# Paul · Paul Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 1

Gleichstromnetzwerke und ihre Anwendungen





# **Springer-Lehrbuch**

# Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 1

Gleichstromnetzwerke und ihre Anwendungen

4., neu bearbeitete Auflage



Prof. Dr.-Ing. Steffen Paul Universität Bremen Institut für theoretische Elektrotechnik und Mikroelektronik Otto-Hahn-Allee 1 D-28359 Bremen steffen.paul@item.uni-bremen.de

Prof. em. Dr.-Ing. habil. Reinhold Paul Technische Universität Hamburg-Harburg Institut für Nanoelektronik Eißendorfer Str. 38 D-21073 Hamburg

ISSN 0937-7433 ISBN 978-3-540-69076-4 e-ISBN 978-3-540-69078-8 DOI 10.1007/978-3-540-69078-8 Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

#### © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.de)

## Vorwort zur Neuauflage

Nichts kennzeichnet den Umfang, in dem die Elektrotechnik heute Wirtschaft, Technik und überhaupt das öffentlich-gesellschaftliche Leben beherrscht, besser als ein plötzlicher Stromausfall: alles ruht. Deshalb ist dieses Gebiet stark interdisziplinär ausgerichtet, stellt es doch einerseits mit der Energietechnik die Grundlage für großtechnischen Energietransport und Energiewandlung dar, andererseits hat es in der Informations- und Kommunikationstechnik mit Stichworten wie Rundfunk-/Fernsehen, Computer, Internet und Satellitentechnik Anwendungsbereiche weltweiten Ausmaßes. Nur folgerichtig haben die Grundlagen dieses Gebietes in ingenieurtechnischen Studienrichtungen Elektrotechnik, Informationstechnik, Mikroelektronik, Automatisierungstechnik und natürlich Energie- und Antriebstechnik, aber auch Mechatronik und Maschinenbau an Fachhochschulen und Universitäten seit langem einen festen Platz.

Das vorliegende dreibändige Lehrwerk "Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik" vermittelt dazu notwendiges Grundwissen nach modernen methodisch-didaktischen Gesichtspunkten basierend auf langjährigen Ausbildungserfahrungen der Autoren.

**Motivation** Gegenüber vorherigen Ausgaben dieses Lehrbuches erfolgte eine weitgehende Neubearbeitung aus mehreren Gründen:

- Die eingeführten Bachelor- und Master-Abschlüsse als Angebot statt des Diplom-Studiengangs drängen zur Neubewertung und stärker modularisierten Form des Lehrstoffes. Deshalb muss die Themenfolge der Vorlesung nicht unbedingt mit der Stofffolge eines Lehrbuches übereinstimmen.
- Es gibt Stoffverschiebungen: Fortschritte der Mikroelektronik, der Solartechnik, die wachsende Bedeutung elektromagnetischer Felder durch die Thematik der elektromagnetischen Verträglichkeit, die wachsende Sensorik und Mikrosystemtechnik u. a. finden sich nicht nur im Ausbildungsangebot der Oberstufe, sondern verschieben auch relevante Grundaspekte ins Grundstudium.
- Halbleiterbauelemente (Solarzellen, Dioden, Transistoren, Operationsverstärker u. a.) bestimmen heute die Schaltungstechnik. Das erfordert von der Grundausbildung eine stärkere Beachtung nichtlinearer Probleme, vor allem aber gesteuerter Quellen und ihren Einbezug in Netzwerke. Dazu ist ein einfaches Verständnis ihrer Funktionsprinzipien und Eigenschaften im Stromkreis wünschenswert.
- Die wachsende Bedeutung der Mechatronik verlangt eine stärkere Berücksichtigung der elektromechanischen Wechselwirkung (Stichworte Aktorik/

- Sensorik), der Erweiterung des Netzwerkes zum physikalischen Netzwerk und den damit verbundenen Analogien.
- Der PC ist heute in den Ausbildungseinrichtungen breit verfügbar. Das eröffnet die Möglichkeit der Softwarenutzung bei der Problemlösung: Programme wie SPICE/PSPICE (u. a.) für die Schaltungssimulation oder MATLAB/SIMULINK, Mathematika/MAPLE u. a. für die mathematische Unterstützung sind sehr nützliche Hilfsmittel. Durchweg stehen begrenzte, für die Grundausbildung ausreichende Versionen kostenlos im Internet zur Verfügung, auch gibt es preisgünstige Studentenversionen. Doch dieses sei vermerkt: Man erlernt Grundkenntnisse der Elektrotechnik nicht durch Beschäftigung mit solchen Hilfsmitteln, sondern zunächst durch permanente Nutzung von Papier, Stift und eigenes Nachdenken! Erst dann bieten diese Werkzeuge eine sinnvolle Ergänzung.
- Manche Normen und Begriffe, ja sogar die Rechtschreibung haben sich teilweise verändert.

Der erste Band umfasst einfache (Gleich-) Stromkreise sowie Netzwerke, ihre Analyseverfahren und Anwendungen, der zweite Band die Gesetzmäßigkeiten des elektrischen und magnetischen Feldes, die Verbindung zu den Netzwerkelementen und schließlich die Energiewandlung sowie Energie und Kraftwirkung in elektromagnetischen Feldern einschließlich verallgemeinerter physikalischer Netzwerke und Analogievorstellungen.

Der dritte Band enthält dynamische Netzwerke und zeitveränderliche Vorgänge (Wechsel-, Drehstromtechnik), Transformationen und Schaltvorgänge. Begriffen wird in allen Bänden die Grundausbildung nicht als etwas Abgeschlossenes, Selbständiges, sondern als das, was sie ist: das Fundament nachfolgender Lehrgebiete.

Inhalt und Stoffgestaltung Zu den stoffbezogenen Problemen einer elektrotechnischen Grundvorlesung treten erfahrungsgemäß noch die Schwierigkeiten der Anwendung mathematischer Methoden auf technisch-naturwissenschaftliche Problemstellungen, wie sie beispielsweise das Verständnis der elementaren Vektoralgebra zum Umgang mit Feldgrößen erfordert, stünde die Feldvorstellung am Beginn der Ausbildung. Dagegen sind Stichworte wie Strom, Spannung, Widerstand als Schulwissen, durch die Berufsausbildung oder eigenes Interesse meist schon bekannt. Diesem Aspekt trägt der erste Band Rechnung. Ein einführender Abschnitt fasst diese Grundbegriffe zusammen und wendet sie im Kapitel "Gleichstromnetzwerke" auf einfache Stromkreise an.

Dem Einsatz von Halbleiterbauelementen in der Schaltungstechnik tragen Schwerpunkte wie nichtlinearer Grundstromkreis, Zweitore und gesteuerte Quellen mit besonderer Beachtung der netzwerktechnischen Modellierung des Transistors und Verstärkers (Operationsverstärker) Rechnung.

Das Kapitel "Netzwerkanalyse" behandelt die Standardverfahren und eine vertiefte Zusammenstellung der matrixorientierten Darstellung (letztlich als Grundlage aller rechnergestützten Methoden). Weil sie zunehmend wichtiger werden, führt eine knappe Vertiefung in "Simulationsmethoden" und ihre Anwendung ein. Hier spielen hauptsächlich lineare Gleichungssysteme eine Rolle und deshalb findet die meist parallel verlaufende Mathematikausbildung ein sehr praktisches Anwendungsfeld.

Das vierte Kapitel stellt nützliche Netzwerktheoreme zusammen, deren Anwendung die Netzwerkberechnung stark vereinfacht.

Ein knapper Anhang enthält übergreifende Themen: physikalische Größen und Gleichungen, Einheiten und Dimensionen.

Hat der Lernende an dieser Stelle den ersten Schwerpunkt der Grundausbildung erarbeitet, so konzentriert sich der zweite Schwerpunkt auf die Wirkungen ruhender und bewegter Ladungen im *Raumpunkt* beschrieben durch das elektromagnetische Feld mit seinen Bestandteilen Strömungsfeld, elektrostatisches und magnetisches Feld. An dieser Stelle dürfte seitens der Mathematikausbildung die Vektorrechnung (ergänzt durch Linien- und Hüllenintegrale) verfügbar sein.

Der Übergang vom Stromkreis zur Feldbetrachtung im Band 2 gelingt am anschaulichsten mit dem "Strömungsfeld". Ausgehend von Strom und Spannung wird zunächst der feldmäßige Ursache-Wirkungs-Zusammenhang durch Feldgrößen im Raumpunkt hergeleitet mit dem Strömungsfeld als Mittler. Am Ende steht die feldmäßige Begründung des Netzwerkelementes ohmscher Widerstand.

Vertraut mit dieser Vorgehensweise wird anschließend das "Elektrostatische Feld" mit seinen relevanten Feldgrößen und Phänomenen erläutert. Am Schluss führt der Übergang auf die Globalgrößen Spannung und Ladung zum Netzwerk- und Schaltelement Kondensator. Besonderer Wert liegt auf den technischen Aspekten der Felder und ihren Anwendungen, etwa der Einführung des MOSFET als Beispiel eines feldgesteuerten, nichtlinearen Strömungsfeldes. Ein Überblick der Stromleitungsvorgänge in Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen schließt den Abschnitt ab, lenken doch heute Brennstoffzellen den Blick stärker auf dieses Teilgebiet.

Die gleiche Vorgehensweise nutzt das Kapitel "Magnetisches Feld" mit den zugehörigen Feldgrößen und Phänomenen. Das fundamentale Induktionsgesetz und seine Anwendungen wird unter verschiedenen Gesichtspunkten behandelt, wichtige Netzwerkfolgerungen sind die Einführung der Selbst- und Gegeninduktivität.

Den Schluss bilden die Maxwellschen Gleichungen in Integralform, wie sie für viele praktische Problemstellungen ausreichen. Ihre Differenzialform wird lediglich als Ausblick erwähnt, denn sie ist Inhalt des Lehrgebietes Theoretische Elektrotechnik. Wird auf diese Vertiefung verzichtet – was manche Studiengänge bevorzugen – so genügen einige einfache Beispiele zum breiteren Verständnis der Differenzialform.

Das elektromagnetische Feld ist Träger der elektromagnetischen Energie. Energie und Kraftwirkungen bilden deshalb den letzten Schwerpunkt. Hier haben Wechselwirkungen zu anderen Energieformen, besonders zur Mechanik, große Bedeutung mit Einrichtungen wie Motoren, Generatoren, Elektromagneten, heute verstanden als Teilgebiet der Aktoren. Für die Energiewandlungsvorgänge elektrisch – nichtelektrisch wird ihre Modellierung zunehmend wichtiger und durch Analogievorstellungen lassen sich Netzwerkverfahren auf nichtelektrische Vorgänge über den Begriff physikalische Netzwerke übertragen.

Die Stoffzuordnung der ersten beiden Bände hat sich nicht nur pädagogisch langjährig bewährt, sondern sie zeigt auch den Unterschied zur Elektrizitätslehre der Physik: beginnt diese mit der ruhenden Ladung und Elektrostatik gefolgt von den Phänomen der bewegten Ladung usw., so stehen in der Elektrotechnikausbildung mehr Zweck und Mittel im Focus: die Energie- und Informationsübertragung mit Netzwerken. Erst allmählich wird das Verständnis zum elektromagnetischen Feld und seiner Nutzung aufgebaut.

**Didaktik** Die Lehrveranstaltung "Grundgebiete der Elektrotechnik" bringt den ersten Kontakt der Studierenden zum späteren Berufsfeld. Das verlangt neben der motivierenden inhaltlichen Darlegung nicht nur einen ständigen Bezug zu praktischen Beispielen, er stellt auch eine didaktische Herausforderung dar.

Methodisch ist der Stoff so angelegt, dass er selbständig erarbeitet werden kann und vom Lernenden einen ständigen Dialog mit dem Lehrbuch verlangt. Damit eignen sich die Bücher auch zum autodidaktischen Lernen unterstützt durch mehrere Aspekte:

- Formulierung der Lernziele für jeden Stoffschwerpunkt, knappe Erklärung wichtiger Begriffe als Merksätze, strukturierte Lösungsmethoden zur An-

- wendung bestimmter Verfahren, Zusammenfassungen/Tutorials zu jedem Stoffschwerpunkt, Prüfungs- und Kontrollfragen,
- optische Hervorhebung wichtiger Begriffe und Fakten, sie sind gleichzeitig Stützstellen zur Prüfungsvorbereitung,
- Stoffgebiete mit erhöhtem Schwierigkeitsgrad oder speziellen Problem, die zunächst zurücktreten können, werden mit einem Stern (\*) ausgewiesen,
- wichtige Themen werden mit einem ansteigenden, zweistufigen Anforderungsniveau behandelt. So lässt sich der Vertiefungsgrad selbst wählen.
   Dabei verhelfen manche Rückverweise zum allmählichen Aufbau eines Übersichtswissens,
- Anleitung zum Einbezug relevanter Computerprogramme,
- zahlreiche Beispiele und praktische Hinweise festigen den Lehrstoff,
- gut gestaltete Bilder, sie wurden durchweg neu bearbeitet,
- Hinweise auf Aufgaben, die mit Lösung in zwei Arbeitsbüchern bereitstehen. Eine begleitende Webseite hält weitere Übungsbeispiele bereit (www.item.uni-bremen.de/PaulGrundlagenlehrbuch).

Studienmethodik Die Erlernung elektrotechnischer Grundlagen gelingt ohne intensives Selbststudium kaum. Dazu gehören neben der Beherrschung der wichtigsten Definitionen und Gesetze, Lösungsmethoden und physikalischen Sachverhalte die permanente eigenständige Lösung von Übungsaufgaben.

Dann wird schnell deutlich, was verstanden wurde und was nicht. Die Fragen zur Selbstkontrolle sollten unbedingt beantwortet werden, um ein Gefühl für das Stoffverständnis zu erhalten.

#### **Leserkreis** Das Lehrwerk wendet sich an:

- Studierende der Fachrichtungen Elektrotechnik, Informationstechnik, Informatik, aber auch Maschinenbau, Physik und Wirtschaftsingenieurwesen an Universitäten und Fachhochschulen,
- an den im Berufsleben stehenden Ingenieur und Techniker als Nachschlagewerk bei auftretenden Problemen über Grundzusammenhänge, die er einmal gehört hat,
- an Abiturienten und Schüler in oberen Klassen, die sich während der Schulzeit oder im Wehr- und Ersatzdienst auf ein Studium vorbereiten wollen.

**Dank** Die Motivation zu diesem Buch entsprang der Erkenntnis, dass die Grundlagen eines Fachgebietes nie abgeschlossen sind, sondern in Abständen neu durchdacht und formuliert werden müssen. Das bestätigte sich auch in zahlreichen Diskussionen mit Fachkollegen, wodurch das Vorhaben sehr

gefördert wurde. Der Dank gilt aber gleichfalls den Lesern vorhergehender Auflagen, die manch gute Ratschläge zur Verbesserung übermittelten.

In der Bearbeitungsphase des Manuskriptes hat Herr Dr.-Ing. sc. techn. H.-G. Schulz mit einer Reihe von Vorschlägen aus seiner langjährigen Tätigkeit als Lehrender des Fachgebietes Theoretische Elektrotechnik (TU Dresden) beigetragen. Ihm gilt unser ganz persönlicher und herzlicher Dank.

Dem Springer-Verlag, insbesondere Frau E. Hestermann-Beyerle, danken wir für die gute Zusammenarbeit, die sorgfältige Drucklegung des Buches sowie dafür, dass Wünschen weitgehend entsprochen worden ist. Der Firma le-tex, insbesondere Frau N. Kroke und Frau P. Möws danken wir für die Unterstützung bei der Erstellung des druckreifen Manuskripts.

Über die Jahre gingen von vielen Fachkollegen und Lesern zahlreiche Hinweise und Anregungen ein, ein Fundus für die Neubearbeitung. Unzulänglichkeiten bleiben natürlich nicht aus und wir sind für Anregungen, Fehler und Verbesserungshinweise jederzeit dankbar (steffen.paul@item.uni-bremen.de, paul@tu-harburg.de).

Ein Grundlagenbuch Elektrotechnik mit einem Anspruch für einen weiten Nutzerkreis ist immer eine Herausforderung: es soll einerseits den Leser in seiner Studienwahl bekräftigen, ein breites Fundament für das weitere Studium legen eingebettet in die Lernfortschritte, die er in Mathematik und Physik erzielt und ihn schließlich auf die Vielfalt der Elektrotechnik neugierig machen. Die Autoren hoffen, dass das Buch diesem Anspruch gerecht wird.

Bremen, Frühjahr 2010  ${\it Steffen\ Paul}$ 

Buchholz, Frühjahr 2010 Reinhold Paul

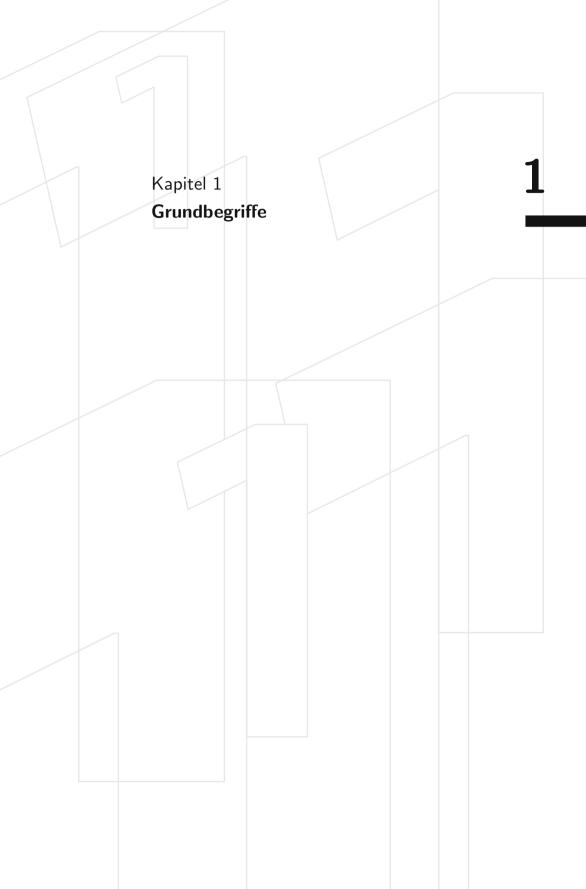
## Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe
1.1	Grundaufgaben der Elektrotechnik
1.2	Teilchen- und Feldmodell
1.3	Elektrische Ladung
1.3.1	Eigenschaften der elektrischen Ladung
1.3.2	Erhaltungssatz der Ladung
1.3.3	Elektrische Feldstärke
1.4	Bewegte Ladung, elektrische Stromstärke
1.4.1	Strombegriff
1.4.2	Elektrische Stromstärke
1.4.3	Erstes Kirchhoffsches Gesetz, Knotensatz
1.4.4	Zusammenhang Strom-Ladung
1.5	Elektrische Spannung, elektrisches Potenzial
1.5.1	Elektrische Spannung
1.5.2	Zweites Kirchhoffsches Gesetz, Maschensatz
1.5.3	Spannung, Potenzial und elektrische Feldstärke
1.6	Elektrische Energie, elektrische Leistung
1.6.1	Energie
1.6.2	Elektrische Energie
1.6.3	Elektrische Leistung, Wirkungsgrad
2	Einfache resistive Stromkreise
	und Netzwerkelemente
2.1	Modelle elektrischer Stromkreise
2.2	Unabhängige Spannungs- und Stromquellen
2.2.1	Ideale Spannungs- und Stromquellen
2.2.2	Reale Spannungs- und Stromquellen
2.3	Widerstand, resistiver Zweipol
2.3.1	Lineare resistive Zweipole
2.3.2	Zusammenschaltungen linearer resistiver Zweipole
2.3.3	Nichtlineare resistive Zweipole
2.3.4	Temperaturverhalten resistiver Zweipole
2.3.4 2.3.5	
	Temperaturverhalten resistiver Zweipole
2.3.5	Temperaturverhalten resistiver Zweipole
2.3.5 2.3.5.1	Temperaturverhalten resistiver Zweipole
2.3.5 2.3.5.1 2.3.5.2	Temperaturverhalten resistiver Zweipole
2.3.5 2.3.5.1 2.3.5.2 2.3.6	Temperaturverhalten resistiver Zweipole  Allgemeine resistive Zweipole  Zeitunabhängige resistive Zweipole  Zeitvariante resistive Zweipole  Widerstand als Bauelement
2.3.5 2.3.5.1 2.3.5.2 2.3.6 2.4	Temperaturverhalten resistiver Zweipole Allgemeine resistive Zweipole Zeitunabhängige resistive Zweipole Zeitvariante resistive Zweipole Widerstand als Bauelement Der Grundstromkreis

2.4.4	Zweipoltheorie	11
2.4.5	Überlagerungssatz	123
2.5	Nichtlinearer resistiver Grundstromkreis*	120
2.5.1	Zusammenschaltung nichtlinearer	
	und linearer Schaltelemente, Ersatzkennlinie	12
2.5.2	Kennlinienapproximationen	13
2.5.3	Arbeitspunkteinstellung	133
2.5.4	Leistungsumsatz im nichtlinearen Grundstromkreis	134
2.5.5	Kleinsignalverhalten	13
2.6	Zweitore	14
2.6.1	Zweitorbegriff	143
2.6.2	Strom-Spannungs-Beziehungen linearer Zweitore	14
2.6.3	Zweitorarten	15
2.6.4	Zweitorersatzschaltungen, gesteuerte Quellen	15
2.6.5	Elementarzweitore	17
2.6.6	Zweitorzusammenschaltungen	17
2.6.7	Zweitor in der Schaltung, Betriebsverhalten	17
2.6.8	Zweitor mit unabhängigen Quellen	18
2.6.9	Überlagerungssatz und Zweipoltheorie in Netzwerken	
	mit gesteuerten Quellen	18
2.7	Gesteuerte Bauelemente und ihre Modellierung*	19
2.7.1	Allgemeine gesteuerte Quellen	19
2.7.2	Nichtlineares Zweitor	19
2.7.3	Bipolartransistormodell	19
2.7.4	Kleinsignalverhalten nichtlinearer Zweitore	20
2.7.5	Kleinsignalverhalten des Bipolartransistors,	
	Verstärkungsprinzip	20
2.7.6	Allgemeines lineares Verstärkermodell	21
2.7.7	Operational-Transkonduktanz-Verstärker,	
	Operationsverstärker	21
2.7.8	Grundschaltungen mit Operationsverstärkern	22
3	Netzwerkanalyseverfahren, resistive Schaltungen	23
3.1	Netzwerkbeschreibung	23
3.1.1	Netzwerkgleichungen	23
3.1.2	Zweigstromanalyse	24
3.2	Maschenstromanalyse	25
3.2.1	Maschenströme	25
3.2.2	Maschenwiderstandsmatrix	25
3.2.3	Erweitere Maschenstromanalyse*	26
3.2.4	Maschenstromanalyse in Matrixform	26

Inhaltsverzeichnis xiii

3.2.5	Maschenstromanalyse in nichtlinearen Netzwerken	269
3.3	Knotenspannungsanalyse	270
3.3.1	Knotenspannungen, Knotenleitwertmatrix	271
3.3.2	Erweiterte Knotenspannungsanalyse*	282
3.3.3	Modifizierte Knotenspannungsanalyse*	291
3.3.4	Knotenspannungsanalyse in Matrixform	292
3.3.5	Unbestimmte Knotenleitwertgleichungen	293
3.3.6	Knotenspannungsanalyse und Zweipolparameter*	296
3.3.7	Netzwerkanalyse mit Operationsverstärkern	298
3.3.8	Knotenspannungsanalyse von nichtlinearen Netzwerken*	303
3.4	Netzwerkanalyse in Matrixdarstellung*	304
3.4.1	Netzwerke, Graph und Inzidenzmatrizen	305
3.4.2	Schleifenanalyse	314
3.4.3	Schnittmengenanalyse	316
3.4.4	Zusammenhänge, Vergleiche	322
3.5	Computerunterstützte Netzwerkanalyse	326
3.5.1	Numerische Auswertung	327
3.5.2	Schaltungssimulation	332
3.6	Mehrpolige Netzwerke*	341
3.6.1	Ströme und Spannungen an Mehrpolen	341
3.6.2	Zusammenschaltung von Mehrpolen	345
3.6.3	Mehrtore	355
3.6.4	Torgruppierung	359
3.6.5	Klemmenmanipulationen	363
4	Netzwerktheoreme	369
4.1	Ähnlichkeitssatz	371
4.2	Versetzungs- und Teilungssatz idealer Quellen	372
4.3	Reziprozitäts-Theorem, Umkehrsatz	374
4.4	Veränderung von Zweipolen durch gesteuerte Quellen,	
	Miller-Theorem	376
4.5	Äquivalente Netzwerke*	381
4.6	Duale Netzwerke*	383
4.7	Leistung in elektrischen Netzwerken, Tellegen-Theorem*	387
Α	Anhang	393
A.1	Physikalische Größen und Gleichungen	395
A.2	Physikalische Größen, Vorzeichen- und Richtungsregeln .	404
A.3	Verzeichnis der wichtigsten Symbole	417
A.4	Literaturverzeichnis	421
	Index	423



1	Grundbegriffe	3
1.1	Grundaufgaben der Elektrotechnik	3
1.2	Teilchen- und Feldmodell	6
1.3	Elektrische Ladung	10
1.3.1	Eigenschaften der elektrischen Ladung	10
1.3.2	Erhaltungssatz der Ladung	15
1.3.3	Elektrische Feldstärke	16
1.4	Bewegte Ladung, elektrische Stromstärke	20
1.4.1	Strombegriff	20
1.4.2	Elektrische Stromstärke	23
1.4.3	Erstes Kirchhoffsches Gesetz, Knotensatz	27
1.4.4	Zusammenhang Strom-Ladung	30
1.5	Elektrische Spannung, elektrisches Potenzial	32
1.5.1	Elektrische Spannung	32
1.5.2	Zweites Kirchhoffsches Gesetz, Maschensatz	39
1.5.3	Spannung, Potenzial und elektrische Feldstärke	41
1.6	Elektrische Energie, elektrische Leistung	43
1.6.1	Energie	43
1.6.2	Elektrische Energie	44
1.6.3	Elektrische Leistung, Wirkungsgrad	47

## 1 Grundbegriffe

Lernziel Nach Durcharbeit dieses Kapitels sollten beherrscht werden

- die Teilchen- und Felddarstellung als einander ergänzende Beschreibungsformen elektrischer Vorgänge,
- die Ladung und ihre Eigenschaften,
- der Strombegriff, seine Kennzeichen und Beziehung zur Ladung,
- die Begriffe Feldstärke, Potenzial und Spannung,
- Quellenspannung, Spannungsabfall und Bezugspfeile,
- die Kirchhoffschen Gesetze,
- die Begriffe Erzeuger- und Verbraucher, aktiver und passiver Zweipol,
- Arbeit, Energie und Leistung im Stromkreis.

## 1.1 Grundaufgaben der Elektrotechnik

Seit alters her beschäftigt den Menschen die Nachrichtenübermittlung sowie die Umformung und Übertragung von Energie über große Entfernungen. Vielfältige Methoden wurden ersonnen: Signalübertragung durch Feuer, Rauch, optische Telegrafen, Signalhörner, also optisch und akustisch. Mühlen- und Windrad, später die Dampfmaschine waren die wichtigsten Energieumformer. Signale und Energie konnten nur über kurze Entfernungen mit erheblichen Übertragungszeiten übermittelt werden.

Erst die Entdeckung und Anwendung der Elektrizität brachte Verbesserung. Sie ermöglichte die Signalübertragung über größte Entfernungen (heute bis zu den Planeten) mit Lichtgeschwindigkeit. Auch die Übertragung großer Energiemengen vom Umformort – dem Kohle-, Kern-, Wasser- oder Windkraftwerk – zum Verbraucher wurde erst durch die Elektrizität möglich. Heute bestimmt die Elektrotechnik das Leben des Menschen in hohem Maße: Beispielsweise sind je Haushalt etwa 10–20 Elektromotoren im Einsatz und im PC arbeiten viele hundert Millionen (!) Transistoren, ohne dass sich der Nutzer darüber Gedanken machen muss.

Vielfältig sind die Kontakte zur Elektrizität über den Arbeitsprozess, das Nachrichten- und Verkehrswesen. Stichworte wie Rundfunk und Fernsehen, Internet, MP3-Player, PC, globale Satellitennavigation, Digitaluhr, Mess-, Steuer- und Regelungstechnik, mikroprozessorgesteuerte Maschinensysteme, Fahrzeuge, Nähmaschinen, elektronische Musikinstrumente und Roboter veranschaulichen, dass zu den traditionellen Aufgaben der Informationstechnik durch die Mikroelektronik neuartige Gebiete hinzutraten.

Diese Beispiele zeigen die Hauptaufgaben der Elektrotechnik und Elektronik:

- 1. Umformung und Übertragung großer Energiemengen vom Kraftwerk zum Energieverbraucher. Dort wird elektrische Energie z. B. in mechanische (Motoren), Wärme (Heizung), chemische (Elektrolyse), sichtbare Strahlung (Beleuchtung) u. a. m. umgeformt. In der Energie- und Antriebstechnik spielt die Leistungselektronik beim Steuern, Umformen und Schalten großer Energiemengen mit Halbleiterbauelementen eine wichtige Rolle.
- Gewinnung, Übertragung und Verarbeitung von Informationen, also Signalen und Nachrichten durch Ströme bzw. Spannungen (drahtgebunden) und Wellen (drahtlos) von einer Quelle (Sensor, Rundfunk-, Fernsehsender, Mobiltelefon) zu einem Empfänger (Rundfunk-, Fernsehempfänger, Mobiltelefon).
- 3. Bauelementetechnik und Mikroelektronik. Energie- und Informationstechnik benötigen Geräte mit hoher Arbeitsgeschwindigkeit, Zuverlässigkeit, kleinem Volumen und geringer Masse. Diese Forderungen können nur moderne miniaturisierte Bauelemente wie Widerstände, Schalter, Kondensatoren, Transistoren, integrierte Schaltungen u.a.m. erfüllen. Damit ist die Mikroelektronik das dritte Teilgebiet der Elektrotechnik und Elektronik. Gerade sie löste mit der Erfindung des Transistors und der integrierten Schaltung fundamentale Umwälzungen aus. Erfunden wurden neue Bauelemente mit neuen Qualitäten. Bestand eine Schaltung im Röhrenzeitalter aus einzelnen Bauelementen, so wird sie heute mit Millionen kleinster Bauelemente in einem Halbleiterplättchen von einigen zehn Quadratmillimetern Fläche mit einem Schlage "integriert".

Diese Bemerkungen zeigen, dass die Fortschritte der Elektrotechnik hauptsächlich durch Zusammenwirken mit zwei Grenzgebieten erfolgten:

- zur Mathematik hin durch die Computertechnik und Informationstechnik,
- zur Physik durch Nutzung von Halbleitermaterialien und optischer Prinzipien.

Deshalb ist die Aneignung mathematischer und physikalischer Kenntnisse ebenso wichtig wie die Einarbeitung in die Elektrotechnik selbst.

Vorschau Grundlage der elektrischen Erscheinungen (Kap. 1) ist die ruhende und unter Krafteinfluss bewegte elektrische Ladung. Aus ihrer Kraftwirkung auf andere Ladungen wird zunächst die elektrische Feldstärke und daraus der Spannungsbegriff, über die bewegte Ladung der Strombegriff begründet. Beiden Größen unterliegen Erhaltungssätzen (für Ladung und Energie). Sie

bilden – bekannter als Kirchhoffsche Gleichungen – die Grundlage zur Berechnung elektrischer Stromkreise. Das sind Zusammenschaltungen der Grundelemente Quellen (Spannung, Strom) und Widerstände so, dass Ströme fließen können, zunächst beschränkt auf Gleichströme (Kap. 2.1–2.3). Quelle und Verbraucher wirken als Grundstromkreis (Kap. 2.4) zusammen, er kann auch nichtlineare Elemente enthalten (Kap. 2.5). Viele Anwendungsbeispiele lassen sich auf ihn zurückführen.

Oft liegt zwischen Quelle und Verbraucher noch ein Zwischennetzwerk – bekannter als Vierpol- oder Zweitornetzwerk (Kap. 2.6). Seine wichtigsten Beschreibungsformen bereiten ein allgemeineres Netzwerkverständnis vor. Eine besonders wichtige Zweitorgruppe sind gesteuerte Quellen. Sie bilden die netzwerktechnische Grundlage der Verstärkerbauelemente. Das Folgekapitel (Kap. 2.7) schafft ein erstes Verständnis des Bipolartransistors und Operationsverstärkers, in deren Modellen gesteuerte Quellen umfangreiche Anwendung finden.

Mit diesem Wissen lassen sich bereits zahlreiche Problemstellungen lösen, gleichzeitig sind sie die Grundlage zur Analyse elektrischer Netzwerke (Kap. 3). Ihr Merkmal ist die systematische Anwendung der Kirchhoffschen Gleichungen: Maschenstrom- und Knotenspannungsanalyse bilden dabei die Standardverfahren. Erweiterungen erlauben ihren Einsatz auch auf Fälle, die zunächst ausgeschlossen sind. Der notwendige Computereinsatz bei großen Netzwerken erfordert die matrixbasierte Netzwerkbeschreibung (Kap. 3.4). Computerbasierte Lösungsverfahren (Kap. 3.5) nutzen sie.

Aus praktischer Sicht kann es zweckmäßig sein, die Knotenzahl mehrpoliger Netzwerke zu manipulieren (Kap. 3.6), um die Analyse zu vereinfachen. Das Problem tritt beim Einfügen von Operationsverstärkern in größere Schaltungen auf. Auch Netzwerktheoreme (Kap. 4) vereinfachen oft die Lösungsverfahren, wenn sich auch ihre volle Wirksamkeit erst in Wechselstromnetzwerken zeigt.

Die Netzwerkverfahren beschränken sich zunächst auf Gleichstromnetzwerke (mit geringen mathematischen Anforderungen wie Algebra und Matrixrechnung). Sie bilden das wichtigste Fundament der Grundausbildung, das sich später durch Einbezug weiterer Netzwerkelemente wie Kondensator und Spule mühelos auf zeitveränderliche Netzwerkerregungen, etwa Wechselspannungen, übertragen lässt.

Das elektrische und magnetische Feld und überhaupt der Feldbegriff ist eines der wichtigsten Anliegen der Elektrizitätslehre und Gegenstand des Folgebandes 2. Dazu gehören Ursachen, Wirkungen und Gesetzmäßigkeiten der Felder und ihre Beschreibung im Raumpunkt durch Feldgrößen, für ein Raumgebiet

aber durch *Integral*- oder *Globalgrößen* wie etwa Strom und Spannung. Über sie definieren wir die Grundbauelemente Widerstand, Kondensator, Spule und Transformator, Spannungs- und Stromquelle.

Die Haupteigenschaft des elektromagnetischen Feldes ist seine Fähigkeit zur Speicherung von Energie und deren Transport. Deshalb zählen der Energiebegriff und die Energieumformung etwa in Licht, Wärme, chemische und mechanische Energie ebenso zum Kern der Elektrotechnik wie die elektromagnetischen Felder und Stromkreise. Der Energiebegriff ist allen Gebieten gemeinsam. Gerade die Energieumformung elektrischer in nichtelektrische Energie und umgekehrt bildet die Grundlage vielfältiger Anwendungen der Elektrotechnik.

Historische Entwicklung Historisch entstand die Lehre von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen durch eine große Zahl entdeckter Einzelphänomene, wie Reibungselektrizität, Magnetismus (Dauermagnet), Blitz als elektrische Entladung u. a. m. Die Erzeugung elektrischer Ströme auf galvanischem Wege führte zur Erkenntnis, dass zwischen elektrischen und magnetischen Vorgängen enge Wechselwirkungen bestehen (Faraday: Induktion, Oersted: Magnetfeld des Stromes). Maxwell formulierte aus diesen Einzelerscheinungen durch geniale Intuition die Grundgesetze des elektromagnetischen Feldes. Tabelle 1.1 stellt einige Marksteine zusammen. Das Erkennen dieser Naturgesetze aus Einzelerscheinungen und Experimenten wurde durch zwei Modellvorstellungen erleichtert, das Teilchen- und das Feldmodell. Was versteht man überhaupt unter einem Modell?

Ein Modell ist ein gedankliches Hilfsmittel zur einfachen und verständlichen Beschreibung eines komplizierten Vorganges oder Zusammenhanges unter bestimmten Annahmen bzw. Vereinfachungen.

Modelle lassen Gesetzmäßigkeiten erkennen und durch mathematische Gleichungen formulieren. Das Modell ist "gültig", wenn seine Schlussfolgerungen durch das Experiment bestätigt werden. Da Annahmen den Gültigkeitsbereich eines Modells begrenzen, muss es oft erweitert werden. So entstehen Modellfamilien. Besonders ausgeprägt ist diese Modellphilosophie beispielsweise bei Halbleiterbauelementen.

## 1.2 Teilchen- und Feldmodell

Das Teilchenmodell erklärt die *diskrete Struktur* der Stoffe. Danach bestehen Gase, Flüssigkeiten und Festkörper aus Teilchen (Molekülen, Atomen), letzte-

Tabelle 1.1. Historische Entwicklung bis zur Erfindung der integrierten Schaltung

Zeitraum	Entdeckung, Erfindung		
Altertum	Entdeckung magnetischer Effekte und der statischen Elektrizität an		
	geriebenem Bernstein		
ab 1000	Magnetischer Kompass zur Navigation benutzt		
1733	CF. du Fay entdeckt die entgegengesetzten elektrischen Ladungen		
1745	Leydener Flasche (Kondensator) durch G. v. Kleist, P. v. Musschen-		
	broek entdeckt		
1752	B. Franklin entdeckt den Blitzableiter		
1785	Ch. A. de Coulomb formuliert die Kraftwirkung zwischen Ladungen		
1800	A. Volta erfindet die Batterie und entdeckt den elektrischen Strom		
1820	H.C. Oersted entdeckt das Magnetfeld des Stromes		
1820	J. B. Biote, F. Savart entdecken das Biot-Savartsche Gesetz		
1827	G.S. Ohm formuliert das Ohmsche Gesetz		
1831	M. Faraday entdeckt das Induktionsgesetz		
1835	C. F. Gauß formuliert das Gaußsche Gesetz		
1864	J.C. Maxwell beschreibt elektromagnetische Wellen durch von ihm		
	formulierte Gleichungen		
1887	H. Hertz weist elektromagnetische Wellen experimentell nach		
1888	N. Tesla, Erfindung des Wechselstromes		
1906	L. D. Forest erfindet die Elektronenröhre (Triode)		
1914	E. Armstrong erfindet den Rückkopplungsempfänger		
1919	E. Armstrong, W. Schottky erfinden den Überlagerungsempfänger		
1926	J. Lilienfeld, Patentanmeldung eines sperrschichtähnlichen FET-		
	Transistors, 1934 erste Realisierung durch O. Heil		
1938	W. Schottky, B. Davidow, Theorie des Metall-Halbleiterkontaktes		
1942	Verwendung von Ge- und Si-Dioden in Radargeräten (Siemens, Tele-		
	funken)		
1945	E. Spenke (Siemens), Patentanmeldung für eine Transistorstruktur		
1945 – 47	H. Mataré, H. Welker, Erfindung des Transistrons im Auftrag d. franz.		
	Post		
1947	J. Bardeen, W. Brattain, W. Shockley, Transistorer finding		
1955	N. Kapany, Erfindung der Glasfaserleitung		
1958	${\bf J}.$ Kilby, R. Noyce, Erfindung und Umsetzung integrierter Schaltungen		

re aus *Elektronen*, *Protonen* und *Neutronen*. Spezifisch für elektrische Erscheinungen ist die *Ladung* eines Teilchens. Dabei wird seine stoffliche Substanz und Ladung eines Teilchens in einem Punkt konzentriert gedacht: *Punktmasse*, *Punktladung*.

Makroskopische Körper enthalten sehr viele Teilchen, man erfasst sie deshalb durch den Begriff Teilchenkollektiv. Metalle besitzen rd.  $10^{23}$  Elektronen pro

cm<sup>3</sup>. Dadurch lassen sich seine elektrischen Eigenschaften durch *Stoff*- oder *Materialkonstanten* ausdrücken, etwa die elektrische Leitfähigkeit. Das Verhalten des Einzelelektrons in diesem Kollektiv erfordert dann eine mikrophysikalische Betrachtung der Elektrizitätsleitung.

Feldmodell Eine Kraftübertragung zwischen zwei Körpern erfordert keinen unmittelbaren Kontakt zwischen ihnen. Das wissen wir aus dem Gravitationsgesetz oder der Kraftwirkung des Erdmagnetfeldes auf eine Kompassnadel. Man vermutet deshalb eine Fernwirkung zwischen den Körpern. Dann müsste sich eine Veränderung eines Körpers sofort auf den anderen auswirken. Dies widerspricht der Tatsache, dass die Lichtgeschwindigkeit die höchste Geschwindigkeit ist. Diese Schwierigkeiten umging Faraday mit der Annahme, dass durch die Anwesenheit eines Körpers der ihn umgebende Raum selbst zum Träger physikalischer Eigenschaften wird. Dieser besondere Raumzustand, gekennzeichnet durch Kraftwirkung auf andere Körper (Masse, Ladung, Magnetpole), wird als Feld bezeichnet.

Das Feldmodell beschreibt die Kraftwirkung auf einen Körper als Folge eines anderen Körpers (Ursache) in einem Raumpunkt durch die Einführung des Feldbegriffes (Tab. 1.2) und zugeordneter Feldgrößen.

Teilchen- und Feldmodell stehen in Wechselwirkung. Nach Tabelle 1.2

- erzeugen ruhende und bewegte Ladungen das elektromagnetische Feld, sind also seine *Ursache*, andererseits
- üben elektromagnetische Felder Kraft*wirkungen* auf ruhende und bewegte Ladungen aus.

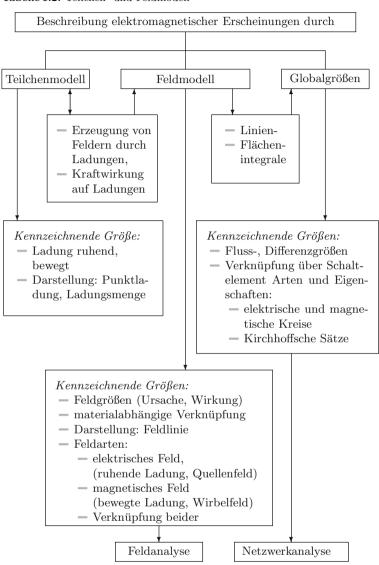
Im Feldmodell tragen *Feldlinien* (Kraftlinien) zur Veranschaulichung bei.

Gegenstand der Feldbetrachtungen sind ruhende und bewegte Ladungen, ihre wechselseitigen Kraftwirkungen sowie die dadurch erzeugten elektrischen und magnetischen Felder und ihre Wechselwirkungen.

Aus praktischer Sicht interessiert oft nicht das elektromagnetische Feld in einzelnen Raumpunkten, sondern nur sein Globalverhalten im Raumbereich. Dafür werden aus den Feldgrößen durch örtliche Integration über Linien- und Flussintegrale (s. Bd. 2) integrale Größen eingeführt. Zu ihnen gehören Strom und Spannung. Dann erfordert auch ihr Ursache-Wirkungs-Zusammenhang neue Begriffe wie Widerstand, Kapazität oder Induktivität. Die globale Feld-

 $<sup>^1</sup>$ Vergleich: Ein Sack Weizen mit einer Masse von 50 kg enthält etwa 3 · 10 $^6$  Weizenkörner. Im Metall vom Volumen eines Kubikzentimeters befinden sich rd.  $10^{16}$  mal so viele Elektronen.

Tabelle 1.2. Teilchen- und Feldmodell



beschreibung macht die Angabe der Strom-Spannungs-Zusammenhänge der Bauelemente Widerstand, Kondensator und Spule überhaupt erst möglich. Auf diese Weise können ausgedehnte Felderscheinungen (unter bestimmten Voraussetzungen) auf die Zusammenschaltungen von Bauelementen zu Schaltungen oder Netzwerken zurückgeführt und einfach analysiert werden. Das ist das wichtigste Ergebnis des Feldmodells.

Auf der anderen Seite sind Begriffe wie Spannung, Strom und Widerstand aus dem täglichen Leben, der Schul- oder Berufsausbildung wohlbekannt. Dann liegt es nahe, sie zu vertiefen und zur praktischen Lösung von Gleichstromschaltungen und überhaupt Netzwerken zu nutzen. So wird ein wichtiges Teilgebiet der Elektrotechnik systematisch erarbeitet. Umso leichter fällt dann die Behandlung elektromagnetischer Felder im Band 2.

## 1.3 Elektrische Ladung

## **▶** 1.3.1 Eigenschaften der elektrischen Ladung

**Ladungsarten** Alle elektrischen Erscheinungen beruhen auf der Existenz elektrischer Ladungen. Deshalb wird sie als eigenständige *vierte Grundgröße* (neben Länge, Masse, und Zeit) für die Elektrotechnik festgelegt (s. Anhang A.1). Man schließt durch Beobachtung von Kraftwirkungen auf ihre Existenz.

Die Erfahrung zeigt, dass sich viele Stoffe durch Reiben in einen besonderen Zustand versetzen lassen. Dann stoßen sie Gegenstände aus gleichem Material ab, ziehen andere an oder stoßen sie ab oder es erfolgt überhaupt keine Wirkung. Der Alltag bietet zahlreiche Beispiele: Aneinanderhaften von Papierbogen, Anziehen von Papierschnitzeln, Sträuben der Haare bei bestimmten Kämmen u. a. m. Der Effekt war schon in der Antike mit geriebenem Bernstein<sup>2</sup> bekannt, der Vogelfedern anzog. Das griechische Wort *electron* (Bernstein) lieferte den Begriff "elektrisch" für solche Erscheinungen.

Diese Kraftwirkungen können nicht auf mechanische Gesetze zurückgeführt werden. Ihre Erklärung gelingt erst durch Einführung der elektrischen Ladung Q als neuer physikalischer Größe.

Da es abstoßende und anziehende Kräfte gibt, nimmt man positive (Q > 0) und negative Ladungen (Q < 0) an. Willkürlich wurde die beim Reiben eines Glasstabes feststellbare Ladung als positiv und für den Hartgummistab als negativ angesehen.<sup>3</sup> Verallgemeinert wird dann ein Elektronenüberschuss mit

 $<sup>^2\</sup>mathrm{Georg}$  Christoph Lichtenberg (1744–1799), deutscher Physiker und Schriftsteller.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Die Vereinbarung, nach der Elektronen negative Ladung tragen, geht auf B. Franklin zurück. Er definierte willkürlich, dass Ladungen auf Glas, das vorher mit einem Seidentuch gerieben wurde, positiv sein sollen. Danach muss das etwa 100 Jahre später entdeckte Elektron negative Ladung besitzen. Aus heutiger Sicht wäre es zur Beseitigung des Vorzeichens besser gewesen, den Elektronen positive Ladungen zuzuordnen. Da heute mit den Löchern (in Halbleitern) auch positive Ladungsträger bekannt sind, werden wir die Gesetze jeweils für positive Elementarladungen definieren.

negativem, ein Elektronendefizit mit positivem Vorzeichen gekennzeichnet. Wir wissen aus Erfahrung:

Ladungen verschiedenen Vorzeichens ziehen einander an, gleichen Vorzeichens stoßen einander ab.

Die Kraftwirkungen werden Coulomb-Kräfte genannt und durch das  $Coulombsche\ Gesetz^4$  beschrieben (s. Kap. 1.3.3).

Was Ladung eigentlich bedeutet, wissen wir bis heute nicht genau, denn die Einführung des Begriffs "elektrische Ladung" beschreibt nur die Fähigkeit, andere Ladungen anzuziehen (oder abzustoßen), nicht die Ladung selbst. Sie wird lediglich durch ihre Wirkung und die Tatsache nachgewiesen, dass sie am Aufbau der Materie entscheidend beteiligt ist. Nach dem Bohrschen Atommodell besteht jedes Atom aus dem Kern (= Anzahl von Protonen und Neutronen) und der Elektronenhülle. Dabei ist das Elektron Träger negativer elektrischer Ladung, der Elementarladung oder des elektrischen Elementarquantums.

Protonen tragen eine gleich große positive Elementarladung. Im Atom wird die positive Kernladung durch eine gleich große Zahl von Hüllelektronen "neutralisiert". Ursache der gegenseitigen Anziehung der Elektronen und Protonen sind die Coulomb-Kräfte. Sie halten durch die Zentripetalkraft im Atom die Elektronen auf Bahnen um den Atomkern.

Energiezufuhr kann Elektronen aus der Hülle herauslösen. Dabei verbleibt netto eine positive Überschussladung, ein positives Ion. Seine Ladung entspricht der Zahl entfernter Elektronen. Diese können dann als "freie" Elektronen z. B. Kraftwirkungen ausüben oder Kräften unterworfen werden. Besitzt ein Ion im Vergleich zum vorher neutralen Atom zu viel Elektronen (negative Überschussladung), so heißt es Anion. Ein Ion mit positiver Überschussladung heißt Kation. Je nachdem, ob 1, 2 oder 3 Elementarladungen im Überschuss sind, sprechen wir von 1-, 2- oder 3-wertigen Ionen.

Die (Netto)ladung eines Körpers entsteht durch Trennung in gleich große positive und negative Ladungsmengen. Die Summe der getrennten Ladungen entspricht dem Ausgangszustand. Deshalb gilt für die Ladung ein *Erhaltungssatz*.

Die elektrische Ladung eines Körpers wird nicht erzeugt, sondern durch Trennung positiver und negativer Ladungen, d. h. Abtrennung einer oder mehrerer Elementarladungen von vorher neutralen Atomen, verursacht!

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Charles Augustin de Coulomb, französischer Physiker 1736–1806.

Quantitatives, Einheit Die Ladung Q hat die Einheit Coulomb (s. Anhang A.1): [Q] = 1 Coulomb = 1 C = 1 As. Sie ist *keine* Grundeinheit des SI, vielmehr wird die Ladungseinheit aus messtechnischen Gründen auf die gesetzliche Grundeinheit der Stromstärke (das Ampere = 1 A) und die Zeit zurückgeführt (Kap. 1.4.2). Dann stellt ein Coulomb die Ladungsmenge dar, die ein Strom der Stärke 1 A innerhalb einer Sekunde durch einen Leiterquerschnitt führt.

Neben der Ladung Q gibt es die Ladung q von Ladungsträgern, denn elektrische Ladung ist eine Eigenschaft von Elementarteilchen. Alle Ladungen lassen sich auf die Elementarladung  $e=1,6021892\cdot 10^{-19}$  As zurückführen. Damit folgt<sup>5</sup>:

$$q_{-} = -e \approx -1,602 \cdot 10^{-19} \, \mathrm{As},$$
  $q_{+} = +e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \, \mathrm{As},$  Elektron Defektelektron, Loch (positive Elementarladung).

Deswegen treten Ladungen nur gequantelt auf und die Ladung eines beliebigen Körpers unterliegt stets der Bedingung

$$Q = \pm Ne$$
,  $N \ge 0$ , ganz,  $e$  Elementarladung. (1.3.1)

## Ladungen sind stets ein Vielfaches der Elementarladung.

Die Quantelung der Ladung war zur Zeit Maxwells noch unbekannt. Weil bei technischen Problemstellungen ohnehin nur extrem viele Ladungsträger mitwirken, wird die Einzelladung überdeckt und die Maxwellsche Theorie basiert auf kontinuierlichen Ladungsverteilungen.

Für die Feldbeschreibung ist die Einführung der *Punktladung* zweckmäßig:

Punktladung: Ladung eines Trägers mit der Linearabmessung "null". Jede makroskopische Ladungsverteilung lässt sich aus Punktladungen zusammensetzen.

Zusammengefasst sind die wichtigsten Merkmale der Ladung die unterschiedlichen Ladungsarten, ihre Quantelung und die Gültigkeit eines Ladungserhaltungssatzes. Während sich die Quantelung nur in bestimmten Fällen bemerkbar macht (z. B. als Rauschen in elektronischen Schaltungen), haben positive und negative Ladungsträger und der Erhaltungssatz grundlegende Bedeutung.

Größenvorstellung Die Elektronenladung veranschaulicht folgendes Beispiel:

— Würde ein Elektron je Sekunde durch einen Leitungsquerschnitt fließen, so entspräche das einem Strom  $I=1,6\cdot 10^{-19}$  A. Empfindliche Strommesser weisen

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Der Index – bei der Elektronen- bzw. + bei der Löcherladung wird beigefügt, wenn auf das Vorzeichen besonders hingewiesen werden soll.

heute Ströme von etwa  $10^{-14}$  A nach. Das entspricht etwa 100 000 Elektronen/Sekunde. Eine Ladungsmenge Q=1 As enthält insgesamt n=|Q/q|=1 As/1,  $6\cdot 10^{-19}$  As  $\approx 6.3\cdot 10^{18}$  Elektronen.

- Ein dynamischer Speicher (DRAM) eines PC's speichert Ladungen in Kondensatorzellen (ein Speicher enthält einige GBit solcher Zellen). Setzt man als Kapazität einer Zelle  $C=10^{-15}\,\mathrm{As/V}=1\,\mathrm{fF}$  und liegt eine Spannung von  $U=1\,\mathrm{V}$  an, so beträgt die Ladung  $Q=C\cdot U$  zur Speicherung der Informationsmenge 1 Bit etwa  $10^{-15}\,\mathrm{fF}\cdot 1\,\mathrm{V}=10^{-15}\,\mathrm{As}$ . Diese Ladung wird von  $n=Q/q=10^{-15}\,\mathrm{As/1}, 6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}\approx 6000$  Elektronen getragen!
- In der Nanoelektronik sind an Bauelementefunktionen noch deutlich weniger Elektronen beteiligt, beim sog. *Ein-Elektron-Transistor* nur ein Elektron!

Die Ladungsträgerdichten unterscheiden sich in typischen Materialien. Metalle enthalten Elektronen wegen der schwachen Atombindung in großer Zahl, also hoher Konzentration  $n \approx 10^{22}$  Elektronen/cm<sup>3</sup>. Gleichzeitig gibt es entsprechend viele positive Atomrümpfe:

Metalle sind elektrisch neutral. Die Elektronendichte liegt bei ca.  $10^{22}\,\mathrm{cm^{-3}}$  und sorgt für gute Leitungseigenschaften.

In *Halbleitern* (wie z.B. Silizium) entstehen freie Elektronen oder Defektelektronen beim Ersatz von Atomen des Grundgitters durch Fremdatome, die sog. *Störstellen*.

Halbleiter sind elektrisch stets neutral und besitzen eine Ladungsträgerdichte  $n\approx (10^{10}\dots 10^{21})\,\mathrm{cm^{-3}}$  abhängig von Anzahl und Art zugesetzter Störstellen.

Nichtleiter, auch Isolatoren oder Dielektrika genannt, haben (im Idealfall) keine frei beweglichen Ladungsträger. Der ideale Nichtleiter ist das Vakuum. In der Praxis werden Stoffe mit einer Elektronenkonzentration  $n < 10^8 \, \mathrm{cm}^{-3}$  noch als Nichtleiter angesehen.

Auf die wichtigste Eigenschaft der Ladung, den umgebenden Raum mit einem elektrischen Feld zu erfüllen, kommen wir im Kap. 1.3.3 zurück.

Ladungsträgerdichte, Ladungsverteilungen Für den Ladungstransport eignet sich die (volumenbezogene) Ladungsträgerdichte n besser als die absolute Trägerzahl. Das ist die Zahl  $\Delta N$  einer Ladungsträgersorte in einem Volumenelement  $\Delta V$  bezogen auf dieses Volumenelement<sup>6</sup>:

$$n = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} \text{ resp. } n = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}V}, \quad [n] = \frac{1}{\mathrm{cm}^3}. \tag{1.3.2}$$

 $<sup>^6\</sup>mathrm{Der}$  Grenzübergang zum differenziell kleinen Volumenelement empfiehlt sich bei ortsveränderlicher Trägerverteilung.

Zur Beschreibung einer Ladungsverteilung bezieht man die Ladung auf ein Volumen, eine Fläche oder eine Linie:

- Raumladung: Ladungsverteilung in einem Volumen, etwa die Raumladungswolke in einer Gasentladung oder in der Sperrschicht einer Halbleiterdiode,
- Flächenladung auf der Oberfläche einer leitenden Elektrode,
- Linienladung auf einem Draht mit vernachlässigbarem Durchmesser,
- Punktladung etwa für das Elektron.

Merkmal der Raumladung ist die Raumladungsdichte  $\varrho$  (Abb. 1.3.1). Es gilt

$$Q = \int_{\text{Volumen } V} \varrho(r) \, dV.$$
 Raumladungsdichte, Definitionsgleichung (1.3.3)

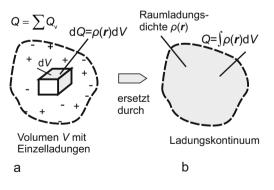
 $mit^7$ 

$$\varrho(r) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V}, \quad [\varrho] = 1 \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}.$$
 Raumladungsdichte im Raumpunkt  $r$ 

Dabei ist  $\Delta Q$  die Ladung im Volumenelement  $\Delta V$ . Bei ortsunabhängiger Raumladungsdichte gilt: Ladung gleich Raumladung mal Volumen.

Die Raumladungsdichte spielt in elektronischen Bauelementen, ionisierten Gasen und Elektrolyten eine Rolle. Die übrigen Ladungsverteilungen werden in Band 2 behandelt. Ist die Ladungsverteilung eines Raumes, einer Fläche, Linie oder in einem oder an verschiedenen Punkten bekannt, so ergibt sich die Gesamtladung durch Integration bzw. Summation über den jeweiligen Bereich:

Die Gesamtladung ist die "Integralgröße" der Ladungsverteilung.



- Abb. 1.3.1. Ladungsverteilung.
- (a) Einzelladungen im Volumen.
- (b) Raumladung. Im Volumen V wird die kontinuierliche Ladungsverteilung durch die Raumladungsdichte beschrieben

 $<sup>^7</sup>$ Man beachte den Unterschied zwischen Raumladungsdichte  $\varrho$  und spezifischem Widerstand  $\varrho$  (s. Kap. 2.3).

#### Merkmale der Ladung

- Ladung sitzt als masseloses Fluidum immer auf Materie,
- Ladungen können nur gequantelt auftreten, doch spielt die Quantelung bei makroskopischen Körpern mit großer Elektronenzahl keine Rolle,
- Ladungen üben auf andere Ladungen über beliebige Entfernungen und durch alle Materialien hindurch eine Kraft aus, die auf den Körper wirkt, der die Ladung trägt,
- jeder materielle Körper hat (im Regelfall) gleich viele positive wie negative Ladungen,
- in einem Leiter ist beliebig viel verschiebbare Ladung vorhanden, in Isolatoren werden Ladungen hingegen "elastisch" festgehalten,
- das Modell der Punktladung ist die auf einen Raumpunkt komprimierte Ladung (analoger Begriff in der Mechanik die Punktmasse), die sich für die mathematische Beschreibung gut eignet.

Auf drei weitere Merkmale verweisen wir im Vorgriff:

- für die von Ladungen ausgeübte Kraftwirkung wird im Kap. 1.3.3 der Begriff *elektrisches Feld E* eingeführt,
- Ladungen sind Quellen und Senken des elektrischen Feldes,
- es gilt für die Ladung ein Erhaltungssatz.

## **●** 1.3.2 Erhaltungssatz der Ladung

Die Physik basiert u. a. auf verschiedenen *Erhaltungssätzen* für abgeschlossene Systeme: Erhaltung der Gesamtenergie, des Gesamtimpulses, der Gesamtmasse u. a. m. Sie werden als Naturgesetze durch das Experiment immer wieder bestätigt, konnten aber nie absolut bewiesen werden. Zu diesen Sätzen gehört der Satz von der *Ladungserhaltung*:

Die Gesamtladung Q (= algebraische Summe der in einem abgeschlossenen Volumen enthaltenen Ladungen) ist stets konstant (Naturgesetz).

$$\begin{array}{c|c} \textit{Ladungserhaltungssatz}, \text{ abgeschlossenes System (Hüllfläche undurchlässig)} \\ \sum_{i} Q_{i} \bigg|_{\substack{\text{abgeschl.} \\ \text{Volumen}}} = \text{const} \quad \text{bzw. gleichwertig} \, \frac{\mathrm{d} \sum\limits_{i} Q_{i}}{\mathrm{d} t} = 0 \end{array} \tag{1.3.4}$$

Kontinuitätsgleichung, nichtabgeschlossenes System (Hülle durchlässig)  $\frac{\mathrm{d}\sum_i Q_i}{\mathrm{d}t} \neq 0.$ 

Der Satz beruht auf der Unveränderbarkeit der Elementarladung und der Tatsache, dass sich die Wirkungen zweier entgegengesetzt gleicher Ladungen kompensieren. Ladungsverteilungen sind in der Gesamtladung Q sinngemäß zu berücksichtigen. Umgekehrt folgt dann aus Gl. (1.3.4):

Eine Ladung Q im Volumen V kann sich nicht durch Erzeugung oder Vernichtung, sondern nur durch Zu- oder Abfluss von Ladungen durch eine gedachte oder vorhandene Hüllfläche ändern.

Die Ladungserhaltung ist die Grundlage der *Bilanz*- oder *Kontinuitätsgleichung* (1.4.5), die in einer speziellen Form als *Kirchhoffscher Knotensatz* auftritt.

#### 1.3.3 Elektrische Feldstärke

Coulombsches Gesetz Ladungen erzeugen Kraftfelder und üben so Kräfte aufeinander aus. Die Kraftwirkung zwischen zwei ruhenden Punktladungen wird durch das Coulombsche Gesetz beschrieben

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{r}{r}, [F] = 1N = \frac{1 \text{ kg m}}{\text{s}^2} = 1 \frac{\text{Ws}}{\text{m}}.$$
 Coulombsches (1.3.5)

Es gilt streng genommen nur für Punktladungen, aber auch für geladene Körper, wenn die Linearabmessungen kleinen gegenüber dem Abstand sind.

Der Einheitsvektor r/r zeigt in Richtung des Ortsvektors r und hat den Betrag 1. Abhängig vom Vorzeichen von  $Q_1Q_2$  kann F positiv, negativ oder null sein (Abb. 1.3.2). Dem Bild ist zu entnehmen

- die Kraft wirkt längs der Verbindungslinie zwischen den Punktladungen,
- Ladungen gleicher Polarität  $(Q_1Q_2 > 0)$  stoßen einander ab, solche entgegengesetzter Polarität  $(Q_1Q_2 < 0)$  ziehen sich an (Abb. a, b): im ersten Fall wirkt  $\boldsymbol{F}$  in der Orientierung  $\boldsymbol{r}$ , sonst entgegen,
- die von  $Q_1$  auf  $Q_2$  ausgeübte Kraft ist betragsmäßig gleich der Kraft, die die Ladung  $Q_2$  auf  $Q_1$  ausübt.

Die *Permittivität*  $\varepsilon$  in Gl. (1.3.5)

$$\varepsilon = \varepsilon_{\rm r} \varepsilon_0 \quad \text{mit } \varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$
 (1.3.6)

setzt sich aus  $\varepsilon_0$ , der *elektrischen Feldkonstante* (absolute Permittivität des Vakuums, Naturkonstante) und der relativen Permittivität oder *Permittivitätszahl*  $\varepsilon_r$  zusammen. Sie kennzeichnet den Einfluss der Materie auf das elektrische Feld. Im Vakuum gilt  $\varepsilon_r = 1$ , für übrige Materialien  $\varepsilon_r > 1$ . Wir erläutern die Permittivität im Band 2 eingehender.

Elektrische Feldstärke Die Kraftwirkung zwischen den Ladungen ist nach Gl. (1.3.5) die Aussage des Teilchenmodells. Danach verursacht die Ladung  $Q_1$  an der Ladung  $Q_2$  eine Kraft  $F_2$  (und umgekehrt) über beliebige Entfernung. Damit wird der Ursache (elektrische Ladung  $Q_1$ ) eine entfernt auftretende Wirkung (Kraft auf Ladung  $Q_2$ ) ohne Vermittlung des zwischenliegenden Raumes zugeschrieben!

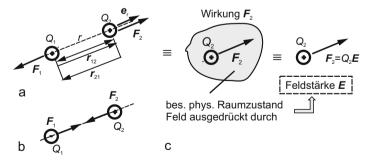
Wir erklären jetzt den Sachverhalt durch das Feldmodell. Danach muss jeder Feldgröße, die eine Wirkung beschreibt (hier die Kraft  $\mathbf{F}_2$  auf die zweite Ladung) eine andere, im gleichen Raumpunkt zur gleichen Zeit auftretende Feldgröße, also eine Ursache zugeordnet werden. Im Beispiel wirkt auf die Ladung  $Q_2$  im Raumpunkt 2 die Kraft  $\mathbf{F}_2$ 

$$\boldsymbol{F}_2 = Q_2 \quad \underbrace{\left(\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} \left(\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}\right)\right)}_{(1.3.7)}$$

Deshalb ist der zusammengefasste Anteil eine Eigenschaft des Raumes am Ort von  $Q_2$  selbst, aber unabhängig von  $Q_2$ . Das Feldmodell führt diese Wirkung auf eine Feldgröße zurück, die am Ort von  $Q_2$  herrscht (Abb. 1.3.2c). Sie muss unabhängig vom Objekt ( $\rightarrow Q_2$ ) sein, auf das sie wirkt (die Kraft hängt von Betrag und Vorzeichen von  $Q_2$  ab, kann also nicht Zustandsgröße des Raumes sein)! Der Quotient

$$\frac{\mathbf{F}_2}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2} \left(\frac{\mathbf{r}_{12}}{r_{12}}\right) = \mathbf{E}_2$$

erfüllt diese Eigenschaft. Wir interpretieren ihn als die dem Raumpunkt eigene Feldgröße, die *elektrische Feldstärke* E. Sie charakterisiert die Kraftwirkung  $F_2$  auf die Ladung  $Q_2$  (als qualitatives Verständnis der Feldstärke am Ort der Ladung):



**Abb. 1.3.2.** Kraftwirkung zwischen zwei Punktladungen. (a) Kraftwirkung zwischen zwei Ladungen,  $Q_1Q_2 > 0$ . (b) dto. für  $Q_1Q_2 < 0$ . (c) Kraftwirkung auf die Ladung  $Q_2$  erklärt durch den besonderen physikalischen Raumzustand "Elektrisches Feld" mit der Feldstärke E

$$\label{eq:Elektrische Feldstärke} \text{Elektrische Feldstärke} = \frac{\text{Kraft auf Ladung}}{\text{Ladung}}.$$

Wie die Kraft  $\boldsymbol{F}$  ist auch die Feldstärke  $\boldsymbol{E}$  eine vektorielle physikalische Größe und wir kommen zu folgender *Definition*:

Wirkt auf eine am Ort P befindliche ruhende Punktladung Q die Kraft  $\boldsymbol{F}$ , so herrscht am gleichen Ort die elektrische Feldstärke  $\boldsymbol{E}$ . Diese Definitionsgleichung gilt, unabhängig von der Feldursache, für das gesamte elektromagnetische Feld.

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{Q}.$$
 Elektrische Feldstärke, Definitionsgleichung (1.3.8)

Die Richtung der Feldstärke E stimmt bei positiver Ladung mit der Richtung der Kraft überein, bei negativer Ladung wirken sie einander entgegen (Abb.1.3.2b).

Die prinzipielle Bedeutung der Definition liegt in der Beschreibung der Wechselbeziehung zwischen Feldgröße und Kraftwirkung am gleichen Ort. Damit ordnet das elektrische Feld jedem Raumpunkt eine lokale Eigenschaft zu. Ist  $\boldsymbol{E}$  dort bekannt, so steht fest, was dort mit jeder Ladung geschehen würde unabhängig davon, ob vorhanden oder nicht.

Die Definition Gl. (1.3.8) sagt nichts über die Erzeugung der Feldstärke. Deshalb kann sie auf zwei Arten interpretiert werden:

- 1. Man stellt das elektrische Feld an einem Ort durch die Kraftwirkung auf eine dort befindliche oder hingebrachte Ladung fest: dann wirkt die Ladung als "Feldindikator" und heißt Probeladung. Zwangsläufig verschiebt die Feldstärke bewegliche Ladungen (etwa im Leiter) durch ihre Kraftwirkung: Feldstärke als Antriebsursache der Trägerbewegung.
- 2. Ladungen erzeugen in ihrer Umgebung ein Kraftfeld (Abb. 1.3.2a) und damit ein elektrisches Feld. Deshalb sind Ladungen immer Anfang (Quelle) und Ende (Senke) von Feldstärkelinien.

Abb. 1.3.3 zeigt Beispiele zur Feldstärke: Ladungen zwischen einer Gewitterwolke und der Erde erzeugen ein elektrisches Feld in der Atmosphäre, ebenso Ladungen auf zwei isoliert angebrachten Metallplatten. Wirkt in einem Leiter eine Feldstärke  $\boldsymbol{E}$  (z. B. durch Anlegen einer Batteriespannung), so setzt die Feldstärke Ladungsträger in Bewegung. Auch auf den Batteriepolen (+,-) sitzen Ladungen, zwischen denen sich ein elektrisches Feld ausdehnt (Abb. 1.3.3b, c).

Einheit, Größenordnung Die Einheit der elektrischen Feldstärke lautet

$$[E] = \left[\frac{F}{Q}\right] = 1\frac{N}{As} = 1\frac{kg m}{As^3} = 1\frac{V}{m} \text{ mit } 1\frac{kg m^2}{As^3} = 1\frac{V As}{As} = 1 V.$$

Dabei ist 1 V eine abgeleitete Einheit. Untereinheiten sind V/cm, kV/cm und MV/cm.

#### Größenvorstellung

Atmosphäre (klares Wetter)	$E \approx$	(100200)  V/m
Oberfläche einer Rundfunkempfangsantenne	$E \approx$	$(110^3) \mu V/\mathrm{m}$
Oberfläche einer Hochspannungsleitung	$E \approx$	$10^6  \mathrm{V/m}$
Kondensator	$E \approx$	$(10^6 \dots 10^7)  \text{V/m}$
stromdurchflossener Leiter	$E \approx$	$0, 1\mathrm{V}/\mathrm{m}$
Sperrschicht in Halbleiterbauelementen	$E \approx$	$(10^4 \dots 10^6)  \text{V/cm}$
Durchschlagfestigkeit der Luft	$E \approx$	$30\mathrm{kV/cm}$

Eine Feldstärke  $E=10^6\,\mathrm{V/m}$  übt auf eine positive Elementarladung  $q=1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$  die Kraft  $F=qE=1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}\cdot 10^6\,\mathrm{V/m}=1,6\cdot 10^{-13}\,\mathrm{Ws\,m^{-1}}\approx 1,6\cdot 10^{11}\,\mathrm{p}$  aus, da  $1\,\mathrm{Ws/m}\approx 0.1\,\mathrm{kp}=100\,\mathrm{p}$  beträgt.

**Homogenes Feld** Dieser Sonderfall entsteht bei Belegung zweier unendlich großer paralleler, voneinander isolierter Metallplatten mit flächenhaft verteilten Ladungen  $Q^+$ ,  $Q^-$  (Abb. 1.3.3a). Dann herrscht überall zwischen den Platten die gleiche Feldstärke E (Größe, Richtung).

**Anwendungen** Kraftwirkungen zwischen elektrischen Ladungen treten vielfältig auf und werden umfangreich genutzt. Beispiele sind:

- das elektrostatische Aufspannen von Papier auf Plottern,
- die Herstellung eines Ladungsbildes bei Xerografie- und Laserdruckverfahren,

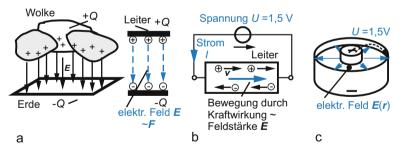


Abb. 1.3.3. Beispiele zum elektrischen Feld. (a) Ausbildung eines elektrischen Feldes zwischen Ladungen (Gewitterwolke, geladene isolierte Metallplatten). Bei parallelen Metallplatten entsteht ein homogenes elektrisches Feld. (b) Eine Spannung am Leiter verursacht ein elektrisches Feld mit Kraftwirkung auf Ladungsträger: Ladungsträgerbewegung, Stromtransport. Die Bewegungsrichtung hängt vom Vorzeichen der Ladung ab. (c) Elektrisches Feld zwischen den Polen einer Batterie

- die Kraftwirkung zwischen beweglichen, geladenen Elektroden (Kondensatormikrofon, elektrostatisches Voltmeter),
- das Prinzip mancher Tintenstrahldrucker,
- die Ablenkung eines Elektronenstrahls (Prinzip der Bild- oder Oszillografenröhre) u. v. a. m.

Wegen der Bedeutung dieser Kraftwirkungen vertiefen wir sie später im Band 2.

**Zusammenfassung** Das elektrische Feld ist an eine Ursache (z. B. ruhende Ladung) gebunden und tritt im Raum als Wirkung auf. Umgekehrt kann ein (von anderen ruhenden Ladungen erzeugtes) elektrisches Feld Kräfte auf Ladungsträger ausüben und sie bewegen. Deshalb unterteilen wir Felderscheinungen zweckmäßig in das *elektrostatische Feld* gebunden an ruhende Ladungen und das *Strömungsfeld* verknüpft mit Ladungsbewegungen. Wir vertiefen den Feldstärkebegriff im Band 2.

## 1.4 Bewegte Ladung, elektrische Stromstärke

## **●** 1.4.1 Strombegriff

Der Begriff "elektrischer Strom" knüpft an Strömungsbegriffe des täglichen Lebens: Verkehrsstrom, Geldstrom, Flüssigkeitsstrom u. a. So wird etwa die Stärke eines Luftstromes in einem Abluftrohr durch die Menge der durchströmenden Luft pro Zeiteinheit beschrieben, z. B. 1 m³/min. Auch ein Verkehrsstrom ist nichts anderes als die Anzahl der Verkehrsteilnehmer pro Zeiteinheit durch die Messstelle, etwa an einer Straße.

Eine *Strömung* ist ein Transportvorgang, bei dem Teilchen durch Kraftwirkung (als Antriebsursache) eine *gerichtete Bewegung* ausführen.

Beispielsweise stellt man sich unter Begriffen wie Wasserströmung (= Menge des dahinströmenden Wassers), Luftstrom (= Menge der dahinströmenden Luft) sofort etwas vor. In beiden Fällen handelt es sich um *Massenströme* (Ströme bewegter Masse). Zur Entstehung einer Strömung ist eine Antriebsursache für die Teilchen erforderlich. Das ist z. B. beim Flüssigkeits- oder Gasstrom ein *Druckgefälle* oder beim Wärmestrom ein *Temperaturgefälle*. Auch für den elektrischen Strom gibt es ein solches *Gefälle*, das *Potenzialgefälle* als Antriebsursache.

Eine Strömung entsteht durch ein  $Gef\"{alle}$  (= räumliche Abnahme) einer physikalischen Größe als Kraftursache. Sie ist stets so gerichtet, dass ein Ausgleich erfolgt. Dann bestimmt das Gef\"{alle} die Transportrichtung. Ohne Gef\"{alle} erfolgt keine Strömung.

So verringert sich der Druckunterschied zwischen zwei über ein Rohr verbundenen Wasserbehältern durch den ausgleichenden Wasserstrom. Er hört auf, wenn keine antreibende Kraft mehr vorhanden, der Druckunterschied ausgeglichen ist. Massenaustausch zwischen den beiden Reservoiren und Strömung sind miteinander verbunden.

Gilt für eine physikalische Größe ein Erhaltungssatz im abgeschlossenen System, so verlangt ihre zeitliche Änderung zwangsläufig einen Austausch (= Strömungsvorgang) mit einem zweiten System. Strömungsvorgang und Erhaltungssatz einer physikalischen Größe stehen in direkter Beziehung (Tab. 1.3).

Wir zeigen dies zunächst an der Erhaltung der Masse und betrachten ein allseitig abgeschlossen gedachtes Volumen (Abb. 1.4.1a), etwa einen Eimer gefüllt mit Wasser der Masse m. Strömt durch eine gedachte Hüllfläche (= Oberfläche des Volumens) an beliebiger Stelle ein  $Massenfluss\ I_{mzu}$  (Wasserstrom = Massenstrom) zu und an anderer Stelle  $I_{mab}$  ab, so gilt:

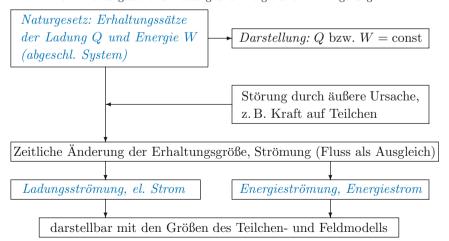
Zeitliche Zunahme der Masse 
$$+$$
 Abfluss  $-$  Zufluss  $=$  0

oder

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \underbrace{I_{\mathrm{mab}} - I_{\mathrm{mzu}}}_{\mathrm{Nettomassenfluss}} = 0.$$
 Kontinuitätsgleichung (1.4.1)

Diese Bilanz heißt *Kontinuitätsgleichung* (der Masse). Sie folgt aus ihrem Erhaltungssatz. Dabei wurde der Massenabfluss als positiv angesetzt. Fließt

Tabelle 1.3. Erhaltungssätze für Ladung und Energie und ihre Folgerungen



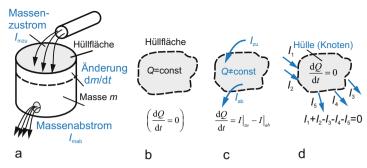


Abb. 1.4.1. Zur Kontinuitätsgleichung. (a) Kontinuität des Massenflusses. (b) Bilanzgleichung der Ladung Q im Volumen, Ladungserhaltung. (c) Ladungsänderung durch die Differenz von Zu- und Abstrom. (d) Bilanzgleichung (Ladungserhaltung), Knotensatz

nur Wasser ab  $(I_{\text{mzu}} = 0)$ , so sinkt die Wassermasse zeitlich:  $I_{\text{mab}} = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ . Das negative Vorzeichen bedeutet Abnahme! Ändert sich die Masse nicht  $(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t = 0, \mathrm{d.h.}\ m = \mathrm{const}$ , Erhaltungssatz), dann folgt daraus

$$I_{\text{mab}} - I_{\text{mzu}} = 0.$$
 Stromkontinuität (1.4.2)

Stimmen Zu- und Abfluss überein, so bleibt die Wassermasse erhalten. Sie kann sich im abgeschlossenen Volumen weder vergrößern noch verkleinern, ohne dass durch die zugehörige Hüllfläche ein entsprechender Massenfluss auftritt (Satz von der Erhaltung der Masse) oder verallgemeinert:

Die zeitliche Änderung einer Erhaltungsgröße verursacht stets einen Fluss dieser Größe durch eine (gedachte) Hüllfläche: Kontinuitätssatz der Erhaltungsgröße.

Diese Ergebnisse wenden wir auf die Ladung und Energie an (Tab. 1.3), denn beide unterliegen Erhaltungssätzen (Gl. (1.3.4)). Für die Ladung erwarten wir einen Ladungsträgerstrom = elektrischen Strom I = Strom dahinfließender Ladungsträger (Abb. 1.4.1b). Er heißt auch Konvektionsstrom.<sup>8</sup> Zur Energie gehört ebenso ein Energiefluss oder Energiestrom = Strom dahinfließender Energiemenge (s. Bd. 2).

.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Mit den Begriffen "Strom, Strömung" verbindet sich meist die Vorstellung von bewegten Stoffen, z.B. Masseteilchen oder Ladungsträgern. Besser wäre die Benutzung des Begriffes "Fluss" von Ladungsträgern, weil wir später auch von Verschiebungs- und Magnetfluss sprechen. Flussgrößen werden stets über das Flussintegral des zugehörigen Vektors gebildet (s. Bd. 2). Bei einem Fluss muss keinesfalls etwas Stoffliches "fließen", wie der Verschiebungs- und Magnetfluss zeigen wird. Die Beibehaltung des Strombegriffes berücksichtigt die praktische Gepflogenheit.

#### **2** 1.4.2 Elektrische Stromstärke

Für die Elektrotechnik hat der Strombegriff fundamentale Bedeutung.

Der elektrische Strom (Konvektionsstrom) ist eine gerichtete Bewegung von Ladungsträgern als Folge einer Antriebsursache.

Intensität der elektrischen Strömung: Stromstärke Unter der Stromstärke (= Intensität der elektrischen Strömung) versteht man den Quotienten der Ladungsmenge  $\Delta Q$ , die während einer Zeitspanne  $\Delta t$  durch einen gedachten Querschnitt (Messebene, Leiterquerschnitt A, Abb. 1.4.2a) strömt, dividiert durch diese Zeitspanne:  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ . Im Grenzfall  $\Delta t \to 0$  wird daraus

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}.$$
 Elektrische Stromstärke, (1.4.3)

Dabei ist  $\Delta Q$  die zur Durchströmdauer  $\Delta t$  gehörende Ladungsmenge. Anschaulich beschreibt der Begriff Stromstärke, ob in einer Zeitspanne  $\Delta t$  eine große oder kleine Ladungsmenge durch einen Querschnitt transportiert wird. Der Durchtrittsquerschnitt selbst tritt in der Definitionsgleichung (1.4.3) nicht auf.

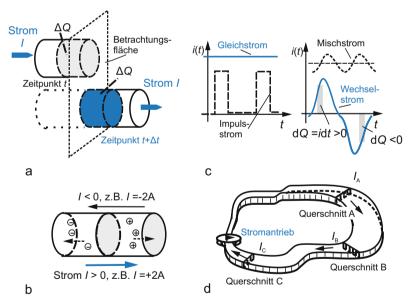


Abb. 1.4.2. Strombegriff. (a) Definition der Stromstärke I. Strom gekennzeichnet durch eine Ladungsmenge  $\Delta Q$ , die während der Zeitspanne  $\Delta t$  durch eine (gedachte oder materielle) Fläche fließt. (b) Zählrichtung des Stromes und Bewegungsrichtung der Ladungsträger. (c) Stromarten. (d) Stromkontinuität. Im Leiterkreis fließt überall der gleiche Strom I unabhängig vom Leiterquerschnitt

**Einheit, Dimension** Die Stromstärke wurde im Internationalen Einheitensystem (SI) als (einzige) Grunddimension der Elektrotechnik festgelegt. Als Einheit gilt nach der Definitionsgleichung (1.4.3)<sup>9</sup>:

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = 1\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{A}.$$

Die Einheit des Stromes heißt 1 Ampère (Symbol A). Sie wird über die magnetische Kraftwirkung zweier paralleler stromdurchflossener Drähte mit definiertem Abstand bestimmt (s. Bd. 2).

Mit der Dimension der Stromstärke lässt sich die Einheit der Ladung über die Definitionsgleichung (1.4.3) begründen:

 $\dim (Ladung) = \dim (Stromstärke \cdot Zeit), Einheit 1 C = 1 As.$ 

#### Größenvorstellung Folgende Stromstärken sind typisch:

Strom bei Blitzschlag	$\approx$	$(10 \dots 100)  kA$
Fahrstrom ICE (15 000 PS)	$\approx$	$1000  \mathrm{A}$
Straßenbahn	$\approx$	$(100 \dots 200) A$
Autoanlasser	$\approx$	$(20 \dots 100) A$
Kochplatte, Tauchsieder	$\approx$	einige A
Glühlampe	$\approx$	$0.1  \mathrm{A}$
Strahlstrom Fernsehröhre	$\approx$	$(1 \dots 10) \mu A$
Stromempfindlichkeit Mensch	$\approx$	$(10^{-4} \dots 10^{-3}) \mathrm{A}$
Armbanduhr	$\approx$	$1 \mu\mathrm{A}$
empfindlicher Strommesser	$\approx$	$1\mathrm{pA}$
Steuerstrom Feldeffekttransistor	<	$1\mathrm{pA}$
Biometrische Signale	$\approx$	$1  \mathrm{fA}  \dots  1  \mathrm{pA}$

**Stromrichtung** Weil der Strom eine gerichtete Bewegung positiver und negativer Ladungsträger darstellt, ist eine Richtungsangabe (Zählpfeil) erforderlich (Abb. 1.4.2b).

Ein Strom hat positive Richtung, wenn sich positive Ladungsträger auf einen (vorhandenen oder gedachten ) Querschnitt zu bewegen. Diese Festlegung heißt auch "technische Stromrichtung".

Die Richtung wird durch einen Zählpfeil neben oder im Leiter markiert.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Obwohl wir die Ladung als nicht weiter definierte vierte Grundgröße verwenden und die Stromstärke aus ihr durch die Definitionsgleichung (1.4.3) abgeleitet haben, besteht keine Notwendigkeit, die Ladung auch als Grunddimension zu benutzen. Beide Einheiten lassen sich durch die zugehörige Definitionsgleichung überführen. Für die Wahl der Ladung als Grundgröße sprechen didaktisch-methodische Aspekte, weil das Teilchenmodell sehr anschaulich ist. Die Wahl des Stromes als Grunddimension erfolgt nach praktischen Gesichtspunkten.

Der Ladungsfluss durch die Fläche erfordert nämlich die Festlegung einer positiven Zählrichtung, der Strom I selbst ist aber ein Skalar. Die Durchflussrichtung der Ladungsträger ergibt sich aus dem Zählpfeil und dem Vorzeichen des Zahlenwertes des Stromes (Abb. 1.4.2b). Für I>0 stimmen Durchflussrichtung positiver Träger und die Richtung des Zählpfeiles überein, negative Ladungen bewegen sich entgegen der Zählrichtung. Bei positivem (negativem) Wert der Stromstärke fließt der Strom in (entgegen der) Richtung des Zählpfeiles.

Sind nähere Flussverhältnisse unbekannt, so wird die Stromrichtung willkürlich festgelegt und im Ergebnis der Analyse geprüft, ob die angesetzte Stromrichtung stimmt (positiver Zahlenwert) oder nicht (negativer Zahlenwert).

Weil die positive Stromrichtung für positive Ladungen stets mit ihrer Bewegungsrichtung übereinstimmt und sich negative Ladungen (Elektronen) in entgegengesetzter Richtung bewegen (Abb. 1.4.2b), ist es gleichgültig, ob sich in einem Halbleiter positive Ladungen mit der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  oder negative mit  $-\boldsymbol{v}$  bewegen. Der physikalische Richtungssinn des Stromes stimmt in beiden Fällen überein. Für die Gruppe metallischer Leiter folgt dann: <sup>10</sup>

In metallischen Leitern bewegen sich Elektronen dem positiven Richtungssinn des Stromes entgegen.

Man versteht den Begriff "Stromrichtung" daher besser als *Durchtrittssinn der Ladung durch eine Querschnittsfläche*. Das wird deutlich, wenn wir später die zum Strom gehörige Feldgröße *Stromdichte J* betrachten (Anhang A.2 und Bd. 2).

Stets ist jedoch zu beachten: Der Strom ist *kein Vektor*, sondern eine vorzeichenbehaftete skalare Größe, eine *Flussgröße* (Bd. 2).

Stromarten, Zeitabhängigkeit Nach der Zeitabhängigkeit des Stromes i(t) werden unterschieden:

— zeitkonstanter Strom oder *Gleichstrom*. Dann fließt je Zeitspanne  $\Delta t$  stets die gleiche Ladungsmenge (Stärke und Richtung gleichbleibend)

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const} = \frac{Q}{t}$$
 Gleichstrom (1.4.4a)

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Hier zeigt sich die Unzweckmäßigkeit der Vereinbarung (Kap. 1.3), dem Elektron negative Ladung zuzuordnen. Die entgegengesetzten Richtungen der Elektronenbewegung und des physikalischen Richtungssinnes des Stromes waren Anlass zu Unterschieden wie "physikalische" und "technische" Stromrichtung u. a. m. Wir verwenden sie nicht.

- zeitveränderlicher Strom, dann fließt je Zeitspanne  $\Delta t$ eine veränderliche Ladungsmenge

$$I(t) = i(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}.$$
zeitveränderlicher Strom (1.4.4b)

Zeitveränderliche Größen tragen später kleine Symbole.

Technisch wichtige zeitveränderliche Ströme zeigt Abb. 1.4.2c (DIN 5488):

- Wechselstrom, dessen Zeitwert i(t) periodisch wechselt mit verschwindendem linearen Mittelwert  $\overline{|i(t)|}$ . Der Sinusstrom bildet die Grundlage der Wechselstromtechnik.
- Mischstrom als Überlagerung von Gleich- und Wechselstrom, oft auch als welliger Gleichstrom bezeichnet, weil er beim Gleichrichten eines Wechselstroms entsteht.
- *Impulsstrom* als Stromstöße kurzer Dauer, die periodisch oder nichtperiodisch auftreten.

Wirkungen des Stroms Der Mensch nimmt eine Ladungsträgerströmung nur indirekt über *Stromwirkungen* wahr. Sie gelten als *Stromkennzeichen*:

- 1. Magnetische Wirkung. Jeder Strom wird von einem Magnetfeld umgeben. Es äußert sich durch Kraftwirkung auf ferromagnetische Stoffe oder stromdurchflossene Leiter, ist das wichtigste Kennzeichen eines Stromes und dient zur Definition eines verallgemeinerten Strombegriffes. Ausgenutzt wird die Magnetfeldwirkung zur Erzeugung von Kräften, Drehmomenten und mechanischer Energie (z. B. Motoren, Messinstrumente, Magnete, elektroakustische Geräte).
- 2. Thermische Wirkung. Jeder stromdurchflossene Stoff erwärmt sich. Darauf beruhen Elektrowärmegeräte, die Glühemission in Elektronenröhren, die dielektrische Erwärmung (Mikrowelle), das elektrische Schweißen u. a. Die thermische Wirkung ist unerwünscht, wenn sie die Betriebssicherheit elektrischer Geräte und Bauelemente (Motor, PC, Halbleiterbauelemente) beeinträchtigt.
- 3. Chemische Wirkung. In bestimmten Flüssigkeiten erfolgt durch Ladungsträger (Ionen) ein Stofftransport, der den Stoff chemisch verändert, z.B. auch ein Leitermaterial zersetzen kann. Das wird bei der Elektrolyse, der elektrolytischen Abscheidung, zur Speicherung chemischer Energie im Akkumulator, in Brennstoffzellen u. a. m. ausgenutzt.
- 4. Elektromagnetische Strahlung. Durch Stromfluss kann in Gasen (Leuchtstoffröhre, Blitz u. a.) und Festkörpern (z. B. Lichtemitterdioden, Laserdiode) eine Licht- oder Strahlungsemission entstehen. Ursache ist die Anregung gebundener Elektronen auf ein höheres Energieniveau durch

Energiezufuhr und Rückkehr auf das Ausgangsniveau mit Emission eines Lichtquants. Während die vorherigen Wirkungen bei jeder Stromstärke auftreten, erfordert die optische Wirkung oft einen bestimmten Schwellstrom.

Gerade die optischen Wirkungen haben mit der Optoelektronik/Photonik ein völlig neues Feld der Elektrotechnik eröffnet. So werden LEDs immer mehr zum Ersatz der Glühlampe eingesetzt, Laser bestimmen viele Technikbereiche und mit der Erfindung der Glasfaserleitungen gelang die weltweite optische Nachrichtenübertragung.

5. In tierischen und menschlichen Körpern erfolgen bei Stromdurchgang *physiologische Wirkungen*. Sie äußern sich, je nach Stromintensität, in Muskel- und Nervenreaktionen und können zu größeren organischen Störungen oder gar zum Tod führen.

Gewöhnlich treten die Stromwirkungen verkoppelt auf. Ein typisches Beispiel ist die Glühlampe, die neben der Strahlung (Umsetzwirkungsgrad etwa 2%!) noch beträchtliche Wärme entwickelt.

Beispiel 1.4.1 Mittlere Elektronengeschwindigkeit Wir schätzen die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{v}$  ab, mit der sich Elektronen beim Strom I=3 A durch einen metallischen Leiter (Ladungsträgerdichte  $n=8,6\cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$ , Querschnitt  $A=1\,\mathrm{mm}^2$ ) bewegen. Aus der Definitionsgleichung (1.4.3) und Abb. 1.4.2a muss die Ladung  $\Delta Q$  ermittelt werden, die während der Zeitspanne  $\Delta t$  einseitig zu- und am Leiterende wieder abgeführt wird. Dabei legen die Elektronen die Wegstrecke  $\Delta s=v\Delta t$  zurück und bewegen das Volumen  $\Delta V=A\Delta s=Av\Delta t$ , also die Ladung  $\Delta Q=nq\Delta V=nqAv\Delta t=-enAv\Delta t$ . Daraus folgt  $I=\Delta Q/\Delta t=qnAv=-enAv$  und

$$v = \frac{I}{Aqn} \approx \frac{-3\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{mm}^2} \frac{1}{1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}\cdot 8,6\cdot 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}} \approx -0,22\,\mathrm{mm/\,s}.$$

Die Elektronen bewegen sich entgegen der positiven Zählrichtung des Stromes.

#### 1.4.3 Erstes Kirchhoffsches Gesetz, Knotensatz

Haupteigenschaft des Stromes: Kontinuität Nach dem Satz von der Erhaltung der Ladung Gl. (1.3.4) kann sich, wie bei der Erhaltung der Masse (Gl. (1.4.1) und Tabelle 1.3) erläutert, die Gesamtladung in einem Volumen (abgeschlossenes System) nur ändern, wenn *Ladungsträgerzu*- oder *-abfluss* durch eine (materielle oder gedachte) Hüllfläche um das Volumen erfolgt. Deshalb erwarten wir aus der Ladungserhaltung Gl. (1.3.4) eine Kontinuitätsgleichung des Ladungsflusses = Stromflusses, wie sie durch Gl. (1.4.1) für den Massenfluss gegeben ist:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}_{\text{Ladungsänderung pro Zeitspanne}} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}_{\mathrm{zu}} - \underbrace{\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}}_{\mathrm{ab}} = \underbrace{I|_{\mathrm{zu}} - I|_{\mathrm{ab}}}_{\text{zufließender-abfließender}}. \tag{1.4.5}$$

Die Ladung in einem geschlossenen Volumen ändert sich nicht durch Generation und Rekombination, sondern nur Zu- und Abfluss.

Die zeitliche Änderung der Gesamtladung Q im Volumen V ist gleich der durch seine Oberfläche je Zeitspanne zu- und/oder abfließenden Ladungsmenge, also dem Ladungszu- und -abfluss (Abb. 1.4.1c). Wird die Kontinuitätsgleichung auf einen beliebig geformten, vom Strom I durchflossenen Leiterkreis angewendet, so lässt sich an jeder Stelle ein Volumen mit der Ladung Q konstruieren und die Kontinuitätsgleichung aufstellen. Bei Erhaltung der Ladung Q ( $Q = \mathrm{const} \to \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 0$ ) folgt aus Gl. (1.4.5) an jeder Stelle (A, B, C, Abb. 1.4.2d)

$$I_{\rm ab} = I_{\rm zu} = I_{\rm A} = I_{\rm B} = I_{\rm C}.$$
 Stromkontinuität bei konstanter Ladung (1.4.6)

Der Strom ist eine in sich geschlossene Erscheinung. Er besitzt in jedem Querschnitt die gleiche Stärke und hat daher keine Quellen oder Senken. Das ist der Inhalt der Stromkontinuität: Strom als "Band" ohne Anfang und Ende. Deshalb heißt eine geschlossene Leiteranordnung auch *Leiter*oder *Stromkreis*.

Stromkontinuität bedeutet zwangsläufig, dass Ladungsträger einen Bewegungsantrieb erfahren, also durch eine "Antriebsquelle" hindurchfließen müssen. Sie werden dort weder erzeugt noch verbraucht, sondern nur durch Energiezufuhr in Bewegung versetzt. Da hierzu Energie aufgewendet werden muss, ist die Antriebsquelle zugleich Umformorgan nichtelektrischer in elektrische Energie (s. Bd. 2).

Als Folge der Ladungserhaltung ( $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t=0$ ) verschwindet die Summe der zu- und abfließenden Konvektionsströme auch dann, wenn mehrere Ströme durch die Hüllfläche fließen (Zufluss positives Vorzeichen):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{\nu=1}^{m}Q_{\nu}=\sum_{\mu=1}^{n}I_{\mu}=0. \qquad 1. \text{ Kirchhoffsches Gesetz, Knotensatz (1.4.7)}$$

Die algebraische Summe aller durch eine (gedachte) Hüllfläche bzw. eine geschlossene Schnittlinie in einem Netzwerk fließenden Ströme verschwindet (bei Ladungserhalt) zu jedem Zeitpunkt: Schnittgesetz oder erweiterter Knotensatz.

Dabei führen Ströme, die in die Hülle fließen ein positives (Richtungspfeil hinweisend), herausfließende ein negatives Vorzeichen (Abb. 1.4.1c). Deshalb gilt gleichwertig beim Schrumpfen der Hüllfläche (Schnittlinie) zu einem *Knoten* (Abb. 1.4.3)

Summe der zum Knoten hinfließenden Ströme ist gleich Summe der abfließenden Ströme.

Werden dagegen die Richtungspfeile am Knoten einheitlich angesetzt (alle hin- oder wegweisend), so besagt der Knotensatz:

In einem Stromknoten verschwindet die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme (mit einheitlicher Richtungsorientierung).

Im technischen Sprachgebrauch, besonders in der Netzwerkanalyse, wird die Hüllfläche als *Knoten* (Verbindungsstelle von Leitungen, Lötverbindung mehrerer Leitungen) bezeichnet und der Knotenbegriff auf eine *Verbindungsstelle mit Stromverzweigung* beschränkt.

Davon abweichend bezeichnen Netzwerkanalyseprogramme (Kap. 3.5) *jede* Verbindung, auch die Durchverbindung von zwei reihengeschalteten Netzwerkelementen als Knoten. In einer solchen Verbindung erfolgt keine Stromverzweigung. Bei Anwendung dieser Vereinbarung in der Netzwerkanalyse entstehen unnötig viele Gleichungen.

Der Knotensatz ist ein Fundamentalgesetz zur Analyse elektrischer Netzwerke mit Konsequenzen für Bauelemente und Schaltungen:

— für ein Bauelement mit zwei Anschlüssen, ein Zweipol oder *Eintor*, gilt  $I_A = I_B$  (Strom als kontinuierliches Band, Abb. 1.4.3b),

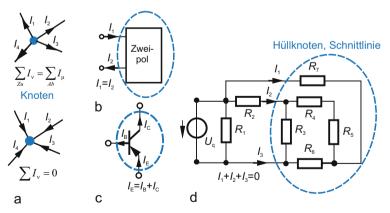


Abb. 1.4.3. Knotensatz. (a) Knotensatz (im engeren Sinn) für Zählpfeile in gleicher oder unterschiedlicher Richtung. (b) Schnittgesetz, (erweiterter) Knotensatz für eine Schnittlinie am Zweipol. (c) Schnittgesetz am Bipolartransistor. (d) Schnittgesetz für einen Schaltungsteil. Er kann weitere Knoten enthalten

- am Mehrpol (Transistor, Schaltkreis, Netzwerk) mit n Klemmen müssen nur n-1 Ströme bekannt sein, um den restlichen Strom zu bestimmen (Abb. 1.4.3c),
- der Knotensatz gilt für alle Ströme einer Schaltung, die durch einen beliebig gelegten (geschlossenen) Schnitt (Hüllfläche, erweiterter Knotenbegriff) fließen (Abb. 1.4.3d). Deshalb kann auch eine Hüllfläche als Knoten angesehen werden, die mehrere zusammengeschaltete Bauelemente oder Schaltungsteile enthält (bisweilen als *Superknoten* bezeichnet). Das ist der tiefere Inhalt des Knotensatzes.
- der Knotensatz gilt streng genommen nur für *zeitunabhängige Ströme* (Gleichströme); für zeitveränderliche Ströme ändert sich die Hüllenladung, was z. B. durch zusätzliche kapazitive Ströme modelliert werden kann (vgl. Bd. 2).

# **●** 1.4.4 Zusammenhang Strom-Ladung

Ladungsmenge, Zusammenhang Strom-Ladung War der Strom als zeitliche Ladungsänderung definiert (Gl. (1.4.3)), so ergibt sich die Ladungsmenge oder Ladungskurve durch Umkehrung der Differenzial- zur Integralbeziehung<sup>11</sup> zwischen den Zeitpunkten t und  $t_0$ 

$$\underbrace{Q(t)}_{\text{Gesamtladung}} = \underbrace{Q(t_0)}_{\text{Anfangsladung}} + \underbrace{\int\limits_{t_0}^t I(t') \, dt'}_{\text{vom Strom } I(t) \text{ transportierte Ladung}} . (1.4.8)$$

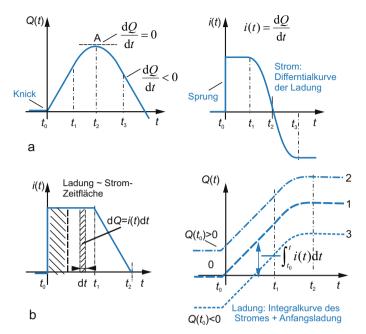
Die Ladung  $Q(t_0)$  zu Beginn des Stromflusses heißt Anfangsladung. Sie muss bekannt sein.

Die vom Strom zwischen zwei Zeitpunkten geführte Nettoladung (= Differenz zwischen Ladung und Anfangsladung) ist gleich seinem Zeitintegral, grafisch also der Strom-Zeit-Fläche (Abb. 1.4.4).

Ein Strom von kurzer Zeitdauer heißt *Stromstoß*. Dann interessiert nur das Zeitintegral der Stromstärke als Ladung, die während des Stromstoßes durch den Leiter fließt. Mathematisch wird der Stromstoß im Idealfall unendlich kurzer Dauer durch die sog. *Impulsfunktion* (Diracstoß) beschrieben (s. Bd. 2).

Diskussion Der Strom ergibt sich aus einem gegebenem Ladungsverlauf Q(t) durch Differenzieren nach der Zeit. Abb. 1.4.4a enthält typische Verläufe. Aus der Kurventangente im Zeitpunkt t folgt der Stromwert im gleichen Zeitpunkt (z. B. für Punkt A). Im Zeitbereich t < 0 fließt keine Ladung (Q = const. = 0), d. h. I = 0.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>Man repetiere den Unterschied zwischen unbestimmtem und bestimmtem Integral: Kurven mit gleichem Anstieg auf unterschiedlichem "Höhenniveau" haben die gleiche Ableitung, aber Kurven gleicher Steigung können auf unterschiedlichem Höhenniveau liegen. Sie erfordern eine Aussage zum Ausgangswert.



**Abb. 1.4.4.** Zusammenhang Strom-Ladung. (a) Stromkurve zu gegebenem Ladungsverlauf als Tangente  $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$  an den Ladungsverlauf, Knickstellen werden zu Sprungstellen des Stromes. (b) Vorgegebener Stromverlauf. Die zugehörige Ladungskurve ist das Integral der Stromkurve vom Zeitpunkt  $t_0$  an, die Anfangsladung verschiebt den Kurvenverlauf

Im Zeitbereich  $0 < t < t_2$  wächst Q(t) an, daher sind dQ/dt und I(t) positiv. Vom Zeitpunkt  $t_1$  an wächst die Ladung langsamer: I fällt, hat aber noch gleiche Richtung (gleiches Vorzeichen). Ab der Zeit  $t_2$  bewegt sich die Ladung entgegengesetzt und kehrt das Vorzeichen des Stromes. An Knickstellen der Ladungskurve hat der Strom Sprungstellen.

Bei gegebenem Stromverlauf hingegen (Abb. 1.4.4b) ergibt sich die Ladung durch Integration als Strom-Zeit-Fläche (Gl. (1.4.8)). Sie wächst bei konstantem Strom zeitproportional bis zur Zeit  $t_1$  an. Im Zeitbereich  $t_1 \dots t_2$  fällt der Strom, deshalb steigt die Ladung langsamer. Würde der Strom zur Zeit  $t_1$  auf null springen, so bliebe die Ladung  $Q(t_1) = \text{const.}$  erhalten. Die Anfangsladung  $Q(t_0)$  bestimmt nur den jeweiligen "Kurvenansatzpunkt", nicht den Kurvenverlauf. Sprungstellen im Stromverlauf ergeben Knickstellen im Ladungsverlauf.

#### Strommessung

Einrichtungen zur Messung der Stromstärke heißen *Strommesser* oder veraltet "Ampèremeter".

Dazu werden unterschiedliche Stromwirkungen, besonders das Magnetfeld (Drehspulinstrument), Wärmeentwicklung (Hitzdraht-Instrument, selten ver-

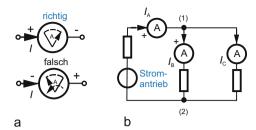


Abb. 1.4.5. Strommessung. (a) Strommesser mit stromrichtungsabhängigem Ausschlag. (b) Einschalten von Strommessern im Stromkreis mit Stromverzweigungen bei (1) und (2). Angezeigt wird der jeweils durchfließende Strom

wendet) und Spannungsabfall genutzt. Wir erläutern das Drehspulinstrument in Bd. 2. Es gibt zwei Gruppen von Strommessern:

- 1. solche, deren Ausschlag von der Stromrichtung abhängt (und deswegen die Markierungen +, auf den Anschlussklemmen tragen, wobei der Strom bei + ein- und bei austritt, Abb. 1.4.5a).
- 2. solche mit stromrichtungsunabhängigem Ausschlag.

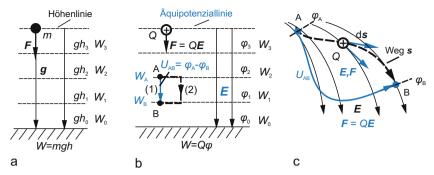
Hinsichtlich der Anordnung im Stromkreis gilt: Strommesser sind so in den Stromkreis zu schalten, dass der Strom durch sie fließt (Abb. 1.4.5b).

Zunehmend kommen *Digitalmultimeter* zum Einsatz. Dort wird der stromproportionale Spannungsabfall an einem Widerstand verstärkt, evtl. gleichgerichtet (Wechselstrom) und digital angezeigt.

# 1.5 Elektrische Spannung, elektrisches Potenzial

# **●** 1.5.1 Elektrische Spannung

Potenzielle Energie Ein von anderen Ladungen verursachtes Kraft- oder elektrisches Feld übt auf eine Punktladung Q eine Kraft aus. Das folgt aus dem Coulombschen Gesetz Gl. (1.3.5). Beim Verschieben dieser Ladung vom Punkt A zum Punkt B gegen die Kraftwirkung muss Energie zugeführt, also  $Arbeit\ W$  (engl. work) aufgewendet werden. Dadurch erhöht sich ihre potenzielle Energie  $W_{\rm pot}$  analog zur potenziellen Energie einer Masse m im Schwerefeld g der Erde (Abb. 1.5.1a). Erfolgt dagegen die Bewegung in Richtung des elektrischen Feldes, dann verrichtet das Feld Arbeit an der Ladung und ihre potenzielle Energie nimmt ab. Wir wollen die Arbeit W als positiv ansehen, wenn sie bei positiver Ladung vom elektrischen Feld aufgebracht wird und als negativ, wenn sie dem Feld zugeführt wird.



**Abb. 1.5.1.** Potenzial und Spannung. (a) Potenzielle Energie und Potenzial im Gravitationsfeld und (b) im elektrischen Feld. Eingetragen ist die Definition der elektrischen Spannung zwischen den Punkten A, B. (c) Arbeit  $W_{AB}$ , die im Kraftfeld F = QE bei Verschiebung einer positiven Ladung von A nach B zu leisten ist

Die Arbeit ist eine skalare Größe und aus der Mechanik definiert als Produkt von der längs eines Weges wirkenden Kraft F und dem zurückgelegten Weg, zunächst einem differenziellen Wegelement ds

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Fds\cos(\angle \mathbf{F}, d\mathbf{s}) = QEds\cos(\angle \mathbf{E}, d\mathbf{s}).(1.5.1a)$$

Dabei wurde die Feldstärke Gl. (1.3.8) verwendet. Im elektrischen Feld hat eine Ladung Q am Punkt A (Abb. 1.5.1b) eine bestimmte potenzielle Energie  $W_A$ , die proportional der Ladung ist. Bei ihrer Verschiebung nach B längs eines Weges s wird Arbeit  $\Delta W$  geleistet

$$\Delta W = (W_{A} - W_{B}) = W_{AB} = \int_{A}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = Q \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \equiv Q U_{AB}.$$
 (1.5.1b)

Das gilt auch, wenn das elektrische Feld inhomogen verläuft, wie in Abb. 1.5.1c skizziert.

Die an der Ladung Q geleistete Arbeit  $W_{\rm AB}$  ist gleich dem Weg- oder Linienintegral der elektrischen Feldstärke E über einen Weg zwischen den Punkten  $A,\,B.$ 

Weil diese Aussage noch die Ladung Q enthält, führt man die *spezifische*, von der Ladung *unabhängige* Arbeit ein, die *Spannung*  $U_{AB}$  (Abb. 1.5.1b)

$$U_{\rm AB} = \frac{W_{\rm A} - W_{\rm B}}{Q} = \frac{W_{\rm AB}}{Q} = \varphi_{\rm A} - \varphi_{\rm B}.$$
 Definition der Spannung  $U_{\rm AB}$  (1.5.2a)

Die elektrische Spannung  $U_{AB}$  (vom Raumpunkt A nach B) oder kurz die Spannung zwischen A und B ist bestimmt

- als Differenz der auf die (positive) Ladung Q bezogenen potenziellen Energien  $W_A$ ,  $W_B$  in den Punkten A, B eines Potenzialfeldes oder gleichwertig
- als die auf die Ladung bezogene Arbeit  $W_{AB}$ , die das elektrische Feld beim Transport längs des Weges an der Ladung verrichtet.

Für  $W_{\rm A} > W_{\rm B}$  nimmt die potenzielle Energie der Ladungsträger in Bewegungsrichtung ab und die dabei frei werdende Energie wird in andere Formen (Wärme, Licht ...) gewandelt. Deshalb bezieht sich die Spannungsdefinition Gl. (1.5.2a) auf den *Spannungsabfall*. Aus Gl. (1.5.1b) gilt dafür gleichwertig

$$U_{AB} = \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}.$$
 Spannungsabfall von  $A$  nach  $B$  (1.5.2b)

Der Spannungsabfall oder umgangssprachlich die Spannung zwischen zwei Punkten ist gleich dem Weg- oder Linienintegral der Feldstärke zwischen diesen Punkten.

Das Ergebnis Gl. (1.5.2b) kann gleichfalls als *Definition der Spannung* durch Bezug auf die Feldstärke verstanden werden.<sup>12</sup>

Die Spannung ist als integrale oder globale Größe des elektrisches Feldes eine Fundamentalgröße für die Stromkreisberechnung (s. Bd. 2).

Weil die Ladung in den Punkten A, B eine bestimmte potenzielle Energie  $W_{\rm A}, W_{\rm B}$  hat, kann den Punkten auch ein *elektrostatisches Potenzial* oder kurz *Potenzial*  $\varphi_{\rm A}, \varphi_{\rm B}$  zugeschrieben werden (Abb. 1.5.1c)

$$\varphi_{\rm A} = \frac{W_{\rm A}}{Q}, \qquad \varphi_{\rm B} = \frac{W_{\rm B}}{Q}.$$
 Definition der Potenziale  $\varphi_{\rm A}, \, \varphi_{\rm B} \, (1.5.3)$ 

Potenzial: Quotient von potenzieller Energie W und zugeordneter Punktladung Q im Ladungsfeld.

Man merke:

— das Potenzial ist die *einem Raumpunkt* zugeordnete (skalare) Feldgröße des elektrischen Feldes,

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Für ein konservatives Kraftfeld, wie für ruhende Ladungen zutreffend, sind die beiden Schreibweisen in Gl. (1.5.2) gleichwertig. Trifft diese Bedingung nicht zu, so wird Gl. (1.5.2b) als Spannungsdefinition vereinbart. Die Rückführung der Spannung auf eine Potenzialdifferenz versagt beim Induktionsgesetz, aber auch in stromdurchflossenen Halbleiterbauelementen durch Einführung der sog. Quasifermipotenziale.

— die Spannung  $U_{AB}$  beschreibt als Globalgröße die *Potenzialdifferenz zwischen zwei Feldpunkten*.

Ganz analoge Vorgänge gelten im Gravitationsfeld der Erde (Abb. 1.5.1a): wird eine Masse m (z. B. ein Stein) "gehoben", so muss Arbeit (gegen das Schwerefeld) geleistet werden, die potenzielle Energie der Masse erhöht sich. Fällt der Stein von A nach B, so nimmt seine potenzielle Energie ab, gleichzeitig erfährt er eine kinetische Energie. So wie die potenzielle Energie des Ladungsträgers der Ladung proportional ist, ist die des Steines seiner Masse m proportional.

Hinweis: Die Zusammenhänge zwischen Potenzial, Spannung und der elektrischen Feldstärke E werden in Band 2 vertieft.

Einheit Die Definitionsgleichung ergibt als Einheit der Spannung U

$$[U] = \frac{[W]}{[Q]} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{kg m}^2}{\text{As}^3} = 1 \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = 1 \frac{\text{Ws}}{\text{As}} = 1 \frac{\text{V A}}{\text{A}} = 1 \text{ V.} (1.5.4)$$

Zwischen zwei Punkten A, B liegt eine Spannung von 1 V, wenn eine Ladung von 1 C eine Energieänderung von 1 J = 1 Ws = 1 Nm bei Bewegung von A nach B erfährt.

Mit Untereinheiten wird bei technischen Problemstellungen ein Bereich von nV bis MV überdeckt, also von 15 Größenordnungen!

# Größenvorstellung<sup>13</sup>

$\mu V \dots mV$
nV
mV
$0,5 \dots 100  V$
$1.5\mathrm{V}$
1,2 V, 0,6 V
$6 \dots 24  \mathrm{V}$
$110, 230 \mathrm{V}$
$3\ldots25\mathrm{kV}$
$10\ldots750\mathrm{kV}$
10–100 MV.

**Zählpfeil, Richtungssinn** Die Spannung hat einen *physikalischen Richtungssinn*. Er folgt gleichwertig

- nach Gl. (1.5.2) aus dem Linienintegral der elektrischen Feldstärke  $\boldsymbol{E}$  in Richtung des Weges von A nach B, oder
- aus der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger bei Übergang von höherer zu niedrigerer potenzieller Energie.

 $<sup>^{13}</sup>$ Spannung über  $42\,\mathrm{V}$  ist lebensgefährlich.

Die Spannung  $U_{\rm AB}$  längs des Weges A nach B wird positiv angesetzt, wenn die potenzielle Energie (oder das Potenzial) in A höher ist als in B (DIN 5489), (s. Gl. (1.5.2a)).

Die Richtungsangabe erfolgt entweder durch zwei Indizes  $(U_{AB})$  oder einen Richtungs- bzw. Zählpfeil. Er zeigt bei positiver Richtung von + nach -, also  $U_{AB}$  positiv, wenn  $W_{A} > W_{B}$ . Im Doppelindex A, B  $(U_{AB})$  ist A der Betrachtungs- und B der Bezugspunkt. Aus Gl. (1.5.2b) folgt

$$\int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad \to \quad U_{AB} = -U_{BA}, \tag{1.5.5}$$

dass die Spannung  $U_{\rm BA}$  von Punkt B nach A längs des gleichen Weges negativ gleich  $U_{\rm AB}$  sein muss.

Diese Relation gilt grundsätzlich für die Anwendung des Spannungsbegriffs in Netzwerken.

Dort wird durch den Zählpfeil eine Orientierung eingeführt. Er kann willkürlich gewählt werden und definiert die positive Zählrichtung der Spannung.

Der Spannungszählpfeil gibt deshalb, wie der Stromzählpfeil, in der realen Schaltung auch an, in welcher Orientierung ein Messgerät eingefügt werden muss, damit es richtig anzeigt.

**Zeitverlauf** Verbreitete Spannungsarten sind, analog zum Strom (Abb. 1.4.2), die Gleich-, Wechsel-, Sinus-, Impulsspannung usw.

**Spannungsarten** Die Spannung tritt als *Spannungsabfall* und *Quellenspannung* auf:

Spannungsabfall. Das ist die bei Stromfluss über einem Leiter abfallende Spannung U (oft auch als Verbraucherspannung bezeichnet)

$$\frac{\Delta W_{\rm ab}}{Q} = U_{\rm AB}.$$
 Spannungsabfall (1.5.6a)

Die Spannungsrichtung weist vereinbarungsgemäß vom Anschluss mit höherer potenzieller Energie zum Anschluss mit geringerer Energie, also von A nach B: bewegte (positive) Ladungsträger geben potenzielle Energie ab durch Wandlung in eine andere Energieform (z. B. Erwärmung des Leiters Gewinn an kinetischer Energie bei Bewegung um Vakuum). Das ist die Verbraucherfunktion, bei der Strom- und Spannungsrichtungen natürlicherweise übereinstimmen. Abb. 1.5.2a zeigt die Richtungszuordnung am Schaltzeichen. Bauelemente mit dieser Eigenschaft werden auch als passive Elemente bezeichnet.

$$E_{l} = \begin{bmatrix} U_{q} \\ U_{l} \\ U_{l} \end{bmatrix}$$

$$E_{l} = \begin{bmatrix} I = 0 & A \\ I & U_{q} \\ I & U_{q} \end{bmatrix}$$

$$U_{q} = U$$

$$U = U_{q} =$$

Abb. 1.5.2. Spannungszählpfeile, Schaltzeichen. (a) Schaltzeichen für Spannungsabfall, Verbraucherpfeilrichtung. (b) Schaltzeichen für Spannungsquelle mit Spannungsabfall  $U_{\mathbf{q}}$ : physikalischer Richtungssinn von + nach - in Richtung der Abnahme potenzieller Energie positiver Träger. Mit aufgeführt ist das Schaltzeichen für die Spannungsquelle mit der EMK  $E_{\mathbf{q}}$ . (c) Verbreitetes Schaltzeichen einer Gleichspannungsquelle. (d) Bestimmung der Spannung einer Spannungsquelle mit Spannungsmesser zur Definition der Quellengröße

*Elektromotorische Kraft, Quellenspannung* als Spannung von Spannungsquellen = Antriebsquelle der Ladungsträgerbewegung, mithin des elektrischen Stromes

$$\frac{\Delta W_{\rm zu}}{Q} = E_{\rm q}. \qquad \text{Elektromotorische Kraft (EMK, Urspannung) (1.5.6b)}$$

Die potenzielle Energie der (positiven) Ladungsträger wird beim Durchlauf durch die Quelle *erhöht*, man spricht von einem *Erzeuger* (Generator) oder schlechthin einer *Quelle*. Das erfordert eine Bewegung positiver Träger von "—" nach "+" (negativer von "+" nach "—"), also entgegen der Kraft  $\boldsymbol{F}$ , die Träger durch den Verbraucherzweipol treibt. Jede Energieumformung nichtelektrisch  $\rightarrow$  elektrisch bewirkt im Erzeugerzweipol eine (innere) Feldstärke  $\boldsymbol{E}_i$ , die Ladungen trennt, also positive Träger nach "+" und Elektronen nach "—" verschiebt und damit einen Überschuss positiver Träger (unten negativ) schafft. Dadurch entsteht eine "äußere" Feldstärke  $\boldsymbol{E}$ . Diese innere Kraft  $\boldsymbol{E}_i$ 

- ist der eigentliche Grund der Spannung einer Spannungsquelle, die auch bei I=0 vorliegt (Beispiel Taschenlampenbatterie),
- kann je nach Energieumsatzart unterschiedliche Ursache haben (elektrochemisch, Strahlung, mechanisch).

Zur Unterscheidung vom Spannungsabfall U spricht man von der elektromotorischen Kraft (EMK)  $E_{\rm q}$  oder besser der Quellenspannung  $U_{\rm q}$  einer Spannungsquelle. <sup>14</sup> Sie hängt wegen der Energiewandlungsfunktion nicht vom Strom ab (im Gegensatz zum Spannungsabfall U am stromdurchflossenen

 $<sup>^{14}</sup>$ Der Begriff elektromotorische Kraft bzw. Urspannung war in der älteren Literatur über Jahrzehnte üblich (die Bezeichnung selbst ist missverständlich, weil keine Kraft vorliegt, sondern eine Spannung). Zur Vermeidung von Verwechselungen mit der elektrischen Feldstärke  $\boldsymbol{E}$  wird der Index q (Quelle) angefügt. Wenn heute auch auf die EMK bei der Netzwerkanalyse zugunsten der Quellenspannung  $U_{\rm q}$  verzichtet

Verbraucher!). Elemente mit solchen Eigenschaften heißen sprachlich meist auch Erzeuger, aktive Bauelemente, Spannungs- oder Stromquellen bzw. Generatoren. Die elektrische Spannung entsteht im Erzeugerzweipol durch Ladungstrennung und -verschiebung und ihre Aufrechterhaltung. Im Gefolge bildet sich ein "äußeres" elektrisches Feld, das beim Anschluss eines Leiters zwischen den Polen zum Stromfluss führt.

Energetisch ist die Spannungsquelle ein Umformort anderer Energieformen (mechanische, chemische, Wärme oder Licht) in elektrische Energie.

#### Beispiel 1.5.1 Spannungsquellen Sie sind in unterschiedlicher Form zu finden:

- Lichteinfall auf die Solarzelle erzeugt Ladungsträgerpaare und trennt sie (Umwandlung Strahlungs- in elektrische Energie),
- im Akkumulator erfolgt eine Ladungstrennung durch chemische Reaktionen (Wandlung chemisch-elektrisch),
- eine Leiterbewegung im Magnetfeld trennt Ladungsträger durch die Lorentz-Kraft (Wandlung mechanisch-elektrisch) u. a. m.

So wird die Spannung durch verschiedene physikalische Ursachen erzeugt.

Abb. 1.5.2d zeigt das Schaltsymbol der Spannungsquelle sowohl für die EMKals auch  $U_{\rm q}$ -Form mit unterschiedlichem Richtungssinn.  $U_{\rm q}$  hat einen entgegengesetzten Richtungssinn zum antreibenden Strom (Energiezufuhr). Die Konsequenz sind zwei unterschiedliche Formen des sog. Maschensatzes.

Wir verwenden in diesem Lehrbuch die Quellenspannung  $U_q$ . Nur beim Induktionsgesetz (Bd. 2) schließen wir die EMK-Form mit ein aus Rücksicht auf die historische Entwicklung.

Nach den einschlägigen Vorschriften ist der Begriff elektromotorische Kraft nicht mehr zu verwenden. Diese Entscheidung wird auch dadurch gestützt, dass die EMK selbst nicht messbar ist, sondern nur der ihr zugeordnete Spannungsabfall. Ein an die Spannungsquelle angeschlossener Spannungsmesser misst die EMK stets als Spannungsabfall (!) (Abb. 1.5.2d). Dann liegt es nahe, der Spannungsquelle diesen Messwert  $U=U_{\rm q}$  selbst als Merkmal zuzuordnen und auf die EMK zu verzichten. Der Vorteil ist ein problemloser Umgang mit dem Maschensatz.

Zusammenwirken Spannungsquelle – Verbraucher: ein (positiver) Ladungsträger nimmt beim Durchlauf durch die Spannungsquelle potenzielle Energie

wird, kommt sie doch bei der Analyse magnetischer Kreise und der Formulierung des Induktionsgesetzes (s. Bd. 2) häufig noch zur Anwendung.

auf und gibt sie bei Bewegung durch den Verbraucher wieder ab, hat also nach einem Umlauf die gleiche Ausgangsenergie.

**Spannungsmessung** Spannungsmesser *messen den Spannungsabfall* und liegen parallel zur Messstrecke (s. Abb. 1.5.2d). Aus der Vielzahl eingesetzter Verfahren sind zu nennen

- Spannungsmesser basierend auf dem Stromfluss (sog. stromverbrauchende Spannungsmesser), im Grunde handelt es sich um empfindliche Strommesser: Drehspul- und Dreheiseninstrumente,
- digitale Spannungsmesser (mit extrem hohen Eingangswiderständen von  $1...1000 \,\mathrm{M}\Omega$ ),
- Spannungsmesser basierend auf mechanischer Kraftwirkung als elektrostatische Voltmeter.

#### **1.5.2 Zweites Kirchhoffsches Gesetz, Maschensatz**

Zwischen ruhenden Ladungen breitet sich ein Kraftfeld F = QE mit einer potenziellen Energie aus. Ein solches Feld heißt konservativ (erhaltend) und wird gleichwertig beschrieben durch

- die *potenzielle Energie* und damit die Fähigkeit, bei Verschiebung einer Ladung Arbeit zu leisten.
- verschwindende Arbeit längs eines (beliebigen) geschlossenen Weges.

Dann muss die auf dem Weg l (Abb. 1.5.3a) von A nach B aufgenommene Energie gleich der auf dem Weg 2 von B nach A abgegebenen sein, wenn das Feld ohne äußere Energiezufuhr erhalten bleiben soll:

$$\Delta W_{\text{el}} = Q \int_{A,\text{Weg1}}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + Q \int_{B,\text{Weg2}}^{A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = Q \oint_{\text{bel. Weg}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$
 (1.5.7)

Weil sich die Ladung nach einem Umlauf wieder am Ausgangspunkt befindet, hat sich ihre Energie nicht verändert und die während des Umlaufs geleistete Arbeit muss verschwinden oder

Im Feldstärkefeld ruhender Ladungen verschwindet das Umlaufintegral der Kraftwirkung längs eines beliebigen Weges immer. Ein Feld mit dieser Eigenschaft heißt *Potenzial*- oder *elektrostatisches Feld*.

Ein geschlossener Weg wird mathematisch durch ein Ring- oder Umlaufintegral (angedeutet durch das Integralzeichen mit Ring, Bd. 2) beschrieben.

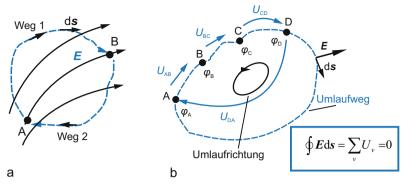


Abb. 1.5.3. Begründung des Maschensatzes. (a) Potenzielle Energie, konservatives Kraftfeld. Veranschaulichung des Linienintegrals. (Verschwindendes Umlaufintegral). (b) Maschensatz im Feldstärkefeld

Jetzt werden längs eines geschlossenen Weges verschiedene Punkte A, B, C, D (Abb. 1.5.3b) herausgegriffen und zwischen benachbarten Punkten jeweils die Spannungsdefinition über die Potenziale  $\varphi_{\rm A} \dots \varphi_{\rm D}$  angewendet. Ein solcher Umlauf zwischen diskreten Punkten heißt  ${\it Masche}$ :

$$Q \oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = Q \left\{ \int\limits_A^B \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int\limits_B^C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int\limits_C^D \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int\limits_D^A \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \right\} = 0$$

oder mit den Spannungsabfällen

$$\int_{\text{Umlauf}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = U_{\text{AB}} + U_{\text{BC}} + U_{\text{CD}} + U_{\text{DA}} = 0.$$
 (1.5.8)

Das Ergebnis ist der  $Kirchhoffsche\ Maschensatz^{15}$ 

$$\sum_{\nu=1}^{n} U_{\nu} = 0.$$
 2. Kirchhoffsches Gesetz, Maschensatz (1.5.9)

Die algebraische Summe aller Spannungen (zwischen Knotenpaaren) in einer beliebigen Masche verschwindet zu jedem Zeitpunkt (willkürliche, aber einheitliche Umlaufrichtung).

Dabei werden Spannungen in Umlaufrichtung als positiv, entgegengesetzt gerichtete negativ angesetzt (oder umgekehrt). In der Schreibweise Gl. (1.5.9)

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>G. R. Kirchhoff, deutscher Physiker 1824–1887. Professor für Physik (Breslau 1850, Heidelberg 1854, Berlin 1874). Die beiden nach ihm benannten Sätze entwickelte er während eines Seminars als zwanzigjähriger Student in Königsberg.

treten nur Spannungsabfälle auf (gekennzeichnet durch die Verbraucherzählpfeilrichtung), deshalb sind Spannungsquellen als Spannungsabfall  $U_{\rm q}$  anzusetzen.

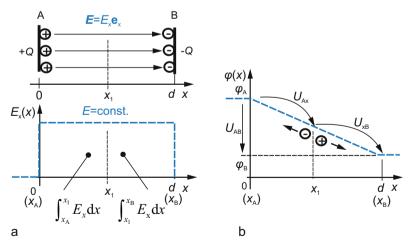
Maschen- und Knotensatz, auch als Kirchhoffsche Gesetze bezeichnet, bilden die Grundlage der Berechnung elektrischer Netzwerke.

Basierte der Knotensatz auf der Erhaltung der Ladung (Gl. (1.4.7)), so beruht der Maschensatz auf dem Satz von der Erhaltung der Energie.

# **●** 1.5.3 Spannung, Potenzial und elektrische Feldstärke

Die Begriffe Spannung und Potenzial hängen mit der elektrische Feldstärke zusammen. Wir verschaffen uns einen ersten Überblick am homogenen elektrischen Feld, verschieben aber die eingehendere Behandlung auf das elektrische Feld in Band 2.

Ein homogenes elektrisches Feld entsteht zwischen zwei parallelen Metallplatten gleicher Größe (Abstand d) bei Anlegen einer Spannung  $U_{\rm AB}$  (Abb. 1.5.4). Zwischen den Platten befinde sich Luft oder ein homogenes Leitermaterial. Die anliegende Spannung verursacht im Zwischenraum ein nach rechts gerichtetes elektrisches Feld mit konstanter Richtung und konstantem Betrag. Auf eine Ladung Q im Feld wirkt dann überall die gleiche Kraft, beim Leiter würden sich die Ladungsträger mit gleicher Geschwindigkeit (der sog. Drift-



**Abb. 1.5.4.** Homogenes elektrisches Feld. (a) Feldverlauf. (b) Zuordnung von Potenzialverlauf und Spannungsabfall

geschwindigkeit) bewegen. Zwischen der anliegenden Spannung  $U_{AB}$  und der konstanten Feldstärke  $E = E_x e_x$  (Wegelement  $ds = e_x dx$ ) gilt

$$U_{AB} = \int_{A}^{B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_{x} \int_{0}^{d} \mathbf{e}_{x} \cdot \mathbf{e}_{x} dx = Ed.$$
 (1.5.10)

Daraus folgt als Feldstärke (Betrag) eines homogenen Feldes

$$E = \frac{U_{\rm AB}}{d}.\tag{1.5.11}$$

Im homogenen Feld bestimmt die über der Strecke d abfallende Spannung U den Betrag der Feldstärke E.

Zwischen den Platten gilt

— für den Spannungsabfall zwischen Punkt x und B (Spannung  $U_{xB}$ )

$$U_{xB} = \varphi(x) - \varphi(x_B) = \int_{-\infty}^{x_B} E_x e_x \cdot e_x dx' = E_x(x_B - x)$$
 (1.5.12a)

— für den Spannungsabfall zwischen Punkt A und x

$$U_{\mathrm{Ax}} = \varphi(x_{\mathrm{A}}) - \varphi(x) = \int_{x_{\mathrm{A}}} E_{\mathrm{x}} \mathbf{e}_{\mathrm{x}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{x}} \mathrm{d}x' = E_{\mathrm{x}}(x - x_{\mathrm{A}}). \tag{1.5.12b}$$

Der Potenzialverlauf lautet (Gl. (1.5.12a))

$$\varphi(x) = \varphi(x_{\rm B}) + E_{\rm x}(x_{\rm B} - x) \sim -xE_{\rm x}.$$

In Richtung der Feldstärke E entsteht ein Potenzialgefälle oder gleichwertig: die Feldstärke ist in Richtung des Spannungsabfalls orientiert. Das Potenzialgefälle ändert sich nicht bei Änderung des Bezugspotenzials  $\varphi(x_B)$ .

Zur Darstellungsvereinfachung wird  $\varphi(x_{\rm B})=0$ gesetzt und  $x_{\rm A}=0$ gewählt, dann gilt

$$\varphi(x) = E_{\rm x}(x_{\rm B} - x) = \frac{U_{\rm AB}}{x_{\rm B}}(x_{\rm B} - x) = U_{\rm AB}\left(1 - \frac{x}{x_{\rm B}}\right).$$
(1.5.13)

Die potentielle Energie einer Ladung Q am Ort x beträgt  $W_{\rm pot} = Q\varphi(x)$ . Sie ist am Punkt  $x_{\rm A}$  am höchsten und nimmt nach rechts ab. Ein positiver Ladungsträger bewegt sich in Kraftrichtung, er würde die "schiefe Ebene" hinunterrollen und dabei seine potentielle Energie verkleinern, ein negativer Träger bewegt sich ebenfalls in Kraftrichtung, steigt also (wie eine Luftblase in Flüssigkeit) die schiefe Potenzialebene "hinauf" und die schiefe Ebene der potenziellen Energie W hinunter. Die Integrale in Gl. (1.5.12) sind den im Bild dargestellten Flächen proportional.

Dieses Beispiel ist orientierend für homogene Feld- und Strömungsvorgänge, wie sie in den folgenden Abschnitten in homogenen Leitern, im Plattenkondensator u. a. auftreten. Inhomogene Felder verlangen jedoch eine tiefere Behandlung (Bd. 2).

# 1.6 Elektrische Energie, elektrische Leistung

# **1.6.1 Energie**

Was ist Energie? In Physik und Technik hat der Energiebegriff fundamentale Bedeutung. Er basiert auf einem weitgehenden Abstraktionsvorgang: gerade durch die Energie lassen sich alle Naturvorgänge einheitlich qualitativ und quantitativ erfassen. Obwohl im Einzelnen bewegte Teilchen, Felder, Wellen vorliegen, kann aus allen Erscheinungen eine skalare Größe W (engl. work, Arbeit), die Energie (Arbeit), mit folgenden Eigenschaften gefunden werden:

1. Die Gesamtmenge der einzelnen Energien eines abgeschlossenen Systems bleibt konstant (Erhaltungssatz, s. Tabelle 1.3)<sup>16</sup>

$$\sum W_{\nu} = \text{const.}$$

Satz von der Erhaltung der Energie

In physikalischen Vorgängen wird deshalb keine Energie vernichtet, sondern nur verschiedene Energiearten ineinander umgewandelt.

- Die Energie ist durch den momentanen Zustand eines physikalischen Systems bestimmt. Die Energiedifferenz zwischen zwei Zuständen muss dem System als Arbeit zugeleitet werden.
- 3. Energie tritt in verschiedenen Erscheinungsformen auf. Alle Naturvorgänge sind Umwandlungen einer Energieform in eine andere. Alle Erscheinungsformen lassen sich in mechanische Arbeit umwandeln.

Energie ist eine Zustandsgröße. Sie kennzeichnet das in einem materiellen System (Feld, Strahlung, Körper) enthaltene Arbeitsvermögen und äußert sich in verschiedenen Erscheinungsformen: Wärme, Strahlung, mechanische und chemische, elektrische und magnetische Energie.

Durch die vielfältigen Erscheinungsformen stellt der Energiebegriff wohl eine der genialsten Formulierungen dar, die das Gemeinsame aller Naturerscheinungen beschreibt.

Energie spielt heute in Wissenschaft, Technik und Wirtschaft eine entscheidende Rolle. Beispielsweise hängt die Entwicklung einer Volkswirtschaft grundlegend von der Energieversorgung ab. Weltweit wachsen die Anstrengungen,

- das Aufkommen an "Primärenergie" zu erhöhen,
- die Energiewandler weiterzuentwickeln und neue Wandlungsmethoden nutzbar zu machen,

<sup>&</sup>lt;sup>16</sup> Julius Robert v. Mayer, 1814–1878 Postulat, Hermann v. Helmholtz 1847 Formulierung und Folgerungen.

 die Effizienz der elektrische Energieübertragung zu steigern und die Speichermethoden zu verbessern.

**Elektrische Energie** Für die Elektrotechnik ist die elektromagnetische Energie grundlegend. Sie hat gegenüber anderen Energieformen einige Vorzüge:

- direkte Umsetzbarkeit in und aus andere(n) Energieformen mit z. T. hohem Umwandlungswirkungsgrad. Beispiele: Windkraft, Wasserkraft, Brennstoffzellen, Solarenergie, u. a. zur Erzeugung elektrischer Energie, Wandlung in mechanische Energie (Motor),
- bequemer Transport über größte Entfernungen durch Leitungen oder drahtlosem Wege,
- Umweltfreundlichkeit (keine Verbrennungs- und Nebenprodukte),
- einfache Speicherbarkeit, bequeme Steuer- und Regelbarkeit, sofortige Einsatzbereitschaft.

In der Grundausbildung hat der Energiebegriff zwei Aspekte:

- 1. fundierte Kenntnis des Zusammenspiels zwischen Quelle und Verbraucher mit zwischengeschalteten Übertragungsgliedern (Netzwerke),
- 2. einführende Kenntnis typischer Wandlungsverfahren zwischen nichtelektrischer und elektrische Energie und umgekehrt.

# **♦** 1.6.2 Elektrische Energie

Unter elektrischer Energie verstehen wir jene Energieform, die durch elektrische Phänomene (Strom, Spannung, elektromagnetische Felder) von einer Energieumsatzstelle (Erzeuger, nichtelektrisch-elektrisch) zu einer anderen (Verbraucher, elektrisch-nichtelektrisch) transportiert wird.

Zunächst denkt man dabei an die mit Ladungen verknüpfte Energie. So basiert die Spannung (Gl. (1.5.6)) auf der elektrischen Energie, die bei einer tatsächlichen oder gedachten Ladungsbewegung umgesetzt wird. Fließt durch einen Zweipol die Ladung dQ(t) und fällt an ihm die Spannung u(t) ab, so wird die Energie d $W(t)=u(t)\mathrm{d}Q(t)=u(t)i(t)\mathrm{d}t$  umgesetzt, während der Zeitspanne  $\Delta t$  also

$$\Delta W = \int_{0}^{\Delta t} u(t')i(t')dt'. \qquad [\Delta W] = 1 \text{W} \cdot \text{s} = 1 \text{ Joule}$$
 (1.6.1)

Meist wählt man  $\Delta W \to W$  und  $\Delta t \to t$  und für Gleichgrößen  $\Delta W = UI\Delta t.$ 

Zur elektrischen Energie tragen Spannung, Strom und Zeit gleichberechtigt bei.

**Einheit, Größenvorstellungen** Für die Energie sind außer der Einheit 1 Joule noch SI-fremde Einheiten im Gebrauch: 1 Kilowattstunde =  $1 \,\mathrm{kWh} = 3,6\cdot 10^6 \,\mathrm{Ws} = 3,6 \,\mathrm{MJ}, 1 \,\mathrm{Megawattstunde} = 1 \,\mathrm{MWh}, 1 \,\mathrm{eV} = 1,602\cdot 10^{-19} \mathrm{J}$  (Elektronenvolt).

Bemerkung: Energie und Leistung verbinden die elektrischen mit den nichtelektrischen SI-Einheiten. Das erlaubt einfache Umrechnungen zwischen zugeordneten Problemstellungen. Dennoch bevorzugen manche Technikgebiete bestimmte Maßeinheiten: Elektrotechnik Ws, Elektrophysik eV, Wärmetechnik J, Mechanik Nm (s. Anhang A.1).

### Größenvorstellung Energie, typische Betriebszeit

Raumheizgerät	$(1 \dots 2) \text{ kWh}$	1 Std.
Rundfunkgerät	$0.1  \mathrm{kWh}$	$2 \dots 3 \text{ Std.}$
Straßenbahn	$100\mathrm{kWh}$	10 Std.
Haushalt	$(10 \dots 300) \text{ kWh}$	1 Monat
Taschenrechner, Transistorradio	$0,01\mathrm{Wh}$	1 Std.
Kraftwerk	$100\mathrm{MWh}$	Jahre
Transport der Elementarladung	$0,4410^{-25} \text{ kWh}$	1 Std.
durch einen Spannungsabfall 1 V		
Elektronenblitz	$10\mathrm{Ws}$	$1/5000\mathrm{s}$

#### Zum Vergleich:

- Die Energie  $1 \,\mathrm{kWh} = 36, 72 \cdot 10^6 \,\mathrm{kp\,cm} = 367 \,\mathrm{kp\,km}$  entspricht einer Arbeit, die beim Heben von 30 kp auf eine Höhe von 12,2 km verrichtet würde. Bei einer angenommenen Hubgeschwindigkeit von 1 m/s müsste diese Tätigkeit 3,4 Stunden lang ausgeführt werden, um beim Tarif von 20 ct/kWh insgesamt 20 ct zu verdienen!
- Um 1 Liter Wasser zum Kochen zu bringen (also um ca.  $80^{\circ}$  zu erwärmen) sind etwa  $80\,\mathrm{kcal}$  erforderlich d. h. rd.  $1/10\,\mathrm{kWh}$ .
- Die sog. Stand-by-Schaltung eines elektronischen Gerätes verbraucht etwa eine Leistung von 5 W, während eines Jahres entsteht so ein Energieverbrauch  $W=5\,\mathrm{W}\cdot365\cdot24\,\mathrm{h}=43.8\,\mathrm{kWh}$ . Bei einem Energiepreis von 20 ct/kWh laufen jährliche Kosten von etwa 8,8 € auf.

# Energiedurchsatz, Zusammenwirken von Erzeuger- und Verbraucherzweipol

Die einer Spannungsquelle von außen zugeführte Energie

$$W_{\rm zu} = QU_{\rm q} \qquad W_{\rm zu} = QE_{\rm q}$$
 mit EMK  $E_{\rm q}$  (1.6.2)

wird nach Gl. (1.5.6) durch die Quellenspannung  $U_{\rm q}$  oder die EMK  $E_{\rm q}$  ausgedrückt, die an den Verbraucher abgeführte Energie stets durch  $W_{\rm ab}=QU.$ 

1. Bei Anwendung der Quellenspannung  $U_{\rm q}$  lautet der Energiesatz für die Zusammenschaltung Erzeuger-Verbraucher

$$\sum_{i=1}^{l} W_{abi} = W_1 + W_2 + \dots + W_l = 0.$$
(1.6.3)

Die Summe aller vorzeichenbehafteten Energien verschwindet (abgegebene Energie positiv, zugeführte negativ). Dem entspricht der Maschensatz Gl. (1.5.9) mit verschwindender Summe aller Spannungen. Dann gilt für die Spannungsquellen das Erzeuger-, für Verbraucher das Verbraucherpfeilsystem.

2. Bei Anwendung der EMK hingegen muss die dem Stromkreis zugeführte Energie  $W_{zu}$  gleich der abgegebenen  $W_{ab}$  sein

$$\sum_{i=1}^{n} W_{\text{zu}i} = \sum_{i=1}^{m} W_{\text{ab}i}, \qquad \sum_{i(\text{EPS})} E_{\text{q}i} = \sum_{\mu(\text{VPS})} U_{\mu}. \tag{1.6.4}$$

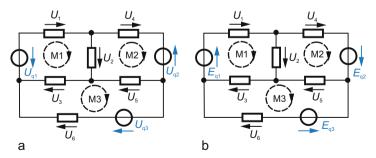
Daraus folgt der Maschensatz rechts umgesetzt auf die EMK-Form.

In einer Masche ist die Summe aller EMK gleich der Summe aller Spannungsabfälle bei gleichem Umlaufsinn.

Beispiel 1.6.1 Maschensatz Wir formulieren den Maschensatz für den Stromkreis nach Abb. 1.6.1 mit drei Maschen zum Vergleich in der Form Gl. (1.5.9) mit Spannungsabfällen und der EMK-Form Gl. (1.6.4):

Während die linke Seite problemlos hinzuschreiben ist, erfordert die rechte Seite mit der EMK mehr Aufmerksamkeit.

Die Bindung der elektrischen Energie an Strom und Spannung ist zwar die verbreitetste Form, sie schließt aber die Energieausbreitung über elektromagnetische Wellen nicht ein. Deshalb tritt später eine universelle Größe, die *Energiestromdichte* an diese Stelle mit z. T. überraschenden Ergebnissen.



**Abb. 1.6.1.** Anwendung des Maschensatzes für Spannungsquellen in Quellenspannungsund EMK-Form

## **●** 1.6.3 Elektrische Leistung, Wirkungsgrad

**Leistung** Der Energiebegriff enthält keine Zeit. Im technisch-wirtschaftlichen Bereich wird aber angestrebt, eine bestimmte *Arbeit pro Zeit* zu verrichten, also "etwas zu leisten". Dies führt direkt zum Leistungsbegriff (auch verstanden als Energiedurchsatz pro Zeit) oder die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit<sup>17</sup>

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W_{\text{el}}}{\Delta t} = \frac{\text{d}W_{\text{el}}}{\text{d}t},$$

$$[P] = \frac{1 \text{J}}{1 \text{s}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} = 1 \text{W}.$$
Definition der Leistung (1.6.5)

Die Leistung ist stets gleich der Änderung der Energie  $W_{\rm el}$  pro Zeiteinheit.

Für den Zweipol folgt damit (Abb. 1.6.2)

$$P = U \cdot I,$$
  $P > 0 (< 0).$  "Verbrauch" ("Erzeugung") (1.6.6)

Zur Leistung tragen Strom und Spannung gleichberechtigt bei: Die gleiche Leistung wird entweder mit großer Spannung und kleinem Strom oder großem Strom und kleiner Spannung erzeugt.

So benötigt eine Autolampe von 70 W Leistung bei der Spannung  $U=12\,\mathrm{V}$  den Strom  $I=5,83\,\mathrm{A},$  eine Glühlampe 60 W bei  $U=230\,\mathrm{V}$  den Strom  $I=0,26\,\mathrm{A}.$ 

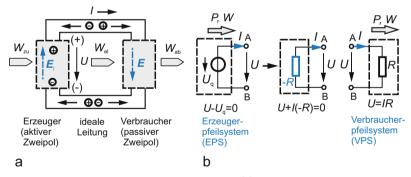


Abb. 1.6.2. Energiewandlung im Stromkreis. (a) Der elektrische Stromkreis als Mittler zwischen zwei nichtelektrischen Energieformen. (b) Pfeilsysteme abgeleitet aus der unterschiedlichen Rolle der Energiewandlung. Statt der Erzeugerdarstellung kann auch der Begriff negativer Widerstand (Synonym für Energielieferung) eingeführt werden

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>Leistung hat die Einheit VA = W nach J. Watt, 1736–1819.

**Einheit** Das Watt ist die SI-Einheit der Leistung einer Anordnung, die pro Sekunde die Arbeit 1 J verrichtet. Daneben sind noch Untereinheiten im Gebrauch

```
10^6\,\rm W=1\,MW,auch Gigawatt, Kraftwerksbereich 10^3\,\rm W=1\,kWtägliches Leben 10^{-3}\,\rm W=1\,mW\dots10^{-9}\,\rm W=1\,nWInformationstechnik
```

Häufig benutzt (wenn auch nicht zugelassen) wird noch 1 Pferdestärke (1 PS) = 735.49 W bzw. 1 kW = 1.36 PS.

#### Größenordnungen

Speicherzelle DRAM	$1 \mathrm{nW}$	Glühlampe	$40 \dots 100  \mathrm{W}$
Empfangsleistung Antenne	$< 1 \mu\mathrm{W}$	PC	$100 \dots 300  \mathrm{W}$
Armbanduhr	$1 m \mu W$	Bügeleisen	$500\mathrm{W}$
Transistorradio	einige W	Rundfunksender	$100\mathrm{kW}$
Pentium IV (Prozessor)	$80\mathrm{W}$	Kraftwerk	MW

Der Mensch entwickelt im Ruhezustand etwa eine Verlustleistung von 50 W, bei angestrengter Arbeit (Bergsteigen) etwa 100 W und sportlicher Höchstleistung kurzzeitig  $500\dots 1000$  W.

**Generator-, Verbraucherenergie, Leistung** Am Zweipol sind die Bezugspfeile für Strom und Spannung unabhängig voneinander wählbar, sie stehen aber in Relation zum Leistungsumsatz Gl. (1.6.6).

Ein Zweipol wirkt als Generator (Verbraucher) bei Abgabe (Aufnahme) elektrischer Energie.

Deshalb gibt es zwei Bezugspfeilzuordnungen (Abb. 1.6.2):

- 1. Verbraucherpfeilsystem (VPS): Gleicher Bezugssinn für Strom und Spannung, Leistung P = UI positiv. Der in die positive Klemme (bei positiver Spannung) einfließende Strom wird positiv gewählt. Es gilt für den ohmschen Widerstand U = IR, weil diese Zuordnung dem Verhalten des Widerstandes im Strömungsfeld entspricht. Der Zweipol wandelt elektrische Energie in Wärme um: Verbraucher oder passiver Zweipol.
- 2. Erzeugerpfeilsystem (EPS): Bezugssinn für Strom und Spannung sind am Zweipol einander entgegengerichtet. Der bei positiver Spannung U aus der positiven Klemme herausfließende Strom wird positiv gewählt. Jetzt lautet das Ohmsche Gesetz: -U = IR und die negative Leistung  $-IU = I^2R$  ist gleich einer vom Zweipol aufgenommenen elektrischen Leistung. Umgekehrt bedeutet positives Produkt UI eine Abgabe elektrischer Zweipolleistung: Erzeuger oder aktiver Zweipol.

```
Zusammengefasst: Leistung P = UI wird vom Zweipol — abgegeben (aufgenommen), wenn sie im Erzeugerpfeilsystem positiv (negativ) ist,
```

- aufgenommen (abgegeben), wenn sie im Verbraucherpfeilsystem positiv (negativ) ist.

Negativer (ohmscher) Widerstand Bringt man das negative Vorzeichen nach rechts

$$IU = I^2(-R),$$
 (1.6.7)

so lässt sich die Haupteigenschaft "Leistungsabgabe" einer Energiequelle formal durch den Begriff negativer (ohmscher) Widerstand (-R) beschreiben. Für verschiedene Probleme, etwa die elektrische Schwingungserzeugung und Stabilität eines Stromkreises, ist diese Betrachtungsweise sehr zweckmäßig, aber auch die Energietechnik kennt das Phänomen bei Lichtbogen und Gasentladung seit Jahrzehnten (s. Kap. 2.5).

Tabelle 1.4 enthält die Leistungszuordnungen und Zählpfeilsysteme.

Tabelle 1.4. Richtungspfeilsysteme und Leistungsumsatz am Zweipol

Zählpfeil- systeme	Erzeugte Leistung	Verbrauchte Leistung	Kennlinien- zuordnung	Beispiele
Erzeuger (EPS)	p = ui > 0 (Verbraucher $p < 0$ )	p = -ui (Verbraucher $p > 0$ )	V I E U U U	$\begin{bmatrix} R & j \\ U_q & u \end{bmatrix}$
Verbraucher (VPS)	p = -ui (Erzeuger $p > 0$ )	p = ui > 0 (Erzeuger $p < 0$ )	E i V R V E U	u R

Damit ein Verbraucher stets als solcher arbeitet (ebenso wie der Erzeuger), müssen Strom und Spannung die Polarität gleichzeitig wechseln. Ändert nur eine Größe  $(U,\,I)$  die Richtung, so geht der Betriebszustand vom Erzeuger zum Verbraucher resp. umgekehrt über. Das tritt bei Energiespeicherelementen (Kondensator, Spule) auf, die während einer bestimmten Zeit Energie aufnehmen, im Feld speichern und später wieder in die angeschlossene Schaltung zurückgeben.

Energie- und Leistungsgesichtspunkte haben für einzelne Teilbereiche der Elektrotechnik durchaus verschiedene Gewichtung. So strebt die *Energietechnik* an, die bereitstehende elektrische Energie mit hohem Wirkungsgrad zum Verbraucher zu transportieren. Jeder Verlust (Erwärmung der Leitungen) ist unerwünscht; am Ende berechnet man dem Nutzer einen Preis für die *gelieferte* elektrische Energie.

In der Informationstechnik dient Energie lediglich zum Transport elektrischer Signale (Informationsübertragung). Zur Übertragung eines Bit (als kleinste Informationseinheit) ist – je nach Ansatz – eine Mindestenergie von  $W_{\rm min}=kT\cdot \ln 2=U_{\rm T}q\cdot \ln 2=28, 8\cdot 10^{-22}$  Ws erforderlich, hauptsächlich bestimmt durch das Vermögen der Elementarladung  $q=1,6\cdot 10^{-19}$  As, eine Spannungsstufe von  $U_{\rm T}=26\,{\rm mV}$  zu überwinden. Weil die mit einer Nachricht übermittelte Energie extrem klein ist, erzeugen Geräte und Einrichtungen der Informationstechnik (Handy, Fernsehempfänger, PC . . .) in der Regel nur Verlustwärme und der Wirkungsgrad spielt keine Rolle. Deshalb stehen anfallende Kosten in direkter Beziehung zum Gerät u. a., nicht aber zur übertragenen Nachricht (aus energetischer Sicht).

**Leistungssatz** Energie und Leistung hängen nach Gl. (1.6.5) zusammen. Es folgt dann aus dem Energieerhaltungssatz (eines abgeschlossenen Systems) der *Leistungssatz für Netzwerke* 

$$\left. \sum_{\nu} W_{\rm el\nu} \right|_{\rm EPS} = \text{const} \rightarrow \left. \sum_{\nu} P_{\rm el\nu} \right|_{\rm VPS} = 0. \tag{1.6.8}$$
 Leistungsbilanzgleichung

Die Summe der einer Schaltung netto zugeführten Leistungen (Quellenleistungen negatives Vorzeichen) verschwindet oder gleichwertig:

Die Summe der Quellenleistungen ist stets gleich der Summe der Verbraucherleistungen.

Dieser Satz erlaubt die Kontrolle einer Schaltungsanalyse. Manche Schaltungssimulatoren wie SPICE/PSPICE führen diese Prüfung automatisch durch.

Energie- und Leistungsmessung Die Messung der elektrischen Energie erfolgt mit Elektrizitäts- oder Wattstundenzählern. Sie messen direkt die elektrische Energie nach Gl. (1.6.1) mit einem Drehsystem, dessen Drehgeschwindigkeit  $d\alpha/dt$  dem Produkt u(t)i(t) proportional ist. Dann gilt

$$W = k \int_{t_1}^{t_2} d\alpha = k(\alpha_2 - \alpha_1).$$

Die Energie ist dem Drehwinkel proportional und drückt sich durch die Umlaufzahl aus, die ein Zählwerk anzeigt. Wattstundenzähler haben einen Strom- und Spannungspfad, beide sind vor den zu messenden Verbraucher geschaltet.

Die *Leistungsmessung* erfordert ein Messgerät, das Strom und Spannung gleichzeitig erfasst und beide Größen multipliziert (die getrennte Messung und nachträgliche Berechnung scheidet aus praktischen Gründen vor allem bei zeitveränderlichen Größen aus). Die Multiplikation erfolgt

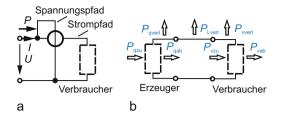


Abb. 1.6.3. (a) Leistungsmessung, Gleichstromkreis. (b) Leistungsumsatz im Stromkreis

- analog durch das sog. elektrodynamische Messwerk (Abb. 1.6.3a).
- numerisch. Dabei werden beide Messgrößen mit AD-Umsetzern digitalisiert und durch ein Rechenwerk multipliziert.

Da nur die dem Verbraucher zugeführte Leistung messbar ist, muss die Erzeugerleistung indirekt über die gesamte abgegebene Leistung ermittelt werden.

Wirkungsgrad Bei jeder Energieumwandlung geht im Energiewandler ein Teil der Energie als Verlustenergie bzw. Verlustleistung  $P_{\rm V}$  irreversibel verloren. Man versteht deshalb als Wirkungsgrad  $\eta$  das Verhältnis der Arbeit, die bei einer Energieumwandlung geleistet wird zur aufgenommenen Arbeit

$$Wirkungsgrad = \frac{Nutzarbeit}{Gesamtarbeit} = \frac{Ausgangsleistung}{Eingangsleistung}$$

oder

$$\eta = \frac{P_{\text{aus}}}{P_{\text{ein}}} = \frac{P_{\text{ein}} - P_{\text{verlust}}}{P_{\text{ein}}} = 1 - \frac{P_{\text{verlust}}}{P_{\text{ein}}}.$$
 (1.6.9)

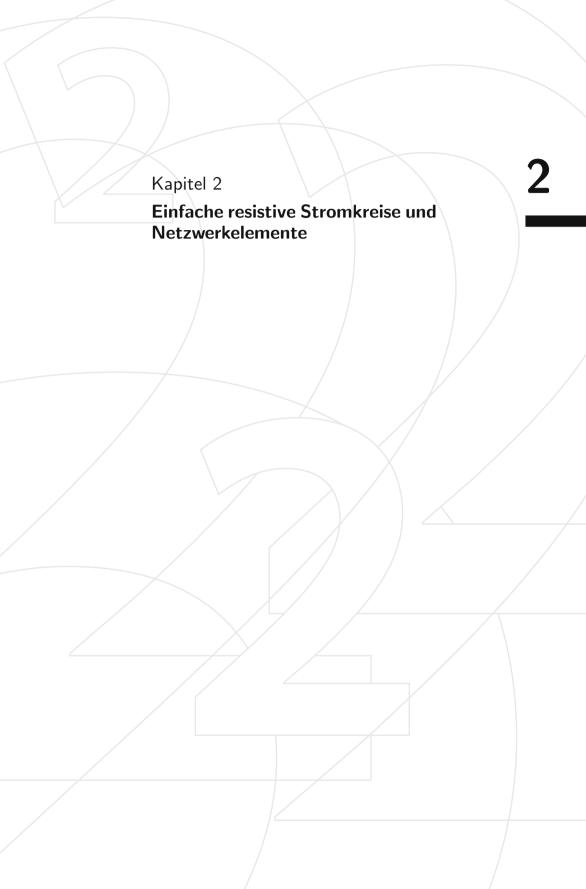
Der Wirkungsgrad ist dimensionslos, oft wird er in Prozent angegeben (Abb. 1.6.3b). Hat beispielsweise ein Grundstromkreis aus Erzeuger- und Verbraucherzweipol sowie verlustbehaftete Zwischenleitungen die im Bild zugeordneten Wirkungsgrade, so ergibt sich der Gesamtwirkungsgrad als Produkt der Einzelwirkungsgrade

$$\eta_{\rm ges} = \frac{P_{\rm Vab}}{P_{\rm Vzu}} = \eta_{\rm Q} \cdot \eta_{\rm L} \cdot \eta_{\rm V}.$$

Der Gesamtwirkungsgrad einer Anordnung ist stets gleich dem Produkt der Teilwirkungsgrade aller in Kette wirkenden Systemteile. Er überschreitet nie den Wirkungsgrad eines einzelnen Systemteils.

## Selbstkontrolle Kapitel 1

- 1. Was beinhalten die Teilchen- und Feldmodelle?
- 2. Wie lautet der Ladungserhaltungssatz?
- 3. Warum kann man einen geladenen isolierten Körper durch Berührung mit den Fingern entladen? Was erfolgt mit den Ladungen?
- 4. Ein positiv geladener Glasstab zieht einen leichten Gegenstand an. Muss man daraus schließen, dass er negativ geladen ist?
- 5. Welche Merkmale hat die Ladung?
- 6. Wie lautet die Definition der Stromstärke?
- 7. Wie kann man aus einem gegebenen Stromverlauf i(t) den Ladungsverlauf Q(t) gewinnen? Beispiele angeben.
- 8. Erläutern Sie die Stromrichtung im Zusammenhang mit der Bewegungsrichtung positiver und negativer Ladungsträger? Gibt es Materialien mit positiven Ladungsträgern?
- 9. Was versteht man unter der Kontinuitätsgleichung des Ladungsflusses?
- 10. Welche Wirkungen hat der Strom?
- 11. Wie lautet die Definition der Feldstärke, des Potenzials und der Spannung? Was verbirgt sich hinter diesen Begriffen?
- 12. Welche Kraft übt die Feldstärke auf eine positive Ladung aus?
- 13. Was ist ein homogenes elektrisches Feld (Merkmale, Beschreibung)? Erläutern Sie die Verläufe der Feldstärke, des Potenzials und der Spannung.
- 14. Was besagt der Begriff Maschensatz, was ist der physikalische Hintergrund?
- 15. Jemand gibt die Spannung einer Batterie mit 12 Nm/As an. Hat er recht (Erklärung)?
- 16. Wie lautet die Kontinuitätsbedingung des stationären Strömungsfeldes?



2	Einfache resistive Stromkreise	
	und Netzwerkelemente	57
2.1	Modelle elektrischer Stromkreise	57
2.2	Unabhängige Spannungs- und Stromquellen	60
2.2.1	Ideale Spannungs- und Stromquellen	62
2.2.2	Reale Spannungs- und Stromquellen	65
2.3	Widerstand, resistiver Zweipol	74
2.3.1	Lineare resistive Zweipole	74
2.3.2	Zusammenschaltungen linearer resistiver Zweipole	80
2.3.3	Nichtlineare resistive Zweipole	87
2.3.4	Temperaturverhalten resistiver Zweipole	90
2.3.5	Allgemeine resistive Zweipole	95
2.3.5.1	Zeitunabhängige resistive Zweipole	95
2.3.5.2	Zeitvariante resistive Zweipole	97
2.3.6	Widerstand als Bauelement	99
2.4	Der Grundstromkreis	102
2.4.1	Der lineare Grundstromkreis	102
2.4.2	Leistungsumsatz im Grundstromkreis	106
2.4.3	Einfache verzweigte Stromkreise	111
2.4.4	Zweipoltheorie	117
2.4.5	Überlagerungssatz	123
2.5	Nichtlinearer resistiver Grundstromkreis*	126
2.5.1	Zusammenschaltung nichtlinearer	
	und linearer Schaltelemente, Ersatzkennlinie	127
2.5.2	Kennlinienapproximationen	131
2.5.3	Arbeitspunkteinstellung	133
2.5.4	Leistungsumsatz im nichtlinearen Grundstromkreis	134
2.5.5	Kleinsignalverhalten	138
2.6	Zweitore	142
2.6.1	Zweitorbegriff	143
2.6.2	Strom-Spannungs-Beziehungen linearer Zweitore	147
2.6.3	Zweitorarten	157
2.6.4	Zweitorersatzschaltungen, gesteuerte Quellen	159
2.6.5	Elementarzweitore	172
2.6.6	Zweitorzusammenschaltungen	175
2.6.7	Zweitor in der Schaltung, Betriebsverhalten	179
2.6.8	Zweitor mit unabhängigen Quellen	186
2.6.9	Überlagerungssatz und Zweipoltheorie in Netzwerken	
	mit restauerten Ouellen	127

2.7	Gesteuerte Bauelemente und ihre Modellierung*	190
2.7.1	Allgemeine gesteuerte Quellen	192
2.7.2	Nichtlineares Zweitor	193
2.7.3	Bipolartransistormodell	194
2.7.4	Kleinsignalverhalten nichtlinearer Zweitore	200
2.7.5	Kleinsignalverhalten des Bipolartransistors,	
	Verstärkungsprinzip	204
2.7.6	Allgemeines lineares Verstärkermodell	211
2.7.7	Operational-Transkonduktanz-Verstärker,	
	Operationsverstärker	214
2.7.8	Grundschaltungen mit Operationsverstärkern	223

# 2 Einfache resistive Stromkreise und Netzwerkelemente

Lernziel Nach Durcharbeit dieses Kapitels sollte der Leser kennen

- die Begriffe Strom, Quellenspannung und Stromkreis,
- das ohmsche Gesetz und die Definition des ohmschen Widerstandes,
- den Zweipolbegriff,
- die Kirchhoffschen Gesetze und ihre Anwendung auf einfache Stromkreise,
- den Grundstromkreis und seine Merkmale,
- das Prinzip der Strom- und Spannungsmessung,
- die Zweipoltheorie und ihre Anwendung auf einfache Stromkreise,
- den Grundstromkreis mit nichtlinearen Elementen,
- den Umgang mit gesteuerten Quellen,
- das Grundverständnis von Dioden, Transistoren und Operationsverstärkern und ihre Anwendung als Netzwerkelement.

# 2.1 Modelle elektrischer Stromkreise

Wir wenden die bisherigen Grundbegriffe auf ein Beispiel an: elektromagnetische Strahlung in Form von Sonnenlicht soll elektrisch den Keller eines Gebäudes beleuchten: durch eine Lumineszenzdiode, eine größere LED oder eine Minileuchtstoffröhre. Bei Abschalten muss die LED noch eine Weile nachleuchten.

Diese (primitive) Systemaufgabe (Energiewandlung, elektrische Übertragung, Rückwandlung in nichtelektrische Energie) wird mit *Bauelementen* realisiert: Solarzellen, Verbindungsdrähte, ein Schalter, die Beleuchtungselemente und ein Kondensator zur Energiespeicherung. Die Zweipolelemente bilden einen Stromkreis nach Abb. 2.1.1. Bei Schließen des Schalters S verstreicht eine Zeit, bis der Kondensator auf die Spannung der Solarzelle geladen ist, gleichzeitig beginnt die LED zu leuchten. Nach dem Abschalten verlischt die Diode allmählich. Fehlt der Kondensator, so leuchtet die LED unmittelbar und verlischt sofort mit dem Abschalten. Da LEDs für das gesamte sichtbare Spektrum verfügbar sind, kann damit z.B. ein bestimmter Spektralteil des Tageslichts zur Raumbeleuchtung gewählt werden, etwa Gelb.

Grundlagen einer Analyse dieses Netzwerkes sind

- wirklichkeitsnahe Bauelementemodelle ersetzt durch Netzwerkelemente,
- *Analyseverfahren*, die die Kirchhoffschen Gleichungen sowie die *Klemmenbeziehungen* der Netzwerkelemente nutzen.

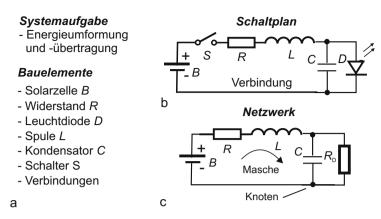


Abb. 2.1.1. Systemaufgabe gelöst durch eine Schaltung

Je nach Komplexität erfolgt die Netzwerkanalyse entweder von Hand, dem Taschenrechner oder dem PC unter Nutzung von Programmen wie MATLAB, Multisim (Electronics Workbench), PSPICE/SPICE u. a. Der Vergleich der Ergebnisse mit der Messung gibt Aufschluss über die Güte der Netzwerkmodelle. Ihre Schaltungsformen werden als "Ersatzschaltungen" bezeichnet. So besteht die Ersatzschaltung der Solarzelle aus einer Stromquelle mit zugeschalteter (nichtlinearer) Diode, die LED wird als Diode mit einer optischen Quelle für die erzeugte Strahlung modelliert.

Zur Funktion muss die Schaltung bemessen werden: eine LED hat eine Betriebsspannung von 2 V beim Strom von 10 mA (eine große LED der Leistung P=3 W erfordert I=1,5 A). Eine Solarzelle liefert die Spannung  $0,6\dots0,7$  V, deswegen sind drei in Reihenschaltung erforderlich. Bei einem Solarumsetzungswirkungsgrad von 20% setzt die Zelle die Solarleistung von etwa  $1\,\mathrm{kW/m^2}$  in eine elektrische Leistung von  $200\,\mathrm{W/m^2}=20\,\mathrm{mW/cm^2}$  um. Eine Solarzelle der Fläche  $A>1\,\mathrm{cm^2}$  reicht zur Versorgung der kleinen LED. Die leistungsstärkere LED erfordert entweder eine Erhöhung der Zellenfläche oder einen Stromverstärker mit der Stromverstärkung  $I_a/I_e=1,5$  A/10 mA = 150, was immer ein solcher Verstärker im Moment auch sein möge. Soll als Leuchtmittel eine Minileuchtstoffröhre (Leistung ca. 1 W, Betriebsspannung 230 V) dienen, dann müsste ein Spannungsverstärker mit der Spannungsverstärkung  $U_a/U_e=230\,\mathrm{V/2}\,\mathrm{V}=115$  zwischengeschaltet werden.

Die Anordnung Abb. 2.1.1 hat mehrere Merkmale: sie

- erfüllt die gestellte Systemaufgabe,
- besteht aus *Bauelementen*, die zu einer *Schaltung* mit Stromknoten und Maschen zusammengefügt sind und
- lässt sich verkürzt durch einen *Schaltplan* darstellen, wenn jedem Bauelement ein *Schaltzeichen* zugeordnet wird (Abb. 2.1.1b).

Das Gesamtverhalten erkennen wir durch *Modellierung*. Dabei wird jedem Bauelement ein *Modell-* oder *Netzwerkelement* zugeordnet (Abb. 2.1.1c). Es

erfasst sein typisches Verhalten frei von "Sekundäreffekten" (z. B. Verluste durch Widerstände). So geht die Schaltung in eine Zusammenschaltung von Netzwerkelementen, kurz ein *elektrisches Netzwerk* über.

Ein Netzwerk ist eine modellhafte (mathematische) Abbildung einer Schaltung. Seine Ströme und Spannungen werden durch die Klemmenbeziehungen der Netzwerkelemente und ihre Zusammenschaltung, die *Topologie* oder *Netzwerkstruktur* bestimmt. Dabei gelten die Kirchhoffschen Gleichungen zu jedem Zeitpunkt.

Die Berechnung der Ströme und Spannungen heißt Netzwerkanalyse. Technisch verbinden Leitungen die einzelnen Bauelemente als Verbindungsdrähte, als Leitungen auf einer Leiterplatte oder in einer integrierten Schaltung. Im Netzwerk-/Schaltplan werden Leitungsverbindungen als ideal (widerstandslos) angesehen. Zwischen Schaltung und Netzwerk besteht ein grundsätzlicher Unterschied: in der Schaltung sind Ströme und Spannungen messbar, im zugehörigen Netzwerk können sie nur berechnet werden. Deshalb hat die Netzwerkanalyse fundamentale Bedeutung zur Bemessung einer Schaltung. Die Modellierung der Netzwerkelemente bestimmt dabei den Analyseaufwand.

Fürs erste könnte die Diode D in Abb. 2.1.1b durch einen Widerstand R ersetzt werden, ein sicher ungenaues Modell. Deshalb ist zwischen Modellierungsgenauigkeit und Analyseaufwand abzuwägen. Hier spielen die Netzwerkanalyseprogramme ihre Stärken aus: bei Programmen reicht die Eingabe der Schaltungsstruktur und die Wahl der Netzwerkmodelle zur anschließenden automatischen Netzwerkanalyse. Dieser Vorgang wird als Schaltungssimulation bezeichnet, heute Standardverfahren der Netzwerkanalyse.

Das Beispiel spricht bereits die Themenkreise an, die *vor* einer Netzwerkanalyse stehen und den Inhalt dieses Kapitels bilden

- Strom- oder Spannungsquellen (Kap. 2.2) als Modelle aktiver Zweipole,
- das Modell des resistiven Zweipols (Kap. 2.3),
- die Zusammenschaltung von aktivem und passivem Zweipol zum Grundstromkreis (Kap. 2.4), auch als nichtlinearer Grundstromkreis (Kap. 2.5),
- einfache "Mehrpole" mit Ein- und Ausgangsklemmen zwischen Quelle und Verbraucher (Kap. 2.6). Typische Bauelemente sind Doppelleitungen, Transformatoren, aber auch Verstärkerelemente. Aus Sicht des Netzwerkes bilden sie gesteuerte Quellen, praktisch werden sie durch Transistoren und damit aufgebaute Schaltungseinheiten (z. B. Operationsverstärker u. a.) realisiert.

Die Kapitel 2.2–2.4 sind unverzichtbare Grundlagen für Netzwerke, die Kapitel 2.6 und 2.7 können zunächst zurückgestellt werden. Obwohl nichtlineares

Verhalten durch Halbleiterbauelemente schon bei sehr einfachen Beispielen auftritt, entfällt es zumeist im Rahmen der Grundausbildung. Wir beschreiten diesen Weg nicht, sondern betrachten den Themenkreis in Kap. 2.5.

Kapitel 2 beschränkt sich auf Gleichstromkreise. Da Kondensatoren (ebenso wie Spulen und der Transformator) erst bei zeitveränderlichen Vorgängen wirksam werden, behandeln wir diese Bauelemente später zusammen mit dem elektrischen und magnetischen Feld (s. Bd. 2), denn ihr Merkmal ist *Energiespeicherung*.

# 2.2 Unabhängige Spannungs- und Stromquellen

Übersicht. Zweipolbegriff Ein zwischen zwei Knoten (als Klemmenpaar) liegendes Netzwerk ist bezüglich dieses Klemmenpaares ein *Zweipol*. Er kann aus einem oder mehreren Netzwerkelementen bestehen, wie sie bereits benutzt wurden: Einzelwiderstand, Zusammenschaltung von Widerständen, Stromoder Spannungsquellen. Zweipole lassen sich bezüglich des *Energieumsatzes* (Kap. 1.6.3) unterteilen in

- *aktive Zweipole*, die elektrische Energie *abgeben* (und deshalb wenigstens eine Quelle enthalten) und
- passive Zweipole, die elektrische Energie aufnehmen und in anderer Form (meist Wärme) abgeben. Besser spricht man von einem Energiewandler, weil außer Wärme auch eine andere Energieform (z.B. mechanische Energie beim Motor) bereitgestellt werden kann. Der verbreitetste passive Zweipol ist der ohmsche Widerstand oder resistive Zweipol.

Weil die Zählrichtungen von Strom und Spannungen am Zweipol unabhängig voneinander gewählt werden können, aber in Beziehung zum Leistungsumsatz stehen, wird der Begriff aktiver-passiver Zweipol gleichwertig durch das Verbraucher-Erzeuger-Zählpfeilsystem beschrieben (s. Kap. 1.6.2). Seine Wirkung im Netzwerk drückt sich als Klemmen- oder U, I-Verhalten aus. Vorerst betrachten wir Quellen als Grundtyp aktiver Zweipole und den ohmschen Widerstand als den passiven Zweipol.

Quelle Ursache der Ströme in Netzwerken sind unabhängige Quellen als

- *Umformorte* nichtelektrischer in elektrische Energie (Tab. 2.1), z. B. Generatoren, Batterien, Thermoelemente, Solar- und Brennstoffzellen, oder
- Orte, an denen elektrische Energie *einer Form* in eine *andere* gewandelt wird (Beispiele: Gleichspannung durch Gleichrichtung der Netzspannung).

Ausgangs- energie	Beispiele	Effekt
Mechanisch	Elektrischer Generator,	Induktionsgesetz,
	van der Graff-Generator,	Reibungselektrizität,
	Piezogenerator,	Piezoelektr. Effekt
	Dehnungsschwinger	
Chemisch	Primär-, Sekundärelement,	Elektrochemische
	Brennstoffzelle	Reaktion an Elektroden
Strahlung	Solarzelle, Fotozelle, Fotodiode	Fotoeffekt
Wärme	Thermoelement,	Seebeckeffekt,
	MHD-Generator	Induktion in Plasmen
Elektrisch	Transistoroszillator	Wandlung elektrischer
	(Umformung Gleich-	Energie in elektro-
	in Wechselleistung)	magnetische Feldenergie

Tabelle 2.1. Beispiele zur direkten Erzeugung elektrischer Energie

Typische Beispiele des U, I-Verhaltens von unabhängigen Quellen zeigt Abb. 2.2.1. Es gibt sie mit

- linearem Klemmenverhalten abhängig von Strom bzw. Spannung, die *linearen Spannungs* oder *Stromquellen*,
- nichtlinearem Verhalten: nichtlineare Spannungs- oder Stromquellen,
- begrenzter Linearität. Die Spannung (bzw. der Strom) ist in einem großen Bereich lastunabhängig und erst von einem bestimmten Grenzwert an setzt starker Abfall ein. So verhalten sich Solarzellen und "elektronische Netzgeräte" mit Strombegrenzung.

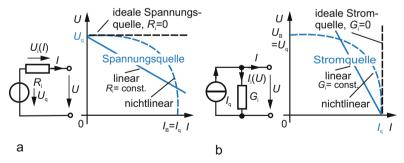


Abb. 2.2.1. *U,I*-Kennlinien idealer und nichtidealer Quellen. (a) Spannungsquelle (ideale, nichtlineare und lineare Form). (b) Stromquelle (ideale, nichtlineare und lineare Form)

Eine Quelle hat zwei ausgezeichnete Betriebsfälle:

- den Leerlauf (open circuit) ohne Stromentnahme (I = 0). Dabei wird an den Klemmen die Leerlaufspannung (open circuit voltage)  $U_1$  gemessen, auch als Quellenspannung  $U_q$  bezeichnet,
- den Kurzschluss (short circuit) mit idealer Leiterverbindung der beiden Klemmen (U=0). Dann fließt der Kurzschlussstrom (short-circuit current)  $I_{\rm k}$ , auch als Quellenstrom  $I_{\rm q}$  benannt.

Ob ein Kurzschluss technisch durchführbar ist, hängt vom aktiven Zweipol ab. So verträgt eine Solarzelle durchaus einen zeitlich begrenzten Kurzschlussbetrieb, eine (kleine) Batterie erwärmt sich durch Überlastung, doch bei einer Autobatterie besteht Explosionsgefahr. Im Kraftwerk schließlich hätte ein Kurzschlussversuch katastrophale Folgen. Deshalb eignet sich der Kurzschlussstrom zwar als Modellgröße, bestimmt werden muss er in der realen Welt anders als durch Kurzschluss.

# **②** 2.2.1 Ideale Spannungs- und Stromquellen

Die Grundelemente zur Modellierung technischer Spannungs- und Stromquellen sind (unabhängige) ideale Spannungs- und Stromquellen. 1 2

#### Ideale Spannungsquelle

Ein Zweipol mit belastungsunabhängiger Klemmenspannung  $U_{\rm q}(t)$  heißt ideale Spannungsquelle (ideal voltage source). Sie ist ein Netzwerkelement zur Modellierung realer elektrischer Spannungsquellen.

Gleichwertige Begriffe sind ideale Spannungsquelle, Urspannungsquelle, eingeprägte oder starre, vom Strom I unabhängige Spannung.

Eine zeitlich konstante Spannung liefert die ideale Gleichspannungsquelle.

Abb. 2.2.2 zeigt das Strom-Spannungsverhalten der Quellen und typische Schaltzeichen. Die Strom- und Spannungszählpfeile werden zweckmäßig nach dem Erzeugerpfeilsystem (EPS) orientiert. Dann arbeitet die Spannungsquelle entweder im 1. oder 3. Quadranten der I,U-Kennlinie, letztere bei Richtungsumkehr von U und I, wie sie bei Wechselspannungen auftritt. Im 2. oder 4. Quadranten wirkt die Quelle als passiver Zweipol. Dieser Fall tritt z. B. beim Aufladen einer Batterie auf (Gegenschalten einer Spannungsquelle).

 $<sup>^1{\</sup>rm Gesteuerte}$  Quellen (Kap. 2.6) sind das Gegenstück zu unabhängigen Quellen.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Der Hinweis auf Unabhängigkeit unterbleibt künftig, dafür wird die Abhängigkeit durch den Begriff "gesteuerte Quelle" hervorgehoben.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Ideale Spannungs- (und z. T. Stromquellen) dienen als Verbraucher auch zur abschnittsweisen Beschreibung des Verhaltens technischer Bauelemente durch *Knickkennlinien*, wie beispielsweise bei der Diode und Z-Diode.

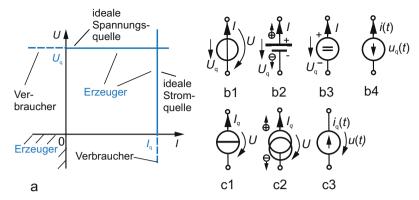


Abb. 2.2.2. Ideale Quellen. (a) Strom-Spannungskennlinie, Erzeuger- und Verbraucherpfeilrichtung (der dritte Quadrant gilt für Vorzeichenwechsel von u und i). (b1) Schaltzeichen der Spannungsquelle nach DIN EN 60617-2:1997. (b2) Schaltzeichen bevorzugt für Gleichspannungsquellen (mit oder ohne Polaritätsangabe). (b3) Weitere, weniger benutzte Schaltzeichen. (b4) Schaltzeichen für zeitveränderliche Spannung. (c1) Schaltzeichen der Stromquelle entspr. (b1). (c2) Schaltzeichen bevorzugt für Gleichstromquellen und zeitveränderliche Quellen (c3)

Im Schaltzeichen deutet die durchgehende Linie symbolisch auf den Innenwiderstand null. Früher benutzte Schaltzeichen (z. B. für Batterie mit Polaritätsangabe) sollten nicht mehr verwendet werden, sind aber aus Anschauungsgründen noch verbreitet. Oft werden auch Hinweise auf die Strom-/ Spannungssart, wie in Abb. 2.2.2 dargestellt, am Quellensymbol vermerkt.

Für den Umgang mit idealen Spannungsquellen ist zu beachten:

- 1. Die ideale Spannungsquelle darf nie über eine äußere widerstandslose Leiterverbindung kurzgeschlossen werden, weil es keinen Punkt auf der I, U-Kennlinie mit U=0 gibt.
- 2. Eine ideale Spannungsquelle mit der Quellenspannung  $U_{\rm q}=0$  wirkt wie ein Kurzschluss ihrer Klemmen.

Dieser Zustand wird bei Anwendung des Überlagerungssatzes und der Zweipoltheorie benötigt und als "Kurzschluss" der Spannungsquelle bezeichnet. $^4$ 

Der Vorteil der Ersatzschaltung Abb. 2.2.2 ist, dass bei bekannter Quellenspannung  $U_{\rm q}$  auf Einzelheiten innerer Vorgänge (physikalisches Prinzip) verzichtet werden kann.

**Ideale Stromquelle** Das Gegenstück zur idealen Spannungsquelle ist die ideale Stromquelle (ideal current source).

 $<sup>^4</sup>$ Man sollte korrekter von "Nullsetzen" sprechen mit  $U_{\rm q}=0$ oder dem Ersatz der Spannungsquelle durch Kurzschluss.

Ein Zweipol mit belastungsunabhängigem Klemmenstrom, dem Quellenstrom  $I_{\rm q}(t)$  (der nicht von der Größe eines anderen Netzwerkzweiges abhängt) heißt unabhängige ideale oder kurz ideale Stromquelle.

Gleichwertige Begriffe sind "Einströmung", eingeprägter oder starrer Strom, auch Quellenstrom oder Urstromquelle.

Bei zeitlich konstantem Strom liegt eine *ideale Gleichstromquelle I*<sub>q</sub> vor. Im Erzeugerpfeilsystem hat sie eine Kennlinie im 1. resp. 3. Quadranten, im 2. und 4. wirkt sie als Leistungsverbraucher.

Abb. 2.2.2c zeigt übliche Schaltzeichen. Der Bezugspfeil von  $I_{\rm q}$  (wie der von  $U_{\rm q}$ ) gehört zum Quellensymbol. Der Querstrich deutet einen unendlich hohen Innenwiderstand an. Abweichend von der Norm sind weitere Quellensymbole üblich, auch solche, die eine nähere Kennzeichnung z. B. für Wechselstrom tragen.

So, wie die ideale Spannungsquelle nie im Kurzschluss betrieben werden darf, ist Leerlauf der idealen Stromquelle nie zulässig.

Deshalb kann sie streng genommen nie im Leerlauf dargestellt werden (Widerspruch zum Strom als ununterbrochenem Band, Verletzung des Knotensatzes). Erfordert ein Netzwerkanalyseverfahren dennoch die zeitweilige Nullsetzung des Wertes  $I_{\rm q}$ , so wirkt der Ersatzzweipol als Leerlaufstrecke (Leitungsunterbrechung).

#### Zusammenschaltung idealer Quellen Ideale Spannungsquellen dürfen

- reihengeschaltet und durch eine ideale Ersatzspannungsquelle

$$U_{\rm q} = \sum_{\nu=1}^n U_{{\rm q}\nu} \qquad \qquad \begin{array}{c} {\rm Reihenschaltung} \\ {\rm idealer~Spannung squellen} \end{array} (2.2.1)$$

ersetzt werden (Abb. 2.2.3a, b),

— nur bei gleichen Quellenspannungen (Richtung, Wert) parallel geschaltet werden.

#### Ideale Stromguellen dürfen

— parallel geschaltet werden mit der Ersatzquelle  $I_{\rm q}$  nach dem Knotensatz (Abb. 2.2.3c, d)

$$I_{\rm q} = \sum_{\nu=1}^n I_{{\rm q}\nu}, \qquad \qquad \begin{array}{c} {\rm Parallels chaltung} \\ {\rm idealer\ Stromquellen} \end{array} (2.2.2)$$

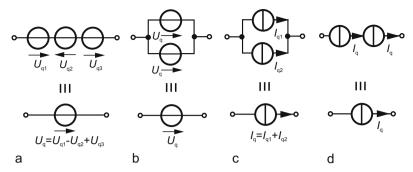


Abb. 2.2.3. Zusammenschaltung idealer Quellen. (a) Reihenschaltung idealer Spannungsquellen. (b) Parallelschaltung nur gleicher idealer Spannungsquellen zulässig. (c) Parallelschaltung idealer Stromquellen. (d) Reihenschaltung nur gleicher idealer Stromquellen zulässig

nur bei gleichen Quellenströmen (Richtung, Wert) reihengeschaltet werden.

Für Quellen mit Innenwiderstand gelten diese Beschränkungen nicht.

## 2.2.2 Reale Spannungs- und Stromquellen

**Technische Spannungs- und Stromquellen** Ideale Quellen kennt die reale Welt nicht. Trotzdem eignen sie sich gut zur Modellierung realer oder technischer Spannungs- und Stromquellen mit inneren Verlusten, die durch einen linearen/nichtlinearen *Innenwiderstand* darstellbar sind. Dadurch wird die Quellengröße lastabhängig.

Beispielsweise haben *Konstantspannungsgeräte*, die dem Namen nach ideale Spannungsquellen vermuten lassen, zwar eine einstellbare Konstantspannung, doch sinkt sie bei Strombelastung, je nach Gerätegüte, um einige % ab.

Reale Quellen werden modelliert als

- Spannungsquellen mit stromabhängigen inneren Spannungsabfall  $U_i(I)$  durch den linearen/nichtlinearen Innenwiderstand  $R_i$  (Abb. 2.2.1a),
- Stromquellen mit (spannungsabhängigem) inneren "Stromverlust"  $I_i(U)$  durch den linearen oder nichtlinearen Innenleitwert  $G_i$  (Abb. 2.2.1b).

Häufig kann der Innenwiderstand  $R_i$  als konstant angesehen werden. Dann ist der innere Spannungsabfall  $U_i(I) = IR_i$  stromproportional und der Verluststrom  $I_i(U) = G_iU$  spannungsproportional. So entstehen

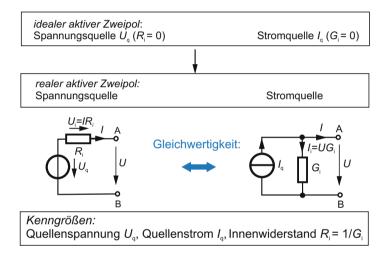
## 1. die lineare Spannungsquelle mit der Klemmenspannung

$$U = U_{\rm q} - IR_{\rm i}$$
. Strom-Spannungsbeziehung, EPS (2.2.3)

Abb. 2.2.4 zeigt die U,I-Kennlinie. Die Klemmenspannung fällt linear mit dem Strom zwischen  $U_{\rm q}$  und dem Kurzschluss U=0 ab. Dabei fließt als Klemmenstrom der Kurzschlussstrom~I(U=0)

$$I|_{U=0} = I_{\mathbf{k}} = \frac{U_{\mathbf{q}}}{R_{\mathbf{i}}}.$$
 Kurzschlussstrom (2.2.4)

Die reale Spannungsquelle entspricht der idealen Spannungsquelle um so besser, je kleiner ihr Innenwiderstand  $R_{\rm i}$  ist. Im Grenzfall  $R_{\rm i}=0$  geht sie in die ideale über.



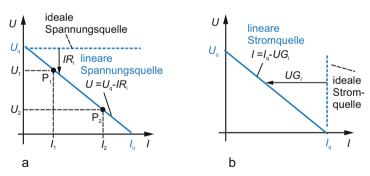


Abb. 2.2.4. Lineare Spannungs- und Stromquellen mit konstantem Innenwiderstand und ihre Ersatzschaltungen. (a) Lineare Spannungsquelle. (b) Lineare Stromquelle, beide Formen sind gleichwertig ineinander überführbar

Die Ersatzschaltung "lineare Spannungsquelle" mit Quellenspannung  $U_{\rm q}$  und Innenwiderstand  $R_{\rm i}$  beschreibt das Verhalten des linearen aktiven Zweipols bezüglich seines Verhaltens an den Klemmen AB eindeutig und unabhängig von inneren physikalischen Vorgängen.

Abb. 2.2.4 bestätigt das Erzeugerpfeilsystem als natürliche Strom-Spannungszuordnung an den Klemmen AB aus der Stromflussrichtung, die sich im Verbraucherwiderstand fortsetzt.

2. die lineare Stromguelle mit dem Klemmenstrom

$$I = I_{\rm q} - I_{\rm i}(U) = I_{\rm q} - G_{\rm i}U.$$
 Strom-Spannungsbeziehung aktiver Zweipol, EPS (2.2.5)

Die I, U-Kennlinie beginnt beim Quellenstrom  $I_{\rm q}$  für U=0, der Strom sinkt mit wachsender Klemmenspannung. Im Leerlauf (I=0) fließt der gesamte Quellenstrom durch den Innenleitwert  $G_{\rm i}$  und erzeugt die Leerlaufspannung

$$U|_{I=0} = U_{\rm l} = \frac{I_{\rm q}}{G_{\rm i}}.$$
 Leerlaufspannung (2.2.6)

Die reale Stromquelle entspricht der idealen Stromquelle um so besser, je kleiner ihr Innenleitwert  $G_i$  ist. Im Grenzfall  $G_i = 0$  geht sie in die ideale Quelle über.

Die Ersatzschaltung "lineare Stromquelle" mit Quellenstrom  $I_{\rm q}$  und Innenleitwert  $G_{\rm i}$  beschreibt das Verhalten des linearen Zweipols bezüglich seines Verhaltens an den Klemmen AB eindeutig.

Kennliniengleichungen Die Kennliniengleichung U(I) der Spannungsquelle ist eine fallende Gerade (y=mx+n), die die U-Achse bei der Quellenoder Leerlaufspannung  $U_1$ ,  $=U_q$  schneidet und mit der Steigung  $\tan\beta=U/I=-R_i$  fällt (Abb. 2.2.4a). Sie kreuzt die I-Achse (U=0) beim Kurzschlussstrom  $I(U=0)=I_k=I_q$ . Die Stromquelle hat die gleiche Gerade (durch Umstellen von Gl. (2.2.3) und Division durch  $R_i$  ersichtlich). Kennt man zwei Punkte  $P_1(U_1,I_1)$  und  $P_2(U_2,I_2)$  der Kennliniengleichung (Abb. 2.2.4a), so kann damit der Innenwiderstand der Quelle bestimmt werden:  $R_i=-(U_2-U_1)/(I_2-I_1)$ .

Weiter gilt: deaktivierte Quellen (Spannungsquelle mit  $U_{\rm q}=0$  bzw. Stromquelle mit  $I_{\rm q}=0$ ) verhalten sich wie ein ohmscher Widerstand  $R_{\rm i}$  (bzw.  $G_{\rm i}$ ). Als Schlussfolgerung lassen sich ideale Quellen durch Zuschalten eines Innenwiderstandes jederzeit in reale Quellen verwandeln. Zur wirklichkeitsnahen Modellierung werden daher

- niederohmige Quellen besser als Spannungsquellenersatzschaltung und
- hochohmige Quellen als Stromquellenersatzschaltung dargestellt.

Deshalb heißt die erste Gruppe auch Konstantspannungsquelle (Abb. 2.2.1), die letzte Konstantstromquelle. Sie liefern annähernd konstante Spannung bzw. konstanten Strom über einen bestimmten Bereich. Erfüllen Spannungsquellen wie Batterien, Solarzellen u. a. diese Forderungen einigermaßen, so erreichen aktive Zweipole auf Basis elektronischer Schaltungen, bekannt als elektronisch stabilisierte Netzgeräte, diese Forderungen fast perfekt.

Gleichwertigkeit von Quellen Die Kennlinien der Spannungsquelle mit Innenwiderstand und Stromquelle mit Innenleitwert sind proportional zueinander. Gleichheit (Äquivalenz) liegt vor, wenn beide Ersatzschaltungen bei gleichem Lastelement gleiche Strom-Spannungswerte ergeben. Weil beide Kennlinien durch Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom bestimmt sind, erfordert die Gleichheit

$$U_{\rm l}|_{\rm Spannung squelle} = U_{\rm q} = U_{\rm l}|_{\rm Strom quelle} = \frac{I_{\rm q}}{G_{\rm i}}$$
 (2.2.7)

und

$$I_{\mathbf{k}}|_{\text{Spannungsquelle}} = \frac{U_{\mathbf{q}}}{R_{\mathbf{i}}} = I_{\mathbf{k}}|_{\text{Stromquelle}} = I_{\mathbf{q}}.$$

Beide Quellen sind zueinander äquivalent, wenn gilt (Abb. 2.2.4)

$$U_{\rm q} = \frac{I_{\rm q}}{G_{\rm i}}, \quad I_{\rm q} = \frac{U_{\rm q}}{R_{\rm i}}, \quad R_{\rm i} = \frac{1}{G_{\rm i}}. \qquad \qquad \ddot{\rm A} {\rm quivalenz bedingung} \ (2.2.8)$$

Eine lineare Spannungsquelle mit Innenwiderstand ist überführbar in eine lineare Stromquelle mit Innenleitwert und umgekehrt.

Zweipole mit gleichem Klemmenverhalten (Spannung, Strom) heißen gleichwertig oder äquivalent. Sie können dabei im Netzwerkaufbau (Zahl der Quellen, Art, Schaltung, Grundbauelemente) sehr unterschiedlich sein.

Dieser auf Helmholtz<sup>5</sup>, Mayer, Thévenin und Norton<sup>6</sup> zurückgehende Satz erlaubt beträchtliche Vereinfachungen in der Netzwerkanalyse.

Zusammengefasst: Jeder aktive (lineare) Zweipol wird gleichwertig durch eine Spannungs- oder Stromquellenersatzschaltung beschrieben. Von seinen

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Hermann von Helmholtz, deutscher Physiker und Physiologe, 1821–1894 (Professor für Physiologie in Königsberg, Bonn, Heidelberg, 1870 für Physik in Berlin).

 $<sup>^6{\</sup>rm Der}$  Satz wurde unabhängig von Helmholtz und Mayer und im englischen Schrifttum von Thévenin und Norton angegeben, s. Kap. 2.4.4.

Kenngrößen Quellenspannung  $U_q$ , Quellenstrom  $I_q$  und Innenwiderstand  $R_i$  müssen zwei bekannt sein, die dritte folgt aus

$$R_{\rm i} = \frac{U_{
m q}}{I_{
m q}} = \frac{U_{
m l}}{I_{
m k}} = \frac{U_{
m Leerlauf}}{I_{
m Kurzschluss}}.$$

Beispiel 2.2.1 Aktiver Zweipol, Gleichwertigkeit Für die Schaltung in Abb. 2.2.5a wird die Gleichwertigkeit des aktiven Zweipols untersucht.

Ausgang ist die Gleichwertigkeit der Spannungs- und Stromquelle Abb. 2.2.4. Wir ermitteln Leerlaufspannung  $U_1$ , Kurzschlussstrom  $I_k$  und Innenwiderstand  $R_i$ .

Für die Leerlaufspannung  $U_1$  ergibt sich wegen I=0 (kein Spannungsabfall an  $R_3$ ) aus dem Maschensatz  $U_{\rm q}=I_{\rm q}(R_1+R_2)$  und dem Spannungsabfall  $U_1=I_{\rm q}R_2$  durch Eliminieren des Stromes

$$U_1 = \frac{R_2 U_q}{R_1 + R_2} = \frac{5 \Omega \cdot 10 \text{ V}}{(5+5) \Omega} = 5 \text{ V}.$$

Der Kurzschlussstrom ist der Strom I durch die Klemmen AB für U=0. Er berechnet sich als Teil des Stromes  $I_{\rm q}$  durch die Quelle entsprechend der Stromverzweigung am Knoten K. Dort gilt  $R_3I_{\rm k}=R_2(I_{\rm q}-I_{\rm k})$  mit dem Quellenstrom  $I_{\rm q}=U_{\rm q}/(R_1+R_2\parallel R_3)$ . Daraus folgt

$$I_{\rm k} = \frac{R_2 I_{\rm q}}{R_2 + R_3} = \frac{U_{\rm q} R_2}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{5\,\Omega \cdot 10\,{\rm V}}{5\,\Omega (5 + 10)\,\Omega + 10 \cdot 5\,\Omega^2} = 0, 4\,{\rm A}.$$

Der Innenwiderstand wird bei Ersatz der Quellenspannung  $U_q$  durch Kurzschluss von den Klemmen AB aus in die Schaltungen "hineingesehen":  $R_i = R_3 + R_1 || R_2 =$ 

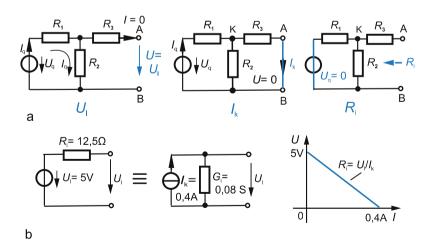


Abb. 2.2.5. Gleichwertigkeit der linearen Spannungs- und Stromquellenersatzschaltungen.(a) Ersatzgrößenbestimmung.(b) Beispielanordnung mit Kennlinie

 $(10+2,5)\,\Omega=12,5\,\Omega$ . Er folgt auch aus  $R_{\rm i}=U_{\rm i}/I_{\rm k}=5\,{\rm V}/0,4\,{\rm A}=12,5\,\Omega$ . In der Abbildung sind die Ersatzschaltungen und ihre Kennlinien eingetragen.

Diskussion Wir diskutieren, ob es nicht trotz der Gleichwertigkeit der Strom- und Spannungsquellenersatzschaltung Anschauungsgründe gibt, die eine oder andere Form zu bevorzugen. Dazu mögen drei Beispiele dienen:

- Eine Batterie wird wegen ihres kleinen Innenwiderstandes und der physikalischen Eigenschaft, "eine Spannung zu liefern" besser durch die Spannungsquellenersatzschaltung beschrieben.
- 2. Eine Steckdose (Gleichstromnetz) besitze eine Leerlaufspannung  $U_{\rm q}=230\,{\rm V}.$  Es soll beim Laststrom  $I=10\,{\rm A}$  (d. h. einem Lastwiderstand  $R_{\rm a}=23\,\Omega)$  eine Spannungsänderung von 1% der "Steckdosenspannung U" auftreten ( $U=0,99U_{\rm q}$ ). Damit ergibt sich der Innenwiderstand des Netzes aus  $U=0,99U_{\rm q}=U_{\rm q}-IR_{\rm i}$  zu:

$$R_{\rm i} = \frac{U_{\rm q} - 0,99U_{\rm q}}{I} = \frac{0,01U_{\rm q}}{I} = 0,23 \ \Omega.$$

Auch hier ist die Spannungsquellenersatzschaltung wegen des geringen Innenwiderstandes und der Eigenschaft, eine "Spannung zu liefern", zweckmäßig. Bei Modellierung durch eine Stromquellenersatzschaltung müsste sie einen Kurzschlussstrom  $I_{\rm k} = I_{\rm q} = U_{\rm q}/R_{\rm i} = 230~{\rm V}/0, 23~\Omega = 1000~{\rm A}$  (!) besitzen, wobei der Innenleitwert  $G_{\rm i} = 1/R_{\rm i} = 1/0, 23~\Omega = 4, 35~{\rm S}$  der Quelle parallel liegt. Das ist unanschaulich. Außerdem würde sich bei jeder Innenwiderstandsänderung des Netzes (z. B. Zuschaltung weiterer Verbraucher)  $R_{\rm i}$  und damit  $I_{\rm k}$  stark ändern.

3. Ein Transistor verstärke eine Wechselspannung. Wir stellen seinen Ausgang später als Zweipol (Wechselspannungsquelle) dar. Solche Anordnungen haben Kurzschlussströme von einigen mA bei relativ großen Innenwiderständen  $R_{\rm i}$  (Größenordnung  $50~{\rm k}\Omega$ ). In der Spannungsquellenersatzschaltung gehört dazu die Leerlaufspannung  $U_{\rm q} = I_{\rm q}R_{\rm i} = 10~{\rm mA}\cdot 50~{\rm k}\Omega = 500~{\rm V}$  (!). Diese Größenordnung ist für die Transistortechnik unüblich, außerdem kann sie wegen der geringen Betriebsspannung von einigen Volt  $(2\dots 10)$  technisch so nicht auftreten. Deshalb werden hier vorwiegend Stromquellenersatzschaltungen benutzt.

Beispiel 2.2.2 Gleichwertigkeit von linearen aktiven Zweipolen Abb. 2.2.6 zeigt gleichwertige Schaltungen. Obwohl sie gleiche Zweipolkenngrößen besitzen, weicht ihr Aufbau voneinander ab. Teilweise kommt es zum Leistungsverbrauch, ohne dass Leistung an den Verbraucher abgegeben wird! Während die Spannungsquellenersatzschaltung keine Leistung verbraucht (Leerlauf!), setzt die Stromquellenersatzschaltung beständig Leistung zur Erzeugung der "Leerlaufspannung" um. Das Beispiel veranschaulicht die Modellhaftigkeit von Ersatzschaltungen sehr gut.

In Abb. 2.2.1 wurde dargestellt, dass eine Spannungsquelle von einem bestimmten Strom an eine "Strombegrenzung"  $I_{\rm B}$  und eine Stromquelle von einer bestimmten Spannung an eine "Spannungsbegrenzung"  $U_{\rm B}$  haben kann: es liegen begrenzt gültige Kennlinien vor. Im einfachsten Fall wird der Verlauf durch Geraden angenähert. Man sieht sofort den Unterschied: Während die ideale Quelle eine beliebige Leistung bereitstellt (eine ihrer beiden Größen kann immer über alle Grenzen wachsen), wird jetzt die verfügbare Leistung begrenzt auf  $P_{\rm el} = U_{\rm q}I_{\rm B}$ . Genau dieses Merk-

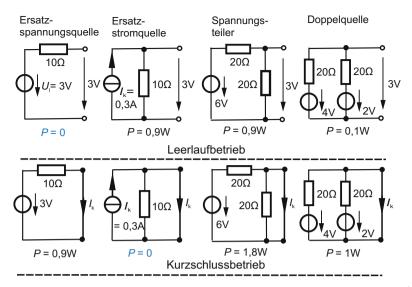


Abb. 2.2.6. Elektrisch gleichwertige Schaltungen eines linearen aktiven Zweipols ( $U_1=3\,\mathrm{V},\ I_\mathrm{k}=0,3\,\mathrm{A},\ R_\mathrm{i}=10\,\Omega)$  mit Angabe der intern umgesetzten Verlustleistung P

mal haben Konstantspannungs- und Konstantstromquellen. Meist kann bei handelsüblichen Konstantspannungsquellen eine Strombegrenzung eingestellt werden. Vom I,U-Verhalten her gesehen liegt ein *nichtlinearer aktiver Zweipol* vor. Diese Knickkennlinie lässt sich durch geeignete nichtlineare Schaltelemente gut annähern.

Zusammenschaltung von Quellen Oft benötigt man Spannungen oder Ströme, die eine Quelle überfordern. Beispiele sind die Reihenschaltung von Batterien zur Spannungserhöhung oder ihre Parallelschaltung zur Erhöhung des verfügbaren Stromes. Andererseits zeigen gleichwertige Quellen mit verschiedenem Aufbau, dass die Zusammenschaltung innere Ströme und Verlustleistungen verursachen kann, die nur die Quellen belasten.

*Unkritisch* sind auch bei technischen Quellen die Reihenschaltung von Spannungsquellen und die Parallelschaltung von Stromquellen. Problematischer ist die Parallelschaltung von Spannungsquellen und die Reihenschaltung von Stromquellen bei unterschiedlichen Einzelquellen. Im ersten Fall wird eine höhere Stromverfügbarkeit angestrebt, im letzteren größere Gesamtspannung.

Wir betrachten zunächst Spannungsquellen. So ergibt ihre Reihenschaltung (Abb. 2.2.7a) gemäß Maschensatz

$$U_{\text{qers}} = \sum_{\nu=1}^{n} U_{\text{q}\nu}, \quad R_{\text{ers}} = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu}.$$
 (2.2.9)

Die Spannungsvorzeichen sind nach dem gewählten Umlaufsinn anzusetzen.

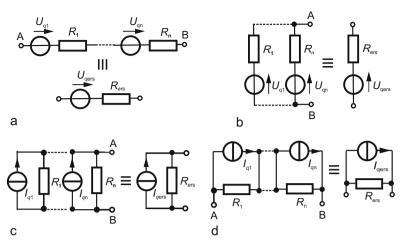


Abb. 2.2.7. Zusammenschaltung linearer Spannungs- und Stromquellen. (a) Reihenschaltung und (b) Parallelschaltung von Spannungsquellen und gleichwertige Ersatzspannungsquelle. (c) Parallelschaltung und (d) Reihenschaltung von Stromquellen und gleichwertige Ersatzstromquelle

Zur Parallelschaltung von Spannungsquellen (Abb. 2.2.7b) werden zunächst die Quellenspannung zu null gesetzt und der Ersatzwiderstand von den Klemmen AB her berechnet. Alle Widerstände liegen einander parallel und der reziproke Ersatzwiderstand lautet (Verfahren s. Kap. 2.3.2):

$$\frac{1}{R_{\text{ers}}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R_{\nu}} = G_{\text{ers}} = \sum_{\nu=1}^{n} G_{\nu}.$$
 (2.2.10)

Die Ersatzspannung  $U_{\rm qers}$  wird über den resultierenden Kurzschlussstrom  $I_{\rm kers}=I_{\rm qers}$  ermittelt. Weil jede Quelle einzeln mit ihrem Kurzschlussstrom  $I_{\rm k\nu}=U_{\rm q\nu}G_{\nu}$  beiträgt, ergibt die Summation aller Einzelkurzschlussströme nach dem Knotensatz  $I_{\rm qers}=I_{\rm ABk}=\sum\limits_{\nu=1}^n U_{\rm q\nu}G_{\rm i\nu}$ . Die Ersatzleerlaufspannung entsteht dadurch, dass jeder Kurzschlussstrom am zugehörigen Innenleitwert einen Spannungsabfall erzeugt und die Summe aller Spannungsabfälle die gesuchte Leerlaufspannung bildet

$$U_{\text{qers}} = I_{\text{qers}} R_{\text{ers}} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} I_{k\nu}}{\sum_{\nu=1}^{n} G_{i\nu}} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{U_{\text{q}\nu}}{R_{i\nu}}}{\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R_{i\nu}}}.$$
 (2.2.11)

n parallel geschaltete Spannungsquellen mit den Einzelgrößen  $U_{{\rm q}\nu}$  ( $\nu=1\ldots n$ ) und  $R_{{\rm i}\nu}$  ergeben eine Ersatzspannungsquelle mit  $U_{{\rm qers}}$  und dem Innenwiderstand  $R_{{\rm ers}}$  nach Gl. (2.2.11).

Bei gleichen Spannungsquellen bleibt die Gesamtquellenspannung erhalten und der Kurzschlussstrom vergrößert sich auf das n-fache der Einzelquelle. In allen anderen Fällen entstehen innere (unerwünschte) Ausgleichsströme.

Mit den Dualitätsregeln (s. Kap. 4.6) lässt sich das Ergebnis für die Reihenschaltung technischer Stromquellen übernehmen (s. Abb. 2.2.7c, d):

$$I_{\text{qers}} = U_{\text{qers}} G_{\text{ers}} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} U_{\text{q}\nu}}{\sum_{\nu=1}^{n} R_{\text{i}\nu}} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} R_{\text{i}\nu} I_{\text{q}\nu}}{\sum_{\nu=1}^{n} R_{\text{i}\nu}}$$
$$\frac{1}{G_{\text{ers}}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{G_{\text{i}\nu}} = R_{\text{ers}} = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\text{i}\nu}.$$

Das Verhalten erlaubt generelle Schlüsse:

- Bei unterschiedlichen Einzelquellen (Spannung, Innenwiderstand, Strom) kommt es zu beständigem Leistungsumsatz in den Quellen unabhängig davon, ob von außen Leistung entnommen wird,
- Ein Teil der Quellen kann als Verbraucher wirken und die von anderen Quellen gelieferte Energie aufnehmen (Beispiel: Laden einer Batterie),
- Nur bei identischen Quellen geben alle die gleiche Leistung an den Verbraucher ab.

Die Zusammenfassung von parallel- oder reihengeschalteten Quellen eignet sich umgekehrt zum "Verschieben" von Quellen aus einem Netzwerkzweig in benachbarte Zweige über Knoten hinweg oder zum "Teilen" von Stromquellen über weitere Knoten. Dieses Problem wird in Kap. 4.2 behandelt.

Beispiel 2.2.3 Parallelschaltung zweier Autobatterien Zwei Batterien ( $U_{\rm q1}=12,2\,{\rm V}$ ,  $R_{\rm i1}=10\,{\rm m}\Omega,\,U_{\rm q2}=12\,{\rm V},\,R_{\rm i2}=30\,{\rm m}\Omega$ , Innenwiderstände konstant angenommen) sind parallel geschaltet. Welcher Strom fließt bei Leerlauf, welcher bei einem äußeren Laststrom  $I_{\rm L}=20\,{\rm A}$ ?

Die Lösung kann grundsätzlich mit Gl. (2.2.11) erfolgen, in diesem Fall bietet sich aber die Direktberechnung an (Skizze der Schaltung !). Bei leerlaufenden Klemmen AB der Parallelschaltung fließt im Stromkreis der parallel geschalteten Batterien der Strom  $I=(U_{\rm q1}-U_{\rm q2})/(R_{\rm i1}+R_{\rm i2})=0,2\,{\rm V}/40\,{\rm m}\Omega=5\,{\rm A}$  (ohne nach außen Energie abzugeben!). Die Leerlaufspannung beträgt  $U_{\rm AB}=U_{\rm q2}+IR_{\rm i2}=12\,{\rm V}+5\,{\rm A}\cdot30\,{\rm m}\Omega=12,15\,{\rm V}.$ 

Beim Laststrom  $I_{\rm L}=20\,\rm A$  stellt sich über der Last die Spannung  $U_{\rm L}=U_{\rm AB}-I_{\rm L}(R_{\rm i1}\parallel R_{\rm i2})=12,15\,\rm V-20\,\rm A\cdot7,5\,m\Omega=12,00\,\rm V$  ein. Der Laststrom  $I_{\rm L}=I_1+I_2$  setzt sich aus den beiden Strömen  $I_1,\ I_2$  durch die Batterien zusammen. Es gilt dann  $U_{\rm L}=U_{\rm AB}-I_{\rm L}(R_{\rm i1}\parallel R_{\rm i2})=U_{\rm q2}-I_2R_{\rm i2}$  (Schaltskizze!). Daraus folgt  $-I_2=(U_{\rm q2}-U_{\rm AB}+I_{\rm L}(R_{\rm i1}\parallel R_{\rm i2}))=(12\,\rm V-12,15\,\rm V+20\,\rm A\cdot7,5\,m\Omega)=0\,\rm A.$  Deshalb fließt

nach dem Knotensatz der Strom  $I_1 = I_L - I_2 = (20 + 0) A = 20 A$  durch Batterie 1, d. h. Batterie 2 arbeitet im Leerlauf  $(I_2 = 0)$ !

Die gleiche Problematik betrifft die Parallelschaltung zweier 1,5 V Trockenelemente (sog. R 20-Zellen mit  $U_{\rm q}\approx 1,5$  V und  $R_{\rm i}\approx 1\,\Omega$ , wie sie in transportablen Geräten eingesetzt werden). Unterscheiden sich beide Spannung um 10%, so fließt beständig ein Kreisstrom von 75 mA (!). Ein Element gilt als entladen, wenn seine Leerlaufspannung auf 0,9 V gefallen ist. Bei einer "Normalentladung" durch einen Verbraucherwiderstand  $R=10\,\Omega$  ist die Entladegrenze nach rd. 36 h erreicht. Pro Element ist damit etwa die Ladung  $Q=36\,\mathrm{h}\cdot 1,5\,\mathrm{V}/10\,\Omega=5,4\,\mathrm{Ah}$  gespeichert, in beiden also die doppelte Menge. Durch den Kreisstrom  $I=75\,\mathrm{mA}$  wären beide Batterien nach rd.  $5,4\,\mathrm{Ah}/75\,\mathrm{mA}=72\,\mathrm{h}$  entladen, ohne Energie an einen äußeren Verbraucher abzugeben!

Die Beispiele zeigen, dass die Parallelschaltung schon bei kleinen Batterieunterschieden zu beträchtlichem Stromfluss führt. Man sollte sie deshalb grundsätzlich vermeiden. Deutlich wird außerdem, dass Ersatzschaltungen nur das Klemmenverhalten modellieren, denn in der resultierenden Spannungsquellenersatzschaltung tritt der Entladevorgang nicht auf.

# 2.3 Widerstand, resistiver Zweipol

Der "ohmsche Widerstand" dürfte wohl einer der bekanntesten Begriffe der Elektrotechnik sein:

- Materialien haben einen "Widerstand" (ideale Leiter gibt es nicht).
- Ohmsche Widerstände sind das wichtigste Bauelement der Elektrotechnik. Ihr Wertebereich umfasst etwa  $10^{-3}\dots 10^{12}\,\Omega$ .
- Auch ungewollt treten Widerstände etwa in Verbindungsleitungen, Starkstromleitungen, Elektrogeräten auf und verursachen Wärmeverluste.
- Physikalisch beruht der Widerstandsbegriff auf der Leitfähigkeit von Stoffen aller Art.

## **②** 2.3.1 Lineare resistive Zweipole

Widerstandsbegriff Fließt Strom durch einen linienhaften Leiter mit überall gleichem Querschnitt (als Folge einer anliegenden Feldstärke), so bewegen sich die Ladungsträger auf parallelen Bahnen, den  $Str\"{o}mungslinien$  und man spricht von einem homogenen  $Str\"{o}mungsfeld$ . Diesem Stromfluss setzt jeder Leiter einen "elektrischen Widerstand" entgegen und deshalb besteht zwischen der Antriebsursache der Bewegung, dem elektrischen Feld, und der Str\"{o}mung bzw. dem Strom I als Wirkung ein Zusammenhang über die Leitfähigkeit. Zwischen zwei Querschnitten  $A_{\rm A}$  und  $A_{\rm B}$  (mit zugeordneten

Potenzialflächen)  $\varphi_A$  und  $\varphi_B$  fällt dann die Spannung  $U_{AB}$  ab und es gilt für die Eigenschaft "Widerstand" dieser Leiterstrecke<sup>7</sup>

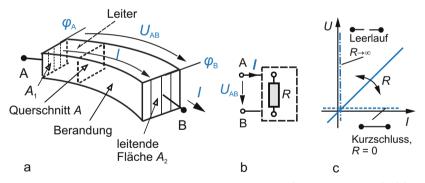
$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{U_{\mathrm{AB}}}{I}, \quad [R] = \frac{[U]}{[I]} = 1 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} = 1 \,\Omega. \quad \begin{array}{l} \mathrm{Widerstand} \ R \\ \mathrm{Definitionsgleichung} \end{array} \quad (2.3.1)$$

Der Quotient aus dem Spannungsabfall  $U_{\rm AB}$  zwischen zwei Potenzialflächen A ( $\varphi_{\rm A}={\rm const}$ ) und B ( $\varphi_{\rm B}={\rm const}$ ) und dem Strom I durch die zugehörigen Querschnitte  $A_1$ ,  $A_2$  eines Strömungsfeldes heißt Widerstand  $R_{\rm AB}$  (Abb. 2.3.1a) des Volumens, in dem sich das Strömungsfeld ausbildet.

Der Widerstandsbegriff ersetzt ein volumenhaftes Strömungsfeld durch eine Beziehung zwischen dem Strom durch seinen Querschnitt und der Spannung zwischen den beiden begrenzenden Potenzialflächen. So treten Einzelheiten des Strömungsfeldes zurück und Gl. (2.3.1) wird in der Schreibweise

$$R_{\rm AB} = \frac{U_{\rm AB}}{I} = {\rm const}$$
 Ohmsches Gesetz (2.3.2)

als *ohmsches Gesetz*<sup>8</sup> bezeichnet. Dann ist der Widerstand unabhängig von Strom und Spannung ein *linearer Widerstand*. Diese Bedingung erfüllen viele Materialien, wie Metalle bei konstanter Temperatur, homogene Halbleitergebiete, z. T. auch Flüssigkeiten bei konstanter Temperatur.



**Abb. 2.3.1.** Widerstandsdefinition, linearer Widerstand (resistiver Zweipol). (a) Einführung des Widerstandsbegriffes für ein leitendes räumliches Gebilde (Strömungsfeld) mit zwei leitenden Potenzialflächen. (b) Gleichwertige Beschreibung durch einen passiven Zweipol mit der Eigenschaft Widerstand, Verbraucherzählpfeilrichtung. (c) *U,I*-Kennlinie

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>Dieser Widerstand wird geläufig ohmscher Widerstand genannt, weil der Widerstandsbegriff in der Wechselstromtechnik noch erweitert wird.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Georg Simon Ohm, deutscher Physiker 1799–1854, Professor Polytechnikum Nürnberg, ab 1852 Universität München. Gesetz im Jahre 1826 formuliert.

Das ohmsche Gesetz definiert das Netzwerkelement Widerstand durch seine U, I-Proportionalität.

Anschaulich beschreibt der Begriff den "Widerstand", den ein Leiter der Bewegung freier Ladungsträger bei Stromfluss entgegensetzt. Dazu ist Energieaufwand ( $U_{AB}$ ) erforderlich. Die eingespeiste Energie wird in Wärme umgesetzt.

Ein Zweipol ist resistiv, wenn er keine Strom- und Spannungsquellen enthält, sein U, I-Verhalten nicht durch die Speicherung elektrischer und magnetischer Feldenergie beeinflusst wird und die Kennlinie durch den Nullpunkt geht.

Ein resistiver Zweipol heißt linearer oder ohmscher Widerstand, wenn er das ohmsche Gesetz erfüllt, sonst nichtlinearer Widerstand (Kap. 2.5).

Physikalisch ist der resistive Zweipol stets Umsatzort zugeführter elektrischer Energie in Wärme (irreversibel): Widerstand wirkt als Verbraucher elektrischer Energie. Deshalb wird er als passives Bauelement bezeichnet.

Bei Verbraucherzählpfeilrichtung gilt für die umgesetzte elektrische (Verlust)-leistung  ${\cal P}$ 

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R} > 0. (2.3.3)$$

Der Begriff "Widerstand" wird (leider) im doppelten Sinn verwendet:

- 1. Er kennzeichnet das Bauelement "Widerstand" als Objekt (engl. resistor). Einzelne Objekte (Widerstände) unterscheiden sich nach der Bau- und Konstruktionsform (s. Kap. 2.3.6), z. B. Massewiderstand. Das Bauelement Widerstand wird in elektrischen Netzwerken und Schaltplänen durch ein Schaltsymbol gekennzeichnet (Abb. 2.3.2). Im Gegensatz zu extern einstellbaren Widerständen tritt die Widerstandsänderung bei den inhärent veränderbaren Elementen durch Vorgänge im Widerstand selbst auf.
- 2. Er bezieht sich auf die *Eigenschaft* des Objektes (engl. *resistance*), beschreibt also sein Strom-Spannungs-Verhalten. Die Eigenschaft "Widerstand" hängt u. a. vom Material (Leitfähigkeit  $\kappa$ ) und der Geometrie ab und kann durch eine Bemessungsgleichung, einen Strom-Spannungs-Zusammenhang oder ein Schaltzeichen ausgedrückt werden.

**Kennlinie** Der lineare Widerstand hat nach Gl. (2.3.2) eine U, I-Kennlinie durch den Nullpunkt (Abb. 2.3.1c). Grenzfälle sind

- Kurzschluss R=0 (U=0) als Kennzeichen eines idealen Leiters und
- Leerlauf  $R \to \infty$  für eine Leiterunterbrechung oder den idealen Isolator.

Das Verbraucherpfeilsystem bietet sich zwar beim Widerstand an, ist aber nicht zwingend. Im Erzeugerpfeilsystem würde seine Kennlinie lauten U = -IR, dem

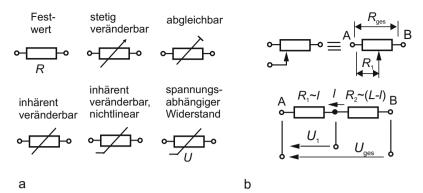


Abb. 2.3.2. Schaltzeichen von Widerständen nach DIN EN 60617-4. (a) Schaltzeichen für feste und veränderbare Widerstände: veränderbar (z. B. durch Drehknopf), einstellbar (mit Schraubenzieher), stellbar (Potentiometer) und parameterabhängig (z. B. Temperatur, Magnetfeld). (b) Ersatzschaltung eines stellbaren Widerstandes

entspräche nach Kap. 1.6.3 eine Energieabgabe an das System (formaler Begriff: negativer Widerstand).

Widerstand des homogenen Strömungsfeldes. Bemessungsgleichung Ein wichtiger Sonderfall ist der *linienhafte Leiter* (Länge l, konstanter Querschnitt A Abb. 2.3.3a) mit homogenen Strömungslinien. Dafür kann eine Bemessungsgleichung R = f (Geometrie, Materialeigenschaften) entwickelt werden<sup>9</sup>:

$$R = \varrho \frac{l}{A} = \frac{l}{\kappa A}$$
. Widerstandsbemessungsgleichung (2.3.4) eines linienhaften Leiters

Der Widerstand R eines linienhaften Leiters ist proportional seiner Länge l, dem spezifischen Widerstand  $\varrho$  und umgekehrt proportional dem Querschnitt A.

Der spezifische Widerstand  $\varrho$ 

$$\varrho = \frac{1}{\kappa}, \quad [\varrho] = 1 \ \Omega \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} \quad \mathrm{oder} \ 1 \ \Omega \, \mathrm{cm}, \quad [\kappa] = 1 \, \mathrm{S} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{mm}^2} \quad \mathrm{oder} \ 1 \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{cm}}$$

bzw. die spezifische Leitfähigkeit  $\kappa$  (als Reziprokwert des spezifischen Widerstandes, oft nur Leitfähigkeit genannt) ist materialbestimmt (Tab. 2.2). Metalle haben eine sehr hohe spezifische Leitfähigkeit (Silber und Gold am höchsten, aus Preisgründen nur als Kontaktwerkstoff und zur Oberflächenveredelung verwendet). Standardwerkstoffe der Elektrotechnik sind Kupferund Aluminiumleiter.

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup>Genauere Begründung in Bd. 2.

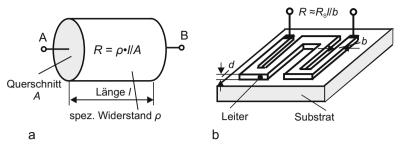


Abb. 2.3.3. Linienhafter Leiter. (a) Homogenes Strömungsfeld (homogene Strömungslinien, homogene Leitfähigkeit). (b) Sonderform eines linienhaften Leiters (mäanderförmig angeordnet) als Schichtwiderstand auf einem isolierenden Substrat

**Tabelle 2.2.** Spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit und Temperaturkoeffizient wichtiger Leitermaterialien

Werkstoff	Spezifischer Widerstand	Leit- fähigkeit	TK	TK
	$ ho \ \left[\Omega \cdot rac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{m}} ight]$	$\frac{\kappa}{\left[S \cdot \frac{m}{mm^2}\right]}$	$\alpha_{20}$ $\left[10^{-3}/\mathrm{K}\right]$	$\beta_{20}$ $\left[10^{-6}/\mathrm{K}^2\right]$
Aluminium	0,0282	35,5	4,1	1,3
Chromnickel	1,1	0,91	0,1	$\approx 0$
Eisen	$0,\!12$	8,33	$4,5 \dots 5,5$	6
Gold	0,0222	45	3,9	3
Konstantan	0,5	2	-0,002	$\approx$ 0
Kupfer	0,0178	56	3.93	0,6
Messing	0,08	12	1,8	$\approx$ 0
Silber	0,0165	60,5	3,9	0,7
Tantal	0,13	7,7	4	0,15
Cermet (Cr/SiO)	$10^0 \dots 10^8$	$10^0 \dots 10^{-8}$	-10 1	
Grafit	40	0,025	-0,3	

**Einheit, Größenordnung** Die Einheit des Widerstandes wurde mit dem Namen Ohm (Symbol  $\Omega$ ) belegt. Häufig benutzte Vorsätze sind  $1\,\mathrm{m}\Omega=1$ Milliohm =  $10^{-3}\,\Omega$ ,  $1\,\mathrm{k}\Omega=1$ Kiloohm =  $10^{3}\,\Omega$ ,  $1\,\mathrm{m}\Omega=1$ Megaohm =  $10^{6}\,\Omega$ .

## Größenvorstellungen

Cu-Draht $l = 1 \text{m}, d = 0, 15 \text{mm},$	$R \approx 1 \Omega$
Al-Draht $l = 1 \text{ km}, d = 1 \text{ cm} (d = 1 \text{ mm})$	$R \approx 0,36 \Omega \ (36 \Omega)$
Cu-Leiterbahn $l=1\mathrm{cm},b=25\mu\mathrm{m},d=1\mu\mathrm{m},$	$R \approx 7,14\Omega$
menschlicher Körper	$R \approx (0, 3 \dots 3) \mathrm{k}\Omega$
Bauelement Widerstand	$R \approx 0, 1 \Omega \dots 50 M\Omega$
typischer Isolationswiderstand	$R \approx (10^8 \dots 10^{12}) \Omega$

Während die Größenordnung von Widerständen der Elektrotechnik im unteren Bereich (wegen der im Mittel größeren Ströme) liegt, haben elektronische Schaltungen meist Widerstände ab einigen  $10~\Omega$  bis in den  $M\Omega$  Bereich.

Die Einheit 1 $\Omega$  wurde lange Zeit über einen bestimmten Leiter (Material, Abmessungen) als Widerstandsnormal definiert. Durch den von K. von Klitzing<sup>10</sup> (1980) entdeckten *Quanten-Hall-Effekt* kann sie heute über Naturkonstanten definiert werden:  $h/q^2 = 25812, 8\Omega$  (Plancksches Wirkungsquantum  $h = 4,13610^{-19} eV \cdot s$ , q Elementarladung).

Materialeinfluss Der spezifische Widerstand von Festkörpern umfasst etwa 25 Zehnerpotenzen. Man kann grob drei Gruppen erkennen:

- Leiterwerkstoffe (Metalle, spezifischer Widerstand  $\approx (10^{-8} \dots 10^{-4}) \Omega \, \text{cm}$ ),
- Halbleiterwerkstoffe zwischen  $(10^{-2} \dots 10^8)\Omega$  cm. Halbleiter und Leiter unterscheiden sich bei tiefen Temperaturen grundlegend: Metalle leiten bei tiefen Temperaturen sehr gut, Halbleiter tendieren zum Nichtleiter.
- Isolatoren ab  $10^{10} \,\Omega$  cm.

In der Elektrotechnik dienen Leiter als Kontakt- und Widerstandswerkstoffe (Metalle, Metalllegierungen, Halbleiter (besonders Grafit)). Manche Werkstoffe zeigen bei Unterschreiten einer kritischen "Sprungtemperatur" einen abrupten Abfall des spezifischen Widerstandes fast auf null: ein Effekt, der als *Supraleitung* bezeichnet wird<sup>11</sup>. Sie verschwindet oberhalb der Sprungtemperatur und bei hohem Magnetfeld. Weil jeder stromdurchflossene Leiter ein inneres Magnetfeld führt, hat jeder Supraleiter eine kritische Stromdichte, die nicht überschritten werden darf. Die Sprungtemperaturen metallischer Supraleiter betragen bis zu 10 K. 1986 wurden keramische Hochtemperatur-Supraleiter (HTS, high temperature superconductors) erfunden mit Sprungtemperaturen bis zu 90 K, so dass flüssiger Stickstoff zur Kühlung ausreicht.

Die Anwendungserwartungen an Supraleiter sind hoch: Einsatz in der Energietechnik, als Energiespeicher, Magnete für extreme Magnetfelder, Anwendung in der Kernspinresonanz (Kernspintomografen) u. a. m.

Leitwert Der Reziprokwert des Widerstandes R heißt Leitwert

$$\begin{split} G_{\mathrm{AB}} \; &= \; \frac{I}{U_{\mathrm{AB}}} = \frac{1}{R_{\mathrm{AB}}}, \\ [G] \; &= \; \frac{[I]}{[U]} = 1 \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{V}} = 1 \, \mathrm{S} = 1 \frac{1}{\Omega}. \end{split} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Leitwert}, \\ \mathrm{Definitionsgleichung} \; (2.3.5) \end{split}$$

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>K. von Klitzing, deutscher Physiker. 1943-. Nobelpreis 1985.

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup>H. K. Onnes, holländischer Physiker 1853–1926, Nobelpreis 1913.

Er trägt den eigenen Namen Siemens  $^{12}$   $^{13}$ , (Symbol S). Häufig benutzte Untereinheiten sind 1 mS = 1Millisiemens =  $10^{-3}\,\mathrm{S}$ , 1  $\mu\mathrm{S}=1$ Mikrosiemens =  $10^{-6}\,\mathrm{S}$ . Der Leitwert bietet für die Netzwerkanalyse Vorteile durch vereinfachte Schreibweise von Beziehungen. Das beruht auf der *Dualität* (s. Kap. 4.6) von Netzwerkbegriffen: die Rolle von Spannung und Strom beim Widerstand vertauscht sich mit der Rolle von Strom und Spannung beim Leitwert. Der Vorteil zeigt sich bereits bei der Parallelschaltung mehrerer Widerstände.

Beispiel 2.3.1 Flächenwiderstand Der Flächen- oder Schichtwiderstand ist ein zweckmäßiger Widerstandsbegriff für flächenhafte Widerstandsschichten konstanter Dicke d, wie sie in Halbleiterschaltkreisen typisch auftreten. Nach Abb. 2.3.3b gilt

$$R = \frac{\varrho(d) \cdot l}{d \cdot b} = R_{\rm S} \frac{l}{b} \text{ mit } R_{\rm S} = \frac{\varrho(d)}{d}$$
 Schichtwiderstand  $R_{\rm S}$  (2.3.6)

für eine Leiterbahn der Länge l, Breite b und Dicke d. Weil in dünnen Schichten (Schichtdicke einige  $\mu$ m) der spezifische Widerstand  $\varrho(d)$  von der Schichtdicke d abhängt und seine Berechnung schwierig, die Messung von  $R_{\rm S}$  aber sehr leicht möglich ist, hat der Schichtwiderstand Vorteile. Er ist dann gleich dem Widerstand eines Quadrates b=l der Breite b und Länge l. Sein Wert wird oft in  $\Omega/{\rm Fläche}$  angegeben trotz der Einheit Ohm! Typische Werte von  $R_{\rm S}$  betragen für Halbleiterschichten  $10\ldots 500\,\Omega$ .

Mit dem Flächenwiderstand kann der Widerstand einer Widerstandsbahn leicht gekennzeichnet werden. Aus Platzgründen sind "integrierte Widerstände" mäanderförmig ausgeführt (Abb. 2.3.3b). Die Größe eines Widerstandes hängt so nicht allein vom Flächenwiderstand ab, sondern auch seiner Geometrie – dem l/b Verhältnis. Daher beruht die Schaltungsbemessung in integrierten Schaltungen u. a. auf einer Geometrieeinstellung von Widerstandsbahnen.

## 2.3.2 Zusammenschaltungen linearer resistiver Zweipole

Der Widerstandsbegriff Gl. (2.3.1) gilt allgemein. Deshalb lassen sich zusammengeschaltete Einzelwiderstände immer als *Ersatzwiderstand* zusammenfassen. Beispiele sind die Reihen- und Parallelschaltung (Abb. 2.3.4). Merkmal der Reihenschaltung ist der gemeinsame Strom durch alle Elemente und der Parallelschaltung die gemeinsame Spannung an allen Elementen. Bei nichtlinearen Einzelelementen muss die Gesamtgröße (Spannung

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Werner von Siemens, deutscher Techniker, Unternehmer und Erfinder 1816–1892, Förderer der Physiklisch-Technischen Reichsanstalt, Entwurf des Deutschen Patentgesetzes 1876.

 $<sup>^{13}\</sup>mathrm{Im}$ englischen Sprachraum m<br/>ho (Ohm rückwärts). Dann bedeutet  $1\,\mathrm{mS}=1\,\mathrm{mmho}.$ 

oder Strom) mit den jeweiligen Kennlinienzusammenhängen bestimmt werden, was grafisch immer gelingt, analytisch hingegen meist nicht. Für *lineare Widerstände* gelten dagegen allgemeine Regeln: sie wurden bereits stillschweigend in Abb. 2.2.7 benutzt.

Reihenschaltung Bei der Reihenschaltung mehrerer Widerstände addieren sich die Spannungsabfälle nach dem Maschensatz (Abb. 2.3.4a)

$$U_{AB} = \sum_{\nu=1}^{n} U_{\nu} = I \sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu} = I R_{ers}$$
 wegen  $I_1 = I_2 = I_3 = \dots = I_{\nu} = I$ 

mit

$$R_{\rm ers} = \sum_{\nu=1}^{n} R_{\nu}.$$
 Reihenschaltung von (2.3.7a)   
  $n$  Widerständen

Im unverzweigten Stromkreis (Reihenschaltung) besteht der Gesamtwiderstand  $R_{\rm ges}$  aus der Summe der Teilwiderstände.

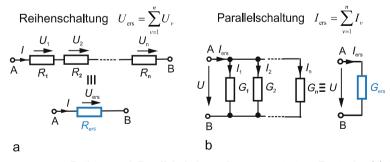
Typische Anwendungen der Reihenschaltung sind Spannungsteiler und Potentiometer (Abb. 2.3.2b).

**Parallelschaltung** Bei Parallelschaltung einzelner Widerstände (Abb. 2.3.4b) addieren sich ihre Teilströme nach dem Knotensatz

$$I = \sum_{\nu=1}^{n} I_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{U_{AB}}{R_{\nu}} = \sum_{\nu=1}^{n} G_{\nu} U_{AB} = U_{AB} G_{ers}$$

mit dem Ersatzleitwert

$$G_{\rm ers} = \sum_{\nu=1}^{n} G_{\nu}$$
 bzw.  $\frac{1}{R_{\rm ers}} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{R_{\nu}}$ . Parallelschaltung von  $n$  linearen Leitwerten (2.3.7b)



**Abb. 2.3.4.** Reihen- und Parallelschaltung linearer resistiver Zweipole. (a) Reihenschaltung. (b) Parallelschaltung

Im verzweigten Stromkreis (Parallelschaltung) besteht der Gesamtleitwert (zwischen zwei Knoten) aus der Summe der Teilleitwerte.

#### Hinweis:

1. Die Parallelschaltung ergibt eine umständlichere Aussage in der Widerstandsdarstellung: Der reziproke Gesamtwiderstand ist gleich der Summe aller reziproken Teilwiderstände (eine entsprechende Aussage gilt für die Reihenschaltung, wenn Teilleitwerte verwendet werden, niemand käme auf diese Idee). Die Parallelschaltung zweier Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  führt auf

$$G_{\text{ers}} = \frac{1}{R_{\text{ers}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2},$$

oder als Kehrwert

$$R_{\text{ers}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1 \parallel R_2.$$

Bei abgekürzter Schreibweise achte man sorgfältig auf die Anwendung von Klammern (Abb. 2.3.5b, c)

$$R_{AB} = R_3 + (R_1 \parallel R_2) = R_3 + R_1 \parallel R_2, \quad R_{AB} \neq (R_3 + R_2) \parallel R_1.$$

Das erste Resultat gilt für die Abbildung.

Drei parallel geschaltete Widerstände  $R_1,\ R_2,\ R_3$  ergeben den Gesamtwiderstand

$$\begin{split} G_{\text{ers}} &= G_1 + G_2 + G_3 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_3(R_1 + R_2) + R_1R_2}{R_1R_2R_3} \text{ bzw.} \\ R_{\text{ers}} &= \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} \\ &= (R_1 \parallel R_2) \parallel R_3 = R_1 \parallel (R_2 \parallel R_3) = R_2 \parallel (R_1 \parallel R_3). \end{split}$$

Der Widerstand wird mit wachsender Zahl paralleler Widerstände unübersichtlicher.

2. Bei Parallelschaltung zweier unterschiedlicher Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  (z. B.  $R_1 \gg R_2$ ), ist die Näherung  $1/(1+\varepsilon) \approx 1-\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ) nützlich

$$R_{\rm ers} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_2}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \approx \left. R_2 \left( 1 - \frac{R_2}{R_1} \right) \right|_{R_1 \gg R_2}.$$

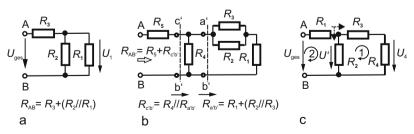


Abb. 2.3.5. Beispiel einer Widerstandszusammenschaltung. (a) - (c) Ausgangsschaltung mit schrittweiser Vereinfachung durch Zusammenfassung von Widerstandsgruppen

Für  $R_2/R_1 = 0,1$  gilt  $R_{\rm ers} \approx 0,9R_2$  und so liegt  $R_{\rm ers}$  um rd. 10% unter  $R_2$ . Bei gemischter Reihen- und Parallelschaltung sind die Regeln der Reihen- und Parallelschaltung der Reihe nach anzuwenden, also

- Widerstände schrittweise zusammenfassen und Schaltung ggf. neu zeichnen,
- bei abgekürzter Schreibweise sorgfältig auf Klammern achten.

Abb. 2.3.5b zeigt ein Beispiel. Beginnend mit dem Widerstand am entferntesten von der Schnittstelle, werden Widerstände schrittweise zu Gruppen bis hin zur Schnittstelle AB zusammengefasst und berechnet.

**Spannungs-, Stromteilerregel** Der Widerstandszusammenschaltung entnimmt man zwei wichtige Regeln (Abb. 2.3.4, 2.3.6a):

1. Spannungsteilerregel Im unverzweigten Stromkreis gilt

$$\frac{\text{Teilspannung}}{\text{Gesamtspannung}}\bigg|_{\substack{\text{univerzweigter} \\ \text{Kreis}}}\bigg| = \frac{\text{Teilwiderstand}}{\text{Gesamtwiderstand}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{U_{\nu}}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_{\nu}}{R_{\text{ges}}}. \quad \text{Spannungsteilerregel}$$

$$(2.3.8)$$

Bei der Reihenschaltung linearer Widerstände (Spannungsteiler) verhalten sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung wie die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand.

Die Regel kann mehrfach angewendet werden, wichtig ist nur jeweils der unverzweigte Stromkreis.

#### Man beachte

 Die Spannungsteilerregel gilt nicht nach Gl. (2.3.8), wenn der Strom in den Teilwiderständen einer Masche verschieden, also verzweigt ist. Dann muss man an der Verzweigungsstelle den Gesamtstrom (= unverzweigter Strom) beachten,

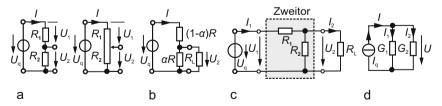


Abb. 2.3.6. Spannungs- und Stromteilerregel. (a) Spannungsteiler mit festem und einstellbarem Teilerverhältnis. (b) Einstellbarer belasteter Spannungsteiler. (c) Interpretation des Spannungsteilers als Zweitor. (d) Stromteiler mit festem Teilerverhältnis

somit die Parallelschaltung durch einen Ersatzwiderstand ersetzen. Beispielsweise galt für Abb. 2.3.5a:

$$\frac{U_1}{U_{\text{ges}}} = \frac{R_1 \parallel R_2}{R_3 + R_1 \parallel R_2} = \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)R_3 + R_1 R_3}.$$

2. Bei Stromverzweigungen kann es vorteilhaft sein, zwischen den Verzweigungsklemmen eine Hilfsspannung (U') anzusetzen. Das Teilerverhältnis  $U_4/U_{\rm ges}$ (Abb. 2.3.5c) wird über die Spannungsteilerregel wegen der Stromverzweigung nicht direkt berechnet, sondern mit der Hilfsspannung U':

M1: 
$$\frac{U_{4:}}{U'} = \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$
, M2:  $\frac{U'}{U_{\text{ges}}} = \frac{R'}{R_1 + R'}$ 

mit  $R' = R_2 \parallel (R_3 + R_4)$ ,  $R_{AB} = R_1 + R'$ . Die Gesamtlösung lautet

$$\frac{U_4}{U_{\rm ges}} = \frac{U_4}{U'} \cdot \frac{U'}{U_{\rm ges}} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \cdot \frac{R'}{R_1 + R'}.$$

Als typisches Beispiel zur Spannungsteilerregel gilt das *Potentiometer* (Abb. 2.3.6b). Sein Widerstand ist (bei homogenem Leiterquerschnitt) proportional der Drahtlänge  $(R \sim l)$ . Deshalb wirkt es als Spannungsteiler mit den beiden Widerständen  $R_1 = \alpha R$  und  $R_2 = (1 - \alpha)R$  ( $\alpha$  Drehwinkel oder Wegstrecke). Die Spannungsteilerregel ergibt (Abb. 2.3.6b)

$$\frac{U_{\rm a}}{U_{\rm e}} = \frac{\alpha R}{\alpha R + (1 - \alpha)R} = \alpha \sim \frac{l}{L}.$$
 (2.3.9a)

Die Ausgangsspannung steigt proportional zum Drehwinkel.

Bei ausgangsseitig angeschlossenem Lastwiderstand  $R_{\rm L}$  wird die Charakteristik nichtlinear. Wählt man als Abzweigverhältnis  $\alpha = R_2/(R_1 + R_2)$  und als Lastfaktor  $p = (R_1 + R_2)/R_{\rm L}$ , so beträgt das Spannungsteilerverhältnis

$$\frac{U_2}{U_q} = \frac{\alpha}{1 + (1 - \alpha)\alpha p}.$$
(2.3.9b)

Linearität bleibt für  $\alpha p \ll 1$  etwa erhalten: der Lastwiderstand  $R_{\rm L}$  muss größer als der Teilergesamtwiderstand sein.

Ein Spannungsteiler kann aus funktioneller Sicht auch als Schaltung mit zwei zusammenwirkenden Klemmenpaaren oder als Zweitor (Abb. 2.3.6c) aufgefasst werden: es gibt das eingangsseitige Klemmenpaar mit den Größen  $I_1$ ,  $U_1$  und das ausgangsseitige mit  $U_2$ ,  $I_2$ . Bei Leerlauf am Ausgang gilt  $I_2 = 0$ . Ein Zweitor verbindet eine Quelle am Eingangsklemmenpaar mit einem Verbraucher am Ausgangsklemmenpaar. Solche Übertragungselemente werden in Kap. 2.6 vertieft.

2. Stromteilerregel Im verzweigten Stromkreis gilt (Abb. 2.3.6d, 2.3.6b)

$$\frac{\text{Teilstrom}}{\text{Gesamtstrom}} \bigg|_{\text{gleiche Spannung}} = \frac{\text{Teilleitwert}}{\text{Gesamtleitwert}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{I_{\nu}}{I_{\text{ges}}} = \frac{G_{\nu}}{G_{\text{ges}}}.$$
Stromteilerregel

Verzweigt ein Stromkreis zwischen zwei Knoten (mit gleicher Spannung an allen Leitwerten), so verhalten sich die Teilströme zum Gesamtstrom wie die zugehörigen Teilleitwerte zum Gesamtleitwert.

Auch die Stromteilerregel kann mehrfach angewendet werden, Voraussetzung ist nur die jeweils über den Elementen erforderliche *gleiche Spannung*.

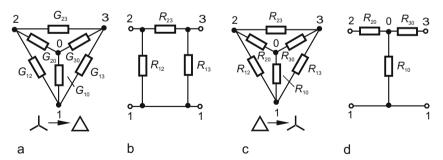
Oft gibt man die Stromteilerregel in abgewandelter Form an, z.B. für die Parallelschaltung zweier Widerstände  $R_1$  und  $R_2$ : Der Teilstrom  $I_2$  verhält sich zum Gesamtstrom  $I_{\text{ges}}$  wie der Widerstand des nicht vom Teilstrom  $(I_2)$  durchflossenen Zweiges  $(R_1)$  zum Ringwiderstand  $(R_1 + R_2)$  der Masche, in der die Stromteilung auftritt

$$\frac{I_2}{I_{\text{ges}}} = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \left(\frac{G_2}{G_1 + G_2}\right). \tag{2.3.11}$$

Im Vergleich dazu ist die Leitwertform (in Klammern) einfacher, denn die Widerstandsform führt bei komplizierteren Schaltungen leicht zu Fehlern.

Spannungs- und Stromteilerregel sowie die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen vereinfachen nicht nur Schaltungsstrukturen. Sie werden oft angewendet für: Erzeugung von Teilspannungen und Teilströmen, Messbereichserweiterung von Messinstrumenten, Widerstandsabgleich u.a.m.

Stern-Dreieck-Umwandlung Beim Ersatz komplizierter Schaltungen kann es vorkommen, dass sich die Regeln der Parallel- und Reihenschaltung erst nach einer Stern-Dreieck-Umformung (oder umgekehrt) anwenden lassen<sup>14</sup> (Abb. 2.3.7). Solche Umwandlungen beruhen auf der Gleichwertigkeit der Schaltungen: Zwei Schaltungen sind dann gleichwertig (können ineinander überführt werden), wenn die U, I-Relationen zwischen jeder Klemmenkombi-



**Abb. 2.3.7.** Stern-Dreieck-Umwandlungen. (a) Stern-Dreieck-Umwandlung. (b) Gleichwertige  $\pi$ -Ersatzschaltung. (c) Dreieck-Stern-Umwandlung. (d) Gleichwertige T-Ersatzschaltung

 $<sup>^{14}</sup>$  Die Anordnungen werden wegen ihres Aussehens nach Umzeichnung auch als T- oder  $\pi$ -Schaltung bezeichnet.

nation der einen Schaltung mit der entsprechenden Kombination der anderen Schaltung übereinstimmen, hier also jeweils zwischen den Klemmen 1–2–3. Ein Stern ist eine Anordnung von drei Widerständen zusammengeschaltet in einem Mittelpunktsknoten, ein Dreieck eine Masche aus drei Widerständen. Zur Umwandlung dienen folgende Transformationsbeziehungen (Abb. 2.3.7):

Stern  $\rightarrow$  Dreieck- Umwandlung (mit  $\sum G = G_{10} + G_{20} + G_{30}$ )

$$G_{12} = \frac{G_{10}G_{20}}{\sum G}, \quad G_{13} = \frac{G_{10}G_{30}}{\sum G}, \quad G_{23} = \frac{G_{20}G_{30}}{\sum G}.$$
 (2.3.12a)

**Dreieck**  $\rightarrow$  **Stern-Umwandlung** (mit  $\sum R = R_{12} + R_{13} + R_{23}$ )

$$R_{10} = \frac{R_{12}R_{13}}{\sum R}, \quad R_{20} = \frac{R_{12}R_{23}}{\sum R}, \quad R_{30} = \frac{R_{13}R_{23}}{\sum R}.$$
 (2.3.12b)

Der symmetrische Aufbau der Stern- und Dreieckschaltung ergibt die Beziehungen durch zyklische Vertauschung der Indizes:

Stern  $\rightarrow$  Dreieck:

$$G_{\text{Dreieck}} = \frac{\text{Produkt der Sternleitwerte zwischen den Knoten}}{\text{Summe aller Sternleitwerte}}$$

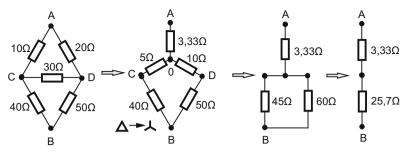
 $Dreieck \rightarrow Stern:$ 

$$R_{\rm Stern} = \frac{{\rm Produkt~der~Dreieckwiderst}\\ \bar{\rm Summe~aller~Dreieckwiderst}\\ \bar{\rm am~betreffenden~Knoten}\\ \bar{\rm Summe~aller~Dreieckwiderst}\\ \bar{\rm am~betreffenden~Knoten}\\ \bar{\rm Am~betreffen$$

Die Ergebnisse entstehen, wenn man z.B. in der Sternschaltung jeweils die Widerstände zwischen den Knoten 1–2, 2–3 und 3–1 berechnet und durch die Elemente der Dreieckschaltung ausdrückt. Werden je zwei dieser Gleichungen addiert und die restliche subtrahiert, so folgen die Widerstände der Sternschaltung. Zur Berechnung der Dreieckelemente aus den Sternelementen vollzieht man die gleichen Schritte mit den Leitwertdarstellungen.

Stern- und Dreieckschaltung sind gleichwertig und dual (s. Kap. 4.6). Das folgt aus der gleichartigen Struktur, wenn die Leitwerte der Dreieckschaltung durch die Widerstände der Sternschaltung und umgekehrt die Leitwerte der Sternschaltung durch die Widerstände der Dreieckschaltung ersetzt werden. Die Stern-Dreieck-Transformation ist ein Sonderfall der allgemeineren Stern-n-Eck-Transformation: jeder n-strahlige Stern lässt sich in ein gleichwertiges n-Eck wandeln (dabei gilt Gl. (2.3.12a) sinngemäß für jeden Knoten). Umgekehrt ist die Transformation eines n-Ecks in einen n-Stern nur im Fall n=3 möglich.

Die Stern-Dreieck-Transformation hat zahlreiche Anwendungen, sie reichen von der klassischen Drehstromtechnik bis zu Schaltungsstrukturen, die so überhaupt erst zugängig werden: die Brückenschaltung mit Innenwiderstand der Quelle, die überbrückte T-Schaltung, ferner die Knotenunterdrückung (Kap. 3.6). Abb. 2.3.8 zeigt die schrittweise Vereinfachung einer Schaltung mit dieser Transformation.



 ${\bf Abb.\,2.3.8.}$  Anwendungsbeispiel zur Stern-Dreieck-Umwandlung: Schrittweise Berechnung des Ersatzwiderstandes  $R_{\rm AB}$ 

## 2.3.3 Nichtlineare resistive Zweipole

Viele Zweipolbauelemente mit der Eigenschaft "Widerstand" besitzen eine nichtlineare Strom-Spannungs-Relation. Dann gilt das ohmsche Gesetz Gl. (2.3.1) *nicht*, weil der Quotient U/I = f(U) selbst z. B. vom Strom abhängt und keine Konstante mehr ist. Das geht aus Abb. 2.3.9 hervor. Im Punkt A ist der Quotient  $U_A/I_A$  kleiner als im Punkt B  $(U_B/I_B)$ .

In Stromkreisen mit nichtlinearen Bauelementen gelten wohl die Kirchhoffschen Gleichungen, nicht aber der Überlagerungssatz (Kap. 2.4.5). Statt des ohmschen Gesetzes ist im Zweig mit dem nichtlinearen Bauelement die Strom-Spannungs-Relation anzuwenden.

Enthält ein Netzwerk wenigstens ein nichtlineares Netzwerkelement, so heißt es *nichtlineares Netzwerk*. Die Vielfalt nichtlinearer resistiver Zweipole lässt sich nach dem Kennlinientyp unterteilen in solche (Abb. 2.3.9 b, c)

— mit eindeutiger I(U)- und U(I)-Relation. Beispiele: Halbleiterdiode, Varistor, Glühlämpchen, Solarzelle . . . ,

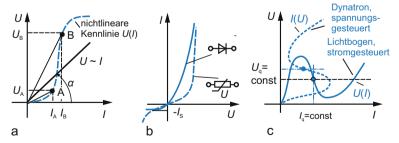


Abb. 2.3.9. Nichtlineare resistive Zweipole. (a) Passive Zweipole mit linearer und nichtlinearer U,I-Kennlinie. (b) Kennlinien einer Halbleiterdiode und eines symmetrischen nichtlinearen Bauelementes (spannungsabhängiger Widerstand). (c) Nichtlineare resistive Zweipole mit bereichsweise fallender Kennlinien vom spannungs- und stromgesteuerten Typ

- bei denen I(U) eindeutig, aber U(I) mehrdeutig ist: man spricht auch vom spannungsgesteuerten Zweipol (Beispiel: Tunneldiode,  $\lambda$ -Diode, Kaltleiter bei Eigenerwärmung, Kennlinie vom N- oder (besser) Dynatron-Typ <sup>15,16</sup>). Bei Aufnahme der Kennlinie mit einer idealen Spannungsquelle ist jeder Arbeitspunkt einstellbar, mit einer Stromquelle u. U. nicht.
- mit eindeutigem U(I)-, aber mehrdeutigem I(U)-Verhalten, also stromgesteuertem Zweipol (Beispiel: Glimmlampe, Bogenentladung, Thyristor, Heißleiter bei Eigenerwärmung, Kennlinie vom S- oder (besser) Lichtbogen-Typ). Hier ist jeder Arbeitspunkt durch eine ideale Stromquelle einstellbar. Auf Einzelheiten gehen wir im Kap. 2.5.5 ein.

Als typisches Merkmal der S- und N-Typ-Kennlinien treten bereichsweise fallende Kennlinienabschnitte auf.

Bei nichtlinearer Strom-Spannungs-Relation werden oft die Begriffe Gleichstromwiderstand als Steigung der Verbindungsgeraden zwischen Nullpunkt und Arbeitspunkt verwendet sowie differenzieller Widerstand für die Steigung der Kennlinie U = f(I) im Arbeitspunkt.

Aus der Vielfalt nichtlinearer Zweipole greifen wir einige heraus:

Spannungsabhängiger Widerstand oder Varistor (VDR, voltage dependent resistor): Massewiderstand aus gesintertem Si-Karbid, der durch räumlich verteilte Sperrschichteffekte eine Kennlinie der Form

$$U = cI^{\beta} \tag{2.3.13}$$

hat (Abb. 2.3.9b). c und  $\beta$  gibt der Hersteller an: c beschreibt die Spannung zum Erreichen eines Stromes von 1A, der Exponent  $\beta$  (Stromindex) liegt bei  $0,1\dots0,3$ . Varistoren haben eine symmetrische Kennlinie I(U)=-I(-U). Sie schützen gegen Überspannungen und liegen der gefährdeten Zweipolstrecke parallel.

Auch ein Metallwiderstand, dessen Widerstandswert durch die eigene Verlustleistung und den Temperaturkoeffizient steigt, hat einen im Prinzip ähnlichen Kennlinienverlauf. Das überrascht, denn er wird gewöhnlich als lineares Schaltelement mit einem Temperaturkoeffizienten (TK) beschrieben, dessen Widerstandswert sich durch äußere Temperaturerhöhung ändert. Erst die Rückkopplung über die eigene Verlustleistung führt zur Kennliniennichtlinearität.

<sup>&</sup>lt;sup>15</sup>Die Bezeichnung N- oder S-Typ ist nicht eindeutig, denn sie hängt von der Darstellungsart (I(U)) oder U(I) ab. Spannungs- bzw. stromgesteuert sind hingegen eindeutig.

 $<sup>^{16}\</sup>mathrm{Das}$  Dynatron ist eine spezielle Schirmgitterröhre mit bereichsweise fallendem I(U)-Verlauf. Es stammt von A. Hull (1933), zum gleichen Zeitpunkt hat H. Frühauf die fallenden Kennlinienbereiche intensiv untersucht. Heute lassen sich Zweipole mit fallenden Kennlinienbereichen durch Halbleiterbauelemente und -schaltungen einfach realisieren.

- Halbleiterdiode mit einer Kennlinie

$$I = I_{\rm S} \left( \exp \frac{U}{U_{\rm T}} - 1 \right). \tag{2.3.14}$$

 $I_{\rm S}$  Sättigungsstrom (Größenordnung 1 nA . . . 1 mA),  $U_{\rm T}=kT/q=26\,{\rm mV}$  (bei Zimmertemperatur, k Boltzmann-Konstante<sup>17</sup>).

Die Diodenkennlinie ist stark unsymmetrisch (Abb. 2.3.9b) mit einem *Durchlassbereich* ("kleiner Klemmenwiderstand") für positive Spannung und dem *Sperrbereich* (bei negativer Spannung). Hier fließt nur ein sehr kleiner Sättigungsstrom  $I_{\rm S}$ . Halbleiterdioden sind wegen ihres Masseneinsatzes (und als Grundlage für die Transistorkennlinien) *das* Beispiel der *Nichtlinearität*. So ergibt die Antiparallelschaltung von zwei gleichen Dioden eine *symmetrische* Kennlinie

$$I = I_{\rm S} \sinh\left(\frac{U}{U_{\rm T}}\right)$$

(mit qualitativ ähnlichem Verlauf zur Varistorkennlinie).

- Die Kennlinie einer Z-Diode unterscheidet sich von der Halbleiterdiode nur durch eine Begrenzungsspannung im Sperrbereich, die Durchbruchspannung von einigen Volt bis zu einigen 10 V.
- Eine *Glühlampe* (Abb. 2.3.10a) ist ein ausgesprochener Kaltleiter, der Widerstand wächst mit steigender Spannung.
- Eine Glimmlampe (Abb. 2.3.10b) zündet bei einer bestimmten Spannung (meist oberhalb von 70 V), darunter fließt kein Strom. Nach der Zündung bricht die Spannung sofort zusammen, um bei größeren Strömen wieder anzusteigen. Dazwischen gibt es einen rückläufigen Bereich I(U).

Die drei möglichen Stromwerte bei Anlegen einer Spannung lassen die Frage nach dem sich einstellenden Strom offen, er hängt von der Messschaltung (Innenwiderstand der Spannungsquelle) ab. Sie muss so ausgelegt sein, dass es immer nur einen Arbeitspunkt gibt!

Bei Aufnahme der Kennlinie mit variabler Spannungsquelle springt der Strom im Moment des Zündens auf einen großen Wert: die Lampe leuchtet. Bei weiterer

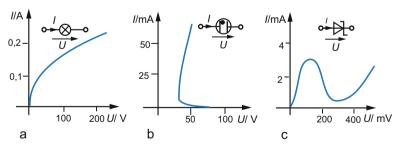


Abb. 2.3.10. Beispiele nichtlinearer resistiver Zweipole. (a) Glühlampe. (b) Glimmlampe. (c) Tunneldiode

<sup>&</sup>lt;sup>17</sup>Ludwig Boltzmann, österreichischer Physiker 1844–1906. Professor für Physik in Graz, München und Wien.

Steigerung von U leuchtet sie heller. Der Strom im Punkt P ist aufgrund der Niederohmigkeit der Plasmastrecke nach der Zündung meist so hoch, dass eine Sicherung im Stromkreis anspricht.

Wird die Kennlinie hingegen mit variabler Stromquelle aufgenommen, so ist jeder Kennlinienpunkt, auch im fallenden Bereich, einstellbar.

Unabhängig von den Einzelbereichen der Kennlinie gilt, dass in jedem Gebiet vom Zweipol Leistung aufgenommen wird. Er verhält sich *passiv*. Die Situation ändert sich allerdings bei Betrachtung des Kleinsignalverhaltens in einem Arbeitspunkt (s. Kap. 2.5.5).

- Auch Heiβ- und Kaltleiter (s. Kap. 2.3.6) haben eine stark nichtlineare U,I-Kennlinie.
- Die Tunneldiode (Abb. 2.3.10c) hat ebenfalls einen fallenden Bereich in der Darstellung I(U). Es handelt sich um einen hoch dotierten pn-Übergang. Der fallende Bereich entsteht durch Überlagerung eines quantenmechanisch zu erklärenden Tunnelstromes zum normalen Verhalten der pn-Diode.

Weil Tunneldioden, trotz der Genialität des Konzeptes, auch heute noch ein Schattendasein führen, gab es Versuche, bereichsweise fallende Kennlinienteile aus normalen Kennlinien und rückgekoppelten gesteuerten Quellen aufzubauen. Die Elektronik hat dafür zahlreiche Beispiele: so etwa für spannungsgesteuerte Kennlinien mit der  $\lambda$ -Diode und stromgesteuerte Kennlinien durch zwei verkoppelte Komplementärtransistoren u. a. m.

Unabhängig vom physikalischen Mechanismus, der einen fallenden Kennlinienbereich verursacht, gibt es eine Gemeinsamkeit: die Erzeugung eines negativen differenziellen Leitwertes bzw. Widerstandes. Er ist Ursache einer Instabilität, die zusammen mit einem Resonanzkreis zur Schwingungserzeugung dienen kann.

Fallende Kennlinienbereiche sind Grundlage des Oszillatorprinzips zur Erzeugung von Spannungen, insbesondere Sinusspannungen in der Elektronik. Die Elektrotechnik nutzt dafür das *Induktionsprinzip*.

# 2.3.4 Temperaturverhalten resistiver Zweipole

**Temperaturkoeffizient** Der Stromleitungsmechanismus hängt meist von der Temperatur ab (Abb. 2.3.11a):

- bei Metallen steigt der Widerstand mit der Temperatur, weil die Atome intensivere Gitterschwingungen ausführen und sich dadurch die Wahrscheinlichkeit eines Zusammenstoßes mit hindurchfließenden Elektronen erhöht.
- bei Halbleitern wächst die Ladungsträgerzahl im Bereich der Eigenleitung mit der Temperatur durch Aufbrechen von Gitterbindungen, wodurch der Widerstand sinkt.

In allen Fällen ändert sich der Widerstand R um den Wert  $\Delta R(T)$  gegenüber einem Ausgangswert  $R(T_0)$  bei einer Bezugstemperatur  $T_0$  (meist Zimmer-

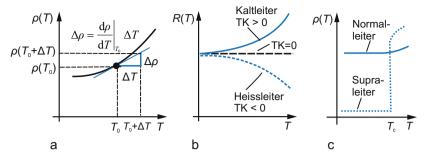


Abb. 2.3.11. Temperatureinfluss auf den Widerstand. (a) Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes, Definition des Temperaturkoeffizienten. (b) Temperaturabhängigkeit des Widerstandes von Heiss- und Kaltleitern. (c) Verlauf des spezifischen Widerstandes bei tiefen Temperaturen

temperatur 20° C). Diese Änderung wird auf den spezifischen Widerstand  $\varrho(T)$  zurückgeführt und mit dem *Temperaturkoeffizienten* oder *-beiwert* (TK)  $\alpha$  erfasst. Näherungsweise gilt durch Taylorentwicklung des spezifischen Widerstandes um  $T_0$ :

$$\varrho(T) = \varrho(T_0) + \frac{d\varrho(T)}{dT} \Big|_{T_0} (T - T_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho(T)}{dT^2} \Big|_{T_0} (T - T_0)^2 + \dots$$

Für geringe Temperaturänderungen (bis etwa 100 K) reicht die Berücksichtigung des linearen Terms (mit  $\Delta T = T - T_0$ )

$$\varrho(T) \approx \varrho(T_0) + \left. \frac{\mathrm{d}\varrho(T)}{\mathrm{d}T} \right|_{T_0} (T - T_0) = \varrho(T_0) \left( 1 + \alpha_{T_0} \Delta T \right) \tag{2.3.15}$$

mit 
$$\alpha_{T_0} = \frac{1}{\varrho(T_0)} \left. \frac{\mathrm{d}\varrho(T)}{\mathrm{d}T} \right|_{T_0}$$
.

Der Temperaturkoeffizient  $\alpha$  ist die relative Änderung des spezifischen Widerstandes pro Grad Temperaturänderung. Er wird in 1/K  $(1/Kelvin)^{18}$  oder in %/K angegeben, oft auch in ppm [part per million  $(=10^{-6})$ ,  $1 \text{ ppm} = 10^{-6}$ ]. Im Temperaturverhalten gibt es positive Temperaturkoeffizienten wie bei Kaltleitern (die im kalten Zustand besser leiten) und Heißleitern mit negativem TK (deren Widerstand mit steigender Temperatur sinkt (Abb. 2.3.11b)).

Bei größeren Temperaturschwankungen reicht der lineare Temperatureinfluss nach Gl. (2.3.15) nicht. Dann wird der quadratische Term berücksichtigt

$$\varrho(T) = \varrho_{T_0} \left( 1 + \alpha_{T_0} \Delta T + \beta_{T_0} (\Delta T)^2 \right). \tag{2.3.16}$$

Hier ist  $\beta_{T_0}$  der quadratische Temperaturkoeffizient (Einheit K<sup>-2</sup>).

 $<sup>^{18}</sup>$  Hinweis: Die Temperaturdifferenz im Nenner hat in der Kelvin- und Celsius Temperaturskala den gleichen Wert. Deshalb kann der TK sowohl in der Einheit K $^{-1}$  wie auch  $^{\circ}$  C $^{-1}$  angegeben werden.

Meist genügt für den Temperaturgang eines Widerstandes R(T) der Ansatz

$$R(T) = R(T_0) (1 + \alpha_{T_0} \Delta T) \quad \text{mit}$$

$$\alpha_{T_0} = \frac{1}{\varrho(T_0)} \frac{\mathrm{d}\varrho(T)}{\mathrm{d}T} \Big|_{T_0} = \left(\frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}T}\right) \Big|_{T_0} \approx \frac{1}{R} \frac{\Delta R}{\Delta T}.$$
(2.3.17)

Richtwerte für den Temperaturkoeffizienten  $\alpha$  sind:

- Metalle Cu, Au, Ag:  $\alpha \approx 0.4\%$ /K, Al  $\alpha \approx 0.6\%$ /K,
- temperaturkonstante Leiter (Konstantan, Nickelin, Manganin):  $\alpha \approx 0$ ,
- Halbleiter und einige Elektrolyte:  $\alpha \approx -1\%/K$ , z. T. noch größer.

Bei starkem Temperatureinfluss reicht die lineare Näherung Gl. (2.3.17) nicht aus. Dann folgt besser wegen  $\alpha(T)dT = dR/R$  durch beiderseitige Integration

$$\int_{T_0}^T \alpha(T) dT = \int_{R(T_0)}^R \frac{dR}{R} = \ln\left(\frac{R(T)}{R(T_0)}\right)$$

und anschließendes Exponieren  $(\exp(\ln y) = y)$ 

$$R(T) = R(T_0) \exp \int_{T_0}^{T} \alpha(T) dT = R(T_0) \exp (\alpha(T - T_0))|_{\alpha = \text{const}}.$$
 (2.3.18)

Für kleine Temperaturänderungen  $(T-T_0)$  und/oder Temperaturbeiwerte ergibt die Reihenentwicklung exp  $y\approx 1-y+y^2/2$  für  $|y|\ll 1$  den linearen Temperaturgang nach Gl. (2.3.17).

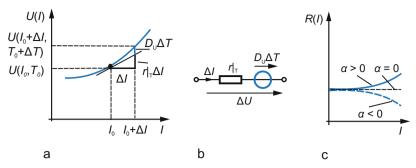
Allgemeine Temperaturabhängigkeit Da der Widerstandsbegriff an das lineare Netzwerkelement geknüpft ist, aber viele nichtlineare resistive Zweipole ebenfalls von der Temperatur abhängen (wie beispielsweise Halbleiterbauelemente), geht man besser von einer Kennlinie U(I,T) bzw. I(U,T) mit Temperatureinfluss aus und bezieht den entsprechenden TK auf die Spannung oder den Strom (s. Abb. 2.3.12a). So gehört z. B. zur Kennlinie U(I,T) die totale Spannungsänderung

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial I} \Delta I + \frac{\partial U}{\partial T} \Delta T = r|_T \Delta I + D_U \Delta T \quad . \tag{2.3.19}$$

Sie ergibt sich im Arbeitspunkt ( $I,T={\rm const}$ ) nach Maßgabe des Kleinsignalwiderstandes r und Temperaturdurchgriffs  $\Delta T$ 

$$D_{\rm U}=rac{\partial U}{\partial T}=\left.rac{{
m d}U}{{
m d}T}
ight|_{I={
m const}}$$
. Temperaturkoeffizient der Spannung (2.3.20)

Er beträgt beispielsweise für die Halbleiterdiode im Flusszustand etwa  $D_{\rm U} \approx -2\,{\rm mV/K}$ . Die Ersatzschaltung Abb. 2.3.12b interpretiert Gl. (2.3.19) als Reihenschaltung des Kleinsignalwiderstandes und einer temperaturgesteuer-



**Abb. 2.3.12.** Temperaturersatzschaltung. (a) Näherungsweise Modellierung des impliziten Temperatureinflusses auf eine Kennlinie U(I,T). (b) Modellierung kleiner Strom- und Temperaturänderungen auf eine temperaturabhängige nichtlineare Kennlinie. (c) Einfluss der Eigenerwärmung auf einen linearen Widerstand. Mit wachsender Strombelastung wird der Widerstand nichtlinear

ten Spannungsquelle (zweiter Term), die über die Temperaturänderung mit zur Spannungsänderung an den Klemmen beiträgt.

Die sinngemäße Überlegung gilt für eine Kennlinie I(U,T), wie sie für viele Zweipolbauelemente zutrifft. Man erhält analog zu Gl. (2.3.19)

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial U} \Delta U + \frac{\partial I}{\partial T} \Delta T = g|_T \Delta U + D_{\rm I} \Delta T \tag{2.3.21a}$$

mit  $D_{\rm I}=\frac{\partial I}{\partial T}=\frac{{
m d}I}{{
m d}T}\big|_{U={
m const}}$ . Hier wäre der letzte Term ein entsprechender "TK des Stromes". In der Ersatzschaltung wird die Gleichung als differenzieller Leitwert mit parallel liegender temperaturgesteuerter Stromquelle interpretiert.

Für praktische Anwendungen interessiert meist die Stromänderung bezogen auf den Strom I im Arbeitspunkt:

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{1}{I} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U} \Big|_{T} \Delta U + \frac{1}{I} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}T} \Big|_{I} \Delta T \equiv \frac{g\Delta U}{I} + c_{\mathrm{I}}\Delta T \tag{2.3.21b}$$

mit  $c_{\rm I}=\frac{1}{I}\left.\frac{{\rm d}I}{{\rm d}T}\right|_{I}=\frac{1}{I}\frac{\partial I}{\partial T}$ . Der Temperaturkoeffizient  $c_{\rm I}$  ist bei Halbleiterbauelementen verbreitet, er liegt in der Größenordnung von  $c_{\rm I}\approx 0,1/{\rm K}=10\%/{\rm K}$ .

Temperatureinflüsse können nützlich wie unerwünscht sein. Nützlich sind sie

- zur elektrischen Temperaturmessung. So haben einfache Silizium-Widerstände Temperaturkoeffizienten  $\alpha \approx 8 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{K}^{-1}$  und  $\beta \approx 20 \cdot 10^{-6} \, \mathrm{K}^{-2}$ . Die Temperaturmessung basiert dann auf Auswertung der Widerstandsänderung mit einer Wheatstoneschen Brückenschaltung (s. Kap. 2.4.3).
  - Ein anderer Ansatz nutzt die temperaturbedingte Änderung der Flussspannung einer Halbleiterdiode, die mit etwa -2mV/K absinkt.
- zur Kompensation von Temperatureinflüssen (s. Kap. 2.3.6).

*Unerwünscht* sind Temperatureffekte generell in elektronischen Schaltungen. Durch Kühlung, Wärmeableitung, die Verwendung von Bauelementen mit kleinem TK und Kompensationseffekten versucht man, den Temperatureinfluss zu beherrschen.

Beispiel 2.3.2 Nichtlinearer Widerstand, Selbstaufheizung Bei Stromfluss durch den temperaturabhängigen Widerstand steigt seine Temperatur. Dadurch erhöht sich nach Gl. (2.3.17) rückwirkend der Widerstand und wieder die Verlustleistung: es gibt eine thermische Rückwirkung über den Temperaturkoeffizienten  $\alpha_{20}$ . Die Verlustleistung  $P_{\rm V}=RI^2$  erzeugt die Temperaturerhöhung  $\Delta(T-T_{20})=R_{\rm th}P_{\rm V}$  nach Maßgabe des thermischen Widerstandes  $R_{\rm th}$  (s. Gl. (2.3.29)) und es gilt  $T=T_{20}+R_{\rm th}P_{\rm V}=T_{20}+R_{\rm th}I^2R(T)$ . Eingesetzt in den temperaturabhängigen Widerstand Gl. (2.3.17)  $R(T)=R_{20}(1+\alpha_{20}R_{\rm th}I^2R(T))$  wird nach Auflösung

$$R(T,I) = \frac{R_{20}}{1 - R_{20}\alpha_{20}R_{\rm th}I^2}$$
 nichtisothermer Widerstand (2.3.22a)  $U = R(T)I = \frac{R_{20}I}{1 - R_{20}\alpha_{20}R_{\rm th}I^2}.$ 

Der Temperatureinfluss über die eigene Verlustleistung macht den linearen Widerstand R(T,I) stromabhängig und damit nichtlinear (!).

Deshalb steigt die Spannung mit wachsendem Strom überproportional an bzw. wächst der Widerstand über dem Strom, bei negativem Temperaturkoeffizient  $\alpha_{20}$  (wie für Kaltleiter zutreffend) tritt dagegen eine Absenkung ein (Abb. 2.3.12c). Zahlenmäßig ergibt sich mit  $\alpha_{20} = 4 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{K}^{-1}$ ,  $R_{20} = 10 \, \Omega$  und  $R_{\mathrm{th}} = 2 \, \mathrm{K/W}$  für einen Strom  $I = 1 \, \mathrm{A} \rightarrow \alpha_{20} R_{\mathrm{th}} I^2 R = 4 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{K}^{-1} \cdot 2 \, \mathrm{K/W} \cdot 10 \, \mathrm{W} = 0,08$  und damit  $R(T) = 1,08 \cdot R_{20}$ , beim Strom  $I = 5 \, \mathrm{A}$  hingegen  $\alpha_{20} R_{\mathrm{th}} I^2 R = 2$  und damit  $R(T) = 2 \cdot R_{20}$ , also eine Widerstandsverdoppelung! Der Einfluss dieses Effektes sinkt durch gute Wärmeableitung (kleiner thermischer Widerstand  $R_{\mathrm{th}}$ ) und geringen Temperaturkoeffizienten.

Temperaturabhängige Widerstände verhalten sich linear, solange die Eigenaufheizung in Verbindungen mit dem Temperaturkoeffizienten und der Wärmeableitung keine wesentliche Kennlinienänderung verursacht, also insbesondere gilt

Das Temperaturverhalten von Netzwerk- und Bauelementen wird vielfältig ausgenutzt:

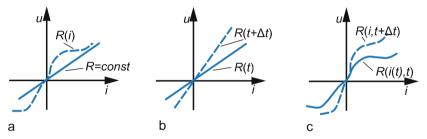
- zur Temperaturbestimmung (als sog. Temperatursensor) durch Auswertung der Widerstands- oder Kennlinienänderung (Kontrolle der Gerätebetriebstemperatur),
- zur Temperaturkontrolle als Überlastungsschutz zusammen mit Wärmeableitungsmaßnahmen,
- zur Analyse von Arbeitspunktänderung in Schaltungen zusammen mit stabilisierenden Maßnahmen,
- zur Kontrolle der *thermischen Stabilität* einer Schaltung (Verhinderung eines instabilen Arbeitspunktes durch unbegrenztes Anwachsen der Be-

triebstemperatur eines Netzwerkelementes. Beispielsweise würde ein nichtisothermer Widerstand nach Gl. (2.3.22a) für die Bedingung  $P_{\rm V}\alpha_{20}R_{\rm th}=1$  über alle Grenzen wachsen oder thermisch instabil sein.

# 2.3.5 Allgemeine resistive Zweipole

Das wichtigste passive Netzwerkelement ist der Widerstand R oder besser resistive Zweipol als Netzwerkmodell für Stromleitungsvorgänge. Es gibt zeitunabhängige und zeitabhängige und jeweils lineare und nichtlineare resistive Zweipole (Tab. 2.3).

Tabelle 2.3. Resistive Zweipole, Grundarten: (a) linear zeitunabhängig, nichtlinear zeitunabhängig, (b) linear zeitabhängig, (c) nichtlinear zeitabhängig



#### 2.3.5.1 Zeitunabhängige resistive Zweipole

Beim zeitunabhängigen resistiven Zweipol hängt die U, I-Beziehung (oder die Kennlinie) nicht von der Zeit ab. Das gilt für die meisten "Widerstände", z. B. den "linearen Widerstand" (Gl. (2.3.1)), sowie den nichtlinearen Widerstand (Tab. 2.3a) mit nichtlinearer U, I-Beziehung.

Oft arbeiten nichtlineare resistive Zweipole in Gleichstromkreisen mit zusätzlicher Wechselspannungsquelle kleiner Amplitude  $\Delta U_{\rm q}$  (Abb. 2.3.13). Sie wirkt wie eine Parallelverschiebung der Kennlinie des aktiven Zweipols und der Arbeitspunkt wandert von A nach A'. Dadurch entsteht über dem nichtlinearen Element die Spannungsänderung  $\Delta U$  und im Kreis die Stromänderung  $\Delta I$ . Bei kleiner Spannungsänderung  $\Delta U_{\rm q}$  kann der Übergang von A nach A' in erster Näherung durch eine Tangente mit dem Anstieg  $r = \Delta U/\Delta I$  an die Kennlinie im Arbeitspunkt  $U_{\rm A}$ ,  $I_{\rm A}$  ersetzt werden. Für  $\Delta U$ ,  $\Delta I \rightarrow 0$  folgt daraus der Differenzialquotient<sup>19</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>Differenzielle Kenngrößen erhalten kleine Symbole.

$$r = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I}\Big|_{U_{\mathrm{A}},I_{\mathrm{A}}}$$
. Differenzieller Widerstand, Definitionsgleichung

Der differenzielle oder Kleinsignalwiderstand r eines nichtlinearen resistiven Zweipols beschreibt sein Verhalten für kleine Strom-Spannungs-Schwankungen  $\Delta I$ ,  $\Delta U$  um einem Arbeitspunkt A.

Dann hat das linearisierte Element eine lineare Strom-Spannungs-Beziehung für die *Kleinsignalaussteuerung*:

Aussteuernde Amplituden  $\Delta I$ ,  $\Delta U$  sind klein gegen die Werte  $I_A$ ,  $U_A$  des Arbeitspunktes, als Richtwert gilt  $|\Delta I|$ ,  $|\Delta U| \leq 0$ ,  $1(|I_A|, |U_A|)$ .

Analog zum differenziellen Widerstand gibt es den differenziellen Leitwert

$$g = \left. \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}U} \right|_{U_{\mathrm{A}},I_{\mathrm{A}}}.$$
 Differenzieller Leitwert, (2.3.24) Definitionsgleichung

Stets gilt r = 1/g. Im Stromkreis nach Abb. 2.3.13a wirken somit

- die Gleichgrößen  $I_A$ ,  $U_A$  durch das Zusammenspiel von aktivem Zweipol (hier) und nichtlinearem passivem Zweipol,
- die Änderungen  $\Delta U_{\rm q}$ ,  $\Delta I$ ,  $\Delta U$ . Für sie besteht der Stromkreis aus der Spannungsquelle  $\Delta U_{\rm q}$ , dem Innenwiderstand  $R_{\rm i}$  und differenziellen Widerstand r: linearer Stromkreis.

Bei Kleinsignalaussteuerung überlagert sich das Kleinsignalverhalten dem nichtlinearen Gleichstromverhalten des Stromkreises.

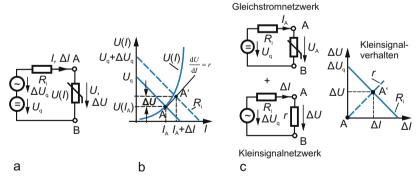


Abb. 2.3.13. Kleinsignalverhalten. (a) Schaltung mit nichtlinearem resistiven Zweipol. (b) Kennlinienverhalten des aktiven und nichtlinearen passiven Zweipols bei Kleinsignalaussteuerung. (c) Ersatzschaltungen: Zerlegung in nichtlinearen Gleichstromkreis und linearen Grundstromkreis für Kleinsignalaussteuerung

Das erlaubt die Trennung beider Analyseaufgaben. In Abb. 2.3.13c wurde deshalb der Stromkreis nach den Erregerursachen getrennt dargestellt. So betragen die Spannung  $\Delta U$  über dem differenziellen Widerstand r nach der Spannungsteilerregel  $\Delta U = \Delta U_{\rm q} \frac{r}{r+R}$  und der Strom im Kreis  $\Delta I = \frac{\Delta U_{\rm q}}{r+R}$ . Das sind Ergebnisse linearer Stromkreise.

Differenzielle Netzwerkelemente und Kleinsignalsteuerung haben für die Elektronik mit ihren nichtlinearen Bauelementen grundlegende Bedeutung. Für Kleinsignalansteuerung gelten die Gesetze linearer Netzwerke.

Offen bleibt noch, wie der Kleinsignalleitwert ermittelt wird und die Analyse eines Stromkreises unter Kleinsignalbedingungen abläuft. Wir gehen darauf im Kap. 2.5.5 ein.

## 2.3.5.2 Zeitvariante resistive Zweipole

Ein zeitvarianter linearer Widerstand resp. Leitwert ist ein Netzwerkelement mit linearer Strom-Spannungs-Beziehung, aber zeitabhängigem Widerstandswert  $R(t)^{20}$ :

$$u(t) = R(t)i(t)$$
 bzw.  $i(t) = G(t)u(t)$ . zeitabhängiger linearer (2.3.25) Widerstand

Für Gleichgrößen U, I bedeutet dieser Zeiteinfluss auf R eine Änderung der Kennliniensteigung (Tab. 2.3b). Derartige Widerstände dienen oft zur Modellierung nichtelektrischer Umgebungsbedingungen, z. B. Temperatur, Licht (Fotoleiter), Magnetfeld.

Ein zeitabhängiger Widerstand entsteht beispielsweise mit zwei reihengeschalteten Widerständen, von denen einer durch einen periodisch schließenden Schalter überbrückt wird (Abb. 2.3.14a, b). Dadurch schwankt der Widerstand  $R_{\rm AB}(t)$  zwischen  $R_1$  und  $R_1+R_2$ . Auch ein Widerstand, dessen Widerstandswert proportional zu einem auftreffenden Magnetfeld ist, wird zeitabhängig, wenn das Magnetfeld durch einen Steuerstrom zeitlich variiert.

Zeitveränderliche Widerstände verursachen im Stromkreis gegenüber zeitunabhängigen Elementen neuartige Wirkungen. Wird ein Widerstand mit  $R(t)=R_0+\Delta R\cos\omega_2 t$  vom Strom  $i(t)=I\cos\omega_1 t$  durchflossen, so lautet die Klemmenspannung

$$u(t) = R(t)i(t) = (R_0 + \Delta R \cos \omega_2 t) \cdot I \cdot \cos \omega_1 t$$

$$= \underbrace{R_0 \cos \omega_1 t}_{\text{Ausgangsfrequenz}} + \underbrace{\frac{\Delta R \cdot I}{2}}_{\text{neue Frequenz}} (\underbrace{\cos(\omega_2 - \omega_1)t}_{\text{neue Frequenz}} + \underbrace{\cos(\omega_2 + \omega_1)t}_{\text{neue Frequenz}}).$$

 $<sup>^{20}\</sup>mathrm{Allgemein}$ zeitveränderliche Amplituden erhalten kleine Symbole.

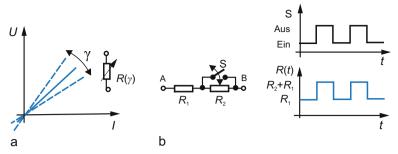


Abb. 2.3.14. Zeitveränderlicher linearer Widerstand. (a) U, I-Kennlinie mit allgemeinem Steuerparameter. (b) Anordnung mit periodisch geschaltetem Widerstand  $R_{\rm AB}(t)$ 

Für R = const. (zeitunabhängig) wäre  $u(t) \sim \cos \omega_1 t$  und Strom- und Spannungszeitfunktionen stimmen überein. Bei harmonischer Steuerung des Widerstandes mit der Kreisfrequenz  $\omega_2$  ergibt sich über das Additionstheorem für  $\cos \alpha \cos \beta$  eine Lösung, in der zwei neue Frequenzen auftreten: die Summen- und Differenzfrequenz von aufgeprägter ( $\omega_1$ ) und steuernder Kreisfrequenz  $\omega_2$ . Solche Anordnungen dienen zur Erzeugung neuer Frequenzen. Tatsächlich ist der "zeitgesteuerte Widerstand" das Grundelement der "Modulation", ein grundlegendes Prinzip der Informationstechnik.

Ein spezieller zeitveränderlicher Widerstand ist der Schalter s(t), dessen Widerstandswert zwischen 0 und  $\infty$  (ideal) schwankt. Der jeweilige Schalterzustand wird durch die *Schaltfunktion* s(t) beschrieben:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{Schalter geschlossen} \\ 0 & \text{Schalter offen} \end{cases}$$
 (2.3.26)

Dieses Modell dient in der Elektrotechnik verbreitet zur Modellierung von Schaltaufgaben (s. Bd. 3).

Zeitvariante nichtlineare resistive Zweipole (Tab. 2.3c) schließlich haben U,I-Beziehungender Art

$$I(t) = f(U(t), t)$$
 bzw.  $U(t) = g(I(t), t)$ . (2.3.27)

Beispiele sind:

- nichtlineare Zweipole, deren U, I-Relationen noch von einem weiteren zeitabhängigen Parameter abhängt: Solarzelle mit einfallender zeitveränderlicher Strahlung, Halbleiterdiode, deren Temperatur sich zeitabhängig ändert (z. B. durch Selbstaufheizung),
- elektronische Schalter (realisiert durch geschaltete Bauelemente, etwa Transistoren im Schalterbetrieb).

Solche Elemente lösen in der Informationstechnik unterschiedlichste Aufgabenstellungen.

#### 2.3.6 Widerstand als Bauelement

Widerstände sind Bauelemente mit definierten elektrischen Widerstandseigenschaften (linear, nichtlinear) und bestimmten Ausführungsformen.

Typische Merkmale bilden *Nennwiderstand* und *Toleranz*, der TK und die (bauformabhängige) *Leistungsbelastbarkeit* (oft ausgedrückt durch eine *maximale Dauerspannung*).

Die Nennwerte werden nach einer geometrischen Folge (E-Reihen) so gestuft, dass sich innerhalb jeder Dekade die gleiche Anzahl von Werten ergibt. Der E-Wert kennzeichnet die im Bereich 1 ... 10 untergebrachten Werte. Üblich sind die Reihen E6 ( $\pm 20\%$ ), E12 ( $\pm 10\%$ ), E24 ( $\pm 5\%$ ), E48 ( $\pm 2,5\%$ ), E96 ( $\pm 1,25\%$ ), E192 ( $\pm 0,6\%$ ). Die Stufung erfolgt gemäß En =  $10^{m/n}$  ( $n=6,12,24,48,96,192, m=0,1,2\dots(n-1)$ ). Durch Streichung eines jeden zweiten Wertes aus einer Reihe En entsteht die Reihe En/2. Tabelle 2.4 enthält die Werte bis zur Reihe E24: beginnend mit E6 verdoppelt sich die Spaltenzahl für jede folgende Reihe. Die Reihe E24 wurde aus Platzgründen nur anders geschrieben. Jede Normreihe überdeckt die reelle Achse lückenlos (kein Fertigungsausschuss).

Reihe Toleranz			Widerstandswerte (gerundet)											Stufen-faktor $\sqrt[n]{10}$
E 6	$\pm 20\%$	1,0		1,5		2,2		3,3		4,7		6,8		1,468
$\to 12$	$\pm 10\%$	1,0	1,2	1,5	1,8	$^{2,2}$	$^{2,7}$	3,3	3,9	4,7	5,6	6,8	8,2	1,21
E 24	$\pm 5\%$	1,0	1,2	1,5	1,8	$^{2,2}$	2,7	3,3	3,9	4,4	5,6	6,8	8,2	1,049
		1,1	1,3	1,6	2,0	2,4	3,0	3,6	4,3	5,1	6,2	7,5	9,1	1,049

Tabelle 2.4. Internationale Normenreihe (IEC) der Widerstandswerte

Der Nennwert wird aufgedruckt oder durch eine Farbcodierung (Farbringe) aus  $4\dots 6$  Ringen ausgedrückt (DIN 41425, IEC 62), bei kleinen Widerständen codiert (z. B. für die E24 Reihe). Widerstandswerte von  $1,0\dots 9,1\Omega$  erhalten statt des Kommas den Buchstaben "R", also statt  $2,7\Omega=2R7$  usw.

**Bauform** Festwiderstände bestehen aus einem isolierenden Träger, der eine Metalldrahtwicklung, eine Kohle- oder Metallschichtbahn trägt oder selbst leitet (Massewiderstand) Abb. 2.3.15:

- Drahtwiderstände sind hoch belastbar (Bereich 0,25–200 W) mit einlagiger Drahtwicklung (Widerstandsdraht aus Chrom-Nickel, Konstantan, Manganin). Der Widerstandsbereich reicht von mOhm bis zu etwa 250 kOhm.
- Schichtwiderstände bilden die Masse der Widerstände. Sie bestehen aus einem Keramikkörper mit aufgebrachter Kohle- oder Metallschicht (CrNi).
- Kohleschichtwiderstände haben einen negativen TK von -1000...-200 ppm/K. Der Nennlastbereich liegt zwischen 0,1...2 W, der Widerstandsbereich zwischen  $1\Omega$  bis 22 MΩ. Begrenzte Langzeitstabilität und große Toleranz (<5%) werden bei niedrigem Preis in Kauf genommen.

- Metallschichtwiderstände aus Nickel-Chrom-Legierungen werden wegen des begrenzten Flächenwiderstandes unter 3kΩ mit gewendelter Schicht (Abgleich durch Schliff oder Laserstrahl) gefertigt. Sie haben einen positiven TK von (2...100) ppm/K, kleine Toleranz (0, 1...2%) und hohe Langzeitstabilität. Ihr Preisvorteil macht sie zum Massentyp.
- Metallglasurschichtwiderstände, auch als Dickschicht- oder Cermetwiderstände bekannt, verwenden als Widerstandsschicht eine Glasurpaste mit eingelagerten Metallteilen (Cermet) hergestellt durch Dickschichttechnik. Der Toleranzbereich reicht von (0,1...5)%, der TK beträgt  $\pm (25...200)$  ppm/K und der Widerstandsbereich überstreicht Werte von 1  $\Omega$  bis 50 G  $\Omega$ !

Aus der Gruppe der stark nichtlinearen Widerstände sind zu nennen:

**Heißleiter** oder *NTC-Widerstände* (NTC: negative temperature coefficient) haben bei hohen Temperaturen einen geringeren Widerstand als im kalten Zustand (Abb. 2.3.15a). Sie bestehen aus Mischkristallen von  $Fe_3O_4$  (mit  $MgCr_2O_4$ ), aus  $Fe_2O_3$  (mit  $TiO_2$ ) und NiO oder CoO mit Füllstoffen. Der Widerstand gehorcht näherungsweise der Beziehung

$$R(T) = R_{\infty} \exp \frac{B}{T} = R_0 \exp B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)$$
 (2.3.28)

mit dem Bezugswert  $R_0$  bei 25°C,  $B \approx 1500 \,\mathrm{K} \dots 6000 \,\mathrm{K}$ . Der TK  $\alpha_R = -\frac{B}{T^2}$  hat nach Gl. (2.3.15) Werte zwischen  $-3 \dots -6\%/\mathrm{K}$ , (negativ). Er ist hoch und hängt selbst von der Temperatur ab. Die Kennlinie U(I) des Heißleiters erfordert wegen des großen TKs die Berücksichtigung der Eigenerwärmung (Abb. 2.3.15c). Bei geringer Eigenerwärmung dominiert Fremderwärmung und der Widerstand hängt nur von der Umgebungstemperatur ab. Sie ist über die Widerstandsänderung messbar.

Solange für konstante Betriebstemperatur gesorgt wird (etwa durch Kühlung, Anblasen), verhält sich der Heißleiter wie ein linearer Widerstand. Steigt die Eigenerwärmung, dann bestimmt die im Zweipol erzeugte Verlustleistung die Betriebstemperatur und diese wirkt über den Temperaturkoeffizient auf das elektrische Klemmenverhalten zurück. So wächst der Strom durch die ansteigende Leitfähigkeit stark an, was von einem bestimmten Punkt P an (s. Abb. 2.3.15a)

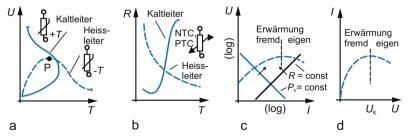


Abb. 2.3.15. Temperaturabhängige resistive Zweipole. (a) Kennlinie der Heiß- und Kaltleiterwiderstände für stationären Betrieb und Schaltzeichen. (b) Widerstandsverläufe über der Temperatur. (c) Einfluss der Eigen- und Fremderwärmung auf das Strom-Spannungs-Verhalten beim Heißleiter und Kaltleiter (Abb. d)

eine Kennlinienrückläufigkeit einleitet. Die Stromzunahme bei gleichzeitiger Spannungsabnahme führt ohne Arbeitspunktstabilisierung zur Zerstörung des Bauelementes. Die Rückkopplung zwischen Widerstandswert, Temperaturanstieg und der Änderung der U, I-Klemmenbeziehung korrigiert das Strom-Spannungsverhalten. Einfluss hat die Wärmeableitung, also der Zusammenhang zwischen der zugeführten elektrischen Leistung P, dem Wärmeleitwert  $G_{\rm th} = 1/R_{\rm th}$  (verbreiteter ist der Wärmewiderstand  $R_{\rm th}$ ) und der Wärmekapazität  $C_{\rm th}$ 

$$P = G_{\rm th}(T - T_{\rm u}) + C_{\rm th} \frac{dT}{dt}.$$
 (2.3.29)

Bei genügend langsamer Leistungserhöhung tritt der NTC immer mit der Umgebungstemperatur  $T_{\rm u}$  in Wärmeausgleich und eine schnelle Temperaturänderung (d $T/{\rm d}t=0$ ) unterbleibt. Dann gilt

$$I^2 R = G_{\text{th}}(T - T_{\text{u}}), \quad U^2 / R = G_{\text{th}}(T - T_{\text{u}})$$
 (2.3.30)

als Parameterdarstellung der U, I-Kennlinie. In doppelt-logarithmischer Darstellung werden dabei Kurven gleicher Leistung (P = const) zu abfallenden, Kurven gleichen Widerstandes zu unter  $45^{\circ}$  ansteigenden Geraden (Abb. 2.3.15c).

Die Kennlinie zeigt zunächst konstanten Widerstand bei kleiner Leistung. Mit wachsender Leistung steigt die Eigenerwärmung und die Kurve flacht ab, weil der Widerstand sinkt. Schließlich stellt sich ein Maximum ein: dort ist die relative Widerstandsabnahme gleich der relativen Stromzunahme. Steigt sie weiter, fällt die Kurve jenseits des Maximums ab und der NTC hat einen negativen (differenziellen) Widerstand. Ändert sich der Wärmewiderstand z.B. durch zusätzliche Kühlung, so stellt sich eine andere Kennlinie ein. Eingesetzt werden Heißleiter mit Fremd- oder Eigenerwärmung. Bei Fremderwärmung arbeiten sie als Mess- oder Kompensationsheißleiter zur Temperaturmessung oder Kompensation von positiven Temperaturkoeffizienten. Im Bereich der Eigenerwärmung dienen sie oft als Anlassheißleiter zur Einschaltstrombegrenzung. Ein weiteres Anwendungsfeld ist die Kompensation der starken Widerstandsabnahme im fallenden Bereich durch den entgegengesetzten Widerstandsverlauf eines Kaltleiters (z. B. einer Glühlampe).

Kaltleiter oder *PTC-Widerstände* (PTC: positiv temperature coeffizient) sind Widerstände mit positivem TK in begrenztem Temperaturbereich, also größerer Leitfähigkeit im kalten Zustand als im erwärmten (Name!, Abb. 2.3.15b). Sie bestehen aus ferroelektrischer Mischkeramik. In einem sehr begrenzten Temperaturbereich beträgt ihr TK etwa 5%/K bis zu 75%/K, m.a. W. ändert sich der Widerstand innerhalb weniger Kelvin um Größenordnungen. Für PTC-Widerstände gilt eine Kennlinie

$$R(T) = R_0 \exp \alpha T \tag{2.3.31}$$

mit positivem Wert  $\alpha$ . Abb. 2.3.15b zeigt die typische Kaltleiterkennlinie. Bei geringer Eigenerwärmung ist sie linear. Von einer bestimmten Eigenerwärmung an bestimmt die zugeführte Leistung die Übertemperatur abhängig vom Wärmeleitwert  $G_{\rm th}$  der Anordnung:  $P = G_{\rm th}(T-T_{\rm U})$ . Über das elektrische Leistungsäquivalent  $P_{\rm el} = P$  ist die zugehörige "Kippspannung"  $U_{\rm K}$  der Kennlinie zugeordnet:  $U_{\rm K} = \sqrt{P_{\rm el}R_{\rm T}} = \sqrt{R_{\rm T}G_{\rm th}(T-T_{\rm U})}$ . Von diesem Punkt an (Abb. 2.3.15d) bleibt die Temperatur etwa konstant (und damit auch die Wärmeleistung) und als Folge fällt der

Strom I=P/U hyperbolisch über der Spannung ab. Für andere Wärmeableitungsbedingungen gilt eine andere Kennlinie.

Kaltleiter haben drei Anwendungsgebiete:

- bei Fremderwärmung arbeiten sie als Sensor zur Temperaturerfassung (elektronisches Thermometer) und als Überwachungselement,
- bei Eigenerwärmung wird sowohl die nichtlineare Kennlinie als auch der Einfluss des Wärmewiderstandes ausgenutzt.

So bildet die Reihenschaltung von Lastelement und PTC-Widerstand einen einfachen Überlastungsschutz. Mit steigendem Strom begrenzt die Eigenerwärmung den Widerstandswert und so den Laststrom.

Über den Wärmeleitwert hängt die Kennlinie von den Umgebungsbedingungen ab. Befindet sich ein Kaltleiter in einem Gefäß mit oder ohne Flüssigkeit, so kann die Wärmeleitwertänderung zur Füllstandsanzeige (über die Widerstandsänderung) dienen.

Das dritte Anwendungsfeld sind selbstregelnde Heizelemente (Wärmequelle mit Überlastungsschutz). Dazu liegt der Kaltleiter direkt an einer Spannungsquelle. Abhängig vom Wärmeleitwert und der zugeführten Leistung stellt sich eine bestimmte Übertemperatur ein. Übertrifft die zugeführte Leistung die thermisch abgeführte, so steigt die Temperatur weiter an und so auch der Widerstandswert. Dadurch sinkt aber die elektrische Leistung  $P_{\rm el} = U^2/R(T)$ : die Temperatur beginnt sich zu stabilisieren. Wird dagegen viel Wärme abgeführt, so sinkt der Widerstand, steigt also die elektrische Leistung mit der Tendenz zur Temperaturerhöhung. Auf diese Weise wirkt das Heizelement selbststabilisierend.

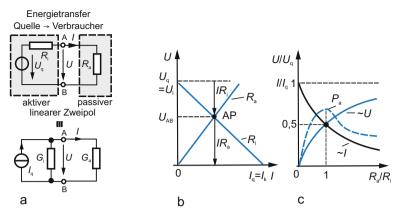
Ein Sonderfall eines Kaltleiters ist die *Metallfaden-Glühlampe*, denn metallische Leiter haben PTC-Verhalten.

# 2.4 Der Grundstromkreis

Im einfachsten Fall besteht ein Netzwerk nur aus einem aktiven Zweipol, der über ideale Verbindungsleitungen mit einem passiven Zweipol als *unverzweigter Stromkreis* oder *Grundstromkreis* zusammenwirkt. Dagegen haben *verzweigte Stromkreise* wenigstens einen Verzweigungsknoten und komplexe Stromkreise viele Knoten, Zweige und häufig mehrere Quellen.

#### 2.4.1 Der lineare Grundstromkreis

Der Grundstromkreis (Abb. 2.4.1a) modelliert den Energietransport von der Energie- oder Informationsquelle zum Verbraucher und ist die Grundschaltung, auf die sich viele kompliziertere Aufgaben zurückführen lassen. Der



**Abb. 2.4.1.** Der lineare Grundstromkreis. (a) Anordnung mit linearem aktiven und passiven Zweipol in Spannungs- und Stromquellenersatzschaltung. (b) Lineare U, I-Kennlinien von Quelle und Verbraucher mit Angabe des Arbeitspunktes. (c) Abhängigkeit von Spannung U und Strom I (normiert) und der im Außenwiderstand umgesetzten Leistung  $P_{\rm a}$  vom Außenwiderstand (bezogen auf den Innenwiderstand)

aktive Zweipol enthält eine unabhängige Quelle, der passive nur das Grundelement Widerstand R (und später Kondensator C und Spule L). Im Grundstromkreis erkennt man leicht die Zweckmäßigkeit des Verbraucher-Erzeugerpfeilsystems: das Verbrauchersystem (VPS) am passiven Zweipol bedeutet mit  $P=U_2I_2>0$  Leistungsaufnahme, das Erzeugerpfeilsystem (EPS) für die Quelle  $P=U_1I_1>0$  Leistungsabgabe. Der Strom fließt in Umlaufrichtung. Die Strom-Spannungsbeziehungen an den Klemmen AB folgen aus den Kirchhoffschen Gesetzen und den Zweigbeziehungen beider Zweipole, die Lösung heißt Arbeitspunkt A

$$I_1 = I_2 = I$$
  $U_1 = U_2 = U = U_{AB}$ . Arbeitspunkt

#### Er wird bestimmt

- bei *linearen* Zweipolen analytisch (Gl (2.4.1)) oder grafisch als Schnittpunkt der Kennlinien des aktiven und passiven Zweipols,
- bei *nichtlinearen* Zweipolen grafisch oder numerisch,
- durch Computerprogramme wie z. B. Multisim (EWB), SPICE, PSPICE u. a. als Ergebnis einer DC (direct current) Analyse.

Der *lineare Grundstromkreis* (Abb. 2.4.1b) mit Zweipolen in Spannungs- oder Stromquellendarstellung führt über die Maschengleichungen

$$\begin{split} \text{M1}: \quad 0 &= U + IR_{\text{i}} - U_{\text{q}} \;\; \text{aktiver Zweipol} \\ \text{M2}: \quad 0 &= IR_{\text{a}} - U \qquad \text{passiver Zweipol} \end{split}$$

bzw. für die Stromquellendarstellung als Knotengleichung  $I=I_{\rm q}-UG_{\rm i}$  auf

$$\begin{split} I &= \frac{U_{\rm q}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}} = \frac{U_{\rm q}}{R_{\rm ges}}, \quad U &= IR_{\rm a} = U_{\rm q} \frac{R_{\rm a}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}}, \\ U &= \frac{I_{\rm q}}{G_{\rm i} + G_{\rm a}} = \frac{I_{\rm q}}{G_{\rm ges}}, \quad I &= UG_{\rm a} = I_{\rm q} \frac{G_{\rm a}}{G_{\rm i} + G_{\rm a}}. \end{split} \tag{2.4.1}$$

Die Strom-Spannungsbeziehung des linearen Grundstromkreises ist zugleich der Arbeitspunkt.

Zweckmäßig wird das Ergebnis in normierten Größen dargestellt:

$$\frac{I}{I_{\rm q}} = \frac{R_{\rm i}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}} = \frac{1}{1 + R_{\rm a}/R_{\rm i}} = \frac{G_{\rm a}}{G_{\rm i} + G_{\rm a}} = \frac{1}{1 + G_{\rm i}/G_{\rm a}} \quad \text{Stromteilerregel}$$
 
$$\frac{U}{U_{\rm q}} = \frac{R_{\rm a}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}} = \frac{R_{\rm a}/R_{\rm i}}{1 + R_{\rm a}/R_{\rm i}} = \frac{G_{\rm i}}{G_{\rm i} + G_{\rm a}} = \frac{1}{1 + G_{\rm a}/G_{\rm i}} \quad \text{Spannungsteilerregel}.$$
 (2.4.2)

Diese Darstellung hat mehrere Vorteile:

- unabhängig von den Einheiten der darzustellenden Größen,
- unabhängig von speziellen Bemessungen der Elemente.

Im Ergebnis sind die Spannungs- und Stromteilerregeln Gln. (2.3.8), (2.3.10) zu erkennen. Der Einfluss des Lastwiderstandes  $R_{\rm a}$  wird sofort deutlich: mit sinkendem Lastwiderstand  $R_{\rm a}$  steigt der Strom I. Er schwankt zwischen dem Maximalwert  $I = I_{\rm max} = I_{\rm k} = I_{\rm q}$  bei Kurzschluss ( $R_{\rm a} = 0$ ) und dem Minimalwert I = 0 bei Leerlauf ( $R_{\rm a} \to \infty$ ).

Die Spannung U ist proportional dem Lastwiderstand: sie verschwindet im Kurzschlussfall und erreicht den höchsten Wert  $U = U_{\rm l} = U_{\rm q}$  im Leerlauf. Dann stimmen Leerlauf- und Quellenspannung überein (so wurden die Ersatzgrößen des aktiven Zweipols bestimmt):

# Strom und Spannung ändern sich über dem Lastwiderstand $R_{\rm a}$ gegenläufig!

Das Produkt von Strom und Spannung, die *Leistung*, durchläuft deshalb ein Maximum (Abb. 2.4.1c). Bei der (Leistungs-) *Anpassung* 

$$R_{\rm a} = R_{\rm i} \rightarrow \begin{cases} R_{\rm a} < R_{\rm i} & \text{Unteranpassung} \\ R_{\rm a} > R_{\rm i} & \text{Überanpassung} \end{cases}$$
 (2.4.3)

sinken Strom und Spannung auf die Hälfte ihrer Kurzschluss- bzw. Leerlaufwerte:

$$I|_{R_{\rm a}=R_{\rm i}}=rac{I_{
m k}}{2}=rac{I_{
m q}}{2}, \quad U|_{R_{
m a}=R_{
m i}}=rac{U_{
m l}}{2}=rac{U_{
m q}}{2}.$$
 Anpassung (2.4.4)

Praktisch sind der Kurzschluss ( $R_a = 0$ ) wegen stets vorhandener Zuleitungswiderstände der Drähte sowie der Leerlauf ( $R_a \to \infty$ ) wegen häufiger Isolationsmängel nur bedingt realisierbar. Dann gilt: praktischer Kurzschluss  $R_a \ll R_i$  und damit (Gl. (2.4.2))

$$\frac{I}{I_{\rm k}} = \frac{1}{1 + R_{\rm a}/R_{\rm i}} \approx 1 - \frac{R_{\rm a}}{R_{\rm i}} \Big|_{R_{\rm a} \gg R_{\rm i}}$$
 (2.4.5a)

und praktischer Leerlauf  $R_a \gg R_i$ 

$$\frac{U}{U_{\rm l}} = \frac{R_{\rm a}/R_{\rm i}}{1 + R_{\rm a}/R_{\rm i}} \approx 1 - \frac{R_{\rm i}}{R_{\rm a}} \Big|_{R_{\rm a} \ll R_{\rm i}}.$$
 (2.4.5b)

Die relativen Fehler des Kurzschlussstromes bzw. der Leerlaufspannung betragen

$$\frac{I - I_{\rm k}}{I_{\rm k}} = \frac{\Delta I_{\rm k}}{I_{\rm k}} \approx -\frac{R_{\rm a}}{R_{\rm i}} = -\frac{G_{\rm i}}{G_{\rm a}}, \quad \frac{U - U_{\rm l}}{U_{\rm l}} = \frac{\Delta U_{\rm l}}{U_{\rm l}} \approx -\frac{R_{\rm i}}{R_{\rm a}} = -\frac{G_{\rm a}}{G_{\rm i}}. \quad (2.4.5c)$$

Darf bei der Kurzschlussstrombestimmung ein Fehler von 10% auftreten, so muss  $R_{\rm a} \leq 0, 1R_{\rm i}$  gelten, soll die Leerlaufspannung mit 5% Fehler bestimmt werden, so ist  $R_{\rm a} \geq R_{\rm i}/0, 05 = 20R_{\rm i}$  erforderlich.

Beispiel 2.4.1 Spannungsmesser Ein Spannungsmesser  $(R_a = 10 \,\mathrm{k}\Omega)$  soll die Leerlaufspannung einer Spannungsquelle  $(U_q = 10 \,\mathrm{V}, \,R_i = 2 \,\mathrm{k}\Omega)$  ermitteln. Welche Spannung zeigt das Instrument?

Nach Gl. (2.4.2) gilt 
$$U = U_1 = U_q R_a / (R_i + R_a) = 10 \text{ V} \cdot 10 \text{ k}\Omega / 12 \text{ k}\Omega = 8,33 \text{ V}.$$

Hätte der Spannungsmesser einen Widerstand  $R_{\rm a}=100\,{\rm k}\Omega$ , so würde die Spannung  $U=10\,{\rm V}\cdot 10\,{\rm k}\Omega/102\,{\rm k}\Omega=9,8\,{\rm V}$  angezeigt. Nach Gl. (2.4.5) beträgt der relative Fehler  $\Delta U/U_{\rm q}\approx -2\,{\rm k}\Omega/100\,{\rm k}\Omega\approx -2\%$ . Nur für  $R_{\rm a}\to\infty$  zeigt der Spannungsmesser die richtige Spannung an.

Veranschaulicht wird das Verhalten des Grundstromkreises durch die *Kennlinien* beider Zweipole. Ihr Schnittpunkt ist der Arbeitspunkt A. Man übersieht sofort den Einfluss von Veränderungen (Abb. 2.4.2):

 die Aufteilung der Spannungen (Spannungsersatzschaltung) bzw. Ströme (Stromersatzschaltung) auf Verbraucher und Quelle;

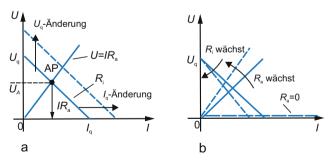


Abb. 2.4.2. Einfluss von Quellen- und Widerstandsänderungen auf den linearen Grundstromkreis. (a) Veranschaulichung von Quellenspannungs-/oder -stromänderungen. (b) Auswirkung von Widerstandsänderungen (Innen-, Außenwiderstand) auf den Arbeitspunkt

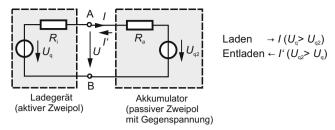


Abb. 2.4.3. Grundstromkreis. Zusammenwirken von aktivem und passivem Zweipol bei Gegenspannung im passiven Zweipol

- Ra-Änderung: bei Leerlauf und Kurzschluss fällt die Kennlinie des passiven Zweipols entweder mit der U- oder I-Achse zusammen; bei Anpassung bilden die Kennlinien beider Zweipole ein gleichschenkliges Dreieck;
- $-R_i$ -Änderung: bei konstantem  $U_q$  oder  $I_q$  dreht sich die Kennlinie des aktiven Zweipols um den betreffenden Punkt;
- $U_{q}$  bzw.  $I_{q}$ -Änderung ( $R_{i}=$  const): Parallelverschiebung der Kennlinie des aktiven Zweipols.

Liegt dem passiven Zweipol noch eine Spannungsquelle  $U_{\rm q2}$  in Reihe, so wird er ebenfalls aktiv als "Zweipol mit Gegenspannung" (Beispiel: Akkumulator am Ladegerät, Abb. 2.4.3). Der Strom beträgt jetzt  $I = \frac{U_{\rm q} - U_{\rm q2}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}}$ . Er verschwindet für  $U_{\rm q} = U_{\rm q2}$ : Spannungskompensation. Für  $U_{\rm q2} > U_{\rm q}$  treibt  $U_{\rm q2}$  den Strom in entgegengesetzter Richtung an: Vertauschung der Rolle von Generator und Verbraucher.

Kompensation spielt in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle:

- Spannungskompensation: Aufhebung der Quellenspannung eines aktiven Zweipols durch eine "Gegenspannung".
- Stromkompensation: Aufhebung des Quellenstromes eines aktiven Zweipoles durch einen "Gegenstrom".

# 2.4.2 Leistungsumsatz im Grundstromkreis

Die Energieübertragung im Grundstromkreis kann unter zwei Gesichtspunkten erfolgen:

- Von der Erzeugerenergie  $W_{\rm A}$  soll ein möglichst großer Teil  $W_{\rm B}$  zum Verbraucher gelangen, also der Wirkungsgrad hoch sein: Grundaufgabe der Energietechnik.
- Die dem Verbraucher zugeführte Energie soll einem hohen Absolutbetrag zustreben (ohne Rücksicht auf das Verhältnis  $W_{\rm B}/W_{\rm A}$ ): Grundaufgabe der Informationstechnik.

Grundlage ist der Leistungsumsatz. Die von der Spannungsquelle gelieferte Energie wird im Innen- und Außenwiderstand umgesetzt. Aus der Maschengleichung folgt durch Multiplikation mit dem Strom  ${\cal I}$ 

$$\underbrace{U_{\mathbf{q}I}}_{P_{\mathbf{q}}} = \underbrace{I^{2}R_{\mathbf{i}}}_{P_{\mathbf{i}}} + \underbrace{I^{2}R_{\mathbf{a}}}_{P_{\mathbf{a}}}.$$
(2.4.6)

- die Verbraucherleistung  $P_{\rm a}=I^2R_{\rm a}=U^2/R_{\rm a},$
- die insgesamt in den Kreis eingebrachte, d. h. "erzeugte" elektrische Leistung  $P_{\rm q}=U_{\rm q}I=I^2(R_{\rm i}+R_{\rm a}),$
- die Verlustleistung  $P_i = I^2 R_i$  im Quelleninnenwiderstand.

Der Energieerhaltungssatz erfordert  $P_{\rm q}=P_{\rm i}+P_{\rm a}$ . Für den Leistungsumsatz interessieren

- der Wirkungsgrad (Gl. (1.6.9))

$$\eta = \frac{P_{\rm a}}{P_{\rm o}} = \frac{IU}{IU_{\rm o}} = \frac{R_{\rm a}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}} = \frac{1}{1 + R_{\rm i}/R_{\rm a}} \tag{2.4.7}$$

als Verhältnis der im Verbraucher umgesetzten Leitung zur insgesamt aufgewendeten, also *verfügbaren* Leistung und

— die im Verbraucher absolut umgesetzte Leistung bei konstanter Quellenspannung  $U_{\rm q}$  bzw. konstantem Quellenstrom  $I_{\rm q}$ 

$$P_{\rm a} = I^2 R_{\rm a} = \frac{R_{\rm a}}{(R_{\rm i} + R_{\rm a})^2} U_{\rm q}^2.$$

Unter Bezug auf die angebotene Quellenleistung  $P_{\rm Q} = I_{\rm q} U_{\rm q}^{-21}$ 

$$\frac{P_{\rm a}}{P_{\rm Q}} = \frac{IU}{I_{\rm q}U_{\rm q}} = \eta \frac{I}{I_{\rm q}} = \frac{1}{1 + R_{\rm i}/R_{\rm a}} \frac{1}{1 + R_{\rm a}/R_{\rm i}}$$
(2.4.8)

hat die Verbraucherleistung  $P_{\rm a}(R_{\rm a})$  über  $R_{\rm a}/R_{\rm i}$  ein Maximum bei

$$R_{\rm a} = R_{\rm i}$$
 Leistungsanpassung (2.4.9)

im Arbeitspunkt  $U=U_{\rm q}/2,\,I=I_{\rm q}/2$  mit dem Wirkungsgrad  $\eta=1/2.$  Dabei wird

$$P_{\rm a}|_{\rm max} = \left. \frac{U^2}{R_{\rm a}} \right|_{R_{\rm a}=R_{\rm i}} = \frac{U_{\rm q}^2}{4R_{\rm i}} = \frac{I_{\rm q}^2 R_{\rm i}}{4}$$
 Verbraucherleistung (2.4.10)

als verfügbare Leistung an den Verbraucher abgegeben.

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup>Das ist zunächst ein hypothetischer Wert, denn beim idealen Generator kann entweder der Strom oder die Spannung über alle Grenzen wachsen. Physikalisch erhält die angebotene Quellenleistung ihre Bedeutung erst für den nichtlinearen aktiven Zweipol (s. Kap. 2.5.4).

Bei Anpassung  $R_a = R_i$  beträgt der Wirkungsgrad im linearen Grundstromkreis 50% und dem Verbraucher wird die maximale Leistung (1/4 der angebotenen Quellenleistung, Leistungsfläche  $U_aI_a$ ) zugeführt.

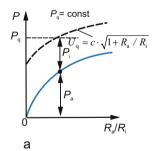
Das trifft nur auf den linearen Grundstromkreis zu, im nichtlinearen Fall gelten Korrekturen (s. Kap. 2.5.4).

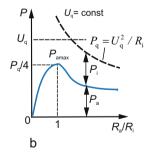
Wir untersuchen die Nutzleistung  $P_{\rm a}$  für zwei Generatorauslegungen ( $R_{\rm i}=$  const, Abb. 2.4.4):

- a) Quelle mit konstant angebotener Leistung  $P_{\rm q}={\rm const},$  dann ist der Wirkungsgrad nach Gl. (2.4.7) maßgebend.
- b) Quelle mit konstant erzeugter Quellenspannung  $U_{\rm q}$  bzw. Quellenstrom  $I_{\rm q}$ . Jetzt erhält der Lastwiderstand  $R_{\rm a}$  die Leistung nach Gl. (2.4.8).

Mehr als die verfügbare Leistung  $P_{\rm max}$  kann der Generator an den Verbraucher nie abgeben. Sie umfasst also nur 1/4 (!) der angebotenen Generatorleistung (angebotene Quellenleistung). Das Leistungsmaximum verläuft in Umgebung von  $R_{\rm i}=R_{\rm a}$  relativ flach. Deswegen entsteht bei der *Fehlanpassung* von 1:2 (also  $R_{\rm a}=R_{\rm i}/2$  oder  $R_{\rm a}=2R_{\rm i}$ ) nur ein Leistungsverlust von 12%.

1. Energieübertragung mit hohem Wirkungsgrad  $\eta \to 1$ . Hoher Wirkungsgrad  $\eta = P_{\rm a}/P_{\rm q} \to {\rm max}$  erfordert nach Gl. (2.4.7) praktischen Leerlauf  $R_{\rm a} \gg R_{\rm i}$  des Verbrauchers. Nur dann ist die Klemmenspannung  $U \approx U_{\rm q}$  lastunabhängig. Gleichzeitig sinkt die Generatorverlustleistung. Da die Übertragung großer Energiemengen teuer ist (Anlage-, Energieträgerkosten u. a.) arbeitet eine Anlage mit höchstem Wirkungsgrad (bei  $P_{\rm q} = {\rm const}$ ) am wirtschaftlichsten. Das gilt für die Energietechnik generell. Nur dieser Forderung verdanken wir, dass die Spannung des Versorgungsnetzes [ $\to$  Netzwerk aus Spannungsquelle und Innenwiderstand (Leitungsnetz)], weitgehend unabhängig von der Einzelbelastung bleibt. Der Verbraucherwiderstand





**Abb. 2.4.4.** Leistungsverhältnisse im Grundstromkreis. (a) Bei konstant erzeugter Generatorleistung. (b) Bei konstanter Quellenspannung

 $R_{\rm a}$  soll nach Gl. (2.4.7) für eine bestimmte Verbraucherleistung  $P_{\rm a}$  möglichst hoch sein. Das erfordert wegen  $P_{\rm a}=U_{\rm q}/R_{\rm a}$  eine möglichst hohe Spannung  $U_{\rm q}$ .

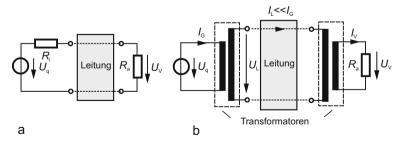
Nur Hochspannungsnetze übertragen große Leistungen über große Entfernung mit gutem Wirkungsgrad.

Beispiel 2.4.2 Wirkungsgrad Eine Leistung  $P_{\rm a}=1\,{\rm MW}$  werde von einem Generator mit  $U_{\rm q}=100\,{\rm kV}$  bzw. mit  $U_{\rm q}=10\,{\rm kV}$  zum Verbraucher übertragen (Verbraucher für entsprechende Spannung ausgelegt, Leitungswiderstand zwischen Generator und Verbraucher  $R_{\rm i}=100\,\Omega$ ). Der Verbraucherwiderstand  $R_{\rm a}=U_{\rm q}^2/P_{\rm a}$  beträgt  $10\,{\rm k\Omega}$  (bei  $U_{\rm q}=100\,{\rm kV}$ ) bzw.  $R_{\rm a}=100\,\Omega$  bei  $U_{\rm q}=10\,{\rm kV}$ . Daraus folgen die Wirkungsgrade

$$\begin{array}{lll} U_{\rm q} = 100\,{\rm kV} & \to & R_{\rm a} = 10\,{\rm k\Omega} & \to & \eta = \frac{1}{1+100/10^4} \approx 99,01\,\% \\ U_{\rm q} = 10\,{\rm kV} & \to & R_{\rm a} = 100\,\Omega & \to & \eta = \frac{1}{1+1} = 50\,\%. \end{array}$$

Die Hochspannungsübertragung erfordert entsprechende Generatoren und Verbraucher. Das ist für Spannungen oberhalb einiger kV (genauer 27 kV) technisch nicht möglich bzw. sinnvoll (Isolationskosten, Gefährdung des Menschen). Deshalb werden in Wechselspannungsnetzen zwischen Generator und Leitung sowie Leitung und Verbraucher Transformatoren eingefügt (Abb. 2.4.5). Sie transformieren die Generatorspannung  $U_{\rm q}$  auf die Leitungsspannung  $U_{\rm L}\gg U_{\rm q}$  und diese am Verbraucherort wieder auf die Verbraucherspannung  $U_{\rm V}\ll U_{\rm L}$ .

2. Erzielung hoher Absolutleistung am Verbraucher. Nach Abb. 2.4.4 hat die Absolutleistung  $P_{\rm a}$  für  $U_{\rm q}=$  const bei Anpassung  $R_{\rm a}=R_{\rm i}$  (Gl. (2.4.3)) ein Maximum gegeben durch Gl. (2.4.10). Weil den Empfänger in der Informationstechnik meist nur kleine Leistungen erreichen (und nur die Übertragung von Information interessiert, nicht Energie), ist Zielstellung eine möglichst hohe Absolutleistung am Empfangsort. Auch die Kostenfrage stellt sich anders: Das Kraftwerk erhält nur die Energie vergütet, die der Verbraucher tatsächlich als Leistung  $P_{\rm a}$  entnimmt. Dagegen muss ein Fernsprechteilnehmer z. B. an der Sendestelle (am Handy als Informationserzeuger) noch zahlen und nicht etwa der Teilnehmer am Empfangs-Handy! Die Gebühr



**Abb. 2.4.5.** Wirtschaftliche Energieübertragung durch hohe Spannung. (a) Schaltung ohne Transformator, niedriger Wirkungsgrad durch Leitungsverluste. (b) Schaltung mit Transformatoren und hoher Leitungsspannung (z. B.  $U_{\rm q}=5\,{\rm kV},\ U_{\rm L}=500\,{\rm kV},\ U_{\rm V}=50\,{\rm V},\ I_{\rm G}=1\,{\rm kA},\ I_{\rm L}=10\,{\rm A},\ I_{\rm V}=105\,{\rm A})$ 

hängt auch nicht davon ab, ob er laut oder leise spricht, also von der eingeprägten Energie. Die Kosten beinhalten vielmehr Anlagenkosten (Sender, Vermittlungseinrichtungen), Instandhaltung u. a. m. Der Empfänger ist nur am guten "Empfang" (Verständigung, Störfreiheit) interessiert. Deshalb zielt die Problemstellung der Informationstechnik auf möglichst hohe Empfangsenergie am Empfangsort hin. Der Wirkungsgrad ist uninteressant.

Größenordnungsmäßig entsteht bei der Energieübertragung zwischen einem Rundfunksender (Sendeleistung  $P_{\rm a}=100\,{\rm kW},$  üblicher Großsender) und einem Empfänger über das elektromagnetische Feld nur eine Antennenspannung  $U=1\,\mu{\rm V}$  (typischer Wert von UKW-Empfängern). Sie wirkt in der Empfangsantenne über das Induktionsgesetz aus dem elektromagnetischen Strahlungsfeld der entfernten Sendeantenne. Dem Empfänger mit einem Antenneneingangswiderstand  $R=300\,\Omega$  wird die Leistung  $P_{\rm a}=U^2/R_{\rm a}=(1\,\mu{\rm V})^2/300\,\Omega=3,3\cdot10^{-9}\,{\rm W}(!)$  zugeführt. Der Wirkungsgrad der Energieübertragung beträgt also  $P_{\rm a}/P_{\rm q}=3,3\cdot10^{-9}/10^5\,{\rm W}\approx3\cdot10^{-14}(!)$ . Das ist uninteressant. Am Empfangsort interessiert die Antennenspannung  $U=1\,\mu{\rm V}$ .

Die Generatorbedingung  $U_{\rm q}=$  const ist durch die *Rückwirkungsfreiheit* der meisten Generatoren der Informationstechnik (z. B. Mikrofon, Datenquellen, gesteuerte Quellen, Solarzelle u. a. m.) immer gegeben. Im starkstromtechnischen Fall dagegen merkt das Kraftwerk sehr wohl, ob viele oder wenige Energieverbraucher angeschlossen sind<sup>22</sup>:  $P_{\rm q}=$  const bedeutet zwangsläufig, dass mit steigender abgegebener Leistung  $P_{\rm a}$  die Quellenspannung sinkt und damit dem Generator mehr mechanische Energie zugeführt werden muss. Es herrscht Rückwirkung des Verbraucherverhaltens auf den Erzeuger, denn ein elektrischer Generator ist ein *mechanischelektrischer Wandler*.

Der informationstechnische Fall unterscheidet sich grundlegend. Der Sprecher am Mikrofon des Rundfunkstudios oder am Handy bzw. das Bedienungspersonal des Rundfunksenders bemerkt *nicht*, wie viele Verbraucher am Empfangsort Energie entnehmen. Stets liefert der Sender die gleiche Quellenspannung.

Auch die von der Sonne ausgesandte Strahlungsenergie (je Quadratmeter Erdoberfläche reichlich 1000 W!)<sup>23</sup> ist unbeeinflusst von der Anzahl der Solarzellen auf der Erde, die diese Strahlung in elektrische Energie umsetzen.

Beispiel 2.4.3 Quellenzusammenschaltung, Anpassung N (= 16) gleiche reale Spannungsquellen sollen so zusammengeschaltet werden, dass ein gegebener Verbraucherwiderstand  $R_{\rm a}$  maximale Leistung erhält. Es gelte  $R_{\rm a} = 4R_{\rm i}$ . Wie sind die Spannungsquellen anzuordnen?

Die Zusammenschaltung besteht aus n reihengeschalteten Zellen in einem Strang, wobei m Stränge parallel geschaltet sind (mit  $N=n\cdot m$ ). Der Ersatzwiderstand

 $<sup>^{22}\</sup>mathrm{Daraus}$ leitet es Hinweise auf die Energiesituation, Spitzenlast u. a. ab.

 $<sup>^{23}</sup>$  Je nach Sonnenstand  $1\dots1,36\,\mathrm{kW/\,m^2}.$  Der Umsetzwirkungsgrad von Solarzellen liegt zwischen  $10\,\dots\,20\%.$ 

dieser Anordnung lautet  $R_i = nR_a/m$ , bei Anpassung muss gelten  $R_a = R_{iers} = nR_i/m = n^2R_i/N$ . Daraus folgt  $n = \sqrt{\frac{R_a}{R_i}N} = \sqrt{4\cdot 16} = 2\cdot 4 = 8$ . Die Anzahl paralleler Stränge beträgt dann m = N/n = 16/8 = 2.

Beispiel 2.4.4 Grundstromkreis, Leistungswirkungsgrad Es ist ein Grundstromkreis (Spannungsquelle  $U_{\rm q}$ ,  $R_{\rm i}$ , Verbraucher mit Leistung  $P_{\rm a}$ ) gegeben. Gesucht ist der Leistungswirkungsgrad nach Gl. (2.4.7) und die Verbesserung, die sich (bei gleicher Verbraucherleistung) ergibt, wenn n=4 gleiche Spannungsquellen in Reihe geschaltet werden.

Ausgang ist die Verbraucherleistung  $P_{\rm a}=UI=\frac{U_{\rm q}^2R_{\rm a}}{(R_{\rm i}+R_{\rm a})^2}$ . Lösung nach  $R_{\rm a}$  ergibt den Außenwiderstand  $R_{\rm a}=\frac{U_{\rm q}^2}{2P_{\rm a}}-R_{\rm i}\pm\sqrt{\frac{U_{\rm q}^2}{P_{\rm a}}\left(\frac{U_{\rm q}^2}{4P_{\rm a}}-R_{\rm i}\right)}$ . Für  $U_{\rm q}=1,5\,{\rm V},~R_{\rm i}=1\,\Omega$  und  $P_{\rm a}=0,5\,{\rm W}$  folgen zwei Lösungen  $R_{\rm a1}=2\,\Omega$  und  $R_{\rm a2}=0,5\,\Omega$  mit den Leistungswirkungsgraden nach Gl. (2.4.7)  $\eta=2/(1+2)=66\%$  bzw. 33,3% für  $R_{\rm a2}$ . Wegen des kleineren Wirkungsgrades scheidet  $R_{\rm a2}$  aus. Solche Daten sind typisch für eine Handlampe mit einer Trockenzelle. Bei Vergrößerung der Zellenzahl auf n=4, d. h.  $U_{\rm q}=6\,{\rm V}$  und  $R_{\rm i}=4\,\Omega$  folgen bei gleicher Verbraucherleistung  $P_{\rm a}=0,5\,{\rm W}$  die Außenwiderstände  $R_{\rm a1}=63,7\,\Omega$  und  $R_{\rm a2}=0,25\,\Omega$ . Dann liegt am Lastwiderstand die Spannung  $U=6\,{\rm V}\cdot63,7\,\Omega/(4+63,7)\,\Omega=5,64\,{\rm V}$ . Damit beträgt der Leistungswirkungsgrad nach Gl. (2.4.7)  $\eta=63,7/(4+63,7)=94\%$ , er steigt deutlich.

## 2.4.3 Einfache verzweigte Stromkreise

Manche Problemstellungen zwingen zur Erweiterung des Grundstromkreises um wenige Knoten und Maschen. Wir betrachten einige Fälle.

Messung von Spannung und Strom, Messbereichserweiterung Gleichströme und -spannungen werden oft mit Drehspulmesswerken bestimmt. Der Zeigerausschlag ist dem Strom proportional. Ihr Widerstand  $R_{\rm m}$  soll möglichst klein sein, um den Spannungsabfall  $I \cdot R_{\rm m}$  gering zu halten. Die aufgenommene Leistung liegt in der Größenordnung bis herab zu  $10^{-5}\,\rm W$ . Wegen des Widerstandes  $R_{\rm m}$  können Drehspulinstrumente auch als Spannungsmesser arbeiten. Sie liegen parallel zur Messstrecke, dabei sollte der Stromverbrauch möglichst klein sein. Durch Neben- und Vorwiderstände wird der Gesamtwiderstand des Messwerkes für den jeweiligen Messbereich ausgelegt. Diese Messbereichserweiterung erlaubt die Messung größerer Ströme und Spannungen, als das Messwerk verträgt.

Strommessbereichserweiterung durch Parallelwiderstand Der Parallelwiderstand  $R_{\rm P}=1/G_{\rm P}$  dient als Nebenweg (Shunt) des überschüssigen Stromes

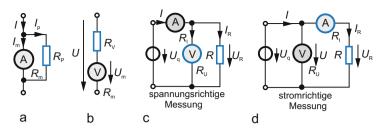


Abb. 2.4.6. Strom- und Spannungsmessung, Messbereichserweiterung. (a) Messbereichserweiterung am Strommesser. (b) Messbereichserweiterung am Spannungsmesser. (c) Widerstandsbestimmung durch spannungsrichtige Strom-Spannungs-Messung. (d) Widerstandsbestimmung durch stromrichtige Strom-Spannung-Messung

zum Messinstrument (Abb. 2.4.6a). Nach der Stromteilerregel gilt zwischen Messwerkstrom  $I_{\rm m}$  und Gesamtstrom  $I=p_{\rm I}I_{\rm m}$ 

$$\frac{I_{\rm m}}{I} = \frac{G_{\rm m}}{G_{\rm m} + G_{\rm P}}, \text{ also } G_{\rm P} = G_{\rm m}(p_{\rm I} - 1), R_{\rm P} = \frac{R_{\rm m}}{p_{\rm I} - 1}.$$
 (2.4.11)

Der Gesamtwiderstand  $R=R_{\rm P}\parallel R_{\rm m}$  des "geshunteten" Strommessers ist um einen Faktor  $p_{\rm I}$  kleiner als  $R_{\rm m}$ , der Strom I um  $p_{\rm I}$  größer als  $I_{\rm m}$  (Spannungsabfall über der Gesamtschaltung bleibt erhalten).

## Spannungsmessbereichserweiterung durch Vorwiderstand

Ein Vorwiderstand  $R_{\rm V}$  nimmt die überschüssige Spannung  $U-U_{\rm m}$  (Abb. 2.4.6b) auf (Vollausschlag des Instrumentes  $U_{\rm m}$ , Gesamtspannung  $U=p_{\rm U}U_{\rm m}$ ). Nach der Spannungsteilerregel gilt

$$\frac{U_{\rm m}}{U} = \frac{R_{\rm m}}{R_{\rm m} + R_{\rm V}}, \text{ also } R_{\rm V} = R_{\rm m}(p_{\rm U} - 1).$$
 (2.4.12)

Der Gesamtwiderstand  $R=R_{\rm V}+R_{\rm m}$  ist um den gleichen Faktor  $p_{\rm U}$  größer als die Spannung U gegenüber  $U_{\rm m}$ .

Beispiel 2.4.5 Drehspulinstrument Ein Drehpulsinstrument zeigt beim Strom  $I=1\,\mathrm{mA}$  Vollausschlag, dazu gehöre die Spannung  $U=100\,\mathrm{mV}$ . Der Instrumentenwiderstand beträgt also  $R_\mathrm{m}=0,1\,\mathrm{k}\Omega$ . Eine Erweiterung auf den Strombereich 200 mA würde mit  $p_\mathrm{I}=200/1$  einen Parallelwiderstand  $R_\mathrm{p}=R_\mathrm{m}/(200-1)\approx R_\mathrm{m}/200\approx 0,5\,\Omega$  erfordern, eine Erweiterung auf eine Spannung  $U=10\,\mathrm{V}$  ( $p_\mathrm{U}=10/0,1=100$ ) einen Vorwiderstand  $R_\mathrm{V}=R_\mathrm{m}(p_\mathrm{U}-1)\approx R_\mathrm{m}p_\mathrm{U}=100\cdot 10^2\,\Omega=10\,\mathrm{k}\Omega$ .

Weil das Drehspulinstrument die Leistung stets dem Messkreis entnimmt, gibt man als spezifische Belastungsgröße den sog. Kennwiderstand in  $k\Omega/V$  an. Er liegt bei guten Drehspulinstrumenten zwischen  $1\dots 200\,k\Omega/V$ , bei Dreheiseninstrumenten deutlich darunter. Ein Vollausschlag erfordert Ströme zwischen  $10\,\mu\text{A}\dots 100\,\mu\text{A}$  beim Innenwiderstand zwischen  $1\,k\Omega$  und  $10\,k\Omega$ .

Digital anzeigende Spannungsmesser (Digitalvoltmeter) besitzen meist mehrere, dekadisch gestufte Messbereiche (0,2, 2, 20, 200 und 1000 V, auch 0,4, 4, 40, 400 und 100 V). Der höchste Messbereich 1000 V resultiert aus einer Vorschrift, die Geräte für höhere Spannungen als Hochspannungsgeräte einstuft mit anderen Sicherheitsanforderungen. Der Innenwiderstand ist unabhängig vom Messbereich sehr hoch (>  $10\,\mathrm{M}\Omega$ ).

Digital anzeigende Strommesser messen den Spannungsabfall an einem dekadisch gestuften Widerstand. Der Fehler ist etwas höher als bei der Spannungsmessung. Der Spannungsabfall beträgt unabhängig vom Messbereich etwa  $100\,\mathrm{mV}$ .

Neben den genannten Instrumenten kommen noch zur Anwendung: elektrostatische Messwerke (in Sonderfällen), für Ströme Stromzangen und Galvanometer bis herab zu  $10^{-12}$  A. Stromzangen zur Strommessung nutzen den Halleffekt im Magnetfeld aus (s. Bd. 2).

Widerstandsbestimmung Es gibt zahlreiche Verfahren zur Bestimmung von Widerständen, wir greifen zwei heraus: die gleichzeitige Strom-Spannungsmessung und das Brückenverfahren.

Widerstandsbestimmung durch Strom- und Spannungsmessung Ein unbekannter Widerstand  $R=U_{\rm R}/I_{\rm R}$  kann durch gleichzeitige Messung der (fehlerfreien) Klemmengrößen  $U_{\rm R},~I_{\rm R}$  bestimmt werden. Die Widerstände der Messinstrumente (Anzeigewerte U,~I) verursachen dabei Fehler. Es gibt zwei Schaltungsmöglichkeiten (Abb. 2.4.6c):

1. Spannungsmesser parallel zum Messobjekt geschaltet, spannungsrichtige Messung ( $U = U_R$ ). Der Strommesser misst den zu großen Strom I durch das Messobjekt ( $I_R$ ) und den Zusatzstrom  $UG_U$  durch den Spannungsmesser (Widerstand  $R_U$ ):  $I = U_RG_U + I_R$ . Der gesuchte Widerstand  $G = I_R/U_R$  beträgt

$$\frac{1}{R} = G = \frac{I_{\rm R}}{U_{\rm R}} = \left. \frac{I}{U_{\rm R}} \right|_{\rm Messwert} - G_{\rm U}. \tag{2.4.13}$$

Ohne Korrektur wird R zu klein ermittelt. Anzustreben ist  $I \approx I_R$ , d. h.  $G_U \ll I_R/U_R$  oder  $R_U \gg R$ . Der Fehler sinkt mit wachsendem Spannungsmesserwiderstand  $R_U$  im Vergleich zum Messobjekt R.

2. Strommesser in Reihe zum Messobjekt R geschaltet, stromrichtige Messung. Hier wird der Strom  $I = I_R$  richtig (Abb. 2.4.6d), die Spannung U hingegen über Messobjekt R und dem Spannungsabfall am Strommessom

ser  $(R_{\rm I})$  zu groß angezeigt:  $U=U_{\rm R}+IR_{\rm I}$ . Daraus berechnet sich der Widerstand R

$$R = \frac{U_{\rm R}}{I_{\rm R}} = \left. \frac{U}{I_{\rm R}} \right|_{\rm Messwert} - R_{\rm I}. \tag{2.4.14}$$

Ohne Korrektur wird R zu groß gemessen. Anzustreben ist stets  $U \approx U_{\rm R}$  und damit  $R_{\rm I} \ll R$ .

Die Korrektur durch den Messinstrumentwiderstand bei der direkten U, I-Messung entschärft sich, wenn

- niederohmige Widerstände spannungsrichtig,
- hochohmige Widerstände stromrichtig gemessen werden.

Auf Messfehler durch den Instrumentenwiderstand bei Messung der Leerlaufspannung oder des Kurzschlussstromes eines aktiven Zweipols wurde bereits verwiesen (s. Gl. (2.4.5)).

Widerstandsbestimmung mit der Messbrücke Sehr verbreitete Verfahren zur Widerstandsbestimmung sind die *Wheatstone*- und *Thomson*-Messbrücke, (letztere für kleine Widerstände).

Eine Messbrücke besteht aus zwei parallelen Spannungsteilern, deren Spannungsabgriffe A, B als Diagonalspannung mit einem Nullindikator verbunden sind.

Brückenschaltungen arbeiten nach dem

- Abgleichverfahren, der klassischen Methode. Bei Abgleich verschwindet die Diagonalspannung  $U_{\rm AB}$ .
- Ausschlagverfahren. Dabei ist die Spannung  $U_{AB}$  ein Maß für die Abweichung des zu messenden Widerstandes von einem Sollwert. Diese Methode ist heute sehr verbreitet.

In der Schaltung (Abb. 2.4.7a) sei  $R_x = R_1$  ein unbekannter Widerstand in einem Spannungsteiler, die Werte  $R_2 \dots R_4$  sind bekannt. Dann beträgt die Diagonalspannung  $U_{AB}$  im Leerlauf (Spannungsteilerregel, Maschengleichung)

$$U_{\text{AB}}|_{I=0} = U_{\text{AC}} - U_{\text{BC}} = \frac{R_3 U_{\text{q}}}{R_{\text{x}} + R_3} - \frac{R_4 U_{\text{q}}}{R_2 + R_4}.$$

Sie verschwindet (Abgleichzustand) für

$$\frac{R_3}{R_{\rm x}+R_3}=\frac{R_4}{R_2+R_4},\quad \text{d. h.}\quad \frac{R_{\rm x}}{R_3}=\frac{R_2}{R_4}.\qquad \begin{array}{c} \text{Brückenabgleich-} \\ \text{bedingung} \end{array} (2.4.15)$$

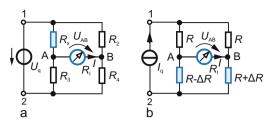


Abb. 2.4.7. Brückenschaltungen. (a) Klassische Form, Wheatstonesche Brückenschaltung. Bei Abgleich verschwindet die Spannung  $U_{\rm AB}$  unabhängig von der Quellenspannung  $U_{\rm Q}$ . (b) Verstimmte Brücke (Ausschlagverfahren). Die Quelle kann entweder eine Spannungsoder Stromquelle sein

Die Abgleichbedingung hängt nur vom Widerstandsverhältnis  $R_2/R_4$  ab, deshalb müssen  $R_2$  und  $R_4$  selbst nicht bekannt sein. Bildet man  $R_2 + R_4$  aus einem kalibrierten Draht (Länge L, Querschnitt A) mit dem Schleiferabgriff  $R_2 \sim l$ ,  $R_4 \sim (L-l)$ , so lässt sich das Verhältnis  $R_2/R_4 = l/(L-l)$  beliebig einstellen (auch ein Potentiometer mit Drehwinkel  $\alpha \sim R_{\rm abgriff}$  erfüllt die gleiche Aufgabe).

Das Messverfahren hat mehrere Vorteile:

- Abgleich unabhängig von der Versorgungsspannung,
- eine verschwindende Diagonalspannung kann mit hoher Genauigkeit festgestellt werden.

Der Abgleich selbst ist etwas aufwendig, weil er schrittweise bei gleichzeitiger Erhöhung der Instrumentempfindlichkeit erfolgen muss in dem Maße, wie man sich dem Abgleichpunkt nähert. Deshalb hat diese Brücke für Messzwecke nicht mehr die Bedeutung, die ihr historisch zukam.

Nicht abgeglichene Brücke Wir beachten einen endlichen Widerstand  $R_{\rm I}$  des Nullanzeigeinstrumentes und berechnen den Strom bei beliebiger Brückeneinstellung, zweckmäßig durch Rückführung der Schaltung auf den Grundstromkreis: Brückenschaltung aktiver Zweipol, Instrument passiver Zweipol (mit  $R_{\rm a}=R_{\rm i}$ ). Dann gilt der Reihe nach (Abb. 2.4.7a) mit der bereits oben berechneten Leerlaufspannung  $U_{\rm I}=U_{\rm AB}|_{I=0}$ , dem Innenwiderstand und dem Strom durch das Anzeigeinstrument

$$R_{\rm i} = \frac{1}{G_1 + G_3} + \frac{1}{G_2 + G_4}$$
 Innenwiderstand (2.4.16)  
 $I = \frac{U_{\rm l}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}} = \frac{U_{\rm l}}{R_{\rm i} + R_{\rm I}}.$  (2.4.17)

Der Innenwiderstand  $R_i$  wird von den Klemmen AB aus ermittelt bei Kurzschluss der Spannungsquelle. Der Strom I zwischen AB verschwindet für  $U_1 = 0$  (Brückenabgleich).

Bei Nichtabgleich zeigt der Indikator einen Ausschlag und die Schaltung arbeitet als Ausschlagbrücke. Sind  $R_2 \dots R_4$  bekannt, so lässt sich der unbekannte Widerstand  $R_1$  über die Diagonalspannung bestimmen.

Ein großer Vorteil dieses Verfahrens ist, dass sich auch kleine Änderungen  $\Delta R$  eines oder mehrerer Brückenwiderstände direkt anzeigen lassen, eine gleichsinnige Änderung aller Widerstände R (z. B. durch Temperaturerhöhung) stört dabei nicht. Beim Ausschlagverfahren – und so wird es eingesetzt – ändern sich einer oder mehrere Widerstände durch eine zu messende physikalische Größe (Druck, Dehnung, etc.): die Widerstandsänderung kann dabei positiv oder negativ sein. Je nachdem, wieviel veränderliche Widerstände (und an welcher Stelle) wirken, spricht man von einer

- Viertelbrücke bei nur einem veränderlichen Widerstand,
- Halb- bzw. Vollbrücke, wenn sich zwei oder alle ändern.

Die Viertelbrücke hat einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Ausgangsspannung und veränderlichem Widerstand unabhängig davon, ob spannungs- oder stromgespeist.

Halbbrücken zeigen bei *Stromeinspeisung* eine lineare Abhängigkeit zur Widerstandsänderung, Vollbrücken haben diese Eigenschaft für Spannungs- und Stromeinspeisung.

Beispiel 2.4.6 Stromgespeiste Brückenschaltung Abb. 2.4.7b zeigt die Anordnung mit Stromquellenspeisung. Die Berechnung des Stromes I erfolgt über  $I_k$  und Innenwiderstand mit der Zuordnung  $R_1 = R_2 = R$ ,  $R_3 = R - \Delta R$ ,  $R_4 = R + \Delta R$ :

$$\begin{split} I_{\mathbf{k}} &= I_{\mathbf{q}} \left( \frac{R_3}{R_3 + R_4} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = \left( \frac{R - \Delta R}{2R} - \frac{R}{2R} \right) I_{\mathbf{q}} = -\frac{\Delta R}{2R} I_{\mathbf{q}}, \\ R_{\mathbf{i}} &= \frac{\left( R_3 + R_4 \right) \left( R_1 + R_2 \right)}{\left( R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \right)} = \frac{2R \cdot 2R}{4R} = R, \\ I_{\mathbf{I}} &= \frac{R_{\mathbf{i}}}{R_{\mathbf{i}} + R_{\mathbf{a}}} I_{\mathbf{k}} = -\frac{R}{R + R_{\mathbf{a}}} \frac{\Delta R}{2R} I_{\mathbf{k}} = -\frac{\Delta R}{2(R + R_{\mathbf{a}})} I_{\mathbf{k}}. \end{split}$$

Erwartungsgemäß entsteht Proportionalität zur Widerstandsänderung. Sie bleibt erhalten, wenn sich die Widerstände  $R_2$ ,  $R_3$  gleich oder sich  $R_1$  und  $R_3$  entgegengesetzt zueinander ändern. Dann führt auch die Spannungseinspeisung zur proportionalen Änderung.

Sehr verbreitet sind Brückenschaltungen zur Kraftmessung mit *Dehnmessstreifen*. Je nach der Anordnung auf einem Biegestreifen wird der Messstreifen gedehnt (Widerstandszunahme) oder gestaucht (Widerstandsabnahme).

Kompensation Das Kompensationsprinzip beruht darauf, den Strom für ein Messgerät durch eine Hilfsquelle so aufzubringen, dass das Messobjekt durch das Messinstrument nicht belastet wird. Abb. 2.4.8a zeigt eine Kompensationsschaltung. Man schließt an die Klemmen AB der Spannungsteilerschal-

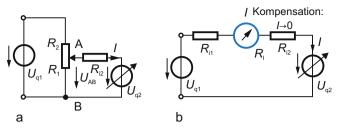


Abb. 2.4.8. Kompensationsverfahren. (a) Der Spannungsteiler wird so eingestellt, dass der Strom durch das Kompensationsinstrument (Strommesser) verschwindet. (b) Ersatzschaltung zu Abb. (a)

tung, deren Spannung genau gemessen werden soll, eine (regelbare) Hilfsspannungsquelle  $(U_{\rm q2},\,R_{\rm i2})$  in Reihe zu einem Strommesser an. Der Strom im Kreis beträgt

$$I = \frac{U_{q1} - U_{q2}}{R_{i1} + R_{i2} + R_{1}}. (2.4.18)$$

Er verschwindet für  $U_{\rm q1}=U_{\rm q2}$  durch Nachregeln von  $U_{\rm q2}$ . So kann die Spannung  $U_{\rm q1}$  praktisch im Leerlauf mit hoher Genauigkeit bei Kenntnis von  $U_{\rm q2}$  gemessen werden.

Anwendung findet die Kompensation zum Vergleich unbekannter Spannungen mit einem Spannungsnormal  $(U_n)$ . Es besitzt eine Spannung  $U_n=1,01865$  V (Toleranz  $\pm 10^{-5}\%$ ) und darf nur mit Strömen  $I<10^{-7}$  A belastet werden. Bei direkter Messung müsste der Spannungsmesser einen Widerstand  $R_U>10^7$   $\Omega$  besitzen. Das Kompensationsverfahren umgeht diese Problematik. Heute werden elektronische Spannungsnormale (Netzanschlussgeräte, deren Ausgangsspannung konstant gehalten wird) verwendet. Vorteil: höhere Belastbarkeit (I bis 100 mA, gleiche Toleranz  $\pm 10\%$ ). Das Prinzip ist auch für Stromkompensationsschaltungen anwendbar.

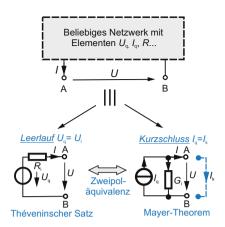
## 2.4.4 Zweipoltheorie

**Ersatzquellensätze** Der Grundstromkreis vereinfacht die Analyse größerer linearer Netzwerke, wenn nur das Verhalten zwischen zwei Knoten interessiert: man betrachtet diesen Zweig als passiven Zweipol und ersetzt das restliche Netzwerk mit allen Quellen durch einen aktiven Zweipol (Abb. 2.4.9).<sup>24</sup> <sup>25</sup> <sup>26</sup>

<sup>&</sup>lt;sup>24</sup>Von Helmholtz 1853 begründet und mit dem Überlagerungssatz bewiesen.

<sup>&</sup>lt;sup>25</sup>Die Angabe von L. Ch. Thévenin (franz. Ingenieur, 1857–1926) stammt aus dem Jahre 1883, (Prinzip wiederentdeckt), seitdem in der englischen Literatur als Thévenin-Theorem bezeichnet.

<sup>&</sup>lt;sup>26</sup>E. L. Norton, amerikanischer Ingenieur 1898–1983. Die Anordnung ist in einem Bericht von 1926 erwähnt (sonst nicht veröffentlicht). Seit 1936 wird die Anordnung



**Abb. 2.4.9.** Ersatzquellensätze. Ersatz eines beliebigen linearen Netzwerkes durch aktive Zweipole in Spannungs- oder Stromquellersatzschaltung. Bestimmung der Ersatzkenngrößen: Leerlaufspannung  $U_1=U_{\rm q}$ , Kurzschlussstrom  $I_{\rm k}=I_{\rm q}$ , Innenwiderstand  $R_{\rm iAB}=U_{\rm l}/I_{\rm k}$  oder direkt aus dem Netzwerk des aktiven Zweipols

Unabhängig vom inneren Aufbau lässt sich ein lineares Netzwerk mit beliebigen Quellen zwischen zwei Anschlusspunkten stets ersetzen durch einen aktiven Zweipol mit gleichwertigem Klemmenverhalten, entweder

- als lineare Ersatzspannungsquelle mit Quellenspannung  $U_{\rm q}=U_{\rm l}$  und Ersatzinnenwiderstand  $R_{\rm i}$  (diese Ersatzform wird als *Théveninscher Satz* bezeichnet) oder
- als lineare Ersatzstromquelle mit Ersatzquellenstrom  $I_q = I_k$  und Ersatzinnenleitwert  $G_i$  (diese Ersatzschaltung ist das *Mayer* oder *Norton-Theorem*).

Das so gewonnene Ersatznetzwerk ist dem originären Netzwerk gleichwertig (äquivalent), wenn es das gleiche U, I-Verhalten an den Klemmen besitzt. So reduziert sich der Zweig mit den gesuchten Größen (Strom, Spannung) zum passiven Zweipol zwischen den Klemmen AB, der "Schaltungsrest" (mit allen unabhängigen Quellen) zum aktiven Ersatzzweipol.

Leerlaufspannung  $U_l$ , Kurzschlussstrom  $I_k$  und (oder) Innenwiderstand  $R_i$  bilden die Ersatzgrößen des aktiven Ersatzzweipols zwischen den Klemmen AB. Davon sind zwei unabhängig voneinander (und zu ermitteln), die dritte wird daraus berechnet. Das ist der Inhalt der *Ersatzquellensätze*.

Beide Sätze beschreiben das gegebene Netzwerk bezüglich der Klemmen AB für jeden Betriebsfall (Leerlauf bis Kurzschluss) vollständig. Sie erlauben aber keine Aussagen über den inneren Aufbau und somit auch nicht über die Leistungsverhältnisse (Verluste!) in den einzelnen Zweigen.

im englischen Schrifttum als Norton-Ersatzschaltung geführt. Mayer gab die Ersatzschaltung 1926 erstmalig an.

## Zweipoltheorie<sup>27</sup>

Die Anwendung der Ersatzquellensätze und des Ersatzwiderstandes auf lineare Netzwerke, das Zusammenwirken zwischen aktivem und passivem Zweipol sowie die Bestimmung der Zweipolersatzgrößen bilden zusammen die Zweipoltheorie.

Sie ist ein leistungsfähiges Analyseverfahren zur

- Ermittlung der Größen (nur!) eines Netzwerkzweiges,
- Vereinfachung größerer Netzwerke,
- Untersuchung von Leistungs- und Anpassungsproblemen.

Bei Erweiterung des Verfahrens kann der passive Zweipol selbst ein größerer Netzwerkteil sein, der durch einen (klemmen-) gleichwertigen "Ersatzaußenwiderstand"  $R_{\rm a}$  substituiert wird. So lassen sich in einem Folgeschritt auch mehrere seiner Zweiggrößen ermitteln.

Zur Reduktion eines größeren Netzwerkes auf einen Ersatzwiderstand  $R_{\rm a}$  verhelfen die Gesetze der Reihen-/ Parallelschaltung, Stern-Dreieck-Umformung oder gleichwertige andere Verfahren.

#### Hinweis:

- beim Ersatz größerer Netzwerkteile bestimmt man ihre Ersatzgrößen zweckmäßig mit der Knotenspannungsanalyse (Kap. 3.3),
- bei mehreren Quellen im aktiven Zweipol kann der Überlagerungssatz (Kap. 2.4.5) hilfreich sein,
- die Zweipoltheorie lässt sich auf Netzwerke mit gesteuerten Quellen erweitern (Kap. 2.6). Dann werden die Ersatzgrößen mit dem Probestrom-, Probespannungsverfahren bestimmt.
- bei nichtlinearen Netzwerken ist die Zweipoltheorie für den linearen Netzwerkanteil zulässig (s. Kap. 2.5).

Die Zweipoltheorie eignet sich nicht zur Bestimmung *aller* Zweiggrößen eines Netzwerkes. Dafür müssen entweder die vollständigen Kirchhoffschen Gleichungen gelöst oder Maschenstrom- und Knotenspannungsanalyse herangezogen werden.

Abb. 2.4.10 erläutert die Anwendung der Zweipoltheorie. Gesucht sei der Strom durch  $R_4$ . Wir führen an seinen Anschlussstellen die Klemmen AB ein und legen damit den passiven Zweipol  $R_4 = R_a$  als (Ersatz-) Außenwiderstand des Grundstromkreises fest. Die restliche Schaltung mit den Quellen ist der aktive Zweipol. Zweckmäßig wird sie so umgezeichnet, dass die Zuordnung aktiver-passiver Zweipol deutlich hervortritt.

 $<sup>^{27}{\</sup>rm Nicht}$  zu verwechseln mit der Zweitortheorie (Kap. 2.6).

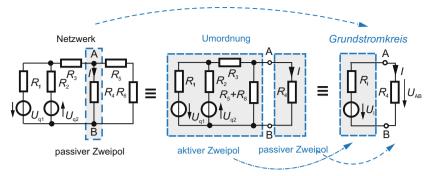


Abb. 2.4.10. Zweipoltheorie. Aufteilung eines Netzwerkes in aktiven und passiven Zweipol. Bestimmung der Ersatzkenngrößen und Rückführung auf den Grundstromkreis

Jeder lineare aktive Zweipol hat

- eine Leerlaufspannung  $U_1 = U_{AB}|_{I=0}$ ,
- einen Kurzschlusstrom  $I_k = I_{AB}|_{U_{AB}=0} = U_l/R_i$  herrührend vom zugeordneten (noch unbekannten) Quellenstrom  $I_q$ ,
- einen Ersatzinnenwiderstand R<sub>i</sub> zwischen AB gemessen oder berechnet.

Mit den Strom-Spannungs-Gleichungen  $U_{AB} = U_1|_{AB} - IR_i$  bzw.  $I = I_k|_{AB} - U_{AB}G_i$  des aktiven Zweipols stellt sich beim Anschalten des passiven Zweipols  $U_{AB} = R_a I$  der gesuchte Strom I bzw. die gesuchte Spannung ein (s. Gl. (2.4.1a)):

$$U = \frac{R_{\rm a}}{R_{\rm i} + R_{\rm a}} U_{\rm l}, \ I = \frac{G_{\rm a}}{G_{\rm i} + G_{\rm a}} I_{\rm k} \qquad \text{Grundgleichungen}$$

$$U = R_{\rm a} I, \ U_{\rm l} = R_{\rm i} I_{\rm k}, \ U = U_{\rm AB} \ I = I_{\rm AB}. \qquad \text{der Zweipoltheorie}$$
(2.4.19)

Dabei sind  $U_l$ ,  $I_k$  und  $R_i$  Ersatzgrößen  $U_l \equiv U_{qers}$ ,  $I_k \equiv I_{qers}$ ,  $R_i \equiv R_{iers}$ , was der Index "ers" unterstreicht (wir verzichten künftig darauf).

**Kenngrößenbestimmung** Die Kenngrößen des linearen aktiven Zweipols werden bestimmt:

- 1. Experimentell durch Messung aus dem
  - Leerlaufversuch (I=0): Spannungsmessung mit unendlich hohem Spannungsmesserwiderstand ( $R_a \to \infty$ , d. h. I=0) ergibt die Leerlauf- oder Quellenspannung  $U_1 = U_q$ ,
  - Kurzschlussversuch ( $U_{AB} = 0$ ): Strommessung mit Strommesserwiderstand  $R_a = 0$ , (d. h. U = 0) ergibt den Kurzschluss- oder Quellenstrom  $I_k = I_q$ ,

— Belastungsversuch ( $U_{AB} \neq 0$ ,  $I \neq 0$ ): Messung der Spannungen  $U_1$ ,  $U_2$  und Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  bei Belastung mit zwei verschiedenen Widerständen  $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$  und Berechnung der Kenngrößen mit Gl. (2.2.3) resp. (2.2.5).

#### 2. Rechnerisch durch

- die Leerlaufspannung  $U_1 = U_q$  (bei I = 0),
- den Kurzschlussstrom  $I_k = I_q$  (bei U = 0),
- den *Innenwiderstand*  $R_i$ , indem sämtliche (unabhängige<sup>28</sup>) Stromund Spannungsquellen außer Betrieb gesetzt werden (Stromquellen entfernen, Spannungsquellen durch Kurzschluss ersetzen). Der errechnete Widerstand zwischen den Zweipolklemmen AB ist der Innenwiderstand  $R_i$ .

Ein weiteres, nützliches Verfahren ist die *Probestrommethode*: Man legt an die Schaltung mit außer Kraft gesetzten unabhängigen Quellen eine Probestromquelle  $I_{\rm pr}$  und berechnet die Spannung  $U_{\rm AB}$ . Der Innenwiderstand beträgt  $R_{\rm i} = U_{\rm AB}/I_{\rm pr}$ . Das Verfahren eignet sich besonders für Netzwerke mit gesteuerten Quellen.

Bei der experimentellen Bestimmung von  $I_{\rm k}$  wird stillschweigend angenommen, dass der aktive Zweipol die Kurzschlussbelastung verträgt. Besonders kleine Innenwiderstände verursachen sehr große Kurzschlussströme, die ihn u. U. zerstören. Zum Erlernen der Grundgesetze wird der Kurzschluss gedanklich ohne Einschränkung eingesetzt.

Zusammengefasst ergibt sich als

### Lösungsmethodik Zweipoltheorie

- Auftrennen des Netzwerkes am Ort der gesuchten Größe in aktiven und passiven Ersatzzweipol.
- 2. Bestimmung der Zweipolkennwerte des passiven  $(R_a)$  und aktiven Zweipols  $(U_1, I_k, R_i)$ . Entscheidung zwischen Strom- und Spannungsquellenersatzschaltung.
- 3. Bestimmung der gesuchten Größe  $(U_{AB}, I_{AB})$  mit den Zweipolkennwerten Pkt. 2 bei Zusammenschaltung von passivem und aktivem Zweipol (Modell des Grundstromkreises).
- 4. Berechnung der gesuchten Netzwerkgrößen aus der Lösung Pkt. 3.

Beispiel 2.4.7 Kenngrößen des aktiven Zweipols Wir ermitteln die Zweipolkenngrößen für folgende Schaltungen (Abb. 2.4.11)

 $<sup>^{28}\</sup>mathrm{Abhängige}$ oder gesteuerte Quellen (Kap. 2.6.4) werden anders berücksichtigt.

Schaltung a Die Leerlaufspannung folgt aus der Spannungsteilerregel

$$U_{\rm AB}|_{I=0} = U_{\rm l} = U_{\rm q} \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

der Innenwiderstand  $R_i$  ergibt sich bei Kurzschluss von  $U_q$  zu  $R_i = R_1 \parallel R_2$  und der Kurzschlussstrom folgt direkt aus der Schaltung  $I_k = U_q/R_1 = U_l/R_i$  (Rechenkontrolle).

Schaltung b Die Leerlaufspannung setzt sich aus  $U'_1$  (nur von  $I_{q1}$  stammend) und  $U_{q2}$  zusammen (Richtung  $U_{q2}$  beachten!):  $U_1 = U'_1 + U_{q2} = I_{q1}R_1 + U_{q2}$ . Der Innenwiderstand beträgt (Abtrennen von  $I_{q1}$ , Kurzschluss  $U_{q2}$ )  $R_i = R_1 + R_2$ . Der Kurzschlussstrom wird zweckmäßig mit dem Überlagerungssatz ermittelt über  $I_{k1}$  (herrührend von  $I_{q1}$ ) und  $I_{q2}$  (herrührend von  $U_{q2}$ ):

$$I_{\rm k1} = I_{\rm q1} \frac{G_2}{G_1 + G_2} = I_{\rm q1} \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{(Stromteilerregel)}, \quad I_{\rm k2} = \frac{U_{\rm q2}}{G_1 + G_2}.$$

Der Gesamtstrom folgt damit zu

$$I_{\rm k} = I_{\rm k1} + I_{\rm k2} = \frac{I_{\rm q1}R_1 + U_{\rm q2}}{R_1 + R_2}.$$

Schaltung c Für die Berechnung der Leerlaufspannung berechnet am besten zunächst die Kurzschlussströme  $I_{\rm k1},\ I_{\rm k2}$  herrührend von den Spannungen  $U_{\rm q1},\ U_{\rm q2}$ :  $I_{\rm k1}=U_{\rm q1}/R_1,\ I_{\rm k2}=U_{\rm q2}/R_2$  und daraus die Leerlaufspannung  $U_{\rm l}$ :

$$U_{\rm l} = \frac{I_{\rm kges}}{G_{\rm iges}} = \frac{\sum I_{\rm k}}{\sum G_{\rm i}} = \frac{I_{\rm k1} + I_{\rm k2}}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{U_{\rm q1}G_1 + U_{\rm q2}G_2}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

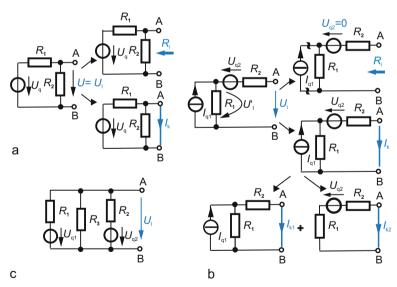


Abb. 2.4.11. Beispiele zur Zweipoltheorie. (a) Einfache Schaltung mit Schritten zur Kennwertbestimmung. (b) Schaltung mit Strom- und Spannungsquelle. (c) Parallelschaltung von zwei linearen Spannungsquellen am Lastwiderstand  $R_3$ , Bestimmung der Ersatzgrößen

Gleichwertig kann die Leerlaufspannung auch durch Anwendung der Spannungsteilerregel für jede Spannungsquelle gewonnen werden:

$$U_{\rm l} = U_{\rm q1} \frac{R_3 \parallel R_2}{R_1 + R_3 \parallel R_2} + U_{\rm q2} \frac{R_3 \parallel R_1}{R_2 + R_3 \parallel R_1} \equiv \frac{U_{\rm q1} G_1 + U_{\rm q2} G_2}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Das Ergebnis lässt sich identisch umformen.

Der Innenwiderstand besteht aus der Parallelschaltung der drei Leitwerte

$$R_{\rm i} = \frac{1}{G_{\rm i}} = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3.$$

Beispiel 2.4.8 Ersatzinnenwiderstand Zur Bestimmung des Ersatzinnenwiderstandes des gegebenen aktiven Zweipols Abb. 2.4.12a werden die Spannungsquellen durch Kurzschluss ersetzt und die Stromquellen aufgetrennt. Dadurch gehen die Widerstände  $R_1$ ,  $R_3$  nicht in das Ergebnis ein. Für die übrige Schaltung Abb. 2.4.12b beginnt die Berechnung in Richtung auf die Klemmen zu. Die Analyse endet mit  $R_i$  bzw.  $G_i$ 

$$G' = G_2 + G_4 = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}.$$

Der Widerstand R'' = 1/G'' besteht aus der Reihenschaltung von  $R_5$  und 1/G':  $R'' = R_5 + 1/G' = 1/G''$ . G'' liegt parallel zu Leitwert  $G_6$  und ergibt schließlich

$$G_{\rm i} = G_6 + G'' = G_6 + \frac{1}{R_5 + 1/G'} = G_6 + \frac{1}{R_5 + 1/(G_2 + G_4)}.$$

Zahlenbeispiel: Mit den Werten  $R_2=10\,\Omega,\,R_4=30\,\Omega$ ,  $R_5=20\,\Omega,\,R_6=40\,\Omega$  ergibt sich:  $G'=0,133\,\mathrm{S},\,R'=7,5\,\Omega,\,R''=20\,\Omega+7,5\,\Omega=27,52\,\Omega,\,G''=1/R''=36,4\,\mathrm{mS},\,G_i=1/(40\,\Omega)+36,4\,\mathrm{mS}=61,4\,\mathrm{mS}.$ 

# 2.4.5 Überlagerungssatz

In einem linearen physikalischen System, auf das mehrere Ursachen einwirken, entsteht die Gesamtwirkung durch Summation (Überlagerung) der Teilwirkungen als Folge der Teilursachen (Helmholtz 1853).

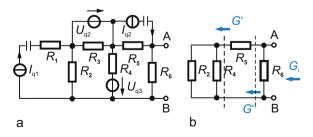


Abb. 2.4.12. Bestimmung des Innenwiderstandes am aktiven Zweipol. (a) Schaltung (aufgetrennte Stromquellen). (b) Ersatzanordnung zur Bestimmung des Innenwiderstandes Eine Teilwirkung wird bestimmt durch Nullsetzen aller Teilursachen außer der gerade betrachteten. Daraus folgt weiter:

Ein physikalisches System ist linear, wenn der Überlagerungssatz zutrifft und umgekehrt.

Der Überlagerungssatz gilt universell. Er bestimmt lineare Zusammenhänge in vielen Teilgebieten der Physik. In Netzwerken mit mehreren Quellen (aufgefasst als Teilursachen) denkt man sich dann die Ströme bzw. Spannungen in den einzelnen Netzwerkzweigen entstanden als Überlagerung von Teilwirkungen, die sich zur betreffenden Gesamtgröße addieren. Dieser Ansatz vereinfacht die Netzwerkanalyse merklich, denn zur Berechnung der Teilwirkungen reichen oft Zweipolbetrachtungen:

In einem linearen Netzwerk mit mehreren unabhängigen Quellen (Spannung, Strom) kann jede Zweiggröße (Strom, Spannung) als vorzeichenbehaftete Summe der Teilzweiggrößen berechnet werden, die jeweils von einer unabhängigen Quelle (bei Nullsetzung der restlichen) herrühren: Überlagerungs-, Superpositionsprinzip.

Nullsetzen einer nicht benötigten Spannung heißt, ihren *Quellenwert auf null* zu setzen, (nicht den Innenwiderstand bzw. Innenleitwert!). Bei Stromquellen gilt entsprechendes: man setzt den *Quellenstrom auf null*, ihr Innenleitwert bleibt in der Schaltung.

# Lösungsmethodik Überlagerungssatz

- 1. Setze alle unabhängigen Quellen  $Q_n$  (außer der ersten) außer Betrieb (ideale Spannungsquellen durch Kurzschluss ersetzen, ideale Stromquellen auftrennen, Leerlauf) und berechne die gesuchte Zweiggröße, z. B. den Zweigstrom  $I_{\nu 1}$  herrührend von  $Q_1$  (mit einer zweckmäßigen Methode).
- 2. Verfahre so der Reihe nach mit allen anderen Quellen: berechne also die gesuchte Zweiggröße  $I_{\nu 2}$ , herrührend von  $Q_2$  usw.
- 3. Addiere die Teilwirkung  $I_{\nu 1} \dots I_{\nu n}$  vorzeichenbehaftet zur Gesamtwirkung  $I_{\nu {
  m ges}}.$

#### Hinweis:

- gesteuerte Quellen (s. Kap. 2.6) werden bei Anwendung des Überlagerungssatzes nicht außer Betrieb gesetzt, sie beeinflussen daher die Teilergebnisse;
- vor Anwendung des Überlagerungssatzes Schaltung vereinfachen;
- bei Analyse eines Netzwerkes mit mehreren unabhängigen Quellen mittels der Kirchhoffschen Gleichungen (oder darauf aufbauender Verfahren) treten in der Lösung die einzelnen Quellenanteile additiv auf. Das ist Ergebnis des Überlagerungssatzes.

Der Aufwand bei Anwendung des Übertragungssatzes sinkt, wenn Quellengruppen zusammengefasst werden, z.B. alle Strom- und Spannungsquellen. Andererseits kann zur Berechnung der Einzelwirkungen die Zweipoltheorie dienen.

Der Überlagerungssatz versagt bei nichtlinearen Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen, also nichtlinearen Netzwerken oder für Leistungen auch in linearen (!) Netzwerken.

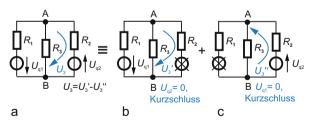
So soll ein gesuchter Zweigstrom durch einen Widerstand R aus zwei Anteilen bestehen:  $I_{\rm ges}=I_1+I_2$ . Dann beträgt die Leistung im Widerstand  $P=RI^2=R\left(I_1+I_2\right)^2=R\left(I_1^2+2I_1I_2+I_2^2\right)$  (richtige Lösung). Nach dem Überlagerungssatz würde folgen: nur Strom  $I_1:\to P_1=RI_1^2$ , nur Strom  $I_2:\to P_2=RI_2^2$ . Die Überlagerung ergibt:  $P_{\rm ges}=P_1+P_2=R\left(I_1^2+I_2^2\right)\neq R(I_1+I_2)^2$  (falsch!). Dabei ist es gleichgültig, ob das Netzwerkelement in seinem aktiven oder passiven Teil liegt.

Berücksichtigt man beispielsweise eine Widerstandsänderung durch Eigenerwärmung, so wird er nichtlinear und es darf der Überlagerungssatz nicht angewendet werden. Ob der Effekt im Einzelfall relevant ist, muss fallspezifisch entschieden werden (s. Beispiel 2.3.2).

Beispiel 2.4.9 Überlagerungssatz Im Netzwerk Abb. 2.4.13 soll die Spannung  $U_3$  (in der angenommenen Richtung) durch Überlagerung bestimmt werden. Nach der Lösungsmethodik sind folgende Schritte durchzuführen:

1. Kurzschluss aller Spannungsquellen außer  $U_{q1}$  (hier also  $U_{q2}=0$ ). Damit verbleibt Schaltung b). Nach der Spannungsteilerregel ergibt sich der Spannungsabfall  $U'_3$  herrührend von  $U_{q1}$ :

$$U_{3}' = U_{\mathbf{q}1} \frac{R_{2} \parallel R_{3}}{R_{1} + R_{2} \parallel R_{3}} = U_{\mathbf{q}1} \frac{R_{2}R_{3}}{R_{1} \left(R_{2} + R_{3}\right) + R_{2}R_{3}}.$$



**Abb. 2.4.13.** Bestimmung der Ersatzgrößen eines aktiven Zweipols mit dem Überlagerungssatz. (a) Ausgangsschaltung. (b) Verhältnisse, wenn nur Quelle  $U_{\rm q1}$  wirkt, (b) dto. bei Wirkung nur der Quelle  $U_{\rm q2}$ 

2. Kurzschluss aller Spannungsquellen außer  $U_{\rm q2}$  (Abb. c). Wegen der Richtung von  $U_{\rm q2}$  entsteht der Spannungsabfall  $U_3''$  in der eingetragenen Weise positiv. Die Spannungsteilerregel führt auf

$$U_3'' = U_{q2} \frac{R_1 \parallel R_3}{R_2 + R_1 \parallel R_3}.$$

3. Die Überlagerung hat von der für  $U_3$  positiv eingeführten Richtung auszugehen, deshalb ist die Differenz zu bilden

$$\begin{split} U_3 &= U_3' - U_3'' = \frac{U_{\text{q}1}R_2R_3}{R_1\left(R_2 + R_3\right) + R_2R_3} - \frac{U_{\text{q}2}R_1R_3}{R_2\left(R_1 + R_3\right) + R_1R_3} \\ &= \frac{R_3\left(U_{\text{q}1}R_2 - U_{\text{q}2}R_1\right)}{R_2\left(R_1 + R_3\right) + R_1R_3}. \end{split}$$

Bei Lösung des Problems mit den Kirchhoffschen Sätzen steigt der Aufwand.

# 2.5 Nichtlinearer resistiver Grundstromkreis\*

**Einführung** Zahlreiche Bauelemente, wie etwa Glühlämpchen, Heiß-, Kaltleiter, Dioden, Transistoren, Batterien, Solarzellen, elektronische Netzgeräte, Spulen mit Eisenkern oder nichtlineare Kapazitäten rechtfertigen die Erweiterung des Grundstromkreises zum *nichtlinearen Grundstromkreis*.

Uneingeschränkt gelten auch für den nichtlinearen Grundstromkreis die Kirchhoffschen Sätze, denn sie basieren auf physikalischen Grundaxiomen. Wenigstens eine Zweigbeziehung ist dabei nichtlinear.

Dann entsteht stets ein nichtlineares Gleichungssystem für die unabhängigen Ströme und Spannungen. Eine explizite Lösung nach den Unbekannten ist allgemein nicht möglich.

Im Grundstromkreis können entweder der passive oder der aktive Zweipol oder beide nichtlinear sein. Beispielsweise ist jede Transistorgrundschaltung mit einem Transistor als Lastelement, die sog. *Transistorlastschaltung*, einerseits ein nichtlinearer Grundstromkreis, andererseits eine in der Elektronik massenhaft eingesetzte Schaltung (nähere Einzelheiten s. Kap. 2.7.5). Selbst eine Solarzelle mit angeschlossenem Lastelement ist ein verbreiteter nichtlinearer Grundstromkreis.

Enthält das Netzwerk nur ein nichtlineares Schaltelement, so lässt sich der Teil außerhalb dieses Elementes stets durch einen aktiven (linearen) Zweipol ersetzen und so das Problem auf den Grundstromkreis mit einem nichtlinearen passiven Zweipol zurückführen.

Die Analyse des nichtlinearen Grundstromkreises umfasst zwei Schritte:

- 1. Schaltungsaufbereitung, d. h.
  - Wahl der Bauelemente-/ Netzwerkmodelle und ihrer Klemmenbeschreibung (analytisch, grafisch, stückweise lineare Approximation),

- Trennung in linearen und nichtlinearen Teil (wenn möglich),
- Ersatz des linearen Teils durch eine Zweipolersatzschaltung.

### 2. Netzwerkanalyse, z. B.

- analytisch (was nur selten gelingen dürfte),
- grafisch (anschaulich, erlaubt einen qualitativen Einblick),
- numerisch durch entsprechende Lösungsverfahren oder besser durch Schaltungssimulation. Solche Programme (wie z.B. Multisim/EWB, PSPICE) enthalten Modelle aller gängigen nichtlinearen Bauelemente, verfügen über Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen und geben die Ergebnisse komfortabel aus.

Die Netzwerkanalyse schließt neben der Arbeitspunktbestimmung gewöhnlich eine Kleinsignalanalyse ein mit dem Ziel, Aussagen zum Übertragungsverhalten bei kleinen Änderungen der Signalspannung zu erhalten. Fürs erste betrachten wir den Grundstromkreis aus linearem aktiven und nichtlinearem passiven Zweipol mit dem Ziel, eine Ersatzkennlinie zu konstruieren.

## 2.5.1 Zusammenschaltung nichtlinearer und linearer Schaltelemente, Ersatzkennlinie

Beim Zusammenschalten eines nichtlinearen und eines linearen Elementes gelten entsprechend der Knoten- und Maschensätze

- Addition der Teilspannungen bei Reihenschaltung für gegebenen Strom,
- Addition der Ströme für eine gegebene Spannung.

Im Ergebnis entsteht eine Ersatzkennlinie. So sind beispielsweise bei einer Halbleiterdiode mit der Kennlinie  $I(U_{\rm D})=I_{\rm S}\left(\exp\frac{U_{\rm D}}{U_{\rm T}}-1\right)$  nach Gl. (2.3.14) bei Reihenschaltung eines Widerstandes R die Teilspannungen  $U_1+U_{\rm D}=U$  für jeden Stromwert zu addieren (Abb. 2.5.1a). Das Ergebnis I(U) ist die Ersatzkennlinie.

$$U = U_1 + U_D = IR + U_T \ln \left(\frac{I}{I_S} + 1\right) = U(I).$$
 (2.5.1a)

Die Umkehrfunktion existiert nicht. Der Zusatzwiderstand R "verflacht" (linearisiert) den Verlauf, man spricht auch von *Scherung* der Diodenkennlinie.

Bei einer Parallelschaltung liegt an beiden Elementen die gleiche Spannung  $U=U_{\rm D}$  und deshalb sind die Teilströme  $I_1,\ I_2$  für jede Spannung U zu addieren

$$I = I_1 + I_2 = I_S \left( \exp \frac{U}{U_T} - 1 \right) + \frac{U}{R} = I(U).$$
 (2.5.1b)

Auch hier schwächt der ohmsche Leitwert 1/R die Nichtlinearität ab.

Eine Ersatzkennlinie lässt sich auch für einen nichtlinearen aktiven Zweipol konstruieren, beispielsweise durch Zusammenschalten einer idealen Quelle mit einem nichtlinearen Element. Zu seinem Aufbau ist vorab die Darstellung einer Nichtlinearität, hier stellvertretend wieder eine Halbleiterdiode, in verschiedenen I, U-Zuordnungen zweckmäßig (Abb. 2.5.1b). Dabei wird zwischen Diodengrößen  $I_D$ ,  $U_D$ , gebunden an das Schaltzeichen und den Klemmengrößen I, U unterschieden. Im VPS folgt mit Kennlinie (1) nach Gl. (2.5.1a) die übliche Form. Bei Umpolung der Diode und Darstellung wieder im VPS ( $I = -I_D$ ,  $U = -U_D$ ) entsteht Kennlinie (2) durch Spiegelung der Kennlinie (1) sowohl an der I- als auch U-Achse. Wird dagegen Kennlinie (1) im EPS dargestellt ( $I = -I_D$ ,  $U = U_D$ ), so erhält man Kennlinie (3) als Spiegelung der Kennlinie (1) an der U-Achse. Je nach Zuordnung der Klemmengrößen zu den vereinbarten I, U-Richtungen entstehen ganz unterschiedliche Kennlinien!

Mit diesen Vorbetrachtungen lässt sich durch Reihenschaltung einer idealen Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  leicht eine "Spannungsquelle mit nichtlinearem Innenwiderstand" modellieren (Abb. 2.5.2). Die Reihenschaltung von Diode (VPS) und Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  (Abb. 2.5.2a) verschiebt die Diodenkennlinie um  $U_{\rm q}$  nach rechts. Das ist der Verlauf Abb. 2.5.2b in Erzeugerpfeilrichtung. Zu Abb. a) gehört mit  $U = U_{\rm D} + U_{\rm q}$  die Ersatzkennlinie

$$I = I_{\rm D} = I_{\rm S} \left( \exp \frac{U - U_{\rm q}}{U_{\rm T}} - 1 \right).$$
 (2.5.2)

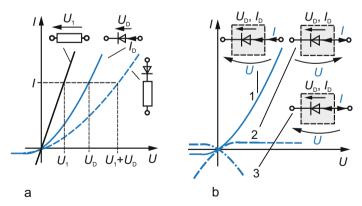


Abb. 2.5.1. Kennlinien einer Halbleiterdiode als Beispiel eines nichtlinearen passiven Zweipols. (a) Reihenschaltung Diode und Widerstand, Ersatzkennlinie durch Spannungsaddition. (b) Kennliniendarstellungen mit verschiedenen Strom-Spannungs-Zählpfeilsystemen (1), (2) VPS, (3) EPS

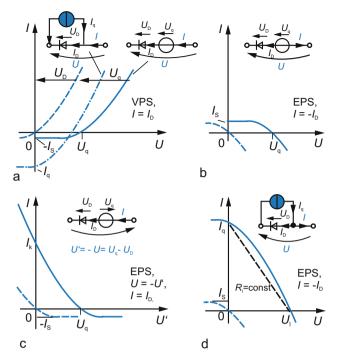


Abb. 2.5.2. Nichtlinearer aktiver Zweipol. (a) Reihen-/Parallelschaltung von flussgepolter Diode mit Spannungs- oder Stromquelle, Darstellung im VPS. (b) Reihenschaltung von Spannungsquelle mit sperrgepolter Diode. (c) Reihenschaltung von Spannungsquelle und flussgepolter Diode, EPS. (d) Parallelschaltung von Stromquelle und flussgepolter Diode, EPS

Ein Flussstrom I>0 fließt nur, wenn die anliegende Spannung U größer als die Quellenspannung  $U_{\rm q}$  ist: "Zweipol mit Gegenspannung". Bei umgepolter Stromrichtung an der Diode (Anordnung arbeitet als aktiver Zweipol, Übergang zur EPS an der Diode) entsteht die Ersatzkennlinie: "Spannungsquelle mit Leerlaufspannung  $U_{\rm l}=U_{\rm q}$ ", nichtlinearem Innenwiderstand und kleinem Kurzschlussstrom  $I_{\rm k}=I_{\rm S}$ . Das ist anschaulich verständlich, es liegt die Reihenschaltung von Spannungsquelle und gesperrter Diode vor: die Spannung  $U_{\rm q}$  "sperrt" die Diode bei Kurzschluss des aktiven Zweipols und es kann maximal der Sättigungsstrom  $I_{\rm S}$  fließen. Die Ersatzkennlinie folgt aus der Diodengleichung (2.3.14) sowie  $I=-I_{\rm D}$  und dem Maschensatz  $U=U_{\rm D}+U_{\rm q}$  zu

$$I = -I_{\mathrm{D}} = -I_{\mathrm{S}} \left( \exp \frac{U_{\mathrm{D}}}{U_{\mathrm{T}}} - 1 \right) = I_{\mathrm{S}} \left( 1 - \exp \frac{U - U_{\mathrm{q}}}{U_{\mathrm{T}}} \right).$$

Das ist die Kennlinie von Abb. 2.5.2a, gespiegelt an der U-Achse.

Wird das EPS beibehalten, die Diode aber umgepolt (Abb. 2.5.2c), so entsteht wieder die Ersatzkennlinie einer Spannungsquelle mit "nichtlinearem

Innenwiderstand", aber hohem Kurzschlussstrom  $I_{\rm k}$ . Bei Kurzschluss des aktiven Zweipols liegt die Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  voll über der flussgepolten Diode. Die Ersatzkennlinie lautet mit  $I=I_{\rm D}$  und  $U_{\rm D}=U_{\rm q}-U$ 

$$I = I_{\rm S} \left( \exp \frac{U_{\rm q} - U}{U_{\rm T}} - 1 \right) \approx I_{\rm k} \exp \frac{-U}{U_{\rm T}},$$

da  $I_{\rm k} = I_{\rm S} \left( \exp \frac{U_{\rm q}}{U_{\rm T}} - 1 \right) \approx I_{S} \exp \frac{U_{\rm q}}{U_{\rm T}}$ . Das ist Kennlinie a), gespiegelt um die I-Achse am Punkt  $U_{\rm q}$ . Sie beginnt im Flussbereich mit dem Kurzschlussstrom  $I_{\rm k}$  und geht bei  $U_{\rm q}$  durch null.

Wird schließlich der Diode (in EPS, Kennlinie (3)) in Abb. 2.5.2b eine Stromquelle  $I_{\rm q}$  parallel geschaltet (Abb. 2.5.2d), so ergibt sich mit  $U_{\rm D}=U,\,I_{\rm D}=-I_{\rm 1}$  die Ersatzkennlinie

$$I = I_{\rm q} + I_{\rm 1} = I_{\rm q} - I_{\rm S} \left( \exp \frac{U}{U_{\rm T}} - 1 \right) \, {\rm mit} \, I_{\rm k} = \left. I \right|_{U=0} = I_{\rm q} - I_{\rm S} \approx I_{\rm q}. (2.5.3)$$

Schaltet man in Abb. 2.5.2a der Diode eine Stromquelle  $I_{\rm q}$  parallel (mit  $I=I_{\rm D}-I_{\rm q}$ ), so verschiebt sich die Kennlinie (bei  $U_{\rm q}=0$ ) nach  $-I_{\rm q}$ . Übergang zum EPS bedeutet Umkehr des Gesamtstromes, also Spiegelung an der U-Achse und so erklärt sich die Kennlinie Abb. 2.5.2d.

Das Ergebnis stellt Kennlinie und Modell einer Solarzelle bzw. Fotodiode dar. Die Stromquelle  $I_{\rm q}$  ist der einfallenden Strahlung proportional, sie entspricht praktisch dem Kurzschlussstrom  $I_{\rm k}$  der Ersatzquelle.

Die Solarzelle wird durch einen nichtlinearen aktiven Zweipol mit dem Kurzschlussstrom  $I_{\bf k}$  und einer Leerlaufspannung  $U_1$  modelliert.

Für diesen nichtlinearen aktiven Zweipol gilt nicht  $U_1 = I_k R_i$ , denn die Nichtlinearität erlaubt keine Definition des Innenwiderstandes  $R_i$ !

Die Ersatzkennlinie einer idealen Spannungs- bzw. Stromquelle zusammengeschaltet mit einer Halbleiterdiode repräsentiert drei *typische*, *nichtlineare* aktive Zweipole:

— den Stromquellentyp mit Stromsättigungscharakter über einen größeren Spannungsbereich (Abb. 2.5.2b), dazu müsste allerdings der als Quellenstrom  $I_q$  fungierende Diodensättigungsstrom "einstellbar" sein. Dieser Quellentyp wird auch als Konstantstromquelle bezeichnet (s. Abb. 2.2.1):

Eine Konstantstromquelle ist ein aktiver Zweipol, dessen Klemmenstrom in bestimmten Grenzen konstant ist. Sie arbeitet in diesen Grenzen wie eine ideale Stromquelle (Abb. 2.2.1b).

 den niederohmigen Spannungsquellentyp mit geringerem Innenwiderstand im Vergleich zur linearen Zweipolquelle (Abb. 2.5.2c), er legt die Grundlage für die Konstantspannungsquelle:

Eine Konstantspannungsquelle ist ein aktiver Zweipol, dessen Klemmenspannung in bestimmten Grenzen konstant bleibt. Sie arbeitet in diesen Grenzen wie eine ideale Spannungsquelle (Abb. 2.2.1a).

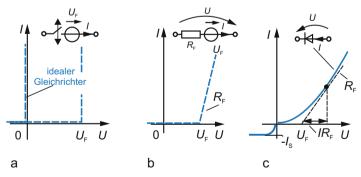
— den Stromquellentyp *ohne Hilfsspannung* mit eingeprägtem Quellenstrom und relativ kleiner Leerlaufspannung  $U_q$ , gegeben durch die Diodenflussspannung (0,7 V) (Abb. 2.5.2d).

Während die letzte Form eine natürliche Ersatzschaltung der Solarzelle und des Fotoelementes ist, hat die erstgenannte Stromquelle grundsätzliche Bedeutung für die Transistorschaltungstechnik (s. Kap. 2.7.5).

## 2.5.2 Kennlinienapproximationen

Oft vereinfacht sich die Schaltungsanalyse, wenn eine nichtlineare Kennlinie durch eine einfachere Form approximiert und ggf. durch eine Ersatzschaltung nachgebildet wird. Approximationsfunktionen sind Potenzkennlinien, die tanh-Kennlinie für eine Sättigungsfunktion, stückweise lineare Annäherungen oder das Schaltermodell. Am Beispiel der Halbleiterdiode wird das Verfahren gezeigt (Abb. 2.5.3). Ausgang ist die Diodenkennlinie I = f(U) Gl. (2.3.14) als nichtlineare algebraische Gleichung mit richtungsabhängigem Stromfluss. Ein idealer Gleichrichter hätte allerdings folgende Eigenschaften

$$U=0$$
 für  $I\geq 0$   $I=0$  für  $U\leq 0$  Idealer Gleichrichter (2.5.4)



**А**bb. 2.5.3. Kennliniennäherungen der Halbleiterdiode. (a) Ideale Gleichrichtung, Schaltermodell (Knickkennlinie). (b) Ergänzung einer Versetzungsspannung  $U_{\rm F}$ . (c) Knickkennlinie mit Zusatzwiderstand  $R_{\rm F}$  als Näherung der tatsächlichen Kennlinie (Fluss- und Sperrbereich unterschiedliche Maßstäbe)

Sie bilden das Schaltermodell mit einer Umschaltvorschrift Gl. (2.3.26). Die Abbildung zeigt das entsprechende Schaltsymbol.

Der ideale Gleichrichter hat im Flussfall keinen Spannungsabfall und führt im Sperrfall keinen Strom.

Im nächsten Schritt wird das Modell durch eine Flussspannung  $U_{\rm F}$  (Richtwert 0,7 V) in Reihe zur idealen Diode ergänzt (Kennlinienverschiebung nach rechts).

Um schließlich einen endlichen Widerstand  $R_{\rm F}$  im Flusszustand zu modellieren (Bahnwiderstände, aber auch zur Annäherung an die reale Diodenkennlinie), wird der Flusswiderstand  $R_{\rm F}$  in Reihe zur ideale Diode geschaltet (Abb. 2.5.3b). So entsteht eine stückweise genäherte Kennlinie. Stromfluss erfolgt erst, wenn die anliegende Spannung größer als die Flussspannung ist.

Die eingeführte ideale Spannungsquelle hat die Bedeutung eines hypothetischen Netzwerkelementes (sie wirkt hier als Leistungsverbraucher!) und speist keine Energie in den Kreis (sonst müsste die Spannung bei leerlaufender Diode messbar sein).

Experimentell werden die Hilfsspannung  $U_{\rm F}$  und der Flusswiderstand  $R_{\rm F}$  aus der realen Diodenkennlinie bestimmt: Anlegen einer Tangente an die Kennlinie bei merklichem Flussstrom und Bestimmung von  $R_{\rm F}$  und  $U_{\rm F}$  als Achsenabschnitt (Abb. 2.5.3c). Auf die Modellierung des Sättigungsstromes verzichtet dieses einfache Modell. Es dient z. B. zur Modellierung einer Z-Diode, deren Sperrstrom bei einer bestimmten Spannung, der Z-Spannung, steil ansteigt. Als Ersatzschaltung werden zwei Knickdiodenmodelle parallel geschaltet: eines für die Flussrichtung, ein zweites (antiparallel) für die Sperrrichtung.

Das Diodenmodell eignet sich gut zur Modellierung einer Konstantspannungsquelle. Eine Stromeinprägung in eine flussgepolte Diode stellt etwa die Flussspannung  $U_{\rm F} \approx 0.7 \, {\rm V}$  ein (Abb. 2.5.4a, b). Ändert sich die Eingangsspan-

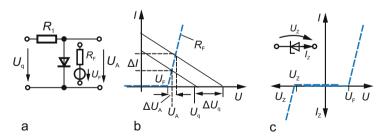


Abb. 2.5.4. Spannungsstabilisierung durch eine Diode. (a) Stabilisierung einer Spannung durch flussgepolte Diode, Ersatzschaltung mit abschnittsweise linearem Diodenmodell. (b) Kennlinie zur Anordnung (a). (c) Stabilisierung mit Z-Diode bei Ersatz der Diode in Abb. (a) durch eine Z-Diode

nung  $U_{\rm q}$  um  $\Delta U_{\rm q}$ , so schwankt die Ausgangsspannung um  $\Delta U_{\rm A}$ 

$$\Delta U_{\rm A} = \frac{r_{\rm d}}{r_{\rm d} + R_1} \Delta U_{\rm q} \approx \frac{r_{\rm d}}{R_1} \Delta U_{\rm q}. \tag{2.5.5}$$

Sie sinkt mit abnehmendem differenziellen Widerstand der Kennlinie: die Schaltung wirkt spannungsstabilisierend. Das gleiche Prinzip nutzt die Z-Diode (Abb. 2.5.4c). Sie hat nicht nur eine höhere Ausgangsspannung (die Z-Spannung), sondern erlaubt wegen des deutlich kleineren Widerstandes auch eine bessere Stabilisierung.

## 2.5.3 Arbeitspunkteinstellung

Beim Zusammenschalten des nichtlinearen aktiven Zweipols mit einem nichtlinearen passiven Zweipol müssen die Strom-Spannungsbeziehungen an der Schnittstelle übereinstimmen. Das Ergebnis ist der Arbeitspunkt AP:  $U_{\rm A}$ ,  $I_{\rm A}$ . Wir beschränken uns hier wegen der Anschaulichkeit auf eine grafische Lösung. Es gilt die

### Lösungsstrategie "Grafische Arbeitspunktbestimmung"

Eintragen der Kennlinien der aktiven und passive Zweipole in ein gemeinsames Diagramm (mit linearen I, U-Maßstäben, Erkennen der Leerlaufspannung und des Kurzschlussstromes aus den Achsenabschnitten  $U' = U_{\rm q}$   $(I=0), I_{\rm k} = I_{\rm q} \ (U=0)$ ).

Aufsuchen des Schnittpunktes beider Kennlinien: Arbeitspunkt. Sind mehrere möglich, so ist eine Stabilitätsüberlegung erforderlich.

Beispiel 2.5.1 Arbeitspunkt Wir schalten einen passiven Zweipol mit der Diodenkennlinie Gl. (2.3.14) an einen linearen aktiven Zweipol (Abb. 2.5.5a). Der Maschensatz ergibt:  $U_{\rm q} = IR_{\rm i} + U = IR_{\rm i} + U_{\rm T} \ln(I/I_{\rm S}+1)$  für den unbekannten Strom I oder  $U = U_{\rm q} - IR_{\rm i} = U_{\rm q} - R_{\rm i}I_{\rm S}(\exp U/U_{\rm T}-1)$  für die unbekannte Spannung U. Die Gleichungen sind nicht explizit nach U bzw. I auflösbar, also analytisch nicht zu behandeln.

Zur grafischen Lösung (Abb. 2.5.5b) wird folgendermaßen verfahren: Aufzeichnen der U,I-Kennlinien der aktiven und passiven Zweipole, der Schnittpunkt beider Kurven ist der Arbeitspunkt. Für die Zahlenwerte  $U_{\rm q}=1~{\rm V},~I_{\rm S}=1~{\rm nA},~R_{\rm i}=100~\Omega,~U_{\rm T}=25~{\rm mV}$  beträgt er (zeichnerische Genauigkeit)  $I\approx 6~{\rm mA},~U\approx 0,4~{\rm V}.$ 

Die Kirchhoffschen Gleichungen führen bei nichtlinearen Netzwerken immer auf ein nichtlineares Gleichungssystem. In Sonderfällen (abhängig von der Nichtlinearität) gelingt eine analytische Lösung, z. B. bei Potenzkennlinien der Form  $I=kU^Z$ . Beispielsweise liefert die Reihenschaltung der Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  mit dem Wider-

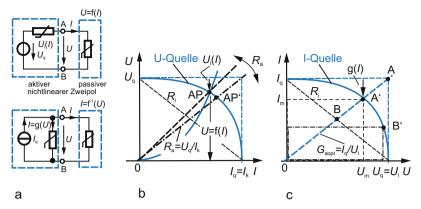


Abb. 2.5.5. Grundstromkreis mit nichtlinearen aktiven und passiven Zweipolen.
(a) Spannungs- und Stromquellendarstellung. (b) Graphische Arbeitspunktermittlung.
(c) Leistungsabgabe an den passiven Zweipol bei nichtlinearer Quelle mit Rechteck- bzw. angenäherter stetiger Kennlinie

stand R und dem nichtlinearen Netzwerkelement  $I=kU^2$  die Maschengleichung  $U_{\rm q}=U+RkU^2$ , die sich analytisch lösen lässt.

Auf numerische Lösungsverfahren verzichten wir, da hierfür heute Simulationsprogramme eingesetzt werden und derartige Lösungen nur noch in Sonderfällen anfallen (Kap. 3.5).

## 2.5.4 Leistungsumsatz im nichtlinearen Grundstromkreis

Auch der nichtlineare Grundstromstromkreis hat die gleiche Energieproblematik des entsprechenden linearen Stromkreises (s. Kap. 2.4.2), der Unterschied besteht aber darin, dass

- der aktive Zweipol nur über eine begrenzte Leistung verfügt und
- der Begriff Widerstand *nicht existiert*, sondern durch die jeweilige nichtlineare U, I-Relation ersetzt werden muss. Daher macht auch die Anpassbedingung  $R_i = R_a$  keinen Sinn.

Als Vorbereitung betrachten wir einen stückweise linearen aktiven Zweipol, der bis zur Quellenspannung den konstanten Quellenstrom  $I_{\rm q}$  liefert und bei  $U=U_{\rm q}$  abrupt auf null fällt (Abb. 2.5.5b, c). Seine angebotene Leistung  $P_{\rm q}=U_{\rm q}I_{\rm q}$  (Gl. (2.4.8)) macht Sinn: es ist die Leistungsfläche, die er tatsächlich bereitstellt. Bei Belastung mit einem variablen Lastleitwert  $G_{\rm a}=I/U$  wird die Verbraucherleistung  $P_{\rm a}=IU=U^2G_{\rm a}$  umgesetzt. Für großen Leitwert stellt sich konstanter Strom bei variabler Spannung ein, bei

kleinem Lastleitwert bleibt die Spannung konstant und der Strom fällt. Die im Verbraucher umgesetzte Leistung hat dann im Punkt  $I_q$ ,  $U_q$  ihr Maximum

$$G_{\rm aopt} = \frac{I_{\rm q}}{U_{\rm q}} \; . \qquad \qquad \begin{array}{c} {\rm maximale \; Leistungsabgabe} \\ {\rm an \; den \; Verbraucher} \end{array} (2.5.6)$$

Es gibt einen Arbeitspunkt  $I_{\rm q}$ ,  $U_{\rm q}$ , bei dem an den Verbraucher die maximale Leistung (gleich der angebotenen Leistung des aktiven Zweipols) abgegeben wird:  $P_{\rm max} = I_{\rm m} U_{\rm m} = I_{\rm q} U_{\rm q}$ . (Arbeitspunkt maximaler Leistung [MPP, Maximum Power Point]).

Dann erreicht der Leistungswirkungsgrad oder der Füllfaktor  $F_F$  den Wert 1:

$$F_{\rm F} = \frac{P_{\rm a}}{P_{\rm verv}} = \frac{I_{\rm m}U_{\rm m}}{I_{\rm q}U_{\rm q}} \le 1.$$
 (2.5.7)

Im nächsten Schritt wählen wir einen aktiven Zweipol mit stetiger, nichtlinearer Kennlinie, die sich der Rechteckkennlinie anschmiegt (Abb. 2.5.5c). Das entspricht einer Quelle mit nichtlinearem Innenleitwert und den Ersatzgrößen  $I_{\rm q}, U_{\rm q}$ . Diese Form ist typisch für die Konstantstromquelle, beispielsweise eine Solarzelle. Jetzt gibt es den Arbeitspunkt A' mit maximaler Leistungsabgabe (größte Leistungsfläche  $I_{\rm m}U_{\rm m}$ ) an den Verbraucher. Diese Leistung ist  $gr\"{o}\beta er$  als im linearen Grundstromkreises bei Anpassung (Arbeitspunkt B,  $I_{\rm m}=I_{\rm q}/2,\,U_{\rm m}=U_{\rm q}/2,\,$  Füllfaktor 1/4 s. Kap. 2.4.2), aber kleiner als  $I_{\rm q}U_{\rm q}$  (Füllfaktor 1).

Der Grundstromkreis mit nichtlinearem aktiven Zweipol vom Solarzellentyp hat im Gleichstromverhalten einen höheren Füllfaktor als der lineare Grundstromkreis.

Vertiefung Wir suchen die an einen Verbraucher maximal abgebbare Leistung einer Solarzelle nach Abb. 2.5.6 mit der Kennlinie Gl. (2.5.3). Dabei stammt die Einströmung  $I_{\rm q}$  von der Solarstrahlung, die parallel liegende Diode simuliert den nichtlinearen Innenleitwert. Das Lastelement  $G_{\rm a}$  ist linear. Bahnwiderstände der Solarzelle werden vernachlässigt, auch soll der Sättigungsstrom  $I_{\rm S}$  deutlich kleiner als die Einströmung  $I_{\rm q}$  sein. Ihre Leerlaufspannung  $U_{\rm l}$  liegt durch die Bedingung (Gl. (2.5.3))  $I(U_{\rm l})=0$  fest (Größenordnung  $0,7\ldots0,9$  V bei Si-Solarzellen, andere Ausführungen geringfügig höher).

Der Lastleitwert erhält die Leistung  $P = U \cdot I$ 

$$P = U \cdot \left(I_{\rm q} - I_{\rm S} \left(\exp \frac{U}{U_{\rm T}} - 1\right)\right) = U \cdot I_{\rm S} \left(\exp \frac{U_{\rm l}}{U_{\rm T}} - \exp \frac{U}{U_{\rm T}}\right). \quad (2.5.8)$$

Der Verlauf steigt zunächst proportional zu U, um schließlich durch den Diodenterm wieder abzufallen, sobald sich die Klemmenspannung U der Leerlaufspannung  $U_1$  nähert.

Die maximal abgegebene Leistung  $P_{\rm m}=U_{\rm m}\cdot I_{\rm m}$  folgt aus der Bedingung  $\frac{{\rm d}P}{{\rm d}U}=0$ . Man erhält mit Gl. (2.5.8) für  $U\equiv U_{\rm m}$ 

$$\frac{I_{\rm q}}{I_{\rm S}} + 1 - \left(1 + \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}}\right) \exp\frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}} = 0$$
 (2.5.9a)

bzw

$$\exp \frac{U_{\rm l}}{U_{\rm T}} - \left(1 + \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}}\right) \exp \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}} = 0.$$
 (2.5.9b)

Die erste Beziehung ergibt den Zusammenhang von  $U_{\rm m}$  und  $I_{\rm q}$ , die zweite den von  $U_{\rm m}$  und  $U_{\rm l}$ . Aus der ersten Beziehung muss die Spannung  $U_{\rm m}$  numerisch berechnet werden. Durch Rückeinsetzen in die Kennliniengleichung ergibt sich der zum Maximum gehörige Strom  $I_{\rm m}$ :

$$\frac{I_{\rm m}}{I_{\rm S}} = \left(\frac{I_{\rm q}}{I_{\rm S}} + 1\right) \cdot \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm m} + U_{\rm T}}.\tag{2.5.10}$$

Im letzten Schritt wird die im Maximum umgesetzte Leistung  $P_{\rm m}$  mit Gl. (2.5.9) bestimmt

$$P_{\rm m} = U_{\rm m} \cdot I_{\rm m} = (I_{\rm q} + I_{\rm S}) \cdot \frac{U_{\rm m}^2}{U_{\rm m} + U_{\rm T}}$$

$$\approx (I_{\rm q} + I_{\rm S}) \cdot U_{\rm m} \left( 1 - \frac{U_{\rm T}}{U_{\rm m}} \right) \Big|_{U_{\rm m} \gg U_{\rm T}}$$
(2.5.11)

ausgedrückt durch die Rechteckfläche  $I_{\mathrm{m}} \cdot U_{\mathrm{m}}$  im I, U-Diagramm. Dazu gehört der  $optimale\ Lastleitwert$ 

$$G_{\rm a}|_{\rm opt} = \frac{I_{\rm m}}{U_{\rm m}} = \frac{(I_{\rm q} + I_{\rm S}) \cdot U_{\rm m}}{U_{\rm m} \cdot (U_{\rm m} + U_{\rm T})} \approx \frac{I_{\rm q}}{U_{\rm m}}.$$
 (2.5.12)

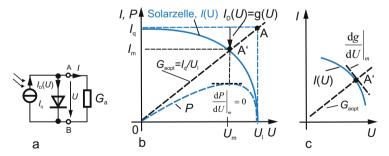


Abb. 2.5.6. Zur Leistungsabgabe bei nichtlinearer Quelle. (a) Nichtlinearer Grundsstromkreis. Ersatzschaltung einer Solarzelle aus eingeprägtem Quellenstrom und Diode zur Darstellung des nichtlinearen Innenleitwertes. (b) Kennlinie des aktiven und passiven Zweipols und Verlauf der abgegebenen Leistung. (c) Ersatzschaltung im Arbeitspunkt für kleine Strom-Spannungs-Änderungen bei maximal abgegebener Leistung

Mit der Bezugsleistung  $P_{\rm q}=I_{\rm q}U_{\rm l}$  (mit  $U_{\rm q}=U_{\rm l}$ ) lautet schließlich der Leistungswirkungsgrad bzw. Füllfaktor

$$\eta = \frac{P_{\rm m}}{P_{\rm q}} = \frac{U_{\rm m}I_{\rm m}}{U_{\rm l}I_{\rm q}} = \left(1 + \frac{I_{\rm S}}{I_{\rm q}}\right) \cdot \frac{U_{\rm m}^2}{U_{\rm m} + U_{\rm T}} \cdot \frac{1}{U_{\rm m} + U_{\rm T} \ln\left(1 + \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}}\right)} 
\approx \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm m} + U_{\rm T} \ln\left(1 + \frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}}\right)}.$$
(2.5.13)

Für  $U_{\rm m}/U_{\rm T}=20$  beträgt er beispielsweise 82%, für  $U_{\rm m}/U_{\rm T}=40 \rightarrow 94\%!$ 

Die Solarzelle gibt als "Konstantstromquelle" zufolge ihrer rechteckähnlichen Kennlinie eine wesentlich höhere Gleichleistung an das Lastelement ab als ein linearer aktiver Zweipol!

Im letzten Schritt suchen wir eine Beziehung zwischen dem optimalen Lastleitwert  $G_{\text{aopt}}$  und einem Innenleitwert der Solarzelle. Im Maximum ändert sich die an den Verbraucher abgegebene Leistung nicht mit der Spannung und die Bedingung  $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}|_{\mathrm{m}} = 0$  war der Ansatz zur Berechnung des Arbeitspunktes  $U_{\mathrm{m}}$ ,  $I_{\mathrm{m}}$ . Gleichzeitig muss dort auch  $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}I}|_{\mathrm{m}} = 0$  gelten, denn nach Abb. 2.5.6b ändert sich im Leistungsmaximum der Strom ebenfalls nicht. Wegen  $P_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}}U_{\mathrm{m}}(I_{\mathrm{m}})$  folgt daraus allgemein

$$\frac{dP(I \cdot U(I))}{dI} \bigg|_{m} = U(I)|_{m} + I_{m} \left. \frac{dU}{dI} \right|_{m} = U(I)|_{m} + I_{m} \left. r_{d} \right|_{m} = 0. \quad (2.5.14)$$

Im letzten Term ist  $r_{\rm d}$  der differenzielle Widerstand des nichtlinearen aktiven Zweipols im Maximum. Bei optimaler Leistungsabgabe stimmen der optimale Lastwiderstand mit dem differenziellen Innenwiderstand des aktiven Zweipols überein

$$R_{\rm a}|_{\rm m} = \left. \frac{U_{\rm m}}{I_{\rm m}} \right|_{\rm Last} = \left. \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} \right|_{\rm m} = \left. r_{\rm d} \right|_{\rm m,Quelle}$$
 (2.5.15)

Für die Leitwertdarstellung gilt das entsprechende, den Leitwert  $g_{\rm d}=1/r_{\rm d}$ bestimmen wir aus der Kennliniengleichung

$$g_{\rm d} = \frac{{\rm d}(-I)}{{\rm d}U}\Big|_{\rm m} = \frac{I_{\rm S}}{U_{\rm T}} \exp\frac{U_{\rm m}}{U_{\rm T}} = \frac{I_{\rm m}}{U_{\rm m}} = G_{\rm aopt}.$$
 (2.5.16)

Maximale Leistungsabgabe an den Verbraucher bedeutet bei nichtlinearer Quelle, dass der Abschlussleitwert des linearen Zweipols mit dem Kleinsignalleitwert des nichtlinearen aktiven Zweipols im Punkt maximaler Leistungsabgabe übereinstimmt.

Es gelten aber nicht die vom linearen Fall her bekannten Bedingungen, wonach bei Anpassung Strom und Spannung auf je die halben Kurzschluss- oder Leerlaufwerte fallen.

Allgemeiner nichtlinearer aktiver und passiver Zweipol Wir untersuchen noch den Fall, dass sowohl der aktive Zweipol nichtlinear ist mit der Kennlinie  $I=I_{\rm q}-g(U)$  als auch der Lastzweipol mit der Kennlinie I(U)=f(U). Der Verbraucher erhält die Leistung  $P=UI=U(I_{\rm q}-g(U))$ . Sie erreicht ihr Maximum für die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}\Big|_{m} = \underbrace{(I_{\mathbf{q}} - g(U))}_{I}|_{m} - U\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}U}\right) = 0$$

oder zusammengefasst

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}U}\bigg|_{m} = \frac{I}{U}\bigg|_{m} = G_{\mathrm{aopt}}.$$
(2.5.17)

In der Last wird maximale Leistung umgesetzt, wenn ihr Ersatzleitwert  $G_{\rm aopt} = I_{\rm m}/U_{\rm m}$  im Arbeitspunkt  $I_{\rm m}$ ,  $U_{\rm m}$  gleich dem Kleinsignalleitwert der Stromquelle in diesem Punkt ist unabhängig von der Nichtlinearität der Ausgangslast.

Damit hängt die Anpassbedingung von der Nichtlinearität der Quelle ab und die Bedingung  $G_{\rm i}=G_{\rm a}$  des linearen Grundstromkreises geht jetzt über in eine Bedingung zwischen Kleinsignalinnenleitwert der Quelle und dem "Sekantenleitwert"  $I_{\rm m}/U_{\rm m}$  der Last im Arbeitspunkt.

Abhängig von der Nichtlinearität kann der Leistungswirkungsgrad größer oder kleiner als beim linearen Grundstromkreis sein.

Beispiel 2.5.2 Leistungswirkungsgrad Wir betrachten den Leistungswirkungsgrad für eine Stromquelle mit unterschiedlicher Nichtlinearität bei linearer Last.

1. Für eine Nichtlinearität  $g(U)=aU^3$  (a>0) folgt als Lastleistung bei Anpassung:  $P_{\rm a}=I_{\rm m}U_{\rm m}$  und damit nach Gl. (2.5.17) für den Lastleitwert  $G_{\rm aopt}=\frac{{\rm d}g}{{\rm d}U}=3aU^2$ . Die zugehörige Verlustleistung in der Quelle beträgt  $P_{\rm i}=U_{\rm m}g(U_{\rm m})=aU_{\rm m}^4$  und man erhält für den Leistungswirkungsgrad.

$$\eta = \frac{P_{\rm a}}{P_{\rm a} + P_{\rm i}} = \frac{3aU_{\rm m}^4}{3aU_{\rm m}^4 + aU_{\rm m}^4} = \frac{3}{4} \; .$$

Er wird unabhängig vom Quellenstrom  $I_q$  und nur durch die Nichtlinearität der Quelle bestimmt (er würde bei linearer Quelle 50% betragen).

2. für eine Nichtlinearität  $g(U) = a\sqrt{U} \ (a>0, \ U>0)$  ergibt sich auf die gleiche Weise

$$\eta = \frac{aU_{\rm m}^{3/2}}{aU_{\rm m}^{3/2} + 2aU_{\rm m}^{3/2}} = \frac{1}{3}.$$

## 2.5.5 Kleinsignalverhalten

Nichtlineare Bauelemente sind oft Bestandteil eines Netzwerkes. Der Regelfall ist dabei die Aussteuerung mit einem zeitabhängigen Signal um einen

Arbeitspunkt. Dann erzeugt die Netzwerkerregung  $x(t) = X_A + \Delta x(t)$  eine entsprechende Wirkung  $Y(t) = Y_A + \Delta y(t)$  an einem Ausgangs- oder Lastelement. Der Zusammenhang  $y(x) \approx Y(X)$  ist die Übertragungskennlinie des Netzwerkes.

Die Kleinsignalanalyse linearisiert das Verhalten der Übertragungskennlinie Y(X) im Arbeitspunkt A für kleine Aussteuerungen  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ .

Wir haben dieses Prinzip schon bei Einführung der differenziellen Schaltelemente kennengelernt. So ist beispielsweise in der Schaltung Abb. 2.3.13 mit Dioden als nichtlinearem passivem Zweipol die Diodenspannung  $U_{\rm D}$  die Ausgangsgröße y bei gegebener Quellenspannung  $U_{\rm q}(t)=x(t)$ . Die Kleinsignalanalyse von  $U_{\rm D}(t)$  zerfällt dann in zwei Aufgaben:

- Arbeitspunktbestimmung, d. h. Lösung der nichtlinearen Gleichung

$$U_{\rm q} = U_{\rm D} + RI_{\rm S} \left( \exp \frac{U_{\rm D}}{U_{\rm T}} - 1 \right) \rightarrow I_{\rm A}, \ \ U_{\rm A}, \label{eq:Uq}$$

- Kleinsignalanalyse: Bestimmung  $\Delta U_{\rm D} = f(\Delta U_{\rm q})$ . Sie erfordert den differenziellen Leitwert des nichtlinearen Netzwerkelementes im Arbeitspunkt. Ansonsten liegt ein lineares Netzwerkproblem vor, m. a. W. wird die Kleinsignalanalyse dem Arbeitspunkt überlagert und kann unabhängig von der Arbeitspunkt-Bestimmung erfolgen.

Bei Ersatz der Kennlinie durch die Tangente in A (Abb. 2.3.13b) wird vorausgesetzt, dass die zeitlichen Spannungsänderungen langsam erfolgen. Trifft dies nicht zu, so müssen Energiespeicherelemente (Induktivitäten, Kapazitäten) beachtet werden. Kleinsignalsteuerung ist besonders für elektronische Schaltungen mit ihren nichtlinearen Bauelementen (Transistoren, Thyristoren, Dioden) von Bedeutung. Deshalb wird bei den relevanten Netzwerkelementen stets auf sie verwiesen. Eine Vertiefung erfährt die Kleinsignalbetrachtung bei mehrpoligen Bauelementen (s. Kap. 2.7.4).

Negativer Kleinsignalwiderstand Manche nichtlinearen Zweipole haben bereichsweise fallende Kennlinien (Abb. 2.5.7): dann sinkt die Spannung U um  $\Delta U$ , wenn der Strom I um  $\Delta I$  steigt und der Quotient wird negativ:

$$r = \frac{\Delta U \downarrow}{\Delta I \uparrow} \rightarrow \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} < 0.$$
 negativer (differenzieller) (2.5.18) Widerstand

Das gilt im Punkt A des fallenden Bereiches zwischen P und Q. Bei Verbraucherzählpfeilrichtung am passiven Zweipol bedeutet ein negativer differenzieller Widerstand Leistungsabgabe in den Stromkreis für die Änderungsgrößen, das Produkt  $U_{\rm A}I_{\rm A}>0$  bleibt aber positiv!

Ein negativer Widerstand führt einem Stromkreis Energie zu, wirkt also wie ein aktiver Zweipol.

Diese Leistung entstammt der Gleichstromversorgung des Bauelementes. Weil sie durch Spannungsquelle und Innenwiderstand begrenzt ist, kann über den negativen Widerstand nie mehr Leistung in den Kreis gespeist werden als die Quelle abzugeben vermag.

Es gibt zwei Formen fallender Kennlinien

- 1. den stromgesteuerten Typ (Lichtbogenkennlinie) mit horizontaler Tangente im U(I)-Verlauf in den Umkehrpunkten P, Q (Abb. 2.5.7a) und verschwindendem differenziellen Widerstand  $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$ .
- 2. den spannungsgesteuerten Typ (Dynatronkennlinie) mit vertikaler Tangente in den Umkehrpunkten P, Q (Abb. 2.5.7b), also unendlich hohem differenziellen Widerstand  $\mathrm{d}U/\mathrm{d}I$  resp. verschwindendem differenziellen Leitwert  $g = \mathrm{d}I/\mathrm{d}U$ .

Bei *stromgesteuerter* Kennlinie gehören zu jedem Stromwert nur eine Spannung, aber zu bestimmten Spannungen drei verschiedene Stromwerte, von denen der mittlere stets instabil ist. Zur Kennlinienaufnahme muss daher ein Strom eingeprägt und die Spannung gemessen werden. Dann ist jeder Punkt erfassbar und man spricht vom *stromstabilen negativen Widerstand*.

Umgekehrt hat eine *spannungsgesteuerte* Kennlinie zu jedem Spannungswert einen definierten Strom, dagegen für einen gegebenen Strom bis zu drei Spannungswerten. Zur Kennlinienaufnahme wird daher eine variable Spannung angelegt und der

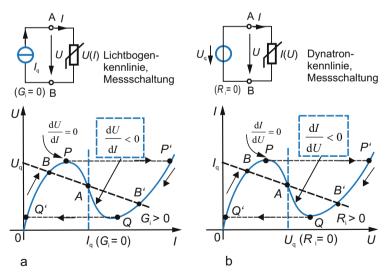


Abb. 2.5.7. Kennlinien mit fallenden Bereichen. (a) Stromgesteuert (Lichtbogentyp). (b) Spannungsgesteuert (Dynatrontyp). In beiden Fällen können bei endlichem Quellenwiderstand Sprungerscheinungen auftreten

Strom gemessen; man spricht vom *spannungsstabilen negativen Widerstand* (besser Leitwert).

Zur Einstellung eines stabilen Arbeitspunktes A im fallenden Bereich darf die Quellenkennlinie das nichtlineare Lastelement nur in einem Punkt schneiden.

Liegt beispielsweise an einer Lichtbogenkennlinie eine Spannungsquelle mit geringem Innenwiderstand (Kennlinientyp BB'), so springt der Strom bei Spannungserhöhung vom Punkt P nach P' und beim Absenken von Q nach Q': es gibt *Stromsprungstellen* (und einen *Hystereseverlauf*). Ein stabiler AP im fallenden Bereich erfordert deshalb

$$R_{\rm iq} > \left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} \right|_{\rm max}$$
. stromgesteuerte Kennlinie (2.5.19a)

Für die Dynatronkennlinie gilt die entsprechende Bedingung

$$R_{\rm iq} < \left| \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} \right|_{\rm min}$$
. spannungsgesteuerte Kennlinie

Erzeugung und Anwendung negativer Widerstände. Fallende Kennlinienbereiche entstehen in Zweipolelementen generell durch Rückkopplung: eine Ursache erzeugt eine Wirkung, die die Ursache wieder unterstützt. Solche Rückkopplungsmechanismen können

- physikalisch im Wirkprinzip eines Bauelementes begründet sein. Beispiele:
   Kennlinien des Thyristors, der Tunneldiode, der Glimmlampe u. a. m.;
- schaltungstechnisch durch gesteuerte Quellen (und damit Verstärkerbauelemente) realisiert werden.

Ein Beispiel erläutern wir im Kap. 2.7.7 beim Operationsverstärker.

**Vertiefung** Wir vertiefen den Begriff des negativen Widerstandes  $R_n$ 

$$R_{\rm n} = -\frac{U}{I} = \frac{(-U)}{I} = \frac{U}{(-I)}.$$

Er kann interpretiert werden durch eine vertauschte Spannungs- oder Stromrichtung (Abb. 2.5.8a, b), was zwei Typen negativer Widerstände bedingt. Im ersten Fall (eingeprägter Strom) erfolgt eine Spannungsrichtungsumkehr, im zweiten bei Spannungssteuerung eine Stromrichtungsumkehr. Das entspricht dem Kennlinienverhalten Abb. 2.5.7.

Zur Untersuchung der Leistungsbilanz schalten wir den negativen Widerstand  $R_n = -R$  im Grundstromkreis in Reihe zu  $R_i$  und  $R_a$  und untersuchen die Leistung am Lastwiderstand  $R_a$  (Abb. 2.5.8c):

$$P = U \cdot I = \frac{R_{\rm a} U_{\rm q}^2}{(R_{\rm i} + R_{\rm a} - R)^2} = \frac{R_{\rm a} U_{\rm q}^2}{(R_{\rm i} + R_{\rm a})} \underbrace{\frac{1}{(1 - R/(R_{\rm i} + R_{\rm a}))^2}}_{\text{neg Widerstand}}.$$

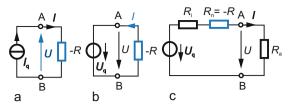


Abb. 2.5.8. Zur physikalischen Begründung des negativen Widerstandes. (a) Umkehr der Spannungsrichtung. (b) Umkehr der Stromrichtung. (c) Leistungsbilanz im Grundstromkreis bei eingefügtem negativen Widerstand

Der erste Faktor ist die im Lastwiderstand  $R_a$  umgesetzte Leistung des Grundstromkreises. Sie wird als Folge des negativen Widerstandes durch den zweiten Term (>1!) vergrößert, und zwar um so mehr, je stärker der negative Widerstand den positiven Gesamtwiderstand  $R_i + R_a$  des Kreises kompensiert!

Die zusätzliche Leistung gelangt durch den negativen Widerstand selbst in den Kreis, denn an der Spannungsquelle hat sich nichts verändert. Diese Energielieferung ist endlich, da negative Widerstände nur in begrenztem Kennlinienbereich wirken. Die Energie entstammt der Stromversorgung des Kreises, denn der negative Widerstand tritt nur für Änderungen  $(\Delta U, \Delta I)$  von U und I auf und die damit verbundenen Leistungsverhältnisse erscheinen in der Gesamtbilanz der Quelle.

Anwendung finden negative Widerstände z. B. zur Kompensation von (positiven) resistiven Zweipolen, bei der Verlustkompensation im Schwingkreis ( $\rightarrow$  idealer Schwingkreis) und in Filtern. Auch das Oszillatorprinzip zur Erzeugung von Schwingungen nutzt den negativen Widerstand.

## 2.6 Zweitore

**Einführung** Oft ist im Grundstromkreis zwischen Quelle und Verbraucher ein weiteres *Netzwerk mit zwei funktionell zusammenwirkenden Klemmenpaaren*, ein *Zweitor* oder *Vierpol* zwischengeschaltet. Es kann, je nach Aufgabenstellung, ganz unterschiedlichen "Inhalt" haben (Abb. 2.6.1a): Leitungsverbindung, Filterschaltung, Dämpfungsglied, gesteuerte Quelle (Verstärker) u.a.m. Selbst bekannte Schaltungen sind anders betrachtet Zweitornetzwerke:

- die Wheatsone-Brücke mit der Diagonalspannung als Ausgang und der Versorgungsspannung als Eingang,
- der *Spannungs* (Abb. 2.6.1b) oder *Stromteiler* (Abb. 2.6.1c). Dabei wird das Lastelement einbezogen.

Zweitore haben vor allem als Netzwerkgrundstruktur prinzipielle Bedeutung:

- gesteuerte Quellen bilden natürliche Zweitore,

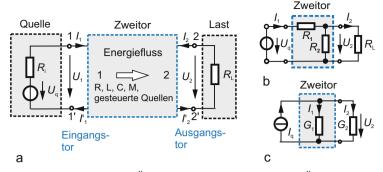


Abb. 2.6.1. Elektrisches Übertragungssystem aus Quelle, Übertragungszweitor und angeschlossener Last. (a) Grundanordnung; das Übertragungssystem ist zwischen aktivem und passivem Zweipol geschaltet. (b) Spannungsteiler als einfaches Zweitor aufgefasst. (c) Stromteiler aufgefasst als belastetes Zweitor

- manche Bauelemente (Transformator, Verstärker, u.a.) sind vier- oder dreipolig,
- größere Zweitore lassen sich aus "Elementarzweitoren" aufbauen,
- mehrere zusammengefügte Zweitore bilden ein neues Zweitor.

## 2.6.1 Zweitorbegriff

Zweitore erweitern das Zusammenspiel zwischen Quelle und Verbraucher und damit den Grundstromkreis durch ein Zwischenglied.

Ein Zweitornetzwerk ist eine geschlossen gedachte Einheit (Teilnetzwerk), das nur über Ein- und Ausgangstore zugängig ist. Ihre Eigenschaften liegen durch die U, I-Relationen der Tore fest und werden z. B. durch Rechnung oder Messung bestimmt.

Wir stellen hier Grundlagen der Zweitore zusammen, soweit sie zur Einführung gesteuerter Quellen in Netzwerke erforderlich sind. Weil Zweitore allerdings eine größere Rolle spielen als hier zusammengefasst, werden sie im Kap. 3.6 "Mehrpole" vertieft und zu speziellen Wechselstromproblemen im Bd. 3 ergänzt.

Über Jahrzehnte wurden Netzwerke mit vier Klemmen als Vierpole oder  $\ddot{U}bertragungsvierpole^{29}$  30 bezeichnet und bestimmte Beschreibungs- und Betrachtungsweisen entwickelt, zusammengefasst als "Vierpoltheorie".

<sup>&</sup>lt;sup>29</sup>Vierpol nach DIN 4899, DIN 1344.

<sup>&</sup>lt;sup>30</sup>Der Vierpolgedanke wird erstmalig von H. Hausrath (1907) verwendet, die Bezeichnung Vierpol stammt von F. Breisig (1921).

Ein Vierpol ist ein Netzwerk mit zwei Eingangs- und zwei Ausgangsklemmen zur Übertragung von Energie und/oder Signalen.

Als vierpoliges Netzwerk bezeichnet man dagegen ein allgemeines Netzwerk mit vier Klemmen. Von den vier Spannungen zwischen seinen Knoten und den vier Klemmenströmen sind nach dem Maschen- und Knotensatz nur je drei voneinander unabhängig. Eingebettet in ein größeres Netzwerk gilt für die Klemmenströme (Abb. 2.6.2a)  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ . Ob ein vierpoliges Netzwerk zum Zweitor wird, hängt von seiner Beschaltung ab: Fließt bei zwei zusammengehörigen Klemmen (einem Klemmenpaar) ein Strom I in eine Klemme und der gleiche Strom aus der anderen wieder heraus, so heißt dieses Klemmenpaar ein Tor und es folgen als Torbedingung z. B. für Tor 1

$$I_1 + I_3 = 0 \rightarrow I_3 = -I_1, \quad I_2 + I_4 = 0 \rightarrow I_4 = -I_2.$$
 (2.6.1)

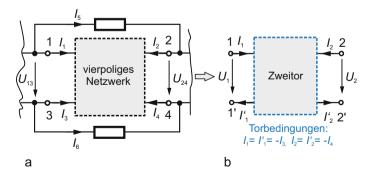
Zwangsläufig erfüllt auch das zweite Klemmenpaar diese Bedingung. Nur mit der Torbedingung für jedes Klemmenpaar wird ein vierpoliges Netzwerk zum Zweitor. So trifft die Strombedingung auf das Netzwerk Abb. 2.6.2a wegen  $I_1 \neq I_3$  und  $I_2 \neq I_4$  nicht zu, aber auf Schaltung 2.6.2b.

Die Torbedingung wird automatisch erfüllt, wenn eine vierpolige Schaltung an jedem Klemmenpaar mit einem Zweipol beschaltet ist.

Dann tritt der Strom  $I_1$  an Klemme 1 ein und bei 1' aus, gleichermaßen der Strom  $I_2$  bei 2 aus und bei 2' wieder ein, m. a. W. genügt eine Stromangabe zufolge der Vorbedingung:

Zweitore führen stets zwei unabhängige Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  am Eingangs- und Ausgangstor (abgesehen von stromgesteuerten Stromquellen).

Einige echte Zweitore (Transformator, Optokoppler) erfüllen die Torbedingung automatisch, andere "erzwungene Zweitore" erst durch den Anschluss eines Quellenbzw. Verbraucherzweipols.



**Abb. 2.6.2.** Vierpoliges Netzwerk und Zweitor. (a) Allgemeines vierpoliges Netzwerk. (b) Übergang zum Zweitor durch Erfüllung der Torbedingungen

Generell liegt am Tor 1, dem *Eingang* (input), ein aktiver Zweipol (Erregerquelle), am Tor 2, dem *Ausgang* (output), ein Verbraucherzweipol. Damit besorgt das Zweitor den Energiefluss von der Quelle zum Verbraucher und man unterscheidet eine Vorwärtsrichtung  $1 \rightarrow 2$  von der Rückwärtsrichtung  $2 \rightarrow 1$ .

Ein Zweitor kann in ein Netzwerk eingebettet sein. Erfüllt es die Torbedingungen, so gelten sie auch im Netzwerk. Dieses Problem wird in Kap. 3.6 behandelt.

Von der Struktur her gibt es zwei prinzipielle Zweitorformen: erdunsymmetrischer und symmetrischer Aufbau. Erdunsymmetrische Schaltungen besitzen eine Kurzschlussverbindung zwischen zwei Polen beider Tore, als Masse bezeichnet (eine Brückenschaltung würde so funktionsunfähig!). Die innere Struktur des Zweitores bestimmt, ob seine Tore einseitig an Masse liegen bzw. liegen können. Solche Zweitore sind eigentlich Dreipole und werden deshalb als "unechte Vierpole" bezeichnet (Abb. 2.6.3a). Sie stellen die Masse der Zweitore: Netzwerkmodelle von Transistoren, vielen Verstärkern und passiver Zweitore.

Ein Zweitor, das z. B. eine Brückenschaltung modelliert, ist "erdsymmetrisch": zwischen den zugeordneten Klemmen treten gleiche Spannungen auf und in die Schaltung lässt sich eine Symmetrielinie in Längsrichtung eintragen. Abb. 2.6.3b zeigt ein allgemeines symmetrisches Zweitor. Quellen und Verbraucherzweipol liegen gegenüber einem Massepunkt "potenzialmäßig hoch". Solche Schaltungen sind i. a. unempfindlich gegenüber Spannungen von den Klemmen nach Masse. Im praktischen Betrieb wirken dann als Übertragungsgrößen Differenzsignale und die Spannungen nach Masse werden als störend angesehen. Deshalb haben Differenzsignale für die Übertragungstechnik erhebliche Bedeutung, wie der Differenzverstärker (s. Kap. 2.7.7) zeigt.

Ein erdsymmetrisches Zweitor lässt sich durch zwischengeschaltete Übertrager (Abb. 2.6.3c) stets in eine erdunsymmetrische Übertragungsanordnung einbetten.

Zweitoreinteilung Zweitore können eingeteilt werden in linear zeitunabhängige, zeitabhängige sowie nichtlineare Zweitore. Wir beschränken uns hier

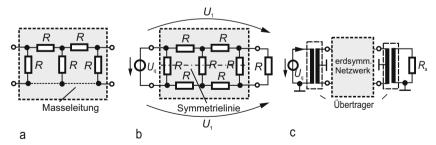


Abb. 2.6.3. Zweitorsymmetrie. (a) Erdunsymmetrischer Aufbau (durchgehende Masseleitung). (b) Erdsymmetrischer Aufbau. (c) Übergang vom symmetrischen Zweitor zum unsymmetrischen (und umgekehrt) durch zwischengeschaltete Übertrager

zunächst auf lineare zeitunabhängige Zweitore und beziehen später nichtlineare Anordnungen ein.

Nach dem energetischen Verhalten gibt es aktive Zweitore mit wenigstens einer unabhängigen Quelle. An den Klemmen treten (analog zum aktiven Zweipol) Kurzschlussströme und Leerlaufspannungen auf (s. Kap. 2.6.8). Dazu zählen auch gesteuerte Quellen sowie Zweitore, die sie enthalten.

Technisch wichtige aktive Zweitore sind die Modelle der Verstärkerelemente im *Kleinsignalbetrieb:* Transistoren, alle Verstärkerarten.

Eigentlich ist der Sachverhalt umgekehrt: gesteuerte Quellen wurden eingeführt, um bestimmte Bauelemente (anfangs Elektronenröhren) zu modellieren.

Aktive Zweitore entnehmen die Energie für die Nettoleistungsabgabe nicht dem Eingangssignal, sondern Hilfsquellen zur Stromversorgung (etwa eines Transistors). Zweitore mit unabhängigen Quellen erhalten die elektrische Energie durch Wandlung aus nichtelektrischer.

Passive Zweitore bestehen aus den Grundelementen R, C, L. Sie können auch gesteuerte Quellen enthalten, wenn bestimmte Bedingungen zutreffen (Beispiel: Modellierung gekoppelter Spulen durch gesteuerte Quellen). Fehlende gesteuerte Quellen sind kein Merkmal eines passiven Zweitores, vielmehr muss bei Passivität die netto aufgenommene sog. Wirkleistung (ein Begriff der Wechselstromtechnik, s. Bd. 3) stets positiv sein.

**Strom-Spannungs-Beziehungen** Unabhängig vom inneren Aufbau wird das Zweitor als Funktionsblock symbolisiert und durch *zwei Torströme und - spannungen* beschrieben, beispielsweise der Form

$$I_1 = f_1(U_1, U_2), I_2 = g_1(U_1, U_2), \text{ oder}$$
  $I, U$ -Beziehungen des  $U_1 = f_2(I_1, I_2), U_2 = g_2(I_1, I_2),$  allgemeinen Zweitors  $I, U$ -Beziehungen des allgemeinen Zweitors

(oder beliebig austauschbaren Beziehungen zwischen abhängigen und unabhängigen Variablen)<sup>31</sup>.

Ein (zeitunabhängiges) Zweitor wird durch zwei Zweitorfunktionen für die Torgrößen  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  z. B. nach Gl. (2.6.2) vollständig beschrieben und durch Ersatzschaltungen veranschaulicht.

Beim Bezugssinn der Ströme sind, wie am Zweipol, zwei Darstellungen üblich (und auch zweckmäßig)

<sup>&</sup>lt;sup>31</sup>Neben der Zweitordarstellung durch Ströme und Spannungen gibt es noch die für die Hochfrequenztechnik entwickelte Form mit *Leistungswellen* (s. Bd. 3).

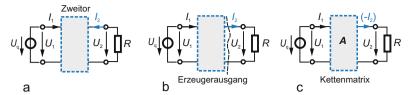


Abb. 2.6.4. Spannungs- und Stromrichtungen am Zweitor. (a) Symmetrisches Pfeilsystem, beiderseits VPS. (b) Unsymmetrisches Pfeilsystem, Kettenpfeilsystem (VPS am Zweitoreingang. EPS am Zweitorausgang). (c) Gemischte Form für die Kettenmatrixbeschreibung

- Verbraucher-Zählpfeilsystem für jedes Tor, auch symmetrisches Pfeilsystem oder mathematische Vorzeichenrichtung genannt (DIN 40148, Abb. 2.6.4a).
  - Sie eignet sich für Grundsatzbetrachtungen, wie eine Stabilitätsanalyse. Dort stört das Mitschleppen negativer Vorzeichen, die z. T. beim Kettenpfeilsystem auftreten.
- das Kettenpfeilsystem oder eingangsseitiges Verbraucher-, ausgangsseitiges Erzeugerpfeilsystem, auch technisches oder unsymmetrisches Pfeilsystem genannt. Hier fließt der Strom I<sub>1</sub> in das Zweitor, der Strom I<sub>2</sub> heraus (Abb. 2.6.4b). Das ist die physikalisch natürliche Richtungsfestlegung. Beispielsweise treibt die Quellenspannung einen Strom positiv in den Zweitoreingang und ausgangsseitig fließt er in den Verbraucher. Von den Klemmen 2–2' her gesehen wirkt die Anordnung als aktiver Zweipol. Wir verwenden das Kettenpfeilsystem nur gelegentlich, z. B. beim Transformator. Weil es aber bei der Kaskadenschaltung von Zweitoren zweckmäßig ist (und physikalisch auftritt), gibt es noch
- das gemischte Pfeilsystem mit Kettenpfeilrichtung nur für die Kettenmatrix (→ A-Matrix, s. u.), aber symmetrischer Pfeilrichtung für die übrigen Zweitorbeschreibungen (Abb. 2.6.4c). Dieses Pfeilsystem kombiniert die Vorzüge beider Darstellungen und entspricht DIN 4899, 40148 und 1344, es erfordert aber Aufmerksamkeit beim Wechsel der Beschreibungsarten in die Kettenmatrixform.

Wir sind daher bei Zweitorbetrachtungen gehalten, den Umgang mit beiden Vorzeichenfestlegungen des Ausgangsstromes  $I_2$  zu kennen und auf das benutzte Vorzeichensystem zu achten. Optisch wird darauf am besten durch Eintragung des Zählpfeiles  $I_2$  am Zweitorausgang hingewiesen.

## 2.6.2 Strom-Spannungs-Beziehungen linearer Zweitore

Der lineare Zweipol oder das *Eintor* wurde durch das ohmsche Gesetz beschrieben: eine Ursache (Spannung, Strom) erzwingt eine Wirkung (Strom,

Spannung). Beim Zweitor gibt es stets *zwei* Ursachen, z. B. die Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  in Gl. (2.6.2). Dann sind die Spannungen  $U_1$ ,  $U_2$  die Wirkungen und es gilt entsprechend der allgemeinen I, U-Relation für ein *lineares* Zweitor

$$U_1=Z_{11}I_1+Z_{12}I_2$$
 Zweitorgleichung in Widerstandsform (2.6.3)  $U_2=Z_{21}I_1+Z_{22}I_2$  Definitionsgleichung

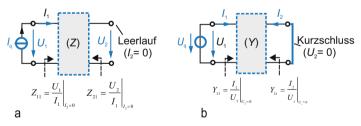
Die Koeffizienten heißen Widerstands- oder Z-Parameter, sie hängen nur von den Netzwerkeigenschaften des Zweitors ab.

Der erste Parameterindex ist durch den Index der abhängigen Größe links bestimmt, der zweite durch den Index der unabhängigen Größe rechts. So verbindet der Parameter  $Z_{11}$  Strom und Spannung am Eingang unter der Nebenbedingung  $I_2=0$ , also Leerlauf am Ausgang. Entsprechend verknüpft der Parameter  $Z_{21}$  die Ausgangsspannung  $U_2$  mit dem Eingangsstrom  $I_1$  wieder bei Leerlauf  $I_2=0$ , also Ursache (Strom  $I_1$ ) am Eingang und Wirkung  $U_2$  am Ausgang.

Das Gleichungssystem (2.6.3) kann mit dem *Spaltenvektor I* der unabhängigen Ströme, dem *Spaltenvektor U* der abhängigen Spannungen und der *Widerstandsmatrix Z* auch als *Matrixgleichung* geschrieben werden<sup>32</sup>

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. abgekürzt} \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{I}. \quad (2.6.4)$$

Die Bedeutung der Widerstandsparameter folgt aus ihrer Definition (Abb. 2.6.5a). Dazu wird jeweils eine der unabhängigen Variablen  $I_1$  oder  $I_2$  gleich null gesetzt (dem entspricht schaltungstechnisch Leerlauf I=0) und der restliche Quotient von Spannung und Strom gebildet. So ergeben sich die Definitionen



**Abb. 2.6.5.** Bestimmung der Z- und Y-Parameter. (a) Ausgangsseitiger Leerlauf, Bestimmung von  $Z_{11}$  und  $Z_{21}$ . (b) Ausgangsseitiger Kurzschluss, Bestimmung von  $Y_{11}$  und  $Y_{21}$ 

 $<sup>^{32}\</sup>mathrm{Die}$  Anwendung der Matrizenrechnung auf Zweitore geht auf F. Strecker und R. Feldtkeller (1929) zurück.

— bei Betriebszustand  $I_2 = 0$ , ausgangsseitiger Leerlauf<sup>33</sup>

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}$$
 Eingangsleerlaufwiderstand,  
 $Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$  Leerlaufübertragungswiderstand vorwärts (2.6.5a)

— und für den Betriebszustand  $I_1=0,\ eingangsseitiger\ Leerlauf$ 

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2}\Big|_{I_1=0}$$
 Ausgangsleerlaufwiderstand,  
 $Z_{12} = \frac{U_1}{I_2}\Big|_{I_1=0}$  Leerlaufübertragungswiderstand rückwärts. (2.6.5b)

Wurde im ersten Fall ein "Probestrom"  $I_1$  auf der Eingangsseite eingespeist, um die Spannung  $U_1$  unter der Bedingung  $I_2 = 0$  zu messen, so liegt im zweiten Fall der Probestrom  $I_2$  ausgangsseitig an und die Spannungen  $U_1$ ,  $U_2$  werden gemessen. Die Angabe "vorwärts" bzw. "rückwärts" bezieht sich auf den Energiefluss von Zweitorseite 1 nach 2 resp. umgekehrt.

Die Zweitorparameter zerfallen in (gilt nicht für Kettenmatrix):

- Zweipolgrößen (Leitwerte-, Widerstände) bei Übereinstimmung beider Indizes. Physikalisch entspricht das der Widerstandsbestimmung eines Klemmenpaares bei spezifischem Abschluss (Leerlauf, Kurzschluss) der anderen Seite.
- Übertragungs-, Transfergrößen. Sie verknüpfen die Strom- oder Spannungsgröße einer Zweitorseite mit Strom oder Spannung auf der anderen unter Nebenbedingungen.

So gilt beispielsweise nach Abb. 2.6.5

Ausgangsleerlaufspannung = 
$$Z_{21}$$
 · Eingangsstrom. (2.6.6)

Transfergrößen werden schaltungstechnisch durch gesteuerte Quellen realisiert, in bestimmten Fällen auch durch passive Netzwerkelemente.

Beispiel 2.6.1 Brückenschaltung Für die Wheatsone-Brücke (Abb. 2.6.6a) lassen sich die Z-Parameter leicht ermitteln; der  $Eingangsleerlaufwiderstand Z_{11}$  beträgt

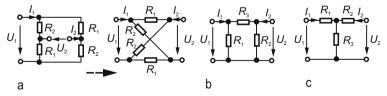


Abb. 2.6.6. Beispiele einfacher passiver Zweitore. (a) Brückenschaltung dargestellt als symmetrisches X-Zweitor. (b)  $\pi$ -Ersatzschaltung. (c) T-Ersatzschaltung

 $<sup>^{33}</sup>$ Gelesen  $U_1$  dividiert durch  $I_1$  bei  $I_2 = 0$  als Nebenbedingung.

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = (R_1 + R_2) \parallel (R_2 + R_1) = \frac{R_1 + R_2}{2} = Z_{22},$$

der Übertragungswiderstand vorwärts ergibt sich zu

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}\Big|_{I_2=0} = Z_{12} = \frac{U_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} = \frac{1}{2I_1} (I_1R_2 - I_1R_1) = \frac{R_2 - R_1}{2}.$$

Während sich das erste Ergebnis direkt von der Torseite 1 aus "in die Schaltung hineinsehen" lässt, folgt das zweite aus der Tatsache, dass jeder Brückenzweig vom halben Eingangsstrom  $I_1$  durchflossen wird und sich die Ausgangsspannung aus der Differenz der Spannungsabfälle über  $R_2$  und  $R_1$  ergibt. Bei Brückenabgleich  $R_2 = R_1$  verschwindet die Übertragungseigenschaft ( $U_2 = 0$ ,  $Z_{21} = 0$ : das Zweitor ist entkoppelt).

Weitere Zweitordarstellungen Bei gegebenen Strömen und gesuchten Spannungen ist die Widerstandsform zur Zweitorbeschreibung zweckmäßig. Umgekehrt wäre die zu Gl. (2.6.4) duale Leitwertform günstiger. Diese (und weitere) Zuordnungen entstehen durch systematischen Variablentausch: insgesamt gibt es  $\binom{4}{2} = \frac{(4\cdot3)}{(1\cdot2)} = 6$  Möglichkeiten und somit 6 Gleichungssysteme zur gleichwertigen Zweitorbeschreibung. Tabelle 2.5 fast sie zusammen. In der Praxis wichtig sind die Widerstands-, Leitwert- und Kettenform, die restlichen (Hybridformen und Kettenform rückwärts) haben geringere Bedeutung. Obwohl es keine bevorzugte Darstellung gibt, können manche Formen für bestimmte Zweitore nicht definiert sein.

Je nach Anwendungsfall ist die eine oder andere Zweitorbeschreibung zweckmäßiger. So wird beispielsweise die Widerstandsform bei der Schaltungsanalyse im Hoch-

Tabelle 2.5. Zweitorbeschreibungsformen

Form/ Matrix	Gleichungen	Matrixform
Widerstandsform Widerstandsmatrix $\boldsymbol{Z}$	$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$ $U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2$	$oldsymbol{U} = oldsymbol{Z} \cdot oldsymbol{I}$
Leitwertform Leitwertmatrix $\boldsymbol{Y}$	$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$ $I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$	$oldsymbol{I} = oldsymbol{Y} \cdot oldsymbol{U}$
Hybridform 1 Reihenparallelmatrix <i>H</i>	$U_1 = H_{11}I_1 + H_{12}U_2$ $I_2 = H_{21}I_1 + H_{22}U_2$	$\left(egin{array}{c} U_1 \ I_2 \end{array} ight) = oldsymbol{H} \cdot \left(egin{array}{c} I_1 \ U_2 \end{array} ight)$
Hybridform 2 Parallelreihenmatrix $\boldsymbol{C}$	$I_1 = C_{11}U_1 + C_{12}I_2$ $U_2 = C_{21}U_1 + C_{22}I_2$	$\left(egin{array}{c} I_1 \ U_2 \end{array} ight) = oldsymbol{C} \cdot \left(egin{array}{c} U_1 \ I_2 \end{array} ight)$
Kettenform Kettenmatrix $\boldsymbol{A}$	$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}(-I_2)$ $I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}(-I_2)$	$\left(egin{array}{c} U_1 \ I_1 \end{array} ight) = oldsymbol{A} \cdot \left(egin{array}{c} U_2 \ -I_2 \end{array} ight)$
Kettenform invers Kettenmatrix $\boldsymbol{B}$	$U_2 = B_{11}U_1 + B_{12}(-I_1)$ $I_2 = B_{21}U_1 + B_{22}(-I_1)$	$\left(\begin{array}{c} U_2 \\ I_2 \end{array}\right) = \boldsymbol{B} \cdot \left(\begin{array}{c} U_1 \\ -I_1 \end{array}\right)$

frequenzbereich kaum verwendet, denn ihre Parameterbestimmung verlangt Leerlauf (durch unvermeidliche parasitäre Kapazitäten bei hohen Frequenzen nicht zu verwirklichen). Hier bietet die Leitwertform Vorteile, deren Parameter alle unter Kurzschlussbedingungen bestimmt werden.

Passive Zweitore nutzen oft die Widerstandsform (Transformator), weil damit die sehr einfache T-Ersatzschaltung (Abb. 2.6.6b) verbunden ist.

Die oft verwendete *Leitwertform* 

$$I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$$
 Zweitorgleichungen Leitwertform (2.6.7a)  
 $I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$  (Definitionsgleichung)

lautet in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{I} = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{U}.$$
 (2.6.7b)

Tabelle 2.6 enthält diese Parameter und ihre Umrechnungen für das symmetrische Pfeilsystem (bzw. gemischte Pfeilsystem der Kettenmatrix).

Tabelle 2.6. Parameterumrechnungen für die Zweitormatrizen  $\boldsymbol{Z},\,\boldsymbol{Y},\,\boldsymbol{H},\,$ und  $\boldsymbol{A}$ 

	Z	Y	H	A
Z	$\begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{Y_{22}}{\det \boldsymbol{Y}} & \frac{-Y_{12}}{\det \boldsymbol{Y}} \\ \frac{-Y_{21}}{\det \boldsymbol{Y}} & \frac{Y_{11}}{\det \boldsymbol{Y}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{\det \boldsymbol{H}}{H_{22}} & \frac{H_{12}}{H_{22}} \\ -H_{21} & \frac{1}{H_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\det \mathbf{A}}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{pmatrix}$
Y	$\begin{pmatrix} \frac{Z_{22}}{\det \boldsymbol{Z}} & \frac{-Z_{12}}{\det \boldsymbol{Z}} \\ \frac{-Z_{21}}{\det \boldsymbol{Z}} & \frac{Z_{11}}{\det \boldsymbol{Z}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{H_{11}} & \frac{-H_{12}}{H_{11}} \\ \frac{H_{21}}{H_{11}} & \frac{\det \mathbf{H}}{H_{11}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{-\det \mathbf{A}}{A_{12}} \\ \frac{-1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{pmatrix}$
H	$\begin{pmatrix} \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} & \frac{1}{Z_{22}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{Y_{11}} & \frac{-Y_{12}}{Y_{11}} \\ \frac{Y_{21}}{Y_{11}} & \frac{\det \boldsymbol{Y}}{Y_{11}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\det \mathbf{A}}{A_{22}} \\ \frac{-1}{A_{22}} & \frac{A_{21}}{A_{22}} \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{A}$	$\begin{pmatrix} \frac{Z_{11}}{Z_{21}} & \frac{\det \mathbf{Z}}{Z_{21}} \\ \frac{1}{Z_{21}} & \frac{Z_{22}}{Z_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{-1}{Y_{21}} \\ -\det \mathbf{Y} & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{-\det \mathbf{H}}{H_{21}} & \frac{-H_{11}}{H_{21}} \\ \frac{-H_{22}}{H_{21}} & \frac{-1}{H_{21}} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$

Üblich sind verschiedene gleichberechtigte Bezeichnungen

Y<sub>11</sub>: Kurzschlusseingangsleitwert, Kurzschlussleitwert vorwärts

Y<sub>21</sub>: Kurzschlussübertragungsleitwert vorwärts, Vorwärtssteilheit (Transistor, Röhre), Transadmittanz

 $Y_{12}$ : Kurzschlussübertragungsleitwert rückwärts, Rückwärtssteilheit

 $Y_{22}$ : Kurzschlussausgangsleitwert.

Die Definition der Leitwertparameter ergibt sich sinngemäß aus den dualen Bedingungen zu den  $\mathbb{Z}$ -Parametern Gl. (2.6.5), in Abb. 2.6.5b wurde ihre Bestimmung am Zweitor erläutert.

So, wie beim Zweipol Widerstand und Leitwert reziprok zueinander sind (R=1/G), gilt dies auch für die Widerstands- und Leitwertmatrizen und ihre Koeffizienten. Durch Auflösung der Widerstandsdarstellung nach den Strömen  $I_1$ ,  $I_2$  ergibt sich abgekürzt für die Matrixkoeffizienten (Matrixinversion, falls die Matrix invertierbar ist)

$$Y = Z^{-1} = \frac{1}{\det Z} \begin{pmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{pmatrix}$$
 (2.6.8)

mit det  $\mathbf{Z} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  (dabei sei an das symmetrische Pfeilsystem erinnert). Deshalb können die Leitwertparameter auch aus den Widerstandsparametern berechnet werden.

Die Leitwertbeschreibung passiver Zweitore lässt sich stets durch eine  $\pi$ -Ersatzschaltung (s. Abb. 2.6.6b) als Netzwerk interpretieren. Das ist die duale Form zur T-Ersatzschaltung. Die wechselseitige Überführung beider Ersatzschaltungen gelingt über eine Stern-Dreieck-Umwandlung (Kap. 2.3.2).

Die Leitwertform ist zweckmäßig, wenn am Zweitor eine Stromquelle anliegt und der Verbraucherzweipol als Parallelschaltung mehrerer Leitwerte auftritt. Daraus resultiert ihre Verbreitung in der Schaltungstechnik. Der Begriff "Vorwärtssteilheit" entstammt diesem Bereich. Hinzu kommt, dass man den zur Parameterbestimmung nötigen Kurzschluss bei hohen Frequenzen leicht durch Parallelschaltung einer großen Kapazität herstellen kann.

Beispiel 2.6.2 Leitwertparameter Für das in Abb. 2.6.6d gegebene Zweitor sind die Leitwertparameter gesucht.

 $Y_{11}$ : Aus der Definition  $Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}\Big|_{U_2=0}$  folgt bei ausgangsseitigem Kurzschluss für eine angelegte Spannung  $U_1$  der Strom  $I_1 = U_1(G_1 + G_3)$ , also  $Y_{11} = G_1 + G_3$ .

 $Y_{21}$ : Die Eingangsspannung  $U_1$  erzeugt den Strom  $I_2'=U_1/R_3$  bei ausgangsseitigem Kurzschluss ( $U_2=0$ ). Weil der Ausgangsstrom  $I_2$  am Zweitor aber symmetrisch definiert ist ( $I_2=-I_2'$ ), folgt daraus  $Y_{21}=\left.\frac{I_2}{U_1}\right|_{U_2=0}=-G_3$ .

 $Y_{12}$ : es gilt die gleiche Überlegung wie für  $Y_{21}$ : (angelegte Spannung  $U_2$ , Kurzschluss am Eingang  $U_1 = 0$ ). Man hat  $I'_1 = -I_1$  (bei  $U_1 = 0$ ) =  $U_2G_3$ , also  $Y_{12} = -G_3$ . Der Kurzschluss macht  $R_1$  wirkungslos.

 $Y_{22}$ : für die Ausgangsseite gilt bei eingangsseitigem Kurzschluss  $(U_1 = 0)$  mit  $I_2 = U_2(G_2 + G_3)$ :  $Y_{22} = \frac{I_2}{U_2}\Big|_{U_1 = 0} = G_2 + G_3$ .

Geringere Bedeutung haben die beiden Hybridformen, die *Reihenparallel-matrix* mit der H-Matrix (Form 1) (Tab. 2.5) und die *Parallelreihenmatrix* (Form 2).

Die erste Form stammt aus der Anfangszeit der Transistortechnik. Erwähnenswert ist höchstes, dass in ihr die *Stromverstärkung* als gesteuerte Quelle auftritt, die beim Bipolartransistor eine Rolle spielt.

Die Kettenform vorwärts (und ebenso rückwärts) ist die originäre Zweitorbeschreibung für die Hintereinander- oder Kettenschaltung von Zweitoren, wie sie bei der Leitungsübertragungstechnik auftritt. Sie beschreibt die Größen eines Tores als Funktion der anderen Torgrößen. Eine weitere Eigenschaft ist, dass in ihr nur Übersetzungs-/Transfergrößen vorkommen, die durch gesteuerte Quellen interpretiert werden können. Weil dabei ausgangsseitig immer das Erzeugerpfeilsystem vorliegen muss, wird der Ausgangsstrom als  $-I_2$  (und in der umgekehrten Kettenmatrix entsprechend der Eingangsstrom  $-I_1$ ) eingeführt. Dann fließt der Strom  $-I_2$  tatsächlich in den Lastwiderstand, für den das Verbraucherpfeilsystem gilt (s. Abb. 2.6.4c).

Die Kettenform ist zweckmäßig, wenn Zweitore in Kette geschaltet werden. Sie stellt die klassische Zweitorbeschreibung dar, daher stammt auch die Kettenpfeilrichtung.

Umwandlungen der Zweitorparameter Ein Zweitor wird durch eine der sechs Zweitordarstellungen (Tab. 2.5) gleichwertig beschrieben. Deshalb genügt ein vollständiger Parametersatz zu seiner Darstellung.<sup>34</sup> Der Übergang von einer Zweitorform in eine andere heißt *Parametertransformation*. Sie entsteht durch Umformung eines gegebenen Gleichungspaares so, dass die Zuordnung der abhängigen und unabhängigen Variablen der gewünschten Gleichungsform entspricht. Gl. (2.6.8) zeigt als Beispiel die Zuordnung zwischen Leitwert- und Widerstandsparametern. Tabelle 2.6 enthält die Umrechnungsbeziehungen.

Für ein Zweitor müssen nicht alle Beschreibungsformen existieren, dann sind einige nicht definiert (Beispiele: ideale gesteuerte Quellen, idealer Transformator, ideale Leitungsdurchverbindung, Elementarzweitore mit nur einem Zweipolelement). Eine Matrixdarstellung existiert dann nicht, wenn die Ursachengrößen voneinander abhängen. Gilt dies in der Leitwertform für die Spannungen  $U_1$ ,  $U_2$ , etwa wegen durchgehender Längsverbindungen, so existiert die Y-Matrix nicht. Hängen beide Ströme voneinander ab, wie bei einem Längswiderstand, so gibt es keine Z-Matrix. Im Kap. 2.6.5 werden wir Beispiele kennenlernen.

Beispiel 2.6.3 Umwandlung Leitwert-  $\rightarrow$  Widerstandsparameter Die Leitwertparameter des Beispiels 2.6.2 (Schaltung Abb. 2.6.6b) sollen in die Widerstandsform gewandelt werden.

<sup>&</sup>lt;sup>34</sup>Allgemein müssen unabhängige Parameter durch andere unabhängige ausgedrückt werden. Sie können verschiedenen Zweitordarstellungen und/oder Grundschaltungen angehören.

Mit der Umwandlung nach Tabelle 2.6 folgt

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\det \mathbf{Y}} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} G_2 + G_3 & -G_2 \\ -G_2 & G_1 + G_2 \end{pmatrix}$$

mit  $N = G_1G_2 + G_3(G_1 + G_2)$ . Die **Z**-Parameter lassen sich auch direkt berechnen (man führe dies durch).

Analog zu Beispiel 2.6.2 können die Z-Parameter für die sog. T-Schaltung Abb. 2.6.6c ermittelt werden (direkte Berechnung oder Dreieck-Stern-Umwandlung aus Abb. 2.6.6b oder über die duale Schaltung); die Lösungen sind später in Tabelle 2.11 mit verzeichnet.

Physikalische Bedeutung der Parameter Die vielfältigen Parameterbezeichnungen in Tabelle 2.5 verlangen eine Systematik. Generell sind Zweitorparameter definiert durch

$$P_{\rm mn} = \left. \frac{\text{Wirkung m}}{\text{Ursache n}} \right|_{\text{zweite Ursache verschwindet}}.$$
 (2.6.9)

Die Nebenbedingung betrifft entweder einen Torstrom oder eine Torspannung. Dann muss der entsprechende Torabschluss *Leerlauf oder Kurzschluss* sein.

Bei Leerlauf/ Kurzschluss verschwindet stets einer der beiden Terme auf der rechten Seite der Zweitorgleichung und die Bedeutung des verbliebenen Parameters ist direkt zu erkennen.

Als Zweitorparameter treten Zweipol- oder Transfergrößen auf:

- Die Zweipolparameter (m=n) lauten  $U_{\rm m}/I_{\rm m}$  bzw.  $I_{\rm m}/U_{\rm m}$  und heißen Widerstand bzw. Leitwert bei Kurzschluss oder Leerlauf. Die Nebenbedingung wird erwähnt.
- Bei den *Transfergrößen*<sup>35</sup> werden unterschieden
  - der  $\ddot{U}$ bertragungswiderstand vorwärts/rückwärts  $U_2/I_1$  bzw.  $U_1/I_2$  (bei Kurzschluss oder Leerlauf), auch Transimpedanz, Kernwiderstand,
  - der  $\ddot{U}$ bertragungsleitwert vorwärts/rückwärts  $I_2/U_1$  bzw.  $I_1/U_2$  (bei Kurzschluss oder Leerlauf), Vorwärtssteilheit, bzw. Rückwärtssteilheit,
  - die Leerlaufspannungsverstärkung  $U_2/U_1$  (=  $A_{\rm u}$ ) auch Spannungsübersetzung, Spannungsverstärkung,
  - die Kurzschlussstromverstärkung  $I_2/I_1$  (=  $A_i$ ), auch Stromübersetzung.

 $<sup>^{35}</sup>$ Mit Zusatz reziprok oder rückwärts für Betriebsrichtung 2  $\to$  1 resp. vorwärts für Betriebsrichtung 1  $\to$  2.

Transfergrößen treten bei gesteuerten Quellen auf (Kap. 2.6.4).

### Die Bestimmung der Zweitorparameter erfolgt

— durch Anwendung der Definition und Berechnung (z. B. Bestimmung von Ersatzwiderständen, Anlegen von Probequellen),

- bei gegebener Schaltung durch Aufstellen der Netzwerkgleichungen und Koeffizientenvergleich der Lösung mit den Zweitorgleichungen,
- durch Messung mit der Parameterdefinition als Messvorschrift,
- durch Umrechnung aus einem anderen Parametersatz.

### Lösungsmethodik Zweitorparameter

Die Parameter eines Zweitors werden zweckmäßig in folgender Weise bestimmt:

- 1. gewünschtes Zweitorgleichungssystem auswählen, aus Zweitorart (passiv, aktiv, längssymmetrisch u.a.) auf die notwendigen Parameter (2 ... 4) schließen,
- 2. Probequelle (Strom, Spannung) entsprechend der Koeffizientenart auf einer Zweitorseite anlegen, Berechnung der zugehörigen Ein- und Ausgangsgrößen (letztere unter der geforderten Nebenbedingung),
- 3. Vorgang für die andere Zweitorseite wiederholen,
- 4. Auf die Richtung zwischen eingeprägten Quellenströmen und festgelegten Stromrichtungen achten.
- 5. Einfache Kontrollüberlegungen durchführen.

# **Beispiel 2.6.4 Bestimmung der** *Z***-Parameter** Folgende Schritte müssen durchgeführt werden:

- 1) Berechnung von  $Z_{11}$  und  $Z_{21}$ : Anlegen eines Stromes  $I_1$  (oder Spannung  $U_1$ ) bei Leerlauf am Ausgang ( $I_2 = 0$ ), Berechnung von  $U_1$ (oder  $I_1$ ) und  $U_2$  und daraus  $Z_{11}$ ,  $Z_{21}$  gemäß Definition;
- 2) Berechnung von  $Z_{22}$ und  $Z_{12}$ : Anlegen eines Stromes  $I_2$  (oder Spannung  $U_2$ ) bei Leerlauf am Eingang ( $I_1 = 0$ ), Berechnung von  $U_2$  (bzw.  $I_2$ ) und  $U_1$  und Berechnung von  $Z_{22}$ ,  $Z_{12}$  nach Definition.

Einige Schritte wurden in Abb. 2.6.5a erläutert, für die Beispielzweitere Abb. 2.6.6können damit die **Z**-Parameter direkt bestimmt werden.

Beispiel 2.6.5 Zweipolersatzgrößen eines Zweitores Für eine Abzweigschaltung nach Abb. 2.6.6b (mit gegebenen Leitwertparametern und eingangsseitiger Stromquelle  $I_{\rm q}$ ) sind die Zweipolersatzgrößen Leerlaufspannung  $U_{\rm 2l}$ , Kurzschlussstrom

 $I_{2k}$  und Innenleitwert  $G_i$  am Zweitorausgang allgemein und speziell für  $I_q=1\,\mathrm{A},$   $Y_{11}=20\,\mathrm{mS},\,Y_{21}=Y_{12}=-10\,\mathrm{mS},\,Y_{22}=10\,\mathrm{mS}$  gesucht.

Der Ausgangskurzschlussstrom  $I_{2\mathbf{k}}=-I_2$  (Richtung am Zweitor definiert, Richtung  $I_{2\mathbf{k}}$  durch Grundstromkreis festgelegt) folgt aus Gl. (2.6.7a) für  $U_2=0$  durch Eliminieren von  $U_1$  zu

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-I_{2\mathbf{k}}}{I_0} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} \to I_{2\mathbf{k}} = -\frac{Y_{21}}{Y_{11}}I_{\mathbf{q}} = \frac{1}{A_{22}}I_{\mathbf{q}}.$$

Er ist durch die Stromübersetzung  $A_{22}$  bestimmt.

Der Innenwiderstand (bei Leerlauf eingangsseitig) folgt aus Gl. (2.6.7a) für  $I_1 = 0$ 

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = \left(\frac{-Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}} + Y_{22}\right)U_2 = \frac{\det \boldsymbol{Y}}{Y_{11}}U_2 = \frac{U_2}{Z_{22}},$$

da  $0 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$ . Der Innenwiderstand  $U_2/I_2 = Z_{22}$  ist gleich dem ausgangsseitigen Leerlaufwiderstand  $Z_{22}$ .

Die ausgangsseitige Leerlaufspannung  $U_{21}$  (bei  $I_2 = 0$ ) ergibt sich aus

$$I_q = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 = \left(\frac{-Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} + Y_{12}\right)U_2 = -\frac{\det \pmb{Y}}{Y_{21}}U_2 = \frac{U_2}{Z_{21}},$$

da 0 =  $Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$ . Damit gilt zusammengefasst  $U_{2l} = Z_{21}I_q$ ,  $I_{2k} = \frac{I_q}{A_{22}}$ ,  $G_i = 1/Z_{22} = \frac{I_{2k}}{U_{2l}} = \frac{1}{A_{22}Z_{21}}$ .

Zahlenmäßig folgt  $Z_{21} = 100\Omega$ ,  $A_{22} = 2$ ,  $Z_{22} = 200 \Omega$ .

Im Beispiel lassen sich die Ersatzgrößen durch die Zweipoltheorie zwar rascher gewinnen, aber bei umfangreicherem Übertragungsnetzwerk ist der Weg über die Zweitorbeschreibung transparenter.

### Beispiel 2.6.6 Spannungs- und Stromteilerregel in Zweitordarstellung

Liegt am Eingang eines Zweitors eine Spannung  $U_1 = U_q$ , so stellt sich ausgangsseitig (bei Leerlauf  $I_2 = 0$ ) die Spannung (nach Gl. (2.6.7))

$$\frac{U_2}{U_1}\Big|_{I_2=0} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{1}{A_{11}}$$
 Spannungsübersetzung

ein. Es hängt von den Zweitorkoeffizienten ab, ob dieses Verhältnis kleiner 1 (wie bei normaler Spannungsteilung, Gl. (2.3.8)) oder größer 1 ist, wenn z. B.  $Y_{21}$  eine gesteuerte Quelle darstellt. Für die Schaltung Abb. 2.6.6b entsteht eine Spannungsteilung  $R_2/(R_1 + R_2)$ .

Liegt eingangsseitig eine Stromquelle  $I_1=I_{\rm q}$ , so beträgt der Ausgangskurzschlussstrom des Zweitors (bei  $U_2=0$ ) nach Gl. (2.6.7)

$$\frac{I_2}{I_1}\Big|_{U_2=0} = \frac{Y_{21}}{Y_{11}} = -\frac{Z_{21}}{Z_{22}} = \frac{-1}{A_{22}}$$
 Stromübersetzung.

Für die Schaltung Abb. 2.6.6c wird daraus die Stromteilerformel  $-G_2/(G_2+G_3)$ . Mit gesteuerten Quellen kann die Stromübersetzung auf Werte größer 1 anwachsen.

In diese Ergebnisse lassen sich problemlos Ausgangbelastungen mit einbeziehen (s. Kap. 2.6.7) Das negative Vorzeichen in der Stromübersetzung ergibt sich aus der symmetrischen Stromfestlegung, es fehlt in der Stromteilerregel Gl. (2.3.10).

Die Beispiele zeigen, dass die Spannungs- und Stromteilerregel Sonderfälle von Zweitorbetrachtungen sind, die auch gesteuerte Quellen zulässt.

### 2.6.3 Zweitorarten

Die Zweitorparameter erlauben die Einteilung der Zweitore durch *Parameterbedingungen* (Tab. 2.7). Mehrere können gleichzeitig zutreffen. Ihre Kenntnis bestimmt die Anzahl der notwendigen Zweitorparameter und die zugehörige Ersatzschaltung. Benötigt das allgemeine Zweitor alle vier Parameter, so sinkt ihre Zahl bis auf zwei für spezielle Zweitore (und gar einen für manche Elementarzweipole). Wichtige Merkmale sind *Umkehrbarkeit* und *Symmetrie*.

### Umkehrbarkeit

Ein Zweitor heißt umkehrbar, übertragungssymmetrisch oder reziprok, wenn es unabhängig von der Einspeisungsseite bei gleicher Ursache die gleiche Wirkung zeigt und so richtungsunabhängiges Übertragungsverhalten hat.

Das ist der Inhalt des *Reziprozitätstheorems* oder der Umkehrbarkeitsbedingung (Kap. 4.3). Deshalb gelten

$$\frac{U_1}{I_2}\Big|_{I_1=0} = \frac{U_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}$$
 bzw.  $Z_{12} = Z_{21}$ . Umkehrbarkeitsbedingung (2.6.10)

Verursacht ein Eingangsstrom  $I_1$  (Ursache) am Zweitorausgang die Leerlaufspannung  $U_2$  und umgekehrt der gleiche Strom  $I_2$  (Ursache) am Ausgang die gleiche Leerlaufspannung am Zweitoreingang ( $U_1 \equiv U_2$ ), so ist das Zweitor umkehrbar.

Sinngemäße Erklärungen gelten für andere Zweitordarstellungen.

Beim Übergang von der Widerstandsform zu anderen Zweitorgleichungen folgt dann (symmetrisches Richtungssystem) die *Umkehrbarkeitsbedingung* 

$$Y_{21} = Y_{12}, \ Z_{21} = Z_{12}, \ H_{12} = -H_{21}, \ \det \mathbf{A} = 1$$
 (2.6.11a)

Hinweis: in der (nicht benutzten) Kettenpfeilrichtung lautet die Umkehrbarkeitsbedingung

$$Y'_{21} = -Y'_{12}, \ Z'_{21} = -Z_{12'}, \ H_{12'} = H'_{21}, \ \det \mathbf{A}' = -1$$
 (2.6.11b)

dabei wurden die Parameter zur Unterscheidung mit einem Strich versehen.

Ein umkehrbares Zweitor hat drei (unabhängige) Zweitorparameter, der vierte liegt durch die Umkehrbarkeitsbedingung fest.

Zweitore aus linearen zeitunabhängigen Netzwerkelementen (R, L, C) sind stets umkehrbar, wenn nur  $Y_{12} \neq 0$  (gleichwertig  $Z_{12}$ ,  $H_{12}$ , det A = 1) gilt und so eine Verbindung zwischen Ein- und Ausgang besteht.

Umkehrbare Zweitore lassen sich stets durch eine quellenfreie T- oder  $\pi$ -Ersatzschaltung modellieren (s. Tab. 2.11). Zweitore, die die Umkehrbarkeitsbedingung nicht erfüllen, heißen nicht umkehrbar, nicht reziprok oder übertragungsunsymmetrisch, auch aktive Zweitore. Dazu gehören z. B. solche mit einer gesteuerten Quelle.

Tabelle 2.7. Grundeigenschaften ausgewählter Zweitore

Zweitor	Zahl und Bedingung unabhängiger Zweitorparameter	Beispiele
Umkehrbar, unsymmetrisch	3: $Z_{12} = Z_{21}$ , $Y_{12} = Y_{21}$ , $H_{12} = -H_{21}$ , $\det \mathbf{A} = 1$	unsymm. Zweitor aus Grundelementen $R, C, L, (M)$
Widerstands- symmetrisch, nicht umkehrbar	3: $Z_{11} = Z_{22}$ , $Y_{11} = Y_{22}$ , det $\mathbf{H} = 1$ , $A_{11} = A_{22}$	gesteuerte Quelle, gleiche Ein- und Ausgangswiderstände
Widerstands- symmetrisch umkehrbar	2: beide vorigen Bedingungen gleichzeitig	symm. Zweitor aus Grundelementen $R, C, L, (M)$
Rückwirkungsfrei, nicht umkehrbar	3: $Z_{12} = Y_{12} = 0$ $H_{12} = \det A = 0$	gesteuerte Quelle, Verstärker ohne Rückwirkung

Richtungssymmetrisches Zweitor Ein Zweitor wird richtungssymmetrisch genannt, wenn sein Eingangswiderstand bei beliebigem Abschluss auf Seite 2 mit dem Ausgangswiderstand bei beliebigem Abschluss auf Seite 1 übereinstimmt (Tab. 2.7). Der Beweis erfolgt durch Widerstandsberechnung, die Bedingungen lautet

$$Z_{11}=Z_{22},\ Y_{11}=Y_{22},\ A_{11}=A_{22},\ \det {\pmb H}=1.$$
 Widerstandssymmetrie (2.6.12)

Ein richtungssymmetrisches Zweitor hat drei unabhängige Parameter. Gilt zusätzlich Umkehrbarkeit, so liegt ein *längssymmetrisches* Zweitor vor mit zwei Zweitorparametern. Hier hängen die Betriebseigenschaften nicht von der Betriebsrichtung ab: sie sind umkehrbar, übertragungs- und widerstandssymmetrisch.

Rückwirkungsfreies Zweitor Ein nicht umkehrbares Zweitor wird im Grenzfall  $Y_{12} = 0$  rückwirkungsfrei

$$Y_{12} = 0$$
,  $Z_{12} = 0$ ,  $H_{12} = 0$  det  $\mathbf{A} = 0$ . Rückwirkungsfreiheit (2.6.13)

Beim rückwirkungsfreien Zweitor ist die U, I-Relation des Eingangstores unabhängig vom Ausgangstorverhalten.

Dann verschwindet in der Zweitorgleichung  $I_1 = Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2$  der letzte Term und man spricht von einem *unilateralen Zweitor*. Es überträgt in Rückwärtsrichtung kein Signal: der Eingang ist vom Ausgang entkoppelt.

Ein rückwirkungsfreies Zweitor hat drei unabhängige Parameter (Ein-, Ausgangswiderstände, eine Steuergröße). Es ist die grundlegende Zweitorform eines Verstärkers.

## 2.6.4 Zweitorersatzschaltungen, gesteuerte Quellen

**Einführung** Zweitorersatzschaltungen dienen der Nachbildung des Klemmenverhaltens durch ein einfacheres Netzwerk. Ein Vergleich zum Zwei*pol* bietet sich an: auch dort beschrieb der *Ersatzzweipol* das Klemmenverhalten eines Netzwerkes zwischen zwei Klemmen gleichwertig. Zweitorersatzschaltungen

- stellen das gleiche Torverhalten durch ein einfacheres Netzwerk dar,
- gestatten eine physikalische Modellierung in Grenzen (Beispiel: Transistorersatzschaltungen),
- ermöglichen einfache Umrechnungen in andere Grundschaltungen.

Formale Zweitorersatzschaltungen haben entweder keine, eine oder zwei gesteuerte Quellen (abhängig vom Zweitor). Sie leiten sich direkt aus den Zweitorgleichungen ab. Gesteuerte Quellen führen wir zunächst nur ein, vertiefen sie aber wegen ihrer grundsätzlichen Bedeutung im Kap. 2.7.

Gesteuerte Quellen Der Begriff "gesteuerte Quelle" beschreibt die Nachbildung eines physikalischen Effektes an einem bestimmten Ort, der von einer Ursache an einem anderen Ort abhängt:

Eine gesteuerte Quelle ist eine ideale Quelle, deren Intensität (und Richtung) von einer Schaltungsvariablen (Strom, Spannung) eines anderen Zweiges – der Steuergröße – abhängt, letztere aber nicht rückwirkend beeinflusst (höchstens indirekt über eine umgebende Schaltung). Sie heißt deshalb auch abhängige Quelle und verschwindet bei fehlender Steuergröße im Gegensatz zur unabhängigen idealen Quelle.

Gegenüber der unabhängigen idealen Quelle ist die gesteuerte Quelle ein Zweiter mit einer Steuer- und einer Quellenseite. Es gibt damit vier Quellenarten (Abb. 2.6.7): spannungs- oder stromgesteuerte Spannungs- oder Stromquellen. Ihre Schaltsymbole entsprechen den Quellen (ergänzt um den Steuerzweig), im amerikanischen Schrifttum und der neuen Vorschrift DIN EN 60375 erhalten sie oft Schaltzeichen, die sich von denen unabhängiger Quellen unterscheiden.

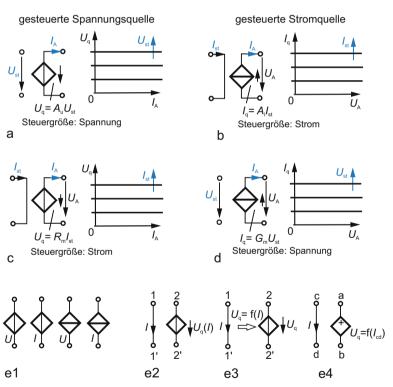


Abb. 2.6.7. Gesteuerte ideale Quellen. (a) . . . (d) Steuerkennlinien linearer idealer Quellen mit zugeordnetem Ausgangskennlinienfeld. (e) Schaltzeichen gesteuerter Quellen mit Angabe der jeweiligen Steuergröße: (e1) Kurzform der spannungs- bzw. stromgesteuerten Spannungsquelle, dto. für die Stromquelle. (e2) Darstellung einer stromgesteuerten idealen Spannungsquelle als Zweitor. (e3) Gleichwertige Form zu (e2). (e4) Schaltzeichen zu (e2) nach DIN EN 60375

Gesteuerte Quellen haben folgende Merkmale

- es sind ideale Quellen,
- Nichtumkehrbarkeit (Rückwirkungsfreiheit): die Steuergröße beeinflusst direkt die Quellengröße, aber diese nicht die Steuergröße,
- leistungslose Steuerung: sie erfordert nur eine Steuergröße (Spannung oder Strom) und arbeitet deshalb leistungslos. Dem entspricht ein unendlich großer oder verschwindender Widerstand des Steuerzweiges,
- Steuer- und Quellenzweig haben a priori keine galvanische Verbindung. Sie ergibt sich erst durch die Modellierung eines bestimmten Bauelementes (z. B. beim Transistor).

Auf eine weitere Besonderheit verweisen wir schon jetzt: In Netzwerken dürfen gesteuerte Quellen bei Anwendung bestimmter Analyseverfahren (Zweipoltheorie, Ersatzgrößenbestimmung, Überlagerungssatz u. a.) nie zeitweilig außer Betrieb gesetzt werden (wie unabhängige Quellen), sie verbleiben vielmehr stets im Netzwerk.

Gesteuerte Quellen sind das Netzwerkmodell für die unidirektionale, nichtgalvanische Verknüpfung zweier Stromkreise. Sie erlauben so die Modellierung von Bauelementen mit Verstärkereffekt bzw. nichtgalvanischer Verkopplung zweier Stromkreise. Die Modellierung einer Rückwirkung erfordert deshalb weitere Netzwerkelemente, beispielsweise eine zweite, rückwärts arbeitende gesteuerte Quelle.

So, wie jedes Netzwerkelement ein typisches Verhalten aufweist, hat auch eine gesteuerte Quelle nach dem Linearitäts- und Zeitverhalten vier Verhaltensmuster. Es gibt deshalb linear-zeitabhängige (zeitunabhängige) und nichtlinear-zeitabhängige (zeitunabhängige) Quellen. Wir beschränken uns zunächst auf linearer zeitunabhängige Quellen (Ergänzung s. Kap. 2.7).

Abb. 2.6.7 fasst die vier linear zeitunabhängigen Quellentypen zusammen. Bei der spannungsgesteuerten Spannungsquelle hängt die Quellenspannung  $U_{\alpha}$ 

$$U_{\rm q} = A_{\rm u} U_{\rm st}|_{-\infty < I < \infty}$$
 Spannungsgesteuerte (2.6.14a)  
Spannungsquelle

von der Steuerspannung  $U_{\rm st}$  in einem anderen Netzwerkzweig nach dem Steuerfaktor  $A_{\rm u}$ , der (Leerlauf)spannungsverstärkung ab<sup>36</sup>.

Das Kennlinienfeld besteht aus Parallelen im Abstand  $A_{\rm u}U_{\rm st}$  zur Achse des Ausgangsstromes  $I=I_{\rm A}$ . Mit steigender Steuerspannung steigt die Quellenspannung. Der Steuerfaktor "Spannungsverstärkung" (> 1) drückt die Verstärkerwirkung der Quelle aus: eine kleine Steuerspannung verändert eine große Quellenspannung leis-

 $<sup>^{36}</sup>$ Leerlaufspannungshinweis eigentlich überflüssig, da Spannung der idealen Quelle lastunabhängig. Der Begriff stammt von der messtechnischen Bestimmung von  $A_{\rm u}.$ 

tungslos. Diese Quellenform ist typisch für Spannungs- und Operationsverstärker (s. Kap. 2.7.7).

Die spannungsgesteuerte Stromquelle

$$I_{\rm q} = \left. G_{
m m} U_{
m st} \right|_{-\infty < U < \infty}$$
 Spannungsgesteuerte Stromquelle (2.6.14b)

steuert den Quellenstrom  $I_{\rm q}$  durch die Steuerspannung  $U_{\rm st}$  in einem anderen Netzwerkzweig. Der Proportionalitätsfaktor heißt Transferleitwert, verbreitet aber (übernommen von der Elektronenröhre)  $Steilheit S = G_{\rm m}$  (der Term  $G_{\rm m}$  stammt von mutal conductance).

Die spannungsgesteuerte Stromquelle ist die Standardform zur Modellierung von Transistorersatzschaltungen.

 ${\bf Die}\ stromgesteuerte\ Spannung squelle$ 

$$U_{\rm q} = R_{\rm m} I_{\rm st}|_{-\infty < I < \infty}$$
 Stromgesteuerte Spannungsquelle (2.6.14c)

steuert die Quellenspannung  $U_{\rm q}$  durch einen Zweigstrom  $I_{\rm st}$ . Die Proportionalitätskonstante heißt Transferwiderstand, auch  $Transimpedanz~R_{\rm m}^{~37}$ .

Die stromgesteuerte Stromguelle

$$I_{\rm q} = A_{\rm i} I_{\rm st}|_{-\infty < U < \infty}$$
 Stromgesteuerte Stromquelle Stromquelle

beschreibt den Zusammenhang zwischen Zweigstrom und Ausgangsquellenstrom gemäß der  $Kurzschlussstromverstärkung A_i$ . Sie dient zur Modellierung des Stromverstärkers, etwa als Stromverstärkung beim Bipolartransistor.

Für die idealen gesteuerten Quellen nach Gl. (2.6.14) gilt ausgangsseitig das Erzeugerpfeilsystem.<sup>38</sup> Beim Einfügen einer Quelle in ein Zweitor mit symmetrisch definierten Stromrichtungen kehrt sich das Vorzeichen bei den Steuerparametern Steilheit und Stromverstärkung. Dann gilt die Zuordnung nach Gl. (2.6.15).

Gesteuerte Quellen und Matrixdarstellung Während der historischen Entwicklung entstanden für gesteuerte Quellen *natürliche Bezeichnungen* (wie Steilheit, Spannungsverstärkung, Kurzschlussstromverstärkung, Transimpedanz),

 $<sup>^{37}\</sup>mathrm{Sie}$ ist Grundlage des Transimpedanzverstärkers.

 $<sup>^{38}\</sup>mathrm{Es}$  gibt keine einheitliche Regelung, daher jeweils die ausgangsseitige Stromrichtungsdefinition überprüfen.

meist (nicht einheitlich!) gekoppelt an die ausgangsseitige Erzeugerpfeilrichtung. Auf der andere Seite hat die Zweitorbeschreibung Koeffizienten, die als gesteuerte Quelle interpretiert werden können und eine (nutzerabhängige) Zuordnung natürlicher Bezeichnungen nahelegt. Tabelle 2.8 stellt die Matrixformen der gesteuerten Quellen zusammen (Gl. (2.6.15)):

$$\begin{array}{ll} \text{spannungsgest. Spannungsquelle} & C_{21} = \frac{1}{A_{11}} = A_{\text{u}} \\ \text{stromgest. Spannungsquelle} & Z_{21} = \frac{1}{A_{21}} = R_{\text{m}} \\ \text{stromgest. Stromquelle} & H_{21} = -\frac{1}{A_{22}} = -A_{\text{i}} \\ \text{spannungsgest. Stromquelle} & Y_{21} = -\frac{1}{A_{12}} = -G_{\text{m}} = -S. \end{array} \tag{2.6.15}$$

Hinweis: für die Zweitorkoeffizienten  $Y_{21}$ ,  $H_{21}$  gilt die symmetrische Stromrichtung, die Größen  $A_i$ ,  $G_m$  sind aber für das Erzeugerpfeilsystem ausgangsseitig positiv definiert. Das begründet die negativen Vorzeichen. Die Vorzeichen der Kettenparameter resultieren aus dem gemischten Richtungssystem (s. Abb. 2.6.4).

Stets sind nur die Koeffizienten der gesteuerten Quellen von null verschieden, alle restlichen Elemente verschwinden. Andere Zweitordarstellungen existieren in den betreffenden Fällen nicht. Die Quellenersatzschaltungen ergeben sich aus Tabelle 2.5 durch Nullsetzen der restlichen Elemente, z. B.  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$ ,  $Z_{22}$  für die stromgesteuerte Spannungsquelle.

Tabelle 2.8. Zweitordarstellungen gesteuerter Quellen (n. d.: nicht definiert)

spannungsgest. Spannungsquelle	stromgest. Spannungsquelle	spannungsgest. Stromquelle	stromgest. Stromquelle
$U_{1}$ $G_{a}=0$ $R_{a}=0$	$R_{a}=0$ $R_{a}=0$	$U_1 = \begin{bmatrix} I_2 \\ Y_{21}U_1 \end{bmatrix}$ $G_a = 0$	$R_a = 0$ $G_a = 0$
$\boldsymbol{C} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ C_{21} & 0 \end{array} \right)$	$oldsymbol{Z} = \left(egin{array}{cc} 0 & 0 \ Z_{21} & 0 \end{array} ight)$	$oldsymbol{Y} = \left(egin{array}{cc} 0 & 0 \ Y_{21} & 0 \end{array} ight)$	$m{H} = \left(egin{array}{cc} 0 & 0 \ H_{21} & 0 \end{array} ight)$
Z-, $Y$ -, $H$ - Matrix n. d.	Y-, $H$ -, $C$ - Matrix n. d.	Z-, $H$ -, $C$ - Matrix n. d.	<b>Z</b> -, <b>Y</b> -, <b>C</b> - Matrix n. d.
$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{cc} C_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right)$	$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Z_{21}^{-1} & 0 \end{array} \right)$	$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -Y_{21}^{-1} & 0 \end{array} \right)$	$\boldsymbol{A} = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & -H_{21}^{-1} \end{array} \right)$
Spannungsverst. $A_{u} = C_{21}$ $= \frac{1}{A_{11}}$ $U_{2} = C_{21}U_{1}$ $= A_{u}U_{1}$	$\begin{array}{l} \text{Transimpedanz} \\ R_{\text{m}} &= Z_{21} \\ &= \frac{1}{A_{21}} \\ U_2 &= Z_{21}I_1 \\ &= R_{\text{m}}I_1 \end{array}$	Steilheit $G_{\rm m} = S = -Y_{21}$ $= \frac{1}{A_{12}}$ $I_2 = Y_{21}U_1$ $= -G_{\rm m}U_1$	Stromverstärkung $A_{i} = -H_{21}$ $= \frac{1}{A_{21}}$ $I_{2} = H_{21}H_{1}$ $= -A_{i}I_{1}$

### Ideale Quellen (unabhängige, gesteuerte) sind nicht ineinander überführbar.

Dagegen können reale Quellen (Spannungsquelle mit Innenwiderstand oder Stromquelle mit Innenleitwert, endlicher Widerstand des Steuerzweiges) ineinander überführt werden, sowohl auf der Quellen- wie auch Steuerseite:

- über den *Eingangswiderstand*  $R_{\rm st}$  ( $U_{\rm st} = R_{\rm st}I_{\rm st}$ ) ist eine spannungsgesteuerte Quelle (Spannung oder Strom) in eine stromgesteuerte überführbar und umgekehrt (Abb. 2.6.8),
- bei endlichem Innenwiderstand  $R_i$  der gesteuerten Quelle ist eine Wandlung der Strom- in eine Spannungsquelle (und umgekehrt) möglich:

Steuergleichung: 
$$U_{\rm st} = R_{\rm st}I_{\rm st}$$
,  
Ausgangsbeziehung:  $U_{\rm A} = A_{\rm u}U_{\rm st} - R_{\rm i}I_{\rm A}$  (2.6.16a)  
 $I_{\rm A} = A_{\rm i}I_{\rm st} - G_{\rm i}U_{\rm A}$ .

Dazu treten die Gleichwertigkeiten

$$\begin{split} U_{\rm q} &= A_{\rm u} U_{\rm st} = R_{\rm i} G_{\rm m} U_{\rm st} = R_{\rm i} A_{\rm i} I_{\rm st} = R_{\rm m} I_{\rm st} = R_{\rm i} I_{\rm q} \\ I_{\rm q} &= A_{\rm i} I_{\rm st} = G_{\rm i} R_{\rm m} I_{\rm st} = G_{\rm m} U_{\rm st} = G_{\rm i} A_{\rm u} U_{\rm st} = G_{\rm i} U_{\rm q}. \end{split} \tag{2.6.16b}$$

Die wechselseitige Überführung der Strom- und Spannungsquelle erfolgt wie beim aktiven Zweipol (s. Kap. 2.4.1). Standen dort Leerlaufspannung, Kurzschlussstrom und Innenwiderstand in direktem Verhältnis, so drückt sich das hier durch die Steuerkoeffizienten aus

$$R_{\rm i} = \frac{A_{\rm u}}{G_{\rm m}} \bigg|_{\rm spannungsgesteuert} = \frac{R_{\rm m}}{A_{\rm i}} \bigg|_{\rm stromgesteuert}.$$
 (2.6.17)

### Die Steuerparameter sind über den Innenwiderstand verknüpft.

War der Innenwiderstand beim aktiven Zweipol durch den Quotient von Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom gegeben, so geht dieser Zusammenhang bei gesteuerten Quellen in den Quotienten zweier spannungs- oder stromgesteuerter Steuergrößen nach Gl. (2.6.17) über. Ursache sind die Parameterumrechnungen des Zweitore.

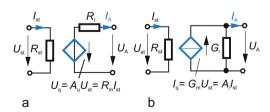


Abb. 2.6.8. Umwandlung gesteuerter realer linearer spannungsund stromgesteuerter Quellen.
(a) Spannungs- oder stromgesteuerte Spannungsquelle. (b) Spannungsoder stromgesteuerte Stromquelle

Der Zusammenhang zwischen Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}$ , Steilheit  $G_{\rm m}$  und Ausgangsinnenwiderstand  $R_{\rm i}$  wurde bereits von Barkhausen<sup>39</sup> für Elektronenröhren erkannt (in der "Röhrenformel"  $SDR_{\rm i}=1$  mit dem "Durchgriff"  $D=1/A_u$ , sie findet eine Entsprechung  $A_{\rm i}=R_{\rm m}G_{\rm i}$  für das stromgesteuerte Element).

### Zusammengefasst:

Die *reale* gesteuerte Quelle entsteht aus einer idealen durch Ergänzung von Ausgangs- und Eingangswiderständen. Damit lassen sich alle gesteuerten Quellen auf eine Form reduzieren.

Die eingeführten Quellen genügen zum Aufstellen von Zweitorersatzschaltungen. Eine Vertiefung erfolgt in Kap. 2.7, weil reale gesteuerte Quellen meist nichtlinear sind und Steuergröße, Kennlinie und Kleinsignalverhalten direkt zusammenhängen.

Eine interessante Anwendung finden gesteuerte Quellen zur Erzeugung ungewöhnlicher Widerstände (s. Beispiel 2.6.16).

Beispiel 2.6.7 Verstärkeranordnung Für die Verstärkerersatzschaltung in Abb. 2.6.9a ist der Strom  $I_4$  durch  $R_4$  als Funktion der Quellenspannung  $U_q$  gesucht. Zwischen beiden Stromkreisen scheint keine unmittelbare Verbindung zu bestehen, nur die gesteuerte Spannungsquelle verknüpft beide in einer Richtung. Der Strom  $I_4$  folgt in der Ausgangsmasche zu

$$\begin{split} I_4 &= \frac{U_{\rm q}'}{R_3 + R_4} = \frac{A_{\rm u} U_{\rm st}}{R_3 + R_4} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{A_{\rm u} U_{\rm q}}{R_3 + R_4}, \\ I_4 &= \frac{G_4}{G_3 + G_4} G_{\rm m} U_{\rm st} = \frac{G_4}{G_3 + G_4} \frac{G_{\rm m} I_{\rm q}}{G_1 + G_2}. \end{split}$$

Die Steuerspannung  $U_{\rm st}$  (Leerlaufspannung über  $R_2$ ) ergibt sich über die Spannungsteilerregel im Eingangskreis. Für  $A_{\rm u}=100,\,U_{\rm q}=1\,{\rm V},\,R_1=R_2=R_3=R_4=1\,{\rm k}\Omega$  beträgt  $I_4=25\,{\rm mA}.$  Würde die Quelle entfernt und  $R_3$  unmittelbar an  $R_2$  gelegt, so ergäbe sich ein Strom von größenordnungsmäßig  $I_4'\approx (U_{\rm q}/2)/(R_3+R_4)\approx 0,25\,{\rm mA}.$  Man erkennt die Verstärkerwirkung. Im Beispiel hat eine Änderung von  $R_4$  keinen Einfluss auf die Steuergröße  $U_{\rm st}$ .

Der gleiche Verstärker kann auch mit einer spannungsgesteuerten Stromquelle ausgestattet sein (Abb. 2.6.9b). Der Teilstrom  $I_4$  wird über die ausgangsseitige Stromteilerregel auf die gesteuerte Quellengröße zurückgeführt und anschließend die Steuerspannung  $U_{\rm st}$  aus dem Eingangskreis berechnet. Sind alle Parameter der linken Schaltung gegeben, so liefert die rechte Schaltung das gleiche Ausgangsergebnis, wenn die Steilheit  $G_{\rm m}$  entsprechend  $G_{\rm m} = A_{\rm u}/R_3$  über die Barkhausen-Beziehung ermittelt wird ( $R_3$  als Innenwiderstand der gesteuerten Quelle aufgefasst, Eingangsquelle  $I_{\rm q}$  aus gleichwertiger Zweipolspannungsquellenersatzschaltung bestimmt).

 $<sup>^{39}</sup>A_{\rm u}=G_{\rm m}R_{\rm i}$  Barkhausen-Beziehung. Sie entstand zu einem Zeitpunkt (1919), als Zweitorbetrachtungen noch nicht gängig waren.

H. Barkhausen (1881–1956) gründete an der Technischen Hochschule Dresden im Jahre 1911 das erste Institut für Schwachstromtechnik.

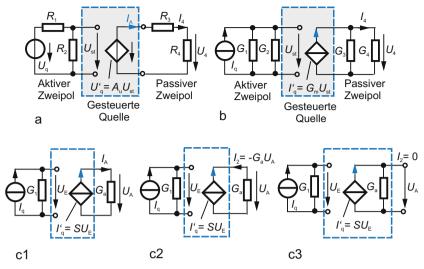


Abb. 2.6.9. Verstärkeranordnungen. (a) Mit spannungsgesteuerter Spannungsquelle. (b) Mit spannungsgesteuerter Stromquelle. (c) Manipulation des Lastleitwertes in Erzeugerpfeilrichtung (c1), in Verbraucherpfeilrichtung (c2) Aufgefasst als Bestandteil des Verstärkerzweitores (c3)

Beispiel 2.6.8 Gesteuerte Stromquelle Eine spannungsgesteuerte Stromquelle ( $I_{\rm A}=SU_{\rm E}$ ) arbeitet auf einen Lastwiderstand  $R_{\rm a}$  (Abb. 2.6.9c). Die Ausgangsspannung  $U_{\rm A}$  ergibt sich durch Direktberechnung mit der Quellendarstellung im Erzeugerpfeilsystem zu  $U_{\rm A}=I_{\rm A}R_{\rm a}=R_{\rm a}SU_{\rm E}$ . Bei Berechnung über die Zweitorbeziehungen gelten (mit  $U_{\rm 1}=U_{\rm E},\,U_{\rm 2}=U_{\rm A}$ ) bei idealer Quelle ( $Y_{\rm 22}=0$ ), Abb. 2.6.9c2)

$$I_2 = Y_{21}U_E + 0U_A$$
,  $U_A = -R_aI_2 = -R_aY_{21}U_E = R_aSU_E$ , da  $Y_{21} = -S$ .

Schließlich kann auch die Last  $R_a$  als Bestandteil des Zweitores betrachtet werden  $(Y_{22} = 1/R_a)$ , Abb. 2.6.9c3). Es arbeitet dann im Leerlauf und so gilt

$$I_2 = Y_{21}U_E + Y_{22}U_A = Y_{21}U_E + (1/R_a)U_A = 0 \rightarrow U_A = -R_aY_{21}U_E = R_aSU_E.$$

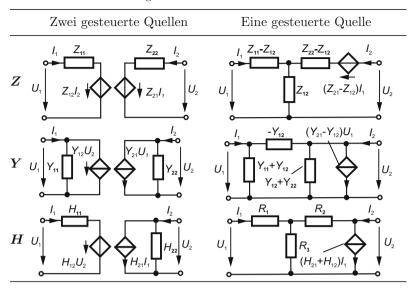
Die Ergebnisse stimmen erwartungsgemäß überein.

#### Zweitorersatzschaltungen

Zweitorersatzschaltungen bilden ein Zweitor bezüglich seines Klemmenverhaltens durch möglichst wenige Ersatzschaltelemente nach ohne Bezug auf seinen physikalischen Inhalt.

Ersatzschaltungen mit zwei gesteuerten Quellen Jede Zweitorbeschreibung kann durch zwei gesteuerte Quellen (in Vor- und Rückwärtsrichtung arbeitend) und zugeschaltete Widerstände interpretiert werden (Tab. 2.9). So bil-

Tabelle 2.9. Ersatzschaltungen



det in der Widerstandsform Gl. (2.6.3) die erste Zeile  $U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$  die Reihenschaltung einer stromgesteuerten Spannungsquelle  $U_q = Z_{12}I_2$  und eines Längswiderstandes  $Z_{11}$  nach. Analog liegen in der Ausgangsmasche die gesteuerte Spannungsquelle  $U_q = Z_{21}I_1$  und der Innenwiderstand  $Z_{22}$  in Reihe. Ganz entsprechend entstehen die übrigen Ersatzschaltungen. Es folgt die Leitwertersatzschaltung durch Wandlung der Reihenschaltung von Widerstand und gesteuerter Spannungsquelle in eine gesteuerte Stromquelle mit Parallelleitwert. Zweitorersatzschaltungen gibt es auch für die Kettenmatrix. Wegen der seltenen Anwendung verzichten wir darauf.

Ersatzschaltungen mit einer gesteuerten Quelle Jede Zweitorersatzschaltung mit zwei Quellen lässt sich in eine Form mit einer Quelle überführen, also in eine Zusammenschaltung von passivem Zweitor und gesteuerter Quelle (aktives Zweitor). Sie werden ihres Aussehens wegen als  $\pi$ - und T-Ersatzschaltung bezeichnet, wir beschränken uns auf diese Formen.

 $\pi$ -Ersatzschaltung Zur Leitwertdarstellung des Zweitors

$$I_{1} = Y_{11}U_{1} + Y_{12}U_{2} = Y_{11}U_{1} + Y_{12}U_{2} + 0 + 0$$

$$I_{2} = Y_{21}U_{1} + Y_{22}U_{2} = \underbrace{Y_{12}U_{1} + Y_{22}U_{2}}_{\text{umkehrbarer Vp.}} + \underbrace{(Y_{21} - Y_{12})U_{1}}_{\text{aktiver Vp.}}$$
(2.6.18)

gehören zwei Torbeziehungen, die über spannungsgesteuerte Stromquellen  $Y_{21}U_1$  in Vorwärts- und  $Y_{12}U_2$  in Rückwärtsrichtung verkoppelt sind (Tab. 2.9). Beide Tore haben keine galvanische Verbindung. Zum Übergang auf eine spannungsgesteuerte Stromquelle am Ausgang werden die Knoten 1', 2' verbunden und die Eingangsstromquelle  $Y_{12}U_2$  durch Quellenteilung (s. Kap. 4.2) über den Ausgangsknoten 2 geführt (Abb. 2.6.10a). So addiert sich zum Teilstrom  $Y_{22}U_2$  noch  $Y_{12}U_2$  und beide Stromanteile werden im Leitwert  $Y_3 = Y_{12} + Y_{22}$  zusammengefasst. (Eine von der eigenen Klemmenspannung gesteuerte Stromquelle wirkt wie ein Zweipolleitwert  $-Y_{12}$ ). Anschließend wird am Eingangsknoten 1 der Nullstrom  $I' = 0 = Y_{12}U_1 Y_{12}U_1$  addiert und sein zweiter Anteil über den Ausgangsknoten 2 geführt. Dann können eingangsseitig der Leitwert  $Y_1 = Y_{11} + Y_{12}$  ersetzt, ausgangsseitig die beiden gesteuerten Stromquellen zu  $(Y_{21} - Y_{12})U_1$  vereint und die Stromquelle zwischen Knoten 1 und 2 durch den Leitwert  $Y_2 = -Y_{12}$  ersetzt werden (durch diesen Zweig fließt der Strom  $I'' = Y_2(U_1 - U_2) =$  $-Y_{12}(U_1-U_2)$ ). Das Ergebnis ist die  $\pi$ -Ersatzschaltung. Sie wird besonders bei verschwindender Quelle  $(Y_{12} = Y_{21})$  deutlich.

Die  $\pi$ -Ersatzschaltung besteht aus einem passiven Zweitor mit den Elementen  $Y_1 \dots Y_3$  und einer gesteuerten Stromquelle  $(Y_{21}-Y_{12})U_1$  am Ausgang.

Im Gleichungssystem (2.6.18) ist der erste Anteil (mit  $Y_{21} = Y_{12}$ ) ein umkehrbares Zweitor und der zweite die ideale spannungsgesteuerte Stromquelle  $(Y_{21} - Y_{12})U_1$  (s. Abb. 2.6.10b). Sie verschwindet bei umkehrbarem Gesamtzweitor  $(Y_{21} = Y_{12})$ . Ganz offenbar gibt es neben der Vorwärtswirkung durch die Stromquelle auch eine "Rückwirkung", entweder durch die gesteuerte Stromquelle  $Y_{12}U_2$  direkt (Abb. 2.6.10a) oder als Knotenverbindung über den Leitwert  $Y_2$  im Fall Abb. 2.6.10b.

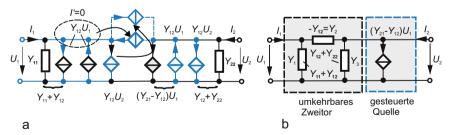


Abb. 2.6.10. Übergang von der Zweitorersatzschaltung mit zwei gesteuerten Quellen zur  $\pi$ -Zweitorersatzschaltung. (a) Ausgangsform mit Umformung durch eingangsseitige Addition eines Nullstromes I' und Quellenteilung. (b) Aufteilung des Gesamtzweitores in ein umkehrbares Zweitor und eine gesteuerte Quelle

Die Zerlegung des Zweitors in ein reziprokes Zweitor und eine gesteuerte Quelle folgt auch direkt aus einer Matrixumformung:

$$\begin{pmatrix}
I_{1} \\
I_{2}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
Y_{11} & Y_{12} \\
Y_{21} & Y_{22}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
U_{1} \\
U_{2}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
Y_{11} & Y_{12} \\
Y_{21} + \underbrace{Y_{12} - Y_{12}}_{0}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
U_{1} \\
U_{2}
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
\underbrace{\begin{pmatrix}
Y_{11} & Y_{12} \\
Y_{12} & Y_{22}
\end{pmatrix}}_{\text{rez. Zweitor}} + \underbrace{\begin{pmatrix}
0 & 0 \\
Y_{21} - Y_{12} & 0
\end{pmatrix}}_{\text{gest. Quelle}} \cdot \begin{pmatrix}
U_{1} \\
U_{2}
\end{pmatrix}. \tag{2.6.19}$$

Durch Erweitern des Koeffizienten  $Y_{21}$  mit 0 wird die Matrix in zwei Teilmatrizen zerlegt: die erste für das reziproke Zweitor, die zweite als gesteuerte Quelle mit dem Steuerkoeffizient  $Y_{21} - Y_{12}$ .

Nach der Zusammenschaltung von Zweitoren entspricht der Addition zweier Leitwertmatrizen eine Parallelschaltung beider Zweitore. Diese Ersatzschaltung muss in ihren Schaltelementen (besonderes  $Y_2$ ) nicht durch Grundelemente realisierbar sein. Beim Transistor erlaubt sie allerdings eine gute Zuordnung zwischen Leitwerten und physikalischen Vorgängen (s. Kap. 2.7.6). Dort werden die Leitwerte  $Y_1 \dots Y_3$  besonders benannt:

Eingangsleitwert 
$$Y_1=Y_{11}+Y_{12}$$
 Rückwirkungsleitwert  $Y_2=-Y_{12}$  (neg.) Summensteilheit  $-S_{\rm S}=Y_{21}-Y_{12}$  Ausgangsleitwert  $Y_3=Y_{12}+Y_{22}$ .

Die Summensteilheit  $S_S$  ist zweckmäßig, weil sie beim Übergang auf andere Grundschaltungen bis auf das Vorzeichen stets erhalten bleibt. Für Verstärkervierpole gilt praktisch immer  $|Y_{21}| \gg |Y_{12}|$ .

**T-Ersatzschaltung** Während die  $\pi$ -Ersatzschaltung Bedeutung für die Schaltungstechnik hat, ist die T-Ersatzschaltung besonders anschaulich. Wie oben wird zunächst von der Ersatzschaltung mit zwei stromgesteuerten Spannungsquellen  $Z_{21}I_1$ ,  $Z_{12}I_2$  eine einfache Form aus zwei separaten Zweigen, eben den Torbeziehungen, abgeleitet (Tab. 2.9) mit beliebigen Längsspannungen zwischen den Toren. Die Widerstandsgleichung  $U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$  bildet diese Masche ab, ausgangsseitig entsprechend.

Bei Durchverbindung der beiden unteren Knoten lässt sich durch Quellenergänzung (Nullquelle  $Z_{12}I_1 - Z_{12}I_1$ ) und Quellenversetzung schließlich (analog wie oben) die T-Ersatzschaltung mit stromgesteuerter Spannungsquelle am Ausgang herleiten. Auch die Zerlegung in eine reziproke und nichtreziproke Widerstandsmatrix, die der *Reihenschaltung* zweier Zweitore entspricht, ist leicht möglich.

# Die T-Ersatzschaltung ist zur $\pi$ -Ersatzschaltung dual.

Sie dient verbreitet zur Modellierung des Transformators, aber auch als Schaltung eines umkehrbaren Zweitors mit drei Elementen.

Das allgemeine Zweitor enthält wenigstens eine gesteuerte Quelle, ihre Form wird durch die Zweipolbeschreibung bestimmt.

Tabelle 2.9 zeigt noch die Hybridersatzschaltung. Sie enthält ihrer Definition nach eine eingangsseitige gesteuerte Spannungsquelle und ausgangsseitig eine stromgesteuerte Stromquelle bzw. eingangsseitig eine Strom- und ausgangsseitig eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle. Für die H- und C-Matrixform gibt es auch Einquellen-Ersatzschaltungen mit geringer Bedeutung. Man erhält die Parameter der Ersatzschaltung durch direkte Berechnung der Hybridparameter des Netzwerkes und anschließende Ersetzung der Netzwerkelemente durch die Zweitorparameter. Für die H-Matrixform sind die Ergebnisse in Tab. 2.9 aufgenommen.

Erwähnt sei, dass die H-Ersatzschaltung aus der Y-Ersatzschaltung durch Wandlung der eingangsseitigen Strom- in eine Spannungsquelle hervorgeht. Sie eignet sich für Stromverstärker, die C-Ersatzschaltung für Spannungsverstärker. Man erhält sie durch Wandlung der Strom- in eine Spannungsquelle.

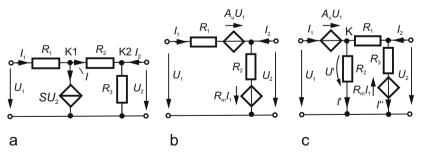
Beispiel 2.6.9 Berechnung Z-Parameter Für die Schaltung Abb. 2.6.11a berechne man die Z-Parameter. Welche Werte gelten für S=0?

a) Zur Bestimmung der Parameter  $Z_{11}$ ,  $Z_{21}$  legt man eine Probespannung  $U_1$  bei ausgangsseitigen Leerlauf  $I_2=0$  an (Schaltung Abb. a). Es ergeben sich für den Knoten K1 und die Eingangsmasche  $I_1-SU_2-I=0$ ,  $U_1=R_1I_1+(R_2+R_3)I$  und  $U_2=IR_3$ . Zusammengefasst folgt

$$I_1 = SU_2 + U_2G_3 \rightarrow Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2 = 0} = \frac{1}{S + G_3}.$$

Die Maschengleichung liefert

$$U_1 = R_1 I_1 + (1 + R_2 G_3) U_2 = \rightarrow Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2 = 0} = R_1 + \frac{(1 + R_2 G_3)}{S + G_3}.$$



**Abb. 2.6.11.** Beispiele zum Zweitorverhalten. (a) Berechnung der Z-Parameter. (b) Berechnung der Hybridparameter. (c) Reziproke Schaltung mit gesteuerten Quellen

b) Zur Berechnung der Parameter  $Z_{22}$  und  $Z_{12}$  wird die Probespannung  $U_2$  angelegt und eingangsseitiger Leerlauf eingestellt  $(I_1 = 0)$ . Es gilt für K2:

$$I_2 = U_2G_3 + SU_2 \rightarrow Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{1}{S + G_3}.$$

Die Spannung  $U_1$  wird aus  $U_2$  mit dem Spannungsabfall über  $R_2$  bestimmt

$$U_1 = U_2 - R_2(SU_2) = (1 - R_2S)Z_{22}I_2 = \rightarrow Z_{12} = \frac{U_1}{I_2} = \frac{(1 - R_2S)}{S + G_3}.$$

Im Sonderfall S = 0 ist die Schaltung umkehrbar  $(Z_{21} = Z_{12})$ , außerdem lässt sich  $Z_{11} = R_1 + R_2 + R_3$  und  $Z_{22} = R_3$  direkt ablesen.

**Beispiel 2.6.10 Hybridparameter** Für die Schaltung Abb. 2.6.11b berechne man die Hybridparameter. Welche Werte gelten für verschwindende gesteuerte Quellen  $(A_{\rm u}=R_{\rm m}=0)$ ?

$$H_{11}$$
: Die Masche  $U_1 = A_{\rm u}U_1 + R_1I_1$  ergibt  $H_{11} = \frac{U_1}{I_1}\Big|_{U_2=0} = \frac{R_1}{1-A_{\rm u}}$ .

 $H_{12}$ : Die Eingangsmasche liefert  $H_{12} = \frac{U_1}{U_2}\Big|_{I_1=0} = \frac{1}{1-A_u}$ .

 $H_{22}$ : Wegen  $I_1 = 0$  wirkt die stromgesteuerte Spannungsquelle nicht:  $H_{22} = 1/R_2$ .

 $H_{21}$ : Bei Kurzschluss des Ausgangs  $U_2=0$  folgt aus der Ausgangsmasche  $(I_1+I_2)R_2+R_{\mathrm{m}}I_1=0$  und damit  $H_{21}=\left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{U_2=0}=-\left(1+\frac{R_{\mathrm{m}}}{R_2}\right)$ .

Ohne gesteuerte Quellen folgt:  $H_{11} = R_1$ ,  $H_{12} = 1$ ,  $H_{22} = 1/R_2$ ,  $H_{21} = -1$ .

**Beispiel 2.6.11 Reziprozität** Welche Bedingung müssen die gesteuerten Quellen Abb. 2.6.11c erfüllen, damit die Schaltung umkehrbar ist?

Die Umkehrbarkeitsbedingung drückt sich in Zweitorkoeffizienten aus, wir fordern  $Z_{21} = Z_{12}$ . Die Berechnung der Parameter erfolgt schrittweise.

 $Z_{21}$ : Für  $I_2=0$  beträgt die Ausgangsspannung  $U_2=R_3I''-R_{\rm m}I_1$ . Die Beziehung zwischen den Strömen  $I_1$  und I'' wird über die Stromteilung am Knoten K ermittelt, dabei muss für die Masche der Maschensatz erfüllt sein:  $U'=R_2(I_1-I'')=I''(R_1+R_3)-R_{\rm m}I_1$ . Man erhält

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = R_3 \frac{I''}{I_1} - R_{\rm m} \text{ und } I'' = I_1 \frac{R_{\rm m} + R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \rightarrow$$

$$Z_{21} = \frac{R_3 R_2 - R_{\rm m} (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2 + R_3)}.$$

 $Z_{12}$ : Hier gilt  $U_1 = A_{\rm u}U_2 + R_2I'$  und I' wird aus der Stromteilung ermittelt (dabei ist die Quelle  $R_{\rm m}I_1$  durch Kurzschluss ersetzt  $I_1=0$ ). Es gilt dann  $I'=I_2/(1+I_1)$ 

 $G_3(R_1+R_2)$ ). Strom  $I_2$  und Spannung  $U_2$  hängen direkt zusammen:  $I_2=U_2/(R_3\parallel(R_1+R_2))$ . Damit ergibt sich

$$\begin{split} Z_{12} &= \frac{U_{1}}{I_{2}} = \frac{A_{\mathrm{u}}I_{2}\left(R_{3} \parallel \left(R_{1} + R_{2}\right)\right) + I_{2}\frac{R_{2}}{\left(1 + G_{3}\left(R_{1} + R_{2}\right)\right)}}{I_{2}} \\ &= \frac{A_{\mathrm{u}}R_{3}\left(R_{1} + R_{2}\right) + R_{2}R_{3}}{R_{1} + R_{2} + R_{3}}. \end{split}$$

Die Bedingung  $Z_{12} = Z_{21}$  führt auf  $-R_{\rm m} = A_{\rm u}R_3$ : Auch eine Schaltung mit gesteuerten Quellen kann umkehrbar sein, sofern die Umkehrbarkeitsbedingung erfüllt ist. Fehlende gesteuerte Quellen reicht als Kriterium nicht aus.

#### 2.6.5 Elementarzweitore

Wir stellen elementare Zweitore zum Aufbau komplexerer Zweitore zusammen. Die zugehörigen Matrizen können direkt aus der Schaltung "abgelesen" werden. In Zweifelsfällen geht man von einem Zweitor mit mehreren Elementen aus, berechnet seine Matrixelemente und führt anschließend Grenzübergänge durch: Überbrückung  $(R \to 0 \text{ bzw. } G \to \infty)$  oder Aufschneiden einer Verbindung  $(R \to \infty \text{ bzw. } G \to 0)$ . So geht die T-Ersatzschaltung (Tab. 2.9) durch Weglassen oder Kurzschließen einzelner Elemente in verschiedene Grundzweitore über.

Tabelle 2.10. Elementarzweipole (n. d. nicht definiert)

Zweitor	Z	Y	Н	A
R,G  R,G  Längswiderstand	n. d.	$\left(\begin{array}{cc} G & -G \\ -G & G \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc} R & 1 \\ -1 & 0 \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc} 1 & R \\ 0 & 1 \end{array}\right)$
R,G Querwiderstand	$\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$	n. d.	$\left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & G \end{array}\right)$	$\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ G & 1 \end{array}\right)$
$R_1$ $R_2$ Vertauschung	n. d.	$\frac{1}{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 - (R_1 + R_2) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
ü = w,/w idealer Übertrager	n. d.	n. d.	$\left(\begin{array}{cc} 0 & \ddot{u} \\ -\ddot{u} & 0 \end{array}\right)$	$\left( \begin{array}{cc} \ddot{u} & 0 \\ 0 & 1/\ddot{u} \end{array} \right)$

Die einfachsten Zweitore enthalten nur ein Schaltelement, z. B. die durchgehende *Leitungsverbindung* mit Widerstand im Quer- oder Längszweig (Tab. 2.10). Eine *Leitungskreuzung* vertauscht die Richtungen von Strom und Spannung am Zweitorausgang. Charakteristisch für Elementarzweitore ist, dass nicht alle Matrixdarstellungen existieren.

— Das Längselement hat nur die Leitwertmatrix, weil in der Widerstandsmatrix die Torströme  $I_1$  und  $I_2$  voneinander abhängen. Die Leitwertelemente  $Y_{11}=Y_{22}$  betragen

 $Y_{11} = \frac{I_1}{U_1}\Big|_{U_2=0} = G = \frac{1}{R}, \qquad Y_{21} = \frac{I_2}{U_1}\Big|_{U_2=0} = -G = -\frac{1}{R} = Y_{12},$ 

ebenso der Übertragungsleitwert aus seiner Definition. Letztere bestimmt (über  $I_2$ ) das negative Zeichen, denn bei Anlegen der Spannung  $U_1$  (Ursache) wird die Richtung von  $I_1 = -I_2$  und damit auch  $I_2$  erzwungen. Die Reziprozität ist augenscheinlich. Weil die Matrixdeterminante verschwindet (det Y = 0), gibt es keine Widerstandsform  $Z = Y^{-1}$ .

- Beim Querelement sind die Verhältnisse analog (duale Schaltung). Jetzt hängen die Torspannungen  $U_1$ ,  $U_2$  voneinander ab ( $U_1 = U_2$ ), deswegen existiert keine Leitwertmatrix. Die Matrixelemente  $Z_{11} = Z_{22}$  sind unmittelbar hinzuschreiben, der Querwiderstandsleitwert ist zugleich Übertragungswiderstand  $Z_{12} = Z_{21} = R$ . Eine Vorzeichenumkehr fehlt, weil die eingeprägten Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  einen Spannungsabfall an R im VPS hervorrufen.
- der ideale Übertrager (s. Bd. 2) übersetzt nur Strom und Spannung, deswegen gibt es lediglich die Hybrid- und Kettenmatrix.

Die T-Schaltung (Tab. 2.11) ist die Standardform zur Darstellung der (umkehrbaren) Widerstandsmatrix durch ein Netzwerk. Ihre Elemente werden nach Definition berechnet oder aus der Schaltung "abgelesen". So beträgt der Eingangsleerlaufwiderstand  $Z_{11} = R_1 + R_3$ , weil der Widerstand  $R_2$  durch den ausgangsseitigen Leerlauf ( $I_2 = 0$ ) ohne Einfluss bleibt (beim Eingangskurzschlusswiderstand  $1/Y_{11}$  nicht!). Entsprechend gilt  $Z_{22} = R_3 + R_2$ . Der Übertragungswiderstand  $Z_{21} = R_3$  wird wie beim Querelement ermittelt: ein eingeprägter Eingangsstrom  $I_1$  fließt zwar durch  $R_1$ , maßgebend für  $Z_{21}$  ist aber der Spannungsabfall an  $R_3$ . Deshalb entsteht bei Einprägung von  $I_2$  der gleiche Übertragungswiderstand und macht das Zweitor bezüglich der eingeprägten Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  umkehrbar:  $Z_{21} = Z_{12}$ . Die Widerstände  $R_1 \dots R_3$  ergeben sich aus dem Widerstandsgleichungssystem:  $R_1 = Z_{11} - Z_{21}$ ,  $R_2 = Z_{22} - Z_{21}$ ,  $R_3 = Z_{21} = Z_{12}$ .

Schließlich können die Z-Elemente der T-Schaltung auch (höchst umständlich!) aus den Elementarvierpolen Längselement und Querleitwert berechnet werden: wir fassen die Gesamtschaltung auf als Kettenschaltung des Längswiderstandes  $R_1$  (Kettenmatrix  $A_1$ ), des Querleitwertes  $G_3 = 1/R_3$  (Kettenmatrix  $A_3$ ) und des

Längswiderstandes  $R_2$  (Kettenmatrix  $A_2$ ). Die Kettenmatrix der Gesamtschaltung ist das Produkt der drei Einzelmatrizen:

$$A_{\text{ges}} = A_{1} \cdot A_{3} \cdot A_{2} = \begin{pmatrix} 1 & R_{1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ G_{3} & 1 \end{pmatrix}_{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & R_{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2}$$

$$= \begin{pmatrix} R_{1}G_{3} + 1 & R_{1} + R_{2} + R_{1}R_{2}G_{3} \\ G_{3} & R_{2}G_{3} + 1 \end{pmatrix}.$$
(2.6.20)

Die Z-Parameter werden durch Matrixumrechnung gewonnen, wir greifen stellvertretend die Elemente  $Z_{11}$  und  $Z_{12}$  heraus

$$Z_{11} = \frac{A_{11}}{A_{21}} = R_1 + R_3, \quad Z_{12} = \frac{\det \mathbf{A}}{A_{21}} = \frac{1}{G_3} = R_3.$$

Statt der Determinantenberechnung (Kontrolle auf richtige Vorzeichen!) wird die Umkehrbarkeitsbedingung det A = 1 benutzt (passives Zweitor!).

Diese umständliche Berechnung der T-Schaltung bietet eine Kontrolle der Vorzeichen der Einzelvierpolmatrizen, außerdem schafft sie Sicherheit im Umgang mit der Kettenmatrix und ihrer (hybriden) Festlegung des Ausgangsstromes.

Das Beispiel zeigt auch, dass die Zusammenschaltung von Zweitoren über Matrixbeziehungen zwar anschaulich, aber in der Durchführung nicht effizient sein muss. Eine unmittelbare Netzwerkanalyse wäre hier günstiger. Tabelle 2.11 zeigt die Ersatzschaltungen und zugehörigen Zweitorparameter für häufig verwendete passive Zweitore, aus denen die Elementarzweitore (Tab. 2.10) sofort hervorgehen.

Zur Gruppe umkehrbarer Zweitore gehören außer der T-Ersatzschaltung auch die  $\pi$  und X- oder Kreuz-Ersatzschaltungen (s. Tab. 2.11), letztere als Zweitorform der Brückenschaltung. Bei Abgleich ( $R_1 = R_2$ ) verschwinden ihre Übertragungseigenschaften: der Ausgang ist vom Eingang entkoppelt.

**Tabelle 2.11.** Ersatzschaltungen passiver Zweipole ( $N_G = G_1G_2 + G_1G_3 + G_2G_3$ ,  $G_{12} = G_1 + G_2$ ,  $N_R = R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3$ ,  $R_{12} = R_1 + R_2$ )

**Spannungsteilerregel und T-Ersatzschaltung** Die T-Ersatzschaltung hebt auch das Zweitorverständnis der Spannungsteilerregel hervor (s. Gl. (2.3.8) und Beispiel 2.6.6):

$$\frac{U_2}{U_1}\Big|_{I_2=0} = \frac{R_3}{R_1 + R_3} = \frac{\frac{U_2}{I_1}\Big|_{I_2=0}}{\frac{U_1}{I_1}\Big|_{I_2=0}} = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{1}{A_{11}}.$$
(2.6.21)

Die Spannungsteilung (bei ausgangsseitigem Leerlauf) entspricht der reziproken Leerlaufspannungsübersetzung des Zweitores! Damit können umgekehrt die Kettenmatrixparameter direkt berechnet werden. Beispielsweise korrespondiert die Stromteilerregel Gl. (2.3.10) mit der reziproken Kurzschlussstromübersetzung  $(1/A_{22})$  und die Nebendiagonalelemente  $A_{21}$  und  $A_{12}$  stehen mit  $Z_{21}$  resp.  $Y_{21}$  in Beziehung.

Beispiel 2.6.12 Zweitorlast Zur Übung mit dem Lastwiderstand und Vorzeichen des Ausgangsstromes zerlegen wir eine T-Ersatzschaltung in ein Zweitor mit den Elementen  $R_1$  und  $R_3$  (mit zugeordneten Widerstandsparametern) und betrachten den Längswiderstand  $R_2$  als seine Last (Skizze!). Gesucht sei der Eingangskurzschlusswiderstand  $R_{1k} = 1/Y_{11} = R_1 + (R_3 \parallel R_2)$ , wie er der Schaltung sofort entnommen wird. Bei der Zweitoranalyse

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2$$
,  $U_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2$  Lastbeziehung  $U_2 = -R_2I_2$ 

tritt zu den Zweitorgleichungen noch die Lastbeziehung. Weil der Ausgangsstrom  $I_2$  am Zweitor symmetrisch festliegt, muss die Stromrichtung im Lastelement berücksichtigt werden: das Zweitor ordnet dem Widerstand die Erzeugerpfeilrichtung zu!

Der Eingangswiderstand der "neuen" Schaltung folgt zu

$$R_1 = R_{1k} = \frac{U_1}{I_1} = Z_{11} + Z_{12} \left(\frac{I_2}{I_1}\right) = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{R_2 + Z_{22}}$$
$$= R_1 + R_3 - \frac{R_3^2}{R_2 + R_3} = R_1 + (R_3 \parallel R_2).$$

Das Stromverhältnis  $I_2/I_1$  liegt durch die zweite Zweitorgleichung und die Lastbeziehung fest:

$$U_2 = -R_2I_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \rightarrow \frac{I_2}{I_1} = \frac{-Z_{12}}{R_2 + Z_{22}}.$$

Nachdrücklich ist hervorzuheben, dass die definierten symmetrischen Stromrichtungen am Zweitor für das Lastelement definitorisch die Erzeugerpfeilrichtung  $U_2 = -IR_2$  zur Folge haben!

# 2.6.6 Zweitorzusammenschaltungen

Zweitorzusammenschaltungen umfassen den Aufbau größerer Schaltungen aus bekannten Zweitoren, die Einbettung eines Zweitores in ein anderes Netzwerk oder die Rückführung komplizierter Schaltungen auf Elementaranordnungen. Zusammenschaltungen erfolgen durch *Parallel*- und/oder *Reihen*oder *Kettenschaltung* von Einzelzweitoren. Es gibt fünf Möglichkeiten (inverse Formen wegen geringer Bedeutung nicht beachtet) (Abb. 2.6.12).

Mit "angepassten" Zweitorparametern führt die Zusammenschaltung auf eine Addition entsprechender Matrixdarstellungen.

Voraussetzung einer Zusammenschaltung ist keine Störung der Übertragungsfunktion der einzelnen Zweitore. Das trifft bei Einhaltung der *Torbedingungen* für die Einzelzweitore und das Gesamtzweitor zu.

**Reihenschaltung** Bei der *Reihenschaltung* von Zweitoren (Abb. 2.6.13) mit eingehaltenen Torbedingungen für die Zweitore  $N_a$ ,  $N_b$ , also  $I_1 = I_{1a} = I_{1b}$  und  $I_2 = I_{2a} = I_{2b}$  führt die *Addition der Spannungen*  $U_1 = U_{1a} + U_{1b}$ ,  $U_2 = U_{2a} + U_{2b}$  auf die *Addition der Widerstandsmatrizen*. Mit den Vektoren

$$egin{aligned} oldsymbol{I}_{\mathrm{a}} &= \begin{pmatrix} I_{1\mathrm{a}} \\ I_{2\mathrm{a}} \end{pmatrix}, & oldsymbol{I}_{\mathrm{b}} &= \begin{pmatrix} I_{1\mathrm{b}} \\ I_{2\mathrm{b}} \end{pmatrix}, & oldsymbol{I} &= \begin{pmatrix} I_{1} \\ I_{2} \end{pmatrix} & \mathrm{und} \\ oldsymbol{U}_{\mathrm{a}} &= \begin{pmatrix} U_{1\mathrm{a}} \\ U_{2\mathrm{a}} \end{pmatrix}, & oldsymbol{U}_{\mathrm{b}} &= \begin{pmatrix} U_{1\mathrm{b}} \\ U_{2\mathrm{b}} \end{pmatrix}, & oldsymbol{U} &= \begin{pmatrix} U_{1} \\ U_{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

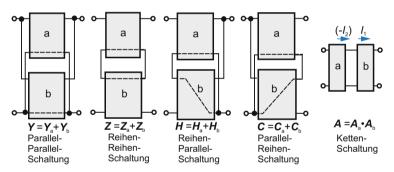


Abb. 2.6.12. Zusammenschaltungen erdunsymmetrischer Zweitore (durchgehende Masseleitung)

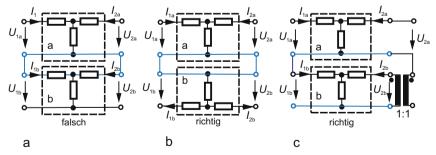


Abb. 2.6.13. Reihenschaltung zweier Zweitore. (a) Falsche Anordnung, ein Längszweig wird kurzgeschlossen. (b) Richtige Zusammenschaltung bei erdunsymmetrischen Zweitoren. (c) Zusammenschaltung beliebiger Zweitore mit idealem Übertrager am Ausgang

folgt 
$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{a} + \boldsymbol{U}_{b}$$
 und  $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_{a} + \boldsymbol{I}_{b}$ , sowie  $\boldsymbol{U}_{a} = \boldsymbol{Z}_{a} \cdot \boldsymbol{I}_{a}$ ,  $\boldsymbol{U}_{b} = \boldsymbol{Z}_{b} \cdot \boldsymbol{I}_{b}$  und  $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{Z}_{a} + \boldsymbol{Z}_{b}) \cdot \boldsymbol{I} = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{I}$  mit  $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Z}_{a} + \boldsymbol{Z}_{b}$ . (2.6.22)

Bei der Reihenschaltung zweier Zweitore addieren sich die Widerstandsmatrizen der Einzelzweitore.

Abb. 2.6.13a zeigt eine nicht zulässige Reihenschaltung: die Torbedingung ist verletzt. Die Nullverbindung des oberen Zweitoren überbrückt den Längswiderstand des unteren Zweitores. Besitzt jedes Zweitor dagegen eine Nullverbindung (Abb. 2.6.13b), so ist die Zusammenschaltung möglich. Das Problem kann durch Einschaltung eines idealen Übertragers 1:1 am Ausgang (Abb. 2.6.13c) beseitigt werden, der die Einhaltung der Torbedingung erzwingt.

Bei der Reihenschaltung wird die Torbedingungen (ohne Zwischenübertrager) nur eingehalten, wenn jedes Zweitor eine durchgehende Nullverbindung hat.

Ob zwei Zweitore reihengeschaltet werden können, kann mit dem *Brunetest*<sup>40</sup> überprüft werden. Man legt eine Eingangsspannung an die Reihenschaltung und misst die Spannung zwischen den ausgangsseitig zu verbindenden Klemmen. Anschließend wird der Schritt von Seite 2 her wiederholt. Verschwinden in beiden Fällen die gemessenen Spannungen, so können die Zweitore reihengeschaltet werden. In Abb. 2.6.13a stellt sich eine Brunespannung ein, in Abb. b nicht.

**Parallelschaltung** Bei der Parallelschaltung zweier Zweitore erfolgt eine Addition der jeweiligen Klemmenströme (Abb. 2.6.14) Es gelten  $U_1 = U_{1a} = U_{1b}$ ,  $U_2 = U_{2a} = U_{2b}$  und  $I_1 = I_{1a} + I_{1b}$ ,  $I_2 = I_{2a} + I_{2b}$ . Bei Verwendung der Vektorschreibweise  $I_a = Y_a \cdot U_a$ ,  $I_b = Y_b \cdot U_b$  und  $U = U_a = U_b$ ,  $I = I_a + I_b$  wird damit

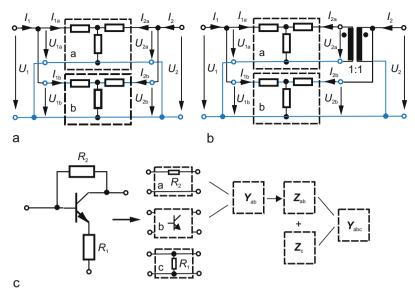
$$I = Y \cdot U = (Y_a + Y_b) \cdot U. \tag{2.6.23}$$

Bei Parallelschaltung zweier Zweitore addieren sich die Leitwertmatrizen der Einzelzweitore.

Voraussetzung ist die Einhaltung der Torbedingungen, entweder mit durchgehender Masseverbindung eines jeden Zweitores, dann können beliebig viele Zweitore parallel geschaltet werden (!), oder durch Anschaltung eines idealen Übertragers (1:1) am Ausgang (Abb. 2.6.14b). Er erzwingt die Torbedingung.

Die Parallelschaltbarkeit wird mit dem *Brunetest* überprüft: Beide Zweitore werden eingangsseitig parallel geschaltet und je am Ausgang kurzgeschlossen. Bei Anlegen einer Eingangsspannung darf zwischen den Ausgangsklemmen keine Spannung entstehen. Nach Wiederholung des Tests vom Ausgang her (mit gleichem Ergebnis) sind beide Zweitore parallel schaltbar.

<sup>&</sup>lt;sup>40</sup>Auf die Netzwerkbegründung des Brunetests sei hier verzichtet.



**Abb. 2.6.14.** Parallelschaltung von Zweitoren. (a) Parallelschaltung erdunsymmetrischer Zweitore. (b) Parallelschaltung allgemeiner Zweitore mit idealem Übertrager. (c) Beispiel einer Zusammenschaltung von Zweitoren. Zerlegung einer Schaltung in Elementarzweitore, von denen  $\boldsymbol{Y}_a$  und  $\boldsymbol{Y}_b$  zunächst parallelgeschaltet, dann in eine  $\boldsymbol{Z}$ -Form überführt und mit  $\boldsymbol{Z}_c$  reihengeschaltet werden

Nach dem gleichen Schema können die Reihen-Parallel- und die Parallel-Reihenschaltung durch Addition der entsprechenden Matrizen gewonnen werden (im ersten Fall durch die H-Matrix, im letzten durch die C-Matrix).

Beispiel 2.6.13 Kettenschaltung von Zweitoren Bei der Kettenschaltung arbeitet der Ausgang eines Zweitores  $N_{\rm a}$  auf den Eingang des Folgezweitores  $N_{\rm b}$ . Haben beide die Kettenmatrizen

$$\left(\begin{array}{c} U_{1\mathrm{a}} \\ I_{1\mathrm{a}} \end{array}\right) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} \cdot \left(\begin{array}{c} U_{2\mathrm{a}} \\ -I_{2\mathrm{a}} \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c} U_{1\mathrm{b}} \\ I_{1\mathrm{b}} \end{array}\right) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{b}} \cdot \left(\begin{array}{c} U_{2\mathrm{b}} \\ -I_{2\mathrm{b}} \end{array}\right),$$

so gelten folgende Bedingungen :  $I_1 = I_{1a}$ ,  $U_1 = U_{1a}$ ,  $I_2 = I_{2b}$ ,  $U_2 = U_{2b}$  und  $U_{2a} = U_{1b}$ ,  $I_{1b} = -I_{2a}$ . Die letzten Beziehungen beschreiben die Schnittstelle. Damit lautet die Gesamtschaltung (Abb. 2.6.12).

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1a} \\ I_{1a} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{a} \cdot \begin{pmatrix} U_{2a} \\ -I_{2a} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_{a} \cdot \begin{pmatrix} U_{1b} \\ I_{1b} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{A}_{a} \cdot \mathbf{A}_{b} \cdot \begin{pmatrix} U_{2b} \\ -I_{2b} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} U_{2} \\ -I_{2} \end{pmatrix}.$$

Ihre Matrix ist das Produkt der Kettenmatrizen der Einzelzweitore:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\rm a} \cdot \boldsymbol{A}_{\rm b} = \left( \begin{array}{cc} A_{11{\rm a}} A_{11{\rm b}} + A_{12{\rm a}} A_{21{\rm b}} & A_{11{\rm a}} A_{12{\rm b}} + A_{12{\rm a}} A_{22{\rm b}} \\ A_{21{\rm a}} A_{11{\rm b}} + A_{22{\rm a}} A_{21{\rm b}} & A_{21{\rm a}} A_{12{\rm b}} + A_{22{\rm a}} A_{22{\rm b}} \end{array} \right).$$

Die Reihenfolge der Multiplikation darf nicht verändert werden. Die Kettenschaltung lässt sich auf beliebig viele Zweitore erweitern, denn die Torbedingung an den Schnittstellen wird automatisch eingehalten. Das liegt an der Richtungsfestlegung des ausgangsseitigen Stromes in Erzeugerrichtung, aber des Folgetores in Verbraucherrichtung.

Beispiel 2.6.14 Zweitorschaltung Ein Transistor sei über die Widerstände  $R_1$ ,  $R_2$  "rückgekoppelt" (Abb. 2.6.14c). Gesucht ist die Widerstandsmatrix der Anordnung.

Die Schaltung lässt sich in drei Teilzweitore  $N_{\rm a} \dots N_{\rm c}$  gruppieren, von denen der Transistor (aus Vereinfachungsgründen) nur als spannungsgesteuerte Stromquelle angesetzt wird mit einer Leitwertmatrix

$$\boldsymbol{Y}_b = \left( \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{21} & 0 \end{array} \right).$$

Die Parallelschaltung der Teilnetzwerke  $N_{\rm a}$  und  $N_{\rm b}$  ergibt (durch Addition der zugehörigen Leitwertmatrizen) die Gesamtmatrix

$$oldsymbol{Y}_{\mathrm{ab}} = \left( egin{array}{cc} G_2 & -G_2 \\ Y_{21} - G_2 & G_2 \end{array} 
ight).$$

Damit das Netzwerk  $N_c$  mit dem Querwiderstand  $R_1$  in Reihe zu dieser Gesamtschaltung geschaltet werden kann, wandeln wir die Leitwertmatrix in die Widerstandsmatrix um (Tab. 2.6)

$$m{Z}_{\mathrm{ab}} = rac{1}{\det m{Y}_{\mathrm{ab}}} \left( egin{array}{cc} Y_{\mathrm{ab22}} & -Y_{\mathrm{ab12}} \\ -Y_{\mathrm{ab21}} & Y_{\mathrm{ab11}} \end{array} 
ight) = rac{1}{Y_{21}} \left( egin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 - rac{Y_{21}}{G_2} & 1 \end{array} 
ight).$$

Zu dieser Teilschaltung wird der Längswiderstand  $R_1$  in Reihe geschaltet, also seine Zweitormatrix  $Z_c$  zu  $Z_{ab}$  addiert

$$Z = Z_{ab} + Z_{c} = Z_{ab} + \begin{pmatrix} R_1 & R_1 \\ R_1 & R_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Y_{21}} + R_1 & \frac{1}{Y_{21}} + R_1 \\ \frac{1}{Y_{21}} + R_1 - \frac{1}{G_2} & \frac{1}{Y_{21}} + R_1 \end{pmatrix}.$$

Das Vorzeichen der gesteuerten Stromquelle  $Y_{21}$  kann, je nach der Transistorgrundschaltung, positiv oder negativ sein. Die Gesamtanordnung hat auch sonst noch interessante Eigenschaften, beispielsweise für die Widerstandsanpassung.

# 2.6.7 Zweitor in der Schaltung, Betriebsverhalten

Die  $\ddot{U}$ bertragungseigenschaften des Zweitores zwischen Quelle und Verbraucher bestimmen  $Zweitorbetriebsgr\"{o}eta en oder <math>\ddot{U}$ bertragungsfaktoren (Strom-, Spannungsübersetzung, Leistungsübertragung).

Die Betriebseigenschaften können in jeder Zweitorbeschreibung ausgedrückt werden, wir beschränken uns auf die Leitwertform und wählen eine lineare Stromquelle mit den Kennwerten  $I_{\rm q}$  und  $G_{\rm i}$  und den Lastleitwert  $G_{\rm a}$  (Abb. 2.6.15a). Zum "Zweitor in der Schaltung" gehören dann

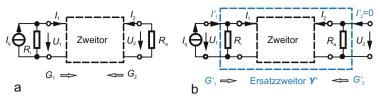


Abb. 2.6.15. Zweitor in der Schaltung. (a) Grundanordnung betrieben mit linearer Stromquelle und linearem Lastelement (gleichwertiger Betrieb mit linearer Spannungsquelle möglich). (b) Ersatzzweitor mit einbezogenem Quelleninnen- und Lastleitwert

— die Quellen- und Lastbeziehungen 
$$U_1 = U_{\rm q} - I_1 R_{\rm i} \quad {\rm resp.} \quad I_1 = I_{\rm q} - G_{\rm i} U_1 \quad {\rm Quellenbeziehung}$$
 
$$U_2 = -R_{\rm a} I_2 \qquad \qquad {\rm Lastbeziehung}$$
 — und die Zweitorgleichungen (2.6.7).

Aus diesen vier Gleichungen für die vier Unbekannten  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $U_1$ ,  $U_2$  geht jede gewünschte Torgröße hervor. Typische Betriebsparameter sind der Eingangsleitwert  $G_1$  bei ausgangsseitiger Last  $G_a$ , der Ausgangsleitwert  $G_2$  bei eingangsseitigem Abschluss mit der Stromquelle sowie die Übertragungsverhältnisse für Strom, Spannung und Leistung.

**Quellen-, Lasteinbezug** Die Schaltung Abb. 2.6.15b kann bei Einbezug der Leitwerte  $G_i$ ,  $G_a$  in das Zweitor auch interpretiert werden als neues Zweitor Y', das von einer Stromquelle  $I_q$  gespeist wird und am Ausgang leerläuft  $(I'_2 = 0)$ , weil der Lastleitwert  $G_a$  im Zweitor berücksichtigt ist. Das Ersatzzweitor Y' hat die Matrix

$$\mathbf{Y}' = \begin{pmatrix} Y_{11} + G_{i} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} + G_{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{i} & 0 \\ 0 & G_{a} \end{pmatrix}. \tag{2.6.25}$$

Die einbezogenen Leitwerte  $G_i$ ,  $G_a$  addieren sich zu den Ein- und Ausgangskurzschlussleitwerten  $Y_{11}$ ,  $Y_{22}$  des Zweitores. Dann gilt das Ersatzzweitor als unbeschaltet, was die Berechnung der Übertragungsgrößen vereinfacht.

**Eingangsleitwert**  $Y_1$  Das ist der Leitwert gemessen an der Eingangsseite 1 des Zweitors bei Abschluss mit dem Lastleitwert  $G_a$ . Aus der ersten Zeile der Leitwertgleichung (2.6.7a) folgt durch Division mit  $U_1$ 

$$Y_1 = \frac{I_1}{U_1} = Y_{11} + Y_{12} \frac{U_2}{U_1} = Y_{11} - \frac{Y_{12} Y_{21}}{Y_{22} + G_{\rm a}}. \quad \text{Eingangsleitwert } (2.6.26)$$

Der Eingangsleitwert  $Y_1$  hängt vom Eingangskurzschussleitwert  $Y_{11}$  und der Spannungsübersetzung  $U_2/U_1$  über die Zweitorrückwirkung  $Y_{12}$  ab.

Das Spannungsverhältnis wird aus der zweiten Zweitorgleichung bestimmt:

$$I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 = -U_2/R_a = -U_2G_a \rightarrow \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Y_{21}}{Y_{22} + G_a}.$$

Beim rückwirkungsbehafteten Zweitor  $(Y_{12} \neq 0)$  hängt der Eingangsleitwert  $Y_1$  stets von der Ausgangslast ab  $Y_1 = f(G_a)$ . Grenzfälle sind Kurzschluss  $(R_a = 0, G_a \to \infty)$  und Leerlauf  $(G_a = 0, Z_a \to \infty)$ 

$$Z_1|_{\mathbf{k}} = \frac{1}{Y_1}|_{\mathbf{k}} = \frac{1}{Y_{11}}, \qquad Z_1|_{\mathbf{l}} = \frac{1}{Y_1}|_{\mathbf{l}} = Z_{11} = \frac{\det \mathbf{Y}}{Y_{22}}.$$
 (2.6.27)

Je nach Lastwiderstand gibt es typisches Verhalten:

- bei *umkehrbaren* Zweitoren gilt stets  $Z_{11} > 1/Y_{11}$ , deshalb steigt der Eingangswiderstand immer mit wachsendem Lastwiderstand. Bei geringer Rückwirkung  $(Y_{12} \approx 0)$  stimmen  $Z_{11}$  und  $1/Y_{11}$  überein und ein Lasteinfluss unterbleibt.
- bei *nichtumkehrbaren* Stufen (z. B. Transistor in Emitterschaltung), kann  $Z_{11} < 1/Y_{11}$  auftreten. Dann sinkt der Eingangswiderstand  $Z_1$  mit steigendem Lastwiderstand (das gilt auch für den Ausgangswiderstand, der mit steigendem Generatorwiderstand sinkt).

**Ausgangsleitwert** Der Leitwert  $Y_2$  wird bei aufgetrennter Stromquelle am Zweitoreingang von der Ausgangsseite her berechnet. Grundlage sind

$$I_{\mathbf{q}} = 0 = (Y_{11} + G_{\mathbf{i}})U_1 + Y_{12}U_2, \rightarrow$$

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{Y_{12}}{Y_{11} + G_{\mathbf{i}}}, \quad \text{und} \quad \frac{I_2}{U_2} = Y_{21}\frac{U_1}{U_2} + Y_{22}.$$

Daraus folgt zusammengefasst

$$Y_2 = \frac{I_2}{U_2} = Y_{22} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{11} + G_{\rm i}}$$
 Ausgangsleitwert (2.6.28a)

mit den Grenzwerten Ausgangskurzschlussleitwert  $Y_{2k}$  ( $G_i \to \infty$ ,  $R_i = 0$ ) und Ausgangsleerlaufleitwert  $Y_{21}$  ( $G_i = 0$ ,  $R_i \to \infty$ )

$$Y_{2k} = Y_{22}, \ Y_{21} = Y_{22} - \frac{Y_{21}Y_{12}}{Y_{11}}.$$
 (2.6.28b)

Durch Rückwirkung hängt der Ausgangsleitwert von der eingangsseitigen Zweitorlast ab.

Übertragungsgrößen Für das Zweitor in der Schaltung interessiert das Übertragungsverhalten für Spannung, Strom und Leistung. Bezugsgrößen für die Transferparameter können die Zweitoreingangs- oder die Quellengrößen sein.

**Spannungsübersetzung** Eine Eingangsspannung  $U_1$  überträgt sich auf die Spannung  $U_2$  am Ausgangsleitwert  $G_a$ . Wir erhalten aus der Zweitorgleichung  $I_2 = Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2$  und mit der Lastbeziehung  $U_2 = -I_2R_a$ 

$$v_{\mathrm{u}} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22} + G_{\mathrm{a}}} = \left. v_{\mathrm{u}} \right|_{\mathrm{l}} \cdot \frac{Y_{22}}{Y_{22} + G_{\mathrm{a}}} \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Spannungs\"{u}ber-} \\ \mathrm{tragungsfaktor} \end{array} (2.6.29\mathrm{a})$$

mit dem Leerlauf-Spannungsübertragungsfaktor (gleich  $1/A_{11}$ )

$$v_{\rm u}|_{\rm l} = \frac{-Y_{\rm 21}}{Y_{\rm 22}} = \frac{1}{A_{\rm 11}} = \frac{G_{\rm m}}{Y_{\rm 22}}.$$
 Leerlaufspannungs- übertragungsfaktor (2.6.29b)

Die Spannungsübersetzung  $v_{\rm u}$  hängt von der Transadmittanz  $Y_{21}$  (negative Steilheit) ab. Kleine Innen-  $(Y_{22})$  und Lastleitwerte  $G_{\rm a}$  vergrößern die Spannungsübersetzung.

Wird die Spannungsübersetzung auf die Quellenspannung  $U_{\rm q}$  (bei eingangsseitiger Spannungsquellenersatzschaltung) bezogen, so ist die Spannungsteilung durch  $R_{\rm i}$  und  $R_{\rm 1}$  zu beachten. Bei Berechnung über das Ersatzzweitor Abb. 2.6.15b folgt dann  $v_{\rm u} = -Y_{\rm 21}/Y_{\rm 22}'$  als Leerlaufspannungsverstärkung; der Vorteil der einfachen Analyse ist offenbar.

**Stromübersetzung** Der Quotient Ausgangsstrom  $I_2$  zu Eingangsstrom  $I_1$  heißt Stromübersetzung, auch *Stromverstärkung* (falls sein Betrag größer als 1 ist). Zur Berechnung wird in der Zweitorgleichung  $I_2 = Y_{21}U_1 + (Y_{22} + G_a)U_2$  die Spannung  $U_1$  durch den Strom  $I_1$  aus der ersten Zweitorgleichung ersetzt und zusammengefasst

$$\begin{array}{ll} v_{\rm i} & = & \frac{I_2}{I_1} = \frac{Y_{21}}{Y_{11} + R_{\rm a} \det \mathbf{Y}} \\ & = & \frac{v_{\rm i}|_{\rm k}}{1 + H_{22}R_{\rm a}} = \frac{-1}{A_{22} + R_{\rm a}A_{21}} \,. \, {\rm Strom}\ddot{\rm u} {\rm bertragungsfaktor} \end{array} \tag{2.6.30a}$$

Sie erreicht bei Kurzschluss  $(G_a \to \infty)$  den Höchstwert, die Kurzschlussstromübersetzung

$$v_{\rm i}|_{\rm k} = H_{21} = \frac{-1}{A_{22}}$$
. Kurzschlussstromverstärkung (2.6.30b)

Die für Transistorschaltungen oft benutzte Schreibweise mit Hybridparametern lässt erkennen, dass die Kurzschlussstromverstärkung  $H_{21}$  (und damit der höchste Wert) nur erreicht wird, wenn  $H_{22}R_{\rm a}\ll 1$  gilt, also der Lastwiderstand klein gegen den Ausgangsleerlaufwiderstand  $1/H_{22}$  ist (er liegt üblicherweise in der Größenordnung von mehreren  $10\,\mathrm{k}\Omega$ ). Spannungs- und Stromverstärkung interessieren vor allem bei Verstärkerzweitoren. Für den Bipolartransistor werden sie in Kap. 2.7 betrachtet.

#### Transimpedanzen Wir erwähnen noch

- die Übertragungsimpedanz (Transimpedanz)  $Z'_{21}$  (mit Gl. (2.6.29a))

$$Z'_{21} = \frac{U_2}{I_1} = v_{\rm u} Z_1 = \frac{-Y_{21}}{\det Y + Y_{11} G_{\rm a}} = \frac{1}{A_{21} + G_{\rm a} A_{22}}.$$
 (2.6.31)

Sie ist das Produkt von Spannungsübersetzung und Eingangswiderstand, im Grenzfall Leerlauf  $(R_a \to \infty)$  gilt  $Z_{21} = R_m = 1/A_{21}$  und man erhält die Transimpedanz der stromgesteuerten Spannungsquelle.

- die Übertragungsadmittanz (Transadmittanz) oder (negative) Betriebssteilheit

$$Y'_{21} = \frac{I_2}{U_1} = \frac{I_2 I_1}{I_1 U_1} = v_i Y_1 = \frac{v_u}{R_a} = \frac{Y_{21}}{1 + Y_{22} R_a} = \frac{-1}{A_{11} R_a + A_{12}}$$
(2.6.32)

als Produkt von Stromübersetzung und Eingangsleitwert mit der (negativen) Steilheit  $Y_{21} = -G_{\rm m} = -1/A_{12}$  im Kurzschluss  $U_2 = 0$ .

Über die Umrechnungstafel 2.6 können die Übertragungsgrößen auf andere Parameterformen umgeschrieben werden.

Kontrollbeziehungen Zwischen den genannten Größen bestehen Beziehungen, die bei Umrechnungen zur Kontrolle der Ergebnisse (Vorzeichen!) nützlich sein können

$$\frac{v_{\rm i}}{v_{\rm u}} = \frac{Z_1}{R_{\rm a}}, \quad \frac{v_{\rm u}}{v_{\rm i}} = \frac{Y_1}{G_{\rm a}}, \quad Z_1 = Z_{11} + v_{\rm i} Z_{12}, \quad Y_1 = Y_{11} + v_{\rm u} Y_{12}. \tag{2.6.33}$$

Strom- und Spannungsverstärkung des Zweitores bestimmen so den Eingangswiderstand  $Z_1$  bei gegebener Last.

Leistungsübertragungsfaktor Das Zweitor verbraucht eingangsseitig Leistung und gibt ausgangsseitig Leistung an den Verbraucher ab. Das Verhältnis beider Leistungen heißt Leistungsübertragungsfaktor oder Leistungsverstärkung (bei Verstärkerzweitoren). Sie kann größer oder kleiner als eins sein, im letzteren Fall benutzt man den Reziprokwert und spricht von Dämpfung. Es gibt mehrere Leistungsübertragungsfaktoren. Sie unterscheiden sich

- in der Bezugsleistung (Vierpoleingang, verfügbare Generatorleistung),
- im Charakter: man unterscheidet zwischen *Wirk* oder *Scheinleistung* bei Wechselströmen (s. Bd. 3),
- in der *Optimierung*, denn es gibt verschiedene Anpassbedingungen (nach maximaler Wirkleistung oder dem sog. Wellenwiderstand, s. Bd. 3).

Ausgang ist die Klemmenleistungsverstärkung als Verhältnis der an den Lastleitwert abgegebenen Leistung  $P_2$  zur eingangsseitig aufgenommenen Leistung  $P_1$  (für Gleichstrom wie hier sind Wirkleistung und Gleichleistung identisch). Mit  $P_2 = U_2^2 G_a$  und  $P_1 = U_1^2 G_1$  lautet die Leistungsverstärkung

$$v_{\rm p} = \frac{U_2^2 G_{\rm a}}{U_1^2 G_1} = \frac{G_{\rm a}}{G_1} v_{\rm u}^2 = \frac{G_{\rm a}}{G_1} \left( \frac{Y_{21}}{Y_{22} + G_{\rm a}} \right)^2 = v_{\rm u} \cdot v_{\rm i}. \ \, \frac{\text{Leistungs-}}{\text{verstärkung}} \ \, (2.6.34)$$

Die Leistungsverstärkung ist das Produkt aus Spannungs- und Stromverstärkung  $v_{\rm u},\,v_{\rm i}.$ 

Weil der Quellenleitwert keinen Einfluss hat, gibt  $v_{\rm p}$  keine Auskunft über die tatsächlich vom Zweitor übernommene verfügbare Quellenleistung. Die größtmögliche Leistungsverstärkung hängt vielmehr vom Lastleitwert  $G_{\rm a}$  und dem Quellenleitwert  $G_{\rm i}$  ab. Galt im linearen Grundstromkreis die Anpassbedingung für maximale Leistungsübertragung, so ist eine ähnliche Bedingung auch für das Zweitor, aber je für Ein- und Ausgang zu erwarten. Daher wird als Bezugsleistung die verfügbare Quellenleistung  $P_{\rm 1max} = I_{\rm q}^2/4G_{\rm i}$  angesetzt und das Verhältnis  $P_2/P_{\rm 1max}$  untersucht. Man erhält für die Leistungsübertragung  $v_{\rm pq}$  bezogen auf die maximale Quellenleistung  $P_{\rm 1max}$ 

$$v_{\rm pq} = \frac{P_2}{P_{\rm 1max}} = \frac{4Y_{21}^2 G_{\rm i} G_{\rm a}}{\left( (Y_{11} + G_{\rm i}) (Y_{22} + G_{\rm a}) - Y_{12} Y_{21} \right)^2}.$$
 (2.6.35)

Sie wird für beiderseitige *Anpassung* am Eingang  $(R_i = R_{1,m})$  und Ausgang  $(R_a = R_{2,m})$  maximal:

$$R_{2,m} = \sqrt{\frac{Y_{11}}{Y_{22} \det \mathbf{Y}}} = \sqrt{\frac{Z_{22} \det \mathbf{Z}}{Z_{11}}} = \sqrt{\frac{H_{11}}{H_{22} \det \mathbf{H}}},$$

$$R_{1,m} = \sqrt{\frac{Y_{22}}{Y_{11} \det \mathbf{Y}}} = \sqrt{\frac{Z_{11} \det \mathbf{Z}}{Z_{22}}} = \sqrt{\frac{H_{11} \det \mathbf{H}}{H_{22}}}.$$
(2.6.36)

Das ist die Anpassung nach den sog. Wellenwiderständen (s. Bd. 3)

$$v_{\text{pqmax}} = \frac{Y_{21}^2}{\left(\sqrt{\det \mathbf{Y}} + \sqrt{Y_{11}Y_{22}}\right)^2} = \frac{H_{21}^2}{\left(\sqrt{\det \mathbf{H}} + \sqrt{H_{11}H_{22}}\right)^2}$$

$$= \frac{Y_{21}^2}{4Y_{11}Y_{22}}\Big|_{Y_{12}=0} = \frac{H_{21}^2}{4H_{11}H_{22}}\Big|_{H_{12}=0}.$$
(2.6.37)

Sie hat beim rückwirkungsfreien Zweitor einen typischen Wert.

Der Wellenwiderstand eines Zweitores ist derjenige Widerstand, mit dem es ausgangsseitig abgeschlossen sein muss, damit am Eingang der gleiche Wert auftritt (sinngemäß gibt es einen Wellenwiderstand  $R_{\rm w}$  der Eingangs- und Ausgangsseite, es gilt  $R_{\rm w1} = \sqrt{Z_{11}/Y_{11}}$ ).

Zweipolersatzgrößen eines Tores Oft steht folgendes Problem an: am Zweitoreingang liegt eine Quelle und das Ausgangstor soll als *aktive Zweipolersatzschaltung* dargestellt werden. Wie lauten ihre Ersatzgrößen? Wir ermitteln die Ausgangsleerlaufspannung und den Ausgangskurzschlussstrom als Funktion der Eingangsbelastung und wählen eine Zweitorbeschreibung, die geringsten Lösungsaufwand verspricht. Abb. 2.6.16 zeigt die Anordnung. Zur Bestim-

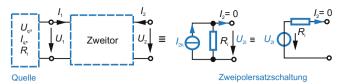


Abb. 2.6.16. Zweitorersatzgrößen. Ersatz eines mit einer linearen Quelle betriebenen Zweitores am Zweitoreingang durch eine Zweipolersatzschaltung in Spannungs- oder Stromquellenform am Zweitorausgang

mung der ausgangsseitigen Leerlaufspannung ( $I_2 = 0$ ) mit realer Spannungsquelle (Innenwiderstand  $R_1$ ) werden die Spannungsquellenbeziehung und die eingangsseitige Widerstandsbeschreibung des Zweitores zusammengefügt

$$U_1 = U_q - I_1 R_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} 0$$
 und  $U_{21} = U_2 |_{I_2 = 0} = Z_{21} I_1$ .

Man erhält zusammengefasst als Zweipolersatzgrößen

$$U_{21} = U_{q} \frac{Z_{21}}{Z_{11} + R_{1}} = \frac{U_{q}}{A_{11} + A_{21}R_{1}},$$

$$I_{2k} = -I_{2}|_{U_{2}=0} = I_{q} \frac{-Y_{21}}{Y_{11} + G_{1}} = I_{q} \frac{R_{1}}{A_{12} + A_{22}R_{1}}.$$
(2.6.38)

Das rechte Ergebnis, der ausgangsseitige Kurzschlussstrom, folgt aus der Leitwertbeschreibung

$$I_{q} - G_{1}U_{1} = I_{1} = Y_{11}U_{1} + I_{2k} = -I_{2}|_{U_{2}=0} = -Y_{21}U_{1}.$$

Für den Ausgangskurzschlussstrom  $I_{2k}$  wurde in Übereinstimmung mit der Ersatzschaltung eines aktiven Zweipols die Erzeugerpfeilrichtung gewählt. Der Strom  $I_2$  liegt hingegen durch die Definitionsrichtung am Zweitor fest!

Der *Innenwiderstand* der Ersatzquelle wird mit einem Probestrom ermittelt oder als Quotient von Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom bestimmt (wie hier)

$$R_{\rm i} = \frac{1}{G_{\rm i}} = Z_{22} - \frac{Z_{21}Z_{12}}{Z_{11} + R_1} = \frac{Y_{11} + G_1}{\det \mathbf{Y} + Y_{22}G_1} = \frac{A_{12} + A_{22}R_1}{A_{11} + A_{21}R_1}. (2.6.39)$$

Ein Zweitor transformiert eine eingangsseitige Quelle an den Ausgang in die Ersatzgrößen  $U_{2l}$ ,  $I_{2k}$  und  $R_i$  eines Ersatzzweipols nach Gl. (2.6.38, 2.6.39).

Das Ergebnis gilt gleichwertig für andere Zweitorparameter. Die Beziehungen sind nützlich, wenn das Zweitor ein Verstärker ist, dessen Zusammenwirken mit der Last einfach dargestellt werden soll.

# 2.6.8 Zweitor mit unabhängigen Quellen

Wir betrachteten bisher Zweitore ohne unabhängige Quellen. Für verschiedene Aufgabenstellungen (z. B. Rauschprobleme, Temperatureinflüsse in Schaltungen, Arbeitspunktverschiebungen, Sensorprobleme u. a.) ist eine Zweitordarstellung mit unabhängigen Quellen zweckmäßig.

Ein Zweitor mit unabhängigen Quellen liegt vor, wenn wenigstens an einem Tor Ströme oder Spannung ohne Anschluss einer äußeren Quelle auftreten.

Ausgang ist der aktive Zweipol im Verbraucherpfeilsystem:  $U_1 = I_1 R_i + U_q$ ,  $I_1 = U_1 G_i + I_q$  aufteilt in Quelle und Spannungsabfall. Ein Zweitor mit unabhängigen Quellen lässt sich ebenso aufteilen in ein passives Zweitor und zwei unabhängige Quellen (in Spannungs- oder Stromquellenform):

Widerstandsform (Maschensatz)
$$U_{1} = Z_{11}I_{1} + Z_{12}I_{2} + U_{q1}$$

$$U_{2} = Z_{21}I_{1} + Z_{22}I_{2} + U_{q2}$$
Zweitor ohne unabhängige Quellen unabhängige Quellen
$$Leitwertform \text{ (Knotensatz)}$$

$$I_{1} = Y_{11}U_{1} + Y_{12}U_{2} + I_{q1}$$

$$I_{2} = Y_{21}U_{1} + Y_{22}U_{2} + I_{q2}$$
Zweitor ohne unabhängige Quellen unabhängige Quellen
$$U_{q1} = U_{q1}$$

$$U_{q2} = U_{q1} = U_{q1}$$

$$U_{q2} = U_{q1} = U_{q2} = U_{q$$

Abb. 2.6.17 zeigt die Ersatzschaltungen. Die unabhängigen Spannungsquellen liegen in Reihe zu den Zweitorein- und -ausgängen. Sie wirken bei beiderseitigem Leerlauf ( $I_1 = I_2 = 0$ ) als Leerlaufspannungen. Bei Belastung der äußeren Klemmen fließen Ströme. Analog ist die Stromquellenschaltung aufgebaut mit Kurzschlussquellen (ermittelt bei  $U_1 = U_2 = 0$ ).

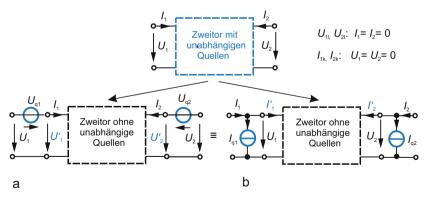


Abb. 2.6.17. Zweitor mit unabhängigen Quellen. (a) Allgemeine Ersatzschaltung aus quellenfreiem Zweitor und zwei idealen Spannungsquellen. (b) Gleichwertige Form mit Stromquellen

Die Umrechnung von einer zu anderen Zweitordarstellungen erfolgt durch Umstellung nach der gesuchten Größe und Koeffizientenvergleich. Einfacher ist folgender Weg:

- Außerbetriebsetzen aller unabhängigen Quellen und Umrechnung der Zweitorparameter,
- weil die Transformation für jeden Klemmenabschluss, also auch Leerlauf und Kurzschluss gelten muss, vergleicht man die Quellenterme speziell nur für diesen Fall.

# **②** 2.6.9 Überlagerungssatz und Zweipoltheorie in Netzwerken mit gesteuerten Quellen

Wir untersuchen den Einfluss gesteuerter Quellen auf Überlagerungssatz und Zweipoltheorie.

Überlagerungssatz Beim Überlagerungssatz (Kap. 2.4.5) wurden unabhängige Quellen schrittweise bis auf jeweils eine zu null gesetzt und die betreffende Teilwirkung berechnet. Hat das Netzwerk gesteuerte Quellen, so gilt:

Gesteuerte Quellen bleiben beim Überlagerungssatz im Netzwerk voll wirksam. Sie werden nie außer Betrieb gesetzt.

Abb. 2.6.18 zeigt eine falsche Anwendung des Überlagerungssatzes. Im linken Bildteil ist die unabhängige Spannung zu null gesetzt, damit verschwindet auch  $U_{\rm A1}$ , im rechten wurde die gesteuerte Quelle (fälschlicherweise) null gesetzt.

**Zweipoltheorie mit gesteuerten Quellen** Die Zweipoltheorie gilt auch in Netzwerken mit gesteuerten Quellen, wenn folgendes beachtet wird:

1. Der *passive Zweipol* ist *nur über seine Klemmen* AB mit dem aktiven Zweipol verbunden (nicht über gesteuerte Quellen oder magnetische oder

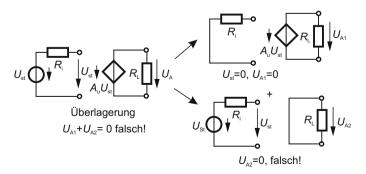


Abb. 2.6.18. Beispiel einer falschen Anwendung des Überlagerungssatzes

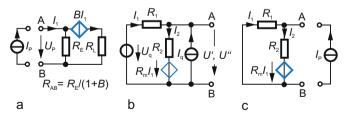
- elektrostatische Kopplungen). Er kann gesteuerte Quellen enthalten, die aber durch Zweiggrößen des passiven Zweipols gesteuert werden müssen (ob dann der Begriff passiver Zweipol noch zutrifft, ist belanglos).
- 2. Bei Bestimmung des Ersatzwiderstandes  $R_{\rm a}=R_{\rm AB}$  des passiven Zweipoles verbleiben gesteuerte Quellen in der Schaltung. Die Widerstandsberechnung erfolgt durch Anlegen einer Prüfgröße  $U_{\rm P}$  bzw.  $I_{\rm P}$  und Berechnung von  $I_{\rm P}$  bzw.  $U_{\rm P}$ . Der Ersatzinnenwiderstand lautet

$$R_{\rm AB} = \frac{U_{\rm P}}{I_{\rm P}} \,. \qquad \qquad {\rm Zweipolersatzwiderstand~ausgedr\"{u}ckt} \atop {\rm durch~Pr\"{u}fgr\"{o} fen} \,\, U_{\rm P}, I_{\rm P} \eqno(2.6.41)$$

- 3. Der aktive Zweipol wird durch Leerlaufspannung  $U_1$ , Kurzschlussstrom  $I_k$  und Innenwiderstand  $R_i$  gekennzeichnet. Er enthält alle unabhängigen und gesteuerten Quellen, letztere dürfen nur von Strömen und Spannungen im aktiven Zweipol abhängen. Bei Bestimmung der Ersatzgrößen  $U_1$ ,  $I_k$  und  $R_i$  bleiben alle gesteuerten Quellen im Netzwerk.
- 4. Leerlaufspannung und Kurzschlussstrom werden mit üblichen Netzwerkanalysemethoden, der Innenwiderstand entweder über  $R_i = U_l/I_k$  oder nach dem Verfahren der Prüfgröße  $(U_P, I_P)$  bestimmt.

Abb. 2.6.19 zeigt das Verfahren an zwei Beispielen. In Abb. a wird eine Prüfstromquelle  $I_{\rm P}$  angelegt und die Klemmenspannung über die Kirchhoffschen Sätze berechnet, in Abb. b kommt eine Prüfspannung  $U_{\rm P}$  zum Ansatz. Es ergeben sich der Reihe nach  $I_{\rm E}=(1+B)I_{\rm P},\,U_{\rm P}=(1+B)R_{\rm E}I_{\rm P},\,R_{\rm i}=U_{\rm P}/I_{\rm P}=R_{\rm E}(1+B).$  Meist beeinflussen gesteuerte Quellen in Netzwerkteilen ihre Ersatzklemmenwiderstände. Dadurch kann ein passiver Zweipol zum negativen Widerstand, also aktiv werden. Das ist z. B. für eine negative Stromverstärkung B (|B|<1) der Fall: Umpolen der Stromrichtung der gesteuerten Quelle.

Beispiel 2.6.15 Gesteuerte Quelle, Zweipoltheorie, Überlagerungssatz In der Schaltung Abb. 2.6.19b wirken die beiden unabhängigen Quellen  $U_q$ ,  $I_q$ , außerdem die



**Abb. 2.6.19.** Beispiele zur Anwendung der Zweipoltheorie auf Netzwerke mit gesteuerten Quellen. (a) Methode des Prüfstromes. (b) Zweipoltheorie und Überlagerungssatz. (c) Innenwiderstandsbestimmung mit Prüfstrom

stromgesteuerte Spannungsquelle  $R_{\rm m}I_1$ . Gesucht sind Leerlaufspannung an den Klemmen AB und der Innenwiderstand.

Wirkt nach dem Überlagerungssatz nur die Spannung  $U_q$  ( $I_q = 0$  gesetzt), so ergibt sich über die Maschengleichung durch Auflösen nach  $I_1$  die Leerlaufspannung  $U'_1$  an AB:

$$\begin{array}{lll} 0 &=& -U_{\rm q} + (R_1 + R_2)I_1 + R_{\rm m}I_1 & \to I_1 \to \\ U_1' &=& U_{\rm q} - R_1I_1 = U_{\rm q} - R_1U_{\rm q}/(R_1 + R_2 + R_{\rm m}). \end{array}$$

Wirkt nur die Stromquelle  $I_q$  ( $U_q = 0$ ), so lautet die Maschengleichung

$$0 = R_1 I_1 + (I_1 + I_2) R_1 + R_m I_1 \to I_1 \to U_1'' = -R_1 I_1 = -R_1 R_2 I_q / (R_1 + R_2 + R_m).$$

Die gesamte Leerlaufspannung folgt durch Überlagerung zu  $U_1 = U_1' + U_1''$ .

Der Innenwiderstand wird durch Anlegen eines Probestromes  $I_{\rm P}$  und Nullsetzen der unabhängigen Quellen ermittelt (Abb. 2.6.19c). Mit  $I=-I_{\rm P}$  gilt am Knoten A

$$U_{AB}/R_1 + (U_{AB} - R_m I_1)/R_2 = I_P$$
 und  $I_1 = -U_{AB}/R_1$ .

Durch Eliminieren des Steuerstromes  $I_1$  folgt  $U_{AB}$  und schließlich

$$U_{AB} = R_1 R_2 I_P / (R_1 + R_2 + R_m) \rightarrow R_i = U_{AB} / I_P.$$

Später nutzen wir zur Zweipolersatzgrößenbestimmung von größeren Netzwerken die Knotenspannungsanalyse (Kap. 3.3).

Beispiel 2.6.16 Gesteuerte Quelle, Ersatzzweipol Gesteuerte Quellen lassen sich zur Veränderung oder Erzeugung ungewöhnlicher Zweipole verwenden. Abb. 2.6.20 zeigt Beispiele.

Die Reihenschaltung einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle mit dem Widerstand R (Abgriff der Steuerspannung über dem Widerstand) ergibt einen vergrößerten, verkleinerten oder negativen Widerstand  $R(1-A_u)$  (Abb. 2.6.20a, Vorzei-

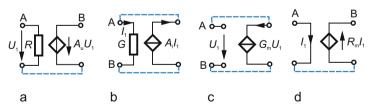


Abb. 2.6.20. Manipulation von resistiven Zweipolen durch gesteuerte Quellen. Zwischen den Klemmen A, B tritt ein Ersatzwiderstand auf. (a) Reihenschaltung von Widerstand und spannungsgesteuerter Spannungsquelle. (b) Parallelschaltung von Leitwert und stromgesteuerter Stromquelle. (c) Ersatzzweipol einer spannungsselbstgesteuerten Stromquelle. (d) Ersatzzweipol einer stromselbstgesteuerten Spannungsquelle

chenumkehr des gesteuerten Anteils durch Umpolung der Steuerspannung). Analog verändert die Parallelschaltung einer stromgesteuerten Stromquelle den Leitwert  $G(1-A_{\rm i})$  (Abb. 2.6.20b). Wird die Steuerstrecke einer spannungsgesteuerten Stromquelle dem Ausgang parallel gelegt, so entsteht ein Zweipol mit dem Leitwert  $\pm G_{\rm m}$  (Abb. 2.6.20c, Vorzeichenumkehr durch Vertauschen der Steuerstrecke). Ganz entsprechend führt die Reihenschaltung der Steuerstrecke einer stromgesteuerten Spannungsquelle direkt zum Widerstand  $\pm R_{\rm m}$  (Abb. 2.6.20d).

Auf diese Weise lassen sich mit gesteuerten Quellen nicht nur negative, sondern auch veränderte und elektronisch steuerbare Widerstände erzeugen. Solche Widerstände zeigen andersartiges Rauschverhalten.  $^{41}$ 

# 2.7 Gesteuerte Bauelemente und ihre Modellierung\*

Gesteuerte Quellen erklären einerseits bestimmte Zweitoreigenschaften, andererseits dienen sie zur Modellierung des Klemmenverhaltens elektrotechnischer (gekoppelte Spulen) und elektronischer Bauelemente (Transistoren, Feldeffekttransistoren, Operationsverstärker, u. a.), also der Verstärker- (und Schalter-) Funktion. Deshalb liegt ihr physikalischer Hintergrund stets im Wirkprinzip des Bauelementes begründet. So arbeitet ein Transistor als isoliertes Bauelement nicht als gesteuerte Quelle, die Steuerfähigkeit entsteht erst im Netzwerk mit unabhängigen Quellen. Dann verhält er sich

- als nichtlineare gesteuerte Quelle (modelliert als nichtlineares Zweitor) und das umgebende Netzwerk legt den Arbeitspunkt fest,
- im Arbeitspunkt bei *Kleinsignalaussteuerung* als lineare gesteuerte Quelle, modelliert durch *Zweitorersatzschaltungen*.

Dieses Schema führt z. B. zu einem Netzwerkmodell des Operationsverstärkers, es bildet auch eine solide Grundlage für den Einbezug gesteuerter Quellen in die Netzwerkanalyse (Kap. 3 und 4).

Das Prinzip gesteuerter Quellen findet sich in unterschiedlichsten Formen:

1. Der fremderregte Gleichstromgenerator (Abb. 2.7.1a) kann als gesteuerte Spannungsquelle betrachtet werden. Ein drehendes Leiterrähmchen im Magnetfeld erzeugt nach dem Induktionsgesetz an den Bürsten eine Quellenspannung  $U_{\rm q}$ . Sie ist der Intensität des Magnetfeldes und damit seinem Erregerstrom I pro-

 $<sup>^{41}</sup>$ In jedem Leiter entstehen durch thermische Bewegung der Ladungsträger statistische Spannungsschwankungen, die "thermische Rauschspannung". Diese Rauschleistung  $P_{\rm r}=4kT\Delta f=U^2/R$ ist jedem Widerstand Reigen (Rauschspannung Größenordnung nV . . .  $\mu{\rm V}$  bei einer Bandbreite  $\Delta f=1\,{\rm Hz}$  und Zimmertemperatur). Widerstände, die durch gesteuerte Quellen verändert werden, können erhebliche Abweichungen vom thermischen Rauschverhalten haben.

- portional:  $U_{\mathbf{q}}(t) = \mathrm{const} \cdot I$ . So bestimmt der "Steuerstrom I" die Spannung  $U_{\mathbf{q}}$  in einem anderen Stromkreis: es liegt eine *stromgesteuerte Spannungsquelle* vor. Zwischen Steuerkreis und Ausgangsspannung wirkt das magnetische Feld als Vermittlergröße.
- 2. Beim *Optokoppler* (Abb. 2.7.1b) sendet eine Leuchtdiode (LED) Strahlung über einen (kurzen) optischen Weg (Luft, Kunststoffleiter) an eine Fotodiode. Diese wandelt sie nach dem Prinzip der Solarzelle in einen Strom  $I_A$  um. Der Zusammenhang  $I_A = kI_E$  beschreibt diese "stromgesteuerte Stromquelle" mit der Stromverstärkung k. Steuer- und Quellenkreis sind galvanisch getrennt. Würde die Spannung an der Eingangsdiode als Steuergröße betrachtet, so ergäbe das eine spannungsgesteuerte, stark nichtlineare Stromquelle (durch die Nichtlinearität der Eingangsdiode).
- 3. Beim Bipolartransistor (Abb. 2.7.1c) bestimmt die Spannung  $U_{\rm EB}$  an der Eingangsdiode nicht nur den Emitterstrom  $I_{\rm E}$ , sondern auch den Kollektorstrom  $I_{\rm C}$  am Transistorausgang:  $I_{\rm C}=f(U_{\rm EB})$ . Wir modellieren diesen Ausgangsstrom durch eine Stromquelle, die (nichtlinear) von der Eingangsspannung gesteuert wird: nichtlineare, spannungsgesteuerte Stromquelle  $I_{\rm C}=f(U_{\rm EB})$ . Steigende Steuerspannung  $U_{\rm EB}$  bewirkt einen steigenden Emitter- und Kollektorstrom. Grundsätzlich könnte auch der Eingangsstrom  $I_{\rm E}$  die Steuergröße sein. Dann entsteht eine Abhängigkeit  $I_{\rm C}=g(I_{\rm E})$  vom Typ einer stromgesteuerten Stromquelle. Diese Wandlung der Steuergröße (Strom oder Spannung) war bereits im Kap. 2.6.4 diskutiert worden.

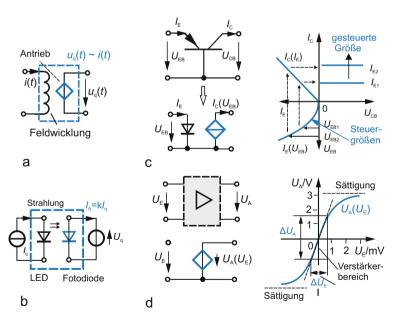


Abb. 2.7.1. Beispiele gesteuerter Quellen. (a) Felderregter Gleichstromgenerator. (b) Optokoppler. (c) pnp-Bipolartransistor mit Eingangs-, Übertragungs- und Ausgangskennlinienfeldern. (d) Spannungsverstärker mit Ersatzschaltung und Übertragungskennlinie

4. Verstärker. Eine nichtlineare gesteuerte Quelle kann grafisch durch eine sog. Transfer- oder Übertragungskennlinie (z. B.  $I_{\rm C} = f(I_{\rm E})$ , Abb. 2.7.1c) beschrieben werden mit einer Geraden bei linearer  $I_{\rm C}(I_{\rm E})$ -Abhängigkeit. Im Verstärker wird z. B. eine kleine Eingangsspannungsänderung  $\Delta U_{\rm E}$  in eine größere Ausgangsspannungsänderung  $\Delta U_{\rm A}$  verstärkt. Ursache ist eine nichtlineare Übertragungskennlinie  $U_{\rm A} = f(U_{\rm E})$  (Abb. 2.7.1d). Ihre Sättigungsäste entstehen durch die begrenzte Betriebsspannung des Verstärkers. Im linearen Kennlinienbereich (kleine Spannungsänderung  $\Delta U$ ) lässt sich das Verhalten durch eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle modellieren:  $\Delta U_{\rm A} = A_{\rm u} \Delta U_{\rm E}$  mit der Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}$ .

# 2.7.1 Allgemeine gesteuerte Quellen

Gesteuerte Quelle als Netzwerkelement Gesteuerte Quellen arbeiten als:

- Linear-zeitunabhängig gesteuerte Quellen in linearen Netzwerken.
- Nichtlinear-zeitunabhängig gesteuerte Quellen, wie sie für reale Bauelemente typisch sind, z. B.  $I_{\rm C} = f(U_{\rm BE})$  (genauer  $I_{\rm C} \sim \exp U_{\rm BE}/U_{\rm T}$ ) beim Bipolartransistor.
- Linear-zeitabhängig gesteuerte Quelle mit zeitabhängigem Steuerungskoeffizienten. Bei konstanter Steuergröße ändert sich dann das Ausgangssignal zeitlich. Ein Beispiel ist der Optokoppler (Abb. 2.7.1b). Wird der Lichtstrahl durch eine rotierende Scheibe mit Schlitzen unterbrochen, so entspricht das einer Steuerung des optischen Übertragungsweges mit der Kennlinie  $I_A = A_i(t) \cdot I_{st}$  mit zeitabhängiger Stromübersetzung  $A_i(t)$ .
- Nichtlinear-zeitabhängig gesteuerte Quelle als Verallgemeinerung.

Diese Merkmale entsprechen generell denen der allgemeinen Netzwerkelemente, z. B. des Widerstandes (s. Tab. 2.3), hier nur für die Kenngröße der gesteuerten Quelle, etwa der Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}$ . Steuerbare Bauelemente haben meist einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen Ausund Eingangsgrößen und nichtlineares Verhalten der Einund Ausgangstore selbst. Deshalb kommt Kennliniendarstellungen große Bedeutung zu, die nach diesen Merkmalen unterteilt werden können. Die folgenden Kapitel befassen sich

- mit den *Kennlinienformen* des nichtlinearen Zweitores (Beispiel Bipolartransistor),
- dem nichtlinearen Zweitor in der Grundschaltung (Arbeitspunkteinstellung) und seinem Kleinsignalverhalten (Modellierung und zugeordnete Zweitorersatzschaltungen).

In Abb. 2.6.7 hatten wir bereits auf das Kennlinienfeld einer linearen gesteuerten Quellen verwiesen: im Gegensatz zur Kennlinie der unabhängigen Quelle gehört hier zu jedem Steuerparameter eine Kennlinie. Die Gesamtheit aller (bzw. ausgewählter) Werte des Steuerparameters ergibt das *Kennlinienfeld*. Diese Darstellungsform gilt auch für nichtlineare gesteuerte Quellen.

#### 2.7.2 Nichtlineares Zweitor

In der Schaltungstechnik haben nichtlineare Zweitore fundamentale Bedeutung.

Ein Zweitor heißt nichtlinear, wenn seine 
$$I,U$$
-Beziehungen Gl. (2.6.2)  $F_1(I_1,I_2,U_1,U_2)=0$ ,  $F_2(I_1,I_2,U_1,U_2)=0$  nichtlinear sind.

Sie führen zu unterschiedlichen Darstellungsformen (Tab. 2.12) und beim linearem Zweitor auf die Zweitorgleichungen nach Tabelle 2.5.

Tabelle 2.12. Darstellungsformen eines nichtlinearen resistiven Zweitors

$U_1(I_1, I_2), U_2(I_1, I_2),$	$U_1(I_1, U_2), I_2(I_1, U_2),$	$U_1(U_2, I_2), I_1(U_2, I_2),$
stromgesteuert	hybridgesteuert (1)	ausgangsgesteuert
$I_1(U_1, U_2), I_2(U_1, U_2),$	$I_1(U_1, I_2), U_2(U_1, I_2),$	$U_2(U_1, I_1), I_2(U_1, I_1),$
spannungsgesteuert	hybridgesteuert (2)	eingangsgesteuert

Voraussetzung sind zeitunabhängige  $Gr\"{o}\beta en$ . Energiespeichervorgänge spielen dann keine Rolle und es liegt ein nichtlineares resistives Zweitor vor.

Die obigen Beziehungen resultieren aus der Tatsache, dass zum resistiven Zweitor nur zwei Strom-Spannungs-Beziehungen für die 6 Klemmengrößen  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $-(I_1 + I_2)$  und  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_1 - U_2$  erforderlich sind, denn durch die Knoten- und Maschengleichung

$$I_1 + I_2 - (I_1 + I_2) = 0, \quad U_1 - U_2 - (U_1 - U_2) = 0$$
 (2.7.1)

und die Torbeschaltung reichen 6-2-2=2 Klemmengrößen als unabhängige Variable aus, z. B.  $U_1$  und  $U_2$  (oder  $I_1$  und  $I_2$ ):

Zwei Kennlinienfelder beschreiben ein nichtlineares Zweitor vollständig.

Wir wählen die Form

$$I_1 = f(U_1, U_2), \quad I_2 = g(U_1, U_2),$$
 (2.7.2)

sie entspricht im linearen Fall der Leitwertdarstellung. Nach der Parameterfestlegung gibt es aus praktischen Gründen die Kennlinien

Eingangskennlinienfeld 
$$I_1 = f(U_1)|_{U_2}$$
  
Transferkennlinienfeld (rückwärts)  $I_1 = f(U_2)|_{U_1}$   
Ausgangskennlinienfeld  $I_2 = g(U_2)|_{U_1}$   
Transferkennlinienfeld (vorwärts)  $I_2 = f(U_1)|_{U_2}$ . (2.7.3)

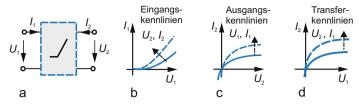


Abb. 2.7.2. Kennlinienfelder eines nichtlinearen resistiven Zweitores. (a) Nichtlineares resistives Zweitor. (b) Eingangskennlinienfeld, Parameter Ausgangsspannung oder -strom. (b) Ausgangskennlinienfeld, Parameter Eingangsspannung oder -strom. (d) Transferkennlinienfeld, Parameter Ausgangsspannung oder Eingangsstrom

Abb. 2.7.2 zeigt diese Verläufe. Wenn auch nicht alle gleich wichtig sind, so vermitteln doch die Eingangs- und Ausgangskennlinienfelder den Zusammenhang mit den äußeren Klemmenbelastungen. Aus Anschauungsgründen wird die Transferkennlinie vorwärts ergänzt, weil sie das Verhalten der gesteuerten Quelle direkt ausdrückt. Grundsätzlich können in den Kennliniendarstellung Strom oder Spannung als fester Parameter definiert werden, aus praktischen Gründen wählt man meist die Ausgangsspannung  $U_2$  und beim Ausgangskennlinienfeld Eingangspannung oder -strom.

Kennlinienfelder sind bequem messbar, sie veranschaulichen die Wechselwirkung mit den angeschlossenen Zweipolen zur Stromversorgung (z. B. eines Transistors) und erleichtern die Arbeitspunktbestimmung.

Während ihre messtechnische Bestimmung stets möglich ist, gelingt die Berechnung leicht für lineare Zweitore und nur in Sonderfällen (z. B. Transistorkennlinien, s. u.) auch für nichtlineare. Die Netzwerkanalyse mit einem nichtlinearen Zweitor erfordert geeignete Darstellungen (analytisch, Kennlinienform, stückweise Geraden u. a.), die Aufbereitung der Schaltung und ein Lösungsverfahren. Heute erfolgt dieser Schritt meist durch Schaltungssimulation.

Eine typische Betriebssituation des nichtlinearen Zweitors ist die folgende: ein Bauelement, etwa ein Transistor, arbeitet im Gleichstromkreis, ist also mit aktiven Zweipolen abgeschlossen. Dadurch stellt sich der Arbeitspunkt ein. Vom Energieumsatz her betrachtet ist es in der Arbeitspunktschaltung stets Leistungsverbraucher = passives Zweitor(!). Netzwerktechnisch bedeutet die Arbeitspunkteinstellung die Lösung der nichtlinearen Netzwerkgleichungen.

Zunächst betrachten wir das Netzwerkmodell des Bipolartransistors als typisches nichtlineares Zweitor.

# 2.7.3 Bipolartransistormodell

Wir zeigen am Beispiel des Bipolartransistors die Einbindung eines nichtlinearen Zweitors in eine Schaltung und seine Modellierung mit gesteuerten

Quellen als Grundlage von Netzwerkmodellen, meist als Ersatzschaltungen bezeichnet.  $^{42}$  Sie beschreiben

- als Gleichstromersatzschaltung das "statische" Verhalten,
- als Kleinsignalmodell das Übertragungsverhalten und
- als Großsignalersatzschaltung das Verhalten etwa im Schalterbetrieb.

Funktionsprinzip, Kennlinienmodell Der npn-Transistor (Abb. 2.7.3a) besteht aus drei aufeinanderfolgenden n-, p- und n-leitenden Halbleitergebieten mit den Anschlusskontakten Emitter (E), Basis (B), Kollektor (C). Er verhält sich etwa wie zwei Halbleiterdioden (Emitter-Basis, Kollektor-Basis), die über ein gemeinsames, extrem schmales Mittelgebiet, den Basisraum (Dicke 1  $\mu$ m und weniger<sup>43</sup>) elektrisch miteinander "wechselwirken". Das unterscheidet sie von zwei, nebeneinander angeordneten Einzeldioden.

#### Die Transistorwirkung beruht auf

- 1. der *Injektionswirkung* der flussgepolten Emitter-Basis-Diode ( $U_{\rm BE} > 0$ ), weil der Emitterstrom  $I_{\rm E}$  überwiegend zur Kollektorsperrschicht und nicht zum Basiskontakt fließt, wie zu erwarten wäre,
- 2. der *Kollektorwirkung* der sperrgepolten Kollektor-Basis-Diode ( $U_{\rm CB} > 0$ ), zu deren Sperrstrom sich der injizierte Emitterstrom addiert,
- 3. der *Transferfunktion des Injektionsstromes* vom Emitterbereich durch den Basisraum hin zum Kollektorbereich. Dadurch überträgt sich die Steuergröße des Eingangskreises in den Kollektor- oder Ausgangskreis.

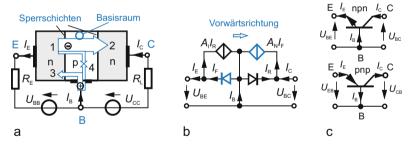


Abb. 2.7.3. Bipolartransistor. (a) Prinzipieller Aufbau und Wirkprinzip, Spannungen und Stromanteile im npn-Transistor (aktiver Bereich). (b) Ebers-Moll-Modell (npn-Transistor). Hervorgehobene Elemente wirken im Vorwärtsbetrieb. (c) Schaltzeichen für npn- und pnp-Bipolartransistoren

<sup>&</sup>lt;sup>42</sup>Zum tieferen Verständnis des Transistorfunktionsprinzips sei auf Bauelementelehrbücher verwiesen.

 $<sup>^{43}</sup>$ Zum Vergleich: ein menschliches Haar hat eine Dicke von etwa 30  $\mu$ m.

Beim Stromübergang vom Emitter- zum Kollektorbereich tritt im Basisraum ein Trägerverlust (durch Rekombination mit dort anwesenden Partnern) auf, der als Basisstrom  $I_{\rm B}$  über den Basiskontakt ausgeglichen wird. Deshalb gilt die Strombilanz  $I_{\rm E}=I_{\rm B}+I_{\rm C}$  (Knotensatz!), aus der sich die Stromverstärkung  $A_{\rm N}$  in Basisschaltung ergibt:

$$A_{\rm N} = \frac{I_{\rm C}}{I_{\rm E}} \le 1 \ (0,99\dots0,999).$$
 Stromverstärkung in Basisschaltung (2.7.4)

Sie kennzeichnet den Stromtransport durch den Basisraum (in Wirklichkeit eine Stromschwächung!). Der Index N bezieht sich auf die *normale Betriebs-richtung* (s. u.).

Genauer injiziert die flussgepolte Emitterdiode einen Elektronenstrom (1) (Abb. 2.7.3a) in den Basisraum, der größtenteils als Transferstrom (2) die Kollektorsperrschicht erreicht. Ein geringer Teil (4) rekombiniert mit Löchern, die über den Basiskontakt (als sog. Majoritätsträger) herbeifließen. Ein Teil des Basisstromes bildet den Rückinjektionsstrom (3) über die Emitterdiode, er ist nicht mit dem Kollektorstrom verkoppelt. Damit gilt:

#### Die Transistorfunktion wird modelliert durch

- die flussgepolte Emitterdiode im Eingangskreis,
- eine gesteuerte Stromquelle im Ausgangskreis mit paralleler (gesperrter)
   Kollektordiode.

Die zugehörigen Strom-Spannungs-Beziehungen der Basisschaltung

$$I_{\rm E} = \underbrace{I_{\rm ES} \left( \exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}} - 1 \right)}_{\rm Emitterdiode} - \underbrace{A_{\rm I}I_{\rm ES} \left( \exp \frac{U_{\rm BC}}{U_{\rm T}} - 1 \right)}_{\rm Transferstrom, \, rückw. \, \approx 0.}$$

$$I_{\rm C} = \underbrace{A_{\rm N}I_{\rm ES} \left( \exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}} - 1 \right)}_{\rm Transferstrom \, vorw.} - \underbrace{I_{\rm CS} \left( \exp \frac{U_{\rm BC}}{U_{\rm T}} - 1 \right)}_{\rm Kollektordiode, \, \approx 0}$$

$$\approx A_{\rm N}I_{\rm E} + I_{\rm CS}|_{\rm Kollektor \, gesperrt}$$
Ebers-Moll-Beziehungen

werden verbreitet auch als *Ebers-Moll-Gleichungen*<sup>44</sup> bezeichnet und enthalten mit  $I_{\rm ES},\ I_{\rm CS}$  Diodensättigungsströme (Größenordnung  $10^{-12}\dots 10^{-9}\,{\rm A}$ ) und die *Stromverstärkung A*<sub>N</sub> *vorwärts* bzw.  $A_{\rm I}$  rückwärts  $(0,2\dots 0,8)$ . Mit dem Basiskontakt als Bezugsknoten sind die beiden Emitter- und Kollektorströme  $I_{\rm E},\ I_{\rm C}$  Funktionen der anliegenden Spannungen  $U_{\rm BE},\ U_{\rm BC}$ .

 $<sup>^{44}{\</sup>rm Die}$  Beziehung wurde 1954 von Ebers und Moll angegeben und bildet auch heute noch die Grundlage eines aussagefähigen Transistormodells.

Der Transistor ist ein nichtlinearer resistiver Dreipol mit Kennlinien nach Gl. (2.7.5) modelliert durch zwei Dioden, die über Transferströme vorwärts und rückwärts in Wechselwirkung stehen.

Das drückt die Ersatzschaltung Abb. 2.7.3 aus Dioden und parallel liegenden stromgesteuerten Stromquellen aus.

Bei Umkehr der Spannungen (also  $U_{\rm BE} < 0$ ,  $U_{\rm BC} > 0$ ) arbeitet der Transistor in *Rückwärtsrichtung* (invers): Kollektordiode ist flussgepolt und injiziert einen Transferstrom zur sperrgepolten Emitterdiode. Diese Betriebsrichtung hat geringe Bedeutung. Wir beschränken uns auf den Fall mit flussgepolter Emitter- und sperrgepolter Kollektor-Diode ( $U_{\rm BE} > 0$ ,  $U_{\rm BC} < 0$ ), also den *Vorwärtsbetrieb*.

Im Vorwärtsbetrieb führt die Kollektordiode nach Gl. (2.7.5) nur den Sättigungsstrom  $I_{\rm CS}$  und der Kollektorstrom  $I_{\rm C}$  setzt sich aus  $I_{\rm CS}$  und einem durch die Eingangsspannung  $U_{\rm BE}$  steuerbaren Anteil  $\sim \exp U_{\rm BE}/U_{\rm T}$  zusammen: diese Form wurde bereits früher (Abb. 2.7.1c) qualitativ betrachtet. Dort gilt das Modell des pnp-Transistors, verbreiteter sind heute npn-Transistoren. Deshalb das Schaltsymbol der Eingangsdiode in Abb. 2.7.3b umgedreht.

Wird jedoch die Basis-Emitterspannung im Transferstrom durch den Emitterstrom ersetzt (zweites Ergebnis in Gl. (2.7.5)), also zur Stromsteuerung übergegangen, so steuert der Eingangsstrom  $I_{\rm E}$  den Kollektorstrom proportional und der Vorgang wird durch eine linear stromgesteuerte Stromquelle modelliert. Die Eingangssteuergröße bestimmt damit den Steuertyp: lineares Übertragungsverhalten bei Stromsteuerung, stark nichtlineares bei Spannungssteuerung! Als Kennlinienfelder treten die Eingangskennlinie (flussgepolte Diode) und die Ausgangskennlinie mit dem Emitterstrom  $I_{\rm E}$  bzw. der Emitterspannung  $U_{\rm BE}$  als Parameter auf.

Damit schließt sich der Kreis zu Abb. 2.7.1c, nur sind gegenüber dem pnp-Transistor beim npn-Transistor alle Richtungen der Ströme und Spannung umzudrehen (s. Abb. 2.7.3c).

Emitterschaltung Wir betrachten jetzt den Einfluss des Basisstromes

$$I_{\rm B} = I_{\rm E} - I_{\rm C} = I_{\rm E}(1 - A_{\rm N}) \ll I_{\rm C}.$$
 (2.7.6)

Seine Ursache sind "Transportverluste" beim Fluss der Ladungsträger vom Emitter zum Kollektor. Es liegt nahe, auch den kleineren Basisstrom als Steuergröße zu verwenden. Dazu wird der *Emitter als Bezugspunkt* des Ein- und Ausgangskreises gewählt. So entsteht die *Emitterschaltung* (Abb. 2.7.4a), die meist verwendete *Grundschaltung* des Transistors. Die zugehörigen Kennlini-

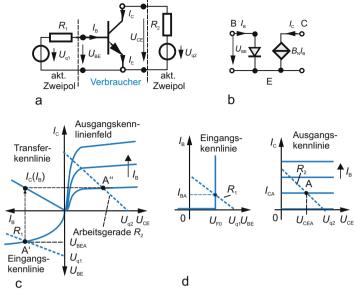


Abb. 2.7.4. Bipolartransistor in Emitterschaltung im Grundstromkreis. (a) Zusammenspiel zwischen aktiven Zweipolen zur Arbeitspunkteinstellung und Bipolartransistor (als Verbraucherzweitor). (b) Stark vereinfachte Ersatzschaltung in Emitterschaltung. (c) Eingangs-, Übertragungs- und Ausgangskennlinienfelder mit eingetragenen Arbeitsgeraden. (d) Stark vereinfachte Form mit Eingangsknickkennlinie und ausgangsseitig gesteuerter Quelle

engleichungen

$$I_1 = I_B = f_1(U_{BE}, U_{CE}) = f_1(U_1, U_2)$$
  
 $I_2 = I_C = f_2(U_{BE}, U_{CE}) = f_2(U_1, U_2)$ 

$$(2.7.7)$$

gehen über die Kirchhoffschen Gleichungen  $U_{\rm BE} = -U_{\rm EB},\, U_{\rm CE} = U_{\rm CB} - U_{\rm EB},\, I_{\rm B} = I_{\rm E} - I_{\rm C}$  direkt aus den *Ebers-Moll-Beziehungen* Gl. (2.7.5) hervor. Bei gesperrter Kollektordiode und flussgepoltem Emitter gilt  $|U_{\rm CE}| \approx |U_{\rm CB}| \gg U_{\rm BE}$  und die *Kennlinien der Emitterschaltung* lauten

$$I_{\rm B} \approx (1 - A_{\rm N})I_{\rm ES} \left(\exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}} - 1\right) = I_{\rm E}(1 - A_{\rm N})$$

$$I_{\rm C} = A_{\rm N}I_{\rm ES} \exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}} + I_{\rm CS} \approx \underbrace{\left(A_{\rm N}/(1 - A_{\rm N})\right)}_{B_{\rm N}} I_{\rm B} + I_{\rm Crest}.$$
(2.7.8)

Die Ersatzschaltung Abb. 2.7.4b enthält wieder eine eingangsseitige Diode (jetzt in pn-Form für den Basisstrom) und eine spannungs- oder stromgesteuerten Stromquelle im Ausgangskreis, die einen (vernachlässigbaren)

Sättigungsstrom  $I_{\text{Crest}}$  führt. Der Unterschied zur Basisschaltung besteht im deutlich größeren Stromverstärkungsfaktor  $B_{\text{N}}$ 

$$B_N \approx \frac{I_C}{I_B} \gg 1. \quad \text{Stromverst\"{a}rkungsfaktor in Emitterschaltung (2.7.9)}$$

Die Eingangskennlinie ist eine Diodenkennlinie (Parameter  $U_{\rm CE}$  praktisch ohne Einfluss). Nennenswerter Stromfluss setzt erst ab der Spannung  $U_{\rm BE}=U_{\rm F}\approx 0,7\,{\rm V}$  ein.

Das Ausgangskennlinienfeld  $I_{\rm C}=I_{\rm C}(U_{\rm CE})$  (Abb. 2.7.3c) wird entweder mit der Steuerspannung  $U_{\rm BE}$  oder dem Steuerstrom  $I_{\rm B}$  als Parameter dargestellt. Es liegt im ersten Quadranten und ist das typische Kennlinienfeld einer gesperrten Diode, zu der ein Transferstrom  $B_{\rm N}I_{\rm B}$  durch die Stromquelle addiert wird.

Eine sinnvolle Kennlinienkombination ergibt sich (Abb. 2.7.4c) bei gemischter Darstellung, die den Steuerzusammenhang  $I_{\rm C}=f(I_{\rm B})$  im zweiten Quadranten angibt (mit  $U_{\rm CE}$  als Parameter, kaum Einfluss). Nach Gl.(2.7.8) ist die Kennlinie in etwa eine Gerade. Das Rückwirkungsfeld  $U_{\rm BE}=f(U_{\rm CE})$  mit  $I_{\rm B}$  als Parameter im 4. Quadranten spielt praktisch keine Rolle. Diese Kennliniendarstellung stammt aus der Anfangszeit des Transistors, ihre Steigungen im Arbeitspunkt bilden die Zweitorkoeffizienten der Hybriddarstellung (s. Tab. 2.9), eine heute kaum noch verwendete Form.

Zusammengefasst hat der Bipolartransistor als nichtlineares resistives Zweitor zwei typische Kennlinienzusammenhänge

- Zweipolverhalten an den Ein- und Ausgängen, wobei der Steuerparameter praktisch nur ausgangsseitig wirksam wird und zum Ausgangskennlinienfeld führt,
- Übertragungsverhalten zwischen Ausgangs- und Eingangsgröße. Obwohl dieser Zusammenhang implizit in der Zweitorkennlinie enthalten ist, wird er aus Anschauungsgründen getrennt dargestellt.

**Arbeitspunkteinstellung** Im Betrieb liegen am Transistor eingangsseitig eine Spannungsquelle  $U_{\rm q1}(R_1)$  und ausgangsseitig die Quelle  $U_{\rm q2}$  mit dem Lastwiderstand  $R_2$  (Abb. 2.7.4a). Gesucht sind die Ströme und Spannungen im Netzwerk oder der *Arbeitspunkt*. Seine Bestimmung hängt vom Transistormodell ab:

- bei *nichtlinearem Modell* sind das *grafische Verfahren* mit dem Kennlinienfeld, numerische Verfahren oder am bestem die Schaltungssimulation,
- bei stückweise linearem Modell gelingt eine analytische Bestimmung.

Stets wirken die U, I-Beziehungen der äußeren aktiven Schaltungsteile mit den nichtlinearen U, I-Beziehungen des Zweitors zusammen. Die Lösung ist der Arbeitspunkt. Statt ihn zu suchen, geht man (wegen der bekannten Schwierigkeiten) meist umgekehrt vor: Wahl eines Arbeitspunktes im Ausgangskennlinienfeld und anschließende schrittweise Bemessung des umgebenden Netzwerkes. Der Arbeitspunkt wird fixiert

- eingangsseitig durch einen aktiven Zweipol (der später auch das Steuersignal führt). Seine Widerstandsgerade schneidet die Eingangskennlinie im Punkt A': eingangsseitiger nichtlinearer Grundstromkreis,
- ausgangsseitig durch den aktiven Zweipol "Spannungsquelle mit Lastelement". Es entsteht der Arbeitspunkt A". Er wird nach Anwendungsgesichtspunkten (z. B. große Verstärkung) festgelegt.

Anschließend trägt man die Arbeitsgerade (Lastkennlinie) wegen  $U_{\rm CE} = U_{\rm CC} - I_{\rm C}R_{\rm C}$  durch Verbinden des Punktes  $U_{\rm CC}(I_{\rm C}=0)$  mit dem Arbeitspunkt A'' ein. Dazu gehört ein bestimmter Basisstrom, den man über die Stromübertragungskennlinie ermittelt. Schließlich wird die Widerstandsgerade im Eingangskreis durch diesen Punkt A' und die eingangsseitige Versorgungsspannung  $U_{\rm q}$  gelegt.

Stückweise lineares Modell In Kap. 2.5.2 wurde die stückweise lineare Näherung einer nichtlinearen Netzwerkelementbeziehung erläutert. Wir wenden sie auf die Ersatzschaltung Abb. 2.7.4b an, ersetzen die Eingangsdiode durch eine Knickkennlinie (ideal) mit der Schleusenspannung  $U_{\rm FO}$  und verwenden weiter eine lineare gesteuerte Quelle. Eine (nicht gezeichnete) sperrgepolte parallele Diode verhindert Stromfluss für  $U_{\rm CE} < 0$ . Die Sättigungsstromquelle wurde weggelassen. Damit ergibt sich die Kleinsignalform Abb. 2.7.4d. Die Netzwerkbeziehungen der angeschlossenen aktiven Zweipole lauten  $(U_{\rm q1},\,U_{\rm q2}>0)$   $U_{\rm BE}=U_{\rm q1}-R_1I_{\rm B},\,U_{\rm CE}=U_{\rm q2}-R_2I_{\rm C}.$  Das stückweise lineare Zweitor ist gegeben durch  $U_{\rm BE}=U_{\rm F0},\,I_{\rm C}=B_{\rm N}I_{\rm B}.$  Damit folgen aus beiden Gleichungen

eingangsseitig: 
$$I_{\rm B} = \frac{U_{\rm q1} - U_{\rm F0}}{R_{\rm 1}}, U_{\rm BE} = U_{\rm F0}$$
  
ausgangsseitig:  $I_{\rm C} = B_{\rm N}I_{\rm B} = \frac{B_{\rm N}}{R_{\rm 1}} \left( U_{\rm q1} - U_{\rm F0} \right),$  (2.7.10)  
 $U_{\rm CE} = U_{\rm q2} - R_2I_{\rm C} = U_{\rm q2} - \frac{R_2}{R_1} B_{\rm N} \left( U_{\rm q1} - U_{\rm F0} \right).$ 

Sie bestimmen den Arbeitspunkt A mit den Werten  $U_{\rm BEA},\,I_{\rm BA},\,U_{\rm CEA},\,I_{\rm CA}$  wie in Abb. 2.7.4d dargestellt.

#### 2.7.4 Kleinsignalverhalten nichtlinearer Zweitore

Häufig liegt ein nichtlineares Zweitor zwischen einer nichtlinearen Signalquelle (Gleichgrößen  $U_q$ ,  $I_q$ , Signalgrößen  $\Delta U_q$ ,  $\Delta I_q$ ) und einem nichtlinearen

Lastelement. Es enthält zur Arbeitspunkteinstellung zusätzlich eine Gleichquelle. Für diese Anordnung wird zunächst der Arbeitspunkt bestimmt.

Die Signalgrößen sind im Regelfall zeitabhängig und bewirken entsprechende Änderungen im Netzwerk. Das Übertragungsverhalten für Signaländerungen (Kleinsignalsteuerung) wurde schon im Kap. 2.5.5 am Beispiel einer Halbleiterdiode mit Arbeitspunktanalyse und überlagertem Kleinsignalverhalten erläutert. Diesen Ansatz übertragen wir auf das nichtlineare Zweitor im Grundstromkreis.

**Zweitorkleinsignalparameter** In der Ausgangsschaltung Abb. 2.7.5a stellen die Spannungsquellen  $U_{\rm q1},\ U_{\rm q2}$  den Arbeitspunkt  $(U_{10}\dots I_{20})$  ein, eine zusätzliche "Signalquelle" (= Eingangsspannungsänderung  $\Delta U_{\rm q} = \Delta U_{\rm q1}$ ) verursacht die Spannungs-/ Stromänderungen  $\Delta U,\ \Delta I$  um ihn. Grundsätzlich könnte auch ausgangsseitig eine Signalquelle  $\Delta U_{\rm q2}$  anliegen, wir setzen aber  $\Delta U_{\rm q2} = 0$  und betrachten nur die Änderung  $\Delta U_{\rm 2}$  am Ausgang des linearen Zweitors.

Bei Kleinsignalaussteuerung (Abb. 2.7.5b) liegen am Zweitor zwei unabhängige Veränderliche, z. B. die Spannungsänderungen  $\Delta U_1$ ,  $\Delta U_2$ . Der Innenwiderstand des ausgangsseitigen aktiven Zweipols in Abb. 2.7.5a ist jetzt das Lastelement. Durch die Quelle  $\Delta U_{\rm q1}$  arbeitet das Zweitor im Kleinsignalbe-

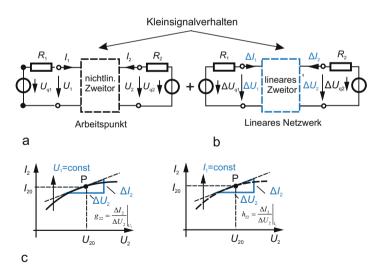


Abb. 2.7.5. Kleinsignalverhalten des Bipolartransistors (als nichtlineares resistives Zweitor). (a) Anordnung zur Arbeitspunkteinstellung. (b) Nichtlineares resistives Zweitor im Kleinsignalbetrieb. (c) Einfluß der Nebenbedingung auf das Kleinsignalverhalten im Ausgangskennlinienfeld

trieb "in der Schaltung", eingangsseitig abgeschlossen durch die Signalquelle und ausgangsseitig durch ein Lastelement. Gesucht sind die Stromänderungen  $\Delta I_1$ ,  $\Delta I_2$  an den Zweitorklemmen als Folge der Spannungsänderungen  $\Delta U_1$ ,  $\Delta U_2$ . Wir finden sie durch (zweidimensionale) Taylor-Entwicklung der Ströme  $I_1 = f_1(U_1, U_2)$  und  $I_2 = f_2(U_1, U_2)$  um den Arbeitspunkt  $U_{10}$ ,  $U_{20}$ 

$$I_{10} + \Delta I_{1} = \underbrace{f_{1}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{1}}{\partial U_{1}}}_{\Delta U_{2}=0} \cdot \Delta U_{1} + \underbrace{\frac{\partial I_{1}}{\partial U_{2}}}_{\Delta U_{1}=0} \cdot \Delta U_{2}$$

$$Kleinsignalverhalten + \dots$$
höhere Ableitungen
$$I_{20} + \Delta I_{2} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\Delta U_{2}=0} \cdot \Delta U_{1} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\Delta U_{1}=0} \cdot \Delta U_{2}$$

$$Kleinsignalverhalten + \dots$$
höhere Ableitungen
$$I_{20} + \Delta I_{2} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Kleinsignalverhalten}} \cdot \Delta U_{2}$$

$$I_{20} + \Delta I_{20} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\text{AU_{2}=0}} \cdot \Delta U_{1} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\text{AU_{1}=0}} \cdot \Delta U_{2}$$

$$I_{20} + \Delta I_{20} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\text{AU_{2}=0}} \cdot \Delta U_{1} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\text{AU_{1}=0}} \cdot \Delta U_{2}$$

$$I_{20} + \Delta I_{20} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\text{AU_{2}=0}} \cdot \Delta U_{2} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\text{AU_{1}=0}} \cdot \Delta U_{2}$$

$$I_{20} + \Delta I_{20} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\text{AU_{2}=0}} \cdot \Delta U_{2} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\text{AU_{1}=0}} \cdot \Delta U_{2}$$

$$I_{20} + \Delta I_{20} = \underbrace{f_{2}(U_{10}, U_{20})}_{\text{Strom in A}} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\text{AU_{2}=0}} \cdot \Delta U_{2} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\text{AU_{1}=0}} \cdot \Delta U_{2}$$

$$I_{20} + \Delta I_{20} = \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{1}}}_{\text{AU_{2}=0}} \cdot \Delta U_{2} + \underbrace{\frac{\partial I_{2}}{\partial U_{2}}}_{\text{AU_{1}=0}} \cdot \Delta U_{2}$$

Anschaulich sind die Differenzialquotienten die Tangenten an die jeweilige Kennlinie im Arbeitspunkt. Sie heißen *Kleinsignalparameter*.

Im Kleinsignalbetrieb wird die Aussteuerung um den Arbeitspunkt als so klein vorausgesetzt, dass höhere Koeffizienten in der Taylorentwicklung Gl. (2.7.11) vernachlässigt werden können. Dann beschreibt das *lineare Zweitorgleichungssystem* 

$$\Delta I_1 = g_{11} \Delta U_1 + g_{12} \Delta U_2,$$
 Zweitor,  
 $\Delta I_2 = g_{21} \Delta U_1 + g_{22} \Delta U_2$  Kleinsignaldarstellung (2.7.12)

das Kleinsignalverhalten. Die Parameter  $g_{ik}$  (i, k = 1, 2) sind Tangenten an die entsprechenden Kennlinien unter gegebenen Nebenbedingungen. Kleinsignalparameter lassen sich für alle U, I-Darstellungen eines Zweitores herleiten und durch Kleinsignalersatzschaltungen interpretieren.

Im Kleinsignalbetrieb wird das linearisierte Zweitor im Arbeitspunkt

- grafisch durch ein linearisiertes Kennliniengebiet und mathematisch durch Zweitorgleichungen beschrieben;
- durch den Überlagerungssatz nach Gleichstrom- und Kleinsignalverhalten getrennt betrachtet.

Der Dimension nach sind die totalen Kennlinienableitungen Gl. (2.7.12) *Leitwert*parameter. Sie unterscheiden sich von den Leitwertparametern eines aus linearen Schaltelementen aufgebauten Zweitors in mehrfacher Hinsicht:

- Es sind dynamische (differenzielle) Parameter, die nach der Festlegung Kap. 2.3.5.1 mit kleinen Symbolen bezeichnet werden. Sie gelten nur für kleine Aussteuerung.
- 2. Die Koeffizienten hängen vom Arbeitspunkt ab. Änderungen der Gleichvorspannungen verschieben den Arbeitspunkt, somit die Kennliniensteigungen und folglich die Zweitorparameter. Der Arbeitspunkt ist bei Angabe von Kleinsignalparametern in jedem Fall zu nennen.
- 3. Entscheidend für die richtige Definition ist die Nebenbedingung z. B.  $\frac{\partial I_2}{\partial U_2}\Big|_{\Delta U_1=0}$

So bedeutet die Angabe  $U_1=$  const oder  $\Delta U_1=0$  keine Änderung der Eingangsspannung bei Bildung der Ableitung. Anschaulich wird dann die Steigung  $\frac{\partial I_2}{\partial U_2}\Big|_{U_1={\rm const}}=g_{22}$  an der Kennlinie  $I_2=f(U_2)$  für konstanten Parameter  $U_1$  gebildet (vgl. Abb. 2.7.5c). Dagegen ergibt die Steigung  $\frac{\partial I_2}{\partial U_2}\Big|_{I_1}$  an die Kennlinie  $I_2=f(U_2)$  bei  $I_1={\rm const}$  einen ganz anderen Wert, nämlich  $h_{22}~(\neq g_{22}!)$ .

Die Taylor-Entwicklung Gl. (2.7.11) basiert auf (stillschweigend) zeitkonphas angenommenen Strom- und Spannungsänderungen. Sie vernachlässigt Energiespeichervorgänge. In Halbleiterbauelementen sind jedoch Ströme und Spannungen bei höheren Frequenzen phasenverschoben, weil Trägheiten u. a. mitwirken. Solche Vorgänge lassen sich durch komplexe Kleinsignalleitwertparameter (oder Leitwertoperatoren) berücksichtigen (Bd. 3).

Kleinsignalparameter von Bauelementen Die Herleitung der Kleinsignalparameter für ein Bauelement ist Aufgabe der Bauelemente-Elektronik. Herangezogen werden dazu entweder Kennliniengleichungen, experimentell am Bauelement gemessene Werte oder das physikalische Wirkprinzip. Weil sich die Kennlinien für einzelne Grundschaltungen (z. B. Basis- und Emitterschaltung) voneinander unterscheiden, sind auch die Kleinsignalparameter grundschaltungsabhängig. Zwischen den Parametern einzelner Grundschaltungen gibt es aber Beziehungen. Sie werden entweder über Ersatzschaltungen oder sog. Zweitordrehung (zyklische Vertauschung des Massepunktes) gewonnen. Wir gehen darauf in Kap. 3.6 ein.

Zu beachten ist, dass stückweise linear approximierte Zweitorgleichungen Sprünge der Kleinsignalparameter an den Knickpunkten verursachen und solche Kleinsignalmodelle für viele Anwendungen nicht brauchbar sind (Problem mancher Transistormodelle).

Lösungsmethodik Kleinsignalanalyse Eine Kleinsignalanalyse für ein nichtlineares Netzwerk (mit nichtlinearem Zweitor) mit den Zweiggrößen  $i_{\mu}(t) = I_{\mu A} + \Delta i_{\mu}(t), u_{\nu}(t) = U_{\nu A} + \Delta u_{\nu}(t)$  erfordert zusammengefasst:

#### 1. Analyse des Gleichstromverhaltens: Arbeitspunktbestimmung.

- (a) Aufstellen der Gleichstromersatzschaltung (Kurzschluss der Kleinsignalspannungs- und Leerlauf der Kleinsignalstromquellen).
- (b) Arbeitspunktbestimmung durch Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (Methode: Kirchhoffsche Gleichungen, Knotenspannungs- oder Maschenstromanalyse u. a.) Ergebnis:  $I_{\mu A}$ ,  $U_{\nu A}$

#### 2. Kleinsignalanalyse

- (a) Unabhängige Gleichspannungsquellen kurzschließen und unabhängige Gleichstromquellen entfernen. Nichtlineare Netzwerkelemente durch ihre Kleinsignalnetzwerkelemente im Arbeitspunkt ersetzen.
- (b) Aufstellung/Übernahme des linearen Gleichungssystems für Kleinsignalgrößen  $\Delta i_{\mu}(t)$ ,  $\Delta u_{\nu}(t)$  im Arbeitspunkt. Zweigbeziehungen für Kleinsignalelemente einschließlich Quellen  $\Delta u_{\rm q}$ ,  $\Delta i_{\rm q}$ , Lösung des Gleichungssystems.
- (c) Gesamtlösung des Netzwerkes durch Überlagerung der Gleichstromund Kleinsignallösungen  $i_{\mu}(t) = I_{\mu A} + \Delta i_{\mu}(t), u_{\nu}(t) = U_{\nu A} + \Delta u_{\nu}(t).$

Diese Strategie lag der Schaltung nach Abb. 2.3.13 resp. Abb. 2.7.5 zugrunde.

*Hinweis:* Bei Arbeitspunktänderung muss die Kleinsignalanalyse neu durchgeführt werden.

# 2.7.5 Kleinsignalverhalten des Bipolartransistors, Verstärkungsprinzip

Eine Kleinsignalanalyse liefert für jedes Netzwerkelement eine entsprechende Ersatzschaltung. Dabei erhalten Ströme und Spannung statt der Änderungen ( $\Delta U_{\rm E} = U_{\rm e}$ ) kleine Indizes (im Gegensatz zu großen Indices für Gleichgrößen). Beim Bipolartransistor bevorzugt man die *Leitwertersatzschaltung*. Ziel sind Anhaltswerte für die Elemente der Ersatzschaltung zur raschen Bewertungen einer Schaltungsanalyse. Ausgang ist die *Emitterschaltung* (Abb. 2.7.6a) mit der Kennliniengleichung (s. Gl. (2.7.8)) für das einfache Modell im Betriebsbereich vorwärts

$$I_{\rm C} \approx I_{\rm S} \left( 1 + \frac{U_{\rm CE}}{U_{\rm AF}} \right) \exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}},$$

$$I_{\rm B} = \frac{I_{\rm S}}{B_{\rm N}} \exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}} \approx \frac{I_{\rm C}}{B_{\rm N}} \frac{1}{1 + U_{\rm CE}/U_{\rm AF}} \approx \frac{I_{\rm C}}{B_{\rm N}}.$$
(2.7.13)

Sie unterscheidet sich von Gl. (2.7.8) nur durch einen Vorfaktor (s. u.) und Annahme des Flussbereiches (exp  $x\gg 1$ ). Damit und den Definitionen der Leitwertparameter Gl. (2.7.12) sowie den Zuordnungen  $I_1=I_{\rm B},\ I_2=I_{\rm C},\ U_1=U_{\rm BE}$  und  $U_2=U_{\rm CE}$  ergeben sich der Reihe nach<sup>45</sup> die Kleinsignalpa-

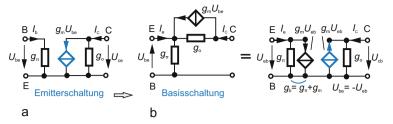


Abb. 2.7.6. Elementare Kleinsignalersatzschaltung. (a) in Emitterschaltung (resistives Verhalten), spannungsgesteuerte Form. (b) Übergang zur Basisschaltung mit zugehörigen Kleinsignalelementen

#### rameter des Bipolartransistors in Emitterschaltung

$$g_{11e} = \frac{\partial I_{\rm B}}{\partial U_{\rm BE}} \Big|_{U_{\rm CE}} = \frac{I_{\rm B}}{U_{\rm T}} = g_{\pi},$$

$$g_{12e} = \frac{\partial I_{\rm B}}{\partial U_{\rm CE}} \Big|_{U_{\rm BE}} = 0$$

$$g_{21e} = \frac{\partial I_{\rm C}}{\partial U_{\rm BE}} \Big|_{U_{\rm CE}} = \frac{I_{\rm C}}{U_{\rm T}} = g_{\rm m},$$

$$g_{22e} = \frac{\partial I_{\rm C}}{\partial U_{\rm CE}} \Big|_{U_{\rm BE}} = \frac{I_{\rm C}}{U_{\rm CE} + U_{\rm AF}} = g_{\rm o}.$$

$$(2.7.14)$$

Die Parameter werden üblicherweise als Eingangs- oder Emitterleitwert  $g_{\pi}$ , als Übertragungsleitwert oder Steilheit  $g_{\rm m}$  und Ausgangsleitwert  $g_{\rm o}$  (genauer Ausgangskurzschlussleitwert (s. u.)) bezeichnet. Der Rückwirkungsleitwert  $g_{12e}$  verschwindet.

Arbeitspunkt  $(I_{\rm C})$ , Stromverstärkung  $B_{\rm N}$  (resp.  $I_{\rm B}$ ) und die sog. Earlyspannung  $U_{\rm AF}$  bestimmen die vier Kleinsignalparameter des Transistors in Emitterschaltung.

Diese Größen berechnet das Programm SPICE bei jeder Arbeitspunktermittlung automatisch (wenn kein besseres Transistormodell vorgeschrieben ist).

Die wichtigsten Parameter sind die Steilheit  $S = g_{\rm m} = g_{\rm 21e}$  und der Ausgangswiderstand  $r_{\rm o} = 1/g_{\rm o}$ . Die Steilheit<sup>46</sup>

$$g_{21e} = \frac{\partial I_{\rm C}}{\partial U_{\rm BE}} \bigg|_{U_{\rm CE}} = g_{\rm m} = \frac{I_{\rm C}}{U_{\rm T}} = \frac{A_{\rm N}I_{\rm E}}{U_{\rm T}} = \frac{A_{\rm N}}{r_{\rm d}}$$
 (2.7.15)

 $<sup>^{45}</sup>$ Es ist üblich, die Kleinsignalparameter statt mit Y (resp. Z) mit g bzw. r als Symbol zu bezeichnen. Der Unterschied wird bei Wechselstromvorgängen (Bd. 3) diskutiert.

<sup>&</sup>lt;sup>46</sup>Hinzuweisen ist auf das Vorzeichen: Weil die Richtungen der Größen  $U_{\rm BE}$  und  $I_{\rm C}$  mit den Definitionsrichtungen  $U_1$ ,  $I_2$  am Zweitor übereinstimmen, hat die Steilheit in Emitterschaltung und für das symmetrische Richtungssystem stets einen positiven Wert (für die Basisschaltung kehrt sich ihr Vorzeichen um!). Außerdem gilt  $g_{21\rm b} = -g_{\rm m}, g_{21\rm e} \approx -g_{21\rm b} = g_{\rm m}$ .

ist dem Kollektorstrom proportional, die Schreibweise mit dem Emitterstrom drückt den Stromtransfer vom Emitter zum Kollektor aus. Sie stimmt praktisch mit dem reziproken Diffusionswiderstand  $r_{\rm d}$  (Kleinsignalwiderstand der Emitterdiode) überein. Wird der Bipolartransistor stromgesteuert (großer Generatorwiderstand), dann eignet sich die Stromverstärkung  $h_{21\rm e}$  zur Verstärkungskennzeichnung besser als die Steilheit.

Der Ausgangswiderstand  $r_{\rm o}=1/g_{\rm o}$  beschreibt die endliche Steigung der Kennlinie im Ausgangskennlinienfeld  $I_{\rm C}(U_{\rm CE})$ . Nach den Kennlinien Gl. (2.7.5) sollte der Widerstand unendlich groß sein. Am realen Transistor gibt es jedoch den Early-Effekt, der eine endliche Steigung der Ausgangskennlinie zur Folge hat. Man modelliert ihn einfach durch Anlegen einer Extrapolationsgeraden an die Kennlinie, die die U-Achse bei  $U_{\rm AF}$  schneidet (Richtwert einige  $10~\rm V$ ). So ergeben sich Ausgangswiderstände  $r_{\rm o}$  von größenordnungsmäßig einigen  $10~\rm ...$   $100~\rm k\Omega$  bedingt durch  $g_{\rm 22e}=g_{\rm o}\approx I_{\rm C}/U_{\rm AF}$ .

Der Transistor hat in Emitterschaltung einen großen Ausgangswiderstand.

Der Eingangsleitwert

$$g_{11e} = \frac{\partial I_{\rm B}}{\partial U_{\rm BE}} \Big|_{U_{\rm CE}} = g_{\pi} = \frac{I_{\rm B}}{U_{\rm T}} = \frac{I_{\rm C}}{B_{\rm N}U_{\rm T}} = \frac{g_{\rm m}}{B_{\rm N}}$$
 (2.7.16)

ist wesentlich kleiner als die Steilheit  $g_{\rm m}$  (nämlich um die Stromverstärkung  $B_{\rm N}$ , weil eingangsseitig der kleinere Basisstrom die Signalquelle belastet). Die Kollektorspannung hat praktisch keinen Einfluss.

**Zahlenbeispiel, Richtwerte** Ein gängiger Arbeitspunkt ist ein Kollektorstrom  $I_{\rm C}=1\,{\rm mA}$ . Für eine Stromverstärkung  $B_{\rm N}=100$  und eine Early-Spannung  $U_{\rm AF}=100\,{\rm V}$  (Wert liegt vielfach niedriger) ergeben sich als Parameterrichtwerte nach Gl. (2.7.14)

$$g_{11e} = \frac{1 \text{ mA}}{100 \cdot 25 \text{ mV}} = 0,4 \text{ mS}, g_{21e} = \frac{1 \text{ mA}}{25 \text{ mV}} = 40 \text{ mS}, g_{22e} = \frac{1 \text{ mA}}{100 \text{ V}} = 10 \mu\text{S}.$$

Der reale Transistor hat im Basisraum einen Basiswiderstand. Er wird einfach als Reihenwiderstand  $r_{\rm b}$  (Größenordnung einige  $10\,\Omega$ ) am Basisanschluss B modelliert, wir berücksichtigen diesen Einfluss nicht.

 ${\bf Basisgrundschaltung}$  Die zur  ${\it Basisschaltung}$  gehörende Ersatzschaltung kann unterschiedlich gewonnen werden:

- man definiert eine  $\pi$ -Ersatzschaltung mit neuen Leitwertparametern  $g_{ikb}$  (Index b für Basisschaltung) und berechnet sie aus den alten (z. B. durch Vierpoldrehung oder Umzeichnen des Netzwerkes),
- durch *Umzeichnen* der Ersatzschaltung und Parameterberechnung (wie hier in Abb. 2.7.6b): Umkehr der Richtung der Eingangsspannung ( $U_{\rm BE} = -U_{\rm EB}$ ) und damit auch der Richtung der gesteuerte Quelle und verzweigt die Stromquelle über den Basisanschluss (s. Quellenverzweigung, Kap. 4.2). Dann liegt eingangs-

seitig dem Leitwert  $g_\pi$  der Leitwert  $g_{\rm m}$  parallel (Stromquelle selbstgesteuert). So entsteht der Eingangsleitwert

$$g_{11b} = g_{\pi} + g_{\rm m} = \frac{I_{\rm B} + I_{\rm C}}{U_{\rm T}} = \frac{I_{\rm E}}{U_{\rm T}}$$
 (2.7.17a)

als Leitwert der Eingangsdiode betrieben mit dem Emitterstrom  $I_{\rm E}$  und damit größer als in Emitterschaltung.

Wichtig ist noch das veränderte Vorzeichen der Steilheit

$$g_{21b} = -g_{\rm m} \approx -g_{21e},$$
 (2.7.17b)

weil jetzt die gesteuerte Quelle (bei sonst gleichen Richtungen der Zweitorgrößen) zum Ausgang hin weist, also dem positiv definierten Kollektorstrom  $I_C$  entgegengesetzt gerichtet ist. Das Vorzeichen einer gesteuerten Quelle hat fundamentalen Einfluss auf Netzwerkeigenschaften, besonders bei Rückkopplung. Wir diskutieren dies am Beispiel des Miller-Effektes (Kap. 4.6).

**Emitterfolger** Die Kollektorschaltung (mit dem Kollektor als Bezugspunkt) und dem Emitterwiderstand R als Lastwiderstand ist die letzte Grundschaltung (Abb. 2.7.7a). Sie hat eine Spannungsverstärkung kleiner als 1, weil sich die Ausund Eingangsspannungen nur durch die Basisspannung  $U_{\rm BE} \approx 0,7$  V unterscheiden:  $U_{\rm A} \leq U_{\rm E}$ . Anschaulich folgt die Ausgangsspannung  $U_{\rm A}$  der Eingangsspannung  $U_{\rm E}$  (weshalb die Schaltung auch Emitterfolger heißt).

Die Kleinsignalspannungsverstärkung und der ausgangsseitige Innenwiderstand ergeben sich aus der Ersatzschaltung (Abb. 2.7.7b). Wir vernachlässigen fürs erste den Widerstand  $r_{\rm be}$ . Die Ausgangsspannung entsteht, weil die gesteuerte Stromquelle direkt in den Lastwiderstand einspeist. Mit der Steuerspannung  $U_{\rm be} = U_{\rm e} - U_{\rm a}$  folgt dann  $U_{\rm a} = Rg_{\rm m}U_{\rm BE} = Rg_{\rm m}(U_{\rm e} - U_{\rm a})$  und daraus

$$\frac{U_{\rm a}}{U_{\rm e}} = A_{\rm u} = \frac{g_{\rm m}R}{1 + g_{\rm m}R} \approx \left(1 - \frac{1}{g_{\rm m}R}\right) \le 1.$$
 (2.7.18a)

Der Emitterfolger überträgt die eingangsseitige Spannung  $U_{\rm e}$  fast ungeschwächt auf die Ausgangsseite (Bezeichnung Spannungsfolger!).

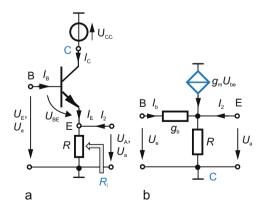


Abb. 2.7.7. Emitterfolger (Kollektorschaltung). (a) Grundschaltung. (b) Kleinsignalersatzschaltung, resistives Verhalten

Der Innenwiderstand von der Ausgangsseite her (ihm entspräche der Wert  $1/g_{22}$ ) ergibt sich durch Einprägen eines Probestromes  $I_2$  und Berechnung der zugehörigen Spannung  $U_a$ :

$$R_{\rm i} = \frac{1}{g_{\rm 22c}} = \frac{1}{g_{\rm m} + 1/R} \approx \left. \frac{1}{g_{\rm m}} \right|_{Rq_{\rm m} \gg 1}.$$
 (2.7.18b)

Er ist sehr klein von größenordnungsmäßig der reziproken Steilheit  $g_{\rm m}$ .

Der hohe Eingangswiderstand belastet die Signalquelle nicht. Deswegen arbeitet er als *Widerstandswandler*: eine hochohmige Signalquelle wird unter Beibehalt der Quellenspannung in eine Quelle mit geringem Innenwiderstand gewandelt.

Spannungsverstärkung, Lastkennlinie Zur Spannungsverstärkung der Emitterschaltung kommt es, wenn eine Eingangsspannungsänderung  $\Delta U_{\rm BE}$  eine Stromänderung  $\Delta I_{\rm C}$  nach Maßgabe der Steilheit  $g_{\rm m}$  am Lastwiderstand  $R_{\rm C}$  die Spannungsänderung  $\Delta U_{\rm A} = -R_{\rm C}\Delta I_{\rm C}$  bewirkt (Abb. 2.7.8a). Deutlich wird die Verstärkerfunktion durch Eintrag der "Arbeitsgeraden"  $U_{\rm q} = R_{\rm C}I_{\rm C} + U_{\rm CE}$  in das Ausgangskennlinienfeld. Ihre Schnittpunkte mit den Parameterkennlinien fixieren den jeweiligen Arbeitspunkt. Variiert die Eingangsspannung von null aus, so sinkt die Ausgangsspannung  $U_{\rm CE}$  von  $U_{\rm q}$  ausgehend bis zum Punkt  $P_{\rm 4}$  ab. Der Verlauf  $U_{\rm A} = f(U_{\rm BE})$  heißt Übertragungskennlinie und ihre Steigung im Arbeitspunkt die Leerlaufspannungsverstärkung (Kleinsignalgröße)

$$A_{\rm u} = \frac{{
m d}U_{
m A}}{{
m d}U_{
m BE}} \bigg|_{\Lambda} pprox \frac{\Delta U_{
m A}}{\Delta U_{
m BE}} \bigg|_{\Lambda}.$$

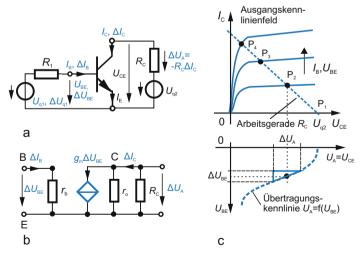


Abb. 2.7.8. Spannungsverstärkung, Emitterschaltung. (a) Grundschaltung mit aktiven Zweipolen zur Arbeitspunkteinstellung. (b) Kleinsignalersatzschaltung. (c) Ausgangskennlinie mit Arbeitswiderstand und zugehörige Übertragungskennlinie

Die Ersatzschaltung Abb. 2.7.8b liefert mit der Knotengleichung  $g_{\rm m}\Delta U_{\rm BE} + g_{\rm o}\Delta U_{\rm A} = -\Delta U_{\rm A}/R_{\rm C}$  die Spannungsverstärkung

$$A_{\rm u} = \left. \frac{\Delta U_{\rm A}}{\Delta U_{\rm BE}} \right|_A = -\frac{g_{\rm m}}{g_{\rm o} + 1/R_{\rm C}} \rightarrow \left. -\frac{g_{\rm m}}{g_{\rm o}} \right|_{R_{\rm C} \rightarrow \infty}. \quad \begin{array}{c} \text{Leerlauf-} \\ \text{spannungs-} \end{array} (2.7.19)$$

Die Emitterschaltung arbeitet als *Spannungsinverter*. Ihre Spannungsverstärkung steigt mit dem Lastwiderstand zur Leerlaufspannungsverstärkung (für  $R_{\rm C} \to \infty$ ) als Grenzwert.

Bei ausgangsseitigem Leerlauf erzeugt die spannungsgesteuerte Stromquelle  $g_{\rm m}\Delta U_{\rm BE}$  (Steilheit) am Ausgangsleitwert  $g_{\rm o}$  die Ausgangsspannung  $\Delta U_{\rm A}$ . Das ist eine Spannungsquelle mit großen Innenwiderstand (unerwünscht).

Ein großer Lastwiderstand  $R_{\rm C}$  hat zwei Konsequenzen:

- er erfordert hohe Versorgungsspannung  $U_{\rm q}$  von größenordnungsmäßig 100 V und mehr, verfügbar sind nur Versorgungsspannungen unter 10 V,
- er benötigt in integrierter Technik viel Chipfläche, was ebenso ausscheidet.

Die Lösung ist eine Konstantstromquelle auf der Kollektorseite mit hohem Innenwiderstand, besser bekannt als *nichtlineare Transistorlast* mit einer Sättigungskennlinie vom Typ Abb. 2.5.5c. Sie bietet folgende Vorteile

- Festlegung (Vorgabe) des Arbeitspunktes durch Stromeinspeisung im Ausgangskreis,
- hoher dynamischer Innenwiderstand durch den Ausgangswiderstand des Lasttransistors,
- wegen des starken Abfalls der Stromquellenkennlinie bei der Quellenspannung nur geringe Quellenspannung erforderlich.

Die Standardausführung dieser Konstantstromquelle ist der sog. Stromspiegel.

Vertiefung Stromspiegel Der Transistor wird mit ausgangsseitiger Stromeinprägung betrieben (Spannungsquelle Q mit hohem Innenwiderstand  $R_{\rm i}$ ), z.B durch eine Spannungsquelle mit Diode D, die den Sättigungsstom  $I_{\rm S}(U)$  hat (Abb. 2.7.9a, b). Für die Spannungsquelle ist er das (nichtlineare) Lastelement mit Kennlinie vom Sättigungstyp (Wert durch die Steuerspannung  $U_{\rm BE}$  bestimmt). Im Zusammenspiel mit dem aktiven Zweipol stellt sich der Arbeitspunkt A ein (Abb. 2.7.9a, b). Vom Transistor (als Verstärkerelement) her gesehen sollte hochohmige Last vorliegen: hoher Innenwiderstand der Konstantstromquelle.

Die Lösung ist ein nichtlinearer aktiver Zweipol vom Konstantstromtyp nach Abb. 2.5.2b und Abb. 2.7.9b. Aus Sicht der Quelle wirkt der Verstärkertransistor T1 als nichtlineare Last und der "Quellenstrom"  $I_q = I_S$  liegt durch den Diodensättigungsstrom  $I_S$  fest (auch der Arbeitspunkt A). Dort ist der Kleinsignallastwiderstand (= Kleinsignalinnenwiderstand 1/g der Stromquelle) groß. So sind

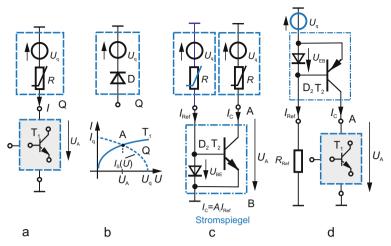


Abb. 2.7.9. Bipolartransistor mit nichtlinearer Versorgungsquelle. (a) Grundschaltung mit nichtlinearer Versorgungsquelle. (b) Kennlinie für nichtlineare Quelle (aktiver Zweipol) und Bipolartransistor (als Last), es stellt sich der Arbeitspunkt A ein. (c) Grundschaltung eines Stromspiegels mit npn-Bipolartransistor. (d) npn- Transistor belastet mit einem Stromspiegel als Last (ausgeführt mit pnp-Transistor)

die Forderungen des großen Kleinsignallastwiderstandes und kleiner Versorgungsspannung  $U_{\rm q}$  erfüllt, weil die Kennlinie in Nähe von  $U_{\rm q}$  steil abknickt (Kennlinienübergangsbereich  $U_{\rm q}-U\approx 1\,{\rm V}$ ).

Problem bleibt der Quellenstrom  $I_{\rm q}=I_{\rm S}$ , der einstellbar sein soll. Zwei Lösungen bieten sich an: Ersatz der Diode durch einen Transistor, dessen Quellenstrom  $I_{\rm q}$  über die Steuerspannung eingestellt wird (vielfältig genutzt) oder der Stromspiegel. Abb. 2.7.9c zeigt das Prinzip: Eine Diode D2 und die Basis-Emitterstrecke eines Bipolartransistors T2 sind parallel geschaltet mit gleicher Spannung  $U_{\rm BE}$ . Der Transistorausgangsstrom  $I_{\rm C}$  (Kollektorstrom von T2) hängt exponentiell von  $U_{\rm BE}$  ab (als Diodenkennlinie mit dem Sättigungsstrom  $I_{\rm ST}$ ). Dann gilt für die Spannungen der Diode und Basis-Emitterstrecke ausgedrückt durch die jeweiligen Ströme

$$I_{\rm D} = I_{\rm Ref} = I_{\rm S} \exp \frac{U_{\rm D}}{U_{\rm T}} \quad {\rm Diode}, \quad I_{\rm C} = I_{\rm ST} \exp \frac{U_{\rm BE}}{U_{\rm T}} \ {\rm Transistor}.$$

Mit  $U_D = U_{BE}$  wird die Spannung eliminiert und es verbleibt

$$I_{\rm C} = I_{\rm q} = \frac{I_{\rm ST}}{I_{\rm S}} \cdot I_{\rm Ref} = A_{\rm i} I_{\rm Ref}. \tag{2.7.20}$$

Ein Stromspiegel spiegelt den eingangsseitigen Referenzstrom  $I_{\rm Ref}$  an den Ausgang nach Maßgabe des sog. Spiegelverhältnisses  $A_{\rm I}=I_{\rm ST}/I_{\rm S}$ .

Er wirkt als Stromquelle, deren Quellenstrom  $I_{\rm C}$  durch einen Referenzstrom  $I_{\rm Ref}$  einstellbar ist. Letzterer wird über einen Vorwiderstand R ( $I_{\rm Ref} = (U_{\rm q} - U_{\rm D})/R$ ) eingeprägt. Dann reicht wegen der geringen Flussspannung (etwa 0,7 V) schon eine geringe Spannung  $U_{\rm q}$ . So wirkt der Stromspiegel D2/T2 in Abb. 2.7.9c als nichtlinearer Zweipol mit den Klemmen AB, denn die Ausgangskennlinie eines Transis-

tors T2 hat in großem Bereich Sättigungscharakter. Er ist die einstellbare Last der Spannungsquelle Q (Nachteil: Spiegel einseitig an Masse). Um ihn als einstellbaren Innenwiderstand einer Quelle und damit als Belastungselement des Transistors T1 nach Abb. 2.7.9a einsetzen zu können, wird er mit einem pnp-Transistor ausgeführt (Abb. 2.7.9d). Dadurch kehren sich seine Stromrichtungen um und er kann die Diode D in Abb. 2.7.9b direkt ersetzen. Jetzt bilden Stromspiegel und Spannung  $U_q$  eine (über den Referenzstrom  $I_{\rm Ref}$ ) einstellbare Konstantstromquelle (mit der Begrenzungsspannung  $U_q$ ) als Last des Transistors T1, die obige Forderungen erfüllt.

Der Stromspiegel realisiert einen aktiven nichtlinearen Zweipol vom Konstantstromtyp und ist eine wichtige Grundstruktur der Transistorschaltungstechnik.

Es gibt dieses Prinzip in vielen Varianten, auch mit Feldeffekttransistoren. Der Spiegelfaktor  $A_{\rm i}$  in Gl. (2.7.20) hängt von den Sättigungsströmen von Diode bzw. Transistor ab, meist wird  $A_{\rm i}\approx 1\dots 5$  gewählt.

Die Emitterschaltung mit Transistorlast lässt sich zusammengefasst durch eine spannungs- (oder auch stromgesteuerte) hochohmige Stromquelle mit hoher Spannungsverstärkung modellieren.

*Niederohmig* wird diese Spannungsquelle erst durch einen nachgeschalteten Spannungs- oder Emitterfolger. Auf diesem Konzept beruht der Operationsverstärker (s. Kap. 2.7.7).

## **②** 2.7.6 Allgemeines lineares Verstärkermodell

Die in Kap. 2.6.4 eingeführten gesteuerten Quellen sind auf unterschiedlichste Weise im elektronischen Bereich realisierbar durch

- Verstärkerbauelemente: Bipolar- und Feldeffekttransistoren;
- Verstärker: Zusammenschaltungen von wenigstens einem Verstärkerbauelement mit diskreten oder integrierten Bauelementen, heute durchweg
  als integrierte Verstärker. Ihre wichtigsten Formen sind der OperationsTranskonduktanz- und der Operationsverstärker.

Als Netzwerkelement umfasst ein *Verstärker* (Tab. 2.13)

- wenigstens eine gesteuerte Quelle,
- im Realfall endliche Ein- und Ausgangsleitwerte  $g_{1k}$ ,  $g_{2k}$ ,
- mitunter noch *Rückwirkung*. Sie wird vernachlässigt (d. h.  $g_{12} = 0$ ).

Das rückwirkungsfreie Verstärkerzweitor  $(g_{12}=0)$  hat drei Kennwerte: die Eingangs- und Ausgangs-(kurzschluss-)leitwerte  $g_{1k}$ ,  $g_{2k}$  und eine gesteuerte Größe. Für die Leitwertmatrix ist dies die (negative) Steilheit  $-g_{\rm m}=-S=g_{21}$ :

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{1k} & 0 \\ -S & g_{2k} \end{pmatrix}. \tag{2.7.21}$$

Tabelle 2.13. Verstärker

Verstärkertyp	Ersatzschaltung	Typ. Verstärkergröße
Spannung $C = \begin{pmatrix} g_{1k} & 0 \\ C_{21} & 1/g_{2k} \end{pmatrix}$	$U_1$ $G_{1k}$ $U_2$ $U_2$	Spannungsverst. $\frac{U_2}{U_1}\Big _{I_2=0} = \frac{1}{A_{11}}\Big  = C_{21}$ $= A_{\rm u} = \frac{-Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{S}{g_{2\rm k}}$
Transimpedanz $ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1/g_{1k} & 0 \\ Z_{21} & 1/g_{2k} \end{pmatrix} $	$U_1$ $g_{1k}$ $I_2$ $I_2$ $I_2$ $I_2$ $I_2$ $I_2$ $I_3$ $I_4$ $I_2$ $I_3$ $I_4$ $I_5$ $I$	Transimpedanz $ \frac{U_2}{I_1}\Big _{I_2=0} = \frac{1}{A_{21}} = Z_{21} $ $ = R_{\text{m}} = \frac{-Y_{21}}{Y_{11}Y_{22}} = \frac{S}{g_{1k}g_{2k}} $
Transkonduktanz $Y = \begin{pmatrix} g_{1\mathrm{k}} & 0 \\ Y_{21} & g_{2\mathrm{k}} \end{pmatrix}$	$U_1 g_{1k}$ $Y_{21}U_1 g_{2k}$ $U_2$	Steilheit $\frac{I_2}{U_1}\Big _{U_2=0} = \frac{-1}{A_{12}} = Y_{21}$ $= -G_{\rm m} = -S$
Strom $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 1/g_{1k} & 0 \\ H_{21} & g_{2k} \end{pmatrix}$	$U_1$ $G_{1k}$ $G_{2k}$ $G_{2$	Stromverstärkung $ \frac{I_2}{I_1}\Big _{U_2=0} = \frac{-1}{A_{22}} = H_{21} $ $= -A_{\rm i} = \frac{Y_{21}}{Y_{22}} = \frac{-S}{g_{1\rm k}} $

In anderen Matrixformen treten als Steuergrößen auf (s. Gl. (2.6.15))<sup>47</sup> <sup>48</sup>:

- die Leerlaufspannungsverstärkung  $A_{\rm u}$  (Parallel-Reihenmatrix);
- die Kurzschlussstromverstärkung  $A_{\rm i}$  (Reihen-Parallelmatrix);
- die  $Transimpedanz R_{\rm m}$  (Widerstandsmatrix).

Damit sind die vier Verstärkergrundtypen definiert. Zugehörige Ersatzschaltungen und Matrixdarstellungen enthält Tabelle 2.13.

Der Steuerzweig bleibt "schwebend", dadurch kann das Verstärkermodell auf den Differenzverstärker (Kap. 2.7.7) übertragen werden. Der Steuerwiderstand  $R_{\rm st}$  bestimmt Strom- oder Spannungssteuerung.

<sup>&</sup>lt;sup>47</sup>Wir bleiben bei der Bezeichnung Kurzschlussleitwerte, um die Innenleitwerte von anderen Leitwerten zu unterscheiden.

 $<sup>^{48} \</sup>mathrm{Die}$  Parameter des Verstärkermodells werden generell als Kleinsignalgrößen verstanden.

Kettenmatrixdarstellung Die Parameter der vier gesteuerten Quellen sind durch die Kettenmatrix des Verstärkervierpols darstellbar (s. Gl. (2.6.15)):

$$\left. \begin{array}{c}
 U_1 = \frac{U_2}{A_{\rm u}} + \frac{(-I_2)}{G_{\rm m}} \\
 I_1 = \frac{U_2}{R_{\rm m}} + \frac{(-I_2)}{A_{\rm i}}
 \end{array} \right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_{\rm u}} & \frac{1}{G_{\rm m}} \\
 \frac{1}{R_{\rm m}} & \frac{1}{A_{\rm i}}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_{21}} & -\frac{1}{Y_{21}} \\
 \frac{1}{Z_{21}} & -\frac{1}{H_{21}}
 \end{pmatrix}. (2.7.22a)$$

Die Rückwirkungsfreiheit  $Y_{12} = 0$  erfordert det A = 0. Daraus resultieren ein ausgangsseitiger Widerstand  $Z_{22} = 1/Y_{22} = R_i$  (unabhängig von der Eingangsbelastung) und eine Beziehung zwischen den Steuerparametern aus der Gleichwertigkeit der Spannungs- und Stromquellendarstellung

$$Y_{21}Z_{21} = C_{21}H_{21} \rightarrow A_{\rm u}A_{\rm i} = G_{\rm m}R_{\rm m} = \frac{G_{\rm m}R_{\rm m}}{1} = \frac{G_{\rm m}R_{\rm m}}{R_{\rm i}G_{\rm i}}.$$
 (2.7.22b)

Die Steuergrößen des idealen Verstärkers hängen zusammen.

Bei unendlich hohem Verstärkungsparameter einer Quelle (gilt zwangsläufig für alle vier Formen) verschwinden sämtliche Kettenparameter: *idealer Verstärker mit unendlicher Verstärkung*:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ (-I_2) \end{pmatrix}. \qquad \text{idealer Verstärker,}$$
 unendliche Verstärkung (2.7.23)

Dann verschwindet die Eingangsspannung  $U_1$  für endliche Ausgangsspannung (und ebenso der Eingangsstrom  $I_1$ ). Durch diese Eigenschaft der Kettenmatrix werden alle Eingangsgrößen unabhängig von den Ausgangsgrößen. Dafür wurden für die Ein- und Ausgangstore (physikalisch nicht realisierbare!) Netzwerkelemente definiert:

- der *Nullator* (mit  $U_1$ ,  $I_1$  stets null, Ursprung der U, I-Darstellung). Ein Nullator ist gleichzeitig ein leerlaufender (I = 0) und kurzgeschlossener Zweig (U = 0);
- den *Norator* (mit beliebigen Werten für  $U_2$ ,  $I_2$ ).

Der ideale Verstärker mit unendlich hoher Verstärkung verlässt das Modell des Verstärkers mit gesteuerter Quelle: Ströme und Spannungen am Ein-/Ausgang werden dann nur noch durch das umgebende Netzwerk bestimmt.

Dieses Konzept hat Vorteile bei der Netzwerkanalyse mit idealen Verstärkern. Wir verwenden es zugunsten der Anschaulichkeit nicht, sondern modellieren den idealen Verstärker durch Grenzübergang: es wird das Netzwerk mit realem Verstärker analysiert und im Ergebnis der Quellenparameter über alle Grenzen wachsen lassen (z. B.  $S \to \infty$  resp.  $A_u \to \infty$ ).

Tabelle 2.13 enthält gleichwertige Verstärkermodelle. Obwohl sie ineinander überführbar sind, werden aus praktischer Sicht unterschieden

- strom- oder spannungsgesteuerte Verstärker mit niederohmigem Spannungsquellenausgang, die Spannungs- und Transimpedanzverstärker,
- strom- oder spannungsgesteuerte Verstärker mit hochohmigem Stromquellenausgang, das sind die Steilheits- (Transkonduktanz-) und Stromverstärker.

Wir beschränken uns auf den Steilheitsverstärker als Operations-Transkonduktanz-Verstärker und den Spannungsverstärker in Form des Operationsverstärkers als einheitliche Grundlage für den Einbezug von Verstärkern in die Netzwerkanalyse unabhängig von ihrer Realisierung.

## 2.7.7 Operational-Transkonduktanz-Verstärker, Operationsverstärker

Oft soll ein *Differenzsignal* zwischen zwei Knoten verarbeitet werden, die selbst auf hoher Spannung gegenüber einem Bezugspunkt liegen.

Das gilt beispielsweise für die Wheatsone-Brücke (Abb. 2.4.7): Liegt ihre Spannungsversorgung einseitig "an Masse", so ist bei Quasiabgleich nur ein geringes Diagonal-, also *Differenzsignal* verfügbar, während die Knotenspannungen nach Masse, die diese Diagonalspannung bilden, relativ groß sind.

Die Verstärkung eines Differenzsignals unter diesen Bedingungen besorgt der Differenzverstärker. Er wird im Idealfall modelliert durch eine gesteuerte Quelle, die von der Differenz der beiden Eingangsspannungen (bezüglich Masse) abhängt: spannungsgesteuerte Quellen nach Tabelle 2.8 mit masseungebundenem Steuerzweig. Die Standardausführung ist der Steilheits- oder Transkonduktanz-Verstärker (auch als Operational Transconductance Amplifier, OTA oder Spannungs-Strom-Wandler bezeichnet) mit (hochohmigem) Stromquellenausgang. Vom Quellentyp her liegt eine differenzspannungsgesteuerte Stromquelle vor. Durch Schaltungsmodifikation kann dieser Verstärkertyp in eine differenzspannungsgesteuerte (niederohmige) Spannungsquelle überführt werden, besser bekannt als idealisiertes Modell eines Operationsverstärkers (operational amplifier). Beide Verstärkertypen beherrschen als (integrierte) Universalverstärker den Markt.

Für die Netzwerkanalyse werden beide Verstärker durch gesteuerte Quellen modelliert.

**Differenzverstärker** Zwei gleiche Spannungsverstärker (Verstärkung A) verstärken nicht nur die Eingangsspannungen ( $U_{\rm A} = AU_{\rm E}, U_{\rm A}' = AU_{\rm E}'$ ), sondern auch ihre *Differenz*:  $U_{\rm AD} = U_{\rm A} - U_{\rm A}' = A(U_{\rm E} - U_{\rm E}') = AU_{\rm ED}$  (Abb. 2.7.10a).

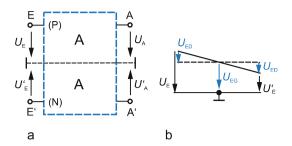


Abb. 2.7.10. Prinzip des Differenzverstärkers. (a) Aufbau aus zwei gleichen Einzelverstärkern. (b) Zerlegung einer unsymmetrischen Steuerspannung in eine Differenz- und Gleichtaktspannung

Dazu zerlegt man die Eingangsspannungen  $U_{\rm E}$ ,  $U_{\rm E}'$  in ein *Differenzsignal*  $U_{\rm ED}$  und ein *Gleichtaktsignal*  $U_{\rm EG}$  (analog das Ausgangssignal)

$$U_{\rm ED} = \underbrace{\frac{U_{\rm E} - U_{\rm E}'}{2}}_{\rm Differenz signal}, \quad U_{\rm EG} = \underbrace{\frac{U_{\rm E} + U_{\rm E}'}{2}}_{\rm Gleichtakt signal}.$$
 (2.7.24)

Während das (doppelte) Differenzsignal  $2U_{\rm ED}$  die tatsächliche Differenz  $U_{\rm D}$  der beiden Eingangsspannungen  $U_{\rm E}$ ,  $U_{\rm E}'$  ausdrückt, kennzeichnet das Gleichtaktsignal als Mittelwert beider Eingangsspannungen die "Höhe", um die das Differenzsignal aussteuert (bei einer Brückenschaltung wäre das etwa die halbe Versorgungsspannung). Abb. 2.7.10b zeigt die Zerlegung der Eingangsspannung.

Als typisches Merkmal hat ein Differenzverstärker unterschiedliche Verstärkungen  $A_{\rm DD}$  bzw.  $A_{\rm GG}$  für Differenz- und Gleichtaktsignale.

Am Verstärkerausgang treten Differenz- und Gleichtaktspannung  $U_{\rm AD},\,U_{\rm AG}$  auf. Angestrebt wird ein symmetrisch aufgebauter Verstärker:

Differenzsignal: 
$$U_{AD} = \underbrace{A_{DD}U_{ED}}_{erw \ddot{u}nscht} + A_{DG}U_{EG},$$
Gleichtaktsignal:  $U_{AG} = A_{GD}U_{ED} + \underbrace{A_{GG}U_{EG}}_{unerw \ddot{u}nscht}$  (2.7.25)

Beim symmetrisch aufgebautem Verstärker erzeugt ein Differenzeingangssignal kein Gleichtaktausgangssignal ( $A_{\rm DG}=0$ ) und ebenso ein Gleichtakteingangssignal kein Differenzausgangssignal ( $A_{\rm GD}=0$ ). Dann treten nur das verstärkte Differenzsignal  $U_{\rm AD}=A_{\rm DD}U_{\rm ED}$  und das Gleichtaktsignal  $U_{\rm AG}=A_{\rm GG}U_{\rm EG}$  auf bzw. die unsymmetrischen Ausgangsspannungen  $U_{\rm A}$  bzw.  $U_{\rm A}'$  (am invertierenden Ausgang)

$$U_{\rm A} = \frac{A_{\rm DD}U_{\rm ED}}{-A_{\rm DD}U_{\rm ED}} + A_{\rm GG}U_{\rm EG}$$

$$U_{\rm A}' = \frac{-A_{\rm DD}U_{\rm ED}}{-A_{\rm DD}U_{\rm ED}} + A_{\rm GG}U_{\rm EG}.$$
(2.7.26)

Der Differenzverstärker ist ein symmetrisch aufgebauter Verstärker, der Differenzsignale mit großer Differenzverstärkung  $A_{\rm DD}$  verstärkt, aber Gleichtaktsignale wegen der geringen Gleichtaktverstärkung  $A_{\rm GG}$  unterdrückt.

Üblicherweise bezeichnet man die beiden Eingänge E, E' (Abb. 2.7.10a) als

- Nichtinvertierender, P- oder (+)-Eingang. Eine angelegte Spannung  $U_{\rm P}$  erscheint am Ausgang ( $U_{\rm A}$ ) mit gleicher Polung bzw. Phasenlage.
- *Invertierender*, N- oder (-)-Eingang. Eine angelegte Spannung  $U_{\rm N}$  erscheint am gleichen Ausgang ( $U_{\rm A}$ ) umgekehrt bzw. um 180° phasenverschoben.

Zwischen den Eingangsklemmen liegt die *Differenzspannung*  $U_{\rm D} = U_{\rm P} - U_{\rm N}^{49}$ .

**Grundschaltung** Das Schaltungsmodul "Differenzverstärker" dient als Eingangsstufe eines jeden Operations- und Transkonduktanz-Verstärkers. Ein *Differenzverstärker* besteht aus zwei identischen Verstärkerstufen, im Beispiel mit dem Bipolartransistor in Emitterschaltung in den Längszweigen einer symmetrisch aufgebauten Brückenschaltung (Abb. 2.7.11a). Beide Brücken-

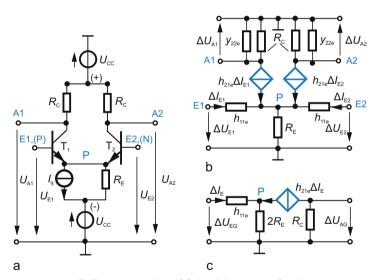


Abb. 2.7.11. Differenzverstärker. (a) Ausführung mit Bipolartransistoren. (b) Kleinsignalersatzschaltung, für das Differenzsignal kann der Widerstand  $R_{\rm E}$  kurzgeschlossen werden. (c) Kleinsignalersatzschaltung für das Gleichtaktsignal

<sup>&</sup>lt;sup>49</sup>Die Festlegung der Eingangsdifferenzspannung erfolgt nicht einheitlich, wir verwenden (aus Symmetriegründen)  $U_{\rm ED}$ , in der praktischen Schaltungstechnik ist dagegen  $U_{\rm D}=U_{\rm P}-U_{\rm N}=2U_{\rm ED}$  verbreitet.

zweige liegen parallel und werden aus einer gemeinsamen (Emitter-) Stromquelle  $I_{\rm q}$  gespeist. Wegen der Symmetrie führen gleiche Eingangsspannungen  $U_{\rm E1},\,U_{\rm E2}$  zu proportionalen Ausgangsspannungen  $U_{\rm A1},\,U_{\rm A2}$ .

- Bei Gleichtaktaussteuerung (common mode) verursachen die Eingangsspannungen  $\Delta U_{\rm E1} = \Delta U_{\rm E2}$  entsprechende Ausgangsspannungen  $\Delta U_{\rm A1} = \Delta U_{\rm A2}$  und ihre Differenz verschwindet ( $U_{\rm AD} = 0$ ). Ursache ist die Teilung des Quellenstromes  $I_{\rm q}$  auf beide Zweige. Soll jeder verstärken, so müsste jeder Teilstrom anwachsen, was nicht geht. Somit unterbleibt die Gleichtaktverstärkung.
- Bei Differenzaussteuerung, also  $\Delta U_{\rm E1} = -\Delta U_{\rm E2}$ , tritt nur ein Differenzsignal am symmetrischen Ausgang auf. Ursache ist die Verteilung des Stroms im Wechseltakt ( $\rightarrow$  Stromverteilungssteuerung) auf beide Transistorzweige. Steigt ein Teilstrom, so sinkt der andere. Der Gesamtstrom bleibt immer konstant (bei idealer Stromquelle, ein ev. parallel liegender Widerstand  $R_{\rm E}$  lässt ein ausgangsseitiges Gleichtaktsignal zu).
- an den unsymmetrischen Ausgängen A1, A2 treten hingegen nach Gl. (2.7.26) gemischte Signale nach Masse auf.

Die symmetrische Differenzverstärkung  $A_{\rm DD}$  (Differenzeingang, Differenzausgang) beträgt (Abb. 2.7.11)

$$A_{\rm DD} \ = \ \frac{\Delta U_{\rm AD}}{\Delta U_{\rm ED}} = -\frac{y_{\rm 21e}}{y_{\rm 22e} + G_{\rm C}} \approx -\frac{y_{\rm 21e}}{G_{\rm C}} = -g_{\rm m}R_{\rm C}. \eqno(2.7.27)$$
 Symmetrische Differenzverstärkung

Das ist die Spannungsverstärkung der Emitterschaltung mit dem Lastwiderstand  $R_{\rm C}$ , dem Zweitorkoeffizienten  $y_{21{\rm e}} \approx g_{\rm m}$  und vernachlässigtem Transistorausgangsleitwert  $y_{22{\rm e}}$ . Diese Lösung gilt, weil sich das Potenzial des Fußpunktes P nicht ändert, "er gewissermaßen auf Masse liegt". Deshalb arbeitet jeder Transistor in (gewöhnlicher) Emitterschaltung.

Die Gleichtaktverstärkung  $A_{\rm GG}$  ist nach Gl. (2.7.25) das Verhältnis der Ausgangsspannung  $\Delta U_{\rm AG}$  (nach Masse) bezogen auf die Eingangsgleichtaktspannung  $\Delta U_{\rm EG}$ 

$$A_{\rm GG} = \frac{\Delta U_{\rm AG}}{\Delta U_{\rm EG}} = -\frac{R_{\rm C} h_{\rm 21e}}{h_{\rm 11e} + (1 + h_{\rm 21e}) 2R_{\rm E}} \approx -\frac{R_{\rm C}}{2R_{\rm E}} \bigg|_{2R_{\rm E} h_{\rm 21e} \gg h_{\rm 11e}} (2.7.28)$$

dabei wurde der Innenwiderstand  $R_{\rm E}$  der Stromquelle berücksichtigt. Er bestimmt die Gleichtaktverstärkung maßgebend.

Das Kleinsignalergebnis kommt zustande, wenn man die Schaltung wegen der Symmetrie zunächst teilt (dabei ist der Widerstand  $R_{\rm E}$  zu verdoppeln). So entsteht die Kleinsignalersatzschaltung Abb. 2.7.11c. Dafür kann das Spannungsverhältnis

 $\Delta U_{\rm AG}/\Delta U_{\rm EG}$  berechnet werden. Für große Stromverstärkung  $h_{21e}$  ist es nur durch Last- und Quellenwiderstand  $R_{\rm E}$  bestimmt. (Genauer wirkt dieser Widerstand als Gegenkopplung).

Oft gibt man statt der Gleichtaktverstärkung die Gleichtaktunterdrückung G (oder CMRR common mode rejection ratio) an und notiert den Wert in Dezibel:

$$G = \frac{A_{\rm DD}}{A_{\rm GG}} = \frac{-g_{\rm m}R_{\rm C}}{\frac{-R_{\rm C}}{2R_{\rm E}}} = 2g_{\rm m}R_{\rm E}, \quad \text{CMRR} = 20 \text{ lg } G.$$
 (2.7.29)

Werte von G in der Größenordnung von  $40 \dots 100 \,\mathrm{dB}$  sind üblich.

Häufig wird das verstärkte Eingangsdifferenzsignal am Ausgang unsymmetrisch entnommen. Dabei verliert die Standardschaltung die halbe Verstärkung. Abhilfe schafft eine Stromspiegellast (Abb. 2.7.12a). Wird beispielsweise die Eingangsspannung an T1 erhöht, so steigt der Kollektorstrom um  $\Delta I_{\rm C1}$ , während er durch T2 im gleichen Maße sinkt. Der Stromspiegel prägt die Stromänderung durch T1 in den Knoten A ein, während der Strom durch T2 ebenfalls zum Knoten hinfließt. Deshalb beträgt der Ausgangsstrom  $\Delta I_{\rm A} = \Delta I_{\rm C1} + \Delta I_{\rm C2} = 2\Delta I_{\rm C1}$ . Damit bleibt die volle Verstärkung erhalten. Der Knoten A ist hochohmig, weil beide Transistoren mit ihren Kollektoren angeschlossen sind.

Ein Differenzverstärker mit Stromspiegellast (und unsymmetrischem Ausgang) verhält sich wie eine differenzspannungsgesteuerte Stromquelle mit großem Innenwiderstand ( $R_{\rm i}=r_{\rm o1}\parallel r_{\rm o2}=1/(g_{\rm o1}+g_{\rm o2})$ ), er stellt den Grundtyp des *Steilheitsverstärkers* dar.

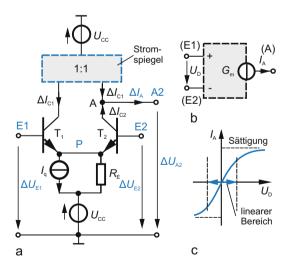


Abb. 2.7.12. Transkonduktanzverstärker (a) als Differenzverstärker mit Stromspiegellast, dadurch verdoppelt sich die Ausgangsstromänderung. (b) Schaltsymbol eines Steilheitsverstärkers (OTA). (c) Zugehörige Übertragskennlinie

#### Steilheitsverstärker (Operational transconductance amplifier, OTA)

Der Steilheitsverstärker (OTA) ist ein differenzspannungsgesteuerter Verstärker mit ausgangsseitiger Stromquelle  $\Delta I_{\rm A} = S\Delta U_{\rm D} = G_{\rm m}\Delta U_{\rm D}$ .

Die Steilheit oder Transkonduktanz S kann Werte im Bereich bis zu einigen A/V erreichen. Abb. 2.7.12b, c zeigt die Übertragungskennlinie und das Schaltbild mit einem Stromquellensymbol am Ausgang. Der (hochohmige) Ausgang kann symmetrisch (seltener) oder unsymmetrisch (meist) ausgelegt sein. Die Steilheit S lässt sich bei einigen Typen durch den Betriebsstrom einstellen.

Vom Operationsverstärker unterscheidet sich der OTA durch einen hochohmigen Ausgang und geringere Verstärkung, so dass er auch ohne Rückkopplung arbeiten kann.

Der Betrieb als Spannungsverstärker erfordert einen großen Lastwiderstand. Das grenzt den Anwendungsbereich ein. Ein nachgeschalteter Spannungsfolger (Spannungsverstärker mit der Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}\approx 1$  und kleinem Innenwiderstand) schafft Abhilfe. Einsatzgebiete sind Filterschaltungen, die Signalverarbeitung und Messtechnik sowie allgemeine Verstärkeraufgaben.

Operationsverstärker Der Operationsverstärker ist ein Gleichspannungsdifferenzverstärker mit sehr hoher Verstärkung (bis  $10^6$ ). Er dominierr heute die Schaltungstechnik.

Historisch geht dieser Verstärker auf Schaltungen für Röhrenvoltmeter Ende der 30er/Anfang der 40er Jahre zurück (allerdings nicht unter diesem Namen, der Begriff Operationsverstärker taucht (noch in Röhrenausführung!) zu Ende der 40er Jahre im Zusammenhang mit der Analogrechentechnik auf. Diskret mit Transistoren aufgebaute Schaltungen finden sich in den 50er Jahren, der erste integrierte Operationsverstärker ( $\mu$ A741) stammt aus dem Jahre 1966.

Operationsverstärker sind mehrstufige Gleichspannungsverstärker so hoher Differenzverstärkung  $A_{\rm uD}$ , dass sie etwa als ideale gesteuerte Quelle mit unendlich hoher Verstärkung wirken. Dann bestimmt nur die äußere Beschaltung die Übertragungseigenschaften.

Abb. 2.7.13a zeigt Schaltsymbole: neben dem heute üblichen auch noch andere. Der Verstärker hat meist einen unsymmetrischen Signalausgang ( $U_{\rm A}$ ) (auch symmetrische Ausgänge sind üblich), ferner Klemmen für die beiden Versorgungsspannungen  $+U_{\rm B}$  und  $-U_{\rm B}$ . Die doppelte Versorgungsspannung erlaubt die Aussteuerung zu positiven und negativen Spannungen und einen Eingang auf der Spannung null.

In Schaltplänen werden die Versorgungsanschlüsse meist nicht gezeichnet. Dadurch entsteht der Eindruck, dass die Knotengleichung des Verstärkers bei  $I_{\rm N}=I_{\rm P}=0$  verletzt ist. Richtig ist vielmehr  $I_{\rm B+}+I_{\rm B-}+I_{\rm A}=0$  (Abb. 2.7.13a), denn der

Ausgangsstrom findet sein Abbild in den Versorgungsströmen. Folglich muss ein ausgangsseitiger Wechselstrom  $i_A$  durch den Wandel Wechsel  $\rightarrow$  Gleichstrom über die Versorgungsquellen aufgebracht werden. Die Knotengleichung lässt sich in Verbindung mit Stromspiegelschaltungen in den Zuleitungen auch dazu verwenden, den Ausgang nicht unsymmetrisch, sondern symmetrisch ("schwebend!") zu gestalten.

Die Funktionsbeziehung des unsymmetrischen Operationsverstärkers lautet

$$U_{\rm A} = A_{\rm uD}(U_{\rm P} - U_{\rm N}) = A_{\rm uD}U_{\rm D} \quad \left\{ = A_{\rm DD}U_{\rm ED} = \frac{A_{\rm DD}}{2}U_{\rm D} \right\}.$$
 (2.7.30)

Dabei mag offen bleiben, ob die Spannungsverstärkung  $A_{\rm uD}$  bei unsymmetrischem Ausgang den vollen Wert  $A_{\rm DD}$  oder nur den halben umfasst, der Wert hängt vom Schaltungskonzept ab. Abb. 2.7.13b zeigt die Übertragungs- oder Verstärkerkennlinie  $U_{\rm A}(U_{\rm D})$  mit zwei Merkmalen:

— dem linearen  $U_A, U_D$ -Zusammenhang im Verstärkungsbereich. Die maximale Ausgangsspannung  $U_A$  liegt knapp  $(0,5 \dots 1 \text{ V})$  unter der Versor-

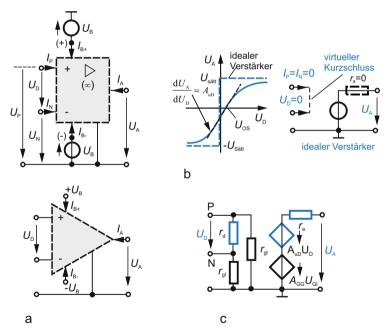


Abb. 2.7.13. Operationsverstärker. (a) Schaltbild, Anschlüsse und Bezugspunkt. Es gilt  $I_{\rm N}+I_{\rm P}+I_{\rm B+}+I_{\rm B-}+I_{\rm A}=0\approx I_{\rm B+}+I_{\rm B-}+I_{\rm A}=0$ . Gleichfalls verbreitetes Schaltzeichen. (b) Übertragungskennlinie des idealen und realen Operationsverstärkers, zugehörige Ersatzschaltung des idealen Verstärkers (unendlich hohe Spannungsverstärkung und virtueller Kurzschluss am Eingang). (c) Kleinsignalersatzschaltung für Differenz- und Gleichtaktverstärkung

gungsspannung  $U_{\rm B}$ . Die zugehörige Differenzspannung  $U_{\rm D}$  ist wegen der extrem hohen Differenzspannungsverstärkung  $A_{\rm uD}\approx 10^4\ldots 10^6$  sehr klein ( $\mu \rm V$ -Bereich).

- zwei Sättigungsbereiche für  $|U_{\rm D}| > |U_{\rm B}/A_{\rm uD}|$ .

Die Eingangsspannung ist im Linearbereich so klein, dass die Eingangsklemmen als praktisch kurzgeschlossen betrachtet werden können (sog. *virtueller Kurzschluss*). Das erleichtert die Schaltungsanalyse erheblich (s. u.).

Im Idealfall sollte die Übertragungskennlinie durch den Koordinatenursprung verlaufen, also ohne Eingangsspannung keine Ausgangsspannung auftreten. Durch innere Unsymmetrie (und Temperatureinfluss) entsteht oft eine Kennlinienverschiebung, die durch eine Offsetspannung  $U_{\rm OS}$  (Größenordnung unter 1 mV) modelliert wird. Damit umgekehrt die Ausgangsspannung  $U_{\rm A}$  auf null geht, muss die Offsetspannung  $U = U_{\rm OS}$  angelegt werden. Eventuelle Eingangsströme  $I_{\rm N}$ ,  $I_{\rm P}$  (Größenordnung  $10^{-12}$  A) werden meist vernachlässigt. Reale Operationsverstärker haben eine endliche Gleichtaktverstärkung  $A_{\rm GG}$ . Dann wird die Ausgangsspannung nach Gl. (2.7.26) ermittelt.

Der Operationsverstärker verstärkt eine Differenzspannung mit sehr hoher Differenzverstärkung  $A_{\rm uD}$  ( $\gg$  1), eine Gleichtaktspannung ( $U_{\rm P}=U_{\rm N}=U_{\rm Gl}$ ) praktisch nicht ( $A_{\rm GG}\ll 1$ ). Er verhält sich für Differenzspannungen wie eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle (mit niedrigem Innenwiderstand  $r_{\rm a}$ ). Sein Gesamtverhalten wird wegen der extrem hohen Verstärkung hauptsächlich durch die umgebende Schaltung bestimmt.

Bei Bedarf können auf der Eingangsseite noch Eingangswiderstände  $r_{\rm d}$ ,  $r_{\rm gl}$  für die Differenz- und Gleichtaktsignale modelliert werden. Sie sind sehr groß und treten selten in Erscheinung (Abb. 2.7.13c).

Tabelle 2.14 enthält einige Merkmale realer Operationsverstärker, sie kommen den Idealforderungen recht nahe. Die obere Grenzfrequenz der Verstärkung  $A_{\rm uD}$  spielt erst in Wechselstromnetzwerken eine Rolle.

		•
	Ideal	Real
Differenzverstärkung $A_{\rm uD}$	$\infty$	$10^3 \dots 10^6$
Gleichtaktunterdrückung $G$	$\infty$	$40 \dots 100  \mathrm{dB}$
Differenzeingangswiderstand	$\infty$	$10^4 \dots 10^6 \Omega$
Gleichtakteingangswiderstand	$\infty$	$10^4 \dots 10^6 \Omega$
Ausgangswiderstand	0	$10 \dots 100 \Omega$
obere Grenzfrequenz	$\infty$	kHz-Bereich

Tabelle 2.14. Parameter des idealen und realen Operationsverstärkers

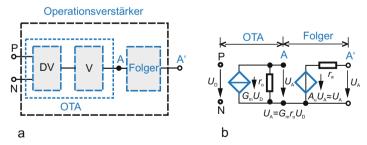
Aufbau Der Operationsverstärker besteht meist aus drei funktionellen Einheiten (Abb. 2.7.14a): dem Differenzverstärker am Eingang (maßgebend für die Unterdrückung des Gleichtaktsignals bei gleichzeitig hoher Differenzverstärkung). Die nachgeschaltete Stufe verstärkt hauptsächlich das Differenzsignal. Bis zu ihrem Ausgang A wirkt die Gesamtanordnung als differenzspannungsgesteuerte Stromquelle, ist also vom Typ des OTA und damit hochohmig. Die nachgeschaltete dritte Stufe mit Spannungsfolgerfunktion sorgt für den kleinen Innenwiderstand, den der Verstärker als spannungsgesteuerte Spannungsquelle haben soll. Praktisch wird sie als Gegentaktkollektorschaltung ausgeführt mit dem Ergebnis einer spiegelsymmetrischen Übertragungskennlinie. Dazu muss die Vorstufe das Gegentaktsteuersignal bereitstellen.

Abb. 2.7.14a zeigt ein einfaches Modell. Am Ausgang der zweiten Stufe steht die Spannung  $U_2 = G_{\rm m} r_0 U_{\rm D}$ , wenn die Steilheit  $G_{\rm m}$  alle Verstärkung bis zu diesem Knoten erfasst. Die Wandlung in die Spannung  $U_2$  erfolgt am Innenwiderstand  $r_{\rm o}$  von Stufe 2, also aus Gründen hoher Verstärkung an einem "hochohmigen Knoten". Der anschließende Spannungsfolger behält diese Spannung etwa bei, er reduziert aber den Innenwiderstand (Werte einige  $10~\Omega$ ).

**Idealer Verstärker** Für das Verständnis von Operationsverstärkerschaltungen ist ein *"idealer Operationsverstärker"* mit folgenden Eigenschaften hilfreich:

$$I_{\rm P}=0, \quad I_{\rm N}=0, \quad U_{\rm P}-U_{\rm N}=U_{\rm D}=0 \quad {\rm virtueller~Kurzschluss}$$
 
$$U_{\rm A}=U_{\rm S\"{a}tt}\frac{|U_{\rm D}|}{|U_{\rm D}|} \quad (U_{\rm D}\neq 0) \qquad \qquad {\rm S\"{a}ttigungs\"{a}ste} \qquad (2.7.31)$$
 
$$U_{\rm D}=0, \quad -U_{\rm S\"{a}tt} < U_{\rm A} < U_{\rm S\"{a}tt} \qquad {\rm Sprung\"{u}bergang}.$$

Er hat eine *sprungförmige Übertragungskennlinie* (Abb. 2.7.13b), wie sie zu Schalteranwendungen dient. Für Verstärkeranwendungen gehört dazu die Ersatzschaltung mit virtuellem Kurzschluss am Eingang (gestrichelte Verbindung) und einer Ausgangsspannung, die durch das umgebende Netzwerk festliegt. Je nach Vorzeichen der Eingangsspannung springt der Ausgang entweder auf die positive oder negative Versorgungsspannung. Im Grenzfall des



**Abb. 2.7.14.** Struktureller Aufbau des Operationsverstärkers. (a) Grundstruktur aus Operationstranskonduktanzverstärker (OTA) und nachgeschaltetem Spannungsfolger. (b) Zugehörige idealisierte Kleinsignalersatzschaltung

virtuellen Kurzschlusses mit  $A_{\rm uD} \to \infty$  und  $U_{\rm D} \to 0$  nimmt die Ausgangsspannung einen Wert unabhängig vom Eingang an, den nur das äußere Netzwerk bestimmt!

Der ideale Operationsverstärker hat ferner unendlich hohen Eingangswiderstand und sein Ausgangswiderstand verschwindet, wie aus Abb. 2.7.13b ersichtlich.

Zur schaltungstechnischen Einbindung des idealen Operationsverstärkers stellt man zunächst die Netzwerkgleichungen mit dem Modell der spannungsgesteuerten Spannungsquelle (endliche Spannungsverstärkung  $A_{\rm uD}$ ) auf und führt anschließend den Grenzübergang  $A_{\rm uD} \to \infty$  ( $U_{\rm N} \to U_{\rm P}$ ) durch (entweder nach Aufstellung der Gleichungen oder in der Lösung).

### 2.7.8 Grundschaltungen mit Operationsverstärkern

Der Operationsverstärker arbeitet wegen seiner hohen Verstärkung durchweg mit *Rückkopplung* durch Verbindung des Ausganges A direkt (oder über ein Netzwerk) mit den Eingängen

- P als *Mitkopplung* (positive Rückkopplung, verstärkungserhöhend);
- N als *Gegenkopplung* (negative Rückkopplung, verstärkungssenkend).

Abb. 2.7.15 zeigt die beiden typischen Grundschaltungen mit Gegenkopplung:

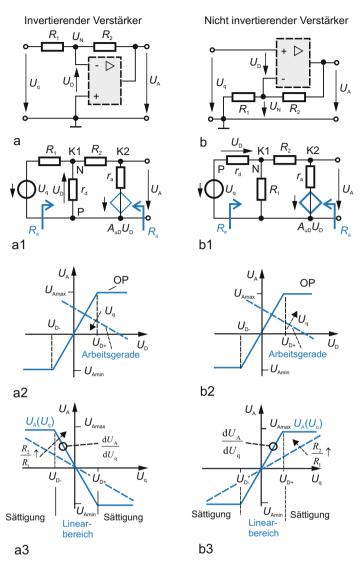
- den *Umkehr* oder *invertierenden* Verstärker (Steuergröße am N-Eingang);
- den Elektrometer- oder nichtinvertierenden Verstärker (Steuergröße am P-Eingang, Gegenkopplungsnetzwerk am N-Eingang) mit dem Sonderfall Spannungsfolger.

Weitere Grundschaltungen sind beispielsweise Differenzverstärker, Schmitt-Trigger und Zeitglieder.

Wir analysieren zunächst den Einfluss des idealen Verstärkers, das Kennlinienverhalten und schließlich die Wirkung des realen Operationsverstärkers.

1. Umkehrverstärker (Gegenkopplung, Abb. 2.7.15a). Bei *idealem Operationsverstärker* gilt (wegen der unendlich hohen Verstärkung) eingangsseitig *virtueller Kurzschluss*  $U_{\rm N} \to 0$ . Deshalb fließt der von der Eingangsspannung  $U_{\rm q}$  verursachte Strom  $I_1$  durch  $R_1$  und anschließend durch  $R_2$  (und nicht zum Massepunkt ab trotz  $U_{\rm N} \to 0$ !). Dann muss gelten (Abb. 2.7.15a1)

$$I_1 = \frac{U_{\rm q} - U_{\rm N}}{R_1} = I_2 = \frac{U_{\rm N} - U_{\rm A}}{R_2}.$$
 (2.7.32)



**Abb. 2.7.15.** Gegengekoppelte Operationsverstärker. (a) Invertierender oder Umkehrverstärker. (a1) Kleinsignalersatzschaltung. (a2) Verstärkerkennlinie und Arbeitsgerade. (a3) Übertragungskennlinie, Gesamtverstärkung  $U_{\rm A}=f(U_{\rm q})$ . (b) Nichtinvertierender oder Elektrometerverstärker. (b1) Kleinsignalersatzschaltung. (b2) Verstärkerkennlinie und Arbeitsgerade. (b3) Übertragungskennlinie, Gesamtverstärkung  $U_{\rm A}=f(U_{\rm q})$ 

# Bei virtuellem Kurzschluss $U_{\rm N} \to 0$ wird daraus

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = -\frac{R_2}{R_1}.$$
 Umkehrverstärker (2.7.33) (idealer Op)

Mit  $U_N \to 0$  geht der Knoten N auf Potenzial null, ohne dass ein Strom von N nach Masse fließt  $(I_N = 0)$ . Deshalb stellt sich die Ausgangsspannung  $U_A$  stets so ein, dass der Eingang  $U_N$  die virtuelle Kurzschlussbedingung erfüllt, also "auf Masse" liegt.

Die Spannungsverstärkung des Umkehrverstärkers (Name aus Vorzeichenumkehr) hängt nur vom Widerstandsverhältnis ab. Für  $R_1 = R_2$  erscheint die Eingangsspannung invertiert am Ausgang.

Gleichwertige Bezeichnungen sind invertierender Verstärker oder Inverter. Im Prinzip arbeitet die Schaltung als  $I \to U$  Wandler: die Eingangsspannung  $U_{\rm q}$  wird durch  $R_1$  in den Eingangsstrom  $I_1 = U_{\rm q}/R_1$  umgesetzt und die anschließende  $I \to U$  Wandlerschaltung verstärkt ihn auf  $U_{\rm A} = -I_1 R_2$ .

Zwei Eigenschaften sind bemerkenswert:

- ausgangsseitig wirkt die Anordnung als ideale (gesteuerte) Spannungsquelle, deshalb verschwindet der Ausgangswiderstand  $(R_a \to 0)$ ,
- der virtuelle Kurzschluss erzwingt den Eingangswiderstand  $R_{\rm e} = R_1$ .

Kennlinieninterpretation Die Funktion des Umkehrverstärkers mit endlicher Verstärkung des OPs wird durch zwei Kennlinien bestimmt:

- die Verstärkerkennlinie  $U_A = A_{uD}U_D$  mit  $U_D = U_P U_N$ ;
- die  $R\ddot{u}ckf\ddot{u}hrungskennlinie$   $U_{\rm A}=-(R_1+R_2)/R_1\cdot U_{\rm D}-(R_2/R_{\rm i})U_{\rm q}$ , auch als Arbeitsgerade bezeichnet. Sie folgt aus der Knotenbilanz Gl. (2.7.32) am Knoten N mit  $U_{\rm N}=-U_{\rm D}$ . Der Arbeitspunkt ist der Schnittpunkt beider Kennlinien (Abb. 2.7.15a2). Damit liegt auch die Übertragungskennlinie  $U_{\rm A}=f(U_{\rm g})$  fest (Abb. 2.7.15a3):

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = \frac{-(R_2/R_1)}{1 + (1 + R_2/R_1)/A_{\rm uD}} \approx -\frac{R_2}{R_1} \bigg|_{A_{\rm uD} \to \infty}.$$
 (2.7.34)

Gegenüber dem idealen Operationsverstärker mit unendlich hoher Verstärkung ist endliche Verstärkung  $A_{\rm uD}$  durch die Verstärkerkennlinie angesetzt, deshalb gibt es keinen virtuellen Kurzschluss mehr (die Eingangsspannung  $U_{\rm N}$  ist zwar klein [angenähert  $U_{\rm N} \approx -U_{\rm A}/A_{\rm uD}$ ], aber nicht null wie oben). Für sehr große Verstärkung  $A_{\rm uD}$  ( $\rightarrow \infty$ ) folgt Gl. (2.7.33).

Die Übertragungskennlinie  $U_{\rm A}=f(U_{\rm q})$  fällt wegen des Vorzeichens ab. Die Proportionalität  $U_{\rm A}\sim -U_{\rm q}$  gilt im linearen Bereich  $U_{\rm q-}\approx -U_{\rm Amax}/x$  und  $U_{\rm q+}\approx -U_{\rm Amin}/x$  (mit  $x=R_2/R_1$ ); außerhalb davon liegt der Verstärker in der Übersteuerung (Sättigung).

*Kleinsignalmodell* Im Kleinsignalmodell (Abb. 2.7.15a1) wird der Ausgangswiderstand  $r_{\rm a}=1/g_{\rm a}$  des Verstärkers berücksichtigt. Dann gilt für die Knoten K1, K2:

K1: 
$$G_1(U_N - U_q) + G_2(U_N - U_A) = 0$$
  
K2:  $G_2(U_A - U_N) + g_a(U_A - A_{uD}U_D) = 0$  (2.7.35)

mit  $U_{\rm D}=U_{\rm P}-U_{\rm N}\equiv -U_{\rm N}$ . Durch Eliminieren der Eingangsspannung  $U_{\rm N}$  und Zusammenfassen folgt schließlich

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{(1 - r_{\rm a} G_2 / A_{\rm uD})}{1 + \frac{1 + (1 + r_{\rm a} G_2) R_2 / R_1}{A_{\rm uD}}}.$$
 Umkehrverstärker, (2.7.36)

Zwei Schlussfolgerungen sind interessant:

- beim Übergang zum idealen Verstärker  $A_{\rm uD} \to \infty$  erhält man Gl. (2.7.33) unabhängig vom Ausgangswiderstand  $r_{\rm a}$ ,
- für  $r_a \to 0$  folgt Gl. (2.7.34) bei endlicher Verstärkung  $A_{\rm uD}$ .

Im letzten Schritt berechnen wir noch die *Ein*- und *Ausgangswiderstände*. Der Eingangswiderstand  $R_{\rm e}$  beträgt (von der Spannungsquelle her gesehen) mit  $I_1 = (U_{\rm q} - U_{\rm N})/R_1$ :

$$R_{\rm e} = \frac{U_{\rm q}}{I_1} = \frac{R_1}{1 - U_{\rm N}/U_{\rm q}} ,$$
 (2.7.37)

mit  $\frac{U_{\rm N}}{U_{\rm q}} = \frac{G_1(1+G_2r_{\rm a})}{(G_1+G_2)(1+G_2r_{\rm a})+G_2(A_{\rm uD}-r_{\rm a}G_2)}$  dabei wurde  $U_{\rm N}/U_{\rm q}$  aus Gl. (2.7.35) berechnet. Für  $A_{\rm uD}\gg 1$  gilt

$$R_{\rm e} \approx R_1 + \frac{r_{\rm a} + R_1 + R_2}{A_{\rm uD}}.$$
 (2.7.38)

Die Korrektur gegenüber dem Wert  $R_1$  des idealen Verstärkers ist gering.

Den Ausgangswiderstand  $R_a = U_{2l}/I_{2k}$  ermitteln wir mit der Zweipoltheorie: die Leerlaufspannung ist durch Gl. (2.7.36) bekannt. Der Kurzschlussstrom ( $U_A = 0$ ) folgt direkt aus der Schaltung zu

$$I_{2k} = \frac{(1 - R_2 g_a A_{uD}) U_q}{R_1 + R_2}$$

und damit der Ausgangswiderstand

$$R_{\rm a} = \frac{U_{\rm 2l}}{I_{\rm 2k}} = \frac{U_{\rm A}}{I_{\rm 2k}} = \frac{(R_1 + R_2)r_{\rm a}}{R_2(1 + r_{\rm a}G_2) + R_1(1 + A_{\rm uD})}$$

$$\approx \frac{r_{\rm a}}{A_{\rm uD}} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$
(2.7.39)

oder als Leitwert

$$G_{\rm a} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{r_{\rm a}} \left( 1 + \frac{A_{\rm uD}}{1 + R_2/R_1} \right).$$

Das ist die Parallelschaltung des Gegenkopplungszweiges  $1/(R_1 + R_2)$  mit einem transformierten Leitwert des Verstärkers. Für  $A_{\rm uD} \to \infty$  verschwindet der Ausgangswiderstand  $R_{\rm a}$ , wie erwähnt.

# 2. Elektrometerverstärker, nichtinvertierender Verstärker <sup>50</sup>

(Abb. 2.7.15b, b1) Die Eingangsspannung  $U_{\rm q}$  (liegt jetzt am Eingang  $U_{\rm P}$  und dem  $U_{\rm N}$ -Eingang) wird über das Netzwerk  $R_1$ ,  $R_2$  ein Teil der Ausgangsspannung  $U_{\rm A}$  zugeführt. So herrscht Gegenkopplung.

Bei idealem Operationsverstärker führt der Abgriffspunkt am Spannungsteiler  $R_1$ ,  $R_2$  wegen des virtuellen Kurzschlusses  $U_P = U_N$  die Spannung  $U_q$  (so folgt der invertierende Eingang praktisch der Eingangsspannung  $U_q$ ). Deshalb beträgt die Spannungsverstärkung

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$
 Elektrometerverstärker (2.7.40)

Die Spannungsverstärkung des nichtinvertierenden Verstärkers hängt (bei idealem Operationsverstärker) nur vom Widerstandsverhältnis des Gegenkopplungszweiges ab. Stets hat die Ausgangsspannung das Vorzeichen der Eingangsspannung.

Bemerkenswert sind die nichtinvertierende Verstärkung, ferner:

- ausgangsseitig ihre Wirkung als ideale (gesteuerte) Spannungsquelle. Deshalb verschwindet ihr Widerstand  $(R_a \to 0)$ ,
- durch den virtuellen Kurzschluss ist Eingangswiderstand  $R_{\rm e}=R_{\rm st}$  gleich dem Widerstand der Steuerstrecke, hier also unendlich groß (leistungslose Steuerung).

Kennlinieninterpretation Ausgangspunkte sind die Verstärkerkennlinie  $U_{\rm A}=A_{\rm uD}~U_{\rm D}$  und Rückführungskennlinie  $U_{\rm A}=-(1+R_2/R_1)U_{\rm D}+(1+R_2/R_1)U_{\rm q}$ . Sie folgt aus  $U_{\rm N}=-U_{\rm D}+U_{\rm q}$  und  $U_{\rm N}=U_{\rm A}R_1/(R_1+R_2)$  (Abb. 2.7.15b2). Der Schnittpunkt beider Kennlinien ist der Arbeitspunkt. Wird  $U_{\rm D}$  eliminiert, so verbleibt (Abb. 2.7.15b3)

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + (1 + R_2/R_1)/A_{\rm uD}} \quad \text{mit} \quad \frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} \Big|_{A_{\rm uD} \to \infty} = 1 + \frac{R_2}{R_1}. \tag{2.7.41}$$

Die Übertragungskennlinie  $U_A = f(U_q)$  des Elektrometerverstärkers unterscheidet sich vom Umkehrverstärker u. a. durch das Vorzeichen der Steigung

 $<sup>^{50}\</sup>mathrm{Der}$  Begriff Elektrometerverstärker stammt vom hochohmigen Eingang.

 $\mathrm{d}U_\mathrm{A}/\mathrm{d}U_\mathrm{q}$  (*differenzielle Spannungsverstärkung*). Beim idealen Operationsverstärker  $(A_\mathrm{uD} \to \infty)$  hängt sie nur vom Gegenkopplungsnetzwerk ab!

Der Sonderfall  $R_1 \to \infty$  (oder besser  $R_2 \to 0$ , Direktverbindung) heißt *Spannungsfolger* mit  $U_A \le U_q$  (Spannungsverstärkung  $\le 1$ )

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = \frac{1}{1+1/A_{\rm uD}} \le 1 \text{ mit } \frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}}\bigg|_{A_{\rm uD}\to\infty} = 1. \quad \begin{array}{c} {\rm Spannungsfolger} \\ {\rm (idealer~OP)} \end{array} (2.7.42)$$

*Kleinsignalmodell* Auch hier wird im Kleinsignalmodell Abb. 2.7.15b1 der Ausgangswiderstand  $r_{\rm a}=1/g_{\rm a}$  des Verstärkers berücksichtigt ebenso wie ein Eingangsleitwert  $g_{\rm d}$  (zwischen  $U_{\rm P}$  und  $U_{\rm N}$ ) zum einfacheren Aufstellen der Knotengleichungen K1 und K2:

K1: 
$$(G_1 + G_2 + g_d) U_1 - G_2 U_2 = g_d U_q$$
  
K2:  $(-G_2 + A_{uD} g_a) U_1 + (g_a + G_2) U_2 = g_a A_{uD} U_q$ .

Dabei gilt  $U_D = U_q - U_1$ . Mit  $U_2 = U_A$  folgt durch Eliminierung von  $U_1$  als Spannungsverstärkung (für  $g_d = 0$ )

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm g}} = \frac{1 + R_2/R_1}{1 + (1 + (R_2 + r_{\rm a})/R_1)/A_{\rm uD}}.$$
(2.7.43)

Das Ergebnis unterscheidet sich von Gl. (2.7.41) nur durch den veränderten Widerstand im Nenner  $(R_2 \to R_2 + r_a)$ .

Der Eingangswiderstand bleibt unendlich hoch. Der Ausgangswiderstand wird wieder mit der Zweipoltheorie bestimmt aus der eben berechneten Ausgangsleerlaufspannung und dem Kurzschlussstrom  $I_{2\mathbf{k}} = A_{\mathrm{uD}}U_1/r_{\mathrm{a}}$ . Die Rechnung führt auf das Ergebnis Gl. (2.7.39) wie beim invertierenden Verstärker. Besonders stark sinkt der Ausgangswiderstand beim Spannungsfolger: dann geht Gl. (2.7.39) für  $R_1 \to \infty$  über in

$$R_{\rm a} = \frac{U_{\rm 2l}}{I_{\rm 2k}} = \frac{U_{\rm A}}{I_{\rm 2k}} = \frac{r_{\rm a}}{(1 + A_{\rm uD})} \approx \frac{r_{\rm a}}{A_{\rm uD}}.$$
 (2.7.44)

Der geringe Innenwiderstand begründet, zusammen mit dem extrem hohen Eingangswiderstand (ideal  $\rightarrow \infty$ ), die Anwendung als *Trennverstärker* zur Entkopplung von Schaltungsteilen. Im Idealfall geht der Ausgangswiderstand gegen null, weil ausgangsseitig eine ideale gesteuerte Spannungsquelle liegt.

**3. Schmitt-Trigger, nichtinvertierend** OP-Schaltungen mit (starker) Mitkopplung werden oft als *Schmitt-Trigger* bezeichnet (Abb. 2.7.16). Im Unterschied zum gegengekoppelten Verstärker ist das Rückkopplungsnetzwerk jetzt zwischen Ausgang und dem P-Eingang geschaltet.

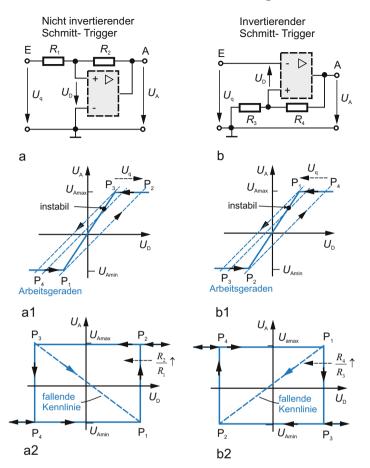


Abb. 2.7.16. Mitgekoppelte Operationsverstärker (Schmitt-Trigger). (a) Nichtinvertierender Schmitt-Trigger durch Mitkopplung. (a1) OP-Kennlinie und Arbeitsgerade, stabile und instabile Arbeitspunkte. (a2) Gesamtverstärkung, Entstehung der Schalthysterese. (b) Invertierender Schmitt-Trigger durch Mitkopplung eines nicht invertierenden OP's. (b1) OP-Kennlinie und Arbeitsgerade, stabile und instabile Arbeitspunkte. (b2) Gesamtverstärkung, Schalthysterese. In Abb. (a2), (b2) wurde der auftretende fallende Kennlinienbereich angedeutet

Der Arbeitspunkt liegt durch die Verstärkerkennlinie  $U_A = f(U_q)$  und die Arbeitsgerade des Netzwerkes fest. Sie folgt aus der Knotenbilanz in P:  $-G_1U_q + (G_1 + G_2)U_P - U_AG_2 = 0$ . Mit  $U_D = U_P$  wird daraus

$$U_{\rm A} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{\rm D} - \frac{R_2}{R_1} U_{\rm q} \tag{2.7.45}$$

als Gleichung der Arbeitsgeraden  $U_{\rm A}=f(U_{\rm q},\,U_{\rm D})$  (Abb. 2.7.16a1).

Jetzt gibt es u. U. Arbeitsbereiche mit drei Schnittpunkten, von denen der mittlere instabil ist. Wächst  $U_{\rm q}$  von kleinen Spannungen ausgehend, so stellt sich zunächst

ein Schnittpunkt im negativen Sättigungsbereich ein. Schließlich springt  $U_A$  von  $P_1$  nach  $P_2$ . Läuft dagegen  $U_q$  nach kleinen Werten, dann springt  $U_A$  letztlich von  $P_3$  nach  $P_4$ . Deshalb hat der Zusammenhang  $U_A = f(U_q)$  Hystereseverhalten (wobei die Kennlinie von  $P_1$  nach  $P_3$  als fallender Bereich durchgezeichnet werden kann, Abb. 2.7.16a2).

Durch Mitkopplung entsteht ein fallender Kennlinienbereich als Ursache der Kennlinienhysterese.

4. Schmitt-Trigger, invertierend In diesem Fall liegt die Eingangsspannung  $U_{\rm q}$  am N-Eingang, das mitkoppelnde Netzwerk aber am P-Eingang (Abb. 2.7.16b1). Die Kennlinie des Mitkopplungsnetzwerkes lautet

$$U_{\rm A} = (1 + R_4/R_3)U_{\rm D} + (1 + R_4/R_3)U_{\rm q}. \tag{2.7.46}$$

Zusammen mit der Verstärkungskennlinie  $U_{\rm A}=f(U_{\rm D})$  gibt es dann für bestimmte Parameterwerte  $U_{\rm q}$  wieder Bereiche mit drei Schnittpunkten, von denen der innere instabil ist. Steigt  $U_{\rm q}$ , so springt die Spannung  $U_{\rm A}$  bei  $P_{\rm 1}$  auf  $-U_{\rm A}$ , umgekehrt erfolgt bei abnehmender Spannung  $U_{\rm q}$  ein Sprung bei  $P_{\rm 2}$  um  $+U_{\rm A}$ . Auch hier stellt sich Hysterese mit eingeschlossener fallender Kennlinie ein (Abb. 2.7.16b2).

Wir erkennen zusammenfassend:

- bei Gegenkopplung ist die Steigung der Arbeitskennlinie  $U_{\rm A}=f(U_{\rm D})$  immer negativ, bei Mitkopplung immer positiv;
- bei sehr hoher Verstärkung (virtueller Kurzschluss) bestimmt nur das Netzwerk das Übertragungsverhalten,
- durch Mitkopplung lassen sich fallende Kennlinienbereiche erzeugen, die allerdings in einer Hysterese verborgen sein können.

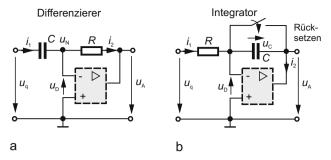
Die folgenden Anwendungsfälle nutzen die Zusammenschaltung eines Operationsverstärkers mit einem Energiespeicherelement, dem Kondensator. Jetzt treten zeitveränderliche Spannungen auf. Wir behandeln sie hier vorbereitend zur Unterstreichung des Netzwerkeinflusses, im Bd. 3 folgt die ausführlichere Diskussion aus der Sicht dynamischer Netzwerke.

5. Differenzierschaltung Wird im Gegenkopplungsnetzwerk einer der beiden Widerstände durch ein Energiespeicherelement ersetzt, so arbeitet die Verstärkerschaltung als sog. Zeitglied und kann zum Differenzieren oder Integrieren einer Spannung dienen.

Beim Differenzierglied (Abb. 2.7.17a) wird der Widerstand  $R_1$  (Abb. 2.7.15a) durch einen Kondensator mit der Strom-Spannungs-Relation  $i_{\rm C}=C({\rm d}u_{\rm C}/{\rm d}t)$  ersetzt. Dann folgt statt Gl. (2.7.33) für den idealen Operationsverstärker (mit  $R_2=R$ ) und virtuellem Kurzschluss am N-Eingang  $i_{\rm C}=i_{\rm R}\to C\frac{{\rm d}u_{\rm C}}{{\rm d}t}=-\frac{u_{\rm A}}{R}$  oder

$$u_{\rm A}(t) = -RC \frac{{\rm d}u_{\rm q}}{{\rm d}t}$$
. Differenziererschaltung (2.7.47)

Beim Differenzierglied ist die Ausgangsspannung das (negative) Differenzial der Eingangsspannung.



**Abb. 2.7.17.** Analoge Differenziation und Integration mit Operationsverstärker. (a) Differenzierschaltung. (b) Integratorschaltung

6. Integrierschaltung, Integrator Bei Ersatz des Widerstandes  $R_2$  in Abb. 2.7.15a durch einen Kondensator lädt der Eingangsstrom  $i_1 = u_{\rm q}/R$  den Kondensator um. Da die Ausgangsspannung wegen des virtuellen Kurzschlusses der Kondensatorspannung entspricht, wird sie zum Integral über die Eingangsspannung (Abb. 2.7.17b)

$$u_{\rm A} = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t u_{\rm q}(t') \mathrm{d}t' + U_{\rm A}(t_0).$$
 Integratorschaltung (2.7.48)

Der letzte Term ist der sog. Anfangszustand: nämlich die Spannung, auf die der Kondensator beim Beginn des Anlegens der Spannung aufgeladen war. Damit ein definierter Anfangszustand entsteht (z. B.  $U_{\rm A}(t_0)=0$ ), wird er durch Entladen "rückgesetzt": man schließt ihn einfach kurz.

Beim Integrator ist die Ausgangsspannung das (negative) Integral der Eingangsspannung.

Integratoren sind sehr verbreitet (z. B. Gewinnung einer Dreieckspannung aus einer Rechteckspannung, Aufbau von Filterschaltungen, Realisierung von elektronischen Induktivitäten u. a.).

#### Selbstkontrolle Kapitel 2.1 ... 2.4

- 1. Was bedeutet der Begriff Grundstromkreis, welche Elemente enthält er?
- 2. Erläutern Sie die Begriffe Strom-Spannungs-Beziehung und Kennlinie.
- 3. Erläutern Sie die Begriffe: ideale bzw. reale Strom- und Spannungsquelle (Kennlinie, Ersatzschaltungen).
- 4. Erläutern Sie den Grundstromkreis (Strom-Spannungs-Beziehung, Kennlinie, Einfluß eines veränderbaren Außenwiderstandes, Anpassung).
- 5. Erläutern Sie folgende Begriffe Strom-Spannungs-Beziehung und Kennlinie des aktiven/passiven Zweipols.
- 6. Was versteht man unter dem Begriff Arbeitspunkt?
- 7. Welche Kenngrößen hat ein aktiver Zweipol und wie können sie ermittelt werden?
- 8. Welche Ersatzschaltung des aktiven/passiven Zweipols gibt es (Skizze, Gleichungen), was bedeutet Erzeuger- und Verbraucherpfeilsystem.
- 9. Wie lassen sich resistive Zweipole nach dem Strom-Spannungs-Verhalten unterteilen?
- 10. Nennen Sie Beispiele für nichtlineare Widerstände.
- 11. Was versteht man unter einem negativen Widerstand?
- 12. Wie ist der Temperaturkoeffizient des Widerstandes definiert?
- 13. Wie ändert sich der Widerstand von Heiß- und Kaltleitern mit steigender Temperatur?
- 14. Was versteht man unter Supraleitung?
- 15. Wie lauten die Ersatzwiderstände (Leitwerte) für die Reihen- bzw. Parallelschaltung von n Widerständen?
- 16. Richtiges ankreuzen: Bei der Parallelschaltung von Widerständen ist der Gesamtwiderstand kleiner als der kleinste, größer als der größte Widerstand?
- 17. Ist der Gesamtleitwert der Reihenschaltung kleiner als der kleinste bzw. größer als der größte Leitwert?
- 18. Wie lauten die Spannungs- und Stromteilerregeln? (Beispiel angeben) Unter welchen Voraussetzungen gelten sie?
- 19. Ein Strom-(Spannungs-)-messer (Widerstand  $R_{\rm m}$ ) soll im Messbereich um einen Faktor 10 erweitert werden. Was ist jeweils zu tun (Erläuterung) ?
- 20. Im Grundstromkreis soll der Strom bzw. die Spannung am Außenwiderstand mit einem Instrument (Widerstand  $R_{\rm m}$ ) gemessen werden. Wie muss der Instrumentenwiderstand jeweils gewählt werden, welcher Fehler entsteht? Was muss gelten, wenn der Messfehler kleiner als 1% sein soll?
- 21. Was versteht man unter der Zweipoltheorie, wie kann sie angewendet werden. Gilt sie auch bei nichtlinearen Netzwerkelementen?

- 22. Erläutern Sie das Prinzip einer Brückenschaltung.
- 23. Erläutern Sie den Leistungsumsatz im linearen Grundstromkreis, was bedeutet Anpassung?
- 24. Was versteht man unter einer Kompensationsschaltung? (Beispiel angeben)

#### Kapitel 2.5

- 1. Nennen Sie nichtlineare aktive Zweipole, wie gehen sie aus linearen aktiven Zweipolen hervor?
- 2. Welche Elemente kann ein nichtlinearer Grundstromkreis enthalten, gilt die Anpassbedingung  $R_i = R_a$ ?
- 3. Wie wird der Arbeitspunkt eines nichtlinearen Grundstromkreises bestimmt?
- 4. Wie verhält sich der Kreis bei Kleinsignalbetrieb (was besagt Kleinsignalsteuerung, wo tritt sie auf)?
- 5. Man veranschauliche an einer Diodenkennlinie den Begriff "differenzieller Widerstand"! Wie groß ist er im Nullpunkt?

#### Kapitel 2.6

- 1. Welche Gleichungssysteme beschreiben ein lineares Zweitor (Beispiele)?
- 2. Wie lauten die Zweitorgleichungen in Leitwert- und Widerstandsform? Welche Bedeutung haben die Parameter, wie können sie bestimmt werden? Welchen Einfluß hat die Richtung des Ausgangsstromes?
- 3. Nennen Sie drei Übertragungsgrößen von Zweitoren (Erläuterung).
- 4. Wie entstehen aus den Leitwertparametern die Widerstandsparameter?
- 5. Erläutern Sie die Begriffe "Kleinsignalparameter" und "Kleinsignalaussteuerung" eines Zweitores.
- 6. Was bedeutet der Begriff "gesteuerte Quelle", welche Formen (mit Ersatzschaltungen) gibt es?
- 7. Was ist bei der Zweipoltheorie bei gesteuerten Quellen im Grundstromkreis zu beachten?
- 8. Skizzieren Sie Ersatzschaltungen des allgemeinen Zweitors in Leitwertund Widerstandsdarstellung.
- 9. Welche Bedingungen erfüllt ein Zweitor bei Widerstandssymmetrie Umkehrbarkeit, und Rückwirkungsfreiheit?
- 10. Welche Arten der Zweitorzusammenschaltung gibt es, was ist zu beachten?
- 11. Was versteht man unter Eingangswiderstand, Übertragungs- und Strom- übertragungsfaktor eines Zweitors? Erläutern Sie die Begriffe mit den Widerstands- und Leitwertformen der Zweitorgleichungen.

12. Geben Sie typische Elementarzweitore mit zugehörigen Zweitorparametern an. Wählen Sie die T- oder  $\pi$ -Schaltung als Ausgang.

#### Kapitel 2.7

- 1. Erläutern Sie die Entstehung einer nichtlinearen Diodenkennlinie, warum ist sie richtungsabhängig?
- 2. Erläutern sie das Funktionsprinzip eines Bipolartransistors, welche Aufgabe hat der Basisraum?
- 3. Unter welcher Arbeitspunktbedingung verstärkt ein Bipolartransistor? Erläutern Sie das Verstärkungsprinzip.
- 4. Wie kann der Bipolartransistor auf einfache Weise modelliert werden?
- 5. Wie entsteht die Ausgangskennlinie, was drückt sie aus?
- 6. Welche Grundschaltungen hat ein Bipolartransistor, wie unterscheiden sie sich?
- 7. Erläutern Sie die Zweitordarstellung des Bipolartransistors (Emitterschaltung, Größenordnung der Elemente).
- 8. Welche Netzwerkelemente muss ein Verstärkermodell wenigstens haben, wie lautet die Zweitordarstellung?
- 9. Erläutern Sie das Prinzip des Differenzverstärkers.
- 10. Was ist ein OTA (Funktionsprinzip, Ersatzschaltung)?
- 11. Was ist ein Operationsverstärker, wie unterschiedet er sich vom OTA? (Ersatzschaltung, typische Parameter).
- 12. Welche Eigenschaften hat ein Operationsverstärker und in welchen typischen Schaltungen wird er verwendet?
- 13. Was versteht man unter virtuellem Kurzschluss, wie unterscheidet er sich vom gewöhnlichen Kurzschluss? Welche Folgen hat er für die Netzwerkanalyse?
- 14. Welche Ersatzschaltung hat ein realer Verstärker, wie kann daraus ein idealer Verstärker entwickelt werden?
- 15. Zeigen Sie den Unterschied zwischen einem Umkehr- und einem Elektrometerverstärker mit endlicher Differenzverstärkung.
- 16. Wie arbeitet eine Integratorschaltung?



3	Netzwerkanalyseverranren, resistive Schaltungen	231
3.1	Netzwerkbeschreibung	237
3.1.1	Netzwerkgleichungen	238
3.1.2	Zweigstromanalyse	247
3.2	Maschenstromanalyse	250
3.2.1	Maschenströme	251
3.2.2	Maschenwiderstandsmatrix	256
3.2.3	Erweitere Maschenstromanalyse*	263
3.2.4	Maschenstromanalyse in Matrixform	268
3.2.5	Maschenstromanalyse in nichtlinearen Netzwerken	269
3.3	Knotenspannungsanalyse	270
3.3.1	Knotenspannungen, Knotenleitwertmatrix	271
3.3.2	Erweiterte Knotenspannungsanalyse*	282
3.3.3	Modifizierte Knotenspannungsanalyse*	291
3.3.4	Knotenspannungsanalyse in Matrixform	292
3.3.5	Unbestimmte Knotenleitwertgleichungen	293
3.3.6	Knotenspannungsanalyse und Zweipolparameter*	296
3.3.7	Netzwerkanalyse mit Operationsverstärkern	298
3.3.8	Knotenspannungsanalyse von nichtlinearen Netzwerken*	303
3.4	Netzwerkanalyse in Matrixdarstellung*	304
3.4.1	Netzwerke, Graph und Inzidenzmatrizen	305
3.4.2	Schleifenanalyse	314
3.4.3	Schnittmengenanalyse	316
3.4.4	Zusammenhänge, Vergleiche	322
3.5	Computerunterstützte Netzwerkanalyse	326
3.5.1	Numerische Auswertung	327
3.5.2	Schaltungssimulation	332
3.6	Mehrpolige Netzwerke*	341
3.6.1	Ströme und Spannungen an Mehrpolen	341
3.6.2	Zusammenschaltung von Mehrpolen	345
3.6.3	Mehrtore	355
3.6.4	Torgruppierung	359
3.6.5	Klemmenmanipulationen	363

# 3 Netzwerkanalyseverfahren, resistive Schaltungen

Lernziel Nach Durcharbeit dieses Kapitels sollten beherrscht werden

- die Kirchhoffschen Gesetze und das Aufstellen der vollständigen Gleichungen eines resistiven Netzwerkes,
- die Maschenstromanalyse, Maschenwiderstandsmatrix, Erweiterungen,
- die Knotenspannungsanalyse, Knotenleitwertmatrix, Erweiterungen,
- topologische Grundlagen von Netzwerken, die Begriffe Graph, Baumkomplement, vollständiger Baum, Verständnis topologischer Matrizen,
- Grundlagen der rechnergestützten Analyse von Netzwerken,
- die Matrixdarstellungen der Netzwerkgrundgleichungen, Schleifen- und Schnittmengenanalyse,
- Einbezug von Operationsverstärkern in die Netzwerkanalyse,
- Mehrpolnetzwerke, Aufbau, Umgang, Einsatz zur Netzwerkanalyse. Umwandlungsmethoden von Mehrpolen, Polmanipulationen.

# 3.1 Netzwerkbeschreibung

Übersicht Die bisher betrachteten Netzwerke hatten nur wenige Knoten und Zweige. Moderne Schaltungen sind natürlich komplexer: sie umfassen viele Bauelemente (bis zu mehreren 100 Millionen) und diese überdecken das gesamte Spektrum, außer Widerständen und Quellen auch Kondensatoren, Spulen, Dioden u. a. m. Dabei ist eine Schaltung (circuit) die widerstandslose Verbindung von Bauelementen über (Anschluss-) Knoten (terminal nodes) so, dass Umläufe (loops) entstehen und Ströme fließen können.

Eine Schaltung wird zum Netzwerk beim Austausch ihrer Bauelemente durch zugehörige  $Modelle-die\ Netzwerkelemente\ (NWE).$ 

Ein elektrisches Netzwerk ist ein mathematisches Modell aus Netzwerkelementen (mit definiertem U, I-Verhalten), die in bestimmter Weise, der Topologie, über Knoten zu Maschen verbunden sind.

Ein Netzwerk enthält gewöhnlich Quellen- und Verbraucherelemente verbunden durch Verbindungsleitungen und Schalter zur zeitweiligen Unterbrechung des Stromflusses. Die reale Schaltung findet sich in dem Maße wieder, wie es gelingt, die Bauelemente durch Netzwerkelemente mehr oder weniger gut zu "modellieren".

Die Analyseaufgabe eines Netzwerkes besteht darin, einige oder alle Zweigströme und -spannungen numerisch oder symbolisch auf Grundlage der Kirchhoffschen Gleichungen, der U, I-Beziehungen der Netzwerkelemente und ggf. von Anfangswerten zu finden.

Dabei soll sich

- die symbolische Handanalyse auf nur wenige Gleichungen beschränken und
- für die rechnergestützte Analyse (numerisch, z.T. symbolisch) ein formalisierter Ablauf erkennbar sein. Zahlreiche Computerprogramme (MATLAB, MATHCAD, SPICE etc.) übernehmen solche Abläufe.

Eine Analyse umfasst grundsätzlich folgende Schritte (Tabelle 3.1):

- 1. Gewinnung des Netzwerkes: Ersatz der Bauelemente durch Netzwerkelemente, Analysevorbereitungen: Benennung und Bemessung der Elemente, Ersatz von Schaltungsteilen, Knoten-/Maschenbezeichnung, Zählpfeile. Hilfreich kann eine Normierung der Netzwerkgrößen sein.
- 2. Wahl des Lösungsverfahrens abhängig von Problemstellung, Schaltungsumfang, Nichtlinearitäten und Hilfsmitteln (Hand-, Computerlösung).
- 3. Durchführung der Analyse durch Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze, Netzwerkelementbeziehungen und Lösung des Gleichungssystems, Nutzung vereinfachter Verfahren.
- Diskussion der Lösung durch zweckmäßige Vereinfachungen, ggf. Rückeinsetzen u. a. m.

## **②** 3.1.1 Netzwerkgleichungen

Grundlage der Analyse eines Netzwerkes mit z Zweigen, k Knoten und m unabhängigen Maschen, gegebenen Quellen und den U, I-Zweigbeziehungen der Netzwerkelemente (NWE) sind die Kirchhoffschen Gesetze für Momentanwerte der Ströme und Spannungen

Knotensatz 
$$\sum_{\substack{\text{Geschlossene Oberfläche}\\ \text{Maschensatz}}} i_{\nu}(t) = 0$$
 
$$\sum_{\substack{\text{Geschlossene Knotenfolge}\\ \text{Zweigbeziehungen}}} u_{\nu}(t) = 0$$
 (3.1.1)

Der Knotensatz wurde dabei gegenüber Gl. (1.4.5) auf ein geschlossenes Volumen erweitert: die algebraische Summe der Ströme durch die Hüllfläche muss zu jedem Zeitpunkt verschwinden. Der Maschensatz wurde gegenüber Gl. (1.5.9) auf die vorzeichenbehaftete Summe von Zweigspannungen längs eines Umlaufs (geschlossene Folge von Knoten) zu jedem Zeitpunkt erweitert.

Für die z unbekannten Zweigströme und Zweigspannungen, also 2z Größen, stehen als vollständiges Kirchhoffsches Gleichungssystem bereit

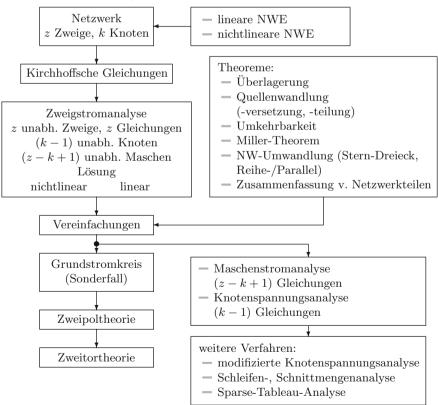
$$p=k-1$$
 unabhängige Knotengleichungen  $m=z-(k-1)$  unabhängige Maschengleichungen  $z$  unabhängige Maschengleichungen  $z$   $u,i$ -Beziehungen der Zweigelemente. (3.1.2)

Der Lösungsaufwand sinkt beim reduzierten Kirchhoffschen Gleichungssystem auf die halbe Zahl der zu lösenden Gleichungen (z), wenn entweder

- alle Ströme in den Knotengleichungen (Zweigspannungsanalyse) oder
- alle Spannungen in den Maschengleichungen (*Zweigstromanalyse*) durch die Zweigbeziehungen ersetzt werden.

Diese Verfahrensweise gilt unabhängig von der Netzwerkerregung für lineare und nichtlineare, zeitabhängige und zeitunabhängige Netzwerkelemente.

Tabelle 3.1. Netzwerkanalyseverfahren



Die z linear unabhängigen Gleichungen unterteilen sich in (k-1) linear unabhängige Knoten- und m linear unabhängige Maschengleichungen. Linear unabhängig heißt dabei, dass eine Gleichung nicht durch die Linearkombination aus anderen Gleichungen herleitbar ist.

Tabelle 3.1 stellt die typischen Netzwerkanalyseverfahren zusammen. Abhängig von der Erregung gelten grundsätzliche Aussagen über das zu erwartende Gleichungssystem:

- In Gleichstromnetzwerken spielen energiespeichernde Netzwerkelemente (Kondensator, Spule) keine Rolle und lineare NWE führen zu linearen Gleichungen.
- 2. Netzwerke mit zeitveränderlicher Erregung ( $d/dt \neq 0$ ) und Energiespeicherelementen ergeben immer sog. *Integro-Differenzialgleichungen*. Sie enthalten Integrale und Differenziale der Veränderlichen. Bei linearen (zeitunabhängigen) NWE sind das *gewöhnliche Differenzialgleichungen* mit konstanten Koeffizienten (s. Bd. 3).
- 3. Bei stationärer Sinuserregung und linearen NWE spricht man von Wechselstromschaltungen. Dann gibt es für Punkt 2. vereinfachte Lösungsverfahren, die sog. komplexe Rechnung und es müssen nur algebraische Gleichungen gelöst werden (s. Bd. 3).
- 4. Nichtlineare Netzwerkelemente (z. B. Dioden, Transistoren, Spule mit Eisenkern) führen auf nichtlineare Gleichungssysteme. Sie können nur im Zeitbereich gelöst werden, durchweg mit Computerhilfe.
- Impulsförmig erregte Netzwerke, besser bekannt als Schaltverhalten, sind ein besonderes Anwendungsfeld (Digitaltechnik, digitale Signalverarbeitung). Dort werden die Netzwerkgleichung entweder direkt oder mit Hilfe von Transformationen (Fourier-, Laplace-) gelöst (s. Bd. 3).

Entscheidend für die Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze ist die Gewinnung der notwendigen (und ausreichenden) Gleichungen für die gesuchten Größen. Oft besteht die Gefahr, Gleichungen für abhängige Größen mit aufzustellen. Sichere Kriterien für die erforderliche Gleichungszahl entnehmen wir der *Netzwerkstruktur* oder *Topologie*. Zur Senkung des Lösungsaufwandes dienen auch *Hilfsvariablen*, nämlich

- der Schleifen-, Maschen- oder Umlaufstrom, der (durch seine Definition) die Knotengleichung automatisch erfüllt. So entfällt ihre Lösung und es sind nur noch die m Umlaufströme ( $\rightarrow$  Maschengleichungen) zu berechnen. Das Verfahren heißt Maschenstromanalyse, ihre umfassendere Form Schleifenanalyse.
- das Knotenpotenzial oder die Knotenspannung. Seine Definition erfüllt jede Maschengleichung automatisch und so sind nur noch (k-1) Knotenspannungen zu ermitteln. Das ist die Knoten- oder Knotenspannungsanalyse bzw. Schnittmengenanalyse in verallgemeinerter Form.

Beide Verfahren erlauben die systematische und automatisierte Aufstellung der Gleichungen. So eignen sie sich zur rechnergestützten Netzwerkanalyse. Größere Netzwerke werden ausschließlich mit der Matrizenrechnung analysiert; sie ist auch die Grundlage für Simulationsprogramme. Im Kap. 3.5 vertiefen wir diese Probleme.

Wenn Maschenstrom- und Knotenspannungsverfahren auch weniger Aufwand erfordern, so bestimmen sie doch *alle* (nicht nur die gesuchten!) Zweiggrößen. Sucht man nur *eine* Zweiggröße, so bietet sich die *Zweipoltheorie* (ggf. in Verbindung mit dem Überlagerungssatz) als *aufwandsärmstes Verfahren* an. Auch die Rückführung eines größeren Netzwerkes auf ein *Zweitor* kann eine hilfreiche Alternative sein.

# Begriffe Wir stellen einige Netzwerkbegriffe voran:

Knoten: Punkt (Klemme, node), in dem zwei oder mehrere Netzwerkelemente widerstandslos miteinander verbunden sind. Praktisch spricht man nur bei Stromverzweigung von einem Knoten. Gleichwertige graphentheoretische Bezeichnung: Ecke (vertex). Mehrere widerstandslos verbundene Knoten bilden nur einen Knoten.

Zweig: Verbindung zweier Knoten durch ein zweipoliges Netzwerkelement. Gleichwertige graphentheoretische Bezeichnung: Kante (edge). Jedem Zweig entspricht ein Knotenpaar: es ist mit ihm inzident. Verallgemeinert kann ein Zweig auch mehrere (beliebige), vom gleichen Strom durchflossene Netzwerkelemente umfassen.

Schleife: kontinuierliche Folge von Zweigen, die in einem Knoten beginnt und dort wieder endet und keinen Knoten mehr als einmal durchläuft. Gleichwertig: Umlauf, geschlossener Weg (loop).

*Masche*: Schleife eines *ebenen* Graphen, in dessen Innern sich kein anderer Zweig befindet oder gleichwertig: spezielle Schleife, die keine anderen Schleifen (mesh) einschließt<sup>1</sup>.

*Graph*: Abstrakte Beschreibung der Netzwerkstruktur (Zahl der Knoten, Lage und Zahl der Zweige) durch Knoten und Linien statt der Zweige.

Im Kap. 3.4 vertiefen wir diese Begriffe.

**Unabhängige Knoten und Maschen** Die Eigenschaften eines Netzwerkes werden von den Netzwerkelementen und der *Netzwerkstruktur* oder *-topologie* bestimmt. Das ist die Art ihrer Zusammenschaltung. Sie wird auch als "Gerüst"

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Im deutschen Sprachgebrauch wird häufig nicht zwischen Schleife und Masche unterschieden. Deshalb versteht man unter einer Masche auch einen über mehrere Zweige gelegten geschlossenen Umlauf.

bezeichnet und zeichnerisch durch den *Streckenkomplex* (graph) ausgedrückt. Die Beschreibung kann gleichwertig durch eine *topologische Matrix* erfolgen.

Der Graph erfasst die Netzwerkzweige unabhängig vom physikalischen Inhalt (Netzwerkelemente). Jeder Netzwerkzweig wird durch eine *Strecke* oder *Kante* dargestellt. Mehrere Strecken sind in Punkten, den *Knoten* oder *Ecken* miteinander verbunden.

Der Netzwerkgraph beschreibt die Verbindung der Netzwerkelemente durch Abstraktion der Netzwerkgeometrie. Jedem Knoten im Graphen entspricht ein Knoten im Netzwerk und jeder Verbindungslinie ein Zweig zwischen zwei Knoten. Er ist Grundlage der Zahl unabhängiger Knoten- und Maschengleichungen und kann durch topologische Matrizen (sog. Inzidenzmatrizen) mathematisch beschrieben werden.

#### Dabei werden

- Zweipolelemente durch einen und Zweitorelemente durch zwei Zweige ersetzt,
- ideale Spannungsquellen durch einen Zweig ersetzt,
- ideale Stromquellen im Graphen ein Leerlauf ersetzt (Aufschneiden)<sup>2</sup>.

Haben die Zweige noch den Bezugssinn positiver Zweigströme und Zweigspannungen (bestimmt durch das jeweilige Netzwerkelement), so entsteht der gerichtete Graph (directed graph, digraph) oder orientierte Streckenkomplex.

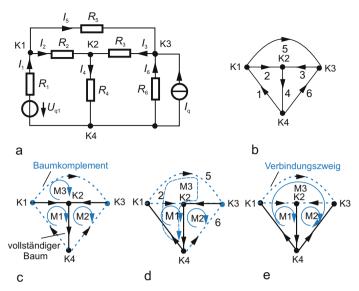
Weil ideale Spannungs- bzw. Stromquellen durch einen kurzgeschlossenen bzw. leerlaufenden Zweig dem inneren Widerstand entsprechend ersetzt werden, verschiebt man sie zweckmäßig durch *Quellenverschiebung* oder *-teilung* in Zweige mit endlichen Widerständen.

Abb. 3.1.1a zeigt ein Netzwerk mit z=6 Zweigen und k=4 Knoten und dem zugeordneten gerichteten Graphen (Zweigströme) in Abb. b. Die reale Stromquelle  $I_q$ ,  $R_6$  erscheint als ein Zweig bestimmt durch den Widerstand  $R_6$ .

Während k-1 unabhängige Knoten dem Netzwerk direkt entnommen werden, ist die Bestimmung der m=z-(k-1) unabhängigen Maschen schwieriger. Es gibt dafür mehrere Verfahren: den vollständigen Baum, die Auftrennmethode und das Fenstermaschenverfahren.

Vollständiger Baum, Baum- und Verbindungszweige Ein Netzwerkgraph enthält stets Maschen (sonst kein Stromfluss). Ihre Zahl lässt sich durch schritt-

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Das widerspricht der Vorstellung vom Strom als ununterbrochenem Band.



**Abb. 3.1.1.** Netzwerk mit zugehörigem Graph. (a) Netzwerk. (b) Gerichteter Graph. (c) Vollständiger Baum und Baumkomplement. (d) Linienförmiger Baum zwischen den Knoten K1 und K3. (e) Sternbaum; Knoten K4 ist Bezugsknoten

weise Entfernung von Zweigen verkleinern. So entsteht schließlich ein Streckenkomplex, der *vollständige Baum*, mit folgenden Eigenschaften:

- 1. alle Knoten sind direkt oder indirekt miteinander verbunden,
- 2. wird ein weiterer Zweig entfernt, so geht Merkmal 1. verloren,
- 3. es treten keine Umläufe auf.

Ausgehend von einem beliebigen Knoten wird dann jeder andere Knoten nur über einen Weg auf dem vollständigen Baum erreicht. Ein Netzwerk hat i. a. mehrere vollständige Bäume. Zwangsläufig folgt:

Ein vollständiger Baum (tree) ist ein Teilgraph, der keine Umläufe besitzt und alle Knoten des Ausgangsgraphen miteinander verbindet. In einem Netzwerk mit k Knoten hat der vollständige Baum insgesamt k-1 Zweige.

Es gibt damit zwei Arten von Zweigen:

- die k-1 Zweige des vollständigen Baumes, auch Baumzweige oder Baumäste genannt (in Abb. 3.1.1c dick gezeichnet),
- die übrigen m = z (k 1) Verbindungs- oder Maschenzweige, die nicht zum vollständigen Baum gehören (in Abb. 3.1.1c gestrichelt eingetragen). Sie bilden das Baumkomplement oder den Komplementärbaum (sog. Kobaum).

Das Baumkomplement bildet als Gesamtheit aller Verbindungszweige das System unabhängiger Zweige. Jeder Verbindungszweig gehört genau zu einer Schleife (Masche), die nur aus diesem Verbindungszweig und Zweigen des vollständigen Baumes besteht. Eine solche Schleife heißt Fundamentalschleife (unabhängige Masche). Davon gibt es m=z-(k-1).

Besondere vollständige Bäume sind die mit *linienförmiger* Struktur (Abb. 3.1.1d) und der *Sternbaum* (Abb. 3.1.1e) mit einem *Bezugsknoten* (datum node), in dem alle Baumzweige enden.

Auffinden des vollständigen Baumes Ein Netzwerk mit k Knoten und z Zweigen erlaubt  $\binom{z}{k-1}$  Zweigkombinationen. Zum Auffinden der Zweige, die einen vollständigen Baum bilden, werden alle Zweigkombinationen systematisch variiert. Dazu erhalten die Zweige Nummern, z. B. 1, 2, 3 usw. Für das Netzwerk Abb. 3.1.1a mit z=6 Zweigen und k=4 Knoten gibt es insgesamt  $\binom{6}{3}=20$  Zweigkombinationen. Werden davon die Kombinationen abgezogen, die Maschen, und damit keine vollständigen Bäume bilden, so verbleiben 16 unterschiedliche vollständige Bäume entsprechend 16 Gleichungssystemen für jeweils m=z-(k-1)=3 unabhängige Variable aus den Strömen  $I_1\ldots I_6$ . Allgemein hat ein Netzwerk mehrere vollständige Bäume.

Praktisch beginnt man den Baum an einem Knoten, verbindet über einen Zweig zum Nachbarknoten usw. solange, bis alle k Knoten verknüpft sind. Der vollständige Baum umfasst k-1 Zweige. Die restlichen m Zweige sind die Verbindungszweige. Wird jeder Verbindungszweig über den vollständigen Baum zu einer Masche/Schleife ergänzt, so entsteht eine unabhängige Masche/Schleife. Abb. 3.1.1c zeigt einen vollständigen Baum (k-1=3 Zweige) und das Baumkomplement mit drei Verbindungszweigen. Es lassen sich drei unabhängige Maschen M1 ... M3 finden. Auch für den linienförmigen Baum (Abb. 3.1.1d) gibt es drei unabhängige Maschen M1 ... M3, ebenso für den Sternbaum (Abb. 3.1.1e) mit gemeinsamen Bezugsknoten K4 (grundsätzlich kann jeder der vier Knoten als Bezugsknoten eines Sternbaumes gewählt werden). Der zweckmäßigste vollständige Baum bestimmt den Lösungsaufwand (s. u.).

**Auftrennmethode** Das Verfahren beruht auf der Überlegung, dass eine Masche dann unabhängig ist, wenn sie wenigstens einen Zweig enthält, der in vorherigen Maschen nicht enthalten war. Man

— wählt einen Maschenumlauf und kennzeichnet den Zweig, der nicht Teil einer neuen Masche sein darf (zweckmäßig auftrennen),

wiederholt den Vorgang solange, bis kein Umlauf mehr möglich ist.
Abb. 3.1.1d zeigt ein Beispiel: man beginnt mit Masche M2, trennt Zweig 6 auf, setzt mit Masche M3 fort, trennt Zweig 5 auf, formuliert Masche M1 und trennt Zweig 2 auf. Weitere Umläufe können nicht gebildet werden.

**Fenstermaschenmethode** Der vollständige Baum wird so aufgestellt, dass fensterartig nebeneinander liegende Maschen entstehen (Abb. 3.1.2b). Sie führen zum Fundamentalsystem unabhängiger Maschen. Voraussetzung ist allerdings ein "ebener" Graph (ohne Überkreuzungen). Das so erhaltene Gleichungssystem muss nicht unbedingt das günstigste für die Aufgabenstellung sein.

**Planares Netzwerk** Ein planares Netzwerk hat einen *ebenen* Graphen. Er lässt sich in einer Ebene ohne Überkreuzungen zeichnen. Nur wenn es (ev. durch Umzeichnen) nicht gelingt, alle Überkreuzungen zu beseitigen, liegt ein nichtplanarer Graph vor. Für vollständige N-Ecke (jeder der N Knoten durch Zweige mit jedem anderen Knoten verbunden) gilt: N-Ecke mit  $N \leq 4$  sind planar, mit  $N \geq 5$  nichtplanar. Bei planaren Netzwerken können statt der Schleifen ausreichend viele Maschen gefunden werden. Wird in jeder unabhängigen Masche ein Maschenstrom eingeführt, so entfällt die Baumsuche.

Bei ebenen Netzwerken kann es vorkommen, dass es vollständige Systeme unabhängiger Maschen gibt, die kein Maschenfundamentalsystem bilden. Abb. 3.1.2a zeigt einen Graph mit fünf Fenstermaschen Sie bilden ein vollständiges System unabhängiger Maschen: es gibt aber keinen vollständigen Baum, zu dem dieses Maschensystem als Fundamentalsystem passt. So müssten beispielsweise für Masche M5 drei der Zweige 1...4 zum vollständigen Baum gehören. Dann kann aber eine der äußeren Maschen nicht Fundamentalmasche sein. Deshalb gibt es keinen vollständigen Baum, zu dem dieses Maschensystem als Fundamentalsystem gehört. Dann gilt der Satz

Im ebenen Graphen bilden die (inneren) Fenstermaschen ein vollständiges System unabhängiger Maschen.

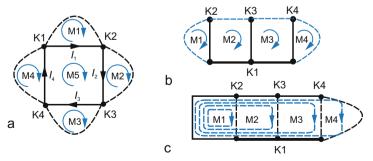


Abb. 3.1.2. Spezielle Graphen. (a) System unabhängiger Maschen, das sich der Baumsuche widersetzt. (b) Vollständiger Baum einer viermaschigen Kettenschaltung. (c) Vollständiger linienförmiger Baum einer viermaschigen Kettenschaltung

Abb. 3.1.2b zeigt einen Graph mit nur unabhängigen Maschen M1 ... M4 (das kann der Graph einer Kettenschaltung sein). Nur benachbarte Maschen sind verkoppelt. Für die gleiche Schaltung kann aber auch ein System unabhängiger Schleifen M1 ... M4 gewählt werden (Abb. 3.1.2c). Jetzt sind in den Baumzweigen der Masche M1 alle unabhängigen Schleifenströme überlagert, was zu einem Gleichungssystem mit mehr von null verschiedenen Koeffizienten führt.

Dagegen überlagern sich in jedem Baumzweig des Graphen Abb. 3.1.2b nur zwei Maschenströme, wodurch der Aufwand sinkt. In der Maschenanordnung Abb. 3.1.2b ist Knoten K1 zugleich Bezugsknoten. Deshalb reduziert ein sternförmiger vollständiger Baum meist den Lösungsaufwand.

Grundsätzlich kann ein vollständiger Baum beliebig ausgewählt werden, doch sollte man beachten:

- Baum so legen, dass einfache Umläufe entstehen,
- Stromquellen in Verbindungszweige legen,
- Spannungsquellen in Baumzweigen anordnen (sie treten im Gleichungssystem allerdings nur einmal auf, wenn sie in Verbindungszweigen liegen),
- sind nicht alle Ströme gesucht, so sollte ein Baum gewählt werden, in dem gesuchte Ströme in Verbindungszweigen fließen (direkte Lösung nach den Unbekannten).
- spannungsgesteuerte Quellen sollten nur durch Baumzweigspannungen gesteuert werden.
- stromgesteuerte Quellen sollten durch Ströme in Verbindungszweigen gesteuert werden.

**Analyseverfahren** Die folgenden Analyseverfahren nutzen die Erkenntnisse dieses Abschnittes: Aufsuchen linear unabhängiger Variabler mit dem vollständigen Baum, die jeweils nur in einem Zweig des Graphen auftreten. Das sind

- in den z (k 1) Verbindungszweigen die Verbindungszweigströme,
- in den k-1 Baumzweigen die Baumzweig- oder Astspannungen,
- die k-1 Knotenspannungen, die den Baumzweigspannungen zugeordnet werden können.

#### Dann gilt:

- die m Verbindungszweigströme, fortgesetzt je als Schleifen- bzw. Maschenstrom, der jeweils in einer der m Fundamentalschleifen oder Fundamentalmaschen fließt oder
- die k-1 Baumzweig- resp. Knotenspannungen bilden je ein vollständiges, d. h. linear unabhängiges System von Strom- bzw. Spannungsvariablen.

Deshalb sind die Verbindungszweigströme die Grundlage des *Schleifen-* bzw. *Maschenstromverfahrens* und die Baumzweig- bzw. Knotenspannungen die

Basis der *Schnittmengen*- oder *Knotenspannungsanalyse*. Beide Ansätze beruhen auf Transformationen der Unbekannten.

Wir betrachten zunächst die *Maschenstrom*- und *Knotenspannungsverfahren*, die *ohne Baumsuche*<sup>3</sup> auskommen und verallgemeinern anschließend zur *Schleifen*- und *Schnittmengenanalyse*.

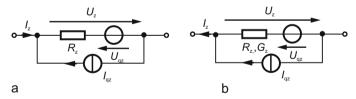
## 3.1.2 Zweigstromanalyse

Allgemeiner Netzwerkzweig In einem Netzwerk mit unabhängigen Quellen und Widerständen (gesteuerte Quellen und gekoppelte Spulen zunächst ausgeschlossen) besteht der allgemeine Zweig zwischen den Knoten i und j aus der Reihenschaltung von Widerstand R und Spannungsquelle  $U_{\rm q}$ , zusätzlich kann eine Stromquelle  $I_{\rm q}$  parallel liegen (Abb. 3.1.3a). Längs des Zweiges fällt die Zweigspannung  $U_{\rm z}$  ab und es fließt der Zweigstrom  $I_{\rm z}$  in einen Zweigknoten hinein und zum anderen wieder heraus. Die festgelegten Richtungen der Quellengrößen erfordern gegenüber dem Grundstromkreis (s. Kap. 2.4) z. T. Vorzeichenkorrekturen in den Analysegleichungen.

$$\begin{array}{lll} U_{\rm z} &=& R_{\rm z}(I_{\rm z}+I_{\rm qz})-U_{\rm qz} \\ I_{\rm z} &=& G_{\rm z}(U_{\rm z}+U_{\rm qz})-I_{\rm qz} \end{array} \quad {\rm mit} \ R_{\rm z} = 1/G_{\rm z}. \quad \ {\rm Netzwerkzweig} \ (3.1.3) \end{array}$$

Bei verschwindenden Quellengrößen wird der Netzwerkzweig zum Zweigwiderstand  $R_z^4$ .

Gewöhnlich besteht folgende Aufgabe: In einer Schaltung mit gegebenen Strom- und Spannungsquellen, z Zweigen und k Knoten sind bestimmte



**Abb. 3.1.3.** Allgemeiner Netzwerkzweig. (a) Verbraucherzählpfeilsystem. (b) Erzeugerzählpfeilsystem

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Weil ihnen Fenstermaschen bzw. ein Sternbaum als spezielle Graphen zugrunde liegen.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Der Index z weist auf die Zweiggröße hin, er entfällt, wenn der Unterschied zwischen Zweiggrößen und anderen Größen, wie Maschenstrom und Knotenspannung, nicht besonders hervorgehoben werden soll.

Zweigströme oder -spannungen gesucht. Wir lösen sie mit den Kirchhoffschen Gleichungen.

Die Analyse beginnt mit der Festlegung unabhängiger Größen. Die k-1 unabhängigen Knotengleichungen werden direkt ausgewählt. Die m=z-k+1 unabhängigen Maschengleichungen finden wir am schnellsten, wenn man eine Masche, für die die Maschengleichung aufgestellt wurde, an beliebiger Stelle auftrennt (entfernen des Zweiges, Kreuz im Zweig) und für die nächste Masche einen weiteren Umlauf (also ohne Trennstelle) sucht, solange, bis keine geschlossenen Umläufe mehr möglich sind.

Lösungsmethodik Zweigstromanalyse Für die systematische Anwendung der Zweigstromanalyse empfiehlt sich:

- Fortlaufende Nummerierung der Zweige und Netzwerkelemente, Festlegung der Richtung der Zweigströme und Eliminierung der Zweigspannungen über die U, I-Beziehung der Netzwerkelemente.
- 2. Auswahl der k-1 Knoten und m=z-(k-1) unabhängigen Maschen. Kennzeichnung der Knoten  $(K1, \ldots, K(k-1))$  und unabhängigen Maschen  $(M1, \ldots, Mm)$  durch Ringpfeil in gewählter Umlaufrichtung (zweckmäßig Uhrzeigersinn).
- 3. Aufstellung der unabhängigen Knoten- und Maschengleichungen mit Einschluss der *U, I*-Beziehungen der Netzwerkelemente.
- 4. Lösung des Gleichungssystems nach den z Unbekannten.
- 5. Überprüfen der Ergebnisse durch zweckmäßige Vereinfachungen, Sonderfälle, Diskussion und Rückeinsetzen.

Wir beschränken uns auf die Punkte 1–4.

Zur Senkung des Lösungsaufwandes

- Netzwerk so zusammenfassen, dass möglichst wenige Variable auftreten (reihenoder parallelgeschaltete Elemente zusammenfassen).
- 2. Vereinfachung quellenloser Netzwerkteile durch unabhängige Rechengänge. So entsteht ein Netzwerk mit weniger Maschen und Knoten. Methoden: Reihenund Parallelschaltung von Elementen, Stern-Dreieck-Umwandlung, Quellenverschiebung, Anwendung des Überlagerungssatzes.
- Oft vereinfacht sich das Netzwerk durch Umwandlung von Strom- in Spannungsquellen (und umgekehrt) und Zusammenfassen.

Für bis zu 4 Unbekannten ist die direkte Lösung der Gleichungen noch möglich, darüber empfiehlt sich die Anwendung der Matrizenrechnung mit rechnergestützter Lösung oder der Einsatz von Simulationsprogrammen.

Beispiel 3.1.1 Reduzierte Kirchhoffsche Gleichungen Es ist die Schaltung in Abb. 3.1.4 zu analysieren. Erforderlich sind mit z=3 Zweigen und k=2 Knoten insgesamt eine Knoten- und zwei unabhängige Maschengleichungen zur Berechnung der Ströme  $I_1 \dots I_3$ . Die Spannungsabfälle in den Maschengleichungen werden über die Elementbeziehungen durch die Ströme ausgedrückt:

(Strom in Gl. (1) hinfließend +, wegfließend -). Zur Lösung des Stromes  $I_3$  werden die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  eliminiert:

$$I_3 = \frac{U_{q1}G_1 - U_{q2}G_2}{1 + R_3(G_1 + G_2)}.$$

Diskussion Für  $R_3 \to 0$  darf  $I_1$  und  $I_2$  nur noch von der Spannungsquelle in der betreffenden Masche abhängen:  $I_1 = U_{\rm q1}/R_1$ ,  $I_{\rm q2} = U_{\rm q2}/R_2$ , für  $R_3 \to \infty$  muss  $I_1 = -I_2 = (U_{\rm q1} - U_{\rm q2})/(R_1 + R_2)$  gelten, da eine einfache Masche vorliegt.

Systematische Zweigstromanalyse, Matrixdarstellung Spaltenweises Ordnen der Kirchhoffschen Gleichungen nach den Zweigströmen  $I_1 \dots I_3$  ergibt folgendes Schema:

Gleichung 
$$I_1$$
  $I_2$   $I_3$  Quellenspannung

Knoten  $+1$   $+1$   $-1$   $0$ 

Masche  $1$   $R_1$   $0$   $R_3$   $U_{q1}$ 

Masche  $2$   $0$   $-R_2$   $-R_3$   $U_{q2}$ 

$$\begin{pmatrix}
+1 & +1 & -1 \\ R_1 & 0 & R_3 \\ 0 & -R_2 & -R_3
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
I_1 \\ I_2 \\ I_3
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 \\ U_{q1} \\ U_{q2}
\end{pmatrix}.$$
Koeffizientenmatrix

Spaltenmatrix

d. Ströme

d. Quellen

Die links stehende Koeffizientenmatrix ist quadratisch, da stets so viele Gleichungen ( $\sim$  Zeilen) wie Unbekannte (Spalten, Ströme) auftreten. Die Koeffizienten sind entweder  $\pm 1$  (herrührend von den Knotengleichungen) oder Widerstände (herrührend von den Maschengleichungen). Nicht vorhandene Terme erhalten den Eintrag 0. Die einzelnen Zeilen bilden genau die einzelnen Gleichungen ab.

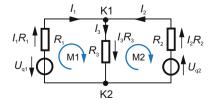


Abb. 3.1.4. Beispiel zur Zweigstromanalyse

Die *Spaltenvektoren* enthalten die Ströme und Quellenspannungen. Die Multiplikation der Matrizen ergibt das Ausgangsgleichungssystem.

Der Vorteil der Schreibweise Gl. (3.1.4) besteht u. a. darin, dass die Matrix der Schaltung entnommen werden kann. Für ein lineares Netzwerk gilt:

- 1. In Knotengleichungen stehen als Matrixelemente entweder +1, (-1) oder null, je nachdem, ob der betreffende Strom zum Knoten hin -(weg)- fließt oder nicht vorhanden ist (0).
- Die Maschengleichungen enthalten als Matrixelemente in der jeweiligen Zeile den Widerstand, der von dem zur Spalte gehörigen Strom durchflossen wird [Vorzeichen +(-), wenn Maschenumlaufrichtung und Stromrichtung übereinstimmen (nicht übereinstimmen)]. Leere Plätze haben den Eintrag null.
- 3. In der Spaltenmatrix der Quellengrößen stehen die Quellenspannungen (positiv, wenn Maschenumlauf und Quellenrichtungssinn entgegengesetzt orientiert und umgekehrt) bzw. die Quellenströme (negativ, wenn zum Knoten hin gerichtet und umgekehrt).

Die Matrixdarstellung Gl. (3.1.4) repräsentiert ein lineares Gleichungssystem. Es kann, abhängig von der Netzwerkgröße, von wenigen Unbekannten bis zu einigen Tausend für große Netzwerke reichen. Dann sind numerische Auswertungen erforderlich.

Das Zweigstrom-/bzw. Zweigspannungsverfahren ist uneingeschränkt anwendbar, auch für nichtlineare Netzwerke.

# 3.2 Maschenstromanalyse

**Einführung** Der Analyseaufwand beim Zweigstromverfahren sinkt durch Einführung von Hilfsvariablen, die entweder die Knoten- oder die Maschengleichung automatisch (*durch ihre Definition*) erfüllen. Dann entfällt die Aufstellung dieser Gleichungen. Hilfsvariable sind beim Maschenstromverfahren die *Maschenströme* und beim Knotenspannungsverfahren die *Knotenspannungen* (Kap. 3.3).

Das Maschenstromverfahren benutzt für die Maschenströme die Fundamentalmaschen und/oder Fenstermaschen, das Knotenspannungsverfahren die Baumzweige eines Sternbaumes. Deshalb kommen beide ohne Baumsuche aus.

Zur Erhöhung der Anwendungsflexibilität werden beim Maschenstromverfahren häufig auch Schleifen einbezogen (es mutiert damit in Strenge zum Schleifenverfahren, das eine Baumfestlegung erfordert). Wir behalten in diesem Abschnitt die Bezeichnung "Maschenstromverfahren" bei, berücksichtigen aber schon das Aufstellen von Schleifengleichungen. Erst bei der matrixorientierten Darstellung (Kap. 3.4.1) trennen wir zwischen Schleifen- und Schnittmengengleichungen und diskutieren

dann die Vereinfachungen, die zum Maschenstrom- und Knotenspannungsverfahren führen.

Beide Methoden haben bestimmte Voraussetzungen. So erlauben Schleifenströme keine Stromquellen und Baumzweigspannungen keine Spannungsquellen. Diese Bedingungen stammen von der Unverträglichkeit mit den eingeführten Unbekannten. Sie werden später entschärft (Supermaschen-, Superknotenkonzept).

#### 3.2.1 Maschenströme

Ein Netzwerk mit z Zweigen und k-1 Knoten hat m unabhängige Maschen.

Bei der Maschenstrom- oder kurz Maschenanalyse (mesh analysis) wird in jeder unabhängigen Masche ein Maschenstrom  $I_{\rm m}$  (Symbolindex m, Masche) als Unbekannte eingeführt. Er fließt als Umlaufstrom nur in einer unabhängigen Masche. Seine Richtung wird frei gewählt und durch einen Ringpfeil ausgedrückt.

Abb. 3.2.1a zeigt den Unterschied zwischen Zweig- und Maschenstrom (am Beispiels des Netzwerkes Abb. 3.1.1). Zweigströme sind physikalisch existent, also messbar.

Dagegen ist der Maschen-/Schleifenstrom der Strom im Verbindungszweig der betreffenden unabhängigen Masche /Schleife und kann nur dort gemessen werden, sonst nicht (deswegen "Rechengröße").

Umgekehrt lassen sich die Zweigströme (Ströme in den Zweigen des vollständigen Baumes) durch die algebraische Summe der zugehörigen Maschen-/ Schleifenströme ausdrücken).

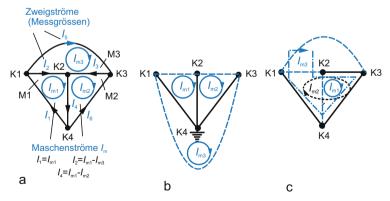


Abb. 3.2.1. Zum Maschenstrombegriff. (a) Definition des Maschenstromes. (b) Netzwerkgraph mit Fenstermaschen. (c) Anderer vollständiger Baum, es treten auch Schleifenströme auf

Zum Netzwerk der Abb. 3.2.1a wurde in Abb. 3.2.1b ein Sternbaum angegeben (Bezugsknoten K4). Abb. 3.2.1c zeigt einen anderen Graphen des gleichen Netzwerkes. Jetzt tritt ein Schleifenstrom auf, dessen Festlegung einen Baum erfordern würde (hier nicht wegen Einfachheit). Ein Oberbegriff für beide Ströme ist der "Umlaufstrom".

Im Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten bilden die m=z-k+1 Maschen-/Schleifenströme ein vollständiges System unabhängiger Zweigströme. Sie erfüllen die k-1 Knotengleichungen automatisch.

Weil für die Maschenströme<sup>5</sup> nur noch Maschengleichungen aufzustellen sind, wird schon eine *Voraussetzung des Verfahrens* sichtbar: die U, I-Relationen der Zweige müssen nach den Spannungen auflösbar sein. Deshalb dürfen im Netzwerk nur unabhängige oder stromgesteuerte Spannungsquellen auftreten, *keine Stromquellen* (unabhängige und gesteuerte).

Ideale Stromquellen sind beim Grundverfahren deshalb nicht zulässig, weil die Spannung über der Quelle nicht durch Ströme ausgedrückt werden kann. Andererseits würde eine ideale Stromquelle als Verbindungszweig aber automatisch den zugehörigen Maschenstrom festlegen, m. a. W. muss diese Maschengleichung nicht aufgestellt werden. Diesen Ansatz nutzt später die Erweiterung auf Stromquellen (s. Kap. 3.2.3).

Damit ergibt sich für ein lineares Netzwerk mit nur unabhängigen Spannungsquellen die

## Lösungsmethodik Maschenstromanalyse

- 1. Ermittlung der Zahl unabhängiger Maschen m (z. B. nach der Methode des vollständigen Baumes oder anderer Verfahren).
- 2. Einführung eines Maschenstromes in jeder unabhängigen Masche mit beliebiger Umlaufrichtung.
- 3. Aufstellen der Maschengleichung ( $\Sigma U=0$ ) für jede unabhängige Masche (in Umlaufrichtung des Maschenstromes). Spannungsabfälle über den Netzwerkelementen durch Maschenströme ausdrücken.
- 4. Darstellung der gesuchten Zweigströme durch ihre Maschenströme.
- 5. Auflösung des Gleichungssystems 3. nach den Maschenströmen, die gemäß 4. erforderlich sind.

Schritt 4 und 5 reduzieren sich auf einen Maschenstrom, wenn der betreffende Zweig als unabhängiger Zweig gewählt wird: dann ist der gesuchte Zweigstrom zugleich Maschenstrom.

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Wir sprechen künftig nur noch von Maschenströmen, aus dem Kontext ergibt sich, ob ein Maschen- oder Schleifenstrom vorliegt.

#### Hinweis:

Zu 1. Nach der Anschauung oder der Methode des vollständigen Baumes (Aufzeichnen des Streckenkomplexes, Nummerierung der Zweige, Eintragen des Bezugssinnes der Zweigströme und Spannungsquellen mit Richtung) oder der Fenstermaschenmethode Bäume so aufstellen, dass die gesuchten Ströme in den Zweigen des Komplementärbaumes auftreten (Rechenvereinfachung). Spannungsquellen in Verbindungszweigen kommen nur einmal (d. h. in einer Gleichung) vor.

Zu 3. Zweckmäßig schematische Anordnung der m Maschengleichungen (Zeilen) und m Maschenströme (Spalten):

- in der Hauptdiagonalen des Gleichungssystems stehen die Umlaufwiderstände, als Nebendiagonalelemente die Koppelwiderstände (s. u.);
- das Gleichungssystem ist symmetrisch, wenn nur die Grundelemente R, C, L (und gekoppelte Spulen) vorkommen. Zweckmäßig schreibt man zuerst den Spannungsabfall durch den Maschenstrom der betreffenden Masche und dann, geordnet nach den Maschenströmen der Nachbarmaschen, die dadurch erzeugten Spannungsabfälle (Vorzeichen s. Abb. 3.2.2);
- bei Fenstermaschen und gleichen Umlaufrichtungen aller Maschenströme haben alle Nebendiagonalglieder negative Vorzeichen.

Beispiel 3.2.1 Maschenstromanalyse Für die Schaltung Abb. 3.2.2 (k=2 Knoten (K1, K2), z=3 Zweige und damit m=z-(k-1)=3-1=2 unabhängige Maschen) wird der Zweigstrom  $I_3$  nach dem Maschenstromverfahren bestimmt. Die drei Zweigströme  $I_1 \dots I_3$  als Unbekannte erfordern nach der Zweigstromanalyse (Kap. 3.1.2) die Lösung von drei Gleichungen. Es fallen folgende Schritte an:

- 1. Zeichnung der Schaltung als Streckenkomplex (Abb. 3.2.2b), Ermittlung des vollständigen Baumes (Abb. c). Er enthält wegen k=2 nur einen Zweig. Das Baumkomplement gibt mit dem vollständigen Baum gerade den Streckenkomplex. Die m=2 unabhängigen (Verbindungs-) Zweige schließen die beiden unabhängigen Maschen M1, M2.
- 2. In diesen Maschen werden die Maschenströme  $I_{\rm m1}$  und  $I_{\rm m2}$  mit willkürlich angesetzter Orientierung eingeführt.

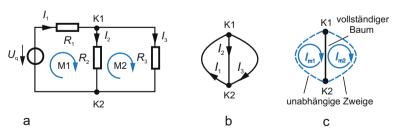


Abb. 3.2.2. Beispiel zur Maschenstromanalyse. (a) Netzwerk. (b) Gerichteter Graph. (c) Zugehöriger vollständiger Baum

3. Die Maschengleichungen lauten:

M1: 
$$(R_1 + R_2)I_{m1} - R_2I_{m2} = U_q,$$
 (3.2.1a)

M2: 
$$-R_2I_{m1} + (R_2 + R_3)I_{m2} = 0.$$
 (3.2.1b)

Der erste Term in (3.2.1a) ist der Gesamtspannungsabfall in Masche M1 durch  $I_{\rm m1}$ , der zweite der Spannungsabfall in M1 durch  $I_{\rm m2}$  durch  $R_2$  (negatives Vorzeichen, da  $I_{\rm m2}$  durch  $R_2$  entgegen der Richtung von  $I_{\rm m1}$  fließt. Rechts steht die Quellenspannung. In Gl. (3.2.1b) ist der erste Term der Spannungsabfall an  $R_2$  durch  $I_{\rm m1}$ , der zweite der Gesamtspannungsabfall des Maschenstromes  $I_{\rm m2}$  in der Masche. Die rechte Seite verschwindet wegen fehlender Quellenspannung in M2. Es ist wichtig, die Maschengleichung sofort in der Form (3.2.1a) und (3.2.1b) zu schreiben, um die Symmetrie zu erkennen (Senkung von Fehlerquellen!). Man beachte, dass alle Terme positiv sind, die vom Maschenstrom der eigenen Masche erzeugt werden. Aus Gl. (3.2.1a) erkennt man:  $R_{11} = R_1 + R_2$ ,  $R_{22} = R_2 + R_3$ ,  $R_{12} = R_{21} = -R_2$  im Hinblick auf eine Matrixschreibweise Gl. (3.2.7).

4. Der gesuchte Zweigstrom  $I_3$  entspricht dem Maschenstrom  $I_{\rm m2}$ . Daher wird Gl. (3.2.1) nach  $I_{\rm m2}$  aufgelöst:

$$I_{\rm m2} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & U_{\rm q} \\ -R_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{vmatrix}} = \frac{R_2 U_{\rm q}}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3) - R_2^2}.$$
 (3.2.2)

Der Zweigstrom  $I_2 = I_{\rm m1} - I_{\rm m2}$  erfordert beide Maschenströme. Deshalb ist ein vollständiger Baum günstiger, der den von  $I_2$  durchflossenen Zweig als unabhängigen Zweig enthält:  $I_2$  wird zugleich Maschenstrom.

Beispiel 3.2.2 Maschenstromanalyse Für die Brückenschaltung in Abb. 3.2.3a ( $z=6,\ k=4$ ) sind alle Zweigströme nach der Maschenstromanalyse zu bestimmen. Abb. b zeigt den gerichteten Graph. Die Zahl der Maschenströme folgt aus den unabhängigen Zweigen als Baumkomplement. Das Netzwerk ist *eben*, die drei unabhängigen Maschen M1 ... M3 sind rasch festgelegt. Jeder unabhängige Zweigerhält einen Maschenstrom  $I_{\rm m}$  zugeordnet (Abb. c). Er fließt in der zugehörigen Masche. Von den 6 Zweigströmen  $I_1 \ldots I_6$  stimmen drei ( $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ) unmittelbar (u. U. bis auf Vorzeichen) mit den Maschenströmen  $I_{\rm m1}$ ,  $I_{\rm m2}$ ,  $I_{\rm m3}$  überein. Die restlichen Ströme  $I_1$ ,  $I_5$ ,  $I_6$  werden durch Maschenströme ausgedrückt:  $I_1 = I_{\rm m1} - I_{\rm m3}$ ,  $I_5 = -I_{\rm m3} - I_{\rm m2}$ ,  $I_6 = -I_{\rm m2} - I_{\rm m1}$ . Damit erfüllen die m=z-(k-1)=6-3 Maschenströme die Knotensätze der Knoten K1 ... K4 automatisch. (Man bilde versuchsweise die Bilanz für K3, es treten nur Maschenströme auf).

Der nächste Schritt formuliert den Maschensatz für jede unabhängige Masche mit den Maschenströmen. Von einem Knoten ausgehend wird die Masche dabei in Richtung des Maschenstromes umfahren. Dann sind Spannungsabfälle an den Netzwerkelementen positiv. Der gleiche Zweig kann von mehreren Maschenströmen durchlaufen sein (z. B. Zweig mit  $I_6$  in Abb. c). Der Gesamtstrom in diesem Zweig ist die vorzeichenbehaftete Summe der beteiligten Maschenströme.

Zur Schaltung mit den eingetragenen unabhängigen Maschen gehören drei Maschengleichungen:

$$M1: R_{1}I_{m1} + R_{2}(I_{m1} - I_{m3}) + R_{3}(I_{m1} + I_{m2}) = 0$$

$$M2: R_{4}I_{m2} + R_{5}(I_{m2} + I_{m3}) + R_{3}(I_{m1} + I_{m2}) = 0$$

$$M3: R_{6}I_{m3} + R_{5}(I_{m2} + I_{m3}) + R_{2}(I_{m3} - I_{m1}) = U_{q}.$$

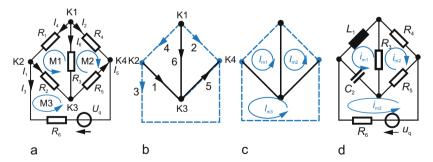
$$(3.2.3)$$

Geordnet nach den Maschenströmen auf der linken Seite folgt

Mit Auflösung nach  $I_{\rm m1}$ ,  $I_{\rm m2}$ ,  $I_{\rm m3}$  ist die Aufgabe prinzipiell gelöst. Die Zweigströme ergeben sich aus den Maschenströmen über lineare Gleichungen. Wird die Richtung des Maschenstroms  $I_{\rm m1}$  vertauscht (also der Uhrzeigersinn gewählt), so gelten die unteren Vorzeichen. Dann fließt z. B. durch  $R_3$  die Differenz der Maschenströme  $I_{\rm m1}$  und  $I_{\rm m2}$ . Für Gl. (3.2.3) bietet sich Matrixschreibweise Gl. (3.2.7) an.

**Modifikation** Wird die Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  (über  $R_6$ ) in eine Stromquelle umgewandelt, so bleibt die Rolle des Maschenstromes  $I_{\rm m3}$  erhalten. In Gl. (3.2.4) ist statt  $U_{\rm q}$  jetzt  $I_{\rm q}R_6$  zu schreiben. Im Grenzfall  $R_6 \to \infty$ , oder besser  $G_6 = 1/R_6 \to 0$  (Übergang zur idealen Stromquelle) geht die Maschengleichung M3 über in  $I_{\rm m3} = I_{\rm q}$ : jetzt ist der Maschenstrom  $I_{\rm m3}$  vorgegeben (und das Gleichungssystem schrumpft auf M1, M2 für  $I_{\rm m1}$  und  $I_{\rm m2}$ ! Wir erkennen: eine ideale Stromquelle als Verbindungszweig senkt die Zahl der Unbekannten um eine und sie bringt keinen Verbindungszweig zwischen zwei Knoten.

**Gültigkeitsbereich** Die Maschenstromanalyse gilt wie die Kirchhoffschen Gesetze allgemein, also für lineare und nichtlineare zeitunabhängige und zeitabhängige Netzwerke.



**Abb. 3.2.3.** Beispiel Maschenstromanalyse. (a) Netzwerk mit eingetragenen Zweigströmen und Maschen. (b) Gerichteter Graph. c) Vollständiger Baum (Sternbaum) mit eingetragenen Maschenströmen. (d) Netzwerk mit allgemeinen Netzwerkelementen (Darstellung im Zeitbereich)

Voraussetzung für den Einbezug nichtlinearer Netzwerkelemente ist, dass ihre U, I-Relation in der Form U(I) dargestellt werden kann (s. Kap. 3.2.5).

Für das Netzwerk Abb. 3.2.3d mit Energiespeichern (ohne Anfangsenergie) und den Maschenströmen  $i_{m1}$ ,  $i_{m2}$ ,  $i_{m3}$  lautet z. B. die Maschengleichung M1 im Zeitbereich:

$$\left(\frac{1}{C_2} \int i_{m1} dt + R_3 i_{m1} + L_1 \frac{di_{m1}}{dt}\right) + R_3 i_{m2} - \frac{1}{C_2} \int i_{m3} dt = 0$$
(3.2.5)

(andere Maschen analog). Im Zeitbereich entstehen dann Integro-Differenzialgleichungen (sie enthalten Differenziale und Integrale).

#### 3.2.2 Maschenwiderstandsmatrix

Maschenwiderstandsmatrix Bei großen Netzwerken empfiehlt sich die Verwendung von Matrizen. Wir beschränken uns damit auf *lineare Gleichstromnetzwerke*. Ausgang ist das System der m Maschengleichungen mit folgender Schreibweise

Die Maschenströme sind in einer Zeile so geordnet, dass die zugehörige Spaltennummer mit der Zeilennummer dieses Maschenstromes übereinstimmt. So entsteht immer eine quadratische Matrix (gleiche Spalten- und Zeilenzahl). Der einzelne Maschenstrom fließt durch den "Umlaufwiderstand" der betreffenden Masche  $(R_{11}, R_{22}, \ldots)$ . Er steht in der "Hauptdiagonale" der Gleichungsanordnung. Die restlichen Plätze nehmen die "Koppelwiderstände" ein, z. B.  $R_{12}$  zwischen Masche 1 und 2 usw.

Für die Koeffizienten  $R_{ij}$  gelten einfache Bildungsregeln:

- 1.  $R_{ii}$  ist stets gleich der Summe der Zweigwiderstände in Masche i (immer positiv), daher der Name "Umlauf- oder Ringwiderstand".
- 2. R<sub>ij</sub> ist der den Maschen i und j gemeinsame Widerstand = Koppelwiderstand, der sie miteinander verkoppelt (Name!). Er wird von den Maschenströmen I<sub>mi</sub> und I<sub>mj</sub> durchflossen. Ein Koppelwiderstand R<sub>ij</sub> erhält negatives Vorzeichen, wenn die Maschenströme der verkoppelten Maschen in entgegengesetzten Richtungen fließen. Dabei gilt die Bedingung R<sub>ij</sub> = R<sub>ji</sub> für lineare Netzwerke aus nur passiven Netzwerkelementen (Rechenkontrolle beim Aufstellen der Maschengleichungen (3.2.6)). So hat beispielsweise der Koppelwiderstand R<sub>13</sub> in Gl. (3.2.4) einen negativen Wert (-R<sub>2</sub>), weil die Maschenströme I<sub>m1</sub>, I<sub>m3</sub> entgegengerichtet durch R<sub>2</sub> fließen, während R<sub>12</sub> = R<sub>3</sub> durch gleichgerichtete Maschenströme positiv anfällt.

Das Gleichungssystem (3.2.6) der Maschenströme lautet in Matrixform<sup>6</sup>

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{m1} \\ I_{m2} \\ \vdots \\ I_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{q1} \\ U_{q2} \\ \vdots \\ U_{qm} \end{pmatrix}$$
(3.2.7a)

oder abgekürzt

$$\underbrace{\boldsymbol{R}}_{\text{Maschenwider-}} \cdot \underbrace{\boldsymbol{I}_{\text{m}}}_{\text{Vektor der standsmatrix}} = \underbrace{\boldsymbol{U}_{\text{qm}}}_{\text{Vektor der Maschenquellen-spannungen}} \cdot \underbrace{\begin{array}{c} \text{Maschenstrom-} \\ \text{gleichung,} \end{array}}_{\text{Matrixform}} \quad (3.2.7b)$$

## Jede Matrixzeile beschreibt die Schaltungsstruktur einer Masche.

Die Matrix der Koeffizienten heißt Maschenwiderstandsmatrix, ihre Koeffizienten sind die Ringwiderstände  $R_{ii}$  bzw. die Koppelwiderstände  $R_{ij} = R_{ji}$ .  $U_{qj}$  ist die Summe der unabhängigen Quellenspannungen in der Masche i (gegen die Richtung des Maschenstromes positiv gezählt (Erzeugerpfeilrichtung)). Stimmt der Richtungssinn der Quellenspannung mit dem Maschenumlaufsinn überein (Verbraucherrichtung), so ist  $U_{qj}$  negativ anzusetzen.

Die Maschenwiderstandsmatrix wird direkt dem Netzwerk entnommen:

- 1. Führe Maschenströme  $I_{m1} \dots I_{mm}$  in unabhängigen Maschen ein (Umlauf beliebig).
- 2. Stelle ein Schema für die m Maschenströme (Spalten) und m Maschen (Zeilen) auf.
- 3. Trage die Ringwiderstände  $R_{ii}$  der zu den Zeilen gehörigen Maschen in den Hauptdiagonalelementen ein.
- 4. Füge die Koppelwiderstände  $R_{ij}$  auf den Nebendiagonalplätzen ein  $(R_{ij}$  positiv (negativ), wenn beide Maschenströme  $I_{mi}$ ,  $I_{mj}$  den Widerstand in gleicher (entgegengesetzter) Richtung durchfließen.
- 5. Beachte die Symmetrie der Matrix  $(R_{ij} = R_{ji})$ .

Im nächsten Schritt wird Gl. (3.2.7) nach den gesuchten Maschenströmen aufgelöst und anschließend über die Knotengleichungen die Zweigströme ermittelt.

Das lineare Gleichungssystem Gl. (3.2.7) hat die Lösung

$$I_{\rm m} = R^{-1} U_{\rm qm}$$
. Lösung der Maschenströme (3.2.8a)

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>Dieses ohmsche Gesetz in Matrixform wurde bereits von Maxwell formuliert.

Auflösung der Maschengleichungen Die Lösung des Maschengleichungssystems (3.2.8a) kann manuell oder rechnergestützt, symbolisch oder numerisch erfolgen. Im ersten Fall bietet sich die Cramersche Regel an (praktisch beschränkt auf  $4\times 4$ -Matrizen), im letzteren Fall unterstützt durch Rechnerprogramme (Taschenrechner, MATHCAD, MATLAB). Zur Vermeidung von Fehlern bei der numerischen Auswertung sollte eine Kontrolle über die Leistungsbilanz erfolgen. Danach muss die über alle Quellen zugeführte Leistung gleich der Leistung sein, die in allen Zweigwiderständen umgesetzt wird. Wir vertiefen diesen Aspekt im Zusammenhang mit dem Tellegen-Theorem (Kap. 4.7).

Nach der Cramerschen Regel folgt für den Maschenstrom  $I_{mi}$  aus Gl. (3.2.8a):

$$I_{\mathrm{m}i} = \frac{\det \mathbf{R}_i}{\det \mathbf{R}} = \frac{\Delta_{1i}U_{\mathrm{q}1}}{\Delta} + \frac{\Delta_{2i}U_{\mathrm{q}2}}{\Delta} + \dots + \frac{\Delta_{\mathrm{m}i}U_{\mathrm{q}m}}{\Delta} = \sum_{i=1}^m \frac{\Delta_{ji}U_{\mathrm{q}j}}{\Delta}$$
(3.2.8b)

für jedes  $i=1\dots m$ . Die Determinante der Maschenwiderstandsmatrix lautet

$$\det \mathbf{R} = \Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & \cdots & R_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{m1} & \cdots & R_{mm} \end{vmatrix},$$

$$\det \mathbf{R}_i = \begin{vmatrix} R_{11} & \dots & R_{1(i-1)} & U_{\mathbf{q}1} & R_{1(i+1)} & \dots & R_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ R_{m1} & \dots & R_{m(i-1)} & U_{\mathbf{q}m} & R_{m(i+1)} & \dots & R_{mm} \end{vmatrix}$$

ferner ist det  $\mathbf{R}_i$  die Determinante der Matrix  $\mathbf{R}$  mit Ersatz der Spalte i durch den Quellenspannungsvektor  $\mathbf{U}_{\mathbf{q}}$ . Die Unterdeterminante oder Adjunkte  $\Delta_{ji}$  zum Platz ji ist die Determinante der um die Zeile j und Spalte i reduzierten Matrix  $\mathbf{R}$  multipliziert mit  $(-1)^{i+j}$ .

Die Determinante der Widerstandsmatrix hängt nur von der Netzwerktopologie ab. Sie enthält bei Netzwerken ohne gesteuerte Quellen keine negativen Terme.

Für größere Netzwerke bietet sich die direkte numerische Auswertung der Gl. (3.2.7b) mit Nutzung der Matrixinversion an (s. Gl. (3.4.13)), für die es effiziente Implementierungen gibt. Interessiert jedoch nur der Einfluss bestimmter Bauelementeeigenschaften in einem (oder wenig zusammengefassten) Zweig, etwa für Optimierungsuntersuchungen, so stellt die Anwendung der Zweipoltheorie eine Alternative dar (s. Kap. 3.3.6): das Restnetzwerk wird als aktiver Zweipol numerisch ausgewertet und der gewünschte Zweig analytisch berücksichtigt.

Vertiefung Zweigströme, Zweigspannungen Nach Gl. (3.2.8) setzt sich der Maschenstrom als Summe der Wirkungen der einzelnen Quellenspannungen nach Maßgabe eines "Übertragungsfaktors"  $\Delta_{ji}/\Delta$  zusammen: Überlagerungsprinzip. Aus den Maschenströmen  $I_{mi}$  folgen die Zweigströme durch Linearkombination (Addition, Subtraktion). Auch dafür bietet sich die Matrixdarstellung an. Wir stellen ein Schema mit den Maschenströmen als Spal-

ten und den Zweigströmen als Zeilen auf. Ausgang ist der einzelne Zweig. Wird er von einem Maschenstrom durchflossen, so ist der zugehörige Platz mit +1 (gleiche Stromrichtungen) bzw. -1 (entgegengesetzt) versehen. Alle übrigen Plätze der Zeile erhalten Nulleinträge: Das Schema lautet in allgemeiner Schreibweise

Die Koeffizienten  $c_{ij}$  bestimmen sich nach der angegebenen Regel. Als Beispiel betrachten das Netzwerk Abb. 3.2.4a mit den dort eingeführten sechs Zweig- und drei Maschenströmen (Abb. c). Jeder Zweigstrom wird durch die beitragenden Maschenströme ausgedrückt, z. B.  $I_1 = I_{\rm m1} - I_{\rm m3}$  usw. So folgt das rechte Schema Gl. (3.2.9). In Matrixform gehört dazu

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}.$$
 Beziehung Zweig-Maschenstrom (3.2.10)

Dabei bedeuten C die Zweig-Maschen-Inzidenzmatrix<sup>7</sup>, I den Vektor der Zweigströme und  $I_{\rm m}$  den Vektor der Maschenströme. Die Spalten von C geben an, zu welchen Zweigströmen ein Maschenstrom beiträgt und die Zeilen, welche Maschenströme einen Zweigstrom bilden.

Zweig- und Maschenströme hängen über die Zweig-Maschen-Inzidenzmatrix  ${m C}$  zusammen.

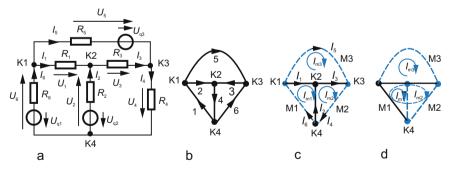


Abb. 3.2.4. Beispiel Maschenstromanalyse. (a) Netzwerk. (b) Gerichteter Graph des Netzwerkes. (c) Gewählter vollständiger Baum, Festlegung der Maschenströme (Fenstermaschenwahl). (d) Anderer vollständiger Baum mit anderen Maschen-/Schleifenströmen

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup>incidere (lat.) verbinden.

In den einzelnen Maschen gilt der Maschensatz für die Zweigspannungen. Dabei besteht der allgemeine Zweig nach Abb. 3.1.3 aus der Reihenschaltung eines Widerstandes R mit einer Spannungsquelle  $U_{\rm q}$ . Ein Zweig zwischen den Knoten i und j hat dann die Zweigbeziehung  $U_{ij}=R_{ij}I_{ij}-U_{{\rm q}ij}$  (bei Verbraucherrichtung (s. Gl. (3.1.3)).

Die Maschengleichungen für die Zweigspannungen  $U_1 \dots U_6$  in Abb. 3.2.4a lauten somit (in Umlaufrichtung des jeweiligen Maschenstromes)

$$M1: U_1 - U_2 + U_6 = 0$$
  
 $M2: U_2 + U_3 + U_4 = 0$   
 $M3: -U_1 - U_3 + U_5 = 0$ 

oder

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_6 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{U}_{\mathbf{z}} = \boldsymbol{0}.$$

Dabei sind Spannungsquellen in die Zweigspannungen eingeschlossen:  $U_2 = I_2R_2 - U_{q2}$ ,  $U_5 = I_5R_5 + U_{q3}$ ,  $U_6 = I_6R_6 - U_{q1}$ . Die eingeführte *Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix* M (Index-Zuordnung ( $m_{i,j}$  Masche (Zeile) i, Zweig (Spalte) j))

besteht aus m Zeilen und z Spalten. Man erkennt weiter, dass in der Spalte der Matrix, die den Verbindungszweigen zugeordnet ist (Spalten  $4 \dots 6$ ), immer nur ein Element von null verschieden ist während in den Spalten, die zu Baumzweigen gehören (Spalten  $1 \dots 3$ ), wenigstens zwei Elemente von null verschieden sind. Ein Vergleich der Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M mit der oben eingeführten Zweig-Maschen-Inzidenzmatrix C ergibt<sup>8</sup>

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}.$$
 Maschensatz (3.2.11)

Dies ist der Maschensatz in der Form  $\Sigma U=0$  für jede Masche ausgedrückt für den Vektor U der Zweigspannungen (vorausgesetzt, dass er in der gleichen Weise geordnet ist wie der Vektor der Zweigströme I). Ferner folgt  $M=C^{\mathrm{T}}$ 

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup>Die transponierte Matrix  $C^{T}$  geht aus C durch Vertauschen von Zeilen und Spalten hervor. Dabei werden die Elemente  $c_{ij}$  mit  $c_{ji}$  der Matrix C vertauscht. So entsteht z. B. aus einer  $6 \times 3$  Matrix eine  $3 \times 6$  Matrix.

bzw.  $C = M^{\mathrm{T}}$ : die Maschen-Zweig Inzidenzmatrix ist die Transponierte der Zweig-Maschen Inzidenzmatrix! Wir können deshalb auf die weitere Benutzung der Maschen-Inzidenzmatrix C zugunsten von M verzichten<sup>9</sup>.

Die Zweigspannungen sind über die Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M miteinander verknüpft. Sie gibt an, welche Zweige des Graphen mit welchen Maschen inzident sind. Die Zeilen entsprechen den Maschen, die Zweige den Spalten. Letztere kennzeichnen, zu welchen Maschen die betreffende Zweigspannung beiträgt und die Zeilen, welche Zweige zu einer Masche gehören.

Die Lösung der Zweigströme lautet schließlich mit Gl. (3.2.10), (3.2.8a)

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_{\text{q}} = \boldsymbol{M}^{\text{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{U}_{\text{q}}. \quad \begin{array}{l} \text{Zweigströme-Spannungsquellen,} \\ \text{Maschenstromverfahren} \end{array} (3.2.12)$$

Dabei wurde  $U_{qm} = U_q$  gesetzt.

Das Schema Gl. (3.2.10) enthält in den Zweigströmen auch die m Maschenströme mit (im Schema rechts z. B.  $I_4 = I_{\rm m2},\ I_5 = I_{\rm m3},\ I_6 = I_{\rm m1}$ ). Deshalb kann der Zweigstromvektor prinzipiell auch auf einen Vektor reduziert werden, der nur die Ströme in den Baumzweigen (in Abb. 3.2.4a  $I_1,\ I_2,\ I_3$ ) umfasst. Dadurch verkleinert sich die Matrix C resp. M. Im Kap. 3.4 erfolgen dazu weitere Überlegungen. Durch Umordnung der Zeilen der Matrix C in eine Einheitsmatrix E und einen Rest wird die Verknüpfung zwischen Baumzweig- und Maschenströmen deutlicher.

**Alternativform** Genauer betrachtet wurde in Gl. (3.2.9) die Zuordnung der Zweigund Maschenströme auf Zeilen und Spalten vertauscht, was zur Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M führte

In den Spalten dieser Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix, die Verbindungszweigen zugeordnet sind  $(I_4, I_5, I_6)$ , steht jeweils nur ein von null verschiedenes Element, während in den restlichen Baumzweigen mindestens zwei von null verschiedene Elemente auftreten.

Die Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M ist eine spezielle Form der allgemeineren Schleifen-Zweig-Inzidenzmatrix B. Sie wird später ausschließlich verwendet. Es hat sich eingebürgert, die Zweige als Spalten anzusetzen und die Zeilen als Maschen (wie hier) oder in einer anderen Form auch als Knoten. In den folgenden Ausführungen kann deshalb  $C = M^T$  bzw.  $M = C^T$  ausgetauscht werden.

 $<sup>^9\</sup>mathrm{Die}$  Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M wird künftig kurz als Maschen-Matrix bezeichnet.

Beispiel 3.2.3 Unabhängige Maschen Wir vertiefen die Analyse der Schaltung Abb. 3.2.4a mit k=4 Knoten (K1, ..., K4), z=6 Zweigen und m=6-3=3 unabhängigen Maschen, entweder durch Zeichnen eines vollständigen Baumes oder direkt aus der Schaltung (gelegentlich als "äußere Fenstermaschen" bezeichnet, Abb. 3.2.4c). Hier sind die Zweige 1...3 Baumzweige und Zweige 4...6 Verbindungszweige. Der Zweigstrom durch  $R_2$  wird aus  $I_{\rm m1}$ ,  $I_{\rm m2}$  gebildet.

Die Lösungsmethodik erfordert folgende Schritte:

- Der vollständige Baum ergibt m=3 unabhängige Zweige als Baumkomple-
- Es werden drei unabhängige Maschenströme  $I_{\mathrm{m}1} \dots I_{\mathrm{m}3}$  in den Maschen M1  $\dots$ M3 mit je einem unabhängigen Zweig (= Verbindungszweig) eingeführt.
- Man erhält die Maschengleichungen in Matrixform

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_6 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{\text{m1}} \\ I_{\text{m2}} \\ I_{\text{m3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\text{q1}} - U_{\text{q2}} \\ U_{\text{q2}} \\ -U_{\text{q3}} \end{pmatrix}.$$

$$(3.2.13)$$

Dieses Gleichungssystem folgt auch sofort aus dem Netzwerk. Sichtbar ist die Symmetrie der Matrix:  $R_{ij} = R_{ji}$ . Die Hauptdiagonalglieder sind die Maschenwiderstände  $R_{ii}$ . Beispielsweise ergibt ein Umlauf in M2 die Widerstandssumme  $R_2+R_3+R_4$ , in M3 die Summe  $R_1+R_3+R_5$  usw. Das Nebendiagonalglied  $R_{12}$ wird aus dem Spannungsabfall gebildet, der in Masche 1 (in Umlaufrichtung von  $I_{\rm m1}$ ) durch den Maschenstrom  $I_{\rm m2}$  aus Masche 2 entsteht. Er ist nach der Vorzeichenfestlegung negativ, also  $-R_2I_{m2}$ , d.h.,  $R_{12} = -R_2$ . In Masche M1 entsteht noch ein Spannungsabfall herrührend von  $I_{m3}$  an  $R_1$  (letztes Glied der ersten Zeile). Mit der ersten Zeile ist auch die erste Spalte bestimmt. So kann die Koeffizientenmatrix direkt aus der Schaltung abgelesen werden und das Aufstellen der Maschengleichungen entfällt.

Durch die unabhängigen Maschen und gleiche Umlaufrichtungen der Maschenströme hat das Schema noch eine Besonderheit: alle Nebendiagonalglieder haben negative Vorzeichen (das ist bei unterschiedlichen Umlaufrichtungen und/ oder allgemeinem Baum nicht der Fall!).

Der gesuchte Zweigstrom durch  $R_2$  erfordert die Beziehungen zwischen Zweigund Maschenströmen (Gl. (3.2.10)). Es gibt 6 Zweigströme  $I_1 \dots I_6$ , davon 3 Maschenströme. Der Schaltung oder auch der Zweig-Maschen-Inzidenzmatrix Gl. (3.2.9) entnimmt man

Gr. (3.2.3) enomination than 
$$I_1=I_{\rm m1}-I_{\rm m3},\quad I_2=I_{\rm m2}-I_{\rm m1},\quad I_3=I_{\rm m2}-I_{\rm m3},\\ I_4=I_{\rm m2},\quad I_5=I_{\rm m3}\quad I_6=I_{\rm m1}$$
 Die Knotenregel wird durch die Maschenströme von selbst erfüllt z.B. gilt für

Knoten K2:  $I_1 + I_2 - I_3 = (I_{m1} - I_{m3}) + (I_{m2} - I_{m1}) - (I_{m2} - I_{m3}) = 0.$ 

Im letzten Schritt lösen wir das Gleichungssystem (3.2.13) nach  $I_{\rm m2}$  und  $I_{\rm m1}$ auf und berechnen den Zweigstrom  $I_2 = I_{m2} - I_{m1}$ .

Einfache Beziehungen ergeben sich für Zweigströme, die auch Maschenströme sind (hier  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ ). Damit der Zweigstrom  $I_2$  zugleich Maschenstrom wird, müsste ein anderer vollständiger Baum gewählt werden, wie beispielsweise in Abb. 3.2.4d. Dann entfällt allerdings der Vorteil der äußeren Fenstermaschen.

# 3.2.3 Erweitere Maschenstromanalyse\*

Allgemeine Erweiterungen Wir entschärfen jetzt die für das Grundverfahren getroffenen Voraussetzungen und lassen unabhängige Stromquellen, gesteuerte Quellen und gekoppelte Spulen zu.

Unabhängige Stromquellen können unterschiedlich einbezogen werden:

- Durch Strom-Spannungsquellen-Transformation. Sie setzt einen Quelleninnenwiderstand voraus. Er ist ggf. hinzuzufügen und in der Lösung wieder zu entfernen.
- Durch *Quellenteilung* und *-versetzung* (über Widerstandszweige und anschließende Wandlung in Spannungsquellen).
- Durch Einführung des Quellenstromes als Maschenstrom im betreffenden Zweig: Supermaschenanalyse.
- Einführung eines kleinen Hilfsleitwertes parallel zur Stromquelle (und Wandlung in eine Spannungsquelle), der das Ergebnis praktisch nicht beeinflusst. Dieses Verfahren nutzen numerische Lösungen.

### Gesteuerte Quellen

- Spannungsquellen werden als maschenstromgesteuert formuliert und bei Aufstellung des Gleichungssystems vorerst als unabhängig angesetzt (und bei den unabhängigen Spannungen rechts berücksichtigt). Im nächsten Schritt bringt man sie nach links zum entsprechenden Maschenstrom. Dadurch geht die Matrixsymmetrie verloren.
- Stromquellen werden in gesteuerte Spannungsquellen überführt oder, falls nicht möglich, wie unabhängige Stromquellen behandelt (s. o.).

Gekoppelte Spulen berücksichtigt man durch ihre Ersatzschaltung mit gesteuerten Spannungsquellen (Bd. 2). Jede Spulenseite wird als Zweig des Netzwerkes betrachtet und die Gegeninduktivität als maschenstromgesteuerte Spannungsquelle modelliert.

Zusammengefasst ist in der **Lösungsmethodik Maschenstromanalyse** der Punkt 3 für Netzwerke mit unabhängigen Stromquellen, gesteuerten Quellen und gekoppelten Spulen durch folgende Schritte zu ergänzen:

- Transformiere unabhängige Stromquellen in unabhängige Spannungsquellen (evtl. unter Benutzung von Netzwerkelementen).
- Gesteuerte Spannungsquellen betrachte man zunächst als unabhängige Quellen und drücke anschließend ihre Steuergröße durch Maschenströme aus.

- Gesteuerte Stromquellen betrachte man zunächst als unabhängige Quellen, transformiere sie in Spannungsquellen und drücke ihre Steuergröße anschließend durch Maschenströme aus.
- Gekoppelte Spulen werden durch ihre Ersatzschaltung mit stromgesteuerter Spannungsquelle erfasst.

Stromquellen als Maschenströme, Supermaschenverfahren Bei Stromquellen kann es vorteilhaft sein, Quellenströme selbst als (bekannte) Maschenströme zu verwenden. Diese Methode ist in einer speziellen Variante als Supermaschenverfahren (superloop analysis) bekannt. Dazu wird ein vollständiger Baum so gewählt, dass (unabhängige und gesteuerte) Stromquellen nur in Verbindungszweigen liegen. Dann bildet jede eine unabhängige Fundamentalschleife, deren Schleifenstrom (ev. vorzeichenbehaftet) gleich dem jeweiligen Quellenstrom ist. Hat das Netzwerk n Stromquellen und gibt es insgesamt m=z-(k-1) Fundamentalschleifen, so sind nur noch m-n unabhängige Schleifenströme zu bestimmen! Damit entfällt die Aufstellung der n Maschengleichungen über Stromquellen, weil ihre Maschenströme bekannt sind. Mit steigender Zahl an Stromquellen sinkt bei diesem Ansatz der Lösungsaufwand. Das Verfahren ist in dieser Form unabhängig von der Lage der Stromquellen anwendbar, für spezielle Stromquellenanordnungen heißt es Supermaschenverfahren.

## Lösungsmethodik Maschenstromanalyse mit Stromquellen

- 1. Man entferne alle (idealen) Stromquellen (abhängige und gesteuerte) aus dem Netzwerk, bilde den vollständigen Baum und damit m-n unabhängige Schleifen.
- 2. Zuordnung eines Maschenstromes zu jeder unabhängigen Schleife.
- 3. Man setze die Stromquellen der Reihe nach wieder ein und führe über jede einen Maschenstrom, der (vorzeichenbehaftet) gleich dem Quellenstrom ist. Bei spannungsgesteuerten Quellen müssen die Steuergrößen durch Maschenströme ausgedrückt werden.
- 4. Für jede Schleife, die keine Stromquelle enthält, wird die Maschengleichung aufgestellt. So entstehen m-n unabhängige Gleichungen.

Beim *Supermaschenkonzept* wird das Verfahren modifiziert. In Netzwerken treten drei Maschenarten auf:

- Maschen ohne Stromguellen, die wesentlichen oder Hauptmaschen,
- Maschen mit einer Stromquelle am "Schaltungsrand" (sog. äußere oder nicht wesentliche Maschen),
- Supermaschen.

Eine Supermasche ist eine größere Masche gebildet aus zwei Maschen mit gemeinsamer idealer Stromquelle.

Am einfachsten erkennt man die Maschengruppen durch Auftrennen aller Stromquellen und Ersatz der Spannungsquellen durch Kurzschlüsse.

## Zur Analyse werden

- wie bisher Maschenströme in allen Hauptmaschen eingeführt,
- die Stromquellen über äußere Maschen als (bekannte) Maschenströme über das Netzwerk geführt,
- in jeder Supermasche zwei Maschenströme über eine gemeinsame (bekannte) Stromquelle eingeführt.

Die Supermasche wird so durch einen Spannungsumlauf längs der Masche und eine Zwangsbedingung (Knotensatz) zwischen den beiden (eingeführten) Maschenströmen und dem Quellenstrom beschrieben, m. a. W. nur durch einen (unbekannten) Maschenstrom.

Diese Stromquellenzwangsbedingung eliminiert einen der beiden Maschenströme. So erklärt sich (ebenso wie für Stromquellen in äußeren Maschen), dass jede Stromquelle die Zahl der zu bestimmenden Maschenströme um eins reduziert. Ein anderer Ansatz ist die Beschreibung einer Supermasche durch eine einzuführende  $Hilfsspannung\ U_H$  über der Stromquelle (s. u.).

## Lösungsmethodik Supermaschenverfahren

- 1. Entferne alle unabhängigen und gesteuerten Stromquellen und bereite das Netzwerk zur Maschenstromanalyse vor.
- 2. Füge der Reihe nach die Stromquellen in den äußeren Maschen ein und lege jeweils einen Maschenstrom durch jede Stromquelle (der damit bekannt ist).
- 3. Führe in jeder Supermasche zwei Maschenströme über die gemeinsame Stromquelle ein und verbinde beide Maschenströme mit dem Quellenstrom über den Knotensatz (Zwangsbedingung). (Bei gesteuerten Quellen muss die Steuergröße durch Maschenströme ausgedrückt werden). Eliminiere so einen der beiden Maschenströme.
- 4. Stelle die m-n Maschengleichungen für die unabhängigen Maschen nach 1. und die Supermaschen nach 3. auf und löse nach den m-n unbekannten Maschenströmen.

Die Maschengleichung für eine Supermasche kann man auch dadurch gewinnen, dass über der gemeinsamen Stromquelle eine  $Hilfsspannung\ U_H$  eingeführt und anschließend zwei Maschengleichungen für jeden der beiden Maschenströme mit Einbezug der Hilfsspannung aufgestellt werden. Anschließend eliminiert man die Hilfsspan-

nung aus beiden Gleichungen. Das ergibt den Maschenumlauf der Supermasche. Da beide Maschenströme über den Knotensatz mit der Stromquelle zusammenhängen, entsteht die Supermaschengleichung automatisch.

Beispiel 3.2.4 Stromquelle, Supermasche Abb. 3.2.5a zeigt ein Netzwerk mit Stromquelle. Eingetragen sind zwei Maschen (Maschenströme  $I_{\rm m1}$ ,  $I_{\rm m2}$ ), von denen  $I_{\rm m2}$  durch die Stromquelle  $I_{\rm q}$  festliegt. Die Schaltung hat z=3 Zweige, k=3 Knoten<sup>10</sup> und damit reicht mit m=1 eine Maschengleichung zur Bestimmung des Maschenstromes  $I_{\rm m1}$ . Es gelten

M1: 
$$R_1(I_{m1} - I_{m2}) + R_2I_{m1} - U_q = 0$$
  
ZB:  $I_{m2} = -I_q$   $\rightarrow I_{m1} = \frac{U_q - R_1I_q}{R_1 + R_2}$ ,

also neben der Maschengleichung für Masche M1 noch die Zwangsbedingung für Maschenstrom  $I_{\rm m2}$  durch die Stromquelle. Die Auflösung ist sofort möglich. Die Stromquelle hätte auch über  $R_2$  in eine Spannungsquelle umgerechnet werden können.

In Schaltung Abb. 3.2.5b liegt die Stromquelle im Innern eines Netzwerkes. Es gibt zwei Maschen (Maschenströme  $I_{\rm m1}$ ,  $I_{\rm m2}$ ) und eine Zwangsbedingung durch die Stromquelle. Wir bringen über der Stromquelle die Hilfsspannung  $U_{\rm H}$  an (später eliminiert) und formulieren zunächst die Maschengleichungen

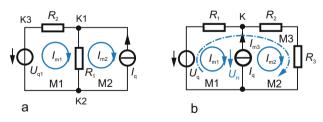
M1: 
$$R_1I_{m1} + U_H - U_q = 0$$
  
M2:  $-U_H + (R_2 + R_3)I_{m2} = 0$ . (3.2.14)  
ZB:  $I_q = I_{m2} - I_{m1}$ 

Zur Verfügung stehen drei Gleichungen für beide Maschenströme und die Hilfsspannung. Bei Addition beider Maschengleichungen M1, M2 hebt sich  $U_{\rm H}$  heraus:

$$R_1 I_{m1} + (R_2 + R_3) I_{m2} = U_{q}. (3.2.15)$$

Zusammen mit der Zwangsbedingung lässt sich ein Maschenstrom eliminieren. Die Lösung lautet z. B. für  $I_{m1}$ :

$$I_{\rm m1} = \frac{U_{\rm q} - I_{\rm q}(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2 + R_3)}.$$



**Abb. 3.2.5.** Beispiel zur Supermasche. (a) Netzwerk mit Stromquelle. (b) Bildung einer Supermasche

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>Hier wurde der Verbindungsknoten K3 berücksichtigt, daher entstehen drei Zweige. Die Stromquelle tritt im Graph nicht auf.

Sie entsteht auch direkt durch Maschenbildung über  $U_q$ ,  $R_1 \dots R_3$  als Supermasche, das ist Gl. (3.2.15). Über die Quellenzwangsbedingung wird anschließend ein Maschenstrom eliminiert.

Beispiel 3.2.5 Stromquellen im Maschenstromverfahren Die Schaltung Abb. 3.2.6a enthält die Stromquelle  $I_{\rm q2}$  in einer äußeren Masche und die Stromquelle  $I_{\rm q3}$  als Teil zweier Maschen (Supermasche). Der vollständige Baum (Abb. b) mit  $k=4,\ z=6 \to m=3$  verlangt drei unabhängige Maschen. Wegen der beiden Stromquellen (n=2) muss eine Maschengleichung zur vollständigen Schaltungsbeschreibung ausreichen. Wir untersuchen die Schaltung zunächst mit dem Überlagerungskonzept und entfernen beide Stromquellen. Dann bleibt die Hauptmasche M1' (s. Abb. b, c) mit dem Maschenstrom  $I'_{\rm m1}$ :

M1': 
$$I'_{m1}(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) = U_{q1}$$
.

Überlagerung der Stromquellenmaschenströme  $I_{\rm m2}=I_{\rm q2}$  und  $I_{\rm m3}=-I_{\rm q3}$  bringt die Zusätze

$$-I_{\rm m2}(R_1+R_3)$$
 und  $I_{\rm m3}(R_3+R_4)$ 

in Umlaufrichtung von  $I'_{m1}$ . So genügt die Maschengleichung M1' zu Bestimmung von  $I'_{m1}$ :

M1': 
$$R_2I_{m1} + R_4(I_{m1} + I_{m3}) + R_3(I_{m1} + I_{m3} - I_{m2}) + R_1(I_{m1} - I_{m2}) - U_{q1} = 0$$

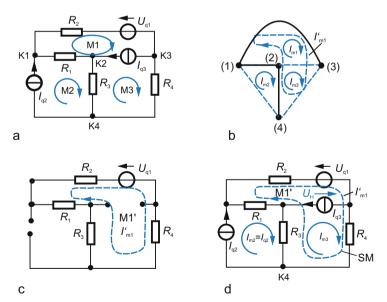


Abb. 3.2.6. Maschenstromverfahren und Stromquellen. (a) Netzwerk. (b) Gewählter vollständiger Baum. (c) Entfernung der Stromquellen. (d) Bildung einer Supermasche

oder geordnet mit  $I_{m1} = I'_{m1}$ 

$$(R_1 + R_2 + R_3 + R_4)I_{m1} = U_{q1} + (R_1 + R_3)I_{m2} - (R_3 + R_4)I_{m3}$$
  
=  $U_{q1} + (R_1 + R_3)I_{q2} + (R_3 + R_4)I_{q3}$ . (3.2.16)

Links steht als Beifaktor der Ringwiderstand, den der Maschenstrom  $I_{\rm m1}$  vorfindet. Die rechten stromabhängigen Terme sind Quellenspannungen, die die Stromquellen jeweils an den betreffenden Widerständen erzeugen. Die rechte Seite drückt gleichzeitig die Quellenüberlagerung aus. Beispielsweise kann die Quelle  $I_{\rm q2}$  ( $I_{\rm q3}$  analog) über den Knoten 2 (5) geteilt und die Stromquelle über die Widerstände  $R_1$ ,  $R_3$  in Spannungsquellen verwandelt werden. Das sind genau die Terme rechts.

Alternativ lässt sich die Stromquelle  $I_{\rm q3}$  auch als Bestandteil einer Supermasche (Abb. 3.2.6d) auffassen bestehend aus den Maschen M1 (Maschenstrom  $I_{\rm m1}$ ) und M3 ( $\rightarrow I_{\rm m3}$ ). Die Zwangsbedingung beider Maschenströme bestimmt die Stromquelle  $I_{\rm q3}$ 

z. B.: 
$$I_{\text{q3}} = I_{\text{m1}} - I_{\text{m3}}$$
. (3.2.17)

Die Gleichung der Supermasche (SM) lautet (nachdem vorher noch die Stromquelle  $I_{\rm q2}$  im Maschenstrom  $I_{\rm m2}$  berücksichtigt wurde)

SM: 
$$I_{m1}(R_1 + R_2) + I_{m3}(R_3 + R_4) - I_{m2}(R_1 + R_2) = U_{q1}$$
. (3.2.18)

Wird  $I_{\rm m3}$  durch die Zwangsbedingung Gl. (3.2.17) eliminiert und  $I_{\rm m2}$  durch  $I_{\rm q2}$  ersetzt, so ergibt sich die Lösung Gl. (3.2.16).

Die aus M1 und M3 bestehende Supermasche M1' und die Knotenzwangsbedingung Gl. (3.2.17) bilden so ein hinreichendes Gleichungssystem für den Maschenstrom  $I_{\rm m1}$ .

Gleichwertig ordnen wir jetzt der Stromquelle in der Supermasche eine Hilfsspannung  $U_{\rm H}$  (Abb. 3.2.6d) zu. Es ergibt sich (nach Hinzunahme von  $I_{\rm q2}$ )

M1: 
$$R_2I_{m1} - U_H + R_1(I_{m1} - I_{m2}) - U_{q1} = 0$$
  
M3:  $U_H + R_4I_{m3} + R_3(I_{m3} - I_{m2}) = 0$   
z. B.:  $I_{m1} - I_{m3} = I_{q3}$ . (3.2.19)

Durch Addition von M1, M3 zur Supermasche M1' (3.2.18) fällt die Hilfsspannung heraus. Einsetzen der Quellenzwangsbedingung und der Quellenströme ergibt schließlich die Lösung Gl. (3.2.16).

## 3.2.4 Maschenstromanalyse in Matrixform

Die Maschenstromanalyse erfolgte bisher sowohl in Einzelschritten als auch in Matrixdarstellung. Wir fassen sie jetzt in allgemeiner Matrixschreibweise zusammen mit der in Gl. (3.2.11) eingeführten Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M. Ausgang sind die Zuordnungen von Zweigspannungen und Zweigströmen in den einzelnen Zweigen herrührend vom Zweig ij:  $U_{ij} = R_{ij}I_{ij} - U_{qij}$  (s. Gl. (3.1.3) und Abb. 3.1.3)

$$U_z = R_z I_z - U_{qz}$$
. allgemeiner Netzwerkzweig (3.2.20)

Dabei wurde zur Hervorhebung der Zweiggrößen der Index z angefügt.  $R_z$  ist die  $Diagonalmatrix\ der\ Zweigwiderstände$  (nur Diagonalelemente).

Die Verknüpfung von Zweig- und Maschenströmen wird in der Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix M (eine  $m \times z$ -Matrix) ausgedrückt (s. Gl. (3.2.10))

$$I_{z} = M^{T} I_{m}$$
, Beziehung Zweig-Maschenstrom (3.2.21)

dazu tritt der Maschensatz Gl. (3.2.11) für die Zweigspannungen (das sind insgesamt m Gleichungen)

$$MU_z = U_m = 0.$$
 Maschensatz (3.2.22)

Zusammengefasst führen diese drei Gleichungen auf die Matrixformulierung des Maschensatzes ausgedrückt durch Maschenströme

$$M{U}_{\mathrm{z}} = \underbrace{M{R}_{\mathrm{z}}{M}^{\mathrm{T}}}_{R} I_{\mathrm{m}} - \underbrace{M{U}_{\mathrm{qz}}}_{U_{\mathrm{qm}}} = RI_{\mathrm{m}} - U_{\mathrm{qm}} = 0$$

oder

$$RI_{\rm m} = U_{\rm qm}.$$
 Maschenstromanalyse (3.2.23)

Die Maschenwiderstandsmatrix  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{R}_{\mathrm{m}}$  ergibt sich aus der Diagonalmatrix  $\mathbf{R}_{\mathrm{z}}$  der Zweigwiderstände. Sie ist eine  $m \times m$ -Matrix vom Rang m. Die rechts stehende Maschenquellenspannung  $U_{\mathrm{qm}}$  enthält jeweils die Summe der Quellenspannungen in einer Masche. Im letzten Schritt werden aus der Lösung Gl. (3.2.23) die nach Gl. (3.2.21) gesuchten Zweigströme bestimmt.

Die Formulierung Gl. (3.2.23)  $RI_{\rm m} - U_{\rm qm} = 0$  entspricht der Lösung Gl. (3.2.7b). Der Unterschied im Vorzeichen von  $U_{\rm qz}$  ergibt sich, weil im allgemeinen Maschenzweig Gl. (3.1.3) die Verbraucherrichtung für den Strom verwendet wurde.

Wir zeigen später dazu zwei computergestützt gelöste einfache Beispiele 3.5.2 und 3.5.3 (Kap. 3.5.1).

Zusammengefasst kann das Gleichungssystem der Maschenstromanalyse direkt aus der Schaltung mit der Maschen-Inzidenzmatrix aufgestellt werden. Das ist rechnergestützt möglich und damit automatisierbar.

# 3.2.5 Maschenstromanalyse in nichtlinearen Netzwerken

In nichtlinearen Netzwerkelementen hängt der Spannungsabfall nichtlinear vom Maschenstrom durch das betreffende Element ab. Grundsätzlich bleibt deshalb die Lösungsmethodik zum Aufstellen der Gleichungen erhalten, nur werden die nichtlinearen Elemente zunächst als *gesteuerte Quellen* betrachtet (treten rechts auf). Erst dann stellt man sie nach links um. Dabei entsteht

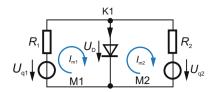


Abb. 3.2.7. Nichtlineares Netzwerkelement im Maschenstromverfahren

zwangsläufig eine nichtlineare Gleichung, die mit entsprechenden Verfahren (z. B. Newtonverfahren) zu lösen ist.

Beispiel 3.2.6 Maschenstromanalyse, Diode Die Schaltung Abb. 3.2.7 mit einer flussgepolten Halbleiterdiode ( $U_{\rm D} \approx U_{\rm T} \ln(I/I_{\rm S})$ ) führt mit der Maschenstromanalyse auf zwei Maschenströme  $I_{\rm m1}$ ,  $I_{\rm m2}$ :

M1: 
$$R_1I_{m1} = U_{q1} - U_D(I_{m1}, I_{m2}),$$
  
M2:  $R_2I_{m2} = -U_{q2} + U_D(I_{m1}, I_{m2}).$ 

Die nichtlineare Diodenspannung kommt im nächsten Schritt auf die linke Seite:

M1: 
$$R_1 I_{m1} + U_T \ln \left( \frac{I_{m_1} - I_{m_2}}{I_S} \right) = U_{q1},$$
  
M2:  $-U_T \ln \left( \frac{I_{m_1} - I_{m_2}}{I_S} \right) + R_2 I_{m_2} = -U_{q2}.$ 

Das sind die Maschenstromgleichungen. Die Lösung muss numerisch erfolgen.

# 3.3 Knotenspannungsanalyse

**Einführung** Beim Knotenspannungsverfahren<sup>11</sup> wird die Hilfsvariable "Knotenspannung" so eingeführt, dass jede Maschengleichung automatisch erfüllt ist und daher alle wegfallen.

Das Verfahren umfasst dann

- die Aufstellung der Knotengleichungen für die Zweigströme,
- ihren Ersatz durch die Zweigbeziehungen I = f(U) der Netzwerkelemente ausgedrückt durch Knotenspannungen (statt der Zweigspannung) und die Lösung der Gleichungen nach den Knotenspannungen.

So müssen für ein Netzwerk mit z Zweigen und k Knoten nur die k-1 Knotengleichungen aufgestellt und nach den Knotenspannungen aufgelöst werden.

Im Vergleich zum Maschenstromverfahren sind augenfällig:

 $<sup>^{11}\</sup>mathrm{Die}$  Knotenspannungsanalyse geht auf Maxwell (1873) zurück.

- Wegfall der Baumsuche, auch spielt die Zahl unabhängiger Maschen m = z (k 1) und damit die Anzahl der Zweige keine Rolle,
- weil die Knotenspannungen unabhängige Variablen sind, dürfen *Spannungsquellen nicht auftreten*, denn eine ideale Spannungsquelle zwischen zwei Knoten macht den Strom durch die Quelle unbestimmt.

Das Standardverfahren erlaubt deshalb *nur ideale Stromquellen*. Es lässt sich allerdings für Spannungsquellen, gesteuerte Quellen und gekoppelte Spulen erweitern (s. Kap. 3.3.2).

# 3.3.1 Knotenspannungen, Knotenleitwertmatrix

Nach dem Maschensatz ist die Zweigspannung  $U_{ij}$  zwischen den Knoten i, j die Differenz der zugehörigen Knotenspannungen<sup>12</sup> (Abb. 3.3.1a):

$$U_{ij} = U_{ki0} - U_{kj0}$$
. Zweigspannung  $U_{ij}$  ausgedrückt durch Knotenspannungen (3.3.1)

Man definiert als Knotenspannung  $U_{\rm k0}>0$  die Spannung eines Knotens K gegen einen (willkürlichen) Bezugspunkt 0 (Symbolindex k: Nummer des Knotens). Jeder der k-1 Knoten erhält so eine unabhängige Knotenspannung  $U_{\rm k0}$  als Unbekannte. Sie bilden ein vollständiges System der unabhängigen Spannungsvariablen (s. Tab. 3.1), so wie beim Maschenstromverfahren die m Maschenströme ein vollständiges System der unabhängiger Stromvariablen waren.

**Bezugsknoten** Der *Bezugs*- oder *Referenzknoten* B ist im Prinzip frei wählbar. Er sollte Knoten des Netzwerkes sein, muss es aber nicht. Ein Knoten außerhalb des Netzwerkes erfordert dann k Knotenspannungen (Abb. 3.3.1a). Hat der Bezugsknoten das (elektrische) Potenzial  $\varphi_{\rm B}$ , so nimmt Knoten K das Potenzial  $\varphi_k$  an und es gilt (Abb. 3.3.1b)

$$\varphi_k = \varphi_B + U_{kB},$$
 Knotenpotenzial  $\varphi_k$  (3.3.2)

deswegen wird das Verfahren auch als Knotenpotenzialverfahren bezeichnet $^{13}$ .

<sup>&</sup>lt;sup>12</sup>Der Index 0 entfällt künftig.

<sup>&</sup>lt;sup>13</sup>Begriff nicht vorteilhaft, weil das Potenzial eines Knotens immer gegen einen Bezug angegeben werden muss. Gerade das drückt aber die Knotenspannung aus.

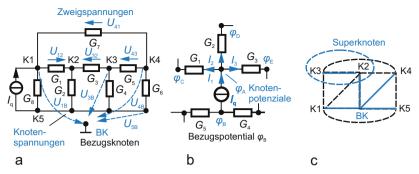


Abb. 3.3.1. Einführung der Knotenspannung. (a) Netzwerk mit Zweig- und Knotenspannungen. Bei einem Bezugspunkt außerhalb des Netzwerkes sind Zweig- und Knotenspannungen getrennt, sonst können bestimmte Zweispannungen auch Knotenspannungen sein. (b) Teil eines Netzwerkes mit Knotenpotenzialen. (c) Vollständiger Baum, Auftreten eines Superknotens

Die aus den Knotenspannungen errechenbaren Zweigspannungen erfüllen den Maschensatz (unabhängig von der Wahl von  $\varphi_B$ ) stets, beispielsweise gilt für Abb. 3.3.1 die Maschengleichung

$$0 = U_{12} - U_{32} - U_{43} + U_{41}$$
  
=  $(U_{1B} - U_{2B}) - (U_{3B} - U_{2B}) - (U_{4B} - U_{3B}) + (U_{4B} - U_{1B}).$ 

Auch das paarweise Auftreten der Knotenspannungen mit unterschiedlichen Vorzeichen erfüllt den Maschensatz.

Aus praktischen Gründen wählt man den k-ten Knoten als Netzwerkknoten und besetzt ihn mit dem Potenzial  $\varphi_{\rm B}=0$ . Nur dann gibt es k-1 unabhängige Knotenspannungen.

Die Knotenspannungen  $U_{k0}$  sind (gegenüber dem Bezugspunkt) stets messbar (was bei Maschenströmen nur in Verbindungszweigen möglich war).

Vorteilhaft ist ein Bezugsknoten mit möglichst vielen Zweigen. Das gilt für Masseknoten in elektronischen Schaltungen durchweg. Dann wird der zugehörige Graph zum Sterngraphen (s. z.B. Abb 3.2.1b). Er umfasst alle k-1 Baumzweige, umgekehrt wird von ihm aus jeder Knoten direkt über einen Baumzweig erreicht.

Die Knotenspannungen sind (durch Wahl eines Sternknotens) identisch mit einem ausgewählten Satz von Baumzweigspannungen.

Die Baumzweigspannungen sind ausgewählt, weil eine Baumzweigspannung im allgemeinen keine Knotenspannung sein muss (s. Kap. 3.4). Umgekehrt impliziert die Einführung der Knotenspannungen mit gemeinsamen Referenzknoten automatisch die Wahl eines Sternbaumes und die Suche unabhängiger Baumzweige entfällt.

Beim Knotenspannungsverfahren ist für jeden der k-1 Knoten der Knotensatz mit den Knotenspannungen aufzustellen, z. B. für Knoten K1 in Abb. 3.3.1a:

$$G_1(U_{k1} - U_{k2}) + G_7(U_{k1} - U_{k4}) = (G_1 + G_7)U_{k1} - G_1U_{k2} - G_7U_{k4} = I_q.$$

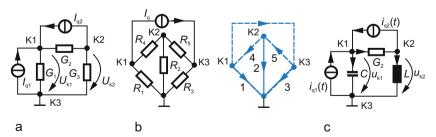
Dabei sind Ströme, die vom Knoten wegfließen, positiv angesetzt. Eine solche Festlegung muss für alle k-1 Knoten des Netzwerkes gelten. Abb. 3.3.1a zeigt ein Netzwerk mit zentralem Referenzknoten K5, von dem aus alle Knoten über einen Baumzweig erreichbar sind. Es gibt z=8 Zweige und k-1=4 unabhängige Knoten (also beim Maschenstromverfahren m=z-(k-1)=4 unabhängige Maschengleichungen). Eine Erhöhung der Zweigzahl (durch weitere Parallelschaltung von Leitwerten) würde die Zweigzahl erhöhen, die Knotenzahl aber nicht. Das unterstreicht den Vorteil des Knotenspannungsverfahrens bei Netzwerken mit vielen Zweigen, aber wenig Knoten.

Der Knotensatz kann gleichwertig auch mit Knotenpotenzialen formuliert werden, beispielsweise für einen Netzwerkknoten mit dem Potenzial  $\varphi$  (Abb. 3.3.1b)

$$G_1(\varphi_A - \varphi_C) + G_2(\varphi_A - \varphi_D) + G_3(\varphi_A - \varphi_E) = I_q$$

Beim Einsetzen des jeweiligen Potenzials hebt sich das Bezugspotenzial heraus und statt dessen treten die Knotenspannungen auf. Deshalb werden Knotenspannungen durchweg mit Knotenspannungen formuliert.

Hinweis: Es gibt allerdings Fälle, in denen nicht alle Knoten von einem Bezugsknoten aus direkt erreichbar sind. Abb. 3.3.1c zeigt ein Beispiel ( $z=9,\,k=6$ ). Vom Referenzknoten 0 aus sind alle bis auf Knoten 3 direkt erreichbar. Zum Knoten K3 gelangt man vom Bezugsknoten aus nur über K2. Das Problem wird unterschiedlich gelöst: man definiert einen "Superknoten" (der Knoten 3 einschließt), dafür kann die Knotenspannung  $U_{20}$  aufgestellt werden oder man wählt einen anderen Referenzknoten. In Fällen, bei denen kein Knoten auffindbar ist mit direktem Zugang zu



**Abb. 3.3.2.** Beispiele zur Knotenspannungsanalyse. (a) Netzwerk. (b) Stromgespeiste Brückenschaltung mit zugehörigem Graph. (c) Netzwerk nach Abb. a mit Energiespeicherelementen

allen, wird das Knotenspannungsverfahren erweitert zum *Schnittmengenverfahren* (s. Kap. 3.4). Der Ansatz mit einem Superknoten basiert darauf.

Die Anwendung der Knotenspannungsanalyse auf ein Netzwerk mit nur unabhängigen Stromquellen erfolgt am besten nach der

#### Lösungsmethodik Knotenspannungsanalyse

- 1. Wahl eines Bezugsknotens im Netzwerk (nach Zweignummerierung und Festlegung der Zweigstromrichtungen).
- 2. Für jeden Knoten i wird die Knotenspannung  $U_{i0}$  nach dem Bezugsknoten eingeführt (Richtung nach 0 positiv).
- 3. Aufstellung der k-1 Knotengleichungen für die Zweigströme. Zum Knoten hinfließende Ströme erhalten negatives, wegfließende positives Vorzeichen. Die Zweigströme sind über die I, U-Beziehung (Leitwertdarstellung) des zugehörigen Netzwerkelementes durch die Knotenspannungen auszudrücken.
- 4. Darstellung der gesuchten Zweigspannungen durch Knotenspannungen.
- 5. Lösung des Gleichungssystems Punkt 3 nach den Knotenspannungen, die gemäß Punkt 4 erforderlich sind.

#### Hinweis:

Zu 1. Er kann Knoten des Netzwerkes sein (bevorzugen) oder außerhalb liegen (fiktiver Knoten). Wird nur ein Zweigstrom gesucht, so sollte ein Knoten dieses Zweiges Bezugspunkt sein.

Zu 3. Jeder Knoten wird nach unabhängigen Quellenströmen rechts und restlichen Zweigströmen links geordnet und anschließend nach den Knotenspannungen: Schematische Anordnung der k-1 (bzw. k) Knotengleichungen (Zeilen) und k-1 (k) Knotenspannungen (Spalten). Unabhängige Stromquellen sollten beim Knotenspannungsverfahren immer in Baumzweigen liegen. Dann treten sie nur in der Knotengleichung auf, die zu diesem Baumzweig gehört.

Zu 5. Der Schritt reduziert sich auf die Berechnung einer Knotenspannung, wenn der Bezugsknoten zum Zweig der gesuchten Zweigspannung gehört.

Beispiel 3.3.1 Knotenspannungsverfahren In der Schaltung Abb. 3.3.2a (z=3, k=3) wählen wir einen Bezugsknoten (K3) für die Knotenspannungen  $U_{\rm k1},\,U_{\rm k2},$  drücken alle Zweigströme durch diese Knotenspannungen aus und stellen die Knotengleichungen für die Knoten K1, K2 auf. Die Zweigströme werden durch die betreffenden Zweigleitwerte und die Zweigspannungen formuliert. Es gilt (abfließende Ströme positiv, zufließende negativ)

K1: 
$$-I_{q1} - I_{q2} + I_2 + I_1 = 0$$
 K2:  $+I_{q2} - I_2 + I_3 = 0$ 

und weiter:  $I_1=G_1U_{13}=G_1U_{k1},\ I_2=G_2U_{12}=G_2(U_{k1}-U_{k2}),\ I_3=G_3U_{23}=G_3U_{k2}.$  Das ergibt die Knotengleichungen

K1: 
$$(G_1 + G_2)U_{k1}$$
  $-G_2U_{k2} = I_{q1} + I_{q2}$ ,  
K2:  $-G_2U_{k1} + (G_2 + G_3)U_{k2} = -I_{q2}$ . (3.3.3)

Durch Auflösen nach  $U_{k1}$ ,  $U_{k2}$  ist die Aufgabe gelöst, die Zweigspannungen  $U_{13}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{12}$  folgen über  $U_{13} = U_{k1}$ ,  $U_{21} = U_{k2} - U_{k1}$ ,  $U_{23} = U_{k2}$ . Würde der Bezugspunkt im Raum und nicht auf Knoten 3 liegen, so wären drei Knotenspannungen  $U_{k1} \dots U_{k3}$  mit drei Knotengleichungen erforderlich:

K1: 
$$(G_1 + G_2)U_{k1}$$
  $-G_2U_{k2}$   $-G_1U_{k3} = I_{q1} + I_{q2}$ ,  
K2:  $-G_2U_{k1} + (G_2 + G_3)U_{k2}$   $-G_3U_{k3} = -I_{q2}$ ,  
K3:  $-G_1U_{k1}$   $-G_3U_{k2} + (G_1 + G_3)U_{k3} = -I_{q1}$ . (3.3.4)

Für  $U_{\rm k3}=0$  ergibt sich Gl. (3.3.3), weil die Gleichung des Bezugsknotens K3 gestrichen werden kann (s. u.). Darin liegt der Vorteil des Bezugsknotens auf dem Netzwerk. Andererseits entsteht durch Kombination der Knotengleichungen K1 und K2 die Gleichung K3 für  $I_{\rm q1}$ . Der Netzwerkbezugsknoten erspart (übereinstimmend mit dem Knotensatz) das Aufstellen einer Knotengleichung.

Beispiel 3.3.2 Brückenschaltung Wir wenden die Lösungsmethodik auf die stromgespeiste Wheatstonesche Brücke Abb. 3.3.2b an. Gesucht ist der Strom durch  $G_2$ . Folgende Schritte fallen nach der Lösungsmethodik an: 1. und 2. Da der Zweigstrom  $I_2$  (Abb. b) gesucht ist, wird einer der beiden zugehörigen Knoten als Bezugspunkt gewählt. Die angesetzten Zweigstromrichtungen sind im Streckenkomplex verzeichnet, auf ihn kann aber grundsätzlich verzichtet werden. Es gibt k-1=3 unabhängige Knotenspannungen  $U_{k1}$ ,  $U_{k2}$ ,  $U_{k3}$ .

3. Die Knotengleichungen lauten

K1: 
$$I_1 - I_4 + I_q = 0 \rightarrow 0 = G_1 U_{k1} - G_4 \underbrace{(U_{k2} - U_{k1})}_{U_{21}} + I_q$$
  
K2:  $I_2 + I_4 + I_5 = 0 \rightarrow 0 = G_2 U_{k2} + G_4 \underbrace{(U_{k2} - U_{k1})}_{U_{21}} - G_5 \underbrace{(U_{k3} - U_{k2})}_{U_{32}}$   
K3:  $I_3 + I_5 - I_q = 0 \rightarrow 0 = G_3 U_{k3} + G_5 \underbrace{(U_{k3} - U_{k2})}_{U_{32}} - I_q$ .

Geordnet nach Knotenspannungen folgt

Deutlich werden die Symmetrie der Gleichungen, die Knotenleitwerte als Diagonalelemente sowie die Minuszeichen vor allen Koppelelementen.

- 4. Der Zweigstrom  $I_2$  hängt mit der zugehörigen Zweigspannung = Knotenspannung  $U_{k2}$  über  $I_2 = G_2U_{k2}$  zusammen.
- 5. Auf die Lösung des Gleichungssystems nach  $U_{k2}$  verzichten wir.

Hinweis: Das Netzwerk wurde spannungsgespeist im Beispiel 3.2.2 mit der Maschenstromanalyse bearbeitet.

Gültigkeitsbereich Die Knotenspannungsanalyse gilt für lineare und nichtlineare zeitunabhängige und zeitabhängige Netzwerke. Knotenspannungen haben die Bedeutung von Rechengrößen, wenn der Bezugsknoten nicht Knoten eines Netzwerkes ist.

Ersetzt man beispielsweise die Schaltung nach Abb. 3.3.2a durch die Schaltung Abb. 3.3.2c mit beliebigem Erregerzeitverlauf  $i_{\rm q1}(t),\,i_{\rm q2}(t),$  so folgen bei energielosen Speicherelementen für die Knotenspannungen  $u_{\rm k1},\,u_{\rm k2}$  die Knotengleichungen

K1: 
$$Gu_{k1} + C\frac{du_{k1}}{dt} - Gu_{k2} = i_{q1}(t) + i_{q2}(t)$$
  
K2:  $-Gu_{k1} + Gu_{k2} + \frac{1}{L} \int u_{k2} dt = -i_{q2}(t).$  (3.3.5)

Dieses System ergibt als Lösung die Knotenspannungen  $u_{k1}$ ,  $u_{k2}$ . Man überzeugt sich, dass es formal der folgenden Gl. (3.3.6) entspricht, nur treten Differenziale und Integrale der Unbekannten auf. Im Bd. 3 lernen wir Verfahren zur Lösung derartiger Probleme kennen.

**Matrixform** Die Knotenspannungsanalyse führt bei einem Netzwerk mit unabhängigen Stromquellen allgemein auf p = k - 1 Knotengleichungen:

Die Matrix der Koeffizienten heißt Knotenleitwertmatrix, ihre Koeffizienten  $G_{ii}$  Knotenleitwerte und die  $G_{ij} = G_{ji}$  die Koppelleitwerte (zwischen den Knotenpunkten i und j).  $I_{qi}$  ist die Summe der Quellenströme im Knoten i (positiv, wenn zum Knoten hin gerichtet) und  $U_{ki}$  die Knotenspannung des Knotens i. Für die Koeffizienten gibt es einfache Bildungsregeln (s. u.). Das vereinfacht die Knotenspannungsanalyse erheblich. Im nächsten Schritt wird Gl. (3.3.6) nach den Knotenspannungen aufgelöst und aus dem Ergebnis die Zweigspannungen Gl. (3.3.1) berechnet.

Das Gleichungssystem (3.3.6) lautet gleichwertig in Matrixform

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1p} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \dots & G_{pp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \\ \vdots \\ U_{kp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ \vdots \\ I_{qp} \end{pmatrix}$$
(3.3.7a)

#### oder abgekürzt

Jede Zeile der Matrix beschreibt die Schaltungsstruktur, also die Umgebung des betreffenden Knotens.

Für die Koeffizienten gelten einfache Bildungsregeln:

- 1. Hauptdiagonalelement = Knotenleitwert  $G_{ii}$ . Das ist die (stets positive) Summe aller am Knoten i angeschlossenen Leitwerte;
- 2. Matrixelemente außerhalb der Hauptdiagonalen sind die (negativen) Koppelleitwerte zwischen dem Knoten i (Zeile) und benachbarten Knoten j (Spalte). So ist  $G_{ij}$  stets gleich der negativen Summe aller zwischen den Knoten i und j liegenden Leitwerte. Für ein Netzwerk nur mit den Elementen R, C, L gilt  $G_{ij} = G_{ji}$ : die Knotenleitwertmatrix ist symmetrisch;<sup>14</sup>
- 3. Fehlende Verbindungen erhalten Eintrag 0 am Knoten der Knotenspannung;
- 4. Die Zeilensumme [Spaltensumme] gibt den Leitwert zwischen dem betrachteten Knoten (Zeilennummer [Spaltennummer]) und Bezugsknoten. Sie verschwindet, wenn zwischen Knoten und Bezug kein "Leitwert" liegt (Rechenund Kontrollmöglichkeit).
- 5. Die Eigenschaften nach Pkt. 2 (Symmetrie zur Hauptdiagonalen, alle Koppelleitwerte negativ) setzen einen Sternbaum voraus, erfordern zum Bezugsknoten hin positiv definierte Knotenspannung und keine gesteuerten Stromquellen.

Durch diese Eigenschaften kann die Matrix direkt aus der Schaltung zusammen mit dem Vektor der Einströmungen gewonnen werden, ein großer Vorteil des Knotenspannungsverfahrens.

#### Praktische Ablauffolge:

- 1. Stelle ein Schema für die p=(k-1)-Knotenspannungen (Spalten) und p Knoten (Zeilen) nach Einführung der Knotenspannungen auf.
- 2. Füge die Knotenleitwerte (= Summe der Leitwerte am Knotenpunkt, stets positiv) als Hauptdiagonalelemente in die zum Knoten gehörige Zeile ein.
- 3. Trage in die Nebendiagonalelementen die negativen Koppelleitwerte zwischen den Knotenpunkten und Nachbarknoten (z.B. 2. Zeile Knoten 2, 3. Spalte Knoten 3) ein. Beachte die Symmetrie der Matrix.
- 4. Im Vektor der unabhängigen Quellenströme steht der Quellenstrom des jeweiligen Knotens (Zeilennummer, Zufluss positiv, Abfluss negativ).

Die Symmetrie der Matrix entfällt bei Anwesenheit gesteuerter Quellen.

<sup>&</sup>lt;sup>14</sup>Das negative Vorzeichen tritt auf, wenn die Knotenspannungen zum Bezugspunkt 0 hin positiv eingeführt ist (was der Konvention entspricht).

Gl. (3.3.7) ist ein lineares Gleichungssystem mit der Lösung

$$\boldsymbol{U}_{\mathbf{k}} = \boldsymbol{G}^{-1} \cdot \boldsymbol{I}_{\mathbf{q}}.$$
 Lösung Knotenspannungen (3.3.8)

**Auflösung der Knotengleichungen** Die Auflösung nach einer Knotenspannung  $U_{\mathbf{k}i}$  gelingt nach dem gleichen Formalismus wie bei der Maschenstromanalyse (Gl. (3.2.8)). Kap. 3.5.1 zeigt im einfachen Beispiel 3.5.1 eine computergestützte Lösung der Knotengleichungen. Hier bereitet auch der Einbau realer Spannungsquellen (durch Umrechnung in Stromquellen) kein Problem.

Vertiefung. Zweigspannungen, Zweigströme\* Die Zweigspannungen  $U_{ij}$  ergeben sich aus den Knotenspannungen  $U_{\mathbf{k}}$  über ein lineares Gleichungssystem geschrieben als Matrixgleichung

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{\mathrm{k}}.$$
 Beziehung Zweig-Knotenspannungen (3.3.9)

U ist der Spaltenvektor der Zweigspannungen,  $U_k$  der Spaltenvektor der Knotenspannungen und  $A^T$  die Zweig-Knoten Inzidenzmatrix (der sog. Schnitte durch die Baumzweige)<sup>15</sup>. Die Transponierte von  $A^T$ , nämlich  $((A^T)^T = A)$  ist die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix A.

Die Knoten-Zweig Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  gibt an, welche Zweige eines Graphen mit welchen Knoten inzident sind.

Man bestimmt sie, indem die Knotenspannungen den Zeilen und die Zweigspannungen Spalten zugeordnet werden

$$\begin{array}{cccc}
U_{1} & U_{2} & \cdots & U_{z} \\
U_{k1} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1z} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pz} \end{pmatrix} &= \mathbf{A} & U_{2} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{pz} \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{T}, \\
U_{2} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{p1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{p2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1z} & a_{2z} & \cdots & a_{pz} \end{pmatrix} &= \mathbf{A}^{T}, \\
(3.3.10)$$

Index-Zuordnung:  $a_{ij}$ : Knoten (Zeile) i, Zweig (Spalte) j. In der Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  treten als Matrixelemente  $a_{ij}$  nur die Werte +1, -1 oder 0 auf abhängig davon, ob beim betreffenden Maschenumlauf die Knotenspannung enthalten ist oder nicht; die Richtung von Zweig- und Knotenspannung bestimmt das Vorzeichen. Rechts in Gl. (3.3.10) stehen die Maschengleichungen und damit die Zweigspannungen ausgedrückt durch die Knotenspannungen, links die Knotenspannungen ausgedrückt durch die Zweigspannungen.

 $<sup>^{15}</sup>$  Die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  wird im Kap. 3.4 eingehender erläutert, ebenso der Schnittbegriff.

Abschließend lauten die Zweigspannungen berechnet nach der Knotenspannungsanalyse mit Gl. (3.3.8)

$$m{U} = m{A}^{\mathrm{T}} m{G}^{-1} m{I}_{\mathrm{q}}.$$
 Beziehung Zweigspannungen-Stromquellen, (3.3.11)  
Knotenspannungsverfahren

Hinweis: Da die Zweig-Knotenspannungsmatrix  $A^{T}$  auch jene Zweigspannungen enthält, die zugleich Knotenspannungen sind, kann sie – analog zur Maschen-Zweig Inzidenzmatrix C (Gl (3.2.10)) – auf die Elemente nur für die (unbekannte) Verbindungszweigmatrix (also die Verbindungszweigspannungen) reduziert werden.

Die Zweig-Knoten-Inzidenzmatrix  $A^{\rm T}$  wird verständlicher, wenn wir die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix A (Gl. (3.3.10)) betrachten. Statt der Zweigspannungen  $U_1 \dots U_z$  können auch die (gleichgerichteten) Zweigströme  $I_1 \dots I_z$  für jeden Knoten betrachtet werden: nach dem Knotensatz verschwindet ihre vorzeichenbehaftete Summe für jeden der k-1 Knoten. In Matrixschreibweise lautet dieser Sachverhalt:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$
 Knotensatz (3.3.12)

Damit hat die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix ihre eigentliche Bedeutung: sie beschreibt die Koeffizienten der (Zweig-) Ströme im Knotensatz. Diesen fundamentalen Aspekt vertiefen wir in Kap. 3.4.1

Beispiel 3.3.3 Beziehung Knoten-, Zweigspannungen, Knotenleitwertmatrix Wir veranschaulichen die bisherigen Ergebnisse am Netzwerk Abb. 3.3.3 mit z=6 Zweigen und k=4 Knoten. Knoten 4 sei Bezugsknoten. Die Knotenspannungen  $U_{\rm k1}\dots U_{\rm k3}$  stehen zu den Zweigspannungen  $U_1\dots U_6$  über den Maschensatz in Beziehung:

$$\begin{array}{ll} U_1 = U_{\rm k1}, & U_2 = U_{\rm k2}, & U_3 = U_{\rm k3}, \\ U_4 = U_{\rm k1} - U_{\rm k2}, & U_5 = -U_{\rm k2} + U_{\rm k3}, & U_6 = U_{\rm k1} - U_{\rm k3}. \end{array}$$

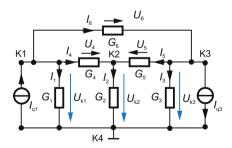


Abb. 3.3.3. Beispiel zur Knotenspannungsanalyse

Dieses Gleichungssystem lautet (geordnet) in Matrixform nach Gl. (3.3.9)

$$m{U} = egin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 1 & -1 & 0 \ 0 & -1 & 1 \ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot egin{pmatrix} U_{ ext{k1}} \ U_{ ext{k2}} \ U_{ ext{k3}} \end{pmatrix} = m{A}^{ ext{T}} m{U}_{ ext{k}}.$$

Der Spaltenvektor U der Zweigspannungen ist mit dem Spaltenvektor  $U_k$  der Knotenspannungen über die Zweig-Knoten-Inzidenzmatrix  $A^T$  verknüpft. Ihre Matrixelemente  $a_{ij}$  haben die Einträge +1, -1 oder 0 abhängig davon, ob die Richtung der Zweigspannung beim zugehörigen Maschenumlauf mit der Knotenspannung übereinstimmt (+1), nicht übereinstimmt (-1) oder sie überhaupt nicht auftritt (0).

Die Zweigspannungen und somit auch die Knotenspannungen sind Folge der Stromquellen. Deshalb benötigen wir im nächsten Schritt den Knotensatz für jeden Knoten zur Bestimmung der Knotenspannung als Funktion der Quellenströme. Dabei treten die zugehörigen Zweigströme auf. Sie werden durch den Zweigleitwert und die Zweigspannung ausgedrückt und diese nach Gl. (3.3.1) als Differenz der Knotenspannungen geschrieben.

Der Knotensatz lautet für die Schaltung Abb. 3.3.3 (abfließende Ströme positiv, zufließende negativ) jeweils für Knoten K1 ... K3 zunächst ohne Quellenströme

$$\begin{aligned}
K1: & I_{1} + I_{4} + I_{6} = 0 \\
K2: & I_{2} - I_{4} - I_{5} = 0 \\
K3: & I_{3} + I_{5} - I_{6} = 0
\end{aligned}
\right\} \rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1
\end{pmatrix}
\cdot
\begin{pmatrix}
I_{1} \\
I_{2} \\
I_{3} \\
I_{4} \\
I_{5} \\
I_{6}
\end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{0}.$$
(3.3.13)

Das ist der Inhalt von Gl. (3.3.12). In Matrixschreibweise erfüllen die Zweigströme über die Knoten-Zweig Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  den Knotensatz!

Die Knotengleichungen ergeben sich aus dem Netzwerk auch direkt

K1: 
$$G_1U_1 + G_4U_4 + G_6U_6 = G_1U_{k1} + G_4(U_{k1} - U_{k2}) + G_6(U_{k1} - U_{k3}) = I_{q1}$$
  
K2:  $G_2U_2 - G_5U - G_6U_6 = G_2U_{k2} - G_4(U_{k1} - U_{k2}) - G_5(U_{k3} - U_{k2}) = 0$   
K3:  $G_3U_3 + G_5U_5 - G_6U_6 = G_3U_{k3} + G_5(U_{k3} - U_{k2}) - G_6(U_{k1} - U_{k3}) = -I_{q3}$   
(3.3.14)

oder geordnet in Matrixschreibweise nach Gl. (3.3.7)

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_4 + G_6 & -G_4 & -G_6 \\ -G_4 & G_2 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ -G_6 & -G_5 & G_3 + G_5 + G_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \\ U_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ 0 \\ -I_{q3} \end{pmatrix}.$$
(3.3.15)

Diese Matrixform lässt sich unmittelbar aus der Schaltung ablesen:

- so sind am Knoten K1 die Leitwerte G<sub>1</sub>, G<sub>4</sub> und G<sub>6</sub> angeschlossen, sie bilden den Knotenleitwert,
- der Koppelleitwert zwischen den Knoten 1 und 2 ist  $-G_4$ , zwischen Knoten 1 und 3  $-G_6$  usw.

Zum Knoten K1 strömt  $I_{q1}$  hin (positiver Eintrag rechts) usw. Dieses Gleichungssystem kann nach den Knotenspannungen aufgelöst werden, die Zweigspannungen folgen über Gl. (3.3.9).

#### Hinweis:

- Die Bildungsregeln des Gleichungssystems (3.3.7) entsprechen denen der Maschenstromanalyse. Nebendiagonalelemente sind hier aber stets negativ! Deshalb kann der Koppelleitwert direkt aus dem Netzwerk abgelesen werden.
- Die Knotenspannungsanalyse ist vorteilhaft bei stromgespeisten Netzwerken.
   Das begründet ihre große Verbreitung in der Elektronik.
- 3. In der Knotenspannungsanalyse fehlt die explizite Festlegung des vollständigen Baumes, weil ein (immer wählbarer) Sternbaum zugrunde liegt. Es kann jedoch auch ein beliebiger Baum aufgestellt und ein anderer (wegzulassender) Knoten zum Bezug gewählt werden. Dann geht die Gleichungssymmetrie verloren. Ein Sternbaum bringt so viele Vorteile, dass man dieses Verfahren schlechthin als Knotenspannungsanalyse bezeichnet.
- 4. Wird im allgemeinen Fall die Bevorzugung eines Bezugsknotens aufgegeben und nur noch mit Knotenpaaren gerechnet, so heißt das Verfahren Schnittmengenanalyse. Sie ist das eigentliche Analogon zur Schleifenanalyse (s. Kap. 3.4.2).
- 5. Da viele nichtlineare Zweipolbeziehungen in der Form I(U) vorliegen (Dioden-Transistorkennlinien), lassen sie sich in der Knotenspannungsanalyse leicht berücksichtigen.
- Spannungsquellen (gesteuert, ungesteuert, z. B. Operationsverstärker) werden durch Erweiterung einbezogen.
- 7. Wegen der Vorzüge bildet die Knotenspannungsanalyse (in modifizierter Form) die Grundlage rechnergestützter Analyse- und Simulationsverfahren (z. B. SPI-CE/PSPICE).

**Vergleich Maschenstrom-Knotenspannungsanalyse** Bei der Maschenstromanalyse mussten m Gleichungen gelöst werden, bei der Knotenspannungsanalyse hingegen k-1. Für eine gegebene Zweigzahl z wählt man das Verfahren mit der geringeren Zahl von Unbekannten, also die Knotenspannungsanalyse für (k-1) < m = z - (k-1) bzw.

$$(k-1) < \frac{z}{2}. (3.3.16)$$

Die Knotenspannungsanalyse empfiehlt sich bei kleiner Knoten-, aber hoher Zweigzahl sowie nichtlinearen Netzwerkelementen mit einer Strom-Spannungs-Beziehung

I(U). Ein weiterer Vorteil liegt in der verfahrensbedingten Wahl des Sternbaumes. Das Maschenstromverfahren erfordert dagegen eine Baumsuche, wenn nicht von vornherein unabhängige Maschen oder Fenstermaschen gewählt werden können. Es dient, trotz dieses Mehraufwandes, häufig zur Modellierung magnetischer Kopplungen.

# **3** 3.3.2 Erweiterte Knotenspannungsanalyse\*

Allgemeine Erweiterungen Wir entschärfen die bisherige Beschränkung auf Stromquellen und lassen unabhängige und gesteuerte Spannungsquellen sowie gekoppelte Spulen zu.

*Unabhängige Spannungsquellen* zwischen zwei Knoten können unterschiedlich berücksichtigt werden:

- Durch Wandlung in eine Stromquelle über einen Quelleninnenwiderstand. Er muss ggf. ergänzt und aus der Lösung wieder entfernt werden.
- Durch *Quellenverschiebung* (über Knoten) und anschließende Wandlung in Stromquellen.
- Durch Einführung der Quellenspannung als Knotenspannung. Dann ist die Knotenspannung nicht mehr unbekannt, sondern die (bekannte) Quellenspannung: Superknotenverfahren.
- Einführung eines kleinen *Hilfswiderstandes* in Reihe zur Spannungsquelle und anschließende Wandlung in eine Stromquelle. Er sollte so klein sein, dass er das Ergebnis praktisch nicht beeinflusst (Verfahren bei numerischen Lösungen üblich).

#### $Gesteuerte\ Quellen$

- Gesteuerte Stromquellen werden in knotenspannungsgesteuerte Stromquellen umgeformt. Man sieht sie bei Aufstellung des Gleichungssystems zunächst als unabhängig an und beachtet sie auf der rechten Seite. Im nächsten Schritt kommen sie nach links zu den entsprechenden Knotenspannungen: man verliert die Symmetrie der Knotenleitwertmatrix.
- Gesteuerte *Spannungsquellen* werden entweder in gesteuerte Stromquellen überführt oder, falls nicht möglich, wie unabhängige Spannungsquellen behandelt.

Gekoppelte Spulen werden durch ihre (ungewöhnliche) Ersatzschaltung mit zwei spannungsgesteuerten Stromquellen beschrieben (s. Bd. 2) und nach vorstehendem Schema erfasst.

Insgesamt erfordern diese Fälle eine Ergänzung des Lösungsablaufes der Knotenspannungsanalyse zu Punkt 3 für Netzwerke mit unabhängigen Spannungsquellen, gesteuerten Quellen und gekoppelten Spulen:

- Transformiere unabhängige Spannungsquellen in unabhängige Stromquellen falls notwendig unter Benutzung von Netzwerkelementen oder Hilfsgrößen.
- Betrachte gesteuerte Stromquellen beim Aufstellen der Knotengleichungen zunächst als unabhängige Quellen und drücke ihre Steuergrößen anschließend durch Knotenspannungen aus.
- Gekoppelte Spulen werden auf ihre Ersatzschaltung mit zwei spannungsgesteuerten Stromquellen zurückgeführt.

Beispiel 3.3.4 Quellentransformation Im Zweig eines Netzwerkes Abb. 3.3.4a liegt eine ideale Spannungsquelle. Sie wird zur Durchführung der Knotenspannungsanalyse in eine Stromquelle mit Hilfswiderstand R' transformiert: man ergänzt einen Hilfswiderstand, vollzieht die Quellenwandlung und anschließend die Standardanalyse. Im Endergebnis muss der Hilfswiderstand gegen null gehen, um die richtige Lösung zu erhalten. Nach der Zweipoltheorie belastet das Netzwerk die so modifizierte Spannungsquelle mit einem Ersatzwiderstand  $R_a$  (einfach zu ermitteln). Ein Hilfswiderstand R' stört die Lösung kaum, solange er (sehr) klein gegen den Ersatzwiderstand  $R_a$  bleibt (z. B.  $R' \approx (10^{-2} \dots 10^{-3}) R_a$ ). Dann kann er in der Lösung verbleiben und muss nicht entfernt werden (bei symbolischer Lösung zusätzlicher Aufwand, bei numerischer Lösung ohnehin nicht möglich).

Einen anderen Weg bieten die *Versetzungssätze* (Kap. 4.2). Wir verschieben die Spannungsquelle über den Knoten i', führen also in den Zweigen 4 und 5 die Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  ein (Abb. 3.3.4b, c). Der Maschensatz in Masche M1 wird dadurch nicht verändert, auch nicht in den restlichen Maschen. Anschließend werden die Zweige 4 und 5 in Stromquellen transformiert und das Knotenspannungsverfahren durchgeführt.

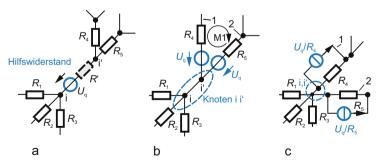


Abb. 3.3.4. Spannungsquellentransformation bei der Knotenspannungsanalyse. (a) Einfügen eines vernachlässigbaren Hilfswiderstandes. (b) Quellenverschiebung und anschließende (c) Wandlung in Stromquellen

Beispiel 3.3.5 Gesteuerte Stromquelle Eine spannungsgesteuerte Stromquelle hat die Steuergleichung  $I_{ji} = SU_{mn} = S(U_m - U_n)$  (Abb. 3.3.5a). Dann stehen in den Zeilen i bzw. j des Stromquellenvektors keine festen Werte  $I_q$  bzw.  $-I_q$  (wie bei ungesteuerter Quelle), sondern  $S(U_{m0} - U_{n0})$  resp.  $-S(U_{m0} - U_{n0})$ . Beim Transfer dieser Anteile nach links tritt

- in Zeile i zum Leitwert  $G_{im}$  noch der Beitrag -S und zu  $G_{in}$  der Beitrag +S,
- in Zeile j zum Leitwert  $G_{jm}$  noch der Beitrag S und zu  $G_{jn}$  der Beitrag -S.

Entsprechend verfährt man bei der stromgesteuerten Stromquelle  $I_{ji} = A_i I_{mn} = A_i G_{mn} (U_{m0} - U_{n0})$ . Der Steuerstrom  $U_{mn}$  zwischen den Knoten m, n wird zunächst durch den zugehörigen Zweigleitwert  $G_{mn}$  und die Knotenspannungen ausgedrückt und die Beiträge in den Zeilen i und j berücksichtigt, also in Zeile i die Elemente  $G_{im}$  und  $-A_i G_{mn}$  sowie  $G_{in}$  um  $A_i G_{mn}$  ergänzt (und analog wie oben mit der Zeile j verfahren).

Gesteuerte Spannungsquellen betrachten wir in Kap. 3.6.2.

Beispiel 3.3.6 Stromgesteuerte Stromquelle Für die Schaltung Abb. 3.3.5b mit stromgesteuerter Stromquelle stellen wir (zur Veranschaulichung) zunächst die beiden Knotengleichungen K1, K2 auf:

K1: 
$$A_i I_{St} + G_1 U_{k1} + G_2 (U_{k1} - U_{k2}) = 0$$
,  
K2:  $G_2 (U_{k2} - U_{k1}) + I_{St} - I_q = 0$ .

Daraus folgt mit dem Steuerstrom  $I_{St} = G_3 U_{k2}$  in Matrixform

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -\left(G_2 - A_{\mathrm{i}}G_3\right) \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{\mathrm{k}1} \\ U_{\mathrm{k}2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{\mathrm{q}} \end{pmatrix}.$$

Weil ein Knoten des Steuerstromes zugleich Bezugsknoten ist, tritt die gesteuerte Quelle nur in der erste Zeile auf.

Beispiel 3.3.7 Gesteuerte Quelle Für die Schaltung Abb. 3.3.5c mit spannungsgesteuerter Stromquelle entnehmen wir die Matrix der Schaltung. Die gesteuerte

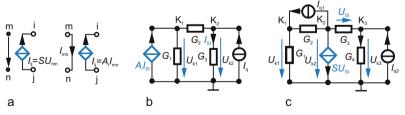


Abb. 3.3.5. Gesteuerte Stromquelle in der Knotenspannungsanalyse. (a) Spannungs- und stromgesteuerte Stromquelle. (b) Netzwerk mit stromgesteuerter Stromquelle. (c) Netzwerk mit spannungsgesteuerter Stromquelle

Quelle wirkt nur am Knoten 2, deshalb gibt es Steuerbeiträge nur in Zeile 2. Die Steuerspannung zwischen den Knoten 2 und 3 verursacht in Zeile 2 bei den Steuerspannungen  $U_{\rm k2}$  und  $U_{\rm k3}$  Beiträge. So wird die Matrix unsymmetrisch. Die übrigen Koeffizienten fügen wir aus der Schaltung ein

$$\begin{pmatrix} (G_1+G_2) & -G_2 & 0 \\ -G_2 & (G_2+G_3+S) & -(S+G_3) \\ 0 & -G_2 & (G_3+G_4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}1} \\ U_{\mathbf{k}2} \\ U_{\mathbf{k}3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{q}1} \\ -I_{\mathbf{q}1} \\ I_{\mathbf{q}2} \end{pmatrix}.$$

Spannungsquellen als Knotenspannungen, Superknotenverfahren Ideale Spannungsquellen können auch in die Knotenspannungsanalyse als Superknotenverfahren (super node analysis) einbezogen werden. Die Idee besteht darin, die ideale Spannungsquelle mit einem "Superknoten" zu umschließen und ihm nur ein unbekanntes Knotenpotenzial als Referenzgröße zuzuweisen. Das Potenzial des zweiten Knotens ergibt sich aus der Spannungsquelle und dem Referenzpotenzial. Das Verfahren eignet sich unter bestimmten Bedingungen auch für mehrere Spannungsquellen.

Bei der Schleifen-/Maschenstromanalyse wurde die ideale Stromquelle in einen Verbindungszweig des vollständigen Baumes gelegt. Damit bildete sie einen bekannten Schleifenstrom und senkte die Zahl zu lösender Schleifengleichungen um eine, bei n Stromquellen also von m auf m-n. Die Spannungsquellen lagen dort in den k-1 Zweigen des vollständigen Baumes.

Für das gleiche Netzwerk (mit gleichem Baum) können bei gegebenen Stromquellen (aber ohne Spannungsquellen) zur Analyse auch die entsprechenden Baumzweigspannungen als Unbekannte dienen (duale Betrachtung, das ist der Inhalt der Schnittmengenanalyse s. Kap. 3.4.2). Legt man nun eine ideale Spannungsquelle in einen Baumzweig, so ist die zugehörige Baumzweigspannung bekannt: n Spannungsquellen senken dann die Zahl zu bestimmender Baumzweigspannungen auf (k-1)-n. Das ist das duale Ergebnis der Maschenstromanalyse.

Obwohl die Knotenspannungsanalyse einen Sternbaum nutzt, lassen sich ideale Spannungsquellen einbeziehen mit der Methode des Superknotens oder dem Verfahren eines "Hilfsstromes" durch die Spannungsquelle (Grundlage der *modifizierten Knotenspannungsanalyse*: MNA, modified nodal analysis). Das erste Verfahren eignet sich für die Handanalyse, die letzte für rechnergestützte Ansätze.

Eine Spannungsquelle kann im Netzwerk liegen:

- einseitig am Bezugsknoten. Dann erzwingt sie die Knotenspannung des (anderen) Anschlussknotens und es entfällt die Formulierung dieser Knotengleichung wegen bekannter Knotenspannung.
- "schwebend" zwischen zwei Knoten. Das ist eine Zwangsbedingung für beide Knotenspannungen (etwa zwischen den Knoten i und j)

$$U_{q} = U_{ki} - U_{kj}. (3.3.17)$$

Dadurch hängt die zweite Knotenspannung von der ersten ab und die Knotenspannungen der Knoten i und j gehen effektiv in eine über.

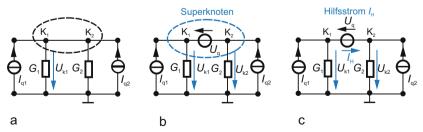
Umgibt man die Spannungsquelle mit einer Gaußschen Hüllfläche, eben einem Superknoten, so bleibt der Knotensatz erhalten. Gleichzeitig eliminiert der Superknoten eine Knotengleichung und statt der k-1 Knotengleichungen sind nur noch k-1-n zu lösen, wenn es n Superknoten (n Spannungsquellen) gibt. Ideale Spannungsquellen senken den Lösungsaufwand der Knotenspannungsanalyse.

Superknoten: Gaußsche Hüllfläche, die zwei, durch eine ideale Spannungsquelle (unabhängig, gesteuert) verbundene Netzwerkknoten umschließt. Mehrere Superknoten mit gemeinsamen Knoten können zu einem größeren Superknoten zusammengefasst werden: ein Superknoten darf mehrere Spannungsquellen enthalten.

Oft werden Superknoten nur auf schwebende Spannungsquellen beschränkt, da ideale Spannungsquellen mit einseitigen Bezugspunkt ohnehin keine Knotengleichung liefern.

Ein zweiter Lösungsansatz ist die Einführung eines (unbekannten) Hilfsstromes  $I_{\rm H}$  durch die ideale Spannungsquelle. Wird das Knotenspannungssystem damit aufgestellt (wobei jeweils eine der mit der Spannungsquelle verknüpften Knotenspannungen als abhängige Variable auftritt und der unbekannte Strom als unabhängige Variable zu betrachten ist), so entsteht das übliche Knotenspannungsgleichungssystem, nur mit dem Unterschied, dass Ströme und Spannungen ungeordnet und z. T. bekannt oder unbekannt sind. Deshalb versagt zunächst die Standardlösung nach den Knotenspannungen. Erst durch Umordnen lassen sich überflüssige Knotenspannungen über die Zwangsbedingung Gl. (3.3.17) und unbekannte Ströme auf der Erregerseite beseitigen. Damit ist die ideale Spannungsquelle wieder Inhalt eines Superknotens.

Das Superknotenprinzip lässt sich anschaulich erklären. Ausgang ist ein Netzwerk (Abb. 3.3.6a) mit zwei verschmolzenen Knoten. Die Knotenspannung  $U_k$  beträgt  $U_k = (I_{q1} + I_{q2})/(G_1 + G_2)$ , es gibt nur eine (unabhängige) Knotengleichung. Eine eingefügte ideale Spannungsquelle zwischen beiden Knoten



**Abb. 3.3.6.** Superknoten. (a) Ausgangsnetzwerk. (b) Ideale Spannungsquelle im Superknoten. (c) Berücksichtigung der Spannungsquelle durch einen Hilfsstrom  $I_{\rm H}$ 

(Abb. 3.3.6b) wird als Inhalt eines Superknotens betrachtet. Für ihn gilt die Superknotengleichung und eine Spannungsbedingung für beide Knotenspannungen  $U_{\rm k1}$  und  $U_{\rm k2}$ :

SK: 
$$G_1U_{k1} + G_2U_{k2} = I_{q1} + I_{q2}$$
, ZB:  $U_q = U_{k2} - U_{k1}$ .

Beide Gleichungen liefern beispielsweise als gesuchte Knotenspannung  $U_{k2}$ 

$$U_{k2} = \frac{I_{q1} + I_{q2}}{G_1 + G_2} + \frac{G_1 U_q}{G_1 + G_2}.$$

Der letzte Term kann auch als Überlagerung des von der Spannungsquelle ausgehenden Stromes durch  $R_2$  verstanden werden. Als weitere Analysevariante betrachten wir die Einführung eines Hilfsstromes  $I_{\rm H}$  durch die Spannungsquelle (bei Wegfall des Superknotens, Abb. 3.3.6c). Damit lauten die Knotengleichungen

K1: 
$$G_1U_{k1} + I_H = I_{q1}$$
, K2:  $G_2U_{k2} - I_H = I_{q2}$ .

Zusätzlich gilt die Zwangsbedingung für beide Knotenspannungen. Durch Addition der beiden Knotengleichungen hebt sich der Hilfsstrom heraus und es entsteht die Gleichung SK des Superknotens mit der schon angegebenen Lösung.

Beispiel 3.3.8 Superknotenkonzept, Hilfsstrom Abb. 3.3.7a zeigt eine Schaltung mit idealer Spannungsquelle, die Inhalt des Superknotens S ist. Er hat zwei Merkmale:

— die Knotenspannung  $U_{k3}$  liegt durch  $U_{k1}$  und  $U_{q}$  fest:  $U_{k3} - U_{k1} = U_{q}$ ,

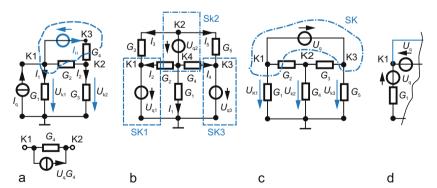


Abb. 3.3.7. Beispiele zum Superknotenkonzept. (a) Netzwerk mit "schwimmender" Spannungsquelle. (b) Netzwerk mit drei Superknoten. (c) Netzwerk (Brückenschaltung) mit einem Superknoten. (d) Durch Quellenverschiebung entsteht ein Netzwerk, in dem die Spannungs- in Stromquellen gewandelt werden können. Vereinfachung durch Knotenkurzschluss K1, K3 möglich

— durch die Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  fließt der Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  aus Knoten 1 heraus und in Knoten 3 hinein. Deshalb muss er im Gleichungssystem paarweise mit entgegengesetztem Vorzeichen vorkommen.

Durch die erste Aussage können zwei Spalten der Matrixgleichung zusammengefasst werden, während die zweite die Zeilenzahl durch additive Zusammenfassung senkt.

Wir stellen zunächst die Gleichung der Schaltung auf und berücksichtigen die Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  durch ihren Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  als unabhängige Stromquelle

$$\begin{array}{cccc} \text{K1:} & \left(G_1+G_2\right) & -G_2 & 0 \\ \text{K2:} & \left(-G_2 & \left(G_2+G_3+G_4\right) & -G_4 \\ \text{K3:} & 0 & -G_4 & \left(G_4\right) \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} U_{\text{k1}} \\ U_{\text{k2}} \\ U_{\text{k3}} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} I_{\text{q1}}-I_{\text{H}} \\ 0 \\ I_{\text{H}} \end{array}\right). \\ (3.3.18)$$

In der ersten und dritten Zeile tritt der Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  auf. Addiert man die dritte Zeile zur ersten und streicht dann die dritte (Vereinigung der Knoten K1 und K3), so bleibt

$$\begin{pmatrix} (G_1 + G_2) & -(G_2 + G_4) & G_4 \\ -G_2 & (G_2 + G_3 + G_4) & -G_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \\ U_{k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Gleichung 3 Spalten und 2 Zeilen enthält, wird die überflüssige Spalte durch Eliminieren der Knotenspannung  $U_{\rm k3}$  über die Zwangsbedingung der Spannungsquelle beseitigt:  $U_{\rm k3} = U_{\rm k1} + U_{\rm q}$ :

K1: 
$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -(G_2 + G_4) \\ -(G_2 + G_4) & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{k1} \\ U_{k2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} - G_4 U_q \\ +G_4 U_q \end{pmatrix}$$
. (3.3.19)

Jetzt können die Knotenspannungen  $U_{k1}$ ,  $U_{k2}$  gelöst werden. Statt der drei Knotenspannungen (K1 ... K3) reduziert die Spannungsquelle die Zahl der Unbekannten auf zwei!

Zu diesem Gleichungssystem gelangen wir auch direkt mit dem Superknotenkonzept. Die Schaltung hat den Superknoten S/K1 und Knoten 2 ( $\rightarrow U_{k1}, U_{k2}$ ), also gibt es zwei Gleichungen

$$S/K1: G_1U_{k1} + G_2(U_{k1} - U_{k2}) + G_4(U_{k3} - U_{k2}) = I_{q1} \rightarrow S/K1: (G_1 + G_2 + G_5) U_{k1} - (G_2 + G_4) U_{k2} = I_{q1} - G_4U_{q}$$

$$K2: -(G_2 + G_4)) U_{k1} + (G_2 + G_3 + G_4) U_{k2} = G_4U_{q}.$$
(3.3.20)

Wir erhalten sie wie folgt:

- Für den Superknoten wird die Knotengleichung (mit  $U_{k1} \dots U_{k3}$ ) aufgestellt und  $U_{k3} = U_q + U_{k1}$  ersetzt. Das ist gleichwertig mit getrennter Aufstellung der Knotengleichungen für K1 und K3 und Addition.
- in der Knotengleichung für K2 wird  $U_{\rm k3}$  durch  $U_{\rm q}+U_{\rm k1}$  ersetzt. Das erlaubt folgende Erklärung:
- Von S/K1 ausgehend gibt es zunächst den Knotenleitwert  $G_1 + G_2 + G_4$  (Superknoten als Einheit betrachtet);
- der Koppelleitwert von S nach K2 ist  $-(G_2 + G_4)$ ;

- S/K1 hat die (äußere) Einströmung  $I_{q1}$ , weg fließt der Strom  $I_{H} = U_{q}G_{4}$  bedingt durch die Spannungsquelle;
- für Knoten K2 gelten die üblichen Beziehungen, es tritt aber der Zustrom  $I_{\rm H} = U_{\rm q}G_4$  auf. Das folgt sofort durch Wandlung der Spannungsquelle (mit  $G_4$ ) in eine gleichwertige Stromquelle;
- der Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  ist der Kurzschlussstrom  $U_{\rm q}G_4$ , den die Quelle  $U_{\rm q}$  liefert. Da er im Gleichungssystem explizit nicht mehr auftritt, kann er von Anfang an unberücksichtiat bleiben.

Durch Quellenverschiebung über Knoten K3 lässt sich statt des Superknotens auch eine gleichwertige Stromquellenersatzschaltung gewinnen.

Beispiel 3.3.9 Spannungsquelle am Bezugsknoten Im letzten Beispiel wurde eine "schwimmende" Spannungsquelle betrachtet. Sinngemäß ist zu verfahren, wenn Spannungsquellen einseitig am Bezugsknoten liegen. Beim Aufstellen der Matrixgleichung in der üblichen Form fehlt eine Zeile, die zur Eliminierung des unbekannten Stromes  $I_{\rm H}$  durch die ideale Spannungsquelle erforderlich wäre. Da für den Bezugsknoten keine Strombilanz geschrieben wird, tritt  $I_{\rm H}$  nur einmal auf.

Abhilfe schafft der Übergang zur unbestimmten Knotenmatrix (s. Kap. 3.3.5). Dort wird ein Bezugsknoten außerhalb des Netzwerkes angenommen und deshalb auch für den Bezugsknoten eine Stromsummenzeile aufgestellt. Der Übergang zur normalen Matrix mit dem Bezugsknoten k erfolgt durch Streichen der k-ten Zeile und Spalte. Entscheidend ist aber, dass vorher der unbekannte Strom  $I_{\rm H}$  und eine abhängige Knotenspannung eliminiert werden können.

**Beispiel 3.3.10 Superknoten** Die Schaltung Abb. 3.3.7b besitzt k-1=4 unabhängige Knoten mit  $U_{k1} \dots U_{k4}$ . Es gibt n=3 Superknoten (S1 ... S3). Damit ist grundsätzlich nur eine Gleichung (k-1-n=1) zu lösen!

Wir umschließen die Spannungsquellen durch Superknoten S1 ... S3. Für jeden gilt der Knotensatz (z. B. S2:  $I_3 + I_5 + I_2 + I_1 + I_4 = 0$ , weil der Strom eines Quellenknotens, etwa  $I_3 + I_5$ , unabhängig von  $U_{\rm q2}$  durch die Spannungsquelle fließt). Für die Superknoten S1, S3 (einseitig am Bezugsknoten) ist die Quellenspannung zugleich Knotenspannung:  $U_{\rm k1} = U_{\rm q1}, U_{\rm k3} = U_{\rm q3}$  (bekannt). Es sind "Masseknoten", deren Strombilanz linear abhängig ist (z. B. tritt Strom  $I_3$ ,  $I_2$  des Knotens 1 von S1 zum Bezugsknoten 5 aus). Deshalb erfordern die Masseknoten keine Aufstellung einer Knotengleichung.

Für Knoten S2 (mit der Referenzknotenspannung  $U_{\rm k4}$ ) gilt:  $U_{\rm k2} = U_{\rm q2} + U_{\rm k4}$ . Insgesamt lauten die Zwangsbedingungen für die Knotenspannungen der Superknoten

$$U_{k1} = U_{q1}, \quad U_{k2} = U_{q2} + U_{k4}, \quad U_{k3} = U_{q3}.$$

Wir stellen jetzt Knoten-/ Superknotengleichungen (S2) für Knoten 4 auf:

S2/K4: 
$$G_1U_{k4} + G_2(U_{k4} - U_{k1}) + G_4(U_{k4} - U_{k3}) + G_5(U_{k2} - U_{k3}) + G_3(U_{k2} - U_{k1}) = 0.$$

Die ersten drei Terme sind die aus S2 am Knoten K4 herausfließenden Ströme. Die gleiche Stromsumme muss (vorzeichenbehaftet!) wieder aus S2 am Knoten K2 "hineinfließen", das sind die Terme 4 und 5. Die Gesamtstrombilanz des Superknotens S2 verschwindet (Knotensatz).

Im nächsten Schritt eliminieren wir  $U_{k1}$ ,  $U_{k3}$ ,  $U_{k2}$  durch die Quellengrößen und die unbekannte Knotenspannung  $U_{k4}$  und erhalten

$$U_{k4}(G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5) + U_{q2}(G_3 + G_5) - U_{q1}(G_2 + G_3) - U_{q3}(G_4 + G_5) = 0.$$

Mit der Auflösung nach  $U_{\mathbf{k}4}$  ist die Aufgabe gelöst.

Beispiel 3.3.11 Superknoten Für die Brückenschaltung Abb. 3.3.7c mit idealer Spannungsquelle (im Superknoten S) wird die Knotenspannung  $U_{\mathbf{k}2}$  (Bezugsknoten K4) gesucht.

Aufzustellen sind mit k-1=3 und n=1 insgesamt 2 Knotengleichungen. Wir wählen dafür die Knoten 2 und 3 mit den Unbekannten  $U_{k2}$ ,  $U_{k3}$ . Die Knotenspannung  $U_{k1}=U_q+U_{k3}$  hängt von  $U_{k3}$  ab. Die Knotengleichungen lauten:

K2: 
$$G_4U_{k2} + G_3(U_{k2} - U_{k3}) + G_2(U_{k2} - U_{k1}) = 0$$
  
S/K3:  $G_5U_{k3} + G_3(U_{k3} - U_{k2}) + G_1U_{k1} + G_2(U_{k1} - U_{k2}) = 0$ .

Das System ist problemlos nach  $U_{k2}$ ,  $U_{k3}$  lösbar. Es führt für  $(G_2G_5 = G_1G_3)$  auf verschwindende Knotenspannung  $U_{k2}$  (Brückenschaltung!).

Wir interpretieren noch den Quelleneinfluss in beiden Knotengleichungen. Wird die Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  über den Knoten 1 "versetzt" (Abb. 3.3.7d) und anschließend in Stromquellen gewandelt, so verschmelzen zunächst die Knoten 1 und 3 (Kurzschlussbrücke!) und die Stromquellen  $U_{\rm q}G_2$  und  $U_{\rm q}G_1$  treten direkt in beiden Knotengleichungen auf.

Insgesamt ergibt sich die

#### Lösungsmethodik Knotenanalyse mit Superknoten

- 1. Bereite das Netzwerk zur Knotenanalyse vor: stelle die k-1 Knoten fest, wähle einen Bezugsknoten und die k-1 Knotenspannungen.
- 2. Umschließe jede Spannungsquelle (unabhängige und gesteuerte) mit einer Hülle (Superknotenbildung) und lege für jeden Superknoten eine Referenzknotenspannung fest. Die Gesamtzahl der Superknoten sei n.
- 3. Stelle die Zwangsbedingungen für die übrigen Knotenspannungen der Superknoten in Bezug zur jeweiligen Referenzknotenspannung dar. Enthält ein Superknoten den Bezugsknoten (= Supermasseknoten), so ist seine Referenzknotenspannung gleich der Bezugsknotenspannung (identisch null).

- 4. Stelle die k-1-n Knotengleichungen für die Knotenspannungen auf und löse das Gleichungssystem.
  - Knotengleichungen für Superknoten, die den Bezugsknoten einschließen, entfallen, da ihre Knotenspannung durch die Spannungsquelle bekannt ist. Übrig bleiben so nur Superknotengleichungen für "schwebende Superknoten" und die normalen Netzwerkknoten.
- 5. Das Verfahren ist sinngemäß auf gesteuerte Spannungsquellen anwendbar, bei stromgesteuerten Spannungsquellen wird der Steuerstrom durch Knotenspannungen und Zweigbeziehungen ausgedrückt.

## 3.3.3 Modifizierte Knotenspannungsanalyse\*

Die Erweiterung der Knotenspannungsanalyse um zusätzliche Gleichungen durch Netzwerkelemente, die beim Standard-Verfahren nicht zugelassen sind, heißt *modifizierte Knotenspannungsanalyse* (Modified nodal analysis, MNA). Sie verwendet als Unbekannte außer den Knotenspannungen noch Hilfsströme durch diese Elemente:

- Ströme durch ideale Spannungsquellen,
- Steuerströme für stromgesteuerte Quellen,
- beliebige Zweigströme, die explizit ermittelt werden sollen z. B. für stromgesteuerte nichtlineare Netzwerkelemente oder in Kurzschlusszweigen (als Ausgangsgröße).

Zur Durchführung des Verfahrens werden

- 1. in jedem fraglichen Element ein Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  (zeitweilig) eingeführt und für dieses Netzwerk mit nur den Elementen Leitwert G, Stromquellen und gesteuerten Stromquellen die Standardanalyse formuliert,
- für jedes Element mit Hilfsstrom eine zusätzliche Gleichung entsprechend dem Originalnetzwerk geschrieben,
- 3. und die Schritte 1 und 2 in Form einer Matrixgleichung vom Typ [Koeffizientenmatrix][Vektor der Unbekannten  $U_k$ ,  $I_H$ ]= [Vektor der bekannten Quellen  $I_q$ ,  $U_q$ ] zusammengefasst oder ausformuliert

$$\frac{\text{Standardanalyse}}{\text{Hilfszweiggleichungen}} \left( \frac{Y \mid B}{C \mid D} \right) \cdot \left( \frac{U_{k}}{I_{H}} \right) = \left( \frac{I_{q}}{U_{q}} \right). \tag{3.3.21}$$

Dabei sind  $U_k$  der Spaltenvektor der Knotenspannungen,  $I_H$  der Vektor der unbekannten Hilfsströme und  $U_q$ ,  $I_q$  die Vektoren der Quellen. Die Untermatrix Y ist die Standardknotenleitwertmatrix durch die Zweige mit den "uneigentlichen" Elementen. Die  $B \dots D$  Matrizen ergeben sich aus der Lage und dem Typ der nicht zugelassenen Elemente. Diese Darstellung erweitert die Knotenspannungsmatrix über den Hilfsstrom  $I_H$  um je eine zusätzliche Spalte und Zeile für jedes Netzwerkelement, das nicht in die Standardanalyse passt (bei manchen gesteuerten Elementen z. B. der stromgesteuerten Spannungsquelle und Transformatoren können es auch zwei Spalten und Zeilen sein).

So folgt für die Schaltung Abb. 3.3.7a des Beispiels 3.3.8 (Superknotenkonzept) mit dem Ausgangsgleichungssystem Gl. (3.3.18) durch Umordnen

Die Lösung liefert  $U_{k1} \dots U_{k3}, I_H$ . Der Hilfsstrom wurde beim Superknotenverfahren eliminiert.

Soll beispielsweise ein Zweigstrom bestimmt werden, so fügt man einfach diesem Zweig reihengeschaltet einen Zweig mit einer idealen Spannungsquelle vom Wert "null" hinzu. Dann tritt der Strom in der Kurzschlussverbindung als Unbekannte auf, die Spannung auf der rechten Seite der Gleichung verschwindet.

Wie beim Standardverfahren lassen sich durch die nichtkonformen Netzwerkelemente *Belegungs*- oder *Ausfüllmuster* der Matrix, die sog. *stamps*, entwickeln, die schließlich ein direktes Ablesen der modifizierten Knotenmatrix (jetzt von gemischter Form) aus der Schaltung erlauben.

Das Verfahren eignet sich besonders für die rechnergestützte Netzwerkanalyse. Es entstehen zwar größere (meist schwach besetzte) Matrixgleichungen als beim Superknotenverfahren, doch sind sie mit speziellen Verfahren effizient lösbar. Viele Schaltungssimulationsprogramme (darunter SPICE und PSPICE) basieren auf diesem Verfahren.

## **②** 3.3.4 Knotenspannungsanalyse in Matrixform

Wir fassen die Knotenspannungsanalyse in Matrixform zusammen: Ausgang sind die Zuordnungen von Zweigströmen und Zweigspannungen zwischen den einzelnen Knoten herrührend für einen Zweig ij:  $I_{ij} = G_{ij}U_{ij} - I_{qij}$  nach Gl. (3.1.3) und Abb. 3.1.3:

$$I_z = G_z U_z - I_{qz}$$
. allgemeiner Netzwerkzweig (3.3.22)

Zum Hervorheben der Zweiggrößen wurde der Index z<br/> angefügt.  $G_z$  ist die Diagonalmatrix der Zweigleitwerte, deren Elemente außerhalb der Diagonale alle verschwinden.

Die Verknüpfung von Zweig- und Knotenspannungen erfolgt durch die Zweig-Knoten-Inzidenzmatrix  $A^{T}$ . Das ist eine  $z \times (k-1)$ -Matrix mit z Zeilen und k-1 Spalten (Gl. (3.3.9)).

$$U_z = A^T U_k$$
. Beziehung Zweig-Knotenspannung (3.3.23)

Dazu tritt der Knotensatz Gl. (3.3.12) für die Zweigströme (das sind insgesamt k-1 Gleichungen)

$$AI_z = I_k = 0.$$
 Knotensatz (3.3.24)

Die Knoten-Zweig Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  hat k-1 Zeilen und z Spalten. Zusammengefasst ergeben die drei Gleichungen

$$oldsymbol{A}oldsymbol{I}_{
m z} = oldsymbol{\underbrace{A}oldsymbol{G}_{
m z}}oldsymbol{A}^{
m T}oldsymbol{U}_{
m k} - oldsymbol{\underbrace{A}oldsymbol{I}_{
m qk}} = oldsymbol{G}_{
m k}oldsymbol{U}_{
m k} - oldsymbol{I}_{
m qk} = oldsymbol{0}$$

oder

$$GU_{k} = I_{qk}$$
. Knotenspannungsanalyse (3.3.25)

Die Knotenleitwertmatrix  $G = G_k$  ist die Diagonalmatrix der Zweigleitwerte (quadratisch, also eine  $(k-1) \times (k-1)$ -Matrix). Der rechts stehende Knotenquellenstromvektor  $I_{\rm qk}$  umfasst jeweils die Summe der Quellenströme eines Knotens. Mit Gl. (3.3.25) ergibt sich die Lösung zu Gl. (3.2.8). Im letzten Schritt werden damit die gesuchten Zweigspannungen über Gl. (3.3.23) bestimmt. Auf diese Weise lässt sich das Knotenspannungssystem mit der Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix A, die der Schaltung direkt entnommen wird, aufstellen. Das kann rechnergestützt erfolgen.

#### **②** 3.3.5 Unbestimmte Knotenleitwertgleichungen

Um das Knotenspannungsverfahren auf einen fiktiven Bezugsknoten  $au\beta erhalb\ des\ Netzwerkes$  zu erweitern, müssen für die jetzt k Knoten insgesamt k Knotengleichungen und ebenso viele Knotenspannungen existieren.  $Da\ nur$   $k-1\ Gleichungen\ unabhängig\ sein\ können,\ wird\ das\ Gleichungssystem\ unbestimmt\ und lautet\ (in\ Matrixschreibweise)$ 

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1k} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{k1} & \cdots & \cdots & G_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ \vdots \\ U_{k0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ \vdots \\ I_{qk} \end{pmatrix}. \tag{3.3.26}$$

Das Ergebnis

$$\begin{pmatrix} \text{unbestimmte} \\ \text{Knotenleit-} \\ \text{wertmatrix} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Vektor der} \\ \text{Knotenspannungen} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Quellenstrom-} \\ \text{vektor} \end{pmatrix}$$

entspricht dem Ansatz Gl. (3.3.6) um einen Knoten erweitert.

Unbestimmte Knotenleitwertmatrix: Leitwertmatrix der Dimension  $k \times k$ , die k Klemmenströme mit k Klemmenspannungen verbindet und Null-Zeilen-Summen und Null-Spaltensummen enthält. Die Knotenspannungen sind auf einen Knoten außerhalb des Netzwerkes bezogen.

Die Methode, einen äußeren Knoten einzubeziehen, wird auch als "Rändern einer Matrix" bezeichnet. Die unbestimmte Knotenmatrix hat folgende Merkmale:

- Die ursprünglich (k-1) bestimmten Gleichungen gehen in k unbestimmte Leitwertgleichungen über (weil die neu hinzukommende Gleichung linear von den anderen abhängt).
- Durch die Erweiterung der  $(k-1) \times (k-1)$  zur  $k \times k$ -Matrix verschwinden jeweils ihre Spalten- und Zeilensummen und die Komponentensumme des Quellenvektors.
- Die Determinante der unbestimmten Matrix verschwindet, deshalb gibt es keine Widerstandsmatrix.
- Wird der Bezugsknoten zu einem Netzwerkknoten gemacht, so ist die zu diesem Knoten zugehörige Gleichung (Zeile und Spalte) zu streichen und das Gleichungssystem wird bestimmt.

Zur Anwendung der unbestimmten Knotenleitwertmatrix (Kap. 3.6.5) sind drei Regeln wichtig:

- 1. Zufügen eines isolierten Knotens. Eine  $k \times k$ -Knotenleitwertmatrix geht durch Einbezug eines isolierten Knotens in eine  $(k+1) \times (k+1)$ -Matrix über, wenn je eine Spalte und Zeile mit nur Nulleinträgen hinzugefügt werden.
- 2. Zusammenschalten zweier k-Knoten-Netzwerke. Werden zwei Netzwerke  $N_a$  und  $N_b$  mit gleicher Knotenzahl k (mit den Knotenleitwertmatrizen  $G_a$  und  $G_b$ ) so zusammengeschaltet, das korrespondierende Knoten zusammenfallen, so entsteht die neue unbestimmte Knotenmatrix  $G_s = G_a + G_b$ .
- 3. Knotenreduktion. Die Knotenzahl eines Netzwerkes sinkt entweder durch Knotenzusammenschaltung oder Knotenunterdrückung. So reduziert sich ein Zweitor (mit gemeinsamer Masseverbindung) durch Zusammenschaltung des Ein- und Ausgangsknotens auf einen Zweipol. Ein Zweipol entsteht aber auch am Eingangstor, wenn das Ausgangstor leerläuft (also der Ausgangsknoten unterdrückt wird). Beide Ergebnisse unterscheiden sich. Wir vertiefen diese Aspekte im Kap. 3.6.5.

Die besonderen Eigenschaften verhelfen unbestimmten Gleichungssystemen zu vielfältigen Anwendungen:

- Rechenkontrolle beim Aufstellen der Gleichungen,
- Einsatz bei der rechnergestützten Analyse größerer Netzwerke (Kontrollzwecke, Netzwerkumformung, additiver Aufbau größerer Schaltungen aus Einzelkomponenten),
- Schaltungsanalyse mit idealen Operationsverstärkern und überhaupt gesteuerten Quellen (s. Kap. 3.6),
- Gewinnung unterschiedlicher Knotengleichungssysteme mit verschiedenen Bezugsknoten.

So kann man beispielsweise ein Drei- und ein Vier-Klemmen Netzwerk zusammenschalten, indem beide durch Ergänzung von Null-Elementen auf Fünf-Klemmen Netzwerke erweitert werden. Anschließend erfolgt die gewünschte Knotenunterdrückung.

Eine andere Anwendung ist die sog. "Drehung" von Netzwerken, etwa zur Berechnung der Leitwertparameter des Transistors in verschiedenen Grundschaltungen. Ist ein Netzwerk mit drei Klemmen (Basis, Emitter, Kollektor) gegeben und sind die Parameter der unbestimmten Knotenmatrix bekannt, so können die Parameter anderer Grundschaltungen durch die der gegebenen Schaltung ausgedrückt werden. Dazu macht man in der unbestimmten Knotenleitwertmatrix eine Klemme zum gewünschten Bezugsknoten und streicht die zugehörige Zeile und Spalte. Die verbleibende bestimmte Knotenleitwertmatrix ist die der neuen Grundschaltung.

Ein weiterer Weg zur Gewinnung einer "gedrehten" Dreipolgrundschaltung ist die Transformation seiner Ströme und Spannungen: man stellt für den Dreipol (mit gegebenem Zweitor/Dreipolverhalten) den Knoten- und Maschensatz auf und eliminiert die Größen (Bezugsstrom und Längsspannung), die in der neuen Grundschaltung nicht auftreten sollen. Das verbleibende Dreipolverhalten ist das der gesuchten neuen Grundschaltung. Anwendungsbeispiele dafür waren die Kennliniengleichungen des Bipolartransistors in den drei Grundschaltungen oder die Kleinsignalparameter nach Abb. 2.7.6.

Beispiel 3.3.12 Transistorgrundschaltungen Gegeben sind die Zweitorparameter des Transistors in Basisschaltung (Leitwertmatrix  $y_b$  mit Elementen  $y_{11b} \dots y_{22b}$  (Abb. 3.3.8). Gesucht sind die Leitwertparameter der Emitterschaltung. Zunächst erzeugt man aus der Leitwertmatrix der Basisschaltung durch "Rändern" eine unbestimmte Form, macht also die  $2 \times 2$ - zur  $3 \times 3$ -Matrix (die Summe jeder Zeile bzw. Spalte muss verschwinden)

$$\mathbf{y}_{\infty} = \begin{pmatrix} y_{11b} & y_{12b} & -(y_{11b} + y_{12b}) \\ y_{21b} & y_{22b} & -(y_{21b} + y_{22b}) \\ -(y_{11b} + y_{21b}) & -(y_{12b} + y_{22b}) & (y_{11b} + y_{12b} + y_{21b} + y_{22b}) \end{pmatrix}.$$
(3.3.27a)

Soll der Emitter neuer Bezugsknoten werden, gilt  $U_{10}=0$  und der zugehörige Strom  $I_1$  darf in der neuen Gleichung nicht auftreten: Streichung der ersten Zeile

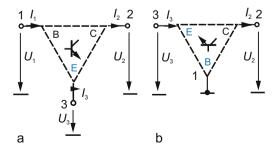


Abb. 3.3.8. Unbestimmte Knotenleitwertgleichungen. Klemmenvertauschung am Dreipol (Bipolartransistor). (a) Ausgangsdreipol, Emitterschaltung. (b) Gedrehter Dreipol, Basisschaltung

und Spalte. Die so verbleibende 2  $\times$  2-Matrix wird noch umgeordnet, damit der Basisknoten am Schaltungseingang liegt:

$$\mathbf{y}_{e} = \begin{pmatrix} (y_{11b} + y_{12b} + y_{21b} + y_{22b}) & -(y_{12b} + y_{22b}) \\ -(y_{21b} + y_{22b}) & y_{22b} \end{pmatrix}.$$
(3.3.27b)

Die Parameter der Kollektorschaltung ergeben sich durch Streichen der zweiten Zeile und Spalte und Umordnung, denn für diese Schaltung ist der Basisknoten der Eingang (1) und der Emitter der Ausgang (2). Aus Gl. (3.3.27) lassen sich die Leitwertparameter der drei Grundschaltungen systematisch gewinnen, die Ergebnisse gelten auch für Feldeffekttransistoren mit anderen Klemmenbezeichnungen wie S (Source), G (Gate) und D (Drain).

Die Methode eignet sich ebenfalls zur Darstellung gesteuerter Quellen in verschiedenen Konfigurationen, wobei automatisch (durch die symmetrische Stromrichtungswahl) die richtigen Vorzeichen der Quellenparameter anfallen.

## 3.3.6 Knotenspannungsanalyse und Zweipolparameter\*

Bei Anwendung der Zweipoltheorie auf große Netzwerke (besonders mit gesteuerten Quellen) wird die Bestimmung der Ersatzgrößen nach Kap. 2.4.4 rasch aufwendig. Hier kann der Einsatz der Knotenspannungsanalyse Vorteile bringen. Zur Bestimmung der Ersatzgrößen Leerlaufspannung  $U_1$ , Kurzschlussstrom  $I_k$  und Innenwiderstand  $R_i$  (nur zwei sind erforderlich) des Ersatzzweipols (Abb. 3.3.9a) wird

- 1. das Netzwerk für die Knotenspannungsanalyse vorbereitet (dabei sollen an den Zweipolklemmen die Knoten 1, 0 liegen).
- 2. den Zweipolklemmen ein Probestrom  $I_P$  aufgeprägt. Unabhängige und abhängige Quellen im Netzwerk bleiben in Betrieb!
- 3. das Knotengleichungssystem aufgestellt und nach der Klemmenspannung  $U_{10}$  aufgelöst.

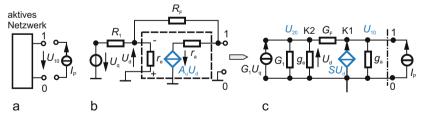


Abb. 3.3.9. Zweipolparameterbestimmung mit der Knotenspannungsanalyse. (a) Probestrom am Netzwerk aufgefasst als Ersatzzweipol. Durch Auswertung der Klemmenspannung mit und ohne Probestrom ergeben sich die Zweipolersatzgrößen. (b) Beispielschaltung und zugehörige Ersatzschaltung. (c) Umwandlung der spannungsgesteuerten Spannungsquelle in eine spannungsgesteuerte Stromquelle

Die Lösung hat als lineares Netzwerk folgende Form

$$U_{10} = a + bI_{\rm P} \equiv U_{\rm l} + R_{\rm i}I_{\rm P}. \tag{3.3.28}$$

Der Koeffizient a enthält die inneren Quellen, bildet also die *Leerlaufspannung*. Der Faktor b stellt den Innenwiderstand dar (für den Zweipol wurde die Verbraucherpfeilrichtung gewählt, daher  $+R_i$ ).

Gibt es das Knotenleitwertsystem (mit p=k-1 unabhängigen Knoten) entsprechend Gl. (3.3.8) mit dem Quellenstromvektor rechts, so setzt man statt des Koeffizienten  $I_{\rm q1}$  jetzt an  $I_{\rm q1}+I_P$  mit der Lösung

$$U_{10} = \frac{\det \mathbf{G}_1}{\det \mathbf{G}} + \frac{\Delta_{11}I_{P}}{\det \mathbf{G}} \equiv U_{l} + R_{i}I_{P}. \tag{3.3.29}$$

Die Koeffizienten werden nach den Regeln der Knotenspannungsanalyse ermittelt.

Beispiel 3.3.13 Zweipolparameter Gegeben ist eine Schaltung mit Operationsverstärker (Ersatzschaltung Abb. 3.3.9b). Gesucht sind die Zweipolgrößen an den Klemmen 1,0. Wir bereiten die Schaltung für die Knotenanalyse vor, wandeln unabhängige und gesteuerte Spannungsquellen in Stromquellen und erhalten als Gleichungssystem für die Knotenspannungen  $U_{10}$ ,  $U_{20}$ :

$$\begin{array}{ll} \text{K1:} & \left( \begin{array}{cc} G_{\text{F}} + g_{\text{a}} & -G_{\text{F}} \\ -G_{\text{F}} & G_{1} + g_{\text{e}} + G_{\text{F}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} U_{10} \\ U_{20} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} SU_{\text{d}} + I_{\text{P}} \\ G_{1}U_{\text{q}} \end{array} \right).$$

Rechts steht außer dem Probestrom  $I_{\rm P}$  noch die gesteuerte Stromquelle und in der zweiten Zeile die unabhängige Quelle der Schaltung. Wir bringen die gesteuerte Quelle auf die linke Seite, beachten die Steuerbedingung  $U_{\rm d}=-U_{20}$  und erhalten

$$\begin{array}{ll} \text{K1:} & \left( \begin{array}{cc} G_{\text{F}} + g_{\text{a}} & -G_{\text{F}} + S \\ -G_{\text{F}} & G_{1} + g_{\text{e}} + G_{\text{F}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} U_{10} \\ U_{20} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} I_{\text{P}} \\ G_{1} U_{\text{q}} \end{array} \right).$$

Die Auflösung nach der Klemmenspannung  $U_{10}$  ergibt

$$U_{10} = \frac{(G_{\rm F} - S)G_1U_{\rm q} + (G_1 + g_{\rm e} + G_{\rm F})I_{\rm P}}{(G_{\rm F} + g_{\rm a})(G_1 + g_{\rm e} + G_{\rm F}) - G_{\rm F}(G_{\rm F} - S)}.$$

Der Koeffizient von  $I_P$  ist  $R_i$  und der zu  $U_q$  proportionale Term die Leerlaufspannung  $U_1$ . Im Sonderfall S=0 (Wegfall der gesteuerten Quelle) können Leerlaufspannung (doppelte Spannungsteilerregel) und Innenwiderstand problemlos über die Schaltung kontrolliert werden. Auf diese Weise werden die Zweipolparameter mit der Knotenspannungsanalyse relativ einfach bestimmt, zumal die Knotenleitwertmatrix der Schaltung direkt zu entnehmen ist. Das Verfahren lässt sich auf Zweitore erweitern, nur müssen dann zwei Probeströme angelegt und die über den Quellen abfallenden Spannungen berechnet werden. Die Methode kann z. B. dazu dienen, ein größeres Netzwerk auf ein Zweitor zu reduzieren (s. Kap. 3.6.3).

Besonders einfach lassen sich Zweipolgrößen linearer (und nichtlinearer) Netzwerke, letztere im Kleinsignalfall, mit dem Schaltungssimulationsprogramm

SPICE ohne Aufstellung der Knotenspannungsmatrix bestimmen, wie die Beispiele 3.5.5 und 3.5.6 (Kap. 3.5.2) zeigen.

#### **3.3.7** Netzwerkanalyse mit Operationsverstärkern

**Einführung** Operationsverstärker arbeiten meist "eingebettet" in einer Schaltung. Die Standardanalyse ersetzt den Verstärker durch ein Netzwerkmodell. Im Regelfall reicht eine *gesteuerte Quelle* mit *zusätzlichen Netzwerkelementen* (Eingangs-, Ausgangswiderstände, Differenz-, Gleichtaktverhalten u. a.). Drei typische Fälle treten auf:

- die gesteuerte Quelle hat einen Innenwiderstand/-leitwert und kann in alle vier Grundformen (Kap. 2.7.6) gewandelt werden. Zur Analyse eignen sich alle bisherigen Verfahren, besonders die Knotenspannungsanalyse (gemeinsamer Bezugspunkt mit vielen Zweigen). Gesucht ist eine Systematik zur Einbettung eines (oder mehrerer) Verstärkers in ein Netzwerk.
- 2. ideale Quelle, endlicher Steuerparameter (Innenwiderstand null bzw. unendlich, aber endliche Steilheit, Spannungsverstärkung). Auch hier eignen sich alle Analyseverfahren mit Erweiterungen: so für die Knotenspannungsanalyse der Einbezug idealer gesteuerter Spannungsquellen (oder bei der Maschenstromanalyse von gesteuerten Stromquellen). Alternativ bietet sich an, eine Quellenform zu wählen, für die sich die Standardanalyse eignet (z. B. spannungsgesteuerte Stromquelle mit Innenwiderstand rabeim Knotenspannungsverfahren) und im Ergebnis eine Quellenumwandlung durch Au = Sra mit Grenzübergang ra → ∞ durchzuführen (Weg zur Rechenkontrolle).
- 3. ideale Quelle, unendlicher Steuerparameter. Jetzt tritt bei Spannungssteuerung ein virtueller Kurzschluss am Steuereingang auf und durch die spannungsgesteuerte Spannungsquelle stellt sich ein Strom (nur vom Netzwerk abhängig) so ein, dass der virtuelle Kurzschluss gilt.
  Nach Gl. (2.7.23) führt jede gesteuerte Quelle im Grenzübergang zum gleichen idealen Verstärker. Deshalb kann ein Netzwerk mit idealem Operationsverstärker auch so analysiert werden, dass man von der idealen spannungsgesteuerten Stromquelle (Steilheits) ausgeht und nach Aufstellung der Gleichungen den Grenzübergang S → ∞ vollzieht.

In den Fällen 2 und 3 stellt sich die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers (ideale Spannungsquelle) im Netzwerk als Funktion der anderen Netzwerkspannungen ein. Deshalb erfordert der Ausgang keine Knotengleichung und von den k-1 Knotengleichungen werden nur k-2 formuliert. Weil es aber k-1 Knotenspannungen gibt, dient als fehlende Gleichung entweder

- die Steuergleichung, z.B.  $U_1 = U_2 + U_a/A_u$  (von  $U_a = A_u(U_1 U_2)$  beim Operationsverstärker mit endlicher Verstärkung  $A_u$  (Fall 2)) oder
- der virtuelle Kurzschluss  $U_1 \to U_2$  ( $A_u \to \infty$ ) (Fall 3). In beiden Fällen wird eine Knotenspannung eliminiert!

Deshalb erfordert ein Operationsverstärker im Netzwerk zwei Analyseschritte:

- Einführung aller Knotenspannungen mit Aufstellungen aller Knotengleichungen (außer für Verstärkerausgang),
- Aufstellung der Steuergleichung oder virtueller Kurzschluss am Eingang zur Eliminierung einer Knotenspannung.

Knotenspannungsanalyse und Operationsverstärkern Wir konzentrieren uns auf die Fälle 2 und 3 und reduzieren den Verstärker auf eine differenzspannungsgesteuerte Spannungsquelle (Stromquelle unproblematisch). Sie wird mit  $r_{\rm a}=1/y_{\rm 2k}=0$ ,  $r_{\rm d}=r_{\rm gl}\to\infty$  und  $A_{\rm D}=A_{\rm u}>0$  modelliert (s. Tab. 2.13). Wir entwickeln zunächst eine Lösungsstrategie für einfache OP-Schaltungen und ergänzen sie später durch ein leistungsfähigeres Verfahren (s. Kap. 3.6.2), für das sich der Aufwand bei einfachen Schaltungen nicht lohnt.

Ausgang ist das Knotenspannungskonzept nach Kap. 3.3.2 mit Spannungsquelle einseitig am Bezugsknoten und die "schwimmende Quelle". Beide Fälle lassen sich mit dem Superknotenkonzept analysieren.

Dann folgt die

#### Lösungsmethodik Knotenspannungsanalyse mit n Operationsverstärkern

- 1. Vorbereitung des Netzwerkes für die Knotenspannungsanalyse.
- 2. Jeder Operationsverstärker erhält ein Netzwerkmodell mit verschwindenden Ausgangswiderständen. (Bei endlichen Ausgangswiderständen rechnet man die Spannungsquellen in spannungsgesteuerte Stromquellen um und führt die Standardknotenanalyse durch.)
- 3. Aufgestellt werden die Knotengleichungen nur für jene Knoten, die nicht mit Spannungsquellen verbunden sind. Es gibt k-1-n Knotengleichungen.
- 4. Jeder der n Operationsverstärker wird mit seiner Steuergleichung als (differenz-) spannungsgesteuerte Spannungsquelle  $U_{\rm A} = A_{\rm D}(U_{\rm P} U_{\rm N})$  eingeführt und die Klemmenspannungen  $U_{\rm A},\ U_{\rm P},\ U_{\rm N}$  durch Knotenspannungen ausgedrückt.
- 5. Lösung des Gleichungssystems für die k-1-n Knotenspannungen.

6. Bei virtuellem Kurzschluss  $(A_{\rm D} \to \infty)$  wird die Differenz  $U_{\rm P} - U_{\rm N}$  (ausgedrückt durch Knotenspannungen) für jeden Verstärkereingang gleich null gesetzt. Dann stellt sich die zugehörige Ausgangsspannung durch die Schaltung ein.

Beispiel 3.3.14 Elektrometerverstärker Im Elektrometerverstärker nach Abb. 3.3.10a mit einem Kleinsignalmodell nach Abb. 2.7.15b1 gibt es nur einen relevanten Knoten K1, weil die übrigen Knoten K2 (Ausgangsspannung), K3 und K4 direkt an Spannungsquellen liegen. Aus der Schaltung folgen (bei verschwindendem Eingangsleitwert  $g_{\rm d}$ ) die Knotengleichung Knoten K1

$$(G_1 + G_2)U_1 - G_2U_A = 0, (3.3.30a)$$

die Ausgangsspannung des Operationsverstärkers (Steuergleichung):

$$U_{\rm A} = A_{\rm uD}(U_{\rm P} - U_{\rm N}) = A_{\rm uD}(U_{\rm q} - U_{\rm 1}).$$
 (3.3.30b)

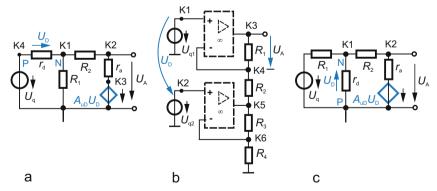
Daraus wird als Knotenspannungsmatrix geschrieben

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ 1 & \frac{1}{A_{\text{ND}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_{\text{A}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ U_{\text{q}} \end{pmatrix}. \tag{3.3.30c}$$

Durch Eliminieren von  $U_1$  ergibt sich die Spannungsverstärkung  $U_A(U_q)$  (übereinstimmend mit Gl. (2.7.41)):

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = \frac{1}{G_2/(G_1 + G_2) + 1/A_{\rm uD}}.$$
(3.3.31)

Für  $A_{\rm uD} \to \infty$  geht in Gl. (3.3.30b)  $U_1 \to U_{\rm q}$  und die Verstärkerbeziehung "entartet", d. h.  $U_{\rm A}$  kann jeden beliebigen (endlichen) Wert annehmen, auch den nach Gl. (3.3.30a). Wäre von Anfang an mit virtuellem Kurzschluss gerechnet worden, so hätte die Aufstellung nur der Knotengleichung (3.3.30a) und die Bedingung  $U_1 = U_{\rm q}$  genügt!



**Abb. 3.3.10.** Knotenspannungsanalyse und Operationsverstärker. (a) Kleinsignalmodell des Elektrometerverstärkers. (b) Modell eines Differenzverstärkers. (c) Kleinsignalmodell des Umkehrverstärkers

Beispiel 3.3.15 Differenzverstärker Gegeben ist die Schaltung Abb. 3.3.10b mit zwei idealen Operationsverstärkern und 6 Knoten außer dem Referenzknoten. Knoten K1 und K2 liegen an idealen Spannungsquellen, die Knoten K3 und K5 an Ausgängen der Verstärker. So entfallen vier Knotengleichungen. Dann sind nur noch die Knotengleichungen für K4 und K6 aufzustellen:

K4: 
$$(G_1 + G_2)U_4 - G_1U_3 - G_2U_5 = 0$$
  
K6:  $(G_3 + G_4)U_6 - G_3U_5 = 0$ .

Den vier Unbekannten stehen zwei Gleichungen gegenüber. Die Knotenspannungen  $U_1$  und  $U_2$  liegen durch die Quellenspannungen fest:  $U_1 = U_{q1}$ ,  $U_2 = U_{q2}$ . Die virtuellen Kurzschlussbedingungen beider Verstärker erzwingen  $(U_P = U_N) \rightarrow U_4 = U_1 = U_{q1}$ ,  $U_6 = U_2 = U_{q2}$ . Damit ergibt sich

$$G_1U_3 + G_2U_5 = (G_1 + G_2)U_{q1}$$
  
 $G_3U_5 = (G_3 + G_4)U_{q2}$ .

Durch Eliminieren von  $U_5$  folgt schließlich die Ausgangsspannung

$$U_{A} = U_{3} = (1 + R_{1}/R_{2}) U_{q1} - \frac{R_{1}}{R_{2}} (1 + R_{3}/R_{4}) U_{q2}$$
  
=  $(1 + R_{1}/R_{2}) (U_{q1} - U_{q2})|_{R_{1} = R_{4}, R_{2} = R_{3}}$ . (3.3.32)

Die Schaltung arbeitet dann als Differenzverstärker mit hochohmigem Eingang.

Beispiel 3.3.16 Standardumkehrverstärker Wir betrachten einen Umkehrverstärker mit einem Netzwerkmodell (Abb. 3.3.10c), das eine endliche Verstärkung sowie einund ausgangsseitige Widerstände  $r_{\rm d}$ ,  $r_{\rm a}$  enthält. Grundlage ist die von Abb. 2.7.15a1 übernommene Ersatzschaltung. Die Knotengleichungen K1 und K2 lauten

K1: 
$$G_1(U_D + U_q) + G_2(U_D + U_A) + U_D/r_d = 0$$
  
K2:  $G_2(U_A + U_D) + (U_A - A_{uD}U_D)/r_a = 0$ .

Durch Eliminieren der Eingangsspannung  $U_D$  folgt die Spannungsverstärkung

$$\frac{U_{\rm A}}{U_{\rm q}} = -\frac{1}{R_{\rm 1}} \left( \frac{r_{\rm a} + R_{\rm 2}}{A_{\rm uD}R_{\rm 2} - r_{\rm a}} \left( G_{\rm 1} + G_{\rm 2} + \frac{1}{r_{\rm d}} \right) + G_{\rm 2} \right)^{-1} \\
\approx -\frac{1}{R_{\rm 1}} \left( \frac{1}{A_{\rm uD}} (G_{\rm 1} + G_{\rm 2}) + G_{\rm 2} \right)^{-1} \Big|_{r_{\rm 2} \ll R_{\rm 2} \ll r_{\rm d}}.$$

Über die Gleichwertigkeit  $A_{\rm uD}U_{\rm D}=Sr_{\rm a}U_{\rm D}$  wird die Spannungsquelle in eine Stromquelle umgewandelt. Bei vernachlässigten Widerständen  $r_{\rm a}$ ,  $r_{\rm d}$  entsteht die angegebene Näherung (s. auch Gl. (2.7.34)).

Beispiel 3.3.17 Schaltung mit zwei Operationsverstärkern Es gelten für die Schaltung Abb. 3.3.11a mit zwei Operationsverstärkern und k=6 Knoten insgesamt 5 Knotenspannungen, von denen Knotengleichungen für die Knotenspannungen

 ${\rm K3} \dots {\rm K5}$  (bei idealem Verstärker) nicht formuliert werden müssen. Die Netzwerkbeziehungen lauten

K1: 
$$(G_1 + G_3 + G_4)U_1 - G_1U_4 - G_3U_5 = G_4U_q$$
  
K2:  $(G_2 + G_5)U_2 - G_2U_4 - G_5U_a = 0$  (3.3.33a)

Für die Knoten K3 ( $U_{\rm q}$ ) und K4, K5 sind die Spannungen bekannt. Die Verstärker werden beschrieben durch

OP1: 
$$U_4 = A_{\text{uD1}}(U_P - U_N) = -A_{\text{uD1}}U_1$$
  
OP2:  $U_5 = A_{\text{uD2}}(U_P - U_N) = -A_{\text{uD2}}U_2$  (3.3.33b)

Damit stehen vier Gleichungen für die Spannungen  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_4$ ,  $U_5$  bereit und das System ist lösbar (wir verzichten, weil es um den prinzipiellen Umgang mit gesteuerten Quellen geht). Für  $A_{\rm uD1} \to \infty$ ,  $A_{\rm uD2} \to \infty$  gehen  $U_1$  und  $U_2$  gegen null, aber nicht  $U_4$  und  $U_5$ : dann verbleibt aus Gl. (3.3.33a) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} -G_1 & -G_3 \\ -G_2 & -G_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 U_{\mathbf{q}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.33c}$$

Wären von Anfang an ideale Operationsverstärker verwendet worden, so hätte lediglich die Aufstellung der Knotengleichungen (3.3.33a), (3.3.33b) genügt. Das ist aber Gl. (3.3.33c).

Beispiel 3.3.18 Schaltung mit zwei Operationsverstärkern Die Schaltung in Abb. 3.3.11b hat 5 unabhängige Knoten und zwei Operationsverstärker, für die  $A_{\rm uD} \to \infty$  (virtueller Kurzschluss) gelten soll. Dadurch werden  $U_1 = U_3$  und  $U_3 = U_5$ , d. h.  $U_1 = U_3 = U_5$  erzwungen. Wir schreiben die Knotengleichungen nicht für die OP-Ausgänge (Knoten K2 und K4), wohl aber für K1, K3, K5. In der Rechnung treten die Knotenspannungen  $U_1 (= U_3 = U_5)$  sowie  $U_2$  und  $U_4$  auf. Die Gleichungen der Knoten K1, K3, K5 lauten:

 $\begin{aligned} & \text{K1}: \ G_5U_1 - G_5U_2 = I_{\text{q}} \\ & \text{K3}: \ (G_6 + G_7)U_3 - G_6U_2 - G_7U_4 = 0 \\ & \text{K5}: \ (G_8 + G_9)U_5 - G_8U_4 = 0 \end{aligned}$ 

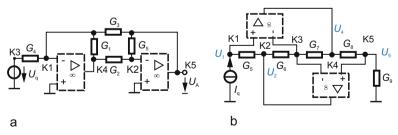


Abb. 3.3.11. Schaltungen mit zwei Operationsverstärkern und Knotenspannungsanalyse.
(a) Beispielschaltung. (b) Andere Beispielschaltung

oder mit  $U_1 = U_3 = U_5$  in Matrixform

$$\begin{pmatrix} G_5 & -G_5 & 0 \\ G_6 + G_7 & -G_6 & -G_7 \\ G_8 + G_9 & 0 & -G_8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{q}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3.34}$$

Gl. (3.3.34) kann für die drei Knotenspannungen  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_4$  gelöst und damit die Übertragungsfunktion, z. B.  $U_5 = U_1 = f(I_q)$  bestimmt werden.

Das Beispiel zeigt die Nützlichkeit des virtuellen Kurzschlusskonzeptes bei größeren Schaltungen. Der Ansatz mit endlicher Verstärkung  $A_{\rm uD}$  würde zwei weitere Gleichungen bedingen mit fünf Knotenspannungen. Wie in den vorhergehenden Beispielen müssen selbstverständlich die Knotengleichungen der virtuell kurzgeschlossenen Knoten (z. B. K1 und K3) aufgestellt werden, obwohl  $U_1 = U_3$  gilt: gerade dies ist der Inhalt des virtuellen Kurzschlussbegriffes.

## ■ 3.3.8 Knotenspannungsanalyse von nichtlinearen Netzwerken\*

Nichtlineare Netzwerke enthalten nichtlineare I, U-Beziehungen in den Knotengleichungen. Letztere verlangen Kennlinien der Form I = f(U), wie sie viele Bauelemente haben (Diode, Transistoren). Dann bleibt die Lösungsmethodik der Knotenspannungsanalyse erhalten, nur sind statt der Matrixgleichungen Systeme nichtlinearer Gleichungen zu lösen. Am nichtlinearen NWE sollte nur eine Knotenspannung liegen.

Beispiel 3.3.19 Nichtlineare Schaltung Das Netzwerk Abb. 3.3.12 hat die Knotengleichungen (Bezugsknoten 3)

$$\begin{split} \text{K1:} & \ G_1 U_{\text{k1}} = I_{\text{q1}} - I_{\text{D}}(U_{\text{k1}}, U_{\text{k2}}) \\ \text{K2:} & \ G_2 U_{\text{k2}} = I_{\text{q2}} + I_{\text{D}}(U_{\text{k1}}, U_{\text{k2}}) \qquad \text{mit } I_{\text{D}} = I_{\text{S}} \exp\left(\frac{U_{\text{k1}} - U_{\text{k2}}}{U_{\text{T}}} - 1\right). \end{split}$$

Umstellen der Diodengleichung nach links führt auf zwei nichtlineare Gleichungen, deren Knotenspannungen über das nichtlineare Element verknüpft sind.

Das Gleichungssystem vereinfacht sich durch Wahl eines neuen Bezugsknotens (bei 2) mit den Knotenspannungen  $U'_{k1}, U'_{k3}$ 

$$\begin{aligned} & \text{K1:} & \ G_1 U_{\text{k}1}' + I_{\text{S}} \left( \exp \frac{U_{\text{k}1}'}{U_{\text{T}}} - 1 \right) - G_1 U_{\text{k}3}' = I_{\text{q}1} \\ & \text{K2:} & \ -G_1 U_{\text{k}1}' + (G_2 + G_3) U_{\text{k}3}' = -I_{\text{q}1} - I_{\text{q}2} \end{aligned} .$$

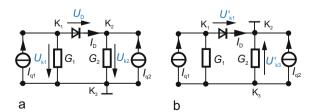


Abb. 3.3.12. Nichtlineares Netzwerk, Knotenspannungsanalyse, Wahl des Bezugspunktes. (a) Knoten K3 ist Bezugspunkt. (b) Knoten K2 ist Bezugspunkt

Bei Lösung nach  $U'_{k3}$  können die Knoten- und Zweigspannungen bestimmt werden. Das erfordert ein nichtlineares Lösungsverfahren und die Vorgabe numerischer Werte. Für derartige Probleme sind komfortable Computerprogramme verfügbar wie z. B. PSPICE und SPICE.

# 3.4 Netzwerkanalyse in Matrixdarstellung\*

Einführung Ziel dieses Abschnittes sind systematische Methoden zur Aufstellung der Analysegleichungen für größere Netzwerke abhängig von der Verbindungsstruktur und den Netzwerkelementen, die anschließend symbolisch oder numerisch und damit automatisierbar ausgewertet werden können. Ihre Grundlage ist die *Graphentheorie* mit der *Matrizenrechnung* als Hilfsmittel.

Ausgang sind die Kirchhoffschen Gleichungen, die *U, I*-Beziehungen der Netzwerkelemente und die *topologischen Bedingungen* (Verbindungsstruktur) für die Zusammenschaltung der NWE. Das Problem zerfällt so in ein *Verbindungsnetzwerk*, den Verbindungsmehrpol mit widerstandslosen Leiterverbindungen, und das Einfügen von Netzwerkelementen zwischen Knoten, oder allgemeiner das Einfügen von *Zweipolzweigen* (Abb. 3.4.1).

Gesucht sind die mathematische Beschreibung des Verbindungs- oder *Inzidenznetzwerkes*, die *allgemeine Zweigbeziehung* (hier zunächst nur unabhängige Quellen und Widerstände) und das Zusammenwirken dieser Schritte zu einem *Analyseverfahren*. Ansätze zur Beschreibung des Verbindungsnetzwerkes bieten die Maschen-Zweig- und Knoten-Zweig- $Inzidenzmatrizen\ M$ , A (Gl. (3.2.11), (3.3.10)).

Die geometrische Darstellung der topologischen Beziehungen erfolgt durch den *Netzwerkgraph* mit Knoten und Zweigen als Elementen. Er gewährleistet die Gewinnung der maximalen Zahl linear unabhängiger Schleifen- oder Kno-

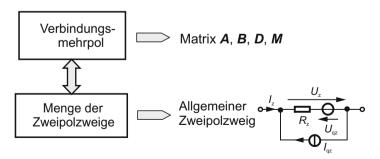
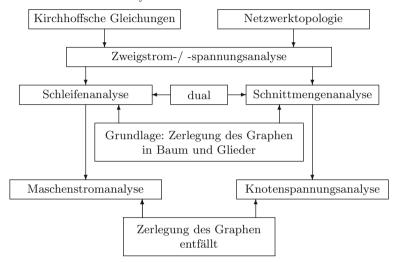


Abb. 3.4.1. Netzwerkgleichungen und Topologie

tengleichungen. Mit Einbezug des allgemeinen Netzwerkzweiges in das Netzwerkgerüst führen die Kirchhoffschen Gleichungen schließlich zur Schleifenund Schnittmengenanalyse mit der Maschenstrom- und Knotenspannungsanalyse als Sonderfällen. Tabelle 3.2 gibt eine erste Übersicht.

Tabelle 3.2. Netzwerkanalyse



## **3.4.1** Netzwerke, Graph und Inzidenzmatrizen

Zur Beschreibung der Netzwerktopologie ist die Art der Netzwerkelemente in den Netzwerkzweigen nebensächlich. Es kommt vielmehr darauf an, zwischen welchen Knoten die Zweige liegen. Dabei wird ein Zweig einfach durch eine Linie zwischen zwei Knoten dargestellt (mehrere parallele Zweige können zusammengefasst sein). So entsteht aus dem Netzwerk ein Graph als abstrakte Beschreibung der Netzwerkstruktur: Ersatz aller Netzwerkelemente durch Linien (Zweige) und aller Verzweigungen durch Punkte (Knoten).

Mit gerichteten Zweigen (Richtung durch eingetragene Pfeile verdeutlicht) entsteht der gerichtete Graph. Die Zweigrichtung liegt durch die am Netzwerkelement gewählte Strom-Spannungsrichtung fest, vereinbart ist die Verbraucherrichtung. Im gerichteten Graphen haben die Zweige Anfangs- und Endpunkte. Außer durch die Pfeilrichtung wird die Richtung auch durch die Knotenfolge (Anfangs-, Endknoten) in runden Klammern ausgedrückt.

Ein Graph *hängt zusammen*, wenn jeder beliebige Knoten von einem anderen aus über eine Reihe anschließender Zweige erreicht wird. Nichtzusam-

menhängende Graphen treten z. B. bei induktiver Kopplung auf. Ein Sonderfall ist der *ebene Graph*, der sich immer in einer Ebene aufzeichnen lässt.

Ein gerichteter Graph lässt sich durch eine (vollständige) Verbindungs- oder Knoten-Zweig-Verbindungsmatrix (Inzidenzmatrix)  $\mathbf{A}_{\rm a}$  (Gl. (3.3.10)) der Dimension  $(k \times z)$  mit k Zeilen (Knotenzahl) und z Spalten (Zweige) beschreiben.

Die Inzidenzmatrix beinhaltet, welche Zweige des Graphen mit welchen Knoten inzident (verbunden) sind. Wählt man statt der Zweige die *Zweigströme*, so beschreiben die Koeffizienten der Inzidenzmatrix  $A_{\rm a}$  die Koeffizienten der Zweigströme im Knotensatz (s. Gl. (3.3.12), dort mit A auf die k-1 unabhängigen Knotengleichungen beschränkt).

Es gibt noch weitere Inzidenzmatrizen: zwischen Maschen und Zweigen B (Gl. (3.2.11)), Schleifen und Zweigen M und den sog. Schnittmengen D.

Zur Aufstellung der Inzidenzmatrix wird zunächst ein Netzwerkgraph entwickelt, seine Knoten  $(1 \dots k)$  und Zweige  $(1 \dots z)$  nummeriert und jedem Zweig die Richtung zugeordnet. Die Elemente  $a_{ij}$   $(i=1,\dots k,\ j=1\dots z)$  liegen durch folgende Definition fest

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ wenn Zweig (Strom) } j \text{ vom Knoten } i \text{ wegführt} \\ -1 \text{ wenn Zweig (Strom) } j \text{ zum Knoten } i \text{ hinführt} \\ 0 \text{ wenn Zweig (Strom) } j \text{ mit Knoten } i \text{ nicht verbunden ist.} \end{array} \right.$$

- Jede Zeile enthält die Zeilenelemente (mit  $\pm 1$  belegt), deren Zweige den betreffenden Knoten nutzen.
- Jede Spalte kann nur ein Element mit +1 und eines mit -1 enthalten (jeder Zweig beginnt an einem Knoten und endet an einem anderen).

Abb. 3.4.2a zeigt eine Schaltung und den zugehörigen gerichteten Graphen (Abb. b). Die Zweige werden von  $1\ldots z$ , die Knoten von  $1\ldots k$  nummeriert. Die vollständige Knoten-Zweig Inzidenzmatrix ergibt sich dafür zu

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} \; = \; \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \left. \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \right\} \mathrm{Knoten}.$$

So erhält der Koeffizient  $a_{13}$  den Eintrag +1, weil Zweig 3 vom Knoten 1 wegführt, Zweig 2 hingegen den Eintrag -1, weil er zum Knoten 2 hinführt.

Die Information über die Netzwerkstruktur ändert sich nicht, wenn in der Inzidenzmatrix eine Zeile gestrichen, also zu k-1 Zeilen übergegangen wird. Diese reduzierte Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  (schlechthin als Inzidenzmatrix bezeich-

net) entsteht z.B. durch Streichen der Zeile 4 (Knoten 4 tritt nicht mehr auf) oder eines anderen Knotens. Der gestrichene Knoten ist der Bezugsknoten.

Die Knoten-Zweig-Verbindungsmatrix  $\boldsymbol{A}$  ist die einfachste Beschreibung des Netzwerkgraphen. Sie steht in direkter Beziehung zum Kirchhoffschen Knotensatz (Gl. (3.3.12)) und weiteren Inzidenzmatrizen.

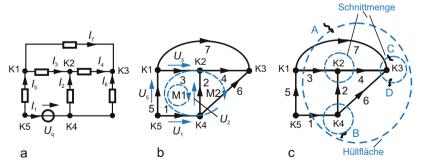
Für die Schaltung Abb. 3.4.2a lauten die Knotengleichungen für die Knoten K1:  $I_3-I_5+I_7=0$  und K2:  $-I_2-I_3+I_4=0$  bzw.

Schleife, Masche Eine Schleife oder Umlauf (loop) ist ein zusammenhängender Teil eines Graphen, bei dem jeder Knoten genau zwei Zweige verbindet. So bilden in Abb. 3.4.2b die Mengen der Zweige  $\{4,6,2\}$ ,  $\{5,3,2,1\}$  oder  $\{7,6,1,5\}$  jeweils Schleifen. Die Masche ist eine Schleife eines ebenen Graphen ohne innere Zweige (in einer Masche gibt es keine weitere Masche). In der Abbildung sind die Mengen der Zweige  $\{3,2,1,5\}$  oder  $\{4,6,2\}$  Maschen, aber nicht  $\{3,4,6,1,5\}$ , weil die Maschen  $\{4,6,2\}$  und  $\{2,1,5,3\}$  in einer Schleife liegen. Mit der Schleifenfestlegung lautet die zweite Kirchhoffsche Gleichung:

Die vorzeichenbehaftete Summe aller Zweigspannungen längs einer Schleife verschwindet zu jedem Zeitpunkt.

Die übliche Bezeichnung *Maschenregel*, *Maschensatz* schränkt aus dieser Sicht zu stark ein, tatsächlich gilt diese Regel für einen *Umlauf*.

Auch für Verknüpfung von Schleifen (Maschen) mit den sie bildenden Zweigen gibt es eine beschreibende Matrix, die Schleifen/Maschen-Zweig Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{B}$  bzw.  $\boldsymbol{M}$ . Die Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{M}$  diente zur



**Abb. 3.4.2.** Beispielnetzwerk und zugehöriger Topographie. (a) Netzwerk. (b) Zugehöriger gerichteter Graph mit zwei eingetragenen Maschen/Schleifen. (c) Zum Schnittmengenbegriff

Formulierung des Maschensatzes (Gl. (3.2.11)), wir werden sie später (Gl. (3.4.5ff)). vertiefen. Die Schaltung Abb. 3.4.2b hat z. B. die Umläufe M1 und M2:

M1: 
$$U_3 - U_2 - U_1 + U_5 = 0$$
,  
M2:  $-U_1 - U_6 + U_4 + U_3 + U_5 = 0$ .

Im ersten Fall liegt eine Masche vor, im zweiten eine Schleife, die die Maschenmatrix nicht erfasst. Deshalb erfolgt später eine Erweiterung zur Schleifen-Inzidenzmatrix B.

**Schnittmenge** (cut-set, auch *Schnitte, Trennmenge* oder treffender *Hüllknoten*). Das ist die Menge von Zweigen eines Graphen, die von einer *Hüllfläche* oder zweidimensional einer geschlossenen *Schnittlinie* (außerhalb eines Knotens verlaufend) einmal geschnitten wird und deren Entfernung den Graph in zwei einzelne, aber zusammenhängende Teilgraphen teilt. Schnittlinien werden abgekürzt mit S (und laufender Nummer) gekennzeichnet.

Das Beispielnetzwerk Abb. 3.4.2c mit gegebenen Zweigströmen verdeutlicht den Begriff. Ausgang sind die Knotengleichungen für die Knoten K2 . . . K4:

K2: 
$$-I_2 - I_3 + I_4 = 0$$
,  
K3:  $-I_4 - I_6 - I_7 = 0$ ,  
K4:  $-I_1 + I_2 + I_6 = 0$ .

Die Addition der Gleichungen ergibt  $-I_1-I_3-I_7=0$ . Das sind aber die Ströme, die durch eine um das Netzwerk mit den Knoten  $1\dots 3$  gedachte Hüllfläche zufließen (unabhängig davon, was im Innern der Hülle geschieht). Die Menge der Zweige (hier 1,3,7), die durch diese Hülle geschnitten wird, ist die Schnitt- oder Trennmenge. (Meist wird nur eine Schnittlinie  $A\dots B$  zur Veranschaulichung der Trennmenge angegeben). Entfernt man alle drei "geschnittenen Zweige", dann zerfällt der Graph in zwei separate Teile. Wird ein Zweig wieder ersetzt, so entsteht ein verbundener Graph.

Die Schnittmenge formuliert das Kirchhoffsche Gesetz für eine Hüllfläche oder einen *Hüllknoten*: Das ist nichts anderes als eine erweiterte Knotenregel, nach der die Summe aller durch die Hülle hindurchtretenden Ströme (vorzeichenbehaftet in Bezug auf die Hülle) verschwinden muss. Sie wird mitunter als zweite Form des Kirchhoffschen Knotensatzes bezeichnet. Bei der Definition der Knotenregel Gl. (1.4.7) wurde schon darauf hingewiesen.

Der Knotensatz für den Einzelknoten ist dann als *Knotenschnittmenge* zu verstehen (in Abb. 3.4.2c durch den Schnitt CD für Knoten K3 angedeutet).

Praktisch gewinnt man eine Trennmenge durch Umschließen eines Netzwerkteiles mit einem Hüllknoten. Die Menge aller Zweige, die diese Hülle durchschneidet, bildet sie. Ihr wird eine Orientierung zugeordnet, etwa vom Innern zum Äußeren positiv weisend. Damit lautet der Knotensatz allgemeiner:

Die vorzeichenbehaftete Summe der Zweigströme einer Schnittmenge verschwindet zu jedem Zeitpunkt.

Ein Netzwerkgraph hat k-1 unabhängige Schnitte. Sie bilden eine *Schnitt-basis*.

**Baum** Ein Baum ist ein zusammenhängender Teilgraph, der sämtliche Knoten eines Graphen enthält ohne Schleifen zu bilden. Alle nicht zum Baum (tree) gehörenden Zweige bilden den *Cobaum*. Ein Baum besteht aus *Baumzweigen*, ein Cobaum aus Verbindungszweigen oder Sehnen (links). Zu einem Graph gibt es meist mehrere Bäume (insgesamt  $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$ ).

Der Baumbegriff führt zur Definition besonderer Schleifen- und Schnittmengen, der *Fundamentalschleifen* und *Fundamentalschnittmengen*. Sie bestimmen die Zahl notwendiger und hinreichender Gleichungen zur Lösung der Kirchhoffschen Gleichungen.

Fundamentalschleife (fundamental loop) Jede Schleife, die nur einen Verbindungszweig, aber beliebig viele Baumzweige enthält, heißt Fundamentalschleife. Sie ist die Grundlage der Schleifenanalyse. Ihre Richtung stimmt mit der Richtung des Verbindungszweiges überein. Zu jedem Graph gehören k-1 Baumzweige und m Verbindungszweige, es gibt also m=z-(k-1) Fundamentalschleifen.

Fundamentalschnittmenge (fundamental cut set) Eine Schnittmenge, die nur einen Baumzweig, sonst nur Verbindungszweige enthält, heißt Fundamentalschnittmenge. Sie ist die Grundlage der Schnittmengenanalyse. Ein Graph mit gewähltem Baum hat k-1 Fundamentalschnittmengen.

Unabhängige Ströme und Spannungen In Netzwerken gibt es mehrere Sätze voneinander unabhängiger Größen, die gleichberechtigt zur Analyse dienen können. Das sind k-1 Baumzweigspannungen, m Verbindungszweigströme (als Maschenströme die Grundlage des Maschenstromverfahrens) und k-1 Knotenspannungen als spezielle Baumzweigspannungen (Grundlage der Knotenspannungsanalyse).

Unabhängige Variable der Schleifen- bzw. Schnittmengenanalyse sind die m Verbindungszweigströme bzw. die k-1 Baumzweigspannungen. Die (sehr praktischen!) Knotenspannungen werden nach Gl. (3.3.1) aus den Baumzweigspannungen gewonnen. Die Analyse bestimmt dann zunächst die unabhängigen Variablen und daraus die gesuchten Zweiggrößen.

**Inzidenzmatrizen** In jedem Netzwerk fließen Zweigströme I und liegen Zweigspannungen U an, ihre Gesamtheit wird im Zweigstromvektor  $\boldsymbol{I} = (I_1 \dots I_z)^{\mathrm{T}}$  und Zweigspannungsvektor  $\boldsymbol{U} = (U_1 \dots U_z)^{\mathrm{T}}$  ausgedrückt. Wir betrachten zunächst die Kirchhoffschen Gleichungen in Matrixdarstellung mit Inzidenzmatrizen.

**Knotensatz** Das Netzwerk mit z Zweigen und (allen) k Knoten hat die Knotengleichungen (Gl. (3.3.12))

$$A_a I = 0$$
 Knotensatz, Matrixform (3.4.1)

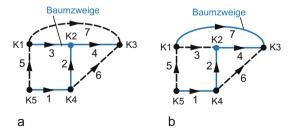
mit der vollständigen Knoten-Inzidenzmatrix mit p+1=k Zeilen

$$\mathbf{A}_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1z} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kz} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1z} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2z} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pz} \end{pmatrix}. \tag{3.4.2a}$$

Es entsprechen die Knoten den Zeilen und die Zweige den Spalten der Matrix. Da jeder Zweig zwei Knotenpunkte verbindet, enthält jede Spalte einen Eintrag +1 und -1 (die Summe einer Spalte muss stets null sein). Damit sind die Zeilen der Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}_{\rm a}$  linear abhängig, m. a. W. kann eine beliebige Zeile gestrichen werden. So entsteht die reduzierte Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}_{\rm s}$  sie wird als Inzidenzmatrix (Dimension  $(k-1)\times z$ ) bezeichnet. Die gestrichene Zeile ist der "Bezugsknoten".

Gl. (3.4.1) führt durch Ausmultiplizieren zum System unabhängiger Knotengleichungen; für Abb. 3.4.2a wurde das veranschaulicht.

Der Knotensatz Gl. (3.4.1) gilt unabhängig von der Wahl eines Baumes. Ein festgelegter Baum erlaubt aber weitere Aussagen, weil es dann Baum- und Verbindungszweige gibt



**Abb. 3.4.3.** Bäume zum Netzwerk Abb. 3.4.2. (a) Gewählter Baum. (b) Linienbaum

Dann hat die Knoten-Inzidenzmatrix eine Teilmatrix  $\mathbf{A}_{\rm b}$  der Baumzweige (Index b für Baum, Index v für Verbindungszweig) und Verbindungszweige  $\mathbf{A}_{\rm v}$ . Dabei ist  $\mathbf{A}_{\rm b}$  quadratisch  $(p \times p)$  und  $\mathbf{A}_{\rm v}$  eine  $p \times m$  Matrix (Zahl der Verbindungszweige stets gleich der Zahl der Zweige minus der Zahl (k-1) unabhängiger Knoten). Für Beispiel Abb. 3.4.2b wurden in Abb. 3.4.3 zwei Bäume gewählt: im ersten Fall (Abb. a) sind die Zweige  $(1) \dots (4)$  Baumzweige, der Rest Verbindungszweige, Abb. b sind (1), (2), (4), (7) Baumzweige.

In Gl. (3.4.2) enthält jede Spalte die Knoten eines Zweiges: deshalb lassen sich die Zweigspannungen auch durch Knotenspannungen  $U_k$  ausdrücken

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{U}_{\mathrm{k}}$$
 Zusammenhang Zweig-Knotenspannungen (3.4.3)

(s. Gl. (3.3.10)). Darin ist  $A^{\rm T}$  die transponierte Knoten-Inzidenzmatrix A, also eine  $z \times p$ -Matrix. Offen bleibt noch die Formulierung des Knotensatzes mit Schnittmengen (s. u.).

Maschensatz Der Maschensatz (3.2.11)

$$MU = 0$$
 Maschensatz, Marixform

wird durch die  $Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix\ M$  erfasst. Sie gibt Auskunft über die Zweige in den einzelnen Maschen. In einer Zeile stehen alle zur betreffenden Masche gehörenden Zweige, in ihren Spalten die Maschen, zu denen der jeweilige Zweig gehört. Die Matrixelemente sind definiert durch

$$m_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \;\; \text{Zweig} \; j \;\; \text{in Masche} \; i \;\; \text{mit gleicher Orientierung,} \\ -1 \;\; \text{Zweig} \; j \;\; \text{in Masche} \; i \;\; \text{mit entgegengesetzter Orientierung,} \\ 0 \;\; \text{Zweig} \; j \;\; \text{nicht Masche} \; i. \end{array} \right.$$

In Abb. 3.4.2b wurden zwei Umläufe M1 (Masche) und M2 (Schleife) gebildet. Der zweite erfordert eine Erweiterung der Maschenmatrix zur (vollständigen) Schleifen-Zweig-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{B}_{\rm a}$ . Mit ihr lautet der Maschensatz

$$B_{\rm a}U = 0.$$
 Maschensatz (3.4.4)

Er schließt alle möglichen Maschen ein: die Zahl der Zeilen ist gleich der Zahl der Schleifen und die Zahl der Spalten gleich der Zahl der Zweige. Diese Schleifen sind nicht unabhängig voneinander, so können in Abb. 3.4.2b insgesamt 7 Umläufe gebildet werden aus den Zweigen  $\{2,3,7,6\}$ ,  $\{5,7,6,1\}$ ,  $\{5,7,4,2,1\}$ ,  $\{5,3,2,1\}$ ,  $\{3,4,7\}$ ,  $\{4,6,2\}$  und  $\{5,3,4,6,1\}$ . Von ihnen sind nur m=z-(k-1)=3 linear unabhängig, sie bilden die Fundamentalschleifen.

Fundamentalschleifenmatrix Die richtige Anwendung des Maschensatzes erfordert die Anzahl voneinander unabhängiger Maschen, das sind genau m = z - (k-1), symbolisiert durch die Verbindungszweige im vollständigen Baum. Erst die Baumwahl erlaubt die Festlegung der Fundamentalschleifen!

Das System der Maschenzweige der m unabhängigen Maschengleichungen wird durch die Schleifen-Zweig-Inzidenzmatrix (auch Schleifeninzidenz- oder Fundamentalschleifenmatrix), kurz die Schleifenmatrix  $\boldsymbol{B}$  gekennzeichnet 16

Die Schleifenmatrix  $\boldsymbol{B}$  ist eine  $m \times z$  Matrix gegeben durch die Schleifenumläufe in jeder der m Fundamentalschleifen. Jede Zeile repräsentiert eine Fundamentalschleife, jede Spalte einen Zweig.

Abb. 3.4.4 zeigt drei unterschiedliche Fundamentalschleifen zu Abb. 3.4.2. Es gibt 5 Knoten, 7 Zweige und 3 Fundamentalschleifen. Die Baumzweige wer-

 $<sup>^{16}</sup>$ Man unterscheidet zwischen der vollständigen Schleifenmatrix  $\boldsymbol{B}_{\rm a},$  die alle Schleifen des Graphen einschließt und der Fundamentalschleifenmatrix  $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{\rm f},$  die nur die m Fundamentalschleifen umfasst. Wir beschränken uns darauf.

den stets vor Verbindungszweigen nummeriert. Dann gehört zu Abb. 3.4.4a folgende Schleifeninzidenzmatrix

In Abb. 3.4.4b, c wurden weitere Fundamentalschleifen angegeben. Nach jeweiliger Festlegung des Baumes ist die  $\boldsymbol{B}$ -Matrix direkt ablesbar. Die Schleifenmatrix  $\boldsymbol{B}$  lässt sich durch Aufteilung der Zweige in (k-1) Baum- und m Verbindungszweige in zwei Teilmatrizen  $\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}$  und  $\boldsymbol{B}_{\mathrm{v}}$  gruppieren

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_{\rm b} & B_{\rm v} \\ p \text{ Baumzweige} & w \text{ Verbindungszweige} \end{array}\right) \right\} m \text{ Fundamentalschleifen}$$

$$\equiv \left(\begin{array}{c|c} B_{\rm b} & E \\ Baumzweige & \text{Verbindungszweige} \end{array}\right) \right\} m.$$
(3.4.7)

Dabei stimmt die Orientierung der Fundamentalschleifen mit der der Verbindungszweige überein.  ${\pmb E}$  bezeichnet die Einheitsmatrix. Für die Matrixkoeffizienten gilt

$$b_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \;\; \text{Zweig} \; j \;\; \text{in Fundamental schleife} \;\; i, \; \text{beide Richtungen gleich} \\ -1 \;\; \text{dito, aber beide Richtungen verschieden} \\ 0 \;\; \text{Zweig} \;\; j \;\; \text{nicht zur Schleife} \;\; i \;\; \text{gehörig}. \end{array} \right.$$

Der Maschensatz formuliert als System der m unabhängigen Schleifengleichungen lautet dann mit dem Zweigspannungsvektor~U und der (Fundamental-) Schleifen-Inzidenzmatrix B

$$BU = 0.$$
 Maschensatz, Matrixform (3.4.8)

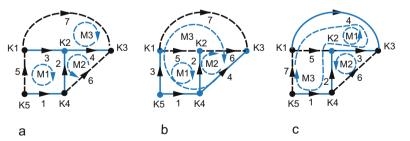


Abb. 3.4.4. Fundamentalschleifen. (a) Fundamentalmaschen. (b), (c) Weitere Fundamentalschleifen/-maschen

Die Zweigspannungen lassen sich weiter unterteilen in Baum- und Verbindungszweigspannungen, gleiches gilt für die Spannungsvektoren:  $\boldsymbol{U}$  besteht aus dem Vektor  $\boldsymbol{U}_{\rm b}$  der (k-1) Baumzweigspannungen und dem Vektor  $\boldsymbol{U}_{\rm v}$  der m Verbindungszweigspannungen:  $\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{U}_{\rm b} | \boldsymbol{U}_{\rm v})^{\rm T}$ . Dann ergibt sich über den Maschensatz mit Gl. (3.4.7)

$$m{B} \cdot m{U} = \left( m{B}_{
m b} \ m{E} \ 
ight) \cdot \left( m{U}_{
m b} \ m{U}_{
m v} 
ight) = m{B}_{
m b} m{U}_{
m b} + m{U}_{
m v} = 0$$

ein Zusammenhang zwischen den Verbindungs- und Baumzweigspannungen

$$U_{\rm v} = -B_{\rm b}U_{\rm b}$$
. Beziehung Verbindungs-Baumzweigspannung (3.4.9)

Die bisherigen Formulierungen der Kirchhoffschen Gleichungen berücksichtigen nur die Netzwerktopologie. Dabei ist (stillschweigend) vorausgesetzt, dass jeder Knoten mit wenigstens einem anderen Knoten verbunden ist. Im konkreten Netzwerk gibt es unterschiedliche Verbindungen durch Netzwerkelemente, teilweise fehlen sie: deshalb müssen noch die U, I-Beziehungen der NWE einbezogen werden. Ergebnis sind die Schleifen- und Schnittmengenanalyse.

## 3.4.2 Schleifenanalyse

Umfassender als Maschenstrom- und Knotenspannungsanalyse sind Schleifen- und Schnittmengenanalyse. Sie basieren auf Fundamentalschleifen bzw. Fundamentalschnitten und erfordern deswegen einen Baum. Unabhängige Netzwerkvariable sind die *Schleifenströme* (erfüllen die Knotengleichungen der Schleifenanalyse) bzw. die *Baumzweigspannungen* (erfüllen die Schleifengleichungen der Schnittmengenanalyse). Entsprechen die Schleifenströme verallgemeinerten Maschenströmen, so muss die Beziehung zwischen Baumzweigund Knotenspannungen noch begründet werden.

Die Grundlage der Schleifenanalyse sind die Schleifenströme als unabhängige Variable in Fundamentalschleifen beschrieben durch die Fundamentalschleifenmatrix  $\boldsymbol{B}$  Gl. (3.4.6). Sie werden nach Wahl eines Baumes ermittelt und in der Matrix  $\boldsymbol{B}$  zusammengefasst. Weil die Umlaufrichtung einer Fundamentalschleife mit der des Verbindungszweiges übereinstimmt, können ihre Koeffizienten direkt über Gl. (3.4.7) bestimmt werden. Für die weitere Analyse ist die Orthogonalität der Knoten- und Fundamentalschleifen-Inzidenzmatrix von grundlegender Bedeutung (s. u.).

Grundgleichungen Die Schleifenstromanalyse basiert auf drei Ansätzen:

- 1. dem Maschensatz Gl. (3.4.8) für jede Fundamentalmasche B,
- 2. dem allgemeinen Netzwerkzweig (Abb. 3.1.3) mit der Zweigspannung  $U_j = R_{jz}I_j U_{qj} + R_{jz}I_{qj} \quad j = 0, 1, 2 \dots z$

oder als Matrixgleichung (s. Gl. (3.2.20))

$$U = R_z I - U_q + R_z I_q$$
 allgemeiner Netzwerkzweig (3.4.10)

3. dem Zusammenhang zwischen Zweigstrom I und  $Schleifenstrom I_{\rm m}$  über die transponierte  $Fundamentalschleifenmatrix <math>B^{\rm T}$  (s. u.)

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{C} \boldsymbol{I}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{I}_{\mathrm{m}}$$
. Zusammenhang Zweig-, Schleifenstrom (3.4.11)

Einsetzen des Netzwerkzweiges (3.4.10) in den Maschensatz Gl. (3.4.8) ergibt

$$oldsymbol{B}oldsymbol{U} = oldsymbol{B}oldsymbol{R}_{\mathrm{z}}oldsymbol{I} - oldsymbol{B}oldsymbol{U}_{\mathrm{q}} + oldsymbol{B}oldsymbol{R}_{\mathrm{z}}oldsymbol{I}_{\mathrm{q}} = oldsymbol{0}$$

und bei Ersatz des Zweigstromvektors durch den Schleifenstromvektor Gl. (3.4.11)

$$\underbrace{\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}}_{\mathbf{R}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_{\mathrm{q}} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{I}_{\mathrm{q}} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{qm}}$$
(3.4.12a)

oder

$$RI_{\rm m} = U_{\rm qm}$$
. Grundgleichung Schleifenstromanalyse (3.4.12b)

In der Schleifenstromanalyse treten die Schleifenwiderstandsmatrix  $R = BR_zB^T$ , der Quellenspannungsumlaufvektor  $U_{\rm qm}$  (Summe der Quellenspannungen in der Schleife, positiv, wenn in Umlaufrichtung orientiert) und der gesuchte Schleifenstromvektor  $I_{\rm m}$  auf mit

$$I_{\rm m} = R^{-1}U_{\rm qm}$$
. Schleifenstromanalyse, Lösung (3.4.13)

Aus der Lösung können Zweigstromvektor Gl. (3.4.11) und mit Gln. (3.4.10), (3.4.11) die Zweigspannungen bestimmt werden.

#### Diskussion

- In der Lösung Gl. (3.4.13) enthält der Quellenspannungsumlaufvektor nicht nur die Spannungsquellen (einer Schleife), sondern auch Stromquellen, die über den Zweigwiderstand zu den Spannungen beitragen.
- 2. Die Matrix  $R_z$  ist die Zweigwiderstandsmatrix (nur Diagonalelemente), die Matrix R die *Schleifenwiderstandsmatrix* aus Haupt- und Nebendiagonalelementen (Bedeutung wie bei der Maschenstromanalyse, nur treten hier die jeweiligen Schleifen auf).

**Orthogonalität** Aus der Beziehung zwischen Zweig- und Schleifenstrom Gl. (3.4.11) und dem Knotensatz Gl. (3.4.1) folgt  $AI = \underbrace{AB^{\mathrm{T}}}_{0} I_{\mathrm{m}} = 0$ . Das gilt nur, wenn A und B orthogonal zueinander sind:

$$AB^{T} = 0$$
 resp.  $BA^{T} = 0$ . (3.4.14)

Die Knoten-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  und die Fundamentalschleifen-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{B}$  sind stets orthogonal zueinander.

# **②** 3.4.3 Schnittmengenanalyse

Im Kap. 3.4.1 wurde die Schnittmenge aus dem erweiterten Knotenbegriff erklärt: umhüllt man einen Netzwerkteil, der einen oder mehrere Knoten enthält durch eine Hüllfläche, so muss die vorzeichenbehaftete Summe aller Ströme durch die Hüllfläche verschwinden. In der Ebene hinterlässt die Hüllfläche eine Spur, auch verstanden als Trennlinie eines Schnittes. Deshalb verschwindet die Summe der Ströme einer Trennmenge. Dies ist eine verallgemeinerte Knotenpunktregel. So, wie der Knotensatz für einen gegebenen Netzwerkgraphen k-1 voneinander unabhängige Gleichungen für die Ströme liefert, führt der erweiterte Knotensatz beim gleichen Graphen auf k-1 unabhängige Schnitte. Sie bilden eine Schnittbasis. Abb. 3.4.5a, b zeigt einen Netzwerkgraphen mit 4 Knoten und allen Schnitten einschließlich der Orientierung. Grundlage sind die Kirchhoffschen Gleichungen, z. B. für die ersten drei Schnitte

Der vollständige Gleichungssatz lautet in Matrixschreibweise

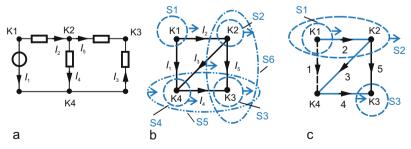


Abb. 3.4.5. Schnittmengen im elektrischen Netzwerk. (a) Netzwerk. (b) Gerichteter Graph zu Abb. a. (c) Schnittmengen bei gewähltem Linienbaum

oder kompakt formuliert<sup>17</sup>

$$D_{\mathbf{a}}I = \mathbf{0}.\tag{3.4.15}$$

Für die Schnittmenge und die mit ihr verbundenen Zweige gibt es eine vollständige Schnittmengen-Zweig-Verbindungsmatrix oder kurz *Schnitt*- oder *Trennmengenmatrix*  $\boldsymbol{D}_{\rm a}$ . Ihre Elemente werden durch folgende Definition bestimmt

$$d_{ij} = \begin{cases} & 1 \text{ Zweig } j \text{ in Fundamentalschnittmenge } i, \\ & \text{gleicher Richtungssinn} \\ & -1 \text{ Zweig } j \text{ nicht in Fundamentalschnittmenge } i, \\ & \text{verschiedener Richtungssinn} \\ & 0 \text{ Zweig } j \text{ nicht zur Fundamentalschnittmenge gehörig.} \end{cases} \tag{3.4.16}$$

Jede Zeile von  $D_a$  ist mit einem Schnitt des Graphen assoziiert, jede Spalte mit einem Zweig. Im Abb. 3.4.5b gehört Zweig  $z_3$  zu den Schnitten 2,4,5,6 (nicht verschwindende Elemente in Zeilen 2,4,5,6 in Spalte 3). Das Element in Zeile 5 beträgt +1, weil die Orientierung von Schnitt 5 mit der von Zweig 3 übereinstimmt (dagegen beträgt das Element in Zeile 6 -1, da Schnitt 6 entgegen zu Zweig 3 orientiert ist).

Für Abb. 3.4.5b wurden oben 6 Gleichungen für 5 Unbekannte gefunden: sie sind daher linear abhängig. Man stellt weiter fest, dass  $D_a$  Zeilen der (vollständigen) Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix  $A_a$  und/oder Zeilen enthält, die durch Linearkombination der Zeilen von  $A_a$  entstehen. So umfasst die Schnittgleichung S6 die Knoten 2 und 3 (Zeilen 2 und 3), die Schnittgleichung S5 die Zeilen 3 und 4 (Knoten 3 und 4). Linear unabhängig sind im gegebenen Netzwerk nur k-1 Gleichungen (hier drei) entsprechend dem Knotensatz. Dafür lässt sich die (reduzierte) Schnittmengen-Zweig-Inzidenzmatrix D vereinbaren (forthin immer als Schnittmengen-Inzidenzmatrix D verstanden). Beispielsweise bilden die ersten drei Zeilen (Gleichungen) als Teilmatrix von  $D_a$ 

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

einen Satz (nämlich k-1=3) unabhängiger Schnittmengen in Abb. 3.4.5c.

Die systematische Suche einer Schnittmengenbasis führt zur Vereinbarung der Fundamentalschnittmenge:

 $<sup>^{17} \</sup>mathrm{Diese}$  Matrix wird oft auch mit  $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{a}}$  bezeichnet.

Eine Fundamentalschnittmenge schneidet nur einen Baumzweig, sonst nur Verbindungszweige. Ihre Richtung ist die des Baumzweiges. Ein Graph mit zugeordnetem Baum hat k-1 Fundamentalschnittmengen.

Damit stimmt die Zahl der Fundamentalschnittmengen mit der Anzahl der Baumzweige überein und es gibt eine zugehörige Fundamentalschnittmengen-Inzidenzmatrix  $\mathbf{D}$  mit p=k-1 Zeilen und z Spalten entsprechend der Anzahl der Zweige. Dabei werden, den bisherigen Vereinbarungen gemäß, zuerst die Baum-, dann die Verbindungszweige aufgeführt. So lassen sich die Elemente von  $\mathbf{D}$  auch ohne Aufstellung der Kirchhoffschen Gleichungen nach folgender Regel gewinnen (wobei die Richtung der Fundamentalschnittmenge mit der Richtung der zugehörigen Baumzweige übereinstimmen muss): In jeder Zeile der Matrix stehen die Zweige ausgedrückt durch den Koeffizienten  $d_{ij}$ , die in einer Schnittmenge (also am betreffenden erweiterten Knoten) enthalten sind. Dann lautet die erste Kirchhoffsche Gleichung (Knotensatz) formuliert als Schnittgesetz

$$DI = 0.$$
 Knotensatz in Matrixform, (3.4.17)  
Schnittgesetz

Die Schnittmengen-Zweig-Inzidenzmatrix verknüpft die Schnittmengen mit den sie bildenden Zweigen, also jeden Hüllknoten mit seinen auftreffenden Zweigen (erweiterte Form des Knotensatzes).

Daher sind Beziehungen zwischen der Schnittmengenmatrix  $\boldsymbol{D}$  und der Knoten-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  zu erwarten, s. u.

Die zur Fundamentalschnittbasis gehörende Schnittmengen-Inzidenzmatrix lautet

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1z} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \dots & d_{pz} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Baumzweige}} \qquad \text{Verbindungszweige}$$

$$= \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & k-1 & k & \dots & z \\ d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1p} & d_{1k} & \dots & d_{1z} \\ d_{21} & & d_{2p} & d_{2k} & \dots & d_{2z} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{p1} & \dots & \dots & d_{pp} & d_{pk} & \dots & d_{pz} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Fundamental-schnitte}}$$

$$(3.4.18)$$

Weil jede Fundamentalschnittmenge genau einen Baumzweig enthält, kann die Matrix D in zwei Untermatrizen  $D_{\rm b}$  und  $D_{\rm v}$  entsprechend der Baum-

und Verbindungszweige unterteilt werden

$$D = \left(\begin{array}{c|c} E & D_{v} \\ \hline \end{array}\right) p \text{ Fundamental-schnittmengen.}$$

$$p \text{ Verbindungs-m Baumzweige}$$

$$m \text{ Baumzweige}$$

$$(3.4.19)$$

 $\boldsymbol{D}$  hat den Rang p=k-1, weil eine der beiden Untermatrizen die Einheitsmatrix ist. Deshalb bilden die Stromgleichungen der Fundamentalschnittmengen ein System linear unabhängiger Gleichungen, m. a. W. beschreibt die Fundamentalschnittmengenmatrix  $\boldsymbol{D}$  (mit ihren k-1 Stromgleichungen) das Netzwerk vollständig.

Die Schnittmengenanalyse basiert auf der Definition von Fundamentalschnittmengen im Netzwerkgraph, sie ist zur Schleifenanalyse dual.

In Abb. 3.4.5c wurde ein Baum aus den Zweigen 2,3,4 gewählt. Es gibt entsprechend der drei Baumzweige drei Fundamentalschnittmengen

$$\mathbf{D} = \begin{array}{ccccc} \mathbf{S1:} & z_2 & z_3 & z_4 & z_1 & z_5 \\ \mathbf{S1:} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gewinnung der Fundamentalschnitte:

- 1. Wahl eines Baumes, Nummerierung der Baumzweige von  $1\dots(k-1)$  und der Verbindungszweige von  $k\dots z$ .
- 2. Erzeugung eines Schnittes durch jeden Baumzweig (jeder Baumzweig wird von einem Hüllknoten geschnitten, der auch vorhergehende Hüllknoten einschließen kann).
- Nummerierung der Schnitte nach den zugehörigen Baumzweigen, Festlegung der Richtung nach der des erzeugenden Baumzweiges.

Abb. 3.4.6 veranschaulicht den Zusammenhang zwischen Graph und Schnittmenge für das Netzwerk nach Abb. 3.4.2a. Zu den Graphen Abb. a und b gehören die Fundamentalschnittmatrizen

$$D = \begin{cases} S1: & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ S2: & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} S1: & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \\ S2: & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{cases}$$

Ausgang ist der Graph nach Abb. 3.4.2b. Es gibt entsprechend der 5 Knoten vier Fundamentalschnitte. Schnittrichtung und Baumzweigrichtung stimmen jeweils

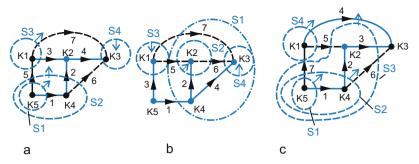


Abb. 3.4.6. (a), (b), (c) Wahl verschiedener Schnittmengen zu Abb. 3.4.4

überein. Schnitt S2 schließt Schnitt S1 in Abb. a ein. In Abb. 3.4.6b bedingt ein anderer Graph eine neue Nummerierung der Baumzweige. In Abb. c schließt ein Schnitt jeweils den vorhergehenden mit ein.

**Transformation Zweig-Baumzweigspannung** Waren bei der Schleifenanalyse Schleifenströme  $I_{\rm m}$  die Netzwerkvariablen, so treten bei der Schnittmengenanalyse die (dazu dualen) *Baumzweigspannungen*  $U_{\rm b}$  als unabhängige Netzwerkvariable auf. Sie stehen mit den Zweigspannungen U in Beziehung: Zweigspannungen sind Linearkombinationen von Baumzweigspannungen. Es gilt allgemein

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}}$$
. Zusammenhang Zweig-Baumzweigspannungen (3.4.20)

Zweig- und Bauzweigspannungen hängen über die transponierte Fundamentalschnittmengenmatrix zusammen.

Das ist die analoge Beziehung zu Gl. (3.4.11) zwischen Zweig- und Schleifenströmen bei der Schleifenanalyse.

Grundgleichungen Die Schnittmengenanalyse beruht auf drei Ansätzen

- 1. dem erweiterten Knotensatz/Schnittmengengesetz Gl. (3.4.17),
- 2. dem allgemeinen Netzwerkzweig (Abb. 3.1.3) mit dem Zweigstrom  $I_j = G_{jz}U_j I_{qj} + G_{jz}U_{qj}$  j = 1, 2, ... z oder verallgemeinert für alle Zweigströme in Matrixform

$$I = G_z U - I_q + G_z U_q$$
. allgemeiner Netzwerkzweig (3.4.21)

Dabei ist  $G_z$  eine Diagonalmatrix. Jeder der auftretenden Vektoren hat z Komponenten.

3. dem Zusammenhang zwischen Zweigspannung U und Baumzweigspannung  $U_{\rm b}$  nach Gl. (3.4.20) über die transponierte Fundamentalschnitt-Inzidenzmatrix.

Einsetzen der Netzwerkgleichung (3.4.21) in Gl. (3.4.17) ergibt

$$DI = DG_zU - DI_q + DG_zU_q = 0$$

und schließlich bei Ersatz der Zweigspannungsvektors U durch den Baumzweigspannungsvektor  $U_{\rm b}$  nach Gl. (3.4.20)

$$\underbrace{DG_{z}D^{T}}_{G}U_{b} = DI_{q} - DG_{z}U_{q} = I_{qs}$$
(3.4.22)

oder zusammengefasst mit den Abkürzungen

$$GU_{\rm b} = I_{\rm qs}.$$
 Grundgleichung Schnittmengenanalyse (3.4.23)

Der Stromquellenvektor  $I_{qs}$  ist der (äquivalente) Schnittmengenquellenstrom.

In der zur Schleifenanalyse dualen Schnittmengenanalyse treten auf:

- die Schnittmengenleitwertmatrix G,
- der Quellenstromschnittmengenvektor  $I_{qs}$  und
- die gesuchten Baumzweigspannung  $U_{\rm b}$ .

Die Lösung lautet

$$U_{\rm b} = G^{-1}I_{\rm qs}$$
. Schnittmengenanalyse, Lösung (3.4.24)

Aus den Baumzweigspannungen können alle übrigen Größen U, I analog zum Vorgehen bei der Schleifenanalyse berechnet werden.

Die Schnittmengenleitwertmatrix ist quadratisch (Rang k-1). Sie kann, wie die Schleifenwiderstandsmatrix, direkt aus dem Netzwerk aufgestellt werden:

- die Diagonalelemente sind die Summe der zu jeder Fundamentalschnittmenge gehörenden Leitwerte der Zweige (stets positiv),
- die übrigen Elemente der (symmetrischen) Matrix enthalten die Leitwerte, die zu den Fundamentalschnittmengen gehören, die der jeweiligen Zeile und Spalte gemeinsam sind. Sie liegen immer in Verbindungszweigen. Unterscheiden sich zwei Zeilen einer Spalte durch von null verschiedene Einträge, so gibt es einen gemeinsamen Leitwert der zugehörigen Fundamentalschnittmenge (bei gleichen Vorzeichen der Einträge hat der Leitwert positives Vorzeichen, bei Ungleichheit der Vorzeichen negatives Vorzeichen).

**Orthogonalität** Waren die Knoten-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  und die (transponierte) Fundamentalschleifen-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{B}$  orthogonal zueinander (s. Gl. (3.4.14)) begründet durch den Knotensatz, so gilt dies auch für die Schnittmengen-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{D}$  und die (transponierte) Fundamentalschleifen-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{B}$ 

$$AB^{T} = 0$$
,  $BA^{T} = 0$  resp.  $DB^{T} = 0$ ,  $BD^{T} = 0$ . (3.4.25)

Deshalb hat jede Masche mit jeder Schnittmenge eine gerade Zahl von Zweigen gemeinsam: bei der einen Zweighälfte stimmen Maschen- und Schnittmengen-Orientierung überein, bei der anderen sind sie entgegengerichtet.

## 3.4.4 Zusammenhänge, Vergleiche

Die Dualität der Schnittmengen- und Schleifenanalyse drückt sich z.B. aus durch die Zuordnungen

Schleifenanalyse	Trennmengenanalyse
Fundamentalschleife	Fundamentaltrennmenge
Fundamentalschleifenmatrix $\boldsymbol{B}$	Fundamentaltrennmengenmatrix $m{D}$
Verbindungszweig	Baumzweig
Verbindungszweigstrom $\boldsymbol{I}_{\mathrm{v}}$	Baumzweigspannung $m{U}_{\mathrm{b}}$ .

**Zusammenhänge der Inzidenzmatrizen** Jede Inzidenzmatrix beschreibt die Topologie des Netzwerkgraphen gleichwertig. Deshalb lassen sich alle  $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{D})$  auf die Knoten-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$  zurückführen. Dazu erfolgt eine Unterteilung nach Baum- und Verbindungszweigen entsprechend Gl. (3.4.2):

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{\mathbf{b}} \ \mathbf{A}_{\mathbf{v}}) \tag{3.4.26}$$

 $(\mathbf{A}_{\mathrm{b}} \text{ quadratische } p \times p \text{ Matrix}, \mathbf{A}_{\mathrm{v}} p \times m \text{ Matrix}).$  Diese Unterteilung ergibt:

 $Zusammenhang\ B,\ A$  Maschensatz Gl. (3.4.8) und Orthogonalitätsbedingung Gl. (3.4.25) führen auf

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0} \rightarrow \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{A}_{\mathrm{b}} & \boldsymbol{A}_{\mathrm{v}} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} \boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{E} \end{array} \right) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{b}} \boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{v}} = 0$$

oder

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{v}}; \ \boldsymbol{B} = \left( \left. \boldsymbol{B}_{\mathrm{b}} \right| \boldsymbol{E} \right).$$
 Beziehung  
Maschen-  $\leftrightarrow$  Knoten- (3.4.27)  
Inzidenzmatrix

Zwischen Maschen- und Knoten-Inzidenzmatrix besteht ein direkter Zusammenhang (Berechnung der inversen Matrix von  $A_b$  aufwendig).

Beziehung D, A Die Beziehung zwischen den Trennmengen- und Knoten-Inzidenzmatrizen hat große praktische Bedeutung. Ausgang ist die Orthogonalitätsbedingung Gl. (3.4.25) und die Aufteilung der Trennmengen-Fundamentalmatrix Gl. (3.4.18), wobei der Baumanteil wegen der p Trennmengen eine Einheitsmatrix ist. Zusammen mit Gl. (3.4.7) ergibt sich

$$DB^{\mathrm{T}} = \mathbf{0} \rightarrow (E D_{\mathrm{v}}) \begin{pmatrix} B_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} \\ E \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
 (3.4.28)

für den transponierten Baumanteil der Schleifen-Inzidenzmatrix

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{D}_{\mathrm{v}} = -\boldsymbol{A}_{\mathrm{b}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{v}}$$

und nach Einsetzen in Gl. (3.4.18) endgültig

$$D = (E(A_{b}^{-1}A_{v}))$$

$$= A_{b}^{-1}(A_{b}A_{v})$$

$$= A_{b}^{-1}A.$$
Schnittmengen-  $\leftrightarrow$ 
Knoten-Inzidenzmatrix (3.4.29)

Schnittmengen- und Schleifen-Inzidenzmatrix können aus der Knoten-Inzidenzmatrix berechnet werden.

Mit Gln. (3.4.7) und (3.4.29) besteht ein Zusammenhang zwischen Schnittmengen- und Schleifen-Inzidenzmatrix durch die Orthogonalitätsbedingung Gl. (3.4.25):

$$D = (E - B_{b}^{T}), B = (-D_{v}^{T} E).$$
 Beziehung Schleifen-  
Schnittmengen-  
Inzidenzmatrix (3.4.30)

**Transformationsbeziehungen** Die bisherigen Ergebnisse führen auf Transformationsbeziehungen zwischen den Baumzweigspannungen, Verbindungsströmen, Knotenspannungen und den Zweigspannungen und -strömen:

$$U = \begin{pmatrix} U_{b} \\ U_{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{b} \\ D_{v}^{T} U_{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ D_{v}^{T} \end{pmatrix} U_{b} = D^{T} U_{b}$$

$$I = \begin{pmatrix} I_{b} \\ I_{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_{v} I_{v} \\ I_{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_{v} \\ E \end{pmatrix} I_{v} = \begin{pmatrix} B_{b}^{T} \\ E \end{pmatrix} I_{v} = B_{b}^{T} I_{v}.$$
(3.4.31a)

Das sind beim Schnittmengenverfahren alle Zweigspannungen aus den (k-1) Baumzweigspannungen und beim Schleifenverfahren alle Zweigströme aus den m=z-(k-1) Strömen in den Verbindungszweigen oder den Schleifenoder Umlaufströmen. Die Baumzweigspannungen lassen sich immer durch Knotenspannungen (bei gewähltem Bezugsknoten) ausdrücken. Die Beziehung zwischen Zweig- und den (k-1) Knotenspannungen  $U_k$  lautet

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_{\mathrm{k}}.\tag{3.4.31b}$$

	_		_	
	Knoten-	Trennmengen-	Schleifen-	
	beschreibung	beschreibung	beschreibung	(0.4.00)
Knotensatz	$oldsymbol{AI}=oldsymbol{0}$	DI = 0	$oldsymbol{I} = oldsymbol{B}^{ ext{T}} oldsymbol{I}_{ ext{v}}$	(3.4.32)
Maschensatz	$II - A^{\mathrm{T}}II$	$II - D^{T}II$	BII - 0	

Die Kirchhoffschen Gleichungen lauten dann zusammengefasst in Matrixform

Die Inzidenzmatrizen des Netzwerkes sind gegeben durch<sup>18</sup>

$$\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{b} \ \mathbf{A}_{v}), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_{b} \ \mathbf{E}), \quad \mathbf{D} = (\mathbf{E} \ \mathbf{D}_{v}).$$
 (3.4.33)

Zwischen den Zweiggrößen und Baumzweigspannung bzw. Schleifenströmen gilt Gl. (3.4.31).

Verfahrensvergleich Die Betrachtungen zeigen den engen Zusammenhang zwischen der dualen Schleifen- und Schnittmengenanalyse. Beide erfordern einen Baum, (zugehörige Inzidenzmatrizen ineinander überführbar) und zur Lösung die Matrixinversion. Aufwandsärmer ist die

- Schleifenanalyse, wenn mehr Baum- als Verbindungszweige auftreten,
- Schnittmengenanalyse, wenn der gewählte Baum möglichst wenig Knoten bzw. Schnittmengen und möglichst viele Verbindungszweige (Maschen) hat.

Vorteilhaft ist, dass alle relevanten Matrizen aus der Knoten-Inzidenzmatrix und der Widerstand/Leitwertdiagonalmatrix ermittelt werden können. Bereitet die Handberechnung schnell Probleme (hier bringen die Widerstands- und Leitwertmatrizen Erleichterung, da sie direkt der Schaltung entnommen werden können), so gibt es für ihre numerische Berechnung vielfältige Verfahren. Deshalb liegt ihre Stärke vor allem in der numerischen Auswertung.

Schleifen-, Maschenstromverfahren Gelingt es, im Netzwerk statt eines Baumes mit Fundamentalschleifen Fenstermaschen zu wählen, so geht die Schleifenmatrix in die Maschenmatrix über und die Baumsuche entfällt. Abb. 3.4.7 zeigt einen Graphen (k=6, z=10, m=5). Nach Baumwahl und damit der Baum- und Verbindungszweige (Baumzweige 2,3,5,9,10, Verbindungszweige 1,4,6,7,8) wird die Fundamentalschleifenmatrix Gl. (3.4.6) aufgestellt

In der oberen Matrix enthält jede Zeile die Zweige der betreffenden Schleife nach Abb. 3.4.7a. Dabei stimmt die Richtung der Fundamentalschleife mit der Orientierung der sie definierenden Verbindungszweige überein, also M3 mit Zweig 6. Die Matrix besteht aus Anteilen für die Baum- und Verbindungszweige. In der unteren Matrix werden 5 Maschen gemäß Abb. b definiert, sie führen zur Maschenmatrix. In den Spalten stehen alle Maschen, zu denen der betreffende Zweig gehört. Auffällig ist die schwache Matrixbesetzung (geringer Auswerteaufwand). Schleifen- und Maschenanalyse gehen ineinander über, wenn alle Schleifen zu Maschen werden.

Das Beispiel zeigt aber auch, dass ein Fenstermaschensystem, wie rechts, in ein Schleifensystem (und umgekehrt) gewandelt werden kann. Das verdeutlicht Abb. 3.4.7c. Alle inneren Zweige einer Fenstermasche können keine Baumzweige sein (Verletzung der Baumregel). Deshalb gibt es keinen Baum. Die eingeführten Fenstermaschen M1 ... M4 liefern ein vollständiges System von Maschenströmen. Die Anordnung kann aber durch Aufteilung eines Knotens und Verbindung beider Hälften über einen widerstandslosen Verbindungszweig in einen Baum überführt werden. Dann sind Schleifen definierbar. Der widerstandslose Zweig trägt nicht zur Widerstandsmatrix bei. Auf diese Weise kann eine Maschenanalyse immer als spezielle Schleifenanalyse verstanden werden mit der Besonderheit, dass Fenstermaschen einen unabhängigen Satz von Maschenströmen gewährleisten.

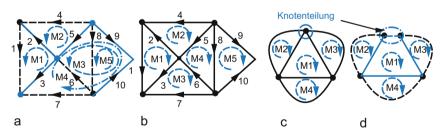


Abb. 3.4.7. Netzwerk mit Schleifen- und Fenstermaschen. (a) Graph mit Fundamentalschleifen. (b) Fenstermaschenanordnung. (c) Fenstermaschenanordnung. (d) Überführung eines Graphen durch Knotenaufteilung in Schleifen

<sup>&</sup>lt;sup>18</sup>Dabei ist vorausgesetzt, dass die Zeilen von U und I und die Spalten von A, B und D in der gleichen Zweigfolge angeordnet sind.

Schnittmengen- und Knotenspannungsanalyse Die für die Schnittmengenanalyse erforderliche Baumsuche entfällt beim Übergang zur Knotenspannungsanalyse, außerdem treten statt der Baumzweigspannungen als unabhängige Variable die Knotenspannungen auf. Wir zeigen diesen Übergang ausgehend vom allgemeinen Netzwerkzweig Gl. (3.4.21). Nach Multiplikation mit  $\boldsymbol{D}$  von links und Beachtung des Knotensatzes Gl. (3.4.17) wird nach  $\boldsymbol{U}$  umgestellt. Ersatz des Terms  $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{k}}$  (Gl. (3.4.20)) sowie  $\boldsymbol{D}$  durch Gl. (3.4.29) liefert als Zwischenergebnis

$$\underbrace{oldsymbol{D}G_{\mathrm{z}}oldsymbol{D}^{\mathrm{T}}}_{oldsymbol{G}}oldsymbol{U}_{\mathrm{b}} = oldsymbol{D}G_{\mathrm{z}}oldsymbol{A}^{\mathrm{T}}oldsymbol{U}_{\mathrm{k}} \ = oldsymbol{A}_{\mathrm{b}}^{-1}oldsymbol{A}oldsymbol{(I_{\mathrm{q}}} - oldsymbol{G}_{\mathrm{z}}oldsymbol{U}_{\mathrm{q}})$$

oder zusammengefasst

$$\underbrace{\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{k}} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I}_{\mathrm{q}} - \boldsymbol{G}_{\mathrm{z}}\boldsymbol{U}_{\mathrm{q}}\right).$$
Knotenspannungs- verfahren
$$(3.4.34)$$

Das ist die allgemeine Grundgleichung der Knotenspannungsanalyse (s. Gl. (3.3.7)). Dabei werden Spannungsquellen über ihre Zweigleitwerte in Stromquellen überführt: die Knotenspannungsanalyse ist eine spezielle Schnittmengenanalyse.

# 3.5 Computerunterstützte Netzwerkanalyse

Wenn auch die Netzwerkanalyse neben elektromagnetischen Feldern den Kern der Elektrotechnikausbildung darstellt, so wird dieses Anliegen heute vielfältig durch computergestützte Verfahren begleitet. Sie beziehen sich auf

- numerische Auswertung symbolischer Lösungen mit grafischer Ergebnisaufbereitung,
- die symbolische Lösung von Netzwerkgleichungen,
- die Schaltungssimulation beginnend von der Schaltungseingabe über eine Netzliste bis hin zur Eingabe als Schaltungsaufbau mit Messgeräten und Anzeigeeinrichtungen.

Ein Problem rechnergestützter Analysen ist die Prüfung ihrer Ergebnisse: ein Rechner liefert immer etwas, die Frage bleibt nur, ob es die Problemlösung ist. Hier sind elektrotechnische und z.T. auch mathematische Kenntnisse erforderlich gepaart mit wachsender Erfahrung. Das symbolische Rechnen stößt schnell an Grenzen und erfordert oft Eingreifen, deshalb werden die

meisten elektrotechnischen Probleme numerisch gelöst. Eine sichere Kontrolle einer numerischen Netzwerkanalyse bietet der Tellegensche Leistungssatz (Kap. 4.7). Danach muss die Summe der im Netzwerk erzeugten Leistungen gleich der Summe der verbrauchten sein. Diese Kontrolle vollziehen Schaltungssimulatoren durchweg automatisch.

# **3.5.1** Numerische Auswertung

Die anfallenden numerischen Aufgaben zerfallen in drei Kategorien:

- numerische Auswertung allgemeiner Lösungen. Hier reicht eine Genauigkeit im Prozent- und Promille-Bereich aus und vieles ist rascher mit dem Taschenrechner erledigt als mit aufwendigen Computerprogrammen.
- Lösung großer linearer Gleichungssysteme, wie sie für lineare Netzwerke anfallen, das schließt die Inversion von Matrizen ein.
- die Lösung nichtlinearer Probleme, die bereits bei einfachen nichtlinearen Stromkreisen auftreten. Eingesetzt werden dafür Computerprogramme wie beispielsweise MATLAB, MATHEMATICA oder MAPLE. Ein eleganter Ausweg ist die Schaltungssimulation (s. Kap. 3.5.2), die den Nutzer von diesen Problemen befreit.

Wir benutzen MATLAB. Es ist nicht nur weit verbreitet, sondern durch spezifische Programmzusätze (sog. *Toolboxes*) das Programm für weitere Gebiete der Elektrotechnik: Signalverarbeitung, Nachrichtentechnik, Transformationen, regelungstechnische, elektromechanische Probleme. Mit der *Symbolics Toolbox* hat der MATLAB-Anwender Zugriff auf den Kern des Computeralgebraprogramms MAPLE mit symbolischen Rechenmöglichkeiten.

Zunächst verwenden wir MATLAB zur Lösung linearer Netzwerkgleichungen. Ausgang ist die *Matrixgleichung*  $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$  mit der Netzwerkmatrix  $\boldsymbol{A}$ , dem Erregungsvektor  $\boldsymbol{B}$  und dem Vektor  $\boldsymbol{x}$  der gesuchten Unbekannten. Vorausgesetzt wird  $\boldsymbol{A}$  quadratisch und det  $\boldsymbol{A} \neq 0$ , was Gleichstromnetzwerke durchweg erfüllen. <sup>19</sup>

Die Matrixeingabe lautet beispielsweise für das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
10 &=& x + 3y \\
8 &=& 5x - 2y
\end{array}$$

in der MATLAB-Form A = [1 3;5 -2]; B = [10;8];. Die Lösung erfolgt

<sup>&</sup>lt;sup>19</sup>Wir geben hier nur einige Hinweise zum ersten Umgang mit dem Programm, in jedem Falle sollte man sich mit dem Handbuch oder einem MATLAB-unterstützten Mathematikbuch einarbeiten.

- numerisch in der Standardform >>X=A\B oder alternativ >>X=inv(A)\*B;.
- die Befehle >>X=sym(A)\sym(B) oder >>X=linsolve(A,B) ermitteln die symbolische Lösung des Gleichungssystems.

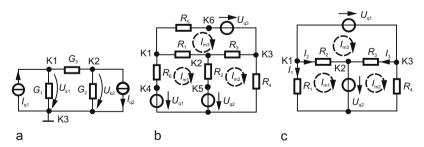
Symbolisches Gleichungssystem Bei der symbolischen Analyse kommen Variablennamen zur Anwendung, die dem Programm vorher unter dem Codewort syms mitgeteilt werden. Für die symbolische Lösung des Gleichungssystems mit den Matrizen  $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  erfolgt die Eingabe von  $\boldsymbol{A}$  und  $\boldsymbol{B}$  in der Form

Die Lösung wird mit >>sym(A) \ sym(B) oder >>linsolve(A,B) eingeleitet (der letzte Befehl stammt aus dem MAPLE-Vorrat in MATLAB). Bereits bei einer dreireihigen Matrix erfordert eine symbolische Lösung schon merkliche Rechenzeit.

Die Anweisungen werden in MATLAB entweder direkt ins *Command Window* eingeben und gestartet oder als Befehlsfolge in Form eines Programms, eine sog. m-Datei. Das ist eine ASCII-Datei mit einem Namen (nach üblichen Regeln festgelegt), die darunter in einem Verzeichnis gespeichert wird (Erweiterung .m) und vom Command Window durch den Dateiname (z. B. kno1.m) aufrufbar ist.

Beispiel 3.5.1 Knotenspannungsanalyse Zum Netzwerk Abb. 3.5.1a gehört das Knotenspannungssystem

$$\begin{pmatrix} G_1+G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2+G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{q}1} \\ -I_{\mathbf{q}2} \end{pmatrix},$$
 
$$\begin{pmatrix} G_1+G_3+G_4 & -G_3 \\ -G_3 & G_2+G_3+G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4U_{\mathbf{q}1} \\ -G_5U_{\mathbf{q}2} \end{pmatrix}.$$



**Abb. 3.5.1.** Elektrische Netzwerke. (a) Beispiel zur Knotenspannungsanalyse mit MATLAB. (b) Beispiel zur Maschenstromanalyse mit MATLAB. (c) Beispiel zur Maschenstromanalyse mit symbolischen Variablen

Unten wurden beide Stromquellen durch reale Spannungsquellen modelliert. Die MATLAB-Lösung setzt mit der Form GU=I ein. Die Matrixeingabe erfolgt nach dem prompt-Zeichen >>. Zur Separierung der Zeilen dienen Semikolons, der Spalten Kommas. Klammern [] kennzeichnen Vektoren oder Matrizen. Als Beispiel gelten die Zahlenwerte  $R_1=1$  k $\Omega$ ,  $R_2=2$  k $\Omega$ ,  $R_3=3$  k $\Omega$  (entsprechende Leitwerte jeweils vor Eingabe bilden) und  $I_{\rm q1}=1$  mA,  $I_{\rm q2}=4$  mA.

Nach Eingabe der Matrix G und des Vektors I wird die Lösung durch Eingabe von >>U=inv(G)\*I gestartet und das Ergebnis als Vektor angezeigt.

(Dimensionen entfallen, deshalb vorher benutzte Einheiten festlegen z. B.  $R/k\Omega$  und entsprechend I/mA).

Jede Zahlenwertänderung verlangt die Prozedur erneut. Deshalb wurde im Programm kno1.m die Eingabe (gleichzeitige Eingabe aller Widerstands- und Stromquellenwerte) und die Leitwertbildung (Koeffizient für Koeffizient) verbessert. Auch die Zweigströme werden aus den zugehörigen Knotenspannungen ermittelt. Das Programm kno1.m wird mit >>kno1 im Kommandofenster aufgerufen und es erscheint die Eingabeaufforderung für die Widerstände, die mit >>R=[1,2,3]; und >>I=[1,-4]; (letzteres nachfolgend für Ströme) für die Zahlenwerte beantwortet wird. Der nächste Schritt berechnet die Leitwertmatrix und zunächst die Leitwerte aus den Widerständen mit der Anweisung >>G=1./R;. Die Eingabe der Matrix erfolgt durch >>GG=[G(1) + G(3), -G(3); -G(3), (G(2) + G(3))]; (GG wurde zur besseren Unterscheidung verwendet).

Der Vektor der Stromquellen lautet >>I=[I(1),I(2)];. Die Eingabe  $>>U=GG\setminus I$  ermittelt den Vektor der Knotenspannungen (und gibt ihn aus, fehlendes Semikolon). Danach berechnet man die Zweigströme  $I_z(1) \dots I_z(3)$ :

```
>>IZ(1)=G(1)*U(1);
>>IZ(2)=G(2)*U(2);
>>IZ(3)=G(3)*(U(1)-U(2));
```

Die Knotenspannungen lauten U=-0.5000 und -5.000 (die Werte oben sind auf Rundungsfehler bei Eingabe der Reziprokwerte verursacht). Für praktische Belange fallen diese Unterschiede kaum ins Gewicht.

#### Tabelle 3.3. MATLAB-Programm kno1.m

```
R=input('input R-Werte:[R1,R2,R3]');
I=input('input Quellenströme:[I]');
G=1./R;
GG=[(G(1)+G(3)),-G(3);-G(3),(G(2)+G(3))];
I=[I(1);I(2)];
U=GG\I
IZ(1)=G(1)*U(1)
IZ(2)=G(2)*U(2)
IZ(3)=G(3)*(U(1)-U(2))
```

Das Programm kann auf ein größeres Netzwerk erweitert werden. Um Fehler auszuschließen, sollte eine numerische Überprüfung bei kleiner Matrix (2 × 2 wie hier) mit einer Handrechnung (z. B. für gleiche Widerstände und Stromquellen) erfolgen. Auch die Eingabe extremer Werte (z. B.  $R=10^{-10}\dots 10^{+12}$  kann hilfreich für einen Test sein.

Im nächsten Schritt werden die idealen Stromquellen durch reale Spannungsquellen (mit den Leitwerten  $G_4$ ,  $G_5$ ) ersetzt. Das übernimmt das Programm kno2.m.

Tabelle 3.4. MATLAB-Programm kno2.m

```
R=input('input R-Werte:[R1,R2,R3,R4,R5]');
UQ=input('input Quellenspannungen:[UQ]');
G=1./R;
GG=[(G(1)+G(3)+G(4)),-G(3);-G(3),(G(2)+G(3)+G(5))];
I=[G(4)*UQ(1);G(5)*UQ(2)];
U=GG \ I
IZ(1)=G(1)*U(1);
IZ(2)=G(2)*U(2);
IZ(3)=G(3)*(U(1)-U(2));
IZ(4)=G(4)*(UQ(1)-U(1));
IZ(5)=G(5)*(UQ(2)-U(2));
```

Der Unterschied besteht (neben veränderten Hauptdiagonalelementen in der Leitwertmatrix) im geänderten Quellenstromvektor I (jetzt aus den Quellenspannungen mit den Leitwerten  $G_4$ ,  $G_5$  ermittelt), sinngemäß gibt es insgesamt 5 Zweigströme. Ein Vergleich zum Programm von oben ist aufschlussreich: für die Zahlenwerte  $I_{q1} = 1 \,\text{mA}, \ I_{q2} = 5 \,\text{mA}$  (Richtung beachten) und  $R_1 = 10 \,\text{k}\Omega, \ R_2 = 5 \,\text{k}\Omega, \ R_3 = 5 \,\text{k}\Omega$  ergibt sich  $U(1) = -7, 5 \,\text{V}, \ U(2) = -16, 25 \,\text{V}$  sowie als Stromvektor  $I_z = [-0.75, -3.25, 1.75]^{\text{T}} \,\text{mA}$ .

Mit realen Stromquellen und identischen Leitwerten  $G_1 \dots G_3$  werden die Kurzschlussströme der Quellen  $I_{\rm q1}$ ,  $I_{\rm q2}$  konstant gehalten, z. B.  $I_{\rm q1} = U_{\rm q1}/R_4$ , dito  $I_{\rm q2}$ . Wählt man beispielsweise  $U_{\rm q1} = 1000\,{\rm V}$ ,  $R_4 = 1\,{\rm M}\Omega$  und  $U_{\rm q2} = -2500\,{\rm V}$ ,  $R_5 = 500\,{\rm k}\Omega$ , so stellen sich die Werte  $U(1) = -7,38\,{\rm V}$ ,  $U(2) = -16,11\,{\rm V}$ ,

 $I_z = [-0,738,-3,22,1.74]\,\mathrm{mA}$  ein. Die Unterschiede sind gering, sie stammen von den veränderten Knotenleitwerten. Eine bessere Näherung würde sich bei noch größeren Widerständen  $R_4$ ,  $R_5$  und Spannungsquellen ergeben.

Beispiel 3.5.2 Maschenstromanalyse Das Netzwerk Abb. 3.5.1b wird mit der Maschenstromanalyse berechnet. Die Matrix lautet

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_6 & -R_2 & -R_1 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 & -R_3 \\ -R_1 & -R_3 & R_1 + R_3 + R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{\rm m1} \\ I_{\rm m2} \\ I_{\rm m3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{\rm q1} - U_{\rm q2} \\ U_{\rm q2} \\ -U_{\rm q3} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems in MATLAB beginnt mit der Festlegung der Widerstände und Spannungsquellen (hier gewählt  $R_1=R_3=R_5=1\,\mathrm{k}\Omega,\,R_2=R_4=R_6=2\,\mathrm{k}\Omega$  und  $U_{\mathrm{q}1}=1\,\mathrm{V},\,U_{\mathrm{q}2}=3\,\mathrm{V},\,U_{\mathrm{q}3}=3\,\mathrm{V}).$  Nach Programmaufruf >>masch1 erfolgt die Widerstandseingabe; >>R=[1,2,1,2,1,2]; und anschließend die Spannungseingabe >>UQ=[1,3,5]; Im nächsten Schritt wird der Spannungsvektor (rechte Erregerseite) erzeugt, dort sind die Spannungsrichtungen (Vorzeichen) berücksichtigt.

Tabelle 3.5. MATLAB-Programm masch1.m

```
R=input('input R-Werte: [R1,R2,R3,R4,R5,R6]');
UQ=input('input Quellenspannungen: [UQ]');
U=[UQ(1)-UQ(2);UQ(2);-UQ(3)];
RR=[(R(1)+R(2)+R(6)),-R(2),-R(1);-R(2),(R(2)+R(3)+R(4)),-R(3);
-R(1),-R(3),(R(1)+R(3)+R(5))];
I=RR\U
U1=UQ(1)+R(6)*I(1)
U12=UQ(3)+R(5)*I(3)
U3=R(4)*I(2)
U2=UQ(2)+R(2)*(I(1)-I(2))
```

Anschließend bildet das Programm aus den Eingabewerten die Widerstandsmatrix >>RR=[(R(1)+R(2)+R(6)), -R(2), -R(1); -R(2),...]; löst das Gleichungssystem und gibt die Zweigströme >>I=RR\U aus (fehlendes Semikolon;). Abschließend werden die Knotenspannungen berechnet (und angezeigt): >>U1=UQ(1)+R(6)\*I(1), U12=UQ(3)+R(5)\*I(3) bis zu >>U2=UQ(2)+R(2)\*(I(1)-I(2)).

```
>> masch1
input R-Werte:[R1,R2,R3,R4,R5,R6][1,2,1,2,1,2];
input Quellenspannungen:[UQ][1,3,5];

I = -0.8571  -0.1429  -2.0000
U1 = -0.7143
U13 = 3
U3 = -0.2857
U2 = 1.5714
```

Zum Test empfiehlt sich eine Handanalyse. Sie sollte auch die Vorzeichen der Ströme (durch schrittweises Nullsetzen von Spannungsquellen) einschließen.

Beispiel 3.5.3 Maschenstrom 2, symbolische Variable Für das gleiche Netzwerk Abb. 3.5.1c werden die Maschenstromgleichungen aufgestellt unter der Maßgabe, dass nur die Widerstände R zahlenmäßig eingegeben werden, dagegen die Spannungsquellen symbolisch erhalten bleiben. Ergebnis ist die Datei masch2.m. Die MATLAB- Eingabe beginnt mit der Widerstandseingabe und anschließender Aufbereitung der Widerstandsmatrix. Dann erfolgt der Wechsel zu symbolischen Variablen: >>syms UQ1,UQ2. Im nächsten Schritt wird der Spannungsvektor U entsprechend der Schaltung aufgestellt und anschließend die Maschenströme berechnet.

Tabelle 3.6. MATLAB Programm masch2.m

Das Ergebnis für beispielsweise  $R_1=R_3=1\,\mathrm{k}\Omega,\,R_2=R_4=2\,\mathrm{k}\Omega$  ist nachfolgend angegeben. Zur weiteren Rechnung können dann Zahlenwerte angesetzt werden. Die Methode erübrigt bei größeren Netzwerken die aufwendige Berechnung des Netzwerkes, sie eignet sich auch zur Prüfung, wann einzelne Maschenströme verschwinden.

```
input R-Werte: [R1,R2,R3,R4] [1,2,1,2];
I =
-1/2*UQ2-1/2*UQ1
   1/4*UQ2-1/4*UQ1
-1/4*UQ2-3/4*UQ1.
```

# 3.5.2 Schaltungssimulation

Die bisherige Rechnerunterstützung beschränkte sich auf die Auswertung linearer Gleichungssysteme. Die Effizienz einer Analyse steigt, wenn ein Programm auch das Gleichungssystem aufstellt. Die Grundlage dafür ist die Erfassung der Schaltungsstruktur durch die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix  $\boldsymbol{A}$ . Zusammen mit den Netzwerkelementen wurden damit die verschiedenen Analysegleichungen begründet. Aus solchen Ansätzen entstanden in den 60er und 70er Jahren zahlreiche Schaltungsanalyseprogramme, aus denen sich

SPICE<sup>20</sup> quasi als Standard herausbildete. Wenn sich auch die Programme hauptsächlich in Eingabe, Auswertung, grafischer Oberfläche und dem Modellumfang unterscheiden, so ist ihre Grundidee doch sehr ähnlich.

SPICE erlaubt nicht nur die automatische Generation des Verbindungsnetzwerkes über die Eingabe der Netzwerkknoten, sondern erfasst durch viele Modelle (lineare und nichtlineare) die meisten Bauelemente abgelegt in einer Programmbibliothek. Damit beschränkt sich die Arbeit des Nutzers auf die Schaltungseingabe. Sie kann unterschiedlich erfolgen

- Man übergibt die Netzwerkknoten und anliegenden Netzwerkelemente als Netzwerkliste oder kurz Netzliste.
- Heute haben Schaltungssimulatoren einen "Schaltplaneditor" als grafische Oberfläche, mit der die Schaltung wie auf einem Zeichenblatt entworfen wird. Für Bauelemente gibt es Schaltzeichen, Verbindungswerkzeuge und Zuweisungen der Parameter und Modelle, außerdem sind virtuelle Messund Anzeigegeräte (Spannungs-, Strommesser, Oszillograf, ...) verfügbar. Nach der Schaltungseingabe wird zu Beginn der Simulation eine Netzliste erzeugt, die alle Informationen über das Netzwerk enthält. Deshalb verarbeiten Simulatoren mit Schaltplaneditor auch eingegebene Netzlisten.

Wir bevorzugen die Netzliste aus unterschiedlichen Gründen:

- Nähe zum Netzwerk, dessen Gesetzmäßigkeiten erlernt werden sollen,
- Netzlisten werden von allen Schaltungssimulatoren abgearbeitet,
- die Eingabe kleiner Netzwerke ist rasch durchgeführt.

Erst für größere Schaltungen, den Einbezug unterschiedlicher Bauelemente mit unterschiedlichen Modellen und vor allem für zeitveränderliche Vorgänge (Bd. 3) nutzen wir stärker die komfortable Schaltplaneingabe und Oszillograf, Ortskurvenschreiber u. a. virtuelle Messgeräte als Anzeigeeinrichtungen.

Bei der Verarbeitung werden für zeitkontinuierliche Vorgänge, bekannter als analoge Schaltungssimulation, drei typische Simulationsarten unterschieden: Gleichstrom-(DC), Wechselstrom- (AC) und Transienten-Analyse (TRAN). Der erste Fall analysiert das Gleichstromverhalten. Eine AC-Analyse wird bei sinusförmigen Quellen in der Wechselstromtechnik erforderlich. Die Transienten-Analyse kommt bei nichtsinusförmigen Quellen, Schalt- und Impulsvorgängen zur Anwendung.

<sup>&</sup>lt;sup>20</sup>Das Programm SPICE (Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis) wurde 1973 von D.O. Pederson und L.W. Nagel (University of California Berkeley) veröffentlicht. Es ist heute in vielen Varianten und Weiterentwicklungen verfügbar. Einige davon (Aim-SPICE, WinSPICE, TOPSPICE, LTspice...) sind z. T. im Internet frei verfügbar, von kommerziellen Versionen (wie PSPICE, MULTISIM/EWB, Mircosim, ...) gibt es günstige Studentenangebote.

Die Netzliste enthält alle Netzwerkelemente (gekennzeichnet durch einen Elementnamen), die zugehörigen Knoten und eine Spezifikation des Elementes. Alle Knoten müssen einen Gleichstromweg zum Bezugsknoten haben (intern vorgesehen), außerdem dürfen keine Maschen mit Gleichstromwiderstand null auftreten (man erkennt hier die Knotenspannungsanalyse). Wichtige Elementnamen sind

$\mathbf{C}$	Kapazität	$\mathbf{K}$	gekoppelte Induktivitäten
D	Diode	$_{\rm L}$	Induktivität
$\mathbf{E}$	spannungsgesteuerte Spannungsquelle	$\mathbf{M}$	MOSFET
$\mathbf{F}$	stromgesteuerte Stromquelle	Q	Bipolartransistor
G	spannungsgesteuerte Stromquelle	$\mathbf{R}$	Widerstand
Η	stromgesteuerte Spannungsquelle	V	unabhängige Spannungsquelle
I	unabhängige Stromquelle		

Jede Netzliste hat vier Bestandteile: eine Überschrift (oft mit vorangestelltem \* als Kommentarzeichen), die Elementanweisungen (Beginn der Netzliste), einen Teil für Steueranweisungen und einen Schlussteil mit Ausgabeanweisungen:

```
*knot1
Ι1
    1
       0 -1E-3
12
    2
         4E-3
R.1
    1
       0
           1E3
R.2
    2
       0
           2F.3
       2
R.3
    1
           3F.3
Variables in circuit Values
v(1) -0.5 V
v(2) -5 V
```

So enthält die zu Abb. 3.5.1a gehörende Netzliste knol.cir die beiden Stromquellen  $I_1 \dots I_2$  (Richtung positiv vom Knoten nach Bezug) sowie drei Widerstände  $R_1 \dots R_3$ . Die Steueranweisungen sind

- der Arbeitspunkt oder die Gleichstromlösung (entweder durch Anweisung .OP oder sie erfolgt automatisch);
- die Anweisung .TF (s. u.) erzeugt die Kleinsignalübertragungsfunktion sowie die Ein- und Ausgangswiderstände, also eine Zweipolersatzschaltung der Anordnung;
- die Anweisung .DC variiert eine Quelle zwischen zwei Grenzen, sie wird z. B. zur Kennlinienaufnahme benötigt.

Zur Ausgabe dienen die Anweisungen .PRINT (tabellarische Ergebnisausgabe) und eine in PSPICE übliche .PROBE Anweisung. Sie bereitet eine Datei zur grafischen Auswertung auf. Abgespeichert wird die Datei unter einem Namen mit der Endung .CIR, z. B. kno1.CIR.

Zum Verständnis sollten weiter bedacht werden:

- Elementwertangaben können lauten 3, 3., 3.0, 3E+3, 3.0E+3, 3.E3,
- Einheitsangaben werden bei einigen SPICE-Versionen vernachlässigt. Es sind dann gleichwertig: 20E-3, 20.0E-3, 20M, 20MV, 20MOHM,
- M bedeutet Milli, nicht Mega. 1 M $\Omega$  wäre zu schreiben 1MEG oder 1MEGOHM.

#### Bei den Ausgabegrößen bedeuten

- V(2) Spannung am Knoten 2 mit Bezug auf Masse
- V(4,2) Spannung zwischen Knoten 4 und 2 (manche Versionen erlauben diese Angabe nicht),
- V(R1) Spannung über Element R1,
- VCB(Q2) Kollektor-Basisspannung des Transistors Q2,
- I(VS) Strom gerichtet in die Gleichspannungsquelle VS
- I(D1) Strom in Diode D1 (manche Versionen erlauben das nicht).

Ein sicherer Weg zur Strommessung ist die Einfügung einer Spannungsquelle mit Wert 0 (z. B. VX = 0) zur Anzeige des Stromes durch die Quelle. Die Anweisung VX 5 4 DC OV misst den Gleichstrom durch ein Element zwischen den Knoten 5, 4.

Nach Aufruf des Programms, hier unter Benutzung von AIM-SPICE und PSPICE, wird die Netzliste erstellt und abgespeichert. Zum Ablauf wird sie importiert, die Simulation (DC Operation Point) durchgeführt und das Ergebnis angezeigt und ausgewertet.

Beispiel 3.5.4 Maschenstrom Zum Netzwerk Abb. 3.5.1b gehört die Schaltungsdatei masch1.cir.

```
*masch1
V1 4 0 1
V2 5 0 3
V3 6 3 5
R1 1 2 1E3
R2 2 5 2E3
R3 2 3 1E3
R4 3 0 2E3
R5 1 6 1E3
R6 1 4 2E3
```

```
**** BIAS SOLUTION

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE ...

(1) 2.7143 (2) 1.5714 (3) -.2857 (4) 1.0000

(5) 3.0000 (6) 4.7143

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME CURRENT

V1 8.571E-04

V2 -7.143E-04

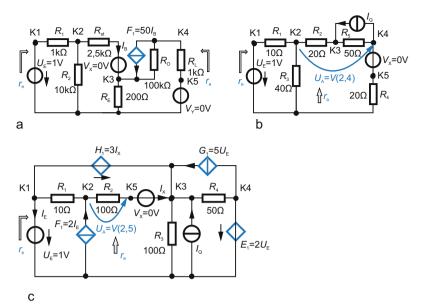
V3 -2.000E-03
```

Die Simulation liefert die angegeben Knotenspannungen und Ströme durch die Spannungsquellen. Zur Stromrichtung ist die für SPICE vereinbarte *Verbraucherrichtung* zu beachten: Strom fließt in Richtung des Spannungsabfalls positiv durch die Spannungsquelle, in Stromquellen positiv vom ersten Knoten zum zweiten.

Beispiel 3.5.5 Gesteuerte Quelle, Kleinsignalverhalten mit TF-Anweisung Die Anweisung .TF (Small-Signal Transfer Function) ermittelt die Kleinsignalübertragungsfunktion (DC-Kleinsignalverhalten) sowie die Ein- und Ausgangs-Kleinsignalwiderstände einer Schaltung. Sie lautet .TF X1 X2. Dabei ist X1 die Ausgangsvariable (gesteuerte Größe) und X2 die Eingangsvariable (steuernde Größe), das können Spannungen und/oder Ströme sein. Die so berechnete Zweipolersatzschaltung wird automatisch (d. h. ohne weitere Ausgabeanweisung) ausgedruckt. Anweisungsbeispiele sind: .TF V(3,4) VIN Ausgangsspannung V(3,4), VIN Eingangspannung; .TF V(20), IIN Ausgangsspannung V(20), IIN Eingangsstrom; .TF I(VX) IIN Strom durch VX am Ausgang, IIN Strom am Eingang.

Für das Netzwerk Abb. 3.5.2a ermittelt der .TF Befehl die Spannungsverstärkung, sowie Ein- und Ausgangswiderstände  $r_{\rm e},\,r_{\rm a}$ . Die Schaltung verwendet eine stromgesteuerte Stromquelle (F-Quelle), der Steuerstrom durch den Eingangswiderstand  $R_{\rm ST}$  wird über die Spannungsquelle VX (Wert 0) gewonnen. Er tritt bei der Steuergröße als Steuerparameter auf.

```
VE 1 0 DC 1V
R1 1 2 1K
R2 2 0 10K
RST 2 6 2.5K
RE 3 0 200
F1 4 3 VX 50
R0 4 3 100K
RL 4 5 1K
VX 6 3 DC 0V
VY 5 0 DC 0V
.TF V(4) VE
.END
```



**Abb. 3.5.2.** Analyse elektrischer Netzwerke mit SPICE/PSPICE. (a) Spannungsverstärkung im Netzwerk mit stromgesteuerter Stromquelle. (b) Bestimmung der Zweipolersatzschaltung; Leerlaufspannung  $U_{\rm A}=U_{\rm l}=V(2,4)$  und Innenwiderstand (hier  $r_{\rm a}$ ). (c) Bestimmung der Knotenspannungen und Zweipolersatzschaltung eines Netzwerkes mit allen vier Typen gesteuerter Quellen

```
**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION

NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE..

( 1) 1.0000 ( 2) .8478 ( 3) .6794 ( 4) -3.3294

( 5) 0.0000 ( 6) .6794

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

VE -1.522E-04

VX 6.739E-05

VY -3.329E-03

**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS

V(4)/VE = -3.329E+00; Au = -3,32

INPUT RESISTANCE AT VE = 6.572E+03, re= 6.57 kOhm

OUTPUT RESISTANCE AT V(4) = 9.974E+02, ra = 0.997 kOhm
```

Beispiel 3.5.6 Zweipolersatzschaltung Für das Netzwerk Abb. 3.5.2b ist die Zweipolersatzschaltung zwischen den Klemmen A,B (Knoten 2,4) über die .TF-Anweisung zu ermitteln.

```
VE 1 0 DC 10
IQ 4 3 1A
```

```
R1 1 2 10
R2 2 3 20
R3 2 0 40
R4 5 0 20
R5 4 3 50
VX 4 5 DC OV
.TF V(2,4) VE
.END
**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION
NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE...
(1) 10.0000 (2) 11.4290 (3) 20.0000 (4) -8.5714
(5) -8.5714
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
VE 1.429E-01
VX -4.286E-01
**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2,4)/VE = 5.714E-01 = U(1)=0,57 V
INPUT RESISTANCE AT VE = 3.769E+01, re= 37,7 0hm
OUTPUT RESISTANCE AT V(2,4) = 2.000E+01, ra = 20 0hm
```

Die von SPICE ausgegebene Leerlaufspannung  $V(2,4) = U_1$  sowie der Ersatzwiderstand  $r_i = r_a$  können aus der Schaltung leicht nachgerechnet werden.

Beispiel 3.5.7 Gesteuerte Quellen Das Netzwerk Abb. 3.5.2c enthält alle vier Typen gesteuerter Quellen.

```
VE 1 0 DC 100
IQ 0 3 DC 1A
R1 1 2 10
R2 2 5 100
R3 3 0 100
R4 3 4 50
VX 5 3 DC OV
E1 4 0 1 0 2
F1 0 2 VE 2
G1 4 3 1 0 5
H1 1 3 VX 5
.TF V(2,5) VE
**** SMALL SIGNAL BIAS SOLUTION quelle 3.cir
NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE NODE
VOLTAGE
(1) 100.0000 (2)-8731.50 (3) 564.81 (4) 200.00
(5) 564.8100
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
VE -4.881E+02
```

```
VX -9.296E+01

**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2,5)/VE = -9.278E+01
INPUT RESISTANCE AT VE = 2.053E-01
OUTPUT RESISTANCE AT V(2,5) = 7.407E+00
```

Die spannungsgesteuerten Quellen werden von der Steuerspannung V(1,0) gesteuert, die stromgesteuerten von den Strömen durch die Spannungsquellen VE und VX. Die Übertragungsfunktion ist hier ein Spannungsverhältnis. Die Klemmen A, B der Zweipolersatzschaltung entsprechen den Klemmen 2,5.

Beispiel 3.5.8 Diodenschaltung In einer Schaltung mit nichtlinearem Bauelement, z. B. der Diodenschaltung Abb. 3.5.3a, sind Arbeitspunktbestimmung und Kleinsignalverhalten die wichtigsten Analysen.

Die Arbeitspunktbestimmung erfolgt in PSPICE entweder eigenständig durch eine .0P Anweisung oder (automatisch) vor Beginn einer weiteren Analyse. Hier wird zunächst nur der Arbeitspunkt (Datei diodla.cir) bestimmt und in der .0UT Datei ausgegeben. An der Diode fällt etwa die Spannung V(4)  $\approx 0.75\,\mathrm{V}$  ab. Damit fließt durch R1 der Strom  $(V(1)-V(2))/R1=(5-0,75)/100\,\Omega=42,5\,\mathrm{mA},$  also auch praktisch durch die Diode (Stromanteil durch R2 vernachlässigbar).

```
*diod1a
V1 1 0 DC 5
R1 1 2 100
R2 2 0 1K
D1 2 0 Diod
.Model Diod D
.end
NODE VOLTAGE NODE VOLTAGE
( 1) 5.0000 ( 2) .7516
VOLTAGE SOURCE CURRENTS
NAME CURRENT
1 -4.248E-02
TOTAL POWER DISSIPATION 2.12E-01 WATTS
```

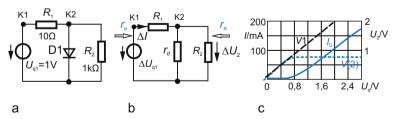


Abb. 3.5.3. Diodenschaltung. (a) Schaltung zur Bestimmung des Arbeitspunktes. (b) Kleinsignalersatzschaltung. (c) Abhängigkeit des Knotenspannungen und des Diodenstromes von der Eingangsspannung

Das Kleinsignalverhalten wird mit einer .TF-Anweisung untersucht, die zugehörige Kleinsignalersatzschaltung zeigt Abb. 3.5.3b (Datei diod1b.cir)

```
**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(2)/V1 = 6.156E-03
INPUT RESISTANCE AT V1 = 1.006E+02
OUTPUT RESISTANCE AT V(2) = 6.156E-01
```

Der Quotient V(2)/V1 stellt das Spannungsteilerverhältnis der Spannungen V(2) =  $\Delta U_2$  und V1 =  $\Delta U_1$  dar, es gilt (Abb. 3.5.3b) nach der Ersatzschaltung  $\frac{\Delta V2}{\Delta V1} \equiv \frac{V(2)}{V1} = \frac{r_d}{r_d + R_2} = 6,156 \cdot 10^{-3}$ . Daraus folgt der Kleinsignalwiderstand  $r_d = 6,188 \,\Omega$ . Der Eingangswiderstand ist die Reihenschaltung von  $R_1$  und  $r_d$  ( $R_2$  vernachlässigt):  $\frac{\Delta V_1}{\Delta I_1} = R_1 + r_d = 100,6 \,\Omega$ . Mit  $R_1 = 100 \,\Omega$  liegt man bereits an der Genauigkeitsgrenze der Einstellungen. Der Ausgangswiderstand beträgt nach der Kleinsignalersatzschaltung  $\frac{\Delta V_2}{\Delta I_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r_d}\right)^{-1} = 0,6156 \,\Omega$ . Daraus errechnet sich der Diodenkleinsignalwiderstand  $r_d$  zu  $0,6197\Omega$ . Das Beispiel zeigt, dass durchaus numerische Probleme auftreten können.

**DC Anweisung** Diese Anweisung dient beispielsweise zur Kennlinienaufnahme. Sie variiert den Wert einer Erregerquelle in vorgegebenen Grenzen mit definierter Schrittweite und wird als .DC QUELLENNAME START STOP SCHRITT in die Netzliste aufgenommen.

```
*diod1c.CIR
V1 1 0 DC 5
R1 1 2 100
R2 2 0 1K
D1 2 0 Diod
.Model Diod D
.DC V1 0 5 20M
.PRINT DC V(2), V(1), V(1,2)
.PROBE
.end
```

In der Netzliste diodlc.cir wird die Ausgangsspannung V(2) der Schaltung Abb. 3.5.3a als Funktion der Eingangsspannung V1 erzeugt. Die Anweisung lautet .DC V1 0 5 20. Dabei variiert die Eingangsspannung zwischen 0...5 V in Schritten von 20 mV. Das Ergebnis, die Ausgangsspannung V(2), steht neben der .DAT-Datei auch in einer Ausgabedatei .OUT, die mit PROBE als Kennlinie angezeigt werden kann. Aufgetragen sind neben dem Verlauf V1 (linearer Anstieg) die Spannung V(2): sobald die Diode genügend niederohmig geworden ist (ab etwa 0,7 V) verhält sie sich wie ein konstanter Widerstand und die Spannung steigt langsamer an. Die Spannungsdifferenz

V1-V(2) ist dem Strom durch R1 proportional, das ist praktisch die Kennlinie des Diodenstromes.

# 3.6 Mehrpolige Netzwerke\*

Im Kap. 2.6 wurden Zweitor-Netzwerke entwickelt. Sie versagen jedoch bei nicht eingehaltenen Torbedingungen. So kann z.B. in jede der vier Klemmen eines (resistiven) Vierpolnetzwerkes ein Strom aus einer Quelle eingeprägt werden. Die Strom-Spannungsverhältnisse in einem Punkt P im Netzwerk sind dann nur mit der Maschenstrom- oder Knotenspannungsanalyse berechenbar, aber nicht über die Zweitortheorie.

Mehrpolnetzwerke treten als Problemstellung und auch Bauelemente auf:

- so ist die Energieverteilung aus mehreren unterschiedlichen Quellen über ein vermaschtes Netzwerk zum Verbraucher eine entsprechende Aufgabenstellung; auch eine in Teilpunkten angezapfte Leitung oder Leitungssysteme zur Übertragung von Drehstrom sind Mehrpolprobleme.
- typische Mehrpolbauelemente sind Übertrager mit mehreren Wicklungen (auch Differenzialübertrager), Multiplizierer oder Operationsverstärker mit symmetrischem Ausgang, aber auch Schaltkreise mit mehreren Anschlussklemmen u. a. m.

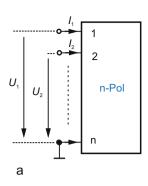
Das Verständnis mehrpoliger Netzwerke ist wichtig:

- zur Entwicklung angepasster Analyseverfahren,
- zu ihrer Modellierung und Parameterbestimmung,
- für Manipulationsverfahren zur Änderung der Klemmenzahl durch Klemmenunterdrückung oder Klemmenergänzung sowie
- für Verfahren, die Mehrpolnetzwerke auf eine Zwei- oder Mehrtorbeschreibung reduzieren, wenn das Übertragungsverhalten von einer Quelle zu Verbrauchern interessiert.

Zu unterscheiden ist stets zwischen Mehr*pol*- und Mehr*tor*netzwerk (Abb. 3.6.1). Im letzten Fall erfüllen Klemmenpaare stets die Torbedingung (Beispiel: Übertrager mit mehreren eigenständigen, nicht verketteten Wicklungen oder ein Optokoppler mit zwei unabhängigen Ausgängen).

# **3.6.1 Ströme und Spannungen an Mehrpolen**

Ein Mehrpol ist ein Netzwerk mit mehreren Anschlusspolen oder -klemmen. Nach den Kirschhoffschen Gleichungen gilt für ihn:



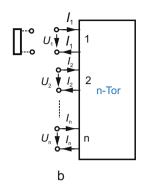


Abb. 3.6.1. Mehrpolnetzwerke. (a) n-Pol mit Klemmenspannungen und -strömen, ein Netzwerkknoten ist Bezugsknoten. (b) Mehrtor mit Torspannungen und -strömen

Jeder n-Pol  $(n \geq 2)$  wird durch (n-1) Klemmenspannungen zwischen benachbarten Anschlüssen und (n-1) Klemmenströme charakterisiert.

Bei Kombination aller Möglichkeiten der Spannungszuordnung (zwischen den Klemmen) gibt es insgesamt n(n-1) Spannungen und mit Vorzeichenbeachtung  $U_{ab} = -U_{ba}$  noch n(n-1)/2. Das sind beim Dreipol (n=3, Klemmen 1, 2, 3) die drei Spannungen  $U_{12}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{31}$  und beim Vierpol (n=4, Klemmen 1...4) die sechs Spannungen  $U_{12}$ ,  $U_{13}$ ,  $U_{14}$ ,  $U_{23}$ ,  $U_{24}$  und  $U_{34}$ . Maschen- bzw. Knotensatz schränken auf die unabhängige Anzahl ein.

Aus praktischen Gründen bezieht man alle Spannungen auf einen *Nullknoten* (Abb. 3.6.1a). Dann lassen sich (bei stabilem Netzwerk)

- alle Klemmenspannungen als Funktion der Klemmenströme (stromgesteuerte Darstellung) angeben,
- alle Klemmenströme als Funktion der Klemmenspannungen darstellen (spannungsgesteuerte Darstellung),
- eine Mischform wählen mit einem Teil vorgegebener Spannungen und dem Rest als Ströme. Wir beschränken uns auf die ersten beiden.

Vom Dreipol (Zweitor) her sind die Verhältnisse geläufig: dem ersten Fall entspricht die Widerstandsdarstellung, dem zweiten die Leitwertdarstellung und dem dritten die Hybridform.

Durch Erweiterung der Widerstandsbeschreibung des Dreipols gilt für einen Mehrpol mit n Klemmen die U, I-Relation in Widerstandsform aus p=n-1 Gleichungen:

$$R_{11}I_{1} + R_{12}I_{2} \dots + R_{1p}I_{p} = U_{1}$$

$$R_{21}I_{1} + R_{22}I_{1} \dots + R_{2p}I_{p} = U_{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$R_{p1}I_{1} + R_{p2}I_{1} \dots + R_{pp}I_{p} = U_{p}$$

$$(3.6.1)$$

Die Ströme treten an den Anschlussstellen (+ -Klemme) in das Netzwerk und die Spannung ist von dieser Klemme zum Bezugsknoten orientiert. Damit gilt an der Klemme die Verbraucherzuordnung von Strom und Spannung. Mit Klemme n als Bezugspunkt gibt es p=n-1 unabhängige Ströme (der Strom  $I_n$  folgt nach dem Knotensatz als Summe der übrigen Ströme).

Die Matrixdarstellung zu Gl. (3.6.1) lautet

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1p} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{p1} & R_{p2} & \dots & R_{pp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_p \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{R}\mathbf{I} = \mathbf{U}.$$
 (3.6.2)

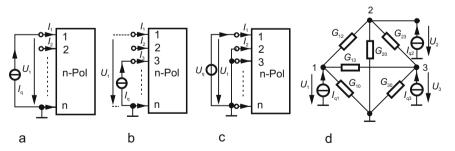
Die Eigenschaften des n-Pols sind durch die  $(n-1)\times (n-1)$  Koeffizienten  $R_{ij}$  der Widerstandsmatrix vollständig bestimmt.

Sie unterteilen sich wie beim Zweitor (Dreipol) in Leerlaufwiderstände und Übertragungsgrößen. Die jeweilige Bestimmung liegt durch die Definition fest. So wird der Eingangsleerlaufwiderstand  $R_{11}$  gemessen durch Einprägen eines Probestromes  $I_1$  in Klemme 1 und Messung der Spannung  $U_1$  unter der Voraussetzung, dass alle restlichen Ströme verschwinden, d. h. die übrigen Klemmen leerlaufen (Abb. 3.6.2a):

$$R_{11} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_i = 0 \text{ außer } I_1}.$$
 (3.6.3a)

Entsprechend wird für die  $\ddot{U}$ bertragungswiderstände verfahren, z. B.  $R_{13}$  und  $R_{31}$  (Abb. 3.6.2b)

$$R_{13} = \frac{U_1}{I_3} \bigg|_{\text{alle } I_i = 0 \text{ außer } I_3}, \ R_{31} = \frac{U_3}{I_1} \bigg|_{\text{alle } I_i = 0 \text{ außer } I_1}. \ (3.6.3\text{b})$$



**Abb. 3.6.2.** Parameterbestimmung am Mehrpolnetzwerk. (a) Bestimmung des Eingangsleerlaufwiderstandes  $R_{11}$ . (b) Bestimmung des Übertragungswiderstandes  $R_{13}$ . (c) Bestimmung des Eingangskurzschlussleitwertes  $G_{11}$ . (d) Beispielschaltung, Bestimmung der Leitwertparameter

Die Anzahl der unabhängigen Widerstandskoeffizienten hängt vom Netzwerk ab: für reziproke Netzwerke gilt  $R_{ab} = R_{ba}$ , weitere Vereinfachungen entstehen z.B. bei für Widerstandssymmetrie u. ä.

Die Widerstandsmatrix Gl. (3.6.2) gilt für die Klemmenfestlegung und den Bezugsknoten nach Abb. 3.6.2a; veränderte Zuordnungen führen zu einer anderen Widerstandsmatrix. Formell hat sie den gleichen Aufbau wie die Maschenwiderstandsmatrix Gl. (3.2.6). Doch besteht ein prinzipieller Unterschied. Dort fließen Maschenströme entsprechend der Anzahl unabhängiger Maschen und die Maschenquellenspannung auf der rechten Seite ist entweder vorhanden oder nicht. In das Netzwerk wird von außen nicht eingegriffen. Die Widerstandsmatrix wird hingegen von der zugängigen Klemmenzahl bestimmt.

**Leitwertbeschreibung** Das U, I-Verhalten kann gleichwertig auch in der dualen *Leitwertform* erfolgen. Sie hat sogar größere Bedeutung. Statt der Schreibweise als Gleichungssystem übernehmen wir die Matrixdarstellung (mit p = n - 1):

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1p} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{p1} & G_{p2} & \dots & G_{pp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_p \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{GU} = \mathbf{I}.$$
 (3.6.4)

Jetzt treten die Kurzschlussleitwerte  $G_{11}, G_{22}, \ldots G_{pp}$  auf, z. B.

$$G_{11} = \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_i = 0 \text{ außer } U_1}.$$
 (3.6.5a)

Der Kurzschlussleitwert  $G_{ii}$  der Klemme i (nach dem Referenzknoten) ist der Leitwert gemessen an dieser Klemme bei Kurzschluss aller übrigen Klemmen. Dazu wird dem Eingang 1 ein Probestrom  $I_1$  eingeprägt und die Spannung  $U_1$  bei Kurzschluss aller restlichen Klemmen gemessen (Abb. 3.6.2c). Die übrigen Parameter sind die  $\ddot{U}bertragungsleitwerte$ 

$$G_{13} = \frac{I_1}{U_3} \Big|_{\text{alle } U_i = 0 \text{ außer } U_3}, G_{31} = \frac{I_3}{U_1} \Big|_{\text{alle } U_i = 0 \text{ außer } U_1}.$$
 (3.6.5b)

Man legt dazu z. B. die Spannung  $U_3$  an und misst den Kurzschlussstrom  $I_1$  bei Kurzschluss aller restlichen Klemmen.

Die Elemente der Leitwertmatrix werden

- der Definition entsprechend aus Kurzschlussmessungen bestimmt,
- aus der Widerstandsmatrix  $\mathbf{R}$  direkt ermittelt (falls ihre Koeffizientendeterminante nicht verschwindet) gemäß  $\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1}$ ,

 nach der bei der Knotenspannungsanalyse diskutierten Strukturregel aus der Schaltung abgelesen (dabei ist die symmetrische Stromrichtung vorteilhaft).

Beispiel 3.6.1 Dreipol Für die Schaltung Abb. 3.6.2d ergibt sich die Leitwertmatrix durch Aufstellen des Knotensatzes für jeden Knoten, etwa für Knoten 1:

$$I_1 = I_{q1} = G_{10}U_1 + G_{12}(U_1 - U_2) + G_{13}(U_1 - U_3)$$
 usw.

Erstreckt auf die restlichen Knoten folgt (nach Ordnen) die Leitwertmatrix

$$G = \begin{pmatrix} G_{10} + G_{12} + G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ -G_{21} & G_{20} + G_{21} + G_{23} & -G_{23} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{30} + G_{31} + G_{32} \end{pmatrix}.$$
(3.6.6)

Die Leitwertmatrix eines erdunsymmetrischen Zweipolnetzes mit n Knoten ist quadratisch von der Dimension  $((n-1)\times(n-1))$ . In der Hauptdiagonalen steht die Summe aller am Knoten angeschlossenen Leitwerte, als Nebendiagonalelemente (mit negativem Vorzeichen) die Koppelleitwerte zwischen den beiden zugehörigen Knoten. Ferner liegt Symmetrie zur Hauptdiagonalen vor (solange das Netzwerk keine gesteuerten Quellen enthält). Dieses Ergebnis kennen wir von der Knotenanalyse. Die Übereinstimmung ist nicht zufällig: Die Ströme des Stromvektors sind die Klemmenströme zu den Stromknoten, wie sie auch für die Knotenspannungsanalyse vereinbart wurden.

## 3.6.2 Zusammenschaltung von Mehrpolen

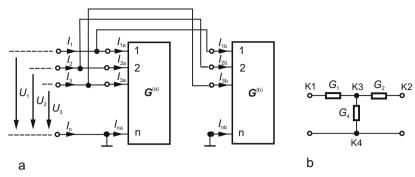
Mehrpole lassen sich durch Verbinden entsprechender Knoten nach den gleichen Regeln wie für Zweitore zusammenschalten (Kap. 2.6.6). Dabei dürfen in entstehenden Erdschleifen keine Ausgleichsströme fließen.

Diese Bedingung trifft z.B. nicht zu, wenn Mehrtor (1) erdunsymmetrisch, Mehrtor (2) aber erdsymmetrisch ist. Dann werden beim Zusammenschalten Klemmen am Mehrtor (2) kurzgeschlossen, m.a.W ändert sich seine Matrix: Beispiel: Parallelschaltung einer T- und einer X- (Brücken-) Ersatzschaltung.

Unkritisch ist die Parallelschaltung zweier erdunsymmetrischer Mehrpole (1) und (2) gleicher Klemmenzahl n (Abb. 3.6.3a). Haben die Netzwerke die Leitwertmatrizen  $G^{(a)}$  und  $G^{(b)}$ , so folgt analog zur Parallelschaltung von Zweitoren

$$I = I^{(a)} + I^{(b)} = (G^{(a)} + G^{(b)})U = GU.$$
 (3.6.7)

Bei der Parallelschaltung zweier Mehrpole gleicher Polzahl n ergibt sich die neue Knotenleitwertmatrix aus der Summe der einzelnen Knotenleitwertmatrizen. Eine Parallelschaltung kann mehr als zwei Mehrpole umfassen.



**Abb. 3.6.3.** Parallelschaltung von Mehrpolen. (a) Zusammenschaltung zweier n-Mehrpole. (b) Zusammenschaltung einfacher Netzwerkelemente zu einer größeren Anordnung durch Parallelschaltung von Mehrpolen

Stimmen die Klemmenzahlen der Einzelmehrpole nicht überein, so wird die Schaltung mit der kleineren Polzahl durch *fiktive leerlaufende Klemmen* (Null-Einträge in der Leitwertmatrix) solange ergänzt, bis gleiche Klemmenzahlen vorliegen.

Beispiel 3.6.2 Schaltungsaufbau Eine Schaltung (Abb. 3.6.3b) mit 4 Klemmen und drei Netzwerkelementen hat die (unbestimmte) Leitwertmatrix

Sie kann in drei Einzelmatrizen mit je nur einem Netzwerkelement zerlegt werden. Umgekehrt lässt sich jedes größere Zweipolnetzwerk durch Parallelschaltung entsprechender Teilnetzwerke aufbauen. Das Einfügen eines Zweipolelementes zwischen den Knoten i und j erfolgt durch

- Addition von  $G_{ii}$  und  $G_{jj}$  in die Hauptdiagonalelemente,
- Einfügen von  $-G_{ij}$  und  $-G_{ji}$  in die Nebendiagonalelemente.

Ganz analog verfährt man bei der Reihenschaltung zweier n-Mehrpolnetzwerke. Hier ergibt sich dual zur Parallelschaltung:

Die Reihenschaltung von zwei n-Mehrpolen führt zu einer neuen Widerstandsmatrix aus der Summe der einzelnen Widerstandsmatrizen.

Erdunsymmetrische Mehrpole erfüllen die Voraussetzungen für die Zusammenschaltung wie bei der Parallelschaltung, allerdings lassen sich höchstens zwei in Reihe schalten. Das hat geringe Bedeutung.

Einbezug von Zweitorelementen Durch Parallelschaltung von Teilnetzwerken können auch Zweitorelemente, wie gesteuerte Quellen, einbezogen werden. Wir wählen die spannungsgesteuerten Strom- und Spannungsquellen wegen ihrer Bedeutung für Operationsverstärker. In einem ersten Schritt wird die gesteuerte Quelle aus dem Netzwerk (Abb. 3.6.4a) zwischen den Klemmen  $a \dots d$  separiert und für das Netzwerk ein externer Referenzpunkt gewählt. Ohne gesteuerte Quelle hat es die Leitwertgleichung

Die gesteuerte Quelle erhält eine Knotenmatrix mit Nulleinträgen außer an Stellen, an denen sie Einträge verursacht. Diese Matrix wird der Netzwerkmatrix zugeschaltet, also zu Gl. (3.6.8) addiert.

Eine spannungsgesteuerte Stromquelle (Abb. 3.6.4b) mit den Klemmen  $a \dots d$  und den Knotenspannungen  $U_{a0}, \dots U_{d0}$  zum Bezugspunkt 0, verschwindendem Eingangsstrom  $I_1 = 0$  und dem Ausgangsstrom  $I_2 = G_m U_1 = Y_{21} U_1$  (in Zweitordarstellung) führt zu folgenden Knotenbeiträgen: Knoten  $a: +I_1 = 0$ , Knoten  $b: -I_1 = 0$ , Knoten  $c: +I_2 = G_m U_1 = G_m (U_{a0} - U_{b0})$ , (weil  $I_2$  den

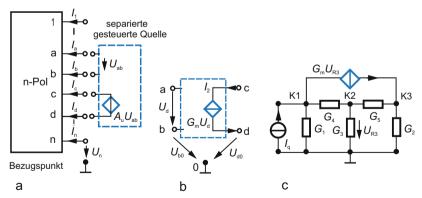


Abb. 3.6.4. Einfügen einer gesteuerter Quelle in einen Mehrpol. (a) Trennung des Netzwerkes in gesteuerte Quelle und Restnetzwerk. (b) Ersatzschaltung einer idealen spannungsgesteuerten Spannungsquelle. (c) Beispielnetzwerk mit spannungsgesteuerter Stromquelle

Knoten verlässt) und schließlich Knoten  $d: -I_2 = -G_m(U_{a0} - U_{b0})$ , weil der Strom  $I_2$  in den Knoten tritt. Damit bleiben als Einträge

Wird einer der Knoten  $a \dots d$  zum Bezugsknoten, so verschwinden die zugehörigen Einträge (Zeile, Spalte). Hätte die Steuerstrecke zwischen den Knoten a, b noch einen endlichen Leitwert (nicht null wie hier), so würde er an den entsprechenden Positionen als Haupt- bzw. Nebendiagonalelement auftreten.

Für die Beispielschaltung Abb. 3.6.4c mit den Knoten K $1 \dots$  K3 kann die Knotenleitwertmatrix sofort nachvollzogen werden:

$$\begin{array}{llll} \text{K1:} & \left( \begin{array}{ccc} G_1 + G_4 & -G_4 + G_{\mathrm{m}} & 0 \\ -G_4 & G_3 + G_4 + G_5 & -G_5 \\ \text{K3:} & 0 & -G_5 - G_{\mathrm{m}} & G_2 + G_5 \end{array} \right) = \textbf{\textit{G}}.$$

Die gesteuerte Quelle liegt zwischen Knoten K1 (= c) und K3 (= d), die Steuerspannung zwischen Knoten K2 (= a) und Bezug (b = 0). Deshalb tritt ihr Beitrag nur an den Matrixpositionen 12 und 32 (mit  $-G_m$ ) auf. Da Knoten b mit dem Bezugsknoten zusammenfällt, gibt es nur zwei Matrixeinträge.

Spannungsgesteuerte Spannungsquelle Wir nutzen die ideale spannungsgesteuerte Spannungsquelle als Modell des Operationsverstärkers von Abb. 3.3.10. Eingangsströme werden vernachlässigt, die Ausgangsspannung  $U_{\rm a} = A_{\rm u} U_{\rm d}$  ist die mit  $A_{\rm u} \equiv A_{\rm uD}$  verstärkte Eingangsdifferenzspannung  $U_{\rm d}$ . Durch die Spannungsquelle fließt der Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  (Abb. 3.6.5a).

Zunächst wird die Netzwerkgleichung aufgestellt und anschließend der Verstärker eingefügt. Dabei unterscheidet man zwischen endlicher Verstärkung  $A_{\rm u}$  und unendlich hoher Verstärkung oder virtuellem Kurzschluss.

- 1. Im *ersten Fall* erfolgt der Einbau der gesteuerten Spannungsquelle nach dem Superknotenkonzept. Es verlangt
  - einen Hilfsstrom durch die Quelle (empfehlenswert) und anschließendes Zusammenfassen der beiden ausgangsseitigen Knotengleichungen (so entsteht eine Zwangsbedingung für die ausgangsseitigen Knotenspannungen und nur eine muss ermittelt werden),

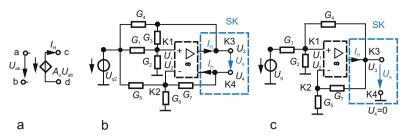


Abb. 3.6.5. Einfügen eines Operationsverstärkers in ein Netzwerk. (a) Modell des idealisierten Operationsverstärkers mit endlicher Spannungsverstärkung. (b) Operationsverstärker mit symmetrischem Ausgang im Netzwerk. (c) Operationsverstärker mit unsymmetrischem Ausgang im Netzwerk

- oder das Superknotenkonzept beim Aufstellen der Superknotengleichung,
- den Zusammenhang zwischen den Verstärkeraus- und -eingangsspannungen über die Steuergleichung.
- 2. Der zweite Fall (Verstärker mit unendlich hoher Verstärkung  $A_{\rm u} \to \infty$ ) geht entweder aus dem ersten durch Grenzübergang hervor oder durch Manipulation der Leitwertmatrix, der übliche Weg für Netzwerke mit mehreren Operationsverstärkern.

Wir erläutern die Einzelschritte am Beispiel der spannungsgesteuerten Spannungsquelle (endliche Verstärkung  $A_{\rm u}$ ) mit symmetrischem Ausgang (Abb. 3.6.5b). Die ideale Spannungsquelle wird zunächst über ihren Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  zwischen Knoten K4 und K3 zum Aufstellen der Knotengleichungen angesetzt und später eliminiert.

Die Schaltung hat 4 Knoten (Bezugsknoten anfangs festlegt). Die Eingangsspannung  $U_{\rm q}$  ist gegeben. Die Knotengleichungen (mit Hilfsstrom  $I_{\rm H}$ ) lauten:

Wäre  $I_{\rm H}$  bekannt, so könnten alle Knotenspannungen ermittelt werden. Mit der Zwangsbedingung  $U_{\rm a}=U_3-U_4$  (beim Superknotenkonzept ein konkreter Spannungswert) wird der Hilfsstrom ersetzt und so eliminiert: man zieht beide Knotenbilanzen K3 und K4 zusammen (beide Zeilen addieren zur Zeile K3+4 und Zeile K4 streichen, rechts hebt sich  $I_{\rm H}$  heraus). Dann (und mit  $U_4=U_3-U_{\rm a}$ ) sind die Knotenspannungen  $U_1\dots U_3$  darstellbar.

Im nächsten Schritt wird die aus der Zwangsbedingung resultierende (noch unbekannte!) Spannung  $U_a$  über die Verstärkergleichung  $U_a = A_u(U_1 - U_2)$ 

auf die Knotenspannungen  $U_1$ ,  $U_2$  zurückgeführt (entweder durch die Substitution  $U_3 = U_4 + A_{\rm u}(U_1 - U_2)$  und Eliminierung von  $U_3$ ) oder besser durch  $U_2 = U_1 - A_{\rm u}^{-1}(U_3 - U_4)$ . In diesem Fall stellt sich mit  $A_{\rm u} \to \infty$  automatisch  $U_1 = U_2$ , d.h. virtueller Kurzschluss ein. Wir ersetzen die Spannung  $U_2 = U_1 + A_{\rm u}^{-1}(U_4 - U_3)$ . Dadurch entfällt Spalte 2  $(U_2)$  und es verbleiben

K1: 
$$(G_1 + G_2 + G_3)U_1 - G_3U_3 = G_1U_q$$
  
K2:  $(G_5 + G_6 + G_7)U_1 - A_u^{-1}(G_5 + G_6 + G_7)U_3$   
 $-(G_7 - A_u^{-1}(G_5 + G_6 + G_7))U_4 = G_5U_q$  (3.6.11)  
K3+4:  $-(G_3 + G_7)U_1 + (G_3 + G_4 + G_7A_u^{-1})U_3$   
 $+G_7(1 - A_u^{-1})U_4 = G_4U_q$ .

Damit sind die Knotenspannungen  $U_1$ ,  $U_3$  und  $U_4$  bestimmt (und durch Eliminieren von  $U_1$ ) auch die Ausgangsspannung  $U_a = U_3 - U_4$  als Differenz der Knotenspannungen, die anfängliche Aufgabenstellung.

Der Übergang zum *idealen Operationsverstärker* mit  $A_{\rm u} \to \infty$  (und virtuellem Kurzschluss  $U_1 = U_2$ ) kann auf zwei Wegen erfolgen:

— durch den *Grenzübergang*  $A_{\rm u}^{-1} \to 0$  in der Lösung mit endlicher Verstärkung (falls sie – wie hier – bereitsteht) mit dem Ergebnis

K1: 
$$(G_1 + G_2 + G_3) - G_3 = 0$$
  
K2:  $(G_5 + G_6 + G_7) = 0 - G_7$   
 $-(G_3 + G_7) - G_3 + G_4 = G_7$   
 $(G_5 + G_6 + G_7) - G_3 + G_4 = G_7$   
 $(G_5 + G_6 + G_7) - G_3 + G_4 = G_7$   
 $(G_5 + G_6 + G_7) - G_3 + G_4 = G_7$ 

(leicht nachprüfbar, hier zeigt sich der Vorteil, die Eingangsspannung als Funktion der Ausgangsknotenspannungen zu ersetzen, nicht umgekehrt).

 durch Beachtung der idealen Verstärkerbedingung "virtueller Kurschluss" und des Superknotens am Ausgang mit Manipulation der ohne Verstärker aufgestellten Netzwerkgleichungen.

Bei idealem Operationsverstärker gilt eingangsseitig virtueller Kurzschluss, ausgangsseitig liegt die gesteuerte Spannungsquelle in einem Superknoten.

Eingangsseitig heißt virtueller Kurzschluss  $U_1 = U_2$ , die Spalten  $U_1$  und  $U_2$  in der Ausgangsmatrix Gl. (3.6.10) zu addieren und eine zu streichen (z. B. die zweite,  $U_2$ ). So geht die Matrix Gl. (3.6.10) über in

K1: 
$$(G_1 + G_2 + G_3) - G_3 = 0$$
  
K2:  $(G_5 + G_6 + G_7) = 0 - G_7$   
 $-(G_3 + G_7) - G_3 + G_4 = G_7$   $\cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 U_q \\ G_5 U_q \\ G_4 U_q \end{pmatrix}$ . (3.6.13)

Es treten nur noch die Spannung  $U_1$ ,  $U_3$ ,  $U_4$  auf. Der nächste Schritt betrifft die Ausgangsknoten K3 und K4. Die zusammengefassten Knoten K3 und K4 oben sind nichts anderes als der Superknoten, von dem aus die Knotengleichungen nach den Knoten K1, K2 (mit  $U_2$ ,  $U_1$ ) zu bilden sind. Man kann also

- beide Knotengleichungen K3, K4 getrennt aufstellen (dabei ist der Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  nützlich), sie anschließend addieren (d. h. zwei Matrixzeilen addieren) und eine streichen (gängiger Weg) oder
- die eine Knotengleichung K3+4 des Superknotens aufstellen. Liegt er zudem einseitig an Masse, so entfällt diese Knotengleichung und Knotenspannung.

Wird z. B. Knoten K3 nach Masse gelegt, so ist Zeile K3+4 zu streichen und ebenso die zu  $U_3$  gehörende zweite Spalte. Gelangt zusätzlich Knoten K1 an Masse, so ist die Spalte mit  $U_1$  und die Zeile K1 zu streichen. Dann verbleibt aus Zeile 2 (K2) nur noch  $-G_7U_4=G_5U_{\rm q}$  oder  $U_4=-(G_5/G_7)U_{\rm q}$ . Das ist die Ausgangsspannung des invertierenden idealen Operationsverstärkers.

Lösungsmethodik Einbezug Operationsverstärker Soll ein Operationsverstärker in das separierte Netzwerk (Abb. 3.6.4a) mit der Leitwertgleichung Gl. (3.6.8) z. B. zwischen den Klemmen  $a \dots d$  mit  $U_{cd} = U_c - U_d = A_u U_{ab} = A_u (U_a - U_b)$  einbezogen werden, so sind folgende Schritte durchzuführen:

- 1. Aufstellung der unbestimmten Knotenspannungsmatrix des Netzwerkes (ohne Operationsverstärker).
- 2. Auflösung der Verstärkergleichung nach einer zu eliminierenden Spannung, z. B.  $U_c$  durch  $U_c = A_{\rm u}(U_a U_b) + U_d$  (zweckmäßig die Steuerspannung  $U_a$  oder  $U_b$ , weil dann der ev. Grenzübergang einfacher wird  $U_a = U_b + A_{\rm u}^{-1}(U_c U_d)$ ).
- 3. Einsetzen der zu eliminierenden Spannung z.B.  $U_c$ , d.h. Spalte c mit  $A_{\rm u}$  multipliziert und zu Spalte a addiert, ebenso Spalte c mit  $-A_{\rm u}$  multipliziert und zu Spalte b addiert sowie Spalte c zu Spalte d addiert. Anschließend ist Spalte c zu streichen.
- 4. Zusammenfassen der Knotengleichungen Kc und Kd (beide addieren und eine (Zeile Kc)) streichen). So hebt sich der Hilfsstrom heraus.
- 5. Wird ein Knoten (z. B. d zum Referenzknoten ( $U_d = 0$ ), so Spalte d streichen und ebenso Knotengleichung Kd (Zeile) streichen.
- 6. Auflösung des Gleichungssystems nach den gesuchten Knotenspannungen.

Damit geht Gl. (3.6.8) über in eine Form

Bei mehreren Operationsverstärkern ist das Verfahren für jeden Verstärker zu wiederholen. Deshalb empfiehlt sich zunächst eine Analyse mit Operationsverstärkern unendlich hoher Verstärkung.

Idealer Operationsverstärker Bei unendlich grosser Verstärkung wird jeder Operationsverstärker eingangsseitig durch virtuellen Kurzschluss und ausgangsseitig durch einen Superknoten repräsentiert. Diese Bedingungen dienen zur *Manipulation* der unbestimmten Knotenspannungsmatrix, nämlich Zusammenfassen der korrespondierenden Spalten (virtueller Kurzschluss) und Superknotenbedingung (korrespondierende Zeilen) am Verstärkerort:

- 1. Einhaltung des virtuellen Kurzschlusses mit identischen Spannungen  $U_a = U_b$  (ohne dass eine zusätzliche Einströmung in die Knoten erfolgt) durch Zusammenfassen der Spalten a und b (Addition von Spalte b zu Spalte a und Streichung von Spalte b, ebenso der b-te Eintrag im Spannungsvektor).
- 2. Aufstellung der Superknotengleichung Kc+d für den Verstärkerausgang (1 Zeile) oder gleichwertig der Knotengleichungen Kc, Kd, ihre Addition und Streichung einer Knotengleichung, z.B. Kd und ebenso der d-te Eintrag im Stromvektor rechts.
- 3. Wird ein Knoten Referenzknoten, so sind die zugehörige Spalte der Knotenspannung und die zugehörige Knotengleichung zu streichen.

Das verleibende Gleichungssystem ist das Netzwerk mit idealem Operationsverstärker. Es empfiehlt sich, zunächst die Superknotengleichungen aufzustellen und dann den virtuellen Kurzschluss einzuarbeiten. Das Verfahren kann mehrere Verstärker einschließen.

Diese Methode ist weitgehend identisch mit der Darstellung des idealen Operationsverstärkers durch ein sog. *Nullator-Norator-Paar*.

Beispiel 3.6.3 Operationsverstärkerschaltung Ins Netzwerk Abb. 3.6.5c soll ein idealer Operationsverstärker einbezogen werden. Von den vier Knoten ist K4 später Referenz. Es gilt die Knotenleitwertmatrix (ohne Verstärker)

Die einspeisende Spannungsquelle wurde in eine Stromquelle gewandelt.

Der nächste Schritt schließt den idealen Operationsverstärker ein. Der virtuelle Kurzschluss ergibt identische Knotenspannungen  $U_1$ ,  $U_2$ : Zusammenfassen der Spalten 1 und 2 durch Addition von Spalte 2 zu 1 und anschließende Streichung Spalte 2 (neue Spannungsvariable  $U_{1+2}$ ).

Jetzt ist die Zeilenzahl um eine größer als die Zahl unabhängiger Klemmenspannungen. Dafür kommt der Hilfsstrom  $I_{\rm H}$  des Superknotens zwischen Knoten 3 und 4 hinzu. Er stellt sich so ein, dass virtueller Kurzschluss gilt. Zusammenfassen der Zeilen 3 und 4 eliminiert ihn (Zeile 3 zu 4 addieren und Zeile 3 streichen, Zwischenergebnis wurde nicht notiert). Die Beziehung K3+4 ist die Superknotengleichung, sie hätte auch sofort aus der Schaltung geschrieben werden können.

Anschließend wird Knoten K4 zum Bezugsknoten: das bedeutet  $U_{\rm k4}=0$  oder Streichen der Spalte 4 und ebenso der (neuen) Zeile K3+4. Dann bleibt als Knotenspannungssystem

K1: 
$$\begin{pmatrix} (G_1+G_2+G_3) & -G_3 \\ (G_4+G_5) & -G_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{1+2} \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\mathbf{q}} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.17}$$

Gesucht ist die Ausgangsspannung ( $U_3$ , Knotenspannung  $U_{k3}$ ). Dazu wird die Spannung  $U_1$  eliminiert und schließlich  $I_q = U_q G_1$  substituiert. Die Lösung lautet

$$U_3 = U_a = \frac{(G_4 + G_5)G_1U_q}{(G_1 + G_2)G_4 - G_3G_5}.$$
(3.6.18)

Im Ergebnis fällt auf:

- die Knotengleichung K3 muss nicht formuliert werden. Durch den Massebezug der gesteuerten Spannungsquelle des Operationsverstärkers am Ausgang tritt die Knotenspannung  $U_{\rm k3}$  (als Spannung einer idealen Quelle nach Masse) auf, für die das Superknotenkonzept gilt.
- bei Operationsverstärkerausgang nach Masse vereinfacht sich die Formulierung.
   Deshalb hätten die Knotengleichungen von Beginn an nur für Knoten 1 und 2 aufgestellt werden müssen (jetzt mit unsymmetrischem Verstärkerausgang).

Bei endlicher Verstärkung  $U_a = A_u(U_1 - U_2)$  werden (mit geerdetem Bezugsknoten 4) nur die Knotengleichungen K1, K2 formuliert (K3 nicht, ideale Spannungsquelle) und zusätzlich die Verstärkerbeziehung:

K1: 
$$G_1(U_1 - U_q) + G_2U_1 + G_3(U_1 - U_3) = 0$$
  
K2:  $G_5U_2 + G_4(U_2 - U_3) = 0$   
 $U_3 = A_u(U_1 - U_2).$  (3.6.19)

Das System lässt sich nach  $U_3=f(U_{\rm q})$  auflösen. Im Grenzfall  $A_{\rm u}\to\infty$  folgt Gl. (3.6.18).

Spannungsgesteuerte Stromquelle Wir ersetzen den Operationsverstärker durch eine spannungesteuerte ideale Stromquelle  $I_a = S(U_1 - U_2)$ . Jetzt muss die Knotengleichung K3 formuliert werden (zusätzlich wurde ein Innenleitwert  $g_a$  der Stromquelle hinzugenommen)

K1: 
$$G_1(U_1 - U_q) + G_2U_1 + G_3(U_1 - U_3) = 0$$
  
K2:  $G_5U_2 + G_4(U_2 - U_3) = 0$   
K3:  $-G_3U_1 - G_4U_2 + (G_3 + G_4 + g_a)U_3 = S(U_1 - U_2)$ .

Dieses Gleichungssystem lässt sich ohne Schwierigkeiten lösen. Es enthält

- den Übergang zur spannungsgesteuerten Quelle (Quellenwandlung, es gilt  $A_{\rm u} = Sr_{\rm a}, r_{\rm a} = 1/g_{\rm a}$  mit dem Ausgangswiderstand  $r_{\rm a}$  der gesteuerten Quelle). Die ideale Spannungsquelle entsteht mit  $g_{\rm a} \to \infty$ .
- auch den Übergang zum idealen Operationsverstärker. Nach Gl. (2.7.23) gilt für *jeden* Steuerparameter im Grenzfall unendlich hoher Werte der gleiche ideale Verstärker. Die Knotengleichung K3 lautet (nach Division mit S):

$$-U_1\left(1+\frac{G_3}{S}\right)+U_2\left(1-\frac{\ddot{G}_2}{S}\right)+\frac{U_3}{S}\left(G_3+G_4+g_a\right)=0.$$

Für  $S \to \infty$  folgt daraus  $U_1 \equiv U_2$ : virtueller Kurzschluss. Die Knotengleichungen K1 und K2 bleiben unverändert und führen zur Lösung Gl. (3.6.19).

Beispiel 3.6.4 Schaltung mit drei Operationsverstärkern Abb. 3.6.6 zeigt ein Netzwerk mit drei, ausgangsseitig unsymmetrischen idealen Operationsverstärkern. Gesucht ist die Ausgangsspannung  $U_6$  als Funktion der Eingangsspannung  $U_q$ .

Zunächst könnte die unbestimmte Knotenspannungsmatrix des Netzwerkes ohne Operationsverstärker aufgestellt werden. Da alle Ausgänge unsymmetrisch sind, d. h. einseitig an Masse liegen, entfallen die zugehörigen (Super-) Knotengleichungen der Knoten K4 ... K6. Sie wurden aber (aus Übungsgründen) notiert. Für die weitere Rechnung sind nur die Knotengleichungen K1 ... K3 relevant. Durch virtuellen Kurzschluss verschwinden die Knotenspannungen  $U_1 \dots U_3$ . Wir schreiben die entsprechenden Knotengleichungen auf, setzen aber für die Knotenspannungen  $U_1 \dots U_3$  einen Nullwert an (durchgestrichenes Symbol). Dann verbleiben

K1: 
$$(G_1 + G_3 + G_4) \psi_1 - G_1 U_4 - G_3 U_6 = G_4 U_q$$
  
K2:  $(G_2 + G_7) \psi_2 - G_2 U_4 - G_7 U_5 = 0$   
K3:  $(G_5 + G_6) \psi_3 - G_5 U_5 - G_6 U_6 = 0$   
SK4:  $-G_1 U_1 - G_2 U_2 + (G_1 + G_2) U_4 = 0$   
SK5:  $-G_7 U_2 - G_5 U_3 + (G_5 + G_7) U_5 = 0$   
SK6:  $-G_3 U_1 - G_6 U_3 + (G_3 + G_6) U_6 = 0$  (3.6.20)

Die Superknotengleichungen werden zu null gesetzt. Dann verbleiben als restliche Gleichungen für die Knotenspannungen  $U_4 \dots U_6$ :

$$\begin{pmatrix} -G_1 & 0 & -G_3 \\ -G_2 & -G_7 & 0 \\ 0 & -G_5 & -G_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_4 U_{\mathbf{q}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.6.21}$$

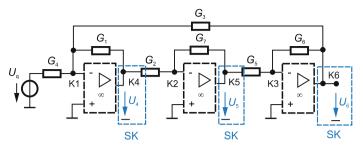


Abb. 3.6.6. Beispielschaltung mit drei idealen Operationsverstärkern

Diese Matrixgleichung kann nach den Knotenspannungen  $U_4 \dots U_6$  aufgelöst und die gesuchte Abhängigkeit  $U_6 = f(U_q)$  gewonnen werden.

#### 3.6.3 Mehrtore

Einführung Ein Mehrpol mit n Klemmen beschreibt ein allgemeines Netzwerk, dessen Klemmenbeziehungen durch die Kirchhoffschen Gleichungen festliegen. Praktisch werden Klemmen durch äußere Zweipolelemente (Last, Quelle) belastet, also eine Torbedingung erzwungen. Dann fließt durch das Klemmenpaar der gleiche Strom: in eine Klemme hinein und aus der anderen heraus. In solchen Fällen ist der Übergang vom Mehrpol zum Mehrtor zweckmäßig. Auch für Übertragungssaufgaben (Energie, Signal) interessieren nur die Netzwerkeigenschaften zwischen einem Eingangsklemmenpaar und einem (oder mehreren) Ausgangsklemmenpaaren, aber nicht die Spannungen an nicht abgeschlossenen Klemmen.

Ein Mehrtor ist ein Netzwerk mit mehr als zwei Toren. Jedes Tor hat ein zugeordnetes Klemmenpaar (2 Pole). Das n-Tor-Netzwerk ist identisch mit einem 2n Pol-Netzwerk und es erfüllt die Torbedingung.

Wird der Mehrpol nur durch seine Klemmen gekennzeichnet, so erfordert das Mehrtor eine *Definition der positiven und negativen Klemmen und eine Ordnung. n*-Tor Netzwerke werden unterteilt in (Abb. 3.6.1)

— 2n-Pol Netzwerke mit getrennten negativen Bezugsklemmen, also zugänglichen, isolierten Toren. Alle positiven Klemmen sind getrennt und folglich ist die Klemmenzahl gerade: 2n-Pol, Beispiel: Transformator mit mehreren getrennten Wicklungen. Merkmal der Mehrtornetzwerke ist die Erfüllung der Torbedingung: der in den positiven Pol eines Tores zufließende Strom tritt am negativen Pol heraus (in Abb. 3.6.1b) durch einen beigefügten Zweipol stilisiert). Die Tore können gegenseitig isoliert oder an einer Klemme (meist der negativen ) vollständig oder teilweise verbunden sein.

-n+1 *Pol-Netzwerke* mit gemeinsamer (negativer) Bezugsklemme, der Masse. Jetzt liegt ein "erdunsymmetrisches" Mehrtor vor und das n-Tor geht in einen n+1 Pol über.

Sonderfälle sind für n=2 der (2+1) Pol = Dreipol und der  $2\times 2$  Pol als echter Vierpol (z. B. Transformator mit zwei Wicklungen). Ein Dreipol kann durch die äußere Beschaltung als Zweitor wirken.

Die Mehrtortheorie untersucht die Beziehungen zwischen den Strömen und Spannungen an den einzelnen Toren oder Klemmenpaaren, dagegen i. a. nicht die Spannungen zwischen den Klemmen verschiedener Tore. Sie erweitert die Zweitortheorie bezüglich der Torzahl und der Toraufgabe: jedes Tor kann Ein- oder Ausgang oder beides zugleich sein. Unterschiedliche Zahlen von Ein- und Ausgangstoren führen zur Torunsymmetrie.

Vor allem der letzte Punkt resultiert aus der Tatsache, dass viele Einrichtungen der Informationstechnik komplexe Bausteine mit großer Torzahl sind, wobei die Toraufgabe von vornherein nicht feststeht.

Strom-Spannungsbeziehungen Generell wird ein lineares n-Tor durch n linear unabhängige U, I-Gleichungen für die 2n Klemmengrößen (Ströme, Spannungen) beschrieben $^{21}$ . Das sind beim "Vierpol" mit n=2 Toren die Zweitorgleichungen. Grundsätzlich ist dieser Zusammenhang in Matrixform darstellbar. Da sich das zugehörige Gleichungssystem in n beliebige Größen auflösen lässt, gibt es insgesamt  $\binom{2n}{n}$  verschiedene Darstellungsformen (beim Zweitor mit n=2 insgesamt 6). Davon haben für große Torzahlen hauptsächlich die Leitwert-, weniger die Ketten- und Widerstandsform Bedeutung (die restlichen betrachten wir hier nicht). Für die Stromrichtungen wird das symmetrische Pfeilsystem gewählt (Ausnahme Kettenform, gemischt-symmetrisch). Lässt man auch für Mehrtore die (linearen) Grundelemente R, L, C und gesteuerte Quellen zu, so gilt z. B. für die Leitwertform das Gleichungssystem

$$G_{11}U_{1} + G_{12}U_{2} + \dots + G_{1n}U_{n} = I_{1}$$

$$G_{21}U_{1} + G_{22}U_{1} + \dots + G_{2n}U_{n} = I_{2}$$

$$\vdots$$

$$G_{n1}U_{1} + G_{n2}U_{1} + \dots + G_{nn}U_{n} = I_{n}$$
(3.6.22)

<sup>&</sup>lt;sup>21</sup>Dabei interessieren nur die Klemmenspannungen und -ströme, i. a. *nicht* die zwischen den Toren auftretenden *Längsspannungen*.

oder in Matrixform (dual zur Widerstandsform) GU = I.

Von den  $n^2$ -Elementen der n-Tor-Matrix sind beim passiven Mehrpol insgesamt nur n(n+1)/2 Elemente unabhängig voneinander, beim 2-Tor (Vierpol) mit n=2 insgesamt drei, beim 3-Tor  $\rightarrow$  6. Tatsächlich kann jede passive 2-Torschaltung (Dreipol) durch eine Dreieck- oder Sternschaltung mit 3 Elementen und eine 3-Torschaltungen (Vierpol) mit 4, nur über Netzwerkelemente verbundene Klemmen als Viereck mit zwei Diagonalelementen durch 6 Widerstände realisiert werden.

Beispiel 3.6.5 Dreitorschaltung Abb. 3.6.7 zeigt eine Dreitoranordnung als Funktionsblock (Abb. a) und interpretiert durch Netzwerkelemente (Abb. b). Mit n=3 gibt es insgesamt  $n^2=9$  Leitwertkoeffizienten. Bei Umkehrbarkeit gilt  $G_{ab}=G_{ba}$  und die Matrix wird spiegelbildlich zur Hauptdiagonalen. Dann sinkt die Zahl unabhängiger Koeffizienten auf 6.

In der Dreitorschaltung Abb. a ist jeweils eine Torklemme zunächst noch frei verfügbar, deshalb können alle zum gemeinsamen Nullpunkt verknüpft werden. Dann treten in einer Ersatzschaltung z. B. des passiven Dreitores Knotenleitwerte und Koppelleitwerte auf (Abb. c). Dabei sinkt die Zahl der zugänglichen Klemmen von 2n (hier 6) auf 2n-(n-1)=n+1, also vier: aus der 3-Tor-Schaltung wird ein 4-Klemmen-Netzwerk genau so, wie ein 2-Tor-Element in ein 3-Klemmen-Netzwerk übergehen kann.

Betriebsverhalten Beim Betrieb eines Mehrtores interessiert i. a. das Übertragungsverhalten von Quellen an wenigen Toren zu einem oder mehreren Verbrauchern an anderen Toren. Dabei tritt oft folgendes Problem auf: das Netzwerk ist als erdunsymmetrischer Mehrpol (mit 2n Klemmen) bekannt, gesucht sind die Matrixkoeffizienten bei Betrieb als n-Tor. So wird beispielsweise ein vierpoliges Netzwerk (mit einem Masseknoten) durch neun Ma-

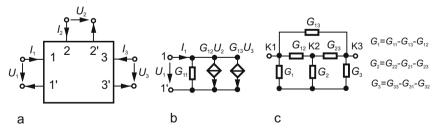


Abb. 3.6.7. Mehrtornetzwerk. (a) Dreitor. (b) Ersatzschaltung eines Tores, die übrigen Tore haben sinngemäße Ersatzschaltungen. (c) Ersatzschaltung eines reziproken (unsymmetrischen) Dreitornetzwerkes

trixelemente bestimmt, zum Betrieb als Zweitor reichen dagegen schon vier Elemente aus.

Beispiel 3.6.6 Zuordnung unsymmetrischer Mehrpol – Zweitor Ein (erdunsymmetrisches) Vierpolnetzwerk Abb. 3.6.8 (Klemme A Bezugspol) mit bekannter Widerstandsmatrix  $R_a$ 

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}_{a} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}_{\mathbf{a}} \to \boldsymbol{U}_{\mathbf{a}} = \boldsymbol{R}_{\mathbf{a}} \boldsymbol{I}_{\mathbf{a}}$$
(3.6.23)

soll als Zweitor (Abb. b) in Widerstandsform beschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{U} = \boldsymbol{RI}. \tag{3.6.24}$$

Zwischen den Mehrpolklemmengrößen und der Zweitorform gelten die Torbedingungen

Tor T1: 
$$U_1 = U_{1a}$$
,  $I_1 = I_{1a}$ ,  $-I_1 = I_{4a}$ ; Tor T2:  $U_2 = U_{2a} - U_{3a}$ ,  $I_2 = I_{2a}$ ,  $-I_2 = I_{3a}$ .

Gesucht sind die Zweitorparameter. Nach Einsetzen der Torbedingungen in Gl. (3.6.23) und Ordnung der Ausgangsgleichungen in Zweitordarstellung Gl. (3.6.24) ergibt sich

$$U_1 = R_{11a}I_1 + (R_{12a} - R_{13a})I_2$$
  

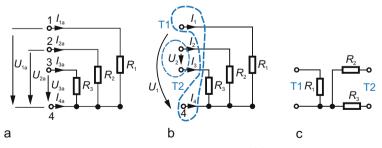
$$U_2 = (R_{21a} - R_{31a})I_1 + (R_{22a} + R_{33a} - R_{23a} - R_{32a})I_2$$

also

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11a} & R_{12a} - R_{13a} \\ R_{21a} - R_{31a} & R_{22a} + R_{33a} - R_{23a} - R_{32a} \end{pmatrix}.$$

Der Unterschied wird aus der konkreten Schaltung sichtbar

$$m{R}_{
m a} = \left( egin{array}{ccc} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 \end{array} 
ight)_{
m a}, \; m{R} = \left( egin{array}{ccc} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 + R_3 \end{array} 
ight).$$



**Abb. 3.6.8.** Mehrpolnetzwerk im Zweitorbetrieb. (a) Erdgebundener Mehrpol. (b) Wahl zweier Tore und damit Zuordnung der Strom-Spannungsbeziehungen. (c) Umgezeichnetes Netzwerk in Zweitordarstellung

Das in Abb. 3.6.8c entwickelte Zweitor hat keine Übertragungseigenschaften, weil die Koeffizienten  $R_{12}$ ,  $R_{21}$  verschwinden. Es diente lediglich als einfaches Netzwerk zur Erläuterung des Wandlungsverfahrens.

Das allgemeine 2n-Pol-Netzwerk wird zweckmäßig durch eine Knotenspannungsmatrix beschrieben, deren Koeffizienten aus den Mehrpolparametern zu bilden sind. Äußere Quellen können einbezogen werden. Interessiert am Mehrpol-/Mehrtornetzwerk das Verhalten nur zwischen zwei Toren (nicht benutzte Tore können mit allgemeinen Zweipolen belastet sein), so ist das Netzwerk durch ein Zweitor ersetzbar.

Bei Mehrtornetzwerken interessieren folgende *Fragestellungen*:

- wie gewinnt man die Übertragungseigenschaften zwischen ausgewählten Toren, z. B. am Eingang und Ausgang aus der allgemeinen Mehrpolbeschreibung? Der Extremfall ist die Reduktion auf eine Zweitorschaltung.
- wie erfolgt die Reduktion des Mehrpols auf eine kleinere Schaltung, durch Unterdrückung oder Verbindung von Schaltungsknoten?
- wie wird eine neue Bezugselektrode eines erdunsymmetrischen Mehrpols gewählt?

Alle Fälle erfordern entweder eine *Torgruppierung/-umgruppierung* oder eine *Klemmenmanipulation*. Sie kann die Analyse von Mehrpolnetzwerken deutlich vereinfachen.

## 3.6.4 Torgruppierung

Zur Überführung eines Mehrpolnetzwerkes in eine Zweitorform werden die beiden ins Auge gefassten Pole und ein Bezugsknoten herausgezogen (Abb. 3.6.9a), diesen Polen die Ziffern 0,1,2 zugeordnet und an beide Tore "Probestromquellen"  $I_{\rm q1}$  und  $I_{\rm q2}$  (symmetrische Zweitororientierung) angeschlossen. Wir unterscheiden deshalb zwischen den Knotenspannungen der Knotenleitwertmatrix, den zugehörigen Klemmenströmen ( $I_1$ ,  $I_2$ ) und den Klemmenspannungen des Ersatzzweitores:  $U_1 = U_1^{\rm K}$ ,  $U_2 = U_2^{\rm K}$ . Die restlichen Knotenspannungen interessieren nicht und die restlichen Ströme (außer  $I_1$ ,  $I_2$ ) werden zu null gesetzt: "Leerlauf" dieser Netzwerkklemmen (ebenso könnte Kurzschluss oder eine andere Belastung verfügt werden, s. u.).

 $<sup>^{22}\</sup>mathrm{Das}$ hochgestellte K bezieht sich auf das Knotenspannungsverfahren, das hier zugrunde liegt.

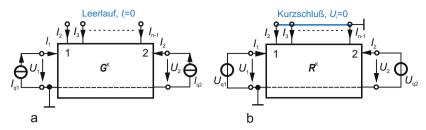


Abb. 3.6.9. Reduktion eines Mehrpolnetzwerkes auf ein Zweitornetzwerk. (a) Anwendung des Knotenspannungsverfahrens. (b) Anwendung des Maschenstromverfahrens

Ein n-Mehrpol (mit n-1 unabhängigen Klemmen) hat die Strom-Spannungsrelationen

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1(n-1)} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{(n-1)1} & G_{(n-1)2} & \dots & G_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^{K} \\ U_2^{K} \\ \vdots \\ U_{n-1}^{K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{q1} \\ I_{q2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(3.6.25a)
$$\boldsymbol{G}^{K}\boldsymbol{U}^{K} = \boldsymbol{I}^{K}$$
(3.6.25b)

mit verschwindenden Strömen  $I_3 \dots I_{n-1}$  außer  $I_{q1}$  und  $I_{q2}$  im Stromvektor. In dieser Schreibweise ist  $G^K$  die Knotenleitwertmatrix,  $U^K$  der Spaltenvektor der Knotenspannungen (Bezugspotenzial 0) und  $I^K$  der Spaltenvektor der Klemmenströme. Die Zwangsbedingungen zum Übergang auf das Zweitorlauten

$$U_1 = U_1^{\mathrm{K}}, \quad U_2 = U_2^{\mathrm{K}}, \quad I_1 = I_{\mathrm{q}1}, \quad I_2 = I_{\mathrm{q}2}.$$
 (3.6.26)

Wir lösen Gl. (3.6.25) mit der Bedingung Gl. (3.6.26) nach den Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  auf (Cramersche Regel) und erhalten zusammengefasst als Ergebnis die Zweitorwiderstandsmatrix  $\boldsymbol{R}$ 

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}}} \begin{pmatrix} \det_{11} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} & -\det_{21} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} \\ -\det_{12} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} & \det_{22} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{I}. \quad (3.6.27)$$

Hierein ist det  $G^{K}$  die Determinante von  $G^{K}$ , und det  $G^{K}_{ij}$  die Adjunkte zum Ort (i,j). Die Adjunkte (mit dem Vorzeichen  $(-1)^{i+j}$ , hier bereits berücksichtigt) ergibt sich als Determinante der Untermatrix von  $G^{K}$ , die durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte in der Ausgangsmatrix entsteht.

Das Ersatzzweitor des Mehrpolnetzwerkes wir durch eine Zweitorwiderstandsmatrix  ${\pmb R}$  nach Gl. (3.6.27) ausgedrückt, zu der alle Elemente der Knotenleitwertmatrix beitragen.

Als Ergebnis entsteht die *Widerstandsform*, obwohl von der Knotenleitwertmatrix des Mehrpols ausgegangen wurde. Die gesuchte Leitwertform als Lösung erfordert eine (aufwendige) Matrixinversion (für größere Netzwerke nur numerisch möglich). Schon ein 4-Knoten Netzwerk (+ Bezugsknoten) erfordert die Determinantenbildung von  $3\times3$ -Matrizen, praktisch die Grenze einer Handrechnung.

Für die 2 × 2-Widerstandsmatrix nach Gl. (3.6.27) kann die invertierte Lösung, also die neue Zweitorleitwertmatrix  $G = R^{-1}$  allgemein angegeben werden<sup>23</sup>

$$G = \frac{\det G^{K}}{\det_{11} G^{K} \det_{22} G^{K} - \det_{12} G^{K} \det_{21} G^{K}} \begin{pmatrix} \det_{22} G^{K} & \det_{21} G^{K} \\ \det_{12} G^{K} & \det_{11} G^{K} \end{pmatrix}.$$

$$(3.6.28)$$

Eine Alternative zur direkten Berechnung von G ist, die Maschenwiderstandsmatrix  $\mathbb{R}^{\mathbf{M}}$  des Mehrpolnetzwerkes als Ausgang zu wählen (Abb. 3.6.9b). Legt man an die Eingänge 0, 1, 2 die Probespannungen  $U_{q1}$ ,  $U_{q2}$  und setzt die restlichen Spannungen  $U_3 \dots U_{n-1}$  gleich null (das bedeutet Klemmenkurzschluss, oben Leerlauf!), so entsteht ein zu Gl. (3.6.25) analoges Gleichungssystem

$$\mathbf{R}^{\mathbf{M}}\mathbf{I}^{\mathbf{M}} = \mathbf{U}^{\mathbf{M}}.\tag{3.6.29}$$

Mit den entsprechend angepassten Zwangsbedingungen (analog zu Gl. (3.6.26)) ergibt sich dann ein der Gl. (3.6.27) entsprechendes Ergebnis für die Zweitorleitwertmatrix G (in Gl. (3.6.27) muss  $G^{\rm K}$  gegen  $R^{\rm M}$  ausgetauscht werden, ebenso R gegen G und wechselseitig Ströme gegen Spannungen). Auch wenn sich jetzt die Zweitorleitwertmatrix direkt ergibt, so bleibt die aufwendige Determinantenauswertung.

Beispiel 3.6.7 Abzweigschaltung Die Leitwertmatrix  $G^K$  der Abzweigschaltung Abb. 3.6.10 kann der Schaltung direkt entnommen werden

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} G_1 + G_2 & 0 & -G_2 \\ 0 & G_4 + G_5 & -G_4 \\ -G_2 & -G_4 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix}.$$

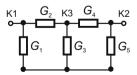


Abb. 3.6.10. Knotenunterdrückung an einem Netzwerk

<sup>&</sup>lt;sup>23</sup>Nach dem Determinantensatz gilt  $\det_{11} G^K \det_{22} G^K - \det_{12} G^K \det_{21} G^K = \det_{12,12} G^K \det G^K$ .

Die für Gl. (3.6.28) erforderlichen Unterdeterminanten zur Matrix G lauten

$$\begin{aligned} \det_{11} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} &= G_2(G_4 + G_5) + G_3G_4 + (G_3 + G_4)G_5, \\ \det_{12} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} &= \det_{21} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} = -G_2G_4 \\ \det_{22} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} &= G_1(G_2 + G_3) + G_2G_3 + (G_1 + G_2)G_4, \\ \frac{\det \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}}}{\det_{11} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} \det_{22} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} - \det_{12} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}} \det_{21} \boldsymbol{G}^{\mathrm{K}}} &= \frac{1}{G_2 + G_3 + G_4}. \end{aligned}$$

Damit ist die Leitwertmatrix G nach Gl. (3.6.28) bestimmt. Die Unterdeterminanten sind leicht nachzuvollziehen:  $\det_{11} G^K$ : Streichen der ersten Zeile und Spalte und Ausrechnung der Unterdeterminante  $\rightarrow ((G_4 + G_5)(G_2 + G_3 + G_4) - G_4^2)$ ,  $\det_{12} G^K$ : Streichung der 1. Zeile und 2. Spalte:  $-G_2G_4$  usw.  $\det_{12,12} G^K$  ist die Unterdeterminante, die durch Streichen der 1. und 2. Zeile und 1. und 2. Spalte entsteht. Die Richtigkeit lässt sich durch Direktberechnung des Eingangskurzschlussleitwertes  $\tilde{Y}_{11}$  oder des Transferleitwertes  $\tilde{Y}_{21}$  überprüfen.

Die Reduktion des Mehrpols auf ein Zweitor erfolgte durch *Unterdrückung aller nichtbenutzten Klemmen* (Nullsetzen der Klemmenströme/Leerlauf), was den Aufwand der Determinantenberechnung verursacht. Zwei Auswege bieten sich an:

- man unterdrückt nur einen Klemmenstrom, berechnet eine neue Knotenleitwertmatrix und wiederholt das Verfahren schrittweise solange, bis nur noch die Knoten der gesuchten neuen Zweitordarstellung übrig bleiben.
- in allgemeinerer Form werden diese Teilschritte durch Bildung von zwei Torgruppen zusammengefasst: die zugänglichen (des beabsichtigten neuen Zweitores) und die unzugänglichen, deren Verhalten im Zweitor nicht auftreten soll. Das Verfahren heißt Schaltungsreduktion durch *Torgruppierung*.

Beispiel 3.6.8 Torgruppierung An einem Zweitor (Knotenleitwertmatrix  $G^{K}$ ) sei das Verfahren erläutert. Zur Überführung in einen Zweipol mit den Klemmengrößen  $U_1$ ,  $I_1$  muss der Klemmenstrom  $I_2$  unzugänglich sein: Knoten 2 wird so zum "unterdrückten" Knoten und sein Strom darf nicht auftreten. Weil in eine unzugängliche Klemme 2 kein Strom eingespeist werden kann, gilt  $I_2 = 0$  und damit lauten die ursprünglichen Zweitorgleichungen

$$\begin{split} I_1^{\mathrm{K}} &= G_{11}^{\mathrm{K}} U_1^{\mathrm{K}} + G_{12}^{\mathrm{K}} U_2^{\mathrm{K}}, \\ I_2^{\mathrm{K}} &= I_2 = 0 = G_{21}^{\mathrm{K}} U_1^{\mathrm{K}} + G_{22}^{\mathrm{K}} U_2^{\mathrm{K}} \end{split} \qquad \rightarrow U_2^{\mathrm{K}} = -G_{21}^{\mathrm{K}} U_1^{\mathrm{K}} / G_{22}^{\mathrm{K}}. \end{split}$$

Ersetzen von  $U_2$  im verbleibenden Strom des Knotens 1 führt auf  $I_1^{\rm K}=G_{11}^{\rm K}U_1^{\rm K}+G_{12}^{\rm K}U_2^{\rm K}$  für die gesuchte neue Zweipolform  $(I_1=I_1^{\rm K},\,U_1=U_1^{\rm K})$ 

$$I_1 = G_{11}U_1 = \left(G_{11}^{\mathrm{K}} - \frac{G_{12}^{\mathrm{K}}G_{21}^{\mathrm{K}}}{G_{22}^{\mathrm{K}}}\right) \cdot U_1,$$

also auf den Eingangsleerlaufleitwert  $G_{11}=1/R_{11}$ . Damit wird das Zweitor am Knoten 1 durch einen Zweipol (mit dem Eingangsleerlaufleitwert  $I_1/U_1$  bei  $I_2=0$ ) ersetzt bedingt durch Unterdrückung des Ausgangsknotens. Die zweite Möglichkeit der Überführung eines Zweitors in einen Zweipol ist die Verbindung der Knoten 1 und 2.

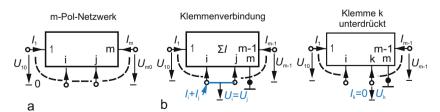
#### **②** 3.6.5 Klemmenmanipulationen

Zum Betrieb eines Mehrtornetzwerkes zwischen zwei Toren (Quelle und Lastelement) muss es schrittweise in ein Zweitor überführt werden. Das ist gleichbedeutend mit einer *Reduktion der Klemmenzahl* auf jene, deren *U, I*-Verhalten interessiert. Wir legen ein Netzwerk mit *m Klemmen* (nicht Toren!, Abb. 3.6.11a) zugrunde und beschreiben es durch eine Knotenleitwertform sinngemäß vom Typ Gl. (3.3.26). Der Bezugspunkt der Knotenspannungen sei zunächst *kein* Netzwerkknoten, damit ist die Matrix unbestimmt. Folgende Klemmenmanipulationen sind üblich:

Klemmenerdung Bei Wahl einer Klemme als Bezugspunkt ist die entsprechende Zeile und Spalte in der Leitwertmatrix Gl. (3.3.26) zu streichen. Dann sind alle Knotenspannungen auf diesen Knoten bezogen.

Klemmenverbindung Ein erdunsymmetrischer Mehrpol mit n Klemmen, also n-1 unabhängigen Klemmen hat eine Knotenleitwertmatrix G der Dimension  $(n-1)\times(n-1)$ . Werden zwei Klemmen (widerstandslos) verbunden, so stimmen ihre Knotenspannungen überein und der Gesamtstrom in die "Ersatzklemme" ist die Summe beider Klemmenströme. Wir verbinden die Klemmen i und j (Abb. 3.6.11b). Die Spannungsgleichheit verlangt die Addition der Leitwertelemente der Spalte j zu denen der Spalte i (dann Spalte i) streichen). Anschließend wird für die neue Stromsumme die Zeile i zu Zeile i addiert und Zeile i gestrichen

mit  $\sum G_{i+j} = G_{ii} + G_{ji} + G_{ji} + G_{jj}$ . Die neue Matrix hat so eine Zeile und Spalte weniger und anstelle des alten Koeffizienten  $G_{ii}$  tritt ein umfangreicherer auf. Ebenso gibt es Beiträge zu den übrigen Koeffizienten.



**Abb. 3.6.11.** Klemmenmanipulationen am Mehrpolnetzwerk. (a) Allgemeine Anordnung. (b) Knotenverbindung durch Kurzschluss der Klemmen i und j. (c) Unterdrückung des Knotens k

Beispiel 3.6.9 Dreipol An einem Dreipol mit drei unabhängigen Klemmen 1, 2, 3 und dem Strom-Spannungssystem

$$\begin{array}{cccc} & & U_1 & U_2 & U_3 \\ 1 & \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

werden die Knoten 2 und 3 zum neuen Knoten p verbunden. Das bedingt gleiche Knotenspannungen  $U_{k2}=U_{k3}=U_p$  und die Stromsumme  $I_p=I_2+I_3$ . Die Spannungsgleichheit führt zunächst auf

1:  $G_{11}U_1 + (G_{12} + G_{13})U_p = I_1$ 2:  $G_{21}U_1 + (G_{22} + G_{23})U_p = I_2$ 3:  $G_{31}U_1 + (G_{32} + G_{33})U_p = I_3$ .

Werden die Ströme  $I_2$  und  $I_3$ , also die letzten beiden Gleichungen zum neuen Strom  $I_p$  addiert, so verbleibt

1: 
$$G_{11}U_1 + (G_{12} + G_{13})U_p = I_1$$
  
p:  $(G_{21} + G_{31})U_1 + (G_{22} + G_{23} + G_{32} + G_{33})U_p = I_2 + I_3 = I_p$ .

Damit lautet das Ergebnis der Klemmenverbindung 2 und 3 in Matrixschreibweise

$$\begin{array}{ccc} & U_1 & U_p \\ 1 & G_{11} & G_{12} + G_{13} \\ p & G_{21} + G_{31} & G_{22} + G_{23} + G_{32} + G_{33} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} U_1 \\ U_p \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} I_1 \\ I_p \end{array} \right).$$

Die Verbindung zweier Klemmen führt zur Addition der entsprechenden Zeilen und Spalten und Streichung einer der beiden Zeilen und Spalten.

So reduziert sich beispielsweise ein Zweitor zum Eintor (Zweipol) bei Verbindung der Klemmen 1, 2, also des Ein- und Ausgangs mit dem Ersatzleitwert  $G_{1ers}$ :  $G_{1ers} = G_{11} + G_{12} + G_{21} + G_{22}$ . Eine so verbundene spannungsgesteuerte Stromquelle kann dann, abhängig vom Vorzeichen, zum negativen Widerstand werden. Darauf wurde schon im Beispiel 2.6.16 im Zusammenhang mit gesteuerten Quellen verwiesen.

Klemmeneinbezug (als interner Knoten) Soll eine Klemme eines Netzwerkes "einbezogen" werden, also verschwinden, so fließt über sie nach außen kein Strom (I=0) und die zugehörige Knotenspannung darf in der Knotenleitwertmatrix nicht mehr auftreten. Deshalb muss die Knotenspannung aus allen restlichen Gleichungen eliminiert werden.

Wird beispielsweise an einem Zweitor die Ausgangsklemme 2 unterdrückt, so bedeutet das ausgangsseitig Leerlauf ( $I_2 = 0$ ) und Eliminierung von  $U_2$ . Übrig bleibt schließlich ein Eintor (Zweipol zwischen Klemmenpaar 1.

Soll an einem Mehrpol der Knoten k verschwinden (Abb. 3.6.11c), so ist in Zeile k der Strom  $I_k = 0$  zu setzen, dann aus dieser Zeile die Knotenspannung  $U_k$  zu berechnen, in Spalte k zu eliminieren und anschließend Zeile und Spalte

k in der Knotenleitwertmatrix zu streichen. Im Ergebnis tritt anstelle des Matrixelementes  $G_{ij}$  das neue Element

$$G_{ij}|_{\text{neu}} = G_{ij} - \frac{G_{ik}G_{kj}}{G_{kk}}$$
 (3.6.30)

in Zeile i und Spalte j auf, m. a. W. muss zum originären Eintrag  $G_{ij}$  noch jeweils  $-G_{ik}G_{kj}/G_{kk}$  addiert werden. Dabei ist  $G_{kk}$  das Element der Zeile und Spalte k,  $G_{ik}$  das Element der Spalte k und Zeile i,  $G_{kj}$  das Element der Zeile k und Spalte j. Damit bei dieser Unterdrückung in der Matrix keine Indizes zu ändern sind, sollte der zu eliminierende Knoten in der Knotenleitwertmatrix als letzter Knoten stehen.

Bei Unterdrückung eines Knotens verschwindet dessen Strom in der Knotenleitwertmatrix (Streichen der zugehörigen Zeile), seine Knotenspannung wird eliminiert (Streichen der zugehörigen Spalte) und alle übrigen Elemente erhalten einen Zusatz solcher Größe, dass die Leerlaufbedingung am unterdrückten Knoten aufrecht erhalten bleibt.

Bei schrittweiser Wiederholung lassen sich mehrere Knoten eliminieren.

Beispiel 3.6.10 Knotenunterdrückung In einem Mehrpol mit vier Klemmen (davon einer als Masseknoten nach Abb. 3.6.11c, m=4) soll der letzte Knoten m-1=3 eliminiert werden. Es gibt deshalb die Klemmengrößen  $U_1 \dots U_3$  und  $I_1 \dots I_3$  mit  $I_3=0$ . Ausgang ist das Knotengleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c} & U_1 & U_2 & U_3 \\ 1 & \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ \hline G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \mathcal{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \mathcal{V}_3 \end{pmatrix}.$$

Zunächst muss der Strom des zu eliminierenden Knotens verschwinden

$$I_3 = 0 = G_{31}U_1 + G_{32}U_2 + G_{33}U_3 \rightarrow -U_3 = \frac{1}{G_{33}} (G_{31}U_1 + G_{32}U_2).$$

Anschließend wird die zugehörige Knotenspannung  $U_3$  in allen restlichen Gleichungen eliminiert (also in der gesamten Spalte). Das Ergebnis lautet

$$\begin{split} I_1 &= G_{11}U_1 + G_{12}U_2 - \frac{G_{13}G_{31}}{G_{33}}U_1 - \frac{G_{13}G_{32}}{G_{33}}U_2 \\ &= \left(G_{11} - \frac{G_{13}G_{31}}{G_{33}}\right)U_1 + \left(G_{12} - \frac{G_{13}G_{32}}{G_{33}}\right)U_2 \\ I_2 &= G_{21}U_1 + G_{22}U_2 - \frac{G_{23}G_{31}}{G_{33}}U_1 - \frac{G_{23}G_{32}}{G_{33}}U_2 \\ &= \left(G_{21} - \frac{G_{23}G_{31}}{G_{33}}\right)U_1 + \left(G_{22} - \frac{G_{23}G_{32}}{G_{33}}\right)U_2. \end{split}$$

Jeder Matrixkoeffizient wird nach Gl. (3.6.30) durch einen neuen Koeffizienten ersetzt.

Beispiel 3.6.11 Knotenunterdrückung Für die Abzweigschaltung Abb. 3.6.10 soll die Knotenleitwertmatrix durch Unterdrückung des Knotens 3 in eine Zweitorform überführt werden.

Die Knotenleitwertmatrix wird aus der Schaltung abgelesen bzw. vom Beispiel 3.6.7 übernommen. Der zu unterdrückende Knoten 3 steht in der letzten Zeile/Spalte:

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} G_1 + G_2 & 0 & -G_2 \\ 0 & G_4 + G_5 & -G_4 \\ \hline -G_2 & -G_4 & G_2 + G_3 + G_4 \end{pmatrix}.$$
(3.6.31)

Für sein Verschwinden (Mutation zum inneren Knoten) muss  $I_3 = 0$  gelten. Dafür folgt aus der dritten Zeile  $G_{33}U_3 = -(G_{31}U_1 + G_{32}U_2)$ . Auflösen nach der Spannung  $U_3$  und Einsetzen in die Gleichungen der Ströme  $I_1$ ,  $I_2$  führt auf

$$\begin{pmatrix} G_{11} - \frac{G_{13}G_{31}}{G_{33}} & G_{12} - \frac{G_{13}G_{32}}{G_{33}} \\ G_{21} - \frac{G_{23}G_{31}}{G_{33}} & G_{22} - \frac{G_{23}G_{32}}{G_{33}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{GU} = \boldsymbol{I}$$

mit der neuen Zweitorleitwertmatrix

$$\begin{split} \boldsymbol{G} &= \; \left( \begin{array}{cc} G_1 + G_2 & 0 \\ 0 & G_4 + G_5 \end{array} \right) + \frac{-1}{\sum} \left( \begin{array}{c} G_2 \\ G_4 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{cc} G_2 & G_4 \end{array} \right), \\ &= \; \left( \begin{array}{cc} G_1 + G_2 - \frac{G_2^2}{\sum} & -\frac{G_2 G_4}{\sum} \\ -\frac{G_2 G_4}{\sum} & G_4 + G_5 - \frac{G_4^2}{\sum} \end{array} \right), \quad \sum = G_2 + G_3 + G_4. \end{split}$$

Das sind aber die Einzelterme, die nach der Bildungsregel der Knotenunterdrückung Gl. (3.6.30) anfallen. Die Multiplikation der Spalten- und Zeilenvektoren gibt vier Matrixkoeffizienten, die zu den entsprechenden Gliedern der neuen Matrix ergänzt werden. (Eine Kontrolle könnte z. B. durch Direktberechnung der Zweitorkoeffizienten aus der Schaltung, etwa für  $G_{11}$  erfolgen).

**Verallgemeinerte Knotenunterdrückung** Das Verfahren zur Unterdrückung eines Knotens lässt sich auf mehrere Knoten erweitern, wenn die m=n-1 Klemmen eines erdunsymmetrischen Mehrpols unterteilt werden in z zugängliche Knoten und den unzugänglichen Rest (Index u). Die Gesamtzahl beträgt z+u=m=n-1. Bekannt sei die Knotenleitwertmatrix

$$\begin{pmatrix}
I_{1} \\
I_{2} \\
\vdots \\
I_{i} \\
I_{m}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1i} & G_{1j} & \dots & G_{1m} \\
G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2i} & G_{2j} & \dots & G_{2m} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
G_{i1} & G_{i2} & \dots & G_{ii} & G_{ij} & \dots & G_{im} \\
G_{j1} & G_{j2} & \dots & G_{ji} & G_{jj} & \dots & G_{jm} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
G_{m1} & G_{m2} & \dots & G_{mm} & G_{mj} & \dots & G_{mm}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
U_{1} \\
U_{2} \\
\vdots \\
U_{i} \\
U_{j} \\
\vdots \\
U_{m}
\end{pmatrix} . (3.6.32)$$

Im Mehrpol sollen die Klemmen  $j=i+1\dots m$  unterdrückt werden, was eine entsprechende Unterteilung der Knotenleitwertmatrix zur Folge hat. Die zu unterdrückenden Ströme müssen je verschwinden:  $I_j \dots I_m = 0$ . Dabei entsteht an jedem

Knoten eine entsprechende Knotenspannung und die so berechneten Knotenspannungen  $U_j \dots U_m$  werden in den restlichen Gleichungen eliminiert. In Matrixform lautet die Gl. (3.6.32) (mit entsprechenden Untermatrizen)

$$I = \begin{pmatrix} I_{z} \\ I_{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{z} \\ U_{u} \end{pmatrix} \rightarrow I_{z} = G_{11}|_{\text{neu}} U_{z}.$$
(3.6.33)

Die gesuchte neue Knotenleitwertmatrix der klemmenunterdrückten Schaltung ergibt sich aus der Bedingung

$$I_{11} = \mathbf{0} = G_{21}U_{2} + G_{22}U_{11} \rightarrow U_{11} = -G_{22}^{-1}G_{21}U_{2}$$
 (3.6.34)

und durch Eliminieren der unzugänglichen Spannungen  $U_{\mathrm{u}}$  schließlich zu

$$I_{z} = G_{11 \text{ neu}} U_{z} = (G_{11} - G_{12} G_{22}^{-1} G_{21}) U_{z}.$$
 (3.6.35a)

Die Untermatrizen lauten

$$\boldsymbol{G}_{11} = \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{i1} & \dots & G_{ii} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_{12} = \begin{pmatrix} G_{1j} & \dots & G_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{ij} & \dots & G_{im} \end{pmatrix}$$
(3.6.35b)

usw. Damit ist das Problem gelöst. Die Schwierigkeit besteht eher in der Auswertung: es werden Multiplikation und Inversion von Matrizen erforderlich, die schon bei kleinen Netzwerken nur numerisch durchführbar sind.

Für das Beispiel 3.6.10 eines Dreipols (m=3), dessen Klemme 3 unterdrückt werden soll, lauten die Teilmatrizen

$$G_{11} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}, G_{12} = \begin{pmatrix} G_{13} \\ G_{23} \end{pmatrix}, G_{21} = \begin{pmatrix} G_{31} & G_{32} \end{pmatrix}, G_{22} = G_{33}.$$

Die Lösung erfordert die Bildung von

$$G_{12}G_{21} = \begin{pmatrix} G_{13} \\ G_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_{31} & G_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{13}G_{31} & G_{13}G_{32} \\ G_{23}G_{31} & G_{23}G_{32} \end{pmatrix}$$

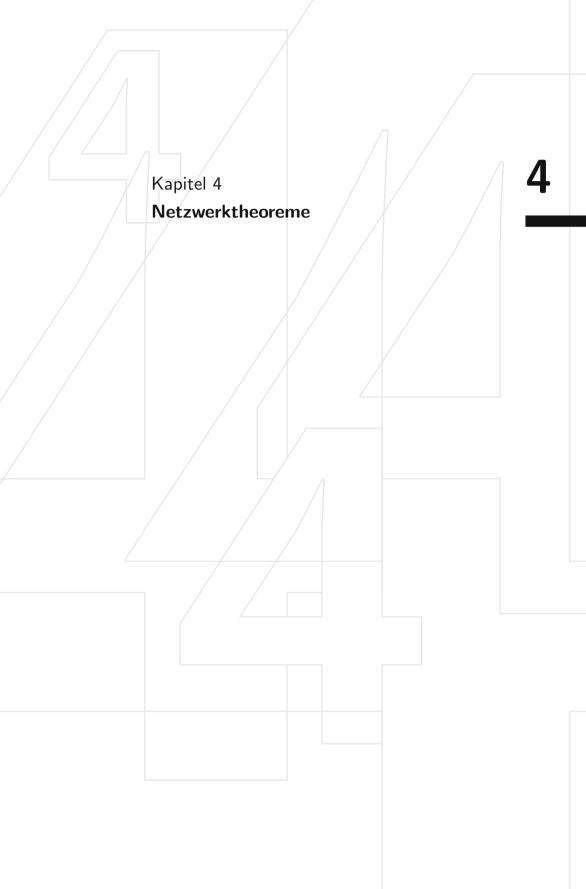
und  $G_{22}^{-1} = \frac{1}{G_{23}}$ . Daraus ergibt sich als neue Matrix (s. o.)

$$\left. \boldsymbol{G}_{11} \right|_{\mathrm{neu}} = \left( \begin{array}{ccc} G_{11} - \frac{G_{13}G_{31}}{G_{33}} & G_{12} - \frac{G_{13}G_{32}}{G_{33}} \\ G_{21} - \frac{G_{23}G_{31}}{G_{23}} & G_{22} - \frac{G_{23}G_{32}}{G_{23}} \end{array} \right).$$

Netzwerkmanipulationen dienen der Netzwerkvereinfachung (Torunterdrückung an Drei- und Viertornetzwerken, Stern-Dreieckumwandlung, Zusammenschaltung von Zweitoren mit externen Elementen, Drehstromnetze). Weil sie bei voll besetzter Matrix rasch aufwendig werden, beschränken sich die Verfahren bei Handauswertung auf kleine Netzwerke. Für die numerische Bearbeitung größerer Netzwerke gibt es effiziente Verfahren, sodass diese Vereinfachungen durchaus Anwendung finden.

#### Selbstkontrolle Kapitel 3

- 1. Welche Gleichungen sind zur Analyse eines Netzwerkes erforderlich?
- 2. Wie kann der Aufwand bei der Lösung der Netzwerkgleichungen gesenkt werden?
- 3. Erläutern Sie die Maschenstromanalyse (Ansatz, Vorteile, Aufstellung der Gleichungen, Gewinnung der Netzwerkmatrix).
- 4. Wie können die m linear unabhängigen Maschengleichungen eines Netzes gefunden werden?
- 5. Was ist der Unterschied zwischen Maschen- und Zweigstrom, wie kann ein Maschenstrom gemessen werden?
- 6. Welcher Unterschied besteht zwischen der Schleifen- und Maschenanalyse?
- 7. Erläutern Sie die Knotenspannungsanalyse (Methodik, Ansatz, Vorteile, Aufstellung der Gleichungen, Gewinnung der Netzwerkmatrix).
- 8. Wann muss zur Gewinnung der Netzwerkgleichungen ein Baum des Netzwerkes entworfen werden?
- 9. Was bedeuten die Begriffe Koppelwiderstand und Koppelleitwert?
- 10. Welcher Unterschied besteht zwischen Knoten- und Zweigspannung?
- 11. Können Maschenstrom und Knotenspannungsanalyse auf folgende Netzwerke angewendet werden: mit nichtlinearen Elementen, mit Energiespeichern?
- 12. Wie können ideale Spannungsquellen in die Knotenspannungsanalyse einbezogen werden?
- 13. Erklären Sie die Begriffe Superknoten, Supermasche.
- 14. Sind Knotenspannungs- und Schnittmengenanalyse identisch?
- 15. Erläutern sie die Anwendung des Knotenspannungsverfahrens zur Bestimmung der Ersatzzweipolparameter eines Netzwerkes.
- 16. Ist es richtig, dass jede ideale Stromquelle beim Maschenstromverfahren und jede ideale Spannungsquelle beim Knotenspannungsverfahren jeweils das Gleichungssystem um eine Gleichung reduziert?
- 17. Wie kann die Knotenspannungsanalyse in Netzwerken mit gesteuerten Quellen eingesetzt werden?
- 18. Wie viele unabhängige U, I-Beziehungen kennzeichnen einen n-Pol?
- 19. Erläutern Sie die Begriffen Knoten-Zweig- und Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix.
- 20. Wie kann die Zahl der Pole eines Mehrpols um einen Pol reduziert werden (Beispiele Vierpol, Dreipol)?



4	Netzwerktheoreme	3/1
4.1	Ähnlichkeitssatz	371
4.2	Versetzungs- und Teilungssatz idealer Quellen	372
4.3	Reziprozitäts-Theorem, Umkehrsatz	374
4.4	Veränderung von Zweipolen durch gesteuerte Quellen,	
	Miller-Theorem	376
4.5	Äquivalente Netzwerke*	381
4.6	Duale Netzwerke*	383
4.7	Leistung in elektrischen Netzwerken. Tellegen-Theorem*	387

# 4 Netzwerktheoreme

Ziel Nach Durcharbeit dieses Kapitels sollten beherrscht werden:

- Kenntnis der wichtigsten Netzwerktheoreme,
- Sätze zur Quellenversetzung und -teilung, selbstgesteuerte Quellen,
- Reziprozitätsbegriff und seine Anwendung,
- Verständnis äquivalenter und dualer Netzwerke,
- Leistungsbegriff in Netzwerken, Tellegen-Theorem.

**Einführung** Bei großen Netzwerken steigt der Analyseaufwand rasch. Durch Hilfssätze oder *Netzwerktheoreme* können oft Vereinfachungen erzielt werden, wie Überlagerungssatz, Zweipoltheorie oder Stern-Dreieck-Umwandlung zeigten. Alle sind Netzwerktheoreme, sie wurden aber aus Zweckmäßigkeitsgründen vorgezogen. In diesem Kapitel werden weitere Theoreme erläutert. Wenn dabei mitunter auf Wechselstrombeziehungen vorgegriffen werden muss, so sollten diese Teile zunächst überlesen werden und die Durcharbeit später erfolgen.

## 4.1 Ähnlichkeitssatz

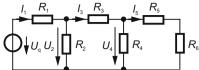
Enthält ein lineares Netzwerk nur eine unabhängige Quelle, so können alle Zweigströme außer über die bisherigen Analyseverfahren auch durch schrittweises Rückrechnen, also rekursive Berechnung (mit den Knoten- und Maschensätzen) aus einer bekannten oder angenommenen Lösung gewonnen werden: Vorgabe des gesuchten Zweigstromes  $I_{\rm a}$  und schrittweise Bestimmung aller übrigen Zweigströme und -spannungen in Richtung auf die Quelle und zuletzt der Quellenspannung  $U_{\rm qa}$  (oder des Quellenstromes  $I_{\rm qa}$ ), die (der) erforderlich wäre, um den angenommenen Strom  $I_{\rm a}$  zu verursachen.

In linearen Netzwerken steht ein gesuchter Zweigstrom  $I_r$  zur tatsächlich wirkenden Quellengröße  $U_{\rm qr}$ ,  $I_{\rm qr}$  im gleichen Verhältnis wie der gleiche angenommene Strom  $I_{\rm a}$  zur zugehörigen berechneten Quelle  $U_{\rm qa}$ ,  $I_{\rm qa}$ 

$$\frac{I_{\rm r}}{I_{\rm a}} = \frac{U_{\rm qr}}{U_{\rm qa}}.$$
 Ähnlichkeitssatz (4.1.1)

Der Ähnlichkeitssatz ist eine logische Konsequenz linearer Netzwerke. Er lässt sich bei mehreren Quellen zusammen mit dem Überlagerungssatz einsetzen:





Man berechnet zunächst jede einzelne Wirkung mit dem Ähnlichkeitssatz und überlagert anschließend alle Ergebnisse.

Der Ähnlichkeitssatz eignet sich vor allem zur Kontrolle numerischer Ergebnisse und ist bei Abzweigschaltungen einfach durchführbar.

Beispiel 4.1.1 Ähnlichkeitssatz Im Netzwerk Abb. 4.1.1 sei der Strom  $I_5$  gesucht. Abgesehen davon, dass sich diese Aufgabe hier direkt leicht lösen lässt, benutzen wir den Ähnlichkeitssatz und nehmen  $I_{\rm a}=I_5=1\,{\rm A}$  als Lösung an. Dann beträgt der Spannungsabfall  $U_4=I_5(R_5+R_6)=40\,{\rm V}$  und der Strom  $I_3=U_4/R_4+I_5=2,33\,{\rm A}$ . Damit wird  $U_2=I_3R_3+U_4=23,3\,{\rm V}+40\,{\rm V}=63,3\,{\rm V}$ . Schließlich folgt  $I_1=U_2/R_2+I_3=2,11\,{\rm A}+2,33\,{\rm A}=4,44\,{\rm A}$ . Das ergibt  $U_{\rm qa}=I_1R_1+U_2=107,7\,{\rm V}$ . Nach dem Ähnlichkeitssatz (4.4.1) gilt  $I_5=I_{\rm r}=U_{\rm qr}$  ( $I_{\rm a}/U_{\rm qa}$ ) = 0,093 A.

# 4.2 Versetzungs- und Teilungssatz idealer Quellen

Gelingt in Netzwerken eine Verschiebung idealer Quellen in Bereiche mit einem Widerstand, so wird die Wandlung Spannungs- ↔ Stromquelle möglich und die Analyse vereinfacht sich u. U. Solange dabei die Kirchhoffschen Gesetze eingehalten werden, ändert sich am Gesamtzustand des Netzwerkes nichts. Darauf basieren der Versetzungssatz idealer Spannungsquellen und der Teilungssatz idealer Stromquellen.

Versetzungssatz idealer Spannungsquellen Wir betrachten die Schaltung in Abb. 4.2.1a und fragen nach den Auswirkungen bei Verschiebung der idealen Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  über den Knoten K1 hinweg z.B. in Reihe zu  $R_2$ : In Masche M1 gilt der Maschensatz unverändert und die Verschiebung hat keine Auswirkung. In Masche M2 würde aber eine Quellenspannung auftreten, die vor der Verschiebung nicht vorhanden war. Diesen Fehler korrigiert die Einfügung der gleichen Spannungsquelle  $U_{\rm q}$  in Reihe zu  $R_3$ . Dann gilt für den Umlauf in M2 wieder richtig  $-U_{\rm q}+I_3R_3-I_2R_2+U_{\rm q}=0$ . In einer Masche können damit an jeder Stelle ideale Spannungsquellen so eingeführt werden, dass sich die Gesamtspannung nicht ändert. Daraus folgt der Versetzungssatz idealer Spannungsquellen:

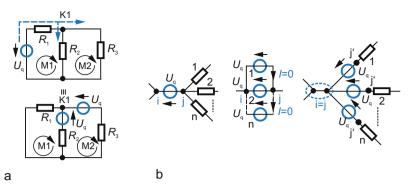


Abb. 4.2.1. Versetzungssatz idealer Spannungsquellen. (a) Verschiebung einer Spannungsquelle im Netzwerk über einen Knoten. (b) Allgemeine Verschiebung einer Spannungsquelle über einen Knoten in mehrere angeschlossene Zweige

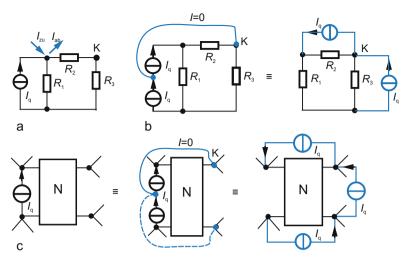
Beim Verschieben einer idealen Spannungsquelle über einen Knoten ist in allen benachbarten Zweigen die gleiche Spannung (in gleicher Richtung) anzubringen. Das Gesamtverhalten des Netzwerkes bleibt unverändert.

Abb. 4.2.1b zeigt eine zwischen den Knoten i und j liegende ideale Spannungsquelle. Um sie über den Knoten j zu verschieben, schalten wir zunächst n gleiche Spannungsquellen parallel (für gleiche ideale Spannungsquellen erlaubt) und trennen die Verbindungen am Knoten j auf. Sie sind stromlos, da auf gleichem Potenzial liegend. Der alten Knoten j wird so zum neuen Knoten j' und j verschmilzt mit Knoten i: die Quelle ist in die angeschlossenen Zweige verschoben und tritt in jedem Zweig auf. Durch die Verschiebung der Quelle in Zweige mit Widerständen ist eine Wandlung in Stromquellen möglich.

Teilungssatz idealer Stromquellen Dieser Satz ist das Analogon zum Verschiebungssatz von Spannungsquellen. Wird einem Knoten ein zusätzlicher Strom  $I_{zu}$  zu und gleichzeitig wieder weggeführt ( $I_{ab} = I_{zu}$ ), so ändert sich die Knotenbilanz nicht (Abb. 4.2.2a). Beachtet man zusätzlich die Stromkontinuität (s. Gl. (1.4.6)), die den Ersatz einer Stromquelle  $I_q$  durch eine Reihenschaltung mehrerer, gleich großer und gleich gerichteter Stromquellen erlaubt (Abb. 4.2.2b) ( $I_{q1} = I_{q2} = I_q$ ), so ergibt sich der Teilungssatz idealer Stromquellen:

Eine ideale Stromquelle lässt sich verlagern durch Unterteilung in eine Reihenschaltung mehrerer gleichgroßer, gleichgerichteter idealer Stromquellen, deren Verbindungsknoten mit beliebigen Knoten eines Netzwerkes verknüpft werden. Das Gesamtverhalten des Netzwerkes bleibt unverändert.

Dies zeigt Abb. 4.2.2c am Knoten K. Die Verbindung zwischen der unterteilten Stromquelle und dem weiteren Netzwerkknoten ist stromlos. Deshalb ändert sich das Netzwerkverhalten nicht. Die so "verschobenen" Stromquellen können mit den



**Abb. 4.2.2.** Teilungssatz idealer Stromquellen. (a) Netzwerk mit Stromquelle. (b) Teilung einer idealen Stromquelle im Netzwerk über einen Knoten K. (c) Verallgemeinerung der Quellenteilung im Netzwerk

jetzt parallel liegenden Zweigwiderständen in Spannungsquellen überführt werden. Die Stromquellenteilung ist auch über mehrere Knoten möglich, wie im Bild dargestellt.

Die Teilungs- und Verschiebungssätze sind wichtige Hilfsmittel für die Netzwerkanalyse, die auch auf gesteuerte Quellen unter der Voraussetzung einer unveränderten Steuergröße anwendbar sind.

# 4.3 Reziprozitäts-Theorem, Umkehrsatz

Reziprozität (Umkehr-, Austauschbarkeit) ist eine verbreitete Eigenschaft physikalischer Systeme. Man versteht darunter als Axiom:

Werden in einem physikalischen System Ursache und Wirkung vertauscht, so zeigt ein reziprokes System bei gleicher Ursache die gleiche Wirkung (Reziprozitätstheorem).

Wir betrachten ein lineares, quellenfreies Netzwerk aus passiven Elementen. Ursache und Wirkung sind Ströme und/oder Spannungen in zwei herausgegriffenen Zweigen (Abb. 4.3.1). Ein Netzwerk ist reziprok (umkehrbar), wenn eine Spannung  $U_1$  (Ursache) im (beliebigen) Zweig 1 im Zweig 2 den Kurzschlussstrom  $I_{2k}$  (Wirkung) und umgekehrt die Spannung  $U_2$  im Zweig 2 (Ursache) im Zweig 1 den Kurzschlussstrom  $I_{1k}$  verursacht und sich die Kurzschlussströme umgekehrt wie die Spannungen verhalten:

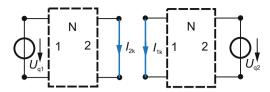


Abb. 4.3.1. Reziprozitätstheorem am Beispiel eins Netzwerkes mit Spannungsquelle als Ursache und dem Strom als Wirkung

$$\frac{U_{\rm q1}}{I_{\rm 2k}} = \frac{U_{\rm q2}}{I_{\rm 1k}}, \quad {\rm analog} \quad \frac{U_{\rm 2l}}{I_{\rm q1}} = \frac{U_{\rm 1l}}{I_{\rm q2}}. \qquad {\rm Reziprozit\"{a}tsbedingung} \ (4.3.1)$$

Weil auch eine Stromquelle Ursachengröße im Zweig 1 und im Zweig 2 eine Leerlaufspannung die gesuchte Wirkung sein können, enthält Gl. (4.3.1) noch die analoge Formulierung für die Stromquellenerregung (Abb. 4.3.1).

Verallgemeinert: eine Quelle (Ursache) in einem Zweig m eines reziproken Netzwerkes hat in einem anderen Zweig n die gleiche Wirkung wie die gleiche Quelle im Zweig n auf den Zweig m (Austauschprinzip für Spannungs- oder Stromquellen).

Die Reziprozitätsbedingung (4.3.1) für ein Netzwerk mit zwei herausgegriffenen Zweigen entspricht der Auffassung vom Zweitor: deshalb gilt die Reziprozitätsbedingung auch für bestimmte Zweitorkoeffizienten (s. Gl. (2.6.11)ff).

Der Reziprozitätsbegriff lässt sich auf Netzwerke mit n Klemmenpaaren (Toren) erweitern:

$$\sum_{k=1}^n \left( U_k^{(1)} I_k^{(2)} - U_k^{(2)} I_k^{(1)} \right) = 0. \quad \text{Reziprozit\"{a}tsbedingung}, \, n\text{-Tor } (4.3.2)$$

In dieser Formulierung sind  $U_k^{(1)}$ ,  $I_k^{(1)}$  und  $U_k^{(2)}$ ,  $I_k^{(2)}$  zwei beliebige verschiedene Sätze von Klemmenspannungen und -strömen, die die Kirchhoffschen Gleichungen erfüllen. Hier tritt die Beziehung zwischen Umkehrbarkeit und dem Tellegenschen Satz (s. Kap. 4.7) zutage.

Die Reziprozität vereinfacht die Netzwerkanalyse erheblich, beispielsweise bei der Bestimmung von Netzwerkeigenschaften (einfachere Bestimmung der Knotenleitwert- und Maschenwiderstandsmatrix, weniger zu bestimmende Koeffizienten, u. a.). Die Reziprozität kann auch zum Austausch von Quellen und Zweigen verwendet werden, wenn sich dadurch die Netzwerkberechnung vereinfacht.

#### Hinweis:

- Das Reziprozitätstheorem trifft auch auf zeitveränderliche Ströme und Spannungen zu.
- 2. Reziprozität gilt nur für Netzwerke ohne gesteuerte Quellen. Netzwerke mit gesteuerten Quellen können bei spezieller Parameterwahl reziprok sein.

- Reziproke Netzwerke haben symmetrische Maschenwiderstands- bzw. Knotenleitwertmatrizen.
- 4. Bei Zweitoren gilt:
  - Ein aktives Zweitor ist nichtreziprok. Beispiel: Mikrofonverstärker, der das gesprochene Wort im Lautsprecher hörbar macht. Wäre es reziprok, so würde das Besprechen des Lautsprechers im Mikrofon hörbar sein.
  - Ein aktives Zweitor kann reziprok sein: Beispiel der sog. Zweidraht- (= Zweirichtungs-) Verstärker im Fernsprecher, der in jeder Richtung verstärkt.
  - Es gibt Netzwerke, die zugleich passiv und nichtreziprok sind, wie etwa der Gyrator (s. Bd. 3).
- 5. Weil Reziprozität ein allgemeines physikalisches Prinzip ist, gilt sie auch für Feldprobleme (z.B. gekoppelte Spulen), Übertragungsstrecken, Antennen u.a.

# 4.4 Veränderung von Zweipolen durch gesteuerte Quellen, Miller-Theorem

Die Zusammenschaltung von Zweipolelementen mit gesteuerten Quellen kann zur signifikanten Veränderung der ursprünglichen Zweipolfunktion führen, besonders bei Rückkopplung. Dabei beeinflusst die Wirkungsgröße, etwa Spannung oder Strom am Quellenausgang, über ein Netzwerk die Steuergröße. Im Extremfall wird die Steuergröße an der gesteuerten Quelle selbst abgegriffen. Im Beispiel 2.6.16 (und Abb. 2.6.20) wurden diese Schaltungsmöglichkeiten bereits erwähnt.

Abb. 4.4.1 zeigt rückgekoppelte Ersatzzweipole. In Abb. a liegt eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle in Reihe zum Widerstand R, Steuergröße ist der Spannungsabfall am Widerstand. Legt man an den Zweipol Abb. 4.4.1a einen Probestrom an, so stellt sich die Klemmenspannung  $U_{\rm e}$  ein. Damit ergibt sich ein Ersatzwiderstand  $R_{\rm e}=R(1+A_{\rm u})$  (Umkehr der Steuerspannung ändert das Vorzeichen

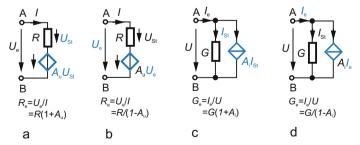


Abb. 4.4.1. Selbstgesteuerte Quellen. (a) Reihenschaltung von spannungsgesteuerter Spannungsquelle und Widerstand, Steuerspannung dem Klemmenstrom proportional. (b) Wie (a), jedoch Steuerspannung gleich der Eingangsspannung. (c) Parallelschaltung von stromgesteuerter Stromquelle und Leitwert G, Steuerstrom der Eingangsspannung proportional. (d) Wie (c), jedoch Steuerstrom gleich dem Eingangsstrom

von  $A_{\rm u}$ ). Wirkt als Steuerspannung die Gesamtspannung (Abb. 4.4.1b), so sinkt der Ersatzwiderstand bzw. beträgt der Ersatzleitwert  $G_{\rm e}=R^{-1}(1-A_{\rm u})$ . Abb. c zeigt die Parallelschaltung eines Leitwertes G und einer stromgesteuerten Stromquelle, der Steuerstrom kann entweder durch den Leitwert fließen  $(G_{\rm e}=G(1+A_{\rm i}))$  oder als Eingangsstrom auftreten:  $R_{\rm e}=G^{-1}(1-A_{\rm i})$ . Die Ergebnisse sind dual zu denen der Abb. a.

Die Reihenschaltung eines Widerstandes R mit einer spannungsgesteuerten Spannungsquelle und Abgriff der Steuerspannung über dem Widerstand oder der Gesamtanordnung vergrößert oder verkleinert den Zweipolersatzwiderstand. Das duale Verhalten zeigt ein Leitwert G mit parallel geschalteter stromgesteuerter Stromquelle.

Ersatz gesteuerter Quellen Oft ist es zweckmäßig, gesteuerte Quellen selbst zu substituieren. Dabei wird die Steuergröße zur Zweiggröße der gesteuerten Quelle. So kann die spannungsgesteuerte Stromquelle  $I = G_{\rm m}U$  durch den Zweipol  $G_{\rm m}$  ersetzt werden, wenn die Steuergröße gleichzeitig an der Stromquelle anliegt: Rückführung der Ausgangsgröße als Steuerspannung. Dieses Prinzip wurde bereits in Abb. 2.6.20 erläutert.

Eine gesteuerte Quelle geht durch Selbststeuerung (Steuerspannung liegt an der spannungsgesteuerten Stromquelle  $G_{\rm m}U$  bzw. Steuerstrom fließt durch die stromgesteuerte Spannungsquelle  $R_{\rm m}I)$  in einen Zweipolleitwert  $G_{\rm m}$  bzw. Widerstand  $R_{\rm m}$  über.

Diese Verfahren eignen sich zur Realisierung elektronisch steuerbarer Widerstände, auch negativer.

Zwei verbreitete Quellenanordnungen sind die nach Abb. 4.4.2. Vom Ausgang eines Netzwerkes

- mit ausgangsseitig spannungsgesteuerter Spannungs- oder Stromquelle wird ein der Ausgangsspannung proportionaler Strom (über einen Leitwert  $G_p$ ) an den Eingang rückgekoppelt und zum Eingangsstrom addiert. Als Folge ändert sich der Eingangsleitwert (es liegt die Parallel-Rückkopplung vor).
- mit einer ausgangsseitigen stromgesteuerten Spannungs- oder Stromquelle wird eine dem Ausgangsstrom proportionale Spannung (als Spannungsabfall über einen Reihenwiderstand  $R_{\rm r}$ ) an den Eingang rückgekoppelt und zur Eingangsspannung addiert. Im Gefolge ändert sich der Eingangswiderstand (es handelt sich um eine Reihen-Rückkopplung).

Der erste Fall spielte bereits bei Elektronenröhren eine Rolle: eine Rückkopplung über die Gitter-Anodenkapazität  $C_{\rm ga}$  (Größenordnung wenige pF) erzeugt eingangsseitig eine Ersatzkapazität  $C' \approx C_{\rm ga} |A_{\rm u}|$ , etwa um die Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}$ 

 $(\approx 10^2 \dots 10^3)$  vergrößert. Der Effekt wurde erstmalig von Miller beschrieben<sup>1</sup>. Auch der zweite Effekt, dual zum ersten, wurde zunächst bei Elektronenröhren zu Beginn der 50er Jahre beobachtet und zur Rauschabsenkung als Katodeninduktivität eingesetzt. Heute ist er in Bipolartransistorschaltungen verbreitet.

Vom praktischen Standpunkt interessiert die Auswirkung der Rückkopplung auf die Ein- und Ausgangswiderstände eines Verstärkers. Zur Problemlösung bieten sich an (neben Knotenspannungs- und Maschenstromanalyse)

- eine Berechnung über Zweitorzusammenschaltungen (Parallel- bzw. Reihenschaltung von Zweitoren),
- Ersatz der rückgeführten Größe durch eine gesteuerte Quelle sowie Quellenteilung- bzw. -versetzung,
- oder die direkte Berechnung wie hier, indem die zusätzliche Belastung der Klemmen 1 und 2 auf zwei Ersatzleitwerte zwischen den Klemmen 1, 2 und Masse zurückgeführt wird.

In der Schaltung Abb. 4.4.2a verursachen die Knotenspannungen  $U_1,\,U_2$  am Knoten 1 den Zusatzstrom  $I_1'$  und am Knoten 2 den Strom  $I_2'=-I_1'$ 

$$I_1' = G_{\rm p}(U_1 - U_2) = G_{\rm p}(1 - A_{\rm u})U_1,$$
  

$$I_2' = -G_{\rm p}(U_1 - U_2) = G_{\rm p}\left(1 - \frac{1}{A_{\rm u}}\right)U_2$$
(4.4.1)

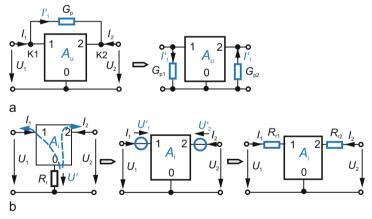


Abb. 4.4.2. Miller-Theorem. (a) Gleichwertige Transformation eines Widerstandes R zwischen den Knoten 1 und 2 eines Netzwerkes mit der Spannungsübersetzung  $A_{\rm u}=U_2/U_1$ . (b) Gleichwertige Transformation eines Widerstandes R im gemeinsamen Verbindungszweig zwischen Aus- und Eingangskreis eines Netzwerkes mit der Stromübersetzung  $A_{\rm i}=I_2/I_1$ 

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>J.M. Miller, Effekt 1920 veröffentlicht. Der Effekt ist in deutschen Lehrbüchern (Barkhausen, Rothe-Kleen) über Elektronenröhren in den 30er Jahren ausführlich beschrieben und erklärt.

mit dem Spannungsverhältnis  $A_{\rm u}=U_2/U_1$ . Im nächsten Schritt interpretieren wir diese Zusatzströme als Klemmenleitwerte parallel zum Ein- und Ausgang:

$$G_{\rm p1} = \frac{I_1'}{U_1} = G_{\rm p}(1-A_{\rm u}) \ \ {\rm und} \ \ G_{\rm p2} = \frac{I_2'}{U_2} = G_{\rm p}\left(1-\frac{1}{A_{\rm u}}\right). \eqno(4.4.2)$$
 Miller-Theorem

Damit ist der Überbrückungswiderstand  $R_{\rm p}$  durch die ein- und ausgangsseitigen Ersatzwiderstände  $R_{\rm p1}$ ,  $R_{\rm p2}$  ersetzt, ohne die Schaltung zu ändern. Dieses Ergebnis formuliert das *Theorem von Miller*:

Ein zwischen Ein- und Ausgangsknoten 1, 2 eines (erdunsymmetrischen) Zweitores liegender Widerstand R kann durch zwei, von der Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}=U_2/U_1$  abhängige ein- und ausgangsseitige Ersatzwiderstände ersetzt werden.

Die Ersatzwiderstände  $R_{\rm p1},\,R_{\rm p2}$  ändern die Ein- und Ausgangswiderstände. Zwei Fälle treten auf:

- beim *Millereffekt* ist die Ausgangsspannung durch die hohe Spannungsverstärkung größer als die Eingangsspannung und gegenphasig ( $A_{\rm u}$  hat negatives Vorzeichen). Dann gilt  $|R_{\rm p1}| \ll |R_{\rm p2}|$  und der *Eingangswiderstand sinkt dem Betrag nach*.
- beim Bootstrapeffekt<sup>2</sup> sind Ein- und Ausgangsspannung von der gleichen Größenordnung und gleichphasig (Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}\approx 1$ , positiv). Dann steigt der Widerstand  $R_{\rm p1}$  stark an.

Im ersten Fall kann ein reeller Widerstand  $R_{\rm p}$  (bei  $A_{\rm u}>1$ ) sogar zu negativem Widerstand an den Eingangsklemmen führen, für  $A_{\rm u}<1$  analog am Ausgang (Methode zur Erzeugung negativer Widerstände). Wirkt anstelle des Widerstandes ein Kondensator (z. B.  $C=10\,{\rm pF}$ ), so entsteht eingangseitig die Kapazität  $C_1=C(1-A_{\rm u})$ , bei  $A_{\rm u}=-10^3$  von immerhin  $C_1=10^4\,{\rm pF}$ ! Der Millereffekt verursacht eine unerwünschte Kapazitätsvervielfachung!

Ein analoges Theorem ergibt sich bei Zuschalten eines Widerstandes  $R_{\rm r}$  in die Verbindungsleitung eines Zweitores, also *in Reihe* zu ihm (Abb. 4.4.2b). Bei Analyse mit der Zweitortheorie müssen die **Z**-Matrizen des Verstärkers und des Reihenwiderstandes addiert und das Ergebnis ausgewertet werden. Zu erwarten sind, entsprechend der Dualität, *Längswiderstände* in den Zuleitungen des Ersatzzweitores.

Wir analysieren die Schaltung durch *Spannungsquellenversetzung*: zunächst wird der Spannungsabfall am Widerstand  $R_r$  als Spannungsquelle  $R_r(I_1 + I_2)$  aufgefasst, die der Strom  $I_1 + I_2$  verursacht (Hüllknotensatz mit dem Zweitor als Inhalt). Sie

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Sinngemäße Übersetzung: "Hochziehen der eigenen Stiefelschlaufe".

wird über den Hüllknoten in die Ein- und Ausgangsleitungen verschoben. Dort treten die Spannungen  $U_1'$  und  $U_2'$  auf

$$U_1' = R_{\rm r}(I_1 + I_2) = R_{\rm r}(1 + A_{\rm i})I_1$$
  

$$U_2' = R_{\rm r}(I_1 + I_2) = R_{\rm r}(1 + \frac{1}{A_{\rm i}})I_2.$$
(4.4.3)

Der Quotient  $A_i = I_2/I_1$  ist die *Stromverstärkung* der Schaltung. Im letzten Schritt werden die gesteuerten Spannungsquellen  $U'_1$  und  $U'_2$  in die Längswiderstände  $R_{r1}$  und  $R_{r2}$  gewandelt:

$$R_{\rm r1} = \frac{U_1'}{I_1} = R_{\rm r}(1 + A_{\rm i})$$
 und  $R_{\rm r2} = \frac{U_2'}{I_2} = R_{\rm r}(1 + \frac{1}{A_{\rm i}}).$  (4.4.4)  
Duales Miller-Theorem

Das (duale) Miller-Theorem<sup>3</sup> besagt:

Ein Widerstand  $R_{\rm r}$  im gemeinsamen Massezweig eines Zweitores kann durch zwei, von der Stromverstärkung  $A_{\rm i}=I_2/I_1$  bestimmte Einzelwiderstände  $R_{\rm r1},\,R_{\rm r2}$  in Reihe zu den Ein- und Ausgangstoren ersetzt werden.

Vor allem in Wechselstromnetzwerken lassen sich abhängig vom Charakter des Zusatzwiderstandes und der Stromverstärkung  $A_i$  ungewöhnliche Effekte realisieren (s. Bd. 3).

Hinweis: Bisher wurde der Einfluss weiterer Verstärkerelemente, etwa des Ausgangswiderstandes, vernachlässigt, um den wesentlichen Effekt im Auge zu behalten. In diesem Fall muss die Spannungsverstärkung  $A_{\rm u}$  (resp. Stromverstärkung  $A_{\rm i}$ ) durch die Spannungsübersetzung  $v_{\rm u}$  (bzw. Stromübersetzung  $v_{\rm i}$ ) nach Gl. (2.6.29a, ff) ersetzt werden. Die praktischen Auswirkungen sind meist gering.

#### Zusammengefasst beinhaltet das Miller-Theorem für ein Zweitor

- einen multiplikativen Eingangsleitwert  $G_{\rm e} = G(1 A_{\rm u}) \approx -GA_{\rm u}$ , mit der Spannungsverstärkung  $A_{\rm u} = U_2/U_1$  bei Parallel-Rückkopplung.
- einen multiplizierten *Eingangswiderstand*  $R_e = R(1 + A_i) \approx RA_i$  mit der Stromverstärkung  $A_i = I_2/I_1$  bei Reihenrückkopplung.

Das Miller-Theorem findet entweder gezielte Anwendung (beispielsweise zur Erzeugung von Sinusschwingungen in der Elektronik, Oszillatorprinzip) oder es beschreibt einen Störeffekt, wie die Vergrößerung der Eingangskapazität. Der Miller-Effekt spielt wegen der Kollektor- bzw. Drainkapazität von Bipolar-/Feldeffekttransistoren auch heute noch eine Rolle, er kann durch *Neutralisation* (Rückführung der im Vorzeichen vertauschten Ausgangsspannung über einen Widerstand auf den Eingang) beseitigt werden. Operationsverstärker haben keinen Millereffekt.

 $<sup>^3 \</sup>mbox{Begriff}$ nicht üblich; wir verwenden ihn, weil es sich um die duale Schaltung handelt.

# 4.5 Äquivalente Netzwerke\*

Schon die Stern-Dreieck-Transformation zeigte, dass zwei Netzwerke zwischen zwei (oder mehr) Klemmen völlig gleiches U, I-Verhalten haben können trotz unterschiedlichem Aufbaues. Auch die Strom-Spannungsquellen-Ersatzschaltungen des aktiven Zweipols sind gleichwertige Netzwerke.

Zwei n-Pol-Elemente heißen zueinander unbedingt äquivalent (gleichwertig), wenn ihre Strom-Spannungs-Beziehungen an den Klemmen unabhängig vom inneren Aufbau für jeden Zeitpunkt oder jede Frequenz identisch sind.

Dabei ist zu unterscheiden zwischen den bedingt äquivalenten Schaltungen, die (in der Wechselstromtechnik) nur bei einer bestimmten Frequenz gleichwertig sind und unbedingt äquivalenten Schaltungen mit gleichem Verhalten unabhängig von der Frequenz. So ist die Umrechnung der Reihen- in eine Parallelschaltungen (und umgekehrt) mit allgemeinen Bauelementen R, L, C nur für eine Frequenz gleichwertig (s. Bd. 3).

Unbedingte Gleichwertigkeit schließt ein, dass bei äquivalenten Zweipolen im Wechselstromverhalten der komplexe Widerstand  $\underline{Z}_{\rm A}(\omega)=\underline{Z}_{\rm B}(\omega)$  und damit auch die Ortskurven übereinstimmen.

Es gibt viele äquivalente Netzwerke, wir greifen äquivalente Zweipole heraus (Abb. 4.5.1a). Für einen Zweipol mit Reihen- und Parallelzweig lässt sich der Reihenwiderstand in die Parallelschaltung einrechnen (wenn einer der Parallelwiderstände vom gleichen Typ ist und die angegebenen Bemessungsbedingungen eingehalten werden):

$$\underline{Z}_{a} = \frac{a\underline{Z}_{1}^{2} + (a+1)\underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}}{a\underline{Z}_{1} + \underline{Z}_{2}}$$
(4.5.1a)

$$\underline{Z}_{b} = \frac{b\underline{Z}_{1}^{2} + \underline{Z}_{1}\underline{Z}_{2}}{(b+1)\underline{Z}_{1} + \underline{Z}_{2}}.$$
(4.5.1b)

Wir haben mit den Symbolen  $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$  auf komplexe Widerstände vorgegriffen (s. Bd. 3), a und b sind reelle Konstanten. Die Beziehungen gelten auch für ohmsche Widerstände, dann wird einfach  $\underline{Z}_1 \to R_1$  ersetzt ( $\underline{Z}_2$  analog).

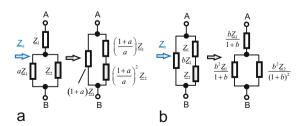


Abb. 4.5.1. Äquivalente Zweipole mit drei Elementen. (a) Wandlung einer Reihen-Parallel- in eine Parallel-Reihenschaltung. (b) Wandlung einer Parallel-Reihen- in eine Reihen-Parallelschaltung Umgekehrt kann aus einer Parallelschaltung ein Widerstand als Reihenwiderstand herausgezogen werden (Abb. 4.5.1a). Als Nachweis der Gleichwertigkeit bilden wir vom Widerstand  $\underline{Z}_{\rm a}$  Gl. (4.5.1a) zunächst den Leitwert mit  $K_{\rm a}=(1+1/a)$ 

$$\begin{split} \frac{1}{Z_{\rm a}} &= \frac{\underline{Y}_1^2 + a\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{a\underline{Y}_2 + (1+a)\underline{Y}_1} = \frac{\underline{Y}_1}{1+a} + \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{K_{\rm a}^2\left(\frac{\underline{Y}_2}{K_{\rm a}} + \underline{Y}_1\right)} \\ &= \frac{\underline{Y}_1}{1+a} + \frac{1}{K_{\rm a}\underline{Z}_1 + K_{\rm a}^2\underline{Z}_2}. \end{split}$$

Die Abspaltung des ersten Leitwertes ist möglich, weil der Grad des Zählers im Term  $1/\underline{Z}_{\rm a}$  um eins größer als der Nenner ist. Der zweite Term ist die Reihenschaltung zweier Widerstände, die dem ersten Leitwert parallel liegt. Damit ist die Gleichwertigkeiten der beiden Schaltung Abb. 4.5.1a bestätigt.

Die Schaltungen Abb. 4.5.1b sind ebenfalls äquivalent. Die Überführung in die neue Form gelingt, wenn vom Ersatzwiderstand  $\underline{Z}_{\rm b}$  Gl. (4.5.1b) zunächst ein Reihenwiderstand abgespalten wird (möglich, weil der Zählergrad hinsichtlich  $\underline{Z}_{\rm 1}$  um eins größer als der Nennergrad ist):

$$\underline{Z}_{b} = \frac{b\underline{Z}_{1}}{1+b} + \frac{1}{\frac{1}{Z_{2}}(1+b)^{2} + \frac{1}{Z_{1}}(1+b)}.$$

Auch diese Zerlegung ist, genau wie oben, eine Polynomdivision.

Abb. 4.5.2 zeigt zwei Beispiele zur Gleichwertigkeit: in Abb. a wurden die beiden äquivalenten Schaltungen zu Abb. 4.5.1a für a=0,2 angegeben und in Abb. b, im Vorgriff auf die Bauelemente Kondensator und Spule, entsprechende Schaltungen mit diesen Bauelementen skizziert. Durch Äquivalenz weisen diese Schaltungen auch gleiches Zeitverhalten für Ströme und Spannungen auf.

Eine wichtige Konsequenz gleichwertiger Schaltungen ist, dass sie verschiedene Topologie und Bauelementewerte haben können und so Spielräume bei der Realisierung entstehen.

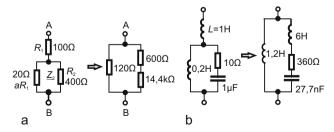


Abb. 4.5.2. Beispiele gleichwertiger Schaltungen

4.6

Abgesehen von der Vielfalt äquivalenter Schaltungen fasst man den Äquivalenzbegriff in der Elektrotechnik jedoch oft weiter. So werden die bereits betrachteten Zweitor-T- und  $\pi$ -Ersatzschaltungen oft als zueinander äquivalent angesehen, obwohl sie es nur unter bestimmten Bedingungen sind. Auch spricht man von äquivalenten Schaltungen und Bauelementen immer dann, wenn sie in ihren wesentlichen Eigenschaften übereinstimmen (Beispiel: Äquivalenzliste von Transistoren und integrierten Schaltungen u. a. m.).

### 4.6 Duale Netzwerke\*

**Dualitätsprinzip** Oft lassen sich verschiedene physikalische Sachverhalte mit dem gleichen mathematischen Formalismus beschreiben: dann bewirkt eine Vertauschung der Begriffsbeziehungen, dass die Sachverhalte des Systems A durch Vertauschung auf das System B übertragbar sind und damit eine *Transformationsregel* gilt. Beispiele sind die mathematische Beschreibung eines elektrischen *LC*-Kreises und eines mechanischen Feder-Masse-Systems, das Verhalten des spannungsgespeisten Reihenschwingkreises und des stromgespeisten Parallelschwingkreis oder die Spannungs- und Stromquellenersatzschaltungen des aktiven Zweipols.

Zweipole sind zueinander dual, wenn ihre I, U-Beziehung bei wechselseitiger Vertauschung von Strom und Spannung erhalten bleibt.

Damit ergibt sich duale Zweipol B zu Zweipol A durch Vertauschen:

$$i \leftrightarrow u, \quad i_{\mathbf{q}} \leftrightarrow u_{\mathbf{q}}, \quad R \leftrightarrow G, \quad C \leftrightarrow L.$$

Beispielsweise gehört zum ohmschen Widerstand R mit  $U=R\cdot I$  durch Vertauschung  $(U\to I,\ I\to U,\ R\to G)$  die duale Beziehung  $I=G\cdot U$ . Deshalb sind R und G duale Zweipolelemente. Gleichermaßen folgt für die Spule aus  $u=L\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$  durch Vertauschung  $(u\to i,\ i\to u,\ L\to C)$  die Relation  $i=C\mathrm{d}u/\mathrm{d}t$ : Spule und Kondensator sind duale Schaltelemente.

**Duale Netzwerke** Zwei zueinander duale Netzwerke liegen vor, wenn für Netzwerk A das Kirchhoffsche Gleichungssystem und die Elementbeziehungen

$$\sum_{\nu} u_{\nu} = 0, \ \sum_{\mu} i_{\mu} = 0, \ u_{\mu} = R_{\mu} i_{\mu}, \ u_{\mu} = L_{\mu} \frac{\mathrm{d}i_{\mu}}{\mathrm{d}t_{\mu}}, \ i_{\mu} = C_{\mu} \frac{\mathrm{d}u_{\mu}}{\mathrm{d}t} \quad (4.6.1a)$$

gegeben sind und es ein (duales) Netzwerk B (gestrichene Größen) gibt, für das zutrifft

$$\sum_{\mu} i'_{\mu} = 0, \ \sum_{\nu} u'_{\nu} = 0, \ i'_{\mu} = G'_{\mu} u'_{\mu}, \ i'_{\mu} = C'_{\mu} \frac{\mathrm{d}u'_{\mu}}{\mathrm{d}t}, \ u'_{\mu} = L'_{\mu} \frac{\mathrm{d}i'_{\mu}}{\mathrm{d}t}.$$
 (4.6.1b)

Dualität erfordert somit die *Dualitätsbedingung* 

$$u' = Z_0 i, i' = u/Z_0.$$
 (4.6.2)

Die *Dualitätskonstante*  $Z_0$  (Einheit  $1\,\Omega$ ) ist frei wählbar. Damit gelten als Dualitätsbedingung zwischen den Netzwerken A und B

$$G' = \frac{R}{Z_0^2}, \ C' = \frac{L}{Z_0^2}, \ L' = C \cdot Z_0^2,$$
 
$$i_{\rm q}' = \frac{u_{\rm q}}{Z_0}, \ u_{\rm q}' = i_{\rm q} Z_0 \ .$$
 Dualitätsbeziehungen (4.6.3)

Aus der Tatsache, dass die Knoten- und Maschengleichungen (4.6.1) miteinander vertauscht sind, ergeben sich für zwei zueinander duale Netzwerke die *Dualitätsbedingungen*:

- jeder Zweipol im Netzwerk A ist durch den dualen im Netzwerk B ersetzt, es gibt eine Dualitätskonstante  $Z_0$ ,
- einer Masche (Knoten) im Netzwerk A entspricht ein Knoten (Masche) im Netzwerk B (oder einer Reihen- die Parallelschaltung von Zweipolelementen und umgekehrt).

Der letzte Punkt folgt direkt aus der Dualität von Knoten- und Maschensatz: die Reihenschaltung (Maschensatz) von Zweipolen geht in die Parallelschaltung (Knotensatz) dualer Zweipole über. Deshalb gehört zum Netzwerk A mit k-1 unabhängigen Knoten und m=z-(k-1) unabhängigen Maschen das duale Netzwerk mit k-1 unabhängigen Maschen und m unabhängigen Knoten.

Dualität verlangt also, dass

- zur Reihenschaltung von Widerständen in einem Netzwerk die Parallelschaltung im dualen Netzwerk gehört (und umgekehrt),
- Kondensatoren in einem Netzwerk den Spulen im anderen entsprechen (und umgekehrt),
- sich Strom- und Spannungsquellen wechselseitig vertauschen,
- eine spannungsgesteuerte Quelle geht in die duale stromgesteuerte übergeht und umgekehrt,
- Baumzweige in einem Netzwerk in Verbindungszweige im anderen übergehen und umgekehrt.

Typische Beispiele dualer Schaltung sind der Reihen- und Parallelschwingkreis, die Stern-Dreieckschaltung, der Grundstromkreis in Spannungs- und Stromquellendarstellung, die T- und  $\pi$ -Ersatzschaltungen u. a. m. Nicht zu jedem Netzwerk muss ein duales existieren!

Tab. 4.1 stellt die wichtigsten dualen Größen und Begriffe gegenüber.

	Tabelle 4.1.	Transformationsregeln	für duale N	Vetzwerke
--	--------------	-----------------------	-------------	-----------

Netzwerk 1	$\Leftrightarrow$	Netzwerk 2	Beziehung
Spannung	$\Leftrightarrow$	Strom	$u_1 = Z_0 i_2$
Spannungsquelle	$\Leftrightarrow$	Stromquelle	$u_{q1} = Z_0 i_{q2}$
Widerstand	$\Leftrightarrow$	Leitwert	$R_1 = Z_0^2 G_2$
Induktivität	$\Leftrightarrow$	Kapazität	$L_1 = Z_0^2 C_2$
Spulenfluss	$\Leftrightarrow$	Ladung	$\Psi_1 = Z_0 Q_2$
Reihenschaltung	$\Leftrightarrow$	Parallelschaltung	
Leerlauf	$\Leftrightarrow$	Kurzschluss	
Masche	$\Leftrightarrow$	Knoten	
Äußere Masche	$\Leftrightarrow$	Nullknoten	

Hinweis: Maschen- und Knotenanalyse sind nicht dual zueinander. Erst nach Einführung fiktiver Zweige können sie als spezielle Formen der Schleifen- und Schnittmengenanalyse aufgefasst werden, dann werden sie zueinander dual. Schleifen- und Schnittmengenanalyse hingegen sind dual zueinander, darauf wurde schon im Kap. 3.4 hingewiesen.

**Beispiel 4.6.1 Duale Schaltungen** In Abb. 4.6.1 wurden zwei duale Schaltungen A und B dargestellt. Es gelten folgende Beziehungen

mit

$$i_{\mathbf{q}}' = \frac{u_{\mathbf{q}}}{Z_0}, \quad G_1' = \frac{R_1}{Z_0^2}, \quad C_2' = \frac{L_2}{Z_0^2}, \quad L_3' = C_3 Z_0^2.$$

Deutlich ist der Wechsel Parallel-Reihenschaltung zu erkennen. Bei Vorgabe des Dualitätswiderstandes liegt das duale Netzwerk auch zahlenmäßig fest.

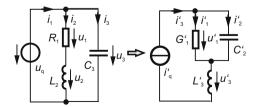


Abb. 4.6.1. Duale Schaltungen

Zu einem Netzwerk findet man das duale Netzwerk nach der

#### Lösungsmethodik Duale Netzwerke

- Zeichne den Graphen des Netzwerkes A. Trage in jede von Zweigen gebildete Masche einen Knoten ein und ebenso einen Knoten außerhalb des Netzwerkgraphen (zweckmäßig als Kurzschlussring). Kennzeichne jeden Knoten (Buchstabe, Ziffer) als Knoten des dualen Netzwerkes.
- 2. Verbinde die eingetragenen Knoten untereinander so, dass jeder Zweig (NWE) des gegebenen Netzwerkes durch genau eine Knotenverbindungslinie (Zweig) des dualen Netzwerkes geschnitten wird.
- 3. Ordne jeden so gewonnenen Zweig des dualen Netzwerkes das (duale) Netzwerkelement zu, das im Ausgangsnetzwerk geschnitten wird.

Das Verfahren beschränkt sich auf planare Netzwerke und schließt magnetische Kopplungen aus.

Abb. 4.6.2 zeigt ein Beispiel. So schneidet die Linie von Knoten 1 und 2 das Element  $R_1$ , deshalb hat die duale Schaltungen zwischen 1, 2 den Leitwert  $G_1' = R_1/Z_0^2$ , analog zwischen 2 und 3 statt des Kondensators  $C_2$  die Induktivität  $L_2' = C_2 Z_0^2$  usw. Wird z. B.  $Z_0 = 1 \Omega$  gewählt, so entspräche den Elementen  $R_1 = 5 \Omega \rightarrow G_1' = 5 \mathrm{S}$ ,  $C_2 = 5 \mu\mathrm{F} \rightarrow L_2 = 5 \mu\mathrm{H}$  usw.

Die Dualität zweier Netzwerke lässt sich vorteilhaft nutzen

zur Übertragung der Ergebnisse einer Netzwerkberechnung auf ein duales Netzwerk (Analysereduktion): Einsparung an Arbeit,

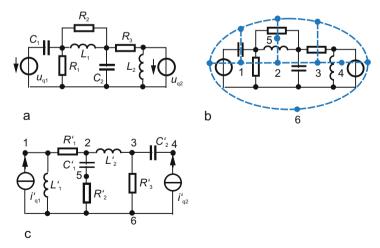


Abb. 4.6.2. Duales Netzwerk. (a) Ausgangsnetzwerk. (b) Gewinnung des Graphen zum dualen Netzwerk. (c) Ausgeführtes duales Netzwerk mit eingesetzten dualen Netzwerkelementen

- zur Vereinfachung von Netzwerkaufgaben,
- in der Schaltungstechnik (z. B. Filtertechnik) zum Ersatz von Schaltungen mit Induktivitäten durch solche mit Kapazitäten.

# 4.7 Leistung in elektrischen Netzwerken, Tellegen-Theorem\*

Erhaltung der elektrischen Leistung In einem Netzwerk mit verschiedenartigen Netzwerkelementen treten unterschiedliche Energieflüsse zwischen den Elementen auf, stets muss aber die Summe der erzeugten elektrischen Leistungen gleich der Summe der verbrauchten Leistungen sein. Bei Wahl eines einheitlichen Zählpfeilsystems (Verbraucherrichtung) mit verbrauchten Leistungen positiv (erzeugte negativ) lautet der Energiesatz für ein Netzwerk mit z Zweigen, k Knoten und den (zeitabhängigen) Zweigspannung  $u_{\mu}(t)$  und Zweigströmen  $i_{\mu}(t)$ 

$$\sum_{\mu=1}^{z} p_{\mu}(t) = \sum_{\mu=1}^{z} u_{\mu}(t) i_{\mu}(t) = 0.$$
 Energieerhaltung, Tellegensches Theorem (4.7.1)

In einem Netzwerk muss die Summe der von allen Zweigen aufgenommenen Leistungen zu jedem Zeitpunkt verschwinden.

Diese Aussage heißt Tellegenscher oder  $Leistungs-Satz^4$ .

Weil die Zweige Quellen einschließen, muss die Summe der in den passiven Netzwerkelementen verbrauchten Leistung gleich der sein, die unabhängige Quellen insgesamt liefern. Dann gilt  $\sum P_{\rm Q} + \sum P_{\rm R} = 0$  mit den Quellenleistungen  $-\sum U_{\rm q}I$ ,  $-\sum I_{\rm q}U$  für alle Spannungs- und Stromquellen sowie die verbrauchten Leistungen  $\sum RI^2$  in den Zweigen. Wird bei einer Netzwerkanalyse eine Zweiggröße falsch berechnet, so stimmt die Leistungsbilanz nicht. Das Tellegensche Theorem dient deshalb verbreitet zur Kontrolle von Netzwerkanalysen.

Der Tellegensche Satz gilt nicht nur für jeden Zeitpunkt, sondern auch völlig unabhängig von den Netzwerkelementen und damit ebenso für nichtlineare Elemente (für die Elemente in den Zweigen wurden keine Voraussetzungen getroffen!). Die einzige Voraussetzung für Gl. (4.7.1) ist die Gültigkeit des Knotensatzes für jeden Knoten und des Maschensatzes für jede Masche, m. a. W. ist die Energieerhaltung (4.7.1) eine direkte Folge der Kirchhoff-

 $<sup>^4\</sup>mathrm{B.\,D.}$  Tellegen (1900–1990) holländischer Ingenieur. Das Theorem wurde 1953 angegeben.

schen Gleichungen!<sup>5</sup> Dann sind die beiden Kirchhoffsche Gleichungen und die Energieerhaltung Aussagen, von denen jeweils zwei die Gültigkeit der dritten begründen! So folgt aus dem Maschensatz und Energiesatz der Knotensatz usw.

Der Nachweis des Leistungs-Satzes gelingt z. B. dadurch, dass man die Zweigspannungen durch Knotenspannungen ausdrückt und für jeden Knoten die Knotenbilanz betrachtet.

Die wesentlichsten Aussagen des Tellegen-Theorems sind:

– zwei Netzwerke (1) und (2) mit gleichem Netzwerkgraph (und gleicher Zweignummerierung) haben (bei völlig unterschiedlichen Zweigfunktionen!) mit

$$\sum_{\mu=1}^{z} u_{\mu}^{(1)}(t) \cdot i_{\mu}^{(1)}(t) = \sum_{\mu=1}^{z} u_{\mu}^{(2)}(t) \cdot i_{\mu}^{(2)}(t) = 0 \tag{4.7.2}$$

die gleiche Leistungsbilanz.

- die erweiterte Form für zwei Netzwerke (mit gleichem Graph) lautet

$$\sum_{\mu=1}^{z} u_{\mu}^{(1)}(t) \cdot i_{\mu}^{(2)}(t) = \sum_{\mu=1}^{z} u_{\mu}^{(2)}(t) \cdot i_{\mu}^{(1)}(t) = 0. \tag{4.7.3}$$

Die Summe der Produkte der Zweigspannungen des einen Netzwerkes mit den korrespondierenden Zweigströmen des anderen (und umgekehrt) verschwindet, auch wenn ein Netzwerk nichtlinear ist!

Während Gl. (4.7.2) noch auf der Energieerhaltung basiert, erlaubt Gl. (4.7.3) keine direkte Interpretation mit dem Energiesatz, denn die Produkte sind nicht mehr Zweigleistungen *eines* Netzwerkes. Wir nennen diese Produkte (mit der Dimension einer Leistung) die *Austauschleistung*, eine Rechengröße, die physikalisch nicht interpretiert werden kann.

Beispiel 4.7.1 Tellegenscher Satz Für die beiden Netzwerke nach Abb. 4.7.1a, bergeben sich die einzelnen Zweiggrößen (Berechnung linke Schaltung mit Überlagerungssatz,  $R_1=30\,\Omega,\,R_2=70\,\Omega,\,U_{\rm q}=10\,{\rm V},\,I_{\rm q}=1\,{\rm A};\,R_1'=R_2'=20\,\Omega,\,R_3'=40\,\Omega,\,U_{\rm q}'=20\,{\rm V})$ 

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup>Der physikalische Sachverhalt ist umgekehrt: den Kirchhoffschen Gleichungen liegen Erhaltungssätze zugrunde.

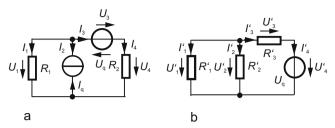


Abb. 4.7.1. Anwendung des Tellegenschen Satzes auf zwei Netzwerke. (a) Ausgangsnetzwerk. (b) Netzwerk mit gleichem Graphen, es erfüllt das Tellegen-Theorem

Durch Aufsummieren der einzelnen Leistungsanteile der Zweige bestätigt sich die Leistungsbilanz für beide Schaltungen trotz unterschiedlicher Auslegung (Gerüst aber gleich), die rechte Spalte bestätigt auch die Austauschbilanz für das Produkt der Zweigströme der linken Schaltung mit den Zweigspannungen der rechten Schaltung.

**Matrixformulierung** Für die Matrixschreibweise des Theorems wird der Knotensatz AI = 0 (Gl. (3.4.1)), der Maschensatz BU = 0 (Gl. (3.4.8)), die Beziehungen zwischen Zweig- und Knotenspannung  $U = A^{\mathrm{T}}U_{\mathrm{k}}$  (Gl. (3.4.3)) und die zwischen Zweig- und Schleifenstrom  $I = B^{\mathrm{T}}I_{\mathrm{m}}$  (Gl. (3.4.11)) genutzt. Dann betragen die Zweigleistungen

$$egin{aligned} \mathbf{0} &= & oldsymbol{U}^{\mathrm{T}} oldsymbol{I} = oldsymbol{A} oldsymbol{U}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} oldsymbol{I} = oldsymbol{U}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} oldsymbol{I}_{\mathrm{m}} = oldsymbol{U}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} \underbrace{oldsymbol{A} oldsymbol{I}_{\mathrm{m}}}_{0} oldsymbol{I}_{\mathrm{m}} \end{aligned}$$

oder gleichwertig als Tellegenscher Satz geschrieben (vgl. Gl. (4.7.1))

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}.\tag{4.7.4}$$

Ein beliebiger Vektor der Zweigspannungen, der den Maschensatz im Netzwerk erfüllt und ein beliebiger Vektor der Zweigströme, der den Knotensatz erfüllt, sind zueinander orthogonal.

Dabei müssen die Ströme *nicht* denen entsprechen, die sich als Folge der Zweigspannungen einstellen(!). Folglich gilt Gl. (4.7.4) auch für Strom- bzw. Spannungsvektoren, die zu *zwei verschiedenen Netzwerken* N1 und N2 (aber gleicher Topologie) gehören. Deshalb gilt der *Tellegensche Satz in Matrix*-

form erweitert entsprechend Gl. (4.7.2)

$$U^{(1)^{\mathrm{T}}}I^{(2)} = U^{(2)^{\mathrm{T}}}I^{(1)} = I^{(1)^{\mathrm{T}}}U^{(2)} = I^{(2)^{\mathrm{T}}}U^{(1)} = 0.$$
 (4.7.5)

Ein beliebiger (transponierter) Vektor von Zweigspannungen  $\boldsymbol{U}^{(1)^{\mathrm{T}}}$ , die den Maschensatz erfüllen und ein beliebiger Vektor von Zweigströmen  $\boldsymbol{I}^{(2)}$ , die den Knotensatz *in einem anderen Netzwerk* (aber mit gleicher Topologie) erfüllen, sind zueinander orthogonal.

Beim Ausmultiplizieren der Matrizen entsteht dann genau die Summe nach Gl. (4.7.3). Ist hingegen  $(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$  die Lösung der Netzwerkgleichung, so geht der Tellegensche Satz (4.7.5) in den Energiesatz Gl. (4.7.4) über.

**Umkehrsatz** Der Tellegensche Satz in Gl. (4.7.5) erlaubt eine Umformulierung des Umkehrsatzes Gl. (4.3.1). Wir betrachten dazu ein (quellenfreies) Netzwerk N und speziell die Strom-Spannungsverhältnis an den Toren 1, 2 (Abb. 4.7.2). Dann besagt die Leistungsbilanz

$$\underbrace{U_1I_1 + U_2I_2}_{\text{Klemmenleistung}} = \underbrace{\sum_{\nu} U_{z\nu}I_{\nu}}_{\text{Zweigleistungen}} ,$$

dass die über die Tore 1,2 ausgetauschte Leistung im Netzwerk verbraucht wird. Im nächsten Schritt erfährt das Netzwerk zwei unterschiedliche Zustände (1), (2) (z. B. unterschiedliche Wertebemessung), die entsprechende Klemmengrößen  $I_1^{(1)}$ ,  $I_1^{(2)}$  usw. zur Folge haben. Wir kombinieren jetzt nach dem Tellegenschen-Satz die Spannungen des Zustandes (1) mit den Strömen des Zustandes (2) und anschließend die Spannungen des Zustandes (2) mit den Ströme des Zustandes (1). Das Ergebnis lautet

$$\underbrace{U_1^{(1)}I_1^{(2)} + U_2^{(1)}I_2^{(2)}}_{\text{Klemmenleistung}} = \underbrace{\sum_{\nu} U_{z\nu}^{(1)}I_{\nu}^{(2)}}_{\text{Zweigleistungen}}, \qquad \underbrace{U_1^{(2)}I_1^{(1)} + U_2^{(2)}I_2^{(1)}}_{\text{Klemmenleistung}} = \underbrace{\sum_{\nu} U_{z\nu}^{(2)}I_{\nu}^{(1)}}_{\text{Zweigleistungen}}.$$

Für die Zweige (Zweigwiderstände  $R_{\nu}$ ) gilt:  $U_{z\nu}^{(1)}=R_{\nu}I_{\nu}^{(1)},\,U_{z\nu}^{(2)}=R_{\nu}I_{\nu}^{(2)},\,\mathrm{m.\,a.\,W.}$  stimmen die Zweigleistungen überein und es verbleibt

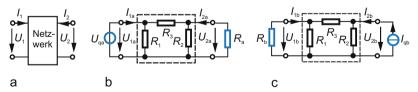


Abb. 4.7.2. Tellegen-Theorem und Umkehrbarkeit eines Netzwerkes. (a) Netzwerk mit zwei zugänglichen Zweigen. (b) Ausgangsbetriebszustand eines Netzwerkes mit Gleichspannungsanregung,  $R_{\rm a}=10\,\Omega.$  (c) Umgekehrter Betrieb des Netzwerkes bei Stromanregung,  $R_{\rm b}=40\,\Omega$ 

$$U_1^{(1)}I_1^{(2)} + U_2^{(1)}I_2^{(2)} = U_1^{(2)}I_1^{(1)} + U_2^{(2)}I_2^{(1)} \hspace{1cm} \text{Reziprozit\"{a}tstheorem (4.7.6)}$$

als *Umkehrsatz*. Er hätte sich auch aus Gl. (4.7.5) ergeben, weil die Spannungs- und Stromvektoren beim Zweitornetzwerk nur zwei Elemente haben:

$$\boldsymbol{U}^{(1)^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{I}^{(2)} = \left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}\right) \begin{pmatrix} I_1^{(2)} \\ I_2^{(2)} \end{pmatrix} = U_1^{(1)} I_1^{(2)} + U_2^{(1)} I_2^{(2)} = 0.$$

Für den zweiten Term von Gl.(4.7.5) erhält man die rechte Seite der Gl. (4.7.6).

Gegenüber dem Umkehrsatz Gl. (4.3.1) gilt diese Tellegensche Form für einen beliebigen Betriebszustand. Das lässt sich mit Abb. 4.7.2 zeigen: dort wird ein Netzwerk einmal mit Spannungsquelle und Lastwiderstand betrieben, in umgekehrter Betriebsrichtung mit Stromquelle und einem anderen Lastwiderstand. Für konkrete Schaltungen können die Klemmenwerte berechnet und die Prüfung durchgeführt werden.

Im Beispiel wurden gewählt:  $R_1=R_2=10\,\Omega,\,R_3=5\,\Omega,\,U_{\rm q1}=1\,{\rm V},\,I_{\rm q2}=1\,{\rm A}.$  Damit berechnen sich  $I_1^{(1)}=0,2\,{\rm A},\,U_2^{(1)}=0,5\,{\rm V},\,I_2^{(1)}=-0,05\,{\rm A}$  und weiter  $U_2^{(2)}=5,65\,{\rm V},\,U_1^{(2)}=3,47\,{\rm V},\,I_1^{(2)}=8,6910^{-2}\,{\rm A}.$  Es lässt sich bestätigen

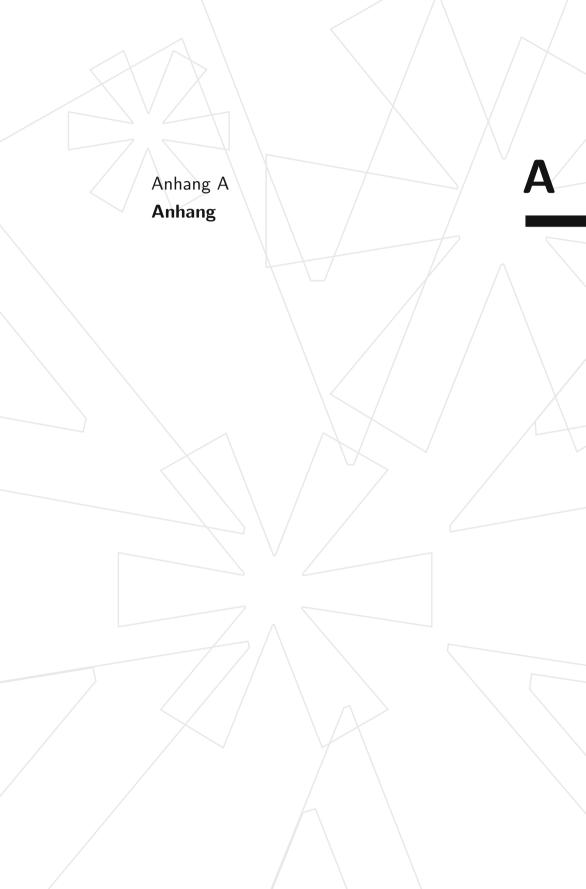
Sonderfälle gestatten Aussagen, die für umkehrbare Zweitore schon genannt wurden. So ergibt

- wechselseitige Spannungsanregung  $U_1^{(1)} = U_2^{(2)}$  bei jeweils Kurzschluss auf der anderen Seite gleiche Kurzschlussströme (dem entspricht die Bedingung  $Y_{21} = Y_{12}$ ) und
- wechselseitige Stromanregung  $I_1^{(1)} = I_2^{(2)}$  bei jeweils Leerlauf auf der anderen Seite gleiche Leerlaufspannungen (dem entspricht die Bedingung  $Z_{21} = Z_{12}$ ).

Das Tellegensche Theorem ist, wie die Reziprozitätsbedingung, ein sehr leistungsfähiges Resultat besonders zur numerischen Auswertung (und Kontrolle) von Netzwerkanalysen. So gibt das Schaltungssimulationsprogramm SPICE bei jeder Arbeitspunktbestimmung die gesamte, in allen Widerständen verbrauchte Leistung automatisch mit aus.

#### Selbstkontrolle Kapitel 4

- 1. Nennen Sie einige Netzwerktheoreme und ihre Anwendung.
- 2. Erläutern Sie die Begriffe "duales" und "äquivalentes" Netzwerk.
- 3. Welche Vorteile bringen duale Netzwerke?
- 4. Erläutern Sie das Reziprozitätstheorem.
- 5. Wie können gesteuerte Quellen Zweipolelemente beeinflussen?
- 6. Was beinhalten die Teilungs- und Versetzungssätze?
- 7. Erläutern sie den Tellegenschen Satz (Grundlagen, wozu dient er).
- 8. Wie lauten der Energieerhaltungssatz, Leistung und Energie in linearen und nichtlinearen resistiven Netzwerken?



	Α	Anhang	395
	A.1	Physikalische Größen und Gleichungen	395
	A.2	Physikalische Größen, Vorzeichen- und Richtungsregeln .	404
^	A.3	Verzeichnis der wichtigsten Symbole	417
$\Delta$	A.4	Literaturverzeichnis	421



## A Anhang

### A.1 Physikalische Größen und Gleichungen

**Physikalische Größe** Physikalische Vorgänge werden durch mathematische Objekte (Zahlen, Vektoren, Funktionen ...) und Beziehungen zwischen ihnen mittels physikalischer Größen beschrieben:

Eine physikalische Größe erfasst Merkmale eines physikalischen Objektes (Eigenschaft, Vorgang, Zustand der Natur und der Medien, in denen sich physikalische Prozesse abspielen), die qualitativ gekennzeichnet und quantitativ bestimmt, also gemessen werden können.

Jede physikalische Größe hat symbolhaft ein Formelzeichen (DIN 1313, DIN 1301-1, DIN 1304-1).

Da physikalische Größen keine Zahlen sind, erfordern Rechenoperationen einige Hinweise:

- es lassen sich nur Größen gleicher Größenart addieren/subtrahieren,
- die Multiplikation-/Division von Größen gleicher und verschiedener Größenart ist zulässig.
- Potenzieren und Radizieren, Differenzieren und Integrieren sind zulässig,
- in den Argumenten transzendenter Funktionen oder Exponenten sind nur Zahlen zulässig, also entweder Größen mit reinem Zahlencharakter oder Produkte physikalischer Größen mit Zahlencharakter. Beispielsweise ist cos t (t Symbol der Größe Zeit) nicht zulässig, jedoch cos  $\omega t$  ( $\omega$  Winkelgeschwindigkeit mit der Dimension 1/Zeit (s. u.)).

Schreibweise Formelzeichen bestehen aus einem Grundzeichen (lateinischer oder griechischer Buchstabe) und einem hoch- oder tiefgestellten Nebenzeichen. Grundzeichen werden immer in Kursivschrift angegeben (DIN 1338), Nebenzeichen dagegen nicht. Die Schreibweise von Vektoren (Tensoren) und Matrizen liegen nach DIN1303, DIN 547 fest. Vektoren werden (im Buch) durch Fettdruck dargestellt, in handschriftlicher Darstellung durch einen Pfeil über dem Symbol. Die Kombination Fettdruck und Pfeil ist manchmal in Bildern üblich, wenn Fettdruck nicht deutlich hervortritt.

In zeitabhängigen physikalischen Größen wird die Zeitabhängigkeit zur Hervorhebung oft explizit ausgedrückt, z.B. für die Spannung u(t). Für Strom und Spannung gilt zudem die Feststellung, dass zeitunabhängige Größen mit großem Buchstaben, zeitabhängige generell mit kleinem Buchstaben darge-

stellt werden (bei Weglassen der expliziten Angabe). Oft muss aus dem Zusammenhang auf die Zeitabhängigkeit geschlossen werden.

#### Arten physikalischer Größen Es gibt drei Arten von physikalischen Größen:

1. Grund- oder Basisgrößen. Das sind naturgegebene, nicht weiter zurückführbare Größen. Ihre Wahl erfolgt nach praktischen Gesichtspunkten im Zusammenhang mit einem Maß- und Einheitensystem. Für Physik und Technik wurden sieben Grundgrößen festgelegt. Ihnen sind Grundeinheiten zugeordnet definiert entweder durch Normale (Prototypen) oder Messvorschriften. In vielen Wissensgebieten reichen drei bis vier Grundgrößen (Tab. A.1) aus, z. B. in der Mechanik die Länge l, Masse m und Zeit t. Die Wärmelehre benötigt zusätzlich die Temperatur als Grundgröße.

Die Grundgrößen der Elektrotechnik sind Länge s, Zeit t, Masse m, und elektrische Ladung Q.

Als Grundeinheit wurde allerdings die der Stromstärke vereinbart. Die elektrische Ladung tritt als neue Grundgröße gegenüber der Mechanik auf. Sie wird nicht durch andere Größen erklärt, sondern dient selbst zur Erklärung anderer Erscheinungen (z. B. Strom, Feldstärke).

- 2. *Definitionsgrößen* (abgeleitete Größenarten) entstehen durch Zusammenfassung mehrerer physikalischer Größen über eine Definitionsgleichung.
- 3. Naturkonstanten mit einem festen Wert.

Dimensionen, Einheiten Jede physikalische Größe hat einen qualitativen und quantitativen Inhalt. Die Qualität drückt sich in der Dimension aus. Damit umfasst dieser Begriff mehr als etwa nur die Abmessung eines Gegenstandes. Wir kennzeichnen Länge, Fläche und Raum durch Angaben einer oder mehrerer Längen und nennen die Länge eindimensional, Fläche zweidimensional usw. Deshalb gilt für den Bereich von Physik und Technik:

Die Dimension kennzeichnet die Qualität einer physikalischen Größe. Sie ist das aus Grundgrößenarten gebildete Potenzprodukt dieser Größe.

Beispielsweise ist die Qualität "Zeit" unabhängig von ihrem Wert und der Angabe in einer bestimmten Einheit. In Kurzform gilt für die Dimension der Größe y: dim  $(y) = \dim(\text{physikalische Größe})$ , also für

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$
 
$$\dim\left(\mathrm{Geschwindigkeit}\right) = \frac{\dim(\mathrm{L\ddot{a}nge})}{\dim(\mathrm{Zeit})},$$

wenn Länge und Zeit als Grundgrößen gewählt werden.

Basisgröße	Formelzeichen	Grundeinheit	Einheitenzeichen
Länge	l	Meter	m
Masse	m	Kilogramm	kg
Zeit	t	Sekunde	S
Elektr. Stromstärke	I	Ampère	A
Absolute Temperatur	T	Kelvin	K
Lichtstärke	$I_{ m v}$	Candela	$\operatorname{cd}$
Stoffmenge	n	Mol	mol

Tabelle A.1. Basis-, SI-Einheiten

Bei der Dimensionsbildung werden in physikalischen Gleichungen eventuell vorhandene Zahlenfaktoren, Infinitesimalzeichen (d, f) sowie Vektoreigenschaften weggelassen. Größen von gleicher Dimension können daher von unterschiedlicher Art sein, z. B. Arbeit und Drehmoment.

#### **Einheit**

Die Quantität einer physikalischen Größe wird immer als Produkt von Zahlenwert und Einheit (bei skalaren Größen) dargestellt.

Physikalische Größe = Zahlenwert  $\cdot$  Einheit.

Nur beide zusammen kennzeichnen die physikalische Größe. Bei Bedarf werden für die physikalische Größe G Zahlwert (in geschweiften Klammern  $\{G\}$ ) und Einheit (in eckigen Klammern [G]) getrennt angegeben

$$G = \{G\} [G]$$
. Physikalische Größe  $G$  (A.1.1)

So muss es heißen: [Ladung] = Coulomb mit 1 C = 1 As, [s] = m Einheit der Länge s ist das Meter.

Beispielsweise hat die physikalische Größe Zeit  $t=3\,\mathrm{s}$  als Qualität die Dimension der Zeit, ihre Quantität 3 ist die dreifache Zeiteinheit. Eine Spannung  $U=230\,\mathrm{V}$  hat den Zahlenwert  $\{U\}=230\,\mathrm{und}$  die Einheit  $[U]=1\,\mathrm{V}$ . Obwohl die physikalische Größe als Produkt von Zahlenwert und Einheit betrachtet wird, steht zwischen beiden kein Multiplikations-, sondern ein Leerzeichen.

Die Quantität einer Größe kann in beliebig vielen Einheiten angegeben werden, es gibt aber nur eine der physikalischen Größe entsprechende Dimension (im gleichen Dimensionssystem). So lässt sich der Wert der physikalischen Größe "Länge" in Kilometern, Metern, Zentimetern usw. angeben, ihre Dimension ist aber stets die "Länge".

Die Einheiten werden, wie die physikalischen Größen, in *Grund*- und *abgeleitete* Einheiten unterteilt. Bestimmte Grundeinheiten liegen durch internationale Vereinbarungen auf der Basis von Messmethoden fest. Letztere können sich im Verlaufe der Zeit verbessern und erfordern dann neue gesetzliche Festlegungen.

So definierte man die Grundeinheit "Meter" für die Grundgröße "Länge" durch das in Paris aufbewahrte Urmeter. Heute wird sie durch die Wellenlänge des zum Leuchten angeregten Gases Krypton bei einer bestimmten Spektrallinie vereinbart.

Auch die ursprüngliche Festlegung der Grundeinheit "Ampère" für die elektrische Stromstärke durch Silberausscheidung aus einem Silbernitrat wurde später durch Bezug auf die Kraftwirkung des Stromes ersetzt.

Für Physik und Technik liegen sieben unabhängige Grundeinheiten durch das international vereinbarte System der SI-Einheiten (SI = Système International d'Unités) fest (Tab. A.1).

Die ersten vier Basisgrößen genügen zur Beschreibung mechanischer und elektromagnetischer Vorgänge:

Die Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampère bilden das MKSA-System (Abkürzung für Meter, Kilogramm, Sekunde, Ampère). Es wird als Teilsystem des SI in der Elektrotechnik ausschließlich verwendet.

Die Wahl der Grundeinheiten hängt von messtechnischen Gesichtspunkten ab. Es müssen nicht die Einheiten der gewählten Basisgrößen sein. So wurde für die Elektrotechnik die Ladung Q als Grundgröße, aber als Grundeinheit die Einheit der Stromstärke I festgelegt.

Als ergänzende Einheiten kommen hinzu:

- der Radiant (rad) für den ebenen Winkel φ
- der Steradiant (sr) für den räumlichen Winkel  $\Omega$ .

Nach internationaler Empfehlung werden auch systemfremde Einheiten in speziellen Gebieten verwendet, wie etwa

- das *Elektronenvolt* 1 eV = 1,60210<sup>-19</sup>J als kinetische Energie, die ein Elektron beim Durchlauf der Spannung 1V im Vakuum erfährt,
- die atomare Masseneinheit 1u (angegeben in kg), die 1/12 der Masse des Kohlenstoffisotops  $^{12}$ C entspricht: 1 u = 1,661·10 $^{-27}$ kg. Mit der relativen Atommasse  $A_r$  (z. B. Cu 63,5) ergibt sich dann die Atommasse zu  $m_A = A_r \cdot u$ , für Cu also  $m_A = 1,055 \cdot 10^{-25}$  kg.

Weitere SI-fremde Einheiten sind kWh, km/h, Ah, min<sup>-1</sup> usw., eine Reihe davon ist gesetzlich zugelassen (z.B. Minute, Stunde, Tag, Liter, Tonne, Bar ...). Nicht mehr zugelassen sind einige früher verwendete Einheiten wie PS, cal, at, kp, Torr

u. a., sie werden aber trotzdem noch verwendet. Ein Beispiel für die Langlebigkeit ist das Pfund (1 pfd  $= 500\,\mathrm{g}$ ) als Gewichtsmaß, das seit über 150 Jahren gesetzlich nicht mehr erlaubt, aber dennoch benutzt wird.

Ein Vorteil der SI-Einheiten liegt in ihrer wechselseitigen Verknüpfung durch den Zahlenfaktor 1 (sog. *kohärente* Einheiten), sodass nichtganzzahlige Umrechnungsfaktoren entfallen. Beispielsweise gilt:  $1 \, \text{Ws} = 1 \, \text{Nm} = 1 \, \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} = 1 \, \text{J}$  (im Vergleich:  $1 \, \text{Ws} = 0.239 \, \text{cal} = 10.2 \, \text{kpcm}$  oder  $1 \, \text{PS} = 736 \, \text{W}$ ).

Abgeleitete Einheiten folgen aus Basiseinheiten über Definitionsgleichungen. Sie tragen aus Zweckmäßigkeitsgründen häufig Namen herausragender Naturforscher (z. B.  $1 \text{ kg m/s}^2 = 1 \text{ Newton} = 1 \text{ N}$ ).

Tab. A.2 stellt zeigt elektrische Größen. Grundsätzlich können die für die Elektrotechnik abgeleiteten Einheiten durch MKSA-Einheiten ausgedrückt werden, es ist aber gängige Praxis, elektrische Einheiten zu verwenden (aufbauend auf den Einheiten Meter (m), Sekunde (s), Volt (V) und Ampère (A)). Augenfällig unhandlich sind MKSA-Einheiten in der technischen Anwendung:  $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2/\,\mathrm{s}^3 = 1\,\mathrm{V}\cdot A$  und für die Spannung  $1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2/\,\big(\,\mathrm{A}\,\mathrm{s}^3\big)$ . Auch die Darstellung der Einheit der Masse durch  $1\,\mathrm{kg} = 1\,\mathrm{Vm}^{-2}\,\mathrm{s}^3\,\mathrm{A}$  ist nicht überzeugender.

Tabelle A.2. Ausgewählte physikalische Größen der Elektrotechnik und deren Einheiten

Physikalische Größe, Formelzeichen	Name, SI-Einheit, Kurzzeichen	Definition Umrechnungen
Kraft F	Newton N	$1\mathrm{N} = 1\mathrm{kg}\;\mathrm{m/s^2}$
Energie $W$	Joule J	1 J = 1 Nm = 1 VAs
Leistung $P$	Watt W	$1 \mathrm{W} = 1 \mathrm{Nm/s} = 1 \mathrm{VA}$
Spannung $U$	Volt V	$1  \mathrm{V} = 1  \mathrm{W/A}$
Ladung $Q$	Coulomb C	$1 \mathrm{C} = 1 \mathrm{As}$
el. Widerstand $R$	Ohm $\Omega$	$1\Omega = 1  \mathrm{V/A}$
el. Leitwert $G$	Siemens S	$1 \mathrm{S} = 1 \mathrm{A/V}$
Kapazität $C$	Farad F	$1 \mathrm{F} = 1 \mathrm{C/V} = 1 \mathrm{As/V}$
el. Feldstärke ${\cal E}$	_	$1 \mathrm{V/m} = 1 \mathrm{W/(Am)}$
el. Flussdichte $D$	_	$1 \mathrm{C/m^2} = 1 \mathrm{As/V}$
mag. Fluss $\Phi$	Weber Wb	$1 \mathrm{Wb} = 1 \mathrm{Vs}$
mag. Flussdichte $B$	Tesla T	$1 \mathrm{T} = 1 \mathrm{Wb/m^2} = 1 \mathrm{Vs/m^2}$
mag. Feldstärke $H$	_	$1\mathrm{A/m}$
Induktivität $L$	Henry H	$1  \mathrm{H} = 1  \mathrm{Wb/A} = 1  \mathrm{Vs/A}$

Vorsätze Abhängig von der Anwendung sind die vereinbarten Einheiten oft deutlich zu klein oder groß. Deshalb wurden Vorsätze zur Bezeichnung dezimaler Teile und Vielfacher von Einheiten geschaffen und gesetzlich eingeführt (Tab. A.3). Sie stehen vor dem Einheitennamen bzw. dem Kurzzeichen der Größe. Vorsätze zur Kennzeichnung positiver Exponenten tragen große, für negative Exponenten kleine Buchstaben. Eine Ausnahme bildet das Kilo (z. B. kg, km). Für die Elektrotechnik sind 3, 6, 9-er Zehnerpotenzen zu bevorzugen. Vorfaktoren wie  $10^2$  (Hekto),  $10^1$  (Deka),  $10^{-1}$  (Dezi) und  $10^{-2}$  (Zenti) sind im täglichen Leben verbreitet, die Längeneinheit Zentimeter sogar durchweg.

Ein Vorsatzzeichen steht ohne Zwischenraum vor dem Einheitenzeichen.

Hinweis: Beim Umgang mit Einheiten beachte man:

- 1. Die gleichzeitige Verwendung mehrerer Vorsätze ist unzulässig: Richtig: 1 nm =  $10^{-9}$  m,  $1 \mu$ s =  $10^{-6}$  s, falsch  $10^{-9}$  m = 1 m ·  $\mu$ m,  $10^{-6}$  s = 1 m · ms.
- 2. Einheit, Vorsatz (und Vorsatzkurzzeichen) gelten als ein Symbol. Es kann ohne Klammerschreibweise zur Potenz erhoben werden: Richtig:  $1 \,\mathrm{km}^3 = \left(10^3 \,\mathrm{m}\right)^3 = 10^9 \,\mathrm{m}^3$ , falsch  $1 \,\mathrm{km}^3 = 10^3 \,\mathrm{m}^3 = \mathrm{k} \left(\,\mathrm{m}^3\right)$ .
- 3. Einheitenkurzzeichen erhalten keine Indizes, diese stehen beim zugehörigen Formelzeichen: Richtig:  $U_{\rm eff}=100\,{\rm V},\ U_{\rm AB}=10\,{\rm V},\ {\rm falsch:}\ U=10\,{\rm V}_{\rm AB}.$
- 4. Verboten sind Kombinationen von Einheitenkurzzeichen und ausgeschriebenem Vorsatz: Richtig:  $\mu$ A (Mikroampère), k $\Omega$  (Kiloohm), falsch: Mikro A, k Ohm, Kilo  $\Omega$ .
- 5. In Tabellenköpfen oder an Koordinatenachsen eignen sich beispielsweise folgende Schreibweisen von Zahlenwerten:  $\frac{I}{A}$ ;  $\frac{I}{1-A}$ ; I/A oder I in A. Nicht zulässig ist I [A], denn Einheiten dürfen nicht in Klammern verwendet werden.

#### Weitere Größenarten Häufig treten noch folgende Größenarten auf:

— *Größenquotient* als Quotient zweier physikalischer Größen und gesprochen: "Zählergröße durch Nennergröße". Unüblich sind "je" und "pro".

Potenz	Name	Symbol	Potenz	Name	Symbol
$10^{18}$	Exa	E	$10^{-3}$	Milli	m
$10^{15}$	Peta	P	$10^{-6}$	Mikro	$\mu$
$10^{12}$	Tera	Τ	$10^{-9}$	Nano	n
$10^{9}$	Giga	G	$10^{-12}$	Piko	p
$10^{6}$	Meg	M	$10^{-15}$	Femto	f
$10^{3}$	Kilo	k	$10^{-18}$	Atto	a

Tabelle A.3. Einheitenvorsätze

Verhältnisgröße als Größenquotient zweier Größen gleicher Art und Dimension,
 z. B. Wirkungsgrad, Dielektrizitätszahl, Verstärkungsfaktor. Spezielle Verhältnisgrößen sind:

```
1\% = 10^{-2} (%-Prozent),

1\text{ppm} = 10^{-6} (ppm – parts per million, Millionstel)

1\text{ppb} = 10^{-9} (ppb – parts per Billion, Milliardstel).
```

- Funktionen von Größen. Oft treten physikalische Größen in Funktionen auf:
  - *Transzendente Funktionen* sind nur für Zahlen definiert. Deshalb dürfen in ihren Argumenten nur Größen der Dimension 1 auftreten. Beispiel

 $u(t) = U \sin(\omega t)$ ,  $\dim(\omega t) = 1$ ;  $i(t) = I \exp(-t/T)$ ,  $\dim(t/T) = 1$ .

Logarithmische Größenverhältnisse werden verwendet, wenn die Größenverhältnisse mehrere Zehnerpotenzen überstreichen.

**Physikalische Gleichung** Verschiedene physikalische Größen sind durch Gesetze verknüpft. Ihre mathematische Form heißt physikalische Gleichung:

Die physikalische Gleichung ist eine funktionelle Verknüpfung zwischen physikalischen Größen.

Physikalische Gleichungen treten als *Grundgleichungen* (für Naturgesetze) und *Definitionsgleichungen* auf. Naturgesetze sind stets reproduzierbare Verkopplungen *artfremder* physikalischer Größen. Nur sie enthalten echte, von der Natur offenbarte physikalische Erkenntnisse. Im Ergebnis von Beobachtungen entstehen dabei *Proportionalbeziehungen*.

So üben beispielsweise zwei Massen  $m_1$ ,  $m_2$  im Abstand l eine Kraft F aufeinander aus:  $F \sim m_1 m_2/l^2$ . Dieser Proportionalzusammenhang geht erst durch Einführung einer Proportionalkonstanten k gemäß

$$F = k \frac{m_1 m_2}{l^2}$$

in eine mathematische Gleichung über. Der Faktor k muss folglich dimensionsbehaftet sein und eine unveränderliche physikalische Größe, eine Naturkonstante, darstellen.

Die Erfahrung zeigt, dass es in der Natur nur endlich viele Grundgesetze gibt. Für die Elektrotechnik gehören die *Maxwellschen Gleichungen* dazu. Die Zahl praktisch benutzter physikalischer Größen ist erheblich größer, als sie aus den Grundgleichungen hervorgeht, denn durch *Definitionsgleichungen* können ständig neue Größen vereinbart werden.

Definitionsgleichungen führen (willkürlich) neu vereinbarte physikalische Größen auf mehrere einfach messbare und bekannte Größen mittels einer eindeutigen Anweisung, der Definition, zurück.

So ist  $v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$  eine Definitionsgleichung. Sie fasst die physikalischen Größen "Weg" und "Zeit" durch die Vorschrift "differenziere nach" zur neuen physikalischen Größe "Geschwindigkeit" zusammen.

Arten physikalischer Gleichungen Physikalische Gleichungen können entweder als *Größen*- oder *zugeschnittene Größengleichungen* aufgestellt werden.

Größengleichung In einer Größengleichung besteht jede Größe aus dem Produkt von Zahlenwert und Einheit. Deshalb müssen beide Seiten der Gleichung nach Zahlenwert und Einheit übereinstimmen. Das gibt eine Rechenhilfe durch *Dimensionskontrolle*, auf die nie verzichtet werden sollte<sup>1</sup>. Man ermittelt den resultierenden Zahlenwert und die Einheit zweckmäßig durch getrennte Zahlenwert- und Einheiten-Rechnung. So kann die Größengleichung

$$v = \frac{s}{t} = \frac{150 \,\mathrm{m}}{10 \,\mathrm{s}} = 15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 15 \frac{10^{-3} \,\mathrm{km}}{1 \,\mathrm{h}/3600} = 54 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$$

statt in der Maßeinheit m/s auch in der Einheit km/h angegeben werden, wenn man die Einheitengleichungen  $1\,\mathrm{m}=10^{-3}\,\mathrm{km}$  und  $1\,\mathrm{s}=1\,\mathrm{h}/3600$  beachtet.

Größengleichungen bieten folgende Vorteile:

- Benutzung beliebiger Einheiten möglich,
- gültig unabhängig vom Dimensionssystem,
- Dimensionskontrolle erhöht die Lösungssicherheit.

Da in Größengleichungen stets die Produkte von Zahlenwert und Einheit ausgewertet werden müssen, entsteht bei häufiger Wiederholung, etwa bei Auswertung von Messreihen mit unveränderlichen Einheiten, ein überflüssiger Rechenaufwand. Er wird durch zugeschnittene Größengleichungen (Zahlenwertgleichungen) vermieden.

**Zugeschnittene Größengleichung** Eine Größengleichung kann direkt auf gewünschte Einheiten *zugeschnitten* werden: man erweitert dazu jede Größe mit der gewünschten Einheit

Größe = 
$$f\left[\left(\frac{\text{Größe}}{\text{gew. Einheit}}\right) \cdot \text{gew Einheit}\right]$$
 (A.1.2)

und ordnet dabei die im Nenner einer jeden Größe stehende Einheit dieser Größe zu (zweckmäßig durch Schrägstrich). Anschließend werden alle im

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Gerade die Zahlenwertrechnung durch Computer-Programme verleitet zur Vernachlässigung der Dimensionskontrolle.

Zähler stehenden Einheiten zu einem Einheitenprodukt zusammengefasst. Es kann beliebig umgeformt werden und als Faktor hinter der Gleichung oder als Divisor unter der Ergebnisgröße auftreten.

Deshalb ist es unzweckmäßig, für eine Größe das gleiche Symbol wie für seine Einheit zu wählen, wie etwa die in der englischsprachlichen Literatur übliche Wahl Voltage (V) für die Spannung und Volt (V) für seine Einheit. Ein Ausdruck  $V=10\,\mathrm{V}$  (soll bedeuten "Spannung beträgt  $10\,\mathrm{V}$ ") würde bei (gedankenloser) Kürzung mit V auf 1=10 führen!

Beispiel A.1.1 Zugeschnittene Größengleichung Gegeben sei U=IR. Daraus soll eine zugeschnittene Größengleichung abgeleitet werden, in der die Spannung U gemessen in kV, der Strom I gemessen in  $\mu A$  und der Widerstand R gemessen in  $M\Omega$  auftreten.

$$U = I \cdot R = \frac{U}{kV} \cdot kV = \frac{I}{\mu A} \mu A \frac{R}{M\Omega} M\Omega$$

 $oder^2$ 

$$\begin{split} \frac{U}{\text{kV}} &= \frac{\mu \text{A} \cdot \text{M}\Omega}{\text{kV}} \cdot \frac{I}{\mu \text{A}} \frac{R}{\text{M}\Omega} = \frac{10^{-6} \, \text{A} \cdot 10^6 \, \text{V}}{10^3 \, \text{V} \cdot \text{A}} \left( \frac{I}{\mu \text{A}} \cdot \frac{R}{\text{M}\Omega} \right) \\ &= 10^{-3} \left( \frac{I}{\mu \text{A}} \cdot \frac{R}{\text{M}\Omega} \right) = 10^{-3} \frac{I}{\mu \text{A}} \cdot \frac{R}{\text{M}\Omega} \end{split}$$

bzw. als physikalische Größe

$$U = \underbrace{10^{-3} I / \mu \mathbf{A} \cdot R / \mathbf{M}\Omega}_{\mathbf{Zahl}} \cdot \underbrace{\mathbf{kV}}_{\mathbf{Einheit}}.$$

Die zu den Größen gehörenden Einheiten müssen in einer Legende angegeben werden.

Besonders zweckmäßig für zugeschnittene Gleichungen ist die Wahl "selbstkonsistenter Einheiten", die einen Zahlenfaktor 1 ergeben:

$$\frac{V}{k\Omega\cdot mA} = \frac{mV}{\Omega\cdot mA} = \frac{V}{M\Omega\cdot \mu A} = 1.$$

Bei Angabe des Stromes in  $\mu$ A und des Widerstandes in M $\Omega$  ergibt sich die Spannung in V. Ganz entsprechend gilt beispielsweise für die Ladungsbeziehung  $Q=C\cdot U$ 

$$\frac{Q}{C \cdot U} = 1 = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}} = \frac{\mathbf{pC}}{\mathbf{nF} \cdot \mathbf{mV}} = \frac{\mu \mathbf{C}}{\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}} = \frac{\mathbf{nC}}{\mu \mathbf{F} \cdot \mathbf{mV}}.$$

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Gelesen "U gemessen in Kilovolt" oder "U in Kilovolt", obwohl es sich um die Division der Größe durch eine Einheit handelt.

Durch Weglassen der Einheiten in den Gleichungen entsteht die (früher oft benutzte) Zahlenwertgleichung. Sie verwendet für die einzelnen Größen nur eine festgelegte Einheit. Beispielsweise gehört zur Größengleichung die untere Zahlenwertgleichung:

Größengleichung: 
$$v=\frac{s}{t}$$
 Zahlenwertgleichung:  $\{v\}=3, 6\cdot\frac{\{s\}}{\{t\}}=3, 6\cdot\frac{50}{5}=36, 6.$ 

Wird ein Weg  $s=50\,\mathrm{m}$  in der Zeit  $t=5\,\mathrm{s}$  zurückgelegt, so beträgt die Geschwindigkeit  $v=s/t=50\,\mathrm{m/5}\,\mathrm{s}=10\,\mathrm{m/s}=36\,\mathrm{km/h}$ , da  $1\,\mathrm{m/s}=1\cdot\left(10^{-3}\,\mathrm{km}\right)/\left(3600^{-1}\,\mathrm{h}\right)=3,6\,\mathrm{km/h}$ . Diese Zahlenwertgleichung verlangt die Vereinbarung v in km/h, s in m und t in s. Die Schreibweise mit geschweiften Klammern ist korrekt, wenn auch nicht verbreitet.

Da Rechnerprogramme (von solchen mit symbolischer Auswertung abgesehen) keine Einheiten verarbeiten, hat sich für Zahlenwertgleichungen die Benutzung der Grundeinheiten (z. B. U in V, I in A, R in  $\Omega$ ) eingebürgert. Zahlenwertgleichungen führen leicht zu schwer kontrollierbaren Fehlern, sie erfordern deshalb große Vorsicht.

Verwendung normierter Größen Oft ist der Übergang zu normierten Größen vorteilhaft (dimensionslose allgemeine Darstellung, vorteilhaftere Zahlenrechnung, Senkung des Rechenaufwandes).

Normierte Größen sind Zahlenwerte, die durch Division der jeweiligen physikalischen Größe durch eine (vereinbarte) physikalische Normierungsgröße entstehen.

Beispiel A.1.2 Normierung Sind  $v_0$ ,  $s_0$ ,  $t_0$  Normierungsgrößen (etwa 5 m/s, 3 m und 10 s), so ergeben die *normierten* Größen  $v_n = v/v_0$ ,  $s_n = s/s_0$  und  $t_n = t/t_0$ 

$$v_{\rm n} = \frac{v}{v_0} = \frac{s}{t \cdot v_0} = \frac{s_{\rm n} \cdot s_0}{t_{\rm n} \cdot t_0} \cdot \frac{1}{v_0} = \frac{3\,{\rm m}}{10\,{\rm s} \cdot 5\,{\rm ms}^{-1}} \cdot \frac{s_{\rm n}}{t_{\rm n}} = \frac{3}{50}\frac{s_{\rm n}}{t_{\rm n}}.$$

Für die (zweckmäßigere) Normierungsgeschwindigkeit  $v_0 = s_0/t_0 = 0, 3 \,\mathrm{m/\,s}$  wird der Zahlenfaktor rechts zu 1.

### A.2 Physikalische Größen, Vorzeichenund Richtungsregeln

Außer Zahlenwert und Einheiten erfordern zahlreiche physikalische Größen noch eine *Richtungsangabe*: sie haben einen *Richtungssinn*. Das gilt außer für vektorielle physikalische Größen auch für einige (elektrotechnische) skalare physikalische Größen durch Beachtung von Vorzeichen.

Vektorielle physikalische Größen Physikalische Größen mit bestimmter Richtung im Raum heißen Vektoren oder vektorielle physikalische Größen. Sie sind

stets einem Raumpunkt zugeordnet und erfordern zur eindeutigen Kennzeichnung die Angabe des Betrages und der Richtung. Sie werden durch Symbole (oder übergesetzten Pfeil) bezeichnet und im Raum durch *gerichtete Strecken* (Pfeile) dargestellt.

Der Betrag eines Vektors ist das Produkt von Maßzahl und Einheit. Er drückt sich z. B. in der Länge des Pfeiles aus, geschrieben entweder mit Betragsstrichen oder kursiv  $|\boldsymbol{v}| = v$ . Die Richtung eines Vektors wird durch seinen Einheitsvektor  $\boldsymbol{e}$  (dimensionslos, Betrag 1) gekennzeichnet

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \, \mathbf{e}_{\mathbf{v}} = v \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}} = \{v\} \, [v] \cdot \mathbf{e}_{\mathbf{v}}. \tag{A.2.1a}$$

In einem Koordinatensystem, z. B. dem x, y, z-System, gilt

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{x} + \boldsymbol{v}_{y} + \boldsymbol{v}_{z} = v_{x}\boldsymbol{e}_{x} + v_{y}\boldsymbol{e}_{y} + v_{z}\boldsymbol{e}_{z} = v_{x}\boldsymbol{i} + v_{y}\boldsymbol{j} + v_{z}\boldsymbol{k}.$$
 (A.2.1b)

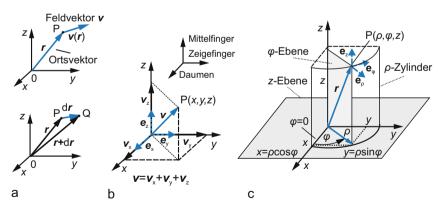
Die Einheitsvektoren  $e_x$ ,  $e_y$ ,  $e_z$  sind zueinander orthogonal (Abb. A.2.1a) und bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem (Rechtsschraubenregel): Die Drehbewegung einer Schraube (auf kürzestem Weg) von  $e_x$  nach  $e_y$  bewirkt eine Bewegung in  $e_z$ -Richtung (Abb. A.2.1b).

Die Komponenten des Vektors lauten in kartesischen Koordinaten (Abb. A.2.1c):

$$v_{\rm x} = |\mathbf{v}| \cos \angle (\mathbf{v}, \mathbf{e}_{\rm x}), v_{\rm y} = |\mathbf{v}| \cos \angle (\mathbf{v}, \mathbf{e}_{\rm y}), v_{\rm z} = |\mathbf{v}| \cos \angle (\mathbf{v}, \mathbf{e}_{\rm z})$$
 (A.2.1c)

mit dem Betrag v aus den Komponenten

$$v = \sqrt{v_{\rm x}^2 + v_{\rm y}^2 + v_{\rm z}^2}.$$



**Abb. A.2.1.** Vektordarstellung. (a) Orts- und Feldvektor. (b) Vektor  $\boldsymbol{v}$  im kartesischen Koordinatensystem und Rechte-Hand-Regel. (c) Ortsvektor im zylindrischen Koordinatensystem

Die Richtung eines Vektors liegt durch seine Definition fest. Er erhält positives Vorzeichen, wenn diese Richtung mit der geometrischen Orientierung einer festgelegten Linie übereinstimmt.

Ein spezieller Vektor ist der Ortsvektor (hier im kartesischen Koordinatensystem)

$$r = xe_x + ye_y + ze_z$$
 mit  $r = |r| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Er zeigt vom Koordinatenursprung zu einem Raumpunkt P und hat die Länge r (Abb. A.2.1a).

In elektromagnetischen Feldern treten Linien-, Flächen- und Volumenintegrale auf, die zwangsläufig differenzielle Längen-, Flächen- und Volumenelemente einschließen. Sie entstehen durch Verschiebung der Koordinaten eines Punktes um unendlich kleine Beträge. So unterscheiden sich zwei benachbarte Punkte P(x, y, z) und Q(x + dx, y + dy, z + dz) (Abb. A.2.1a) um den differenziellen Längen- oder Ortsvektor dr

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_{x}dx + \mathbf{e}_{y}dy + \mathbf{e}_{z}dz \text{ mit } dr = |d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^{2} + (dy)^{2} + (dz)^{2}}$$

in Richtung der zugeordneten Koordinaten. Er heißt auch vektorielles Wegelement oder Linienelement der Länge dr.

Aus Zweckmäßigkeitsgründen werden außer dem kartesischen Koordinatensystem noch weitere verwendet, insbesondere zylindrische und sphärische oder Kugel-Koordinaten

- zylindrische Koordinaten  $(\rho, \varphi, z)$  mit  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , sphärische Koordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$  mit  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Beispielsweise lauten der Vektor v und der Ortsvektor r in Zylinderkoordinaten  $\mathbf{v} = v_{\rho} \mathbf{e}_{\rho} + v_{\varphi} \mathbf{e}_{\varphi} + v_{z} \mathbf{e}_{z}$  und  $\mathbf{r} = \mathbf{e}_{\rho} \rho + \mathbf{e}_{\varphi} \rho \varphi + \mathbf{e}_{z} z$ , d $\mathbf{r} = \mathbf{e}_{\rho} \mathrm{d} \rho + \mathbf{e}_{\varphi} \rho \mathrm{d} \varphi + \mathbf{e}_{\varphi} \rho \mathrm{d} \varphi$  $e_z$ dz. Dabei zählt der Winkel  $\varphi$  (beginnend auf der positiven x-Achse) mit  $\varphi = 0$  entgegen dem Uhrzeigersinn positiv (Abb. A.2.1c). Analog verläuft die Darstellung in sphärischen Koordinaten. Die Vektoren verschiedener Koordinatensysteme lassen sich ineinander umrechnen.

Typische Vektoren der Elektrotechnik sind die elektromagnetischen Feldgrößen: elektrische und magnetische Feldstärke E bzw. H (beides Feldstärkevektoren) sowie Stromdichte J, Verschiebungsdichte D und die magnetische Induktion  $\boldsymbol{B}$  als Flussdichtevektoren.

Für das Rechnen mit vektoriellen Größen gelten die Regeln der Vektorrechnung, insbesondere die Skalar- und Vektorprodukte sowie die sog. Feldintegrale für Feldgrößen.

Skalarprodukt Zwei Vektoren u und v haben das Skalar- oder Punktprodukt

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (u_{x} \mathbf{e}_{x} + u_{y} \mathbf{e}_{y} + u_{z} \mathbf{e}_{z}) \cdot (v_{x} \mathbf{e}_{x} + v_{y} \mathbf{e}_{y} + v_{z} \mathbf{e}_{z})$$
$$= u_{x} v_{x} + u_{y} v_{y} + u_{z} v_{z}$$

(explizit gekennzeichnet durch einen Punkt) mit einem Skalar als Ergebnis. Dabei ist  $|v|\cos(u,v)$  die Projektion von v auf u bzw.  $|u|\cos(u,v)$  die Projektion von u auf v (Abb. A.2.2a). Es wird maximal, wenn beide Vektoren parallel verlaufen. Das Punktprodukt zweier Einheitsvektoren mit sich selbst hat den Wert 1, sonst null.

Vektorprodukt Das Vektor- oder Kreuzprodukt der Vektoren u und v

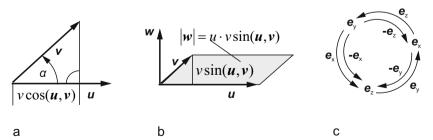
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} \quad \text{mit} \ |\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| |\boldsymbol{v}| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$$

(explizit gekennzeichnet durch ein Kreuz) ergibt einen Vektor  $\boldsymbol{w}$  senkrecht auf der durch die Vektoren  $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$  gebildeten Ebene von  $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$  und  $\boldsymbol{w}$  (Rechtsdreibein mit dem Betrag  $|\boldsymbol{w}|$ ).  $|\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}|$  ist gleich der von  $\boldsymbol{u}$  und  $\boldsymbol{v}$  aufgespannten Fläche, als Winkel zwischen  $\boldsymbol{u}$  und  $\boldsymbol{v}$  gilt der spitze Winkel. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren wird maximal, wenn beide senkrecht aufeinander stehen und es verschwindet, wenn beide parallel verlaufen. Im letzteren Fall entsteht ein Nullvektor, dessen sämtliche Komponenten verschwinden.

In Komponentenschreibweise lautet das Kreuzprodukt in kartesischen Koordinaten

$$\mathbf{w} = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{x} & \mathbf{e}_{y} & \mathbf{e}_{z} \\ u_{x} & u_{y} & u_{z} \\ v_{x} & v_{y} & v_{z} \end{vmatrix}$$
$$= (u_{y}v_{z} - u_{z}v_{y})\mathbf{e}_{x} + (u_{z}v_{x} - u_{x}v_{z})\mathbf{e}_{y} + (u_{x}v_{y} - u_{y}v_{x})\mathbf{e}_{z}.$$

Daraus resultieren als Sonderfälle  $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = 0$  und  $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$  (Kreuzprodukt nicht kommutativ). Durch zyklische Vertauschung der Indizes folgt aus der ersten Komponente die zweite und daraus die dritte. Für die Ein-



**Abb. A.2.2.** Veranschaulichung von Produktbildungen. (a) Punktprodukt. (b) Kreuzprodukt. (c) Umlauffolge der Einheitsvektoren zur Kreuzproduktbildung

heitsvektoren (Abb. A.2.2c) gilt zwangsläufig:  $e_x \times e_y = e_z$ ,  $e_y \times e_z = e_x$ ,  $e_z \times e_x = e_y$ .

Skalare physikalische Größen physikalischer Richtungssinn Physikalische Größen ohne Richtung im Raum heißen skalare physikalische Größen oder Skalare. Sie sind durch Angabe eines Zahlenwertes und der Einheit vollständig bestimmt. Beispiele: Arbeit W, Masse m, Leistung P, Temperatur T u. a. Manche skalare Größen bedürfen zusätzlich eines Vorzeichens, wie z. B. die Ladung. "Positiv" und "negativ" drücken wohl unterschiedliche Qualitäten aus, doch besteht kein Zusammenhang zu einer Richtungsaussage.

Einige skalare Größen der Elektrotechnik, wie Strom, Spannung, magnetischer Fluss und magnetische Spannung, können je nach der gegenseitigen Lage der Vektoren, aus denen sie durch skalare Produkte gebildet werden, positiv oder negativ sein. Wir erfassen diese (stets notwendige) Vorzeichenvoraussage durch den Begriff physikalischer Richtungssinn und seinen Vergleich mit einem Bezugssinn, Bezugs- oder Zählpfeil (DIN 5489, s. u.).

Feldintegrale Bei der Berechnung elektromagnetischer Felder treten typische Linien-, Flächen- und Volumenintegrale auf. Weil sie jeweils nur Produkte aus Integrand und einem Differenzial aufsummieren, bestimmt die Natur des Produktes, ob es sich um ein Skalar- und Vektorintegral handelt. Stets ist dabei die Kenntnis differenzieller Längen-, Flächen- und Volumenelemente im jeweiligen Koordinatensystem erforderlich.

Zu den Skalarintegralen (mit einem Skalar als Produkt) zählen

$$\int\limits_C \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},\ \, \text{(Linien-I.)}\ \, \int\limits_A \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{A}\ \, \text{(Flächen-I.)},\ \, \int\limits_V u\cdot\mathrm{d}V\ \, \text{(Volumen-I.)},$$

dagegen lauten die entsprechenden Vektorintegrale

$$\int\limits_{C} u \mathrm{d} \boldsymbol{r} \text{ (Linien-I.) } \int\limits_{A} \boldsymbol{u} \times \mathrm{d} \boldsymbol{A} \text{ (Flächen-I.)}, \int\limits_{V} \left(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\right) \mathrm{d} V \text{ (Volumen-I.)}.$$

Typische Beispiele solcher Integrale sind etwa Spannung und Strom dargestellt aus den zugehörigen Feldgrößen

$$\int_{C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{A}^{B} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = U_{AB}, \quad \oint_{C} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}, \quad \iint_{A} \boldsymbol{J} \cdot d\boldsymbol{A} = I$$

u. a. Wir beschränken uns hier auf generelle Erläuterungen, die Auswertung solcher Integrale muss in zweckmäßigen Koordinatensystemen erfolgen.

**Linienintegral** Die gewöhnliche Integration zwischen den Punkten A und B bedeutet Berechnung des Skalarintegrals a)

$$L = \int_L \mathrm{d}s$$
 a),  $L = \int_L \mathrm{d}s$  b),

mit der tatsächlichen Länge L als Ergebnis (Abb. A.2.3a). Das Vektorintegral b) hingegen beinhaltet vektorielles Aufsummieren aller Elemente ds zwischen Beginn und Ende des Integrationsweges und ergibt den  $gerichteten \ Abstand$  L zwischen A und B (Abb. A.2.3b).

Von einem Linienintegral spricht man auch, wenn eine Funktion f(x) zwischen zwei Grenzen x = A und B bestimmt werden soll (Abb. A.2.3c)

$$F_{AB} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f_{i} \cdot \Delta x_{i} = \int_{A}^{B} f(x) dx.$$

Dabei ist  $f_i$  der Wert f(x) beim Segment  $\Delta x_i$ . Diese Festlegung des Linienintegrals lässt sich auf eine Kurve C im dreidimensionalen Raum ausdehnen, in dem ein Skalarfeld f herrscht (Abb. A.2.3c). Die Längenelemente sind jetzt Vektoren. Das Linienintegral lautet ausgedrückt als Grenzwert der Summe

$$m{f}_{\mathrm{AB}} = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \ n o \infty}} \sum_{i=1}^n f_{\mathrm{i}} \cdot \Delta m{s}_{\mathrm{i}} = \int_A^B f \cdot \mathrm{d} m{s}.$$

Dabei ist  $f_i$  eine Skalarfunktion innerhalb des Längenelementes  $\Delta s_i$  und das Integral ein Vektor.

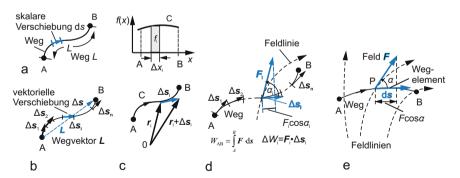


Abb. A.2.3. Linienintegral. (a) Integration des Skalars ds über den Weg L. (b) Integration des Vektors ds über den Weg L. (c) Linienintegral einer stetigen Funktion und differenzielles Wegelement auf einem Pfad C im dreidimensionalen Raum. (d) Veranschaulichung des Linienintegrals Arbeit  $W_{\rm AB}$  im Kraftfeld, Bestimmung der Komponente eines Vektors längs eines Weges. (e) Linienintegral Arbeit W in einem Kraftfeld F, angegeben ist das Skalarprodukt  $F \cdot ds$  in einem Punkt P auf dem Weg

Ein Linienintegral kann auch für ein Vektorfeld  ${\pmb F}$  mit einem Wegelement d ${\pmb s}$  längs einer Linie  $A\dots B$  im Raum definiert werden. Es ist ein Skalar. Wird beispielsweise ein Körper im Punkt A (Abb. A.2.3d) durch die Kraft  ${\pmb F}$  längs des Wegstückes  $\Delta {\pmb s}$  nach Punkt B verschoben, dann leistet sie an ihm die Arbeit

$$\Delta W = F \cdot \Delta s \cos(\mathbf{F}, \Delta \mathbf{s}) = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s}. \tag{A.2.2}$$

Das gilt, solange sich die Kraft F längs des zurückgelegten Weges  $\Delta s$  nicht ändert. Dann verlaufen alle Kraftlinien parallel und die Kraft hat überall die gleiche Stärke: homogenes Kraftfeld mit skalarem Produkt der beiden Vektoren F und  $\Delta s$ .

Ändert sich dagegen die Kraft räumlich (Abb. A.2.3d), so zerlegen wir den Gesamtweg von A nach B in n kleine, gerade Stücke der Länge  $\Delta s$  und definieren die Vektoren  $\Delta s_i$ . Längs eines solchen Weges ändert sich die Kraft  $F_i$  praktisch nicht und wir können wieder Gl. (A.2.2) verwenden: es wird die Projektion der Kraft F auf die Richtung des Wegelementes  $\Delta s_i$  gebildet oder nur die tangential zum Wegelement wirkende Komponente berücksichtigt. Dann ist die Gesamtarbeit  $W_{AB}$  die Summe der Teilarbeiten  $\Delta W_i$  längs der einzelnen Wegstücke:

$$W_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i. \tag{A.2.3}$$

Das Ergebnis verbessert sich mit zunehmender Wegunterteilung, also steigender Zahl n der Wegelemente. Im Grenzfall  $n \to \infty$ , d. h.  $\Delta s_i \to 0$  geht die Summe in das Integral über und aus  $\Delta s$  wird das vektorielle Wegelement ds (Abb. A.2.3e):

$$W_{AB} = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_{i} \cdot \Delta \mathbf{s}_{i} = \int_{A}^{B} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

$$= \int_{A}^{B} \mathbf{F}_{t} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A}^{B} F \cdot ds \cos \angle (\mathbf{F}, d\mathbf{s}) \quad \text{Linienintegral.}$$
(A.2.4)

Das Linienintegral  $W_{\rm AB}$  ist der Integral der Tangentialkomponente eines Vektors F längs eines Weges s zwischen den Punkten A und B.

Die Arbeit  $W_{\rm AB}$  kann durch jede der drei Formen bestimmt werden. Ihr physikalischer Richtungssinn stimmt mit der Wegrichtung von der unteren Grenze A längs einer Linie zur oberen B überein, wenn das Skalarprodukt von F und ds positiv ist, also  $\angle(F, ds) < \pi/2$  gilt. So liegt der Weg fest. Beispielsweise ist die Spannung U über das Linienintegral der elektrischen

Feldstärke  $\boldsymbol{E}$  definiert, deshalb hat sie als Skalargröße einen *physikalischen Richtungssinn*.

Das Linienintegral über einen geschlossenen Weg heißt Ring- oder Umlaufintegral gekennzeichnet durch einen Kreis am Integralzeichen:  $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ . Dieses Kurvenintegral wird auch als Zirkulation des Vektorfeldes  $\mathbf{F}$  längs des geschlossenen Weges C bezeichnet. Das Linienintegral hängt i. a. vom Anfangsund Endpunkt des Integrationsweges und dem eingeschlagenen Weg ab. Es wird aber wegunabhängig, falls es längs einer geschlossenen Kurve verschwindet. Ein solches Feld ist wirbelfrei (gleichwertig mit der Aussage, dass keine in sich geschlossenen Feldlinien existieren, das gilt beispielsweise für das elektrostatische Feld).

Ein wirbelfreies Vektorfeld heißt gleichwertig konservativ oder Potenzialfeld mit folgenden weiteren Eigenschaften:

- das Linienintegral längs einer Kurve C zwischen zwei Punkten ist wegunabhängig,
- der Feldvektor  $\boldsymbol{F}$  kann stets als *Gradient einer Potenzialfunktion*  $\varphi$  dargestellt werden,
- das Skalarfeld  $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$  ist das vollständige Differenzial einer Potenzialfunktion  $\varphi$ :  $d\varphi = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ,
- -jedes homogene Feld ist wirbelfrei, denn es gilt wegen  $\boldsymbol{F}=\mathrm{const}$

$$\oint_{\text{geschl.Weg}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \equiv \mathbf{F} \cdot \oint_{\text{geschl.Weg}} d\mathbf{s} = 0.$$

**Vektorielles Linienintegral** Neben dem skalaren gibt es noch das vektorielle Linienintegral

$$L = \lim_{\substack{\Delta s \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} F_i \times \Delta s_i = \int_A^B F \times ds$$
. vektorielles Linienintegral

Es tritt z.B. bei der Berechnung des magnetischen Feldes eines linienhaften elektrischen Stromes im Raum auf.

Flächenintegral Zur Berechnung des Flächenintegrals eines Skalar- oder Vektorfeldes wird eine gegebene Fläche in (unendlich) viele Teilflächen  $\Delta A_i$  zerlegt (wobei jede einen Flächenvektor hat) und über die Gesamtfläche summiert (integriert). Für ein Skalarfeld f ergibt sich dann das Flächenintegral

$$\boldsymbol{A} = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ \Delta n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta \boldsymbol{A}_i = \int_{A} f \cdot d\boldsymbol{A} \quad \text{Flächenintegral.}$$

Es handelt sich um einen Vektor,  $f_i$  ist der Wert der Skalarfunktion über das vektorielle Flächenelement  $\Delta A_i$  (Abb. A.2.4a).

Skalares Flächenintegral, Flussintegral Ganz entsprechend kann ein skalares Flächenintegral als Punktprodukt eines Vektorfeldes v (z. B. der Geschwindigkeit) mit jedem Flächenelement  $\Delta A_i$  (und Summation) gebildet werden (Abb. A.2.4a)

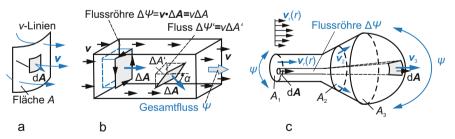
$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Delta \Psi_{i} = \lim_{\substack{\Delta A \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i}^{n} \boldsymbol{v}_{i} \cdot \Delta \boldsymbol{A}_{i} = \int_{\text{Fläche } A} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A} \equiv \iint_{A} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A}. \quad (A.2.5)$$

Es heißt gleichwertig auch *Fluss eines Vektors*, hier der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$ . Gleichwertige Schreibweisen lauten

$$\Psi = \int\limits_{\text{Fläche }A} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{A} = \int\limits_{A} v_{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{d}A = \int\limits_{A} v \cdot \mathrm{d}A \cos \angle \left(\boldsymbol{v}, \mathrm{d}\boldsymbol{A}\right). \text{ Flussintegral (A.2.6)}$$

Das Flussintegral ist das Integral der Normalkomponente des Vektors  $\mathbf{v}$  über eine Fläche  $\mathbf{A}$ , es heißt auch Fluss  $\Psi$  des Vektors  $\mathbf{v}$  durch eine offene oder geschlossene Fläche  $\mathbf{A}$ . Der differenzielle Flächenvektor steht dabei senkrecht auf dem zugeordneten Flächenelement.

Der Vektor v, der den Fluss bildet, ist die *Flussdichte*. Sie drückt ersatzweise den Feldvektor einer "Strömungsgröße" aus, im elektromagnetischen Feld also J, B, D, nicht aber eine Feldstärkegröße wie E oder H. Gleichwertige Bezeichnungen zum Flussintegral eines Vektorfeldes F sind "*Fluss*" des Vektors F durch die Fläche A oder *Flächenintegral des Vektorfeldes* F über eine orientierte Fläche A.



**Abb. A.2.4.** Fluss eines Vektorfeldes. (a) Oberfläche mit differenziellem Oberflächenelement. und Fluss eines Vektors  $\boldsymbol{v}$  durch eine gekrümmte Fläche A. (b) Flussbegriff im homogenen Feld mit dem Teilfluss  $\Delta\Psi=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$  durch eine Fläche  $\Delta A$ . Er hängt von der senkrecht zu  $\boldsymbol{v}$  vorhandenen Fläche  $\Delta A'$  ab. (c) Flussbegriff in einem Radialkörper bei radialer Geschwindigkeitsverteilung und unterschiedlichen Querschnitten. Stets herrscht der gleiche Fluss

Was bedeutet der Flussbegriff? Gegeben ist eine Wasserströmung, die mit homogener Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  dahinfließt. Die gesamte Strömung stellt einen Fluss dar. Wir wählen daraus einen Ausschnitt (Abb. A.2.4b), eine sog. Flussröhre mit dem Teilfluss  $\Delta\Psi$  durch die zugehörige Teilfläche  $\Delta A'$  (senkrecht zu  $\boldsymbol{v}$  stehend. Durch diese Flussröhre strömt während der Zeit dt die Flüssigkeitsmenge  $\Delta\Psi$ dt mit  $\Delta\Psi=|\boldsymbol{v}|\Delta A'=|\boldsymbol{v}|\Delta A\cos\alpha$ . Für eine Fläche  $\Delta A$  (mit dem Normalenvektor  $\boldsymbol{n},\Delta A=\boldsymbol{n}\Delta A$ ), die um den Winkel  $\alpha$  gegen  $\Delta A'$  geneigt ist (mit  $\Delta A'=\Delta A\cos\alpha$ ) beträgt dann der Teilfluss

$$\Delta \Psi = \mathbf{v} \cdot \Delta A = |\mathbf{v}| \cdot |\Delta \mathbf{A}| \cos \angle (\mathbf{v}, \Delta \mathbf{A}). \tag{A.2.7a}$$

Der gesamte Fluss  $\Psi$  durch die Fläche ergibt sich durch Summation aller Teilflüsse, im homogenen Strömungsfeld also

$$\Psi = \sum \Delta \Psi = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}. \tag{A.2.7b}$$

Bei *inhomogenem* Geschwindigkeitsfeld  $\boldsymbol{v}$  zerlegen wir die Gesamtfläche in n Teilflächen mit den Flächenvektoren  $\Delta \boldsymbol{A}_i$   $(i=1\dots n)$ . Jede Teilfläche führt den Teilfluss  $\Delta \Psi_i$  gebildet mit der dort herrschenden Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v}_i$ . Der Gesamtfluss aller Flächen entsteht durch Summation über alle Flussröhren  $\Delta \Psi_i = \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{A}_i$  des Vektors  $\boldsymbol{v}$ :

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n} \Delta \Psi_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{A}_i. \tag{A.2.8}$$

Das führt für  $n \to \infty$  mit der unendlich kleinen Teilfläche d $A_i$  durch Integration zur Flussdefinition Gl. (A.2.5).

Die Richtung von d $\boldsymbol{A}$  zeigt bei geschlossener Fläche stets in Normalrichtung nach außen. Bei offener Fläche steht d $\boldsymbol{A}$  auf der Seite der Fläche, *aus* der ein angenommener Bezugspfeil herauszeigt: bei geschlossener Fläche (z.B einer Kugel) zeigt dann d $\boldsymbol{A}$  nach außen, bei offener Fläche wird die Randkurve der Fläche so durchlaufen, dass mit der Flächennormalen eine Rechtsschraube entsteht.

Weil Flächenelement d $\boldsymbol{A}$  und Flussdichtevektor  $\boldsymbol{v}$  je eine Richtung haben, sich das aber im Skalarprodukt nicht ausdrückt, muss ein *physikalischer Richtungssinn* des Flusses  $\Psi$  vereinbart werden: man setzt ihn übereinstimmend mit der (mittleren) Richtung des Vektors  $\boldsymbol{v}$  an, wenn  $\boldsymbol{v}$  mit der Flächennormalen des Flächenelementes d $\boldsymbol{A}$  einen spitzen Winkel  $\angle (\boldsymbol{v}, \mathrm{d}\boldsymbol{A}) < \pi/2$  (positives Skalarprodukt beider Größen, s. o.) bildet. (Stumpfer Winkel  $\angle (\boldsymbol{v}, \mathrm{d}\boldsymbol{A}) > \pi/2$  ergibt negatives Skalarprodukt und die Zählpfeilrichtung kehrt sich um).

Sonderfälle zum Flussbegriff sind

— gleiche Richtung der Vektoren 
$$\boldsymbol{v}$$
 und d $\boldsymbol{A} \colon \Psi = \iint\limits_A \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}A$ 

— bei homogenem Feld ( $\boldsymbol{v}$  über den Querschnitt konstant)  $\Psi = v \iint_A \mathrm{d}A = v \cdot A$ . Dann ist der Fluss das Produkt von Flussdichte (Betrag des Vektors  $\boldsymbol{v}$ ) und durchsetzter Fläche A.

Geht die Fläche A in eine geschlossene Oberfläche eines Volumens über – eine sog.  $H\"{u}llfl\"{a}che$  – so wird Gl. (A.2.6) zum  $Oberfl\"{a}chen$ - oder  $H\"{u}llintegral$  (Kreis im Integralzeichen)

$$H = \iint_{A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_{\text{Oberfläche } A} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \tag{A.2.9}$$

Sein Wert H hängt vom Problem ab: umschließt z. B. die Hülle eine Ladung Q, dann ist der Hüllenfluss  $Q = \Psi$  das Hüllintegral über die Verschiebungsflussdichte  $\boldsymbol{D}$  (entspricht hier  $\boldsymbol{v}$ ), im Strömungsfeld entspricht  $\boldsymbol{v}$  der Stromdichte  $\boldsymbol{J}$ , dem Fluss der Strom und das Hüllintegral verschwindet (Grundlage des Knotensatzes).

Im Sprachgebrauch verbindet man mit dem Begriff "Fluss" immer etwas Fließendes, Dahinströmendes. Das gilt z.B. für die Stromstärke (dahinfließende Ladungsträger), aber nicht beim Verschiebungs- und magnetischen Fluss. Begründung: der Fluss eines Vektors ist eine mathematische Festlegung nach Gl. (A.2.6).

Der Flussbegriff entstammt der Strömungslehre. Dort ist das Vektorfeld das Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. In der Elektrotechnik tritt der Begriff mehrfach auf: Zugeordnet sind

- der magnetische Fluss  $\Phi$  der Induktionsdichte B,
- der elektrische Fluss  $\Psi$  der elektrischen Erregung D,
- der Leitungsstrom I der Stromdichte J und
- die induzierte Spannung (beim Induktionsgesetz) der zeitlichen Flussänderung.

Beispiel: Wir betrachten eine trichterförmige Anordnung mit gewölbter Austrittsoberfläche (Trichter einer Gießkanne, Abb. A.2.4c), durch den eine inkompressible Flüssigkeit (Wasser) fließt. Jeder Rohrquerschnitt führt das gleiche Flüssigkeitsvolumen je Zeiteinheit, also den Fluss

Fluss 
$$\Psi = \frac{\text{Volumen}}{\text{Zeitspanne}} = \iint_{A} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{A}.$$

Links – am Querschnitt  $A_1$  – tritt das Wasser ein, dort wirkt (durch Reibung an der Rohrwand) eine ortsabhängige Geschwindigkeit (Betrag abhängig vom Radius), die v-Linien sind aber parallel gerichtet. Im Trichter (Querschnitt  $A_2$ ) ändert sich die Geschwindigkeit nach Richtung und Betrag, jetzt abhängig vom Radius und der Längskoordinate im Trichter. An der gewölbten Oberfläche  $A_3$  stim-

men (aus Symmetriegründen) Geschwindigkeitsrichtung und Normalenrichtung der Flächenelemente überein. Der gesamte, dort austretende Fluss ist aber gleich dem links eintretenden. Eingetragen ist im Bild auch eine Flussröhre.

Zusammengefasst: Der physikalische Richtungssinn tritt bei einigen skalaren physikalischen Größen (Strom, Spannung, magnetische Spannung, magnetischer Fluss u. a. m.) auf. Er entsteht durch die gegenseitige Lage der beiden Vektoren, aus denen die Größen durch Integration von Linien- oder Flächenintegralen hervorgehen.

Neben dem physikalischen Richtungssinn wird in Netzwerken ein Bezugssinn oder besser die (frei wählbare) Zählpfeilrichtung festgelegt wie bei Strom und Spannung, aber auch im magnetischen Kreis (magnetischer Spannungsabfall und Fluss). Der Zusammenhang zwischen Zählpfeil und dem tatsächlichen physikalischen Richtungssinn gibt das Vorzeichen der skalaren Größe: positives Vorzeichen bedeutet übereinstimmenden physikalischen Richtungssinn und Zählpfeil, negatives Vorzeichen, dass sie einander entgegenwirken.

Die Kennzeichnungen der Zählrichtungen wurden beim Strom- und Spannungsbegriff erläutert.

**Vektorielles Flächenintegral** Neben dem skalaren Flächenintegral gibt es auch ein vektorielles

$$m{B} = \lim_{\substack{\Lambda \to \infty \ n \to \infty}} \sum_{i=1}^n m{F}_i imes \Delta m{A}_i = \int_{\Lambda} m{F} imes \mathrm{d} m{A}$$
. vektorielles Flächenintegral

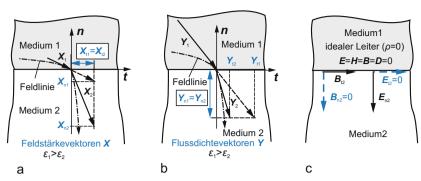
Es spielt eine Rolle bei Anwendung elektromagnetischer Wirbelfelder, übersteigt aber den Rahmen eines Grundlagenlehrbuches.

**Volumenintegral** Zur Definition wird ein gegebenes Volumen in n kleine Volumenelemente  $\Delta V$  mit  $\Delta V \to 0$  für  $n \to \infty$  unterteilt. Beim *skalaren Volumenintegral* multipliziert man jedes Volumenelement mit dem Skalarfeld f und summiert über alle Volumenelemente:

$$P = \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot \Delta V_i = \int_{V} f \cdot dV.$$

Für ein Vektorfeld F lässt sich sinngemäß ein zugehöriges Volumenintegral definieren. Eine Anwendungen des skalaren Volumenintegrals ist z. B. die Berechnung der Energie aus der sog. Energiedichte.

Grenzflächenbedingungen Grenzen zwei unterschiedliche Materialgebiete (dielektrische, magnetische oder ohmsche Leitfähigkeiten) flächenhaft aneinander, so ändern sich an der Grenzfläche teilweise die Feldgrößen (Abb. A.2.5):



**Abb. A.2.5.** Merkmale von Feldstärke- und Flussdichtevektoren an einer Grenzfläche (Medium 1 mit größerem "Leitungsvermögen"). (a) Die Tangentialkomponenten der Feldstärkevektoren sind stetig. (b) Die Normalkomponente des Flussdichtevektors ist stetig. (c) Grenzflächenbedingungen am idealen Leiter: die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke  $\boldsymbol{E}$  und die Normalkomponente der magnetischen Flussdichte  $\boldsymbol{B}$  (bzw. Stromdichte  $\boldsymbol{J}$ ) verschwinden

- Feldstärkevektoren haben stets gleiche Tangentialkomponenten (vgl. Abb. A.2.5a) und
- Flussdichtevektoren gleiche Normalkomponenten (Abb. A.2.5b), vorausgesetzt, dass die Grenzfläche keine Ladungs- oder Flächenstromdichte führt.

Diese Ergebnisse lassen sich formal mit dem Linenintegral über einen geschlossenen Weg an der Grenzfläche und das sog Gaußsche Gesetz für das jeweilige Feld begründen (s. Bd. 2).

Aus diesen Grenzflächenbedingungen ergeben sich mit den sog. *Materialgleichungen* zwischen den jeweiligen Feldstärke- und Flussdichtevektoren die Bedingungen für die übrigen Vektorkomponenten. *Deshalb werden Feldlinien an der Grenzfläche stets gebrochen*. Im Sonderfall des *idealen Leiters* (Abb. A.2.5c) verschwindet die Tangentialkomponente der Feldstärke- und die Normalkomponente der Flussdichtevektoren. Dann ist seine Oberfläche immer eine Potenzialfläche und der Strom fließt an ihr entlang.

**A.3** 

# A.3 Verzeichnis der wichtigsten Symbole

-	
Symbol	Bezeichnung
$\boldsymbol{A}$	1) Knoten-Zweig-Indzidenzmatrix
	2) Kettenmatrix
A	Fläche, Querschnitt
$A_{ m i}$	Stromverstärkung
$A_{ m r}$	relative Atommasse
$A_{ m DD}$	symmetrische Differenzverstärkung
$A_{ m N}$	Stromverstärkung Basisschaltung
$A_{\mathrm{u}}$	Spannungsverstärkung
$A_{ m uD}$	Differenzverstärkung
a	Beschleunigung
B	1) Schleifenmatrix
	2) magnetische Flussdichte
$B_{ m N}$	Stromverstärkung (Emitterschaltung)
$B_{ m r}$	Remanenzinduktion
C	Zweig-Maschen-Inzidenzmatrix
C	Kapazität
$C_{ m th}$	Wärmekapazität
c	1) spezifische Wärme
	2) elektrochemisches Äquivalent
$c_{ m d}$	differenzielle Kapazität
D	Verschiebungsdichte
$D_{\mathrm{n,p}}$	Diffusionskoeffizient Elektronen, Löcher
$D_{ m U}$	Temperaturkoeffizient d. Spannung
d	Durchmesser, Plattenabstand, Dicke
$oldsymbol{E}$	1) Einheitsmatrix
	2) elektrische Feldstärke
$E_{ m q}$	elektromotorische Kraft, Urspannung
e	Einheitsvektor
e	Elementarladung
$oldsymbol{F}$	Kraft
F	Faraday-Konstante
f	Frequenz
G	Knotenleitwertmatrix
G	1) Leitwert
	2) Gleichtaktverstärkung
$G_{ m m}$	1) magnetischer Leitwert
	2) Steilheit, Transferleitwert
g	differenzieller Leitwert, Rückkopplungsgrad,

Symbol	Bezeichnung
$g_{ m m}$	Steilheit
H	1) magnetische Feldstärke
	2) Reihenparallelmatrix
$m{H}_{ m c}$	Koerzitivfeldstärke
I	Spaltenvektor (Strom)
I	Stromstärke
$I_{ m k}$	Kurzschlussstrom
$I_{ m m}$	Maschenstrom
$I_{ m q}$	Quellenstrom
$I_{ m W}$	Energiestrom
$i_{ m v}$	Verschiebungsstrom
i	zeitveränderlicher Strom
J	1) Stromdichte
	2) magnetische Polarisation
$oldsymbol{J}_{ m K}$	Konvektionsstromdichte
$oldsymbol{J}_{ m V}$	Verschiebungsstromdichte
$oldsymbol{J}_{\mathrm{W}}$	Energiestromdichte, Poynting-Vektor
K	Transistorkonstante
k	1) Knotenzahl
	2) Boltzmann-Konstante
	3) Kopplungsfaktor
L	Induktivität
$L_{ m i}$	innere Induktivität
$L_{\mathrm{ik}}$	Gegeninduktivität Leiter $i, k$
$L_{ m s}$	Streuinduktivität
l	Länge
$l_{ m d}$	differenzielle Induktivität
M	1) Drehmoment
	2) Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix
M	Gegeninduktivität
m	Zahl unabh. Maschengleichungen
$N_{ m A,D}$	Störstellendichte (Akzeptor, Donator)
n	1) Zählindex
	2) Betrag des Normalenvektors
	3) Drehzahl, Trägerdichte
$n_{ m i}$	Eigenleitungsdichte
P	Leistung
P	dielektrische Polarisation
$P_{ m V}$	Verlustleistung
$P_{ m W}$	Wärmestrom

Symbol	Bezeichnung
p	1) Momentanleistung
	2) Zahl unabh. Knotengleichungen
p'	Leistungsdichte
$p_{ m v}$	Verlustleistungsdichte
Q	Ladung (allgemein), Elektrizitätsmenge,
	gespeicherte Wärmemenge
q	positive Elementarladung
R	Maschenwiderstandsmatrix
R	ohmscher Widerstand
$R_{\rm a}$	Außenwiderstand
$R_{\rm i}$	Innenwiderstand
$R_{ m m}$	1) Transferwiderstand, -impedanz
	2) magnetischer Widerstand
$R_{ m th}$	Wärmewiderstand
r	differenzieller Widerstand
S	Transferleitwert, Steilheit
s	Strecke
T	1) Periodendauer
	2) Temperatur
TK	Temperaturkoeffizient
t	Zeit
$t_{ m H}$	Halbwertzeit
$oldsymbol{U}$	Spaltenvektor (Spannung)
U	Spannung
$U_{\rm D}$	Diffusionsspannung
$U_{\mathrm{H}}$	Hallspannung
$U_k$	Knotenspannung
$U_{ m l}$	Leerlaufspannung
$U_{\mathbf{q}}$	Quellenspannung
$U_{\mathrm{T}}$	Temperaturspannung
u	Spannung, zeitabhängig
$\ddot{u}$	Übersetzungsverhältnis
V	Volumen
$V_{ m m}$	magnetische Spannung
v	Geschwindigkeit
W	Arbeit, Energie
$W_{ m el}$	elektrische Energie
$W_{\mathrm{G}}$	Bandbreite (Energie)
$W_{ m H}$	Hysteresearbeit
$W_{ m m}$	magnetische Energie

Symbol	Bezeichnung
w	1) Energiedichte
	2) Windungszahl
$w_{ m m}$	magnetische Energiedichte
z	1) Zweigzahl
	2) Wertigkeit eines Ions
$\alpha$	1) linearer Temperaturkoeffizient
	2) Winkel
$\alpha_{\mathbf{k}}$	Wärmeübergangszahl
$\beta$	quadratischer Temperaturkoeffizient
$\Delta$	Differenz
$\delta$	Luftspaltlänge
$\varepsilon$	Permittivität
$\varepsilon_0$	elektrische Feldkonstante
$\varepsilon_{\mathrm{r}}$	relative Permittivität
$\eta$	Wirkungsgrad
$\theta$	Durchflutung
$\kappa$	elektrische Leitfähigkeit
$\kappa_{ m W}$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda$	Linienladungsdichte
$\mu$	1) Beweglichkeit
	2) Permeabilität
	3) Steuerfaktor
$\mu_0$	magnetische Feldkonstante
$\mu_{ m r}$	relative Permeabilität
$\varrho$	1) Länge, Radius
	2) spezifischer Widerstand
	3) Raumladungsdichte
$\sigma$	1) Flächenladungsdichte
	2) Streuung
au	Zeitkonstante
$ au_{ m R}$	Relaxationszeitkonstante
Φ	magnetischer Fluss
$\varphi$	1) elektrisches Potenzial
	2) Nullphasenwinkel
$\chi$	Suszeptibilität
$\Psi$	1) elektrischer Fluss
	2) magnetischer verketteter Fluss
$\omega$	1) Winkelgeschwindigkeit
	2) Kreisfrequenz

**A.4** 

421

### A.4 Literaturverzeichnis

- Albach, M.: Grundlagen der Elektrotechnik 1. München: Pearson Studium 2005.
- Bosse, G.: Grundlagen der Elektrotechnik. Bd. 1: Elektrostatisches Feld und Gleichstrom. 2. Aufl.; Bd. II: Magnetisches Feld und Induktion. 3. Aufl.; Bd. III Wechselstromlehre, Vierpol- und Leitungstheorie, 2. Aufl.; Bd. IV: Drehstrom, Ausgleichsvorgänge in linearen Netzen. Mannheim: Bibliogr. Institut. 1973-1989.
- 3. Frohne, H., Löcherer, K. H., Müller, H.: Moeller Grundlagen der Elektrotechnik, 20. Aufl. Stuttgart: Teubner 2005.
- 4. Frohne, H.: Elektrische und magnetische Felder, Stuttgart: Teubner 1994.
- 5. Führer, A., Heidemann, K., Nerreter, W.: Grundgebiete der Elektrotechnik 1 und 2, 8. Aufl. München: Hanser Verlag 2006.
- 6. Haase, H., Garbe, H.: Elektrotechnik Berlin: Springer Verlag 1998.
- 7. Hofmann, H.: Das elektromagnetische Feld, 3. Aufl. Wien: Springer 1986.
- 8. Küpfmüller, K., Mathis, W., Reibiger, A.: Theoretische Elektrotechnik, 17. Aufl. Berlin: Springer 2006.
- 9. Paul, R.: Elektrotechnik 1, 3. Aufl. Berlin: Springer Verlag 1993.
- 10. Paul, R., Paul, S.: Arbeitsbuch 1,2, Berlin: Springer Verlag 1994.
- 11. Phillipow, E.: Grundlagen der Elektrotechnik, 10. Aufl. Berlin: Verlag Technik 2000.
- 12. Pregla, R.: Grundlagen der Elektrotechnik, 7. Aufl. Heidelberg: Hüthig 2004.
- 13. Seidel, H. U., Wagner, E.: Allgemeine Elektrotechnik Bd. 1 und Bd. 2, 3. Aufl. München: Hanser Verlag 2006.
- 14. Wolff, I.: Grundlagen der Elektrotechnik Bd. 1 und 2, Aachen: Verlagsbuchhandlung Dr. Wolff GmbH 2003.
- 15. v. Weiß, A.: Die elektromagnetischen Felder. Braunschweig: Vieweg 1983.

#### Index

Abgleichbedingung, 115 Definitionsgleichung, 396 Abzweigschaltung, 361 Definitionsgröße, 396 Differenzierschaltung, 230 Ähnlichkeitssatz, 371 Differenzsignal, 214 Ampère, 24 Differenzspannung, 216 Anfangsladung, 31 Differenzverstärker, 214, 301 Anpassung, 110, 184 Arbeit, 32, 39 Differenzverstärkung, 217 Diffusionswiderstand, 206 Arbeitspunkt, 88, 103 Drahtwiderstand, 99 Arbeitspunkteinstellung, 133 Dreipol, 145 Auftrennmethode, 244 Dualitätskonstante, 384 Ausgangskennlinienfeld, 193 Ausgangskurzschlussleitwert, 181 Durchlassbereich, 89 Ausgangsleerlaufleitwert, 181 Dynatron, 88 Ausgangsleerlaufwiderstand, 149 Ebers-Moll-Beziehungen, 196 Ausgangsleitwert, 180, 181 Eingangskennlinienfeld, 193 Eingangsleerlaufwiderstand, 149 Basiseinheit, 399 Eingangsleitwert, 180 Basisgröße, 396 Einheit Basisschaltung, 206 abgeleitete, 399 Bauelement, 4, 58 Einheitensystem passives, 76 internationales, 398 Bauelementemodell, 57 Einheitsvektor, 405 Baum, 309 Eintor, 147 vollständiger, 243 Elektrometerverstärker, 223, 227, 300 Baumzweige, 243 Elektromotorische Kraft, 37 Baumzweigspannung, 314 Elektron, 7 Belastungsversuch, 121 Elektronenkonzentration, 13 Bemessungsgleichung, 77 Elektronenvolt, 398 Betriebssteilheit, 183 Elementarladung, 12 Betriebsverhalten, 357 Elementarzweitore, 172 Bewegung Emitterfolger, 207 gerichtete, 20 Emitterschaltung, 197 Bezugsknoten, 271 EMK, 37 Bezugspfeilsystem, 48 Energie, 43 Bezugssinn, 146 elektrische, 44 Bipolartransistor, 191, 194 potenzielle, 32 Brückenabgleich, 114 Energieübertragung, 44, 106 Brückenschaltung, 275 Energieerhaltung, 43 Energiefluss, 145 Coulomb, 12 Energieformen, 38, 44 Coulombsches Gesetz, 11, 16 Energiestrom, 22 Defektelektron, 13 Energiestromdichte, 46

Energietechnik, 49 Gleichtaktverstärkung, 217 Grundaufgabe, 106 Gleichung Energietransport, 102 physikalische, 401 Energieumformung, 37 Gleichungssystem Erhaltungssatz, 11, 15 symbolisches, 328 Ersatzinnenwiderstand, 118, 188 Glimmlampe, 89 Ersatzschaltung, 58 Globalgröße, 6 Glühlampe, 89 Ersatzspannungsquelle, 72 Ersatzzweipol, 159 Gradient, 411 Erzeugerpfeilsystem, 48 Graph, 241 gerichteter, 242 Fehlanpassung, 108 Grenzflächenbedingung, 415 Feld Größe elektrisches, 15 physikalische, 397 elektromagnetisches, 8 Größengleichung, 402 homogenes, 19 zugeschnittene, 402 Feldbegriff, 8 Grundgröße, 396 Feldeffekttransistor, 211 Grundstromkreis, 102 Feldmodell, 8 Leistungsumsatz, 106 Feldstärke linearer, 102 elektrische, 16-18, 406 nichtlinearer, 126 magnetische, 406 Fenstermaschenmethode, 245 Halbbrücke, 116 Fenstermaschenverfahren, 242 Halbleiter, 13 Festkörper, 7 Halbleiterdiode, 89 Flächenintegral, 412 Heißleiter, 90 Flächenladung, 14 Helmholtz, 68 Flächenwiderstand, 80 Hüllfläche, 28 Fluss, 408 Gaußsche, 286 Flussdichte, 412 Flussintegral, 412 IEC Normenreihe, 99 Füllfaktor, 135 Induktion, 90 Fundamentalschleife, 309 Informationstechnik, 50 Fundamentalschleifenmatrix, 312 Grundaufgabe, 106 Fundamentalschnittmenge, 309 Innenleitwert, 67, 68 Innenwiderstand, 118 Gegenkopplung, 223 Integralgröße, 6 Gleichrichter Integrierschaltung, 231 idealer, 131 Inzidenzmatrix, 306 Gleichspannungsquelle, 62 Isolator, 13 Gleichstrom, 25 Gleichstromgenerator, 190 Joule, 45 Gleichtaktaussteuerung, 217 Gleichtaktsignal, 215 Kaltleiter, 90, 101 Gleichtaktunterdrückung, 218 Kennlinie

Index 425

fallende, 87	Ladungserhaltung, 15
Kennliniengleichung, 67, 198	Ladungsträgerdichte, 13
Kettenmatrix, 150	Ladungstrennung, 38
Kettenpfeilsystem, 147	Ladungsverteilung, 14
Kettenschaltung, 178	Lastwiderstand, 122
Kirchhoffsches Gesetz, 27, 28, 39	optimaler, 137
Kleinsignalaussteuerung, 96, 190	Leerlauf, 62
Kleinsignalparameter, 203	praktischer, 105
Kleinsignalverhalten, 138	Leerlaufübertragungswiderstand, 149
Kleinsignalwiderstand, 96	Leerlaufspannung, 62, 67, 118
Klemmenerdung, 363	Leerlaufspannungsverstärkung, 154, 212
Klemmenmanipulation, 359	Leerlaufversuch, 120
Klemmenspannung, 67	Leistung
Klemmenstrom, 67	angebotene, 107
Knoten, 241	elektrische, 47
Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix, 278, 306	maximale, 135
Knotengleichung	verfügbare, 107
unabhängige, 239	Leistungsanpassung, 107
Knotenleitwert, 276	Leistungsbilanzgleichung, 50
Knotenleitwertmatrix, 271, 276, 293	Leistungselektronik, 4
Knotenquellenstromvektor, 293	Leistungsmessung, 50
Knotensatz, 27, 28, 238, 279, 310	Leistungssatz, 50
Knotenspannung, 271	Leistungsumsatz, 106, 134
Knotenspannungsanalyse, 270, 274	Leistungsverstärkung, 183
Knotenunterdrückung, 365	Leistungswirkungsgrad, 137
Kohleschichtwiderstand, 99	Leiter
Kollektorschaltung, 207, 296	linienhafter, 77
Kompensation, 116	metallischer, 25
Konstantspannungsquelle, 132	Leitfähigkeit, 74
Konstantstromquelle, 130	Leitwert, 79
Kontinuitätsgleichung, 15, 21	differenzieller, 96
Konvektionsstrom, 22	Zusammenschaltung, 81
Koppelleitwert, 276	Leitwertmatrix, 150
Koppelwiderstand, 256	Linienintegral, 409
Kraftwirkung, 8	Linienladung, 14
Kurzschluss, 62	Loch, 12
praktischer, 104	
Kurzschlussstrom, 62, 66, 118	Masche, 241, 307
Kurzschlussstromübersetzung, 182	Maschengleichung
Kurzschlussstromverstärkung, 154, 212	unabhängige, 239
Kurzschlussversuch, 120	Maschensatz, 39, 40, 238, 260, 311
, -	Maschenstromanalyse, 250, 269
Ladung, 15	Maschenwiderstandsmatrix, 256
bewegte, 8	Masse, 214, 272
elektrische, 10, 11	Mayer, 68

Mayer-Theorem, 117	Proton, 7
Mehrtor, 355	PTC-Widerstand, 101
Messbereichserweiterung, 111	Punktladung, 12, 14
Metall, 13	1 4
Metallglasurschichtwiderstand, 100	Quelle
Metallschichtwiderstand, 100	gesteuerte, 159
Mikroelektronik, 4	Quellen
Miller-Theorem, 376	Äquivalenzbedingung, 68
Mitkopplung, 223	Teilungssatz, 372
Mitkoppiding, 220	Versetzungssatz, 372
Naturkonstante, 396	Zusammenschaltung, 64
Nennwiderstand, 99	Quellenleistung, 107
Netzliste, 333	Quellenspannung, 37, 62
Netzwerk	Quellenstrom, 62
äquivalentes, 381	Quellenteilung, 263
duales, 383	Quellenversetzung, 263
mehrpoliges, 341	Quenenversetzung, 200
planares, 245	Raumladung, 14
Netzwerkelement, 58	Raumladungsdichte, 14
Nichtleiter, 13	Rechtssystem, 405
Norator, 213	Reihenparallelmatrix, 150
Norton, 68	Reihenschaltung, 81, 176
Norton-Theorem, 117	Reziprozitäts-Theorem, 374
NTC-Widerstand, 100	Reziprozitätsbedingung, 375
Nullator, 213	Richtungssinn, 35
Nunatoi, 215	Ringwiderstand, 256
Ohm, 75	Rückkopplung, 141, 223
ohmsches Gesetz, 75	Rückwirkungsleitwert, 205
Operational transconductance	rtuckwirkungsieitwert, 200
amplifier, 214	Schaltelement, 127
Operationsverstärker, 211, 219, 351	Schaltungssimulation, 59, 333
idealer, 221	Schichtwiderstand, 80, 99
Ortsvektor, 406	Schleife, 241, 307
OTA, 214	Schleifen-Zweig-Inzidenzmatrix, 261
0111, 211	Schleifenanalyse, 314
Parallelreihenmatrix, 150	Schleifenstrom, 314
Parallelschaltung, 81, 177	Schmitt-Trigger, 228
Permittivität, 16	Schnittmenge, 308
Permittivitätszahl, 16	Schnittmengenanalyse, 316, 317
Potentiometer, 84	Schnittmengenverfahren, 274
Potenzial, 34	Siemens, 80
elektrisches, 32	Skalarprodukt, 407
Potenzialdifferenz, 35	Spanning, 32, 33
Potenzialgefälle, 20	Spannungsübersetzung, 181
Probeladung, 18	Spannungsabfall, 34
	~ r

Index 427

Superknotenverfahren, 282, 285 Spannungsfolger, 223, 228 Supermaschenverfahren, 264 Spannungskompensation, 106 Spannungsmessbereichserweiterung, Superpositionspringip, 124 112 Supraleitung, 79 Spannungsquelle T-Schaltung, 173 ideale, 62 Teilchenmodell, 8 spannungsgesteuerte, 161 Tellegen-Theorem, 387 stromgesteuerte, 162 Temperaturkoeffizient, 78, 90 Spannungsteiler Thévenin, 68 einstellbarer, 83 Torbedingung, 144, 176, 355 Spannungsteilerregel, 83, 175 Transadmittanz, 183 Spannungsteilerschaltung, 117 Transferkennlinie, 194 Spannungsverstärker, 214 Transferkennlinienfeld, 193 Spannungsverstärkung, 154 Transimpedanz, 154, 182, 212 Sperrbereich, 89 Transimpedanzverstärker, 214 Steilheit, 183, 205 Transkonduktanzverstärker, 214 Steilheitsverstärker, 214, 219 Tunneldiode, 88, 90 Stern-Dreieck-Umwandlung, 85 Sterngraph, 272 Überlagerungssatz, 123, 187 Steuerung Übertragungsadmittanz, 183 leistungslose, 161 Übertragungsgrößen, 181 Strömungsfeld, 20, 74 Übertragungsimpedanz, 182 Strahlung Übertragungskennlinie, 139 elektromagnetische, 26 Übertragungsleitwert, 154 Strom, 20 Übertragungswiderstand, 150, 154 zeitveränderlicher, 26 Umkehrsatz, 374 Stromübersetzung, 182 Umkehrverstärker, 223 Stromdichte, 25 Umlaufintegral, 411 Stromkontinuität, 22 Urspannung, 37 Strommessbereichserweiterung, 111 Strommesser, 31 Varistor, 88 Stromquelle Vektorfeld ideale, 62 wirbelfreies, 411 spanningsgesteuerte, 162 Vektorprodukt, 407 stromgesteuerte, 162 Verbindungszweige, 243 Teilungssatz, 372 Verbraucherleistung, 107 Stromrichtung, 24 Verbraucherpfeilsystem, 48 technische, 24 Verbraucherzweipol, 144 Stromspiegel, 209 Verlustleistung, 107 Stromstärke, 20 Verstärker, 192 Stromstoß, 30 invertierender, 223 Stromteilerregel, 84 nichtinvertierender, 223, 227 Stromverstärkung, 182 Vierpol, 143 Superknoten, 285 Viertelbrücke, 116

Zählpfeil, 35

Zweitorersatzschaltungen, 166

Zweitorwiderstandsmatrix, 360