 18
Widerstands-Temperaturkoeffizient 19
Windungskapazitäten 249
Wirbelströme 313
Wirbelstromverluste 312
Wirkleistung 255, 256, 277, 346, 358
Wirkleistungsanpassung 274
Wirkleitwert 222, 239, 242
Wirkstrom 276
Wirkungsgrad 22
Wirkwiderstand 222

Zahlenwertgleichung 5
Z-Diode 80
Zeiger 212
Zeigerbild 213
Zeigerdarstellung 212
Zeigerdiagramm 213, 239
Zeitkonstante 365, 368
Zeitlinie 212
Zentrifugalkraft 171
Zweige 42
Zweigspannungen 42, 53
Zweigströme 42, 46, 49, 50, 53
Zweipol 65
Zylinderkondensator 106
Zylinderspule 133