





## Grundwissen Mathematik

Ebbinghaus et al.: Zahlen

Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie

Hämmerlin<sup>†</sup>/Hoffmann: Numerische Mathematik

Koecher<sup>†</sup>: Lineare Algebra und analytische Geometrie

Lamotke: Riemannsche Flächen

Leutbecher: Zahlentheorie

Remmert/Schumacher: Funktionentheorie 1

Remmert: Funktionentheorie 2

Walter: Analysis 1

Walter: Analysis 2

*Herausgeber* der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-  
Programm sind: F. Hirzebruch, H. Kraft, K. Lamotke,  
R. Remmert, W. Walter

Klaus Lamotke

---

# Riemannsche Flächen

Mit 53 Abbildungen

Klaus Lamotke  
Universität zu Köln  
Mathematisches Institut  
Weyertal 86–90  
50931 Köln, Deutschland  
e-mail: lamotke@mi.uni-koeln.de

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 30Fxx, 32C15

ISBN 3-540-57053-5 Springer Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media

[springer.de](http://springer.de)

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2005  
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor  
Herstellung: LE-TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig  
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg  
Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10070447 44/3142YL - 5 4 3 2 1 0

# Vorwort

Riemanns Idee, die Funktionentheorie nicht auf den klassischen Fall ebener Definitionsgebiete zu beschränken, sondern auf beliebige Flächen auszudehnen, ist 150 Jahre alt und hat seither die Entwicklung der Mathematik stark beeinflusst. In dieser dem Grundwissen der Mathematik gewidmeten Lehrbuchreihe folgt daher auf die Darstellung der klassischen Funktionentheorie durch R. Remmert der vorliegende Band über Riemannsche Flächen.

Große Teile des Stoffes wurden zwischen 1961 und 2001 in Vorlesungen vorgetragen oder in Übungen, Seminaren und Hausarbeiten von Studenten bearbeitet. Die Erfahrung, daß man nur bescheidene Vorkenntnisse erwarten darf, wenn man einen größeren Kreis von Interessenten erreichen will, hat sich in diesem Buch niedergeschlagen. Nur die Grundlagen der reellen Analysis und komplexen Funktionentheorie, der Algebra und der Allgemeinen Topologie werden bis zu folgenden Niveaus vorausgesetzt: klassische Residuentheorie; endliche Körpererweiterungen; Hausdorffräume, Kompaktheit und Zusammenhang.

Die Stoffauswahl orientiert sich an den bedeutenden Ergebnissen, die Riemann, Weierstraß und ihre Nachfolger erreichten. Das ist der Stoff, den H. Weyl in sein einflußreiches Buch von 1913 aufnahm (Entwicklung der allgemeinen Theorie bis zur Uniformisierung und zur Formel von Riemann-Roch) und das, was er im Vorwort erwähnte, aber bewußt wegließ: projektive Kurven, elliptische Funktionen, die Theta-Funktion.

Während sich Riemanns Veröffentlichungen und Weyls Buch auf die Darstellung der allgemeinen Theorie beschränken, wird sie im vorliegenden Buch häufig unterbrochen, um spezielle Flächen und ihre Funktionen zu betrachten. Dazu gehören die elliptischen Funktionen (Kapitel 2), die einfachsten Modulformen und ihre Anwendungen (Kapitel 5) sowie spezielle Flächen mit vielen Symmetrien. Sie werden unter anderem benutzt, um den Leser mit neu eingeführten Begriffen (z.B. Differentialformen in Kapitel 7) und allgemein gültigen Theoremen anhand von Beispielen vertraut zu machen.

Die Riemannschen Flächen leben von ihren zahlreichen Beziehungen zu mathematischen Nachbargebieten. Um sie zu erfassen, wird in den folgenden Kapiteln auch die Topologie kompakter Flächen entwickelt, wird die Fundamentalgruppe mit ihrer Beziehung zur Überlagerungstheorie behandelt, werden Garben, Homologie und Cohomologie definiert und werden Einführungen

in so verschiedene Gebiete wie die projektive Geometrie und die Potentialtheorie geboten.

Einige Nachbargebiete haben ihre historischen Wurzeln in der Theorie Riemannscher Flächen. Bei anderen wurden die Beziehungen im Laufe der Zeit geknüpft. Insgesamt durchziehen viele mathematische Ideen, die manchmal bis in die Antike zurückreichen und sich im 19. Jahrhundert häufen, wie die Fäden eines Knäuels die Entstehung und Entwicklung der Riemannschen Flächen. Zahlreiche in den Text eingestreute historische Bemerkungen weisen bei passenden Gelegenheiten darauf hin.

Die Ergebnisse, welche im folgenden präsentiert werden, sind zum großen Teil mehr als 100 Jahre alt. Trotz aller Rücksicht auf die Historie werden sie in der mathematischen Sprache und mit Beweisen des ausgehenden 20. Jahrhunderts formuliert.

Das vorliegende Buch wurde vor 10 Jahren als gemeinsames Projekt von Reinhold Remmert und dem Autor begonnen. Erste Entwürfe von Kapiteln mit vorwiegend analytischen Aspekten wurden von R. Remmert und solche mit topologischen Aspekten vom unterzeichnenden Autor verfaßt und anschließend vom Partner eingehend kritisiert. Bei mehreren Aufenthalten im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach konnten wir uns in intensiven Gesprächen austauschen, um eine optimale Darstellung zu erreichen. Äußere Umstände führten dazu, daß die Herstellung der finalen Version allein dem unterzeichnenden Autor zufiel und er damit die Verantwortung für die vorliegende Gestalt des Buches übernimmt.

Es ist nicht möglich, alle Kollegen und Studenten zu nennen, deren Hinweise und kritische Bemerkungen im Laufe der Jahre dieses Buch beeinflußten. Die Volkswagen-Stiftung ermöglichte im Rahmen des Programms „Research in Pairs“ die erwähnten Aufenthalte in Oberwolfach. Frau A. Rother (Köln) schrieb mit großer Sorgfalt und Geduld die sich wandelnden Versionen des Textes. Ihnen allen, den Mitarbeitern des Springer-Verlages, welche das Projekt auch in kritischen Phasen wohlwollend unterstützten, und ganz besonders Reinhold Remmert, ohne den das Buch nicht begonnen und vollendet worden wäre, gilt mein herzlicher Dank.

Köln, im Mai 2004  
Klaus Lamotke.

**Hinweise zur Gliederung.** Die 15 Kapitel sind in Paragraphen und diese in Abschnitte unterteilt. Zweistellige Hinweise beziehen sich auf ganze Paragraphen, z.B. 13.1, und dreistellige auf einzelne Abschnitte oder Aufgaben, z.B. 13.1.5 oder 13.7.6. Kleingedruckte Passagen enthalten historische Bemerkungen und Ausblicke, die Ausführung spezieller Beispiele und marginaler Bezüge zum Haupttext sowie topologische Beweise, deren Methoden sonst nicht gebraucht werden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	1
1.1	Riemannsche Flächen und ihre Abbildungen	2
1.2	Leistungs- und Quotientenprinzip	7
1.3	Holomorphe Abbildungen	11
1.4	Endliche Abbildungen. Überlagerungen	14
1.5	Deckgruppen	17
1.6	Meromorphe Funktionen	20
1.7	Aufgaben	22
<b>2</b>	<b>Tori und elliptische Funktionen</b>	24
2.1	Elliptische Funktionen	24
2.2	Die $\wp$ -Funktion	26
2.3	Abelsches Theorem für elliptische Funktionen	30
2.4	Die Entdeckung der elliptischen Funktionen	33
2.5	Reduzierte Basen. Torusabbildungen	36
2.6	Normale Abbildungen der Zahlenebene	39
2.7	Aufgaben	41
<b>3</b>	<b>Fundamentalgruppe und Überlagerungen</b>	43
3.1	Fundamentalgruppen	43
3.2	Monodromie	47
3.3	Holomorphe Überlagerungen	52
3.4	Analytische Fortsetzung	53
3.5	Abzählbarkeit	55
3.6	Unverzweigte normale Überlagerungen	58
3.7	Konstruktion von Überlagerungen	60
3.8	Die Fundamentalgruppe einer Vereinigung	62
3.9	Aufgaben	66
<b>4</b>	<b>Verzweigte Überlagerungen</b>	68
4.1	Orbitprojektionen	68
4.2	Endliche Automorphismengruppen der Zahlenkugel	69
4.3	Diskontinuierliche Gruppen	76

4.4	Komplexe Mannigfaltigkeiten und Garben	78
4.5	Orbitflächen	81
4.6	Verzweigungen	82
4.7	Verzweigte normale Überlagerungen	85
4.8	Universelle verzweigte Überlagerungen	88
4.9	Aufgaben	91
<b>5</b>	<b>Die <math>J</math>- und <math>\lambda</math>-Funktion</b>	<b>93</b>
5.1	Modulgruppe und Modulbereich	93
5.2	Reduktionstheorie binärer Formen	97
5.3	Die $J$ -Funktion	99
5.4	Die $\lambda$ -Funktion	103
5.5	Eigenschaften der $\lambda$ -Funktion	105
5.6	Anwendungen der $\lambda$ -Funktion	108
5.7	Modulflächen	112
5.8	Aufgaben	115
<b>6</b>	<b>Algebraische Funktionen</b>	<b>117</b>
6.1	Funktionen auf endlichen Überlagerungen	117
6.2	Riemannsche Gebilde	120
6.3	Puiseux-Theorie	125
6.4	Minimalpolynome und Automorphismen	126
6.5	Funktionenkörper	129
6.6	Aufgaben	132
<b>7</b>	<b>Differentialformen und Integration</b>	<b>134</b>
7.1	Differentialformen	135
7.2	Riemann-Hurwitzsche Formel. Automorphismen	138
7.3	Residuum. Invariante Formen. Spur	142
7.4	Integration	144
7.5	Die Abelsche Relation	147
7.6	Eine Charakterisierung der Tori	149
7.7	Homologie und Cohomologie	151
7.8	Logarithmische Ableitung	153
7.9	Aufgaben	155
<b>8</b>	<b>Divisoren und Abbildungen in projektive Räume</b>	<b>157</b>
8.1	Positive Divisoren	157
8.2	Holomorphe Differentialformen	160
8.3	Abbildungen in projektive Räume	162
8.4	Schnittdivisoren und Linearscharen	166
8.5	Multiplizität. Schnitzzahlen	169
8.6	Anzahl der Wendepunkte	173
8.7	Aufgaben	175



<b>9 Ebene Kurven</b>	177
9.1 Projektive und affine Kurven	178
9.2 Normalisierung	180
9.3 Schnitt-Theorie	182
9.4 Singularitäten. Tangenten	186
9.5 Die duale Kurve. Eine Formel von Clebsch	187
9.6 Plückersche Formeln	191
9.7 Aufgaben	195
<b>10 Harmonische Funktionen</b>	197
10.1 Grundlagen	198
10.2 Die Poissonsche Integralformel	201
10.3 Dirichletsches Randwertproblem	204
10.4 Subharmonische Funktionen	206
10.5 Gelochte Flächen. Abzählbarkeit der Topologie	208
10.6 Greensche Funktionen	211
10.7 Elementarpotentiale	213
10.8 Aufgaben	216
<b>11 Riemannscher Abbildungssatz und Uniformisierung</b>	218
11.1 Der Abbildungssatz für reiche Flächen	219
11.2 Der Abbildungssatz für arme Flächen	220
11.3 Uniformisierung	222
11.4 Abelsche Fundamentalgruppen	223
11.5 Der Satz von Poincaré-Weyl	225
11.6 Dreiecksgruppen	228
11.7 Dreiecksparkettierungen	235
11.8 Aufgaben	238
<b>12 Polyederflächen</b>	240
12.1 Flächenkomplexe	240
12.2 Kombinatorische Klassifikation	245
12.3 Fundamentalgruppe und Homologie	248
12.4 Die Zerschneidung Riemannscher Flächen	251
12.5 Riemannsche Periodenrelationen	253
12.6 Aufgaben	255
<b>13 Der Satz von Riemann-Roch</b>	258
13.1 Beweis des Satzes von Riemann-Roch	258
13.2 Die kanonische Abbildung	261
13.3 Darstellungen der Automorphismengruppe	263
13.4 Der Satz von Clifford	264

13.5	Weierstraß-Punkte .....	266
13.6	Weitere Anwendungen .....	268
13.7	Aufgaben .....	271
<b>14</b>	<b>Der Periodentorus .....</b>	<b>273</b>
14.1	Vom Additionstheorem zum Periodentorus .....	273
14.2	Perioden. Abelsches Theorem .....	275
14.3	Analytische Eigenschaften der Periodenabbildung .....	278
14.4	Symmetrische Produkte .....	281
14.5	Linearscharen .....	284
14.6	Aufgaben .....	286
<b>15</b>	<b>Die Riemannsche Thetafunktion .....</b>	<b>288</b>
15.1	Der Weg zur Riemannschen Thetafunktion .....	288
15.2	Thetafunktionen .....	291
15.3	Darstellung meromorpher Funktionen .....	295
15.4	Über das Verschwinden der Thetafunktionen .....	300
15.5	Der Torellische Satz .....	303
15.6	Die Polarisierung .....	307
15.7	Das Schottkysche Problem .....	309
15.8	Aufgaben .....	311
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>313</b>
	<b>Namensverzeichnis .....</b>	<b>320</b>
	<b>Sachverzeichnis .....</b>	<b>321</b>
	<b>Symbolverzeichnis .....</b>	<b>326</b>

# 1. Grundlagen

Bernhard Riemann wurde am 17.9.1826 als Sohn eines Predigers in Breselenz (heute Jameln-Breselenz in Niedersachsen) geboren. Nach dem Abitur in Lüneburg begann er Ostern 1846 in Göttingen mit dem Studium der Theologie, wechselte aber seinen Neigungen entsprechend nach einem Semester zur Mathematik und Physik. Schon in den Herbstferien 1847 entwickelte er Ideen für eine neue Grundlage der komplexen Funktionentheorie. Nachdem er zum Wintersemester 1847/48 nach Berlin gegangen war, erörterte er seine Vorstellungen mit dem drei Jahre älteren Eisenstein, der sich gerade habilitierte. Eisenstein scheint die Ideen nicht gebilligt zu haben. Er beharrte auf dem formalen Rechnen mit Reihen als Grundlage.

Riemann fiel es schwer, seine Gedanken zu formulieren. Erst im November 1851 reichte er in Göttingen seine Dissertation [Ri 2] über „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe“ ein. Gutachter war der bereits 74 Jahre alte Gauß. Er ging auf den Inhalt der Arbeit überhaupt nicht ein, lobte aber die „gründlichen und tief eindringenden Studien des Verfassers in demjenigen Gebiete, welchem der zu behandelnde Gegenstand angehört“ ; siehe dazu [Re 2], S. 158 f. Seine höchste Anerkennung teilte er Riemann mündlich mit: Er bereite seit Jahren eine Schrift über denselben Gegenstand vor.

In den ersten vier Abschnitten der Dissertation stellt Riemann die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen als Grundlage der komplexen Funktionentheorie vor. Der 5. Abschnitt beginnt: „Für die folgenden Betrachtungen beschränken wir die Veränderlichkeit der Größen  $x, y$  auf ein endliches Gebiet, indem wir als Ort des Punktes  $O$  nicht mehr die Ebene  $A$  selbst, sondern eine über dieselbe ausgebreitete Fläche  $T$  betrachten. Wir wählen diese Einkleidung, bei der unanstößig sein wird, von aufeinander liegenden Flächen zu reden, um die Möglichkeit offen zu lassen, dass der Ort des Punktes  $O$  über denselben Theil der Ebene sich mehrfach erstrecke, setzen jedoch für einen solchen Fall voraus, ...“

Hier schließt eine längere Erörterung an, in welcher Weise  $T$  über  $A$  ausgebreitet ist. Im weiteren Verlauf der Dissertation bemüht sich Riemann, die Neuartigkeit seiner Ideen herunterzuspielen und dem Leser klarzumachen, daß man auf der Fläche  $T$  genauso einfach wie in der Zahlenebene eine Funktionentheorie aufbauen kann. Gauß meinte: „... der größte Theil der

Leser möchte wohl in einigen Theilen noch eine größere Durchsichtigkeit der Anordnung wünschen.“ Über 100 Jahre später schreibt Dieudonné [Di 2], p. 48: „L’on voit Riemann, presque systématiquement, *penser à côté* (suivant l’expression de Hadamard), abordant chaque problème d’une façon à laquelle aucun de ses prédécesseurs n’avait songé.“

In der Tat wurden Riemanns Ideen von seinen Zeitgenossen zwar bewundert, aber kaum angenommen. Erst durch Felix Kleins beredtes Eintreten wurden die Riemannschen Flächen gegen Ende des 19. Jahrhunderts verbreitet anerkannt. Ein wichtiges Ereignis war Weyls Buch von 1913, in dem er die Riemannschen Flächen von der Ausbreitung über der Zahlenebene löste und sie als *Mutterboden* ansah, auf dem die analytischen Funktionen wachsen und gedeihen können, vergleiche [Wyl 1], S. VII.

Welchen Nutzen eine Funktionentheorie auf nicht-ebenen Bereichen hat, erläutert Riemann in seiner Dissertation nicht. Dies wird erst in seiner großen Abhandlung *Ueber die Theorie der Abel’schen Funktionen* [Ri 3] deutlich, die er sechs Jahre später veröffentlichte: Dank seiner Flächen gelingt es, die Schwierigkeiten zu überwinden, welche die Mehrdeutigkeit der algebraischen Funktionen älteren Mathematikern bereitete, als sie versuchten, solche Funktionen zu integrieren, vgl. Kleins Bericht über Jacobis Integrationsversuche, [Klei 5], S. 110 ff. Riemann erkennt als Ursache der Mehrdeutigkeit die topologische Gestalt der Fläche. Daher spielt im vorliegenden Buch die Topologie eine wichtige Rolle. Wir setzen die Grundbegriffe der allgemeinen Topologie als bekannt voraus und beginnen die Entwicklung weiterer topologischer Methoden mit der Fundamentalgruppe im 3. Kapitel.

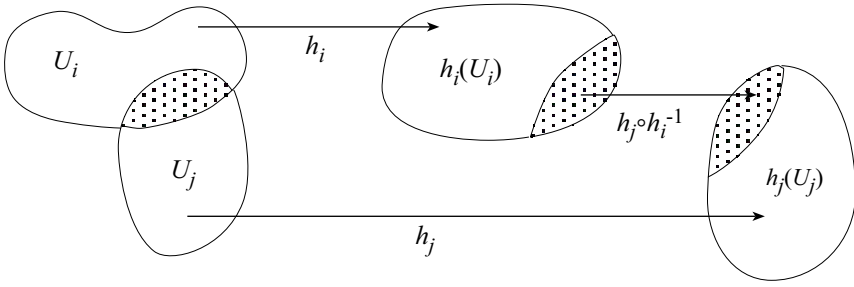
## 1.1 Riemannsche Flächen und ihre Abbildungen

Zu den Grundbegriffen der Funktionentheorie gehört die Holomorphie für Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , deren Definitionsbereich  $U \subset \mathbb{C}$  offen ist. Holomorph in diesem Sinne wird im folgenden als *klassisch holomorph* bezeichnet. Es war Riemanns Idee, statt der Ebene  $\mathbb{C}$  auch andere Flächen  $X$  zuzulassen und die Holomorphie für Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  zu erklären, deren Definitionsbereich  $U \subset X$  offen ist. So entstehen Riemannschen Flächen.

**1.1.1 Holomorphe Atlanten. Riemannsche Flächen.** Ein holomorpher Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, h_i)\}$  auf einem topologischen Raum  $X$  besteht aus einer Überdeckung von  $X$  durch offene Mengen  $U_i \subset X$  und Homöomorphismen  $h_i : U_i \rightarrow h_i(U_i) \subset \mathbb{C}$ , die im folgenden Sinne *holomorph verträglich* sind: Die Bilder  $h_i(U_i)$  sind offen in  $\mathbb{C}$ , und für jedes Paar  $i, j$  ist

$$(1) \quad h_j \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_j) \rightarrow h_j(U_i \cap U_j)$$

klassisch biholomorph, siehe die Figur 1.1.1. Man nennt die Paare  $(U_i, h_i)$  *Karten* von  $\mathcal{A}$  und die Abbildungen (1) *Kartenwechsel*.



**Fig. 1.1.1** Zwei Karten  $(U_i, h_i)$ ,  $(U_j, h_j)$  und ihr Kartenwechsel  $h_j \circ h_i^{-1}$ .

Sei  $U \subset X$  offen. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph* bezüglich  $\mathcal{A}$ , wenn für jede Karte  $(U_j, h_j) \in \mathcal{A}$  die Funktion

$$h_j(U \cap U_j) \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto f \circ h_j^{-1}(z),$$

klassisch holomorph ist. Wenn  $U \subset U_k$  liegt, genügt wegen der Biholomorphie der Kartenwechsel, daß  $f \circ h_k^{-1}$  auf  $h_k(U)$  klassisch holomorph ist.

Sämtliche Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ , die bezüglich  $\mathcal{A}$  holomorph sind, bilden einen Ring  $\mathcal{O}(U, \mathcal{A})$ . Er enthält alle konstanten Funktionen und ist daher eine  $\mathbb{C}$ -Algebra. Alle Funktionen  $f \in \mathcal{O}(U, \mathcal{A})$  sind stetig. Genau dann, wenn  $f \in \mathcal{O}(U, \mathcal{A})$  keine Nullstelle hat, gehört  $1/f$  zu  $\mathcal{O}(U, \mathcal{A})$ .

Zwei Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  für  $X$  heißen äquivalent, wenn  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$  ein holomorpher Atlas ist, d.h. wenn für je zwei Karten  $h$  aus  $\mathcal{A}$  und  $k$  aus  $\mathcal{B}$  der Kartenwechsel  $h \circ k^{-1}$  biholomorph ist. Eine Äquivalenzklasse holomorpher Atlanten heißt *holomorphe Struktur* auf  $X$ . Die Vereinigung aller Atlanten einer holomorphen Struktur heißt *maximaler Atlas*.

Wenn  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  äquivalent sind, gilt  $\mathcal{O}(U, \mathcal{A}) = \mathcal{O}(U, \mathcal{B})$  für jede offene Menge  $U \subset X$ . Nach Festlegung einer holomorphen Struktur gehört also zu jeder offenen Menge  $U \subset X$  die Algebra

$$\mathcal{O}(U) := \mathcal{O}(U, \mathcal{A})$$

der holomorphen Funktionen. Dabei ist  $\mathcal{A}$  irgendein Atlas der Struktur.

Folgendes aus der klassischen Theorie, d.h. für offene Mengen in  $\mathbb{C}$  bekannte Ergebnis überträgt sich nach Festlegung einer holomorphen Struktur auf offene Mengen in  $X$ .

**Lokal-Global-Prinzip.** Für jede Familie  $\{U_j\}$  von offenen Mengen und ihre Vereinigung  $U = \bigcup U_j$  gilt: Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann holomorph, wenn alle Beschränkungen  $f|_{U_j}$  holomorph sind.  $\square$

Die fundamentale Definition lautet:

*Eine Riemannsche Fläche ist ein Hausdorffraum  $X$  zusammen mit einer holomorphen Struktur auf  $X$ .*

Unter einer  $n$ -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit versteht man einen Hausdorff-Raum  $X$ , der zum  $\mathbb{R}^n$  lokal homöomorph ist: Jeder Punkt in

$X$  besitzt eine Umgebung, die zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist. Riemannsche Flächen sind also zweidimensionale Mannigfaltigkeiten.

Die Zahlenebene  $\mathbb{C}$  ist eine Riemannsche Fläche. Jede offene Teilmenge einer Riemannschen Fläche ist selbst eine Riemannsche Fläche. Folgende offene Teilmengen von  $\mathbb{C}$  sind daher Riemannsche Flächen:

- die *Kreisscheiben*  $\mathbb{E}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$  für  $r > 0$ ,
- insbesondere die *Einheitskreisscheibe*  $\mathbb{E} := \mathbb{E}_1$ ,
- die *obere Halbebene*  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  und
- die *punktierte Ebene*  $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

**Historisches.** Atlanten finden sich in Kleins Göttinger Vorlesungen des Wintersemesters 1891/92 über *Riemannsche Flächen*, siehe [Klei 4], S. 26: „Eine zweidimensionale, geschlossene, mit einem Bogenelement  $ds^2$  ausgestattete Mannigfaltigkeit [= kompakte Fläche mit einer Riemannschen Metrik], welche keine Doppelmannigfaltigkeit [d.h. orientierbar] ist, ist jedenfalls dann als Riemannsche Fläche zu brauchen, wenn man sie mit einer endlichen Zahl von Bereichen dachziegelartig überdecken kann, deren jeder eindeutig und konform auf eine schlichte Kreisscheibe abgebildet werden kann.“ Die Dachziegelüberdeckungen sind holomorphe Atlanten. Der Übergang zwischen Dachziegeln (Kartenwechsel) ist wegen der Konformität automatisch biholomorph. Atlanten mit unendlich vielen Karten sind für Klein noch suspekt. – Weyl vergißt in [Wyl 1] das Hausdorffsche Trennungsaxiom zu fordern. Die Karten nennt er *Ortsuniformisierende*.

**1.1.2 Die Riemannsche Zahlenkugel**  $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \uplus \{\infty\}$  entsteht aus der Zahlenebene  $\mathbb{C}$ , indem man einen *unendlich fernen* Punkt  $\infty$  hinzufügt und  $\hat{\mathbb{C}}$  mit folgender Definition zunächst zu einem Hausdorffraum macht:

Die offenen Mengen in  $\hat{\mathbb{C}}$  sind die offenen Mengen in  $\mathbb{C}$  und die Mengen  $(\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\}$ , wobei  $K$  alle Kompakta in  $\mathbb{C}$  durchläuft. Die Umgebungen von  $\infty$  sind also die Komplemente der Kompakta in  $\mathbb{C}$ .

Ein Atlas für  $\hat{\mathbb{C}}$  besteht aus den zwei Karten  $(\mathbb{C}, \operatorname{id})$  und  $(\hat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}, h)$ , wobei  $h(z) = 1/z$  für  $z \neq \infty$  und  $h(\infty) = 0$  ist. Der Kartenwechsel  $h \circ \operatorname{id}^{-1} : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $z \rightarrow 1/z$ , ist holomorph. Der Atlas macht  $\hat{\mathbb{C}}$  zu einer Riemannschen Fläche, die zur Sphäre

$$S^2 := \{(w, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |w|^2 + t^2 = 1\}$$

homöomorph ist. Denn die *stereographische Projektion* (Figur 1.1.2)

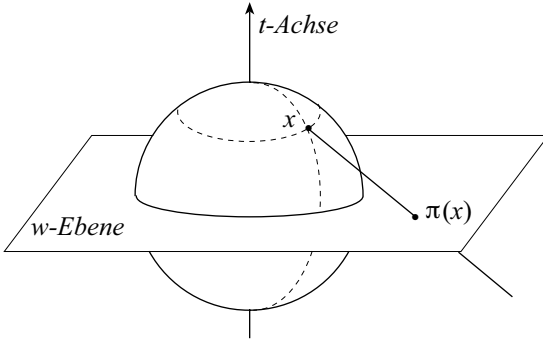
$$(1) \quad \pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad \pi(w, t) := w/(1-t) \text{ für } t \neq 1 \text{ und } \pi(0, 1) := \infty,$$

ist bijektiv und stetig, also ein Homöomorphismus. Insbesondere ist  $\hat{\mathbb{C}}$  wie  $S^2$  kompakt und zusammenhängend.

Wir geben die Umkehrabbildung  $\pi^{-1}$  explizit an: Sei  $N := (0, 1) \in S^2$  der Nordpol. Die Gerade durch  $N$  und  $x = (w, t) \neq N$  besteht aus den Punkten

$$sx + (1-s)N = (sw, st + 1-s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Sie schneidet die Äquatorebene  $\{t = 0\}$  in  $\pi(x) = (z, 0)$ . Das trifft für  $z = sw$  mit  $s := 1/(1-t)$  zu. Aus  $|w|^2 + t^2 = |x|^2 = 1$  und  $w = (1-t)z$  erhält man nach kurzer Rechnung für die Umkehrabbildung neben  $\pi^{-1}(\infty) = N$  die Gleichungen



**Fig. 1.1.2.** Die stereographische Projektion  $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Man zieht eine Gerade durch den Nordpol und  $x \in S^2$ . Sie trifft die komplexe  $w$ -Ebene in  $\pi(x)$ .

$$\pi^{-1}(z) = x = \frac{2z}{|z|^2 + 1} + \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}N, \text{ d.h. } w = \frac{2z}{|z|^2 + 1}, \quad t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Die Abbildung  $\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ist somit ein reell-analytischer Isomorphismus, der  $S^2 \setminus \{N\}$  *konform*, d.h. winkel- und orientierungstreu, auf  $\mathbb{C}$  abgebildet.

Riemann führte die Zahlenkugel im Wintersemester 1858/59 in seinen *Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe*, ein [Werke, 3. Aufl., S. 678/79]. In seinen Publikationen kommt sie nicht explizit vor. Die erste Veröffentlichung, die (unter Berufung auf Riemanns Vorlesungen) die Zahlenkugel enthält, stammt von Neumann [Neu], S. VI und S. 131 ff., siehe auch [Klei 1] II, S. 256.

**1.1.3 Holomorphe Abbildungen.** Eine stetige Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Riemannschen Flächen heißt *holomorph*, wenn sie die holomorphen Funktionen in  $Y$  zu holomorphen Funktionen in  $X$  liftet: Für jede offene Menge  $V \subset Y$  und jede Funktion  $g \in \mathcal{O}(V)$  ist  $g \circ \eta \in \mathcal{O}(\eta^{-1}(V))$ .

Das Lokal-Global-Prinzip gilt auch für holomorphe Abbildungen. Jede Hintereinanderschaltung holomorpher Abbildungen ist holomorph. Die holomorphen Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  sind die auf  $X$  holomorphen Funktionen.

Eine bijektive, holomorphe Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$ , deren Umkehrabbildung  $\eta^{-1} : Y \rightarrow X$  holomorph ist, heißt *biholomorph* oder *Isomorphismus*. Die Flächen  $X$  und  $Y$  heißen dann *isomorph*, kurz  $X \approx Y$ . Für jedes  $r > 0$  gilt  $\mathbb{E}_r \approx \mathbb{E}$ . Eine Riemannsche Fläche  $U$  heißt *Scheibe* (mit dem Zentrum  $a$ ), wenn es einen Isomorphismus  $\eta : U \rightarrow \mathbb{E}$  (mit  $\eta(a) = 0$ ) gibt. Die obere Halbebene ist wegen der *Cayleyschen Abbildung*  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}, z \mapsto (z - i)/(z + i)$ , eine Scheibe mit dem Zentrum  $i$ .

Wir nennen  $\eta$  bei  $a \in X$  *biholomorph*, wenn  $a$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so daß  $\eta(U) \subset Y$  offen und die Beschränkung  $\eta : U \rightarrow \eta(U)$  biholomorph ist. Wenn  $\eta$  bei jeder Stelle biholomorph ist, heißt  $\eta$  *lokal biholomorph*.

Isomorphismen  $X \rightarrow X$  heißen *Automorphismen*. Sie bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung die *Automorphismengruppe*  $\text{Aut}(X)$ . Zu jeder holomorphen Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  gehört die *Deckgruppe*  $\mathcal{D}(\eta) := \{g \in \text{Aut}(X) : \eta \circ g = \eta\}$ . Ihre Elemente heißen *Deckabbildungen* zu  $\eta$ .

**Beispiele.** Die *Exponentialabbildung*  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto e^z$ , ist lokal biholomorph. Die Translationen  $z \mapsto z + 2\pi in$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , gehören zu  $\mathcal{D}(\exp)$ . – Bei der *Potenzabbildung*  $\eta_n: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}, z \mapsto z^n$ , für  $n = 1, 2, \dots$  gehört zu jeder  $n$ -ten Einheitswurzel  $\omega$  die Deckabbildung  $z \mapsto \omega z$ .

In beiden Fällen gibt es keine anderen Deckabbildungen, also  $\mathcal{D}(\exp) \cong \mathbb{Z}$  und  $\mathcal{D}(\eta_n) \cong \mu_n := \text{multiplikative Gruppe der } n\text{-ten Einheitswurzeln}$ .

**1.1.4 Meromorphe Funktionen.** Eine Teilmenge  $A \subset X$  heißt *lokal endlich*, wenn in jedem Kompaktum  $K \subset X$  nur endlich viele Punkte von  $A$  liegen. Sei  $f: X \setminus A \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph, wobei  $A$  lokal endlich in  $X$  ist. Für jedes  $a \in A$  und jede Karte  $z: (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit hinreichend kleinem Definitionsbereich  $U$  ist  $f$  auf  $U \setminus \{a\}$  holomorph und hat dort eine normal konvergente *Laurent-Darstellung*  $f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j z^j$ . Genau dann, wenn ihr Hauptteil endlich ist, läßt sich  $f$  mit einem Wert  $f(a) \in \hat{\mathbb{C}}$  stetig fortsetzen. Man nennt diese Fortsetzung *meromorph*. Falls  $f(a) = \infty$  ist, heißt  $a$  ein *Pol* von  $f$ . Wenn sich  $f$  in alle Punkte  $a \in A$  meromorph fortsetzen läßt, heißt die fortgesetzte Funktion *meromorph*. Die meromorphen Funktionen sind genau die holomorphen Abbildungen  $f: X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , deren *Polstellenmenge*  $f^{-1}(\infty)$  lokal endlich ist.

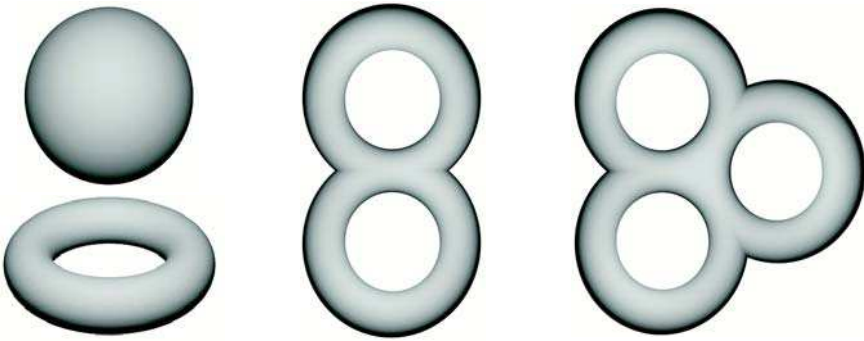
**Satz.** Die Menge  $\mathcal{M}(X)$  aller auf  $X$  meromorphen Funktionen ist ein Ring, welcher  $\mathcal{O}(X)$  umfaßt. Wenn  $f \in \mathcal{M}(X)$  eine lokal endliche Nullstellenmenge hat, gehört  $1/f$  zu  $\mathcal{M}(X)$ .  $\square$

**1.1.5 Lokale und globale Funktionentheorie.** Jeder Punkt einer Riemannschen Fläche ist Zentrum einer Scheibe, die in  $X$  offen ist. Daher lassen sich alle Sätze der klassischen Funktionentheorie, die im Kleinen gültig sind, auf Riemannsche Flächen übertragen. Interessant werden diese Flächen erst dann, wenn man fragt, welche Auswirkungen ihre globale topologische Gestalt auf die Funktionentheorie hat.

Auf kompakten, zusammenhängenden Flächen sind alle holomorphen Funktionen konstant, siehe 1.3.5. Für eine reichhaltige Theorie muß man meromorphe Funktionen einbeziehen. Auf der Zahlenkugel sind diese genau die *rationalen* Funktionen, siehe 1.6.5.

Jede kompakte zusammenhängende Riemannsche Fläche ist eine *Brezelfläche*. Solche Flächen werden topologisch durch ihr *Geschlecht*  $g$  unterschieden, welches anschaulich die Anzahl der Löcher oder der Henkel angibt, siehe Figur 1.1.5. Kapitel 12 enthält die genaue Darstellung. In einem Vortrag vor Gymnasiallehrern sagt Weyl, [Wyl 2] III, no. 95, S. 354 unten: „Wie ein Sauerteig durchdringt die Geschlechtszahl die ganze Theorie der Funktionen auf einer Riemannschen Fläche. Auf Schritt und Tritt begegnet man ihr, und ihre Rolle ist unmittelbar, ohne komplizierte Rechnungen, verständlich von ihrer topologischen Bedeutung her.“





**Fig. 1.1.5.** Kompakte Flächen vom Geschlecht 0 (Sphäre), 1 (Torus), 2 und 3 (Brezelflächen).

Bereits bei den *Tori* ( $g = 1$ ) ist die Funktionentheorie reichhaltig (2. Kapitel). Je zwei *Tori* sind homöomorph, aber als Riemannsche Flächen i.a. nicht isomorph. Im 5. Kapitel betrachten wir ihre holomorphe Klassifikation.

In den Kapiteln 3, 4 und 6 werden verschiedenen Methoden (Überlagerungen, Gruppenoperationen, Lösungen algebraischer Gleichungen) entwickelt, um weitere Riemannsche Flächen herzustellen. Vom 7. Kapitel an wird für beliebige Flächen systematisch untersucht, wie ihre topologische Gestalt die Funktionentheorie beeinflusst.

## 1.2 Liftungs- und Quotientenprinzip

Bei gegebener Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  soll eine auf  $Y$  bzw.  $X$  vorhandene holomorphe Struktur nach  $X$  hochgehoben (Liftungsprinzip 1.2.1) bzw. nach  $Y$  abgesenkt (Quotientenprinzip 1.2.5) werden, so daß in beiden Fällen  $\eta$  zu einer lokalen biholomorphen Abbildung zwischen Riemannschen Flächen wird. Beide Prinzipien liefern neue Riemannsche Flächen.

**1.2.1 Das Liftungsprinzip** geht auf Riemanns Dissertation [Ri 2], 5. Abschnitt, zurück, wo er eine Fläche  $T$  über der Ebene  $A$  ausbreitet und sodann holomorphe Funktionen definiert, deren Definitionsbereiche in  $T$  liegen.

Eine Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen heißt *lokal topologisch*, wenn jeder Punkt in  $X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, die durch  $\eta$  homöomorph auf die offene Menge  $\eta(U) \subset Y$  abgebildet wird.

**Liftungsprinzip.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine lokal topologische Abbildung von einem Hausdorffraum  $X$  in eine Riemannsche Fläche  $Y$ . Dann gibt es auf  $X$  genau eine holomorphe Struktur, so daß  $\eta$  lokal biholomorph wird.

*Beweis.* Jeder Punkt in  $X$  liegt in einer offenen Menge  $U_i$ , welche durch  $\eta$  homöomorph auf dem Definitionsbereich einer holomorphen Karte  $(V_i, k_i)$

von  $Y$  abgebildet wird. Mit  $h_i := k_i \circ \eta|_{U_i}$  erhält man den Atlas  $\mathcal{A} = \{(U_i, h_i)\}$  für  $X$ . Seine Kartenwechsel  $h_j \circ h_i^{-1} = k_j \circ k_i^{-1}$  sind holomorph. Wenn man  $X$  mit der durch  $\mathcal{A}$  bestimmten holomorphen Struktur versieht, wird  $\eta$  lokal biholomorph. Umgekehrt: Für jede holomorphe Struktur  $\mathcal{O}$  auf  $X$ , welche  $\eta$  lokal biholomorph macht, sind die oben beschriebenen Karten  $(U_i, h_i)$  holomorph. Daher ist  $\mathcal{O}$  eindeutig bestimmt.  $\square$

Das Liftungsprinzip wird benutzt, um Riemannsche Flächen durch Polynome zu definieren. Die nächsten beiden Abschnitte dienen der Vorbereitung.

**1.2.2 Abschätzung der Wurzeln.** Sei  $Q := w^n + c_1 w^{n-1} + \dots + c_n \in \mathbb{C}[w]$ . Für jede Wurzel  $u$  von  $Q$  gilt  $|u| \leq 2 \max\{|c_j|^{1/j} : j = 1, \dots, n\}$ . Wenn umgekehrt alle Wurzeln von  $Q$  durch  $R$  beschränkt sind, gibt es eine nur von  $R$  abhängige Schranke  $M$ , so daß  $|c_j| \leq M$  für  $j = 1, \dots, n$  gilt.

*Beweis.* Sei  $r := \max\{|c_j|^{1/j} : j = 1, \dots, n\} > 0$ . Für  $v := u/r$  ist dann  $r^n + (c_1/r)v^{n-1} + \dots + (c_n/r^n) = 0$ , somit  $|v|^n \leq |v|^{n-1} + \dots + |v| + 1$ . Im Falle  $|v| > 2$  wäre  $1 \leq |v|^{-1} + \dots + |v|^{-n} < 2^{-1} + \dots + 2^{-n} < 1$ . Es folgt  $|v| \leq 2$ , also  $|u| \leq 2r$ . – Die umgekehrte Behauptung ist klar, da die Koeffizienten  $c_j$  die elementarsymmetrischen Funktionen der Wurzeln von  $Q$  sind.  $\square$

**1.2.3 Holomorphie der Wurzeln.** Wir betrachten ein normiertes Polynom

$$(1) \quad P(y, w) := w^n + a_1(y)w^{n-1} + \dots + a_{n-1}(y)w + a_n(y),$$

dessen Koeffizienten  $a_\nu$  holomorphe Funktionen auf einer Riemannschen Fläche  $Y$  sind. Für jeden Punkt  $(b, c) \in Y \times \mathbb{C}$  bezeichnen wir mit  $k(b, c) \in \mathbb{N}$  die Vielfachheit von  $c$  als Wurzel von  $P(b, w) \in \mathbb{C}[w]$ .

**Satz.** Sei  $b \in Y$ , und sei  $f$  holomorph um  $c \in \mathbb{C}$ . Es gibt Scheiben  $V$  um  $b$  und  $W$  um  $c$ , so daß die endliche Summe

$$(2) \quad F(y) := \sum_{w \in W} k(y, w) f(w)$$

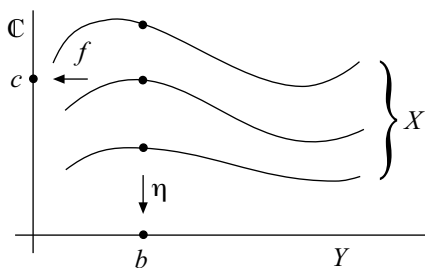
holomorph von  $y \in V$  abhängt.

*Beweis.* Sei  $W$  eine Scheibe um  $c$ , so daß  $f$  holomorph in  $W$  und  $P(b, w)$  nullstellenfrei in  $\overline{W} \setminus \{c\}$  ist. Es gibt eine Scheibe  $V$  um  $b$ , so daß  $P$  auf  $V \times \partial W$  keine Nullstellen hat. Nach [Re 1], Abschnitt 13.2.1, läßt sich  $F(y)$  für  $y \in V$  als Integral darstellen, welches holomorph von  $y$  abhängt:

$$F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial W} \frac{P_w(y, t)}{P(y, t)} f(t) dt \quad \text{mit } P_w := \partial P / \partial w. \quad \square$$

**Folgerung.** Sei  $k := k(b, c)$ . Es gibt Scheiben  $V$  um  $b \in Y$  und  $W$  um  $c \in \mathbb{C}$ , so daß für jedes  $y \in V$  genau  $k$  mit Vielfachheiten gezählte Wurzeln von  $P(y, w)$  in  $W$  liegen. Für  $k=1$  ist die Funktion  $g: V \rightarrow W$ , die jedem  $y$  die einzige Wurzel  $g(y) \in W$  von  $P(y, w)$  zuordnet, holomorph.

*Beweis:* Für die erste Behauptung wendet man den Satz auf  $f(w) := 1$  an und für die zweite auf  $f(w) := w$ .  $\square$



**Fig. 1.2.4.** Reelles Bild der Nullstellenmenge eines Polynoms 3. Grades mit einfachen Wurzeln.

**1.2.4 Nullstellengebilde.** Wir behalten die Bezeichnungen aus 1.2.3 bei und bilden, vgl. Figur 1.2.4, die Nullstellenmenge

$$X := \{(y, w) \in Y \times \mathbb{C} : P(y, w) = 0\}$$

mit den beiden stetigen Projektionen

$$\eta : X \rightarrow Y, (y, w) \mapsto y, \quad f : X \rightarrow \mathbb{C}, (y, w) \mapsto w.$$

**Lemma.** Die Projektion  $\eta : X \rightarrow Y$  ist endlich, d.h. jede  $\eta$ -Faser ist endlich, und für jedes Kompaktum  $K \subset Y$  ist  $\eta^{-1}(K) \subset X$  kompakt.

*Beweis.* Jede  $\eta$ -Faser hat  $\leq n$  Punkte. Wenn man die Koeffizientenfunktionen von  $P$  auf  $K$  beschränkt, ist ihre Wertemenge beschränkt. Aus 1.2.2 folgt: Die Funktion  $f : \eta^{-1}(K) \rightarrow \mathbb{C}$  ist beschränkt, d.h. es gibt ein Kompaktum  $L \subset \mathbb{C}$  mit  $f(\eta^{-1}(K)) \subset L$ . Dann ist  $\eta^{-1}(K) \subset K \times L$  kompakt.  $\square$

**Satz.** Wenn das Polynom  $P$  für alle  $y \in Y$  einfache Wurzeln hat, gibt es auf  $X$  genau eine holomorphe Struktur, so daß  $\eta : X \rightarrow Y$  lokal biholomorph und  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist. Jede Faser  $\eta^{-1}(y)$  wird durch  $f$  bijektiv auf die  $n$  Wurzeln von  $P(y, w)$  abgebildet.

*Beweis.* Sei  $(b, c) \in X$ . Wir wenden die Folgerung in 1.2.3 an. Es gibt Umgebungen  $V$  von  $b$  und  $W$  von  $c$ , so daß  $P(y, w)$  für jedes  $y \in V$  genau eine Wurzel  $g(y) \in W$  besitzt. Diese hängt holomorph von  $y$  ab. Die Umgebung  $(V \times W) \cap X$  von  $(b, c)$  wird durch  $\eta$  homöomorph auf  $V$  abgebildet. Die Umkehrabbildung lautet  $y \mapsto (y, g(y))$ . – Nach dem Liftungsprinzip 1.2.1 wird  $X$  zu einer Riemannschen Fläche und  $\eta$  zu einer lokal biholomorphen Abbildung. Die Funktion  $f$  ist holomorph; denn in der Umgebung von  $(b, c)$  gilt  $f = g \circ \eta$ .  $\square$

Wir nennen  $(X, \eta, f)$  das Nullstellengebilde des Polynoms  $P$ . – In 6.2.5 wird die Konstruktion solcher Gebilde unter Einbeziehung mehrfacher Wurzeln des Polynoms fortgesetzt.

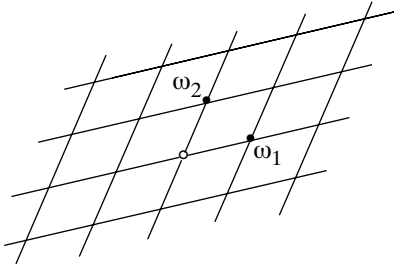
**1.2.5 Quotientenprinzip.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine lokal topologische Abbildung von einer Riemannschen Fläche  $X$  auf einen Hausdorffraum  $Y$ . Wenn es zu je zwei Punkten  $a$  und  $b$  aus  $X$ , die in derselben  $\eta$ -Faser liegen, Umgebungen  $U$  bzw.  $V$  und einen Isomorphismus  $\varphi : U \rightarrow V$  mit  $\varphi(a) = b$  und  $\eta \circ \varphi = \eta|_U$  gibt, existiert auf  $Y$  genau eine holomorphe Struktur, so daß  $\eta$  lokal biholomorph ist.

*Beweis.* Die Fläche  $X$  besitzt einen holomorphen Atlas  $\mathcal{A} = \{(U, h)\}$ , dessen Kartenbereiche  $U$  so klein sind, daß  $\eta : U \rightarrow \eta(U)$  ein Homöomorphismus ist. Dann ist  $\{(\eta(U), h \circ (\eta|U)^{-1})\}$  ein holomorpher Atlas für  $Y$ . Sind nämlich  $(U, h), (V, k) \in \mathcal{A}$  und  $a \in U, b \in V$  mit  $\eta(a) = \eta(b) := c$ , so gibt es Umgebungen  $U' \subset U$  und  $V' \subset V$  von  $a$  bzw.  $b$  sowie eine biholomorphe Abbildung  $\varphi : U' \rightarrow V'$  mit  $\eta \circ \varphi = \eta|U'$  und  $\varphi(a) = b$ . Dann ist  $(\eta|V')^{-1} \circ \eta|U' = \varphi|U'$ . In einer Umgebung von  $h \circ (\eta|U)^{-1}(c)$  ist der Kartenwechsel  $k \circ (\eta|V)^{-1} \circ (\eta|U) \circ h^{-1}$  die biholomorphe Abbildung  $k \circ \varphi \circ h^{-1}$ .

Da  $h \circ (\eta|U)^{-1}$  und  $h$  biholomorph sind, ist  $\eta|U$  biholomorph, also  $\eta$  lokal biholomorph. Die Eindeutigkeit der holomorphen Struktur auf  $Y$  folgt direkt.  $\square$

**1.2.6 Komplexe Tori.** Die *Kreislinie*  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  ist eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe  $\mathbb{C}^\times$  aller komplexen Zahlen  $\neq 0$ . Das kartesische Produkt  $S^1 \times S^1$  ist ein *Torus*, siehe Figur 1.1.5. Um ihn mit einer holomorphen Struktur zu versehen, bilden wir mit zwei reell linear unabhängigen Zahlen  $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$  das *Gitter*  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$  aller ganzzahligen Linearkombinationen  $n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ , siehe Figur 1.2.6. Jede komplexe Zahl läßt sich eindeutig als  $z = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$  mit reellen  $t_j$  darstellen. Folgende *Torusprojektion* ist ein Gruppenepimorphismus mit dem Kern  $\Omega$ :

$$(1) \quad \eta : \mathbb{C} \rightarrow S^1 \times S^1, \quad t_1\omega_1 + t_2\omega_2 \mapsto (\exp(2\pi i t_1), \exp(2\pi i t_2)).$$



**Fig. 1.2.6.** Die Ecken der Parallelogramme bilden das Gitter  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2 \subset \mathbb{C}$ .

**Satz.** Der Torus  $S^1 \times S^1$  besitzt genau eine holomorphe Struktur, so daß  $\eta$  lokal biholomorph ist. Die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$  besteht aus allen Translationen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \omega$ , mit  $\omega \in \Omega$ .

*Beweis.* Jeder Punkt in  $\mathbb{C}$  besitzt eine Umgebung  $U$ , so daß  $U \cap (\omega + U) = \emptyset$  für alle  $\omega \in \Omega, \omega \neq 0$  gilt. Das Bild  $\eta(U) \subset S^1 \times S^1$  ist offen, und  $U$  wird durch  $\eta$  homöomorph auf  $\eta(U)$  abgebildet. Daher ist  $\eta$  lokal topologisch. Zu je zwei Punkten  $a, b$  in derselben  $\eta$ -Faser gibt es ein  $\omega \in \Omega$  mit  $b = a + \omega$ . Die Isomorphismus-Bedingung in 1.2.5 wird durch  $U = V = \mathbb{C}$  und die Abbildung  $\varphi(z) = z + \omega$  erfüllt. – Weil  $\eta$  ein Gruppenepimorphismus mit dem Kern  $\Omega$  ist, besteht  $\mathcal{D}(\eta)$  aus den Translationen  $z \mapsto z + \omega$ .  $\square$

Mit dem durch (1) induzierten Isomorphismus  $\hat{\eta} : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow S^1 \times S^1$  der Gruppen wird die topologische und holomorphe Struktur von  $S^1 \times S^1$  auf

die Faktorgruppe  $\mathbb{C}/\Omega$  übertragen. Die übertragenen Strukturen hängt nur von  $\Omega$  und nicht von der Wahl der Basis  $\omega_1, \omega_2$  ab, die zur Definition von  $\eta$  benutzt wurde. Denn mit der Restklassenprojektion  $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  gilt:

$V \subset \mathbb{C}/\Omega$  offen  $\Leftrightarrow p^{-1}(V) \subset \mathbb{C}$  offen.  $f \in \mathcal{O}(V) \Leftrightarrow f \circ p \in \mathcal{O}(p^{-1}(V))$ .  
Somit ist  $\mathbb{C}/\Omega$  eine wohldefinierte kompakte Riemannsche Fläche. Sie heißt (*komplexer*) *Torus*. Tori zu verschiedenen Gittern sind zwar homöomorph, aber im allgemeinen als Riemannsche Flächen nicht isomorph, siehe 3.3.2. Die Funktionentheorie der Tori ist Gegenstand des 2. Kapitels.

## 1.3 Holomorphe Abbildungen

Holomorphe Abbildungen haben lokal dieselbe Gestalt wie  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $z \mapsto z^n$ , für  $n \in \mathbb{N}$ . Dieses Ergebnis wird im folgenden präzisiert, bewiesen und angewendet.– Mit  $W, X, Y$  und  $Z$  werden Riemannsche Flächen bezeichnet. Wir benutzen bei stetigen Abbildungen folgende Notation und Terminologie: Wenn  $\eta: X \rightarrow Y$  bei  $a \in X$  den Wert  $b = \eta(a)$  hat, schreiben wir  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ . Wir nennen  $\eta$  bei  $a$  *konstant*, wenn  $\eta$  auf einer Umgebung von  $a$  konstant ist. Wenn  $\eta$  bei keiner Stelle konstant ist, heißt  $\eta$  *nirgends konstant*. Die Abbildung  $\eta$  heißt *offen* (*abgeschlossen*), wenn jede offene (abgeschlossene) Teilmenge  $A \subset X$  ein offenes (abgeschlossenes) Bild  $\eta(A) \subset Y$  hat.

**1.3.1 Lokale Darstellung. Windungszahl.** Sei  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$  stetig. Wir wählen Karten  $h: (U, a) \rightarrow (U', a')$  und  $k: (V, b) \rightarrow (V', b')$  auf  $X$  bzw.  $Y$  und erreichen  $\eta(U) \subset V$  durch Verkleinern von  $U$ . Die Funktion

$$(1) \quad f := k \circ (\eta|U) \circ h^{-1}: (U', a') \rightarrow (V', b')$$

zwischen offenen Mengen in  $\mathbb{C}$  heißt (*lokale*) *Darstellung* von  $\eta$ . *Sie ist genau dann klassisch holomorph, wenn  $\eta|U$  holomorph ist.*

Wenn man andere Karten  $(U_*, h_*)$  und  $(V_*, k_*)$  wählt, besteht zwischen den Darstellungen  $f$  und  $f_* := k_* \circ \eta \circ h_*^{-1}$  die Gleichung

$$(2) \quad f_* \circ (h_* \circ h^{-1}) = (k_* \circ k^{-1}) \circ f \quad \text{auf} \quad h(U \cap U_*).$$

Dabei sind  $h_* \circ h^{-1}: h(U \cap U_*) \rightarrow h_*(U \cap U_*)$  und  $k_* \circ k^{-1}: k(V \cap V_*) \rightarrow k_*(V \cap V_*)$  biholomorphe Abbildungen zwischen offenen Mengen in  $\mathbb{C}$ .

Wenn  $\eta$  holomorph und bei  $a$  nicht konstant ist, hat  $f - b'$  bei  $a'$  eine Ordnung  $n = o(f - b', a') \in \{1, 2, \dots\}$ , welche dadurch definiert ist, daß für die Ableitungen  $f'(a') = \dots = f^{(n-1)}(a') = 0$ ,  $f^{(n)}(a') \neq 0$  gilt, siehe [Re 1], Abschnitt 8.1.4. Wir definieren die *Windungszahl*

$$v(\eta, a) := o(f - b', a')$$

und setzen  $v(\eta, a) := \infty$ , wenn  $\eta$  bei  $a$  konstant ist.

**Satz.** *Die Windungszahl ist unabhängig von der Darstellung. Sie ist genau dann = 1, wenn  $\eta$  bei  $a$  biholomorph ist. Mit  $\zeta: (Y, b) \rightarrow (Z, c)$  gilt:*

$$(3) \quad v(\zeta \circ \eta, a) = v(\zeta, b) \cdot v(\eta, a).$$

Bezüglich jeder Darstellung (1) gilt mit der Ableitung  $f'$

$$v(\eta, a) = 1 + o(f', h(a)).$$

*Beweis.* Wegen (2) ergeben zwei Darstellungen  $f$  und  $f_*$  dieselbe Windungszahl. Die übrigen Aussagen folgen mittels lokaler Darstellungen aus dem klassischen Fall.  $\square$

Die Punkte  $x \in X$ , wo  $v(\eta, x) \geq 2$  ist, heißen *Windungspunkte* und ihre Bilder  $\eta(x) \in Y$  *Verzweigungspunkte* von  $\eta$ . Der *Verzweigungsort*  $B \subset Y$  ist die Menge aller Verzweigungspunkte. Zum Beispiel ist  $\pi\mathbb{Z}$  die Menge der Windungspunkte der Cosinusfunktion  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $\{1, -1\}$  ihr Verzweigungsort.

**1.3.2 Lokale Normalform.** Zu jeder holomorphen Funktion  $f : (X, a) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  mit  $n := v(f, a) \geq 1$ , gibt es ein  $r > 0$  und eine Karte  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}_r, 0)$ , so daß  $f|U = h^n$  ist.

*Beweis.* Sei  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte. Dann ist  $f|U$  eine Potenzreihe in  $z$ , welche mit der  $n$ -ten Potenz beginnt, also  $f|U = z^n \cdot g$  mit  $g \in \mathcal{O}(U)$  und  $g(a) \neq 0$ . Nach Verkleinern von  $U$  kann man aus  $g$  die  $n$ -te Wurzel ziehen: Es gibt ein  $h \in \mathcal{O}(U)$  mit  $h^n = f|U$ , und  $v(h, a) = 1$ . Insbesondere ist  $h$  bei  $a$  biholomorph, d.h. eine verkleinerte Umgebung  $U$  wird durch  $h$  biholomorph auf eine Kreisscheibe  $\mathbb{E}_r$  abgebildet.  $\square$

**Folgerung.** Sei  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  holomorph und  $v(\eta, a) \geq 1$ . Für jede hinreichend kleine Scheibe  $U$  um  $a$  gilt:

$\eta|U$  ist offen. –  $\eta^{-1}(b) \cap U = \{a\}$ . – Für alle  $x \in U \setminus \{a\}$  ist  $v(\eta, x) = 1$ . – Genau dann, wenn  $\eta$  bei  $a$  biholomorph ist, gilt  $v(\eta, a) = 1$ .

*Beweis.* Man wählt eine Karte  $k : (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  und benutzt die lokale Normalform für  $f := k \circ \eta$  auf  $\eta^{-1}(V)$ .  $\square$

Die Folgerung ergibt sofort den

**1.3.3 Offenheitssatz.** Jede nirgends konstante holomorphe Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  ist offen. Jede Faser und die Menge aller Windungspunkte ist lokal endlich. Wenn  $\eta$  injektiv ist, wird  $X$  biholomorph auf die offene Menge  $\eta(X) \subset Y$  abgebildet.

Der Verzweigungsort ist i.a. nicht lokal endlich, siehe Aufgabe 4.9.9.

**1.3.4 Analytische Mengen.** Eine abgeschlossene Menge  $A \subset X$  heißt *analytisch*, wenn jeder Punkt in  $A$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so daß  $U \cap A$  die Nullstellenmenge  $N(f)$  einer Funktion  $f \in \mathcal{O}(U)$  ist.

**Satz.** Sei  $X$  zusammenhängend und  $A \subset X$  analytisch. Dann ist entweder  $A = X$ , oder  $A$  ist lokal endlich in  $X$ .

*Beweis.* Die Menge  $M \subset X$  der Häufungspunkte von  $A$  ist abgeschlossen und liegt in  $A$ . Zu jedem  $a \in M$  gibt es eine Umgebung  $U \subset X$  und ein  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $U \cap A = N(f)$ . Nach dem klassischen Identitätssatz ist  $a$

ein innerer Punkt von  $N(f)$ . Daher ist  $M$  offen in  $X$ , also  $M = X$ , oder  $M = \emptyset$ . Im ersten Fall ist  $A = X$ . Im zweiten Fall ist  $A$  lokal endlich.  $\square$

**Folgerung (Identitätssatz).** *Sei  $X$  zusammenhängend und seien  $\eta, \varphi : X \rightarrow Y$  zwei holomorphe Abbildungen. Wenn  $A := \{x \in X : \eta(x) = \varphi(x)\}$  einen Häufungspunkt hat, ist  $\eta = \varphi$ . Insbesondere ist jede nicht-konstante holomorphe Abbildung  $\eta$  offen.*

*Beweis.* Die Menge  $A$  ist abgeschlossen. Jeder Punkt in  $A$  besitzt eine Umgebung  $U$ , so daß  $\eta(U)$  und  $\varphi(U)$  im Definitionsbereich einer Karte  $(V, h)$  von  $Y$  liegen. Wegen  $U \cap A = N(k \circ \varphi - k \circ \eta)$  ist  $A \subset X$  analytisch, und die erste Behauptung folgt aus dem Satz. – Insbesondere ist jede nicht-konstante Abbildung nirgends konstant, also offen wegen 1.3.3.  $\square$

**1.3.5 Maximumprinzip.** *Sei  $X$  zusammenhängend und  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Wenn  $|f|$  oder  $\operatorname{Re} f$  oder  $\operatorname{Im} f$  an einer Stelle in  $X$  ein lokales Maximum hat, ist  $f$  konstant. Auf kompakten, zusammenhängenden Flächen ist jede holomorphe Funktion konstant.*

*Beweis.* Wenn es ein lokales Maximum bei  $a$  gibt, kann  $f$  nicht offen sein, da keine Umgebung von  $f(a)$  in  $f(X)$  enthalten ist. Wegen der letzten Folgerung ist  $f$  dann konstant.  $\square$

**1.3.6 Hebbare Singularitäten.** Folgendes Ergebnis läßt sich direkt aus der klassischen Funktionentheorie übertragen.

**Fortsetzungssatz.** *Jede Funktion  $f \in \mathcal{O}(X \setminus \{a\})$ , die um  $a$  beschränkt ist, läßt sich holomorph nach  $a$  fortsetzen.*  $\square$

**Folgerung (Hebbarkeitssatz).** *Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung zwischen Riemannschen Flächen, die außerhalb einer lokal endlichen Teilmenge  $A \subset X$  holomorph ist. Dann ist  $\eta$  auf ganz  $X$  holomorph.*  $\square$

**1.3.7 Zwei Holomorphiekriterien.** Die Hintereinanderschaltung holomorpher Abbildungen ist holomorph. Wir beweisen zwei Umkehrungen.

(1) *Für jede stetige Abbildung  $\varphi : W \rightarrow X$  und jede offene holomorphe Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  gilt: Wenn  $\eta \circ \varphi$  holomorph ist, dann auch  $\varphi$ .*

*Beweis.* Sei  $c \in W$ ,  $\varphi(c) =: a$  und  $\eta(a) =: b$ . Wenn  $\eta \circ \varphi$  bei  $c$  lokal konstant ist, gibt es eine Scheibe  $V$  um  $c$  mit  $\varphi(V) \subset \eta^{-1}(b)$ . Da die Faser  $\eta^{-1}(b)$  lokal endlich ist, folgt  $\varphi(V) \subset \{a\}$ . Somit ist  $\varphi$  bei  $c$  konstant und daher holomorph. – Wenn  $\eta \circ \varphi$  bei  $c$  nicht lokal konstant ist, genügt es wegen des Hebbarkeitssatzes, eine Umgebung  $V$  von  $c$  zu finden, so daß  $\varphi$  an jeder Stelle  $w \in V \setminus \{c\}$  holomorph ist: Nach den Folgerungen in 1.3.2 gibt es eine Umgebung  $U$  von  $a$  mit  $v(\eta, x) = 1$  für alle  $x \in U \setminus \{a\}$ , sowie eine Umgebung  $V$  von  $c$ , so daß  $\varphi(V) \subset U$  und  $b \notin \eta \circ \varphi(V \setminus \{c\})$  ist. Dann gilt  $v(\eta, \varphi(w)) = 1$  für alle  $w \in V \setminus \{c\}$ . Daraus folgt, daß  $\varphi$  bei  $w$  holomorph ist. Denn auf einer Scheibe  $S$  um  $\varphi(w)$  ist  $\eta$  biholomorph, und auf  $\varphi^{-1}(S)$  ist dann  $\varphi = (\eta|_S)^{-1} \circ (\eta \circ \varphi)$  holomorph.  $\square$

(2) Für jede surjektive, offene holomorphe Abbildung  $\eta: X \rightarrow Y$  und jede stetige Abbildung  $\psi: Y \rightarrow Z$  gilt: Wenn  $\psi \circ \eta$  holomorph ist, dann auch  $\psi$ .

*Beweis.* Die Menge  $A$  der Windungspunkte von  $\eta$  ist lokal endlich in  $X$ . Daher ist  $B := \{y \in Y : \eta^{-1}(y) \subset A\}$  lokal endlich in  $Y$ . Denn  $X$  läßt sich durch offene Mengen  $U$  überdecken, für die  $A \cap U$  endlich ist. Dann wird  $Y$  durch die offenen Mengen  $\eta(U)$  überdeckt, und jeder Durchschnitt  $B \cap \eta(U)$  ist endlich. – Wegen des Hebbarkeitssatzes genügt es zu zeigen, daß  $\psi$  bei jeder Stelle  $y \in Y \setminus B$  holomorph ist. Es gibt ein  $x \in X \setminus A$  mit  $y = \eta(x)$ . Eine Umgebung  $U$  von  $x$  wird durch  $\eta$  biholomorph auf die Umgebung  $\eta(U)$  von  $y$  abgebildet. Daher ist  $\psi|_{\eta(U)} = \psi \circ \eta \circ (\eta|_U)^{-1}$  holomorph.  $\square$

**1.3.8 Faktorisierungssatz.** Sei  $\eta: X \rightarrow Y$  surjektiv, offen und holomorph. Sei  $\zeta: X \rightarrow Z$  holomorph und auf jeder  $\eta$ -Faser konstant. Dann faktorisiert  $\zeta$  über  $\eta$ , d.h. es gibt genau eine holomorphe Abbildung  $\psi: Y \rightarrow Z$ , so daß  $\zeta = \psi \circ \eta$  ist. Wenn  $\zeta$  und  $\eta$  dieselben Fasern haben, ist  $\psi$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Die Existenz und Eindeutigkeit von  $\psi$  ist klar. Für jede offene Menge  $W \subset Z$  ist  $\zeta^{-1}(W) \subset X$  offen, also  $\psi^{-1}(W) = \eta(\zeta^{-1}(W)) \subset Y$  offen, weil  $\eta$  offen ist. Daher ist  $\psi$  stetig und wegen 1.3.7(2) holomorph. Bei gleichen Fasern ist  $\psi$  bijektiv, also nach dem Offenheitssatz ein Isomorphismus.  $\square$

*Beispiel.* Sei  $\zeta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine 1-periodische holomorphe Funktion. Dann gibt es genau eine holomorphe Funktion  $\psi: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ , so daß  $\zeta(z) = \psi \circ \exp(2\pi iz)$  ist. Sei  $\psi(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^n$  die Laurent-Reihe. Dann ist  $\zeta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(2\pi inz)$  die Fourier-Reihe.

## 1.4. Endliche Abbildungen. Überlagerungen

Aus Riemanns Beschreibung der Ausbreitung einer Fläche über der Zahlenebene in [Ri2], Abschnitt 5, ist der Überlagerungsbegriff entstanden. Um seine genaue Definition zu motivieren, beginnen wir mit Windungsabbildungen. – Mit  $X, Y$  und  $Z$  werden Riemannsche Flächen bezeichnet.

**1.4.1 Windungsabbildungen.** Eine holomorphe Abbildung zwischen Scheiben  $\eta: (U, a) \rightarrow (V, b)$  heißt *Windungsabbildung*, wenn es Isomorphismen  $h: (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  und  $k: (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gibt, so daß  $k \circ \eta = h^n$  gilt, wobei die Windungszahl  $n := v(\eta, a) \geq 1$  ist:

$$\begin{array}{ccc} (U, a) & \xrightarrow{\eta} & (V, b) \\ h \downarrow \approx & & k \downarrow \approx \\ (\mathbb{E}, 0) & \xrightarrow{z \mapsto z^n} & (\mathbb{E}, 0). \end{array}$$

Jede Faser über  $V \setminus \{b\}$  hat genau  $n$  Punkte. Aus dem Lemma in 1.2.4, angewendet auf  $Y = \mathbb{E}$  und  $P(y, w) = w^n - y$ , folgt:

(1) *Windungsabbildungen sind endlich.*  $\square$



**Satz.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  holomorph und offen.

- (i) Wenn durch Beschränkung von  $\eta$  eine Windungsabbildung  $U \rightarrow V$  entsteht, ist  $U$  eine Komponente von  $\eta^{-1}(V)$ .
- (ii) Zu jedem  $b \in Y$  und jeder endlichen Menge  $\{a_1, \dots, a_m\} \subset \eta^{-1}(b)$  gibt es Scheiben  $(V, b)$  und  $(U_1, a_1), \dots, (U_m, a_m)$ , so daß jede Beschränkung  $\eta_j : (U_j, a_j) \rightarrow (V, b)$  von  $\eta$  eine Windungsabbildung ist.

*Beweis.* (i) Es genügt zu zeigen, daß für jedes Kompaktum  $K \subset \eta^{-1}(V)$  der Durchschnitt  $K \cap U$  kompakt ist. Denn dann ist  $U$  abgeschlossen in  $\eta^{-1}(V)$  und somit eine Komponente. Das Bild  $L := \eta(K)$  ist kompakt. Dasselbe gilt für  $(\eta|U)^{-1}(L) = \eta^{-1}(L) \cap U$ , weil die Windungsabbildung  $\eta|U$  eigentlich ist. Dann ist auch  $K \cap U = K \cap \eta^{-1}(L) \cap U$  kompakt.

(ii) Es genügt, den Spezialfall  $(Y, b) = (\mathbb{C}, 0)$  zu betrachten. Sei  $n_j := v(\eta, a_j)$ . Wegen der lokalen Normalform 1.3.2 gibt es Karten  $g_j : (W_j, a_j) \rightarrow (\mathbb{E}_{\rho_j}, 0)$ , so daß  $\eta|W_j = g_j^{n_j}$  ist. Sei  $s := \min\{\rho_j^{n_j} : j = 1, \dots, m\}$ ,  $r_j := \sqrt[n_j]{s}$  und  $U_j := \{x \in W_j : |g_j(x)| < r_j\}$ . Dann ist jede Beschränkung  $\eta_j : (U_j, a_j) \rightarrow (\mathbb{E}_s, 0)$  eine Windungsabbildung.  $\square$

**1.4.2 Eigentliche Abbildungen** sind stetige Abbildungen, bei denen die Urbilder kompakter Mengen kompakt bleiben.

**Lemma.** Jede eigentliche Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  ist abgeschlossen.

*Beweis.* Sei  $A \subset X$  abgeschlossen. Wir finden zu jedem  $b \in Y \setminus \eta(A)$  eine Umgebung  $W$ , die  $\eta(A)$  nicht trifft: Es gibt eine Umgebung  $V$  von  $b$  mit kompakter Hülle  $\bar{V}$ . Daher ist  $\eta^{-1}(\bar{V}) \cap A$  kompakt, also auch  $\bar{V} \cap \eta(A) = \eta(\eta^{-1}(\bar{V}) \cap A)$ . Dann ist  $W := V \setminus (\bar{V} \cap \eta(A))$  die gesuchte Umgebung.  $\square$

**1.4.3 Endliche Abbildungen.** Zu jeder offenen holomorphen Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  mit endlichen Fasern definieren wir die *Gradfunktion*

$$Y \rightarrow \mathbb{N}, y \mapsto \text{gr}(\eta, y) := \sum_{x \in \eta^{-1}(y)} v(\eta, x).$$

**Satz.** Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\eta$  ist endlich.
- (2) Die Gradfunktion ist lokal konstant.
- (3) Jeder Punkt  $b \in Y$  ist Zentrum einer Scheibe  $V$ , deren Urbild  $\eta^{-1}(V)$  eine disjunkte, endliche Vereinigung von Scheiben  $U_j$  ist, für welche die Beschränkungen von  $\eta$  Windungsabbildungen  $(U_j, a_j) \rightarrow (V, b)$  sind.

*Beweis.* Sei  $b \in Y$  und  $\eta^{-1}(b) = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Wir wählen Scheiben  $V, U_1, \dots, U_m$  gemäß Satz 1.4.1. Sei  $U := U_1 \uplus \dots \uplus U_m$ . – (1)  $\Rightarrow$  (3). Es genügt,  $U = \eta^{-1}(V)$  zu zeigen. Sei  $A$  eine Komponente von  $\eta^{-1}(V)$ . Dann ist  $\eta(A) \subset V$  offen und wegen des Lemmas abgeschlossen, also  $\eta(A) = V$ , insbesondere  $b \in \eta(A)$ , also  $a_j \in A$  für ein  $j$  und somit  $A = U_j \subset U$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3). Wir wählen die Scheibe  $V$  so klein, daß die Gradfunktion auf  $V$  konstant  $= \text{gr}(\eta, b)$  ist. Es genügt wieder,  $U = \eta^{-1}(V)$  zu zeigen. Wenn es ein  $x \in A, x \notin U$  gibt, führt  $y := \eta(x)$  zum Widerspruch  $\text{gr}(\eta, b) = \text{gr}(\eta, y) \geq v(\eta, x) + \text{gr}(\eta|U, y) \geq 1 + \text{gr}(\eta, b)$ . – (3)  $\Rightarrow$  (2) ist trivial.

(3)  $\Rightarrow$  (1). Da Windungsabbildungen eigentlich sind, siehe 1.4.1(1), hat jeder Punkt in  $Y$  eine Umgebung  $V$ , deren  $\eta$ -Urbild eine kompakte Hülle besitzt. Für jedes Kompaktum  $L \subset Y$  wird daher  $\eta^{-1}(L)$  durch endlich viele Kompakta überdeckt und ist dann als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt.  $\square$

**Folgerung.** Jede offene holomorphe Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  einer kompakten Fläche  $X$  ist endlich.  $\square$

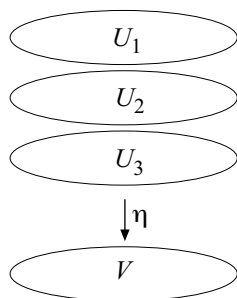
**1.4.4 Abbildungsgrad.** Jede endliche Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  mit *zusammenhängender* Basis  $Y$  hat eine konstante Gradfunktion  $\neq 0$ . Ihr Wert heißt *Abbildungsgrad* von  $\eta$ , kurz  $\text{gr } \eta$ . Endliche Abbildungen vom Grade  $n$  heißen *n-blättrig*. Genau dann wenn  $\eta$  biholomorph ist, gilt  $\text{gr } \eta = 1$ .

**Beispiele.** (1) Die Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  im Nullstellengebilde  $(X, \eta, f)$  eines Polynoms  $P \in \mathcal{O}(Y)[w]$  vom Grade  $n$ , welches keine mehrfachen Nullstellen hat, ist *n-blättrig*, vgl. 1.2.4.– (2) Jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[z]$  vom Grade  $n$  wird durch  $p(\infty) := \infty$  zu einer *n-blättrigen* Abbildung  $p : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  fortgesetzt, vgl. 1.6.5.

**Satz.** Seien  $\eta : X \rightarrow Y$  und  $\varphi : Y \rightarrow Z$  zwei holomorphe Abbildungen.

- (i) Wenn  $\eta$  und  $\varphi$  endlich sind, ist auch  $\varphi \circ \eta$  endlich. Wenn  $Y$  und  $Z$  außerdem zusammenhängen, gilt  $\text{gr}(\varphi \circ \eta) = \text{gr } \varphi \cdot \text{gr } \eta$ .
- (ii) Wenn  $\zeta := \varphi \circ \eta$  endlich ist, gilt dasselbe für  $\eta$  und, falls  $\eta$  surjektiv ist, auch für  $\varphi$ .

*Beweis.* (i) folgt aus der Produktformel 1.3.1(3) für Windungszahlen.– Zu (ii). Beweis für  $\eta$ : Für jedes Kompaktum  $L \subset Y$  ist  $\eta^{-1}(L)$  abgeschlossen und im Kompaktum  $\zeta^{-1}(\varphi(L))$  enthalten, also selbst kompakt. Somit ist  $\eta$  eigentlich. Da  $\zeta$  endliche Fasern hat, gilt dasselbe für  $\eta$ .– Beweis für  $\varphi$ : Aus  $\eta(X) = Y$  folgt erstens: Die  $\varphi$ -Fasern sind wie die  $\zeta$ -Fasern endlich. Zweitens: Für jedes Kompaktum  $K \subset Z$  ist  $\varphi^{-1}(K)$  als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums  $\eta(\zeta^{-1}(K))$  ebenfalls kompakt.  $\square$



**Fig. 1.4.5.** Veranschaulichung der elementaren Überlagerung von  $V$  als Plattenstapel. Die Platten  $U_j$  sind die Komponenten des Urbildes  $\eta^{-1}(V)$ .

**1.4.5 Überlagerungen.** Eine Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Riemannschen Flächen heißt *Überlagerung*, wenn jeder Punkt  $b \in Y$  eine Umgebung  $V$  besitzt, die in folgendem Sinne *elementar überlagert* wird (Figur 1.4.5):

Das Urbild  $\eta^{-1}(V)$  ist eine Vereinigung von Scheiben  $(U, a)$ , für welche die Beschränkungen  $\eta: (U, a) \rightarrow (V, b)$  Windungsabbildungen sind.

Überlagerungen sind offene, holomorphe Abbildungen. Die Scheiben  $U$  sind nach Satz 1.4.1(i) die Komponenten von  $\eta^{-1}(V)$ . Das Bild  $\eta(X)$  ist abgeschlossen in  $Y$ . Daher ist  $\eta$  surjektiv, wenn  $Y$  zusammenhängt. Der Verzweigungsort ist lokal endlich. Die Überlagerung  $\eta$  heißt *unverzweigt*, wenn sie lokal biholomorph ist, also keine Verzweigungspunkte hat.

Für jede Komponente  $Z$  von  $X$  und für jede offene Menge  $W \subset Y$  bleiben die Beschränkungen  $\eta: Z \rightarrow Y$  bzw.  $\eta: \eta^{-1}(W) \rightarrow W$  Überlagerungen.

Die Hintereinanderschaltung zweier Überlagerungen ist im allgemeinen keine Überlagerung, siehe Aufgabe 4.9.9.– Aus Satz 1.4.3 folgt:

(\*) Jede endliche Abbildung ist eine Überlagerung. □

Beispiele unendlich blättriger Überlagerungen folgen in 1.5.4. Zu ihnen gehört die Exponentialfunktion  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ .

**1.4.6 Gleichverzweigte Überlagerungen**  $\eta: X \rightarrow Y$  haben längs jeder Faser gleiche Windungszahlen. Die Funktion  $S: Y \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$ ,  $S(y) := v(\eta, x)$  für  $\eta(x) = y$ , heißt *Verzweigungssignatur*.

*Beispiel.* Die dreiblättrige Überlagerung  $\eta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\eta(z) = z^3 - z^2$ , ist nicht gleichverzweigt, da längs der Faser  $\eta^{-1}(0)$  die Windungszahlen  $v(\eta, 0) = 2$  und  $v(\eta, 1) = 1$  verschieden sind.

**Zusammenhangskriterium.** Wenn bei einer gleichverzweigten, endlichen Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  die Fläche  $Y$  zusammenhängt und die Menge  $\{\# \eta^{-1}(y) : y \in Y\}$  teilerfremd ist, hängt auch  $X$  zusammen.

*Beweis.* Für jedes  $y \in Y$  gilt  $\text{gr } \eta = S(y) \cdot \# \eta^{-1}(y)$ . Sei  $\text{gr } \eta = p_1^{t_1} \cdots p_r^{t_r}$  die Primzerlegung. Zu jedem  $p_j$  gibt es ein  $y \in Y$ , so daß  $S(y)$  von  $p_j^{t_j}$  geteilt wird. Sei  $X_*$  eine Komponente von  $X$ . Die Beschränkung  $\eta_* := \eta|_{X_*}$  hat dieselbe Signatur  $S$ . Daher wird  $\text{gr } \eta_*$  von allen Potenzen  $p_j^{t_j}$  geteilt. Somit ist  $\text{gr } \eta$  ein Teiler von  $\text{gr } \eta_*$ . Es folgt  $X_* = X$ . □

## 1.5 Deckgruppen

Wir betrachten die Deckgruppen  $\mathcal{D}$  von offenen holomorphen Abbildungen  $\eta: X \rightarrow Y$  und ihre Standgruppen. Die besondere Aufmerksamkeit gilt den *normalen* Abbildungen  $\eta$ , bei denen  $\mathcal{D}$  auf jeder Faser transitiv operiert.

**1.5.1 Bahnen und Standgruppen.** Jede Gruppe  $G$  von Homöomorphismen  $\gamma: X \rightarrow X$  eines topologischen Raumes heißt *Transformationsgruppe* von  $X$ . Man sagt auch: Die Gruppe  $G$  *wirkt* oder *operiert* auf  $X$ . Man definiert für jeden Punkt  $x \in X$  die *G-Bahn* (oder den *G-Orbit*)

$$G(x) := \{\gamma(x) : \gamma \in G\} \subset X$$

und die *Standgruppe* (oder *Isotropiegruppe*)

$$G_x := \{\gamma \in G : \gamma(x) = x\} < G.$$

Für je zwei Punkte auf derselben  $G$ -Bahn sind die Standgruppen konjugiert:  $G_{\gamma(x)} = \gamma \cdot G_x \cdot \gamma^{-1}$ . Je nachdem, ob  $G_x = \{\text{id}\}$  oder  $G_x \neq \{\text{id}\}$  ist, heißt  $G(x)$  *Hauptorbit* oder *Ausnahmeorbit*. Wenn es keine Ausnahmeorbits gibt, sagt man: Die Gruppe  $G$  operiert *frei*. – Die Abbildung  $G \rightarrow G(x)$ ,  $\gamma \mapsto \gamma(x)$ , induziert eine Bijektion  $G/G_x \rightarrow G(x)$  für die Menge  $G/G_x$  der Restklassen. Wenn  $G$  endlich ist, folgt die *Bahngleichung*

$$(1) \quad \#G = \#G_x \cdot \#G(x).$$

**1.5.2 Die Ableitung.** Sei  $\text{Aut}(X)$  die Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche  $X$ . Sei  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte von  $X$ . Zu jedem  $\gamma \in \text{Aut}(X)_a$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $a$  in  $U$  mit  $\gamma(V) \subset U$ . Die holomorphe Funktion  $h \circ \gamma \circ h^{-1} : (h(V), 0) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  hat eine *Ableitung*

$$(1) \quad \gamma'(a) := (h \circ \gamma \circ h^{-1})'(0) \neq 0,$$

die nur von  $\gamma$  und  $a$ , nicht aber von  $(U, h)$  und  $V$  abhängt.

(2) Die Ableitung  $\text{Aut}(X)_a \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $\gamma \mapsto \gamma'(a)$ , ist ein *Homomorphismus*.

(3) Für jedes  $\varphi \in \text{Aut}(X)$  gilt  $(\varphi \circ \gamma \circ \varphi^{-1})'(\varphi(a)) = \gamma'(a)$ . □

**1.5.3 Standgruppen von Deckgruppen.** Sei  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  eine offene holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden Flächen mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}$ . Sei  $n := v(\eta, a)$  die Windungszahl. Nach Satz 1.4.1 gibt es Karten  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  und  $k : (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit  $\eta(U) = V$  und  $k \circ \eta = h^n$ . Für solche *privilegierte* Karten gilt zusätzlich:

(1)  $\gamma(U) = U$  für  $\gamma \in \mathcal{D}_a$  und  $\gamma(U) \cap U = \emptyset$  für  $\gamma \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_a$ .

(2)  $h \circ \gamma(x) = \gamma'(a) \cdot h(x)$  für  $\gamma \in \mathcal{D}_a$  und  $x \in U$  (*Linearisierung*).

(3) Die Ableitung  $\mathcal{D}_a \rightarrow \mu_n$ ,  $\gamma \mapsto \gamma'(a)$ , ist ein *Monomorphismus* in die multiplikative Gruppe der  $n$ -ten Einheitswurzeln.

*Beweis.* Nach Satz 1.4.1(i) ist  $U$  eine Komponente von  $\eta^{-1}(V)$ , die  $\eta^{-1}(b)$  nur in  $a$  trifft. Für jedes  $\gamma \in \mathcal{D}$  ist  $\gamma(U)$  auch eine Komponente von  $\eta^{-1}(V)$ . Daraus folgt (1). – (2) Die Abbildung  $h \circ \gamma \circ h^{-1}$  ist ein Automorphismus von  $\mathbb{E}$  mit dem Fixpunkt 0, also nach dem Schwarzschen Lemma eine Drehung  $z \mapsto \omega z$ . Dabei ist  $\omega = \gamma'(a)$ . – (3) Aus  $k \circ \eta = h^n$ , (1) und (2) folgt  $h(x)^n = \gamma'(a)^n \cdot h(x)^n$  für jedes  $x \in U$ , also  $\gamma'(a) \in \mu_n$ . Wenn  $\gamma'(a) = 1$  ist, gilt  $\gamma|_U = \text{id}$  wegen (2), also  $\gamma = \text{id}$  nach dem Identitätssatz. □

**Folgerung.** Jede Standgruppe  $\mathcal{D}_a$  ist zyklisch. Ihre Ordnung teilt die Windungszahl  $v(\eta, a)$ . □

**1.5.4 Normale Abbildungen.** Eine surjektive, offene, holomorphe Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen zusammenhängenden Flächen heißt *normal*, wenn jede Faser ein Orbit der Deckgruppe  $\mathcal{D}$  ist. Normale Abbildungen mit zyklischer Deckgruppe heißen *zyklisch*. Die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,

die Potenzen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ , für  $n \geq 1$  und alle Windungsabbildungen sind zyklisch. Die Torusprojektionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  von 1.2.6 ist normal, aber nicht zyklisch.

**Satz.** Jede normale Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  ist eine gleichverzweigte Überlagerung. Die Ableitungen sind Isomorphismen  $\mathcal{D}_a \rightarrow \mu_n, \gamma \mapsto \gamma'(a)$ , für  $n := v(\eta, a)$ .

*Beweis.* Zu  $b \in Y$  wählen wir ein  $a \in \eta^{-1}(b)$  und Scheiben  $(U, a), (V, b)$ , so daß  $\eta : (U, a) \rightarrow (V, b)$  eine Windungsabbildung ist. Wegen der Normalität ist  $\eta^{-1}(V) = \bigcup_{\gamma \in \mathcal{D}} \gamma(U)$ . Jede Beschränkung  $\eta : (\gamma(U), \gamma(a)) \rightarrow (V, b)$  ist eine Windungsabbildung. Daher wird  $V$  elementar überlagert. – Wenn  $\eta(x_1) = \eta(x_2)$  ist, gibt es ein  $\varphi \in \mathcal{D}$  mit  $\varphi(x_1) = x_2$ . Dann ist  $v(\eta, x_1) = v(\eta \circ \varphi, x_1) = v(\eta, x_2) \cdot v(\varphi, x_1) = v(\eta, x_2)$ .

Die zweite Behauptung folgt aus 1.5.3(3), wenn wir zeigen, daß  $\gamma \mapsto \gamma(a)$  surjektiv ist. Seien  $h$  und  $k$  Karten wie in 1.5.2. Sei  $\omega \in \mu_n$ . Zu jedem  $x \in U$  gibt es ein  $x' \in U$  mit  $h(x') = \omega \cdot h(x)$ . Wegen  $k \circ \eta = h^n$  ist  $\eta(x') = \eta(x)$ . Es gibt also ein  $\gamma \in \mathcal{D}$  mit  $\gamma(x) = x'$ . Daher ist  $\gamma(U) \cap U \neq \emptyset$ , also  $\gamma(U) = U$  und somit  $\gamma \in \mathcal{D}_a$ . Aus 1.5.2(1) folgt  $\gamma'(a) = \omega$ .  $\square$

**Folgerung.** Eine normale Abbildung ist genau dann eine unverzweigte Überlagerung, wenn ihre Deckgruppe frei operiert.  $\square$

**1.5.5 Endliche normale Überlagerungen.** Bei jeder endlichen Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen zusammenhängenden Flächen teilt die Ordnung  $\#\mathcal{D}$  der Deckgruppe den Abbildungsgrad  $\text{gr } \eta$ .

Genau dann, wenn  $\eta$  normal ist, gilt  $\#\mathcal{D} = \text{gr } \eta$ .

*Beweis.* Jede Faser ist eine disjunkte Vereinigung  $F = F_1 \uplus \dots \uplus F_r$  von  $\mathcal{D}$ -Bahnen. Wenn  $F$  keine Windungspunkte enthält, gilt  $\#F_j = \#\mathcal{D}$  für alle  $j$ . Daher ist  $\text{gr } \eta = \#F = r \cdot \#\mathcal{D}$ . – Genau dann, wenn  $\eta$  normal ist, gilt  $r = 1$  für jedes  $F$ . Aus der Normalität ( $r = 1$ ) folgt also  $\#\mathcal{D} = \text{gr } \eta$ . – Umgekehrt sei  $\text{gr } \eta = \#\mathcal{D}$ . Sei  $k_j$  die gemeinsame Ordnung der Standgruppen  $\mathcal{D}_x$  für  $x \in F_j$ . Nach der Bahnengleichung 1.5.1(1) ist  $k_j \cdot \#F_j = \#\mathcal{D}$ . Andererseits ist  $\text{gr } \eta = \sum_j \sum_{x \in F_j} v(\eta, x)$  und  $v(\eta, x) \geq k_j$  für  $x \in F_j$ , letzteres nach der Folgerung in 1.5.3. Daher ist  $\text{gr } \eta \geq \sum_j k_j \cdot \#F_j = r \cdot \#\mathcal{D}$ , also  $r = 1$  für  $\#\mathcal{D} = \text{gr } \eta$ .  $\square$

**Folgerungen.** (1) Jede endliche Überlagerung vom Primzahlgrad mit einer Deckabbildung  $\neq \text{id}$  ist zyklisch.  $\square$

(2) Zweiblättrige Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  sind stets zyklisch.

*Beweis* zu (2). Jede Faser  $\eta^{-1}(y)$  besteht aus ein oder zwei Punkten. Die Abbildung  $\gamma : X \rightarrow X$  vertausche sie. Man prüft anhand einer elementar überlagerten Scheibe um  $y$ , daß  $\gamma$  holomorph ist.  $\square$

Die Untersuchung normaler Abbildungen wird in 3.6 und 4.7 fortgesetzt.

## 1.6 Meromorphe Funktionen

Die Existenz nirgends konstanter meromorpher Funktionen auf beliebigen Flächen  $X$  liegt tief, siehe 10.7.2. Aber in vielen Fällen sind solche Funktionen explizit bekannt.

**1.6.1 Der Ring der meromorphen Funktionen.** Wenn  $X$  zusammenhängt, ist der Ring  $\mathcal{M}(X)$  aller meromorphen Funktionen ein Körper.

*Beweis.* Jede Funktion  $f \neq 0$  hat nach dem Identitätssatz eine lokal endliche Nullstellenmenge. Nach Satz 1.1.4 gehört dann  $1/f$  zu  $\mathcal{M}(X)$ .  $\square$

**Fortsetzungssatz.** Eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X \setminus \{a\})$  läßt sich genau dann meromorph nach  $a$  fortsetzen, wenn es eine bei  $a$  holomorphe Funktion  $v \neq 0$  gibt, so daß  $vf$  um  $a$  beschränkt ist.

*Beweis.* Nach 1.3.6 läßt sich  $vf$  zu einer bei  $a$  holomorphen Funktion  $h$  fortsetzen. Dann ist  $h/v$  die meromorphe Fortsetzung von  $f$  nach  $a$ .  $\square$

**1.6.2 Die Ordnung.** Für jede Stelle  $x \in X$ , wo  $f \in \mathcal{M}(X)$  nicht konstant Null ist, definiert man mittels der Windungszahl die ganzzahlige *Ordnung*

$$(1) \quad o(f, x) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } f(x) \neq 0, \neq \infty, \\ v(f, x) & , \text{ falls } f(x) = 0, \\ -v(f, x) & , \text{ falls } f(x) = \infty. \end{cases}$$

Wenn  $x$  im Definitionsbereich der Karte  $h$  liegt, ist  $o(f, x) = o(f \circ h^{-1}, h(x))$  die klassische Ordnung, vgl. [Re 1], Abschnitt 10.3.4. Es gilt

$$(2) \quad o(f \cdot g, x) = o(f, x) + o(g, x) \quad \text{und} \quad o(1/f, x) = -o(f, x). \quad \square$$

**Satz.** Auf jeder kompakten Fläche  $X$  ist jede nirgends konstante meromorphe Funktion  $f$  eine endliche Überlagerung  $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit

$$(3) \quad \text{gr} f = \sum_{x \in f^{-1}(0)} o(f, x) = - \sum_{x \in f^{-1}(\infty)} o(f, x).$$

Insbesondere gilt

$$(4) \quad \sum_{x \in X} o(f, x) = 0. \quad \square$$

**1.6.3 Liftung, Körpererweiterung.** Wenn  $\eta : X \rightarrow Y$  offen und holomorph ist, entsteht aus jeder meromorphen Funktion  $g$  auf  $Y$  die geliftete meromorphe Funktion  $g \circ \eta$  auf  $X$ . Wenn  $Y$  zusammenhängt, ist die *Liftung*

$$(1) \quad \eta^* : \mathcal{M}(Y) \rightarrow \mathcal{M}(X), \quad g \mapsto g \circ \eta,$$

eine Erweiterung des Körpers  $\mathcal{M}(Y)$  zum Ring  $\mathcal{M}(X)$ , d.h. wir können  $\mathcal{M}(Y) \subset \mathcal{M}(X)$  als Teilkörper auffassen. – Die Produktformel für Windungszahlen 1.3.1(3) ergibt

$$(2) \quad o(g \circ \eta, x) = o(g, \eta(x)) \cdot v(\eta, x) \quad \text{für } x \in X.$$

Wenn  $X$  zusammenhängt, ist  $\mathcal{M}(X)$  auch ein Körper. Wir zeigen in 6.5.1, daß *alle* endlichen Körper-Erweiterungen  $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow L$  Liftungen zu endlichen Überlagerungen  $X \rightarrow Y$  sind. – Aus der Faktorisierung 1.3.8 folgt der

**Satz.** *Bei jeder normalen Überlagerung  $\eta$  mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}$  ist*

$$(3) \quad \eta^*(\mathcal{M}(Y)) = \mathcal{M}_{\mathcal{D}}(X) := \{f \in \mathcal{M}(X) : f \circ \gamma = f \text{ für } \gamma \in \mathcal{D}\}$$

*der Teilkörper der  $\mathcal{D}$ -invarianten Funktionen.* □

**1.6.4 Divisoren.** Ein *Divisor* auf der Fläche  $X$  ist eine Funktion  $D: X \rightarrow \mathbb{Z}$ , deren Träger  $\text{Tr}(D) := \{x \in X : D(x) \neq 0\}$  lokal endlich ist. Bei kompakten Flächen ist  $\text{Tr}(D)$  endlich. Man nennt dann

$$(1) \quad \text{gr } D := \sum_{x \in X} D(x)$$

den *Grad des Divisors*. Zu jeder meromorphen Funktion  $f$ , die nirgends konstant Null ist, gehört der *Hauptdivisor*  $(f)$  mit

$$(2) \quad (f) : X \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto o(f, x).$$

Für ihn gilt

$$(3) \quad (f \cdot g) = (f) + (g) \text{ und } (1/f) = -(f). \quad \square$$

(4) *Wenn  $X$  kompakt ist, hat jeder Hauptdivisor den Grad Null. Wenn  $X$  außerdem zusammenhängt, folgt aus  $(f) = (g)$ , daß  $g = cf$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$  gilt.*

*Beweis.* Die erste Aussage gilt wegen 1.6.2(4), die zweite folgt, weil  $f/g$  keine Null- und Polstellen hat und daher konstant ist. □

**1.6.5 Rationale Funktionen.** Jedes Polynom  $p \in \mathbb{C}[z]$  ist eine meromorphe Funktion auf der Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$ . An jeder Stelle  $a \in \mathbb{C}$  ist  $o(p, a)$  die Vielfachheit von  $a$  als Nullstelle von  $p$ . Der einzige Pol liegt in  $\infty$ . Dort ist  $o(p, \infty) = -\text{gr } p$  der negative Polynomgrad. Daher stimmen Polynom- und Abbildungsgrad überein.

*Rationale Funktionen* sind Quotienten  $f = p/q$  von Polynomen. Sie bilden den Körper  $\mathbb{C}(z) \subset \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Für die Ordnungen gilt  $o(f, a) = o(p, a) - o(q, a)$  gemäß 1.6.2(2).

(1) *Für Polynome ohne gemeinsame Nullstelle ist  $\text{gr}(p/q) = \max\{\text{gr } p, \text{gr } q\}$ .*

(2) *Jeder Divisor  $D$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade Null ist Hauptdivisor der rationalen Funktion*

$$\prod_{a \in \mathbb{C}} (z - a)^{D(a)}. \quad \square$$

Insbesondere gibt es zu jeder meromorphen Funktion  $f \neq 0$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  eine rationale Funktion  $h$ , so daß  $(f) = (h)$  ist. Mit 1.6.4(4) folgt daraus:

(3) *Die meromorphen Funktionen auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  sind genau die rationalen Funktionen, kurz  $\mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(z)$ .* □

(4) *Wenn die kompakte Fläche  $X$  nicht zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph ist, gibt es Divisoren vom Grade Null, die keine Hauptdivisoren sind.*

*Beweis* zu (4). Seien  $a, b \in X$  und  $a \neq b$ . Wenn der Divisor  $D$  mit dem Träger  $\{a, b\}$  und den Werten  $D(a) = 1$ ,  $D(b) = -1$  ein Hauptdivisor  $(f)$  wäre, hätte  $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  den Grad eins und wäre also ein Isomorphismus.  $\square$

**1.6.6 Die Automorphismen der Zahlenkugel**  $\widehat{\mathbb{C}}$  sind die rationalen Funktionen vom Grade eins. Sie haben wegen 1.6.5(1) die Gestalt

$$(1) \quad z \mapsto (az + b)/(cz + d) \quad \text{mit} \quad ad - bc \neq 0. \quad \square$$

Man nennt sie auch *Möbius-Transformationen*, siehe [Mö] 2, S. 243-314. Die Abbildung  $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ , die jeder Matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  den Automorphismus (1) zuordnet, ist ein Epimorphismus mit dem Kern

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{C}^\times \right\}.$$

Die Beschränkung  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathrm{Aut} \widehat{\mathbb{C}}$  auf Matrizen mit der Determinante 1 bleibt epimorph.

Die Fixpunkte jeder Möbiustransformation  $\neq \mathrm{id}$  lassen sich durch Lösung einer quadratischen Gleichung berechnen. Daraus folgt:

(2) *Jedes Element  $\neq \mathrm{id}$  aus  $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  hat mindestens einen und höchstens zwei Fixpunkte. Zwei Möbiustransformationen stimmen bereits dann überein, wenn sie an drei verschiedenen Stellen in  $\widehat{\mathbb{C}}$  gleiche Werte haben.*  $\square$

**Folgerung.** *Kein Torus  $\mathbb{C}/\Omega$  ist zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph.*

Denn jedes  $a \notin \Omega$  bestimmt wegen 1.3.8 den fixpunktfreien Automorphismus  $z + \Omega \mapsto a + z + \Omega$  des Torus.  $\square$

(3) *Die Gruppe  $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  operiert dreifach transitiv: Zu je zwei Tripeln  $(a, b, c)$  und  $(a', b', c')$  von jeweils drei verschiedenen Punkten in  $\widehat{\mathbb{C}}$  gibt es genau eine Möbiustransformation  $f$  mit  $f(a) = a'$ ,  $f(b) = b'$ ,  $f(c) = c'$ .*

*Beweis.* Wir können  $a' = 0$ ,  $b' = 1$  und  $c' = \infty$  annehmen. Man setzt

$$g(z) := \begin{cases} 1/(z - c), & c \neq \infty \\ z, & c = \infty \end{cases} \quad \text{und} \quad f(z) := \frac{g(z) - g(a)}{g(b) - g(a)}. \quad \square$$

## 1.7 Aufgaben.

- 1) Sei  $\pi : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die stereographische Projektion. Berechne für die Antipoden-Abbildung  $A : S^2 \rightarrow S^2$ ,  $x \mapsto -x$ , die Abbildung  $\pi \circ A \circ \pi^{-1} : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Kann es eine holomorphe Abbildung  $\eta : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow Y$  geben, so daß die Fasern von  $\eta \circ \pi$  genau die Paare antipodischer Punkte  $(x, -x)$  sind?
- 2) Sei  $Y := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b\}$ , wobei  $a, b \in \mathbb{C}$  verschieden sind. Zeige: Die Nullstellenmenge des Polynoms  $w^2 - (z - a)(z - b) \in \mathcal{O}(Y)[w]$  ist zu  $\mathbb{C}^\times$  isomorph. – Hinweis: Transformiere  $a, b$  nach  $0, \infty$ .
- 3) Zeige: Alle Automorphismen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  mit genau einem Fixpunkt haben unendliche Ordnung.



- 4) Zeige, daß die endlichen holomorphen Abbildungen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genau die nicht konstanten Polynome sind.– Hinweis: Zeige zunächst, daß sich  $f$  meromorph nach  $\infty$  fortsetzen läßt.
- 5) Sei  $X$  zusammenhängend und kompakt, seien  $f, g, f + g \in \mathcal{M}(X)$  nicht konstant. Zeige:  $\text{gr}(f + g) \leq \text{gr } f + \text{gr } g$ .

- 6) Zeige: Für  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{E}$  ist das *Blaschke-Produkt*

$$z \mapsto \prod_{\nu=1}^n \frac{z - z_\nu}{1 - \bar{z}_\nu z}$$

eine  $n$ -blättrige Überlagerung  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ . Bestimme ihre Windungspunkte und den Verzweigungsort. Ist diese Überlagerung normal?

- 7) Zeige: Die Sinusfunktion  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist normal. Bestimme die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\sin)$  und alle Standgruppen.– Löse die entsprechende Aufgabe für die Tangensfunktion.
- 8) (i) Gib gleichverzweigte Überlagerungen an, die nicht normal ist.– (ii) Warum ist jede unverzweigte, normale Abbildung  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow Y$  biholomorph?
- 9) Zeige, daß die rationale Funktion

$$\eta : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}} \quad , \quad \eta(z) := \frac{4}{27} \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z - 1)^2} \quad ,$$

normal ist und ihre Deckgruppe  $\mathcal{D}$  aus allen Möbius-Transformationen besteht, welche  $0, 1, \infty$  permutieren. Bestimme alle Standgruppen  $\mathcal{D}_a$  und den Verzweigungsort von  $\eta$ .

- 10) Zeige: Wenn  $\eta : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  eine zusammenhängende,  $n$ -blättrige Überlagerung ist, hat jeder Automorphismus  $\alpha \in \text{Aut}(X) \setminus \mathcal{D}(\eta)$  höchstens  $2n$  Fixpunkte.

*Hinweis.* Vergleiche die Fixpunktmenge mit der Nullstellenmenge der Funktion  $h := \eta - \eta \circ \alpha \in \mathcal{M}(X)$  und benutze das Ergebnis der Aufgabe 5).



## 2. Tori und elliptische Funktionen

Nach einer langen Vorgeschichte, die um 1650 mit Integralformeln für die Länge eines Ellipsenbogens begann, wurden zu Beginn des 19. Jahrhunderts bei der Untersuchung solcher Integrale doppelt-periodische Funktionen entdeckt, welche Jacobi wegen ihrer Herkunft *elliptisch* nannte. Darunter versteht man auf  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktionen  $f$ , deren Werte sich bei den Translationen durch Elemente eines Gitters  $\Omega$  wiederholen:  $f(z+\omega)=f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und alle  $\omega \in \Omega$ . Die Theorie der elliptischen Funktionen gehört zu den großen mathematischen Schöpfungen des 19. Jahrhunderts. Sie beeinflusste maßgeblich die gleichzeitige Entwicklung der allgemeinen Funktionentheorie und fand durch Weierstraß' Vorlesungen eine bis heute gültige Gestalt.

Eine elementare Darstellung, die keine Vorkenntnisse über Riemannsche Flächen voraussetzt, enthält Kapitel 5 in [FB].

### 2.1 Elliptische Funktionen

Die elliptischen Funktionen zu einem Gitter  $\Omega \subset \mathbb{C}$  entsprechen umkehrbar eindeutig den meromorphen Funktionen auf dem Torus  $T := \mathbb{C}/\Omega$ . Dieses Wechselspiel ermöglicht elegante Schlußweisen, die bei Weierstraß und seinen Nachfolgern verpönt waren, da sie Riemannschen Flächen ablehnten.

Wie in 1.2.6 bezeichnet  $\eta: \mathbb{C} \rightarrow T$  die Torusprojektion. Sie ist eine normale, unverzweigte Überlagerung, deren Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$  aus allen Translationen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + \omega$ , für  $\omega \in \Omega$  besteht.

**2.1.1 Doppelt-periodische Funktionen.** Eine Funktion in  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  heißt  *$\Omega$ -periodisch*, wenn  $f(z + \omega) = f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  und alle  $\omega \in \Omega$  gilt. Ohne das Gitter  $\Omega$  zu nennen, spricht man auch von *doppelt-periodischen Funktionen*. Sie bilden einen Teilkörper  $\mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}(\mathbb{C})$ . Mit  $f$  gehört auch die Ableitung  $f'$ , ferner  $f(z + a)$  für jedes  $a \in \mathbb{C}$  und  $g \circ f$  für jede rationale Funktion  $g$  zu  $\mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$ . Die Funktionen in  $\mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  werden aus historischen Gründen, siehe 2.4, auch  *$\Omega$ -elliptisch* oder kurz *elliptisch* genannt. Nach Satz 1.6.3 bildet die Liftung

$$\eta^*: \mathcal{M}(T) \rightarrow \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C}), \quad g \mapsto g \circ \eta,$$

den Körper  $\mathcal{M}(T)$  isomorph auf  $\mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  ab. Wenn  $f = g \circ \eta$  ist, schreiben wir auch  $g = \hat{f}$ . Für nicht-konstante  $f$  ist  $\hat{f}: T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  nach Satz 1.6.2 eine endliche Überlagerung. Wir definieren den *Grad*  $\text{gr} f := \text{gr} \hat{f}$ .

**Satz.** Jede nicht-konstante Funktion  $g \in \mathcal{M}(T)$  besitzt Windungspunkte und hat daher einen Grad  $\geq 2$ .

Denn sonst hätte die elliptische Funktion  $(g \circ \eta)'$  keine Nullstellen und wäre folglich konstant.  $\square$

Die Existenz nicht-konstanter elliptischer Funktionen vom Grade 2 wird in 2.2 bewiesen.

**2.1.2 Funktionen vom Grad 2.** Wenn eine  $\Omega$ -elliptische Funktion  $f$  vom Grad 2 existiert, gibt es genau eine mit der Polstellenmenge  $\Omega$ , deren Laurent-Reihe um 0 die Form  $z^{-2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$  hat.

Diese Funktion wird nach Weierstraß mit  $\wp$  bezeichnet.

*Beweis.* Die Funktion  $f$  hat einen Windungspunkt  $a \in \mathbb{C}$ . Durch Nachschalten einer Möbiustransformation erreichen wir  $f(a) = \infty$ . Wir ersetzen  $f(z)$  durch  $f(z + a)$ . Dadurch werden alle  $\omega \in \Omega$  zu doppelten Polstellen. Wegen  $\text{gr} f = 2$  gibt es keine anderen Pole. Wir ersetzen  $f(z)$  durch  $f(z) + f(-z)$ . Dabei ändern sich die Pole nicht, und  $f$  wird eine gerade Funktion. Ihre Laurent-Reihe bei 0 hat die Gestalt  $a_{-2} z^{-2} + a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$  mit  $a_{-2} \neq 0$ . Durch Subtraktion der Konstanten  $a_0$  und Division durch  $a_{-2}$  wird die gewünschte Form erreicht. – Zur Eindeutigkeit: Für zwei Funktionen  $\wp$  und  $\wp^*$  der angegebenen Gestalt hat die Differenz  $\wp - \wp^*$  keine Pole, ist also konstant, und zwar  $= 0$ .  $\square$

**2.1.3 Struktur des Funktionenkörpers.** Jede Funktion  $f \in \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  läßt sich eindeutig als  $f = u + v\wp'$  mit  $u, v \in \mathbb{C}(\wp)$  darstellen. Dabei ist  $f$  genau dann gerade, wenn  $v = 0$  ist.

*Beweis.* Da  $\wp$  gerade ist, gilt  $\wp^{-1}(z) = \{\pm z\} + \Omega$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ . Jede gerade elliptische Funktion  $g$  ist längs der  $\wp$ -Fasern konstant und läßt sich daher nach 1.3.8 als  $g = R \circ \wp$  mit  $R \in \mathbb{C}(z)$  faktorisieren. Weil  $\wp'$  ungerade ist, haben alle ungeraden elliptischen Funktionen die Gestalt  $v\wp'$  mit  $v \in \mathbb{C}(\wp)$ . Aus der eindeutigen Darstellung einer beliebigen Funktion  $f$  als Summe einer geraden und ungeraden Funktion folgt die Behauptung.  $\square$

**Folgerung.** Die Körpererweiterung von  $\mathbb{C}(\wp)$  zu  $\mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  hat den Grad 2.

**2.1.4 Verzweigung und Differentialgleichung.** Für jede Funktion  $f \in \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  vom Grade 2 hat die Überlagerung  $\hat{f}: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  vier Windungspunkte  $a_1, a_2, a_3, a_4$  mit verschiedenen Werten  $e_j := \hat{f}(a_j) \in \hat{\mathbb{C}}$ . Mit einer Konstanten  $c \neq 0$  gilt

- (1)  $f'^2 = c(f - e_1)(f - e_2)(f - e_3)(f - e_4)$ , wenn  $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{C}$ ,
- (2)  $f'^2 = c(f - e_1)(f - e_2)(f - e_3)$ , wenn  $e_4 = \infty$ .

*Beweis.* Seien  $a_1, \dots, a_n$  die Windungspunkte. Wegen  $\text{gr} f = 2$  ist  $v(\hat{f}, a_j) = 2$ , und alle Werte  $e_j$  sind paarweise verschieden. Angenommen, kein  $e_j$  ist  $\infty$ . Dann hat  $\hat{f}$  zwei einfache Pole  $b_1 \neq b_2$ . Die von Null verschiedenen

Werte des Hauptdivisors  $(\hat{f}')$  sind 1 bei  $a_1, \dots, a_n$  und  $-2$  bei  $b_1, b_2$ . Da Hauptdivisoren den Grad Null haben, folgt  $n = 4$ . Die beiden Funktionen  $(\hat{f}')^2$  und  $(\hat{f} - e_1) \cdot \dots \cdot (\hat{f} - e_4)$  haben denselben Hauptdivisor. Daraus folgt (1). Ähnlich argumentiert man, wenn  $e_n = \infty$  ist, und erhält (2).  $\square$

Ein genaueres Ergebnis für die  $\wp$ -Funktion folgt in 2.2.4.

## 2.2 Die $\wp$ -Funktion

Die Existenz der  $\wp$ -Funktion beweisen wir durch explizite Angabe ihrer Hauptteil-Reihe. Der naheliegende Ansatz  $\sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-2}$  führt nicht direkt zum Ziel, weil diese Reihe divergiert; man benötigt konvergenzerzeugende Summanden.

**2.2.1 Konstruktion.** Sämtliche Paare  $(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{C}^2$ , für die  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  ein Gitter ist, bilden eine offene Menge  $D \subset \mathbb{C}^2$ .

(1) Zu jedem Kompaktum  $K$  in  $D$  existiert ein  $t > 0$ , so daß gilt

$$|x\omega_1 + y\omega_2|^2 \geq t(x^2 + y^2) \text{ für alle } (x, y, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 \times K.$$

*Beweis.* Die in  $(\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)) \times D$  stetige Funktion  $|x\omega_1 + y\omega_2|^2 / (x^2 + y^2)$  hat auf  $S^1 \times K$  ein Minimum  $t > 0$ . Da sie homogen in  $x, y$  ist, folgt (1).  $\square$

Wir bezeichnen mit  $\sum'$  die Summation über alle Punkte  $\omega \neq 0$  des Gitters  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ . Grundlegend für alles weitere ist folgendes

**Konvergenzlemma.** Sei  $K \subset D$  kompakt und  $k > 1$  reell. Dann gibt es eine Schranke  $M > 0$ , so daß gilt:

$$(2) \quad \sum' |\omega|^{-2k} < M \text{ für alle } (\omega_1, \omega_2) \in K.$$

*Beweis* (nach [Wst] 5, S. 117): Wegen  $x^2 + y^2 \geq |xy|$  folgt mit (1):

$$|m\omega_1 + n\omega_2|^{-2k} \leq t^{-k} |mn|^{-k} \text{ für } (\omega_1, \omega_2) \in K \text{ und } (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Die Reihe (2) wird also für alle  $(\omega_1, \omega_2) \in K$  durch konvergente Produktreihen  $t^{-k} (\sum_1^\infty m^{-k}) \cdot (\sum_1^\infty n^{-k})$  majorisiert.  $\square$

**Konvergenzsatz.** In  $\mathbb{C} \times D$  konvergiert folgende Reihe normal:

$$(3) \quad \wp(z; \omega_1, \omega_2) := \frac{1}{z^2} + \sum' \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

*Beweis.* Sei  $r > 0$  und  $K$  kompakt in  $D$ . Die Menge der Paare  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $|m\omega_1 + n\omega_2| < r + 1$  für alle  $(\omega_1, \omega_2) \in K$  ist wegen (1) endlich. Für  $|z| \leq r$  und  $|\omega| \geq r + 1$  gilt:

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \frac{|2 - z\omega^{-1}|}{|1 - z\omega^{-1}|^2} \frac{|z|}{|\omega|^3} \leq \frac{3r(r + 1)^2}{|\omega|^3}.$$

Nach (2) mit  $k := \frac{3}{2}$  konvergiert die Reihe also nach Fortlassen der endlich vielen Glieder mit  $|\omega| < r + 1$  normal in  $\mathbb{E}_r \times K$ .  $\square$

Die durch (3) definierte Funktion heißt *Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion*. Sie ist aufgrund der normalen Konvergenz *meromorph in allen drei Variablen*  $z, \omega_1, \omega_2$  *im Bereich*  $\mathbb{C} \times D \subset \mathbb{C}^3$ . Da  $\wp(z; \omega_1, \omega_2)$  neben  $z$  nur vom Gitter  $\Omega$  abhängt, schreiben wir auch  $\wp(z; \Omega)$  oder einfach  $\wp(z)$  bei festem Gitter.

**2.2.2 Eigenschaften.** Die Funktion  $\wp(z; \Omega)$  ist gerade und  $\Omega$ -periodisch vom Grad 2. Alle Perioden von  $\wp$  liegen in  $\Omega$ . Es gilt  $\wp^{-1}(\infty) = \Omega$  und

$$(1) \quad \wp(cz; c\Omega) = c^{-2} \wp(z, \Omega) \quad \text{für alle } c \in \mathbb{C}^\times.$$

Die Ableitung  $\wp'$  ist ungerade und  $\Omega$ -periodisch vom Grad 3. Sie lautet

$$(2) \quad \wp'(z; \Omega) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} (z - \omega)^{-3}.$$

*Beweis.* Bis auf die Periodizität von  $\wp(z)$  folgen alle Behauptungen aus 2.2.1(3), durch gliedweises Differenzieren. Die Ableitung  $\wp'$  ist wegen (2)  $\Omega$ -periodisch. Daher gilt  $\wp(z + \omega_j) = \wp(z) + c_j$  mit  $c_j \in \mathbb{C}$  für die Gitterbasis  $\omega_1, \omega_2$ , insbesondere  $\wp(\omega_j/2) = \wp(-\omega_j/2) + c_j$ . Da  $\omega_j/2$  kein Pol ist und  $\wp$  gerade ist, folgt  $c_j = 0$ , d.h.  $\wp$  ist  $\Omega$ -periodisch. Wegen  $\wp^{-1}(\infty) = \Omega$  liegen alle Perioden in  $\Omega$ .  $\square$

Nach dem Konvergenz-Lemma 2.2.1(2) sind alle *Eisenstein-Reihen*

$$(3) \quad G_k := G_k(\Omega) := \sum' \omega^{-k}, \quad k = 3, 4, \dots$$

absolut konvergent; für ungerades  $k$  gilt  $G_k = 0$ .

Wegen  $(1 - x)^{-2} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu x^{\nu-1}$  erhält man aus der  $\wp$ -Reihe 2.2.1(3) die

**Laurent-Entwicklung.** Für alle  $z \in \mathbb{C}^\times$  mit  $|z| < \min \{|\omega| : \omega \in \Omega, \omega \neq 0\}$  gilt

$$(4) \quad \wp(z; \Omega) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1) G_{2n} z^{2n-2}. \quad \square$$

**2.2.3 Die Überlagerung  $\hat{\wp}$ .** Sei  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow T := \mathbb{C}/\Omega$  die Torusprojektion zum Gitter  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ . Zu  $\wp(z) := \wp(z, \Omega) \in \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  gehört nach 2.1.1  $\hat{\wp} \in \mathcal{M}(T)$ .

**Satz.** Die Funktion  $\hat{\wp} : T \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ist eine zweiblättrige Überlagerung, deren Deckgruppe  $\mathcal{D}(\hat{\wp})$  aus der Identität und  $\sigma : T \rightarrow T, \sigma(x) = -x$ , besteht. Die Windungspunkte von  $\hat{\wp}$  sind die Fixpunkte von  $\sigma$ . Sie bilden die Untergruppe  $\{x \in T : 2x = 0\} < T$  mit den Elementen

$$a_1 := \eta(\tfrac{1}{2}\omega_1), \quad a_2 := \eta(\tfrac{1}{2}\omega_2), \quad a_3 := \eta(\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)), \quad a_4 := \eta(0).$$

Sie liegen über den vier paarweise verschiedenen Verzweigungspunkten

$$e_1 := \wp(\tfrac{1}{2}\omega_1), \quad e_2 := \wp(\tfrac{1}{2}\omega_2), \quad e_3 := \wp(\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)), \quad e_4 := \wp(0) = \infty.$$

*Beweis.* Da  $\wp$  gerade ist und den Grad 2 hat, ist  $\hat{\wp}$  zweiblättrig und normal mit der Deckgruppe  $\{\text{id}, \sigma\}$ . Daher sind die Verzweigungspunkte von  $\hat{\wp}$  genau die Fixpunkte von  $\sigma$ , d.h. die oben angegebenen Punkte  $a_j$ . Wegen  $\text{gr } \hat{\wp} = 2$  können verschiedene Windungspunkte nicht denselben  $\hat{\wp}$ -Wert haben. Da  $\Omega$  die Polstellenmenge von  $\wp$  ist, folgt  $\wp(0) = \infty$ .  $\square$

Die *Halbperiodenwerte*  $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}$  sind bis auf die Reihenfolge eindeutig durch das Gitter  $\Omega$  bestimmt.

**2.2.4 Differentialgleichungen.** Die  $\wp$ -Funktion erfüllt die beiden Differentialgleichungen

$$(1) \quad \wp'^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3),$$

$$(2) \quad \wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3 \quad \text{mit} \quad g_2 := 60G_4, \quad g_3 := 140G_6.$$

Dabei sind  $e_1, e_2, e_3$  die Halbperiodenwerte und  $G_4, G_6$  die Werte der Eisenstein-Reihen 2.2.2(3).

*Beweis.* (1) Die Funktionen  $(\hat{\wp})^2$  und  $(\hat{\wp} - e_1)(\hat{\wp} - e_2)(\hat{\wp} - e_3)$  haben denselben Hauptdivisor mit dem Träger  $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$  und den Werten 2 in  $a_1, a_2, a_3$  sowie  $-6$  in  $a_4$ . Mit einem Faktor  $c \in \mathbb{C}^\times$  gilt daher  $\wp'^2 = c(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$ . Der Vergleich der Koeffizienten von  $z^{-6}$  in den Laurent-Entwicklungen  $\wp^3 = z^{-6} + \dots$  und  $\wp'^2 = 4z^{-6} + \dots$  gibt  $c = 4$ .

Zu (2). Aus der Laurent-Reihe 2.2.2(4) von  $\wp$  folgt

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + 6G_4z + 20G_6z^3 + \dots \quad \text{und}$$

$$\wp^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{9G_4}{z^2} + 15G_6 + \dots, \quad \wp'^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{24G_4}{z^2} - 80G_6 + \dots$$

Daher ist  $\wp'^2 - 4\wp^3 + 60G_4\wp = -140G_6 + \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ . Die elliptische Funktion auf der rechten Seite hat keine Pole und ist also konstant.  $\square$

Aus (2) entsteht durch Differenzieren:

$$(3) \quad \wp'' = 6\wp^2 - \frac{1}{2}g_2 = 6\wp^2 - 30G_4.$$

**2.2.5 Relationen zwischen  $g_2, g_3$  und  $e_1, e_2, e_3$ .** Da  $\wp$  nicht konstant ist, folgt aus beiden Differentialgleichungen die Polynom-Identität

$$(1) \quad 4X^3 - g_2X - g_3 = 4(X - e_1)(X - e_2)(X - e_3).$$

Der Koeffizientenvergleich gibt:

$$(2) \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{1}{4}g_2, \quad e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3.$$

Elementares Rechnen führt zur *Diskriminantenformel*

$$(3) \quad \Delta(g_2, g_3) := g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0.$$

Aus (2) und (3) folgt

$$(4) \quad \frac{3}{2}g_2 = (e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2.$$

**2.2.6 Gitter-Invarianten.** Wenn man in  $\wp'' = 6\wp^2 - 30G_4$ , siehe 2.2.4(3), die Laurent-Reihe der  $\wp$ -Funktion einträgt, entsteht

$$\sum_{n \geq 2} (2n-1)(2n-2)(2n-3)G_{2n}z^{2n-4} + 30G_4 = 12 \sum_{n \geq 2} (2n-1)G_{2n}z^{2n-4}$$

$$+ 6 \sum_{p, q \geq 2} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}z^{2p+2q-4}.$$

Der Koeffizientenvergleich führt für  $n \geq 4$  zur *Rekursionsformel*

$$(1) \quad (n-3)(2n+1)(2n-1)G_{2n} = 3 \cdot \sum_{\substack{p, q \geq 2 \\ p+q=n}} (2p-1)(2q-1)G_{2p}G_{2q}.$$

Mit ihr kann man aus  $G_4$  und  $G_6$  alle Koeffizienten  $G_{2n}$  berechnen, z.B.  $7G_8 = 3G_4^2$ ,  $11G_{10} = 5G_4G_6$ , also  $G_{2n} \in \mathbb{Q}[G_4, G_6] = \mathbb{Q}[g_2, g_3]$  für  $n \geq 2$ . Wir nennen  $g_2 = 60G_4$  und  $g_3 = 140G_6$  *Gitterinvarianten*, siehe 2.2.4(2), und schreiben  $g_j = g_j(\Omega)$ , um die Abhängigkeit vom Gitter zu betonen.

- (2)  $g_2(c\Omega) = c^{-4}g_2(\Omega)$  und  $g_3(c\Omega) = c^{-6}g_3(\Omega)$  für  $c \in \mathbb{C}^\times$ ,  
 (3)  $g_2(\Omega) = g_2(\Omega^*)$  und  $g_3(\Omega) = g_3(\Omega^*) \Leftrightarrow \Omega = \Omega^*$ .

*Beweis.* Aus den Eisenstein-Reihen 2.2.2(3) für  $G_k$  folgt (2). Wegen der Rekursion (1) für die Laurent-Koeffizienten ist  $\wp$  und damit  $\Omega = \wp^{-1}(\infty)$  durch  $g_2$  und  $g_3$  eindeutig bestimmt, wie in (3) behauptet wird.  $\square$

**2.2.7 Jacobisches Problem.** *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) Jede vierpunktige Menge  $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$  ist der Verzweigungsort einer elliptischen Funktion vom Grad zwei.  
 (2) Für jedes Polynom  $P(w)$  dritten oder vierten Grades mit einfachen Nullstellen besitzt die Differentialgleichung  $w'^2 = P(w)$  eine elliptische Funktion vom Grad 2 als Lösung.  
 (3) Jede Differentialgleichung  $w'^2 = 4w^3 - a_2w - a_3$  mit  $a_2^3 \neq 27a_3^2$  besitzt eine  $\wp$ -Funktion als Lösung.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2). Sei  $M$  die Nullstellenmenge von  $P$ ; für  $\text{gr } P = 3$  sei zusätzlich  $\infty \in M$ . Es gibt eine elliptische Funktion  $f$  zweiten Grades mit dem Verzweigungsort  $M$ . Nach 2.1.4 gilt  $f'^2 = a^2P(f)$  mit  $a \in \mathbb{C}^\times$ . Dann ist  $f(az)$  eine gesuchte Funktion.

(2) $\Rightarrow$ (3). Wegen  $a_2^3 \neq 27a_3^2$  hat das Polynom  $4w^3 - a_2w - a_3$  drei einfache Nullstellen in  $\mathbb{C}$ . Daher gibt es eine elliptische Funktion  $f$  zweiten Grades, welche die Differentialgleichung löst. Sei  $a$  ein Pol von  $f$ , also  $o(f', a) = o(f, a) - 1$ . Wegen der Differentialgleichung folgt  $o(f, a) = -2$ . Wir ersetzen  $f(z)$  durch  $f(z - a)$ . Dabei ändert sich die Differentialgleichung nicht, das Periodengitter  $\Omega$  von  $f$  wird zur Polstellenmenge, und die Laurent-Entwicklung von  $f$  bei 0 beginnt mit  $z^{-2}$ . Für  $\wp := \wp(-, \Omega)$  hat  $b := f - \wp$  einen Grad  $\leq 1$  und ist daher konstant. Der Vergleich von  $(\wp')^2 = 4(\wp + b)^3 - a_2(\wp + b) - a_3$  mit  $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$  gibt  $b = 0$  und  $g_j = a_j$ .

(3) $\Rightarrow$ (1). Es gibt eine Möbius-Transformation, die  $M$  auf eine Menge  $M^* = \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$  mit  $e_1 + e_2 + e_3 = 0$  abbildet. Es genügt, die Behauptung für  $M^*$  zu beweisen. Die Koeffizienten des Polynoms  $4w^3 - a_2w - a_3 := 4(w - e_1)(w - e_2)(w - e_3)$  erfüllen  $a_2^3 \neq 27a_3^2$ , weil seine Nullstellen paarweise verschieden sind. Die  $\wp$ -Funktion hat den Verzweigungsort  $M^*$ .  $\square$

Das *Jacobische Problem für elliptische Funktionen* fragt, ob die Aussagen (1)-(3) zutreffen. Es hat für die Entwicklung der Funktionentheorie im 19. Jahrhundert eine wichtige Rolle gespielt, siehe 2.4.3, 5.3.4 und 5.4.5 für historische Bemerkungen. Für die Antwort „ja“ gibt es heute viele Beweise, von denen wir drei in späteren Kapiteln ausführen, siehe 5.3.4, 7.6.3 und 14.3.1.



### 2.3 Abelsches Theorem für elliptische Funktionen

Kein Torus  $T$  ist zur Zahlenkugel isomorph. Nach 1.6.5(4) muß daher jeder Hauptdivisor  $D$  auf  $T$  außer  $\text{gr} D = 0$  zusätzliche Bedingungen erfüllen. Wir finden sie durch Integration über den Rand des Parallelogramms in Figur 2.3.1 a.– Sei  $\Omega$  ein Gitter. Sei  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega =: T$  die Projektion.

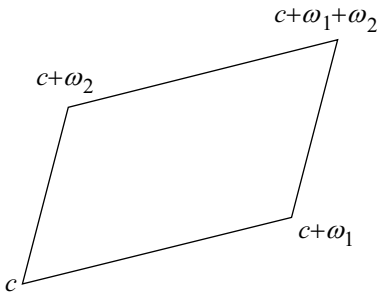
**2.3.1 Parallelogramme.** Jeder Punkt  $c \in \mathbb{C}$  zusammen mit einer Basis  $\omega_1, \omega_2$  von  $\Omega$  bestimmt das *Parallelogramm* (Figur 2.3.1 a)

$$P := \{c + t_1\omega_1 + t_2\omega_2 : t_1, t_2 \in (0, 1]\}.$$

Die Projektion  $\eta$  bildet  $P$  bijektiv auf  $T$  ab. Alle vier Ecken der Hülle  $\bar{P}$  haben denselben Bildpunkt. Die übrigen Randpunkte werden durch  $\eta$  paarweise identifiziert,

$$\eta(c + t\omega_1) = \eta(c + t\omega_1 + \omega_2) \text{ und } \eta(c + t\omega_2) = \eta(c + \omega_1 + t\omega_2).$$

Figur 2.3.1 b zeigt, wie  $\mathbb{C}/\Omega$  aus  $\bar{P}$  durch Randverheftungen entsteht.



**Fig. 2.3.1 a.** Das Parallelogramm zur Gitterbasis  $\omega_1, \omega_2$  mit der Ecke  $c$  ist der Ausgangspunkt zur Herstellung eines Torus. Man muß beliebige Parallelogramme und nicht nur Rechtecke betrachten, um alle Tori mit ihren verschiedenen komplexen Strukturen zu erreichen.

**2.3.2 Abelsche Relation.** Sei  $g \in \mathcal{M}(T)$  eine Funktion mit den Nullstellen  $a_1, \dots, a_n$  und den Polstellen  $b_1, \dots, b_n$ , wobei jede so oft notiert ist, wie ihre Vielfachheit angibt. In der abelschen Gruppe  $T$  gilt dann

$$(1) \quad a_1 + \dots + a_n = b_1 + \dots + b_n.$$

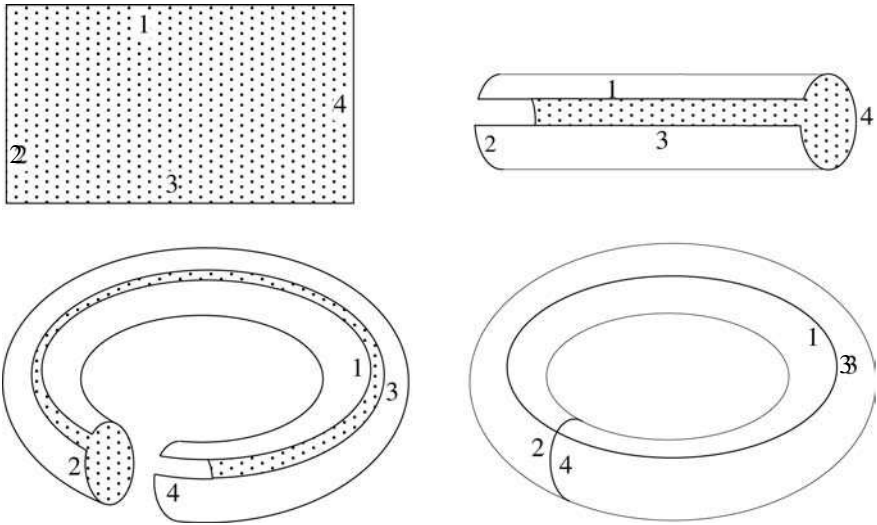
*Beweis* (nach [HC], S. 159). Wir wählen ein Parallelogramm  $P \subset \mathbb{C}$  gemäß 2.3.1, so daß der Rand  $\partial P$  die Null- und Polstellen von  $f := g \circ \eta$  nicht trifft. Dann gibt es zu jedem  $a_j$  und  $b_j$  genau ein  $\alpha_j$  bzw.  $\beta_j \in P$  mit  $\eta(\alpha_j) = a_j$  und  $\eta(\beta_j) = b_j$ . Aus dem Residuensatz folgt

$$I := \int_{\partial P} z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left( \sum \alpha_j - \sum \beta_j \right),$$

siehe [Re 1], Abschnitt 13.2.1. Wegen der Periodizität von  $f$  ist

$$I = \omega_1 \int_c^{c+\omega_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz - \omega_2 \int_c^{c+\omega_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in 2\pi i \Omega;$$

denn die Integralwerte liegen in  $2\pi i \mathbb{Z}$ . □



**Fig. 2.3.1 b.** Herstellung des Torus aus einem Rechteck durch Randverheftungen.

Für einen anderen Beweis ohne Integrale siehe Aufgabe 3.9.6.– Die Abelsche Relation wird in 7.5.3 zu Integralrelationen für beliebige kompakte Flächen verallgemeinert.

Um jede Vorgabe von Null- und Polstellen, welche die Relation (1) erfüllt, durch eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(T)$  zu realisieren, benutzen wir folgende Sigma-Funktion.

**2.3.3 Die  $\sigma$ -Funktion** zum Gitter  $\Omega$  wird durch ein unendliches Produkt  $\prod'$  über alle  $\omega \in \Omega \setminus \{0\}$  definiert:

- (1)  $\sigma(z) := z \prod' (1 - z/\omega) \exp(z/\omega + \frac{1}{2}(z/\omega)^2) = z \prod' E(z/\omega)$  mit
- (2)  $E(z) := (1 - z) \exp(z + z^2/2)$ .

**Satz.** Das Produkt konvergiert auf  $\mathbb{C}$  normal gegen eine ganze Funktion. Sie hat in den Punkten  $\omega \in \Omega$  einfache und außerhalb von  $\Omega$  keine Nullstellen.

*Beweis.* Es genügt, die normale Konvergenz der Reihe  $\sum' [E(z/\omega) - 1]$  nachzuweisen. Diese folgt wegen der Abschätzung

$$(3) \quad |E(z) - 1| \leq |z|^3 \quad \text{für } |z| \leq 1$$

aus dem Konvergenzlemma in 2.2.1. Der Beweis zu (3) geht von der Ableitung  $E'(z) = -z^2 \exp(z + z^2/2)$  aus. Alle Koeffizienten in der Taylor-Reihe von  $\exp(z + z^2/2)$  sind positiv. Daher gilt

$$E'(z) = -\sum_{n=3}^{\infty} n b_n z^{n-1}, \text{ also } E(z) = 1 - \sum_{n=3}^{\infty} b_n z^n \text{ mit } b_n \geq 0.$$

Für  $|z| \leq 1$  folgt  $|1 - E(z)| \leq |z|^3 \sum b_n = |z|^3$  wegen  $0 = E(1) = 1 - \sum b_n$ .

**2.3.4 Die Zeta-Funktion** ist die logarithmische Ableitung

$$(1) \quad \zeta(z) := \sigma'(z)/\sigma(z) = \frac{1}{z} + \sum' \left( \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right).$$

Diese Reihe konvergiert auf  $\mathbb{C}$  normal. Durch gliedweises Differenzieren folgt

$$(2) \quad \wp(z) = -\zeta'(z).$$

Da die Ableitung von  $\zeta(z+\omega) - \zeta(z)$  verschwindet, gilt

$$(3) \quad \zeta(z+\omega) = \zeta(z) + h(\omega).$$

Dabei ist  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ein additiver Homomorphismus. Für die Sigma-Funktion folgt mit einer weiteren Abbildung  $k : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ , welche kein Homomorphismus ist, die

**Periodenrelation**  $\sigma(z+\omega) = \sigma(z) \cdot \exp(h(\omega)z + k(\omega))$  für  $z \in \mathbb{C}, \omega \in \Omega$ .

*Beweis.* Die logarithmische Ableitung von  $\sigma(z+\omega)/\sigma(z)$  hat den konstanten Wert  $= h(\omega)$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**2.3.5 Vorgabe der Null- und Polstellen.** Es seien endlich viele Punkte  $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{C}$  gegeben, deren Bilder  $\eta(a_1), \dots, \eta(a_q) \in T$  paarweise verschieden sind. Jedem  $a_j$  sei eine Ordnung  $n_j \in \mathbb{Z}, n_j \neq 0$ , zugeordnet. Es sei  $n_1 + \dots + n_q = 0$  und  $\omega := n_1 a_1 + \dots + n_q a_q \in \Omega$ . Dann ist

$$f(z) := \frac{\sigma(z+\omega)}{\sigma(z)} \prod_{j=1}^q \sigma(z-a_j)^{n_j}$$

eine  $\Omega$ -elliptische Funktion mit den Ordnungen  $o(f, z) = n_j$  für  $z \in a_j + \Omega$  und  $o(f, z) = 0$  für  $z \notin \{a_1, \dots, a_q\} + \Omega$ .

*Beweis.* Aus der Periodenrelation für  $\sigma$  folgt  $f \in \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$ . Der Vorfaktor  $\sigma(z+\omega)/\sigma(z) = \exp(h(\omega)z + k(\omega))$  hat keine Null- und Polstellen.  $\square$

**2.3.6 Abelsches Theorem.** Ein Divisor  $D$  auf dem Torus  $T$  ist genau dann ein Hauptdivisor, wenn gilt:

$$\text{gr} D := \sum_{x \in T} D(x) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{x \in T} D(x) \cdot x = 0.$$

*Beweis.* Sei  $\{b_1, \dots, b_q\} \subset T$  der Träger von  $D$ . Wir wählen je einen Punkt  $a_j \in \eta^{-1}(b_j)$  und setzen  $n_j := D(b_j)$ . Dann sind die Voraussetzungen in 2.3.5 erfüllt. Die dort angegebene elliptische Funktion  $f$  bestimmt die Funktion  $\hat{f} \in \mathcal{M}(T)$  mit den Hauptdivisor  $(\hat{f}) = D$ .  $\square$

Das Abelsche Theorem läßt sich nach einem umfangreichen Ausbau der Theorie auf beliebige kompakte Flächen übertragen, siehe 14.2.4.

## 2.4 Die Entdeckung der elliptischen Funktionen

Wir beschränken uns auf einige Höhepunkte der Entdeckungsgeschichte. Eine ausführliche Darstellung findet man im Beitrag *Elliptische Funktionen und Abelsche Integrale* von C. Houzel zu [Di 1].

**2.4.1 Elliptische Integrale.** Mit der Darstellung von Kurvenlängen durch Integrale befaßten sich in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts viele Mathematiker. Dabei stieß man für die Ellipse  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  auf

$$(1) \quad \int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - k^2 u^2}{a^2 - u^2}} du \quad \text{mit} \quad k^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

als *Länge des Bogens* zwischen den Punkten  $(0, b)$  und  $(x, y)$ .

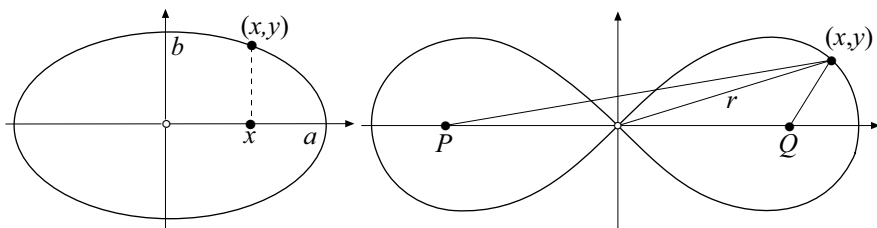


Fig. 2.4.1. Ellipse und Lemniskate.

Wallis (1655) und Newton (1669) kannten die Formel (1). Von ähnlichem Typ, aber etwas einfacher, ist das Integral für die *Länge des Lemniskatenbogens*, mit dem sich Jakob und Johann Bernoulli ab 1679 beschäftigten: Die Lemniskate ist der geometrische Ort aller Punkte in der  $(x, y)$ -Ebene, deren Abstände von den Punkten  $(-1/\sqrt{2}, 0)$  und  $(1/\sqrt{2}, 0)$  das konstante Produkt  $1/2$  haben. Mit  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  wird die Lemniskate durch

$$(2) \quad 2x^2 = r^2 - r^4 \quad 2y^2 = r^2 + r^4$$

in Parameterform dargestellt. Das ergibt für die Bogenlänge die Formel

$$(3) \quad L(r) = \int_0^r \frac{du}{\sqrt{1 - u^4}}.$$

Man fand bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts noch eine ganze Reihe von Problemen aus der Geometrie und Mechanik, die auf Integrale vom Typ

$$(4) \quad \int R(u, v) du$$

führen, wobei  $R$  eine rationale Funktion ist und  $v^2 = P(u)$  mit einem Polynom 3. oder 4. Grades gilt. Schon früh erkannte man, daß solche Integrale nicht elementar berechnet werden können: Stammfunktionen des Integranden lassen sich nicht rational aus elementaren Funktionen zusammensetzen.

Nach dem Prototyp (1) bürgerte sich für (4) der Name *elliptische Integrale* ein. Aufbauend auf Ergebnissen von Euler und Lagrange stellte Legendre 1793 eine Liste von grundlegenden elliptischen Integralen zusammen, aus denen alle anderen durch Transformationen gewonnen werden können. Für das Polynom  $P$  benutzte er dabei die Normalform

$$(5) \quad P(u) = (1 - c^2 u^2)(1 \pm k^2 u^2) ,$$

die auch in (1) auftritt, wenn man dort den Integranden als

$$\frac{a^2 - k^2 u^2}{\sqrt{(a^2 - k^2 u^2)(a^2 - u^2)}}$$

schreibt.– Fagnanos (1716) Verdoppelung des Lemniskatenbogens,

$$(6) \quad L(r) = 2L(t) \quad \text{für} \quad r^2 = \frac{4t^2(1-t^4)}{(1+t^4)^2} ,$$

führte zu Fortschritten in einer anderen Richtung. Euler verallgemeinerte dieses Ergebnis 1753 zu einem Additionstheorem, siehe [Eu] XX, S. 58-79:

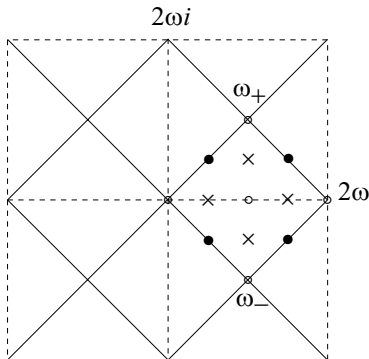
$$(7) \quad L(z) = L(x) + L(y) \quad \text{für} \quad z = \frac{x\sqrt{1-y^4} + y\sqrt{1-x^4}}{1+x^2y^2} .$$

**2.4.2 Lemniskatischer Sinus.** C.F. Gauss befaßte sich seit Januar 1797 mit der Lemniskate und betrachtete den Abstand  $r$  (mit negativem Vorzeichen in der linken Halbebene) als Funktion der Bogenlänge  $\varphi$ , also die Umkehrfunktion zu  $\varphi = L(r)$ . Er nannte sie *lemniskatischen Sinus*  $r = sl \varphi$  in Analogie zur Kreisfunktion Sinus. Offenbar ist  $sl$  eine (reelle) ungerade periodische Funktion mit Werten zwischen  $-1$  und  $+1$ . Die Periode ist die Gesamtlänge der Lemniskate  $4L(1) = \frac{1}{2}\pi\Gamma(1/4)^2$ ; Gauss berechnete sie bis zur 24ten Stelle hinter dem Komma.– Als Umkehrfunktion von  $L$  erfüllt  $sl$  die Differentialgleichung  $(sl')^2 = 1 - sl^4$ . Wenn man dies mit dem Eulerschen Additionstheorem kombiniert, erhält man das *Additionstheorem*

$$(1) \quad sl(u+v) = \frac{slu \cdot sl'v + sl'u \cdot slv}{1 + sl^2u \cdot sl^2v} .$$

In der Hoffnung, eine bemerkenswerte unendliche Reihe zu entdecken, berechnete Gauss die Taylor-Reihe von  $sl$ . Da der Weg durchs Komplexe Rechenvorteile versprach, setzte er  $sl(iy) := i \cdot sly$  und definierte im Einklang mit (1) die erste doppelt-periodische meromorphe Funktion

$$(2) \quad sl(x+iy) := \frac{slx \cdot sl'y + i \cdot sl'x \cdot sly}{1 - sl^2x \cdot sl^2y} .$$



**Fig. 2.4.2.** Das Periodengitter  $\mathbb{Z}\omega_+ + \mathbb{Z}\omega_-$  des lemniskatischen Sinus. In dem von  $\omega_+$  und  $\omega_-$  aufgespannte Quadrat sind die Nullstellen  $\circ$ , die Polstellen  $\bullet$  und die Windungspunkte  $\times$  angegeben.

Man kann dies leicht verifizieren: Sei  $\omega := 2L(1)$ . Da die reelle Funktion  $sl$  die Periode  $2\omega$  hat, ergeben sich bei der komplexen Funktion direkt die Perioden  $2\omega$

und  $2\omega i$ . In Wirklichkeit ist das Periodengitter  $\Omega$  engmaschiger: Bereits  $\omega_{\pm} := (1 \pm i)\omega$  sind Perioden, also  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_+ + \mathbb{Z}\omega_-$ , siehe Figur 2.4.2.

Mit den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen prüft man nach, daß  $sl$  außerhalb der Nullstellen des Nenners von (2) holomorph ist. Die Nullstellenmenge ist  $\{0, \omega\} + \Omega$ , die Polstellenmenge  $\{\pm \frac{1}{2}\omega_+, \pm \frac{1}{2}\omega_-\} + \Omega$ . Alle Null- und Polstellen sind einfach. Die Windungspunkte sind die Nullstellen der Ableitung  $sl'$ . Sie liegen also dort, wo  $sl^4 z = 1$  ist. Das sind die Punkte  $\{\pm \frac{1}{2}\omega, \pm \frac{i}{2}\omega\} + \Omega$ . Alle Windungszahlen sind  $= 2$ , weil  $sl'' = -2sl^3$  in den Windungspunkten  $\neq 0$  ist. Der Verzweigungsort von  $sl$  ist  $\mu_4 = \{\pm 1, \pm i\}$ . Da es zwei einfache Polstellen modulo  $\Omega$  gibt, hat  $sl$  den Grad 2.

Diese Ergebnisse stehen bei Gauss zum Teil nur zwischen den Zeilen. Er berechnet die Taylor-Reihe von  $sl$ , stellt  $sl = P/Q$  als Quotienten ganzer Funktionen dar und berechnet für  $P$  und  $Q$  die Taylorreihen sowie unendliche Produktdarstellungen. Er trug seine Entdeckungen am 19.03.1797 in sein Tagebuch ein, siehe [Ga] 10,1; no. 51, 60, 63. Zwei Jahre später (In der Zwischenzeit promoviert er mit einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra) dehnte er seine Untersuchung auf allgemeinere elliptische Integrale

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1 \pm \mu^2 x^2)}}$$

aus, siehe [Ga] 3, S. 404 ff. Von allen Entdeckungen veröffentlichte er nichts. Crelle bat ihn dreißig Jahre später um einen Beitrag über elliptische Funktionen für sein Journal. Gauss lehnte ab; mittlerweile habe Abel denselben Weg eingeschlagen und dieselben Ergebnisse scharfsinnig und elegant erzielt.

**2.4.3 Von Abel bis Weierstraß.** Abel und Jacobi studierten ab 1827 zunächst unabhängig und bald in gegenseitiger Kenntnis voneinander das Integral 2.4.2(3) als Funktion der oberen Integrationsgrenze. Sie hatten wie Gauss die Idee, die Umkehrfunktion zu bilden und sie ins Komplexe fortzusetzen. Dabei entdeckten sie wieder wie Gauss dreißig Jahre zuvor, daß doppelt-periodische Funktionen entstehen. Jacobi nannte sie *elliptische Funktionen*, eine Bezeichnung, die sich trotz Legendres Protest durchsetzte.

Die Umkehrung des Integrals 2.4.2(3) entspricht der Lösung der Differentialgleichung  $x'^2 = (1-x^2)(1-\mu^2 x^2)$  durch elliptische Funktionen. Jacobi gelang die Lösung nur für reelle  $\mu \in (-1, 1)$ , vgl. 5.4.5. Er konnte die Frage, ob alle komplexen  $\mu \notin \{0, \pm 1\}$  zulässig sind, nicht beantworten. In der Tat ist das Lösungsproblem zum Jacobischen Problem 2.2.7 äquivalent, siehe Aufgabe 2.7.5.

Die direkte Untersuchung doppelt-periodischer Funktionen zu vorgegebenem Gitter und nicht als Umkehrung elliptischer Integrale begann mit Liouville (1844) und Eisenstein (1847). Liouville entdeckte, daß nicht-konstante doppelt-periodische Funktionen einen Grad  $\geq 2$  haben. Er gab solche Funktionen durch unendliche Reihen trigonometrischer Funktionen an. Die Konstruktionsidee für die  $\wp$ -Funktion stammt von Eisenstein. Er bewies die absolute Konvergenz von  $\sum_{\omega} (z - \omega)^{-n}$  für  $n > 2$  und machte diese Reihe auch für  $n = 2$  durch eine passende Summationsvorschrift konvergent. Eisensteins Verdienste werden in [Wil 1] gewürdigt.

Weierstraß hat seine endgültige Theorie der elliptischen Funktionen nie publiziert. Die wesentlichen Teile diktierte er 1863. Andere trug er nur in Vorlesungen vor, siehe [Wst] 5. Er begann mit dem schwierigeren Teil, nämlich die Differentialgleichung  $(x')^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$  für vorgegebene komplexe Zahlen  $g_2, g_3$  durch eine doppelt-periodische Funktion  $\wp$  zu lösen, deren Perioden erst gefunden werden müssen. Damit löste er das Jacobische Problem. Umgekehrt konstruierte er die  $\wp$ -Funktion zu vorgegebenen Perioden. Eine wichtige Rolle in seiner Darstellung spielen seine Funktionen  $\sigma(z)$  und  $\zeta(z)$ , die wir in 2.3.3-4 benutzten.

## 2.5 Reduzierte Basen. Torusabbildungen.

Mit der Exponentialfunktion, den Torusprojektionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  und den  $\wp$ -Funktionen lassen sich alle normalen Abbildungen  $\mathbb{C} \rightarrow X$  angeben, siehe 2.6. Daß es keine anderen Möglichkeiten gibt, liegt an einem Ergebnis über lokal endliche Untergruppen der additiven Gruppe  $\mathbb{C}$ , das im ersten Abschnitt bewiesen wird. Die weiteren Abschnitte behandeln die Darstellung von Torusabbildungen durch lineare Funktionen.

**2.5.1 Reduzierte Basen.** *Jede additive, lokal endliche Untergruppe  $\Omega \neq 0$  von  $\mathbb{C}$  ist unendlich zyklisch oder ein Gitter. Genauer gilt:*

*Sei  $\omega_2 \in \Omega \setminus \{0\}$  ein Element von minimalem Betrag. Aus  $\Omega \subset \mathbb{R}\omega_2$  folgt  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_2$ . – Wenn  $\Omega \not\subset \mathbb{R}\omega_2$  ist, sei  $\omega_1 \in \Omega \setminus \mathbb{R}\omega_2$  ein Element minimalen Betrages mit  $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$ . Dann ist  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  und*

$$(1) \quad \text{Im } \tau > 0, \quad |\tau| \geq 1, \quad |\text{Re } \tau| \leq \frac{1}{2}.$$

*Beweis.* Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}\omega_2$ . Dann gibt es zu jedem  $\omega \in \mathbb{R}\omega_2$  ein  $\omega' \in \mathbb{Z}\omega_2 \subset \Omega$ , so daß  $|\omega - \omega'| \leq \frac{1}{2}|\omega_2|$  ist. Im Falle  $\omega \in \Omega$  ist  $\omega - \omega' \in \Omega$ , also  $\omega = \omega' \in \mathbb{Z}\omega_2$ . – Wenn  $\Omega \not\subset \mathbb{R}\omega_2$  ist, liegt jeder Punkt  $\omega \in \mathbb{C}$  in einem Parallelogramm, dessen Ecken zu  $\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  gehören und dessen Diagonalen die Längen  $|\omega_1 \pm \omega_2|$  haben. Daher gibt es ein  $\omega' \in \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ , nämlich eine Ecke des Parallelogramms, so daß  $|\omega - \omega'| \leq \frac{1}{2}|\omega_1 \pm \omega_2| < \frac{1}{2}|\omega_1| + \frac{1}{2}|\omega_2| \leq |\omega_1|$  gilt. Weil  $\omega_1$  und  $\omega_2$  reell linear unabhängig sind, ist die zweite Ungleichung strikt. Für  $\omega \in \Omega$  ist  $\omega - \omega' \in \Omega$ . Wegen der Ungleichung  $\omega - \omega' \in \mathbb{R}\omega_2$  und nach dem ersten Fall gilt sogar  $\omega - \omega' \in \mathbb{Z}\omega_2$ .

Zu (1). Wegen  $|\omega_1| \geq |\omega_2|$  ist  $|\tau| \geq 1$ . Aus  $\omega_1 \pm \omega_2 \in \Omega \setminus \mathbb{R}\omega_2$  folgt  $|\omega_1 \pm \omega_2| \geq |\omega_1|$ , also  $|\tau \pm 1| \geq |\tau|$ ; das ist zu  $|\text{Re } \tau| \leq \frac{1}{2}$  äquivalent.  $\square$

Jede Gitterbasis  $(\omega_1, \omega_2)$ , deren Modul  $\tau := \omega_1/\omega_2$  die Ungleichungen (1) erfüllt, heißt *reduziert*. Durch (1) wird der *Modulbereich* beschrieben, siehe Figur 5.1.3. Er bildet einen Grundstein der Modultheorie (Kapitel 5), die u.a. eine Lösung des Jacobischen Problems liefert. Zunächst interessiert nur die

**Folgerung.** *Bei jeder unverzweigten, normalen Überlagerung  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow X$ , die kein Isomorphismus ist, besteht die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$  aus Translationen  $z \mapsto z + \omega$ , wobei die Elemente  $\omega$  eine unendlich zyklische Untergruppe oder ein Gitter  $\Omega$  in der additiven Gruppe  $\mathbb{C}$  bilden. Im ersten Fall ist  $X$  zu  $\mathbb{C}^\times$  und im zweiten Fall zum Torus  $\mathbb{C}/\Omega$  isomorph.*

*Beweis.* Die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$  besteht aus Transformationen  $z \mapsto az + b$ . Sie haben keine Fixpunkte, weil  $\eta$  unverzweigt ist. Daher ist stets  $a = 1$ , und alle  $b$  bilden die additive, lokal endliche Untergruppe  $\eta^{-1}(0) < \mathbb{C}$ . Diese ist eine unendlich zyklische Gruppe  $\mathbb{Z}\omega$ , oder ein Gitter  $\Omega$ . Im ersten Fall induziert die Funktion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto \exp(2\pi iz/\omega)$ , und im zweiten Fall die Torus-Projektion  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  einen Isomorphismus  $X \rightarrow \mathbb{C}^\times$  bzw.  $X \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ .  $\square$

**2.5.2 Affine Torusabbildungen.** Seien  $\Omega$  und  $\Omega^*$  zwei Gitter. Eine holomorphe Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  induziert genau dann eine holomorphe Abbildung  $\varphi: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega^*$ ,  $\varphi(z + \Omega) := f(z) + \Omega^*$ , wenn  $f(z) = az + b$  affin und  $a\Omega < \Omega^*$  ist. Genau dann, wenn  $a\Omega = \Omega^*$  gilt, ist  $\varphi$  biholomorph.

*Beweis.* Ist  $f(z) = az + b$  und  $a\Omega < \Omega^*$ , so induziert  $f$  nach dem Faktorisierungssatz 1.3.8 die holomorphe Abbildung  $\varphi$ . Sie ist genau dann bijektiv, also biholomorph, wenn  $a\Omega = \Omega^*$  gilt.

Umgekehrt induziere  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  eine holomorphe Abbildung  $\varphi$ . Dann gilt  $f(z + \omega) - f(z) \in \Omega^*$  für jedes  $\omega \in \Omega$ . Weil  $f$  stetig und  $\Omega^*$  lokal endlich ist, hängt die Differenz nur von  $\omega$  und nicht von  $z$  ab. Für die Ableitung folgt  $f'(z + \omega) = f'(z)$ ; d.h.  $f'$  ist  $\Omega$ -periodisch und holomorph, also konstant. Daher ist  $f(z) = az + b$  linear. Aus  $a\omega = f(z + \omega) - f(z) \in \Omega^*$  folgt  $a\Omega < \Omega^*$ . Der Beweis der letzten Behauptung ist eine Übungsaufgabe.  $\square$

Wir nennen die durch  $f(z) = az + b$  induzierten Torusabbildungen  $\varphi$  *affin*. Aus dem Monodromiesatz wird folgen, daß jede holomorphe Torusabbildung affin ist, siehe 3.3.2.

**2.5.3 Isomorphismen und Automorphismen.** Zwei Gitter  $\Omega$  und  $\Omega^*$  heißen *äquivalent*, wenn  $a\Omega = \Omega^*$  für ein  $a \in \mathbb{C}^\times$  gilt. Aus 2.5.2 folgt:

- (1) Die Tori  $\mathbb{C}/\Omega$  und  $\mathbb{C}/\Omega^*$  zu zwei äquivalenten Gitter sind als Riemannsche Flächen isomorph.
- (2) Die affinen Automorphismen des Torus  $\mathbb{C}/\Omega$  sind genau die Abbildungen  $z + \Omega \mapsto az + b + \Omega$  für  $a, b \in \mathbb{C}$  mit  $a\Omega = \Omega$ .  $\square$

Automorphismen der Form  $z + \Omega \mapsto z + b + \Omega$  heißen *Torustranslationen*. Sie bilden eine abelsche Untergruppe von  $\text{Aut}(\mathbb{C}/\Omega)$ , welche transitiv operiert. Die Translationen  $\neq \text{id}$  haben keine Fixpunkte.

**2.5.4 Quadratische und hexagonale Gitter.** Die Symmetriegruppe

$$S(\Omega) := \{a \in \mathbb{C} : a\Omega = \Omega\} < \mathbb{C}^\times$$

eines Gitter  $\Omega$  ist die Gruppe der Einheitswurzeln  $\mu_2, \mu_4$  oder  $\mu_6$ .

*Beweis.* Wir wählen  $0 \neq \omega \in \Omega$  von minimalem Betrag. Aus  $a \in S(\Omega)$  folgt  $|a\omega| \geq |\omega|$  und  $|a^{-1}\omega| \geq |\omega|$ , also  $|a| = 1$ , d.h.  $S(\Omega) < S^1$ . Wenn  $\#S(\Omega) > 6$  ist, gibt es zwei Elemente  $a \neq b$  in  $S(\Omega)$ , so daß  $|a - b| < 1$  ist. Dann wäre  $0 \neq (a - b)\omega \in \Omega$ , aber  $|(a - b)\omega| < |\omega|$ . Das ist ein Widerspruch. Somit ist  $\#S(\Omega) \leq 6$ . Weil stets  $-1 \in S(\Omega)$  ist, folgt die Behauptung.  $\square$

Für jedes Gitter gilt  $\mu_2 < S(\Omega)$ . Wenn  $S(\Omega) = \mu_4$  ist, heißt  $\Omega$  *quadratisch*, wenn  $S(\Omega) = \mu_6$  ist, heißt  $\Omega$  *hexagonal*. Das quadratische bzw. hexagonale Standardgitter ist  $\Omega_i = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$  bzw.  $\Omega_\rho = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\rho$  mit  $\rho = e^{\pi i/3}$ , siehe Figur 2.5.4. Jedes quadratische bzw. hexagonale Gitter ist zum entsprechenden Standardgitter äquivalent. – Aus 2.2.6(2)–(3) folgt:

**Satz** Das Gitter  $\Omega$  ist genau dann hexagonal bzw. quadratisch, wenn  $g_2(\Omega) = 0$  bzw.  $g_3(\Omega) = 0$ .  $\square$



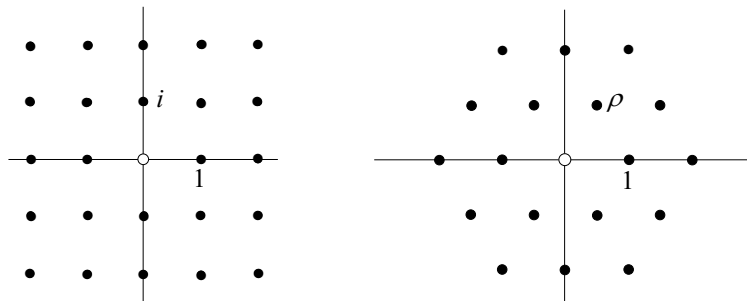


Fig. 2.5.4. Das quadratische Gitter  $\Omega_i$  und das hexagonale Gitter  $\Omega_\rho$ .

*Bemerkung.* Bei einem Kristall  $K \subset \mathbb{R}^3$  ist  $K \cap E$  für jede affine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  ein zwei-dimensionales Gitter oder leer. Wegen des letzten Ergebnisses hat  $K$  nur 2-, 3-, 4- oder 6-fache Symmetrieachsen. Man nennt dies die *kristallographischen Beschränkungen*.

**2.5.5 Komplexe Multiplikation.** Die (eventuell nicht umkehrbaren) affinen Selbstabbildungen  $\varphi : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  werden gemäß 2.5.2 von den linearen Funktionen  $az + b$  induziert, für die  $a\Omega < \Omega$  gilt. Der Unterring

$$R(\Omega) := \{a \in \mathbb{C} : a\Omega < \Omega\}$$

von  $\mathbb{C}$  umfaßt  $\mathbb{Z}$ . Für jedes  $c \in \mathbb{C}^\times$  gilt  $R(c\Omega) = R(\Omega)$ . Für äquivalente Gitter  $\Omega, \Omega^*$  folgt  $R(\Omega) = R(\Omega^*)$ . Man nennt  $\mathbb{C}/\Omega$  einen *Torus mit komplexer Multiplikation*, wenn  $R(\Omega) \neq \mathbb{Z}$ .

**Satz.** Sei  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  und  $\tau := \omega_1/\omega_2$ . Genau dann, wenn  $\mathbb{Q}(\tau)$  ein imaginär quadratischer Zahlkörper ist, gestattet der Torus  $\mathbb{C}/\Omega$  komplexe Multiplikationen. Für jedes  $a \in R(\Omega) \setminus \mathbb{Z}$  ist  $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\tau)$ , und es gilt  $a^2 + pa + q$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Aus  $\tau \notin \mathbb{R}$  folgt  $\mathbb{Q}(\tau) \not\subset \mathbb{R}$ . Wenn  $[\mathbb{Q}(\tau) : \mathbb{Q}] = 2$  ist, gibt es ganze Zahlen  $k, m, n$ , so daß  $k\tau^2 = m + n\tau$ . Für  $a := k\tau$  folgt  $a\Omega < \Omega$ . Umgekehrt gilt für jedes  $a \in R(\Omega)$

$$(1) \quad a\omega_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \quad \text{und} \quad a\omega_2 = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \quad \text{mit} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}.$$

Die zweite Gleichung ergibt  $a = \gamma\tau + \delta \in \mathbb{Q}(\tau)$ . Für  $a \notin \mathbb{Z}$  ist  $\gamma \neq 0$ , daher  $\tau \in \mathbb{Q}(a)$ , also  $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(\tau)$ . Wegen (1) ist  $a$  ein Eigenwert der Matrix  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$  und somit eine Wurzel ihres charakteristischen Polynoms  $z^2 - (\alpha + \delta)z + (\alpha\delta - \beta\gamma)$ . Aus  $a \notin \mathbb{Z}$  folgt, daß  $\mathbb{Q}(\tau) = \mathbb{Q}(a)$  imaginär quadratisch ist.  $\square$

Für quadratische bzw. hexagonale Gitter ist  $R(\Omega)$  der Ring  $\mathbb{Z}[i]$  bzw.  $\mathbb{Z}[\rho]$ . Diese Ringe sind in ihren Quotientenkörpern ganz abgeschlossen.

Die komplexe Multiplikation wurde von Abel entdeckt. Kronecker bemerkte die Beziehung zur Zahlentheorie. Bis heute ist die *komplexe Multiplikation* ein blühendes Gebiet, wo sich Funktionentheorie, Algebra und Zahlentheorie harmonisch ergänzen.

## 2.6 Normale Abbildungen der Zahlenebene

Alle normalen Überlagerungen  $\mathbb{C} \rightarrow X$  werden klassifiziert. Als Deckgruppen treten Symmetriegruppen von Ornamenten auf, die sich über die Ebene periodisch ausbreiten. – Wir benutzen, daß  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  aus allen linearen Funktionen  $z \mapsto az + b$  mit  $a \in \mathbb{C}^\times$  und  $b \in \mathbb{C}$  besteht und identifizieren  $b \in \mathbb{C}$  mit der Translation  $z \mapsto z + b$ .

**2.6.1 Kanonische Zerlegung.** Sei  $G < \text{Aut}(\mathbb{C})$ . Dann ist

$$h : G \rightarrow \mathbb{C}^\times, (z \mapsto az + b) \mapsto a,$$

ein Homomorphismus, dessen Kern  $G^T$  aus allen Translationen in  $G$  besteht. Die Bildgruppe  $G^\times := h(G) < \mathbb{C}^\times$  transformiert  $G^T$  in sich, d.h.  $a \cdot b \in G^T$  für  $a \in G^\times$  und  $b \in G^T$ . Wir nennen  $(G^T, G^\times)$  die *kanonische Zerlegung* von  $G$ .

**Lemma.** Wenn  $G$  die Deckgruppe einer normalen Abbildung  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow X$  ist, gibt es für  $(G^T, G^\times)$  nur folgende Möglichkeiten:

- (1)  $(0, \mu_n)$  mit  $n = 1, 2, 3, \dots$ ;
- (2)  $(\mathbb{Z} \cdot b, \mu_n)$  mit  $b \in \mathbb{C}^\times$  und  $n = 1, 2$ ;
- (3)  $(\Omega, \mu_n)$  mit einem Gitter  $\Omega$  und  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ , wobei  $n = 4$  nur bei quadratischen und  $n = 3, 6$  nur bei hexagonalen Gittern möglich ist.

*Beweis.* Jede Bahn  $G(c)$  ist lokal endlich. Dasselbe gilt für  $c + G^T \subset G(c)$  und damit für  $G^T$ . Nach 2.5.1 ist  $G^T = 0$ ,  $= \mathbb{Z} \cdot b$  oder  $= \Omega$  wie in (1)–(3). Im Falle  $G^T = 0$  haben alle Elemente von  $G$  denselben Fixpunkt  $c$ . Denn wenn  $f, g \in G$  verschiedene Fixpunkte hätten, wäre  $fgf^{-1}g^{-1} \in G$  eine Translation  $\neq \text{id}$ . Aus 1.5.3(3) folgt  $G^\times = \mu_n$ .

Für  $G^T = \mathbb{Z} \cdot b$  besteht  $G^\times$  höchstens aus  $\pm 1$ . Für  $G^T = \Omega$  ergibt sich aus 2.5.4  $G^\times = \mu_n$  mit den unter (3) genannten Einschränkungen.  $\square$

**2.6.2 Punkt-, Band- und Flächengruppen.** Die im Lemma angegebenen Möglichkeiten werden durch folgende Deckgruppen realisiert:

- (1) *Punktgruppen*  $P_n := \{z \mapsto cz : c \in \mu_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$
- (2) *Bandgruppen*  $B_1 := \{z \mapsto z + q : q \in \mathbb{Z}\}$ ,  $B_2 := \{z \mapsto \pm z + q : q \in \mathbb{Z}\}$ ,
- (3) *Flächengruppen*  $F_n(\Omega) := \{z \mapsto cz + \omega : c \in \mu_n, \omega \in \Omega\}$ ,  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ . Bei  $n = 4$  ist  $\Omega$  quadratisch und bei  $n = 3, 6$  hexagonal.

Die zugehörigen Überlagerungen lauten

- (1)  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ , für  $P_n$ ;
- (2)  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto \exp(2\pi iz)$ , für  $B_1$ ;  
 $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \cos(2\pi z)$ , für  $B_2$ ;
- (3)  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  (Torusprojektion) für  $F_1(\Omega)$ ;  
 $\eta_n : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  gemäß folgender Tabelle für  $F_n(\Omega)$ :

$n$	2	3	4	6
$\eta_n$	$\wp$	$\wp'$	$\wp^2$	$\wp^3$

Die nächste Tabelle enthält in der zweiten Zeile die Anzahl der Ausnahmebahnen und in der dritten Zeile die Windungszahlen  $\geq 2$ , d.h. die Ordnungen der Standgruppen längs jeder Ausnahmebahn. In der letzten Zeile stehen noch einmal die Basisflächen.

$P_n$	$B_1$	$B_2$	$F_1$	$F_2$	$F_3$	$F_4$	$F_6$
1	0	2	0	4	3	3	3
$n$	–	2,2	–	2,2,2,2	3,3,3	2,4,4	2,3,6
$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}^\times$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{C}/\Omega$	$\widehat{\mathbb{C}}$	$\widehat{\mathbb{C}}$	$\widehat{\mathbb{C}}$	$\widehat{\mathbb{C}}$

**2.6.3 Klassifikation.** Jede Deckgruppe  $G < \text{Aut}(\mathbb{C})$  einer normalen Abbildung  $\mathbb{C} \rightarrow X$  ist zu einer Punktgruppe  $P_n$ , einer Bandgruppe  $B_1, B_2$  oder einer Flächengruppe  $F_n(\Omega)$  konjugiert. Zwei Flächengruppen  $F_n(\Omega)$  und  $F_m(\Omega_*)$  sind genau dann konjugiert, wenn  $n=m$  ist und die Gitter äquivalent sind. Sonst gibt es zwischen den Gruppen  $P_n, B_j, F_n(\Omega)$  keine Konjugationsbeziehungen.

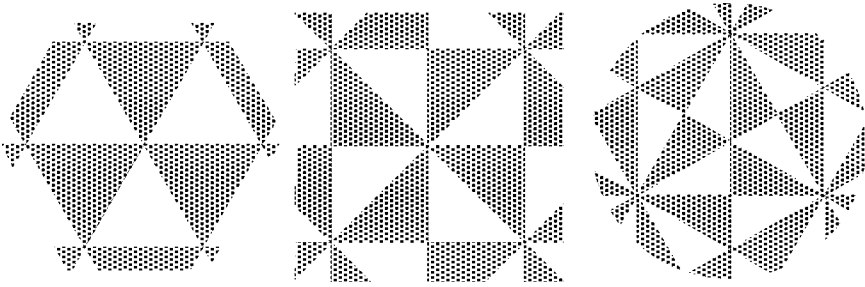
*Beweis.* Für die kanonische Zerlegung von  $G$  bestehen die in Lemma 2.6.1 genannten Möglichkeiten. Durch Konjugation mit einer Translation erreicht man, daß 0 ein Punkt mit  $n$ -fach zyklischer Standgruppe wird. Im zweiten Fall  $(\mathbb{Z} \cdot b, \mu_n)$  konjugiert man noch mit der Homothetie  $z \mapsto z/b$ , um  $b=1$  zu erreichen. Nach diesen Konjugationen wird  $G$  zu  $P_n, B_n$  bzw.  $F_n(\Omega)$ .

Wenn  $G = F_n(\Omega)$  und  $G_* = F_m(\Omega_*)$  konjugiert sind, also  $gGg^{-1} = G_*$  mit  $g(z) = az + b$  gilt, ist  $n = \sharp G^\times = \sharp G_*^\times = m$  und  $a\Omega = \Omega_*$ . Umgekehrt überführt die Konjugation mit  $g(z) = az$  die Gruppe  $F_n(\Omega)$  in  $F_n(a\Omega)$ .  $\square$

Die Band- und Flächengruppen klassifizieren die Band- und Flächenornamente ohne (Gleit-)Spiegelsymmetrien. Wenn man letztere berücksichtigt, gibt es 17 (statt 5) doppelt-periodische Flächenornamente mit wesentlich verschiedenen Symmetrien, siehe [Klem].

**2.6.4 Dreiecksparkettierungen.** Es gibt nur drei Tripel  $(p, q, r)$  ganzer Zahlen mit  $2 \leq p \leq q \leq r$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$ , nämlich  $(3, 3, 3)$ ,  $(2, 4, 4)$  und  $(2, 3, 6)$ . Zu jedem Tripel wählen wir ein Dreieck  $\Delta \subset \mathbb{C}$  mit den Innenwinkeln  $\pi/p, \pi/q$  und  $\pi/r$ . Fortgesetzte Spiegelungen an den Seiten des Dreiecks erzeugen eine Parkettierung der Ebene  $\mathbb{C}$  durch kongruenten Bilder von  $\Delta$ . Die Teildreiecke der Parkettierung werden schachbrettartig schwarz und weiß gefärbt, siehe Figur 2.6.4. Diese Parkettierungen veranschaulichen die Flächengruppen  $F_3, F_4, F_6$ . Denn es gilt der

**Satz.** Die Parkettierung zu  $(p, q, r)$  wird einschließlich ihrer Färbung durch eine Flächengruppe  $F_r(\Omega)$  in sich transformiert.



**Fig. 2.6.4.** Dreiecksparkettierungen der Ebene der Typen  $(3,3,3)$ ,  $(2,4,4)$  und  $(2,3,6)$ . Andere Möglichkeiten gibt es nicht.

*Beweis.* Die Spiegelungen  $\sigma_a, \sigma_b$  und  $\sigma_c$  an den Seiten von  $\Delta$  ergeben drei Drehungen  $\rho_A = \sigma_b \circ \sigma_c$ ,  $\rho_B = \sigma_c \circ \sigma_a$  und  $\rho_C = \sigma_a \circ \sigma_b$  um die Ecken des Dreiecks  $\Delta$ , deren Drehwinkel  $2\pi/p$ ,  $2\pi/q$  und  $2\pi/r$  die doppelten Innenwinkel an den entsprechenden Ecken sind. Offenbar ist  $\rho_A \circ \rho_B \circ \rho_C = \text{id}$ . Diese Drehungen erzeugen die Flächengruppe  $F_r(\Omega)$ . Zum Beweis legt man  $C$  in den Ursprung. Dann wird die Drehgruppe  $\mu_r$  durch  $\rho_C$  erzeugt. Die Zahlen  $r/p$ ,  $r/q$  sind ganz, und  $\rho_A \circ \rho_C^{-r/p}$ ,  $\rho_B \circ \rho_C^{-r/q}$  sind zwei Translationen, die  $\Omega$  aufspannen.  $\square$

Entsprechende Dreiecksparkettierungen der Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  und der hyperbolischen Ebene  $\mathbb{H}$  werden in 4.2.7-8 bzw. 11.7 gewonnen.

## 2.7 Aufgaben

- 1) Man zeige: Zu jeder elliptischen Funktion  $f$  vom Grade 2 gibt es ein  $a \in \mathbb{C}$  und ein  $A \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  mit  $f(z) = A \circ \wp(z+a)$ .
- 2) Zeige für den Halbperiodenwert  $e_k$ , daß  $\wp - e_k$  ein Quadrat in  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ , aber kein Quadrat in  $\mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C})$  ist.
- 3) Betrachte in  $\mathbb{C}^2$  mit den Koordinaten  $(u, v)$  die komplexe Gerade  $L$  mit der Gleichung  $v = mu + n$ .
  - (i) Zeige: Es gibt höchstens drei Stellen  $z_j + \Omega \in \mathbb{C}/\Omega$  mit  $z_j \notin \Omega$ , so daß die Punkte  $P_j = (u_j, v_j)$  mit den Koordinaten  $u_j = \wp(z_j)$ ,  $v_j = \wp'(z_j)$  auf  $L$  liegen. – Im folgenden seien  $u_1, u_2, u_3$  paarweise verschieden.
  - (ii) Zeige:  $(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3) = u^3 - \frac{1}{4}m^2u^2 + au + b$ , wobei  $a$  und  $b$  nicht weiter interessieren.
  - (iii) Folgere  $z_1 + z_2 + z_3 \in \Omega$  aus der Abelsche Relation, angewendet auf  $\wp' - m\wp - n$ .

(iv) Gewinne aus (ii) und (iii) das Additionstheorem

$$\wp(z+w) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp'(z) - \wp'(w)}{\wp(z) - \wp(w)} \right)^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

(v) Beweise die Verdopplungsformel

$$\wp(2z) = \frac{1}{4} \left( \frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} \right)^2 - 2\wp(z)$$

und stelle ihre rechte Seite als rationale Funktion von  $\wp(z)$  dar.

4) Zeige: Für jede ganze Zahl  $n$  ist  $\wp(nz)$  eine rationale Funktion von  $\wp(z)$ .

5) Zeige, daß folgende Aussage zu den Aussagen 2.2.7 des Jacobischen Problems äquivalent ist:

*Die Differentialgleichung  $w'^2 = (1-w^2)(1-k^2w^2)$  besitzt für jede komplexe Konstante  $k \neq 0, \neq \pm 1$  eine elliptische Funktion zweiten Grades als Lösung.*

6) Man begründe, daß die  $\sigma$ -Funktion ungerade ist. Verbessere ihre Periodenformel zu

$$\sigma(z+\omega) = \exp(h(\omega)z \pm \tfrac{1}{2}\omega) \cdot \sigma(z), \quad \text{mit } + \text{ für } \tfrac{1}{2}\omega \in \Omega, \text{ und } - \text{ sonst.}$$

7) Für den Homomorphismus  $h$  in der Periodenformel der  $\zeta$ -Funktion und  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega$  beweise man

$$h(\omega) = 2\zeta(\omega/2) \quad \text{sowie} \quad h(\omega_1)\omega_2 - h(\omega_2)\omega_1 \in 2\pi i\mathbb{Z}.$$

Dazu forme man  $\sigma(z+\omega_1+\omega_2)$  in verschiedener Weise um.

8) Man stelle  $\wp(z) - \wp(w)$  als  $\sigma$ -Produkt im Sinne von 2.4.4 dar.

9) Beweise:

$$\begin{aligned} \wp(z) - \wp(w) &= -\frac{\sigma(z-w) \cdot (z+w)}{\sigma(z)^2 \cdot \sigma(w)^2} \\ \wp'(z) &= -\frac{\sigma(2z)}{\sigma(z)^4}. \end{aligned}$$

10) Folgere aus dem Abelschen Theorem: Zu jedem positiven Divisor  $D$  vom Grade  $\geq 2$  auf einem Torus  $T$  gibt es ein  $f \in \mathcal{M}(T)$  mit

$$D(x) = \max \{0, o(f, x)\} \quad \text{für alle } x \in T.$$

11) Beweise die letzte Behauptung in 2.5.2.

12) Ordne den lemniskatischen Sinus  $sl$  in die Klassifikation 2.6.3 der normalen Überlagerungen  $\mathbb{C} \rightarrow X$  ein.



### 3. Fundamentalgruppen und Überlagerungen

Die topologische Theorie *unverzweigter* Überlagerungen  $\eta: X \rightarrow Y$  wird von der *Fundamentalgruppe*  $\pi(Y)$  beherrscht. Nach der Definition dieser Gruppe in 3.1 stellen wir in 3.2 ihre Beziehung zur Überlagerungstheorie her, welche im *Monodromiesatz* gipfelt. Dieses nach heutigem Verständnis rein topologische Ergebnis entstand historisch aus Problemen der *analytischen Fortsetzung*. Wir betrachten sie und andere funktionentheoretische Anwendungen in 3.3-5. Anschließend werden die topologischen Untersuchungen fortgesetzt, um weitere Ergebnisse zu erzielen, die in den nächsten Kapiteln für Riemannsche Flächen relevant werden. – *Im vorliegenden Kapitel sind alle Überlagerungen unverzweigt.* Im 4. Kapitel folgt das Studium *verzweigter* Überlagerungen.

#### 3.1 Fundamentalgruppen

Wir entwickeln nach Jordan (1866) einen Kalkül der Homotopieklassen stetiger Wege und fassen ihn im Begriff der Fundamentalgruppe (Poincaré, 1892/95) zusammen.

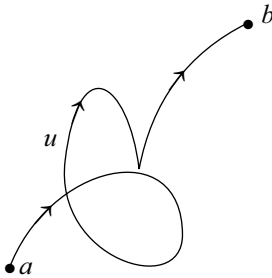
**3.1.1 Homotope Wege.** Eine stetige Abbildung  $w: [\alpha, \beta] \rightarrow X$  eines Intervalls  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  mit  $\alpha < \beta$  in einen topologischen Raum  $X$  heißt *Weg* vom Anfangspunkt  $w(\alpha)$  zum Endpunkt  $w(\beta)$ , siehe Figur 3.1.1 a. Man kann das Intervall  $[\alpha, \beta]$  durch  $[0, 1]$  ersetzen, indem man linear umparametrisiert: Aus  $w$  wird  $w^*: [0, 1] \rightarrow X$ ,  $w^*(s) := w((1-s)\alpha + s\beta)$ .

Man nennt  $X$  *wegzusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten  $a, b \in X$  einen Weg von  $a$  nach  $b$  existiert. Jede Mannigfaltigkeit ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

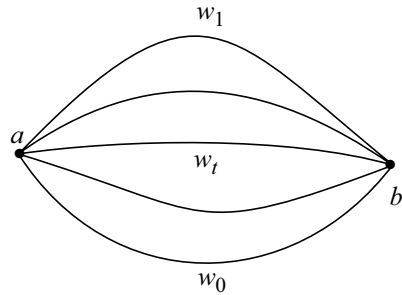
Zwei Wege  $w_0, w_1: I := [0, 1] \rightarrow X$  von  $a$  nach  $b$  heißen *homotop* ( $w_0 \sim w_1$ ), wenn sie sich durch eine Schar von Zwischenwegen  $w_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ineinander deformieren lassen, siehe Figur 3.1.1 b. Damit ist gemeint:

- (1) Jeder Zwischenweg  $w_t$  führt wie  $w_0$  und  $w_1$  von  $a$  nach  $b$ .
- (2) Die Abbildung  $h: I^2 := I \times I \rightarrow X$ ,  $h(s, t) = w_t(s)$ , ist stetig.

Man nennt  $h$  eine *Homotopie* von  $w_0$  nach  $w_1$ . Die Forderung (1) bedeutet  $h(0, t) = a$  und  $h(1, t) = b$  für alle  $t \in I$ .



**Fig. 3.1.1 a.** Das Bild  $w([\alpha, \beta])$  eines Weges  $u$  von  $a$  nach  $b$ .



**Fig. 3.1.1 b.** Die Homotopie  $h$  von  $w_0$  nach  $w_1$  und die Zwischenwege  $w_t$ .

(1) *Die Homotopie ist eine Äquivalenzrelation.*

*Beweis.* Die Reflexivität  $w \sim w$  folgt aus der konstanten Homotopie  $h(s, t) := w(s)$ . Die Symmetrie beweist man, indem man die Homotopie  $h$  von  $w_0$  nach  $w_1$  zur Homotopie  $(s, t) \mapsto h(s, 1 - t)$  von  $w_1$  nach  $w_0$  umdreht. Für die Transitivität setzt man die Homotopien  $h_1$  von  $w_0$  nach  $w_1$  und  $h_2$  von  $w_1$  nach  $w_2$  zu folgender Homotopie stetig zusammen:

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} h_1(s, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ h_2(s, 2t - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \quad \square$$

Die Äquivalenzklasse  $[w]$  des Weges  $w$  heißt *Homotopieklasse*.

Sei  $\varphi : I \rightarrow I$  eine stetige Abbildung, so daß  $\varphi(0) = 0$  und  $\varphi(1) = 1$  ist. Aus dem Weg  $w : I \rightarrow X$  entsteht der *umparametrisierte Weg*  $w \circ \varphi : I \rightarrow X$ . Er ist zu  $w$  homotop vermöge  $h(s, t) = w(t\varphi(s) + (1 - t)s)$ .

(2) *Bei jeder stetigen Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  haben zwei in  $X$  homotope Wege  $w_0$  und  $w_1$  die in  $Y$  homotopen Bildwege  $\eta \circ w_0$  und  $\eta \circ w_1$ .*

Denn die Homotopie  $h$  von  $w_0$  nach  $w_1$  ergibt die Homotopie  $\eta \circ h$  von  $\eta \circ w_0$  nach  $\eta \circ w_1$ .  $\square$

**3.1.2 Wegeprodukt.** Wenn der Endpunkt des Weges  $u : I \rightarrow X$  der Anfangspunkt des Weges  $v : I \rightarrow X$  ist, definiert man den *Produktweg*

$$u \cdot v : I \rightarrow X, s \mapsto \begin{cases} u(2s) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ v(2s - 1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Man beachte die Reihenfolge von links nach rechts: Erst wird  $u$  und dann  $v$  durchlaufen. Aus zwei Homotopien  $u_0 \sim u_1$  und  $v_0 \sim v_1$  folgt  $u_0 \cdot v_0 \sim u_1 \cdot v_1$ . Daher macht es Sinn, das Produkt  $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$  der Homotopieklassen zu definieren.

Wenn sich für drei Wege  $u, v, w$  die Produkte  $u \cdot v$  und  $v \cdot w$  bilden lassen, kann man auch  $(u \cdot v) \cdot w$  und  $u \cdot (v \cdot w)$  bilden. Diese beiden Wege gehen durch stückweise lineares Umparametrisieren auseinander hervor. Insbesondere sind sie homotop. *Das Produkt von Homotopieklassen ist also assoziativ.*



**3.1.3 Schleifen, nullhomotope Wege, inverse Wege.** Ein Weg heißt *geschlossen* oder *Schleife*, wenn sein Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Dieser Punkt heißt auch *Basispunkt* der Schleife. Eine Schleife, die zum konstanten Weg homotop ist, heißt *nullhomotop*.

Wenn  $w$  ein Weg von  $a$  nach  $b$  ist und  $\hat{a}$  den konstanten Weg  $\hat{a}(t) := a$  bezeichnet, läßt sich  $w$  in den Produktweg  $\hat{a} \cdot w$  stückweise linear umparametrisieren. Entsprechendes gilt für  $w \cdot \hat{b}$ . Für jede bei  $a$  bzw.  $b$  nullhomotope Schleife  $u$  bzw.  $v$  ist daher  $[u] \cdot [w] = [w] = [w] \cdot [v]$ .

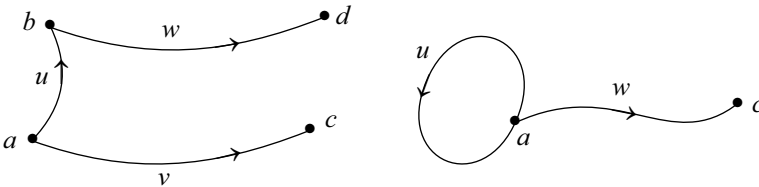
Zu jedem Weg  $w : I \rightarrow X$  von  $a$  nach  $b$  gehört der *inverse* Weg  $w^- : I \rightarrow X$ ,  $w^-(s) := w(1-s)$  von  $b$  nach  $a$ . Offenbar ist  $w^- \cdot w = \hat{a}$ . Für das Produkt gilt  $(u \cdot v)^- = v^- \cdot u^-$ . Wenn  $w_0$  und  $w_1$  homotop sind, sind die inversen Wege  $w_0^-, w_1^-$  ebenfalls homotop. Der Produktweg  $w \cdot w^-$  ist nullhomotop: Die Homotopie vom konstanten Weg nach  $w \cdot w^-$  läuft über die Zwischenwege  $w_t \cdot w_t^-$ , wobei  $w_t(s) := w(st)$  ist. – Insgesamt gilt die

**Rechenregel:** In einem Produkt von Homotopieklassen kann man Faktoren  $[w]$  mit nullhomotopen Schleifen  $w$ , insbesondere Faktoren  $[u] \cdot [u^-]$  einfügen oder weglassen, ohne das Produkt zu ändern.  $\square$

**3.1.4 Verschiebung der Endpunkte.** Für zwei Punkte  $a, b \in X$  bezeichnet  $\pi(X; a, b)$  die Menge der Homotopieklassen  $[u]$  aller Wege  $u$  von  $a$  nach  $b$ . Wie diese Menge von der Wahl der Endpunkte  $a, b$  abhängt, zeigt folgende Überlegung: Angenommen, es ist je ein Weg  $v$  von  $a$  nach  $c$  und  $w$  von  $b$  nach  $d$  gegeben. Dann ist folgende Abbildung bijektiv:

$$\Phi : \pi(X; a, b) \rightarrow \pi(X; c, d) \quad , \quad [u] \mapsto [v^-] \cdot [u] \cdot [w] .$$

Wir nennen  $\Phi$  *Verschiebung der Endpunkte*, siehe Fig. 3.1.4. Man beachte den Spezialfall  $a = b$ ,  $v = w$ . Dann heißt  $\Phi_w := \Phi$  *Verschiebung des Basispunktes* längs  $w$ .



**Fig. 3.1.4.** Verschiebung der Endpunkte. Die rechte Figur ist der Spezialfall  $v = w$  der linken.

**3.1.5 Definition der Fundamentalgruppe.** Für jeden wegzusammenhängenden Raum  $X$  mit einem Basispunkt  $a \in X$  setzen wir

$$\pi(X, a) := \pi(X; a, a) .$$

Aus den bisherigen Ergebnissen folgt der

**Satz.** Die Menge  $\pi(X, a)$  wird mit der Verknüpfung  $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$  zu einer Gruppe. Das neutrale Element ist die Klasse der nullhomotopen Schleifen. Das inverse Element zu  $[w]$  ist die Klasse der inversen Schleife  $[w]^{-1} := [w^-]$ .

Jede Verschiebung des Basispunktes längs eines Weges  $w$  von  $a$  nach  $c$  ist ein Isomorphismus

$$\Phi_w : \pi(X, a) \xrightarrow{\cong} \pi(X, c), \quad [u] \mapsto [w^-] \cdot [u] \cdot [w],$$

der Gruppen, und zwar für  $a = c$  ein innerer Automorphismus.  $\square$

Man nennt  $\pi(X, a)$  die *Fundamentalgruppe* von  $X$  mit dem Basispunkt  $a$ . Sie hängt bis auf Isomorphie nicht vom Basispunkt ab.

Jede stetige Abbildung  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  induziert den Homomorphismus

$$(1) \quad \eta_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(Y, b), \quad [w] \mapsto [\eta \circ w],$$

der Fundamentalgruppen. Offenbar gelten  $\text{id}_* = \text{id}$  und  $(\varphi \circ \eta)_* = \varphi_* \circ \eta_*$  für eine weitere stetige Abbildung  $\varphi : (Y, b) \rightarrow (Z, c)$ .

**3.1.6 Einfacher Zusammenhang.** Ein Raum  $X$  heißt *einfach zusammenhängend*, wenn er wegweise zusammenhängt und je zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt homotop sind, d.h. wenn jede Menge  $\pi(X; a, b)$  aus genau einem Element besteht. Wegen der Verschiebung der Endpunkte hängt ein wegzusammenhängender Raum  $X$  bereits dann einfach zusammen, wenn für ein Punktepaar  $(a, b)$  die Menge  $\pi(X; a, b)$  nur ein Element hat. Insbesondere genügt es, daß alle Schleifen mit einem festen Basispunkt  $a$  nullhomotop sind:

- (1) Genau dann, wenn  $\pi(X, a)$  die triviale Gruppe ist, hängt  $X$  einfach zusammen.  $\square$
- (2) Jede sternförmige Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  insbesondere  $\mathbb{C}$  und alle Scheiben hängen einfach zusammen.

*Beweis.* Sei  $w$  eine Schleife, deren Basispunkt  $a$  ein Zentrum von  $X$  ist. Dann ist  $h(s, t) = tw(s) + (1 - t)a$  eine Homotopie vom konstanten Weg  $\hat{a}$  nach  $w$ . Die Sternförmigkeit wird gebraucht, damit  $h(I^2) \subset X$  ist.  $\square$

**3.1.7 Zerlegung in Teilwege.** Sei  $w : I \rightarrow X$  ein Weg und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $X$ . Dann gibt es eine Zerlegung  $0 = t_0 < t_1 \dots < t_n = 1$ , so daß jede Teilkurve  $w([t_{\nu-1}, t_\nu])$  in einem  $U$  aus  $\mathcal{U}$  enthalten ist.

Das folgt unmittelbar aus dem Lebesgueschen Überdeckungslemma, siehe z.B. [Kel], p. 154.  $\square$

**3.1.8 Vermeidung isolierter Punkte.** Sei  $A \subset X$  eine lokal endliche Menge in einer Fläche. Zu jedem Weg  $w$  in  $X$ , dessen Anfangs- und Endpunkt nicht in  $A$  liegen, gibt es einen homotopen Weg  $v$ , der  $A$  nicht trifft.

*Beweis.* Es gibt paarweise disjunkte Scheiben  $U_a$ , deren Zentren  $a$  die Punkte von  $A$  sind. Ganz  $X$  wird durch  $X \setminus A$  und alle Scheiben  $U_a$  überdeckt. Nach 3.1.7 ist  $w$  ein Produkt endlich vieler Teilwege  $w_\nu$ , so

daß jedes  $w_\nu$  in  $X \setminus A$  oder einer Scheibe  $U_a$  läuft. Wir können annehmen, daß unmittelbar aufeinander folgende Teilwege nie in derselben Scheibe  $U_a$  liegen. Denn anderenfalls kann man sie zu *einem* Weg in  $U_a$  zusammenfassen. Kein Teilungspunkt liegt dann in  $A$ . Jeder Teilweg  $w_\nu$  trifft höchstens einen Punkt  $a \in A$ . Wenn dies eintritt, ersetzen wir  $w_\nu$  durch einen anderen Weg  $v_\nu$  in  $U_a$  mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, der  $a$  nicht trifft. Weil  $U_a$  einfach zusammenhängt, ist  $v_\nu$  zu  $w_\nu$  homotop. Das Produkt der beibehaltenen und ersetzten Teilwege ist der Weg  $v$ .  $\square$

**Folgerungen:** (1) *Mit  $X$  hängt auch  $X \setminus A$  zusammen. Die Einbettung induziert einen Epimorphismus der Fundamentalgruppen  $\pi(X \setminus A, c) \rightarrow \pi(X, c)$ .*

(2) *Die Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}}$  hängt einfach zusammen.*  $\square$

## 3.2 Monodromie

Gegeben seien zwei stetige Abbildungen  $\eta : X \rightarrow Y$  und  $\varphi : Z \rightarrow Y$ . Jede stetige Abbildung  $\hat{\varphi} : Z \rightarrow X$ , für die  $\varphi = \eta \circ \hat{\varphi}$  gilt, heißt  $\eta$ -*Liftung* von  $\varphi$ . Wir fragen nach der Eindeutigkeit und Existenz von  $\eta$ -Liftungen einer vorgegebenen Abbildung  $\varphi$ , und bezeichnen diese Untersuchungen mit dem Schlagwort *Monodromie*, da ihre Ergebnisse, auf die Funktionentheorie angewendet, einen Beweis des Monodromieprinzips für analytische Fortsetzungen ergeben, siehe 3.4.3.

Die Liftungsergebnisse im vorliegenden Paragraphen beruhen teilweise auf subtilen Voraussetzungen, die von älteren Funktionentheoretikern nicht immer beachtet wurden, siehe 3.4.4. Topologen haben genau untersucht, welche Voraussetzungen notwendig bzw. hinreichend sind, siehe z.B. [Mass], p.145. Wir begnügen uns mit hinreichenden Bedingungen, die für Mannigfaltigkeiten stets erfüllt sind.

**3.2.1 Eindeutigkeit der Liftung.** *Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine lokal topologische Abbildung zwischen Hausdorffräumen. Wenn  $Z$  zusammenhängt, sind zwei  $\eta$ -Liftungen  $\varphi_0, \varphi_1 : Z \rightarrow X$  derselben stetigen Abbildung  $\varphi : Z \rightarrow Y$  gleich, sobald sie an einer Stelle  $c \in Z$  denselben Wert haben.*

*Beweis.* Die Koinzidenzmenge  $W = \{z \in Z : \varphi_0(z) = \varphi_1(z)\}$  ist abgeschlossen, weil  $X$  hausdorffsch ist, und offen, weil  $\eta$  lokal topologisch ist. Wegen  $c \in W$  folgt  $W = Z$  aus dem Zusammenhang.  $\square$

**3.2.2 Überlagerungen.** Eine Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Hausdorffräumen heißt (*unverzweigte, topologische*) *Überlagerung*, wenn  $Y$  wegzusammenhängend ist und jeder Punkt in  $Y$  eine zusammenhängende Umgebung  $V$  besitzt, die in folgendem Sinne *trivial überlagert* wird, siehe Figur 1.4.5:

(1) *Das Urbild  $\eta^{-1}(V)$  ist die Vereinigung offener Mengen  $U_j$ , und jedes  $U_j$  wird durch  $\eta$  homöomorph auf  $V$  abgebildet.*

Durch (1) wird die Forderung „ $\eta$  ist lokal topologisch“ wesentlich verschärft. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung gilt  $U_j \cap U_k = \emptyset$  oder  $U_j = U_k$ . – Jede Umkehrung  $s := (\eta|_{U_j})^{-1} : V \rightarrow U_j \hookrightarrow X$  ist ein *lokaler  $\eta$ -Schnitt*, d.h. eine stetige Abbildung mit der Eigenschaft  $\eta \circ s = \text{id}_V$ . – Aus (1) folgt direkt:

(2) *Für jeden wegzusammenhängenden Teilraum  $V \subset Y$  ist die Beschränkung  $\eta : \eta^{-1}(V) \rightarrow V$  einer Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  auch eine Überlagerung.*  $\square$

Die *unverzweigten* holomorphen Überlagerungen zwischen Riemannschen Flächen, die in 1.4.5 eingeführt wurden, ordnen sich den gerade definierten topologischen Überlagerungen unter. Dazu gehören insbesondere

- (a) alle endlichen holomorphen Abbildungen ohne Verzweigungspunkte, z.B. die Potenzfunktionen  $\eta : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto z^n$  für  $n = 1, 2, \dots$ ,
- (b) die Exponentialfunktion  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto e^z$ ,
- (c) die Torusprojektionen  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  aus 1.2.6.

Eine lokal topologische Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Hausdorffräumen heißt *unbegrenzt*, wenn  $Y$  wegzusammenhängend ist und folgende, zueinander äquivalente Voraussetzungen erfüllt sind:

- (i) *Zu jedem Weg  $v$  in  $Y$  und jedem Punkt  $a$  über dem Anfangspunkt von  $v$  gibt es eine  $\eta$ -Liftung  $\hat{v}$ , die in  $a$  beginnt.*
- (ii) *Jeder Weg  $u : [0, 1) \rightarrow X$  ohne Endpunkt läßt sich stetig nach 1 fortsetzen, sobald dies für  $v := \eta \circ u$  gilt.*

*Äquivalenzbeweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii) ist klar; zu (ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei

$$s = \sup \{t : v|[0, t] \text{ hat eine Liftung, die in } a \text{ beginnt}\}.$$

Es gibt eine Liftung  $u : [0, s) \rightarrow X$  von  $v|[0, s)$ , so daß  $u(0) = a$  ist. Wegen (ii) kann  $u$  stetig nach  $s$  fortgesetzt werden. Wir zeigen, daß  $s = 1$  ist: Man wählt einen Schnitt  $\sigma : (V, v(s)) \rightarrow (X, u(s))$ . Wenn  $s < 1$  ist, gibt es ein  $t > s$ , so daß  $v([s, t]) \subset V$ . Dann wird  $u$  durch  $\sigma \circ v|[s, t]$  zu einer Liftung von  $v|[0, t]$  fortgesetzt, die in  $a$  beginnt. Das widerspricht  $s = \sup$ .  $\square$

**Satz.** *Jede Überlagerung ist unbegrenzt.*

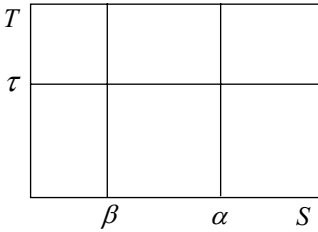
*Beweis* Wir zeigen (ii). Es gibt eine Umgebung  $V$  von  $v(1)$ , die trivial überlagert wird. Man wählt  $\varepsilon < 1$  so, daß  $v([\varepsilon, 1]) \subset V$  ist und wählt den Schnitt  $\sigma : V \rightarrow X$  so, daß  $u(\varepsilon) \in \sigma(V)$  ist. Dann wird  $u$  durch  $u(1) := \sigma \circ v(1)$  stetig fortgesetzt, da  $u$  und  $\sigma \circ v$  auf  $[\varepsilon, 1)$  nach 3.2.1 übereinstimmen.  $\square$

**3.2.3 Liftungssatz für Homotopien.** *Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  unbegrenzt. Zwei Wege  $u_0, u_1$  in  $X$  mit gleichem Anfangspunkt  $a$  sind homotop und haben insbesondere denselben Endpunkt, sobald ihre Bildwege  $v_j := \eta \circ u_j$  in  $Y$  homotop sind.*

*Beweis.* Sei  $k : I^2 \rightarrow Y$  eine Homotopie von  $v_0$  nach  $v_1$ . Alle Zwischenwege  $v_t : I \rightarrow X, v_t(s) := k(s, t)$ , haben denselben Anfangspunkt  $b := \eta(a)$  und denselben Endpunkt  $c$ . Weil  $\eta$  unbegrenzt ist, läßt sich jedes  $v_t$  zu einem Weg  $u_t$  liften, der in  $a$  beginnt. Wir definieren

- (1)  $h : I^2 \rightarrow X$ ,  $h(s, t) := u_t(s)$ ,
- (2)  $\alpha = \sup\{s : h \text{ ist auf } [0, s] \times I \text{ stetig}\}$   
und zeigen nacheinander:
- (3)  $\alpha > 0$ ;
- (4) Zu jedem  $\tau \in I$  gibt es Intervallumgebungen  $S$  von  $\alpha$  und  $T$  von  $\tau$ ,  
so daß  $h$  auf  $S \times T$  stetig ist;
- (5)  $h$  ist auf  $I^2$  stetig;
- (6)  $h$  ist eine Homotopie von  $u_0$  nach  $u_1$ .

Zu (3): Es gibt einen lokalen Schnitt  $\sigma : (V, b) \rightarrow (X; a)$ . Wegen  $k(\{0\} \times I) = \{b\}$  gibt es ein  $\varepsilon > 0$  mit  $k([0, \varepsilon] \times I) \subset V$ . Wegen der Eindeutigkeit der Liftung folgt  $u_t(s) = \sigma \circ k(s, t)$  für  $s \in [0, \varepsilon]$  und  $t \in I$ . Daher ist  $h = \sigma \circ k$  auf  $[0, \varepsilon] \times I$  stetig, also  $\alpha \geq \varepsilon > 0$ .



**Fig. 3.2.3.** Zum Beweis der Stetigkeit der Homotopie  $h$  in einer Umgebung des Punktes  $(\alpha, \tau)$  wird mittels der Eindeutigkeit der Wegeliftung  $h = \sigma \circ k$  auf  $S \times T$  gezeigt.

Zu (4). Es gibt einen lokalen  $\eta$ -Schnitt  $\sigma : (V, k(a, \tau)) \rightarrow (X, h(a, \tau))$ . Man wählt  $S, T$  so, daß  $k(S \times T) \subset V$ . Wegen (3) gibt es ein  $\beta \in S$  mit  $\beta < \alpha$ . Wir erreichen jeden Punkt  $(s, t) \in S \times T$  ausgehend von  $(\alpha, \tau)$  über die Zwischenpunkte  $(\beta, \tau)$  und  $(\beta, t)$ , siehe Figur 3.2.3. Aus der Stetigkeit von  $h$  längs  $S \times \tau$ ,  $\beta \times T$  und  $t \times S$  folgt wegen der Eindeutigkeit der Liftung, daß sich die Übereinstimmung von  $h$  und  $\sigma \circ k$  bei  $(\alpha, \tau)$  über die beiden Zwischenpunkte auf die Stelle  $(s, t)$  überträgt. Daher ist  $h = \sigma \circ k$  auf  $S \times T$  stetig.

Zu (5). Nach (2) ist  $h$  auf  $[0, \alpha] \times I$  stetig. Die Rechtecke  $S \times T$  gemäß (4) überdecken  $\alpha \times I$ . Daher ist  $h$  auch auf einer Umgebung  $W$  von  $\alpha \times I$  stetig. Somit ist  $h$  auf  $[0, \alpha] \times I$  stetig. Außerdem ist  $\alpha = 1$ . Denn sonst gäbe es ein  $\gamma$  mit  $\alpha < \gamma \leq 1$ , so daß  $h$  auf  $[0, \gamma] \times I \subset ([0, \alpha] \times I) \cup W$  stetig wäre. Das widerspricht (2).

Zu (6). Wegen (1) und (5) muß nur noch gezeigt werden, daß  $h(1, t) \in \eta^{-1}(c)$  nicht von  $t$  abhängt. Weil alle  $h$ -Fasern lokal endlich sind, folgt dies aus der Stetigkeit in  $t$ .  $\square$

### 3.2.4 Folgerungen. Sei $\eta : X \rightarrow Y$ unbegrenzt.

- (1) Jede  $\eta$ -Liftung einer nullhomotopen Schleife ist nullhomotop.
- (2) Sei  $X$  wegzusammenhängend. Dann ist der Homomorphismus der Fundamentalgruppen  $\eta_* : \pi(X, a) \rightarrow \pi(Y, b)$  injektiv.

- (3) Sei  $Y$  eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann ist  $X$  auch eine Mannigfaltigkeit, und  $\eta$  ist trivial, d.h. jede Komponente  $Z$  von  $X$  wird durch  $\eta$  homöomorph auf  $Y$  abgebildet.
- (4) Die punktierte Ebene  $\mathbb{C}^\times$  und alle Tori hängen nicht einfach zusammen.
- (5) Jede unbegrenzte Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Mannigfaltigkeiten ist eine Überlagerung.

*Beweise.* (1) ist ein Spezialfall des Liftungssatzes 3.2.3.– (2) folgt aus (1).– Zu (3). Entscheidend ist die Injektivität von  $\eta|_Z$ . Alles übrige folgt direkt. Sei  $\eta(x) = \eta(x')$ . Es gibt einen Weg  $u$  in  $Z$  von  $x$  nach  $x'$ . Sein Bild  $\eta \circ u$  ist nullhomotop. Nach (1) ist  $u$  nullhomotop.– (4) folgt aus (3).– Zu (5). Jeder Punkt in  $Y$  besitzt eine einfach zusammenhängende Umgebung. Diese wird wegen (3) trivial überlagert.  $\square$

**3.2.5 Faktorisierung von Überlagerungen.** Seien  $\eta : X \rightarrow Y$  und  $\varphi : Y \rightarrow Z$  stetige, surjektive, offene Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten. Genau dann, wenn  $\varphi \circ \eta$  eine Überlagerung ist, gilt dasselbe für  $\eta$  und  $\varphi$ .

*Beweis.* Wegen 3.2.4(5) genügt es, die Unbegrenztheit nachzuweisen. Wir führen nur den Schluß von  $\varphi \circ \eta$  auf  $\varphi$  und  $\eta$  durch und überlassen die etwas leichtere Umkehrung dem Leser. Wenn eine offene Menge  $U \subset X$  durch  $\varphi \circ \eta$  homöomorph auf die offene Menge  $W \subset Z$  abgebildet wird, sind die Beschränkungen  $\eta : U \rightarrow \eta(U)$  und  $\varphi : \eta(U) \rightarrow W$  bijektiv, also wegen der Offenheit Homöomorphismen. Daher sind  $\eta$  und  $\varphi$  lokal topologisch. Aus der Unbegrenztheit von  $\varphi \circ \eta$  folgert man diejenige von  $\eta$  und  $\varphi$ .  $\square$

**3.2.6 Monodromiesatz.** Der Raum  $Z$  heißt *lokal wegzusammenhängend*, wenn es eine Basis der Topologie gibt, die aus wegzusammenhängenden Mengen besteht. Mannigfaltigkeiten sind lokal wegzusammenhängend. Jeder zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende Raum ist wegzusammenhängend.

**Satz.** Die Abbildung  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  zwischen wegzusammenhängenden Hausdorffräumen sei unbegrenzt. Der Raum  $Z$  sei zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Die Abbildung  $\varphi : (Z, c) \rightarrow (Y, b)$  sei stetig.

Wenn  $\varphi_*(\pi(Z, c))$  eine Untergruppe von  $\eta_*(\pi(X, a))$  ist, insbesondere wenn  $Z$  einfach zusammenhängt, gibt es genau eine  $\eta$ -Liftung  $\hat{\varphi} : (Z, c) \rightarrow (X, a)$  von  $\varphi$ .

*Beweis.* Die Eindeutigkeit wurde in 3.2.1 bewiesen. Um  $\hat{\varphi}$  zu konstruieren, wählt man zu jedem  $z \in Z$  einen Weg  $w_z$  von  $c$  nach  $z$  und liftet  $\varphi \circ w_z$  zum Weg  $\hat{w}_z$  in  $X$ , der in  $a$  beginnt. Wenn  $w'_z$  ein anderer Weg von  $c$  nach  $z$  ist, haben die Liftungen  $\hat{w}_z$  und  $\hat{w}'_z$  denselben Endpunkt  $\hat{\varphi}(z)$ . Denn die Schleife  $w'_z \cdot w_z^-$  repräsentiert das Element  $[w'_z \cdot w_z^-] \in \pi(Z, c)$ . Daher gibt es eine Schleife  $u$  in  $X$  von und nach  $a$ , so daß  $\varphi_*[w'_z \cdot w_z^-] = \eta_*[u]$ . Dann ist  $\varphi \cdot w'_z$  zu  $(\eta \circ u) \cdot (\varphi \circ w_z)$  homotop, und nach dem Homotopieliftungssatz 3.2.3 hat  $\hat{w}'_z$  denselben Endpunkt wie  $u \cdot \hat{w}_z$ . Damit ist eine Abbildung

$\hat{\varphi} : (Z, c) \rightarrow (X, a)$  definiert, für die  $\eta \circ \hat{\varphi} = \varphi$  gilt. Es bleibt zu zeigen, daß  $\hat{\varphi}$  an jeder Stelle  $z_0$  stetig ist: Dazu wählt man einen lokalen Schnitt  $\sigma : (V, \varphi(z_0)) \rightarrow (X, \hat{\varphi}(z_0))$ . Es gibt eine wegzusammenhängende Umgebung  $W$  von  $z_0$ , so daß  $\varphi(W) \subset V$  ist. Es genügt  $\hat{\varphi}|_W = \sigma \circ \varphi|_W$  zu zeigen: Man wählt zu jedem  $z \in W$  einen Weg  $v_z$  in  $W$  von  $z_0$  nach  $z$  und bildet den Produktweg  $w_z := w_{z_0} \cdot v_z$ . Dann ist  $\hat{w}_z = \hat{w}_{z_0} \cdot (\sigma \circ \varphi \circ v_z)$ . Insbesondere ist der Endpunkt  $\hat{\varphi}(z)$  von  $\hat{w}_z$  gleich dem Endpunkt  $\sigma \circ \varphi(z)$  von  $\sigma \circ \varphi \circ v_z$ .  $\square$

**3.2.7 Isomorphie.** Zwei Überlagerungen  $\eta_1 : X_1 \rightarrow Y$  und  $\eta_2 : X_2 \rightarrow Y$  derselben Mannigfaltigkeit  $Y$  heißen *isomorph*, wenn es einen Homöomorphismus  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  gibt, so daß  $\eta_1 = \eta_2 \circ \varphi$  ist.

**Satz.** Wenn  $X_1, X_2$  zusammenhängen und bei passend gewählten Basispunkten  $\eta_*(\pi(X_1)) = \eta_*(\pi(X_2))$  ist, sind  $\eta_1$  und  $\eta_2$  isomorph.

*Beweis.* Durch  $j \mapsto 3-j$  werden 1 und 2 vertauscht. Nach dem Monodromiesatz 3.2.6 gibt es eine  $\eta_{3-j}$ -Liftung  $\hat{\eta}_j : (X_j, a_j) \rightarrow (X_{3-j}, a_{3-j})$  von  $\eta_j$ . Wegen der Eindeutigkeit der Liftung (3.2.1) gilt  $\hat{\eta}_{3-j} \circ \hat{\eta}_j = \text{id}_{X_j}$ . Daher ist  $\varphi := \hat{\eta}_1$  der gesuchte Homöomorphismus.  $\square$

**3.2.8 Universelle Überlagerungen.** Eine Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  heißt *zusammenhängend*, wenn  $X$  und  $Y$  zusammenhängen.

Eine zusammenhängende Überlagerung  $\zeta : Z \rightarrow Y$  zwischen Mannigfaltigkeiten heißt *universell*, wenn sie folgende *universelle Eigenschaft* hat:

Zu jedem  $c \in Z$  mit  $b := \eta(c)$  und zu jeder zusammenhängenden Überlagerung  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  gibt es genau eine Überlagerung  $\varphi : (Z, c) \rightarrow (X, a)$ , so daß  $\zeta = \eta \circ \varphi$  ist.

Die universelle Überlagerung von  $Y$  ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Ihre Existenz wird in 3.7.1-2 bewiesen.

**Satz.** Die Überlagerung  $\zeta : Z \rightarrow Y$  ist genau dann universell, wenn  $Z$  einfach zusammenhängt.

*Beweis.* Wenn  $Z$  einfach zusammenhängt, gibt es nach dem Monodromiesatz 3.2.6 zu  $\zeta$  genau eine  $\eta$ -Liftung  $\varphi$  mit  $\varphi(c) = a$ . Wegen 3.2.5 ist  $\varphi$  eine Überlagerung. – Die Umkehrung wird in 3.7.2(3) bewiesen.  $\square$

**3.2.9 Normale Überlagerungen.** Analog zu 1.1.3 heißen bei einer Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  die Homöomorphismen  $\gamma : X \rightarrow X$  mit  $\eta \circ \gamma = \eta$  (topologische) *Deckabbildungen*. Sie bilden die (topologische) *Deckgruppe*  $\mathcal{D}(\eta)$ . Die Überlagerung heißt *normal*, wenn sie zusammenhängt und zu je zwei Punkten  $x, x' \in X$  mit  $\eta(x) = \eta(x')$  eine stetige Abbildung  $\gamma : X \rightarrow X$  mit  $\gamma(x) = x'$  und  $\eta \circ \gamma = \eta$  existiert. Nach 3.2.1 ist  $\gamma$  eindeutig bestimmt und gehört zu  $\mathcal{D}(\eta)$ .

**Homöomorphie-Kriterium.** *Wenn die Deckgruppen der normalen Überlagerungen  $\eta_1: X \rightarrow Y_1$  und  $\eta_2: X \rightarrow Y_2$  gleich sind, gibt es einen Homöomorphismus  $\varphi: Y_1 \rightarrow Y_2$  mit  $\varphi \circ \eta_1 = \eta_2$ .*

*Beweis.* Die Überlagerungen haben dieselben Fasern. Daher gibt es eine bijektive Abbildung  $\varphi$  mit  $\varphi \circ \eta_1 = \eta_2$ . Weil  $\eta_1$  und  $\eta_2$  lokal topologisch sind, ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus.  $\square$

- (1) *Jede universelle Überlagerung  $\zeta: Z \rightarrow Y$  ist normal.*
- (2) *Bei der universellen Eigenschaft in 3.2.8 ist  $\varphi: Z \rightarrow X$  ebenfalls universell. Die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\varphi)$  ist eine Untergruppe von  $\mathcal{D}(\zeta)$ .*  $\square$

### 3.3 Holomorphe Überlagerungen

Wir ergänzen die topologischen Resultate des Monodromiesatzes und seiner Konsequenzen um Holomorphieaussagen.

**3.3.1 Liftung der Holomorphie.** Sei  $\eta: X \rightarrow Y$  eine topologische Überlagerung der zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $Y$ . Nach dem Liftingsprinzip 1.2.1 gibt es auf  $X$  genau eine holomorphe Struktur, die  $\eta$  zu einer unverzweigten holomorphen Überlagerung macht. Jede stetige Abbildung  $\varphi: Z \rightarrow X$  einer weiteren Riemannschen Fläche  $Z$  ist nach 1.3.7(1) holomorph, sobald  $\eta \circ \varphi: Z \rightarrow Y$  holomorph ist.

Im holomorphen Fall ist bei der universellen Eigenschaft in 3.2.8 die Überlagerung  $\varphi$  holomorph; alle topologischen Deckabbildungen sind biholomorph, und im Homöomorphiekriterium 3.2.9 ist  $\varphi$  biholomorph.

**3.3.2 Torusabbildungen.** *Jede holomorphe Abbildung  $\varphi: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{C}/\Omega^*$  zwischen Tori ist affin. Zwei Tori  $\mathbb{C}/\Omega$  und  $\mathbb{C}/\Omega^*$  sind genau dann als Riemannsche Flächen isomorph, wenn  $a\Omega = \Omega^*$  für ein  $a \in \mathbb{C}^\times$  gilt.*

*Beweis:* Seien  $\eta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  und  $\eta^*: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega^*$  die Projektionen. Nach dem Monodromiesatz läßt sich  $\varphi \circ \eta$  zu einer holomorphen Funktion  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  liften, so daß  $\eta^* \circ f = \varphi \circ \eta$  ist. Mit 2.5.2-3 folgt die Behauptung.  $\square$

**3.3.3 Überlagerungen punktierter Scheiben.** *Jede unverzweigte zusammenhängende Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \mathbb{E}^\times$  ist zur universellen Überlagerung  $\zeta: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}^\times, z \mapsto e^{iz}$ , oder zu einer  $n$ -blättrigen Überlagerung  $\eta_n: \mathbb{E}^\times \rightarrow \mathbb{E}^\times, z \mapsto z^n$ , mit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  isomorph. Entsprechendes gilt für  $\mathbb{C}^\times$  statt  $\mathbb{E}^\times$ .*

*Beweis.* Nach 3.2.8 kann man faktorisieren:  $\zeta = \eta \circ \varphi$  mit  $\varphi: \mathbb{H} \rightarrow X$ . Andererseits ist  $\zeta = \eta_n \circ \varphi_n$  mit  $\varphi_n: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}^\times, \varphi_n(z) = e^{iz/n}$ . Sei  $\varphi_0 := \text{id}$ . Die einzigen Untergruppen der Deckgruppe  $\mathcal{D}(\zeta) = \{z \mapsto z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$  sind die Deckgruppen  $\mathcal{D}(\varphi_n) = \{z \mapsto z + 2\pi nk : k \in \mathbb{Z}\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Daher gibt es ein  $n$  mit  $\mathcal{D}(\varphi_n) = \mathcal{D}(\varphi)$ . Nach 3.2.9 gibt es einen Isomorphismus  $\psi: X \rightarrow \mathbb{E}^\times$  für  $n \geq 1$  bzw.  $X \rightarrow \mathbb{H}$  für  $n = 0$  mit  $\psi \circ \varphi = \varphi_n$ . Dann gilt  $\eta_n \circ \psi = \eta$  für  $n \geq 1$  bzw.  $\zeta \circ \psi = \eta$  für  $n = 0$ .  $\square$

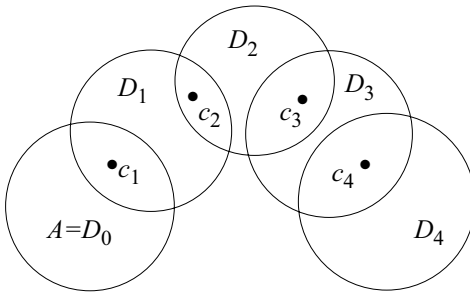


**3.3.4 Verzweigte Überlagerungen von  $\widehat{\mathbb{C}}$ .** Jede höchstens über 0 und  $\infty$  verzweigte holomorphe zusammenhängende Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist zu einer Potenzüberlagerung  $\eta_n: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto z^n$ , mit  $n \geq 1$  isomorph.

*Beweis.* Die Beschränkung  $X' := X \setminus \eta^{-1}\{0, \infty\} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  von  $\eta$  ist nach 3.3.3 zu  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  oder zu  $\eta_n: \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  isomorph. Da eine Scheibe  $\mathbb{E}_r$  durch  $\eta$  elementar überlagert wird, ist  $\exp$  unmöglich. Im zweiten Fall gibt es einen Isomorphismus  $\varphi: X' \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $\eta_n \circ \varphi = \eta|_{X'}$ . Durch  $\varphi(a) := 0$  für  $a \in \eta^{-1}(0)$  und  $\varphi(b) := \infty$  für  $b \in \eta^{-1}(\infty)$  setzt man zur holomorphen Abbildung  $\varphi: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  fort. Sie ist endlich und hat den Grad 1.  $\square$

## 3.4 Analytische Fortsetzung

Die Grundlage der Weierstraßschen Funktionentheorie bilden die konvergenten Laurent-Reihen  $f(z) = \sum a_k(z-c)^k$  mit endlichen Hauptteilen. Um  $f$  über den Konvergenzkreis  $A$  dieser Reihe hinaus fortzusetzen, betrachtet Weierstraß Kreisketten, d.h. endliche Folgen von Kreisscheiben  $A = D_0, D_1, \dots, D_n$  mit Verbindungspunkten  $c_j \in D_{j-1} \cap D_j$  für  $j = 1, \dots, n$ ; siehe Figur 3.4.1. Eine Folge von Laurent-Reihen  $f = f_0, \dots, f_n = g$  nennt er eine *analytische Fortsetzung* von  $f$  längs der Kreiskette, wenn jedes  $f_j$  auf  $D_j$  konvergiert und  $f_{j-1}$  an der Stelle  $c_j$  dieselbe Reihenentwicklung wie  $f_j$  hat. – Wir zeigen, wie sich nach [Wyl 1] die analytische Fortsetzung als Wege-Liftung in die Überlagerungstheorie Riemannscher Flächen einordnet.



**Fig. 3.4.1.** Eine auf dem Kreis  $A$  als Laurent-Reihe definierte Funktion wird längs einer Weierstraßschen Kreiskette analytisch fortgesetzt.

**3.4.1 Funktionenkeime.** Seien  $U$  und  $V$  Umgebungen desselben Punktes  $a$  einer Riemannschen Fläche  $X$ . Zwei Funktionen  $f \in \mathcal{M}(U)$  und  $g \in \mathcal{M}(V)$  heißen *a-äquivalent*, wenn sie auf einer Umgebung  $W \subset U \cap V$  von  $a$  übereinstimmen. Die *a-Äquivalenzklasse* von  $f$  wird *Keim* von  $f$  bei  $a$  genannt und mit  $f_a$  bezeichnet. Der Wert  $f(a)$  und die Ordnung  $o(f, a)$  hängen nur vom Keim ab. Wenn  $o(f, a) \geq 0$  ist, heißt der Keim  $f_a$  *holomorph*.

Die Addition und Multiplikation von Funktionen übertragen sich auf die Keime. Dadurch wird die Menge  $\mathcal{M}_a$  aller Keime meromorpher Funktionen

bei  $a$  zu einem Körper. Mit  $\mathcal{O}_a \subset \mathcal{M}_a$  wird der Teilring der *holomorphen* Keime bezeichnet. Die Keimbildung

$$\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}_a, f \mapsto f_a,$$

ist ein Homomorphismus von  $\mathbb{C}$ -Algebren. Wenn  $U$  zusammenhängt, ist er wegen des Identitätssatzes 1.3.4 injektiv. – Für  $X = \mathbb{C}$  und  $a = 0$  ist  $\mathcal{M}_a$  der Körper aller konvergenten Laurentreihen  $\sum a_n z^n$  mit endlichem Hauptteil.

**3.4.2 Die Fläche der meromorphen Keime.** Wir bilden die Menge

$$(1) \quad \mathcal{M} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{M}_x$$

aller meromorphen Funktionenkeime an allen Stellen  $x$  einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$ . Die Projektion  $p: \mathcal{M} \rightarrow X$  ordnet jedem Keim die Stelle zu, an der er gebildet wird.

**Lemma.** *Es gibt auf  $\mathcal{M}$  genau eine Topologie, so daß  $p$  lokal topologisch ist. Sie macht  $\mathcal{M}$  zu einem Hausdorffraum.*

*Beweis.* Wir bilden für jede offene Menge  $U \subset X$  und jedes  $f \in \mathcal{M}(U)$  die *Basismenge*

$$(2) \quad (U, f) = \{f_x : x \in U\} \subset \mathcal{M}.$$

Zu jeden Keim  $\kappa \in (U, f) \cap (V, g)$  bei  $x \in U \cap V$  gibt es eine Scheibe  $W \subset V \cap U$  um  $x$  mit

$$(3) \quad \kappa \in (W, h) \subset (U, f) \cap (V, g) \quad \text{für } h := f|_W = g|_W.$$

Man nennt diejenigen Teilmengen von  $\mathcal{M}$  offen, welche Vereinigungen von Basismengen sind. Die Axiome einer Topologie sind erfüllt; denn der Durchschnitt zweier offener Mengen ist wegen (3) offen. Die Projektion  $p: \mathcal{M} \rightarrow X$  bildet jede Basismenge  $(U, f)$  homöomorph auf  $U$  ab und ist daher lokal topologisch.

Zu zwei Keimen  $f_a, g_b$  an verschiedenen Stellen  $a \neq b$  gibt es disjunkte Umgebungen von  $a$  und von  $b$ . Ihre  $p$ -Urbilder sind disjunkte Umgebungen von  $f_a$  und  $g_b$ . – Wenn  $a = b$  ist, gibt es eine gemeinsame Scheibe  $(U, a)$  mit  $f, g \in \mathcal{M}(U)$ . Aus (3) und der Injektivität der Keimbildung  $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}_a$  für jedes  $x \in U$  folgt  $f = g$  oder  $(U, f) \cap (U, g) = \emptyset$ . Daher ist die Topologie hausdorffsch.  $\square$

Mit dem Liftungsprinzip 1.2.1 folgt unmittelbar der

**Satz.** *Der Raum  $\mathcal{M}$  der meromorphen Keime auf  $X$  ist eine Riemannsche Fläche. Die Projektion  $p: \mathcal{M} \rightarrow X$  ist lokal biholomorph.*  $\square$

**3.4.3 Auswertungsfunktion und analytische Fortsetzung.** Die *Auswertungsfunktion* (Evaluation)  $e: \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  ordnet jedem Keim  $f_x$  den Wert  $f(x)$  zu. Auf jeder Basismenge  $(U, f)$  ist  $e = f \circ p$ . Daher ist  $e$  meromorph und  $o(e, f_x) = o(f, x)$ . – Die *holomorphen* Funktionenkeime bilden die Teilmenge  $\mathcal{O} := \{\kappa \in \mathcal{M} : o(e, \kappa) \geq 0\}$ . Die Differenz  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{O}$  ist die lokal endliche Menge der Polstellen von  $e$ . Insbesondere ist  $\mathcal{O} \subset \mathcal{M}$  offen.

Sei  $w : I \rightarrow X$  ein Weg, und sei  $\kappa$  ein Keim bei  $a := w(0)$ . Wenn sich  $w$  zu einem Weg  $\hat{w}$  in  $\mathcal{M}$  liften läßt, der in  $\kappa$  beginnt, sagt man: Der Keim  $\hat{w}(1)$  geht aus  $\kappa$  durch analytische Fortsetzung längs  $w$  hervor.

Für festes  $\kappa$  bilden diese Keime  $\hat{w}(1)$  eine Komponente  $Z_\kappa$  von  $\mathcal{M}$ . Sie wird genau dann durch  $p$  biholomorph auf  $X$  abgebildet, wenn  $\kappa$  der Keim einer auf ganz  $X$  meromorphen Funktion ist.

Wenn die eingeschränkte Projektion  $p : Z_\kappa \rightarrow X$  unbegrenzt und damit eine (unverzweigte) Überlagerung ist, sagt man: Der Keim  $\kappa$  läßt sich in  $X$  *unbegrenzt fortsetzen*. Aus dem Monodromiesatz folgt direkt das

**Monodromieprinzip der Funktionentheorie.** *Wenn  $X$  einfach zusammenhängt und der Keim  $\kappa$  unbegrenzt fortgesetzt werden kann, ist  $\kappa$  der Keim einer auf ganz  $X$  meromorphen Funktion.*  $\square$

**3.4.4 Historisches.** Die älteste Form des Monodromieprinzips steht in Weierstraß' Vorlesung *Einführung in die Theorie der analytischen Functionen*, die er zwölf mal von 1861/62 bis 1884/85 an der Berliner Universität hielt. Bei der Betrachtung der analytischen Fortsetzung beantwortet er 1868 die Frage nach ihrer Eindeutigkeit mit dem Satz: „Wenn ein Teil der Ebene einfach begrenzt ist und man kann für jeden Punkt derselben ein Functionenelement erhalten, so werden wir stets zu demselben gelangen, also die Funktion eindeutig sein“. Weierstraß und seine Schüler konnten diesen Satz nicht beweisen. Dies gelang erst, als H. Weyl erkannte, daß das Problem der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung in seinem Kern topologisch ist und durch die Liftung einer Abbildung gelöst wird, nachdem man zuvor sämtliche Funktionenelemente zu Punkten einer Überlagerungsfläche gemacht hat, siehe [Wyl], S. 52 ff.

Das Wort *Monodromie* benutzt Weierstraß nicht. Riemann nennt den Wert einer Funktion *einändig oder monodrom*, wenn dort *keine Verzweigung stattfindet* [Ri 4], S. 68. Der heute übliche Gebrauch des Wortes geht auf Weyl zurück. Er nennt das *Monodromieprinzip der Funktionentheorie* den *Monodromiesatz* [Wyl 1], S. 54. Im Anschluß daran wurde es üblich, die dahinter stehenden topologischen Aussagen mit dem Schlagwort *Monodromie* zu belegen.

Das Monodromieprinzip wurde selbst von erstrangigen Funktionentheoretikern nicht immer korrekt angewendet. So behauptet Carathéodory, [Cy 1] Band I, S. 230, daß eine lokal biholomorphe Abbildung  $h : G \rightarrow h(G)$  zwischen Gebieten in  $\mathbb{C}$  global biholomorph sei, sobald  $h(G)$  einfach zusammenhängt. Die globale Umkehrabbildung gewinnt er mit dem Monodromieprinzip aus dem Keim einer lokalen Umkehrung, ohne zu prüfen, ob dieser Keim unbegrenzt fortgesetzt werden kann. Diese Beweislücke läßt sich nicht schließen, da die Behauptung falsch ist, wie die surjektive Abbildung  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\} \mapsto \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{3}z^3 - z$ , zeigt.

## 3.5 Abzählbarkeit

Aus *einem* meromorphen Funktionenkeim können an derselben Stelle höchstens *abzählbar viele* Keime durch analytische Fortsetzung entstehen. Hinter diesem Ergebnis steht ein Satz der Topologie.

**3.5.1 Abzählbare Topologie.** Eine Menge  $\mathcal{U}$  von offenen Mengen  $\neq \emptyset$  eines Raumes  $X$  heißt *Basis der Topologie*, wenn jede offene Menge  $W \subset X$  eine Vereinigung von Mengen  $U \in \mathcal{U}$  ist. Wenn es eine abzählbare Basis gibt, nennt man die *Topologie abzählbar*. Alle Kugeln mit rationalen Radien, deren Zentren rationale Koordinaten haben, bilden eine abzählbare Basis des  $\mathbb{R}^n$ .

- (1) *Wenn abzählbar viele Unterräume  $A_1, A_2, \dots$  von  $X$  abzählbare Topologien haben, ist die Topologie der Vereinigung  $\bigcup A_j$  abzählbar. Wenn die Topologie von  $X$  abzählbar ist, ist die Spurtopologie jeder Teilmenge  $A \subset X$  auch abzählbar.*  $\square$

In einer Mannigfaltigkeit  $X$  hat jede Koordinatenumgebung eine abzählbare Topologie, weil sie zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  homöomorph ist. Jede relativ kompakte Menge  $A \subset X$  hat eine abzählbare Topologie, weil sie durch endlich viele Koordinatenumgebungen überdeckt werden kann.

- (2) *Jeder Raum mit abzählbarer Topologie enthält eine abzählbare, dichte Teilmenge.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}$  eine abzählbare Basis. Man wählt aus jedem  $U \in \mathcal{U}$  je einen Punkt. Die abzählbare Menge  $T$  dieser Punkte ist dicht. Denn jede offene Menge  $W \neq \emptyset$  umfaßt ein  $U \in \mathcal{U}$  und trifft daher  $T$ .  $\square$

- (3) *Sei  $A \subset X$  ein Teilraum mit abzählbarer Topologie in einer Mannigfaltigkeit  $X$ . Sei  $U \subset X$  offen. Dann wird  $A$  von höchstens abzählbar vielen Komponenten von  $U$  getroffen.*

*Beweis.* Nach (2) gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge  $T \subset A$ . Man definiert die Abbildung  $\varphi: T \cap U \rightarrow \{\text{Komponenten von } U, \text{ die } A \text{ treffen}\}$  durch  $\varphi(x) := \text{Komponente, in der } x \text{ liegt}$ . Jede Komponente von  $U$  ist offen. Wenn sie  $A$  trifft, dann auch  $T$ . Daher ist  $\varphi$  surjektiv. Weil  $T \cap U$  abzählbar ist, folgt (3).  $\square$

- (4) *Jede lokal endliche Teilmenge  $S$  eines Raumes  $X$  mit abzählbarer Topologie ist abzählbar.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{U}$  eine abzählbare Basis der Topologie. Zu jedem  $x \in S$  gibt es ein  $U_x \in \mathcal{U}$ , so daß die  $U_x$  paarweise disjunkt sind. Die Abbildung  $S \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $x \mapsto U_x$ , ist daher injektiv.  $\square$

**3.5.2 Satz von Poincaré-Volterra.** *Sei  $\eta: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung von einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $X$  in einen Hausdorffraum  $Y$  mit abzählbarer Topologie. Wenn alle Fasern von  $\eta$  lokal endlich sind, ist die Topologie von  $X$  abzählbar.*

*Beweis.* Sei  $\mathcal{V}$  eine abzählbare Basis von  $Y$ , und sei  $\mathcal{U}$  die Menge aller relativ kompakten Komponenten von  $\eta^{-1}(V)$  für  $V \in \mathcal{V}$ .

- (a)  $\mathcal{U}$  überdeckt  $X$ .

- (b) *Wenn die Topologie von  $A \subset X$  abzählbar ist, wird  $A$  von höchstens abzählbar vielen  $U \in \mathcal{U}$  getroffen.*

Zu (a). Sei  $x \in X$  und  $y = \eta(x)$ . Weil  $f^{-1}(y)$  lokal endlich ist, gibt es eine relativ kompakte Umgebung  $W$  von  $x$ , so daß der kompakte Rand

$\partial W = \overline{W} \setminus W$  die Faser  $\eta^{-1}(y)$  nicht trifft. Dann ist  $\eta(\partial W)$  kompakt, also ist  $Y \setminus \eta(\partial W)$  eine Umgebung von  $y$ . Es gibt ein  $V \in \mathcal{V}$ , so daß  $y \in V \subset Y \setminus \eta(\partial W)$ . Die Komponente  $U$  von  $\eta^{-1}(V)$ , welche  $x$  enthält, liegt in  $W$ . Daher ist  $U$  wie  $W$  relativ kompakt und folglich  $x \in U \in \mathcal{U}$ .

Zu (b). Sei  $V \in \mathcal{V}$ . Nach 3.5.2(3) wird  $A$  von höchstens abzählbar vielen Komponenten von  $f^{-1}(V)$  getroffen. Da  $\mathcal{V}$  abzählbar ist, folgt (b).

Wir wählen ein  $U_0 \in \mathcal{U}$  und definieren induktiv die offenen, nicht-leeren Mengen  $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset X$  sowie die Folge  $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{U}$  durch

$$A_0 = U_0, \quad \mathcal{U}_r = \{U \in \mathcal{U} : U \cap A_r \neq \emptyset\}, \quad A_{r+1} = A_r \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}_r} U.$$

Alle  $U \in \mathcal{U}$  haben abzählbare Topologie, weil sie relativ kompakt sind. Wegen (b) folgt durch Induktion: Jedes  $A_r$  hat abzählbare Topologie, und  $\mathcal{U}_r$  ist abzählbar. Somit ist

$$A = \bigcup_{r=0}^{\infty} A_r \subset X$$

eine offene Menge mit abzählbarer Topologie. Da  $X$  zusammenhängt, folgt  $X = A$ , wenn noch gezeigt wird:

(c)  $A$  ist abgeschlossen in  $X$ .

Zu (c). Zu jedem  $x \in \bar{A}$  gibt es nach (a) ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$ . Dann ist  $U \cap A \neq \emptyset$ , also  $U \cap A_r \neq \emptyset$  für große  $r$ . Das bedeutet  $U \in \mathcal{U}_r$ , also  $x \in A_{r+1}$ .  $\square$

**3.5.3 Anwendungen auf Riemannsche Flächen.** (1) Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen zusammenhängenden Riemannschen Flächen. Wenn die Topologie von  $Y$  abzählbar ist, gilt dasselbe für  $X$ , und jede  $\eta$ -Faser ist abzählbar.

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt aus 3.5.2, weil die  $\eta$ -Fasern lokal endlich sind (1.3.3). Für die zweite Behauptung benutzt man noch 3.5.1(4).  $\square$

Der Spezialfall  $Y = \widehat{\mathbb{C}}$  ergibt:

(2) Wenn auf der zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$  eine nicht konstante meromorphe Funktion lebt, ist die Topologie von  $X$  abzählbar.

Die Voraussetzung von (2) ist immer erfüllt, siehe 10.7.2.– Weil die Projektion  $p : \mathcal{M} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , siehe 3.4.2, nirgends konstant ist, gilt:

(3) Jede Zusammenhangskomponente von  $\mathcal{M}$  hat abzählbare Topologie.  $\square$

Die Abzählbarkeit der  $p$ -Faser bedeutet in diesem Falle:

(4) Die Menge aller meromorphen Funktionenkeime an einer Stelle  $a \in \widehat{\mathbb{C}}$ , die aus einem festen Keim durch analytische Fortsetzung hervorgehen, ist abzählbar.  $\square$

**3.5.4 Historisches.** Der Satz, den Poincaré und Volterra 1888 unabhängig voneinander bewiesen, ist die letzte Aussage (4). Tatsächlich stammt das Ergebnis von G. Cantor, der es schon Jahre vorher Weierstraß mitgeteilt hatte.

Der topologische Kern des Satzes von Poincaré und Volterra in der Gestalt 3.5.2 wurde von Bourbaki [Bou], Chap. 1, 11.7, herausgearbeitet. Mehr zur Geschichte findet man in [U].

### 3.6 Unverzweigte normale Überlagerungen

Wir ergänzen die Ergebnisse in 3.2.9 durch eine Beziehung der Deckgruppe einer normalen Überlagerung zur Fundamentalgruppe ihrer Basis.

Mit  $\eta: X \rightarrow Y$  wird eine topologische Überlagerung zwischen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten bezeichnet.

**3.6.1 Normalitätslemma.** *Die Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  ist bereits dann normal, wenn es für einen Punkt  $a \in X$  zu jedem  $a'$  mit  $\eta(a') = \eta(a)$  eine Deckabbildung  $g$  mit  $g(a) = a'$  gibt.*

*Beweis.* Für  $x, x' \in X$  gelte  $\eta(x) = \eta(x')$ . Man verbindet  $x$  mit  $a$  durch einen Weg  $u$ . Es gibt einen Weg  $v$  über  $\eta \circ u$ , der in  $x'$  beginnt. Er endet in einem Punkt  $a'$  mit  $\eta(a') = \eta(a)$ . Für die Deckabbildung  $g$  mit  $g(a) = a'$  gilt dann  $g(x) = x'$ , da aus der Eindeutigkeit der Liftung  $g \circ u = v$  folgt.  $\square$

**3.6.2 Wechsel des Basispunktes.** *Sei  $\eta(a) = b$ . Wenn  $a'$  die Faser  $\eta^{-1}(b)$  durchläuft, erhält man mit  $\eta_*(\pi(X, a'))$  alle zu  $\eta_*(\pi(X, a))$  konjugierten Untergruppen von  $\pi(Y, b)$ .*

*Beweis.* Die  $\eta$ -Liftungen der Schleifen  $v$  in  $Y$  mit dem Basispunkt  $b$ , welche in  $a$  beginnen, sind genau die Wege  $u$ , die in Punkten  $a' \in \eta^{-1}(b)$  enden. Mit den Verschiebungen  $\Phi_u$  und  $\Phi_v$ , siehe 3.1.5, ist das Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, a) & \xrightarrow{\Phi_u} & \pi(X, a') \\ \eta_* \downarrow & & \downarrow \eta_* \\ \pi(Y, b) & \xrightarrow{\Phi_v} & \pi(Y, b). \end{array}$$

Es folgt  $\eta_*(\pi(X, a')) = [v]^{-1} \cdot \eta_*(\pi(X, a)) \cdot [v]$ . Insbesondere ist  $\eta_*(\pi(X, a)) \triangleleft \pi(Y, b)$  genau dann ein Normalteiler, wenn  $\eta_*(\pi(X, a')) = \eta_*(\pi(X, a))$  für alle  $a' \in \eta^{-1}(b)$  gilt. Letzteres ist nach dem Monodromiesatz 3.2.6 zur Existenz einer Deckabbildung  $g$  mit  $g(a') = a$  äquivalent. Mit 3.6.1 folgt der

**Satz.** *Die Überlagerung  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$  ist genau dann normal, wenn  $\eta_*(\pi(X, a)) \triangleleft \pi(Y, b)$  ein Normalteiler ist.*  $\square$

**3.6.3 Der Poincarésche Epimorphismus.** *Sei  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$  eine normale Überlagerung. Es gibt genau einen Epimorphismus*

$$(1) \quad P: \pi(Y, b) \rightarrow \mathcal{D}(\eta),$$

*so daß für jede Schleife  $v$  mit dem Basispunkt  $b$  ihre in  $a$  beginnende Liftung  $u$  in  $P[v](a)$  endet. Der Kern von  $P$  ist die Bildgruppe  $\eta_*(\pi(X, a))$ . Genau dann, wenn  $P$  ein Isomorphismus ist, hängt  $X$  einfach zusammen.*

*Beweis.* Man definiert  $g := P[v]$  als die Deckabbildung, deren Wert  $g(a)$  der Endpunkt von  $u$  ist. Nach dem Homotopie-Liftungssatz 3.2.3 hängt  $g$  nur von der Homotopieklasse  $[v] \in \pi(Y, b)$  ab, und  $P$  ist wohldefiniert. Dies ist die einzig mögliche Definition von  $P$ .

*Homomorphie.* Für  $j=1, 2$  seien  $v_j$  zwei Schleifen und  $u_j$  ihre Liftungen, die in  $a$  beginnen. Sei  $g_j := P[v_j]$  und  $g := P[v_1 \cdot v_2]$ . Dann ist  $u_1 \cdot (g_1 \circ u_2)$  die Liftung von  $v_1 \cdot v_2$ , die in  $a$  beginnt. Ihr Endpunkt  $g(a)$  ist der Endpunkt von  $g_1 \circ u_2$ , also der Punkt  $g_1 \circ g_2(a)$ .

*Surjektivität.* Sei  $g \in \mathcal{D}(\eta)$ . Man verbindet  $a$  mit  $g(a)$  durch einen Weg  $u$ . Für  $v = \eta \circ u$  gilt  $P[v] = g$ .

*Kern.* Genau dann, wenn  $P[v] = \text{id}$  ist, wird  $v$  zu einer Schleife  $u$  geliftet, d.h.  $[v] = \eta_*[u] \in \eta_*(\pi(X, a))$ .

*Isomorphismus.* Der Kern von  $P$  ist genau dann trivial, wenn  $X$  einfach zusammenhängt. Denn nach 3.2.4(2) ist  $\eta_*$  injektiv.  $\square$

Wir nennen  $P$  den *Poincaréschen Epimorphismus*. Er hängt von der Wahl des Basispunktes  $a$  ab und wird daher genauer mit  $P_a$  bezeichnet. Sei  $v$  ein Weg von  $a$  nach  $a'$  in  $X$ . Für die Verschiebung  $\Phi_w : \pi(Y, b) \rightarrow \pi(Y, b')$  längs  $w = \eta \circ v$  gilt  $P_a = P_{a'} \circ \Phi_w$ .

**3.6.4 Beispiele.** Der Poincarésche *Epimorphismus* ermöglicht die Berechnung der Fundamentalgruppe  $\pi(Y, b)$ , wenn eine universelle Überlagerung  $\zeta : (Z, c) \rightarrow (Y, b)$  und ihre Deckgruppe  $\mathcal{D}(\zeta)$  bekannt sind.

- (1) Die Fundamentalgruppe  $\pi(\mathbb{C}^\times, 1)$  ist unendlich zyklisch und wird von der Homotopieklasse des Weges  $u : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $u(s) = \exp(is)$ , erzeugt.
- (2) Die Fundamentalgruppe des Torus  $T = \mathbb{C}/\Omega$  zum Gitter  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang 2. Die Homotopieklassen der Schleifen  $u_j : [0, 1] \rightarrow T$ ,  $u_j(t) = \eta(t\omega_j)$ , bilden eine Basis von  $\pi(T, a)$ .

*Beweis.* Man benutzt bei (1) die Exponentialfunktion  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  und bei (2) die Torusprojektion  $\eta : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (T, a)$  als universelle Überlagerungen.  $\square$

**3.6.5 Historisches.** C. Jordan [Jo] stand 1866 mit seinem Kalkül der Wege und ihrer Homotopien kurz vor der Definition der Fundamentalgruppe. Sogar die Einsicht, sich auf Schleifen zu beschränken, hatte er bereits. Es mag daher verwundern, warum er nicht die Fundamentalgruppe erfand. Aber Gruppen waren damals noch Substitutions- oder Transformationsgruppen und nicht Mengen mit einer Verknüpfung für je zwei Elemente.

Es dauerte noch 26 Jahre, bis H. Poincaré 1892 die Fundamentalgruppe in einer kurzen Note definierte. Dieser Note folgte 1895 eine ausführliche Abhandlung und 1904 eine Ergänzung, siehe [Po] IV, p. 183 ff. Den Namen *groupe fondamentale* prägte er 1895.

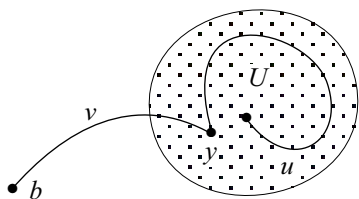
Zehn Jahre vorher hatte Poincaré, teilweise im Wettstreit mit Klein, Überlagerungen kompakter Riemannscher Flächen  $R$  vom Geschlecht  $\geq 2$  durch die obere Halbebene  $\mathbb{H}$  untersucht. Die Deckgruppen nannte er Fuchs'sche Gruppen. Klein protestierte vergeblich: „Fuchs hat hier keine Verdienste.“ [Klei 5], S. 374 ff. Nach der Definition der Fundamentalgruppe erinnerte Poincaré an die Fuchs'schen Gruppen und stellte fest [Po] VI, S. 247: „Ce groupe fuchsien ne sera, d'ailleurs, évidemment autre chose que le groupe fondamental  $g$ , relatif à la surface  $R$  considérée comme une variété à deux dimensions.“ Kurz gesagt: Die Fundamentalgruppe ist die Deckgruppe der universellen Überlagerung.

### 3.7 Konstruktion von Überlagerungen

Wir realisieren alle Untergruppen der Fundamentalgruppe  $\pi(Y)$  einer Mannigfaltigkeit  $Y$  als Bildgruppen  $\eta_*(\pi(X))$  zusammenhängender Überlagerungen  $\eta: X \rightarrow Y$  und verallgemeinern die Ergebnisse auf den unzusammenhängenden Fall.

**3.7.1 Überlagerungen zu vorgegebenen Untergruppen.** *Zu jeder Untergruppe  $H < \pi(Y, b)$  gibt es bis auf Isomorphie genau eine zusammenhängende Überlagerung  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$  mit  $\eta_*(\pi(X, a)) = H$ . Der Index von  $H$  in  $\pi(Y, b)$  ist die Blätterzahl von  $\eta$ .*

*Beweis.* Zur Isomorphie siehe 3.2.7. – Zur Existenz: Zwei Wege  $u$  und  $v$ , die in  $b$  beginnen, heißen  $H$ -äquivalent, wenn sie denselben Endpunkt haben und die Homotopieklasse der Schleife  $u \cdot v^{-1}$  in  $H$  liegt. Insbesondere sind zwei Schleifen mit dem Basispunkt  $b$  genau dann  $H$ -äquivalent, wenn ihre Homotopieklassen in derselben Restklasse modulo  $H$  liegen. Sei  $\text{kl } v$  die  $H$ -Äquivalenzklasse von  $v$ , sei  $X$  die Menge aller  $H$ -Äquivalenzklassen, und sei  $\eta: X \rightarrow Y$  die Abbildung  $\eta(\text{kl } v) := \text{Endpunkt von } v$ . Sei  $U$  eine einfach zusammenhängende Umgebung des Endpunktes  $y$  von  $v$ . Wir lassen  $u$  alle Wege in  $U$  durchlaufen, die in  $y$  beginnen, und bilden die Menge  $U_v := \{\text{kl}(v \cdot u)\} \subset X$  der  $H$ -Äquivalenzklassen der Produktwege, siehe Figur 3.7.1. Durch  $\eta$  wird  $U_v$  bijektiv auf  $U$  abgebildet.



**Fig. 3.7.1.** In der Überlagerungsfläche  $X$  besteht eine Umgebung der  $H$ -Äquivalenzklasse  $\text{kl } v$  aus allen Klassen  $\text{kl}(v \cdot u)$ , wobei  $u$  ein Weg in  $U$  ist, der in  $y$  beginnt.

Sämtliche Mengen  $U_v$  bilden die Basis einer Topologie auf  $X$ . Bezüglich dieser Topologie ist  $\eta$  stetig und offen. Da  $U$  einfach zusammenhängt, wird  $U$  durch  $\eta^{-1}(U)$  trivial überlagert.

Der Basispunkt  $a \in X$  ist die  $H$ -Äquivalenzklasse  $\text{kl } b$  des konstanten Weges. Jeder Weg  $v$  in  $Y$ , der in  $b$  beginnt, hat genau einen  $\eta$ -Lift  $\hat{v}$ , der in  $a$  beginnt. Der Endpunkt von  $\hat{v}$  ist  $\text{kl } v \in X$ . Daher hängt  $X$  zusammen.

Aus den Äquivalenzen  $[v] \in \eta_*\pi(X, a) \Leftrightarrow \hat{v} \text{ ist eine Schleife} \Leftrightarrow \text{kl } v = a = \text{kl } b \Leftrightarrow [v] \in H$  folgt  $\eta_*(\pi(X, a)) = H$ .

Da die Nebenklassen von  $H$  in  $\pi(Y, b)$  umkehrbar eindeutig den Punkten der Faser  $\eta^{-1}(b)$  entsprechen, ist die Blätterzahl von  $\eta$  der Index von  $H$  in  $\pi(Y, b)$ .  $\square$



**3.7.2 Folgerungen.** (1) Zu jedem Epimorphismus  $h : \pi(Y, b) \rightarrow G$  gibt es bis auf Isomorphie genau eine normale Überlagerung  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  mit der Deckgruppe  $G$  und dem Poincaréschen Epimorphismus  $h$ .

(2) Jede zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $Y$  wird durch eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit  $Z$  überlagert.

(3) Bei jeder universellen Überlagerung  $X \rightarrow Y$  hängt  $X$  einfach zusammen.

*Beweis.* (1) Man wendet 3.7.1 auf die Untergruppe  $H = \text{Kern } h$  an und erhält wegen 3.6.2-3 die gewünschte normale Überlagerung. – (2) folgt aus (1), angewendet auf  $h = \text{id}$ . – (3) Nach (2) gibt es eine einfach zusammenhängende Überlagerung. Nach 3.2.7 ist diese universell und daher zur Überlagerung  $X \rightarrow Y$  isomorph.  $\square$

**3.7.3 Historisches.** Um die besonderen Eigenschaften einfach zusammenhängender Flächen auch für nicht-einfach zusammenhängende Flächen nutzen zu können, zerlegte Riemann letztere durch Querschnitte in einfach zusammenhängende Stücke, siehe [Ri 2], Artikel 6. Hieran knüpfte H. A. Schwarz dreißig Jahre später mit der Konstruktion einfach zusammenhängender Überlagerungen an. Er teilte seinen Gedankengang F. Klein mündlich mit. Dieser beschrieb ihn am 14.5.1882 in einem Brief an H. Poincaré folgendermaßen, [Klei 1], Band 3, S. 616:

„Schwarz denkt sich die Riemannsche Fläche in geeigneter Weise zerschnitten, sodann unendlich-fach überdeckt und die verschiedenen Überdeckungen in den Querschnitten so zusammengefügt, daß eine Gesamtfläche entsteht, welche der Gesamtheit der in der Ebene nebeneinander zu legenden Polygonen entspricht. Diese Gesamtfläche ist, sofern man von solchen Attributen bei unendlich ausgedehnten Flächen sprechen kann (was eben erläutert werden muß), *einfach zusammenhängend*, ... – Dieser Schwarzsche Gedankengang ist jedenfalls sehr schön.“

Poincaré antwortete umgehend (18.5.1882): „Les idées de M. Schwarz ont une portée bien plus grande.“

**3.7.4  $G$ -Überlagerungen.** Wir betrachten Überlagerungen, bei denen nur noch  $Y$  zusammenhängt. Diese Verallgemeinerung wird in 3.8.2 benötigt.

Wir nennen  $\eta$  eine  $G$ -Überlagerung, wenn  $G < \mathcal{D}$  eine Untergruppe der Deckgruppe ist, so daß zu je zwei Punkten  $x, x'$  mit  $\eta(x) = \eta(x')$  genau ein  $g \in G$  mit  $g(x) = x'$  existiert. Bei zusammenhängenden Überlagerungen ist dies wegen der Eindeutigkeit der Liftung nur für  $G = \mathcal{D}$  möglich.

An die Stelle des Poincaréschen Epimorphismus tritt bei  $G$ -Überlagerungen  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  der analog definierte *Poincarésche Homomorphismus*  $P : \pi(Y, b) \rightarrow G$ .

Sei  $X_0$  die Komponente von  $X$ , in der  $a$  liegt. Dann ist die Beschränkung von  $\eta$  eine normale Überlagerung  $\eta_0 : X_0 \rightarrow Y$  mit der Deckgruppe  $G_0 := \{g \in G : g(X_0) = X_0\} = P(\pi(Y, b)) < G$ . Insbesondere gilt:

(1) Genau dann, wenn  $X$  zusammenhängt, ist  $P$  surjektiv.  $\square$

**Eindeutigkeitssatz.** Zu zwei  $G$ -Überlagerungen  $\eta : (X, a) \rightarrow (Y, b)$  und  $\eta' : (X', a') \rightarrow (Y, b)$  mit demselben Poincaréschen Homomorphismus  $P : \pi(Y, b) \rightarrow G$  gibt es genau einen Homöomorphismus  $\varphi : (X, a) \rightarrow (X', a')$  mit  $\eta' \circ \varphi = \eta$  und  $\varphi \circ g = g \circ \varphi$  für alle  $g \in G$ .

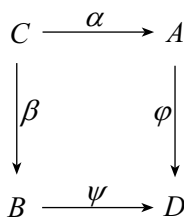
*Beweis.* Die analog zu  $\eta_0$  gebildete normale Überlagerung  $\eta'_0$  hat denselben Poincaréschen Epimorphismus wie  $\eta_0$  und ist daher zu  $\eta_0$  isomorph: Es gibt genau einen Homöomorphismus  $\varphi_0: (X_0, a) \rightarrow (X'_0, a')$  mit  $\eta'_0 \circ \varphi_0 = \eta_0$  und  $\varphi_0 \circ g = g \circ \varphi_0$  für  $g \in G_0$ . Zu jeder Komponente  $X_1$  von  $X$  gibt es ein  $g \in G$  mit  $g(X_0) = X_1$ . Wir definieren  $\varphi|_{X_1} := g \circ \varphi_0 \circ g^{-1}$  und überlassen dem Leser nachzuprüfen: Die Definition hängt nicht von  $g$  ab und ergibt einen Homöomorphismus  $\varphi: X \rightarrow X'$  mit allen behaupteten Eigenschaften.  $\square$

**3.7.5 Existenz der  $G$ -Überlagerungen.** Bei einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $Y$  ist jeder Homomorphismus  $h: \pi(Y, b) \rightarrow G$  der Poincarésche Homomorphismus einer  $G$ -Überlagerung  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$ .

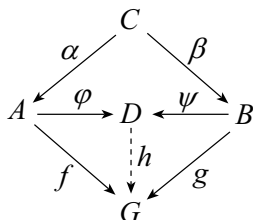
*Beweis.* Sei  $G_0 := \text{Bild } h < G$ . Nach 3.7.2(1) gibt es eine normale Überlagerung  $\eta_0: (X_0, a) \rightarrow (Y, b)$  mit dem Poincaréschen Epimorphismus  $h: \pi(Y, b) \rightarrow G_0$ . Sei  $M \subset G$  eine Repräsentantenmenge für die Restklassen von  $G$  modulo  $G_0$ . Dabei sei das Einselement 1 der Repräsentant für  $G_0$ . Wir versehen  $M$  mit der diskreten Topologie, bilden  $X := M \times X_0$  mit dem Basispunkt  $(1, a)$  und die Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$ ,  $\eta(m, x) := \eta_0(x)$  für  $m \in M$  und  $x \in X_0$ . Wir definieren den Monomorphismus  $G \rightarrow \mathcal{D}(\eta)$  durch  $g(m, x) := (m_0, g_0(x))$ , wobei  $m_0 \in M$  und  $g_0 \in G_0$  durch  $gm = m_0 g_0$  eindeutig bestimmt werden. Dadurch wird  $\eta$  zu einer  $G$ -Überlagerung mit dem Poincaréschen Homomorphismus  $h: \pi(Y, b) \rightarrow G_0 \hookrightarrow G$ .  $\square$

### 3.8 Die Fundamentalgruppe einer Vereinigung

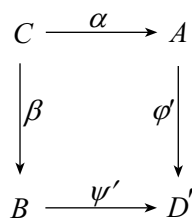
Seifert (1931) und van Kampen (1934) fanden eine Methode, um die Fundamentalgruppe  $\pi(U \cup V)$  einer Vereinigung zu bestimmen, wenn man  $\pi(U)$ ,  $\pi(V)$  und  $\pi(U \cap V)$  kennt. Wir berechnen damit die Fundamentalgruppen der mehrfach punktierten Ebene (3.8.4) und der kompakten Flächen (12.3.6).



Dia. 1



Dia. 2



Dia. 3

**3.8.1 Amalgamierte Produkte.** Das kommutative Diagramm 1 von Gruppen und Homomorphismen heißt *amalgamiertes Produkt*, wenn es zu jeder Gruppe  $G$  und zu jedem Paar von Homomorphismen  $f: A \rightarrow G$  und  $g: B \rightarrow G$ , für

die  $f \circ \alpha = g \circ \beta$  gilt, genau einen Homomorphismus  $h : D \rightarrow G$  gibt, so daß  $f = h \circ \varphi$  und  $g = h \circ \psi$  ist, siehe Diagramm 2. Wenn das Diagramm 3 auch ein amalgiertes Produkt ist, gibt es genau einen Isomorphismus  $h : D \rightarrow D'$ , so daß  $\varphi' = h \circ \varphi$  und  $\psi' = h \circ \psi$  gelten (Eindeutigkeit).

*Beispiel:* Sei  $\alpha : C \rightarrow A$  ein Homomorphismus, und sei  $N$  der von  $\alpha(C)$  in  $A$  erzeugte Normalteiler. Sei  $\varphi : A \rightarrow A/N =: D$  die Projektion auf die Faktorgruppe. Mit  $B := \{1\}$  entsteht ein amalgiertes Produkt.

**3.8.2 Satz von Seifert und van Kampen.** *Die Mannigfaltigkeit  $X$  sei die Vereinigung  $U \cup V$  von zwei offenen, zusammenhängenden Mengen, so daß auch  $U \cap V$  zusammenhängt. Das durch die Einbettungen induzierte Diagramm der Fundamentalgruppen mit einem Basispunkt  $a \in U \cap V$  ist ein amalgiertes Produkt:*

$$\begin{array}{ccc} \pi(U \cap V) & \xrightarrow{\alpha} & \pi(U) \\ \beta \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \pi(V) & \xrightarrow{\psi} & \pi(U \cup V) \end{array}$$

*Beweis* (nach Grothendieck, siehe [Go], S. 143 f). Es seien  $f : \pi(U) \rightarrow G$  und  $g : \pi(V) \rightarrow G$  zwei Homomorphismen, so daß  $f \circ \alpha = g \circ \beta$  gilt. Es genügt zu zeigen, daß genau ein Homomorphismus  $h : \pi(U \cup V) \rightarrow G$  mit  $h \circ \varphi = f$  und  $h \circ \psi = g$  existiert.

Nach 3.7.5 gibt zwei  $G$ -Überlagerungen  $\eta_1 : (Z_1, c_1) \rightarrow (U, a)$  und  $\eta_2 : (Z_2, c_2) \rightarrow (V, a)$  mit den Poincaréschen Homomorphismen  $f$  bzw.  $g$ . Wegen  $f \circ \alpha = g \circ \beta$  und der Eindeutigkeit der  $G$ -Überlagerung sind  $\eta_1$  und  $\eta_2$  über  $U \cap V$  kanonisch isomorph. Mit dem eindeutig bestimmten Isomorphismus werden  $\eta_1$  und  $\eta_2$  zu einer  $G$ -Überlagerung  $\eta : (Z, c) \rightarrow (U \cup V, c)$  verschmolzen, so daß  $Z = Z_1 \cup Z_2$  und  $\eta|_{Z_j} = \eta_j$  ist. Der Poincarésche Homomorphismus von  $\eta$  ist der gesuchte Homomorphismus  $h$ . Er ist eindeutig bestimmt.

Wir erläutern die *Verschmelzung* ausführlicher: Es gibt genau einen Isomorphismus  $q : \eta_1^{-1}(U \cap V) \rightarrow \eta_2^{-1}(U \cap V)$

mit  $q(c_1) = c_2$ ,  $\eta_1 = \eta_2 \circ q$  und  $q \circ \gamma = \gamma \circ q$  für alle  $\gamma \in G$ . Auf  $Z_1 \uplus Z_2$  wird durch  $z_1 \sim q(z_1)$  für  $z_1 \in \eta_1^{-1}(U \cap V)$  eine Äquivalenzrelation erzeugt. Sei  $Z$  die Menge der Äquivalenzklassen und  $p : Z_1 \uplus Z_2 \rightarrow Z$  die Projektion, die jedem  $z$  seine Klasse  $p(z)$  zuordnet. Wir identifizieren  $Z_j$  mit  $p(Z_j) \subset Z$  durch die injektive Beschränkung  $p|_{Z_j}$ . Mit folgender Topologie wird  $Z$  zu einem Hausdorff-raum:

$$U \subset Z \text{ offen} \Leftrightarrow u \cap Z_j \subset Z_j \text{ offen für } j = 1, 2.$$

Insbesondere ist  $Z_j \subset Z$  offen, und  $Z = Z_1 \cup Z_2$  ist eine Mannigfaltigkeit.

Man definiert  $\eta : Z \rightarrow U \cup V$  durch  $\eta|_{Z_j} := \eta_j$  und verifiziert, daß  $\eta$  eine Überlagerung ist. Wegen  $q \circ \gamma = \gamma \circ q$  für  $\gamma \in G$  setzen sich die beiden Homöomorphismen  $\gamma : Z_1 \rightarrow Z_1$  und  $\gamma : Z_2 \rightarrow Z_2$  zu einem Homöomorphismus  $\gamma : Z \rightarrow Z$  zusammen. Dadurch wird  $G$  zu einer Untergruppe von  $\mathcal{D}(\eta)$ , die  $\eta$  zu einer  $G$ -Überlagerung macht. Sei  $h$  ihr Poincaréscher Homomorphismus. Dann ist  $h \circ \varphi$  der Poincarésche Homomorphismus  $f$  der  $G$ -Überlagerung  $\eta_1$ . Entsprechend folgt  $h \circ \psi = g$ .

Zur *Eindeutigkeit*: Angenommen, es gibt zwei Homomorphismen  $h$  und  $h'$ . Beide sind Poincarésche Homomorphismen zu  $G$ -Überlagerungen  $\eta$  bzw.  $\eta'$  von  $U \cup V$ . Wegen  $h \circ \varphi = h' \circ \varphi$  und  $h \circ \psi = h' \circ \psi$  sind diese Überlagerungen über  $U$  und über  $V$  isomorph. Damit sind  $\eta$  und  $\eta'$  über  $U \cup V$  isomorph und haben denselben Poincaréschen Homomorphismus  $h = h'$ .  $\square$

**3.8.3 Freie Produkte und freie Gruppen.** Man nennt das amalgamierte Produkt des Diagramms 1 in 3.8.1 ein *freies Produkt*, wenn  $C = \{1\}$  trivial ist. In diesem Falle schreibt man  $D = A * B$  und faßt, da  $\varphi$  und  $\psi$  injektiv sind,  $A$  und  $B$  als Untergruppen von  $A * B$  auf. Im Satz von Seifert und van Kampen gilt

(1)  $\pi(U \cup V) = \pi(U) * \pi(V)$ , wenn  $U \cap V$  einfach zusammenhängt.

Man sagt: Die Gruppe  $G$  wird von der Teilmenge  $M \subset G$  *frei erzeugt*, wenn sich jede Abbildung  $\varphi : M \rightarrow H$  in eine Gruppe  $H$  zu genau einem Homomorphismus  $f : G \rightarrow H$  fortsetzen läßt. In diesem Fall heißt  $G$  *freie Gruppe*. Für  $\sharp M = 1$  ist  $G$  unendlich zyklisch. Für  $\sharp M \geq 2$  ist  $G$  nicht abelsch, da es einen Epimorphismus  $G \rightarrow S_3$  gibt: Man wählt zwei Elemente  $a \neq b$  in  $M$  und definiert  $\varphi(a) := (12)$ ,  $\varphi(b) := (23)$ ,  $\varphi(x) := (1)$  für  $x \in M \setminus \{a, b\}$ .

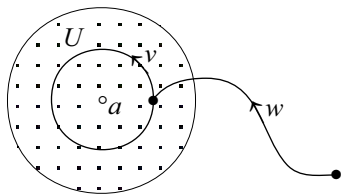
Wenn zwei Gruppen  $G$  und  $H$  von gleichmächtigen Teilmengen  $M \subset G$  und  $N \subset H$  frei erzeugt werden, sind sie isomorph.

Wenn die Gruppen  $G$  und  $H$  von  $M$  bzw.  $N$  frei erzeugt werden, wird das freie Produkt  $G * H$  von der disjunkten Vereinigung  $M \uplus N$  frei erzeugt.

**Satz.** Die Fundamentalgruppe  $\pi(\mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_r\})$  der  $r$ -fach punktierten Ebene wird von  $r$  Elementen frei erzeugt.

Im nächsten Abschnitt wird ein genaueres Ergebnis bewiesen.

**3.8.4 Punktierte Flächen.** Sei  $A \subset X$  eine lokal endliche Menge in einer zusammenhängenden Fläche. Sei  $U$  eine Scheibe um  $a \in A$  mit  $U \cap A = \{a\}$ , und sei  $v$  eine Schleife in  $U^\times := U \setminus \{a\}$ . Jeder Weg  $u$  in  $X \setminus A$  der Gestalt  $u = w \cdot v \cdot w^-$  wird *a-Schleife* genannt, siehe Fig. 3.8.4 a.



**Fig. 3.8.4 a.** Eine einfache  $a$ -Schleife  $ww^-$  beginnt mit einem Weg  $w$ , der in einer punktierten Scheibe  $U$  um  $a$  endet. Daran schließt sich der Weg  $v$  an, welcher den Kreis um  $a$  einmal positiv durchläuft. Dann kehrt die Schleife längs  $w^-$  an ihren Ausgangspunkt zurück.

Die Schleife  $u$  heißt *einfach*, wenn es eine Karte  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gibt, so daß  $h \circ v$  zu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^\times$ ,  $\gamma(t) = h(v(0)) \cdot \exp(2\pi it)$ , homotop ist. Da  $\pi(\mathbb{E}^\times)$  von  $[\gamma]$  erzeugt wird, ist die Homotopieklasse jeder  $a$ -Schleife eine Potenz der Homotopieklasse einer einfachen  $a$ -Schleife.

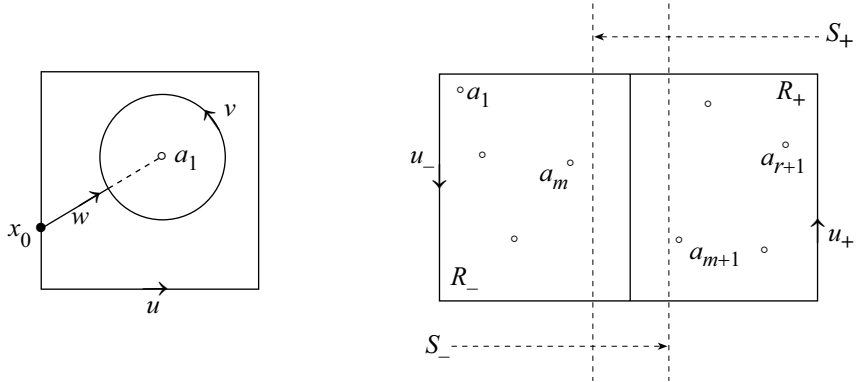
Wenn man den Basispunkt  $x_0$  längs eines Weges in  $X \setminus A$  nach  $x_1$  verschiebt, gehen (einfache)  $a$ -Schleifen mit dem Basispunkt  $x_0$  in solche mit dem Basispunkt  $x_1$  über. Insbesondere ist die Menge der Homotopieklassen aller (einfachen)  $a$ -Schleifen in  $\pi(X \setminus A, x_0)$  unter Konjugation invariant.

Hier ist eine genauere Version des Satzes in 3.8.3, die in 4.7.4 bei verzweigten Überlagerungen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  benötigt wird.

**Satz.** Seien  $a_0, \dots, a_r \in \widehat{\mathbb{C}}$  paarweise verschieden,  $1 \leq r < \infty$ . Zu jedem  $j = 0, \dots, r$  gibt es eine einfache  $a_j$ -Schleife  $u_j$ , so daß  $\pi(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_0, \dots, a_r\})$  von den Klassen  $[u_1], \dots, [u_r]$  frei erzeugt wird und  $[u_0] \cdot \dots \cdot [u_r] = 1$  gilt.

*Beweis.* Durch einen Automorphismus von  $\widehat{\mathbb{C}}$  erreichen wir  $a_0 = \infty$  und paarweise verschiedenen Realteile der Punkte  $a_1, \dots, a_r$ . Sei  $R$  ein achsenparalleles Rechteck, so daß  $A := \{a_1, \dots, a_r\}$  im Innern von  $R$  liegt; sei  $x_0$  ein Basispunkt auf dem Rande  $\partial R$ . Sei  $u$  die Schleife von und nach  $x_0$ , welche  $\partial R$  einmal positiv durchläuft. Sei  $S = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Re} z < \beta\}$  ein Streifen mit  $A \subset S$ ; dabei sind  $\alpha = -\infty$  und  $\beta = \infty$  zugelassen.

(1) In  $S \setminus A$  gibt es zu jedem Punkt  $a_j \in A$  eine einfache Schleife  $u_j$ , so daß  $\pi(S \setminus A, x_0)$  von  $[u_1], \dots, [u_r]$  frei erzeugt wird und bei eventuell geänderter Reihenfolge  $[u_1] \cdot \dots \cdot [u_r] = [u]$  gilt.



**Fig. 3.8.4 b.** Die linke Figur zeigt den Induktionsbeginn und die rechte den Induktionsschluß des Beweises zu (1).

Wir beweisen (1) durch Induktion über  $r$ . Für den Beginn bei  $r = 1$  siehe die linke Figur 3.8.4 b: Eine radiale Homotopie vom Zentrum  $a_1$  aus zeigt: Der Weg  $u$  ist zur einfachen  $a_1$ -Schleife  $u_1 = vww^-$  homotop, bei der  $w$  auf einem Strahl durch  $a_1$  liegt. Also gilt  $[u_1] = [u]$ . Es gibt einen Homöomorphismus  $(S, a_1) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ , der  $v$  in den Weg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(t) := \exp(2\pi it)$ , überführt. Die Gruppe  $\pi(\mathbb{C}^\times)$  wird durch  $[\gamma]$  frei erzeugt. Daher wird  $\pi(S \setminus \{a_1\})$  durch  $[v]$  und nach Basispunktverschiebung durch  $[u_1]$  frei erzeugt.

Schluß von  $r$  auf  $r+1$ , siehe die rechte Figur 3.8.4 b: Wir überdecken  $S$  durch zwei überlappende Streifen  $S_-$  und  $S_+$ , so daß  $S_- \cap S_+ \cap A = \emptyset$  aber  $S_- \cap A \neq \emptyset \neq S_+ \cap A$  gilt. Wir zerlegen  $R$  in zwei Rechtecke  $R_{\pm} \subset S_{\pm}$ . Wir numerieren so, daß  $A_+ := S_+ \cap A = \{a_1, \dots, a_m\}$  und  $A_- := S_- \cap A = \{a_{m+1}, \dots, a_{r+1}\}$ . Nach der Induktionsannahme gibt es einfache  $a_j$ -Schleifen  $u_j$ , so daß  $\pi(S_+ \setminus A_+)$  durch  $[u_1], \dots, [u_m]$  und  $\pi(S_- \setminus A_-)$  durch  $[u_{m+1}], \dots, [u_{r+1}]$  frei erzeugt werden, wobei  $[u_1] \cdot \dots \cdot [u_m] = [u_+]$  und  $[u_{m+1}] \cdot \dots \cdot [u_{r+1}] = [u_-]$  für die Randwege der Teilrechtecke  $R_{\pm}$  gelten. Da  $S_- \cap S_+$  keine Löcher enthält und einfach zusammenhängt, folgt nach 3.8.3, daß  $\pi(S \setminus A) = \pi(S \setminus A_+) * \pi(S \setminus A_-)$  das freie Produkt ist und somit von  $[u_1], \dots, [u_{r+1}]$  frei erzeugt wird. Weil  $u$  zu  $r_+ \cdot r_-$  homotop ist, gilt  $[u] = [u_1] \cdot \dots \cdot [u_{r+1}]$ .

Die inverse Rechteckschleife  $u^-$  ist eine einfache  $a_0$ -Schleife. Aus (1) folgt daher die Behauptung des Satzes mit einer Einschränkung: Die Reihenfolge der Punkte  $a_0, \dots, a_r$  ist im Produkt  $[u_{\sigma(0)}] \cdot \dots \cdot [u_{\sigma(r)}] = 1$  permutiert. Aber mit  $x \cdot y = xyx^{-1} \cdot x$  läßt sich die vorgegebene Reihenfolge herstellen. Denn mit  $[u_j]$  ist auch  $x \cdot [u_j] \cdot x^{-1}$  die Homotopieklasse einer einfachen  $a_j$ -Schleife.  $\square$

### 3.9 Aufgaben

- 1) Begründe, daß jeder Weg in einem Gebiet  $X \subset \mathbb{C}$  zu einem Polygonzug, d.h. zu einem stückweise linearen Weg homotop ist.
- 2) Beweise in Ergänzung zu 3.1.2, daß das Produkt  $[u] \cdot [v] := [u \cdot v]$  wohldefiniert und assoziativ ist.
- 3) (i) Seien  $u$  und  $v$  zwei stückweise stetig differenzierbare Wege in  $\mathbb{C}^\times$  mit gleichem Anfangs- und gleichem Endpunkt. Benutze die Exponentialüberlagerung, um zu zeigen: Die Wege  $u$  und  $v$  sind genau dann in  $\mathbb{C}^\times$  homotop, wenn  $\int_u dz/z = \int_v dz/z$  gilt.  
 (ii) Beschreibe die Umlaufzahl  $\text{ind}(u, a)$  einer Schleife  $u$  in  $\mathbb{C} \setminus \{a\}$  durch die  $\eta$ -Liftung  $\hat{u}$  in einer unverzweigten Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$ .
- 4) (i) Begründe: Außer Isomorphismen gibt es keine holomorphen, unverzweigten Überlagerungen  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow Y$  einer Riemannschen Fläche  $Y$ .  
 (ii) Zeige: Jede holomorphe Abbildung  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \text{Torus}$  ist konstant.
- 5) Zeige: Außer der universellen Torus-Überlagerung  $u: \mathbb{C} \rightarrow T$  gibt es bis auf Isomorphie nur folgende zusammenhängende, unverzweigte, holomorphe Überlagerungen:  
 (1) unendliche Überlagerungen  $\eta: \mathbb{C}^\times \rightarrow T$ ,  
 (2) Torusabbildungen  $T' \rightarrow T$ .  
 Alle Überlagerungen sind normal. Wie lauten ihre Deckgruppen?

- 6) Sei  $f$  eine nicht konstante meromorphe Funktion auf einem Torus  $T$ . Zeige: Die Abbildung

$$\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow T, z \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(z)} v(f, x) \cdot x,$$

ist holomorph und daher konstant, siehe Aufgabe 4(ii). Folgere die Abelsche Relation 2.3.2 für elliptische Funktionen.

- 7) Sei  $X \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet, sei  $f$  eine Laurent-Reihe an der Stelle  $a \in X$  mit dem Keim  $f_a \in \mathcal{M}$ . Sei  $Z$  die Komponente von  $\mathcal{M}$ , welche  $f_a$  enthält. Zeige:

Die Projektion  $p : Z \rightarrow X$  ist genau dann eine Überlagerung, wenn sich  $f$  längs jeder Kreiskette in  $X$  im Weierstraßschen Sinne analytisch fortsetzen läßt. Wenn dies der Fall ist und  $X$  einfach zusammenhängt, gibt es genau eine meromorphe Funktion auf  $X$ , die bei  $a$  die Laurent-Entwicklung  $f$  hat.

- 8) Sei  $f$  auf dem Gebiet  $X \subset \mathbb{C}$  meromorph. Zeige:

Wenn  $\kappa$  der Keim einer lokalen Stammfunktion von  $f$  ist, gilt dasselbe für alle Keime, die in derselben Komponente  $Z$  von  $\mathcal{M}$  liegen.

Wenn das Residuum von  $f$  an allen Polstellen verschwindet, ist  $p : Z \rightarrow X$  eine Überlagerung. In diesem Falle gilt

$$\int_u f(z) dz = e(\hat{u}(1)) - e(\hat{u}(0))$$

für jeden Integrationsweg  $u : [0, 1] \rightarrow X$ , der die Pole von  $f$  meidet, seine Liftung  $\hat{u}$  nach  $Z$  und die Auswertungsfunktion  $e$ .

Folgere: Wenn  $u$  und  $v$  in  $X$  homotop sind, ist  $\int_u f(z) dz = \int_v f(z) dz$ .

- 9) Sei  $S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ . Berechne die Fundamentalgruppe des punktierten Torus  $(S \times S) \setminus \{(1, 1)\}$ .

*Hinweis:* Sei  $S^\circ = S \setminus \{1\}$ . Überdecke den punktierten Torus durch  $S^\circ \times S$  und  $S \times S^\circ$ .

- 10) Sei  $X$  eine zusammenhängende Fläche. Zeige:

Für jeden Punkt  $a \in X$  induziert die Einbettung  $X \setminus \{a\} \hookrightarrow X$  einen Epimorphismus der Fundamentalgruppen  $\pi(X \setminus \{a\}) \rightarrow \pi(X)$ , dessen Kern der von der Homotopieklasse  $[u]$  einer einfachen  $a$ -Schleife erzeugte Normalteiler ist.

Verallgemeinere das Ergebnis auf mehrfach punktierte Flächen  $X \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ .

Wie lautet beim punktierten Torus (Aufgabe 9) die Homotopieklasse einer einfachen  $(1, 1)$ -Schleife?





## 4. Verzweigte Überlagerungen

In diesem Kapitel werden verzweigte Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Riemannschen Flächen konstruiert. Wir unterscheiden zwischen Konstruktionen von oben (4.1-4.5) und von unten (4.6-4.8), je nachdem ob die *überlagernde* Fläche  $X$  oder die *überlagerte* Fläche  $Y$  gegeben ist.

Im ersten Fall gehört zu den Vorgaben eine Untergruppe  $G < \text{Aut}(X)$ , und es soll eine *normale* Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  mit der Deckgruppe  $G$  gefunden werden. Diese Aufgabe läßt sich für kompakte  $X$  genau dann lösen, wenn  $G$  endlich ist, und zwar für  $X = \widehat{\mathbb{C}}$  durch eine rationale Funktion  $\eta$ . Bei beliebigem  $X$  wird  $Y$  erst als topologischer Raum konstruiert und dann mit *garbentheoretischen Methoden* zu einer Riemannschen Fläche gemacht. Wenn  $X$  nicht kompakt ist, genügt statt der Endlichkeit die Diskontinuität der Gruppe  $G$ .

Im zweiten Fall gehört zu den Vorgaben der Verzweigungsort  $B \subset Y$ . Mittels der Untergruppen der Fundamentalgruppe findet man alle unverzweigten Überlagerungen der punktierten Fläche  $Y \setminus B$ . Diese werden durch zusätzliche Fasern über  $B$  zu verzweigten Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  fortgesetzt. Wir benutzen diese Fortsetzung in 6.2.5, um die in 1.2.4 begonnene Konstruktion der Nullstellengebilde von Polynomen mit einfachen Wurzeln auf solche mit mehrfachen Wurzeln auszudehnen.

### 4.1 Orbitprojektionen

Zu jeder Transformationsgruppe  $G$  eines topologischen Raumes  $X$  wird eine stetige Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  konstruiert, die  $G$  als Deckgruppe besitzt. Wir benutzen dazu die Begriffe und Bezeichnungen aus 1.5.1.

**4.1.1 Quotientenprinzip.** Eine surjektive, stetige und offene Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$ , deren Fasern die  $G$ -Bahnen sind, heißt  *$G$ -Orbitprojektion*. Man nennt  $Y$  *Orbitraum*. Aus den Eigenschaften von  $\eta$  folgt direkt der

**Satz.** Wenn die stetige Abbildung  $\zeta : X \rightarrow Z$  auf jeder  $\eta$ -Faser konstant ist, gibt es genau eine stetige Abbildung  $\varphi : Y \rightarrow Z$ , so daß  $\zeta = \varphi \circ \eta$  gilt. Ist  $\zeta$  auch eine  $G$ -Orbitprojektion, so ist  $\varphi$  ein Homöomorphismus.  $\square$

**4.1.2 Existenz der Orbitprojektion.** *Zu jeder Transformationsgruppe  $G$  von  $X$  existiert eine  $G$ -Orbitprojektion  $\eta : X \rightarrow Y$ .*

*Beweis.* Sei  $Y$  die Menge der Orbits. Dann ist  $\eta : X \rightarrow Y$ ,  $\eta(x) := G(x)$  surjektiv. Man nennt  $V \subset Y$  offen, wenn  $\eta^{-1}(V) \subset X$  offen ist. Die Axiome für offene Mengen sind erfüllt,  $Y$  wird zu einem topologischen Raum und  $\eta$  zu einer stetigen Abbildung. Sie ist offen. Denn für jede offene Menge  $U \subset X$  und jedes  $g \in G$  sind alle Mengen  $g(U) \subset X$  offen. Daher ist  $\bigcup_{g \in G} g(U) = \eta^{-1}(\eta(U)) \subset X$  offen und damit auch  $\eta(U) \subset Y$ .  $\square$

Der bis auf Homöomorphie bestimmte Orbitraum wird auch mit  $X/G$  statt  $Y$  bezeichnet. Er kann selbst in scheinbar harmlosen Situationen pathologisch, z.B. nicht-hausdorffsch sein, siehe Aufgabe 4.9.3.

Der Vergleich mit 1.5.4 liefert

**4.1.3 Holomorphe Orbitprojektionen.** *Eine holomorphe Abbildung  $\eta$  zwischen zusammenhängenden Riemannschen Flächen ist genau dann eine normale Überlagerung, wenn sie eine  $\mathcal{D}(\eta)$ -Orbitprojektion ist.*  $\square$

## 4.2 Endliche Automorphismengruppen der Zahlenkugel

Wir konstruieren zu jeder endlichen Untergruppe  $G < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  eine *rationale* Orbitprojektion  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  und geben alle diese Gruppen  $G$  bis auf Konjugation an. Unter ihnen befinden sich die *Drehgruppen Platonischer Körper*. Die Operation der Gruppe  $G$  wird durch  $G$ -invariante Dreiecksparkettierungen der Sphäre veranschaulicht.

**4.2.1 Rationale Orbitprojektionen.** *Seien  $A$  und  $B$  verschiedene Bahnen einer endlichen Untergruppe  $G < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Durch*

*$D(z) := \sharp G_z$  für  $z \in A$ ,  $D(z) := -\sharp G_z$  für  $z \in B$  und  $D(z) := 0$  sonst wird auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  der Hauptdivisor  $D = (f)$  einer rationalen Funktion  $f$  definiert. Jede solche Funktion  $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist eine  $G$ -Orbitprojektion.*

*Beweis.* Die Ordnung  $\sharp G_z$  ist längs jeder Bahn konstant. Wegen der Bahngleichung 1.5.1(1) ist  $\text{gr } D = 0$ . Nach 1.6.5(2) gibt es eine rationale Funktion  $f$  mit dem Hauptdivisor  $(f) = D$ . Sie hat den Grad  $\text{gr } f = \sharp G$ . Für jedes  $g \in G$  gilt  $(f) = (f \circ g)$ , also  $c_g \cdot f = f \circ g$  mit  $c_g \in \mathbb{C}^\times$ , siehe 1.6.4(4). Jedes  $g \in G$  hat einen Fixpunkt  $a_g \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Dafür gilt  $f(a_g) = c_g f(a_g)$ . Es folgt  $c_g = 1$ , falls  $f(a_g) \neq 0, \neq \infty$  ist. Dies trifft sicher zu, wenn  $A$  und  $B$  Hauptorbits sind, denn dann gilt  $a_g \notin A \cup B$ . In diesem Fall ist  $f$  also auf allen  $G$ -Bahnen konstant, d.h. es gilt  $G < \mathcal{D}(f)$ , folglich  $\text{gr } f = \sharp G \leq \sharp \mathcal{D}(f) \leq \text{gr } f$ , also  $G = \mathcal{D}(f)$ , siehe 1.5.5.

Da  $G$  endlich ist und jedes  $g \in G$  höchstens zwei Fixpunkte hat, gibt es mindestens zwei Hauptorbits. Nach dem Bewiesenen existiert daher eine rationale  $G$ -Orbitprojektion  $\eta: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Seien nun  $A$  und  $B$  zwei beliebige Orbits. Durch Nachschalten eines Automorphismus von  $\widehat{\mathbb{C}}$  erreicht man  $\eta(A) = 0$  und  $\eta(B) = \infty$ . Es folgt  $(f) = (\eta)$  also  $f = c \cdot \eta$ , d.h. auch  $f$  ist eine Orbitprojektion.  $\square$

Aufgabe 4.9.8 bringt eine explizite Anwendung.– Der Satz stammt von F. Klein [Klei 2], S.31: „Für jede ... Gruppe von [gebrochen] linearen Substitutionen [wird] eine zugehörige rationale Funktion  $Z = R(z)$  gefunden ..., welche die verschiedenen zur Gruppe gehörigen Punktgruppen [= Bahnen] repräsentiert, indem man sie einer wechselnden Constanten gleichsetzt.“

**4.2.2 Zyklische Gruppen.** Jede zyklische Gruppe  $G < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  der Ordnung  $n < \infty$  ist zu  $C_n := \{z \mapsto \omega z : \omega \in \mu_n\}$  konjugiert. Diese Gruppe hat zwei Ausnahmebahnen  $\{0\}$  und  $\{\infty\}$ . Die Funktion  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto z^n$ , ist eine  $C_n$ -Orbitprojektion.

*Beweis.* Durch Konjugieren erreicht man  $g(\infty) = \infty$  für ein erzeugendes Element  $g$  von  $G$ . Wegen  $g^n = \text{id}$  ist  $g$  keine Translation  $z \mapsto z + b$  mit  $b \neq 0$ . Also hat  $g$  einen zweiten Fixpunkt. Durch nochmaliges Konjugieren erreicht man unter Erhalt des Fixpunktes  $\infty$ , daß  $g(0) = 0$  ist. Es folgt  $g(z) = \omega z$ , wobei  $\omega$  die Gruppe  $\mu_n$  der  $n$ -ten Einheitswurzel erzeugt. Dann ist  $z \mapsto z^n$  eine Orbitprojektion.  $\square$

**4.2.3 Nicht-zyklische Gruppen.** Jede nicht-zyklische, endliche Gruppe  $G < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  der Ordnung  $N$  hat genau drei Ausnahmearbits  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ . Für deren Mächtigkeiten  $s_j := \sharp \Sigma_j \geq 1$  und für die Ordnungen  $n_j := N/s_j$  der Standgruppen  $G_a$  von  $a \in \Sigma_j$  gibt es höchstens folgende Möglichkeiten:

Typ	$N$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
$q$ -Dieder, $q \geq 2$	$2q$	$q$	$q$	2	2	2	$q$
Tetraeder	12	6	4	4	2	3	3
Oktaeder	24	12	8	6	2	3	4
Ikosaeder	60	30	20	12	2	3	5

Sei  $g_j$  ein erzeugendes Element der Standgruppe von  $a_j \in \Sigma_j$ . Dann wird  $G$  von  $\{g_1, g_2, g_3\}$  erzeugt. Zwei Gruppen desselben Typs sind in  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  zueinander konjugiert.

*Beweis.* Nach 4.2.1 gibt es eine rationale  $G$ -Orbitprojektion  $f: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  vom Grad  $N$ . Die Zahl  $k$  der Verzweigungspunkte von  $f$  ist endlich und  $\geq 2$ . Denn bei nur einem Verzweigungspunkt  $a$  würde  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a\} \approx \mathbb{C}$  durch  $f$  unverzweigt überlagert, und es wäre  $N = 1$ . Somit gibt es  $k \geq 2$  Ausnahmearbits  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$ . Wir setzen  $n(z) := \sharp G_z$  für  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Für  $z \in \Sigma_j$  hängt  $n_j := n(z)$  nur von  $j$  ab. Wir bestimmen die Mächtigkeit der Menge

$$M := \{(z, g) : z \in \widehat{\mathbb{C}}, g \in G_z \setminus \{\text{id}\}\} \subset \widehat{\mathbb{C}} \times (G \setminus \{\text{id}\})$$

auf zweierlei Weise: Jedes Element  $g \in G \setminus \{\text{id}\}$  hat genau zwei Fixpunkte; daher ist  $\sharp M = 2(N - 1)$ . Andererseits gibt es zu  $z \in \widehat{\mathbb{C}}$  genau  $n(z) - 1$  Elemente in  $G_z \setminus \{\text{id}\}$ ; daher ist  $\sharp M = \sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} (n(z) - 1)$ . Da die Punkte  $z$  mit  $n(z) > 1$  genau die Punkte aus den Orbits  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_k$  sind, folgt  $2(N - 1) = \sharp M = \sum_1^k s_j(n_j - 1)$ . Division durch  $N = s_j n_j$  gibt

$$(1) \quad \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} = \frac{2}{N} + k - 2.$$

Wegen  $n_j \geq 2$  ist die linke Seite von (1) nicht größer als  $\frac{1}{2}k$ . Das ergibt  $k \leq 3$ . Im Fall  $k = 2$  führt (1) wegen  $1/n_j = s_j/N$  zu  $s_1 + s_2 = 2$ , also  $s_1 = s_2 = 1$ . Der Orbit  $\Sigma_1$  besteht dann aus einem einzigen Punkt  $a$ , und  $G = G_a$  wäre zyklisch. Es folgt  $k = 3$  und

$$(2) \quad \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} > 1.$$

Wir numerieren so, daß  $1 < n_1 \leq n_2 \leq n_3$  ist. Dann läßt (2) nur die in der Tabelle angegebenen Tripel  $(n_1, n_2, n_3)$  zu. Man erhält  $N$  aus (1) und  $s_j$  aus  $n_j s_j = N$ .

Sei  $G'$  die von  $\{g_1, g_2, g_3\}$  erzeugte Untergruppe. Sie besitzt drei Ausnahmeorbits  $G'(a_j)$ . Die zugehörigen Standgruppen  $G'_{a_j} = G_{a_j}$  haben die Ordnungen  $n_j$ . Da der Typ durch  $(n_1, n_2, n_3)$  bestimmt ist, haben  $G$  und  $G'$  denselben Typ und insbesondere dieselbe Ordnung. Daher ist  $G' = G$ .

Die Konjugiertheit von Gruppen desselben Typs wird aus der Eindeutigkeit universeller verzweigter Überlagerungen am Ende von 4.8.3 folgen.  $\square$

Die Gleichung (1) ist ein Spezialfall der Riemann-Hurwitzschen Formel 7.2.1(RH) für gleichverzweigte Überlagerungen.

In den Abschnitten 4.2.4-5 werden alle laut der Tabelle möglichen Typen als Untergruppen von  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  realisiert.

**4.2.4 Diedergruppen.** Die Automorphismen  $z \mapsto \omega z^{\pm 1}$  für  $\omega \in \mu_q$  bilden eine  $q$ -Diedergruppe  $D_q < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ . Ihre Ausnahmebahnen sind  $\mu_q, \mu_{2q} \setminus \mu_q$  und  $\{0, \infty\}$ .

*Beweis.* Ersichtlich ist  $D_q$  eine Gruppe mit den angegebenen Ausnahmebahnen. Nach der Tabelle kommt nur der  $q$ -Diedertyp infrage.  $\square$

**4.2.5 Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppen.** Um diese Gruppen zu realisieren, bilden wir zu jeder endlichen Menge  $T \subset \widehat{\mathbb{C}}$  die Symmetriegruppe  $\text{Sym}(T) := \{g \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) : g(T) = T\}$ . Für  $\sharp T \geq 3$  ist jedes  $g \in \text{Sym}(T)$  durch  $g|T$  eindeutig bestimmt, und  $\text{Sym}(T)$  ist daher endlich.

**Satz.** (i) Für  $T := \mu_3 \cup \{\infty\}$  ist  $\text{Sym}(T)$  eine Tetraedergruppe.– (ii) Für  $T := \mu_4 \cup \{0, \infty\}$  ist  $\text{Sym}(T)$  eine Oktaedergruppe.– (iii) Für  $\varepsilon := e^{2\pi i/5}$  und  $T := \{\varepsilon^\mu + \varepsilon^\nu : 0 \leq \mu < \nu \leq 4\} \cup \{0, \infty\}$  ist  $\text{Sym}(T)$  eine Ikosaedergruppe.

*Beweis.* Wir zeigen durch Angabe spezieller Automorphismen: Die Gruppe  $\text{Sym}(T)$  ist nicht zyklisch. Die Menge  $T$  ist ein Orbit. Die Ordnung der

Standgruppe eines Elementes von  $T$  wird von 3, 4 bzw. 5 geteilt. Nach der Tabelle kommt dann für  $\text{Sym}(T)$  nur der Tetra-, Okta- bzw. Ikosaedertyp infrage. – Die speziellen Automorphismen sind

- (i) die Drehungen  $z \mapsto \omega z$  für  $\omega \in \mu_3$  und die Doppeltransposition  $z \mapsto (z+2)/(z-1)$ , welche 1 mit  $\infty$  sowie  $e^{2\pi i/3}$  mit  $e^{\pi i/3}$  vertauscht;
- (ii) die Drehungen  $z \mapsto \omega z$  für  $\omega \in \mu_4$  und der Automorphismus  $z \mapsto (-z+i)/(z+i)$ , welcher  $0, 1, i$  und gleichzeitig  $\infty, -1, -i$  zyklisch vertauscht;
- (iii) die Drehungen  $z \mapsto \omega z$  für  $\omega \in \mu_5$ ,  $z \mapsto -1/z$  und  $g(z) := (-z + \varepsilon + \varepsilon^4)/((\varepsilon + \varepsilon^4)z + \varepsilon)$ .

Durch  $g$  werden  $0, \varepsilon + \varepsilon^4, 1 + \varepsilon^2$  zyklisch vertauscht.

Außer für  $g$  prüft man mühelos, daß die angegebenen Automorphismen zu  $\text{Sym}(T)$  gehören. Für  $g$  enthält Aufgabe 4.9.2 eine Anleitung.  $\square$

**4.2.6 Unitäre Möbius-Transformationen.** Durch die stereographische Projektion  $\pi : S^2 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  wird die Gruppe  $\text{SO}(3)$  zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  gemacht: Wir betrachten  $\mathbb{R}^3$  als euklidischen Vektorraum mit dem inneren Produkt  $\langle x, y \rangle := \sum_{\nu=1}^3 x_\nu y_\nu$  und der Norm  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ . Wir versehen die Einheitssphäre  $S^2$  mit der induzierten Metrik und übertragen sie durch  $\pi$  nach  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Dabei entsteht die *chordale Metrik*  $d$  mit

$$\begin{aligned} d(z, w)^2 &= \frac{4|z - w|^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \quad \text{für } z, w \in \mathbb{C}, \\ d(z, \infty)^2 &= \frac{4}{1 + |z|^2} \quad \text{und } d(\infty, \infty) = 0. \end{aligned}$$

Zum Beweis rechnet man mittels 1.1.2(1) nach:

$$d(\pi(x), \pi(y))^2 = 2(1 - \langle x, y \rangle) = \|x - y\|^2 \quad \text{für } x, y \in S^2.$$

Die *spezielle unitäre Gruppe*  $\text{SU}(2)$  besteht aus allen komplexen Matrizen  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $\bar{a} = d$ ,  $b = -\bar{c}$  und  $ad - bc = 1$ . Die entsprechenden Möbius-Transformationen  $z \mapsto A(z) = (az + b)/(cz + d)$  heißen *unitär*.

**Lemma.** (a) Jede unitäre Möbius-Transformation  $z \mapsto A(z)$  ist eine Isometrie, d.h.  $d(A(z), A(w)) = d(z, w)$ .

(b) Die Konjugation  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  mit  $\overline{\infty} = \infty$ , ist eine Isometrie.

(c) Jede Isometrie hat die Gestalt  $z \mapsto A(z)$  oder  $z \mapsto A(\bar{z})$  mit  $A \in \text{SU}(2)$ .

*Beweis.* (a) Wegen  $ad - bc = 1$  ist  $A(z) - A(w) = \frac{z - w}{(cz + d)(cw + d)}$ . Für

$A \in \text{SU}(2)$  gilt  $|A(z)|^2 + 1 = \frac{|z|^2 + 1}{|cz + d|^2}$ . Aus (1) folgt die Behauptung. –

(b) ist trivial. – (c) Da es zu jeder Isometrie  $\varphi$  ein  $B \in \text{SU}(2)$  mit  $\varphi(\infty) = B(\infty)$  gibt, kann man  $\varphi(\infty) = \infty$  annehmen. Dann gilt  $|\varphi(z)| = |z|$  und weiter  $|\varphi(z) - \varphi(w)| = |z - w|$ . Daher gibt es ein  $\omega \in \mathbb{C}$  mit  $|\omega| = 1$ , so daß  $\varphi(z) = \omega z$  oder  $= \omega \bar{z}$  ist.  $\square$

**Satz.** Für jedes  $T \in \text{SO}(3)$  ist  $\varphi := \pi \circ T \circ \pi^{-1}$  eine unitäre Möbius-Transformation. Die Zuordnung  $\text{SO}(3) \rightarrow \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ ,  $T \mapsto \varphi$ , ist ein Monomorphismus.

*Beweis.* Da  $\varphi$  eine Isometrie ist, gibt es nach Lemma (c) ein  $A \in \text{SU}(2)$  mit  $\varphi(z) = A(z)$  oder  $= A(\bar{z})$ . Jedenfalls ist  $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$  eine Möbius-Transformation. Da es zu jedem  $T \in \text{SO}(3)$  ein  $U \in \text{SO}(3)$  mit  $U^2 = T$  gibt, ist  $\varphi$  eine Möbius-Transformation.  $\square$

**4.2.7 Dieder.** Wir teilen die Sphäre  $S^2$  durch  $2q$  Großkreise, die durch den Nord- und Südpol laufen, in kongruente Sektoren und halbieren sie durch den Äquator. Dadurch wird  $S^2$  in  $4q$  kongruente sphärische Dreiecke zerlegt, die schachbrettartig abwechselnd schwarz und weiß gefärbt werden, siehe Figur 4.2.7. Die Innenwinkel dieser Dreiecke sind  $\pi/2$  bei den Ecken auf dem Äquator sowie  $\pi/q$  beim Nord- und Südpol. Diese Zerlegung heißt  $q$ -Diederparkettierung.

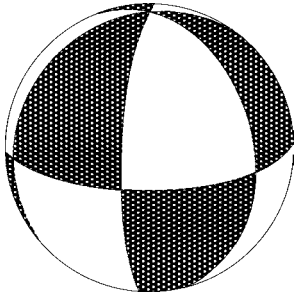


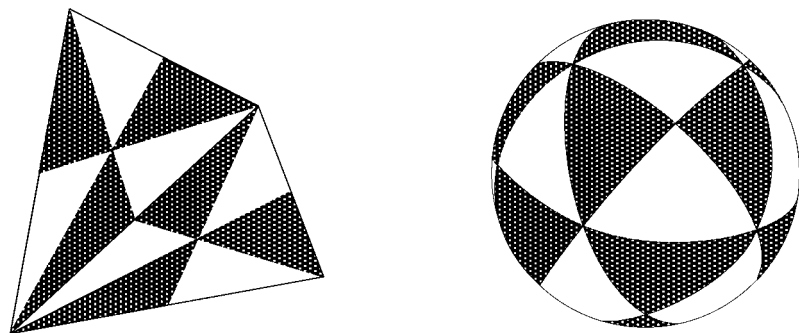
Fig. 4.2.7. Die 3-Dieder-Parkettierung, Typ (2,2,3).

Die Untergruppe  $D_q < \text{SO}(3)$  aller Drehungen, welche die Parkettierung in sich transformieren, heißt orthogonale  $q$ -Diedergruppe. Die Achsen dieser Drehungen laufen durch den Nordpol und durch die in zyklischer Folge nummerierten Ecken  $A_0, \dots, A_{2q} = A_0$  auf dem Äquator. Die Drehungen um die Pol-Achse haben die ganzzahligen Vielfachen von  $2\pi/q$  als Drehwinkel. Wir nennen diese Achse  $q$ -zählig. Die  $A_k$ -Achsen sind zweizählig. Somit hat  $D_q$  die Ordnung  $2q$ . Wir identifizieren  $S^2$  und  $\widehat{\mathbb{C}}$  durch die stereographische Projektion. Wegen Satz 4.2.6 wird  $D_q$  zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  mit den Ausnahmeorbits  $\{\text{Nordpol}, \text{Südpol}\}$ ,  $\{A_1, A_3, \dots, A_{2q-1}\}$  und  $\{A_2, A_4, \dots, A_{2q}\}$ . Sie hat den  $q$ -Dieder-Typ.

**4.2.8 Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder.** Von den fünf Platonischen Körpern Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Würfel und Dodekaeder haben die drei ersten eine aus Dreiecken zusammengesetzte Oberfläche. Wir betrachten je ein Exemplar dieser Körper, wobei das Zentrum im Ursprung und die Ecken auf der Einheitssphäre  $S^2$  liegen. Zu jedem Körper gehört eine endliche Untergruppe  $G < \text{SO}(3)$ , welche aus allen Drehungen besteht, die ihn in sich

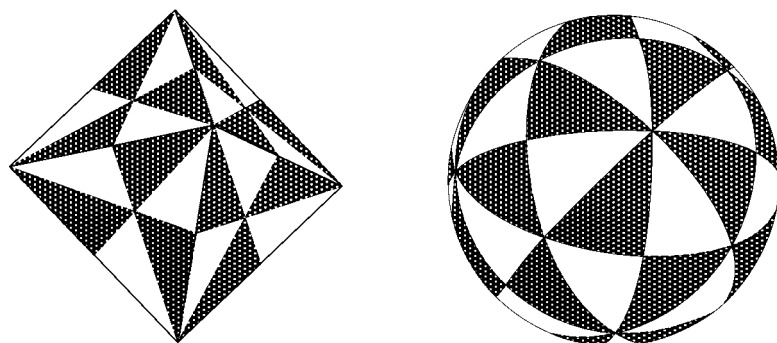
transformieren. Die entsprechenden Drehachsen laufen durch die Ecken, die Kantenmitten und die Dreieckszentren.

Um die Kantenmitten und Dreieckszentren den Ecken gleichberechtigt zur Seite zu stellen, wird jedes Dreieck der Oberfläche in 6 Teildreiecke baryzentrisch zerlegt. Die Teildreiecke werden schachbrettartig abwechselnd schwarz und weiß gefärbt, siehe die linken Figuren 4.2.8 a-c. An ihnen lassen sich die weiteren Überlegungen anschaulich verfolgen.

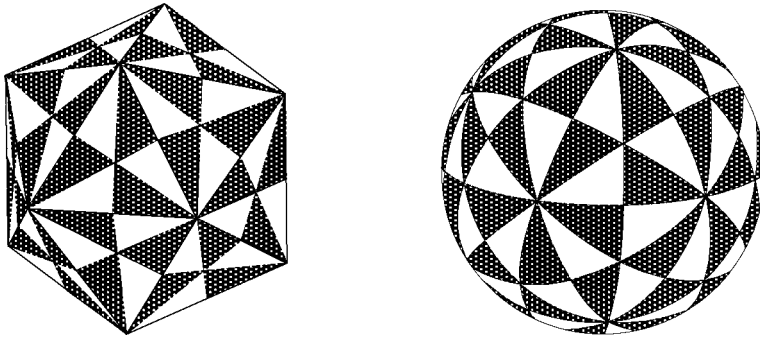


**Fig. 4.2.8 a.** links: Tetraeder mit baryzentrisch unterteilten Dreiecken;  
rechts: Tetraeder-Parkettierung der Sphäre, Typ  $(2,3,3)$ .

Die Achsen durch die Ecken sind beim Tetraeder 3-zählig, beim Oktaeder 4-zählig und beim Ikosaeder 5-zählig, weil jeweils 3, 4 bzw. 5 Kanten in einer Ecke zusammenstoßen. Die Achsen durch die Kantenmitten und die Dreieckszentren sind stets 2- bzw. 3-zählig. Die baryzentrische Unterteilung wird einschließlich ihrer Färbung durch  $G$  in sich transformiert.



**Fig. 4.2.8 b.** links: Oktaeder mit baryzentrisch unterteilten Dreiecken;  
rechts: Oktaeder-Parkettierung der Sphäre, Typ  $(2,3,4)$ .



**Fig. 4.2.8 c.** links: Ikosaeder mit baryzentrisch unterteilten Dreiecken;  
rechts: Ikosaeder-Parkettierung der Sphäre, Typ (2,3,5).

Die Kantenmitten liegen paarweise auf einer Achse. Beim Oktaeder und Ikosaeder gilt Entsprechendes für die Ecken und für die Dreieckszentren. Beim Tetraeder läuft jede Achse durch eine Ecke gleichzeitig durch das Zentrum des gegenüber liegenden Dreiecks. – Die Elemente von  $G$  lassen sich abzählen:

**Tetraeder:** Es gibt 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Dreiecke. Zu den 4 Achsen durch die Ecken gehören jeweils 2 und zu den 3 Achsen durch die Kantenmitten gehört jeweils 1 Element von  $G \setminus \{\text{id}\}$ . Hinzu kommt die Identität. Die Gruppe hat also die Ordnung  $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12$ .

**Oktaeder:** Es gibt 6 Ecken, 12 Kanten und 8 Dreiecke und jeweils halb so viele Achsen. Die zum Tetraeder analoge Rechnung ergibt die Gruppenordnung  $3 \cdot 3 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 = 24$ .

**Ikosaeder:** Es gibt 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Dreiecke. Die Gruppenordnung ist  $6 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 1 = 60$ .

Wir projizieren die baryzentrisch unterteilte Oberfläche jedes Platonischen Körpers vom Ursprung aus radial auf  $S^2$  und erhalten eine schwarz-weiß gefärbte Parkettierungen der Sphäre, welche durch  $G$  in sich transformiert wird; siehe die rechten Figuren 4.2.8 a-c. (Nach baryzentrischer Unterteilung und radialer Projektion ergibt der Würfel bzw. das Dodekaeder dieselbe Parkettierung und Gruppe wie das Oktaeder bzw. Ikosaeder.)

Jedes Teildreieck der Parkettierung ist sphärisch, d.h. seine Seiten liegen auf Großkreisen. Seine drei Ecken sind eine Körperecke, eine projizierte Kantenmitte und ein projiziertes Dreieckszentrum. Seine Innenwinkel sind  $\pi/2$  bei den Kantenmitten,  $\pi/3$  bei den Dreieckszentren und  $\pi/3$  (Tetraeder),  $\pi/4$  (Oktaeder) bzw.  $\pi/5$  (Ikosaeder) bei den Körperecken.

Wie in 4.2.6 identifizieren wir  $S^2$  mit  $\hat{\mathbb{C}}$  durch die stereographische Projektion und machen so  $G$  zu einer Untergruppe von  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ . Sie hat drei Ausnahmeorbits: die Menge der Ecken, die Menge der projizierten Kantenmitten und die Menge der projizierten Dreieckszentren. Der Typ der Gruppe  $G$  gemäß der Tabelle in 4.2.3 entspricht ihrem Platonischen Körper.



**4.2.9 Historisches.** Platon läßt Timaios, einen fiktiven Pythagoräer, im gleichnamigen Dialog vier der fünf regelmäßigen Körper beschreiben, indem er ihre begrenzenden Flächen aus Dreiecken baryzentrisch zusammensetzt. Bei den Fünfecken des Dodekaeders wurde ihm das offenbar zu kompliziert. Statt dessen schreibt er mythenbildend [Timaios, 55c]: „Es war noch eine fünfte Zusammensetzung übrig; diese benutzte Gott für das All, als er es ausmalte.“

Die Vollkommenheit der Schöpfung, die Timaios im Dialog schildert, wird dadurch begründet, daß Gott die vier Elemente durch die vier schönsten Körper gestaltet: Das Feuer wird aus Tetraedern, das Wasser aus Ikosaedern, die Erde aus Würfeln und die Luft aus Oktaedern zusammengesetzt.

Das 13. Buch der *Elemente des Euklid* enthält eine mathematische Beschreibung der regulären Körper, die an Vollständigkeit und Genauigkeit Platons Darstellung weit übertrifft.

Die gruppentheoretische Beschreibung der Platonischen Körper bis hin zur Klassifikation aller endlichen Untergruppen von  $SO(3)$  wurde durch kristallographische Ergebnisse von Hessel (1830), Bravais (1849) und andere angeregt. Sie fand durch Kleins Vorlesungen über das Ikosaeder (1884), siehe [Klei 2], weite Verbreitung.

## 4.3 Diskontinuierliche Gruppen

Diskontinuierliche Transformationsgruppen charakterisiert Klein [Klei 5], S. 341, dadurch, daß „die vermöge der Gruppe äquivalenten Punkte getrennt liegen“, während Poincaré formuliert: „*groupe discontinu*, tout groupe qui ne contient pas d’operation infinitésimal, c’est-à-dire d’operation changeant  $z$  en une quantité infiniment voisine de  $z$ “, siehe [Po] II, p.1f.

Wir betrachten nur *lokal kompakte Hausdorffräume*  $X$  und benutzen folgende Definition der

**4.3.1 Diskontinuität.** Eine Transformationsgruppe  $G$  von  $X$  heißt *diskontinuierlich*, wenn  $\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$  für jedes Kompaktum  $K \subset X$  endlich ist. Dann ist jede Standgruppe  $G_x$  endlich und jede  $G$ -Bahn lokal endlich. – Endliche Transformationsgruppen sind diskontinuierlich. Bei kompakten Räumen  $X$  ist umgekehrt jede diskontinuierliche Transformationsgruppe endlich. Schließlich gilt der

**Satz.** Der Orbitraum jeder diskontinuierlichen Transformationsgruppe  $G$  ist hausdorffsch.

*Beweis.* Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine  $G$ -Orbitprojektion. Es genügt, zu je zwei Punkten  $x, y \in X$  mit  $\eta(x) \neq \eta(y)$  Umgebungen  $U$  bzw.  $V$  anzugeben, so daß  $\eta(U) \cap \eta(V)$  leer ist. Man beginnt mit einem Kompaktum  $K$ , so daß  $x, y$  innere Punkte von  $K$  sind. Die Menge  $M := \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\}$  ist endlich. Wegen  $\eta(x) \neq \eta(y)$  ist  $g(x) \neq y$  für  $g \in M$ . Es gibt Umgebungen  $U$  von  $x$  und  $V$  von  $y$ , so daß  $g(U) \cap V = \emptyset$  für alle  $g \in M$  gilt. Man kann  $U \cup V \subset K$  annehmen. Dann ist  $g(U) \cap V$  für alle  $g \in G$  leer, weil sich  $g(K)$  und  $K$  für  $g \in G \setminus M$  nicht treffen. Daraus folgt  $\eta(U) \cap \eta(V) = \emptyset$ .  $\square$

**4.3.2 Privilegierte Umgebungen.** Sei  $G$  eine Transformationsgruppe von  $X$ . Eine Umgebung  $U$  von  $a \in X$  heißt *privilegiert*, wenn sie bezüglich der Standgruppe  $G_a$  invariant ist und wenn für jedes  $g \in G \setminus G_a$  der Durchschnitt  $U \cap g(U)$  leer ist. Durch Beschränkung entsteht aus der  $G$ -Orbitprojektion  $\eta: X \rightarrow Y$  die  $G_a$ -Orbitprojektion  $\eta|_U: U \rightarrow \eta(U)$ .

**Existenzsatz.** Wenn  $G$  diskontinuierlich operiert, besitzt jeder Punkt  $a \in X$  eine Umgebungsbasis von privilegierten Umgebungen.

*Beweis.* Sei  $W$  eine Umgebung von  $a$ , deren Hülle kompakt ist. Dann ist  $M := \{g \in G: W \cap g(W) \neq \emptyset\}$  endlich. Weil  $X$  hausdorffsch ist, gibt es eine Umgebung  $W^* \subset W$  von  $a$  und zu jedem  $g \in M \setminus G_a$  eine Umgebung  $U_g$  von  $g(a)$ , die  $W^*$  nicht trifft. Dann ist

$$V := W^* \cap \bigcap_{g \in M \setminus G_a} g^{-1}(U_g) \subset W$$

eine Umgebung von  $a$ , die für alle  $g \in G \setminus G_a$  nicht von  $g(V)$  getroffen wird. Denn  $V \cap g(V) \subset W^* \cap U_g = \emptyset$  für  $g \in M \setminus G_a$  und  $V \cap g(V) \subset W \cap g(W) = \emptyset$  für  $g \in G \setminus M$ . Der Durchschnitt  $U := \bigcap g(V)$  über alle  $g \in G_a$  hat die gewünschten Eigenschaften. Da  $W$  beliebig klein gewählt werden kann und  $U \subset W$  ist, bilden die Mengen  $U$  eine Umgebungsbasis von  $a$ .  $\square$

Die Existenz privilegierter Umgebungen garantiert nicht die Diskontinuität. Denn der Orbitraum ist eventuell nicht hausdorffsch, vgl. Aufgabe 4.9.3.

**4.3.3 Freie Operation.** Wenn  $G$  frei und diskontinuierlich auf  $X$  operiert, ist die Orbitprojektion  $\eta: X \rightarrow X/G$  eine  $G$ -Überlagerung gemäß 3.7.4.

*Beweis.* Nach 4.3.2 besitzt jeder Punkt in  $X$  eine privilegierte Umgebung  $U$ . Dann wird  $V := \eta(U)$  trivial überlagert; denn  $\eta^{-1}(V) = \bigcup_{g \in G} g(U)$ , und  $\eta$  bildet  $g(U)$  homöomorph auf  $V$  ab. Weil die  $G$ -Orbiten die  $\eta$ -Fasern sind, handelt es sich um eine  $G$ -Überlagerung.  $\square$

**4.3.4 Holomorphe Deckgruppen.** Die Deckgruppe  $\mathcal{D}$  jeder offenen holomorphen Abbildung  $\eta: X \rightarrow Y$  zwischen zusammenhängenden Flächen ist diskontinuierlich.

*Beweis.* Sei  $K \subset X$  kompakt. Angenommen  $\{g \in \mathcal{D}: g(K) \cap K \neq \emptyset\}$  ist unendlich. Dann gibt es Folgen  $(g_n)$  in  $\mathcal{D}$  sowie  $(a_n)$  und  $(b_n)$  in  $K$ , so daß  $g_n(a_n) = b_n$  ist; dabei sind alle  $g_n$  paarweise verschieden. Nach Übergang zu einer Teilfolge existieren  $a := \lim a_n$  und  $b := \lim b_n$  in  $K$ . Wegen  $\eta(a_n) = \eta(b_n)$  ist  $\eta(a) = \eta(b) =: c$ . Es gibt Scheiben  $(U_a, a)$ ,  $(U_b, b)$  und  $(V, c)$ , so daß die Beschränkungen  $\eta: (U_a, a) \rightarrow (V, c)$  und  $\eta: (U_b, b) \rightarrow (V, c)$  Windungsabbildungen und  $U_a, U_b$  Komponenten von  $\eta^{-1}(V)$  sind, siehe Satz 1.4.1. Für fast alle  $n$  ist  $a_n \in U_a$  und  $b_n \in U_b$ , also  $g_n(U_a) \cap U_b \neq \emptyset$ , somit  $g_n(U_a) = U_b$ , insbesondere  $g_n(a) = b$ . Aber  $\{g \in \mathcal{D}: g(a) = b\}$  ist nach der Folgerung in 1.5.3 endlich.  $\square$

## 4.4 Komplexe Mannigfaltigkeiten und Garben

Um bei einer Riemannschen Fläche den Orbitraum einer diskontinuierlichen Automorphismengruppe zu einer Riemannschen Fläche machen, eignen sich *Garben* zur Definition der holomorphen Struktur besser als Atlanten. Wir benutzen die Gelegenheit, um gleichzeitig *Riemannsche Flächen* zu *n-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten* zu verallgemeinern. Denn auch beim Studium der Flächen werden später höher dimensionale Mannigfaltigkeiten herangezogen: *projektive Räume* in Kapitel 8 und 9, *höher dimensionale Tori* und *symmetrische Produkte* von Flächen in Kapitel 14 und 15.

**4.4.1 Mannigfaltigkeiten.** Wir betrachten den komplexen Zahlenraum  $\mathbb{C}^n$ , dessen Punkte  $z = (z_1, \dots, z_n)$   $n$ -Tupel komplexer Zahlen sind. Sei  $U \subset \mathbb{C}^n$  offen. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *holomorph*, wenn  $f$  stetig und in jeder Variablen  $z_k$  holomorph ist. Dazu äquivalent ist: In der Umgebung eines jeden Punktes  $a \in U$  läßt sich  $f$  als konvergente Potenzreihe in  $(z_1 - a_1), \dots, (z_n - a_n)$  darstellen.

Die Definition der Riemannschen Flächen in 1.1.1 läßt sich zur Definition *n-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten* verallgemeinern, indem man  $\mathbb{C}$  durch  $\mathbb{C}^n$  ersetzt und als klassisch holomorphe Funktionen die gerade definierten holomorphen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher benutzt. *Holomorphe Abbildungen* werden analog zu 1.1.3 definiert.

Man kann statt  $\mathbb{C}^n$  den  $\mathbb{R}^n$  und statt der holomorphen die  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen nehmen und erhält dann die Definition der  *$C^k$ -differenzierbaren Mannigfaltigkeiten*. Dabei sind die Fälle  $k = \infty$  (beliebig oft differenzierbar) und  $k = \omega$  (reell-analytisch) eingeschlossen.

**4.4.2 Garben.** Eine (*Funktionen*-) *Garbe*  $\mathcal{F}$  auf dem topologischen Raum  $X$  ordnet jeder offenen Menge  $U \subset X$  einen Ring  $\mathcal{F}(U)$  stetiger Funktionen  $U \rightarrow \mathbb{C}$  zu, welche alle konstanten Funktionen umfaßt und daher eine  $\mathbb{C}$ -Algebra ist. Dabei wird folgendes *Lokal-Global-Prinzip* verlangt:

Für jede Familie  $\{U_j\}$  von offenen Mengen gilt:

$$f \in \mathcal{F}(\bigcup U_j) \Leftrightarrow \forall j \ f|_{U_j} \in \mathcal{F}(U_j).$$

*Beispiel.*  $\mathcal{F}(U) =: \mathcal{C}(U)$  besteht aus *allen* stetigen Funktionen.

Ein topologischer Raum  $X$  zusammen mit einer Garbe  $\mathcal{F}$  wird *geringster Raum*  $(X, \mathcal{F})$  genannt. Für jede offene Menge  $U \subset X$  bezeichnet  $\mathcal{F}|_U$  die Einschränkung von  $\mathcal{F}$  auf die offenen Teilmengen von  $U$ . Statt  $(U, \mathcal{F}|_U)$  schreiben wir auch  $(U, \mathcal{F})$ .

Ein *Morphismus*  $\varphi : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$  zwischen geringsten Räumen ist eine stetige Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  mit folgender Eigenschaft: Für jede offene Menge  $V \subset Y$  und jedes  $g \in \mathcal{G}(V)$  gilt  $g \circ \varphi \in \mathcal{F}(g^{-1}(V))$ . Die Hintereinanderschaltung von Morphismen ist ein Morphismus. Unter einem *Isomorphismus* versteht man einen bijektiven Morphismus  $\varphi$ , dessen Umkehrung  $\varphi^{-1}$

auch ein Morphismus ist. Isomorphismen  $(X, \mathcal{F}) \rightarrow (X, \mathcal{F})$  heißen *Automorphismen*. Sie bilden mit der Hintereinanderschaltung als Verknüpfung die Gruppe  $\text{Aut}(X, \mathcal{F})$ .

**4.4.3 Die holomorphe Strukturgarbe**  $\mathcal{O}$  einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  ordnet jeder offenen Menge  $U \subset X$  den Ring  $\mathcal{O}(U)$  aller holomorphen Funktionen  $U \rightarrow \mathbb{C}$  zu. Man schreibt auch  $\mathcal{O}_X$  statt  $\mathcal{O}$ . Für komplexe Mannigfaltigkeiten  $X$  und  $Y$  sind die Morphismen  $(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  genau die holomorphen Abbildungen.

**Satz.** *Ein geringter Hausdorffraum  $(X, \mathcal{F})$  ist genau dann eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, wenn er zu  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$  lokal isomorph ist, d.h. wenn es zu jedem Punkt in  $X$  eine Umgebung  $U$  und eine offene Menge  $V \subset \mathbb{C}^n$  gibt, so daß  $(U, \mathcal{F})$  und  $(V, \mathcal{O})$  isomorph sind.*

*Beweis.* Bei einer komplexen Mannigfaltigkeit  $(X, \mathcal{F})$  ist jede holomorphe Karte  $(U, h)$  ein Isomorphismus  $h : (U, \mathcal{F}) \rightarrow (h(U), \mathcal{O})$ . Wenn umgekehrt  $(X, \mathcal{F})$  zu  $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$  lokal isomorph ist, läßt sich  $X$  durch offene Mengen  $U_j$  überdecken, zu denen Isomorphismen  $h_j : (U_j, \mathcal{F}) \rightarrow (V_j, \mathcal{O})$  auf offene Mengen  $V_j \subset \mathbb{C}^n$  gehören. Dann ist  $\{(U_j, h_j)\}$  ein holomorpher Atlas, welcher  $X$  zu einer komplexen Mannigfaltigkeit mit der holomorphen Strukturgarbe  $\mathcal{F}$  macht.  $\square$

**4.4.4 Bildgarben.** Sei  $(X, \mathcal{F})$  ein geringter Raum und  $\eta : X \rightarrow Y$  eine surjektive stetige Abbildung auf einen topologischen Raum  $Y$ . Mit der Garbe  $\mathcal{C}$  der stetigen Funktionen auf  $Y$  wird die *Bildgarbe*  $\mathcal{F}_\eta$  auf  $Y$  durch

$\mathcal{F}_\eta(V) := \{f \in \mathcal{C}(V) : f \circ \eta \in \mathcal{O}(\eta^{-1}(V))\}$  für jede offene Menge  $V \subset Y$  definiert. Das Lokal-Global-Prinzip ist erfüllt, und  $\eta : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{F}_\eta)$  ist ein Morphismus.

(1) *Bei jeder surjektiven offenen, holomorphen Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen Riemannschen Flächen ist die Bildgarbe  $\mathcal{O}_\eta = \mathcal{O}_Y$  die holomorphe Strukturgarbe.*

*Beweis.* Aus der Holomorphie von  $\eta$  folgt  $\mathcal{O}_Y \subset \mathcal{O}_\eta$ . Umgekehrt gilt  $\mathcal{O}_\eta \subset \mathcal{O}_Y$  wegen 1.3.8.  $\square$

**Lemma.** *Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  die Orbitprojektion einer Gruppe  $G < \text{Aut}(X, \mathcal{F})$ . Für jede offene Menge  $U \subset X$  und die Einschränkung  $\varphi := \eta|_U : U \rightarrow V := \eta(U)$  gilt  $\mathcal{F}_\varphi = \mathcal{F}_\eta|_V$ .*

*Beweis.* Sei  $W \subset V$  offen. Offenbar ist  $\mathcal{F}_\eta(W) \subset \mathcal{F}_\varphi(W)$ . – Sei  $f \in \mathcal{F}_\varphi(W)$ , also  $f \circ \eta \in \mathcal{F}(\eta^{-1}(W) \cap U)$ . Dann ist auch  $f \circ \eta = f \circ \eta \circ g^{-1} \in \mathcal{F}(\eta^{-1}(W) \cap g(U))$  und nach dem Lokal-Global-Prinzip  $f \circ \eta \in \mathcal{F}(\eta^{-1}(W))$  wegen  $\eta^{-1}(W) = \bigcup_{g \in G} (\eta^{-1}(W) \cap g(U))$ . Also gilt  $\mathcal{F}_\varphi(W) \subset \mathcal{F}_\eta(W)$ .  $\square$

**Satz.** Sei  $G < \text{Aut}(X, \mathcal{O})$  eine diskontinuierliche Transformationsgruppe der komplexen Mannigfaltigkeit  $X$ . Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  die Orbitprojektion. Zu jedem  $b \in Y := X/G$  gebe es ein  $a \in \eta^{-1}(b)$ , eine privilegierte Umgebung  $U$  von  $a$  und eine  $G_a$ -Orbitprojektion  $\varphi : U \rightarrow V$  auf eine offene Menge  $V \subset \mathbb{C}^n$ , so daß die Bildgarbe  $\mathcal{O}_\varphi$  die holomorphe Strukturgarbe  $\mathcal{O}$  auf  $V$  ist. Dann ist  $(Y, \mathcal{O}_\eta)$  eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Nach 4.3.1 ist der Orbitraum  $Y$  hausdorffsch. Nach dem Lemma ist  $\mathcal{O}_\eta|_{\eta(U)} = \mathcal{O}_{\eta|U}$ . Die Beschränkung  $\eta|U : U \rightarrow \eta(U)$  ist wie  $\varphi$  eine  $G_a$ -Orbitprojektion. Daher gibt es genau einen Isomorphismus  $\psi : (\eta(U), \mathcal{O}_\eta) \rightarrow (V, \mathcal{O})$  mit  $\varphi = \psi \circ \eta|U$ . Mit Satz 4.4.3 folgt die Behauptung.  $\square$

**4.4.5 Freie holomorphe Operationen.** Sei  $G$  eine diskontinuierliche Automorphismengruppe der komplexen Mannigfaltigkeit  $(X, \mathcal{O})$ , welche frei operiert. Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  die Orbitprojektion. Dann ist  $(Y, \mathcal{O}_\eta)$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, und  $\eta$  ist lokal biholomorph.

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus Satz 4.4.4. Denn die Voraussetzung dieses Satzes ist erfüllt, weil alle Standgruppen  $G_a$  trivial sind.  $\square$

**4.4.6 Höher dimensionale Tori.** Wir betrachten einen  $n$ -dimensionalen komplexen Vektorraum  $V$ . Mit einem Vektorraum-Isomorphismus  $V \cong \mathbb{C}^n$  überträgt man die holomorphe Struktur von  $\mathbb{C}^n$  nach  $V$  und macht  $V$  zu einer komplexen Mannigfaltigkeit. Sei  $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$  eine Basis des reellen Vektorraums  $V$ . Die additive Untergruppe

$$\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \dots + \mathbb{Z}\omega_{2n}$$

heißt *Gitter vom Rang  $2n$* . Sie operiert durch  $z \mapsto z + \omega$ , für  $z \in V, \omega \in \Omega$  holomorph, frei und diskontinuierlich auf  $V$ . Analog zu 1.2.6 stellen wir jedes  $z \in V$  eindeutig als  $\sum_{j=1}^{2n} t_j \omega_j$  mit reellen  $t_j$  dar. Die *Torusprojektion*

$$\eta : V \rightarrow T := S^1 \times \dots \times S^1, \quad \sum t_j \omega_j \mapsto (\exp(2\pi i t_1), \dots, \exp(2\pi i t_n)),$$

ist ein Epimorphismus der additiven Gruppen mit dem Kern  $\Omega$ , also eine  $\Omega$ -Orbitprojektion. Satz 4.4.5 liefert die Verallgemeinerung des Torussatzes 1.2.6:

**Satz.** Auf  $T$  gibt es genau eine holomorphe Struktur, so daß  $\eta$  eine unverzweigte normale Überlagerung mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta) = \Omega$  ist.  $\square$

Die holomorphe Struktur des Torus  $T$  hängt vom Gitter  $\Omega$  ab, siehe 3.3.2 für  $n = 1$ . Für  $n \geq 2$  gibt es krasse Unterschiede: Auf manchen Tori sind alle meromorphen Funktionen konstant. Andere, die sogenannten *Abelschen Varietäten*, zu denen die Periodentori kompakter Flächen gehören (siehe Kapitel 14 und 15), besitzen viele nicht-konstante meromorphe Funktionen.

## 4.5 Orbitflächen

Bei einer Riemannschen Fläche ist die Bildgarbe auf dem Orbitraum einer diskontinuierlichen Automorphismengruppe stets eine holomorphe Strukturgarbe. Zum Beweis benötigen wir die

**4.5.1 Linearisierung.** Sei  $G$  eine diskontinuierliche Automorphismengruppe der zusammenhängenden Fläche  $X$ . Nach 4.3.1 hat jede Standgruppe  $G_a$  von  $a \in X$  eine endliche Ordnung  $n$ . Die Ableitung  $G_a \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $g \mapsto g'(a)$ , ist ein Homomorphismus, und aus  $g^n = \text{id}$  folgt  $g'(a) \in \mu_n$ .

**Lemma.** *Es gibt eine privilegierte Umgebung  $U$  von  $a$  und eine Karte  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (1)  $h \circ g(x) = g'(a) \cdot h(x)$  für  $g \in G_a$  und  $x \in U$ .
- (2)  $U \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $x \mapsto h(x)^n$ , ist eine  $G_a$ -Orbitprojektion.
- (3) Die Bildgarbe  $\mathcal{O}_{h^n}$  ist die holomorphe Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{\mathbb{E}}$ .

*Beweis.* (1) Sei  $(S, k)$  eine Karte von  $X$  mit  $k(a) = 0$ . Nach 4.3.2 gibt es eine privilegierte Umgebung  $W \subset S$  von  $a$ . Die Funktion

$$(4) \quad h : (W, a) \rightarrow (\mathbb{C}, 0), \quad h(z) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G_a} \frac{k \circ g(z)}{s'(a)},$$

ist holomorph und erfüllt (1) für alle  $x \in W$ . Wegen  $(h \circ k^{-1})'(0) = 1$  wird eine kleinere Umgebung  $U$  von  $a$  durch  $h$  biholomorph auf eine Kreisscheibe  $\mathbb{E}_r$  vom Radius  $r$  abgebildet. Wir ersetzen  $h$  durch  $h/r$  und erreichen  $r = 1$ . Dabei bleibt (1) erhalten. Wegen  $|g'(a)| = 1$  und (1) folgt  $g(U) = U$  für alle  $g \in G_a$ . Wegen  $U \subset W$  gilt  $g(U) \cap U \subset g(W) \cap W = \emptyset$  für  $g \in G \setminus G_a$ . Also ist  $U$  privilegiert.

(2) Sei  $g \in G_a$  und  $g'(a) = 1$ . Aus (1) folgt dann  $g|U = \text{id}$ , also  $g = \text{id}$  nach dem Identitätssatz. Somit ist  $G_a \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $g \mapsto g'(a)$ , injektiv und wegen  $\sharp G_a = n$  bijektiv. Wegen (1) sind die  $h^n$ -Fasern die  $G_a$ -Bahnen. – (3) folgt aus (2) und 4.4.4(1).  $\square$

**4.5.2 Orbitprojektionen Riemannscher Flächen.** *Bei jeder diskontinuierlichen Automorphismengruppe einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$  ist der Orbitraum  $(Y, \mathcal{O}_\eta)$  mit der Bildgarbe der Orbitprojektion  $\eta : X \rightarrow Y$  eine Riemannsche Fläche.*

*Beweis.* Die Behauptung folgt aus den Sätzen 4.3.1 und 4.4.4. Denn die Voraussetzung in 4.4.4 ist wegen der Linearisierung 4.5.1 erfüllt.  $\square$

Der Satz reduziert das Studium der normalen Abbildungen  $X \rightarrow Y$  auf die Beschreibung der diskontinuierlichen Untergruppen von  $\text{Aut}(X)$ . Für  $X = \mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$  wurden diese Gruppen in 2.6.3 bzw. 4.2 explizit angegeben. Für die obere Halbebene  $X = \mathbb{H}$  gibt es bisher keine vollständige Klassifikation. Wir betrachten interessante Beispiele in Kapitel 5 und 11.

**4.5.3 Faktorisierung von Orbitprojektionen.** Sei  $H$  eine diskontinuierliche Gruppe von Automorphismen der zusammenhängenden Fläche  $X$ . Dann ist jede Untergruppe  $G < H$  diskontinuierlich. Seien  $\eta : X \rightarrow Y$  und  $\zeta : X \rightarrow Z$  die holomorphen Orbitprojektionen zu  $G$  bzw.  $H$ . Längs jeder  $\eta$ -Faser ist  $\zeta$  konstant. Nach 1.3.8 gibt es genau eine holomorphe Abbildung  $\varphi : Y \rightarrow Z$ , so daß  $\zeta = \varphi \circ \eta$  ist.

**Satz.** Wenn  $G \triangleleft H$  ein Normalteiler ist, gibt es genau einen Homomorphismus  $p : H \rightarrow \text{Aut}(Y)$ ,  $h \mapsto \hat{h}$ , mit  $\eta \circ h = \hat{h} \circ \eta$ . Dabei ist  $\text{Kern}(p) = G$ ,  $\text{Bild}(p) = \mathcal{D}(\varphi)$ , und  $\varphi$  ist normal.

*Beweis.* Wegen  $G \triangleleft H$  haben  $\eta$  und  $\eta \circ h$  für jedes  $h \in H$  dieselben Fasern. Nach 1.3.8 folgt die erste Behauptung sowie  $\text{Kern}(p) = G$  und  $\text{Bild}(p) \subset \mathcal{D}(\varphi)$ . Sei  $y_1, y_2 \in Y$  und  $\varphi(y_1) = \varphi(y_2)$ . Man wählt  $x_1, x_2 \in X$  so, daß  $\eta(x_j) = y_j$  ist. Wegen  $\zeta(x_1) = \zeta(x_2)$  und  $\mathcal{D}(\zeta) = H$  gilt  $x_2 = h(x_1)$  für ein  $h \in H$ , also  $y_2 = \hat{h}(y_1)$ . Daraus folgt die Normalität von  $\varphi$  und  $\mathcal{D}(\varphi) \subset \text{Bild}(p)$ .  $\square$

Die Abbildung  $\varphi$  ist auch dann eine Überlagerung, wenn  $G < H$  kein Normalteiler ist, siehe 4.6.2.

**4.5.4 Ausblick.** Wenn eine Automorphismengruppe auf einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension  $\geq 2$  diskontinuierlich aber nicht mehr frei operiert, ist der Orbitraum ein *normaler komplexer Raum*, aber im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit, weil die nicht-trivialen Standgruppen Singularitäten hervorrufen können. Für ein Beispiel siehe Aufgabe 4.9.7.– Das Ergebnis von 4.5.2 bleibt gültig, wenn man statt Riemannscher Flächen normale komplexe Räume betrachtet. Der Beweisgang läßt sich übertragen, siehe [Cn] II, no. 43.

## 4.6 Verzweigungen

Mit diesem Paragraphen beginnt die Konstruktion verzweigter holomorpher Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$ , wenn  $Y$  und der Verzweigungsort  $B$  vorgegeben sind. Wir benutzen die Klassifikation unverzweigter Überlagerungen der punktierten Scheibe  $\mathbb{E}^\times$  (3.3.3), um Überlagerungen von  $Y \setminus B$  durch Einfügen von Windungspunkten zu vervollständigen.– Im folgenden sind alle Überlagerungen holomorph.

**4.6.1 Verzweigte Überlagerungen der Kreisscheibe.** Jede zusammenhängende Überlagerung  $\eta : (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ , welche höchstens über 0 verzweigt, ist eine Windungsabbildung: Zu  $n := v(\eta, a)$  gibt es einen Isomorphismus

$$h : (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0) \text{ mit } \eta = h^n.$$

*Beweis.* Nach 3.3.3 ist die Beschränkung  $\eta : X^\times := X \setminus \eta^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{E}^\times$  zu einer Exponential- oder Potenzfunktion isomorph. Für jede Scheibe  $V$  um 0 in  $\mathbb{E}$ , welche elementar überlagert wird, ist also  $\eta^{-1}(V \setminus \{0\})$  und folglich auch  $U := \eta^{-1}(V)$  zusammenhängend. Nach 1.4.5 ist  $\eta : (U, a) \rightarrow (V, 0)$

eine Windungsabbildung. Die Exponentialfunktion scheidet daher aus, und es gibt einen Isomorphismus  $h : X^\times \rightarrow \mathbb{E}^\times$  mit  $\eta|_{X^\times} = h^n$ , der sich zu  $h : (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  fortsetzen läßt.  $\square$

**4.6.2 Faktorisierung von Überlagerungen.** Seien  $\eta : X \rightarrow Y$  und  $\varphi : Y \rightarrow Z$  zwei holomorphe Abbildungen. Wenn  $\eta$  surjektiv und  $\zeta := \varphi \circ \eta$  eine Überlagerung ist, sind  $\eta$  und  $\varphi$  ebenfalls Überlagerungen.

*Beweis.* Sei  $W \subset Z$  eine Scheibe, welche durch  $\zeta$  elementar überlagert wird. Sei  $V \subset Y$  eine Komponente von  $\varphi^{-1}(W)$ , und sei  $U \subset X$  eine Komponente von  $\eta^{-1}(V)$ . Wegen  $\eta(X) = Y$  genügt es zu zeigen, daß die Beschränkungen  $\eta' : U \rightarrow V$  und  $\varphi' : V \rightarrow W$  von  $\eta$  bzw.  $\varphi$  Windungsabbildungen sind.

Wegen  $\zeta(U) \subset W$  liegt  $U$  in einer Komponente  $U'$  von  $\zeta^{-1}(W)$ . Ihr Bild  $\eta(U')$  liegt in einer Komponente von  $\varphi^{-1}(W)$ . Wegen  $U \subset U'$  ist  $V$  diese Komponente. Dann ist  $U = U'$ , und  $\zeta' := \varphi' \circ \eta' : U \rightarrow V \rightarrow W$  ist eine Windungsabbildung. Insbesondere ist  $\zeta'$  endlich. Nach Satz 1.4.4(ii) gilt dasselbe für  $\eta'$  und  $\varphi'$ . Wie  $\zeta'$  ist  $\varphi'$  höchstens über dem Zentrum  $c$  von  $W$  verzweigt, also wegen 4.6.1 eine Windungsabbildung. Dann ist  $V$  eine Scheibe mit einem Zentrum  $b$ . Die Beschränkung  $\eta'$  ist höchstens über  $b$  verzweigt und somit auch eine Windungsabbildung.  $\square$

**4.6.3 Hintereinanderschaltung von Überlagerungen.** Im allgemeinen ist die Hintereinanderschaltung zweier verzweigter Überlagerungen keine Überlagerung, siehe Aufgabe 4.9.9. Wir benötigen aber folgenden

**Satz.** Ist  $\eta : X \rightarrow Y$  eine unverzweigte und  $\varphi : Y \rightarrow Z$  eine eventuell verzweigte Überlagerung, so ist  $\varphi \circ \eta$  eine Überlagerung.

*Beweis.* Wir zeigen: Wenn eine Scheibe  $(W, c)$  durch  $\varphi$  elementar überlagert wird, dann auch durch  $\varphi \circ \eta$ . Sei  $a \in (\varphi \circ \eta)^{-1}(c)$  und  $b := \eta(a)$ . Es gibt eine Scheibe  $(V, b)$ , so daß  $\varphi : (V, b) \rightarrow (W, c)$  eine Windungsabbildung ist. Die Scheibe  $V$  wird durch  $\eta$  trivial überlagert. Für eine Scheibe  $(U, a)$  ist daher  $\eta : (U, a) \rightarrow (V, b)$  ein Isomorphismus, also  $\varphi \circ \eta : (U, a) \rightarrow (V, b) \rightarrow (W, c)$  eine Windungsabbildung.  $\square$

**4.6.4 Fortsetzung von Abbildungen.** Der topologische Raum  $Z$  heißt an der Stelle  $c \in Z$  *unzerlegbar*, wenn es eine Umgebungsbasis  $\{W\}$  von  $c$  gibt, so daß  $W \setminus \{c\}$  stets zusammenhängt. Mannigfaltigkeiten der Dimension  $\geq 2$  sind überall unzerlegbar. Folgendes Lemma mit seinen Konsequenzen wird in den nächsten Abschnitten und später (z. B. in 6.2.5 und 12.4.2) benutzt.

**Lemma.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung. Sei  $Z$  ein bei  $c \in Z$  unzerlegbarer Hausdorffraum. Dann läßt sich jede stetige Abbildung  $\varphi : Z \setminus \{c\} \rightarrow X$  stetig nach  $c$  fortsetzen, sobald dies für  $\eta \circ \varphi$  gilt. Bei einer Riemannschen Fläche  $Z$  ist mit  $\varphi$  auch die Fortsetzung holomorph.

*Beweis.* Sei  $\psi$  die Fortsetzung von  $\eta \circ \varphi$ . Sei  $V$  eine Scheibe um  $b := \psi(c)$ , welche elementar überlagert wird. Dann ist  $\eta^{-1}(V)$  die disjunkte Vereinigung



von Scheiben  $U_a$  um die Faserpunkte  $a \in \eta^{-1}(b)$ , und jede Beschränkung  $\eta: U_a \rightarrow V$  ist eine Windungsabbildung. Es gibt eine Umgebung  $W$  von  $c$ , so daß  $\psi(W) \subset V$  gilt und  $W \setminus \{c\}$  zusammenhängt. Dann gibt es genau ein  $a$  mit  $\varphi(W \setminus \{c\}) \subset U_a$ , und  $\varphi$  wird durch  $\varphi(c) := a$  stetig fortgesetzt. Denn zu jeder Umgebung  $U$  von  $a$  in  $U_a$  gibt es, da  $\eta: U_a \rightarrow V$  abgeschlossen ist, eine Umgebung  $V'$  von  $b$  in  $V$  mit  $\eta^{-1}(V') \cap U_a \subset U$ . Es gibt eine Umgebung  $W'$  von  $c$  in  $W$  mit  $\psi(W') \subset V'$ . Dann ist  $\varphi(W') \subset U$ . – Die Holomorphie der Fortsetzung folgt aus dem Hebbarkeitssatz.  $\square$

Zwei Überlagerungen  $\eta_j: X_j \rightarrow Y$  heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus  $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$  mit  $\eta_1 = \eta_2 \circ \varphi$  gibt. – Sei  $B \subset Y$  lokal endlich.

**Erste Folgerung.** *Zwei Überlagerungen  $\eta_j: X_j \rightarrow Y$  sind isomorph, sobald ihre Beschränkungen  $\eta'_j: X_j \setminus \eta_j^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$  isomorph sind.*  $\square$

**Zweite Folgerung.** *Jede Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  hat dieselbe Deckgruppe wie ihre Beschränkung  $\eta': X \setminus \eta^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$ . Wenn  $\eta'$  normal ist, gilt dasselbe für  $\eta$ .*

*Beweis.* Nach dem Lemma läßt sich jedes  $g' \in \mathcal{D}(\eta')$  zu  $g \in \mathcal{D}(\eta)$  eindeutig fortsetzen. Für die Normalität genügt zu zeigen: Zu je zwei Punkten  $a_1, a_2 \in X$  mit  $\eta(a_1) = \eta(a_2) =: b \in B$  gibt es ein  $g \in \mathcal{D}(\eta)$  mit  $g(a_1) = a_2$ . Zu einer elementar überlagerten Scheibe  $(V, b)$  gibt es zwei Scheiben  $(U_j, a_j)$ , so daß die Beschränkungen von  $\eta$  Windungsabbildungen  $(U_j, a_j) \rightarrow (V, b)$  sind. Zu  $x \in U_1 \setminus \{a_1\}$  gibt es ein  $g' \in \mathcal{D}(\eta')$  mit  $g'(x) \in U_2$ . Für die Fortsetzung  $g \in \mathcal{D}(\eta)$  gilt dann  $g(U_1) = U_2$ , insbesondere  $g(a_1) = a_2$ .  $\square$

**4.6.5 Fortsetzung von Überlagerungen.** Sei  $Y$  eine zusammenhängende Fläche und  $B \subset Y$  lokal endlich. Eine Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  heißt *Fortsetzung* der Überlagerung  $\eta': X' \rightarrow Y \setminus B$ , wenn  $X' \subset X$  und  $\eta' = \eta|_{X'}$  ist. Dann ist  $X' = X \setminus \eta^{-1}(B)$ , und nach 4.6.4 ist  $\eta$  durch  $\eta'$  eindeutig bestimmt. Nicht jede Überlagerung von  $Y \setminus B$  kann fortgesetzt werden, wie die Exponentialüberlagerung  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  zeigt.

**Satz.** *Eine unverzweigte Überlagerung  $\eta': X' \rightarrow Y \setminus B$  läßt sich zu einer eventuell verzweigten Überlagerung von  $Y$  fortsetzen, wenn es um jeden Punkt  $b \in B$  eine Scheibe  $V$  gibt, so daß für jede Komponente  $U$  von  $\eta'^{-1}(V)$  die Beschränkung  $\eta': U \rightarrow V \setminus B$  von  $\eta$  endlich ist. Insbesondere existiert die Fortsetzung für jede endliche Abbildung  $\eta'$ .*

*Beweis.* Da das Fortsetzungsproblem bezüglich  $Y$  lokal ist, dürfen wir  $(Y, B) = (\mathbb{E}, 0)$  annehmen. Ferner kann  $X'$  als zusammenhängend vorausgesetzt werden; denn  $\eta'$  läßt sich fortsetzen, wenn dies für die Beschränkungen auf alle Komponenten von  $X'$  gilt. Wir zeigen, daß  $\eta': X' \rightarrow \mathbb{E}^\times$  zu einer Windungsabbildung  $\eta: (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  fortsetzbar ist.

Nach 3.3.3 gibt es einen Isomorphismus  $h': X' \rightarrow \mathbb{E}^\times$  mit  $\eta' = h'^n$  für  $n := \text{gr } \eta'$ . Wir erweitern  $X'$  durch Hinzunahme eines Punktes  $a \notin X'$  zur Menge  $X$ . Die Fortsetzung  $h: (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  ist bijektiv. Sie überträgt die Topologie von  $\mathbb{E}$  nach  $X$ , so daß  $X'$  ein Unterraum ist.

Die Garbe der holomorphen Funktionen auf  $X'$  wird durch

$$\mathcal{F}(W) := \{f \in \mathcal{C}(W) : f|_{(W \cap X')} \in \mathcal{O}_{X'}(W)\} \text{ für offene } W \subset X$$

zur Funktionengarbe  $\mathcal{F}$  auf  $X$  fortgesetzt. Dann ist  $h : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{E}, \mathcal{O})$  ein Isomorphismus. Für die Fortsetzung von  $\eta'$  zu  $\eta : (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gilt  $\eta = h^n$ , d.h.  $\eta$  ist eine Windungsabbildung.  $\square$

**4.6.6 Zweiblättrige Überlagerungen der Ebene.** Zu jeder lokal endlichen Menge  $B \subset \mathbb{C}$  gibt es eine zweiblättrige Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $B$  als Verzweigungsart.

*Beweis.* Es gibt eine ganze Funktion  $h$ , welche in den Punkten von  $B$  einfache Nullstellen und sonst keine Nullstellen hat (Weierstraßscher Produktsatz). Gemäß 1.2.3 gehört zum Polynom  $w^2 - h(z)$  ein Nullstellengebilde  $(X', \eta', f)$  mit einer unverzweigten, zweiblättrigen Überlagerung  $\eta' : X' \rightarrow \mathbb{C} \setminus B$ . Nach 4.6.5 läßt sie sich zu einer Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \mathbb{C}$  fortsetzen. Wegen  $f^2 = h \circ \eta'$  besitzt jeder Punkt  $a \in \eta^{-1}(B)$  eine Umgebung  $U$ , so daß  $f$  auf  $U \setminus \{a\}$  beschränkt ist und daher durch  $f(a) := 0$  holomorph fortgesetzt werden kann. Aus  $2o(f, a) = o(h, \eta(a)) \cdot v(\eta, a)$  und  $o(h, \eta(a)) = 1$  folgt  $v(\eta, a) \geq 2$ .  $\square$

## 4.7 Verzweigte normale Überlagerungen

Sei  $Y$  eine zusammenhängende Fläche und  $B \subset Y$  lokal endlich. Wir untersuchen und konstruieren normale Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}$ , die über  $Y \setminus B$  unverzweigt sind. Wir benutzen dabei Basispunkte  $y_0 \in Y \setminus B$  und  $x_0 \in X$  mit  $\eta(x_0) = y_0$ .

**4.7.1 Der Poincarésche Epimorphismus.** Nach der zweiten Folgerung in 4.6.4 ist  $\eta$  durch die Beschränkung  $\eta' : X \setminus \eta^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$  eindeutig bestimmt und hat dieselbe Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta) = \mathcal{D}(\eta')$ . Der Poincarésche Epimorphismus  $P : \pi(Y \setminus B) \rightarrow \mathcal{D}(\eta)$  hat den Kern  $\eta'_* \pi(X \setminus \eta^{-1}(B))$ . Aus 3.2.7 folgt der

**Isomorphiesatz.** Zwei normale, über  $Y \setminus B$  unverzweigte Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  und  $\eta' : X' \rightarrow Y$ , deren Poincaréschen Epimorphismen  $P$  bzw.  $P'$  denselben Kern haben, sind isomorph. Das ist genau dann der Fall, wenn es einen Isomorphismus  $\alpha : \mathcal{D}(\eta) \rightarrow \mathcal{D}(\eta')$  mit  $P' = \alpha \circ P$  gibt.  $\square$

**4.7.2 Kanonische Erzeugende.** Nach 1.5.4 ist jede Standgruppe  $\mathcal{D}_a$  zyklisch von der Ordnung  $n := v(\eta, a)$ . Wir definieren das kanonisch erzeugende Element  $\sigma_a \in \mathcal{D}_a$  durch die Ableitung  $\sigma'_a(a) := \exp(2\pi i/n)$ . Für jedes  $f \in \mathcal{D}$  gilt  $\sigma_{f(a)} = f \circ \sigma_a \circ f^{-1}$ .

**Satz.** Sei  $b \in B$ . Die Werte  $P([u])$  der einfachen  $b$ -Schleifen  $u$  sind die kanonisch erzeugenden Elemente der Standgruppen  $\sigma_a \in \mathcal{D}_a$  für  $a \in \eta^{-1}(b)$ .

*Beweis.* Sei  $k : (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte von  $Y$  mit  $V \cap B = \{b\}$ . Bis auf Homotopie gilt  $u = w \cdot v \cdot w^{-1}$  mit  $k \circ v(t) := \frac{1}{2} \exp(2\pi i t)$  und einem Weg in  $Y \setminus B$  von  $y_0$  nach  $y_1 = k^{-1}(\frac{1}{2})$ , vgl. Figur 3.8.4 a. Die Komponente  $U$  von  $\eta^{-1}(V)$  durch den Endpunkt  $x_1$  der  $\eta$ -Liftung von  $w$ , die in  $x_0$  beginnt, trifft  $\eta^{-1}(b)$  in einem Punkt  $a$ . Durch passende Wahl von  $w$  erreicht man alle  $a \in \eta^{-1}(b)$ . Es gibt eine Karte  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit  $k \circ \eta = h^n$  für  $n = v(\eta, a)$ . Für die  $\eta$ -Liftung  $\hat{v}$  von  $v$  mit  $\hat{v}(0) = x_1$  ist  $h \circ \hat{v}(t) = h(x_1) \cdot \frac{1}{2} \exp(2\pi i t/n)$ . Daher hat  $g := P([v])$  den Wert  $g(x_1) = \hat{v}(1) \in U$ . Somit ist  $g(U) = U$ , insbesondere  $g(a) = a$ . Nach 1.5.2(1) ist  $g'(a) = \exp(2\pi i/n)$  die Ableitung, also  $g = \sigma_a$ .  $\square$

**4.7.3 Konstruktion normaler Überlagerungen.** Sei  $h : \pi(Y \setminus B) \rightarrow G$  ein Gruppen-Epimorphismus, so daß für jeden Punkt  $b \in B$  und jede  $b$ -Schleife  $u$  in  $Y \setminus B$  das Element  $h([u])$  eine endliche Ordnung hat. Dann gibt es eine normale, über  $Y \setminus B$  unverzweigte Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  mit der Deckgruppe  $G$  und dem Poincaréschen Epimorphismus  $h$ .

*Beweis.* Nach 3.7.2(1) gibt es eine unverzweigte normale Überlagerung  $\eta' : X' \rightarrow Y \setminus B$  mit dem Poincaréschen Epimorphismus  $h$ . Sei  $V \subset Y$  ein Scheibe mit einem Zentrum  $b \in B$ , die  $B$  nur in  $b$  trifft, sei  $U$  eine Komponente von  $\eta'^{-1}(V)$  und sei  $u$  eine einfache  $b$ -Schleife in  $V \setminus \{b\}$ . Die Beschränkung  $\eta' : U \rightarrow V \setminus \{b\}$  ist nach 3.3.3 eine Potenz- oder Exponentialüberlagerung. Letztere scheidet aus, weil  $h([u])$  endliche Ordnung hat. Daher läßt sich  $\eta'$  gemäß 4.6.5 zu einer verzweigten Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  fortsetzen. Sie ist nach der zweiten Folgerung in 4.6.4 normal und hat nach 4.7.1 den Poincaréschen Epimorphismus  $h$ .  $\square$

**4.7.4 Überlagerungen der Zahlenkugel.** Sei  $B = \{b_0, b_1, \dots, b_r\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ ,  $r \geq 1$ . Nach Satz 3.8.4 gibt es einfache  $b_j$ -Schleifen  $u_j$  in  $\hat{\mathbb{C}} \setminus B$ , so daß  $\pi(\hat{\mathbb{C}} \setminus B)$  von  $[u_1], \dots, [u_r]$  frei erzeugt wird und  $[u_0] \cdot [u_1] \cdot \dots \cdot [u_r] = 1$  ist.

**Satz.** Es sei  $G$  eine Gruppe, die von  $r + 1$  Elementen  $g_0, \dots, g_r$  endlicher Ordnungen  $n_j \geq 2$  erzeugt wird, wobei  $g_0 \cdot \dots \cdot g_r = 1$  gilt. Es gibt bis auf Isomorphie genau eine normale Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  mit dem Verzweigungsort  $B$  und den Werten  $P([u_j]) = g_j$  des Poincaréschen Epimorphismus  $P : \pi(X \setminus B) \rightarrow G$ . Über  $b_j$  hat  $\eta$  die Windungszahl  $n_j$ .

*Beweis.* Die Existenz der Überlagerung folgt aus 4.7.3. Nach 4.7.1 ist sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Die letzte Behauptung folgt aus 4.7.2.

**Historisches.** Der Satz und sein Beweis stammen von Hurwitz (1893). Er illustriert ihn für  $r = 2$  an den Gruppen  $\mathcal{A}_5$  und  $\mathcal{S}_n$ , siehe [Hur], Bd. 1, S. 405 ff. Die Gruppe  $\mathcal{A}_5$  wird von  $g_0 := (12)(34)$ ,  $g_1 := (254)$ ,  $g_2 := (12345)$  und  $\mathcal{S}_n$  von  $g_0 := (12)$ ,  $g_1 := (n \ n-1 \ \dots \ 2)$ ,  $g_2 := (12 \ \dots \ n)$  erzeugt. In beiden Fällen gilt  $g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 = \text{id}$ .

**4.7.5 Hyperelliptische Überlagerungen.** Im letzten Satz ist bei  $|G| = 2$  die Bedingung  $g_0 \cdot \dots \cdot g_r = 1$  genau dann erfüllt, wenn  $r$  ungerade ist. Das ergibt den

**Satz.** Bei jeder zweiblättrigen, zusammenhängenden Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  hat der Verzweigungsort  $B$  eine gerade Anzahl  $\#B \geq 2$ . Mit dieser Einschränkung kann er beliebig vorgegeben werden. Die Überlagerung ist durch  $B$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.  $\square$

Die rationalen Funktionen  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade zwei haben zwei Verzweigungspunkte, die man beliebig vorgeben kann. Die  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega$  mit den Halbperiodenwerten  $e_1, e_2, e_3$  induziert die Überlagerung  $\hat{\wp}: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit dem Verzweigungsort  $\{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ . Nach Lösung des Jacobischen Problems 2.2.7 kann man jede vierpunktige Menge als Verzweigungsort einer elliptischen Funktion vom Grade 2 realisieren. Daher nennt man diese Überlagerungen *elliptisch*. Bei mehr als 4 Verzweigungspunkten heißen sie *hyperelliptisch*.

**4.7.6 Endliche zyklische Überlagerungen der Zahlenkugel.** Sei  $n \geq 2$  und  $B := \{b_0, b_1, \dots, b_r\} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $r \geq 1$ .

(1) Bei jeder  $n$ -blättrigen zyklischen Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit dem Verzweigungsort  $B$ , deren Deckgruppe  $\mathcal{D}$  von  $g$  erzeugt wird, haben längs jeder Faser  $\eta^{-1}(b_j)$  die Standgruppen dasselbe kanonisch erzeugende Element  $g^{m_j}$ . Dabei gilt

$$(*) \quad 0 < m_j < n, \quad m_0 + \dots + m_r \equiv 0 \pmod{n}, \quad \text{ggT}(m_1, \dots, m_r, n) = 1.$$

(2) Jede Vorgabe ganzer Zahlen  $(m_0, \dots, m_r)$ , die  $(*)$  erfüllt, wird durch eine  $n$ -blättrige zyklische Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit dem Verzweigungsort  $B$  realisiert.

(3) Zwei  $(r+1)$ -Tupel  $(m_0, \dots, m_r)$  und  $(m'_0, \dots, m'_r)$  gehören genau dann zu isomorphen Überlagerungen, wenn für eine Zahl  $k$  mit  $\text{ggT}(k, n) = 1$  die  $r+1$  Kongruenzen  $m'_j \equiv km_j \pmod{n}$  bestehen.

*Beweis.* (1) Nach Satz 3.8.4 gibt es einfache  $b_j$ -Schleifen  $u_j$  in  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus B$ , so daß  $\pi(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B)$  von  $[u_1], \dots, [u_r]$  frei erzeugt wird und  $[u_0] \cdot [u_1] \cdot \dots \cdot [u_r] = 1$  ist. Für den Poincaréschen Epimorphismus  $P$  der Überlagerung gilt  $P[u_j] = g^{m_j}$  mit  $0 < m_j < n$ , weil  $P[u_j]$  eine nicht triviale Standgruppe erzeugt. Aus  $[u_0] \cdot [u_1] \cdot \dots \cdot [u_r] = 1$  folgt  $m_0 + \dots + m_r \equiv 0 \pmod{n}$ . Weil  $\mathcal{D}$  von  $P[u_1], \dots, P[u_r]$  erzeugt wird, ist  $\text{ggT}(m_1, \dots, m_r, n) = 1$ .

(2) folgt aus 4.7.4, angewendet auf  $g_j := g^{m_j}$ .

(3) Sei  $\eta'$  die Überlagerung zu  $(m'_0, \dots, m'_r)$  mit der von  $g'$  erzeugten Deckgruppe  $\mathcal{D}'$ . Nach 4.7.1 ist sie genau dann zur Überlagerung  $\eta$  isomorph, wenn es einen Isomorphismus  $\alpha: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}'$  gibt, so daß  $\alpha \circ P$  der Poincarésche Epimorphismus von  $\eta'$  ist. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\alpha(g) = g'^k$  für eine ganze Zahl  $k$  mit  $\text{ggT}(k, n) = 1$  gilt und

$$(g')^{m'_j} = \alpha \circ P[u_j] = \alpha(g^{m_j}) = (g')^{km_j},$$

also  $m'_j \equiv km_j \pmod{n}$  ist.  $\square$

**Beispiel.** Wenn  $r = 2$  ist, legen wir die Verzweigungspunkte nach  $0, 1, \infty$  und ordnen  $m_0, m_1, m_\infty$  der Größe nach. Das gibt für  $n = 7$  genau zwei nicht kongruente Möglichkeiten  $(1, 1, 5)$  und  $(1, 2, 4)$ , zu denen nicht isomorphe Überlagerungen gehören. In 6.4.4 und 8.3.5 wird gezeigt, daß sogar die entsprechenden *Überlagerungsflächen* nicht isomorph sind.

In 6.4.2 werden alle zyklischen Überlagerungen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  durch Nullstellengebilde reiner Polynome beschrieben.

## 4.8 Universelle verzweigte Überlagerungen

Ergebnisse über universelle Überlagerungen werden vom unverzweigten auf den gleichverzweigten Fall übertragen. Wir betrachten nur zusammenhängende, holomorphe Überlagerungen  $\eta: X \rightarrow Y$ , bei denen die Windungszahlen längs jeder Faser beschränkt sind und nennen die Überlagerung *einfach zusammenhängend*, wenn ihre Überlagerungsfläche einfach zusammenhängt.

**4.8.1 Signaturen.** Eine Funktion  $S: Y \rightarrow \mathbb{N}_{>0}$  heißt *Signatur*, wenn ihr Träger  $\{y \in Y : S(y) \geq 2\}$  lokal endlich ist. Die Signatur  $S_1$  *teilt*  $S$ , wenn an jeder Stelle  $y \in Y$  der Wert  $S_1(y)$  ein Teiler von  $S(y)$  ist. Zu jeder Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  bilden wir mit den kleinsten gemeinsamen Vielfachen (kgV) die *Verzweigungssignatur*

$$S_\eta(y) := \text{kgV}\{v(\eta, x) : x \in \eta^{-1}(y)\}.$$

Wenn  $\eta$  gleichverzweigt ist, gilt  $S_\eta(y) = v(\eta, x)$ , vergleiche 1.4.6.

Sei  $\varphi: Z \rightarrow Y$  eine weitere Überlagerung. Wenn es eine holomorphe Abbildung  $\gamma: Z \rightarrow X$  gibt, so daß  $\varphi = \eta \circ \gamma$  ist, sagen wir, daß  $\eta$  durch  $\varphi$  *dominiert* wird. Dann ist  $\gamma$  nach 4.6.2 auch eine Überlagerung, und wegen der Produktformel für Windungszahlen, siehe 1.3.1(3), teilt  $S_\eta$  die Signatur  $S_\varphi$ . Wir nennen  $\varphi: Z \rightarrow Y$  eine *universelle* Überlagerung, wenn  $\varphi$  alle Überlagerungen  $\eta$  dominiert, für die  $S_\eta$  ein Teiler von  $S_\varphi$  ist.

**Lemma.** Die Überlagerung  $\eta$  sei gleichverzweigt und einfach zusammenhängend, die Überlagerung  $\varphi$  sei universell. Aus  $S_\eta = S_\varphi$  folgt, daß  $\eta$  und  $\varphi$  isomorph sind.

*Beweis.* Es gilt eine Überlagerung  $\gamma$  mit  $\varphi = \eta \circ \gamma$ . Weil  $\eta$  gleichverzweigt ist, folgt aus  $S_\eta = S_\varphi$ , daß  $\gamma$  unverzweigt ist. Die Basisfläche von  $\gamma$  ist die Überlagerungsfläche von  $\eta$  und daher einfach zusammenhängend. Nach 3.2.4(3) ist  $\gamma$  ein Isomorphismus.  $\square$

**4.8.2 Existenzsatz.** *Zu jeder Signatur  $S$  mit dem Träger  $B \subset Y$  gibt es eine normale, über  $Y \setminus B$  unverzweigte Überlagerung  $\varphi : Z \rightarrow Y$ , deren Poincaréscher Epimorphismus  $P : \pi(Y \setminus B) \rightarrow \mathcal{D}(\varphi)$  die von*

$$\{[u]^{S(b)} : u \text{ einfache Schleife um } b \in B\}$$

*erzeugte Untergruppe  $H$  als Kern hat. Für jede Überlagerung  $\eta$  von  $Y$  gilt:*

$$\varphi \text{ dominiert } \eta \iff S_\eta \text{ teilt } S.$$

*Insbesondere ist  $S_\varphi$  ein Teiler von  $S$ , und  $\varphi$  ist universell.*

*Beweis.* Die Teilmenge  $\{[u] : u \text{ einfache Schleife um } b \in B\} \subset \pi(Y \setminus B)$  ist für jedes  $b \in B$  unter Konjugationen invariant. Daher ist  $H$  ein Normalteiler. Aus 4.7.3, angewendet auf den Restklassen-Epimorphismus  $h : \pi(Y \setminus B) \rightarrow \pi(Y \setminus B)/H =: G$ , folgt die Existenz von  $\varphi$ . Mit  $C := \varphi^{-1}(B)$  gilt  $H = \varphi_*(\pi(Z \setminus C))$ .

Für jede einfache  $b$ -Schleife  $u$  hat  $P([u])$  die Ordnung  $S_\varphi(b)$ . Wegen  $P([u])^{S(b)} = 1$  ist  $S_\varphi$  ein Teiler von  $S$ . Wenn  $\varphi$  eine Überlagerung  $\eta$  dominiert, ist  $S_\eta$  ein Teiler von  $S_\varphi$ , also auch von  $S$ .

Umgekehrt sei  $S_\eta$  ein Teiler von  $S$ . Sei  $A := \eta^{-1}(B)$ . Für jedes  $b \in B$  sind die Windungszahlen  $v(\eta, x)$  der Punkte  $x \in \eta^{-1}(b)$  Teiler von  $S(b)$ . Dann gilt

$$(*) \quad \varphi_*\pi(Z \setminus C) < \eta_*\pi(X \setminus A).$$

Weil  $\varphi_*\pi(Z \setminus C)$  von den Potenzen  $[u]^{S(b)}$  der einfachen  $b$ -Schleifen  $u$  erzeugt wird, genügt es zum Beweis von  $(*)$   $[u]^{S(b)} \in \eta_*\pi(X \setminus A)$  zu zeigen. Nach 4.7.2 ist  $P[u]$  das kanonisch erzeugende Element der Standgruppe  $\mathcal{D}_a$  eines Punktes  $a \in \eta^{-1}(b)$ . Nach 1.5.3(3) ist seine Ordnung ein Teiler von  $v(\eta, a)$  und damit von  $S(b)$ . Es folgt  $[u]^{S(b)} \in \text{Kern}(P) = \eta_*\pi(X \setminus A)$ , siehe 3.6.3.

Nach dem Monodromiesatz, dessen Voraussetzung wegen  $(*)$  erfüllt ist, läßt sich  $\varphi|_{(Z \setminus C)}$  zu einer holomorphen Abbildung  $\gamma : Z \setminus C \rightarrow X \setminus A$  liften, so daß  $\varphi = \eta \circ \gamma$  gilt. Diese wird mit Lemma 4.6.4 zu  $\gamma : Z \rightarrow X$  fortgesetzt.  $\square$

*Bemerkung.* Wenn  $S = S_\eta$  eine Verzweigungssignatur ist, folgt  $S_\varphi = S$ . Aber es bleibt noch offen, ob *jede* Signatur eine Verzweigungssignatur ist. Aus dem Uniformisierungssatz wird folgen, daß dies bis auf die durch 3.3.4 verursachten Ausnahmen stets der Fall ist, siehe 11.6.8.

**4.8.3 Eigenschaften universeller Überlagerungen.** (a) *Eine Überlagerung ist genau dann universell, wenn sie gleichverzweigt ist und einfach zusammenhängt.*– (b) *Universelle Überlagerungen mit gleicher Verzweigungssignatur sind isomorph.*– (c) *Universelle Überlagerungen sind normal.*

*Beweis.* (a) Sei  $\eta$  gleichverzweigt und einfach zusammenhängend. Nach 4.8.2 gibt es eine universelle Überlagerung  $\varphi$  mit  $S_\varphi = S_\eta$ . Wegen Lemma 4.8.1 sind  $\varphi$  und  $\eta$  isomorph.– Umgekehrt sei  $\eta : X \rightarrow Y$  universell. Nach 4.8.2 gibt es eine normale, also gleichverzweigte Überlagerung  $\varphi : Z \rightarrow Y$  mit  $S_\eta = S_\varphi$ . Da  $\varphi$  von  $\eta$  dominiert wird, gibt es eine Abbildung  $\gamma : X \rightarrow Z$  mit  $\eta = \varphi \circ \gamma$ . Für jedes  $x \in X$  folgt  $v(\eta, x) = v(\gamma, x) \cdot v(\varphi, \gamma(x))$ .

Wegen  $v(\varphi, \gamma(x)) = S_\eta(y)$  für  $y := \eta(x)$  folgt  $v(\eta, x) = S_\eta(y)$ , d.h.  $\eta$  ist gleichverzweigt. Nach 3.7.2(2) gibt es eine unverzweigte, einfach zusammenhängende Überlagerung  $\varphi : Z \rightarrow X$ . Wegen 4.6.3 ist  $\eta \circ \varphi$  eine Überlagerung. Sie ist gleichverzweigt und einfach zusammenhängend. Wegen  $S_{\eta \circ \varphi} = S_\eta$  sind  $\eta$  und  $\eta \circ \varphi$  nach Lemma 4.8.1 isomorph.

(b) folgt aus (a) und 4.8.1.– Zu (c). Nach 4.8.2 gibt es zu jeder universellen Überlagerung  $\eta$  eine *normale* universelle Überlagerung mit derselben Verzweigungssignatur. Sie ist nach (b) zu  $\eta$  isomorph.  $\square$

**Beispiele.** Die normalen Überlagerungen  $\mathbb{C} \rightarrow X$  aus 2.6.2 zu den Punkt-, Band- und Flächengruppen sind universell und durch ihre Signaturen bis auf Isomorphie bestimmt.

Dasselbe gilt für die normalen Überlagerungen  $\eta : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Hierzu wurde in 4.2.3 gezeigt, daß es abgesehen vom zyklischen Fall genau drei Ausnahmearbiten  $\Sigma_j$  von  $G = \mathcal{D}(\eta)$  gibt. Nach einem Automorphismus der Basisfläche  $\hat{\mathbb{C}}$  kann man annehmen, daß  $\eta(\Sigma_1) = 0$ ,  $\eta(\Sigma_2) = 1$  und  $\eta(\Sigma_3) = \infty$  ist. Jedem Typ der Klassifikationstabelle in 4.2.3 entspricht dann genau eine Signatur mit dem Träger  $\{0, 1, \infty\}$ . Da sie  $\eta$  bis auf Isomorphie bestimmt, ist  $G$  bis auf Konjugation in  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  bestimmt. Das war in 4.2.3 bereits behauptet aber nicht bewiesen worden.

**4.8.4 Universelle Liftung.** Sei  $\zeta : Z \rightarrow X$  die unverzweigte universelle Überlagerung. Sämtliche  $h \in \text{Aut}(Z)$ , zu denen ein  $g \in \text{Aut}(X)$  mit  $g \circ \zeta = \zeta \circ h$  existiert, bilden den Normalisator  $N$  von  $\mathcal{D}(\zeta)$  in  $\text{Aut}(Z)$ . Der Automorphismus  $g$  ist durch  $h$  eindeutig bestimmt. Die Zuordnung

$$(1) \quad p : N \rightarrow \text{Aut}(X), \quad p(h) := g,$$

ist ein Epimorphismus mit dem Kern  $\mathcal{D}(\zeta)$ . Die Surjektivität von  $p$  folgt aus dem Monodromiesatz.

(2) Für jede Untergruppe  $G < \text{Aut}(X)$  ist die universelle Liftung  $\hat{G} := p^{-1}(G) < N$  von  $G$  genau dann diskontinuierlich, wenn  $G$  diskontinuierlich ist.

Wenn  $\hat{G}$  diskontinuierlich ist, folgt dies aus 4.5.3. Wenn  $G$  diskontinuierlich und damit die Deckgruppe einer normalen Überlagerung  $\eta$  ist, gilt genauer:

(3) Die Überlagerung  $\eta \circ \zeta$  ist universell. Sie hat denselben Verzweigungsdivisor wie  $\eta$ . Ihre Deckgruppe ist  $\mathcal{D}(\eta \circ \zeta) = \hat{G}$ .

Zum Beweis von (3) zeigt man zunächst  $\hat{G} < \mathcal{D}(\eta \circ \zeta)$  und verifiziert sodann, daß jede  $(\eta \circ \zeta)$ -Faser in einem  $\hat{G}$ -Orbit liegt.  $\square$

*Bemerkung.* Der Riemannsche Abbildungssatz in 11.2.5 wird zeigen, daß  $Z$  zu  $\hat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  isomorph ist. Die Automorphismen dieser drei Flächen lassen sich durch  $(2 \times 2)$ -Matrizen beschreiben. Zum Studium der universellen Liftungen  $\hat{G}$  kann man daher Methoden der zweidimensionalen Geometrie und der Matrizentheorie einsetzen und sodann verfolgen, wie sich die Ergebnisse auf  $X$  und  $G \cong \hat{G}/\mathcal{D}(\zeta)$  auswirken; siehe dazu 11.5.3, 11.6.7 und 11.7.4.

**4.8.5 Historisches.** Manche Spezialfälle der in 4.7-8 dargestellten Ergebnisse gehen auf Klein und Poincaré zurück. Aber die generelle Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit normaler Überlagerungen, wenn die Basisfläche, die Verzweigungspunkte und die Windungszahlen vorgegeben sind, wurde um 1880 noch nicht gestellt. Das geschah erst fünfzig Jahre später durch Fenchel und Nielsen, vgl. [FN]. Rankin publizierte 1958 die erste systematische Darstellung [Ran]. Eine Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen findet man in [Nam 2]. – Das Wort „Signatur“ benutzen wir nach einem Vorschlag von S. Patterson.

## 4.9 Aufgaben

- Gib zur Diedergruppe  $\{z \mapsto \omega z^{\pm 1} : \omega \in \mu_q\}$  eine Orbitprojektion explizit an. Diese Aufgabe wird in [Klei 2] auch für die Tetraeder-, Oktaeder- und Ikosaedergruppe gelöst.
- Sei  $\varepsilon := \exp(2\pi i/5)$  und  $T := \{\varepsilon^\mu + \varepsilon^\nu : 0 \leq \mu < \nu \leq 4\} \cup \{0, \infty\}$ , siehe Teil (iii) des Beweises in 4.2.5.  
 Zeige:  $r := \varepsilon + \varepsilon^4 \in \mathbb{R}_{>0}$ . Die zehn Punkte  $\varepsilon^\mu + \varepsilon^\nu$  bilden die beiden Fünfecke  $\{r\varepsilon^\nu : 0 \leq \nu \leq 4\}$  und  $-r^{-1}\varepsilon^\nu : 0 \leq \nu \leq 4\}$ . Der antiholomorphe Automorphismus  $s(z) := -1/\bar{z}$  vertauscht sie. Für  $g(z) := (-z + r\varepsilon)/(rz + \varepsilon)$  gilt  $g \circ s = s \circ g$ , ferner  $g(r) = r\varepsilon$ ,  $g(r\varepsilon) = 0$  und
 
$$g(r\varepsilon^2) = (1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon^3)/(1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4) = 1 + \varepsilon^3$$

$$g(r\varepsilon^3) = (1 - \varepsilon^4)/(1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^3) = 1 + \varepsilon^4$$

$$g(r\varepsilon^4) = (\varepsilon^2 - \varepsilon^3)/(2\varepsilon + \varepsilon^2 + 2\varepsilon^4) = 1 + \varepsilon.$$
 Folgere:  $g \in \text{Sym}(T)$ .
- Sei  $G$  die unendlich zyklische Gruppe der *reell*-analytischen Abbildungen
 
$$\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, x + iy \mapsto 2^n x + i2^{-n} y \text{ für } n \in \mathbb{Z}.$$
 Zeige: (i) Alle Standgruppen sind trivial.  
 (ii) Jeder Punkt in  $\mathbb{C}^\times$  besitzt eine privilegierte Umgebung.  
 (iii) Sei  $\eta : \mathbb{C}^\times \rightarrow Y$  eine Orbitprojektion. Zeige, daß  $Y$  nicht hausdorffsch ist, weil  $\eta(1) \neq \eta(i)$  keine disjunkten Umgebungen besitzen.
- Bekanntlich ist  $R = \{\alpha + i\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$  ein euklidischer Unterring von  $\mathbb{C}$ . –  
 Zeige: (i) Der Quotientenkörper  $K$  von  $R$  liegt dicht in  $\mathbb{C}$ .  
 (ii) Zu je zwei teilerfremden Zahlen  $b, d \in R$  gibt es ein  $A \in \text{SL}_2(R)$  mit
 
$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}.$$
 (iii)  $K \cup \{\infty\}$  ist ein  $\text{SL}_2(R)$ -Orbit.  
 (iv) Es gibt kein Gebiet  $X \subset \widehat{\mathbb{C}}$ , auf dem  $\text{SL}_2(R)$  diskontinuierlich operiert. Dieses Beispiel wurde 1884 von Picard angegeben.
- Zeige für Untergruppen  $G < \text{Aut}(\mathbb{C})$  bzw.  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ : Wenn mindestens zwei bzw. drei Punkte auf lokal endlichen Orbits liegen, ist  $G$  diskontinuierlich.
- Sei  $K = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w^2 = z^3\}$ . Zeige, daß  $h : \mathbb{C} \rightarrow K$ ,  $h(t) = (t^2, t^3)$ , ein Homöomorphismus ist. Definiere auf  $K$  die Garbe  $\mathcal{F}$  durch  $\mathcal{F}(U \cap K) := \{f|_K : f \in \mathcal{O}(U)\}$  für offene Mengen  $U \subset \mathbb{C}^2$ . Begründe, daß  $h : (\mathbb{C}, \mathcal{O}) \rightarrow (K, \mathcal{F})$  ein Morphismus, aber kein Isomorphismus ist.



- 7) Zeige für die Untergruppe  $G := \{(u, v) \mapsto (\alpha u, \alpha^{-1} v) : \alpha \in \mu_q\} < \text{Aut}(\mathbb{C}^2)$ :
- (i) Die nicht-leeren Fasern der Abbildung  $\eta : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ ,  $\eta(u, v) = (u^q, v^q, uv)$ , sind die  $G$ -Orbiten.
  - (ii)  $\eta(\mathbb{C}^2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : z^q = xy\}$  ist ein  $G$ -Orbitraum.
  - (iii) Für  $q \geq 2$  hängt  $\eta(\mathbb{C}^2) \setminus \{(0, 0, 0)\}$  nicht einfach zusammen.

Folgere: Bei einer diskontinuierlichen Automorphismengruppe einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension  $n \geq 2$  ist der Orbitraum im allgemeinen keine Mannigfaltigkeit.

- 8) Zeige: Die *anharmonische Gruppe*  $\Lambda := \text{Sym}\{0, 1, \infty\} < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  hat die Ausnahmeorbits

$$\Sigma_1 = \{0, 1, \infty\} \quad , \quad \Sigma_2 = \{-1, \tfrac{1}{2}, 2\} \quad , \quad \Sigma_3 = \{e^{\pm 2\pi i/3}\}.$$

Bilde die rationale  $\Lambda$ -Orbitprojektion  $f$  gemäß 4.2.1 mit  $A = \Sigma_3$  und  $B = \Sigma_1$  so, daß  $f(\Sigma_2) = 1$  ist und vergleiche das Ergebnis mit Aufgabe 1.7.9.

Sei  $G < \Lambda$  die von  $z \mapsto 1 - z$  erzeugte Untergruppe, und sei  $g$  ihre rationale Orbitprojektion. Gib eine rationale Funktion  $h$  so an, daß  $f = h \circ g$  ist, und begründe, daß  $h$  nicht normal ist.

- 9) Gib eine zweiblättrige Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \mathbb{C}$  mit einem Verzweigungsort  $B$  an, dessen Bild  $\exp(B)$  Häufungspunkte besitzt. Folgere: Der Verzweigungsort von  $\exp \circ \eta : X \rightarrow \mathbb{C}^\times$  ist nicht lokal endlich, und  $\exp \circ \eta$  ist keine Überlagerung, obwohl  $\exp$  und  $\eta$  (sogar normale) Überlagerungen sind.
- 10) Beschreibe bis auf Isomorphie alle zyklischen Überlagerungen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  mit drei Verzweigungspunkten, die 3, 4 bzw. 5 Blätter haben.
- 11) Zeige: Jede endliche Menge  $B \subset \widehat{\mathbb{C}}$  mit  $\sharp B \geq 3$  ist Verzweigungsort einer normalen Überlagerung von  $\widehat{\mathbb{C}}$ , deren Deckgruppe eine Kleinsche Vierergruppe ist. Wo kommen solche Überlagerungen für  $\sharp B = 3$  in der Klassifikation 4.2.3 vor? Gib solche Überlagerungen für  $\sharp B = 4$  mit Hilfe elliptischer Funktionen an, wobei die Lösung des Jacobischen Problems 2.3.7 für  $B$  unterstellt wird.
- 12) Deute die Bandgruppe  $B_2$  und die Flächengruppen  $F_n(\Omega)$  aus 2.6.2 als universelle Liftungen endlicher Deckgruppen.
- 13) Die alternierende Gruppe  $\mathcal{A}_5$  wird von  $(12)(34)$  und  $(254)$  erzeugt. Prüfe
- $$(12)(34) \cdot (254) \cdot (12345) = (1).$$

Zeige: Es gibt eine normale Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit der Deckgruppe  $\mathcal{A}_5$ , deren Signatur aus drei Punkten mit den Werten 2, 3, 5 besteht. Folgere, daß die Ikosaedergruppe zu  $\mathcal{A}_5$  isomorph ist. – Identifiziere in analoger Weise die Tetraedergruppe mit  $\mathcal{A}_4$  und die Oktaedergruppe mit  $\mathcal{S}_4$ .



## 5. Die $J$ - und $\lambda$ -Funktion

Nach der erfolgreichen Klassifikation aller diskontinuierlichen Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  in 2.6 und von  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  in 4.2 erwartet der Leser vielleicht ein ähnliches Ergebnis für die Halbebene  $\mathbb{H}$ . Hier läßt sich jedoch die Vielfalt aller Möglichkeiten mit den derzeit verfügbaren Methoden nicht überschauen.

Wir betrachten zwei diskontinuierliche Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , die zum Vorbild für die allgemeine Theorie wurden: die *Modulgruppe*  $\Gamma$  und die *Hauptkongruenzgruppe*  $\Gamma_2 \triangleleft \Gamma$ . Die im Titel genannten Funktionen sind Orbitprojektionen  $J: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  bzw.  $\lambda: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times} := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  dieser Gruppen. Zu ihrer Beschreibung werden Kenntnisse über Gitter und  $\wp$ -Funktionen aus dem 2. Kapitel benötigt.

Die Gleichung  $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$  löst das Jacobische Problem aus 2.2.7.– Die  $\lambda$ -Funktion ist eine unverzweigte Überlagerung. Mit dem Monodromiesatz 3.2.6 erhält man klassische Ergebnisse über holomorphe Funktionen, die mindestens zwei komplexe Zahlen als Werte auslassen.

Mit der Verallgemeinerung von  $\Gamma_2$  zu den Kongruenzgruppen  $\Gamma_n$  für  $n = 2, 3, 4, \dots$  und der Einführung der zugehörigen Modulflächen  $X_n$  geben wir am Schluß des Kapitels ein Beispiel aus den zahlreichen Möglichkeiten, die Untersuchung diskontinuierlicher Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  und ihrer Orbitflächen fortzusetzen.

### 5.1 Modulgruppe und Modulbereich

Die reellen Möbiustransformationen

$$\tau \mapsto A(\tau) := \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$$

bilden die Gruppe  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , siehe z.B. [Re 1], Abschnitt 9.2.2. Alle Transformationen mit *ganzzahligen* Koeffizienten bilden die *Modulgruppe*. Wir untersuchen ihre Wirkung auf  $\mathbb{H}$  mit Hilfe des Modulbereichs  $D \subset \mathbb{H}$  aus 2.5.1.

**5.1.1 Die Modulgruppe**  $\Gamma < \text{Aut}(\mathbb{H})$  besteht aus allen Transformationen  $A$  mit  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ . Folgende Elemente in  $\Gamma$  spielen eine besondere Rolle:

$$(1) \quad R(z) := 1 - \frac{1}{z} \quad , \quad S(z) := -\frac{1}{z} \quad , \quad T(z) := z + 1 \quad .$$

Das Element  $R$  hat die Ordnung 3 und  $\rho := \exp(\pi i/3)$  als Fixpunkt. Die *Inversion*  $S$  hat die Ordnung 2 und den Fixpunkt  $i$ . Die *Translation*  $T$  hat unendliche Ordnung und keine Fixpunkte. Es gilt  $R \circ S = T$ . Jedem  $\tau \in \mathbb{H}$  wird das Gitter  $\Omega_\tau := \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$  zugeordnet. Bei einem beliebigen Gitter  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  kann man (nach eventuellem Tausch von  $\omega_1$  und  $\omega_2$ ) annehmen, daß der Modul  $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  ist. Dann ist  $\Omega = \omega_2\Omega_\tau$  zu  $\Omega_\tau$  äquivalent.

**Satz.** (i) Die Gitter  $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  und  $\Omega' := \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$  sind genau dann gleich, wenn

$$\omega'_1 = a\omega_1 + c\omega_2, \omega'_2 = b\omega_1 + d\omega_2 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt.– (ii) Sie sind genau dann äquivalent, d.h.  $\Omega' = u \cdot \Omega$  für ein  $u \in \mathbb{C}^\times$ , wenn es ein  $A \in \Gamma$  mit  $\tau' = A(\tau)$  gibt.

*Beweis.* (i) beweist man genauso wie in der Linearen Algebra den Satz vom Basiswechsel.– Zu (ii). Sei  $\Omega' = u \cdot \Omega$ . Dann sind  $(\omega'_1, \omega'_2)$  und  $(u\omega_1, u\omega_2)$  zwei Basen dieses Gitters. Nach (i) gibt es ein  $A$  mit  $\tau' = A(\tau)$ . Umgekehrt folgt aus  $\tau' = A(\tau)$ , daß  $\omega'_1 := a\omega_1 + c\omega_2, \omega'_2 := b\omega_1 + d\omega_2$  eine Basis von  $\Omega$  ist. Für sie gilt  $\omega'_1/\omega'_2 = \omega_1/\omega_2$ , also  $\Omega' = u\Omega$  mit  $u := \omega'_1/\omega'_1 = \omega'_2/\omega'_2$ .

**5.1.2 Fundamentalbereiche.** Eine Teilmenge  $D \subset X$  heißt *Fundamentalebereich* für die Operation einer Gruppe  $G$  auf dem topologischen Raum  $X$ , wenn sie folgende Forderungen erfüllt:

- (1)  $D = \overline{D^\circ}$  ist die abgeschlossene Hülle der Menge  $D^\circ$  aller inneren Punkte.
- (2) Jeder  $G$ -Orbit trifft  $D$ .
- (3) Für jeden Punkt  $x \in D^\circ$  ist  $G(x) \cap \overline{D^\circ} = \{x\}$ .

Ein übersichtlicher Fundamentalbereich erleichtert die geometrische Beschreibung der  $G$ -Orbitprojektion  $\eta: X \rightarrow Y$ . Denn  $Y$  entsteht aus  $D$  durch Identifikationen längs des Randes  $\partial D := D \setminus D^\circ$ .

Mit  $D$  ist auch  $g(D)$  für jedes  $g \in G$  ein Fundamentalbereich. Man erhält die *Parkettierung*

$$(4) \quad X = \bigcup_{g \in G} g(D) \quad \text{mit} \quad g(D^\circ) \cap h(D^\circ) = \emptyset \quad \text{für} \quad g \neq h.$$

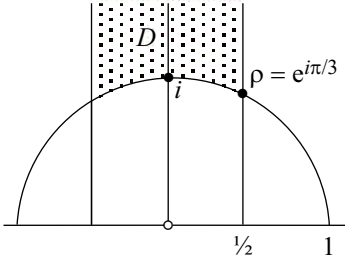
*Beispiel:* Für die Operation eines Gitters  $\Omega < \mathbb{C}$  durch Translationen ist jedes der in 2.3.1 angegebenen abgeschlossenen Parallelogramme  $\bar{P}$  ein Fundamentalbereich.

**5.1.3 Modulbereich und Ausnahmebahnen.** Der Modulbereich

$$(1) \quad D := \{\tau \in \mathbb{H} : |\tau| \geq 1, |\operatorname{Re} \tau| \leq \tfrac{1}{2}\}$$

ist ein Fundamentalbereich für die Modulgruppe  $\Gamma$ , siehe Figur 5.1.3. Zwei Punkte  $\tau \neq \tau' \in \partial D$  liegen genau dann im selben  $\Gamma$ -Orbit, wenn  $\tau' = -\bar{\tau}$  der Bildpunkt von  $\tau$  bei der Spiegelung an der imaginären Achse ist.

Die einzigen Ausnahmebahnen sind  $\Gamma(i)$  und  $\Gamma(\rho)$ . Die Standgruppen  $\Gamma_i$  und  $\Gamma_\rho$  werden von  $S$  bzw.  $R$  erzeugt und haben die Ordnungen 2 bzw. 3.



**Fig. 5.1.3.** Der Modulbereich  $D$  (punktiert) ist ein Fundamentalebereich der Modulgruppe.

*Beweis.* Nach 2.5.1(1) gibt es zu jedem  $\tau \in \mathbb{H}$  eine Basis  $\omega_1, \omega_2$  des Gitters  $\Omega_\tau$  mit  $\omega_1/\omega_2 \in D$ . Wegen Satz 5.1.1 gibt es ein  $A \in \Gamma$  mit  $A(\tau) = \omega_1/\omega_2 \in D$ , d.h. jeder  $\Gamma$ -Orbit trifft  $D$ . Wir untersuchen, für welche  $\tau \in D$  und  $A \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  das Bild  $\tau' := A(\tau) \in D$  ist. Das liefert für  $\tau' \neq \tau$  die paarweisen Identifikationen durch die Orbitprojektion und für  $\tau' = \tau$  die Elemente  $\neq \text{id}$  der Standgruppe  $\Gamma_\tau$ . Da jede Bahn  $D$  trifft, werden alle Ausnahmebahnen entdeckt. – Sei also

$$\tau, \tau' \in D, \tau' = A(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Wir benutzen  $\text{Im } \tau' = |c\tau + d|^{-2} \cdot \text{Im } \tau$  und können  $c \geq 0$  sowie  $\text{Im } \tau' \geq \text{Im } \tau$ , also  $|c\tau + d| \leq 1$  annehmen.

Für  $c = 0$  ist  $\tau' = \tau + b$  mit  $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Dann liegen  $\tau$  und  $\tau'$  in gleicher Höhe auf verschiedenen senkrechten Stücken des Randes von  $D$ .

Für  $c \geq 1$  ist  $|\tau + d/c| \leq 1/c$ . Andererseits ist  $\sqrt{3}/2$  der minimale Abstand von  $D$  zu  $\mathbb{R}$ , also  $|\tau + d/c| \geq \sqrt{3}/2$ . Es folgt  $c = 1$ ,  $|\tau + d| = 1$ ,  $\text{Im } \tau' = \text{Im } \tau$  und  $|d| \leq 1$ . – Der Fall  $d \neq 0$  kann nur für  $(\tau, d) = (\rho, -1)$  oder  $= (\rho^2, 1)$  eintreten, d.h.  $\tau$  ist eine der beiden Ecken von  $D$ . Wegen  $\text{Im } \tau' = \text{Im } \tau$  ist dann  $\tau' = \tau$  dieselbe oder  $\tau' = -\bar{\tau}$  die andere Ecke, und aus  $\tau' = \tau = \rho$  folgt  $A = R^2$ . – Im Falle  $d = 0$  ist  $|\tau| = 1$  und  $\tau' = a - 1/\tau = a - \bar{\tau}$ . Hier sind die einzigen Möglichkeiten  $a = 0, \pm 1$ . Im ersten Fall ist  $A = S$  und  $i$  der einzig mögliche Fixpunkt. Im zweiten Fall ist  $(\tau, a) = (\rho, 1)$  oder  $= (\rho^2, -1)$  und  $\tau = \tau'$ . Aus  $\tau' = \tau = \rho$  folgt  $A = R$ .

Die Untersuchung beweist die Behauptung über die Identifikation verschiedener Punkte  $\tau \neq \tau'$  in  $D$ . Sie zeigt ferner, daß  $i, \rho$  und  $\rho^2$  die einzigen Punkte in  $D$  mit nicht trivialen Standgruppen sind:  $\Gamma_i = \{\text{id}, S\}$ ,  $\Gamma_\rho = \{\text{id}, R, R^2\}$  und  $\Gamma_{\rho^2} = T^{-1}\Gamma_\rho T$  wegen  $T(\rho^2) = \rho$ .  $\square$

**5.1.4 Erzeugende Elemente.** Die in 5.1.1(1) angegebenen Elemente  $S$  und  $T$  erzeugen die Modulgruppe  $\Gamma$ .

*Beweis.* Jede Bahn  $\Gamma_*(\tau)$  der von  $S$  und  $T$  erzeugten Untergruppe  $\Gamma_*$  trifft den Modulbereich  $D$ . Denn für jedes  $\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d) \in \Gamma_*(\tau)$  gilt  $\text{Im } \tau' / \text{Im } \tau = |c\tau + d|^2$ . Wegen  $c\tau + d \in \Omega_\tau$  gibt es ein  $\tau_1 \in \Gamma_*(\tau)$ , so daß  $|c\tau_1 + d|$  minimal, also  $\text{Im } \tau_1$  maximal auf  $\Gamma_*(\tau)$  ist. Durch eine Translation  $T^n$  erreicht man  $\tau_2 := T^n(\tau_1) \in \Gamma_*(\tau)$  mit  $|\text{Re } \tau_2| \leq \frac{1}{2}$ . Dann ist  $\tau_2 \in D$ ,

d.h.  $|\tau_2| \geq 1$ . Denn sonst hätte  $S(\tau_2) \in \Gamma_*(\tau)$  einen Imaginärteil  $\text{Im } S(\tau_2) = (\text{Im } \tau_2)/|\tau_2|^2 > \text{Im } \tau_2 = \text{Im } \tau_1$ .

Insbesondere gibt es zu jedem  $A \in \Gamma$  ein  $B \in \Gamma_*$  mit  $B \circ A(2i) \in D$ . Wegen  $\Gamma(2i) \cap D = \{2i\}$  folgt  $B \circ A(2i) = 2i$ , d.h.  $B \circ A \in \Gamma_{2i} = \{\text{id}\}$ , also  $A = B^{-1} \in \Gamma_*$ .  $\square$

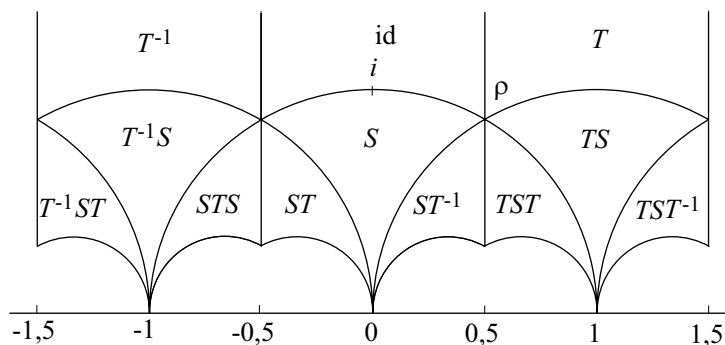
Im ersten Teil des Beweises wurde erneut, diesmal ohne Benutzung reduzierter Basen, gezeigt, daß jede  $\Gamma$ -Bahn in  $D$  eindringt.

**5.1.5 Spitzen.** Wegen  $\Gamma < \text{Aut}(\mathbb{H}) < \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  liegt jeder Punkt in  $\hat{\mathbb{C}}$  auf einer  $\Gamma$ -Bahn. Eine besondere Rolle spielt die Bahn  $\Gamma(\infty)$ . Ihre Punkte heißen *Spitzen*. Es gilt

$$(1) \quad \Gamma(\infty) = \{\infty\} \cup \mathbb{Q} \subset \partial\mathbb{H}.$$

*Beweis.* Für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  ist  $A(\infty) = \infty$  bzw.  $= a/c \in \mathbb{Q}$ , je nachdem, ob  $c = 0$  oder  $\neq 0$  ist. Umgekehrt gibt es zu jedem vollständig gekürzten Bruch  $a/c \in \mathbb{Q}$  ganze Zahlen  $b, d$ , so daß  $ad - bc = 1$  ist. Für die zugehörige Matrix  $A$  folgt  $A(\infty) = a/c$ .  $\square$

**5.1.6 Die Modulparkettierung** der Halbebene  $\mathbb{H} = \bigcup_{A \in \Gamma} A(D)$  besteht aus den Bildern des Modulbereichs  $D$ . In der Figur 5.1.6 wird statt  $A(D)$  nur  $A$  als Produkt von  $S$  und  $T$  angegeben.



**Fig. 5.1.6.** Eine Parkettierung von  $\mathbb{H}$  durch die Bilder  $A(D)$  des Modulbereichs  $D$  für  $A \in \Gamma$ . Die Transformation  $A$  ist als Produkt von  $S$  und  $T$  angegeben.

Wir fassen  $D$  als Dreieck mit den Ecken  $\rho$ ,  $\rho^2 = \rho^{-1}$  und  $\infty$  auf. Die Innenwinkel sind  $\pi/3$ ,  $\pi/3$  und  $0$ . Für jedes  $A \in \Gamma$  ist  $A(D)$  ein Dreieck mit denselben Winkeln bei den Ecken  $A(\rho)$ ,  $A(\rho^2)$  und der Spitze  $A(\infty)$ .

Alle Seiten der Dreiecke  $A(D)$  liegen wie die Seiten von  $D$  auf Halbgeraden oder Halbkreisen in  $\mathbb{H}$ , die auf der reellen Achse senkrecht stehen. Denn die Automorphismen von  $\mathbb{H}$  permutieren diese Halbgeraden und Halbkreise. Jedes Dreieck  $\Delta := A(D)$  hat mit  $ATA^{-1}(\Delta)$ ,  $AT^{-1}A^{-1}(\Delta)$  und  $ASA^{-1}(\Delta)$  jeweils eine Seite gemeinsam. In jeder Ecke, die nicht spitz ist,

stoßen sechs Dreiecke zusammen. Wenn  $A \neq T^n$  ist, stößt  $A(D)$  mit seiner Spitze auf die reelle Achse. Alle Dreiecke  $AT^n(D)$  haben dieselbe Spitze  $q := A(\infty) \in \mathbb{Q}$ . Sie drängen sich, kleiner und kleiner werdend, in  $q$  zusammen:

(1) Jede Umgebung  $U$  von  $q$  in  $\mathbb{C}$  enthält fast alle  $AT^n(D)$ .  $\square$

Dieses Phänomen tritt wegen 5.1.5(1) bei jedem  $q \in \mathbb{Q}$  auf. P. Gordan sagte: „Da wohnen die Dämonen“, siehe [Klei 5], S. 47.

**5.1.7 Historisches.** „Die sog. Modulfigur, die ... Gauß zuerst hat, und mit der er Abel, Jacobi und den nächstfolgenden Mathematikern überlegen bleibt, [hat sich] von Riemann ab zum bevorzugten Arbeitsmittel in der Theorie [der Modulfunktionen] entwickelt“, sagt Klein in [Klei 5], S. 46. Eine zum Modulbereich äquivalente Menge wurde bereits 1773 von Lagrange zur Beschreibung der reduzierten quadratischen Formen angegeben, siehe 5.2.3. Ihre Bedeutung für die Gittertheorie hat Gauß gekannt, siehe den nächsten Abschnitt, „aber in der ihm eigentümlichen Vorsicht zurückgehalten“, [Klei 5], S. 38. Erst 1877 gab Dedekind, [Ded] I, S. 180, den Modulbereich explizit als Fundamentalbereich der Modulgruppe  $\Gamma$  an. Auch Klein, [Klei 1] III, S. 24, beschrieb ihn kurz darauf.

## 5.2 Reduktionstheorie binärer Formen

Lagrange untersuchte 1773, welche ganzen Zahlen durch eine vorgegebene positiv definite quadratische Form  $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  mit ganzzahligen Koeffizienten dargestellt werden, wenn man für  $x$  und  $y$  ganze Zahlen einsetzt. Er entwickelte dazu eine Methode, solche Formen auf einfachere zu *reduzieren*, ohne dabei ihre Wertemenge für ganze  $x$  und  $y$  zu ändern, [Lag] III, p. 695–795. Gauß nahm die Reduktionstheorie in die *Disquisitiones Arithmeticae* (Nr. 171/2) auf, die 1801 erschienen, und brachte 1831 anlässlich einer Buchbesprechung, [Ga] III, S. 186 ff., die Formen mit Gittern in Verbindung. Wir zeigen im folgenden, daß die Existenz reduzierter Gitterbasen dem Lagrangeschen Reduktionssatz für Formen entspricht, und deuten die von Lagrange definierte Äquivalenz von Formen mittels der Bahnen der Modulgruppe. Zahlentheoretische Anwendungen bleiben außer Betracht; siehe hierzu [SO].

**5.2.1. Grundbegriffe.** Eine *binäre quadratische Form*

$$(1) \quad Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

mit reellen Koeffizienten  $A, B, C$  und der *Determinante*  $\Delta := AC - B^2$  ist genau dann *positiv definit*, wenn  $A$  und  $\Delta$  positiv sind. Im folgenden sind alle Formen positiv definit. Die Formen  $Q$  und  $Q'$  heißen *äquivalent*, wenn sie durch eine ganzzahlige Substitution auseinander hervorgehen:

$$(2) \quad Q'(x, y) = Q(ax + cy, bx + dy) \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & c \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Die Äquivalenzklassen heißen *Formenklassen*. Äquivalente Formen haben dieselbe Determinante und dieselbe Wertemenge für ganzzahlige  $x$  und  $y$ . Diese Äquivalenzdefinition stammt von Lagrange.

**5.2.2. Formen und reelle Basen von  $\mathbb{C}$ .** Wir betrachten  $\mathbb{C}$  als orientierten zweidimensionalen Euklidischen Vektorraum mit dem inneren Produkt  $\langle z, w \rangle := \operatorname{Re} z \bar{w}$ . Jede Basis  $\omega_1, \omega_2$  mit  $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  bestimmt die positiv definite Form  $Q(x, y) = |x\omega_1 + y\omega_2|^2 = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  mit

$$(1) \quad A = |\omega_1|^2, \quad B = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \operatorname{Re} \omega_1 \bar{\omega}_2, \quad C = |\omega_2|^2, \quad \Delta := AC - B^2 = (\operatorname{Im} \omega_1 \bar{\omega}_2)^2.$$

Dabei ist  $\sqrt{\Delta}$  der Flächeninhalt des von  $\omega_1, \omega_2$  aufgespannten Parallelogramms. Jede positiv definite Form hat die Gestalt (1); man setze z.B.  $\omega_1 := \sqrt{A}$  und  $\omega_2 := (B - i\sqrt{\Delta})/\sqrt{A}$ . Offenbar ändert sich die Form  $|x\omega_1 + y\omega_2|^2$  nicht, wenn man die Basis dreht, d.h.  $\omega_2, \omega_1$  durch  $u\omega_2, u\omega_1$  mit  $u \in \mathbb{C}$  und  $|u| = 1$  ersetzt. Der Modul  $\tau$  hängt nur von der Form  $Q$  ab: Es gilt

$$(2) \quad \tau = \frac{B + i\sqrt{\Delta}}{C} \quad \text{und} \quad |\tau|^2 = \frac{A}{C}.$$

**Satz.** Zu je zwei Zahlen  $\Delta \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  gibt es genau eine Form  $Q$  mit der Determinante  $\Delta$  und dem Modul  $\tau$ .

*Beweis.* Die Form  $Q(x, y) := (\sqrt{\Delta}/\operatorname{Im} \tau)|x\tau + y|^2$  leistet das Gewünschte. Die Eindeutigkeit folgt aus (2).  $\square$

**5.2.3 Formen und Gitter.** Jede  $\mathbb{R}$ -Basis  $\omega_1, \omega_2$  von  $\mathbb{C}$  mit  $\tau := \omega_1/\omega_2 \in \mathbb{H}$  bestimmt außer der Form  $Q(x, y) := |x\omega_1 + y\omega_2|^2$  das Gitter  $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ . Nach Satz 5.1.1 (erste Aussage) spannt *jede* Basis von  $\Omega$  ein Parallelogramm auf, dessen Inhalt die Determinante  $\Delta$  der Form  $Q$  ist. – Seien  $Q'$  die Form und  $\Omega'$  das Gitter zur Basis  $\omega'_1, \omega'_2$ .

**Äquivalenzsatz.** Die Formen  $Q$  und  $Q'$  sind genau dann äquivalent, wenn die Gitter  $\Omega$  und  $\Omega'$  durch eine Drehung auseinander hervorgehen.

*Beweis.* Sei  $u\Omega' = \Omega$  mit  $u \in S^1$ . Dann ist  $u\omega_1, u\omega_2$  eine Basis von  $\Omega$ , also  $u\omega'_1 = a\omega_1 + b\omega_2, u\omega'_2 = c\omega_1 + d\omega_2$  mit  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Daraus folgt, daß  $Q$  und  $Q'$  äquivalent sind, nämlich

$$Q'(x, y) = |xu\omega'_1 + yu\omega'_2|^2 = |x(a\omega_1 + b\omega_2) + y(c\omega_1 + d\omega_2)|^2 = Q(ax + cy, bx + dy).$$

Umgekehrt folgt aus der Äquivalenz von  $Q$  und  $Q'$ , daß

$$|x\omega'_1 + y\omega'_2|^2 = |x(a\omega_1 + b\omega_2) + y(c\omega_1 + d\omega_2)|^2 \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$$

gilt. Dann ist die reell-lineare Abbildung

$$\Phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x\omega'_1 + y\omega'_2 \mapsto x(a\omega_1 + b\omega_2) + y(c\omega_1 + d\omega_2),$$

eine Drehung mit  $\Phi(\Omega') = \Omega$ .  $\square$

**5.2.4 Äquivalente Formen und Modulbahnen.** Zwei Formen  $Q$  und  $Q'$  sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Determinante haben und ihre Moduln  $\tau, \tau'$  auf derselben Bahn der Modulgruppe  $\Gamma$  liegen. Insbesondere wird jede Formenklasse durch die Moduln ihrer Elemente bijektiv auf eine  $\Gamma$ -Bahn abgebildet.

*Beweis.* Wie in 5.2.3 sei  $Q(x, y) := |x\omega_1 + y\omega_2|^2$ ,  $Q'(x, y) := |x\omega'_1 + y\omega'_2|^2$  und  $\Omega := \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ,  $\Omega' := \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$ . Nach Satz 5.1.1(ii) liegen  $\tau = \omega_1/\omega_2$  und  $\tau' = \omega'_1/\omega'_2$  genau dann auf derselben  $\Gamma$ -Bahn, wenn es ein  $u \in \mathbb{C}^\times$  mit  $\Omega = u\Omega'$  gibt. Genau dann, wenn  $Q$  und  $Q'$  dieselbe Determinante haben, ist  $|u| = 1$ , und die Behauptung folgt aus 5.2.3.  $\square$



**5.2.5 Reduktion.** Eine Form  $Q$  heißt *reduziert*, wenn ihr Modul  $\tau$  im Modulbereich  $D$  der Figur 5.1.3 liegt.

**Lemma.** Die Form  $Q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  ist genau dann reduziert, wenn  $2|B| \leq C \leq A$ .

*Beweis.* Aus  $\tau = (B + i\sqrt{D})/C \in \mathbb{H}$  folgt  $C \geq 0$  und:  $|\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|B| < C$ . Aus  $|\tau|^2 = A/C$  und  $A > 0$  folgt:  $|\tau| \geq 1 \Leftrightarrow C \leq A$ .  $\square$

**Reduktionssatz (Lagrange).** Jede Form  $Q$  ist zu einer reduzierten Form  $Q'$  äquivalent.

*Beweis.* Wie in 5.2.2 sei  $Q(x, y) = |x\omega_1 + y\omega_2|^2$ . Das Gitter  $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  besitzt nach 2.5.1(1) eine reduzierte Basis  $\omega'_1, \omega'_2$ . Nach 5.2.3 ist  $Q(x, y)$  zu  $Q'(x, y) := |x\omega'_1 + y\omega'_2|^2$  äquivalent. Der Modul  $\omega'_1/\omega'_2$  von  $Q'$  liegt in  $D$ .  $\square$

**Historisches.** Lagrange definiert reduzierte Formen durch die Ungleichungen des Lemmas und beweist den Reduktionssatz direkt ohne Gitter und komplexe Zahlen, siehe auch [SO], S. 44 ff. Dedekind [Ded] I, S. 179 f., zeigt 1877, daß der Modulbereich  $D$  ein  $\Gamma$ -Fundamentalebereich ist, „mit denselben Methoden [...], durch welche in der Theorie der binären quadratischen Formen [...] bewiesen wird, daß jede Form einer reduzierten Form äquivalent ist.“ Hurwitz argumentiert 1881 in seiner Dissertation [Hur] 1, S. 2 ff. „anschaulich geometrisch“ und bemerkt, „daß hiermit auch eine überaus einfache Behandlungsweise der Reduktion der quadratischen Formen gegeben ist.“

**5.2.6. Ganzzahlige Formen.** Eine Formenklasse heißt *ganzzahlig*, wenn eine und damit alle Formen dieser Klasse ganze Zahlen als Koeffizienten haben.

**Endlichkeitssatz.** Zu jeder Determinante  $\Delta$  gibt es höchstens endlich viele ganzzahlige Formenklassen.

*Beweis.* Nach den Ungleichungen des Lemmas 5.2.5 gilt für die Koeffizienten reduzierter Formen  $2|B| \leq C \leq 2\sqrt{\Delta/3}$ . Bei festem  $\Delta$  sind nur endlich viele  $B, C$  und  $A = (\Delta + B^2)/C$  möglich. Mit dem Reduktionssatz folgt die Behauptung.  $\square$

## 5.3 Die $J$ -Funktion

Wir konstruieren die  $J$ -Funktion  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  als holomorphe Orbitprojektion der Modulgruppe  $\Gamma$ , ohne die a priori-Existenz solcher Projektionen (4.5.2) heranzuziehen. Die Surjektivität  $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$  ergibt die Lösung des Jacobischen Problems 2.2.7.

**5.3.1 Die Jot-Invariante eines Gitters.** Mit den Gitterinvarianten  $g_2 = g_2(\Omega)$  und  $g_3 = g_3(\Omega)$  aus 2.2.4-6 bilden wir die *Jot-Invariante*

$$(1) \quad j(\Omega) := \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \in \mathbb{C}.$$

Wegen 2.2.5(3) ist der Nenner  $\neq 0$ . Die hier auftretende rationale Funktion

$$(2) \quad h(z, w) = \frac{z^3}{z^3 - 27w^2} \quad \text{für } (z, w) \in \mathbb{C}^2 \text{ mit } z^3 - 27w^2 \neq 0$$

hat folgende Eigenschaft:

$$(3) \quad h(a, b) = h(c, d) \Leftrightarrow c = u^4 a \text{ und } d = u^6 b \text{ für ein } u \in \mathbb{C}^\times.$$

*Beweis.* Der Schluß von rechts nach links ist trivial. Umgekehrt folgt zunächst  $a^3 d^2 = c^3 b^2$ . Falls  $h(a, b) \neq 0$ , gilt  $ac \neq 0$ , und es gibt ein  $u \neq 0$  mit  $c = u^4 a$ . Es folgt  $d = u^6 b$ , wenn man  $u$  eventuell durch  $iu$  ersetzt. Falls  $h(a, b) = 0$ , ist  $a = c = 0$ . Jetzt folgt  $bd \neq 0$ , und die Existenz von  $u \neq 0$  ist trivial.  $\square$

**Äquivalenzsatz.** *Zwei Gitter  $\Omega$  und  $\Omega^*$  sind genau dann äquivalent, d.h.  $\Omega^* = u\Omega$  mit  $u \in \mathbb{C}^\times$ , wenn  $j(\Omega) = j(\Omega^*)$  ist.*

*Beweis.* Wegen (3) gilt  $j(\Omega) = j(\Omega^*)$  genau dann, wenn  $g_2(\Omega) = u^4 g_2(\Omega^*)$  und  $g_3(\Omega) = u^6 g_3(\Omega^*)$  für ein  $u \in \mathbb{C}^\times$  gilt. Nach 2.2.6(2)-(3) bestehen diese Gleichungen genau dann, wenn  $\Omega^* = u\Omega$  ist.  $\square$

Mit 3.3.2 erhält man als

**Folgerung.** *Zwei Tori  $\mathbb{C}/\Omega$  und  $\mathbb{C}/\Omega^*$  sind genau dann als Riemannsche Flächen isomorph, wenn  $j(\Omega) = j(\Omega^*)$  gilt.*  $\square$

**5.3.2 Invarianz und Holomorphie der  $J$ -Funktion.** Wir definieren die  $J$ -Funktion

$$J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \quad J(\tau) := j(\Omega_\tau),$$

als Jot-Invariante des Gitter  $\Omega_\tau := \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ . Aus dem Äquivalenzsatz in 5.3.1 zusammen mit Satz 5.1.1 folgt

$$(1) \quad J(\tau') = J(\tau) \Leftrightarrow \exists A \in \Gamma \text{ mit } \tau' = A(\tau). \quad \square$$

Man nennt  $J$  eine *Modulfunktion*, weil zwei reelle Basen von  $\mathbb{C}$  mit den Moduln  $\tau$  und  $\tau'$  genau dann äquivalente Gitter aufspannen, wenn die Werte  $J(\tau) = J(\tau')$  gleich sind.

Für jedes  $\tau \in \mathbb{H}$  werden die Gitterinvarianten

$$(2) \quad \begin{aligned} g_2(\tau) &:= g_2(\Omega_\tau) = 60 \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-4} \\ g_3(\tau) &:= g_3(\Omega_\tau) = 140 \sum'_{m,n} (m + n\tau)^{-6} \end{aligned}$$

durch normal konvergente Eisenstein-Reihen dargestellt, die über alle  $(m, n) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus \{(0, 0)\}$  summiert werden, vgl. 2.2.2(3) und 2.2.4(2). Daher sind die Funktionen  $g_2, g_3 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Es folgt

$$(3) \quad \text{Die Funktion } J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \text{ ist holomorph.} \quad \square$$

Genau dann, wenn  $g_3(\tau) = 0$  bzw.  $g_2(\tau) = 0$  ist, gilt  $J(\tau) = 1$  bzw.  $= 0$ . Mit Satz 2.5.4 folgt:

$$(4) \quad \text{Das Gitter } \Omega_\tau \text{ ist genau dann quadratisch bzw. hexagonal, wenn } J(\tau) = 1 \text{ bzw. } = 0 \text{ ist. Insbesondere gilt } J(i) = 1 \text{ und } J(e^{i\pi/3}) = 0. \quad \square$$

**5.3.3 Die Funktion  $\hat{J}$ .** Wegen  $J(\tau+1) = J(\tau)$  gibt es genau eine Funktion  $\hat{J} \in \mathcal{O}(\mathbb{E}^\times)$ , so daß  $\hat{J} \circ \exp(2\pi i\tau) = J(\tau)$  für alle  $\tau \in \mathbb{H}$  gilt. Sei  $r = e^{-2\pi}$ .

**Satz.** Die Beschränkung  $\hat{J}|_{\mathbb{E}_r^\times}$  ist injektiv und läßt sich mit einem einfachen Pol nach 0 meromorph fortsetzen. Dann ist  $\hat{J}(\mathbb{E}) = \hat{\mathbb{C}}$  und  $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$ .

*Beweis. Injektivität:* Für  $\mathbb{H}_1 := \{\tau \in \mathbb{H} : \operatorname{Im} \tau > 1\}$  ist  $\mathbb{E}_r^\times = \{\exp(2\pi i\tau) : \tau \in \mathbb{H}_1\}$ . Zu  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{H}_1$  gibt es Zahlen  $n_j \in \mathbb{Z}$  mit  $|\operatorname{Re} \tau_j + n_j| \leq \frac{1}{2}$ . Wegen  $\operatorname{Im}(\tau_j + n_j) = \operatorname{Im} \tau_j > 1$  liegt  $\tau_j + n_j$  im Modulbereich  $D$  außerhalb des unteren Randbogens. Wenn  $J(\tau_1) = J(\tau_2)$  ist, gehören  $\tau_1 + n_1$  und  $\tau_2 + n_2$  zur selben  $\Gamma$ -Bahn. Nach 5.1.3 folgt  $\tau_1 + n_1 - (\tau_2 + n_2) \in \{0, \pm 1\}$ . Jedenfalls ist  $\tau_1 - \tau_2 \in \mathbb{Z}$  und damit  $\exp(2\pi i\tau_1) = \exp(2\pi i\tau_2)$ .

*Fortsetzung:* Wegen der Injektivität hat  $\hat{J}$  bei 0 keine wesentliche Singularität, und wir können zu einer meromorphen Funktion  $\hat{J} : \mathbb{E} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  fortsetzen, die bei 0 die Windungszahl  $v(\hat{J}, 0) = 1$  hat.

*Surjektivität:* Aus  $J(\tau) = \hat{J} \circ \exp(2\pi i\tau)$  folgt  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} J(\tau) = \hat{J}(0)$  für  $\tau \in D$  mit  $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$ . Daher wird  $J|_D$  durch  $J(\infty) := \hat{J}(0)$  stetig auf die kompakte Hülle  $\bar{D} = D \cup \{\infty\}$  fortgesetzt. Dann ist  $\hat{J}(\mathbb{E}) = J(\bar{D})$  einerseits wie  $\mathbb{E}$  offen und andererseits wie  $\bar{D}$  kompakt, also  $\hat{J}(\mathbb{E}) = \hat{\mathbb{C}}$ . Da  $\hat{J}$  auf  $\mathbb{E}^\times$  holomorph ist, muß  $\hat{J}(0) = \infty$  und  $o(\hat{J}, 0) = -1$  sein, letzteres wegen  $v(\hat{J}, 0) = 1$ . Es folgt  $J(\mathbb{H}) = \hat{J}(\mathbb{E}^\times) = \mathbb{C}$ .  $\square$

**Zusammenfassung.** Die Funktion  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine holomorphe Orbitprojektion zur Modulgruppe  $\Gamma$ . Sie ist nur über 0 und 1 verzweigt und hat dort die Windungszahlen 3 bzw. 2.  $\square$

**5.3.4 Lösung des Jacobischen Problems.** Um die Formulierung 2.2.7(3) dieses Problems zu beweisen, genügt es, zu jedem Paar  $(a_2, a_3) \in \mathbb{C}^2$  mit  $a_2^3 \neq 27a_3^2$  ein Gitter  $\Omega$  mit den Invarianten  $g_j(\Omega) = a_j$  zu finden: Wegen  $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$  gibt es ein  $\tau \in \mathbb{H}$ , so daß  $j(\Omega_\tau) = a_2^3/(a_2^3 - 27a_3^2)$  ist. Hieraus folgt nach 5.3.1(3)  $a_2 = u^4 g_2(\Omega_\tau)$  und  $a_3 = u^6 g_3(\Omega_\tau)$  mit  $u \in \mathbb{C}^\times$ . Wegen 2.2.6(2) ist dann  $\Omega = u\Omega_\tau$  das gesuchte Gitter.  $\square$

**Historisches.** Hermite gab 1856 als Gitterinvariante  $4g_2^3/g_3^2$  an, [Her] I, p. 359 f. Dedekind [Ded] I, S. 193, ersetzte sie durch die Jot-Invariante, welche er *Valenz* nannte. Er zeigte [ibid.], S. 183, daß sie alle komplexen Zahlen als Werte annimmt und (modern ausgedrückt) eine  $\Gamma$ -Orbitprojektion ist. Dies wurde zur selben Zeit auch von Klein [Klei 1] III, S. 15, entdeckt, dessen Bezeichnung  $J$  sich durchsetzte.

Hurwitz [Hur] I, S. 588, bewies 1903 die Surjektivität  $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$  mit dem Residuensatz durch Integration über den Rand der Modulfigur  $D$  und löste damit das Jacobische Problem. Seine Bedeutung (S. 594) stellte er [ibid.], S. 594, noch einmal heraus: „Es ist eine für die Theorie der Funktion  $\wp(u)$  fundamentale Frage, ob die Perioden  $\omega_1, \omega_2$  stets so gewählt werden können, daß  $g_2$  und  $g_3$  vorgeschriebene Werte erhalten.“

Unser Beweis für  $J(\mathbb{H}) = \mathbb{C}$  durch Kompaktifizierung der Modulfigur und Fortsetzung der Funktion  $\hat{J}$  stammt aus [Bor].– Zur ursprünglichen Formulierung des Jacobischen Problems siehe 5.4.5.

**5.3.5 Werteverhalten der  $J$ -Funktion.** Aus 5.3.3 folgt

$$(1) \quad \lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty} J(\tau) = \infty. \quad \square$$

Bei Annäherung an den Rand  $\mathbb{R}$  von  $\mathbb{H}$  verhält sich  $J$  sehr erratisch:

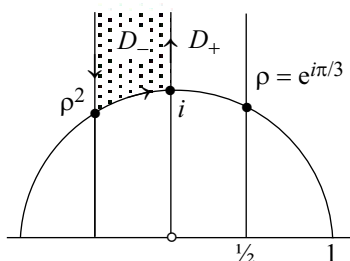
(2) Wenn die offene Menge  $U \subset \mathbb{C}$  die reelle Achse  $\mathbb{R}$  trifft, nimmt  $J$  jede komplexe Zahl an unendlich vielen Stellen in  $U \cap \mathbb{H}$  als Wert an, und kann in keinen Punkt von  $\mathbb{R}$  holomorph fortgesetzt werden.

*Beweis.* Nach 5.1.6(1) enthält  $U$  unendlich viele Dreiecke  $\Delta$  der Modulparakkettierung, und für jedes  $\Delta$  ist  $J(\Delta) = \mathbb{C}$ .  $\square$

Den Reihen 5.3.2(2) für  $g_2(\tau)$  und  $g_3(\tau)$  entnimmt man:

$$(3) \quad g_j(-\bar{\tau}) = \overline{g_j(\tau)}, \quad \text{also } J(-\bar{\tau}) = \overline{J(\tau)} \quad \text{für } \tau \in \mathbb{H}.$$

**Satz.** Der halbe Modulbereich  $D_-$ , siehe Figur 5.3.5, wird durch  $J$  homöomorph auf  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R}$  abgebildet. Dabei ist  $J(\partial D_-) = \mathbb{R}$ , und zwar wachsen die  $J$ -Werte streng monoton, wenn man den Rand  $\partial D_-$  gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.



**Fig. 5.3.5** Der Modulbereich  $D$  wird durch die imaginäre Achse halbiert. Längs des Randes des halben Bereichs  $D_-$  sind die  $J$ -Werte reell. Sie wachsen in Pfeilrichtung streng monoton von  $-\infty$  nach  $-\infty$ .

*Beweis.* Nach 5.1.3 ist  $J|_{D_-}$  injektiv. Wegen (3) und  $J(-\bar{\tau}) = \overline{J(\tau)}$  für  $\tau \in \partial D_-$  ist  $J|\partial D_-$  reellwertig, stetig und injektiv, also streng monoton, und zwar wachsend, da erst  $J(\rho^2) = 0$  und dann  $J(i) = 1$  erreicht werden. Das Bild  $J(\partial D_-)$  ist ein Intervall in  $\mathbb{R}$ . Wegen  $\lim_{\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty} J(\tau) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$  für  $\operatorname{Im} \tau \rightarrow \infty$  gilt  $J(\partial D_-) = \mathbb{R}$ . Da  $J$  wie jede injektive, holomorphe Funktion orientierungstreu ist, gilt  $J(D_-) \subset \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ . Wegen  $J(D) = \mathbb{C}$  und (3) ist sogar  $J(D_-) = \mathbb{H} \cup \mathbb{R}$ .  $\square$

Die  $J$ -Funktion gehört geschichtlich zu den ersten Beispielen nicht-fortsetzbarer Funktionen. Sie sind einfacher zu haben, z.B. als  $\sum z^{2^n}$  mit  $\mathbb{E}$  als Holomorphiegebiet, vgl. [Re 1], Abschnitt 5.3.3-4. Doch gelten solche ad hoc konstruierte Funktionen als künstlich.

## 5.4 Die $\lambda$ -Funktion

Die Orbitprojektion  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  der Modulgruppe  $\Gamma$  faktorisiert über die Orbitprojektion  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_*$  jeder Untergruppe  $\Gamma_* < \Gamma$ , siehe 4.5.3 und 4.6.2. Wir betrachten im folgenden die Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma_2 < \Gamma$  und gewinnen mittels der Halbperiodenwerte der  $\wp$ -Funktionen eine explizite Darstellung ihrer Orbitprojektion  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times} := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ .

**5.4.1 Die Hauptkongruenzgruppe.** Sei  $\mathbb{F}_2$  der Körper mit zwei Elementen. Der Restklassen-Epimorphismus  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_2$  induziert einen Epimorphismus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$  und daher wegen  $E \equiv -E \pmod{2}$  einen Epimorphismus  $\Gamma \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$ . Sein Kern heißt *Hauptkongruenzgruppe*  $\Gamma_2$ .

(1)  $\Gamma_2 \triangleleft \Gamma$  ist ein Normalteiler vom Index 6. Die Elemente von  $\Gamma_2$  sind die Automorphismen  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ,

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{2}.$$

*Beweis.* Es genügt,  $\sharp \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2) = 6$  zu zeigen. Der Vektorraum  $(\mathbb{F}_2)^2$  enthält drei Vektoren  $\neq 0$ , welche durch die Operation von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$  permutiert werden. Alle Permutationen kommen vor, d.h.  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_2)$  ist zur symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_3$  isomorph.  $\square$

**Satz.** Die Orbitprojektion  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}/\Gamma_2$  ist eine holomorphe, unverzweigte Überlagerung.

*Beweis.* Da  $\Gamma$  diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$  operiert, gilt dasselbe für die Untergruppe  $\Gamma_2$ . Es genügt zu zeigen, daß  $\Gamma_2$  frei operiert. Die Behauptung folgt dann wegen 4.4.5 oder 4.5.2. – Jede eventuell nicht-triviale Standgruppe  $(\Gamma_2)_\tau = \Gamma_\tau \cap \Gamma_2$  ist in  $\Gamma$  zu  $\Gamma_i \cap \Gamma_2$  oder  $\Gamma_\rho \cap \Gamma_2$  konjugiert. Die Elemente  $\neq \mathrm{id}$  in  $\Gamma_i$  und  $\Gamma_\rho$  sind  $S$  und  $R, R^2$ . Sie gehören nicht zu  $\Gamma_2$ . Daher ist  $(\Gamma_2)_\tau = \{\mathrm{id}\}$ .  $\square$

**5.4.2 Definition der  $\lambda$ -Funktion. Faktorisierung von  $J$ .** Die drei Halbperiodenwerte der  $\wp$ -Funktion

$$(1) \quad e_1(\tau) := \wp\left(\frac{1}{2}, \Omega_\tau\right), \quad e_2(\tau) := \wp\left(\frac{1}{2}\tau, \Omega_\tau\right), \quad e_3(\tau) := \wp\left(\frac{1}{2}(\tau + 1), \Omega_\tau\right)$$

hängen nach dem Konvergenzsatz in 2.2.1 holomorph von  $\tau \in \mathbb{H}$  ab und sind nach 2.2.3 für jedes  $\tau$  paarweise verschieden. Daher ist folgende  $\lambda$ -Funktion holomorph:

$$(2) \quad \lambda := \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times} := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

**Satz.** Die  $J$ -Funktion faktorisiert über  $\lambda$ ; genauer gilt

$$(3) \quad J : \mathbb{H} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{C}^{\times \times} \xrightarrow{p} \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad p(z) := \frac{4}{27} \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(z - 1)^2}.$$

*Beweis.* Mit  $e_3 - e_2 = (e_1 - e_2)\lambda$  und  $e_3 - e_1 = (e_1 - e_2) \cdot (\lambda - 1)$  folgt  $g_2^3 - 27g_3^2 = 16(e_1 - e_2)^6 \lambda^2(\lambda - 1)$  und  $g_2 = \frac{4}{3}(e_1 - e_2)^2(\lambda^2 - \lambda + 1)$  aus den Relationen (3) und (4) in 2.2.5. Einsetzen in  $J = g_2^3/(g_2^3 - 27g_3^2)$  gibt (3).  $\square$

Um  $\lambda$  als  $\Gamma_2$ -Orbitprojektion zu erkennen, benötigen wir

**5.4.3 Transformationsformeln.** Für  $z \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H}, A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  gilt

$$(1) \quad \wp(z, \Omega_{A(\tau)}) = (c\tau + d)^2 \wp((c\tau + d)z, \Omega_\tau).$$

*Beweis.* Nach 2.3.2(1) ist

$$\wp(z, \Omega_{A(\tau)}) = (c\tau + d)^2 \wp((c\tau + d)z, (c\tau + d)\Omega_{A(\tau)});$$

und der Basiswechsel ergibt

$$(c\tau + d)\Omega_{A(\tau)} = \mathbb{Z}(a\tau + b) + \mathbb{Z}(c\tau + d) = \Omega_\tau. \quad \square$$

Für die Funktionen  $e_k$  aus 5.4.2(1) und die  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega_\tau$  folgt

$$\begin{aligned} e_1(A(\tau)) &= (c\tau + d)^2 \wp\left(\frac{1}{2}(c\tau + d)\right), \\ (2) \quad e_2(A(\tau)) &= (c\tau + d)^2 \wp\left(\frac{1}{2}(a\tau + b)\right) \\ e_3(A(\tau)) &= (c\tau + d)^2 \wp\left(\frac{1}{2}((a + c)\tau + b + d)\right). \end{aligned}$$

Insbesondere gilt  $e_k(A(\tau)) = (c\tau + d)^2 e_k(\tau)$  für  $A \in \Gamma_2$ . Daraus erhält man die  $\Gamma_2$ -Invarianz der  $\lambda$ -Funktion:

$$(3) \quad \lambda \circ A = \lambda \quad \text{für } A \in \Gamma_2, \text{ insbesondere } \lambda(\tau + 2) = \lambda(\tau).$$

Die  $\lambda$ -Funktion ist nicht  $\Gamma$ -invariant. Denn für die Erzeugenden  $S(\tau) = -1/\tau$  und  $T(\tau) = \tau + 1$  von  $\Gamma$  gilt nach (2)

$$\begin{aligned} e_1(-1/\tau) &= \tau^2 e_2(\tau) \quad , \quad e_2(-1/\tau) = \tau^2 e_1(\tau) \quad , \quad e_3(-1/\tau) = \tau^2 e_3(\tau) \quad , \\ e_1(\tau + 1) &= e_1(\tau) \quad , \quad e_2(\tau + 1) = e_3(\tau) \quad , \quad e_3(\tau + 1) = e_2(\tau) \quad . \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$(4) \quad \lambda \circ S = 1 - \lambda \quad \text{und} \quad \lambda \circ T = \frac{\lambda}{\lambda - 1}, \text{ speziell } \lambda(i) = \frac{1}{2}, \lambda(1 + i) = -1.$$

**5.4.4 Überlagerungssatz.** Die  $\lambda$ -Funktion ist eine unverzweigte, universelle Überlagerung  $\lambda: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  mit der Deckgruppe  $\Gamma_2$ .

*Beweis.* Die Funktionen  $J$  und  $\lambda$  sind längs der  $\Gamma_2$ -Bahnen konstant und faktorisieren daher über die  $\Gamma_2$ -Orbitprojektion  $\eta$ : Es gibt holomorphe Abbildungen  $\psi$  und  $\kappa$  mit

$$J: \mathbb{H} \xrightarrow{\eta} \mathbb{H}/\Gamma_2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \lambda: \mathbb{H} \xrightarrow{\eta} \mathbb{H}/\Gamma_2 \xrightarrow{\kappa} \mathbb{C}^{\times \times}.$$

Da  $\Gamma_2 \triangleleft \Gamma$  ein Normalteiler vom Index 6 ist, handelt es sich bei  $\psi$  um eine 6-blättrige normale Überlagerung, siehe 4.5.3. Aus  $\psi \circ \eta = J = p \circ \lambda = p \circ \kappa \circ \eta$  und der Surjektivität von  $\eta$  folgt  $p \circ \kappa = \psi$ . Wegen  $\mathrm{gr} p = 6 = \mathrm{gr} \psi$  ist  $\kappa$  ein Isomorphismus.  $\square$

**5.4.5 Historisches.** Wegen 5.4.4 nimmt die  $\lambda$ -Funktion jede komplexe Zahl  $\neq 0, \neq 1$  als Wert an. In den Beweis geht die Surjektivität der  $J$ -Funktion entscheidend ein. Umgekehrt folgt aus der Surjektivität von  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  sofort die Surjektivität von  $J = p \circ \lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  und damit die Lösung des Jacobischen Problems.

Der Name „Jacobisches Problem“ erinnert an eine Vorlesung von Jacobi, die Borchardt während seiner Studienzeit 1838 in dessen Auftrag ausarbeitete, [Ja] 1, S. 499–536. Auf S. 520 ff. wird das Problem der Surjektivität von  $\lambda$  formuliert, und es wird bewiesen, daß alle *reellen* Zahlen zwischen 0 und 1 Werte von  $\lambda$  sind.

Weierstraß knüpft hieran an und beweist 1883, daß alle *komplexen* Zahlen  $\neq 0, \neq 1$  Werte von  $\lambda$  sind, siehe [Wst] 2, S. 257–309.

**5.4.6 Kleiner Satz von Picard** ([Pi] 1, p. 19). *Jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C}^{\times} \rightarrow \mathbb{C}$ , die zwei komplexe Zahlen als Werte ausläßt, ist konstant.*

*Beweis.* Indem wir  $f(z)$  durch  $af(e^z) + b$  ersetzen, erreichen wir  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  und  $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{\times \times}$  durch passende Wahl von  $a \in \mathbb{C}^{\times}$  und  $b \in \mathbb{C}$ . Weil  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  eine unverzweigte Überlagerung ist und  $\mathbb{C}$  einfach zusammenhängt, kann man  $f$  nach dem Monodromiesatz 3.2.6 (ergänzt durch 3.3.1) zur holomorphen Funktion  $\hat{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}$  liften, so daß  $f = \lambda \circ \hat{f}$  ist. Wegen  $\mathbb{H} \approx \mathbb{E}$  ist  $\hat{f}$  nach dem Liouvilleschen Satz konstant.  $\square$

**5.4.7 Die anharmonische Gruppe**  $\Lambda < \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  besteht aus alle Automorphismen, die  $\{0, 1, \infty\}$  in sich transformieren, vgl. Aufgabe 4.9.8. Sie ist zur Permutationsgruppe  $\mathcal{S}_3$  isomorph und hat die sechs Elemente

$$(1) \quad z, 1 - z, 1/z, z/(z - 1), 1/(1 - z), (z - 1)/z.$$

**Satz.** (a) *Die rationale Funktion  $p$  aus 5.4.2(3) ist eine  $\Lambda$ -Orbitprojektion.*

(b) *Es gibt genau einen Epimorphismus  $\Gamma \rightarrow \Lambda, A \mapsto \hat{A}$ , mit dem Kern  $\Gamma_2$ , so daß  $\lambda \circ A = \hat{A} \circ \lambda$  für  $A \in \Gamma$  gilt.*

(c) *Für die erzeugenden Elemente  $S(\tau) = -1/\tau$  und  $T(\tau) = 1 + \tau$  von  $\Gamma$  ist  $\hat{S}(z) = 1 - z$  und  $\hat{T}(z) = z/(z - 1)$ .*

*Beweis.* (a) Die Gruppe  $\Lambda$  wird von  $z \mapsto 1 - z$  und  $z \mapsto 1/z$  erzeugt. Wegen  $p(1 - z) = p(z) = p(1/z)$  ist  $\Lambda < \mathcal{D}(p)$  und wegen  $\sharp \Lambda = 6 = \text{gr } p$  sogar  $\Lambda = \mathcal{D}(p)$ . – (b) folgt nach 4.5.3 aus der Faktorisierung  $J = p \circ \lambda$  mit den Deckgruppen  $\mathcal{D}(\lambda) \triangleleft \mathcal{D}(J)$ . – (c) folgt aus 5.4.3(4).  $\square$

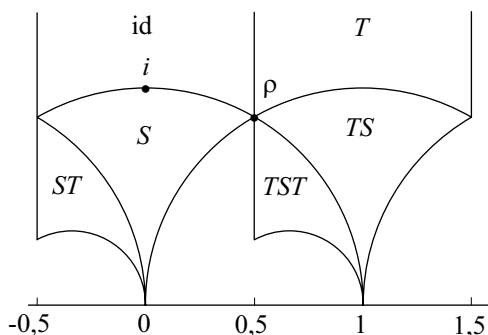
Es gibt also sechs gleichberechtigte „Lambda-Funktionen“  $\hat{A} \circ \lambda$  mit  $\hat{A} \in \Lambda$ . Sie unterscheiden sich von  $\lambda = (e_3 - e_2)/(e_1 - e_2)$  durch die Permutationen der  $e_1, e_2, e_3$ .

## 5.5 Eigenschaften der $\lambda$ -Funktion

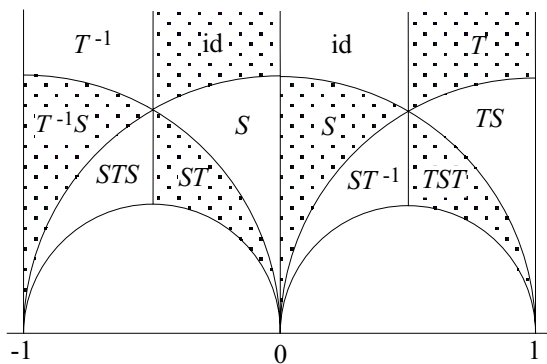
Wir geben zwei Fundamentalbereiche der Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma_2$  an und setzen die  $\lambda$ -Funktion stetig in die Spitzen dieser Bereiche fort. Ferner berechnen wir die Fourier-Reihen der  $\lambda$ - und  $J$ -Funktion.

**5.5.1 Fundamentalbereiche für  $\Gamma_2$ .** Nach Satz 5.1.3 ist der Modulbereich  $D$  ein Fundamentalbereich der Modulgruppe  $\Gamma$ . Indem man aus jeder Restklasse von  $\Gamma \bmod \Gamma_2$  einen Repräsentanten  $A$  wählt, erhält man den Fundamentalbereich  $F = \bigcup A(D)$  für  $\Gamma_2$ . Figur 5.5.1a zeigt  $F$  für die sechs Repräsentanten  $\text{id}, S, T, ST, TS, TST$ .

Ein alternativer  $\Gamma_2$ -Fundamentalbereich von einfacherer Gestalt entsteht folgendermaßen: Man zerlegt  $D = D_+ \cup D_-$  wie in Figur 5.3.5 und bildet  $D_+$  und  $D_-$  mit teilweise verschiedenen Repräsentanten ab, siehe Figur 5.5.1b. Die Bilder von  $D_-$  sind punktiert.



**Fig. 5.5.1 a.** Ein Fundamentalbereich  $F$  für die Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma_2$  ist aus sechs Bildern  $A(D)$  des Modulbereichs  $D$  zusammengesetzt. Dabei ist  $A$  als Produkt von  $S$  und  $T$  angegeben.



**Fig. 5.5.1 b.** Ein alternativer  $\Gamma_2$ -Fundamentalbereich ist aus je sechs Bildern der halben Modulbereiche  $D_{\pm}$  zusammengesetzt. Für  $D_+$  und  $D_-$  werden teilweise verschiedene Transformationen benutzt.

**5.5.2 Die Funktion  $\hat{\lambda}$ .** Weil  $\lambda$  die Periode 2 hat, gibt es genau eine auf  $\mathbb{E}^\times$  holomorphe Funktion  $\hat{\lambda}$  mit  $\lambda(\tau) = \hat{\lambda}(e^{\pi i \tau})$ . Wir vergleichen mit  $J(\tau) = \hat{J}(e^{2\pi i \tau})$ : Aus  $J = p \circ \lambda$  folgt

$$(1) \quad \hat{J}(z^2) = p \circ \hat{\lambda}(z) \quad \text{für } z \in \mathbb{E}^\times.$$

**Satz.** Die Funktion  $\hat{\lambda}$  läßt sich durch  $\hat{\lambda}(0) = 0$  holomorph auf ganz  $\mathbb{E}$  fortsetzen. Es gilt  $o(\hat{\lambda}, 0) = 1$ . Für jede Folge  $\tau_n$  im Fundamentalbereich  $F$  mit  $\lim \tau_n = \infty$  ist  $\lim \lambda(\tau_n) = 0$ .



*Beweis.* Die Stelle 0 ist keine wesentliche Singularität von  $\hat{\lambda}$ . Denn sonst wäre  $\hat{\lambda}(\mathbb{E}_r^\times)$  für jeden Radius  $0 < r < 1$  offen und dicht in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Wegen  $p(\hat{\mathbb{C}}) = \hat{\mathbb{C}}$  gälte dasselbe für  $p \circ \hat{\lambda}(\mathbb{E}_r^\times) = \hat{J}(\mathbb{E}_{r^2}^\times)$ . Das kann nicht sein, weil  $\hat{J}$  bei 0 einen einfachen Pol hat.

Wegen  $p \circ \hat{\lambda}(0) = \hat{J}(0)$  ist  $\hat{\lambda}(0) \in p^{-1}(\infty) = \{0, 1, \infty\}$ . Mit  $v(p, x) = 2$  für  $x \in p^{-1}(\infty)$  und  $v(\hat{J}, 0) = 1$  folgt  $v(\hat{\lambda}, 0) = 1$  aus (1).

Sei  $\tau_n \in F$  eine Folge mit  $\lim \tau_n = \infty$ . Dann ist  $\lim \operatorname{Im} \tau_n = \infty$ , also  $\lim \exp(\pi i \tau_n) = 0$  und  $x := \lim \lambda(\tau_n) = \lim_{z \rightarrow 0} \hat{\lambda}(z)$ . Es gilt auch  $x = \lim \lambda(\tau_n + 1)$ . Wegen  $\lambda \circ T = \lambda/(\lambda - 1)$  folgt  $x = x/(x - 1)$ , also  $x = 0$ .  $\square$

**5.5.3 Fortsetzung in die Spitzen.** Der Fundamentalbereich  $F$  von Figur 5.5.1a wird durch Hinzunahme der Spitzen  $0, 1, \infty$  zur kompakten Hülle  $\bar{F} \subset \hat{\mathbb{C}}$  abgeschlossen.

**Satz.** Die Beschränkung  $\lambda : F \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  läßt sich durch  $\lambda(\infty) := 0$ ,  $\lambda(0) := 1$  und  $\lambda(1) := \infty$  zu einer stetigen Abbildung  $\lambda : \bar{F} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  fortsetzen.

*Beweis.* Für jede Folge  $\tau_n \in F$  mit  $\lim \tau_n = \infty$  gilt  $\lim \lambda(\tau_n) = 0$  (Satz 5.5.2). Nach Figur 5.5.1a gibt es zu jeder Folge  $\sigma_n \in F$  mit  $\lim \sigma_n = 0$  eine Folge  $\tau_n \in F$  mit  $\lim \tau_n = \infty$  und  $S(\tau_n) = \sigma_n$ . Wegen  $\lambda \circ S = 1 - \lambda$  folgt  $\lim \lambda(\sigma_n) = 1$ . Entsprechend gibt es zu jeder Folge  $\sigma_n \in F$  mit  $\lim \sigma_n = 1$  eine Folge  $\tau_n \in F$  mit  $\lim \tau_n = \infty$  und  $T \circ S(\tau_n) = \sigma_n$ , also  $\lim \lambda(\sigma_n) = \infty$  wegen  $\lambda \circ T \circ S = (\lambda - 1)/\lambda$ .  $\square$

Wenn man den alternativen Fundamentalbereich von Figur 5.5.1b wählt, hat  $\lambda$  dieselben Spitzenwerte bei  $0, 1, \infty$  und zusätzlich den Wert  $\lambda(-1) = \infty$ .

**5.5.4 Die Fourier-Reihe von  $\lambda$ .** Wegen  $\lambda(\tau) = \hat{\lambda}(e^{i\pi\tau})$  heißt die Laurent-Reihe von  $\hat{\lambda}$  bei 0 die Fourier-Reihe von  $\lambda$ . Um sie zu berechnen, wird die Definition von  $\lambda$  über  $e_1, e_2, e_3$  bis zur Reihenentwicklung 2.2.1(3) der  $\wp$ -Funktion zurückverfolgt.

**Satz.** Die Fourier-Reihe der  $\lambda$ -Funktion hat die Gestalt

$$(1) \quad \lambda(\tau) = \hat{\lambda}(q) = 16(q + \sum_{n=2}^{\infty} c_n q^n) \text{ mit } q := e^{\pi i \tau} \in \mathbb{E} \text{ und } c_n \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.* Der Ausgangspunkt ist Reihe

$$\wp(w; \Omega_r) - \wp(z; \Omega_r) = \sum_{m,n} \left[ \frac{1}{(w - m - n\tau)^2} - \frac{1}{(z - m - n\tau)^2} \right].$$

Die Summation über  $m$  gibt wegen  $\pi^2/\sin^2 \pi u = \sum_{-\infty}^{\infty} (u - m)^{-2}$ :

$$\wp(w; \Omega_r) - \wp(z; \Omega_r) = \pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sin^2(w - n\tau)\pi} - \frac{1}{\sin^2(z - n\tau)\pi} \right].$$

Mit  $z := \frac{1}{2}\tau$  und  $w := \frac{1}{2}$  bzw.  $w := \frac{1}{2}(1 + \tau)$  entsteht wegen  $\sin(\frac{1}{2}\pi + u) = \cos u$ :

$$\begin{aligned} e_1(\tau) - e_2(\tau) &= \pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\cos^2 n\pi\tau} - \frac{1}{\sin^2(n - \frac{1}{2})\pi\tau} \right], \\ e_3(\tau) - e_2(\tau) &= \pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\cos^2(n - \frac{1}{2})\pi\tau} - \frac{1}{\sin^2(n - \frac{1}{2})\pi\tau} \right]. \end{aligned}$$

Da  $\cos^2$  und  $\sin^2$  gerade Funktionen sind, ergibt sich:

$$\begin{aligned} e_1(\tau) - e_2(\tau) &= \pi^2 \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\cos^2 n\pi\tau} - \frac{1}{\sin^2(n - \frac{1}{2})\pi\tau} \right] \right), \\ e_3(\tau) - e_2(\tau) &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{\cos^2(n - \frac{1}{2})\pi\tau} - \frac{1}{\sin^2(n - \frac{1}{2})\pi\tau} \right]. \end{aligned}$$

Mit  $q = e^{\pi i \tau}$  ist  $\cos^{-2}(k\pi\tau) = 4q^{2k}/(1+q^{2k})^2$ ,  $\sin^{-2}(k\pi\tau) = -4q^{2k}/(1-q^{2k})^2$ . Für  $k = n$  bzw.  $= n - \frac{1}{2}$  folgt

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \pi^2 \left( 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} \left[ \frac{q}{(1+q^{2n})^2} + \frac{1}{(1-q^{2n-1})^2} \right] \right), \\ e_3 - e_2 &= 8\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n-1} \left[ \frac{1}{(1+q^{2n-1})^2} + \frac{1}{(1-q^{2n-1})^2} \right]. \end{aligned}$$

Wegen  $|1/(1 \pm q^m)| \geq 1 - r^m$  für  $|q| \leq r < 1$  konvergieren diese Reihen normal in  $\mathbb{E}$  gegen dort holomorphe Funktionen. Ordnen nach Potenzen von  $q$  gibt

$$e_1 - e_2 = \pi^2 \left( 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n \right), \quad e_3 - e_2 = 16\pi^2 \left( q + \sum_{n=2}^{\infty} b_n q^n \right) \text{ mit } a_n, b_n \in \mathbb{Z}.$$

Mit  $\lambda = (e_3 - e_2)/(e_1 - e_2)$  folgt (1).  $\square$

Da alle Fourier-Koeffizienten reell sind, gilt

$$(2) \quad \lambda(-\bar{\tau}) = \overline{\lambda(\tau)} \text{ für alle } \tau \in \mathbb{H} \text{ und } \lambda(\tau) \in \mathbb{R}, \text{ falls } \operatorname{Re} \tau \in \mathbb{Z}. \quad \square$$

**5.5.5 Die Fourier-Reihe von  $J$ .** Aus  $\hat{J}(z^2) = p \circ \hat{\lambda}(z)$ , siehe 5.5.2(1), und der Laurent-Reihe

$$p(z) = \frac{4}{27} \frac{(z^2 - z + 1)^3}{z^2(1 - z^2)^2} = \frac{4}{27} z^{-2} \left( 1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n \right) \text{ mit } u_n \in \mathbb{Z}$$

folgt die Laurent-Reihe

$$(1) \quad \hat{J}(h) = 12^{-3} \left( h^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} d_n h^n \right) \text{ mit } d_n \in \mathbb{Z},$$

welche mit  $h = e^{2\pi i \tau}$  zur *Fourier-Reihe von  $J$*  wird. – Die *ganzahligen* Koeffizienten der Fourier-Reihen von  $\lambda$  und  $J$  lassen zahlentheoretische Zusammenhänge vermuten. Diese sind in der Tat vorhanden, aber tieflegend, siehe [Leh]. Reihen- und Produktentwicklungen der *Modulformen* (= Gitterinvarianten von  $\Omega_\tau$ )  $g_2$ ,  $g_3$  und  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$  sind leichter zugänglich, siehe [Se].

## 5.6 Anwendungen der $\lambda$ -Funktion

Ergebnisse über holomorphe Funktionen, die zwei komplexe Zahlen als Werte auslassen, werden wie der kleine Satz von Picard dadurch gewonnen, daß man den Monodromiesatz auf die Überlagerung  $\lambda : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  anwendet. Außerdem benutzen wir aus der elementaren Funktionentheorie:

**Schwarzsesches Lemma für  $\mathbb{E}$ .** Sei  $f : (\mathbb{E}, 0) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  holomorph. Dann gilt  $|f(z)| \leq |z|$  und  $|f'(0)| \leq 1$ . Aus  $|f'(0)| = 1$  oder  $|f(a)| = |a|$  für ein  $a \neq 0$  folgt  $f(z) = cz$  mit  $|c| = 1$ .

**5.6.1 Schwarzsches Lemma für  $\mathbb{H}$ .** Wenn  $h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$  holomorph ist, gilt

$$(1) \quad \operatorname{Im} h(z) \geq \operatorname{Im} h(0) \frac{1 - |z|}{1 + |z|} \quad \text{für } z \in \mathbb{E}.$$

*Beweis.* Sei  $b := h(0)$ . Für den Isomorphismus  $q : (\mathbb{E}, 0) \rightarrow (\mathbb{H}, b)$ ,  $q(w) := (b - \bar{b}w)/(1 - w)$  gilt

$$\operatorname{Im} q(w) = (\operatorname{Im} b) \cdot \frac{1 - |w|^2}{|1 - w|^2} \geq (\operatorname{Im} b) \cdot \frac{1 - |w|}{1 + |w|}.$$

Nach dem Schwarzschen Lemma für  $\mathbb{E}$  ist  $|q^{-1} \circ h(z)| \leq |z|$ . Die Behauptung folgt mit  $w := q^{-1} \circ h(z)$ .  $\square$

**5.6.2 Konvergenz nach Ausnahmewerten.** Sei  $f_n : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  eine Folge holomorpher Funktionen mit  $\lim f_n(0) = c \in \{0, 1, \infty\}$ . Dann konvergiert  $f_n$  lokal gleichmäßig nach  $c$ .

*Beweis.* Es gibt ein  $g \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  mit  $g(c) = 0$ . Indem wir  $f_n$  durch  $g \circ f_n$  ersetzen, können wir  $c = 0$  annehmen. Zu jedem  $f_n$  gibt es eine  $\lambda$ -Liftung  $h_n : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$ , so daß  $a_n := h_n(0)$  im  $I_2$ -Fundamentalebereich  $F$  der Figur 5.5.1a liegt. Dann gilt  $\lim a_n = \infty$ . Denn sonst gäbe es eine Teilfolge  $a_{n_j}$ , die im Kompaktum  $\overline{F} = F \cup \{0, 1, \infty\}$  einen Grenzwert  $a \neq \infty$  hätte. Weil  $\lambda|_{\overline{F}}$  stetig ist, würde  $\lim f_{n_j}(0) = \lambda(a) \neq 0$  folgen, siehe 5.5.3.

Weil die Realteile von  $a_n$  beschränkt sind, gilt  $\lim \operatorname{Im} a_n = \infty$ , also  $\lim \exp(\pi i a_n) = 0$ . Wegen 5.6.1 ist

$$\operatorname{Im} h_n(z) \geq (\operatorname{Im} a_n) \cdot \frac{1 - r}{1 + r} \quad \text{für } |z| \leq r < 1.$$

Somit konvergiert  $\exp(\pi i h_n(z))$  für  $|z| \leq r$  gleichmäßig nach 0. Aus  $f_n = \lambda \circ h_n = \hat{\lambda} \circ \exp(\pi i h_n)$  folgt, daß  $f_n$  für  $|z| \leq r$  gleichmäßig nach  $\hat{\lambda}(0) = 0$  konvergiert.  $\square$

**5.6.3 Sätze von Montel.** Sei  $X \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet. Eine Folge von Funktionen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt beschränkt, wenn es eine Schranke  $M$  gibt, so daß  $|f_n(z)| \leq M$  für alle  $n$  und alle  $z \in X$  gilt. Folgendes Ergebnis gehört zur elementaren Funktionentheorie, vgl. [Re 2], 7.1.1.

**Kleiner Satz von Montel** ([Mo 1], p. 300, 1907). Jede beschränkte Folge holomorpher Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Funktion  $X \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert.

Montel selbst hat diesen Satz auf Riemannsche Flächen übertragen und die Voraussetzung der Beschränktheit dahin abgeschwächt, daß alle Funktionen der Folge dieselben zwei komplexen Zahlen nicht als Werte annehmen:

**Großer Satz von Montel** ([Mo 2], p. 497, 1912). Jede Folge holomorpher Abbildungen  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$  besitzt eine Teilfolge, die lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Abbildung  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  konvergiert. Wenn  $f$  einen Wert 0, 1 oder  $\infty$  annimmt, ist  $f$  konstant.

*Beweis.* Es genügt, den Satz für  $X = \mathbb{E}$  zu beweisen. Denn  $X$  kann durch abzählbar viele Scheiben  $U_k$  überdeckt werden, siehe 3.5.3(2). Wenn der Satz für  $\mathbb{E}$  gilt, gibt es zu jedem  $k$  und zu jeder Folge holomorpher Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  eine Teilfolge, die auf  $U_k$  gegen eine holomorphe Funktion  $U_k \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  oder eine Konstante  $0, 1, \infty$  kompakt konvergiert. Durch das Cantorsche Diagonalverfahren erhält man *eine* Teilfolge, die auf allen  $U_k$  und damit auf ganz  $X$  lokal gleichmäßig konvergiert.

Um den Satz für  $X = \mathbb{E}$  zu beweisen, wählt man zu jedem  $f_n$  eine  $\lambda$ -Liftung  $h_n : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$  so daß  $h_n(0)$  im  $\Gamma_2$ -Fundamentalebereich  $F$  liegt. Wegen  $\mathbb{H} \approx \mathbb{E}$  kann man den kleinen Satz von Montel anwenden: Durch Übergang zu einer Teilfolge erreicht man, daß  $h_n$  lokal gleichmäßig gegen eine holomorphe Abbildung  $h : \mathbb{E} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  konvergiert. Wenn  $h(\mathbb{E}) \subset \mathbb{H}$  ist, folgt die lokal gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge  $f_n = \lambda \circ h_n$  gegen die holomorphe Funktion  $\lambda \circ h : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$ .– Sei nun  $h(\mathbb{E}) \not\subset \mathbb{H}$ . Dann ist  $h$  konstant. Denn sonst wäre  $h(\mathbb{E})$  offen in  $\hat{\mathbb{C}}$  und enthalten in  $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , also  $h(\mathbb{E}) \subset \mathbb{H}$ . Der konstante Wert  $s$  von  $h$  liegt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Wegen  $h_n(0) \in F$  ist  $s = \lim h_n(0)$  eine Spitze von  $F$ . Da sich  $\lambda|_F$  stetig in die Spitzen fortsetzen läßt (5.5.3), ist  $\lim f_n(0) = \lambda(s) \in \{0, 1, \infty\}$ . Nach 5.6.2 konvergiert dann  $f_n$  lokal gleichmäßig nach  $\lambda(s)$ .  $\square$

**5.6.4 Großer Satz von Picard** ([Pi] 1, p. 27, 1879). *Sei  $(U, a)$  eine Scheibe. Wenn die Funktion  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$  in  $a$  eine wesentliche Singularität hat, nimmt sie jede komplexe Zahl, mit höchstens einer Ausnahme, unendlich oft als Wert an.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen:

*Ist  $f : \mathbb{E}^\times \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  holomorph, so ist  $f$  oder  $1/f$  bei 0 beschränkt.*

Wir bilden die Folge  $f_n(z) = f(z/n)$  für  $z \in \mathbb{E}^\times$ . Nach dem großen Satz von Montel gibt es eine kompakt konvergente Teilfolge  $(f_{n_k})$ , deren Limes holomorph oder konstant  $= \infty$  ist. Im ersten Fall ist die Folge  $f_{n_k}$  längs der Kreislinie  $|z| = \frac{1}{2}$  beschränkt: Es gibt ein  $M > 0$  mit  $|f(z/n_k)| \leq M$  für  $|z| = \frac{1}{2}$  und alle  $k$ , also  $|f(z)| \leq M$  für  $|z| = (2n_k)^{-1}$ . Nach dem Maximumprinzip folgt  $|f(z)| \leq M$  für  $(2n_k)^{-1} \leq |z| \leq (2n_1)^{-1}$  und alle  $k$ . Wegen  $\lim n_k = \infty$  ist  $f$  bei 0 beschränkt.– Im zweiten Fall  $\lim f_{n_k} = \infty$  ist die Folge  $1/f_{n_k}$  längs  $|z| = \frac{1}{2}$  beschränkt, und es folgt analog, daß  $1/f$  bei 0 beschränkt ist.  $\square$

**5.6.5 Der Landausche Radius.** Die Funktion

$$l : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}, l(\tau) := 2|\lambda'(\tau)| \cdot \operatorname{Im} \tau$$

ist  $\Gamma_2$ -invariant. Denn wenn  $A \in \Gamma_2$  durch  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$  bestimmt ist, gilt  $\lambda \circ A = \lambda$ ,  $A'(\tau) = (c\tau + d)^{-2}$  und  $\operatorname{Im} A(\tau) = \operatorname{Im} \tau / |c\tau + d|^2$ .– Daher gibt es genau eine Funktion

$$L : \mathbb{C}^{\times \times} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } l = L \circ \lambda,$$

die wie  $l$  reell-analytisch und überall  $> 0$  ist. Man nennt  $L(a)$  den *Landauschen Radius* an der Stelle  $a \in \mathbb{C}^{\times \times}$ .

**Satz (Landau-Carathéodory).** Für jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  gilt  $|f'(0)| \leq L(f(0))$ .

*Beweis.* Man wählt eine  $\lambda$ -Liftung  $g : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{H}$  von  $f$ . Sei  $b := g(0)$  und  $h : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}$ ,  $h(\tau) = (\tau - b)/(\tau - \bar{b})$ . Nach dem Schwarzschen Lemma ist  $|(h \circ g)'(0)| \leq 1$ . Daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Da  $|(h \circ g)'(0)| = 1$  nur für eine Drehung  $h \circ g$  möglich ist, gilt

$$(1) \quad |f'(0)| = L(f(0)) \Leftrightarrow f(z) = \lambda \circ \beta^{-1}(cz) \text{ mit } |c| = 1.$$

Wenn man die Definition von  $L$  durch die Werte  $L(0) = L(1) = -1$  ergänzt, kann man den Satz auch so aussprechen:

$$(2) \quad \text{Jede holomorphe Funktion } f : \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \rightarrow \mathbb{C} \text{ nimmt den Wert } 0 \text{ oder } 1 \text{ an, sobald } r|f'(a)| > L(f(a)) \text{ ist.} \quad \square$$

Der *Kleine Satz von Picard* folgt aus (2): Wenn die nicht-konstante ganze Funktion  $g$  den Wert  $c$  ausläßt und  $w \neq c$  ist, wendet man (2) auf  $f := (g - c)/(w - c)$  an: An einer Stelle  $a$  ist  $f'(a) \neq 0$ . Da  $r$  beliebig groß ist, nimmt  $f$  den Wert 1 an.  $\square$

Landau [Land] 2, S. 130 ff., hat 1904 die Existenz der Funktion  $L(z)$  als „unerwartete Tatsache“ dem Picardschen Satz „hinzugefügt“; er hat „lange mit der Publikation gezögert, da der Beweis richtig, aber der Satz zu unwahrscheinlich schien“ [Land] 4, S. 375, siehe auch [LG], S. 102. Der genaue Wert des Landauschen Radius wurde 1905 von Carathéodory angegeben, siehe [Cy 2] 3, S. 6-9.

**5.6.6 Der 1/16-Satz (Hurwitz-Carathéodory).** Wenn die Potenzreihe  $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$  auf  $\mathbb{E}$  konvergiert und keine Nullstellen in  $\mathbb{E}^\times$  hat, gilt  $\mathbb{E}_{1/16} \subset f(\mathbb{E})$ . Der Radius 1/16 ist scharf: Ein Punkt  $a \notin f(\mathbb{E})$  mit  $|a| = 1/16$  existiert genau dann, wenn  $f(z) = \hat{\lambda}(cz)$  mit  $|c| = 1$  gilt.

*Beweis.* Für  $\varepsilon(\tau) = \exp(\pi i \tau)$  gilt  $\lambda = \hat{\lambda} \circ \varepsilon$  und  $\hat{\lambda}(q) = 16q + \dots$ , siehe 5.5.2 und 5.5.4. Sei  $a \notin f(\mathbb{E})$ . Für  $g := a^{-1}f$  gilt  $g(\mathbb{E}^\times) \subset \mathbb{C}^{\times \times}$ . Daher besitzt  $g \circ \varepsilon : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}^{\times \times}$  eine  $\lambda$ -Liftung  $\tilde{g} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ .

Für kleine  $r > 0$  gibt es eine Umkehrfunktion  $h : \mathbb{E}_r \rightarrow \mathbb{E}$  zu  $\hat{\lambda}$ . Sei  $s > 0$  so klein, daß  $g(\mathbb{E}_s) \subset \mathbb{E}_r$ . Sei  $t > 0$  so groß, daß  $\varepsilon(\mathbb{H}_t) \subset \mathbb{E}_s$  für  $\mathbb{H}_t := \{\tau : \operatorname{Im} \tau > t\}$ . Es gilt  $\hat{\lambda} \circ \varepsilon \circ \tilde{g} = g \circ \varepsilon$ . Wenn man auf  $\mathbb{H}_t$  einschränkt, kann man  $h$  nachschalten. Es folgt  $\varepsilon \circ \tilde{g} = h \circ g \circ \varepsilon$ . Somit hat  $\varepsilon \circ \tilde{g}|_{\mathbb{H}_t}$  die Periode 2. Das gilt dann auf ganz  $\mathbb{H}$ , und es gibt eine Faktorisierung  $v \circ \varepsilon = \varepsilon \circ \tilde{g}$  mit einer holomorphen Funktion  $v : \mathbb{E}^\times \rightarrow \mathbb{E}^\times$ . Wegen der Eindeutigkeit ist  $v = h \circ g$  auf  $\mathbb{E}_s^\times$ . Man kann also  $v$  durch  $v(0) = 0$  zu  $v : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$  holomorph fortsetzen. Nachschalten von  $\hat{\lambda}$  ergibt  $\hat{\lambda} \circ v = g$  zunächst auf  $\mathbb{E}_s$  und dann auf ganz  $\mathbb{E}$ . Daraus folgt  $a^{-1} = g'(0) = \hat{\lambda}'(0) \cdot v'(0) = 16 v'(0)$ . Nach dem Schwarzschen Lemma ist  $|v'(0)| \leq 1$ , so daß  $|a| \geq 1/16$  folgt. Gleichheit besteht genau dann, wenn  $v$  eine Drehung um 0 ist, also  $g(z) = \hat{\lambda}(cz)$  mit  $|c| = 1$  gilt.  $\square$

Der Satz wurde 1904 von Hurwitz, [Hur] 1, S. 602, Satz IV, mit der Schranke 1/58 statt 1/16 bewiesen. Carathéodory zeigte 1907, [Cy 2] 3, S. 6-9, daß 1/16 die bestmögliche Schranke ist. Landau – mit seiner Liebe für *Weltkonstanten* – bedauerte 1929 in [Land] 9, S. 78, daß er nicht die „Carathéodorysche Konstante  $C$ “ einführen konnte, „da Herr Carathéodory festgestellt hat, daß sie schon einen anderen Namen, nämlich 1/16, hatte“. – Wenn man die Voraussetzung „keine Nullstelle in  $\mathbb{E}^\times$ “ zu „ $f|_{\mathbb{E}}$  ist injektiv“ verschärft, kann man 1/16 zu 1/4 verbessern (*Koebe's 1/4-Theorem*), siehe [Ah 3], S. 29 und 85.

Die Ergebnisse dieses Paragraphen lassen sich auch ohne die  $\lambda$ -Funktion über den Satz von Bloch gewinnen, siehe z.B. [Re 2], Kap. 10.

## 5.7 Modulflächen

Analog zur Hauptkongruenzgruppe  $\Gamma_2$  werden allgemeiner Kongruenzgruppen  $\Gamma_n$  für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  betrachtet. Wie  $\mathbb{H}/\Gamma_2 \approx \mathbb{C}^{\times \times}$  lassen sich die Orbitflächen  $\mathbb{H}/\Gamma_n$  durch endlich viele Punkte kompaktifizieren. Dadurch erhält man die von F. Klein erfundenen Modulflächen  $n$ -ter Stufe. Sie bilden den Ausgangspunkt der *Theorie der Modulformen*.

**5.7.1 Kongruenzgruppen und Modulgruppen.** Alle Möbius-Transformationen

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}$$

bilden einen Normalteiler  $\Gamma_n \triangleleft \Gamma$  von endlichem Index. Er heißt *Kongruenzgruppe  $n$ -ter Stufe*. Satz 5.4.1 und sein Beweis lassen sich von 2 auf alle  $n \geq 2$  übertragen:

- (1) Die  $\Gamma_n$ -Orbitprojektion  $\lambda_n : \mathbb{H} \rightarrow X_n^* := \mathbb{H}/\Gamma_n$  ist eine unverzweigte holomorphe Überlagerung.  $\square$

Die endliche Faktorgruppe  $G_n := \Gamma/\Gamma_n$  heißt *Modulgruppe  $n$ -ter Stufe*. Die Restklasse von  $A \in \Gamma$  wird mit  $A_n \in G_n$  bezeichnet. Die in 5.1.1(1) angegebenen Elemente  $R, S, T \in \Gamma$  haben die Ordnungen  $3, 2, \infty$  und erfüllen  $R \cdot S = T$ . Nach 5.1.4 wird  $\Gamma$  von  $R$  und  $S$  erzeugt. Es folgt:

- (2) Die Ordnungen von  $R_n, S_n$  und  $T_n$  in  $G_n$  sind  $3, 2$  bzw.  $n$ . Es gilt  $R_n \cdot S_n = T_n$ . Die Gruppe  $G_n$  wird von  $R_n$  und  $S_n$  erzeugt.  $\square$

Im allgemeinen sind  $R_n^3 = S_n^2 = T_n^n = R_n \cdot S_n \cdot T_n^{-1} = 1$  nicht die einzigen Relationen, siehe Aufgabe 5.8.7.

**5.7.2 Modul-Überlagerungen.** Die  $\Gamma$ -Orbitprojektion  $J : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  faktorisiert über  $\lambda_n$ ,

$$(1) \quad J : \mathbb{H} \xrightarrow{\lambda_n} X_n^* \xrightarrow{\eta_n^*} \mathbb{C}.$$

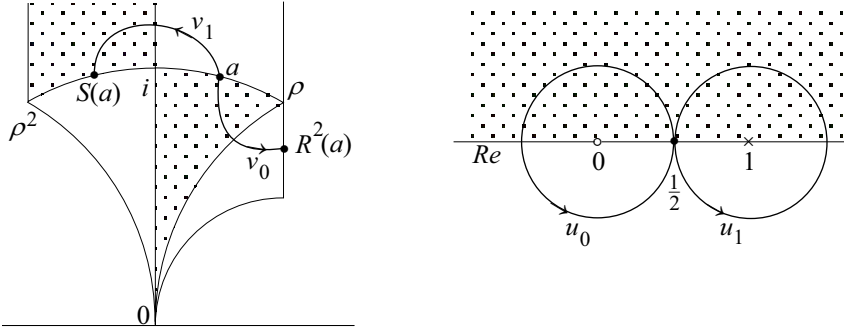
Dabei ist  $\eta_n^*$  eine endliche normale Überlagerung mit der Deckgruppe  $G_n$ , siehe 4.5.3. Für  $n = 2$  handelt es sich um die Faktorisierung  $J = p \circ \lambda$  von 5.4.2(3). Analog zu Satz 5.4.7(b) gilt

$$(2) \quad A_n \circ \lambda_n = \lambda_n \circ A \quad \text{für} \quad A \in \Gamma.$$

Nach 4.6.5 läßt sich  $\eta_n^*$  zu einer Überlagerung  $\eta_n : X_n \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  fortsetzen, die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Man nennt  $\eta_n$  die *Modulüberlagerung* und  $X_n$  die *Modulfläche  $n$ -ter Stufe*. Wegen der zweiten Folgerung in 4.6.4 ist  $\eta_n$  normal und hat dieselbe endliche Deckgruppe  $G_n$  wie  $\eta_n^*$ . Daher ist  $X_n$  kompakt.

**Satz.** Die Modulüberlagerung  $\eta_n : X_n \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist über  $0, 1$  und  $\infty$  mit den Windungszahlen  $3, 2$  bzw.  $n$  verzweigt und außerhalb dieser Stellen unverzweigt.

*Beweis.* Da  $\eta_n^*$  wie  $J$  nur über  $0,1$  verzweigt ist und dort die Windungszahlen 3 bzw. 2 hat, genügt es, die Windungszahl von  $\eta_n$  über  $\infty$  zu bestimmen. Wir beginnen mit der Berechnung des Poincaréschen Epimorphismus  $P : \pi(\mathbb{C}^{\times \times}, \frac{1}{2}) \rightarrow \Gamma$  der  $J$ -Funktion anhand von Figur 5.7.2:



**Fig. 5.7.2.** Zwei einfache Schleifen  $u_0, u_1$  (rechtes Bild) und ihre  $J$ -Liftungen  $v_0, v_1$  (linkes Bild) bestimmen den Poincaréschen Epimorphismus der  $J$ -Funktion.

Auf dem unteren Rand des Modulbereichs  $D$  gibt es zwischen  $i$  und  $\rho$  genau einen Punkt  $a$  mit  $J(a) = \frac{1}{2}$ . Wir verbinden ihn mit  $R^2(a)$  und  $S(a)$  durch zwei Wege  $v_0$  bzw.  $v_1$ , die im linken Bild der Figur 5.7.2 angegeben sind. Nach 5.3.5 werden die punktierten bzw. weißen Dreiecke des linken Bildes durch  $J$  auf die obere bzw. untere Halbebene biholomorph abgebildet. Daher ist der Bildweg  $J \circ v_j$  zur einfachen  $j$ -Schleife  $u_j$  homotop,  $j = 0, 1$ , siehe das rechte Bild. Gemäß der Definition des Poincaréschen Epimorphismus folgt  $P[u_0] = R^2$  und  $P[u_1] = S$ .

Die Modulüberlagerung hat denselben Poincaréschen Epimorphismus  $P_n$  wie  $\eta_n^*$ , nämlich  $P$  gefolgt von dem Restklassen-Epimorphismus  $\Gamma \rightarrow G_n$ , also  $P_n[u_0] = R_n^2$  und  $P_n[u_1] = S_n$ . Die Produktschleife  $u_0 u_1$  ist zum Inversen einer einfachen  $\infty$ -Schleife  $u_\infty$  homotop. Daraus folgt  $P_n[u_\infty] = T_n$ . Dieses Element erzeugt nach 4.7.2 die Standgruppe eines Punktes in  $\eta_n^{-1}(\infty)$ . Seine Ordnung  $n$  ist nach Satz 1.5.4 die Windungszahl von  $\eta_n$  über  $\infty$ .  $\square$

**5.7.3 Modul-Überlagerungen der Stufen 2 bis 6.** Für  $n = 2, 3, 4, 5$  ist die Modulüberlagerung  $\eta_n$  zur Orbitprojektion  $\varphi_n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  der anharmonischen Gruppe, der Tetraeder-, Oktaeder- bzw. Ikosaedergruppe isomorph. Die universelle Liftung von  $G_6$  ist die Flächengruppe  $F_6(\Omega)$ , und  $X_6$  ist ein hexagonaler Torus.

*Beweis.* Die Orbitprojektion  $\varphi_n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist universell, siehe 4.8.3(a). Sie hat nach der Tabelle in 4.2.3 dieselbe Verzweigungssignatur wie  $\eta_n$  und dominiert daher  $\eta_n$ : Es gibt eine unverzweigte Überlagerung  $\gamma$  mit  $\varphi_n = \eta_n \circ \gamma$ . Da alle Automorphismen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  Fixpunkte haben, ist  $\mathcal{D}(\gamma) = \{\text{id}\}$ . Die normale Abbildung  $\gamma$  ist somit ein Isomorphismus.

Die Orbitprojektion  $\varphi_6 = \wp^3 : \mathbb{C} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  von  $F_6(\Omega)$ , siehe die Tabelle in 2.6.2, hat dieselbe Verzweigungssignatur wie  $\eta_6$ . Da  $\varphi_6$  universell ist, gibt es eine unverzweigte Überlagerung  $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow X_6$  mit  $\varphi_6 = \eta_6 \circ \gamma$ . Die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\gamma) < \Omega$  ist eine Untergruppe. Da die  $60^\circ$ -Drehung  $z \mapsto \rho z$  zu  $F_6(\Omega)$  gehört und  $\mathcal{D}(\gamma)$  ein Normalteiler ist, gilt  $\rho a \in \mathcal{D}(\gamma)$  für jeden Vektor  $a \in \mathcal{D}(\gamma)$ . Daher ist  $\mathcal{D}(\gamma)$  ein hexagonales Gitter.  $\square$

#### 5.7.4 Die Ordnung der Modulgruppe $G_n$ ist

$$(1) \quad \frac{n^3}{2} \prod_{p|n} (1 - p^{-2}) \quad , \quad n \geq 3.$$

Dabei läuft das Produkt über alle Primfaktoren  $p$  von  $n$ .

Für Primzahlen  $n$  vereinfacht sich (1) zu

$$(1^*) \quad \sharp G_n = \frac{1}{2} n(n^2 - 1).$$

Diese Ordnung wird benötigt, um die Charakteristiken und Geschlechter der Modulflächen  $X_n$  zu berechnen, siehe 7.1.5.

Über seine Lieblingsfläche  $X_7$  mit ihren 168 Automorphismen der Gruppe  $G_7$  veröffentlichte Klein 1878 die Abhandlung [Klei 1] III, S. 90-136; siehe auch seinen 40 Jahre später verfaßten Bericht in [Klei 5], S. 368-373. Wir werden diese Kleinsche Fläche mehrfach als Beispiel heranziehen, siehe 6.4.4.

Zum Beweis von (1) zeigt man, daß der durch Reduktion modulo  $n$  bestimmte Gruppenhomomorphismus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  surjektiv ist. Daher induziert der Isomorphismus  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm E\} \cong \Gamma$  den Isomorphismus

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\{\pm E\} \cong \Gamma/\Gamma_n = G_n.$$

Man zählt sodann die Elemente von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ . Wir führen beides für eine Primzahl  $n$  aus (Dann ist  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ein Körper) und verweisen für den allgemeinen Fall auf [Hus], p. 210 f.

Sei  $\bar{x} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die Restklasse von  $x \in \mathbb{Z}$ . Zur Surjektivität: Sei  $\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  gegeben. Wegen  $ad - bc \equiv 1(n)$  sind  $c, d$  und  $n$  teilerfremd. Seien etwa  $c$  und  $n$  teilerfremd. Dann gilt  $1 = rc + sn$  mit  $r, s \in \mathbb{Z}$ . Wir multiplizieren mit  $1-d$  und erhalten  $1 = (1-d)rc + d + kn$  mit  $k := (1-d)s$ . Daher sind  $c$  und  $d + kn$  teilerfremd. – Wir ersetzen  $d$  durch  $d + kn$ . Die Zahl  $(1 - ad + bc)/n$  ist ganz. Da  $c$  und  $d$  teilerfremd sind, gilt  $ud - vc = (1 - ad + bc)/n$  mit  $u, v \in \mathbb{Z}$ . Dann ist  $A = \begin{pmatrix} a+nu & b+nv \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ .

Um die Elemente  $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  zu zählen, betrachten wir zunächst  $\bar{c} = 0$ . Dann ist  $\bar{d} = \bar{a}^{-1}$ . Es gibt  $n-1$  Möglichkeiten für  $\bar{a}$  und  $n$  Möglichkeiten für  $\bar{b}$ . Für  $\bar{c} \neq 0$  ist  $\bar{b} = \bar{c}^{-1}(\bar{a}\bar{d} - 1)$ . Es gibt je  $n$  Möglichkeiten für  $\bar{a}, \bar{d}$  und  $n-1$  Möglichkeiten für  $\bar{c}$ . Diese  $n^2(n-1)$  Elemente von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$  für  $\bar{c} \neq 0$  zusammen mit den  $n(n-1)$  Elementen für  $\bar{c} = 0$  ergeben  $\sharp \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = n(n^2 - 1)$ .  $\square$



**5.7.5 Modulformen. Historisches und Ausblick.** Jede meromorphe Funktion  $h$  auf  $X_n$  wird durch  $\lambda_n : \mathbb{H} \rightarrow X_n^* \subset X_n$  zur Funktion  $f = h \circ \lambda_n$  auf  $\mathbb{H}$  zurückgeholt. Diese meromorphen Funktionen  $f$  heißen *Modulfunktionen  $n$ -ter Stufe*. Sie lassen sich, ohne  $X_n$  und  $\lambda_n$  zu erwähnen, allein durch ihre  $\Gamma_n$ -Invarianz und die Existenz der Grenzwerte  $\lim f \circ A(\tau)$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  für  $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$  und alle  $A \in \Gamma$  charakterisieren, siehe Aufgabe 5.8.9. Die  $J$ -Funktion ist eine Modulfunktion erster und die  $\lambda$ -Funktion eine zweiter Stufe.

In analoger Weise lassen sich die *Differentialformen* auf  $X_n$  nach  $\mathbb{H}$  zurückholen und ergeben dort die *Modulformen  $n$ -ter Stufe*. Die Halbperiodenwerte  $e_k$ , die Gitter-Invarianten  $g_2, g_3$  und  $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ , aufgefaßt als Funktionen von  $\tau \in \mathbb{H}$ , sind Beispiele von Modulformen zweiter Stufe, siehe dazu die Aufgaben 7.9.13-14. – Eine elementare Einführung in die Theorie der Modulformen ohne Benutzung Riemannscher Flächen enthält [FB], Kap.V-VI.

Die erste umfassende Darstellung der Theorie sind F. Kleins *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* (1890), die von R. Fricke ausgearbeitet und vervollständigt wurden, siehe [Klei 3]. In der Vorrede dieses Buches bezeichnet Fricke die Theorie als wissenschaftliche Schöpfung seines Lehrers F. Klein.

H. Poincaré verallgemeinerte ab 1881 die Theorie der Modulformen zur Theorie *automorpher Formen*, indem er beliebige diskontinuierliche Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  betrachtete. Wenn diese Gruppen wie  $\Gamma$  und  $\Gamma_n$  arithmetisch definiert sind, führen die automorphen Formen auf interessante zahlentheoretische Ergebnisse. Ihre Erforschung hält an.

Zu den teils einführenden, teils ausführlichen Lehrbüchern aus älterer und neuerer Zeit mit verschiedenen Schwerpunkten gehören [Bor], [Ford], [Gu 1], [Hus], [Ka], [Kob], [KK], [Miy], [Mu 3], [Se] und [Shi].

## 5.8 Aufgaben

- 1) Zeige: Keine Untergruppe von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  wird bei der Projektion:  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma$  isomorph auf die Modulgruppe  $\Gamma$  abgebildet.
- 2) Zeige: Die Parkettierung von  $\mathbb{H}$  durch die  $\Gamma$ -Bilder des Modulbereichs  $D$  (Figur 5.1.6) ist *lokal endlich*: Zu jedem Punkt  $\tau \in \mathbb{H}$  gibt es eine Umgebung  $U$ , so daß  $\{A \in \Gamma : U \cap A(D) \neq \emptyset\}$  endlich ist. Wenn man  $U$  klein genug wählt, folgt aus  $U \cap A(D) \neq \emptyset$  bereits  $\tau \in A(D)$ . Bestimme für jedes  $\tau$  die Anzahl  $\sharp\{A \in \Gamma : \tau \in A(D)\}$ .
- 3) Sei  $Q(x, y) := Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$  eine reduzierte Form, siehe 5.2.5. Zeige:
  - (i)  $A$  bzw.  $B$  ist das Minimum von  $Q$  auf  $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \times \mathbb{Z}$  bzw.  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{(0, 0)\}$ .
  - (ii)  $C = 2\sqrt{\Delta}/3 \iff Q(x, y) = C(x^2 \pm xy + y^2)$ .
- 4) Zeige: Eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann eine Orbitprojektion der Modulgruppe, wenn  $X = \mathbb{C}$  und  $f = aJ + b$  mit zwei komplexen Zahlen  $a \neq 0$  und  $b$  gilt.
- 5) Zu jedem Quadrupel  $(e_1, e_2, e_3, e_4)$  von Punkten  $e_j \in \widehat{\mathbb{C}}$  gehört das *Doppelverhältnis*

$$DV(e_1, e_2, e_3, e_4) := \frac{e_3 - e_2}{e_1 - e_2} : \frac{e_3 - e_4}{e_1 - e_4} \in \widehat{\mathbb{C}},$$

falls mindestens drei der vier Punkte paarweise verschieden sind. Zeige:

- (i) Für jede Möbius-Transformation
- $A$
- gilt

$$DV(A(e_1), A(e_2), A(e_3), A(e_4)) = DV(e_1, e_2, e_3, e_4).$$

- (ii) Zu drei paarweise verschiedenen Punkten
- $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$
- ist

$$\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto DV(a, b, c, z),$$

diejenige Möbius-Transformation, für welche  $a \mapsto 0, b \mapsto 1, c \mapsto \infty$  gilt.

- (iii) Bei jeder Doppeltransposition der vier Punkte
- $e_1, e_2, e_3, e_4$
- ändert sich das Doppelverhältnis nicht.

- (iv) Sei
- $DV(e_1, e_2, e_3, e_4) = z$
- . Wenn man
- $e_1, e_2, e_3, e_4$
- permutiert, erhält man als Doppelverhältnisse die Werte
- $g(z)$
- für alle
- $g \in A = \text{anharmonische Gruppe}$
- .

Hinweis zu (iv): Es genügt den Spezialfall „ $e_4 = \infty$  ist Fixpunkt der Permutation“ zu betrachten.

Von *anharmonic ratio* = *Doppelverhältnis* haben wir den Namen *anharmonische Gruppe* abgeleitet.

- 6) Sei  $\Omega$  ein hexagonales Gitter. Man gebe ein Untergitter  $\Omega' < \Omega$  so an, daß  $\Omega'$  ein Normalteiler der Flächengruppe  $F_6(\Omega)$  ist und die induzierte Operation der Faktorgruppe  $F_6(\Omega)/\Omega'$  auf dem Torus  $\mathbb{C}/\Omega'$  zur Operation der Modulgruppe  $G_6$  auf der Modulfläche  $X_6$  isomorph ist. – Siehe auch [Klei3] I, S. 363 ff.
- 7) Sei  $F$  die von zwei Elementen  $r, s$  frei erzeugte Gruppe. Definiere  $h : F \rightarrow G_n$  (Modulgruppe) durch  $h(r) := R_n, h(s) := S_n$  ( $n \geq 2$ , Bezeichnungen wie in 5.7.1). Zeige mit Hilfe des Poincaréschen Epimorphismus der Modulüberlagerung  $\eta_n$ : Der von  $r^3, s^2$  und  $(rs)^n$  erzeugte Normalteiler  $N \triangleleft F$  liegt im Kern von  $h$ . Genau dann, wenn die Modulfläche  $X_n$  einfach zusammenhängt, ist  $N = \text{Kern } h$ . Das ist für  $n \leq 5$  der Fall. Für  $n \geq 6$  hat  $N \triangleleft \text{Kern } h$  unendlichen Index. Benutze für  $n \geq 7$ , daß  $X_n$  durch  $\mathbb{H}$  universell und unverzweigt überlagert wird (Beispiel in 11.6.1).
- 8) Verallgemeinere im Anschluß an 5.7.2 die Überlegung aus 5.5.2 von 2 auf beliebiges  $n \geq 2$  und zeige: Es gibt genau eine holomorphe Abbildung  $\hat{\lambda}_n : \mathbb{E}^\times \rightarrow X_n^*$  mit  $\lambda_n(\tau) = \hat{\lambda}_n \circ \exp(2\pi i \tau / n)$ . Für  $z \in \mathbb{E}^\times$  gilt  $\hat{J}(z^n) = \eta_n \circ \hat{\lambda}_n(z)$ . Es gibt eine holomorphe Fortsetzung  $\hat{\lambda}_n : \mathbb{E} \rightarrow X_n$  mit  $\eta_n \hat{\lambda}_n(0) = \infty$  und  $v(\hat{\lambda}_n, 0) = 1$ . Die Stelle  $\hat{\lambda}_n(0)$  ist Fixpunkt von  $T_n$ .
- 9) (i) Sei  $g$  auf  $\mathbb{E}^\times$  holomorph. Zeige: Genau dann, wenn für  $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$  der Grenzwert  $c := \lim g \circ \exp(2\pi i \tau)$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  existiert, läßt sich  $g$  mit dem Wert  $g(0) := c$  meromorph auf ganz  $\mathbb{E}$  fortsetzen.
- (ii) Sei  $f$  auf  $\mathbb{H}$  meromorph und  $\Gamma_n$ -invariant, also  $f = h \circ \lambda_n$  mit einer auf  $X_n^*$  meromorphen Funktion  $h$ . Zeige: Genau dann, wenn für  $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$  der Grenzwert  $c := \lim f(\tau)$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  existiert, läßt sich  $h$  mit dem Wert  $h(x) := c$  meromorph nach  $x := \hat{\lambda}_n(0)$  fortsetzen.
- (iii) Folgere: Genau dann, wenn für alle  $A \in \Gamma$  und für  $\text{Im } \tau \rightarrow \infty$  der Grenzwert  $\lim f \circ A(\tau)$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$  existiert, läßt sich  $h$  auf ganz  $X_n$  meromorph fortsetzen.

## 6. Algebraische Funktionen

Im Zentrum dieses Kapitels steht die Aufgabe, alle Lösungen einer polynomialen Gleichung  $P(z, w) = 0$  mit komplexen Koeffizienten durch analytische Funktionen  $w = f(z)$  zu *einer algebraischen Funktion* zusammenzufassen. Im Bericht [BN 2] von Brill und Noether aus dem Jahre 1894 heißt es dazu: „Um für die Functionszweige einer algebraischen Function einen geometrischen Ort zu beschreiben, in welchem sie eindeutig verläuft, wird eine über der imaginären Ebene  $n$ -blättrig ausgebreiteten Riemannschen Fläche benötigt“. Wie selbstverständlich erstreckt bereits Riemann die Ausbreitung auch über den unendlich fernen Punkt der Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  und läßt zu, daß Polstellen auftreten. Durch eine sorgfältige Betrachtung von Windungspunkten berücksichtigt er die Möglichkeit, daß das Polynom  $P(z, w)$  für gewisse Stellen  $z$  mehrfache Wurzeln besitzt.

In 1.2.4 wurde ausgeführt, wie man Riemanns Idee durch die Konstruktion eines Nullstellengebildes  $(X, \eta, f)$  verwirklicht, solange weder Polstellen noch mehrfache Wurzeln auftreten. Mit den Resultaten aus 4.6 wird die Konstruktion des Gebildes  $(X, \eta, f)$  nunmehr auf den allgemeinen Fall ausgedehnt. Zum vollständigen Verständnis von  $(X, \eta, f)$  muß man gleichzeitig die Liftung  $\eta^* : \mathbb{C}(z) = \mathcal{M}(\widehat{\mathbb{C}}) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ , d.h. die Erweiterung des Körpers der rationalen Funktionen zum Ring der meromorphen Funktionen auf  $X$  studieren. Denn das gegebene Polynom  $P$  erweist sich als Minimalpolynom von  $f \in \mathcal{M}(X)$  über  $\mathbb{C}(z)$ .

Ohne Mehraufwand entwickeln wir im folgenden die Theorie für beliebige zusammenhängende Flächen  $Y$  statt  $\widehat{\mathbb{C}}$  und Polynome  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$ .

### 6.1 Funktionen auf endlichen Überlagerungen

Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine  $n$ -blättrige Überlagerung zwischen Riemannschen Flächen, wobei  $Y$  zusammenhängt und  $n < \infty$  ist. Wir studieren die algebraischen Eigenschaften der Einbettung  $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ ,  $g \mapsto g \circ \eta$ , des Körpers  $\mathcal{M}(Y)$  in den Ring  $\mathcal{M}(X)$ . Wir schreiben kurz  $g$  statt  $g \circ \eta$ .

**6.1.1 Fortsetzung von Wurzeln.** Sei  $b \in Y$  und  $c_1, \dots, c_m \in \mathcal{O}(Y \setminus \{b\})$ . Die Funktion  $f \in \mathcal{O}(X \setminus \eta^{-1}(b))$  nehme für jedes  $y \in Y \setminus \{b\}$  längs der Faser

$\eta^{-1}(y)$  genau die Wurzeln des Polynoms  $w^m + c_1(y)w^{m-1} + \dots + c_m(y) \in \mathbb{C}[w]$  als Werte an. Sie läßt sich genau dann meromorph [holomorph] nach  $\eta^{-1}(b)$  fortsetzen, wenn sich jeder Koeffizient  $c_j$  meromorph [holomorph] nach  $b$  fortsetzen läßt.

*Beweis.* Genau dann, wenn es eine bei  $b$  holomorphe Funktion  $v$  gibt, so daß  $h := vf$  um  $\eta^{-1}(b)$  beschränkt ist, läßt sich  $f$  nach  $\eta^{-1}(b)$  meromorph fortsetzen. Denn wenn sich  $f$  fortsetzen läßt, erreicht man  $o(vf, x) \geq 0$  für alle  $x \in \eta^{-1}(b)$  mit jeder Funktion  $v$ , deren Ordnung  $o(v, b)$  hinreichend groß ist. Wegen  $h^m + c_1vh^{m-1} + \dots + c_mv^m = 0$  ist  $h$  nach 1.2.2 genau dann um  $\eta^{-1}(b)$  beschränkt, wenn alle  $v^jc_j$  um  $b$  beschränkt sind, d.h. wenn jedes  $c_j$  meromorph nach  $b$  fortgesetzt werden kann. Eine durch  $v = 1$  vereinfachte Version dieser Argumentation beweist den holomorphen Fall.  $\square$

**6.1.2 Charakteristisches Polynom.** Sei  $f$  eine meromorphe Funktion auf  $X$ . Das  $\eta$ -Bild  $B$  ihrer Polstellenmenge ist lokal endlich in  $Y$ . Riemann bewies in [Ri 3], Artikel 5, folgenden

**Satz.** Es gibt genau ein Polynom

$$(1) \quad \chi(y, w) = w^n - s_1(y)w^{n-1} + \dots + (-1)^n s_n(y) \in \mathcal{M}(Y)[w],$$

so daß für jede Stelle  $y \in Y \setminus B$  gilt:

$$(2) \quad \chi(y, w) = \prod_{x \in \eta^{-1}(y)} [w - f(x)]^{v(\eta, x)}.$$

Man nennt  $\chi$  das *charakteristische Polynom* von  $f$  bezüglich  $\eta$ .

*Beweis.* Durch (2) sind die Werte  $s_j(y) \in \mathbb{C}$  für  $y \in Y \setminus B$  eindeutig bestimmt. Zum Nachweis, daß  $s_j$  auf  $Y$  meromorph ist, vergrößern wir  $B$  zur weiterhin lokal endlichen Menge  $E \subset Y$ , indem wir die Verzweigungspunkte von  $\eta$  hinzufügen. Jeder Punkt in  $Y \setminus E$  besitzt eine Umgebung  $V$ , so daß  $\eta^{-1}(V) = \sqcup U_\nu$  die disjunkte Vereinigung von  $n$  offenen Mengen  $U_\nu$  ist, welche durch  $\eta$  biholomorph auf  $V$  abgebildet werden. Sei  $\sigma_\nu := (\eta|_{U_\nu})^{-1} : V \rightarrow U_\nu$ . Die durch (2) eindeutig bestimmten Funktionen  $s_j : Y \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  sind nach Einschränkung auf  $V$  die elementarsymmetrischen Funktionen

$$s_1|_V = f \circ \sigma_1 + \dots + f \circ \sigma_n, \dots, s_n|_V = (f \circ \sigma_1) \cdot \dots \cdot (f \circ \sigma_n).$$

Daher sind sie holomorph und lassen sich gemäß 6.1.1 meromorph nach  $E$  fortsetzen. Die Gleichung (2) gilt zunächst für  $y \in Y \setminus E$ . Durch stetige Fortsetzung bleibt sie auch für  $y \in E \setminus B$  richtig. Denn sei  $Q(y, w)$  die rechte Seite von (2). Es genügt,

$$(*) \quad \lim_{y \rightarrow b} Q(y, w) = Q(b, w) \quad \text{für} \quad b \in E \setminus B$$

zu zeigen: Wir wählen eine elementar überlagerte Scheibe  $V$  um  $b$ . Für jede Komponente  $U$  von  $\eta^{-1}(V)$  ist die Beschränkung  $\eta : (U, a) \rightarrow (V, b)$  eine Windungsabbildung. Sei  $m := v(\eta, a)$ . Für  $y \in V \setminus \{b\}$  sei  $\eta^{-1}(y) \cap U = \{x_1(y), \dots, x_m(y)\}$ . Sei  $Q_U(y, w) := [w - f(x_1(y))] \cdot \dots \cdot [w - f(x_m(y))]$ . Wegen  $\lim_{y \rightarrow b} x_j(y) = a$  ist  $\lim_{y \rightarrow b} Q_U(y, w) = [w - f(a)]^m$ . Weil  $Q(y, w)$  das Produkt der  $Q_U(y, w)$  für alle Komponenten  $U$  ist, folgt (\*).  $\square$

Bei der Liftung  $\eta^*: \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$  geht jedes Polynom  $P(y, w) \in \mathcal{M}(Y)[w]$  in das Polynom  $P(\eta, w) \in \mathcal{M}(X)[w]$  über.

**Folgerungen:**  $\chi(\eta, f) = 0$ . – Wenn  $\eta$  normal ist, gilt

$$\chi(\eta, w) = \prod_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta)} (w - f \circ \alpha). \quad \square$$

**6.1.3 Algebraische Abhängigkeit.** Auf jeder kompakten, zusammenhängenden Fläche  $X$  sind je zwei meromorphe Funktionen  $f, g$  algebraisch abhängig: Es gibt ein irreduzibles Polynom  $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$  mit  $P(g, f) = 0$ .

*Beweis.* Das ist trivial, wenn  $g$  konstant ist. Sonst ist  $g: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  endlich, und für das charakteristische Polynom  $\chi(z, w) \in \mathbb{C}(z)[w]$  von  $f$  bezüglich  $g$  gilt  $\chi(g, f) = 0$ . Alle Koeffizienten von  $\chi$  sind Quotienten von Polynomen in  $\mathbb{C}[z]$ . Die Multiplikation mit dem Hauptnenner gibt ein Polynom  $G(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$  mit  $G(g, f) = 0$ . Es gibt einen irreduziblen Faktor  $P$  von  $G$  mit  $P(g, f) = 0$ .  $\square$

**6.1.4 Reduzierte Polynome. Diskriminanten.** Wenn  $q = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$  die Primfaktorzerlegung einer Nichteinheit in einem faktoriellen Ring ist, heißt  $p_1 \cdots p_r$  eine *Reduktion* von  $q$ . Im Falle  $n_1 = \dots = n_r = 1$  heißt  $q$  *reduziert*. – Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik 0. Jedes normierte Polynom  $P(w) \in K[w]$  zerfällt über einem Erweiterungskörper  $L$  in Linearfaktoren,  $P(w) = (w - \lambda_1) \cdots (w - \lambda_n)$ . Die *Diskriminante*

$$\Delta := \prod_{j < k} (\lambda_j - \lambda_k)^2 \in K$$

hängt nicht von  $L$  ab. Genau dann, wenn die Wurzeln  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  paarweise verschieden sind, ist  $\Delta \neq 0$  und  $P \in K[w]$  reduziert. Denn wenn  $\Delta = 0$  ist, haben  $P$  und die Ableitung  $P'$  einen gemeinsamen Linearfaktor  $w - \lambda_j$ , also einen gemeinsamen Primfaktor  $Q$  in  $K[w]$ . Aus  $P = Q \cdot R$  folgt  $P' = Q' \cdot R + Q \cdot R'$ . Daher ist  $Q$  ein Faktor von  $R$ , also  $Q^2$  ein Faktor von  $P$ .

Nun sei  $P(y, w) = w^n + a_1(y)w^{n-1} + \dots + a_n(y) \in \mathcal{M}(Y)[w]$  reduziert. Dann ist  $\Delta \in \mathcal{M}(Y)$  nicht die Nullfunktion. Die *Ausnahmемenge*  $E \subset Y$  von  $P$  besteht aus den Polstellen der Koeffizienten von  $P$  und den Nullstellen von  $\Delta$ ; sie ist lokal endlich. Die Polstellen von  $\Delta$  sind in  $E$  enthalten. Für jede Stelle  $b \in Y \setminus E$  zerfällt  $P(b, w) = (w - \lambda_1) \cdots (w - \lambda_n)$  in Linearfaktoren mit paarweise verschiedenen  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ .

**6.1.5 Minimalpolynome.** Bei einer  $n$ -blättrigen Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  ist die Erweiterung  $\eta^*: \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$  algebraisch, weil jedes  $f \in \mathcal{M}(X)$  durch sein charakteristisches Polynom annulliert wird. Sämtliche Polynome in  $\mathcal{M}(Y)[w]$ , welche  $f$  annullieren, bilden ein Hauptideal. Es wird von einem eindeutig bestimmten normierten und reduzierten *Minimalpolynom*  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$  erzeugt. Wenn  $X$  zusammenhängt, ist  $P$  irreduzibel. Das charakteristische Polynom  $\chi$  ist ein Vielfaches von  $P$ . Daher ist  $\text{gr } P \leq n$ , und zwar tritt  $\text{gr } P = n$  genau dann ein, wenn  $P = \chi$  ist.

**Satz.** Genau dann wenn  $f$  längs wenigstens einer  $\eta$ -Faser  $n$  verschiedene Werte in  $\mathbb{C}$  annimmt, hat  $P$  den Grad  $n$ . Jede Faser über  $Y \setminus E$  wird dann durch  $f$  injektiv nach  $\mathbb{C}$  abgebildet.

*Beweis.* Wenn es  $n$  verschiedene  $f$ -Werte längs  $\eta^{-1}(b)$  gibt, sind sie die Wurzeln des Polynoms  $P(b, w) \in \mathbb{C}[w]$ . Dieses hat also einen Grad  $\geq n$ , und dasselbe gilt dann für  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$ . – Umgekehrt sei  $\text{gr} P = n$ . Für  $b \in Y \setminus E$ , hat  $\chi(b, w) = P(b, w)$  genau  $n$  verschiedene Wurzeln in  $\mathbb{C}$ , welche nach 6.1.2(2) die  $f$ -Werte längs  $\eta^{-1}(b)$  sind.  $\square$

## 6.2 Riemannsche Gebilde

Riemanns Lösung einer polynomialen Gleichung besteht aus einer Funktion  $f$ , ihrer Definitionsfläche  $X$  und einer Überlagerung  $\eta$  von  $X$  über  $\hat{\mathbb{C}}$  (allgemeiner über einer zusammenhängenden Fläche  $Y$ ). Wir fassen die Bestandteile zum *Riemannsches Gebilde*  $(X, \eta, f)$  zusammen und sammeln in 6.2.2-3 die wichtigen Eigenschaften solcher Gebilde. Teilweise (Abschnitt 6.2.3) beruhen sie auf Riemanns Existenzsatz für punktetrennende meromorphe Funktionen. Dieser Satz, der im 10. Kapitel bewiesen wird, ist ein zentrales und tief liegendes Ergebnis der Theorie Riemannscher Flächen.

Ausgehend von dem in 1.2.4 behandelten Spezialfall (keine Pole, keine mehrfachen Wurzeln) konstruieren wir in 6.2.4-6 die Lösung jeder reduzierten polynomialen Gleichung durch ein Riemannsches Gebilde und beweisen ihre Eindeutigkeit. Der Existenzsatz wird dabei nicht benötigt.

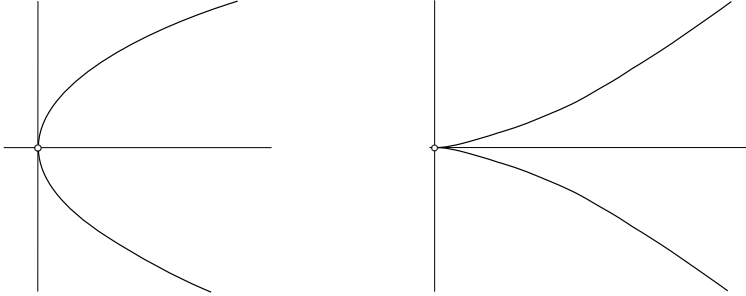
**6.2.1 Riemannsche und algebraische Gebilde.** Ein  $n$ -blättriges *Riemannsches Gebilde*  $(X, \eta, f)$  über der zusammenhängenden Fläche  $Y$  besteht aus einer Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  vom Grade  $n$  und einer Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$ , deren Minimalpolynom  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$  den Grad  $n$  hat. Das Polynom  $P$  und seine Ausnahmemenge  $E$  werden auch Minimalpolynom bzw. Ausnahmemenge des Gebildes genannt.

Ist  $V \subset Y$  offen und zusammenhängend, so ist  $(\eta^{-1}(V), \eta|_V, f|_V)$  ein Riemannsches Gebilde über  $V$  mit dem Minimalpolynom  $P|_V \in \mathcal{M}(V)[w]$ , welches aus  $P$  durch Einschränkung der Koeffizienten auf  $V$  entsteht.

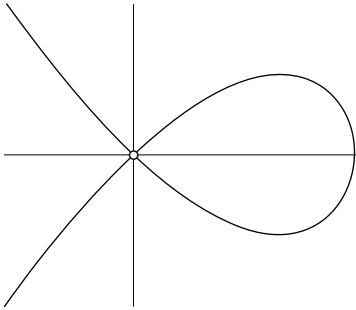
Ein *Isomorphismus zwischen zwei Riemannschen Gebilden*  $(X_1, \eta_1, f_1)$  und  $(X_2, \eta_2, f_2)$  über  $Y$  ist ein Isomorphismus  $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$  der Riemannschen Flächen, für den  $\eta_1 = \eta_2 \circ \varphi$  und  $f_1 = f_2 \circ \varphi$  gilt. Isomorphe Gebilde haben dasselbe Minimalpolynom. – Riemannsche Gebilde über  $\hat{\mathbb{C}}$  heißen *algebraische Gebilde*.

**Beispiele.** (1) Seien  $n > 0$  und  $q$  teilerfremde ganze Zahlen. Dann ist  $(\hat{\mathbb{C}}, \eta, f)$  mit  $\eta(t) := t^n$  und  $f(t) := t^q$  ein  $n$ -blättriges algebraisches Gebilde mit dem Minimalpolynom  $w^n - z^q \in \mathbb{C}(z)[w]$  und der Ausnahmemenge  $E = \{0, \infty\}$ . Bei Einschränkung von  $\hat{\mathbb{C}}$  auf  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{E}$  ist  $E = \{0\}$  die Ausnahmemenge.

(2) Das algebraische Gebilde  $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f)$  mit  $\eta(t) := 1-t^2$  und  $f(t) := t(1-t^2)$  hat zwei Blätter und das Minimalpolynom  $w^2 + z^3 - z^2$ . Seine Ausnahmemenge ist  $E = \{0, 1, \infty\}$ .



**Fig. 6.2.1 a.** links: Gewöhnliche Parabel mit der Gleichung  $y^2 = x$ ; rechts: Neiletsche Parabel mit der Gleichung  $y^2 = x^3$ .



**Fig. 6.2.1 b.** Newtons parabola nodata mit der Gleichung  $y^2 = x^2 - x^3$ .

*Bemerkung.* Die Gleichung  $y^n - x^q = 0$ , vgl. (1), beschreibt für  $(n, q) = (2, 1)$  eine gewöhnliche und für  $(n, q) = (2, 3)$  eine Neiletsche Parabel in der reellen Ebene  $\mathbb{R}^2$ , siehe Fig. 6.2.1 a. Entsprechend ist  $y^2 + x^3 - x^2 = 0$ , vgl. (2), die Gleichung von Newtons *parabola nodata* [New 2], siehe Fig. 6.2.1 b. Die drei Parabeln werden durch die in (1) und (2) angegebenen Funktionen  $x = \eta(t)$ ,  $y = f(t)$  mit  $t \in \mathbb{R}$  parametrisiert.

(3) Mit der  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega < \mathbb{C}$  und ihrer Ableitung  $\wp'$  entsteht das zweiblättrigen algebraische Gebilde  $(\mathbb{C}/\Omega, \hat{\wp}, \hat{\wp}')$ . Sein Minimalpolynom  $w^2 - 4z^3 + g_2z + g_3 \in \mathbb{C}[z, w]$  erhält man aus der Differentialgleichung der  $\wp$ -Funktion  $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ , siehe 2.2.4(2).

**6.2.2 Komponentenzerlegung.** Jede  $n$ -blättrige Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  zerfällt in endlich viele Komponenten  $\eta_j: X_j \rightarrow Y$ ;  $j = 1, \dots, l$ . Dabei ist  $1 \leq l \leq n = \sum n_j$  mit  $n_j := \text{gr } \eta_j$ . Sei  $P$  das Minimalpolynom einer Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Das Minimalpolynom  $P_j$  von  $f_j := f|_{X_j}$  ist irreduzibel, da  $\mathcal{M}(X_j)$  ein Körper ist. Wegen  $P(\eta_j, f_j) = 0$  wird  $P$  von  $P_j$  geteilt.

**Zerlegungssatz.** Das Tripel  $(X, \eta, f)$  ist genau dann ein Riemannsches Gebilde, wenn jede Komponente  $(X_j, \eta_j, f_j)$  ein Riemannsches Gebilde ist und das Minimalpolynom von  $f$  die Primzerlegung  $P = P_1 \cdot \dots \cdot P_l$  hat.

*Beweis.* Wenn ein Riemannsches Gebilde vorliegt, ist  $\text{gr} f = n$ . Wir benutzen 6.1.5. Es gibt ein  $y \in Y$ , so daß  $f$  längs  $\eta^{-1}(y)$  genau  $n$  verschiedene Werte in  $\mathbb{C}$  hat. Dann hat jedes  $f_j$  längs  $\eta_j^{-1}(y)$  genau  $n_j$  verschiedene Werte in  $\mathbb{C}$ . Also ist  $\text{gr} f_j = n_j$ . Die Polynome  $P_j$  sind paarweise verschieden, da sie an der Stelle  $y$  verschiedene Wurzeln haben. Daher ist  $P_1 \cdot \dots \cdot P_l$  ein Teiler von  $P$ , und wegen desselben Grades gilt  $P = P_1 \cdot \dots \cdot P_l$ . Die Umkehrung ist trivial.  $\square$

**Folgerung.** Genau dann, wenn das Minimalpolynom des Gebildes  $(X, \eta, f)$  irreduzibel ist, hängt  $X$  zusammen.  $\square$

*Beispiel.* Bei den drei Gebilden  $(X, \eta, f)$  der Beispiele in 6.2.1 hängen die Flächen  $X$  zusammen. Daher sind ihre Minimalpolynome irreduzibel.

**Struktursatz.** Sei  $(X, \eta, f)$  ein Riemannsches Gebilde. Dann ist  $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(Y)[f]$  eine einfache Erweiterung des Körpers  $\mathcal{M}(Y)$  vom Grade  $n$ .

*Beweis.* Offenbar ist  $\mathcal{M}(Y)[f]$  ein  $\mathcal{M}(Y)$ -Untervektorraum von  $\mathcal{M}(X)$ . Er ist zu  $\mathcal{M}(Y)[w]/(P)$  isomorph und hat daher die Dimension  $n = \text{gr } P$ . Andererseits ist  $\mathcal{M}(X) = \mathcal{M}(X_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{M}(X_l)$  die direkte Summe der Körper  $\mathcal{M}(X_j)$ . Somit genügt zu zeigen, daß jede Erweiterung  $\mathcal{M}(X_j) = \mathcal{M}(Y)[f_j]$  einfach ist. Das folgt, da  $f_j$  ein Element maximalen Grades in  $\mathcal{M}(X_j)$  ist, aus dem

**Lemma.** Sei  $L$  ein algebraischer Erweiterungskörper des Körpers  $K$  der Charakteristik 0. Wenn es in  $L$  ein Element  $f$  maximalen Grades gibt, ist die Erweiterung einfach:  $L = K[f]$ .

*Beweis.* Wir zeigen  $g \in K[f]$  für jedes  $g \in L$ : Die Erweiterung  $K \subset K[f, g]$  ist endlich und wird daher von einem primitiven Element  $h \in K[f, g] \subset L$  erzeugt:  $K[f, g] = K[h]$ , siehe z.B. [Bos], S. 114. Dann ist  $[K[h] : K] = \text{gr } h \leq \text{gr } f = [K[f] : K]$ , also  $g \in K[h] = K[f]$ .  $\square$

**6.2.3 Riemannscher Existenzsatz (Punktetrennung).** Zu je zwei Punkten  $a \neq b$  jeder Riemannschen Fläche  $X$  gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $f(a) = 0$  und  $f(b) = 1$ .

Dieses tiefliegende Ergebnis wird in 10.7.2 mittels Potentialtheorie bewiesen.

**Korollar.** Zu paarweise verschiedenen Punkten  $a_1, \dots, a_n \in X$  und vorgegebenen Werten  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $f(a_j) = c_j$  für  $j = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Nach dem Existenzsatz gibt es zu jedem Paar  $i \neq j$  eine meromorphe Funktion  $f_{ij}$  auf  $X$ , mit  $f_{ij}(a_i) = 1$  und  $f_{ij}(a_j) = 0$ . Für  $f_i := \prod_{j=1, j \neq i}^n f_{ij}$  gilt dann  $f_i(a_k) = \delta_{ik}$ , und  $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$  leistet das Gewünschte.  $\square$



**Erste Folgerung.** *Jede endliche Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  läßt sich zu einem Riemannschen Gebilde  $(X, \eta, f)$  ergänzen.*

*Beweis.* Sei  $b \in Y$  ein Punkt außerhalb des Verzweigungsortes von  $\eta$ . Dann besteht  $\eta^{-1}(b) = \{a_1, \dots, a_n\}$  aus  $n := \text{gr } \eta$  verschiedenen Punkten. Nach dem Korollar gibt es ein  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $f(a_j) = j$  für  $j = 1, \dots, n$ . Mit Satz 6.1.5 folgt die Behauptung.  $\square$

**Zweite Folgerung.** *Jede kompakte Riemannsche Fläche  $X$  läßt sich zu einem algebraischen Gebilde  $(X, \eta, f)$  ergänzen.*

*Beweis.* Nach dem Existenzsatz gibt es eine nirgends konstante Funktion  $\eta \in \mathcal{M}(X)$ . Wegen der Kompaktheit von  $X$  ist  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine endliche Überlagerung. Sie kann nach der ersten Folgerung zu einem algebraischen Gebilde ergänzt werden.  $\square$

Wir werden den Existenzsatz und seine Folgerungen erstmals beim Beweis des Satzes 6.4.5 anwenden.

**6.2.4 Nullstellengebilde.** Wir beginnen den Existenzbeweis für Riemannsche Gebilde zu vorgegebenem Minimalpolynom mit einem normierten, reduzierten Polynom  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$  vom Grade  $n \geq 1$ , dessen Ausnahmemenge  $E = \emptyset$  ist. Nach 1.2.4 ist

$$(1) \quad M := \{(y, w) \in Y \times \mathbb{C} : P(y, w) = 0\}$$

eine Riemannsche Fläche,  $\pi: M \rightarrow Y, (y, w) \mapsto y$ , eine unverzweigte,  $n$ -blättrige Überlagerung und  $h: M \rightarrow \mathbb{C}, (y, w) \mapsto w$ , eine holomorphe Funktion, für die  $P(\pi, h) = 0$  gilt. Da  $h$  auf jeder  $\pi$ -Faser injektiv ist, hat  $h$  nach Satz 6.1.5 das Minimalpolynom  $P$ . Also gilt:

(2) *Das Nullstellengebilde  $(M, \pi, h)$  ist ein Riemannsches Gebilde über  $Y$  mit dem Minimalpolynom  $P$ .*  $\square$

**6.2.5 Existenzsatz für Riemannsche Gebilde.** *Jedes reduzierte, normierte Polynom  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$  vom Grade  $n \geq 1$  ist das Minimalpolynom eines Riemannschen Gebildes  $(X, \eta, f)$  über  $Y$ .*

Dieser Existenzsatz darf nicht mit dem Existenzsatz zur Punktentrennung verwechselt werden. Letzterer wird hier nicht benötigt.

*Beweis.* Sei  $E \subset Y$  die Ausnahmemenge von  $P$  und  $(M, \pi, h)$  das Nullstellengebilde über  $Y \setminus E$  zu  $P|_{Y \setminus E} \in \mathcal{M}(Y \setminus E)[w]$ . Nach Satz 4.6.5 läßt sich  $\pi$  zu einer Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  fortsetzen, deren Verzweigungspunkte in  $E$  liegen. Die Funktion  $h$  läßt sich nach 6.1.1 zu einer Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  fortsetzen. Die Gleichung  $P(\eta, f)$  gilt zunächst auf  $M$ . Sie bleibt auf  $X$  gültig, da  $X \setminus M$  lokal endlich ist. Daher ist  $P$  ein Vielfaches des Minimalpolynoms von  $f$  bezüglich der Erweiterung  $\eta^*$ . Für  $b \in Y \setminus E$  ist  $f$  längs  $\eta^{-1}(b)$  injektiv. Nach Satz 6.1.5 hat das Minimalpolynom den Grad  $n$  und stimmt daher mit  $P$  überein.  $\square$

**6.2.6 Universelle Eigenschaft.** Sei  $(X, \eta, f)$  ein Riemannsches Gebilde über  $Y$  mit dem Minimalpolynom  $P$ . Sei  $\zeta : Z \rightarrow Y$  eine offene holomorphe Abbildung. Für  $g \in \mathcal{M}(Z)$  gelte  $P(\zeta, g) = 0$ . Dann gibt es genau eine holomorphe Abbildung  $\varphi : Z \rightarrow X$ , so daß  $\zeta = \eta \circ \varphi$  und  $g = f \circ \varphi$  ist.

*Beweis.* Sei  $E$  die Ausnahmemenge von  $P$ . Zunächst sei  $E = \emptyset$  und  $(X, \eta, f) = (M, \pi, h)$  ein Nullstellengebilde. Dann ist  $\varphi := \zeta \times g : Z \rightarrow Y \times \mathbb{C}$  die einzige Abbildung mit  $\pi \circ \varphi = \zeta$  und  $h \circ \varphi = g$ . Wegen  $P(\zeta, g) = 0$  ist  $\varphi(Z) \subset M$ . Die Abbildung  $\varphi : Z \rightarrow M$  ist holomorph, weil  $\pi$  lokal bi-holomorph und  $\zeta$  holomorph ist. Wenn  $(Z, \zeta, g)$  ein Riemannsches Gebilde mit dem Minimalpolynom  $P$  ist, bildet  $\varphi$  jede  $\zeta$ -Faser bijektiv auf die entsprechende  $\pi$ -Faser ab. Dann ist  $\varphi : Z \rightarrow M$  bijektiv, also ein Isomorphismus. *Riemannsche Gebilde mit leerer Ausnahmemenge sind also zu Nullstellengebilden isomorph und haben die universelle Eigenschaft.*

Nun sei  $E \neq \emptyset$ . Wir bezeichnen die Beschränkungen auf  $Y_1 := Y \setminus E$  bzw.  $X_1 := X \setminus \eta^{-1}(E)$  bzw.  $Z_1 := Z \setminus \zeta^{-1}(E)$  mit dem Index 1. Da die Ausnahmemenge des eingeschränkten Gebildes  $(X_1, \eta_1, f_1)$  leer ist, gibt es wegen der universellen Eigenschaft genau eine holomorphe Abbildung  $\varphi : Z_1 \rightarrow X_1$  mit  $\zeta_1 = \eta_1 \circ \varphi_1$  und  $g_1 = f_1 \circ \varphi_1$ . Die Differenz  $Z \setminus Z_1$  ist lokal endlich, weil  $\zeta$  offen ist. Nach Lemma 4.6.4 läßt sich  $\varphi_1$  zu  $\varphi : Z \rightarrow X$  holomorph fortsetzen. Die zunächst auf  $Z_1$  gültigen Gleichungen  $\zeta = \eta \circ \varphi$  und  $g = f \circ \varphi$  gelten wegen der Stetigkeit auf ganz  $Z$ . Sie legen  $\varphi$  eindeutig fest.  $\square$

Aus der universellen Eigenschaft folgt die

**Eindeutigkeit.** Zwischen zwei Riemannschen Gebilden mit demselben Minimalpolynom existiert genau ein Isomorphismus.  $\square$

Wenn das Riemannsche Gebilde  $(X, \eta, f)$  über  $Y$  das Minimalpolynom  $P$  hat, sagt man: Das Gebilde  $(X, \eta, f)$ , die Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  und die Fläche  $X$  werden durch das Polynom  $P$  (bis auf Isomorphie) *definiert*.

**6.2.7 Komplexe Kurven. Historisches.** Man kann fragen, warum in 6.2.5 anstelle der abstrakten Fortsetzung von  $M$  zur Fläche  $X$  nicht der konkrete topologische Abschluß  $N$  von  $M$  in  $Y \times \widehat{\mathbb{C}}$  gewählt wird. Aber diese *komplexe Kurve*  $N$  ist bei den Punkten des Urbildes  $\pi^{-1}(E)$  der Ausnahmemenge im allgemeinen keine glatte Fläche.

Als Beispiel betrachten wir die komplexe Version von Newtons parabola nodata, siehe 6.2.1(2): Die durch  $w^2 + z^3 - z^2 = 0$  definierte komplexe Kurve  $N \subset \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$  besitzt im Ursprungs  $(0, 0)$  einen Doppelpunkt, welcher auch in der reellen Figur 6.2.1 b sichtbar ist. Es gibt eine zusammenhängende Umgebung  $W$  von  $(0, 0)$  in  $N$ , für die  $W \setminus \{(0, 0)\}$  nicht mehr zusammenhängt. Das kann bei glatten Flächen nicht passieren. Mit den Funktionen  $\eta(t) = 1 - t^2$  und  $f(t) = t(1 - t^2)$  des algebraischen Gebildes  $(X, \eta, f)$  zu  $w^2 + z^3 - z^2$  bildet man die *Normalisierung* (= Desingularisierung)  $\xi := \eta \times f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow N$ . Sie ersetzt den Doppelpunkt  $(0, 0)$  durch

die zweipunktige Faser  $\xi^{-1}(0,0) = \{\pm 1\}$ . Alle anderen Fasern von  $\xi$  sind einpunktig.

Wir werden im 9. Kapitel die Normalisierung von Kurven in der komplex projektiven Ebene statt in  $\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$  studieren.

Riemann beschreibt 1857 in [Ri 3], 6. Artikel, die Konstruktion des Gebildes  $(X, \eta, f)$  durch Desingularisierung der komplexen Kurve  $N$  sehr sibyllinisch. Als Singularitäten der Kurve betrachtet er nur Doppelpunkte wie bei der Parabel *no-data*. Alle anderen Singularitäten sind für ihn Grenzfälle, die keine zusätzlichen Überlegungen erfordern. Weierstraß hingegen studiert in seinen *Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten*, [Wst] 4, S. 13-45, die Tücken der Singularitäten sehr penibel.

## 6.3 Puiseux-Theorie

Wir untersuchen zusammenhängende Riemannsche Gebilde über Scheiben und benutzen die Ergebnisse für die lokale Beschreibung beliebiger Gebilde.

**6.3.1 Puiseux-Gebilde** sind zusammenhängende Riemannsche Gebilde  $(U, \eta, f)$  über einer Scheibe  $V$ , deren Ausnahmемenge nur aus ihrem Zentrum  $b$  besteht oder leer ist. Zum Beispiel ist  $(\mathbb{E}, t^n, t^q)$  für teilerfremde  $n, q$  ein Puiseux-Gebilde über  $\mathbb{E}$  mit dem Minimalpolynom  $w^n - z^q$ .

**Satz.** Die Projektion  $\eta : (U, a) \rightarrow (V, b)$  ist eine Windungsabbildung. Zu jeder Karte  $z : (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gibt es eine Karte  $t : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit  $z \circ \eta = t^n$  für  $n := \text{gr } \eta$ . Die Funktion  $f$  besitzt eine Laurent-Entwicklung

$$(1) \quad f = \sum_{\nu=k}^{\infty} c_{\nu} t^{\nu} \quad \text{mit} \quad k = o(f, a).$$

Wenn man die Wirkung der Gruppe  $\mu_n$  auf  $\mathbb{E}$  mittels  $t$  nach  $U$  überträgt, gilt für das Minimalpolynom  $P$

$$(2) \quad P(\eta, w) = \prod_{\alpha \in \mu_n} (w - f \circ \alpha).$$

*Beweis.* Die erste Behauptung folgt aus 4.6.1.– Da  $\eta$  normal ist und  $P$  mit dem charakteristische Polynom übereinstimmt, gilt (2) wegen der Folgerung in 6.1.2.  $\square$

Man schreibt die Laurent-Entwicklung (1) auch mit gebrochenen Exponenten als mehrdeutige Funktion in  $z = t^n$  und nennt dies die *Puiseux-Entwicklung*:

$$(3) \quad \tilde{f}(z) = \sum_{\nu=k}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu/n}.$$

**6.3.2 Lokale Gestalt Riemannscher Gebilde.** Sei  $(X, \eta, f)$  ein  $n$ -blättriges Riemannsches Gebilde über  $Y$ . Sei  $b \in Y$  und sei  $z : (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte, deren Definitionsbereich  $V$  die Ausnahmемenge höchstens in  $b$

trifft. Sei  $\{a_1, \dots, a_r\} := \eta^{-1}(b)$  und  $U := \eta^{-1}(V)$ . Aus der Komponentenzerlegung 6.2.2 und aus 6.3.1 folgt:

Die Komponenten  $(U_j, \eta_j, f_j)$  des eingeschränkten Gebildes  $(U, \eta|U, f|U)$  über  $V$  sind Puiseux-Gebilde. Dabei ist  $\eta_j : (U_j, a_j) \rightarrow (V, b)$  eine  $n_j$ -fache Windungsabbildung mit  $n_j := v(\eta, a_j)$ . Es gilt  $n_1 + \dots + n_r = n$ . Es gibt Karten  $t_j : (U_j, a_j) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit  $z \circ \eta_j = t_j^{n_j}$  und Laurent-Entwicklungen

$$(1) \quad f_j = \sum_{\nu=k_j}^{\infty} c_{j\nu} t_j^\nu \quad \text{mit } k_j := o(f_j, a_j) = o(f, a_j).$$

Das Minimalpolynom  $P$  von  $(U, \eta|U, f|U)$  entsteht aus dem Minimalpolynom von  $(X, \eta, f)$  durch Beschränkung der Koeffizienten auf  $V$ . Die Faktoren  $P_j$  seiner Primzerlegung  $P = P_1 \cdot \dots \cdot P_r$  sind die Minimalpolynome der Puiseux-Gebilde  $(U_j, \eta_j, f_j)$ . Für sie gilt

$$(2) \quad P_j(\eta, w) = \prod_{\alpha \in \mu_{n_j}} (w - f_j \circ \alpha).$$

Die Gebilde  $(U_j, \eta_j, f_j)$  heißen *Zweige* von  $(X, \eta, f)$  bei  $b$ . Bei Studium ebener Kurven spielen sie, insbesondere ihre Anzahl  $r$  und die Exponenten  $n_j, k_j$ , eine wichtige Rolle, siehe Kapitel 9. Um die Singularitäten dieser Kurven genauer zu untersuchen, werden auch die Puiseux-Entwicklungen der Zweige benötigt, siehe 9.6 und Aufgabe 9.7.11.

**6.3.3 Historisches.** Isaac Newton erläuterte 1676 in zwei Briefen an Oldenburg, die für Leibniz bestimmt waren, am Beispiel zweier Polynome dritten und sechsten Grades, wie man aus dem Minimalpolynom  $P \in \mathcal{M}(\mathbb{E})[w]$  die Puiseux-Reihe berechnen kann, siehe [New 1] oder [BK], S. 495. Bei konstanten Koeffizienten handelt es sich um das bekannte Newtonsche Verfahren zur numerischen Nullstellenbestimmung. An Newton schließt sich Lagrange mit einer „neuen Methode“ an, die er 1770 in Berlin veröffentlichte, [Lag] III, p. 5-73. Riemann beschrieb die lokale Gestalt eines Gebildes in [Ri 3], Artikel 6, und zitierte dabei Lagrange. Wahrscheinlich kannte er Puiseux' Arbeit [Pu] nicht, die Riemanns Ausführungen zum Teil vorwegnimmt.

## 6.4 Minimalpolynome und Automorphismen

Wir betrachten Riemannsche Gebilde  $(X, \eta, f)$  über  $Y$ , deren Minimalpolynome  $P(w)$  nur von einer festen Potenz  $w^n$  abhängen oder noch spezieller *rein* sind, d.h. die Gestalt  $w^n - p$  mit  $p \in \mathcal{M}(Y)$  haben. Wir gewinnen daraus Automorphismen von  $X$  und andere Eigenschaften der Gebilde.

**6.4.1 Konstruktion von Automorphismen.** Sei  $(X, \eta, f)$  ein Riemannsches Gebilde, dessen Minimalpolynom  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$  nur Potenzen von  $w^n$  enthält. Es gibt genau einen Monomorphismus  $\Phi : \mu_n \rightarrow \mathcal{D}(\eta)$  mit

$$(1) \quad f \circ \Phi(\omega) = \omega \cdot f \quad \text{für } \omega \in \mu_n.$$

*Beweis.* Für jedes  $\omega \in \mu_n$  haben die Gebilde  $(X, \eta, \omega f)$  und  $(X, \eta, f)$  dasselbe Minimalpolynom. Nach der Eindeutigkeitsaussage in 6.2.6 gibt es genau ein  $\Phi(\omega) \in \mathcal{D}(\eta)$  mit  $f \circ \Phi(\omega) = \omega \cdot f$ . Wegen der Eindeutigkeit ist  $\Phi : \mu_n \rightarrow \mathcal{D}(\eta)$  ein Monomorphismus.  $\square$

**6.4.2 Reine Minimalpolynome.** Sei  $P := w^n - p$  das Minimalpolynom des Gebildes  $(X, \eta, f)$  über  $Y$ . Seine Ausnahmемenge  $E$  besteht aus den Null- und Polstellen von  $p$ .

(1) *Die Untergruppe  $\Phi(\mu_n) < \mathcal{D}(\eta)$  operiert transitiv auf jeder Faser, und  $\eta$  ist gleichverzweigt.*

*Beweis.* Für jedes  $y \in Y \setminus E$  operiert  $\Phi(\mu_n)$  wegen 6.4.1(1) transitiv auf der Faser  $\eta^{-1}(y)$ . Da  $E$  lokal endlich ist, folgt die transitive Operation auf *allen* Fasern, und  $\eta$  ist dann gleichverzweigt.  $\square$

(2) *Genau dann, wenn  $P$  irreduzibel ist, hängt  $X$  zusammen. In diesem Falle ist  $\eta$  normal und hat die Deckgruppe  $\mathcal{D} = \Phi(\mu_n)$ .*

*Beweis.* Die erste Behauptung ist die Folgerung in 6.2.2. Aus  $n = \sharp \mu_n \leq \sharp \mathcal{D}(\eta) \leq \text{gr } \eta = n$  folgt mit 1.5.5 die zweite Behauptung.  $\square$

(3) *Für jeden Punkt  $a \in X$  mit  $b := \eta(a)$  gilt  $n = \sharp \eta^{-1}(b) \cdot v(\eta, a)$  und  $o(p, b) = \sharp \eta^{-1}(b) \cdot o(f, a)$ .*

*Beweis.* Weil  $\eta$  nach 6.4.1 gleichverzweigt ist, gilt die erste Gleichung, und aus  $f^n = p \circ \eta$  folgt die zweite Gleichung.  $\square$

(4) *Die Fläche  $X$  hängt zusammen, wenn  $\text{ggT}\{n, o(p, b) : b \in E\} = 1$  ist.*

*Beweis.* Nach (3) ist  $\sharp \eta^{-1}(b)$  ein Teiler von  $o(p, b)$ . Da  $n = \sharp \eta^{-1}(y)$  für alle  $y \notin Y \setminus E$  gilt, ist  $\text{ggT}\{\sharp \eta^{-1}(y) : y \in Y\} = 1$ . Nach 1.4.6 hängt  $X$  dann zusammen.  $\square$

Zu jedem  $b \in E$  gibt es eine Karte  $z : (V, b) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit  $p|V = z^q$  für  $q := o(p, b)$ . Sei  $k := \text{ggT}(n, |q|)$  und  $r := n/k$ ,  $s := q/k$ .

(5) *Über  $V$  zerfällt  $(X, \eta, f)$  in  $k$  viele Zweige  $(U_\varepsilon, \eta, f)$  mit den Minimalpolynomen  $w^r - \varepsilon z^s$  für  $\varepsilon \in \mu_k$ . Insbesondere ist  $k = \sharp \eta^{-1}(b)$ .*

Das folgt nach 6.3.2 aus der Primzerlegung

$$P|V = w^n - z^q = \prod_{\varepsilon \in \mu_k} (w^r - \varepsilon z^s). \quad \square$$

(6) *Sei  $X$  zusammenhängend. Für jedes  $a \in X$  mit  $b := \eta(a)$  wird die Standgruppe  $\mathcal{D}_a$  von  $\Phi(\exp(2\pi i o(p, b)/n))$  kanonisch erzeugt.*

*Beweis.* Sei  $U$  die Komponente von  $\eta^{-1}(V)$ , in der  $a$  liegt. Nach (5) gibt es ein  $\varepsilon \in \mu_k$ , so daß  $U = U_\varepsilon$  ist und  $(U, \eta|U, f|U)$  das Minimalpolynom  $w^r - \varepsilon z^s$  hat. Dann ist  $r = v(\eta, a)$ . Es gibt eine Karte  $t : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  mit  $z \circ \eta|U = t^r$ . Aus  $(f|U)^r = \varepsilon(z \circ \eta|U)^s = \varepsilon(t^s)^r$  folgt  $f|U = \delta t^s$  mit  $\delta^r = \varepsilon$ . Das kanonisch erzeugende Element  $\sigma$  von  $\mathcal{D}_a$  hat nach 1.5.3 die Ableitung  $\sigma'(a) = \exp(2\pi i/r)$ , und es gilt  $t \circ \sigma = \sigma'(a)t$ . Daher ist  $(f|U) \circ \sigma = \delta(t \circ \sigma)^s = \delta \sigma'(a)^s t^s = \sigma'(a)^s f|U$ . Wegen 6.4.1(1) folgt  $\sigma = \Phi(\sigma'(a)^s) = \Phi(\exp(2\pi i s/r)) = \Phi(\exp(2\pi i q/n))$ .  $\square$

**6.4.3 Zyklische Überlagerungen der Zahlenkugel.** Seien  $e_1, \dots, e_r$  paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Seien  $n, m_1, \dots, m_r$  ganze Zahlen mit  $0 < m_j < n$  und  $\text{ggT}(n, m_1, \dots, m_r) = 1$ . Aus 6.4.2 folgt der

**Satz.** *Das Polynom*

$$(1) \quad w^n - (z - e_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - e_r)^{m_r} \in \mathbb{C}[z, w]$$

definiert eine  $n$ -blättrige zyklische Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit den Verzweigungspunkten  $e_1, \dots, e_r$ , falls  $m_1 + \dots + m_r \equiv 0 \pmod{n}$ , und zusätzlich  $\infty$ , wenn dies nicht der Fall ist. Im zweiten Fall wird die ganze Zahl  $m_0$  durch  $0 < m_0 < n$  und  $m_0 + m_1 + \dots + m_r \equiv 0 \pmod{n}$  festgelegt und  $e_0 = \infty$  gesetzt. Die Deckgruppe  $\mathcal{D}$  wird durch ein Element  $\sigma$  erzeugt, so daß für jedes  $a \in \eta^{-1}(e_j)$  die Standgruppe  $\mathcal{D}_a$  durch  $\sigma^{m_j}$  kanonisch erzeugt wird.  $\square$

Der Vergleich mit 4.7.5-6 zeigt:

(\*) *Alle zyklischen, insbesondere alle (hyper-) elliptischen Überlagerungen der Zahlenkugel lassen sich auf diese Weise beschreiben.*  $\square$

**6.4.4 Die Kleinsche Fläche.** Jede siebenblättrige normale Überlagerungen  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit drei Verzweigungspunkten  $0, 1, \infty$  wird bis auf Isomorphie durch das Polynom  $w^7 - z(z-1)$  oder  $w^7 - z^2(z-1)$  definiert. Das folgt aus 6.4.3, angewendet auf das Beispiel in 4.7.6. Die durch  $w^7 - z^2(z-1)$  definierte Fläche  $X$  ist zur Modulfläche  $X_7$  isomorph, die Klein ausführlich studierte, siehe 5.7.2, 7.2.3 und 11.7.4. Sie heißt daher *Kleinsche Fläche*. Die Ergebnisse aus 6.4.2, angewendet auf  $w^7 - z^2(z-1)$ , ergeben den

**Satz.** *Das durch  $w^7 - z^2(z-1)$  definierte algebraische Gebilde  $(X, \eta, f)$  hat folgende Eigenschaften: Die Fläche  $X$  hängt zusammen. Die Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist normal und hat 7 Blätter. Sie verzweigt über  $0, 1, \infty$ . Die entsprechenden  $\eta$ -Fasern bestehen aus je einem Punkt  $\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{\infty}$  mit der Windungszahl 7. Die Ordnungen von  $f$  bei  $\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{\infty}$  sind 2, 1, -3. Sonst hat  $f$  keine Null- oder Polstellen. Wenn man das erzeugende Element  $\sigma$  von  $\mathcal{D}(\eta)$  so wählt, daß  $f \circ \sigma = (\exp(2\pi i/7)) \cdot f$  gilt, werden die Standgruppen bei  $\widehat{0}, \widehat{1}, \widehat{\infty}$  von  $\sigma^2, \sigma, \sigma^4$  kanonisch erzeugt.*  $\square$

Auch im Gebilde  $(X, \eta, f)$  mit dem Minimalpolynom  $w^7 - z(z-1)$  ist  $\eta$  eine 7-blättrige, zyklische Überlagerung mit dem Verzweigungsort  $\{0, 1, \infty\}$ . Das Gebilde  $(X, f, \eta - \frac{1}{2})$  hat das Minimalpolynom  $w^2 - z^7 - \frac{1}{4}$ . Daraus folgt:

(\*) *Die Funktion  $f: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist eine hyperelliptische Überlagerung.*  $\square$

In 8.3.5 wird gezeigt, daß die Kleinsche Fläche nicht hyperelliptisch ist.

**6.4.5 Ein Satz von Hurwitz.** *Jede zusammenhängende  $n$ -blättrige Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$ , deren Deckgruppe einen Automorphismus  $\alpha$  der Ordnung  $k < \infty$  enthält, läßt sich durch ein Polynom  $P$  definieren, das nur Potenzen von  $w^k$  enthält. Für  $k = n$  ist  $P$  ein reines Polynom.*

*Beweis.* Jede  $n$ -punktige Faser  $\eta^{-1}(b) = A_1 \uplus \dots \uplus A_r$  ist die disjunkte Vereinigung von  $\langle \alpha \rangle$ -Bahnen  $A_j$ . Wir zeichnen in jeder einen Punkt  $a_j$  aus.

Nach dem Korollar zum Riemannschen Existenzsatz in 6.2.3 gibt es ein  $h \in \mathcal{M}(X)$  mit  $h(a_j) = j$  für  $j = 1, \dots, r$  und  $h(x) = 0$  für alle anderen Punkte  $x \in \eta^{-1}(b)$ . Mit  $\varepsilon := \exp(2\pi i/k)$  bilden wir die *Lagrangesche Resolvente*

$$f := h + \varepsilon^{-1}h \circ \alpha + \dots + \varepsilon^{-q+1}h \circ \alpha^{q-1} \in \mathcal{M}(X).$$

Sie hat die Werte  $f \circ \alpha^\nu(a_j) = \varepsilon^\nu j$ . Also ist  $f$  längs  $\eta^{-1}(b)$  injektiv, und somit ist  $(X, \eta, f)$  ein Riemannsches Gebilde über  $Y$ . Da  $\alpha : (X, \eta, f) \rightarrow (X, \eta, \varepsilon^{-1}f)$  ein Isomorphismus der Gebilde ist, haben beide dasselbe Minimalpolynom  $P(z, w) = P(z, \varepsilon w)$ . Es enthält nur  $k$ -te Potenzen von  $w$ .  $\square$

**Erste Folgerung.** *Jede kompakte, zusammenhängende Fläche  $X$ , die einen Automorphismus  $\alpha$  der Ordnung  $k < \infty$  besitzt, läßt sich durch ein Polynom aus  $\mathbb{C}[z, w]$  definieren, das nur Potenzen von  $w^k$  enthält.*

*Beweis.* Sei  $\pi : X \rightarrow Y$  die Orbitprojektion der von  $\alpha$  erzeugten Gruppe. Nach der zweiten Folgerung in 6.2.3 gibt es eine endliche Überlagerung  $\varphi : Y \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ . Dann ist  $\eta := \varphi \circ \pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine  $rq$ -blättrige Überlagerung mit  $\alpha \in \mathcal{D}(\eta)$ , die nach dem Satz durch ein Polynom in  $\mathbb{C}(z)[w]$  definiert wird, das nur Potenzen von  $w^k$  enthält. Indem man mit dem Hauptnenner seiner Koeffizienten multipliziert, entsteht das gewünschte Polynom.  $\square$

**Zweite Folgerung.** *Alle  $n$ -blättrigen zyklischen Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  lassen sich durch die in 6.4.3(1) angegebenen Polynome beschreiben.*

*Beweis.* Nach dem Satz gibt es ein algebraisches Gebilde  $(X, \eta, f)$  mit einem reinen Minimalpolynom  $w^n - q(z) \in \mathbb{C}(z)[w]$ . Es gibt ein  $u \in \mathbb{C}(z)$  mit  $q = u^n \cdot p$ , so daß  $p$  ein Produkt von Faktoren  $(z - e_j)^{m_j}$  mit paarweise verschiedenen  $e_j \in \mathbb{C}$  und Exponenten  $0 < m_j < n$  ist. Dann hat  $(X, \eta, f/u)$  das Minimalpolynom  $w^n - p$ . Da es irreduzibel ist, gilt die ggT-Gleichung.

Der Satz und sein Beweis stammen von Hurwitz (1887) [Hur] I, S. 241 und 246. Die Lagrangeschen Resolvente wird in der Algebra zur Untersuchung zyklischer Körpererweiterungen benutzt, siehe z.B. [vdW], § 56.– Das Ergebnis der zweiten Folgerung wurde am Ende von 6.4.3 ohne Benutzung des Riemannschen Existenzsatzes gewonnen. Statt dessen wurden die topologisch begründeten Resultate des Abschnitts 4.7 eingesetzt.

## 6.5 Funktionenkörper

Die Untersuchungen in 6.1 und 6.2 lassen sich, wenn man den Riemannschen Existenzsatz benutzt, zu einer Äquivalenz zwischen Überlagerungen und Körpererweiterungen ausbauen.

**6.5.1 Überlagerungen und Körpererweiterungen.** Den folgenden Überlagerungen liegt eine feste zusammenhängende Riemannsche Fläche  $Y$  und ihr Funktionenkörper  $K := \mathcal{M}(Y)$  zugrunde. Wir betrachten zwei *Kategorien*:

- I. Die *Objekte* sind alle endlichen, zusammenhängenden Überlagerungen  $\eta: X \rightarrow Y$ . Für zwei Objekte  $\eta$  und  $\eta': X' \rightarrow Y$  besteht die *Morphismenmenge*  $\text{Hol}(\eta, \eta')$  aus allen holomorphen Abbildungen  $\varphi: X \rightarrow X'$  mit  $\eta = \eta' \circ \varphi$ .
- II. Die *Objekte* sind alle endlichen Erweiterungskörper  $L$  von  $K$ . Für zwei Objekte  $L$  und  $L'$  besteht die *Morphismenmenge*  $\text{Hom}(L', L)$  aus allen Körpermonomorphismen  $h: L' \rightarrow L$  mit  $h|_K = \text{id}_K$ .

Folgender *kontravariante*, d.h. die Richtung der Morphismen umkehrender, *Funktor* verbindet die erste mit der zweiten Kategorie: Jeder Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$  wird die Körpererweiterung  $\eta^*: \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$ ,  $g \mapsto g \circ \eta$ , zugeordnet und jedem Morphismus  $\varphi \in \text{Hol}(\eta, \eta')$  der Körpermonomorphismus  $\varphi^*: \mathcal{M}(X') \rightarrow \mathcal{M}(X)$ ,  $g \mapsto g \circ \varphi$ . Dieser Funktor stiftet eine *Anti-Äquivalenz* zwischen beiden Kategorien, genauer:

- (1) Die Abbildung  $F: \text{Hol}(\eta, \eta') \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}(X'), \mathcal{M}(X))$ ,  $\varphi \mapsto \varphi^*$ , ist bijektiv, und  $\varphi$  ist genau dann biholomorph, wenn  $\varphi^*$  ein Isomorphismus ist.
- (2) Zu jedem endlichen Erweiterungskörper  $L$  von  $K$  gibt es eine endliche Überlagerung  $\eta: X \rightarrow Y$ , deren Körpererweiterung  $\eta^*: K = \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$  zur Erweiterung  $K \hookrightarrow L$  isomorph ist.

*Beweis.* Zu (1). Sei  $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{M}(X'), \mathcal{M}(X))$ . Nach der zweiten Folgerung in 6.2.3 gibt es ein Riemannsches Gebilde  $(X', \eta', f')$  über  $Y$ . Sei  $P \in K[w]$  sein Minimalpolynom. Dann ist  $P(\eta, \alpha(f')) = 0$ . Nach der universellen Eigenschaft 6.2.6 gibt es genau ein  $\varphi \in \text{Hol}(\eta, \eta')$  mit  $\alpha(f') = f' \circ \varphi$ . Wegen  $\mathcal{M}(X') = K[f]$  folgt  $\alpha = \varphi^*$ , d.h.  $F$  ist bijektiv. – Sei  $\varphi^*$  ein Isomorphismus. Wie gerade gezeigt wurde, gibt es ein  $\psi \in \text{Hol}(\eta', \eta)$  mit  $\psi^* = (\varphi^*)^{-1}$ . Aus  $(\psi \circ \varphi)^* = \text{id}$  und  $(\varphi \circ \psi)^* = \text{id}$  folgt  $\varphi \circ \psi = \text{id}$  und  $\psi \circ \varphi = \text{id}$  wegen der Injektivität von  $F$ . Die Umkehrung ist trivial.

Zu (2). Es gibt ein  $a \in L$  mit  $L = K(a)$ . Nach 6.2.5 gehört zum Minimalpolynom von  $a$  ein Riemannsches Gebilde  $(X, \eta, f)$ , dessen Überlagerung  $\eta$  die behauptete Eigenschaft hat.  $\square$

Besonderes Interesse verdient der Fall  $Y = \hat{\mathbb{C}}$ . Dann gilt:

- (3) Die endlichen Erweiterungskörper des rationalen Funktionenkörpers  $\mathbb{C}(z)$  sind die Funktionenkörper  $\mathcal{M}(X)$  der kompakten zusammenhängenden Riemannschen Flächen.  $\square$

**6.5.2 Galois-Gruppen.** Für  $\eta = \eta'$  ist  $\text{Hol}(\eta, \eta) = \mathcal{D}(\eta)$  die Deckgruppe und  $\text{Hom}(\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(X)) = \text{Gal}(\eta^*)$  die Galois-Gruppe der Körpererweiterung  $\eta^*$ . In diesem Falle läßt sich 6.5.1(1) ergänzen:

- (1) Die Bijektion  $F: \mathcal{D}(\eta) \rightarrow \text{Gal}(\eta^*)$  ist ein Anti-Isomorphismus der Gruppen. Die Überlagerung  $\eta$  ist genau dann normal, wenn die Erweiterung  $\eta^*$  normal (= galoisch) ist.

*Beweis.* Wegen  $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$  ist  $F$  ein Anti-Isomorphismus. Nach 1.5.5 ist  $\eta$  genau dann normal, wenn  $\sharp \mathcal{D}(\eta) = \text{gr } \eta$  gilt. Die Körpererweiterung  $\eta^*$



ist genau dann normal, wenn  $\sharp(\text{Gal}(\eta^*) = \text{gr } \eta^*$  gilt. Nach dem Struktursatz in 6.2.2 ist  $\text{gr } \eta^* = \text{gr } \eta$ .  $\square$

**Satz** Jede endliche Gruppe  $G$  ist die Galoisgruppe einer Erweiterung des Körpers  $\mathbb{C}(z)$  der rationalen Funktionen.

*Beweis.* Es gibt endlich viele, von 1 verschiedene Elemente  $g_0, \dots, g_r$ , welche  $G$  erzeugen und  $g_0 \cdot \dots \cdot g_r = 1$  erfüllen. Damit konstruiert man nach Satz 4.7.4 eine normale Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  mit der Deckgruppe  $G$ . Die Körpererweiterung  $\eta^* : \mathbb{C}(z) \hookrightarrow \mathcal{M}(X)$  hat wegen (1) die Galoisgruppe  $G$ .

**6.5.3 Isomorphe Funktionenkörper.** Zwei kompakte zusammenhängende Riemannsche Flächen  $X$  und  $X'$  sind genau dann isomorph, wenn ihre Funktionenkörper  $\mathcal{M}(X)$  und  $\mathcal{M}(X')$  als  $\mathbb{C}$ -Algebren isomorph sind.

*Beweis.* Sei  $h : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}(X')$  ein Isomorphismus. Für  $\eta \in \mathcal{M}(X) \setminus \mathbb{C}$  sind  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  und  $h(\eta) =: \eta' : X' \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  endliche Überlagerungen. Nach 6.5.1(1) gibt es einen Isomorphismus  $\varphi : X \rightarrow X'$  mit  $\varphi^* = h$ .  $\square$

Wenn  $X$  durch das irreduzible Polynom  $Q \in \mathbb{C}[z, w]$  definiert wird, ist  $\mathcal{M}(X)$  ist der Quotientenkörper des Restklassenrings  $\mathbb{C}[z, w]/(Q)$  nach dem von  $Q$  erzeugten Hauptideal. Wenn man  $\mathcal{M}(X')$  entsprechend darstellt, wird jeder Isomorphismus der  $\mathbb{C}$ -Algebren  $\mathcal{M}(X) \cong \mathcal{M}(X')$  durch rationale Funktionen  $z' = Z'(z, w)$ ,  $w' = W(z, w)$  und umgekehrt  $z = Z(z', w')$ ,  $w = W(z', w')$  beschrieben und daher *birationale Äquivalenz* genannt. Riemann benutzt sie in [Ri 3], Artikel 12, um die Isomorphie  $X \approx X'$  der Flächen zu *definieren*: Er betrachtet „als zu einer Klasse gehörend alle irreduziblen algebraischen Gleichungen zwischen veränderlichen Größen, welche sich durch rationale Substitutionen ineinander transformieren lassen.“

In höheren Dimensionen gibt es nicht isomorphe, kompakte algebraische Mannigfaltigkeiten mit isomorphen Funktionenkörpern, zum Beispiel  $\widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}}$  und die projektive Ebene  $\mathbb{P}^2$ .

**6.5.4 Ausblick.** Da jede endliche Körpererweiterung  $L$  über  $\mathbb{C}(z)$  durch den Funktionenkörper einer zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$  realisiert wird und diese durch  $L$  eindeutig bestimmt ist, liegt es nahe, die Fläche  $X$  allein aus dem Körper  $L$  heraus zu konstruieren. Diese nicht mehr an die komplexen Zahlen gebundene Theorie algebraischer Funktionen und abstrakter Riemannscher Flächen geht auf Dedekind und Weber (1882, [Ded] 1, S. 238-350) zurück. Die Methoden gehören zur Bewertungstheorie, siehe z.B. [Lang].

## 6.6 Aufgaben

- 1) Zeige: Die Reduktion des charakteristischen Polynoms aus 6.1.2 ist das Minimalpolynom aus 6.1.5.
- 2) Mit der  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega < \mathbb{C}$  wird nach 2.1.3 die Körpererweiterung  $\mathbb{C}(z) \hookrightarrow \mathcal{M}_\Omega(\mathbb{C}), f \mapsto f \circ \wp$ , gebildet. Wie lautet das Minimalpolynom von  $(1/\wp') + \wp^2$ ?
- 3) Sei  $\mathcal{M}$  die Fläche der meromorphen Funktionenkeime auf der zusammenhängenden Fläche  $Y$  mit der Projektion  $p : \mathcal{M} \rightarrow Y$  und der Auswertungsfunktion  $e$ , siehe 3.4.2. Sei  $(X, \eta, f)$  ein Riemannsches Gebilde mit dem irreduziblen Minimalpolynom  $P \in \mathcal{M}(Y)[w]$ . Sei  $Z \subset \mathcal{M}$  die Komponente des Keimes einer holomorphen Wurzel von  $P$  im Sinne von 1.2.3. Zeige: Es gibt genau eine holomorphe Einbettung  $\varphi : Z \rightarrow X$ , so daß  $\eta \circ \varphi = p$  und  $f \circ \varphi = e$  gelten. Die Differenz  $X \setminus \varphi(Z)$  ist lokal endlich.
- 4) Sei  $e_k \in \mathbb{C}$  ein Verzweigungswert der  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega$ . Zeige: Es gibt ein Untergitter  $\Omega^* < \Omega$  vom Index 2 und ein Riemannsches Gebilde  $(\mathbb{C}/\Omega^*, \eta, f)$  über  $\mathbb{C}/\Omega$  mit dem Minimalpolynom  $w^2 - \hat{\wp} + e_k$ . Folgere, daß  $\wp - e_k$  ein Quadrat in  $\mathcal{M}(\mathbb{C})$  ist. – Für die zahlentheoretisch interessante Reihenentwicklung von  $\sqrt{\wp - e_k}$  siehe [HC] II, 2, 13. Vergleiche auch Aufgabe 2.7.2.
- 5) Bestimme das Puiseux-Gebilde  $(\mathbb{E}, t^m, f)$  mit dem Minimalpolynom  $w^6 - 5zw^5 + (z^3/a)w^4 - 7a^2z^2w^2 + 6a^3z^3 + b^2z^4 \in \mathcal{M}(\mathbb{E})[w]$  mit  $a \neq 0$ , d.h. bestimme  $m$  und den Anfang der Laurent-Entwicklung von  $f$ . Dieses Polynom ist eines der in 6.3.3 erwähnten Beispiele Newtons.
- 6) Bestimme in dem algebraischen Gebilde  $(X, \eta, f)$  mit dem Minimalpolynom  $w^3 - (z^2 + 1)^2(z^3 - 1)$  die Windungspunkte und Windungszahlen von  $\eta$  und die Ordnungen von  $f$ . – Löse dieselbe Aufgabe für das Riemannsche Gebilde über  $\mathbb{C}$  mit dem Minimalpolynom  $w^n - \sin z$ .
- 7) Die Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  werde durch  $P(z, w) = w^3 - z(z - 1)$  definiert. Finde zu jedem Element  $\beta$  der anharmonischen Gruppe  $\Lambda$  ein  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  mit  $\eta \circ \alpha = \beta \circ \eta$ . Entsteht dabei ein Monomorphismus  $\Lambda \rightarrow \text{Aut}(X)$ ?

In den Aufgaben 8 und 9 sei  $\eta : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  eine (hyper-)elliptische Überlagerung mit  $2m + 2 \geq 4$  Verzweigungspunkten.

- 8) Sei  $v(\eta, a) = 2$ . Zeige: Die möglichen Grade meromorpher Funktionen auf  $X$ , die auf  $X \setminus \{a\}$  holomorph sind, bilden die Menge  $\mathbb{N} \setminus \{1, 3, \dots, 2m-1\}$ .
- 9) Zeige: Wenn  $h \in \mathcal{M}(X)$  einen Grad  $\leq m + 1$  hat, faktorisiert  $h$  über  $\eta$ .  
*Hinweis:* Betrachte die Null- und Polstellen von  $h - h \circ \sigma$ , wobei  $\sigma \in \mathcal{D}(\eta)$  die Involution ist.

- 10) Automorphismen (hyper-) elliptischer Flächen mit 1, 2, 3 und 4 Fixpunkten.  
 (i) Sei  $(X, \eta, f)$  das algebraische Gebilde zu  $w^2 + z^{2m+2} + 1$ . Sei  $\delta := \exp(\pi i / [m+1])$ . Zeige: Der Automorphismus  $\alpha$  von  $X$  mit  $\eta \circ \alpha = \delta \eta$  und  $f \circ \alpha = f$  hat zwei Fixpunkte, und  $\alpha^2$  hat vier Fixpunkte.

*Hinweis:* Benutze  $f/\eta^{m+1}$  für die Suche nach Fixpunkten in  $\eta^{-1}(\infty)$ .

- (ii) Sei  $(X, \eta, f)$  das Gebilde zu  $w^2 + z^{2m+2} + z$ . Sei  $\delta := \exp(2\pi i / [2m+1])$ . Zeige: Der Automorphismus  $\alpha$  von  $X$  mit  $\eta \circ \alpha = \delta \eta$  und  $f \circ \alpha = \delta^{m+1} f$  hat drei Fixpunkte. Das Produkt  $\alpha \circ \sigma$  mit der Involution  $\sigma \in \mathcal{D}(\eta)$  hat einen Fixpunkt.

*Bemerkung.* Wenn  $X$  hyperelliptisch ist, hat jedes Element in  $\text{Aut}(X) \setminus \mathcal{D}(\eta)$  höchstens vier Fixpunkte, siehe 8.3.6(2).

- 11) Sei  $(X, \eta, f)$  das algebraische Gebilde zu  $w^n + z^n + 1$ . Zeige: Zu  $\delta, \varepsilon \in \mu_n$  gibt es genau einen Automorphismus  $\alpha_{\delta, \varepsilon}$  von  $X$  mit  $\eta \circ \alpha_{\delta, \varepsilon} = \delta \eta$  und  $f \circ \alpha_{\delta, \varepsilon} = \varepsilon f$ . Ist  $\mu_n \times \mu_n \rightarrow \text{Aut}(X), (\delta, \varepsilon) \mapsto \alpha_{\delta, \varepsilon}$ , ein Homomorphismus? Ist diese Abbildung injektiv und/oder surjektiv? Welche Fixpunkte hat  $\alpha_{\delta, \varepsilon}$ ?

*Hinweis:* Benutze  $f/\eta$ , um nach Fixpunkten in  $\eta^{-1}(\infty)$  zu suchen.

- 12) Sei  $(X, \eta, f)$  das algebraische Gebilde zu  $w^7 - z^2(z-1)$ . Zeige: Die Kleinsche Fläche  $X$  besitzt einen Automorphismus  $\beta$  mit

$$\eta \circ \beta = 1 - \frac{1}{\eta} \quad \text{und} \quad f \circ \beta = -\frac{f^2}{\eta}.$$

Zeige, daß  $\beta$  die Ordnung 3 hat und  $\beta \circ \alpha = \alpha^2 \circ \beta$  für jedes  $\alpha \in \mathcal{D}(\eta)$  gilt. Welche Ordnung hat die von  $\alpha$  und  $\beta$  erzeugte Untergruppe  $\langle \alpha, \beta \rangle$  von  $\text{Aut}(X)$ ? Untersuche, ob  $\langle \alpha \rangle$  bzw.  $\langle \beta \rangle$  ein Normalteiler von  $\langle \alpha, \beta \rangle$  ist.

- 13) Zeige: Jede verzweigte, zyklische Überlagerung einer kompakten Fläche hat mindestens zwei Verzweigungspunkte.

- 14) Die Vierergruppe wirkt auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  durch  $t \mapsto \pm t, \pm t^{-1}$ , vgl. 4.2.4 mit  $q = 2$ . Gib eine rationale Orbitprojektion  $\eta$  an und ergänze sie zum algebraischen Gebilde  $(\widehat{\mathbb{C}}, \eta, f)$  mit einem biquadratischen Minimalpolynom  $P$ .



## 7. Differentialformen und Integration

Um die Differentiation und Integration in die Theorie Riemannscher Flächen zu übertragen, werden den Funktionen die *Differentialformen* gleichberechtigt zur Seite gestellt. Sie treten als Ableitungen meromorpher Funktionen und als Integranden der Wegintegrale auf.

Zu jeder Differentialform  $\neq 0$  gehört ein Null- und Polstellendivisor. Diese Divisoren werden *kanonischen Divisoren* genannt. Auf kompakten Flächen haben sie einen nur von der Fläche abhängigen Grad, welcher, traditionell mit  $-1$  multipliziert, die *analytische Charakteristik* der Fläche genannt und mit  $\chi$  bezeichnet wird. Eine *Formel von Riemann und Hurwitz* verknüpft bei Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  die Charakteristiken von  $X$  und  $Y$  mit dem Grad und den Windungszahlen von  $\eta$ . Hurwitz folgend demonstrieren wir die Schlagkraft dieser Formel durch Anwendungen auf Automorphismen.

Die aus der klassischen Funktionentheorie bekannten *Residuen* werden in der Theorie Riemannscher Flächen den isolierten Singularitäten der Differentialformen zugeordnet. Bei meromorphen Formen auf kompakten Flächen ist die Summe aller Residuen gleich 0. Dies spielt in den weiter führenden Untersuchungen dieser Flächen eine wichtige Rolle.

*Integrale* algebraischer Funktionen wurden bereits lange vor Riemann untersucht, blieben jedoch wegen ihrer Vieldeutigkeit umstritten, bis Riemann sie als Integrale über Differentialformen längs Wegen auf kompakten Flächen deutete. Wir übernehmen seine Definition und beweisen durch Integration die *Abelsche Relation* für Hauptdivisoren auf kompakten Flächen sowie die *Charakterisierung der Tori* durch die Existenz einer Differentialform ohne Null- und Polstellen.

Die Integration verknüpft die topologische Gestalt jeder Riemannschen Fläche mit ihrer holomorphen Struktur. Um diese Beziehung systematisch auszubauen, vereinfachen wir die Fundamentalgruppe durch Abelsch-machen zur *Homologie* und interpretieren die Integration als Paarung

$$Homologie \times \{Differentialformen\} \rightarrow \mathbb{C} .$$

Sie entfaltet ihre volle Wirkung erst ab dem 10. Kapitel, wenn die Beweise der tiefliegenden Sätze der Theorie Riemannscher Flächen vorbereitet werden.

## 7.1 Differentialformen

Zunächst wird analysiert, wie die Ableitung einer meromorphen Funktion von der Wahl holomorpher Karten abhängt. Das Transformationsverhalten der Ableitungen beim Kartenwechsel dient als Vorbild für die Definition der Differentialformen. – Wir bezeichnen mit  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$ ,  $\alpha \in A$ , den maximalen holomorphen Atlas der Riemannschen Fläche  $X$ .

**7.1.1 Ableitungen.** Zu  $f \in \mathcal{M}(U_\alpha)$  gehört die Ableitung

$$(1) \quad df/dz_\alpha := (f \circ z_\alpha^{-1})' \circ z_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha).$$

Für jedes Paar  $(\alpha, \beta) \in A^2$  ist die Ableitung des Kartenwechsels

$$(2) \quad dz_\alpha/dz_\beta \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta$$

holomorph und nullstellenfrei. Aus der Kettenregel folgt die *Transformationsformel* für Ableitungen bei einem Kartenwechsel:

$$(3) \quad \frac{df}{dz_\alpha} = \frac{df}{dz_\beta} \cdot \frac{dz_\beta}{dz_\alpha} \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta.$$

Sie dient als Vorbild für die Definition der

**7.1.2 Differentialformen.** Eine *meromorphe Differentialform*, kurz eine *Form*,  $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$  auf  $X$  besteht aus Funktionen  $\omega_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ , welche die *Transformationsregeln*

$$(1) \quad \omega_\alpha = \omega_\beta \cdot (dz_\beta/dz_\alpha) \text{ auf } U_\alpha \cap U_\beta \text{ für alle } (\alpha, \beta) \in A^2$$

erfüllen. Die *Ableitung* einer meromorphen Funktion  $f$  ist die Form

$$(2) \quad df = \{df/dz_\alpha\}.$$

Wenn  $\omega = df$  ist, nennt man  $f$  eine *Stammfunktion* von  $\omega$ . Genau dann, wenn  $f$  lokal konstant ist, gilt  $df = 0$ , d.h.  $df/dz_\alpha = 0$  für alle  $\alpha$ . – Zur Definition einer Differentialform benötigt man nicht den *maximalen* Atlas  $\mathcal{A}$ :

(3) Ist  $\{(U_j, z_j)\}$ ,  $j \in J \subset A$ , ein Atlas und  $\{\omega_j\}$ ,  $j \in J$ , eine Familie von Funktionen  $\omega_j \in \mathcal{M}(U_j)$ , so daß (1) für alle  $\alpha, \beta \in J$  erfüllt ist, so gibt es genau eine Form  $\omega$  auf  $X$ , die auf  $(U_j, z_j)$  durch  $\omega_j$  gegeben wird.

*Beweis.* Sei  $(U_\alpha, z_\alpha) \in \mathcal{A}$ . Zu jedem Punkt  $a \in U_\alpha$  bildet man  $J_a := \{j \in J : a \in U_j\}$ , definiert unabhängig von der Wahl von  $j \in J_a$  den Wert  $\omega_\alpha(a) := \omega_j(a) \cdot (dz_j/dz_\alpha)(a) \in \widehat{\mathbb{C}}$  und erhält  $\omega_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$ . Man verifiziert (1) für alle  $\alpha, \beta \in A$ .  $\square$

Differentialformen  $\omega = \{\omega_\alpha\}$ ,  $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$  lassen sich addieren und mit Funktionen  $f \in \mathcal{M}(X)$  multiplizieren:

$$\omega + \varphi := \{\omega_\alpha + \varphi_\alpha\} \quad , \quad f\omega := \{f|U_\alpha \cdot \omega_\alpha\}.$$

Dadurch wird die Menge  $\mathcal{E}(X)$  aller Formen auf einer zusammenhängenden Fläche  $X$  zu einem Vektorraum über dem Körper  $\mathcal{M}(X)$ .

**Satz.** Der  $\mathcal{M}(X)$ -Vektorraum  $\mathcal{E}(X)$  ist eindimensional: Zu je zwei Formen  $\varphi \neq 0$  und  $\omega$  gibt es genau eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $\omega = f\varphi$ .

*Beweis.* Die Quotienten  $f_\alpha = \omega_\alpha / \varphi_\alpha$  setzen sich zur Funktion  $f$  zusammen.– Nach dem Riemannschen Existenzsatz existiert eine nicht-konstante Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Wegen  $df \neq 0$  ist  $\dim \mathcal{E}(X) > 0$ .  $\square$

Wir schreiben suggestiv  $f = \omega / \varphi$ .

Ist  $U \subset X$  offen, so existiert für jedes  $\omega \in \mathcal{E}(X)$  die Einschränkung  $\omega|_U$ . Für jede Karte  $(U_\alpha, z_\alpha)$  ist  $\omega|_{U_\alpha} = \omega_\alpha dz_\alpha$ .– Wenn  $X$  zusammenhängt, folgt aus  $\omega|_U = 0$  für eine offene Menge  $U \neq \emptyset$  bereits  $\omega = 0$ .

Wenn man die Formel (1) mit einem Exponenten  $k \in \mathbb{Z}$  durch

$$(1^k) \quad \omega_\alpha = \omega_\beta \cdot (dz_\beta / dz_\alpha)^k$$

ersetzt, nennt man  $\omega = \{\omega_\alpha\}$  eine  $k$ -Differentialform, speziell für  $k = 2$  eine quadratische Differentialform. Wir benutzen sie selten, z.B. in 8.5.6.

**7.1.3 Ableitungsregeln.** Mittels lokaler Karten lassen sich die Regeln aus der klassischen Funktionentheorie übertragen. Sei  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  offen.

Für  $f, g \in \mathcal{M}(X)$ ,  $f(X) \subset U$  und  $h \in \mathcal{M}(U)$  gelten:

$$d(f+g) = df + dg, \quad d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df, \quad d(h \circ f) = (h' \circ f) \cdot df \quad \square$$

**7.1.4 Ordnung. Kanonische Divisoren. Analytische Charakteristik.**

Weil die Übergangsfunktionen  $dz_\beta / dz_\alpha$  keine Null- und Polstellen haben, hängt bei jeder Differentialform  $\omega = \{\omega_\alpha\}$  die Ordnung

$$(1) \quad o(\omega, x) := o(\omega_\alpha, x) \quad \text{für } x \in U_\alpha$$

nicht von  $\alpha$  ab. Man nennt  $x$  eine Nullstelle von  $\omega$ , wenn  $o(\omega, x) > 0$  ist, und eine Polstelle, wenn  $o(\omega, x) < 0$  ist. Die Form  $\omega$  heißt holomorph bei  $x$ , wenn  $o(\omega, x) \geq 0$  ist. Wenn dies für alle  $x \in U$  gilt, heißt  $\omega$  holomorph auf  $U$ . Wir entnehmen der lokalen, klassischen Funktionentheorie:

$$(2) \quad o(df, x) = \begin{cases} v(f, x) - 1 & , \text{ wenn } f(x) \neq \infty. \\ o(f, x) - 1 & , \text{ wenn } f(x) = \infty. \end{cases}$$

$$o(df, x) \neq -1.$$

Wenn  $\omega$  auf einer Scheibe holomorph ist, besitzt  $\omega$  dort eine Stammfunktion.

Für jede meromorphe Form  $\omega \neq 0$  ist die Zuordnung

$$(\omega) : X \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto o(\omega, x),$$

ein Divisor. Für  $f \in \mathcal{M}(X)$  gilt  $(f\omega) = (f) + (\omega)$ . Die Divisoren  $(\omega)$  meromorpher Formen  $\omega \neq 0$  heißen kanonische Divisoren. Nach Satz 7.1.2 ist die Differenz kanonischer Divisoren ein Hauptdivisor.

Auf jeder kompakten, zusammenhängenden Fläche  $X$  haben alle kanonischen Divisoren  $K$  denselben Grad, da Hauptdivisoren nach 1.6.4(4) den Grad 0 haben. Man nennt

$$\chi(X) := -\text{gr} K$$

die analytische Charakteristik von  $X$ . Sie stimmt mit der Euler-Poincaré-schen Charakteristik überein und ist durch  $\chi = 2 - 2g$  mit dem Geschlecht  $g$  von  $X$  verbunden ist, siehe 12.4.1.– Holomorphe Formen auf kompakten Flächen werden in 8.2 untersucht.

**7.1.5 Berechnungen der Charakteristik.** Wir betrachten Beispiele kompakter Flächen  $X$ , bei denen eine nicht-konstante Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  bekannt ist und berechnen  $\chi(X)$  mittels 7.1.4(2).

(a) Die identische Funktion  $z : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  hat keine Windungspunkte und einen einfachen Pol, also

$$(1) \quad \chi(\widehat{\mathbb{C}}) = 2, \quad g(\widehat{\mathbb{C}}) = 0.$$

(b) Sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  zweiblättrig mit  $2 + 2m$  Verzweigungspunkten, vgl. 4.7.5. Mit einer nachgeschalteten Möbius-Transformation machen wir  $\infty$  zum Verzweigungspunkt. Die Funktion  $\eta$  hat  $1 + 2m$  Windungspunkte mit Werten  $\neq \infty$  und Windungszahlen 2 sowie einen doppelten Pol, also

$$(2) \quad \chi(X) = 2 - 2m, \quad g(X) = m.$$

Bei diesen Beispielen treten alle natürlichen Zahlen als Geschlechter auf. Jeder Torus  $X = \mathbb{C}/\Omega$  kommt mit  $\eta = \widehat{\phi}$  und  $m = 1$  (vier Windungspunkte) unter den letzten Beispielen vor, also

$$(3) \quad \chi(\mathbb{C}/\Omega) = 0, \quad g(\mathbb{C}/\Omega) = 1.$$

(c) Allgemeiner sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine normale Überlagerung, deren Grad eine Primzahl  $n$  ist. Dann gilt  $v(\eta, x) = n$  für jeden Windungspunkt  $x$ , und  $\eta$  bildet die Menge der Windungspunkte bijektiv auf den Verzweigungsort  $B$  ab. Es gilt

$$(4) \quad \chi(X) = 2n - (n - 1) \cdot \#B, \quad g(X) = \frac{1}{2}(n - 1)(\#B - 2).$$

*Beweis.* Man kann  $\infty \in B$  annehmen. Die Ableitung  $d\eta$  hat dann  $b - 1$  Nullstellen und einen Pol. Alle Nullstellen haben die Ordnung  $n - 1$ , und der Pol hat die Ordnung  $-n - 1$ .  $\square$

Insbesondere haben die durch  $w^7 - z^2(z - 1)$  bestimmte *Kleinsche Fläche* und die durch  $w^7 - z(z - 1)$  bestimmte hyperelliptische Fläche beide das Geschlecht 3, da für die entsprechenden Überlagerungen  $B = \{0, 1, \infty\}$  und  $n = 7$  ist, siehe 6.4.4.

(d) Sei  $\eta_n : X_n \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die Modulüberlagerung (5.7.2). Sie verzweigt über  $0, 1, \infty$  mit den Windungszahlen  $3, 2, n$ . Ihr Grad ist die Ordnung  $d_n := \#G_n$  der Modulgruppe (5.7.4). Nach der Bahnengleichung 1.5.1(1) gibt es  $d_n/3$  Windungspunkte mit der Windungszahl 3 und  $d_n/2$  Windungspunkte mit der Windungszahl 2, die keine Pole sind, sowie  $d_n/n$  Pole mit der Ordnung  $-n$ . Daraus folgt

$$(5) \quad \chi_n := \chi(X_n) = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\right) d_n, \quad g_n := g(X_n) = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6}\right) d_n.$$

Folgende Tabelle dieser Werte enthält für  $n \leq 6$  nichts Neues, da  $X_n \approx \widehat{\mathbb{C}}$  für  $n \leq 5$  und  $X_6 = \text{hexagonaler Torus}$  nach 5.7.3 schon bekannt sind. Für  $n = 7$  erreicht  $d_7 = 168$  die maximale Ordnung der Automorphismengruppen von Flächen des Geschlechtes 3, siehe 7.2.5.



$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$d_n$	6	12	24	60	72	168	192	324	360	660	576
$\chi_n$	2	2	2	2	0	-4	-8	-18	-24	-50	-48
$g_n$	0	0	0	0	1	3	5	10	13	26	25

**7.1.6 Liftung der Differentialformen.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  holomorph und offen. Jede Funktion  $f \in \mathcal{M}(Y)$  wird zu  $\eta^*f := f \circ \eta \in \mathcal{M}(X)$  geliftet. Für  $f, g \in \mathcal{M}(Y)$  gilt, wenn  $g \circ \eta$  nirgends konstant ist,

$$(1) \quad \frac{d(f \circ \eta)}{d(g \circ \eta)} = \frac{df}{dg} \circ \eta.$$

*Beweis.* Jeder Punkt in  $X$  hat eine Umgebung  $\eta^{-1}(V)$  für eine holomorphe Karte  $(V, h)$  von  $Y$ . Es genügt, (1) auf  $\eta^{-1}(V)$  zu beweisen: Es gibt Funktionen  $f_1, g_1 \in \mathcal{M}(h(V))$  mit  $f = f_1 \circ h$  und  $g = g_1 \circ h$ . Nach 7.1.3 sind beide Seiten von (1) gleich  $(f'_1/g'_1) \circ h \circ \eta$ .  $\square$

Zur *Definition der Liftung*  $\eta^*\omega \in \mathcal{E}(X)$  einer Differentialform  $\omega \in \mathcal{E}(Y)$  benutzt man den maximalen Atlas  $\{(V_j, h_j)\}$  für  $Y$ , geht von den lokalen Darstellungen  $\omega|_{V_j} = \omega_j dh_j$  aus und bildet die Differentialformen

$$\eta^*(\omega_j dh_j) := (\omega_j \circ \eta) \cdot d(h_j \circ \eta) \quad \text{auf} \quad \eta^{-1}(V_j).$$

Weil  $X$  durch  $\{\eta^{-1}(V_j)\}$  überdeckt wird, fügen sich diese Formen zu einer Differentialform  $\eta^*\omega$  auf  $X$  zusammen: Wegen (1), angewendet auf  $f = h_j$  und  $g = h_k$ , gilt nämlich

$$\eta^*(\omega_j dh_j) = \eta^*(\omega_k dh_k) \quad \text{auf} \quad \eta^{-1}(V_j \cap V_k).$$

Für Formen  $\omega$  und Funktionen  $f$  auf  $Y$  verifiziert man die *Liftungsregeln*:

- (2) Die Liftung  $\eta^* : \mathcal{E}(Y) \rightarrow \mathcal{E}(X)$  ist  $\mathbb{C}$ -linear und injektiv. Es gilt  

$$\eta^*(f\omega) = (f \circ \eta) \cdot \eta^*\omega, \quad \eta^*(df) = d(f \circ \eta).$$
- (3)  $\eta_1^*(\eta^*\omega) = (\eta \circ \eta_1)^*\omega$  für offene, holomorphe Abbildungen  $\eta_1 : X_1 \rightarrow X$ .
- (4)  $o(\eta^*\omega, x) = v(\eta, x) \cdot o(\omega, \eta(x)) + v(\eta, x) - 1$  für alle  $x \in X$ .
- (5) Sei  $a \in X$ . Eine Form  $\omega$  mit isolierter Singularität in  $\eta(a)$  läßt sich meromorph nach  $\eta(a)$  fortsetzen, sobald  $\eta^*\omega$  meromorph nach  $a$  fortgesetzt werden kann.  $\square$

## 7.2 Riemann-Hurwitzsche Formel. Automorphismen.

Beim Studium gelifteter Divisoren gewinnen wir die Riemann-Hurwitzsche Formel, welche die Möglichkeiten für holomorphe Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen kompakten, zusammenhängenden Flächen eingeschränkt. Wir zeigen, wie sich diese Einschränkungen bei Automorphismen auswirken, wenn man – unter Vorgriff auf spätere Ergebnisse – zusätzlich den Einfluß des topologischen Geschlechtes auf die analytische Struktur der Flächen berücksichtigt.

**7.2.1 Geliftete Divisoren.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  holomorph und offen. Zu jeden Divisor  $D$  auf  $Y$  wird der geliftete Divisor  $\eta^*D$  durch

$$(1) \quad \eta^*D : X \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto v(\eta, x) \cdot D(\eta(x)),$$

definiert. Wenn  $X$  und  $Y$  kompakt sind, ist

$$(2) \quad \text{gr}(\eta^*D) = \text{gr} \eta \cdot \text{gr} D.$$

Zum Beweis summiert man zunächst über alle Punkte  $x$  einer festen Faser  $\eta^{-1}(y)$  und dann über alle  $y \in Y$ .  $\square$

Für den Hauptdivisor  $(f)$  jeder Funktion  $f \in \mathcal{M}(Y)$  gilt wegen 1.6.3(2)

$$(3) \quad \eta^*(f) = (f \circ \eta).$$

Für Differentialformen  $\omega \in \mathcal{E}(Y)$  kommt der *Windungsdivisoren*

$$(4) \quad W_\eta : X \rightarrow \mathbb{N}, \quad x \mapsto v(\eta, x) - 1,$$

ins Spiel. Denn wegen 7.1.6 (4) ist

$$(5) \quad (\eta^*\omega) = \eta^*(\omega) + W_\eta. \quad \square$$

Bei kompakten Flächen kann man die Grade bilden. Wegen (2) entsteht die **Riemann-Hurwitzsche Formel**

$$(RH) \quad \chi(X) = \text{gr} \eta \cdot \chi(Y) - v(\eta)$$

mit der *Verzweigungszahl*

$$(6) \quad v(\eta) := \text{gr} W_\eta = \sum_{x \in X} (v(\eta, x) - 1). \quad \square$$

Für *gleich-verzweigte*  $\eta$  mit der Verzweigungssignatur  $S$  ist

$$(7) \quad v(\eta) = \sum_{y \in B} (1 - S(y)^{-1}), \quad B = \text{Verzweigungsort}.$$

Wenn  $\text{gr} \eta$  eine *Primzahl* ist, vereinfacht sich (7) zu

$$(8) \quad v(\eta) = (\text{gr} \eta - 1) \cdot \#B. \quad \square$$

**Historisches.** Für  $Y = \widehat{\mathbb{C}}$  kannte Riemann bereits 1857 die Formel (RH), siehe [Ri 3], Artikel 7. Hurwitz bewies sie im Jahre 1891 für beliebiges  $Y$  mit topologischen Methoden, siehe [Hur] 1, S. 375 f., und zwei Jahre später wie oben durch Liftung von Differentialformen, [Hur] 1, S. 392.

**7.2.2 Folgerungen.** Um Folgerungen und Anwendungen der Riemann-Hurwitzschen Formel sogleich in ihrer endgültigen Gestalt anzugeben, benutzen wir in den nächsten Abschnitten das in 1.1.5 anschaulich eingeführte topologische Geschlecht  $g \in \mathbb{N}$  und nehmen zwei Ergebnisse vorweg:

- (a) *Alle Flächen vom Geschlecht  $g = 0$  sind zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph*, siehe 10.7.4.
- (b) *Durch  $g$  ist die Charakteristik  $\chi = 2 - 2g$  bestimmt*, siehe 12.4.1.

Wir betrachten  $n$ -blättrige holomorphe Überlagerungen  $\eta : X \rightarrow Y$  zwischen kompakten, zusammenhängenden Flächen der Geschlechter  $g$  bzw.  $\gamma$ .

- (1) *Die Verzweigungszahl  $v(\eta) := \sum (v(\eta, x) - 1)$  ist gerade.*
- (2) *Es gilt  $g \geq \gamma$ . Insbesondere kann  $\widehat{\mathbb{C}}$  nur sich selbst überlagern.* (Satz von Lüroth)

- (3) Aus  $n \geq 2$  und  $g = \gamma \geq 1$  folgt, daß  $\eta$  unverzweigt und  $g = \gamma = 1$  ist.  
 (4) Sei  $X$  ein Torus, und sei  $Y$  nicht zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph. Dann ist  $\eta$  unverzweigt, und  $Y$  ist auch zu einem Torus isomorph.  
 (5) Aus  $\gamma \geq 2$  folgt  $n \leq g - 1$  und sogar  $n < g - 1$ , wenn  $\eta$  verzweigt ist.

*Beweis.* Die Aussagen (1)-(3) und (5) sind direkte Konsequenzen von (RH). Zu (4): Es ist  $g = 1$ . Wegen (3) ist  $\gamma = 1$  und  $\eta$  unverzweigt. Mit der Torus-Projektion  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$  entsteht die normale, unverzweigte Überlagerung  $\eta \circ \pi : \mathbb{C} \rightarrow Y$ . Nach der Folgerung in 2.5.1 ist  $Y$  zu einem Torus oder zu  $\mathbb{C}^\times$  isomorph. Weil  $Y$  kompakt ist, scheidet  $\mathbb{C}^\times$  aus.  $\square$

### 7.2.3 Die Modulfläche $X_7$ wird durch $w^7 - z^2(z - 1)$ definiert.

*Beweis.* Bei der Operation der Modulgruppe  $G_7$  auf  $X_7$  gibt es eine Standgruppe der Ordnung 7. Sei  $\eta : X_7 \rightarrow Y$  die entsprechende Orbitprojektion, und sei  $r$  die Anzahl der Verzweigungspunkte. Nach der Tabelle in 7.1.5 hat  $X_7$  die Charakteristik  $-4$ . Mit (RH) und 7.2.1(8) folgt  $-4 = 7(2 - 2\gamma) - 6r$ , also  $r = 3, \gamma = 0$ . Man kann daher  $Y = \widehat{\mathbb{C}}$  und den Verzweigungs-ort  $\{0, 1, \infty\}$  erreichen. Nach 6.4.4 wird  $\eta$  durch  $w^7 - z(z - 1)$  oder das angegebene Polynom definiert. Im ersten Fall wäre  $X_7$  hyperelliptisch. Das wird in 8.6.4 ausgeschlossen.  $\square$

**7.2.4 Gleichverzweigte Überlagerungen.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  gleichverzweigt und  $g \geq 2$ . (a) Es ist  $n \leq 84(g - 1)$ . – (b) Aus  $n > 4(g - 1)$  folgt  $Y \approx \widehat{\mathbb{C}}$ . – (c) Wenn  $n = 84(g - 1)$  ist, gibt es genau drei Ausnahmefasern. Längs ihnen hat  $\eta$  die Windungszahlen 2, 3 und 7.

*Beweis.* Sei  $\chi$  die Charakteristik von  $X$ . Aus (RH) und 7.2.1(7) folgt:

$$-\chi = 2g - 2 = nq \quad \text{mit} \quad q = 2\gamma - 2 + \sum_{j=1}^r (1 - n_j^{-1}) > 0.$$

Dabei numeriert  $j$  die Ausnahmefasern so, daß  $n_j$  die Windungszahl längs der  $j$ -ten Faser ist und  $2 \leq n_1 \leq \dots \leq n_r$  gilt. Zunächst ist  $r = 0$  zugelassen.

Für  $\gamma \geq 2$  ist  $n \leq g - 1$ . Für  $\gamma = 1$  ist  $r \geq 1$ , also  $q \geq \frac{1}{2}$ , da anderenfalls  $q \leq 0$  wäre. Aus  $q \geq \frac{1}{2}$  folgt  $n \leq 4(g - 1)$ . Damit ist (b) bewiesen, und wir müssen (a) und (c) nur noch für den Fall  $\gamma = 0$  beweisen. Wegen  $q > 0$  ist  $r \geq 3$ . – Für  $r = 3$  ist  $1/42$  der minimale  $q$ -Wert  $> 0$ , also  $n \leq 84(g - 1)$ . Der minimale Wert  $q = 1/42$  und damit  $n = 84(g - 1)$  wird genau dann erreicht, wenn  $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 7)$  ist. – Für  $r = 4$  ist  $1/6$  der minimale  $q$ -Wert  $> 0$ . Er wird für  $n_1 = n_2 = n_3 = 2, n_4 = 3$  erreicht und ergibt  $n \leq 12(g - 1)$ . – Für  $r \geq 5$  ist  $q \geq 1/2$ , also  $n \leq 4(g - 1)$ .  $\square$

**7.2.5 Endliche Automorphismengruppen.** Jede endliche Untergruppe  $G$  der Automorphismengruppe einer Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  hat eine Ordnung  $n \leq 84(g - 1)$ . Für  $n > 4(g - 1)$  ist die Orbitfläche  $X/G$  zur Zahlenkugel isomorph. Wenn  $n = 84(g - 1)$  ist, gibt es genau drei Ausnahmeorbiten. Ihre Standgruppen haben die Ordnungen 2, 3 bzw. 7.

*Beweis.* Man wendet 7.2.4 auf die Orbitprojektion  $\eta : X \rightarrow X/G$  an.  $\square$

Der extreme Fall  $n = 84(g - 1)$  tritt mit  $g = 3, n = 168$  bei der Operation der Modulgruppe  $G_7$  auf der Modulfläche  $X_7$  ein, siehe die Tabelle in 7.1.5. Es gibt unendlich viele Beispiele, siehe [Ac], S.46 ff.

In 11.5.4 wird die Endlichkeit von  $\text{Aut}(X)$  für  $g(X) \geq 2$  bewiesen.

Die Ergebnisse in 7.2.4-5 und ihre Beweise stammen von Hurwitz, [Hur] 1, S. 410 ff.

**7.2.6 Fixpunkte.** Sei  $g \geq 1$ . Sei  $G < \text{Aut}(X)$  eine endliche Untergruppe. Sei  $|\alpha|$  die Anzahl der Fixpunkte von  $\alpha \in G^* := G \setminus \{\text{id}\}$ . Dann hat die Projektion  $\eta : X \rightarrow Y := X/G$  die *Verzweigungszahl*

$$(1) \quad v(\eta) = \sum_{\alpha \in G^*} |\alpha|.$$

*Beweis.* Wir zählen die Menge  $M := \{(\alpha, x) \in G^* \times X : \alpha(x) = x\}$  auf zwei Weisen ab: (i) Zu jedem  $\alpha$  gehören  $|\alpha|$  viele Elemente  $(\alpha, x) \in M$ . Daher ist  $\#M = \sum |\alpha|$ . (ii) Jeder Punkt  $x$  hat eine Standgruppe der Ordnung  $v(\eta, x)$ . Zu  $x$  gehören daher  $v(\eta, x) - 1$  viele Elemente  $(\alpha, x) \in M$ . Somit ist  $\#M = \sum (v(\eta, x) - 1)$ .  $\square$

Wenn  $G$  von einem Element  $\alpha$  der Ordnung  $n$  erzeugt wird, gilt  $|\alpha| \leq |\beta|$  für alle  $\beta \in G^*$ , also  $v(\eta) \geq (n-1) \cdot |\alpha|$ . Aus (RH)  $2g-2 = n \cdot (2\gamma-2) + v(\eta)$  folgt die Abschätzung:

$$(2) \quad |\alpha| \leq 2 - 2\gamma + 2(g - \gamma)/(n - 1).$$

Wenn  $n$  eine Primzahl ist, folgt aus (RH) und 7.2.1(8)

$$(3) \quad 2g - 2 = n \cdot (2\gamma - 2) + (n - 1) \cdot |\alpha|.$$

Für eine Involution ( $n = 2$ ) ist  $r = 2g + 2 - 4\gamma \leq 2g + 2$ . Das Maximum  $r = 2g + 2$  wird genau dann erreicht, wenn  $\eta$  eine (hyper-)elliptische Überlagerung ist.

(4) Für beliebige Primzahlen  $n$  und  $g \geq 2$  gilt  $n \leq 2g + 1$ . Für  $n = 2g + 1$  ist  $Y \approx \widehat{\mathbb{C}}$  und  $r = 3$ . Die Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  wird durch  $w^{2g+1} - z^a(z-1)^b$  definiert. Dabei ist  $0 < a, b < 2g + 1$ , und  $2g + 1$  teilt  $a + b$  nicht.

*Beweis.* Für  $\gamma \geq 2$  ist  $n \leq g - 1$ . Für  $\gamma = 1$  ist  $r \geq 1$  wegen  $g \geq 2$ , also  $n \leq 2g - 1$ . Für  $\gamma = 0$  ist  $r \geq 3$  wegen  $g \geq 2$ . Aus  $r \geq 4$  folgt  $n \leq g + 1$ . Für  $r = 3$  ist  $n = 2g + 1$ . Man transformiert den Verzweigungsort nach  $\{0, 1, \infty\}$  und erhält die letzte Behauptung aus 6.4.2.  $\square$

Für weitere Fixpunkt-Ergebnisse siehe 8.3.6, 13.1.4 und 13.5.5. Wir verweisen außerdem auf [Hur] 1, XII und XXIII, auf [Ac] und auf [FK], Chap.V.

### 7.3 Residuum. Invariante Formen. Spur.

Das aus der klassischen Funktionentheorie bekannte *Residuum* wird auf Flächen wegen seines Verhaltens beim Kartenwechsel für Differentialformen und nicht für Funktionen erklärt. Auf kompakten Flächen ist bei jeder Form die Residuensumme  $= 0$ . Wir beweisen dieses wichtige Ergebnis mit Hilfe der *Spur* von Differentialformen, welche auch zum Beweis der Abelschen Relation in 7.5 benutzt wird. Zur Definition der Spur brauchen wir *invariante Differentialformen*.

**7.3.1 Definition des Residuums.** Sei  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte der Fläche  $X$  und  $\omega$  eine auf  $U \setminus \{a\}$  holomorphe Form. Wir entnehmen der klassischen Funktionentheorie: *Es gibt genau ein  $c \in \mathbb{C}$ , so daß  $\omega - c \cdot dz/z$  eine Stammfunktion  $g$  auf  $U \setminus \{a\}$  besitzt.*

**Satz.** *Das Residuum  $\text{res}(\omega, a) := c$  hängt nicht von der Karte  $z$  ab. Die Zuordnung  $\omega \mapsto \text{res}(\omega, a)$  ist  $\mathbb{C}$ -linear.*

*Beweis.* Sei  $\omega = c \cdot dz/z + dg$  und sei  $z_1$  eine zweite Karte mit  $z_1(a) = 0$ . Dann ist  $h := z_1/z$  um  $a$  holomorph und nullstellenfrei. Die holomorphe Form  $dh/h$  besitzt eine Stammfunktion  $k$ . Aus  $z_1 = z \cdot h$  folgt  $dz_1/z_1 = dz/z + dk$  und somit  $\omega - c dz_1/z_1 = d(g - ck)$ .  $\square$

In  $\mathcal{E}(X)$  betrachtet man drei  $\mathbb{C}$ -Untervektorräume  $\mathcal{E}_j(X)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(X) &:= \{\omega \in \mathcal{E}(X) : o(\omega, x) \geq 0 \text{ für } x \in X\}, \\ \mathcal{E}_2(X) &:= \{\omega \in \mathcal{E}(X) : \text{res}(\omega, x) = 0 \text{ für } x \in X\}, \\ \mathcal{E}_3(X) &:= \{\omega \in \mathcal{E}(X) : o(\omega, x) \geq -1 \text{ für } x \in X\}.\end{aligned}$$

Die Elemente aus  $\mathcal{E}_j(X)$  heißen Formen *j-ter Gattung*. Die Formen in  $\mathcal{E}_1(X)$  heißen *holomorph*, siehe 7.1.4. Es gilt  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$  genau dann, wenn es um jedem Punkt eine Scheibe gibt, auf der  $\omega$  eine Stammfunktion besitzt.

**7.3.2 Transformationsformel.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  holomorph und offen.

$$(1) \quad \text{res}(\eta^*\omega, a) = v(\eta, a) \cdot \text{res}(\omega, \eta(a)) \text{ für } \omega \in \mathcal{E}(Y) \text{ und } a \in X.$$

*Beweis.* Es gibt Karten  $z$  von  $X$  und  $w$  von  $Y$  mit  $z(a) = 0$  und  $w \circ \eta = z^n$  für  $n := v(\eta, a)$ . Aus der lokalen Darstellung  $\omega = c \cdot dw/w + dg$  mit  $c = \text{res}(\omega, \eta(a))$  folgt  $\eta^*\omega = cn \cdot dz/z + d(g \circ \eta)$ , also  $cn = \text{res}(\eta^*\omega, a)$ .  $\square$

**7.3.3 Invariante Differentialformen.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine normale Überlagerung mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}$ . Eine Form  $\omega$  auf  $X$  heißt  $\mathcal{D}$ -invariant, wenn  $g^*\omega = \omega$  für alle  $g \in \mathcal{D}$  gilt. Die Liftung  $\eta^*\varphi$  jeder Form  $\varphi$  auf  $Y$  ist  $\mathcal{D}$ -invariant, und  $\varphi$  ist durch  $\eta^*\varphi$  eindeutig bestimmt, siehe 7.1.6(2).

$$(1) \quad \text{Jede invariante Form } \omega \text{ ist die Liftung } \omega = \eta^*\varphi \text{ einer Form } \varphi \text{ auf } Y.$$

*Beweis.* Sei  $B$  der Verzweigungsort. Jeder Punkt in  $Y \setminus B$  besitzt eine trivial überlagerte Umgebung  $V$ : Es gibt eine Scheibe  $U \subset X$  mit

$$\eta^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in \mathcal{D}} g(U),$$

so daß die Beschränkung  $\eta : U \rightarrow V$  biholomorph ist. Daher existiert ein  $\varphi_V \in \mathcal{E}(V)$  mit  $(\eta|U)^*\varphi_V = \omega|U$ . Wegen der Invarianz von  $\omega$  ist  $\eta^*\varphi_V = \omega|\eta^{-1}(V)$ . Da  $\eta^*$  injektiv ist, gilt  $\varphi_V = \varphi_W$  auf  $V \cap W$  für je zwei trivial überlagerte Umgebungen  $V, W$ . Daher setzen sich alle  $\varphi_V$  zu einer Form  $\varphi \in \mathcal{E}(Y \setminus B)$  mit  $\eta^*\varphi = \omega|(X \setminus \varphi^{-1}(B))$  zusammen. Nach 7.1.6(5) läßt sich  $\varphi$  meromorph nach  $B$  fortsetzen.  $\square$

*Beispiel.* Sei  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  eine Torusprojektion. Die Form  $dz \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C})$  ist translationsinvariant. Daher gibt es genau eine Form  $\omega \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C}/\Omega)$  mit  $\eta^*\omega = dz$ . Sie hat wie  $dz$  keine Nullstellen. Es ist  $\mathcal{E}_1(\mathbb{C}/\Omega) = \mathbb{C} \cdot \omega$ . Denn für jede Form  $\varphi \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C}/\Omega)$  ist  $\varphi/\omega \in \mathcal{O}(\mathbb{C}/\Omega) = \mathbb{C}$ . Da  $\eta^*$  injektiv ist, gilt

$$(2) \quad \omega = d\hat{\varphi}/\hat{\varphi}'.$$

**7.3.4 Die Spur.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine endliche normale Abbildung mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}$ . Für jede Form  $\omega \in \mathcal{E}(X)$  ist  $\sum_{g \in \mathcal{D}} g^*\omega$   $\mathcal{D}$ -invariant. Daher gibt es genau eine Form  $\text{sp} \omega \in \mathcal{E}(Y)$  mit  $\eta^*(\text{sp} \omega) = \sum g^*\omega$ . Die Definition der *Spur*  $\text{sp} \omega$  läßt sich auf alle endlichen Abbildungen ausdehnen:

**Satz.** Zu jeder endlichen Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  gibt es genau eine lineare Abbildung  $\text{sp}_\eta : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(Y)$  mit folgenden Eigenschaften:

- (1) Für jedes Gebiet  $V \subset Y$  und die Beschränkung  $\eta' : \eta^{-1}(V) \rightarrow V$  von  $\eta$  gilt  $(\text{sp}_\eta \omega)|V = \text{sp}_{\eta'}(\omega|\eta^{-1}(V))$ .
- (2) Für die disjunkte Vereinigung  $X = X_1 \sqcup X_2$  zweier Flächen gilt  $\text{sp}_\eta = \text{sp}_{\eta|X_1} + \text{sp}_{\eta|X_2}$ .
- (3) Für normale Abbildungen  $\eta$  gilt  $\eta^*(\text{sp}_\eta \omega) = \sum_{g \in \mathcal{D}(\eta)} g^*\omega$ .

*Eindeutigkeitsbeweis.* Wegen der Injektivität von  $\eta^*$  ist in (3)  $\text{sp}_\eta \omega$  durch die rechte Seite eindeutig bestimmt. Weil  $Y$  durch elementar überlagerte Scheiben überdeckt wird, folgt aus (1)-(3) die Eindeutigkeit der Spur.

*Existenzbeweis.* Zunächst sei  $\eta$  unverzweigt. Für jede *trivial* überlagerte Scheibe  $T \subset Y$  ist  $\eta^{-1}(T) = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_n$  eine disjunkte Vereinigung von Scheiben, so daß die Beschränkungen  $\eta_\nu : S_\nu \rightarrow T$  von  $\eta$  Isomorphismen sind. Es gibt daher eindeutig bestimmte Formen  $\varphi_\nu$  auf  $T$  mit  $\eta_\nu^*\varphi_\nu = \omega|S_\nu$ . Wir bilden  $\varphi_T := \varphi_1 + \dots + \varphi_n$ . Für je zwei trivial überlagerte Scheiben  $T_1$  und  $T_2$  stimmen  $\varphi_{T_1}$  und  $\varphi_{T_2}$  auf  $T_1 \cap T_2$  überein. Daher setzen sich die Formen  $\varphi_T$  zu einer Form  $\text{sp}_\eta \omega$  auf  $Y$  zusammen. Man verifiziert die Eigenschaften (1)-(3).

Wenn  $\eta$  den Verzweigungsort  $B \subset Y$  hat, ist die Beschränkung  $\eta' : X \setminus \eta^{-1}(B) \rightarrow Y \setminus B$  von  $\eta$  unverzweigt. Um  $\text{sp}_{\eta'} \omega$  meromorph nach  $b \in B$  fortzusetzen, benutzen wir eine *elementar* überlagerte Scheibe  $V$  um  $b$ . Dann ist  $\eta^{-1}(V) = U_1 \sqcup \dots \sqcup U_r$  eine disjunkte Vereinigung von Scheiben, so daß die Beschränkungen  $\eta_j : U_j \rightarrow V$  von  $\eta$  Windungsabbildungen sind. Nach 7.3.3 gibt es genau eine Form  $\hat{\varphi}_j$  auf  $V$  mit  $\eta_j^*\hat{\varphi}_j = \sum_{g \in \mathcal{D}(\eta_j)} g^*\omega$ . Aus (1)-(3) folgt, daß  $\text{sp}_{\eta'} \omega$  auf  $V \setminus \{b\}$  mit  $\hat{\varphi}_1 + \dots + \hat{\varphi}_r$  übereinstimmt.  $\square$

**7.3.5 Das Residuum der Spur** lautet  $\operatorname{res}(\operatorname{sp} \omega, b) = \sum_{a \in \eta^{-1}(b)} \operatorname{res}(\omega, a)$ .

*Beweis.* Wegen 7.3.4(1)-(2) genügt es, die Behauptung für eine Windungsabbildung zu beweisen. Nach 7.3.2(1) und 7.3.4(3) ist dann  $v(\eta, a) \operatorname{res}(\operatorname{sp} \omega, b) = \operatorname{res}(\eta^*(\operatorname{sp} \omega), a) = \sum_{g \in \mathcal{D}(\eta)} \operatorname{res}(g^* \omega, a) = v(\eta, a) \operatorname{res}(\omega, a)$ .  $\square$

**7.3.6 Residuensumme.** Wenn  $X$  kompakt ist, gilt

$$\sum_{x \in X} \operatorname{res}(\omega, x) = 0 \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{E}(X).$$

*Beweis.* Die Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen zeigt: Jede Form auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  ist eine  $\mathbb{C}$ -Linearkombination von Formen der Gestalt  $(z - a)^n dz$  mit  $a \in \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; sie hat daher die Residuensumme 0. Für den allgemeinen Fall einer Form  $\omega$  auf  $X$  bildet man zu einer nirgends konstanten meromorphen Funktion  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  die Spur  $\operatorname{sp} \omega$  und erhält wegen 7.3.4(3)

$$0 = \sum_{z \in \widehat{\mathbb{C}}} \operatorname{res}(\operatorname{sp} \omega, z) = \sum_{x \in X} \operatorname{res}(\omega, x). \quad \square$$

Wenn man die Theorie meromorpher Formen in den Differentialformen-Kalkül auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten einbettet, kann man die Aussage aus dem Satz von Stokes folgern, ohne die Spur zu benutzen, siehe z.B. [For], S. 73.

## 7.4 Integration

Wir definieren die Integration von Differentialformen längs stetiger Wege auf zusammenhängenden Flächen  $X$  mittels lokaler Stammfunktionen.

**7.4.1 Charakterisierung der Integration.** Es gibt genau eine Funktion, die jeder holomorphen Form  $\omega$  und jedem Weg  $u$  in  $X$  einen Wert

$$(1) \quad \int_u \omega \in \mathbb{C}$$

zuordnet, so daß folgende Eigenschaften vorliegen:

Für jede Zerlegung von  $u : [\alpha, \gamma] \rightarrow X$  durch  $\alpha < \beta < \gamma$  in  $u_1 = u|[\alpha, \beta]$  und  $u_2 = u|[\beta, \gamma]$  gilt

$$(2) \quad \int_u \omega = \int_{u_1} \omega + \int_{u_2} \omega.$$

Wenn  $u$  von  $a$  nach  $b$  läuft und  $\omega$  auf einer Umgebung des Bildes von  $u$  eine Stammfunktion  $f$  besitzt, ist

$$(3) \quad \int_u \omega = f(b) - f(a).$$

Man nennt (1) das *Integral* von  $\omega$  längs  $u$ .

*Beweis.* Nach 3.1.7 gibt es zu jedem Weg  $u : [\alpha, \beta] \rightarrow X$  eine Zerlegung

$$(4) \quad \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta,$$

so daß jeder Teilweg  $u_j := u| [t_{j-1}, t_j]$  in einer Scheibe  $U_j$  läuft, wo  $\omega|_{U_j}$  eine Stammfunktion  $f_j$  besitzt. Man definiert

$$(5) \quad \int_u \omega := \sum_{j=1}^n [f_j(u(t_j)) - f_j(u(t_{j-1}))].$$

Die Funktion  $f_j \circ u_j$  hängt bis auf die Addition einer Konstanten nur von  $u_j$  und  $\omega$  ab. Daher ist die rechte Seite von (5) durch  $\omega, u$  und die Zerlegung (4) eindeutig bestimmt. Ihr Wert ändert sich nicht, wenn man (4) verfeinert, d.h. neue Teilungspunkte hinzufügt. Da je zwei Zerlegungen eine gemeinsame Verfeinerung besitzen, ist (5) eine sinnvolle, d.h. nur von  $u$  und  $\omega$  abhängige Definition der Integralfunktion, die (2) und (3) erfüllt.  $\square$

**7.4.2 Integrationsregeln.** Für zwei holomorphe Differentialformen  $\omega_1, \omega_2$  und Konstanten  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  gilt

$$(1) \quad \int_u (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 \int_u \omega_1 + \lambda_2 \int_u \omega_2.$$

Für jede holomorphe Abbildung  $\eta: X \rightarrow Y$ , für jeden Weg  $u$  in  $X$  und jede holomorphe Differentialform  $\omega$  auf  $Y$  gilt

$$(2) \quad \int_u \eta^* \omega = \int_{\eta \circ u} \omega.$$

*Beweis.* Wenn  $\omega_1$  und  $\omega_2$  in einer Umgebung des Bildes von  $u$  Stammfunktionen besitzen, folgt (1) aus 7.4.1(3). Den allgemeinen Fall führt man darauf zurück, indem man  $u$  in Teilwege  $u_j$  mit dieser Eigenschaft zerlegt. Zum Beweis von (2) zerlegt man  $u$  in Teilwege  $u_j$ , so daß  $\omega$  Stammfunktionen auf Umgebungen der Bilder der Wege  $\eta \circ u_j$  besitzt.  $\square$

**7.4.3 Abelsche Integrale.** Sei  $P(z, w) \in \mathbb{C}(z)[w]$  ein normiertes, irreduzibles Polynom und sei  $R(z, w) \in \mathbb{C}(z, w)$  eine rationale Funktion. Bereits Abel und Jacobi betrachteten Integrale

$$(1) \quad \int R(z, w) dz \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad P(z, w) = 0.$$

Obwohl sie ihnen keinen eindeutigen Sinn geben konnten, erzielten sie tief liegende, aber zu ihrer Zeit schwer zu deutende Ergebnisse. Wir präzisieren (1) mit Hilfe des Riemannschen Gebildes  $(X, \eta, f)$  von  $P(z, w)$ . Wir deuten den Integranden in (1) als Differentialform  $R(\eta, f) d\eta$  auf  $X$ . Für jeden Weg  $u$  in  $X$ , der die Pole dieser Form meidet, ist dann das Integral

$$(2) \quad \int_u R(z, w) dz := \int_u R(\eta, f) d\eta$$

wohldefiniert. Wir nennen es ein *Abelsches Integral*.

Die Mehrdeutigkeiten, welche Jacobi bemerkte, aber nicht durchschaute, treten auf, wenn man verschiedene Wege  $u$  zuläßt und nur ihre Endpunkte oder ihre Spur  $\eta \circ u$  in  $\hat{\mathbb{C}}$  festhält. Riemann erkannte die topologische Gestalt der Fläche  $X$  als Ursache der Mehrdeutigkeiten und vereinigte zu ihrer Aufklärung die Integration mit der Homologie in einer eindrucksvollen Theorie, siehe [Ri 3]. Als erster Schritt dazu wird eine Beziehung zwischen der Integration und der Fundamentalgruppe hergestellt.

**7.4.4 Die Fläche der Stammfunktionen-Keime.** Wie in 3.4.2-3 sei  $\mathcal{M}$  die Fläche der Keime meromorpher Funktionen auf der zusammenhängenden Fläche  $X$ , sei  $p: \mathcal{M} \rightarrow X$  die Projektion und  $e: \mathcal{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  die Auswertungsfunktion. Konstante Funktionen, ihre Keime und ihre Werte in  $\mathbb{C}$  bezeichnen wir mit demselben Buchstaben.



- (1) Zu jeder Form  $\omega \in \mathcal{E}(X)$  bilden alle Keime, die durch lokale Stammfunktionen von  $\omega$  repräsentiert werden, eine offene und abgeschlossene Teilmenge  $S_\omega \subset \mathcal{M}$ .

Die Auswertungsfunktion  $e|_{S_\omega}$  ist eine Stammfunktion von  $(p^*\omega)|_{S_\omega}$ .

Für jeden Weg in  $S_\omega$  von  $\alpha$  nach  $\beta$ , dessen  $p$ -Bild  $u$  die Pole von  $\omega$  meidet, gilt

$$\int_u \omega = e(\beta) - e(\alpha).$$

Wir nennen  $S_\omega$  die Fläche der Stammfunktionen-Keime von  $\omega$ .

*Beweis.* Für jede zusammenhängende Basismenge  $(U, f)$  gemäß 3.4.2(2) gilt  $(U, f) \cap S_\omega = \emptyset$  oder  $(U, f) \subset S_\omega$ . Denn wenn es ein  $\kappa \in (U, f) \cap S_\omega$  gibt, folgt aus dem Identitätssatz  $df = \omega|_U$ . Auf  $(U, f) \subset S_\omega$  gilt  $e = f \circ p$ , also  $de = p^*df = p^*\omega$ . Die letzte Behauptung folgt aus 7.4.2(2).  $\square$

- (2) Für  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$  ist die Einschränkung  $p : S_\omega \rightarrow X$  eine unverzweigte Überlagerung. Die additive Gruppe  $\mathbb{C}$  operiert durch die Deckabbildungen

$$S_\omega \rightarrow S_\omega, \kappa \mapsto c + \kappa \text{ für } \kappa \in S_\omega \text{ und } c \in \mathbb{C},$$

transitiv auf jeder  $p$ -Faser.

*Beweis.* Jeder Punkt in  $X$  ist Zentrum einer Scheibe  $U$ , auf der eine Stammfunktion  $h$  von  $\omega$  existiert. Dann ist  $p^{-1}(U) \cap S_\omega$  die disjunkte Vereinigung der Basismengen  $(U, c + h)$  für  $c \in \mathbb{C}$ .  $\square$

- (3) Wenn zwei Wege  $u_0, u_1$ , welche die Pole von  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$  meiden, in  $X$  homotop sind, gilt

$$\int_{u_0} \omega = \int_{u_1} \omega.$$

*Beweis.* Nach dem Liftungssatz für Homotopien 3.2.3 gibt es  $p$ -Liftungen  $v_j$  von  $u_j$ , die im selben Keim  $\alpha$  beginnen und im selben Keim  $\beta$  enden. Nach (1) haben beide Integrale denselben Wert.  $\square$

**7.4.5 Perioden.** Für  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$  läßt sich das Integral  $\int_u \omega$  auch dann definieren, wenn der Weg  $u$  außer im Anfangs- und Endpunkt Pole von  $\omega$  trifft: Nach 3.1.8 gibt es einen zu  $u$  homotopen Weg  $v$ , welcher keine Pole trifft. Wegen 7.4.4(3) hängt  $\int_u \omega := \int_v \omega$  nur von der Homotopieklasse  $[u]$  ab. Wenn  $u$  eine Schleife ist, nennt man  $\int_u \omega$  eine *Periode* von  $\omega$ .

Nach Wahl eines Basispunktes  $a$ , der kein Pol von  $\omega$  ist, definieren wir den *Periodenhomomorphismus*

$$(1) \quad I_{\omega, a} : \pi(X, a) \rightarrow \mathbb{C}, [u] \mapsto \int_u \omega,$$

der Fundamentalgruppe in die additive Gruppe  $\mathbb{C}$ . Für den Verschiebungs- isomorphismus  $\Phi_w : \pi(X, a) \rightarrow \pi(X, b)$  längs eines Weges  $w$  von  $a$  nach  $b$  gilt  $I_{\omega, a} = I_{\omega, b} \circ \Phi_w$ . Daher ist die Menge aller Perioden

$$\text{Per}(\omega) := I_{\omega, a}(\pi(X, a)) \subset \mathbb{C}$$

eine von  $a$  unabhängige additive Untergruppe von  $\mathbb{C}$ , die *Periodengruppe* von  $\omega$  genannt wird.

*Beispiel.* Wie im Beispiel 7.3.3 sei  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  eine Torusprojektion und  $\omega \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C}/\Omega)$  die durch  $\eta^*\omega = dz$  bestimmte Form. Für sie ist  $\text{Per}(\omega) = \Omega$ .

Denn die Schleifen in  $\mathbb{C}/\Omega$  von und nach 0 sind die  $\eta$ -Bilder der Wege  $v$  in  $\mathbb{C}$  von 0 zu den Punkten  $c \in \Omega$ . Daher ist  $\int_u \omega = \int_v dz = c \in \Omega$ .

Die Gruppe  $\text{Per}(\omega)$  kann dicht in  $\mathbb{C}$  liegen, siehe Aufgabe 7.9.8. Hieraus zog *Jacobi* voreilig die Konsequenz, Abelsche Integrale als *absurd* zu verwerfen, siehe 14.1.3.

**7.4.6 Existenz von Stammfunktionen.** Sei  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$ , und sei  $Z$  eine Komponente von  $S_\omega$ . Nach 7.4.4(2) ist die Beschränkung  $\eta : Z \rightarrow X$  der Projektion  $p : \mathcal{M} \rightarrow X$  eine unverzweigte normale Überlagerung, deren Deckgruppe aus allen Abbildungen  $S_\omega \rightarrow S_\omega$ ,  $\kappa \mapsto c + \kappa$ , mit  $c \in \mathbb{C}$  besteht, für die  $c + Z = Z$  ist. Sei  $\alpha \in Z$  ein Keim, für den  $\eta(\alpha)$  kein Pol von  $\omega$  ist. Die Gleichung  $c + Z = Z$  trifft genau dann zu, wenn es einen Weg  $v$  von  $\alpha$  nach  $c + \alpha$  gibt, d.h. wenn  $c = \int_{\eta \circ v} \omega \in \text{Per}(\omega)$  ist. Daher gilt:

$$(1) \quad \mathcal{D}(\eta) = \{S_\omega \rightarrow S_\omega, \kappa \mapsto c + \kappa : c \in \text{Per}(\omega)\}.$$

**Satz.** Eine Form  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$  besitzt genau dann eine Stammfunktion in  $\mathcal{M}(X)$ , wenn  $\text{Per}(\omega) = 0$  ist.

*Beweis.* Sei  $\omega = df$ . Wegen 7.4.1(3) folgt  $\int_u \omega = 0$  für jede Schleife  $u$ , welche die Pole meidet. – Sei  $\text{Per}(\omega) = 0$ . Wegen (1) ist  $\eta : Z \rightarrow X$  biholomorph. Aus  $de = p^*\omega$  folgt  $d(e \circ \eta^{-1}) = \omega$ .  $\square$

**Folgerung.** Jede holomorphe Form  $\neq 0$  auf einer kompakten Fläche besitzt Perioden  $\neq 0$ .  $\square$

**7.4.7 Integralformel für das Residuum.** Für  $a \in X$ ,  $\omega \in \mathcal{E}_1(X \setminus \{a\})$  und jede einfache  $a$ -Schleife  $u$  gilt

$$(1) \quad \text{res}(\omega, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_u \omega.$$

*Beweis.* Nach 7.3.1 gibt es eine Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  und eine Funktion  $g \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$  mit  $dg = \omega - \text{res}(\omega, a) \cdot dz/z$ . Es genügt, die Schleife  $u : [0, 2\pi] \rightarrow U$  mit  $z \circ u(t) = \frac{1}{2} \exp(it)$  zu betrachten. Für sie gilt  $\int_u dg = 0$  und  $\int_u dz/z = 2\pi i$ .  $\square$

## 7.5 Die Abelsche Relation

Die Abelsche Relation für Hauptdivisoren auf Tori (2.3.2) ist ein Spezialfall eines für alle kompakten Flächen  $X$  gültigen Satzes über die Integration holomorpher Differentialformen, der auch auf Abel zurückgeht.

Zur Abkürzung der Notation wird jeder Punkt  $P \in X$  mit dem *Punktdivisor* identifiziert, der bei  $P$  den Wert 1 und sonst den Wert 0 hat. Jeder Divisor  $D$  ist dann eine endliche Linearkombination

$$D = \sum_{j=1}^r n_j P_j$$

von Punktdivisoren  $P_j$  mit Koeffizienten  $n_j \in \mathbb{Z}$ . – Wie hier werden Punkte, die auch als Punktdivisoren aufgefaßt werden, oft mit großen Buchstaben bezeichnet.

Zum Beweis der Abelschen Relation benötigen wir die

**7.5.1 Integration der Spur.** Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine  $n$ -blättrige Überlagerung, und sei  $v$  ein Weg in  $Y$ , der höchstens in seinem Anfangs- und Endpunkt Verzweigungspunkte trifft. Der Weg  $v$  besitzt  $n$  Liftungen  $u_1, \dots, u_n$  in  $X$ . Für sie gilt

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^n \int_{u_\nu} \omega = \int_v \text{sp } \omega \quad \text{für } \omega \in \mathcal{E}_1(X).$$

*Beweis.* Es genügt, (1) für Wege  $v$  zu zeigen, die in elementar überlagerten Scheiben  $V$  liegen. Denn jeder Weg läßt sich in Teilwege mit dieser Eigenschaft zerlegen. Sei  $\eta^{-1}(V) = \bigsqcup U_j$ . Jede Beschränkung  $\eta_j : U_j \rightarrow V$  von  $\eta$  ist eine Windungsabbildung. Wir wählen zu jedem  $j$  eine  $\eta_j$ -Liftung  $w_j$  von  $v$ . Die Menge  $\{u_1, \dots, u_n\}$  aller Liftungen von  $v$  besteht aus den Wegen  $g \circ w_j$  für alle  $g \in \mathcal{D}(\eta_j)$  und alle  $j$ , also

$$(2) \quad \sum_{\nu=1}^n \int_{u_\nu} \omega = \sum_j \sum_{g \in \mathcal{D}(\eta_j)} \int_{g \circ w_j} \omega = \sum_j \sum_{g \in \mathcal{D}(\eta_j)} \int_{w_j} g^*(\omega|_{U_j}).$$

Nach 7.3.4 ist  $\text{sp } \omega = \sum \varphi_j$ , wobei  $\eta_j^* \varphi_j = \sum_g g^*(\omega|_{U_j})$  gilt. Daher kann man in (2) fortfahren mit

$$\sum_{\nu=1}^n \int_{u_\nu} \omega = \sum_j \int_{w_j} \eta_j^* \varphi_j = \sum_j \int_v \varphi_j = \int_v \text{sp } \omega. \quad \square$$

**7.5.2 Zykel.** Eine Menge von Wegen  $\{u_1, \dots, u_m\}$  in  $X$  heißt *Zykel*, wenn jeder Punkt genauso oft als Anfangs- wie als Endpunkt dieser Wege auftritt. Dann gilt

$$(1) \quad \sum_{\mu=1}^m \int_{u_\mu} \omega \in \text{Per}(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{E}_1(X).$$

*Beweis* durch Induktion über  $m$ . Für  $m = 1$  ist der einzige Weg eine Schleife. Schluß von  $m-1$  auf  $m \geq 2$ : Wenn alle  $u_\mu$  Schleifen sind, gilt (1). Sonst gibt es zwei Wege  $u_j$  und  $u_k$ , so daß  $u_k$  im Endpunkt von  $u_j$  beginnt. Der Zykel  $\{u_1, \dots, u_m\}$  geht in einen Zykel von  $m-1$  Wegen über, wenn man  $u_j, u_k$  durch den Produktweg  $u_j u_k$  ersetzt. Nach der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\sum_{\mu=1}^m \int_{u_\mu} \omega = \int_{u_j u_k} \omega + \sum_{\mu=1, j \neq \mu \neq k}^m \int_{u_\mu} \omega \in \text{Per}(\omega). \quad \square$$

**7.5.3 Abelsche Relation für Hauptdivisoren.** Auf einer kompakten, zusammenhängenden Fläche  $X$  seien  $n$  Wege  $u_\nu$  von  $P_\nu$  nach  $Q_\nu$  gegeben, so daß  $\sum (P_\nu - Q_\nu) = (f)$  ein Hauptdivisor ist. Dann gilt

$$(1) \quad \sum_{\nu=1}^n \int_{u_\nu} \omega \in \text{Per}(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{E}_1(X).$$

*Beweis.* Die Funktion  $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist eine  $n$ -blättrige Überlagerung. Wir wählen einen Weg  $w$  von  $0$  nach  $\infty$  in  $\widehat{\mathbb{C}}$ , der unterwegs keine Verzweigungspunkte trifft. Er besitzt  $n$  Liftungen  $v_1, \dots, v_n$  in  $X$ , die so nummeriert werden, daß  $v_\nu$  in  $P_\nu$  beginnt. Es gibt dann eine Permutation  $\sigma$ , so

daß  $v_\nu$  in  $Q_{\sigma(\nu)}$  endet. Nach 7.5.1(1) ist  $\sum \int_{v_\nu} \omega = \int_w \text{sp } \omega = 0$  wegen  $\text{sp } \omega \in \mathcal{E}_1(\widehat{\mathbb{C}}) = 0$ . Die Wege  $u_1, \dots, u_n, v_1^-, \dots, v_n^-$  bilden einen Zykel. Nach 7.5.2(1) ist  $\sum \int_{u_\nu} \omega = \sum (\int_{u_\nu} \omega + \int_{v_\nu^-} \omega) \in \text{Per}(\omega)$ .  $\square$

*Beispiel.* Wie im Beispiel 7.4.5 sei  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  eine Torusprojektion und  $\omega \in \mathcal{E}_1(\mathbb{C}/\Omega)$  die durch  $\eta^* \omega = dz$  bestimmte Form. Für  $X = \mathbb{C}/\Omega$  reduziert sich die abelsche Relation wegen  $\mathcal{E}_1(\mathbb{C}/\Omega) = \mathbb{C} \cdot \omega$  auf die Gleichung (1) für die spezielle Form  $\omega$ . Zur Berechnung des Integrals  $\int_{u_\nu} \omega$  liften wir  $u_\nu$  zum Weg  $v_\nu$  in  $\mathbb{C}$ . Für den Anfangspunkt  $A_\nu$  und den Endpunkt  $B_\nu$  von  $v_\nu$  gilt dann  $\int_{u_\nu} \omega = B_\nu - A_\nu$ . Damit wird (1) zu  $\sum (B_\nu - A_\nu) \in \text{Per}(\omega) = \Omega$ . Das ist wegen  $\eta(A_\nu) = P_\nu$  und  $\eta(B_\nu) = Q_\nu$  äquivalent zu  $\sum P_\nu = \sum Q_\nu$  in  $\mathbb{C}/\Omega$ . Die in 2.3.2 bewiesenen Abelsche Relation für Tori ist also ein Spezialfall.

Für Tori wurde in 2.3.3-6 auch die Umkehrung bewiesen: *Aus (1) folgt, daß  $\sum (P_\nu - Q_\nu)$  ein Hauptdivisor ist.* Wir zeigen in 14.2.4, daß dies für alle kompakten Flächen gilt (*Abelsches Theorem*).

Nachdem Abel die Umkehrung elliptischer Integrale durch doppelt-periodische Funktionen gelungen war, dehnte er seine Untersuchungen auf allgemeinere Integrale aus, die später seinen Namen bekamen. Im Oktober 1826 reichte er der Pariser Akademie ein fast 70 Seiten langes *Mémoire*, [Ab] XII, ein, das erst 1841 gedruckt wurde. Bedeutende Teilergebnisse, die auch die Relation (1) und das darauf aufbauende Additionstheorem 14.1.2 umfassen, veröffentlichte er 1829 in überarbeiteter Form zusätzlich in Crelles Journal.

## 7.6 Eine Charakterisierung der Tori

Auf jedem Torus gibt es eine holomorphe Differentialform ohne Nullstellen, siehe das Beispiel in 7.3.3. Wir zeigen, daß alle kompakten, zusammenhängenden Flächen mit dieser Eigenschaft, insbesondere alle elliptischen Flächen Tori sind. Daraus folgt eine zweite Lösung des Jacobischen Problems.

**7.6.1 Überlagerung durch  $\mathbb{C}$ .** *Wenn es auf der kompakten, zusammenhängenden Fläche  $X$  eine holomorphe Differentialform  $\omega$  ohne Nullstellen gibt, wird  $X$  durch  $\mathbb{C}$  unverzweigt überlagert.*

*Beweis.* Sei  $Z$  eine Komponente der Fläche  $S_\omega$  der Stammfunktionen-Keime mit der unverzweigten Überlagerung  $p : Z \rightarrow X$  und der Auswertungsfunktion  $e : Z \rightarrow \mathbb{C}$ . Da  $de = p^* \omega$  wie  $\omega$  keine Nullstellen hat, ist  $e$  lokal biholomorph. Wir behaupten, daß  $e$  ein Isomorphismus ist. Nach 3.2.4(3) genügt dazu, daß  $e$  unbegrenzt ist:

*Jeder Weg  $v : [0, 1) \rightarrow Z$  ohne Endpunkt läßt sich stetig nach 1 fortsetzen, sobald dies für  $ev := e \circ v : [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  gilt.*

Man wählt eine Folge  $t_n$  in  $[0, 1)$ , die monoton nach 1 konvergiert. Weil  $X$  kompakt ist, hat die Bildfolge  $a_n := pv(t_n)$  einen Häufungspunkt  $a \in X$ . Da  $\omega$  keine Nullstellen hat, gibt es eine holomorphe Karte  $h : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}_r, 0)$ , so

daß  $dh = \omega|U$  ist. Es gibt einen Index  $k$ , so daß  $a_k \in U$  ist und  $|h(a_k)| < \frac{1}{3}r$  sowie  $|ev(t) - ev(1)| < \frac{1}{3}r$  für alle  $t_k \leq t \leq 1$  gelten. Es gibt einen  $p$ -Schnitt  $\sigma : (U, a_k) \rightarrow (Z, v(t_k))$ , und  $e\sigma := e \circ \sigma$  ist eine Stammfunktion von  $\omega|U$ . Daher ist  $e\sigma - h = e\sigma(a)$  konstant, insbesondere

$$|ev(t_k) - e\sigma(a)| = |h(a_k)| < \frac{1}{3}r.$$

Somit gilt für alle  $t_k \leq t \leq 1$  die Abschätzung

$$(2) |ev(t) - e\sigma(a)| \leq |ev(t) - ev(1)| + |ev(1) - ev(t_k)| + |ev(t_k) - e\sigma(a)| \leq r.$$

Wegen  $e\sigma = e\sigma(a) + h$  wird die Scheibe  $\sigma(U)$  durch  $e$  biholomorph auf die Kreisscheibe  $D \subset \mathbb{C}$  mit dem Mittelpunkt  $e\sigma(a)$  und dem Radius  $r$  abgebildet. Die Abschätzung (2) bedeutet, daß der Weg  $ev$  für  $t_k \leq t \leq 1$  in  $D$  verläuft. Es gibt daher einen  $e$ -Lift  $u$  von  $ev|_{[t_k, 1]}$  in  $\sigma(U)$ , der in  $v(t_k)$  beginnt. Wegen der Eindeutigkeit der Liftung ist  $u = v$  auf  $[t_k, 1]$ , und folglich wird  $v$  durch  $v(1) := u(1)$  stetig fortgesetzt.  $\square$

**7.6.2 Charakterisierung der Tori.** *Jede kompakte, zusammenhängende Fläche  $X$ , auf der es eine holomorphe Differentialform ohne Nullstellen gibt, ist zu einem Torus  $\mathbb{C}/\Omega$  isomorph. Insbesondere sind alle elliptischen Flächen Tori.*

*Beweis.* Nach 7.6.1 gibt es eine unverzweigte Überlagerung  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow X$ . Wegen der Folgerung in 2.5.1 ist  $X$  zu einem Torus isomorph. – Jede elliptische Fläche  $X$  tritt im Riemannschen Gebilde  $(X, \eta, f)$  eines Polynoms  $w^2 - (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$  mit paarweise verschiedenen  $e_j$  auf. Die Überlagerung  $\eta$  ist zweiblättrig und verzweigt über  $\{e_1, e_2, e_3, \infty\}$ . Aus  $f^2 = (\eta - e_1)(\eta - e_2)(\eta - e_3)$  folgt: Außerhalb der Windungspunkte haben  $d\eta$  und  $f$  weder Null- noch Polstellen. Für  $\eta(x) = e_j$  gilt  $2o(f, x) = v(\eta, x) = 2$  und für  $\eta(x) = \infty$  ist  $2o(f, x) = 3o(\eta, x) = -6$ . Daher gilt nach 7.1.4(2)  $o(d\eta/f, x) = 0$  für alle  $x \in X$ , d.h.  $d\eta/f$  ist null- und polstellenfrei.  $\square$

**7.6.3 Zweite Lösung des Jacobischen Problems.** *Jede Menge  $M \subset \widehat{\mathbb{C}}$  von 4 Punkten ist Verzweigungsort einer elliptischen Funktion vom Grade 2.*

*Beweis.* Man kann  $M = \{e_1, e_2, e_3, \infty\}$  annehmen. Nach 7.6.2 definiert  $w^2 - (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$  eine zweiblättrige Überlagerung  $\eta : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  durch einen Torus. Durch Vorschalten der Torusprojektion  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  erhält man die gewünschte Funktion  $\eta \circ u$ .  $\square$

**7.6.4 Ausblick.** Auf jeder nicht kompakten Riemannschen Fläche  $X$  gibt es eine holomorphe Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ohne Windungspunkte, d.h.  $df$  hat keine Nullstellen, siehe [GN].

Die Charakterisierung der Tori durch 7.6.2 läßt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern: *Jede kompakte, zusammenhängende,  $n$ -dimensionale Kählersche Mannigfaltigkeit ist zu einem Torus  $\mathbb{C}^n/\Omega$  isomorph, sobald  $n$  holomorphe Differentialformen existieren, die überall linear unabhängig sind.* Man kann den Beweis aus 7.6.1-2 übertragen. Zur weiterführende Lektüre wird [Ak] empfohlen.

## 7.7 Homologie und Cohomologie

Beim Periodenhomomorphismus  $\pi(X, a) \rightarrow \mathbb{C}$  geht wie bei jedem Homomorphismus in eine *abelsche* Gruppe die eventuell nicht-kommutative Struktur der Fundamentalgruppe verloren. Dann können wir  $\pi(X, a)$  von vorneherein durch *Abelsch-machen* zur *Homologiegruppe*  $H_1(X)$  vereinfachen.

**7.7.1 Abelsch-machen.** Sei  $G$  eine beliebige Gruppe. Alle Kommutatoren  $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$  der Elemente  $a, b, \dots \in G$  erzeugen die Kommutator-Untergruppe  $[G, G] \triangleleft G$ , die sogar ein Normalteiler ist. Die Faktorgruppe  $AG := G/[G, G]$  heißt *abelsch gemachte Gruppe*  $G$ . Der Restklassen-Epimorphismus  $\mathcal{A} : G \rightarrow AG$  hat folgende

**Universelle Eigenschaft.** Jeder Homomorphismus  $h : G \rightarrow H$  in eine abelsche Gruppe faktorisiert über  $AG$ ; d.h.  $h$  induziert genau einen Homomorphismus  $Ah : AG \rightarrow H$ , so daß  $h = (Ah) \circ \mathcal{A}$  gilt.  $\square$

**7.7.2 Die Homologiegruppe.** Die (*erste*) *Homologiegruppe* eines wegzusammenhängenden topologischen Raumes  $X$  ist die abelsch gemachte Fundamentalgruppe  $H_1(X) := \mathcal{A}\pi(X, a)$ .

Auf die Angabe des Basispunktes  $a$  kann verzichtet werden, weil  $\mathcal{A}\pi(X, a)$  und  $\mathcal{A}\pi(X, b)$  in kanonischer Weise isomorph sind: Die Verschiebung  $\Phi_w : \pi(X, a) \rightarrow \pi(X, b)$  längs eines Weges  $w$  von  $a$  nach  $b$  induziert den Isomorphismus  $\mathcal{A}\Phi_w : \mathcal{A}\pi(X, a) \rightarrow \mathcal{A}\pi(X, b)$ . Er hängt von der Wahl des Weges  $w$  nicht ab. Denn für einen zweiten Weg  $v$  von  $a$  nach  $b$  ist  $\Phi_v^{-1} \circ \Phi_w$  die Konjugation mit  $[w \cdot v^{-1}]$ , die bei der abelsch gemachten Gruppe zur Identität wird, so daß  $\mathcal{A}\Phi_v = \mathcal{A}\Phi_w$  gilt.

Die *Homologieklass*e einer Schleife  $u$  wird mit  $\text{kl } u := \mathcal{A}([u]) \in H_1(X)$  bezeichnet.

Jede stetige Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  induziert den Homomorphismus

$$\eta_* : H_1(X) \rightarrow H_1(Y), \text{kl } u \mapsto \text{kl}(\eta \circ u).$$

Wie in 3.1.5 gilt beim Hintereinanderschalten  $(\varphi \circ \eta)_* = \varphi_* \circ \eta_*$ .

Man nennt zwei Abbildungen  $\eta_0, \eta_1 : X \rightarrow Y$  *homotop*, wenn es eine stetige Abbildung  $h : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  mit  $h(x, j) = \eta_j(x)$  für  $x \in X$  und  $j = 0, 1$  gibt. Dann ist

$$(1) \quad \eta_{0*} = \eta_{1*} : H_1(X) \rightarrow H_1(Y).$$

Denn für jede Schleife  $u$  von und nach  $a$  in  $X$  und den Weg  $w(t) := h(a, t)$  in  $Y$  sind die Wege  $\eta_0 \circ u$  und  $w \cdot (\eta_1 \circ u) \cdot w^{-1}$  homotop.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $A \subset X$  lokal endlich. Für jedes  $a \in A$  sind die Homotopieklassen aller einfachen  $a$ -Schleifen  $u_a$  zueinander konjugiert in  $\pi(X \setminus A)$ . Daher ist die Homologieklass  $\text{kl } u_a \in H_1(X \setminus A)$  durch  $a$  allein bestimmt. Für  $X = \widehat{\mathbb{C}}$  folgt aus Satz 3.8.4 durch Abelsch-Machen:

Die Homologiegruppe  $H_1(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a_0, \dots, a_r\})$  ist eine freie abelsche Gruppe mit der Basis  $\text{kl } u_{a_1}, \dots, \text{kl } u_{a_r}$ . Es gilt  $\text{kl } u_{a_0} + \dots + \text{kl } u_{a_r} = 0$ .  $\square$

**7.7.3 Integration über Homologieklassen.** Sei  $X$  eine zusammenhängende Fläche, und sei  $\omega \in \mathcal{E}_2(X)$ . Der Periodenhomomorphismus  $I_{\omega,a}$  aus 7.4.5(1) bestimmt nach 7.7.1 den von  $a$  unabhängigen Homomorphismus

$$h_\omega : H_1(X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Für  $k \in H_1(X)$  definiert man  $\langle k, \omega \rangle := h_\omega(k)$  und erhält die *Paarung*

$$(1) \quad H_1(X) \times \mathcal{E}_2(X) \rightarrow \mathbb{C}, (k, \omega) \mapsto \langle k, \omega \rangle.$$

Sie ist additiv im ersten und  $\mathbb{C}$ -linear im zweiten Argument.– Jede Homologieklassse wird durch eine Schleife  $u$  repräsentiert, welche die Pole von  $\omega$  meidet. Für sie gilt

$$(2) \quad \langle \text{kl } u, \omega \rangle = \int_u \omega$$

Daher nennen wir die Paarung *Integration über Homologieklassen*.

**7.7.4 Cohomologie.** Die (*erste, komplexe*) *Cohomologie*  $H^1(X, \mathbb{C})$  eines Raumes  $X$  ist der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Homomorphismen  $H_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ .

Für jede zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  definieren wir mit der Integration über Homologieklassen die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung

$$\Phi : \mathcal{E}_2(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C}), \omega \mapsto \langle -, \omega \rangle.$$

**Satz.** Die mit  $\Phi$  und der Ableitung  $d$  gebildete Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2(X) \xrightarrow{\Phi} H^1(X, \mathbb{C})$$

ist exakt, d.h. es gilt  $\text{Kern } d = \mathbb{C}$  und  $\text{Bild } d = \text{Kern } \Phi$ . Bei kompaktem  $X$  ist  $\Phi : \mathcal{E}_1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$  injektiv.

*Beweis.* Nach 7.1.2 ist  $\text{Kern } d = \mathbb{C}$ . Wegen der Folgerung 7.4.6 ist  $\text{Kern } \Phi = \{\omega : \text{Per}(\omega) = 0\} = \text{Bild } d$ .– Bei kompaktem  $X$  folgt aus  $df \in \mathcal{E}_1(X)$ , daß  $f \in \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$  und somit  $df = 0$  ist.  $\square$

Die exakte Sequenz (1) spielt im Beweis der Riemann-Rochschen Formel in 13.1.2 eine wichtige Rolle.– Die *Surjektivität* von  $\Phi : \mathcal{E}_2(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$  für *kompakte* Flächen  $X$  wird in 13.6.3 gezeigt. Für *offene* Flächen  $X$  ist  $\Phi : \mathcal{E}_1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$  stets surjektiv, siehe z.B. [For], Abschnitt 26.1.

**Folgerung (Cauchyscher Integralsatz).** Wenn  $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$  ist, besitzt jede Differentialform zweiter Gattung ein Stammfunktion.  $\square$

Die Voraussetzung ist sicher dann erfüllt, wenn  $X$  *homologisch einfach zusammenhängt*, d.h. wenn  $H_1(X) = 0$  ist. Einfach zusammenhängende Flächen sind offenbar homologisch einfach zusammenhängend. Nach dem Riemannschen Abbildungssatz 11.2.5 gilt auch die Umkehrung.

Der Cauchysche Integralsatz war für Riemann ein wichtiges Motiv, um den Begriff des einfachen Zusammenhangs einzuführen. In [Ri 3], Artikel 2 der Einleitung, schreibt er: „Es sei eine Fläche  $T$  gegeben und  $X, Y$  seien solche stetige Functionen des Orts in dieser Fläche, dass in ihr allenthalben  $Xdx + Ydy$  ein vollständiges Integral, also

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0$$

ist. Bekanntlich ist dann

$$\int (Xdx + Ydy),$$

um einen Theil der Fläche ... erstreckt,  $= 0$ . ... Das Integral

$$\int (Xdx + Ydy)$$

hat daher, zwischen zwei festen Punkten auf zwei verschiedenen Wegen erstreckt, denselben Werth, wenn diese beiden Wege zusammengenommen die ganze Begrenzung eines Theils der Fläche  $T$  bilden. Dies veranlaßt zu einer Unterscheidung der Flächen in einfach zusammenhängende, in welchen jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche vollständig begrenzt – wie z.B. einen Kreis –, und mehrfach zusammenhängende, für welche dies nicht stattfindet, – wie z.B. eine durch zwei concentrische Kreise begrenzte Ringfläche –.“

## 7.8 Logarithmische Ableitung

Für die Riemannsche Theorie der Abelschen Integrale müssen die Ergebnisse von 7.4.4-6 durch eine Variante ergänzt werden, bei der an die Stelle der Ableitung  $df$  die *logarithmische Ableitung*  $df/f$  tritt. Sie wird im 10. Kapitel und später gebraucht. – Sei  $X$  eine *zusammenhängende* Fläche.

**7.8.1 Elementare Eigenschaften.** Sei  $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$ . Wenn auf dem Gebiet  $f(X) \subset \mathbb{C}^\times$  eine Logarithmusfunktion definiert ist, gilt nach 7.1.3  $df/f = d(\log \circ f)$ . Daher stammt der Name „logarithmische Ableitung“. Man überträgt aus der klassischen Funktionentheorie für  $f, g \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$  die Ergebnisse

$$(1) \quad \frac{d(f \cdot g)}{f \cdot g} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}, \text{ insbesondere } \frac{d(1/f)}{1/f} = -\frac{df}{f}.$$

$$(2) \quad dg/g = df/f \Leftrightarrow g = cf \text{ mit } c \in \mathbb{C}^\times. \quad \square$$

Auch das folgende Ergebnis stammt aus der klassischen Theorie und wird mittels Karten auf Riemannsche Flächen übertragen:

(3) Die logarithmische Ableitung  $df/f$  hat einfache Pole in den Null- und Polstellen von  $f$  und ist sonst holomorph. Für die Residuen gilt

$$\operatorname{res}(df/f, a) = o(f, a). \quad \square$$

(4) Wenn der Weg  $u$  von  $a$  nach  $b$  die Null- und Polstellen von  $f$  meidet, ist

$$\exp \left( \int_u \frac{df}{f} \right) = \frac{f(b)}{f(a)}.$$

*Beweis.* Sei  $v$  eine exp-Liftung des Weges  $f \circ u$  in  $\mathbb{C}^\times$ . Dann gilt

$$\int_u df/f = \int_{f \circ u} dz/z = v(1) - v(0). \quad \square$$

(5) Wenn  $H^1(X, \mathbb{C}) = 0$  ist, gibt es zu jeder Funktion  $f \in \mathcal{O}(X)$  ohne Nullstellen eine Funktion  $g \in \mathcal{O}(X)$  mit  $f = \exp \circ g$ .

*Beweis.* Die holomorphe Form  $df/f$  besitzt nach dem Cauchyschen Integralsatz in 7.7.4 eine Stammfunktion  $g$ . Dann haben  $f$  und  $\exp \circ g$  nach 7.1.3 dieselbe logarithmische Ableitung. Also ist  $\exp \circ g = c \cdot f$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$ . Durch Addition einer Konstanten zu  $g$  erreicht man  $c = 1$ .  $\square$



**7.8.2 Die Fläche der Logarithmenkeime.** Jede logarithmische Ableitung ist wegen 7.8.1(3) eine Differentialform dritter Gattung mit ganzzahligen Residuen. Analog zu 7.4.4 entwickeln wir für solche Formen  $\omega$  eine Überlagerungstheorie.

- (1) Die Menge  $L_\omega \subset \mathcal{M}$  aller Keime, die lokal durch meromorphe Funktionen  $f$  mit  $df/f = \omega$  repräsentiert werden, ist offen und abgeschlossen in  $\mathcal{M}$ .

Die Auswertungsfunktion  $e|_{L_\omega}$  hat die logarithmische Ableitung

$$d(e|_{L_\omega})/(e|_{L_\omega}) = (p^*\omega)|_{L_\omega}.$$

Für jeden Weg  $v$  in  $L_\omega$  von  $\alpha$  nach  $\beta$ , dessen Spur  $u := p \circ v$  die Pole von  $\omega$  meidet, ist

$$\exp\left(\int_u \omega\right) = \frac{e(\beta)}{e(\alpha)}.$$

- (2) Die Beschränkung  $p|_{L_\omega} : L_\omega \rightarrow X$  ist eine unverzweigte Überlagerung. Die multiplikative Gruppe  $\mathbb{C}^\times$  operiert durch folgende Deckabbildungen transitiv auf jede Faser:

$$L_\omega \rightarrow L_\omega, \gamma \mapsto c\gamma, \text{ für } \gamma \in L_\omega \text{ und } c \in \mathbb{C}^\times.$$

- (3) Für homotope Wege  $u_0, u_1$ , welche die Pole von  $\omega$  meiden, gilt

$$\int_{u_0} \omega - \int_{u_1} \omega \in 2\pi i \mathbb{Z}.$$

Fast alle Beweise entsprechen denjenigen aus 7.4.4. Wir zeigen nur, wie man zum Beweis von (2) trivial überlagerte Scheiben findet: Zu jedem  $a \in X$  gibt es eine Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ , so daß  $\omega|_U = ndz/z + dh$  mit  $n \in \mathbb{Z}$  und  $h \in \mathcal{O}(U)$  gilt. Daher ist  $\omega|_U$  die logarithmische Ableitung von  $f = z^n e^h$ . Dann ist  $p^{-1}(U) \cap L_\omega$  die disjunkte Vereinigung der Basismengen  $(U, cf)$  für  $c \in \mathbb{C}^\times$ .  $\square$

**7.8.3 Differentialformen dritter Gattung.** Sei  $\omega \in \mathcal{E}_3(X)$  eine Form mit ganzzahligen Residuen. Nach 7.8.2(3) hängt für jede Schleife  $u$ , welche die Pole von  $\omega$  meidet,  $\exp(\int_u \omega)$  nur von der Homologiekasse  $\text{kl } u \in H_1(X)$  ab. Daher gibt es genau einen Homomorphismus

$$(1) \quad \chi_\omega : H_1(X) \rightarrow \mathbb{C}^\times, \text{ kl } u \mapsto \exp\left(\int_u \omega\right).$$

Man nennt  $\chi_\omega$  den Charakter von  $\omega$ . Es gilt

$$(2) \quad \text{Per}(\omega) < 2\pi i \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad \chi_\omega = 1. \quad \square$$

Analog zu 7.4.6 beweist man:

- (3) Für jede Komponente  $Z$  von  $L_\omega$  ist die Projektion  $p : Z \rightarrow X$  eine normale Überlagerung mit der Deckgruppe  $\chi_\omega(H_1(X))$ .
- (4) Eine Form  $\omega \in \mathcal{E}_3(X)$  mit ganzzahligen Residuen ist genau dann eine logarithmische Ableitung, wenn  $\text{Per}(\omega) < 2\pi i \mathbb{Z}$ . Das ist immer der Fall, wenn  $X$  homologisch einfach zusammenhängt.  $\square$

## 7.9 Aufgaben

- 1) Übertrage die Ergebnisse über die Ordnung (7.1.4) und über die Liftung (7.1.6) von Differentialformen auf  $k$ -Differentialformen. Zeige:
  - (a) Das Produkt  $\varphi \cdot \omega := \{\varphi_\alpha \cdot \omega_\alpha\}$  einer  $k$ -Differentialform  $\varphi = \{\varphi_\alpha\}$  mit einer  $n$ -Differentialform  $\omega = \{\omega_\alpha\}$  ist eine  $(k+n)$ -Differentialform mit dem Divisor  $(\varphi \cdot \omega) = (\varphi) + (\omega)$ .
  - (b) Ein Divisor  $D$  ist genau dann der Null- und Polstellendivisor einer  $n$ -Differentialform, wenn es einen kanonischen Divisor  $K$  und einen Hauptdivisor  $H$  mit  $D = nK + H$  gibt.
- 2) Sei  $X$  durch das irreduzible Polynom  $w^n - f(y) \in \mathcal{M}(Y)[w]$  definiert. Drücke die Charakteristik  $\chi(X)$  durch  $n$ ,  $\chi(Y)$  und die Ordnungen von  $f$  aus.  
Sind die durch  $w^3 - (z^2 + 1)^2(z^3 - 1)$ ,  $w^n + z^n + 1 \in \mathbb{C}(z)[w]$  definierten Flächen zusammenhängend? Welche Charakteristiken haben sie?
- 3) Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  die durch  $w^2 = (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_{2g+1})$  definierte (hyper-) elliptische Überlagerung. Zeige: Für jeden Divisor  $D$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade  $g - 1$  ist die Liftung  $\eta^* D$  ein kanonischer Divisor.  
Hinweis: Berechne den kanonischen Divisor  $(dz/w)$ .
- 4) Man bestimme alle Flächen vom Geschlecht 3 mit einem Automorphismus der Ordnung 8.
- 5) Sei  $X$  die durch  $w^2 = P(z) := (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_{2g+1})$  definierte Fläche.
  - (a) Sei  $(z_0, w_0) \in \mathbb{C}^2$  und  $w_0^2 = P(z_0)$ . Bestimme die Pole mit ihren Ordnungen und Residuen für folgende Differentialform
 
$$\omega = \frac{1}{2} \frac{w + w_0}{z - z_0} \frac{dz}{w}.$$
  - (b) Sei  $A \subset X$  eine endliche Teilmenge und  $r : A \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion mit  $\sum r(a) = 0$ . Konstruiere eine Form dritter Gattung auf  $X$ , die an jeder Stelle  $a \in A$  einem Pol mit dem Residuum  $r(a)$  hat und sonst holomorph ist. Benutze dazu die in (a) angegebenen Formen  $\omega$  für verschiedene  $(z_0, w_0)$ .
- 6) Sei  $\text{sp}$  die Spur einer endlichen Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$ .
  - (a) Finde eine Formel für  $\text{sp}(\eta^* \varphi)$ .
  - (b) Untersuche ob  $\omega \mapsto \text{sp} \omega$  injektiv oder surjektiv ist.
  - (c) Berechne  $\text{sp} \omega$  für  $\eta(z) = z^n$  und  $\omega = z^q dz$ .
- 7) Für welche Exponenten  $n, q$  sind die Differentialformen  $z^n dz/w^q$  auf der durch  $w^4 - z^4 + 1$  definierten Fläche holomorph? Wo liegen die Nullstellen dieser Formen? Welche Ordnungen haben sie?
- 8) Finde eine holomorphe Differentialform  $\omega$  auf einer kompakten Fläche  $X$ , deren Periodengruppe dicht in  $\mathbb{C}$  liegt.  
*Anleitung:* Auf der durch  $w^2 = z(z^2 - 1)(z^2 + 1)$  definierten Fläche  $X$  ist  $\omega = dz/w$  holomorph. Wähle eine Schleife  $u$  mit  $r := \int_u \omega \neq 0$ . Mit

$\rho = e^{\pi i/4}$  wird durch  $h(z) = \rho^2 z$  und  $h(w) = \rho w$  ein Automorphismus  $h$  von  $X$  definiert. Die Werte

$$\int_{h^n \circ u} \omega = \rho^n r$$

gehören zu  $\text{Per}(\omega)$ . Die Zahlen  $r$ ,  $\rho r$  und  $\rho^2 r$  sind über  $\mathbb{Q}$  linear unabhängig. Folgere, daß  $\text{Per}(\omega) < \mathbb{C}$  nicht lokal endlich ist.

- 9) Deute den Integranden in der Formel 2.4.1(1) für die Länge des Ellipsenbogens als Differentialform auf einem Torus. Zu welcher Gattung gehört diese Form? Ist der Ellipsenumfang eine Periode der Form?

- 10) Sei  $\eta: (X, a) \rightarrow (Y, b)$  eine unverzweigte, normale Überlagerung zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten mit *abelscher* Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$ . Der Raum  $Z$  sei lokal wegzusammenhängend, zusammenhängend und homologisch einfach zusammenhängend. Beweise den *Homologischen Monodromiesatz*:  
*Jede stetige Abbildung  $(Z, c) \rightarrow (Y, b)$  besitzt eine  $\eta$ -Liftung  $(Z, c) \rightarrow (X, a)$ .*

- 11) Zeige: Für jeden Torus  $X := \mathbb{C}/\Omega$  ist die in 7.7.4 definierte Abbildung  $\Phi$  surjektiv.

*Hinweis:* Benutze eine holomorphe Differentialform  $\omega \neq 0$  und  $\hat{\phi} \cdot \omega$ .

- 12) Sei  $X$  die durch  $w^2 = (z - e_1) \cdots (z - e_5)$  bestimmte hyperelliptische Fläche. Zeige: Für jedes Polynom  $Q(z)$  vom Grade  $\leq 3$  ist  $Q(z)dz/w$  eine Form zweiter Gattung, welche für  $Q \neq 0$  keine Stammfunktion besitzt. Folgere mit Satz 7.7.4, daß die Cohomologie  $H^1(X, \mathbb{C})$  mindestens 4-dimensional ist. Verallgemeinere von 5 auf beliebige ungerade Zahlen  $\geq 3$ .

- 13) Für jedes  $k \in \mathbb{Z}$  wird die *gewichtete Operation* von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  auf  $\mathcal{M}(\mathbb{H})$  durch

$$(f|\gamma)_k(\tau) := \gamma'(\tau)^k \cdot (f \circ \gamma(\tau)) \text{ für } \gamma \in \text{Aut}(\mathbb{H}) \text{ und } f \in \mathcal{M}(\mathbb{H})$$

definiert. Man nennt  $f$  eine *Modulform  $n$ -ter Stufe vom Gewicht  $-2k$* , wenn für alle  $\gamma \in \Gamma$  (Modulgruppe) der Grenzwert

$$\lim_{\text{Im} \tau \rightarrow \infty} (f|\gamma)_k(\tau) \in \hat{\mathbb{C}}$$

existiert und für alle  $\beta \in \Gamma_n$  (Kongruenzuntergruppe;  $\Gamma_1 := \Gamma$ )

$$(f|\beta)_k = f$$

gilt. Sei  $\lambda_n: \mathbb{H} \rightarrow X_n^* \hookrightarrow X_n$  die unverzweigte Überlagerung mit der Deckgruppe  $\Gamma_n$ , siehe 5.7.1-2. Zeige: Eine Modulform  $f$  der Stufe  $n$  vom Gewicht  $-2k$  liegt genau dann vor, wenn es auf der Modulfläche  $X_n$  eine meromorphe  $k$ -Differentialform  $\omega$  gibt, so daß  $\lambda_n^* \omega = f \cdot (d\tau)^k$  ist.

*Hinweis:* Aufgabe 5.8.9 handelt vom Spezialfall  $k = 0$ .

- 14) Zeige, daß die  $J$ - bzw.  $\lambda$ -Funktion eine Modulform der Stufe 1 bzw. 2 vom Gewicht 0 ist und die Halbperioden  $e_k$  Modulformen der Stufe 2 vom Gewicht  $-2$  sind. Deute die Gitterinvarianten  $g_2, g_3$  und  $\Delta := g_2^3 - 27g_3^2$  als Modulformen.

*Hinweis:* Benutze die Transformationsformeln aus 5.4.3.



## 8. Divisoren und Abbildungen in projektive Räume

Bei der Untersuchung kompakter Flächen  $X$  spielen *positive Divisoren* und ihre Zusammenfassung zu *Linearscharen* eine bedeutende Rolle. Den Linearscharen entsprechen Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{P}^n$  in projektive Räume. Dadurch werden kompakte Riemannsche Flächen zu komplex-projektiven Kurven, welche mit Methoden der projektiven Geometrie untersucht werden können. Diese Vorgehensweise hat eine Fülle von Ergebnissen hervorgebracht, siehe [ACGH]. Das vorliegende Kapitel ist nur eine Einführung. Es wird durch ein genaueres Studium des ebenen Falles ( $n = 2$ ) im 9. Kapitel ergänzt.

### 8.1 Positive Divisoren

Wir betrachten Divisoren auf *kompakten, zusammenhängenden* Riemannschen Flächen  $X$ , vergleiche 1.6.4, und interessieren uns vorwiegend für *positive Divisoren*  $D$ , welche durch  $D(x) \geq 0$  für alle  $x \in X$  definiert sind. Wir schreiben für zwei Divisoren  $D \geq E$ , wenn  $D - E$  positiv ist. Jeder Divisor  $D$  ist die Differenz  $D = D_0 - D_\infty$  zweier positiver Divisoren, nämlich

$$D_0(x) := \max\{0, D(x)\} \text{ und } D_\infty(x) := -\min\{0, D(x)\}$$

Bei einer Funktion  $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$  mit dem Hauptdivisor  $(f) = (f)_0 - (f)_\infty$  heißt  $(f)_0$  der *Null-* und  $(f)_\infty$  der *Polstellendivisor*. Ihr Grad  $\text{gr}(f)_0 = \text{gr}(f)_\infty = \text{gr} f$  ist der Grad der Abbildung  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , siehe 1.6.2(3).

**8.1.1 Lineare Äquivalenz.** In der *additiven Gruppe*  $\text{Div}(X)$  aller Divisoren auf  $X$  bilden die Hauptdivisoren  $(f)$  wegen  $(f/g) = (f) - (g)$  eine Untergruppe. Die Restklassen bezüglich dieser Untergruppe heißen *Divisor-klassen*. Beispielsweise bilden alle *kanonischen* Divisoren eine Klasse, welche *kanonische Divisorklasse* genannt wird.

Zwei Divisoren heißen *linear äquivalent*, wenn sie zur selben Divisorklasse gehören; sie haben dann denselben Grad.

Die Menge aller *positiven* Divisoren, die zum Divisor  $D$  linear äquivalent sind, wird mit  $|D|$  bezeichnet. Im Falle  $\text{gr} D < 0$  ist  $|D| = \emptyset$ . Zur Beschreibung von  $|D|$  bildet man den komplexen Vektorraum

$$(1) \quad \mathcal{L}(D) := \{f \in \mathcal{M}(X) : f = 0 \text{ oder } D + (f) \geq 0\}.$$

Dann ist

$$(2) \quad |D| = \{D + (f) : f \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}\}.$$

Der Raum  $\mathcal{L}(D)$  ist stets endlich dimensional, siehe 8.1.2. Wir nennen

$$(3) \quad l(D) := \dim \mathcal{L}(D)$$

die *Dimension des Divisors*  $D$ . Äquivalente Divisoren haben dieselbe Dimension, da  $D - E = (h)$  den Isomorphismus

$$(4) \quad \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(E), f \mapsto h \cdot f,$$

bestimmt. – Bei jedem positiven Divisor  $D$  gehören alle konstanten Funktionen zu  $\mathcal{L}(D)$ , kurz:  $\mathbb{C} \subset \mathcal{L}(D)$ . Daher ist  $l(D) \geq 1$ .

Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine Überlagerung. Für jeden Divisor  $D \in \text{Div}(Y)$  ist der Untervektorraum  $\{f \circ \eta : f \in \mathcal{L}(D)\} \subset \mathcal{L}(\eta^*D)$  zu  $\mathcal{L}(D)$  isomorph. Daher gilt

$$(5) \quad l(\eta^*D) \geq l(D) \quad \text{für die Dimension gelifteter Divisoren.} \quad \square$$

Auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  sind wegen 1.6.5 (2) Divisoren gleichen Grades stets linear äquivalent. Insbesondere sind alle Divisoren vom Grade  $-2$  kanonisch. Für  $n \geq 0$  ist  $\mathcal{L}(n \cdot \infty)$  der Vektorraum aller Polynome vom Grade  $\leq n$ . Daher gilt

$$(6) \quad l(D) = \max \{0, 1 + \text{gr } D\} \quad \text{für Divisoren } D \text{ auf } \widehat{\mathbb{C}}. \quad \square$$

**Satz.** Genau dann, wenn auf  $X$  ein Divisor  $D$  mit  $\text{gr } D \leq d$  und  $l(D) \geq 2$  existiert, gibt es eine Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade  $\leq d$ .

*Beweis.* Man darf  $D \geq 0$  annehmen. Die Bedingung  $l(D) \geq 2$  ist zur Existenz einer Funktion  $\eta \in \mathcal{L}(D) \setminus \mathbb{C}$  äquivalent. Für sie gilt  $\text{gr } \eta = \text{gr}(\eta)_\infty \leq \text{gr } D \leq d$ . Umgekehrt sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine Überlagerung vom Grade  $r \leq d$ . Ihr Polstellendivisor  $D$  hat den Grad  $r$ . Wegen  $\eta \in \mathcal{L}(D) \setminus \mathbb{C}$  ist  $l(D) \geq 2$ .

### 8.1.2 Die Endlichkeit der Dimension $l(D)$ beruht auf folgendem

**Lemma.** Sei  $D, P \in \text{Div}(X)$  und  $P \geq 0$ . Dann ist  $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D + P)$  ein Untervektorraum. Es gilt die Abschätzung

$$(1) \quad l(D) \leq l(D + P) \leq l(D) + \text{gr } P.$$

*Beweis* durch Induktion über  $\text{gr } P$ . Für den Induktionsschritt genügt es, einen Punktdivisor  $P$  zu betrachten. Dann ist  $\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{L}(D + P) : o(f, P) \geq -D(P)\}$ . Da für alle  $f \in \mathcal{L}(D + P)$  ohnehin  $o(f, P) \geq -D(P) - 1$  gilt, existiert im Falle  $\mathcal{L}(D) \neq \mathcal{L}(D + P)$  ein  $g \in \mathcal{L}(D)$  mit  $o(g, P) = -D(P) - 1$ . Zu jedem  $f \in \mathcal{L}(D + P)$  gibt es dann ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $o(h - cg, P) \geq -D(P)$ , also  $h - cg \in \mathcal{L}(D)$ . Dann ist  $\mathcal{L}(D + P) = \mathcal{L}(D) + \mathbb{C} \cdot g$ .  $\square$

**Endlichkeitssatz.** Für jeden Divisor  $D \in \text{Div}(X)$  ist  $l(D)$  endlich: Aus  $\text{gr } D < 0$  folgt  $l(D) = 0$ . Für Divisoren  $D$  vom Grade 0 ist  $l(D) = 1$  oder  $= 0$  je nachdem, ob  $D$  ein Hauptdivisor ist oder nicht. Aus  $\text{gr } D \geq 1$  folgt  $l(D) \leq 1 + \text{gr } D$ . Die Fläche  $X$  ist zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph, sobald es ein  $D \in \text{Div}(X)$  mit  $l(D) = 1 + \text{gr } D \geq 2$  gibt.

*Beweis.* Aus  $\text{gr } D < 0$  folgt  $|D| = \emptyset$ , also  $l(D) = 0$ . – Sei  $\text{gr } D = 0$ . Aus  $D = (f)$  folgt  $1/f \in \mathcal{L}(D)$ , also  $l(D) > 0$ . Umgekehrt folgt aus

$l(D) > 0$ , daß  $D = (1/h)$  für alle  $h \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$  gilt. In diesem Falle ist  $l(D) = 1$ . Denn je zwei Funktionen  $g, h \in \mathcal{L}(D) \setminus \{0\}$  sind linear abhängig, da  $(g/h) = 0$ , also  $g/h \in \mathbb{C}^\times$  ist. – Wenn  $\text{gr } D > 0$  ist, zerlegt man  $D = D_0 + P$ , so daß  $\text{gr } D_0 = 0$  und  $P \geq 0$  ist. Aus dem Lemma folgt  $l(D) \leq l(D_0) + \text{gr } P \leq 1 + \text{gr } D$ . – Im Falle  $l(D) = 1 + \text{gr } D \geq 2$  zerlegt man  $D = D_1 + P$ , so daß  $\text{gr } D_1 = 1$  und  $P \geq 0$  ist. Wegen des Lemmas ist  $l(D_1) + \text{gr } P \geq l(D) = 1 + \text{gr } D = 2 + \text{gr } P$ , also  $l(D_1) \geq 2$ . Nach Satz 8.1.1 gibt es einen Isomorphismus  $X \approx \widehat{\mathbb{C}}$ .  $\square$

**8.1.3 Die Charakteristik eines Divisors.** Analog zu 8.1.1(1) bilden wir mit den Differentialformen  $\omega$  anstelle der Funktionen zu jedem Divisor  $D$  den komplexen Vektorraum

$$(1) \quad \mathcal{L}^1(D) = \{\omega \in \mathcal{E}(X) : \omega = 0 \text{ oder } D + (\omega) \geq 0\}.$$

Jede kanonische Divisor  $K = (\omega)$  bestimmt den *Isomorphismus*

$$(2) \quad \mathcal{L}(K + D) \rightarrow \mathcal{L}^1(D), f \mapsto f \cdot \omega. \quad \square$$

Wir definieren den *Index*  $i$  und die *Charakteristik*  $ch$  durch

$$(3) \quad i(D) := \dim \mathcal{L}^1(-D) = l(K - D) \text{ und } ch(D) := l(D) - i(D).$$

Dann ist

$$(4) \quad ch(D) + ch(K - D) = 0. \quad \square$$

**Satz.** Für jeden Divisor  $D$  und jeden positiven Divisor  $P$  gilt

$$(5) \quad ch(D + P) \leq ch(D) + \text{gr } P.$$

*Beweis.* Nach Lemma 8.1.2 ist  $l(D + P) \leq l(D) + \text{gr } P$ . Das entsprechende Ergebnis gilt für  $K - D$  statt  $D$ . Wir beweisen (5) durch Induktion über  $\text{gr } P$  und müssen für den Induktionsschritt nur einen Punktdivisor  $P$  betrachten. Entweder gilt die Behauptung (5), oder wegen Lemma 8.1.2 ist  $l(D + P) = l(D) + 1$  und  $i(D) = i(D + P) + 1$ . Es genügt, die zweite Möglichkeit ad absurdum zu führen: Es gäbe ein  $f \in \mathcal{L}(D + P) \setminus \mathcal{L}(D)$  und ein  $\omega \in \mathcal{L}^1(-D) \setminus \mathcal{L}^1(-D - P)$ . Dann wäre  $f\omega$  eine Differentialform, die bei  $P$  einen einfachen Pol hat und sonst holomorph ist. Das ist unmöglich, da die Residuensumme  $= 0$  ist, siehe 7.3.5.  $\square$

Die Abschnitte 8.1.4-5 enthalten Ergänzungen zu 8.1.2, welche erst in den letzten drei Kapiteln eine Rolle spielen.

**8.1.4 Dimensionsverminderung.** Das Lemma in 8.1.2 läßt sich mit  $E := D + P$  umformulieren:

$$(1) \quad l(E - P) \geq l(E) - \text{gr } P.$$

Die extreme Dimensionsverminderung  $l(E - P) = l(E) - \text{gr } P$  tritt fast immer ein. Um dies zu präzisieren, machen wir die Menge  $X_n$  aller positiven Divisoren vom Grade  $n$  zu einem topologischen Raum: Die Abbildung

$$p : X^n := X \times \dots \times X \rightarrow X_n, p(P_1, \dots, P_n) := P_1 + \dots + P_n,$$

ist surjektiv. Wir versehen  $X_n$  mit der entsprechenden Quotiententopologie und nennen  $X_n$  das  $n$ -fache *symmetrische Produkt* der Fläche  $X$ . Die Addition  $X_r \times X_s \rightarrow X_{r+s}$ ,  $(A, B) \mapsto A + B$ , ist stetig.

**Satz.** Für jeden Divisor  $E$  und jede natürliche Zahl  $n > 0$  liegen die positiven Divisoren  $P$  mit  $l(E - P) = \max\{0, l(E) - n\}$  dicht in  $X_n$ .

Wir beweisen folgende, zur Behauptung äquivalente Aussage durch Induktion über  $n$ :

(\*) Seien  $U_1, \dots, U_n$  nicht-leere, offene Mengen in  $X$ . Es gibt Punkte  $P_j \in U_j$ , so daß  $l(E - P_1 - \dots - P_n) = \max\{0, l(E) - n\}$  ist.

Für den Induktionsschritt genügt es, (\*) für  $n = 1$  und  $l(E) > 0$  zu beweisen. Man wählt ein  $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ . Angenommen, für  $Q \in X$  gilt  $l(E - Q) = l(E)$ , also  $\mathcal{L}(E - Q) = \mathcal{L}(E)$ . Dann ist  $f \in \mathcal{L}(E - Q)$ , somit  $E + (f)_0 \geq (f)_\infty + Q$ , also  $Q \in \text{Tr}(E + (f)_0)$ . Daher gilt  $l(E - P) = l(E) - 1$  für alle  $P \in X$  außerhalb des endlichen Trägers von  $E + (f)_0$ .  $\square$

**8.1.5 Freiheitsgrade.** Seien  $0 \leq s \leq n$  natürliche Zahlen, sei  $D \in X_n$ , sei  $U \subset X_s$  offen und  $\neq \emptyset$ . Dann sind äquivalent:

- (1)  $l(D) \geq s + 1$ .
- (2) Zu jedem  $A \in U$  gibt es ein  $B \in X_{n-s}$  mit  $A + B \in |D|$ .

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2). Nach 8.1.4 ist  $l(D - A) \geq l(D) - s \geq 1$ . Daher gibt es einen positiven Divisor  $B$ , welcher zu  $D - A$  linear äquivalent ist.

(2)  $\Rightarrow$  (1). Die Annahme  $r := l(D) \leq s$  wird zum Widerspruch geführt: Es gibt ein Paar  $(S, T) \in X_{s-r} \times X_r$  mit  $S + T \in U$ . Wegen der Stetigkeit der Addition gibt es eine Umgebung  $V$  von  $T$  in  $X_r$  mit  $S + V \subset U$ . Nach Satz 8.1.4 existiert ein  $C \in V$  mit  $l(D - C) = 0$ . Nach (2), angewendet auf  $A = S + C$ , gibt es ein  $B \in X_{n-s}$  mit  $S + C + B \in |D|$ . Daher sind  $D - C$  und  $S + B$  linear äquivalent, insbesondere  $l(S + B) = l(D - C) = 0$ . Da  $S$  und  $B$  positiv sind, ist aber  $l(S + B) \geq 1$ .  $\square$

Wenn (1) und (2) gelten, sagt man:  $|D|$  hat mindestens  $s$  Freiheitsgrade.

## 8.2 Holomorphe Differentialformen

Wie in 8.1 werden nur *kompakte Flächen*  $X$  betrachtet. Bei ihnen spielt der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{E}_1(X)$  aller *holomorphen* Differentialformen eine wichtige Rolle. Denn mittels  $\mathcal{E}_1(X)$  werden in 8.3 kanonische Abbildungen von  $X$  in projektive Räume gewonnen, und  $\mathcal{E}_1(X)$  ist im 14. Kapitel ein Grundstein für die Konstruktion des Jacobischen Periodentorus  $J(X)$ . – Wir benutzen den in 8.1.3 bewiesenen Satz, um  $\dim \mathcal{E}_1(X)$  durch die analytische Charakteristik abzuschätzen und geben im Anschluß daran  $\mathcal{E}_1(X)$  für spezielle Flächen explizit an.



**8.2.1 Das analytische Geschlecht.** Nach 8.1.3(1)-(2) gilt  $\mathcal{L}^1(0) = \mathcal{E}_1(X) \cong \mathcal{L}(K)$  für jeden kanonischen Divisor  $K$ . Man nennt

$$(1) \quad g_{an}(X) := \dim \mathcal{E}_1(X) = l(K)$$

das *analytische Geschlecht* von  $X$ .

Auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  gibt es keine holomorphen Formen  $\neq 0$ , also ist  $g(\widehat{\mathbb{C}}) = 0$ . Auf jedem *Torus*  $T$  gibt es eine Form  $\omega$  ohne Null- und Polstellen. Für jedes  $\varphi \in \mathcal{E}_1(T)$  ist  $\varphi/\omega \in \mathcal{O}(T) = \mathbb{C}$ . Daher ist  $g_{an}(T) = 1$ .

Im allgemeinen besteht zwischen  $g := g_{an}(X)$  und der analytischen Charakteristik  $\chi := \chi(X)$  folgende Ungleichung:

**Satz.** Wenn  $g \geq 1$  ist, gilt  $2g - 2 \leq -\chi$ , insbesondere  $\chi \leq 0$ .

*Beweis.* Wegen  $g \geq 1$  gibt es eine holomorphe Form  $\neq 0$ , also einen *positiven* kanonischen Divisor  $K$ . Die Behauptung folgt aus 8.1.3(5), angewendet auf  $D = 0$  und  $P = K$ .  $\square$

Für die Zahlenkugel und alle Tori ist  $2g - 2 = -\chi$ . Wir werden diese *Gleichung* bei weiteren Flächen bestätigt finden, siehe 8.2.2-3. In der Tat gilt sie für alle kompakten Flächen:

In 12.4.1 wird  $\chi = 2 - 2g_{top}$  für das topologische Geschlecht  $g_{top}$  bewiesen. Die Gleichung  $g_{top} = g_{an}$  ist der Spezialfall  $D = 0$  der *Formel von Riemann und Roch*

$$(RR) \quad l(D) - l(K - D) = \text{gr} D - g_{top} + 1,$$

welche für beliebige Divisoren  $D$  und kanonische Divisoren  $K$  gilt. Der Beweis von (RR) wird nach umfangreichen Vorarbeiten in 13.1.5 erreicht.

**8.2.2 Holomorphe Formen auf hyperelliptischen Flächen.** Für paarweise verschiedene  $e_1, \dots, e_{2m+1} \in \mathbb{C}$  definiert das Polynom

$$w^2 - (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_{2m+1})$$

eine hyperelliptische Fläche  $X$ . Mit der bei Abelschen Integralen üblichen Schreibweise, siehe 7.4.3(2), gilt

$$(1) \quad \mathcal{E}_1(X) = \left\{ \frac{P(z)}{w} dz : P(z) \in \mathbb{C}[z], \text{gr} P \leq m - 1 \right\}, \quad g_{an}(X) = m.$$

*Beweis zu (1).* Im Riemannschen Gebilde  $(X, \eta, f)$  des Polynoms besteht  $\eta^{-1}(\infty)$  aus einem Punkt  $a_{2m+2}$ . Aus den in 6.4.2(3) angegebenen Windungszahlen und Ordnungen folgt: Die Form  $d\eta/f$  ist bis auf eine  $(2m - 2)$ -fache Nullstelle bei  $a_{2m+2}$  null- und polstellenfrei. Für jedes Polynom  $P(z)$  vom Grade  $r$  gilt  $o(P \circ \eta, a_{2m+2}) = -2r$ . An allen anderen Stellen ist  $P \circ \eta$  holomorph. Daher sind die Formen  $((P \circ \eta)/f)d\eta$  für  $\text{gr} P \leq m - 1$  holomorph. Sie bilden einen  $m$ -dimensionalen Untervektorraum von  $\mathcal{E}_1(X)$ . Andererseits folgt aus Satz 8.2.1  $\dim \mathcal{E}_1(X) \leq m$ , weil  $X$  nach 7.1.5(2) die analytische Charakteristik  $\chi = 2 - 2m$  hat.  $\square$

**8.2.3 Holomorphe Formen auf der Kleinschen Fläche.** Sei  $X$  die durch  $w^7 - z^2(z - 1)$  definierte Kleinsche Fläche. Die drei Formen

$$(1) \quad dz/w^3, \quad z dz/w^5, \quad z dz/w^6$$

bilden eine Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$ , also ist  $g_{an}(X) = 3$ .

*Beweis.* Die Windungszahlen von  $\eta$  und die Ordnungen von  $f$  im Riemannschen Gebilde  $(X, \eta, f)$  sind im Satz 6.4.4 zusammengestellt. Man entnimmt ihnen, daß die angegebenen Formen holomorph sind. Offenbar sind sie linear unabhängig. Wegen  $\chi(X) = -4$  folgt  $\dim \mathcal{E}_1(X) \leq 3$  aus Satz 8.2.1.  $\square$

### 8.3 Abbildungen in projektive Räume

Die Kompaktifizierung der Zahlenebene  $\mathbb{C}$  zur Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}}$  wird auf höhere Dimensionen verallgemeinert: Wir definieren die komplex projektiven Räume  $\mathbb{P}^n$  als komplex  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten und betten  $\mathbb{C}^n$  in  $\mathbb{P}^n$  ein. – Für Riemannsche Flächen  $X$  verallgemeinern wir die meromorphen Funktionen  $X \rightarrow \hat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1$  zu holomorphen Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{P}^n$ .

**8.3.1 Projektive Räume.** Jeder endlich-dimensionale komplexe Vektorraum  $V$  ist zugleich ein Hausdorffraum. Seine Topologie ist dadurch charakterisiert, daß jeder Vektorraum-Isomorphismus  $V \cong \mathbb{C}^n$  ein Homöomorphismus ist. Wir setzen  $\dim V \geq 1$  voraus und bezeichnen die Menge aller 1-dimensionalen Untervektorräume mit  $\mathbb{P}(V)$ . Jeder Vektor  $v \in V \setminus \{0\}$  spannt den 1-dimensionalen Untervektorraum  $\mathbb{C}v$  auf. Wir versehen  $\mathbb{P}(V)$  mit der Quotiententopologie bezüglich

$$p : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V), p(v) = [v] := \mathbb{C}v,$$

und nennen  $\mathbb{P}(V)$  den *projektiven Raum* zu  $V$ .

Wir schreiben  $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ . Jeder Isomorphismus  $F : V \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  der Vektorräume bestimmt den Homöomorphismus  $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $[v] \mapsto [F(v)]$ . Man nennt  $\mathbb{P}^1$  die *projektive Gerade* und  $\mathbb{P}^2$  die *projektive Ebene*.

Die Einbettung  $W \hookrightarrow V$  jedes Untervektorraums  $W \neq 0$  induziert die Einbettung  $\mathbb{P}(W) \hookrightarrow \mathbb{P}(V)$ . Die abgeschlossene Teilmenge  $\mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(V)$  heißt *projektiver Unterraum*. Wenn  $W$  die Codimension 1 hat, also der Kern einer Linearform  $L : V \rightarrow \mathbb{C}$  ist, nennt man  $\mathbb{P}(W)$  eine *projektive Hyperebene*. Man sagt auch:  $\mathbb{P}(W)$  wird durch  $L = 0$  definiert, und schreibt  $\mathbb{P}(W) =: N(L)$ . Für diesen Fall gilt: Jedes  $a \in V \setminus W$  bestimmt den Homöomorphismus

(1)  $\alpha : W \rightarrow \mathbb{P}(V) \setminus N(L)$ ,  $w \mapsto [a + w]$ , mit  $\alpha^{-1}([v]) = (L(a)/L(v))v - a$ . Insbesondere ist  $\mathbb{P}(V) \setminus N(L)$  wie  $W$  hausdorffsch. Daraus folgt:

(2) Der projektive Raum  $\mathbb{P}(V)$  ist hausdorffsch.

*Beweis.* Zu zwei Punkten  $[v], [v'] \in \mathbb{P}(V)$  gibt es eine Linearform  $L$  mit  $L(v) \neq 0 \neq L(v')$ , also  $[v], [v'] \in \mathbb{P}(V) \setminus N(L)$ .  $\square$

Wenn man  $V$  mit einer hermiteschen Norm versieht, ist die Einheitsphäre  $S \subset V$  kompakt und zusammenhängend. Aus  $p(S) = \mathbb{P}(V)$  folgt:

(3) *Der projektive Raum  $\mathbb{P}(V)$  ist kompakt und zusammenhängend.*  $\square$

**8.3.2 Homogene Koordinaten. Holomorphe Struktur.** Jeder Vektor  $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  bestimmt den Punkt  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) := [z] \in \mathbb{P}^n$ . Man nennt  $z_0, \dots, z_n$  die *homogene Koordinaten* von  $[z] \in \mathbb{P}^n$ . Es gilt  $(z_0 : z_1 : \dots : z_n) = (w_0 : w_1 : \dots : w_n)$  genau dann, wenn es ein  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$  mit  $w_j = \lambda z_j$  für alle  $j$  gibt.

Die Komplemente  $U_j := \mathbb{P}^n \setminus \Theta_j$  der Hyperebenen  $\Theta_j := N(z_j)$  sind offen und überdecken für  $j = 0, \dots, n$  den  $\mathbb{P}^n$ . Jede Abbildung

$$\alpha_j : \mathbb{C}^n \rightarrow U_j, (z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1 : \dots : z_{j-1} : 1 : z_j : \dots : z_n)$$

ist ein Homöomorphismus. Die Umkehrabbildung  $h_j := \alpha_j^{-1}$  ist eine topologische Karte des  $\mathbb{P}^n$ :

$$U_j \rightarrow \mathbb{C}^n, (z_0 : \dots : z_n) \mapsto (z_0/z_j : \dots : z_{j-1}/z_j, z_{j+1}/z_j, \dots, z_n/z_j).$$

Diese Karten bilden den holomorphen Atlas  $\{(U_j, h_j) : j = 0, \dots, n\}$ , der  $\mathbb{P}^n$  zu einer komplexen Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$  macht.

Für  $n = 1$  läßt sich die Karte  $h_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $h_0(0 : 1) := \infty$  zu einer biholomorphen Abbildung  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  fortsetzen. Durch sie wird die projektive Gerade  $\mathbb{P}^1$  mit der Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$  identifiziert.

**8.3.3 Projektive Automorphismen.** Jede Matrix  $A \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$  bestimmt den *projektiven Automorphismus*  $\hat{A} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, [z] \mapsto [A \cdot z]$ . Dabei ist  $z$  beim Matrizenprodukt  $A \cdot z$  ein Spaltenvektor. Projektive Automorphismen sind biholomorph. Sie bilden die Gruppe  $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ . Die projektiven Automorphismen von  $\mathbb{P}^1 = \widehat{\mathbb{C}}$  sind die Möbius-Transformationen.

Wir nennen zwei Abbildungen  $\varphi, \psi : M \rightarrow \mathbb{P}^n$  einer Menge  $M$  *projektiv äquivalent*, wenn  $\psi = \Phi \circ \varphi$  für einen projektiven Automorphismus  $\Phi$  gilt. Wir interessieren uns für die *projektiven Eigenschaften* von  $\varphi$ ; das sind solche, die sich von  $\varphi$  auf alle projektive äquivalenten  $\psi$  vererben.

**8.3.4 Abbildungen Riemannscher Flächen in den  $\mathbb{P}^n$ .** Eine Abbildung  $\psi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  der Fläche  $X$  ist genau dann holomorph, wenn es um jeden Punkt in  $X$  eine Scheibe  $U$  und Funktionen  $\varphi_j \in \mathcal{O}(U)$  ohne gemeinsame Nullstellen gibt, so daß für alle  $x \in U$  gilt:

$$\varphi(x) = (\varphi_0(x) : \dots : \varphi_n(x)).$$

Wir nennen  $\varphi|U = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$  eine *gute (lokale) Darstellung*. Zu jeder anderen guten Darstellung  $\varphi|U^* = (\varphi_0^* : \dots : \varphi_n^*)$  gibt es eine nullstellenfreie Funktion  $\lambda \in \mathcal{O}(U \cap U^*)$  mit  $\varphi_j^* = \lambda \cdot \varphi_j$  für  $j = 0, 1, \dots, n$ .

Die Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  der zusammenhängenden Fläche  $X$  heißt *nicht-entartet*, wenn es keine Hyperebene  $\Theta$  mit  $\varphi(X) \subset \Theta$  gibt.

*Dann ist  $\varphi^{-1}(\Theta) \subset X$  für jede Hyperebene  $\Theta$  lokal endlich.*

Denn sei  $\Theta = N(L)$ . Jeder Punkt in  $X$  liegt in einer Scheibe  $U$  mit einer guten Darstellung  $\varphi|U = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$ . Dann hat  $L(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}(U)$  die Nullstellenmenge  $U \cap \varphi^{-1}(\Theta)$ . Somit ist  $\varphi^{-1}(\Theta) \subset X$  analytisch, und die Behauptung folgt mit Satz 1.3.4.  $\square$

Auf der zusammenhängenden Fläche  $X$  seien  $n+1$  meromorphe Funktionen  $f_0, \dots, f_n$  gegeben, die nicht alle konstant  $= 0$  sind. Wir nennen  $a \in X$  einen *Ausnahmepunkt*, wenn  $a$  gemeinsame Nullstelle aller  $f_j$  oder Pol von mindestens einem  $f_k$  ist. Die Ausnahmepunkte bilden eine lokal endliche Teilmenge  $A \subset X$ .

**Satz.** Die Abbildung  $X \setminus A \rightarrow \mathbb{P}^n$ ,  $x \mapsto (f_0(x) : \dots : f_n(x))$  läßt sich in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  fortsetzen, welche mit  $\varphi = (f_0 : \dots : f_n)$  bezeichnet wird.

*Beweis.* Zu jedem  $a \in A$  gibt es eine Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ , so daß  $U \cap A = \{a\}$  ist. Mit  $d := \min\{o(f_j, a)\}$  erhält man die gute Darstellung  $(z^{-d}f_0 : \dots : z^{-d}f_n)$  der Fortsetzung von  $\varphi$  auf  $U$ .  $\square$

Wir benötigen drei Ergänzungen.

- (1) Zwei holomorphe Abbildung  $(f_0 : \dots : f_n), (g_0 : \dots : g_n) : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  sind genau dann gleich, wenn es eine Funktion  $\lambda \in \mathcal{M}(X)$  gibt, so daß  $g_j = \lambda f_j$  für alle  $j$  gilt.  $\square$
- (2) Die Abbildung  $(f_0 : \dots : f_n) : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  ist genau dann nicht-entartet, wenn  $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(X)$  über  $\mathbb{C}$  linear unabhängig sind.  $\square$
- (3) Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  holomorph und  $\varphi(X) \not\subset \Theta_0 := N(z_0)$ . Es gibt es eindeutig bestimmte Funktionen  $f_j \in \mathcal{M}(X)$  mit  $\varphi = (1 : f_1 : \dots : f_n)$ .

*Beweis zu (3).* Seien  $\varphi|U = (\varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n)$ ,  $\varphi|U^* = (\varphi_0^* : \varphi_1^* : \dots : \varphi_n^*)$  gute Darstellungen. Für jedes  $j$  ist  $\varphi_j/\varphi_0 = \varphi_j^*/\varphi_0^* \in \mathcal{M}(U \cap U^*)$ . Folglich setzen sich die Quotienten  $\varphi_j/\varphi_0$  zu einer Funktion  $f_j \in \mathcal{M}(X)$  zusammen, so daß  $\varphi = (1 : f_1 : \dots : f_n)$  ist. Die Eindeutigkeit folgt aus (1).  $\square$

### Beispiele.

- (4) Die Abbildung  $\rho := \rho_n := (1 : z : z^2 : \dots : z^n) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^n$  heißt *rationale Raumkurve* vom Grade  $n$ .
- (5) Die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega$  und ihre Ableitung  $\wp'$  bestimmen die Abbildung  $\varphi = (1 : \wp : \wp') : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2$  des Torus.

Die Abbildungen (4) und (5) sind holomorph, nicht-entartet und injektiv, also wegen der Kompaktheit Homöomorphismen von  $\widehat{\mathbb{C}}$  auf  $\rho_n(\widehat{\mathbb{C}}) \subset \mathbb{P}^n$  bzw. von  $\mathbb{C}/\Omega$  auf  $\varphi(\mathbb{C}/\Omega) \subset \mathbb{P}^2$ .

**8.3.5 Kanonische Abbildungen.** Sei  $X$  eine kompakte, zusammenhängende Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Zu jeder Basis  $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{g-1}$  von  $\mathcal{E}_1(X)$  bildet man mit  $f_j = \omega_j/\omega_0 \in \mathcal{M}(X)$  die *kanonische Abbildung*

$$\kappa := (\omega_0 : \omega_1 : \dots : \omega_{g-1}) := (1 : f_1 : \dots : f_{g-1}) : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}.$$

Sie ist nicht-entartet. Wenn man eine andere Basis wählt, erhält man die zu  $\kappa$  projektiv äquivalente Abbildung  $\Phi \circ \kappa$ , wobei  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^{g-1})$  durch den Basiswechsel bestimmt ist. Umgekehrt sind mit  $\kappa$  alle projektiv äquivalenten Abbildungen  $\Phi \circ \kappa$  ebenfalls kanonisch. Für jeden Automorphismus  $\alpha$  von  $X$  ist die Abbildung  $\kappa \circ \alpha = (\alpha^* \omega_0 : \dots : \alpha^* \omega_{g-1})$  kanonisch und daher zu  $\kappa$  projektiv äquivalent; siehe auch 13.3.1(1).

**Beispiel.** Die Kleinsche Fläche ist durch das Polynom  $w^7 - z^2(z-1)$  definiert und besitzt die Basis  $zdz/w^6$ ,  $zdz/w^5$  und  $dz/w^3$  von  $\mathcal{E}_1(X)$ , siehe 8.2.3. Die entsprechende kanonische Abbildung ist injektiv,

$$(1) \quad \kappa = (zw^{-6} : zw^{-5} : w^{-3}) = (z : zw : w^3) : X \rightarrow \mathbb{P}^2.$$

**Satz.** Sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine zweiblättrige Überlagerung, die über  $\infty$  verzweigt. Mit der rationalen Raumkurve  $\rho : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  entsteht die kanonische Abbildung  $\rho \circ \eta : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ . Sie ist nicht injektiv.

*Beweis.* Man ergänzt zum Riemannschen Gebilde  $(X, \eta, f)$  mit dem Minimalpolynom  $w^2 - (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_{2g+1})$ , siehe 6.4.3. Nach 8.2.2 ist  $\{\eta^k d\eta/f : k = 0, \dots, g-1\}$  eine Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$ . Sie bestimmt die kanonische Abbildung  $(1 : \eta : \dots : \eta^{g-1}) = \rho \circ \eta$ .  $\square$

**Folgerung.** Die Kleinsche Fläche ist nicht hyperelliptisch.  $\square$

**8.3.6 Hyperelliptische Überlagerungen.** (1) Zu je zwei hyperelliptischen Überlagerungen  $\eta, \varphi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  gibt es genau ein  $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  mit  $\varphi = \gamma \circ \eta$ .

*Beweis.* Durch zwei Möbius-Transformationen  $\alpha$  und  $\beta$  erreicht man, daß  $\alpha \circ \eta$  und  $\beta \circ \varphi$  über  $\infty$  verzweigen. Nach Satz 8.3.5 sind  $\rho \circ \alpha \circ \eta$  und  $\rho \circ \beta \circ \varphi$  kanonische Abbildungen und daher projektiv äquivalent: Mit  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^{g-1})$  gilt  $\rho \circ \beta \circ \varphi = \Phi \circ \rho \circ \alpha \circ \eta$ . Weil  $\Phi, \rho, \alpha, \beta$  injektiv sind, haben  $\eta$  und  $\varphi$  dieselben Fasern. Die Behauptung folgt mit Satz 1.3.8.  $\square$

Nach (1) haben alle hyperelliptischen Überlagerungen  $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  dieselbe Deckgruppe  $\mathcal{D} < \text{Aut}(X)$  der Ordnung 2. Ihr nicht triviales Element  $\sigma$  heißt *hyperelliptische Involution*. Die Fixpunkte von  $\sigma$  sind die  $2g+2$  Windungspunkte jeder hyperelliptischen Überlagerung  $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .

(2) Die Involution  $\sigma$  liegt im Zentrum von  $\text{Aut}(X)$ . – Jedes Element in  $\text{Aut}(X) \setminus \mathcal{D}$  hat höchstens vier Fixpunkte.

*Beweis.* Sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  hyperelliptisch. Für jedes  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  gilt  $\text{id} \neq \alpha^{-1} \circ \sigma \circ \alpha \in \mathcal{D}(\eta \circ \alpha) = \mathcal{D}$ , also  $\alpha^{-1} \circ \sigma \circ \alpha = \sigma$ . – Nach (1) gibt es ein  $\gamma \in \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  mit  $\eta \circ \alpha = \gamma \circ \eta$ . Wenn  $\alpha$  mindestens 5 Fixpunkte besitzt, haben diese mindestens 3 verschiedene  $\eta$ -Bilder. Sie sind Fixpunkte von  $\gamma$ . Daher ist  $\gamma = \text{id}$  und somit  $\alpha \in \mathcal{D}(\eta) = \mathcal{D}$ .  $\square$

Aufgabe 6.6.10 enthält Beispiele zu (2).

## 8.4 Schnittdivisoren und Linearscharen

Wir betrachten nicht-entartete holomorphe Abbildungen  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$  kompakter, zusammenhängender Flächen und definieren zu jeder Hyperebene  $\Theta \subset \mathbb{P}^n$  einen positiven Schnittdivisor  $(\Theta)_\varphi$  auf  $X$ . Diese Divisoren bilden die Schnittschar  $\mathcal{S}(\varphi)$ . Wir ordnen Schnittscharen in die Theorie der Linearscharen ein.

**8.4.1 Schnitzzahlen und -divisoren.** Sei  $L(z_0, \dots, z_n) := a_0 z_0 + \dots + a_n z_n$  eine Linearform  $\neq 0$  und  $\varphi|U = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$  eine gute Darstellung auf einer Scheibe  $U$ . Bis auf einen nullstellenfreien Faktor hängt  $L(\varphi_0, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{O}(U)$  nur von der Hyperebene  $\Theta := N(L)$  und der Abbildung  $\varphi$  ab. Sie ist nicht konstant  $= 0$ , weil  $\varphi$  nicht-entartet ist. Daher ist die *Schnitzzahl*

$$(1) \quad (\Theta)_\varphi(x) := o(L(\varphi_0, \dots, \varphi_n), x) \in \mathbb{N}$$

von  $\varphi$  mit  $\Theta$  bei  $x$  wohldefiniert. Die Abbildung  $(\Theta)_\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}$  ist ein positiver Divisor mit dem Träger  $\varphi^{-1}(\Theta)$ . Sie heißt *Schnittdivisor* von  $\varphi$  mit  $\Theta$ . Für  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  gilt  $(\Theta)_{\varphi \circ \alpha} = (\Theta)_\varphi \circ \alpha$ .

Sei  $\varphi = (f_0 : \dots : f_n)$  mit  $f_j \in \mathcal{M}(X)$ . Für zwei Hyperebenen  $\Theta_k$  mit dem Gleichungen  $L_k = 0$ ,  $k = 0, 1$ , gilt

$$(2) \quad (\Theta_1)_\varphi = (\Theta_0)_\varphi + (f) \text{ mit } f := L_1(f_0, \dots, f_n)/L_0(f_0, \dots, f_n). \quad \square$$

Insbesondere sind alle Schnittdivisoren zu  $\varphi$  linear äquivalent und haben daher denselben Grad. Er wird mit  $\text{gr } \varphi$  bezeichnet und *Grad von  $\varphi$*  genannt.

$$(3) \quad \text{Aus } (\Theta_1)_\varphi = (\Theta_0)_\varphi \text{ folgt } \Theta_1 = \Theta_0.$$

Denn in (2) ist  $f$  eine Konstante  $c \neq 0$ , also  $(L_0 - cL_1)(f_0, \dots, f_n) = 0$ , somit  $L_0 = cL_1$ , weil  $\varphi$  nicht-entartet ist.  $\square$

*Beispiel.* Sei  $X$  die Kleinsche Fläche mit  $\eta, f \in \mathcal{M}(X)$  wie in 6.4.4 und der kanonischen Abbildung  $\kappa = (\eta : \eta f : f^3)$  gemäß 8.3.5(1). Die angegebene Darstellung von  $\kappa$  ist an allen Stellen  $\neq \hat{0}, \neq \hat{\infty}$  gut. Gute Darstellungen bei  $\hat{0}$  und  $\hat{\infty}$  lauten  $(\eta f^{-3} : \eta f^{-2} : 1)$  bzw.  $(f^{-1} : 1 : f^2 \eta^{-1})$ . Mit den in 6.4.4 angegebenen Ordnungen erhält man für  $\Theta := N(z_0)$  die Schnitzzahlen  $(\Theta)_\varphi(x) = 0$  für  $x \neq \hat{0}, \neq \hat{\infty}$  und  $(\Theta)_\varphi(\hat{0}) = 1, (\Theta)_\varphi(\hat{\infty}) = 3$ , also  $\text{gr } \kappa = 4$ .

**8.4.2 Die Schnittschar  $\mathcal{S}(\varphi)$**  ist die Menge aller Schnittdivisoren von  $\varphi$ . Beispielsweise ist die Menge  $\mathcal{S}_n$  aller positiven Divisoren vom Grade  $n$  auf  $\hat{\mathbb{C}}$  die Schnittschar  $\mathcal{S}(\rho_n)$  der rationalen Raumkurve  $\rho_n: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^n$ .

Sei  $\varphi = (f_0 : f_1 : \dots : f_n)$  mit  $f_j \in \mathcal{M}(X)$  und  $f_0 = 1$ . Da  $\varphi$  nicht-entartet ist, spannen  $f_0, \dots, f_n$  einen  $(n+1)$ -dimensionalen komplexen Untervektorraum  $V \subset \mathcal{M}(X)$  auf. Sei  $\Theta_0 = N(z_0)$ . Nach 8.4.1(2) gilt

$$(1) \quad (\Theta)_\varphi = (\Theta_0)_\varphi + \left(\sum a_j f_j\right) \text{ für } \Theta = N\left(\sum a_j z_j\right).$$

Somit ist

$$(2) \quad \mathcal{S}(\varphi) = \{(\Theta_0)_\varphi + (f) : f \in V \setminus \{0\}\}. \quad \square$$

**Satz.** Zwei nicht-entartete, holomorphe Abbildungen  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  sind genau dann projektiv äquivalent, wenn sie dieselbe Schnittschar besitzen.

*Beweis.* Für jeden Automorphismus  $\Phi$  von  $\mathbb{P}^n$  und jede Hyperebene  $\Theta \subset \mathbb{P}^n$  gilt  $(\Phi(\Theta))_{\Phi \circ \varphi} = (\Theta)_{\varphi}$ . Daher haben  $\varphi$  und  $\Phi \circ \varphi$  dieselbe Schnittschar.

Umgekehrt seien  $\varphi = (1 : f_1 : \dots : f_n)$  und  $\psi = (1 : g_1 : \dots : g_n)$  Abbildungen  $X \rightarrow \mathbb{P}^n$  mit gleicher Schnittschar. Für die von  $1 = f_0, f_1, \dots, f_n$  und  $1 = g_0, g_1, \dots, g_n$  aufgespannten  $\mathbb{C}$ -Untervektorräume  $V$  bzw.  $W$  von  $\mathcal{M}(X)$  gilt also  $\{(\Theta_0)_{\varphi} + (f) : f \in V \setminus \{0\}\} = \{(\Theta_0)_{\psi} + (g) : g \in W \setminus \{0\}\}$ . Es gibt ein  $h \in V$  mit  $(\Theta_0)_{\psi} = (\Theta_0)_{\varphi} + (h)$ . Dann ist  $W \rightarrow V, g \mapsto hg$ , ein Isomorphismus. Folglich ist  $hg_0, \dots, hg_n$  eine Basis von  $V$ , und es gibt eine Matrix  $A = (a_{jk}) \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ , so daß  $hg_j = \sum_k a_{jk} f_k$  ist. Daher sind  $\psi = (hg_0 : \dots : hg_n)$  und  $\varphi = (f_0 : \dots : f_n)$  projektiv äquivalent.  $\square$

**Folgerung.** Für jede Möbius-Transformation  $\alpha$  sind die rationale Raumkurve  $\rho_n$  und  $\rho_n \circ \alpha$  projektiv äquivalent.  $\square$

**8.4.3 Linearscharen.** Wie in 8.1.1 betrachten wir zum Divisor  $D$  die Menge  $|D|$  und den Vektorraum  $\mathcal{L}(D)$ . Die Abbildung

$$(1a) \quad \mathcal{L}(D) \setminus \{0\} \rightarrow |D|, f \mapsto D + (f),$$

induziert eine Bijektion

$$(1b) \quad \mathbb{P}\mathcal{L}(D) \rightarrow |D|,$$

welche die Struktur des  $(l(D) - 1)$ -dimensionalen projektiven Raumes  $\mathbb{P}\mathcal{L}(D)$  nach  $|D|$  überträgt. Die übertragene Struktur hängt nur von  $|D|$  und nicht vom Divisor  $D$  ab. Denn für jeden zu  $D$  äquivalenten Divisor  $E$  ist der Isomorphismus  $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(E), f \mapsto h \cdot f$ , aus 8.1.1(4) mit der Projektion (1a) verträglich.

Jeder projektive Unterraum von  $|D|$  heißt *Linearschar* auf  $X$ ; ganz  $|D|$  wird *vollständige Linearschar* genannt. Alle Divisoren derselben Linearschar sind linear äquivalent und haben also denselben Grad. Eine  $n$ -dimensionale Linearschar von Divisoren des Grades  $d$  wird traditionell mit  $g_d^n$  bezeichnet.

Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine endliche Überlagerung. Aus jeder Linearschar  $g_d^n$  auf  $Y$  entsteht die *geliftete Linearschar*  $\eta^* g_d^n := \{\eta^* D : D \in g_d^n\}$ . Sie hat dieselbe Dimension  $n$  und den Grad  $d \cdot \mathrm{gr} \eta$ , siehe 7.2.1.

(2) Die Menge  $\mathcal{S}_n$  aller positiven Divisoren vom Grade  $n$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  ist eine vollständige  $n$ -dimensionale Linearschar.  $\square$

(3) Alle positiven kanonischen Divisoren auf  $X$  bilden eine vollständige Linearschar  $\mathcal{K}$ . Das analytische Geschlecht  $g$  und die analytische Charakteristik  $\chi$  bestimmen ihre Dimension  $g - 1$  und ihren Grad  $-\chi$ .  $\square$

Man nennt  $\mathcal{K}$  die *kanonische Schar*.

Sei  $D$  ein Divisor vom Grade  $d$ . Die Linearscharen  $g_d^n \subset |D|$  entsprechen umkehrbar eindeutig den  $(n+1)$ -dimensionalen Untervektorräumen  $V \subset \mathcal{L}(D)$ , indem man  $V$  folgende Schar zuordnet:

$$(4) \quad g_d^n := \{D + (f) : f \in V \setminus \{0\}\}$$

(5) Für jede Linearschar  $g_d^n$  auf  $X$  gilt  $n \leq d$ . Im Falle  $n = d$  gibt es einen Isomorphismus  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X$ , so daß  $\mathcal{S}_n = \varphi^* g_n^n$  ist.

*Beweis zu (5).* Nach 8.1.2 ist  $n+1 = \dim V \leq l(D) \leq d+1$ , wobei Gleichheit nur eintritt, wenn es einen Isomorphismus  $\varphi: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X$  gibt. Die geliftete Schar ist ein  $n$ -dimensionaler projektiver Unterraum  $\varphi^* g_n^n \subset \mathcal{S}_n$ . Wegen  $\dim \mathcal{S}_n = n$  ist die Inklusion eine Gleichheit.  $\square$

Wenn man (4) mit der Beschreibung der Schnittscharen durch 8.4.2(1) vergleicht, folgt:

(6) Die Schnittschar  $\mathcal{S}(\varphi)$  jeder nicht-entarteten holomorphen Abbildung  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$  ist eine Linearschar  $g_d^n$  mit  $d = \text{gr } \varphi$ .  $\square$

Eventuell auftretende *Basispunkte* verhindern jedoch, daß umgekehrt jede Linearschar eine Schnittschar ist; siehe dazu den nächsten Abschnitt 8.4.4.

*Beispiele.* (a) Die Schnittschar der Neileschen Parabel  $(1: z^2: z^3): \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^2$  ist eine  $g_3^2 \subset \mathcal{S}_3$  und daher nicht vollständig.

(b) Sei  $\varphi: \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2$  die Toruseinbettung aus 8.3.4(5). Die Schnittzahl  $(\Theta_0)_\varphi(x)$  ist  $= 3$  für  $x = 0$  und sonst  $= 0$ . Somit ist  $\mathcal{S}(\varphi)$  eine  $g_3^2 \subset |D_0|$ . Da es nach (5) keine  $g_3^3$  auf  $\mathbb{C}/\Omega$  gibt, ist  $\mathcal{S}(\varphi) = |(\Theta_0)_\varphi|$  vollständig.

(c) In 13.2.1(3) wird bewiesen: Die Schnittschar  $\mathcal{S}(\kappa)$  jeder kanonischen Abbildung  $\kappa$  ist die kanonische Schar  $\mathcal{K}$ .

**Satz.** Sei  $X$  nicht zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph. Dann ist jede  $g_2^1$  auf  $X$  die Schnittschar einer zweiblättrigen Überlagerung  $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^1$ .

*Beweis.* Nach (4) gilt  $g_2^1 = \{D + (f) : f \in V \setminus \{0\}\}$  für einen Divisor  $D \in g_2^1$  und einen zweidimensionalen Untervektorraum  $V \subset \mathcal{L}(D)$ . Wir wählen eine Basis  $1, \eta$  von  $V$  und behaupten  $\mathcal{S}(\eta) = g_2^1$ . Nach 8.4.2(2) ist  $\mathcal{S}(\eta) = \{(\Theta_0)_\eta + (f) : f \in V \setminus \{0\}\}$ . Daher genügt es,  $(\Theta_0)_\eta = D$  zu zeigen: Aus  $D + (\eta) \geq 0$  folgt  $2 = \text{gr } D \geq \sum_{x \in \eta^{-1}(\infty)} D(x) \geq -\sum_{x \in \eta^{-1}(\infty)} o(\eta, x) = \text{gr } \eta \geq 2$ , letzteres wegen  $X \not\approx \widehat{\mathbb{C}}$ . Somit ist  $\text{gr } \eta = 2$  und  $D(x) = -o(\eta, x)$  für  $x \in \eta^{-1}(\infty)$ ,  $D(x) = 0$  sonst. Der Schnittdivisor  $(\Theta_0)_\eta$  hat dieselben Werte.  $\square$

Wenn man diesen Satz mit 8.3.6(1) und Satz 8.4.2 kombiniert, folgt: Auf hyperelliptischen Flächen existiert genau eine  $g_2^1$ . Auf nicht-hyperelliptischen Flächen existiert keine  $g_2^1$ .

Um für jedes Paar  $(n, d)$  sämtliche  $g_d^n$  auf  $X$  zu erfassen, macht man die Menge  $\{g_d^n\}$  zu einer algebraischen Varietät und studiert sie mit Methoden der algebraischen Geometrie. Solche Untersuchungen wurden in den 1970-er Jahren intensiv durchgeführt und in [ACGH] zusammenfassend dargestellt.

**8.4.4 Basispunkte.** Man nennt  $P \in X$  einen Basispunkt der Linearschar  $g_d^n$ , wenn  $D - P \geq 0$  für alle  $D \in g_d^n$  gilt.

(1) Ein Punkt  $P \in X$  ist genau dann Basispunkt der vollständigen Linearschar  $|D|$ , wenn  $l(D - P) = l(D)$  ist.  $\square$



**Satz.** Eine Linearschar auf  $X$  ist genau dann eine Schnittschar, wenn sie keine Basispunkte hat.

*Beweis.* Wenn  $P$  ein Basispunkt der Schnittschar  $\mathcal{S}(\varphi)$  wäre, müßte der Punkt  $\varphi(P)$  auf jeder Hyperebene liegen. Das ist absurd.

Umgekehrt sei  $g_d^n = \{D + (f) : f \in V \setminus \{0\}\}$  die Darstellung einer Linearschar ohne Basispunkte gemäß 8.4.3(4) mit  $D \in g_d^n$ . Es gibt eine Basis  $1 = f_0, f_1, \dots, f_n$  von  $V$ . Die Abbildung  $\varphi := (1 : f_1 : \dots : f_n) : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  hat die Schnittschar  $g_d^n = \mathcal{S}(\varphi)$ : Nach 8.4.2(2) ist  $\mathcal{S}(\varphi) = \{(\Theta_0)_\varphi + (f) : f \in V \setminus \{0\}\}$ . Es genügt es,  $D(x) = (\Theta_0)_\varphi(x)$  für alle  $x \in X$  zu zeigen. Sei  $\varphi = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$  eine gute Darstellung bei  $x$ . Dann ist  $(\Theta_0)_\varphi(x) = o(\varphi_0, x)$  und  $f_j = \varphi_j / \varphi_0$  für alle  $j$ . Es gibt ein  $l$  mit  $\varphi_l(x) \neq 0$ . Dafür gilt  $0 \leq D(x) + o(f_l, x) = D(x) - o(\varphi_0, x)$ . Weil  $x$  kein Basispunkt ist, gibt es andererseits ein  $k$  mit  $0 = D(x) + o(f_k, x) = D(x) + o(\varphi_k, x) - o(\varphi_0, x) \geq D(x) - o(\varphi_0, x)$ . Also ist  $D(x) = o(\varphi_0, x) = (\Theta_0)_\varphi(x)$ .  $\square$

## 8.5 Multiplizität. Schnittzahlen

Wir betrachten *nicht-entartete* holomorphe Abbildungen  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  von kompakten, zusammenhängenden Flächen. An jeder Stelle  $a \in X$  läßt sich die Menge aller Schnittzahlen von  $\varphi$  mit den Hyperebenen in  $\mathbb{P}^n$  zu einer Folge  $0 = m_0 < m_1 < \dots < m_n$  mit  $n+1$  Elementen ordnen. Ihr erstes Glied  $m_1$  heißt *Multiplizität*. Wir messen die Abweichung von der *trivialen Folge*  $0 < 1 < 2 < \dots$  durch das *Gewicht*  $\tau(a) = \sum (m_j - j)$ .

**8.5.1 Die Multiplizität**  $m(\varphi, a)$  ist das Minimum der Schnittzahlen  $(\Theta)_\varphi(a)$  für alle Hyperebenen  $\Theta \subset \mathbb{P}^n$ , die  $\varphi(a)$  enthalten. Zur Berechnung benutzen wir eine gute Darstellung  $\varphi|_U = (\varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n)$  auf einer Scheibe  $U$  um  $a$ , bei der eine Komponente  $\varphi_k = 1$  konstant ist. Weil  $\varphi$  nicht-entartet ist, sind alle anderen Komponenten nicht konstant. Dann ist

$$(1) \quad m(\varphi, a) = \min \{v(\varphi_j, a) : j \neq k\}.$$

*Beweis:* Sei  $d := \min \{v(\varphi_j, a)\}$ . Wir entwickeln  $\varphi_j = a_j + b_j z^d + \dots$  nach den Potenzen einer Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ . Für jede Hyperebene  $\Theta = N(\sum c_j z_j)$  durch  $\varphi(a)$  gilt  $\sum c_j a_j = 0$ . Für  $f = \sum c_j \varphi_j = (\sum c_j b_j) z^d + \dots$  ist  $(\Theta)_\varphi(a) = o(f, a) \geq d$ . Man kann  $\Theta$  so wählen, daß  $(\Theta)_\varphi(a) = d$  ist; denn wegen  $a_k = 1, b_k = 0$  haben die Gleichungen  $\sum c_j a_j = 0, \sum c_j b_j = 1$  eine Lösung  $(c_0, \dots, c_n) \neq 0$ .  $\square$

Wir nennen  $a$  eine *kritische Stelle* von  $\varphi$ , wenn  $m(\varphi, a) \geq 2$  ist. Unkritische Stellen heißen *regulär*. Wegen (1) ist die Menge der kritischen Stellen endlich. Wenn es keine kritischen Stellen gibt, heißt  $\varphi$  *Immersion*. Injektive Immersionen werden auch *holomorphe Einbettungen* genannt. Letztere bilden  $X$  homöomorph auf  $\varphi(X)$  ab, da  $X$  kompakt ist.

*Beispiele.* Alle rationalen Raumkurven  $\rho : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^n$ , die Torus-Abbildung  $(1 : \hat{\varphi} : \hat{\varphi}') : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2$  und die kanonische Abbildung  $\kappa : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  der Kleinschen Fläche sind Einbettungen vom Grade  $n$ , 3 bzw. 4.

Die Neilesche Parabel  $\varphi = (1 : z^2 : z^3) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^2$  ist injektiv, aber wegen  $m(\varphi, 0) = 2$  keine Immersion. Das Bild  $\varphi(0)$  der kritischen Stelle erscheint in der reellen Figur 6.2.1 a (rechts) als Spitze.

Die Parabola nodata  $\varphi = (1 : 1 - z^2 : z(1 - z^2)) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^2$  ist eine Immersion, aber wegen des Doppelpunktes  $\varphi(1) = \varphi(-1)$  nicht injektiv, vgl. die reelle Figur 6.2.1 b.

**Satz.** Sei  $l(D - B) = l(D) - 2$  für alle positiven Divisoren  $B$  vom Grade 2. Dann ist  $|D|$  die Schnittschar einer Einbettung.

*Beweis.* Für jeden Punktdivisor  $P$  gilt  $l(D - P) = l(D) - 1$ . Daher ist  $|D|$  die Schnittschar einer Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  mit  $n = \dim |D|$ , siehe 8.4.4. Angenommen,  $\varphi$  ist nicht injektiv, also  $\varphi(P) = \varphi(Q)$  für zwei Punkte  $P \neq Q$ . Dann gilt für jeden Divisor  $S \in |D|$  mit  $S(P) > 0$  auch  $S(Q) > 0$ , also  $|D - P| = |S - P| \subset |S - P - Q| = |D - P - Q|$ , somit  $l(D) - 1 = l(D - P) \leq l(D - P - Q) = l(D) - 2$  im Widerspruch zur Voraussetzung. Wenn  $\varphi$  eine kritische Stelle  $P$  besäße, hätte jeder Divisor  $S \in |D|$  mit  $P \in \text{Tr}(S)$  dort den Wert  $S(P) \geq 2$ , also  $|S - P| \subset |S - 2P|$ . Wie oben erhält man, diesmal mit  $P = Q$ , einen Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

**8.5.2 Die Folge der Schnittzahlen.** Die Menge  $M_\varphi(a) := \{(\Theta)_\varphi(a)\}$  der Schnittzahlen von  $\varphi$  bei  $a \in X$  mit den Hyperebenen  $\Theta \subset \mathbb{P}^n$  hat  $n + 1$  Elemente. Es gibt genau eine Hyperebene mit maximale Schnittzahl.

Sei  $\varphi|U = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$  eine gute Darstellung auf einer Scheibe um  $a$ . Der von  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  aufgespannten  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum  $T \subset \mathcal{O}(U)$  besitzt eine Basis  $\psi_0, \dots, \psi_n$ , so daß  $M_\varphi(a) = \{o(\psi_j, a) : j = 0, \dots, n\}$  ist.

Der Beweis beruht auf einem elementaren

**Lemma.** Sei  $T \subset \mathcal{O}(\mathbb{E})$  ein  $\mathbb{C}$ -Untervektorraum der Dimension  $n + 1$ . Dann ist  $\#\{o(f, 0) : f \in T \setminus \{0\}\} = n + 1$ . Bis auf einen konstanten Faktor gibt es genau ein  $h \in T \setminus \{0\}$  mit  $o(h, 0) = \max\{o(f, 0)\}$ .

*Beweis des Lemmas* durch Induktion über  $n$ . Sei  $m_0 := \min\{o(f, 0)\}$ . Die Menge  $T_1 := \{f \in T : o(f, 0) > m_0\}$  ist ein Untervektorraum der Dimension  $\leq n$ . Wenn man die Induktionsvoraussetzung darauf anwendet, folgt die Behauptung für  $T$ .  $\square$

*Beweis des Satzes.* Für jede Stelle  $x \in U$  gilt

$$(1) \quad M_\varphi(x) = \{o(f, x) : f \in T \setminus \{0\}\}.$$

Denn der Hyperebene  $\Theta = N(\sum a_j z_j) \subset \mathbb{P}^n$  entspricht die Funktion  $f = \sum a_j \varphi_j \in T$ , deren Ordnung  $o(f, x) = (\Theta)_\varphi(x)$  die Schnittzahl ist. – Aus (1) und dem Lemma folgt die Behauptung.  $\square$

Wir ordnen die Elemente von  $M_\varphi(a)$  der Größe nach zur *Schnittzahlenfolge*

$$(2) \quad 0 = m_0 < m(\varphi, a) = m_1 < \dots < m_n \leq \text{gr } \varphi$$

von  $\varphi$  bei  $a$ . Für jedes  $\Phi \in \text{Aut}(\mathbb{P}^n)$  haben  $\Phi \circ \varphi$  und  $\varphi$  dieselbe Folge.

Für jede endliche, zusammenhängende Überlagerung  $\eta : Z \rightarrow X$  gilt  $(\Theta)_{\varphi \circ \eta}(c) = (\Theta)_\varphi(\eta(c)) \cdot v(\eta, c)$  an jeder Stelle  $c \in Z$ . Daher hat  $\varphi \circ \eta$  bei  $c \in \eta^{-1}(a)$  die Schnittzahlenfolge

$$(3) \quad m_0 v(\eta, c) < m_1 v(\eta, c) < \dots < m_n v(\eta, c). \quad \square$$

**8.5.3 Gewichte. Wendepunkte und Weierstraß-Punkte.** Das *Gewicht*

$$(1) \quad \tau(\varphi, a) := \sum_{j=0}^n (m_j - j) = \sum_{j=0}^n m_j - \frac{1}{2}n(n+1)$$

mißt, wie stark die Schnittzahlenfolge  $m_0, \dots, m_n$  von  $\varphi$  bei  $a$  die triviale Folge  $0, \dots, n$  übertrifft. Es ist  $\geq 0$ , und zwar genau dann  $= 0$ , wenn die Schnittzahlenfolge trivial ist. Wenn  $\tau(\varphi, a) \geq 1$  ist, heißt  $a$  *Wendepunkt*.

(2) Die rationalen Raumkurven  $\rho_n : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^n$  haben keine Wendepunkte.

Denn wegen  $\text{gr } \rho_n = n$  ist jede Schnittzahlenfolge trivial.  $\square$

Da alle kanonischen Abbildungen  $\kappa : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  zueinander projektiv äquivalent sind, haben sie an jeder Stelle  $a \in X$  dieselbe nur von  $X$  und  $a$  abhängige Folge  $m_0, m_1, \dots, m_{g-1}$  der Schnittzahlen. Nach Weierstraß nennt man  $k_j := 1 + m_{j-1}$  die  $j$ -te *Lücke* von  $X$  bei  $a$ , vgl. 13.5.1(a)-(b). Die Wendepunkte von  $\kappa$  heißen *Weierstraß-Punkte* von  $X$ .

**Satz.** Die Weierstraß-Punkte einer hyperelliptischen Fläche von Geschlecht  $g$  sind genau die  $2g+2$  Windungspunkte ihrer hyperelliptischen Überlagerung. Jeder hat die ungeraden Zahlen  $1, 3, \dots, 2g-1$  als Lückenfolge und daher das Gewicht  $\frac{1}{2}g(g-1)$ .

*Beweis.* Nach Satz 8.3.5 ist  $\kappa = \rho \circ \eta$ . Wegen (2) und 8.5.2(3) ist die Schnittzahlenfolge bei  $a \in X$  genau dann nicht trivial, wenn  $a$  ein Windungspunkt der zweiblättrigen Überlagerung  $\eta$  ist. Für diese Punkte gilt  $m_j = 2j$ .  $\square$

**8.5.4 Wronskische Determinanten** ermöglichen die Berechnung der Gewichte, ohne Schnittzahlen zu benutzen. Wir stellen zunächst grundlegende Eigenschaften dieser Determinanten zusammen.

Sei  $V \subset \mathbb{C}$  offen. Mit  $n+1$  Funktionen  $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{M}(V)$  und ihren Ableitungen bilden wir die *Matrix*

$$[f_0, \dots, f_n] = \begin{pmatrix} f_0 & f'_0 & \cdots & f_0^{(n)} \\ f_1 & f'_1 & \cdots & f_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n & f'_n & \cdots & f_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

und ihre *Wronskische Determinante*  $W(f_0, \dots, f_n) := \det[f_0, \dots, f_n] \in \mathcal{M}(V)$ .

Für jedes  $f \in \mathcal{M}(V)$  gilt

$$(1) \quad W(f f_0, \dots, f f_n) = f^{n+1} W(f_0, \dots, f_n).$$

Zum Beweis von (1) berechnet man die Ableitungen  $(f f_j)^{(k)}$  mit der Leibnizschen Formel und benutzt dann elementare Spaltenoperationen. – Aus (1) folgt die für Induktionsbeweise nützliche Formel

$$(2) \quad W(f_0, \dots, f_n) = f_0^{n+1} W((f_1/f_0)', \dots, (f_n/f_0)').$$

Sei  $A = (a_{jk})$  eine konstante  $(n+1) \times (n+1)$ -Matrix und  $g_j = \sum_k a_{jk} f_k$ . Dann ist  $[g_0, \dots, g_n] = A \cdot [f_0, \dots, f_n]$ , also

$$(3) \quad W(g_0, \dots, g_n) = \det A \cdot W(f_0, \dots, f_n). \quad \square$$

Mit (1) und (2) beweist man durch Induktion über  $n$  die beiden folgenden Formeln: Für jede holomorphe Funktion  $h: V' \rightarrow V$  gilt

$$(4) \quad W(f_0 \circ h, \dots, f_n \circ h) = (h')^{\frac{1}{2}n(n+1)} \cdot W(f_0, \dots, f_n) \circ h. \quad \square$$

Sei  $a \in V$ . Für die Ordnungen  $m_j = o(f_j, a)$  gelte  $0 \leq m_0 < m_1 < \dots < m_n$ . Dann ist

$$(5) \quad o(W(f_0, \dots, f_n), a) = \sum_{j=0}^n (m_j - j). \quad \square$$

**8.5.5 Bestimmung des Gewichtes.** Sei  $(U, z)$  eine Karte von  $X$  und  $\varphi|U = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$  eine gute Darstellung von  $\varphi$ . Dann gilt

$$\tau(\varphi, x) = o(W(\varphi_0 \circ z^{-1}, \dots, \varphi_n \circ z^{-1}), z(x)) \quad \text{für } x \in U.$$

*Beweis.* Sei  $m_0 < m_1 < \dots < m_n$  die Folge der Schnittzahlen von  $\varphi$  bei  $x$ . Der von  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  aufgespannte Vektorraum  $T$  besitzt nach 8.5.2 eine Basis  $(\psi_0, \dots, \psi_n)$  mit  $o(\psi_j, x) = m_j$ . Nach 8.5.4(5) hat  $W(\psi_0 \circ z^{-1}, \dots, \psi_n \circ z^{-1})$  bei  $z(x)$  die Ordnung  $\tau(\varphi, x)$ . Wegen  $\psi_j = \sum a_{jk} \varphi_k$  mit  $(a_{jk}) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  hat  $W(\varphi_0 \circ z^{-1}, \dots, \varphi_n \circ z^{-1})$  dieselbe Ordnung, siehe 8.5.4(3).  $\square$

**Folgerung.** Das Gewicht  $\tau: X \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \tau(\varphi, x)$ , ist ein positiver Divisor. Sein Träger besteht aus den Wendepunkten von  $\varphi$ .  $\square$

Um  $\text{gr } \tau$  zu bestimmen, benutzen wir

**8.5.6 Verteilungen.** Sei  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, z_\alpha)\}$  ein Atlas von  $X$ . Jedem Index  $\alpha$  sei eine Funktion  $f_\alpha \in \mathcal{M}(U_\alpha)$  mit endlich vielen Null- und Polstellen zugeordnet, so daß für jedes Indexpaar  $(\alpha, \beta)$  die Übergangsfunktion  $h_{\alpha\beta} := f_\alpha/f_\beta \in \mathcal{M}(U_\alpha \cap U_\beta)$  keine Null- und Polstellen hat. Dann heißt  $F = \{f_\alpha\}$  eine meromorphe Verteilung zu  $\mathcal{A}$ . Zu ihr gehört der Divisor

$$(1) \quad (F)(x) := o(f_\alpha, x) \quad \text{für } x \in U_\alpha.$$

Wenn alle Übergangsfunktionen  $h_{\alpha\beta} = 1$  sind, ist die Verteilung  $\{f_\alpha\}$  eine meromorphe Funktion, d.h. es gibt genau ein  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $f_\alpha = f|U_\alpha$ .

Differentialformen  $\omega = \{\omega_\alpha\}$  sind Verteilungen mit den Übergangsfunktionen  $h_{\alpha\beta} = dz_\beta/dz_\alpha$ .

Mit der Multiplikation  $\{f_\alpha\} \cdot \{g_\alpha\} := \{f_\alpha \cdot g_\alpha\}$  bilden alle Verteilungen zum gleichen Atlas  $\mathcal{A}$  eine kommutative Gruppe. Die Bildung des Divisors

$\{\text{Verteilungen zu } \mathcal{A}\} \rightarrow \text{Div}(X), F \mapsto (F)$ , ist ein Homomorphismus. Für zwei Verteilungen  $F$  und  $G$  mit denselben Übergangsfunktionen ist  $F \cdot G^{-1}$  eine meromorphe Funktion. Daher sind ihre Divisoren  $(F)$  und  $(G)$  linear äquivalent und haben insbesondere denselben Grad.

Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  eine nicht entartete holomorphe Abbildung. Jedem  $\alpha$  sei eine gute Darstellung  $\varphi|U_\alpha = (\varphi_{\alpha 0} : \dots : \varphi_{\alpha n})$  zugeordnet. Für jedes  $j$  ist  $\Phi_j := \{\varphi_{\alpha j}\}$  eine holomorphe Verteilung, deren Übergangsfunktionen  $\lambda_{\alpha\beta}$  nicht von  $j$  abhängen. Der Divisor  $(\Phi_j) = (\Theta_j)_\varphi$  ist der Schnittdivisor von  $\varphi$  mit der Hyperebene  $\Theta_j := N(z_j)$ .

Die Wronskischen Determinanten

$$(2) \quad W_\alpha := W(\dots, \varphi_{\alpha j} \circ z_\alpha^{-1}, \dots) \circ z_\alpha.$$

bilden eine Verteilung  $W := \{W_\alpha\}$ . Ihr Divisor  $(W) = \tau$  ist nach 8.5.5 der Gewichtsdivisor von  $\varphi$ . Die Übergangsfunktionen lauten:

$$(3) \quad W_\alpha / W_\beta = \lambda_{\alpha\beta}^{n+1} (dz_\beta / dz_\alpha)^{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

*Beweis.* In (2) setzen wir  $\varphi_{\alpha j} = \lambda_{\alpha j} \cdot \varphi_{\beta j}$  und benutzen 8.5.4(2):

$$W_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}^{n+1} \cdot W(\dots, \varphi_{\beta j} \circ z_\alpha^{-1}, \dots) \circ z_\alpha.$$

Mit  $z_\alpha = (z_\alpha \circ z_\beta^{-1}) \circ z_\beta$  und 8.5.4(4) folgt

$$W_\alpha = \lambda_{\alpha\beta}^{n+1} \cdot ((z_\beta \circ z_\alpha^{-1})' \circ z_\beta)^{\frac{1}{2}n(n+1)} \cdot W(\dots, \varphi_{\beta j} \circ z_\beta^{-1}, \dots) \circ z_\beta.$$

Wegen  $(z_\beta \circ z_\alpha^{-1})' \circ z_\beta = dz_\beta / dz_\alpha$  ist damit (3) erreicht.  $\square$

**Satz.** Sei  $D$  ein Schnittdivisor von  $\varphi$ , und sei  $K$  ein kanonischer Divisor. Der Gewichtsdivisor  $\tau$  von  $\varphi$  ist zu  $(n+1)D + \frac{1}{2}n(n+1)K$  linear äquivalent. Insbesondere gilt

$$(4) \quad \text{gr } \tau = (n+1)\text{gr } \varphi - \frac{1}{2}n(n+1)\chi(X).$$

*Beweis.* Sei  $\omega \in \mathcal{E}(X)$ . Die Verteilungen  $W$  und  $F := \Phi_0^{n+1} \cdot \omega^{\frac{1}{2}n(n+1)}$  haben wegen (3) dieselben Übergangsfunktionen. Daher sind  $\tau$  und  $(F) = (n+1)(\Theta_0)_\varphi + \frac{1}{2}n(n+1)(\omega)$  linear äquivalent. Mit den linearen Äquivalenzen  $D \sim (\Theta_0)_\varphi$  und  $K \sim (\omega)$  folgt die Behauptung.  $\square$

## 8.6 Anzahl der Wendepunkte

Wie im letzten Abschnitt sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  eine nicht-entartete holomorphe Abbildung einer Fläche  $X$  vom analytischen Geschlecht  $g$ . Wir deuten den Grad  $\text{gr } \tau$  ihres Gewichtsdivisors als gewichtete Anzahl der Wendepunkte von  $\varphi$  und gewinnen aus 8.5.6(4) Resultate über die Anzahl solcher Punkte.

Nach 8.2.1 ist  $\chi(X) \leq 0$ , falls  $g \geq 1$  ist. Damit folgt sofort die

**8.6.1 Existenz von Wendepunkten.** Wenn  $g \geq 1$  ist, besitzt jede Abbildung  $\varphi$  Wendepunkte. Insbesondere existieren auf jeder Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  Weierstraß-Punkte.  $\square$

Um genauere Ergebnisse zu erzielen, benutzen wir zusätzlich folgende Resultate aus späteren Kapiteln, siehe 10.7.4, 12.4.1, 13.1.5 und 13.2.1:

$$(*) \quad g = 0 \Rightarrow X \approx \widehat{\mathbb{C}}. \quad \text{gr } \kappa = -\chi(X) = 2g - 2.$$

**8.6.2 Abbildungen ohne Wendepunkte.** Die rationalen Raumkurven haben keine Wendepunkte, siehe 8.5.3(2). Umbekehrt gilt:

*Wenn  $\varphi$  keine Wendepunkte hat, gibt es einen Isomorphismus  $\alpha: \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X$ , so daß  $\varphi \circ \alpha$  eine rationale Raumkurve ist.*

*Beweis.* Nach 8.5.6(4) und 8.6.1(\*) ist  $\text{gr } \varphi = n \cdot (1 - g)$ , also  $\text{gr } \varphi = n$  und  $g = 0$ . Mit 8.4.3(5) folgt die Behauptung.  $\square$

**8.6.3 Die gewichtete Anzahl der Weierstraß-Punkte** auf jeder Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  beträgt  $(g - 1) \cdot g \cdot (g + 1)$ .

Das folgt aus 8.5.6(4), angewendet auf die kanonische Abbildung  $\varphi = \kappa$ , indem man gemäß 8.6.1(\*) einsetzt.  $\square$

**8.6.4 Automorphismen und Weierstraß-Punkte.** Jede kanonische Abbildung  $\kappa: X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  geht durch Vorschalten von  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  in die projektiv äquivalente kanonische Abbildung  $\kappa \circ \alpha$  über. Daher haben alle Punkte einer jeden  $\text{Aut}(X)$ -Bahn dieselbe Lückenfolge. Sobald die Bahn einen Weierstraß-Punkt enthält, besteht sie aus *lauter* Weierstraß-Punkten.

**Satz.** *Wenn  $X$  eine Automorphismengruppe der Ordnung  $84(g - 1)$  besitzt, hat  $X$  mindestens  $12(g - 1)$  Weierstraß-Punkte und ist nicht hyperelliptisch.*

*Beweis.* Es gibt mindestens  $12(g - 1)$  Weierstraß-Punkte, da jeder Orbit nach 7.2.5 mindestens  $12(g - 1)$  Punkte hat. Wenn  $X$  hyperelliptisch wäre, gäbe es nach Satz 8.5.3 nur  $2g + 2$ , also zu wenig Weierstraß-Punkte.  $\square$

**Folgerung.** *Die Modulfläche  $X_7$  hat 24 Weierstraß-Punkte und ist nicht hyperelliptisch.*

Denn nach der Tabelle in 7.1.5 erfüllt  $X_7$  die Voraussetzung des Satzes.  $\square$

**8.6.5 Historisches.** Die Definition der Lückenfolgen und Gewichtes sowie eine Gewichtsformel gehen auf Vorlesungen von *Weierstraß* zurück, deren Inhalt er in einem Brief vom 3. Okt. 1875 an H. A. Schwarz mitteilte. Wir kommen auf den Anlaß des Briefes (Endlichkeit der Automorphismengruppen) in 11.5.5 zurück.

*Hurwitz* veröffentlichte 1893 eine Abhandlung [Hur] 1, S. 391–430, welche die Weierstraßsche Theorie mit der kanonischen Abbildung verband. Seine Überlegungen lassen sich für beliebige Abbildungen in projektive Räume verallgemeinern.

Der Abschnitt 13.5 enthält Weierstraß' ursprüngliche Definition der Lücken sowie weitere Ergebnisse über Weierstraß-Punkte und ihre Gewichte.

## 8.7 Aufgaben

Mit  $X, Y$  werden *komplekte, zusammenhängende* Riemannsche Flächen bezeichnet. Alle Abbildungen sind holomorph.

- 1) Sei  $D$  ein positiver Divisor auf  $X$ . Zeige: Zu jedem  $a \in X$  mit  $D(a) = 0$  gibt es eine Basis  $f_0, \dots, f_n$  von  $\mathcal{L}(D)$  mit  $o(f_j, a) \geq j$ .
- 2) Zeige: Wenn es eine nicht-konstante Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  gibt, gilt für die analytischen Geschlechter  $g(X) \geq g(Y)$ .
- 3) Berechne die analytischen Geschlechter der Flächen, die in Aufgabe 7.9.2 angegeben wurden.
- 4) (a) Beweise die Formel von Riemann-Roch für die Zahlenkugel.  
(b) Zeige: Für jeden positiven Divisor  $D$  auf einem Torus gilt  $l(D) = \text{gr } D$ .  
(c) Beweise (RR) für alle Tori.
- 5) Zeige: Bei jeder hyperelliptischen Überlagerung  $\eta$  mit 6 Verzweigungspunkten sind die  $\eta$ -Fasern die Träger der positiven kanonischen Divisoren.
- 6) Beweise: Die Automorphismengruppen hyperelliptischer Flächen sind endlich.  
*Hinweis:* Jeder Automorphismus permutiert die Fixpunkte der hyperelliptischen Involution.
- 7) Sei  $P$  ein Punktdivisor auf  $X$ . Zeige:  $P$  ist ein Basispunkt von  $|P|$ , oder  $X$  ist zur Zahlenkugel isomorph.
- 8) Zeige: Ein positiver Divisor  $D$  auf  $X$  ist genau dann der Polstellen-Divisor einer meromorphen Funktion, wenn die vollständige Linearschar  $|D|$  keine Basispunkte hat.
- 9) Sei  $g_d^n$  eine Linearschar auf  $X$ . Zeige: Durch
 
$$B(x) = \min\{D(x) : D \in g_d^n\}$$
 wird ein positiver Divisor auf  $X$  definiert. Er heißt Basispunkt-Divisor. Sei  $b = \text{gr } B$ . Die Menge
 
$$h_{d-b}^n = \{D - B : D \in g_d^n\}$$
 ist eine Linearschar ohne Basispunkte.  
Die Abbildung
 
$$g_d^n \rightarrow h_{d-b}^n, D \mapsto D - B,$$
 ist ein Isomorphismus zwischen projektiven Räumen.
- 10) Zeige: Für jeden Torus  $T$  und jedes  $n \geq 2$  gibt es nicht-entartete Abbildungen  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{P}^n$  vom Grade  $n + 1$ .  
Jede Abbildung dieser Art ist eine Einbettung.  
Sind solche Abbildungen paarweise projektiv äquivalent?

- 11) Die durch  $w^2 = (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_5)$  bestimmte hyperelliptische Fläche  $X$  wird durch  $\psi = (1 : z : w) : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  holomorph abgebildet.

Zeige:  $\psi$  ist nicht-entartet und keine Einbettung. Die Schnittschar  $\mathcal{S}(\psi)$  ist nicht vollständig.

Welchen Grad hat  $\psi$ ?

Finde ein  $f \in \mathcal{M}(X)$ , so daß  $\varphi := (1 : z : w : f) : X \rightarrow \mathbb{P}^3$  eine nicht-entartete Abbildung mit vollständiger Schnittschar  $\mathcal{S}(\varphi)$  ist.

Ist  $\varphi$  eine Einbettung?

- 12) Sei  $m_0 < m_1 < \dots < m_n$  die Folge der Schnittzahlen einer nicht entarteten holomorphen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  bei  $a \in X$ . Zeige:

Der Durchschnitt  $A_j$  aller Hyperebenen  $\Theta \subset \mathbb{P}^n$  mit  $(\Theta)_\varphi(a) \geq m_j$  ist ein  $(j-1)$ -dimensionaler projektiver Unterraum.

Es gilt  $\emptyset = A_0 \subset \{a\} = A_1 \subset \dots \subset A_n$ .

Durch Nachschalten eines Automorphismus von  $\mathbb{P}^n$  kann man

$$A_j = \{(z_0 : \dots : z_n) : z_j = \dots = z_n = 0\}$$

erreichen. Für jede gute Darstellung  $\varphi = (\varphi_0 : \dots : \varphi_n)$  bei  $a$  gilt dann  $o(\varphi_j, a) = m_j$ .

- 13) Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  nicht konstant und  $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{P}^n$  nicht-entartet. Sei  $a \in X$ , seien  $\tau$  bzw.  $\tau'$  die Gewichte von  $\varphi$  bei  $\eta(a)$  bzw. von  $\varphi \circ \eta$  bei  $a$ . Sei  $v = v(\eta, a)$  die Windungszahl. Beweise die Formel

$$\tau' = v \cdot \tau + (v-1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1).$$

- 14) Bestimme die Wendepunkte und ihre Gewichte für die Neilsche Parabel  $(1 : z^2 : z^3)$  und für die Parabola nodata  $(1 : 1 - z^2 : z(1 - z^2)) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Bestimme auch die Wronkschen Determinanten auf  $\mathbb{C}$ .

- 15) Wieviele Wendepunkte hat eine Toruseinbettung  $T \rightarrow \mathbb{P}^2$  vom Grade 3?

Was sind ihre Gewichte?

Beantworte dieselben Fragen für die kanonische Einbettung der Kleinschen Fläche.



## 9. Ebene Kurven

Die Kurventheorie begann mit der Untersuchung der Kegelschnitte durch Menächmus (4. Jh. v. Chr.) und Apollonius von Perga (ca. 225 v. Chr.). Nach Erfindung der analytischen Geometrie durch Descartes (1637) stellten sich die Kegelschnitte als *Quadriken* heraus: Sie werden durch polynomiale Gleichungen  $P(x, y) = 0$  zweiten Grades definiert. Bei analytischer Betrachtungsweise bilden die *Kubiken* (Kurven dritten Grades) die nächste Klasse. Hier treten zusätzliche Phänomene auf: Es gibt *Wendepunkte* und *Singularitäten* wie den Doppelpunkt der Newtonschen parabola nodata oder die Spitze der Neileschen Parabel. Newton klassifizierte alle möglichen Kubiken, [New2] 2, p.137 ff., teilweise reproduziert in [BK], S. 113 ff.

Um 1720 wurde vermutet, daß sich eine Kurve  $m$ -ter und eine Kurve  $n$ -ter Ordnung im allgemeinen in  $m \cdot n$  Punkten schneiden. Das ließ sich erst vollständig beweisen, nachdem zwei neue Ideen die Theorie bereichert hatten: die Ergänzung der affinen Ebene zur *projektiven Ebene* durch Poncelet (1822) und die Zulassung von Punkten mit komplexen Koordinaten durch Plücker (1834).

In der komplex projektiven Geometrie werden Kurven zu kompakten Gebilden der reellen Dimension 2. Die bereits seit dem 17. Jahrhundert benutzten Parametrisierungen  $(x(t), y(t))$  ebener Kurven durch reelle Parameter  $t$  müssen durch Parametrisierungen ersetzt werden, deren Definitionsbereiche statt reeller Intervalle kompakte Flächen sind. Solche Parametrisierungen kommen bereits in Riemanns Abhandlung über Abelsche Funktionen (1857) implizit vor. Man nennt sie heute Normalisierungen; sie stehen im Mittelpunkt des vorliegenden Kapitels.

Eine wichtige Rolle spielen numerische Invarianten für die Singularitäten, welche sich mit dem Grad der Kurve zu einer Formel (Clebsch, 1864) für das Geschlecht der normalisierenden Fläche zusammensetzen. Wir berechnen diese Invarianten nur in einfachen Fällen. In [BK] und [Wll] werden die Singularitäten und ihre Invarianten ausführlich behandelt.

## 9.1. Projektive und affine Kurven

Projektive Kurven in  $\mathbb{P}^2$  sind Nullstellenmengen homogener Polynome in drei Variablen. Wir zerlegen sie in irreduzible Komponenten. Ferner erläutern wir, wie man affine Kurven in  $\mathbb{C}^2$ , das sind Nullstellenmengen von Polynomen aus  $\mathbb{C}[z, w]$ , durch Hinzunahme von endlich vielen Punkten zu projektiven Kurven in  $\mathbb{P}^2$  ergänzt.– Seien  $F$  und  $G$  homogene Polynome in  $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ .

**9.1.1 Projektive Kurven.** Sei  $F(z_0, z_1, z_2)$  homogen vom Grade  $n \geq 1$ . Die Nullstellenmenge

$$C := N(F) := \{(z_0 : z_1 : z_2) \in \mathbb{P}^2 : F(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

heißt *projektive*, genauer *ebene, projektiv algebraische Kurve*. Sie ist nicht leer und kompakt. Es gilt  $N(F \cdot G) = N(F) \cup N(G)$ .

Jede Matrix  $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$  transformiert  $F$  in das homogene Polynom  $F \circ A^{-1}$  desselben Grades. Dabei gilt  $N(F \circ A^{-1}) = \hat{A}(C)$  für den zugehörigen Automorphismus  $\hat{A}$  von  $\mathbb{P}^n$ . Wir interessieren uns für die *projektiven Eigenschaften*, die sich von  $C$  auf alle äquivalente Kurven  $\hat{A}(C)$  übertragen.

Der kleinste Grad, den ein homogenes Polynom  $F$  mit  $N(F) = C$  haben kann, heißt *Grad der Kurve  $C$* , kurz  $\mathrm{gr} C$ . Er ist eine projektive Invariante. Kurven vom Grade 1 sind projektive Geraden. Kurven vom Grade 2, 3, bzw. 4 heißen *Quadriken, Kubiken bzw. Quartiken*.

(1) Für jede projektive Gerade  $\Theta$  gilt  $\Theta \subset C$  oder  $1 \leq \sharp(\Theta \cap C) \leq \mathrm{gr} C$ .

*Beweis.* Nach einem Automorphismus von  $\mathbb{P}^2$  ist  $\Theta = \Theta_0 := N(z_0)$ . Sei  $F$  ein homogenes Polynom minimalen Grades  $n$  mit  $C = N(F)$ . Für  $\Theta_0 \not\subset C$  hat  $F(0, z_1, z_2)$  mindestens eine und höchstens  $n$  Nullstellen  $(0 : a_1 : a_2) \in \mathbb{P}^2$ . Sie bilden die Schnittmenge  $\Theta_0 \cap C$ .  $\square$

(2) Projektiv algebraische Kurven  $C$  haben keine isolierten Punkte.

*Beweis.* Sei  $c \in C$ . Man kann  $c = (1 : a : b)$  annehmen. Nach der Folgerung in 1.2.3 gibt es beliebig nahe bei  $(a, b)$  weitere Nullstellen von  $F(1, z, w)$ .  $\square$

**9.1.2 Reduzierte Polynome.** Das Produkt  $F \cdot G$  zweier Polynome ist genau dann homogen, wenn  $F$  und  $G$  homogen sind. Daher sind alle Primfaktoren eines homogenen Polynoms ebenfalls homogen, und die Reduktion (siehe 6.1.4) eines homogenen Polynoms bleibt homogen.

**Lemma.** Ein reduziertes homogenes Polynom  $F$  teilt das homogene Polynom  $G$  in  $\mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ , wenn  $N(F) \subset N(G)$  ist.

*Beweis.* Es genügt, das Lemma für irreduzibles  $F$  zu beweisen. Wir können  $F(0, 0, 1) \neq 0$  annehmen. Im Ring  $\mathbb{C}(z_0, z_1)[z_2]$  ist  $F$  ein Teiler von  $G$  oder nicht. Im ersten Fall gilt  $M \cdot F = L \cdot G$  mit  $M \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$  und  $L \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$ . Wegen  $F(0, 0, 1) \neq 0$  ist  $F$  kein Teiler von  $L$ , also ein Teiler

von  $G$ . – Im zweiten Fall haben  $F$  und  $G$  im Hauptidealring  $\mathbb{C}(z_0, z_1)[z_2]$  den größten gemeinsamen Teiler  $1 = (L/R) \cdot F + (M/R) \cdot G$  mit  $R \in \mathbb{C}[z_0, z_1]$  und  $L, M \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ . Also gilt  $R = L \cdot F + M \cdot G$ . Wir wählen  $a_0, a_1$  so daß  $R(a_0, a_1) \neq 0$ . Es gibt ein  $a_2$ , so daß  $F(a_0, a_1, a_2) = 0$ . Dann führt  $G(a_0, a_1, a_2) = 0$  zum Widerspruch.  $\square$

**9.1.3 Das Minimalpolynom.** Zu jeder projektiven Kurve  $C$  gibt es bis auf einen Faktor  $c \in \mathbb{C}^\times$  genau ein homogenes, reduziertes Polynom  $F$  mit  $N(F) = C$ . Ein homogenes Polynom  $F$  mit  $N(F) = C$  hat genau dann den Grad  $\text{gr } F = \text{gr } C$ , wenn  $F$  reduziert ist.

*Beweis.* Sei  $N(F) = C$  und  $\text{gr } F = \text{gr } C$ . Für die Reduktion  $F_0$  von  $F$  ist  $\text{gr } F_0 \leq \text{gr } F$  und  $N(F_0) = N(F) = C$ , also  $\text{gr } F_0 = \text{gr } F$  und folglich  $F = cF_0$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$ . Für zwei reduzierte Polynome  $F_0$  und  $F_1$  mit  $N(F_0) = N(F_1) = C$  folgt  $F_1 = cF_0$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$  aus Lemma 9.1.2.  $\square$

Wenn  $F$  reduziert und  $N(F) = C$  ist, nennt man  $F$  das *Minimalpolynom* von  $C$ .

**9.1.4 Irreduzible Komponenten.** Eine projektive Kurve  $C$  heißt *irreduzibel*, wenn ihr Minimalpolynom irreduzibel ist.

**Satz.** Sei  $F = F_1 \cdot \dots \cdot F_r$  die Primfaktorzerlegung eines homogenen, reduzierten Polynoms. Für  $C := N(F)$  und  $C_j := N(F_j)$  gilt

$$(1) \quad C = C_1 \cup \dots \cup C_r.$$

Die irreduziblen Kurven  $C_j$  sind paarweise verschieden. Jede irreduzible Kurve  $D \subset C$  ist eine der Kurven  $C_j$ .

*Beweis.* (1) ist trivial. Angenommen,  $C_j = C_k$ . Aus Lemma 9.1.2 folgt  $F_j = cF_k$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$ , also  $j = k$  wegen der Primfaktorzerlegung. Sei  $D := N(G)$ , wobei  $G$  irreduzibel ist. Nach Lemma 9.1.2 ist  $G$  ein Teiler von  $F$ . Für ein  $j$  gilt  $G = cF_j$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$ , also  $D = C_j$ .  $\square$

Man nennt die Kurven  $C_j$  die *irreduziblen Komponenten* von  $C$ . Sie sind nicht disjunkt, siehe 9.3.

**9.1.5 Affine Kurven.** Unter einer *affinen Kurve*

$$K := N(P) := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : P(z, w) = 0\}$$

versteht man die Nullstellenmenge eines Polynoms  $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$  vom Grade  $n \geq 1$ . Zur Veranschaulichung benutzt man den reellen Teil  $K \cap \mathbb{R}^2$ , siehe z.B. die Figuren 6.2.1 a-b.

Wir betten  $\mathbb{C}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ ,  $(z, w) \mapsto (1 : z : w)$ , als *affine Ebene* in die projektive Ebene ein. Das Komplement  $\mathbb{P}^2 \setminus \mathbb{C}^2 = \Theta_0 := N(z_0)$  heißt *unendlich ferne Gerade*. Für jede projektive Kurve  $C \neq \Theta_0$  ist ihr *affiner Teil*  $K := C \cap \mathbb{C}^2$  eine affine Kurve. Aus  $C = N(F)$  folgt  $K = N(P)$  für  $P(z, w) := F(1, z, w)$ . Die Menge  $C \setminus K = C \cap \Theta_0$  ist endlich oder  $= \Theta_0$ . Jedes Polynom  $P(z, w) \in \mathbb{C}[z, w]$  vom Grade  $n$  wird durch

$$\hat{P}(z_0, z_1, z_2) := z_0^n P(z_1/z_0, z_2/z_0).$$

zu einem homogenen Polynom  $\hat{P}$  vom Grade  $n$  *homogenisiert*. Es gilt  $\hat{P}(1, z, w) = P(z, w)$ , und  $z_0$  ist kein Faktor von  $\hat{P}$ .

*Beispiel:* Aus  $P(z, w) = w^2 - 4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$  entsteht  $\hat{P}(z_0, z_1, z_2) = z_0 z_2^2 - 4(z_1 - e_1 z_0)(z_1 - e_2 z_0)(z_1 - e_3 z_0)$ .

**Satz.** (a) Für jede affine Kurve  $K = N(P)$  ist der topologische Abschluß  $\bar{K}$  in  $\mathbb{P}^2$  die projektive Kurve  $N(\hat{P})$ . Der Durchschnitt  $\bar{K} \cap \Theta_0$  ist endlich, und  $K$  ist der affine Teil von  $\bar{K}$ .

(b) Jede projektive Kurve  $C$  mit endlichem Durchschnitt  $C \cap \Theta_0$  ist der topologische Abschluß  $C = \bar{K}$  ihres affinen Teils  $K$ .

*Beweis.* (a) Sei  $C := N(\hat{P})$ . Dann ist  $C \cap \Theta_0$  endlich, weil  $z_0$  kein Faktor von  $\hat{P}$  ist. Wegen  $P(z, w) = \hat{P}(1, z, w)$  ist  $K$  der affine Teil von  $C$ . Aus  $K \subset C$  folgt  $\bar{K} \subset C$ , weil  $C$  abgeschlossen ist. Da  $C \setminus K$  endlich ist und  $C$  keine isolierten Punkte hat, gilt sogar  $\bar{K} = C$ .

(b) Sei  $C := N(F)$ . Dann ist  $K := N(P)$  mit  $P(z, w) := F(1, z, w)$  der affine Teil von  $C$ . Durch Homogenisieren erhält man  $F = \hat{P}$  zurück, da  $C \cap \Theta_0$  endlich und somit  $z_0$  kein Faktor von  $F$  ist. Aus (a) folgt  $\bar{K} = C$ .

**Folgerung.** Wenn die projektive Kurve  $C$  nicht durch  $(0 : 0 : 1)$  läuft, besitzt sie ein Minimalpolynom  $F$ , so daß  $P(z, w) := F(1, z, w)$  reduziert ist und bis auf einen konstanten Faktor folgende normierte Gestalt hat:

(1)  $P(z, w) = w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z)$  mit  $a_\nu(z) \in \mathbb{C}[z]$  und  $\text{gr } a_\nu \leq \nu$ .

*Beweis.* Wegen  $(0 : 0 : 1) \notin C$  kommt  $z_2^n$  in  $F$  vor. Nach Multiplikation mit einem Faktor aus  $\mathbb{C}^\times$  folgt (1).– Wir reduzieren  $P$  zu  $P_0$ ; dann ist  $K := N(P_0)$  der affine Teil von  $C := N(F)$ . Nach dem Satz ist  $C = N(\hat{P}_0)$ . Daher ist  $\text{gr } P_0 = \text{gr } \hat{P}_0 \geq \text{gr } F = \text{gr } \hat{P}_0$ . Somit ist  $P = P_0$  reduziert.  $\square$

*Bemerkung.* Durch Übergang zu einer projektiv äquivalenten Kurve kann man stets  $(0 : 0 : 1) \notin C$  erreichen.

## 9.2 Normalisierung

Im allgemeinen haben projektive Kurven Singularitäten, siehe 9.4, und sind daher keine Riemannschen Flächen. Aber mit Hilfe der Theorie algebraischer Gebilde lassen sich die Singularitäten auflösen, so daß Riemannsche Flächen entstehen. Diese Desingularisierung ist durch die Kurve bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt und wird ihre *Normalisierung* genannt.

**9.2.1 Definition und Existenz.** Eine *Normalisierung*  $(X, \varphi)$  der projektiven Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  besteht aus einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  und einer holomorphen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  mit  $C = \varphi(X)$ , deren Fasern  $\varphi^{-1}(c)$  über  $C$  bis auf endlich viele Ausnahmen einpunktig sind.

**Lemma.** Aus jedem algebraischen Gebilde  $(X, \eta, f)$  mit einem normierten Minimalpolynom  $P \in \mathbb{C}[z, w]$  entsteht die Normalisierung  $(X, (1: \eta: f))$  der Kurve  $C := N(\hat{P})$  zur Homogenisierung  $\hat{P}$  von  $P$ .

*Beweis.* Sei  $K$  der affine Teil von  $C$ . Die Ausnahmemenge  $E$  aller  $a \in \mathbb{C}$ , für die  $P(a, w)$  mehrfache Wurzeln hat, ist endlich. Dann sind auch  $A := \eta^{-1}(E \cup \{\infty\}) \subset X$  und  $S := \{(a, b) \in K : a \in E\}$  endlich. Die bijektive Abbildung  $\eta \times f : X \setminus A \rightarrow K \setminus S$  ist eine Beschränkung von  $\varphi := (1: \eta: f)$ . Aus  $K \setminus S \subset \varphi(X)$  folgt durch Abschluß  $C \subset \varphi(X)$ . Wegen  $P(\eta, f) = 0$  ist  $\varphi(X) \subset C$ . Für alle  $c \in K \setminus S$  ist  $\varphi^{-1}(c)$  einpunktig. Das Komplement von  $K \setminus S$  in  $C$  ist endlich.  $\square$

*Beispiel.* Aus der *parabola nodata*, siehe Beispiel (2) in 6.2.1, entsteht die Normalisierung  $\varphi = (1: 1 - t^2: t(1 - t^2)) : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^2$  der projektiven Kurve  $C := N(\hat{P})$  zu  $P(z, w) := w^2 + z^3 - z^2$ . Die  $\varphi$ -Faser über  $(1: 0: 0)$  hat zwei Punkte. Alle anderen Fasern über  $C$  sind einpunktig.

**Folgerung.** Jede kompakte Riemannsche Fläche  $X$  normalisiert eine projektive Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$ .

*Beweis.* Man ergänzt zum algebraischen Gebilde  $(X, \eta, f)$ , siehe das 3. Korollar in 6.2.3, und erhält die Normalisierung  $(1: \eta: f)$ .  $\square$

Mit dem Lemma und der Folgerung in 9.1.5 nebst Bemerkung folgt der

**Existenzsatz.** Jede ebene projektive Kurve besitzt eine Normalisierung.  $\square$

**9.2.2 Universelle Eigenschaft. Eindeutigkeit.** Sei  $(X, \varphi)$  eine Normalisierung der Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$ . Zu jeder nirgends konstanten holomorphen Abbildung  $\psi : Z \rightarrow \mathbb{P}^2$  einer Fläche  $Z$  mit  $\psi(Z) \subset C$  gibt es genau eine holomorphe Abbildung  $\gamma : Z \rightarrow X$ , so daß  $\psi = \varphi \circ \gamma$  gilt. Ist  $(Z, \psi)$  eine Normalisierung von  $C$ , so ist  $\gamma$  ein Isomorphismus.

*Beweis.* Es genügt die Behauptung für eine Normalisierung  $\varphi = (1: \eta: f)$  zu beweisen, die aus einem algebraischen Gebilde  $(X, \eta, f)$  entsteht. Es gibt Funktionen  $\zeta, g \in \mathcal{M}(Z)$  mit  $\psi = (1: \zeta: g) : Z \rightarrow C \subset \mathbb{P}^2$ . Aus  $\psi(Z) \subset C$  folgt  $P(\zeta, g) = 0$ . Nach der universellen Eigenschaft 6.2.6 gibt es genau eine holomorphe Abbildung  $\gamma : Z \rightarrow X$  mit  $\zeta = \eta \circ \gamma$  und  $g = f \circ \gamma$ . – Wenn  $(Z, \psi)$  auch eine Normalisierung ist, sind fast alle Fasern  $\varphi^{-1}(c)$  und  $\psi^{-1}(c)$  über  $C$  einpunktig. Dann ist  $\gamma$  ein Isomorphismus.  $\square$

Die letzte Aussage bedeutet:

Für jede projektive Kurve  $C$  ist ihre Normalisierung  $(X, \varphi)$  und insbesondere die normalisierende Fläche  $X$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Wenn  $X$  zu  $\hat{\mathbb{C}}$  bzw. zu einem Torus isomorph ist, nennt man die Kurve  $C$  *rational* bzw. *elliptisch*.

**9.2.3 Abbildungssatz.** Sei  $\psi : Z \rightarrow \mathbb{P}^2$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung einer kompakten, zusammenhängenden Fläche  $Z$ . Dann ist  $\psi(Z)$  eine irreduzible projektive Kurve.

*Beweis.* Wir schließen den trivialen Fall  $\psi(Z) = \Theta_0$  aus und können dann die Gestalt  $\psi = (1 : g : f)$  mit  $f, g \in \mathcal{M}(Z)$  annehmen. Nach 6.1.3 gibt es ein irreduzibles Polynom  $P$ , so daß  $P(g, f) = 0$  ist. Sei  $\hat{P}$  die Homogenisierung von  $P$ . Dann ist  $C := N(\hat{P})$  eine irreduzible Kurve. Sei  $(X, \varphi)$  ihre Normalisierung. Wegen  $\psi(Z) \subset C$  gibt es nach der universellen Eigenschaft 9.2.2 eine holomorphe Abbildung  $\gamma : Z \rightarrow X$  mit  $\psi = \varphi \circ \gamma$ . Da  $\psi$  nicht konstant ist, muß  $\gamma(Z) = X$  und folglich  $\psi(Z) = C$  sein.  $\square$

**Beispiele.** Das Bild  $C$  der *Torus-Einbettung*  $\varphi = (1 : \hat{\wp} : \hat{\wp}') : \mathbb{C}/\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2$  ist der projektive Abschluß der affinen Kurve  $N(w^2 - 4z^3 + g_2z + g_3)$ , die sich aus der Differentialgleichung  $\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$  der  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega$  ergibt. Offenbar ist  $(\mathbb{C}/\Omega, \varphi)$  die Normalisierung von  $C$ .

Die in 8.3.5(1) angegebene kanonische Einbettung der *Kleinschen Fläche*  $\varphi = (z : zw : -w^3) : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  ist die Normalisierung der irreduziblen Quartik  $C := N(z_0z_1^3 + z_1z_2^3 + z_2z_0^3)$ . Denn wegen  $w^7 = z^2(z-1)$  ist  $\varphi(X) \subset C$ , also  $\varphi(X) = C$ , weil  $\varphi(X)$  eine projektive Kurve und  $C$  irreduzibel ist.

**9.2.4 Komponentenzerlegung.** Sei  $(X, \varphi)$  eine Normalisierung von  $C$ . Die Zerlegung in Zusammenhangskomponenten  $X = X_1 \uplus \dots \uplus X_r$  ergibt mit  $C_j := \varphi(X_j)$  die Zerlegung  $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$  in irreduzible Komponenten.

*Beweis.* Das Bild  $C = \varphi(X) = C_1 \cup \dots \cup C_r$  ist nach 9.2.3 eine Vereinigung irreduzibler Kurven  $C_j$ . Da fast alle  $\varphi$ -Fasern einpunktig sind, gilt  $C_j \neq C_k$  für  $j \neq k$ .  $\square$

**9.2.5 Ausblick.** Projektive Kurven sind spezielle *reduzierte komplexe Räume*, deren holomorphe Struktur *garbentheoretisch* beschrieben wird. Die Normalisierung ist ein Spezialfall eines allgemeinen Normalisierungssatzes für komplexe Räume.

Bei normalen Räumen hat die Singularitätenmenge eine (komplexe) Codimension  $\geq 2$  und ist daher bei Kurven leer, siehe [GR], Sec. 6.5.3.– Der Abbildungssatz läßt sich erheblich verallgemeinern, siehe [Re 3] und [GR], p. 213:

*Bei jeder eigentlichen holomorphen Abbildung  $\varphi : X \rightarrow Y$  zwischen komplexen Räumen ist das Bild  $\varphi(X)$  eine analytische Menge in  $Y$ .*

## 9.3 Schnitt-Theorie

Kurven  $C, D \subset \mathbb{P}^2$  ohne gemeinsame Komponenten schneiden sich in endlich vielen Punkten. Wir ordnen jedem Schnittpunkt eine positive Schnittzahl zu und zeigen, daß  $\text{gr } C \cdot \text{gr } D$  die Summe der Schnittzahlen ist (*Formel von Bézout*).– Wir bezeichnen mit  $X$  eine kompakte Riemannsche Fläche und mit  $F, G \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$  nicht-konstante homogene Polynome.

**9.3.1 Divisoren homogener Polynome.** Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  eine nirgends konstante holomorphe Abbildung. Wir setzen voraus, daß die Kurve  $\varphi(X)$

weder mit  $N(F)$  noch mit  $N(G)$  eine gemeinsame Komponente hat. Mit einer guten Darstellung  $\varphi = (\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2)$  bei  $x \in X$  setzen wir

$$(1) \quad (F)_\varphi(x) := o(F(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2), x) \in \mathbb{N}.$$

Diese Ordnung hängt nicht von der Wahl der Darstellung ab. Somit ist  $(F)_\varphi$  ein positiver Divisor auf  $X$ . – Es gilt

$$(2) \quad (F \cdot G)_\varphi = (F)_\varphi + (G)_\varphi.$$

Wenn  $F$  und  $G$  denselben Grad haben, hat  $(F/G) \circ \varphi \in \mathcal{M}(X)$  den Hauptdivisor  $(F)_\varphi - (G)_\varphi$ . Daher ist

$$(3) \quad \text{gr}(F)_\varphi = \text{gr}(G)_\varphi.$$

Jede Linearform  $L \neq 0$  mit  $\varphi(X) \not\subset N(L)$  bestimmt den Grad

$$(4) \quad \text{gr } \varphi := \text{gr}(L)_\varphi,$$

der nur von  $\varphi$  abhängt, vgl. 8.4.1. Mit  $n := \text{gr } F$  und  $G = L^n$  folgt:

$$(5) \quad \text{gr}(F)_\varphi = \text{gr } F \cdot \text{gr } \varphi.$$

Für  $A \in \text{GL}_3(\mathbb{C})$  und den zugehörigen Automorphismus  $\hat{A}$  von  $\mathbb{P}^2$  gilt

$$(6) \quad (F)_{\hat{A} \circ \varphi} = (F \circ A)_\varphi. \quad \square$$

**9.3.2 Schnittzahlen.** Sei  $C \subset \mathbb{P}^2$  eine projektive Kurve, so daß  $C$  und  $N(F)$  keine gemeinsame Komponente haben. Mit der Normalisierung  $(X, \varphi)$  von  $C$  definieren wir für jeden Punkt  $c \in \mathbb{P}^2$  die *Schnittzahl*

$$(1) \quad i_c(C; F) := \sum_{x \in \varphi^{-1}(c)} (F)_\varphi(x).$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

$$(2) \quad i_c(C; F) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c \notin C \cap N(F).$$

$$(3) \quad i_c(\Theta; L) = 1 \quad , \quad \text{wenn für die Gerade } \Theta \text{ und die Linearform } L \text{ der} \\ \text{Durchschnitt } \Theta \cap N(L) = \{c\} \text{ ist.}$$

$$(4a) \quad i_c(C; F_1 \cdot F_2) = i_c(C; F_1) + i_c(C; F_2).$$

$$(4b) \quad i_c(C_1 \cup C_2; F) = i_c(C_1; F) + i_c(C_2; F) \quad \text{für zwei Kurven } C_1, C_2 \text{ ohne} \\ \text{gemeinsame Komponenten.}$$

$$(5) \quad i_c(C; F + G) = i_c(C; F) \quad , \quad \text{falls } F \text{ und } G \text{ denselben Grad haben und} \\ C \subset N(G) \text{ gilt.}$$

$$(6) \quad i_{\hat{A}(c)}(\hat{A}(C); F) = i_c(C; F \circ A) \quad \text{für } A \in \text{GL}_3(\mathbb{C}). \quad \square$$

Sei  $D \subset \mathbb{P}^2$  eine projektive Kurve mit dem Minimalpolynom  $G$ , welche mit  $C$  keine gemeinsame Komponente hat. Für jedes  $c \in \mathbb{P}^2$  wird die *Schnittzahl* durch

$$i_c(C, D) := i_c(C; G)$$

definiert. Sie ist wegen (6) projektiv invariant. Aber ihre Definition ist unsymmetrisch, da für  $C$  eine Normalisierung und für  $D$  das Minimalpolynom benutzt werden. Um die Symmetrie zu beweisen, benutzen wir die

**9.3.3 Resultante.** Sei  $R$  ein Integritätsring mit dem Quotientenkörper  $K$ . Zu je zwei normierten Polynomen  $P, Q \in R[w]$  gibt es eine endliche Körpererweiterung  $L$  von  $K$ , so daß  $P$  und  $Q$  über  $L$  in Linearfaktoren zerfallen:

$$(1) \quad P(w) = \prod_{\mu=1}^m (w - f_\mu) \quad \text{und} \quad Q(w) = \prod_{\nu=1}^n (w - g_\nu) \quad \text{mit} \quad f_\mu, g_\nu \in L.$$

Die *Resultante*

$$r := \prod_{\mu=1}^m \prod_{\nu=1}^n (f_\mu - g_\nu) = \prod_{\mu=1}^m Q(f_\mu) = \prod_{\nu=1}^n P(g_\nu)$$

liegt im Grundring  $R$  und ist unabhängig von der Körpererweiterung. Genau dann, wenn  $P$  und  $Q$  einen gemeinsamen Faktor haben, ist  $r \neq 0$ . Siehe z.B. [Bos], Abschnitt 4.4.

**Satz.** Seien  $(X, \eta, f)$  und  $(Z, \zeta, g)$  Riemannsche Gebilde über  $Y$  mit den Minimalpolynomen  $P$  bzw.  $Q$ . Wenn sie keinen gemeinsamen Faktor haben, hat ihre Resultante  $r \in \mathcal{M}(Y)$  bei  $b \in Y$  die Ordnung

$$(2) \quad o(r, b) = \sum_{x \in \eta^{-1}(b)} o(Q(\eta, f), x) = \sum_{z \in \zeta^{-1}(b)} o(P(\zeta, g), z).$$

*Beweis.* Es gibt eine endliche Körpererweiterung  $L$  von  $\mathcal{M}(Y)$ , so daß  $P$  und  $Q$  über  $L$  zerfallen. Wegen 6.5.1(2) können wir annehmen, daß die Erweiterung  $\mathcal{M}(Y) \hookrightarrow L$  die Liftung  $\sigma^* : \mathcal{M}(Y) \hookrightarrow \mathcal{M}(S)$  einer endlichen zusammenhängenden Überlagerung  $\sigma : S \rightarrow Y$  ist. Da  $P(\sigma, f_\mu) = 0$ , gibt es nach 6.2.6 Faktorisierungen  $\sigma = \eta \circ \varphi_\mu : S \rightarrow X \rightarrow Y$ , so daß  $f_\mu = f \circ \varphi_\mu$  ist,  $\mu = 1, \dots, m$ . Für jedes  $c \in \sigma^{-1}(b)$  ist

$$\begin{aligned} o(r, b) \cdot v(\sigma, c) &= o(r \circ \sigma, c) = \sum_{\mu} o(Q(\sigma, f \circ \varphi_\mu), c) \\ &= \sum_{\mu} o(Q(\eta, f), \varphi_\mu(c)) \cdot v(\varphi_\mu, c). \end{aligned}$$

Wir summieren über  $c \in \sigma^{-1}(b) = \varphi_\mu^{-1}(\eta^{-1}(b))$ :

$$\begin{aligned} o(r, b) \cdot \text{gr } \sigma &= \sum_{\mu} \sum_{x \in \eta^{-1}(b)} \sum_{c \in \eta_\mu^{-1}(x)} o(Q(\eta, f), x) \cdot v(\varphi_\mu, c) \\ &= \sum_{\mu} \text{gr } \varphi_\mu \sum_{x \in \eta^{-1}(b)} o(Q(\eta, f), x). \end{aligned}$$

Wegen  $\sigma = \eta \circ \varphi_\mu$  und  $\text{gr } \sigma = \sum_{\mu} \text{gr } \varphi_\mu$  folgt die erste Gleichung in (2). Vertauschung von  $P$  und  $Q$  gibt die zweite Gleichung.  $\square$

**9.3.4 Symmetrie.** Seien  $C$  und  $D$  projektive Kurven ohne gemeinsame Komponente, so daß  $(0 : 0 : 1) \notin C \cup D$ . Dann besitzen  $C$  und  $D$  Minimalpolynome  $F$  bzw.  $G$ , so daß  $P(z, w) := F(1, z, w)$  und  $Q(z, w) := G(1, z, w)$  die in 9.1.5(1) angegebene normierte Gestalt haben. Sie sind teilerfremd, und ihre Resultante  $r \in \mathbb{C}[z]$  ist daher  $\neq 0$ .

**Lemma.** Für  $c := (1 : 0 : 0)$  gelte  $N(z_1) \cap C \cap D \subset \{c\}$ . Dann ist die Schnittzahl die Ordnung der Resultante:  $i_c(C, D) = o(r, 0)$ . Insbesondere ist sie symmetrisch:  $i_c(C, D) = i_c(D, C)$ .



*Beweis.* Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen. Die Symmetrie folgt, weil  $r$  beim Vertauschen von  $P$  und  $Q$  höchstens das Vorzeichen wechselt. Sei  $(X, \eta, f)$  das algebraische Gebilde zu  $P$ . Nach 9.3.3(2) gilt

$$o(r, 0) = \sum_{x \in \eta^{-1}(0)} o(Q(\eta, f), x).$$

Die Normalisierung  $\varphi = (1 : \eta : f)$  von  $C$  ergibt

$$(G)_{\varphi}(x) = o(Q(\eta, f), x)$$

für alle Stellen  $x \in X$ , wo  $\eta$  und  $f$  keine Pole haben. Das gilt insbesondere für  $x \in \eta^{-1}(0)$ . Es ist  $\varphi^{-1}(c) \subset \eta^{-1}(0)$ . Da die Gerade  $N(z_1)$  den Durchschnitt  $C \cap D$  höchstens in  $c$  trifft, ist  $o(Q(\eta, f), x) = 0$  für  $x \in \eta^{-1}(0) \setminus \varphi^{-1}(c)$ . Somit folgt

$$o(r, 0) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(c)} (G)_{\varphi}(x) =: i_c(C; G) = i_c(C, D). \quad \square$$

**Satz.** Wenn zwei projektive Kurven  $C$  und  $D$  keine gemeinsame Komponente haben, gilt:  $i_c(C, D) = i_c(D, C)$  für alle  $c \in \mathbb{P}^2$ .

*Beweis.* Durch einen Automorphismus von  $\mathbb{P}^2$  erreicht man, daß die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind. Da die Schnittzahl nach 9.3.2(6) projektiv invariant ist, folgt die Behauptung.  $\square$

**9.3.5 Grad der Normalisierung. Formel von Bézout.** Wenn  $(X, \varphi)$  die projektive Kurve  $C$  normalisiert, ist

$$(1) \quad \text{gr } \varphi = \text{gr } C.$$

Wenn die projektiven Kurven  $C$  und  $D$  keine gemeinsame Komponente haben, gilt die Formel von Bézout:

$$(2) \quad \sum_{c \in \mathbb{P}^2} i_c(C, D) = \text{gr } C \cdot \text{gr } D.$$

*Beweis.* Sei  $(X, \varphi)$  bzw.  $(Y, \psi)$  die Normalisierungen und  $F$  bzw.  $G$  die Minimalpolynome von  $C$  bzw.  $D$ . Wegen der Symmetrie gilt

$$\sum_{c \in \mathbb{P}^2} i_c(C, D) = \sum_{x \in X} (G)_{\varphi}(x) = \text{gr } (G)_{\varphi} = \text{gr } \varphi \cdot \text{gr } D = \text{gr } \psi \cdot \text{gr } C.$$

Wenn  $C$  und  $D$  Geraden sind, ist nach 9.3.2(2)-(3) die linke Seite  $= 1$ , also  $\text{gr } \psi = 1$ . Wenn nur  $D$  eine Gerade ist, folgt (1), und im allgemeinen Fall folgt dann (2).  $\square$

Die Formel (2) wird traditionell nach Bézout (1764) benannt. Sie taucht bereits 1720 bei Maclaurin auf. Auch Euler (1748) hat sich mit ihr beschäftigt. Für ihre allgemeine Gültigkeit war es nötig, die affine zur projektiven Ebene zu vervollständigen (Poncelet, 1822) und Punkte mit komplexen Koordinaten zu berücksichtigen (Plücker, 1834).

## 9.4 Singularitäten. Tangenten

Jedem Punkt  $c$  einer projektiven Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  vom Grade  $n$  wird eine ganzzahlige *Multiplizität*  $m_c \geq 1$  zugeordnet. Das führt zur Unterscheidung zwischen *regulären* (= *glatten*) Punkten mit  $m_c = 1$  und *singulären* Punkten mit  $m_c \geq 2$ . Fast alle Punkte sind regulär. Wir untersuchen die Singularitäten zunächst mittels des Minimalpolynoms  $F$ , dann mittels der Normalisierung  $(X, \varphi)$  und vergleichen die Ergebnisse.

**9.4.1 Die Multiplizität** des Punktes  $c \in C$  wird als Minimum  $m_c$  der Schnittzahlen  $i_c(C, \Theta)$  zwischen  $C$  und den Geraden  $\Theta$  durch  $c$  definiert. Offenbar ist  $m_c$  eine projektive Invariante. Zu ihrer Berechnung können wir  $c = (1 : 0 : 0)$  annehmen. Wir entwickeln  $P(z, w) := F(1, z, w)$  nach homogenen Polynomen  $P_j$  vom Grade  $j$ ,

$$P(z, w) = P_m(z, w) + P_{m+1}(z, w) + \dots + P_n(z, w) \text{ mit } P_m(z, w) \neq 0.$$

Wegen  $c \in C$  ist  $m \geq 1$ . Das Anfangspolynom läßt sich eindeutig als Produkt  $P_m = L_1 \cdot \dots \cdot L_m$  von Linearformen  $L_j$  darstellen. Die projektiven Abschlüsse  $\Theta_j$  der affinen Geraden  $N(L_j)$  heißen *Tangenten* an  $C$  in  $c$ .

**Satz.** *Jede projektive Gerade  $\Theta$ , welche  $C$  in  $c$  schneidet, hat eine Schnittzahl  $i_c(C, \Theta) \geq m$ . Dabei gilt  $i_c(C, \Theta) > m$  genau dann, wenn  $\Theta$  eine Tangente ist. Insbesondere ist  $m = m_c$  die Multiplizität.*

*Beweis.* Jede Gerade  $\Theta$  durch  $c$  wird durch  $t \mapsto (1 : -bt : at)$  normalisiert. Die Schnittzahl  $i_c(C, \Theta)$  ist die Ordnung von  $P(-bt, at)$  an der Stelle  $t = 0$ . Sie ist stets  $\geq m$ , und zwar  $> m$  genau dann, wenn  $P_m(-b, a) = 0$ , also  $az + bw$  ein Linearfaktor von  $P_m(z, w)$  und somit  $\Theta$  eine Tangente ist.  $\square$

**Folgerung.** *Genau dann, wenn alle partiellen Ableitungen  $F_\nu := \partial F / \partial z_\nu$  an der Stelle  $c$  verschwinden, ist  $C$  bei  $c$  singulär. Es gibt höchstens endlich viele Singularitäten.*

*Beweis.* Wie oben können wir  $c = (1 : 0 : 0)$  und  $P(z, w) := F(1, z, w)$  annehmen. Wegen der Eulerschen Formel  $\sum_\nu z_\nu F_\nu = nF$  sind folgende Aussagen äquivalent:  $F_\nu(1, 0, 0) = 0$  für  $\nu = 0, 1, 2 \Leftrightarrow a := \frac{\partial P}{\partial z}(0, 0) = 0$  und  $b := \frac{\partial P}{\partial w}(0, 0) = 0 \Leftrightarrow P_1(z, w) := az + bw = 0 \Leftrightarrow m_c = m \geq 2$ .  $\square$

**9.4.2 Tangenten der Normalisierung.** Jede nirgend konstante holomorphe Abbildung  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  von  $C$  besitzt an jeder Stelle  $a \in X$  drei Schnittzahlen  $m_j$ , welche die Folge  $0 = m_0 < m_1 < m_2 \leq \text{gr } \varphi$  bilden, siehe 8.5.2. (Man ersetze  $X$  durch die Komponente, in der  $a$  liegt, damit die Zusammenhangsvoraussetzung des Abschnitts 8.5 erfüllt ist.) Dabei ist  $m(\varphi, a) := m_1$  die *Multiplizität* von  $\varphi$  bei  $a$ , vgl. 8.5.1. Die eindeutig bestimmte projektive Gerade  $\Theta$  mit der maximalen Schnittzahl  $(\Theta)_\varphi(a) = m_2$  heißt *Tangente* von  $\varphi$  an der Stelle  $a$  und wird mit  $T_a\varphi$  bezeichnet. Man

nennt  $k(\varphi, a) := m_2 - m_1$  *Vielfachheit der Tangente* oder *Klasse* von  $\varphi$  bei  $a$ . Wenn  $k(\varphi, a) \geq 2$  ist, heißt  $a$  *Wendepunkt* und  $T_a\varphi$  *Wendetangente*.

Die Schnitzzahlen von  $\varphi$  mit einer projektiven Geraden  $\Theta$  haben also die folgenden Werte:

$$(1) \quad (\Theta)_\varphi(a) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \varphi(a) \notin \Theta \\ m(\varphi, a) & , \text{ falls } \varphi(a) \in \Theta \neq T_a\varphi \\ m(\varphi, a) + k(\varphi, a) & , \text{ falls } \Theta = T_a\varphi. \end{cases} \quad \square$$

**9.4.3 Schnitte von Kurven mit Geraden.** Sei  $(X, \varphi)$  die Normalisierung der Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$ . Aus 9.3.2(1) folgt für jede Gerade  $\Theta$  durch  $c \in C$ :

$$(1) \quad i_c(C, \Theta) = \sum m(\varphi, x) + \sum k(\varphi, y), \quad \square$$

summiert über  $x \in \varphi^{-1}(c)$  und  $y \in \varphi^{-1}(c)$  mit  $T_y\varphi = \Theta$ .

Der minimale Wert dieser Schnitzzahlen ist nach 9.4.1 die Multiplizität

$$(2) \quad m_c = \sum m(\varphi, x), \text{ summiert über } x \in \varphi^{-1}(c). \quad \square$$

Aus Satz 9.4.1 folgt:

$$(3) \quad \text{Eine Gerade } \Theta \text{ ist genau dann Tangente an } C \text{ in } c, \text{ wenn es ein } x \in \varphi^{-1}(c) \text{ mit } \Theta = T_x\varphi \text{ gibt.} \quad \square$$

## 9.5 Die duale Kurve. Eine Formel von Clebsch

Jeder Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  wird nach Plücker (1834) eine duale Kurve  $C^* \subset \mathbb{P}^2$  zugeordnet, deren Punkte umkehrbar eindeutig den Tangenten an  $C$  entsprechen. Beide Kurven werden durch dieselbe Fläche  $X$  normalisiert. Durch den Vergleich der Normalisierungen gewinnen wir für jeden Punkt  $c \in C$  die Delta-Invariante  $\delta_c$ , welche mißt, wie singulär  $C$  bei  $c$  ist. Eine Formel von Clebsch (1864) drückt das Geschlecht von  $X$  durch den Grad von  $C$  und die Summe der Multiplizitäten und Delta-Invarianten aller Punkte  $c \in C$  aus.

**9.5.1 Dualität.** Seien  $\varphi, \psi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  holomorphe Abbildungen der zusammenhängenden Fläche  $X$ . Die Darstellungen  $\varphi = (f_0 : f_1 : f_2)$  und  $\psi = (g_0 : g_1 : g_2)$  mit Funktionen  $f_j, g_j \in \mathcal{M}(X)$  heißen *dual*, wenn

$$(1a) \quad \sum f_j g_j = 0, \quad (1b) \quad \sum g_j df_j = 0, \quad (1c) \quad \sum f_j dg_j = 0$$

gelten. Die Dualität ist symmetrisch. Wenn (1a) gilt, sind (1b) und (1c) äquivalent. Die Dualität hängt nur von den Abbildungen  $\varphi, \psi$  ab. Alle zu einer konstanten Abbildung dualen Abbildungen sind entartet.  $\square$

$$(2) \quad \text{Sei } A \in \text{GL}_3(\mathbb{C}), \text{ und sei } B \text{ die zu } A^{-1} \text{ transponierte Matrix. Wenn } \varphi \text{ und } \psi \text{ dual sind, gilt dasselbe für } \hat{A} \circ \varphi \text{ und } \hat{B} \circ \psi.$$

Dabei sind  $\hat{A}, \hat{B}$  die induzierten Automorphismen von  $\mathbb{P}^2$ .  $\square$

**Existenz- und Eindeutigkeitssatz.** Zu jeder nicht konstanten holomorphen Abbildung  $\varphi$  gibt es genau eine duale Abbildung  $\psi$ . Für entartete  $\varphi$  ist  $\psi$  konstant. Für nicht-entartete  $\varphi$  ist  $\psi$  ebenfalls nicht-entartet.

*Beweis.* Für entartete  $\varphi$  genügt es wegen (2) den Fall  $\varphi = (0 : 1 : f)$ ,  $df \neq 0$  zu betrachten. Dann ist  $\psi = (1 : 0 : 0)$  die einzige duale Abbildung. Durch Rollentausch folgt: Eine entartete duale Abbildung  $\psi$  ist nur möglich, wenn  $\varphi$  entartet oder sogar konstant ist. – Wenn  $\varphi$  nicht-entartet ist, gibt es eine Darstellung  $\varphi = (1 : f_1 : f_2)$  mit  $df_1 \neq 0$ . Wenn es eine duale Abbildung  $\psi$  gibt, ist sie nicht-entartet und hat daher eine Darstellung  $\psi := (g_0 : g_1 : 1)$ . Die Dualitätsbeziehungen (1a) und (1b) sind äquivalent zu

$$g_0 = f_1 df_2 / df_1 - f_2 \quad , \quad g_1 = -df_2 / df_1 . \quad \square$$

**9.5.2 Eigenschaften dualer Abbildungen.** Sei  $\varphi^*$  die duale Abbildung der nicht-entarteten Abbildung  $\varphi$ . Dann ist  $\varphi^{**} = \varphi$ . – Sei  $x \in X$ .

- (1) Die homogenen Koordinaten von  $\varphi^*(x) = (c_0 : c_1 : c_2)$  sind die Koeffizienten in der Gleichung  $\sum c_j z_j = 0$  der Tangente  $T_x \varphi$ .
- (2) Multiplizität und Klasse werden vertauscht:

$$m(\varphi^*, x) = k(\varphi, x) \quad , \quad k(\varphi^*, x) = m(\varphi, x).$$

*Beweis.* Wegen 9.5.1(2) kann man  $\varphi(x) = (1 : 0 : 0)$  und  $T_x \varphi = N(z_2)$  annehmen. Dann gibt es bei  $x$  gute Darstellungen  $\varphi = (1 : f_1 : f_2)$  mit  $o(f_1, x) = m(\varphi, x)$  sowie  $o(f_2, x) = m(\varphi, x) + k(\varphi, x)$  und  $\varphi^* = (g_0 : g_1 : 1)$ . Aus 9.5.1(1b) folgt  $g_1 df_1 + df_2 = 0$ , also  $o(g_1, x) = k(\varphi, x)$ . Aus 9.5.1(1a) folgt  $g_0 + g_1 f_1 + f_2 = 0$ , also  $o(g_0, x) \geq o(g_1 f_1, x) = m(\varphi, x) + k(\varphi, x)$ . Daher gilt  $\varphi^*(x) = (0 : 0 : 1)$  und damit (1). – Nach 8.5.1(1) ist  $m(\varphi^*, x) = o(g_1, x) = k(\varphi, x)$ . Mit  $\varphi^*$  statt  $\varphi$  folgt  $m(\varphi, x) = m(\varphi^{**}, x) = k(\varphi^*, x)$ .  $\square$

**9.5.3 Die duale Kurve.** Wenn  $(X, \varphi)$  die irreduzible Kurve  $C$  vom Grade  $n \geq 2$  normalisiert, hängt  $X$  zusammen, und nach 9.2.3 ist die *duale Kurve*  $C^* := \varphi^*(X)$  ebenfalls irreduzibel. Ihr Grad  $k(C) := \text{gr } \varphi^*$  wird *Klasse* von  $C$  genannt. Eine geometrische Deutung von  $k(C)$  enthält Aufgabe 9.7.3.

**Satz.** Die duale Kurve  $C^*$  wird durch die duale Abbildung  $\varphi^*$  normalisiert. Es gilt  $C^{**} = C$ .

*Beweis.* Sei  $(Y, \psi)$  die Normalisierung von  $C^*$ . Nach Satz 9.2.2 faktorisiert  $\varphi^* = \psi \circ \gamma$  über eine holomorphe Abbildung  $\gamma : X \rightarrow Y$ . Dualisieren ergibt  $\varphi = \varphi^{**} = \psi^* \circ \gamma$ . Da fast alle  $\varphi$ -Fasern einpunktig sind, ist  $\text{gr } \gamma = 1$ . – Aus  $\varphi^{**} = \varphi$  folgt  $C^{**} = C$ .  $\square$

**9.5.4 Die Delta-Invariante.** Sei  $F$  das Minimalpolynom der irreduziblen Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  vom Grade  $n \geq 2$ . Die *partiellen Ableitungen*  $F_j := \partial F / \partial z_j$ ,  $j = 0, 1, 2$ , sind homogene Polynome vom Grade  $n - 1$ .

- (1) Aus jeder Darstellung  $\varphi = (f_0 : f_1 : f_2) : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  der Normalisierung von  $C$  mit Funktionen  $f_j \in \mathcal{M}(X)$  erhält man die duale Abbildung  $\varphi^* = (g_0 : g_1 : g_2) : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  mit  $g_j := F_j(f_0, f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X)$ .

*Beweis.* Aus der Eulerschen Formel  $\sum z_j F_j = n \cdot F$  folgt  $\sum f_j g_j = 0$ . Die Ableitung der Gleichung  $F(f_0, f_1, f_2) = 0$  ergibt  $\sum g_j df_j = 0$ .  $\square$

Für jede gute Darstellung  $\varphi|U = (f_0 : f_1 : f_2)$  sind die Funktionen  $g_j$  auf  $U$  holomorph. Wir definieren die *Delta-Invariante*

$$(2) \quad \delta(\varphi, x) = \min \{o(g_j, x) : j = 0, 1, 2\} \in \mathbb{N}.$$

Sie hängt nicht von der Wahl der Darstellung  $(f_0 : f_1 : f_2)$  ab. Denn für jede andere gute Darstellung  $\varphi = (h_0 : h_1 : h_2)$  bei  $x$  gilt  $h_j = \lambda f_j$  mit  $o(\lambda, x) = 0$  und  $F_j(h_0, h_1, h_2) = \lambda^{n-1} g_j$ . – Es gilt

$$(3) \quad \delta(\varphi, x) \geq 1 \Leftrightarrow x \text{ ist gemeinsame Nullstelle von } g_0, g_1, g_2. \Leftrightarrow \varphi(x) \in N(F_0) \cap N(F_1) \cap N(F_2) \Leftrightarrow C \text{ ist bei } \varphi(x) \text{ singulär.} \quad \square$$

Für die Koeffizienten in der Gleichung  $\sum c_j z_j = 0$  der Tangente  $T_x \varphi$  gilt:

$$(4) \quad c_k \neq 0 \Leftrightarrow o(g_k, x) = \delta(\varphi, x).$$

*Beweis.* Für eine gute Darstellung  $\varphi^*|U = (h_0 : h_1 : h_2)$  auf einer Umgebung von  $x$  ist  $c_j = h_j(x)$ . Es gibt ein  $\lambda \in \mathcal{O}(U)$  mit  $\lambda \cdot h_j = g_j$ , also  $c_k \neq 0 \Leftrightarrow o(h_k, x) = \min \{o(h_j, x)\} \Leftrightarrow o(g_k, x) = \min \{o(g_j, x)\} =: \delta(\varphi, x)$ .  $\square$

Wir bilden mit der Multiplizität  $m$  die *Ny-Invariante*

$$(5) \quad \nu(\varphi, x) := \delta(\varphi, x) - m(\varphi, x) + 1.$$

Sie ist  $= 0$ , wenn  $C$  bei  $\varphi(x)$  glatt ist.

**9.5.5 Die polaren Differentialformen**  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  auf  $X$  werden folgendermaßen definiert: Sei  $(j, k, l)$  eine zyklische Permutation von  $(0, 1, 2)$ . Wir legen die Darstellung  $\varphi = (f_0 : f_1 : f_2)$  der Normalisierung von  $C$  durch  $f_j = 1$  fest und definieren mit  $g_j$  wie in 9.5.4(1)

$$(1) \quad \omega_j := df_k/g_l = -df_l/g_k.$$

Dann gilt

$$(2) \quad \omega_k = f_k^{n-3} \omega_j, \quad \omega_l = f_l^{n-3} \omega_j. \quad \square$$

$$(3) \quad \text{Aus } \varphi(x) \notin \Theta_j \text{ folgt } o(\omega_j, x) = -\nu(\varphi, x).$$

*Beweis zu (3).* Wegen  $\varphi(x) \notin \Theta_j$  ist  $f_\mu(x) \neq \infty$  für  $\mu = 0, 1, 2$ . Sei  $v_\mu := v(f_\mu, x)$  und  $o_\mu := o(g_\mu, x)$ , also  $o(\omega_j, x) = v_k - 1 - o_l = v_l - 1 - o_k$ . Sei  $v_k \leq v_l$ . Dann ist  $o_k \geq o_l$  und  $o_j \geq o_l$ , letzteres wegen  $g_j = -g_k f_k - g_l f_l$  und  $o(f_l, x) \geq 0$ . Somit ist  $\delta(\varphi, x) = o_l$ . Nach 8.5.1(1) ist  $v_k = m(\varphi, x)$ . Daraus folgt die Behauptung für  $v_k \leq v_l$ . Durch Vertauschen von  $k$  und  $l$  erhält man den Beweis für den Fall  $v_l \leq v_k$ .  $\square$

**Satz.** Für  $j = 0, 1, 2$  gilt an jede Stelle  $x \in X$

$$o(\omega_j, x) = (n-3)(\Theta_j)_\varphi(x) - \nu(\varphi, x).$$

*Beweis.* Wegen (3) muß nur der Fall  $\varphi(x) \in \Theta_j$  betrachtet werden. Es gibt ein  $k$  mit  $\varphi(x) \notin \Theta_k$ , also  $o(\omega_k, x) = -\nu(\varphi, x)$  nach (3). Aus (2) folgt  $o(\omega_k, x) = (n-3)o(f_k, x) + o(\omega_j, x)$ . Eine gute Darstellung bei  $x$  lautet  $\varphi = (f_0/f_k : f_1/f_k : f_2/f_k)$ . Daher folgt mit  $(\Theta_j)_\varphi(x) = o(f_j/f_k, x) = o(1/f_k, x) = -o(f_k, x)$  die Behauptung.  $\square$

**Folgerung.** Glatte Kubiken sind elliptische Kurven.

*Beweis.* Wegen  $\nu(\varphi, x) = 0$  und  $n = 3$  folgt aus dem Satz  $o(\omega_0, x) = 0$  für alle  $x \in X$ . Nach 7.8.2 ist  $X$  ein Torus.  $\square$

Singuläre Kubiken sind rationale Kurven, siehe Aufgabe 9.7.2.

Unsere rudimentäre Betrachtung polarer Differentialformen läßt nicht erkennen, was solche Formen mit den polaren Kurven  $N(\sum a_j F_j)$  zu tun haben. Für eine ausführliche Behandlung siehe [BK], S. 845–883.

**9.5.6 Die Formel von Clebsch.** Sei  $(X, \varphi)$  die Normalisierung einer irreduziblen Kurve  $C$  vom Grade  $n$ . Wir definieren für  $c \in C$  die Invarianten

$$(1) \quad \delta_c := \sum \delta(\varphi, x) \text{ und } \nu_c := \sum \nu(\varphi, x), \text{ summiert über } x \in \varphi^{-1}(c).$$

Mit  $r_c := \sharp \varphi^{-1}(c)$  gilt wegen 9.4.3(2)

$$(2) \quad \nu_c = \delta_c - m_c + r_c. \quad \square$$

Wenn  $C$  bei  $c$  glatt ist, gilt  $\nu_c = 0$ .– Wir addieren die Ordnungsformel für die polare Differentialform aus Satz 9.5.5 über  $x \in X$  und erhalten für die analytische Charakteristik die *Formel von Clebsch*:

$$(3) \quad -\chi(X) = n(n-3) - \sum_{c \in C} \nu_c. \quad \square$$

Bei glatten Kurven ist  $-\chi = n(n-3)$ . Beispielsweise entsteht bei jeder Einbettung eines Torus wegen  $\chi = 0$  eine Kubik. Flächen der Charakteristik  $-2$  lassen sich nicht in  $\mathbb{P}^2$  einbetten.– Die Abschätzung des analytischen Geschlechts  $g_{an}(X)$  gemäß Satz 8.2.1 zusammen mit (3) ergibt

$$(4) \quad g_{an}(X) \leq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2} \sum_{c \in C} \nu_c,$$

mit Gleichheit, sobald  $\chi = 2 - 2g_{an}$  bewiesen ist (erste Folgerung in 13.1.5).

**9.5.7 Glatte Quartiken**  $C \subset \mathbb{P}^2$  werden durch die kanonischen Abbildungen  $\varphi = (\omega_0 : \omega_1 : \omega_2) : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  der nicht-hyperelliptischen Flächen  $X$  vom analytischen Geschlecht 3 normalisiert.

*Beweis.* Sei  $\varphi = (1 : f_1 : f_2) : X \rightarrow \mathbb{P}^2$  die Normalisierung von  $C$ . Nach Satz 9.5.5 sind die polaren Differentialformen  $\omega_0, \omega_1 = f_1 \omega_0, \omega_2 = f_2 \omega_0$  holomorph. Sie sind wie  $1, f_1, f_2$  linear unabhängig und bilden wegen 9.5.6(4) eine Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$ . Daher ist  $\varphi = (\omega_0 : \omega_1 : \omega_2)$  die kanonische Abbildung. Nach Satz 8.3.5 ist  $X$  nicht hyperelliptisch.  $\square$

Durch  $\varphi$  identifiziert man  $X$  mit  $C$ . Jede holomorphe Form  $\omega = \sum a_j \omega_j \neq 0$  bestimmt die Gerade  $\Theta_\omega := N(\sum a_j z_j)$ . Alle Geraden in  $\mathbb{P}^2$  haben diese Gestalt. Die *Schnittzahlen* sind

$$(1) \quad i_c(\Theta_\omega, C) = o(\omega, c) \text{ für } c \in C.$$

*Beweis.* Wegen Satz 9.5.5 haben  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  keine gemeinsame Nullstelle. Mit jeder Karte  $(U, z)$  und  $\omega_j = \varphi_j dz$  erhält man die gute Darstellung  $\varphi|_U = (\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2)$ . Dann ist  $i_c(\Theta_\omega, C) = o(\sum a_j \varphi_j, c) = o(\omega, c)$ .  $\square$

Nach (1) liegen die Nullstellen jeder holomorphen Form  $\omega \neq 0$  auf  $\Theta_\omega$ . Jede spezielle Lage von  $\Theta_\omega$  zu  $C$  (Tangente, Wendetangente, Doppeltangente) läßt sich durch die Ordnungen von  $\omega$  charakterisieren (Aufgabe 9.7.5(ii)).

## 9.6 Plückersche Formeln

Um die Formel von Clebsch auf Kurven mit Singularitäten anzuwenden, wird die Delta-Invariante genauer untersucht. Wir betrachten wie bisher eine irreduzible Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  vom Grade  $n \geq 2$  mit dem Minimalpolynom  $F$  und der Normalisierung  $(X, \varphi)$ . Für einen Punkt  $c \in C$  sei  $\varphi^{-1}(c) = \{a_1, \dots, a_r\}$ . Sei  $m_j := m(\varphi, a_j)$  und  $k_j := k(\varphi, a_j)$ .

### 9.6.1 Die Zerlegung der Delta-Invarianten lautet

$$(1) \quad \delta_c = \sum_{j,l=1}^r \delta_{jl}.$$

Dabei haben die Invarianten  $\delta_{jl} \in \mathbb{N}$  (keine Kronecker-Symbole) folgende Eigenschaften:

- (2)  $\delta_{jl} \geq m_j m_l$  für  $j \neq l$  mit Gleichheit genau dann, wenn die Tangenten  $T_{a_j} \varphi \neq T_{a_l} \varphi$  verschieden sind.
- (3)  $\delta_{jj} \geq (m_j - 1)(m_j + k_j)$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $m_j$  und  $k_j$  teilerfremd sind.

*Beweis.* Durch einen Automorphismus von  $\mathbb{P}^2$  erreicht man  $c = (1 : 0 : 0)$  und  $(0 : 0 : 1) \notin C$  sowie  $T_{a_j} \varphi \neq N(z_1)$  für  $j = 1, \dots, r$ . Das reduzierte Polynom  $P(z, w) := F(1, z, w)$  hat die in 9.1.5(1) angegebene normierte Gestalt. Das algebraische Gebilde  $(X, \eta, f)$  zu  $P$  ergibt die Normalisierung  $\varphi = (1 : \eta : f)$  von  $C$ . Eine Scheibe  $V \subset \mathbb{C}$  mit dem Zentrum 0 wird durch  $\eta$  elementar überlagert,

$$\eta^{-1}(V) = U_1 \uplus \dots \uplus U_{r+s}.$$

Dabei werden die Punkte von  $\eta^{-1}(0) = \{a_1, \dots, a_r, \dots, a_{r+s}\}$  so numeriert, daß  $\{a_1, \dots, a_r\} = \varphi^{-1}(c) \subset \eta^{-1}(0)$  gilt. Durch die Beschränkungen  $\eta_j := \eta|_{U_j}$  und  $f_j := f|_{U_j}$  entstehen gute Darstellungen  $\varphi|_{U_j} = (1 : \eta_j : f_j)$  mit  $o(\eta_j, a_j) = m_j$  und  $o(f_j, a_j) \geq m_j$  für  $j = 1, \dots, r$ .

Denn nach 8.5.1(1) ist  $m_j$  das Minimum der Ordnungen von  $\eta_j$  und  $f_j$  bei  $a_j$ , und  $o(\eta_j, a_j) > m_j$  wird durch  $T_{a_j} \varphi \neq N(z_1)$  ausgeschlossen.

Mit  $b \in \mathbb{C}$  gilt  $T_{a_j} \varphi = N(z_2 - bz_1)$ . Nach 9.5.4(4) ist

$$(4) \quad \delta(\varphi, a_j) = o\left(\frac{\partial P}{\partial w}(\eta_j, f_j), a_j\right).$$

Nach Beschränkung auf  $V$  zerfällt  $P|_V = P_1 \cdot \dots \cdot P_r \cdot \dots \cdot P_{r+s}$  in das Produkt der Minimalpolynome  $P_j \in \mathcal{O}(V)[w]$  der Puiseux-Gebilde  $(U_j, \eta_j, f_j)$ . Wir fassen zum Restfaktor  $R = P_{r+1} \cdot \dots \cdot P_{r+s}$  zusammen ( $R = 1$ , falls  $s = 0$ ). Da  $P_j(\eta_j, f_j)$  die Nullfunktion ist, gilt

$$(5) \quad \frac{\partial P}{\partial w}(\eta_j, f_j) = \frac{\partial P_j}{\partial w}(\eta_j, f_j) \cdot \prod_{l=1, l \neq j}^r P_l(\eta_j, f_j) \cdot R(\eta_j, f_j).$$

Aus (4), (5) und  $R(\eta(a_j), f(a_j)) \neq 0$  für  $j = 1, \dots, r$  folgt (1) für

$$(6) \quad \delta_{jj} := o\left(\frac{\partial P_j}{\partial w}(\eta_j, f_j), a_j\right), \quad \delta_{lj} := o(P_l(\eta_j, f_j), a_j) \quad \text{für } l \neq j.$$

Zu (2). Wir entwickeln nach Potenzen von  $w - bz$ ,

$$(7) \quad P_j(z, w) = (w - bz)^{m_j} + \sum_{\nu=1}^{m_j} c_\nu(z)(w - bz)^{m_j-\nu}$$

mit Koeffizienten  $c_\nu \in \mathcal{O}(V)$ , und setzen  $z = \eta_j$  ein:

$$(w - b\eta_j)^{m_j} + \sum_{\nu=1}^{m_j} (c_\nu \circ \eta_j)(w - b\eta_j)^{m_j-\nu} = P_j(\eta_j, w) =$$

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta_j)} (w - f_j \circ \alpha) = \prod_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta_j)} (w - b\eta_j - [f_j - b\eta_j] \circ \alpha).$$

Der Koeffizientenvergleich zeigt, daß  $c_\nu \circ \eta_j$  das  $\nu$ -te elementarsymmetrische Polynom zu  $\{(f_j - b\eta_j) \circ \alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta_j)}$  ist und somit bei  $a_j$  eine Ordnung  $\geq \nu(m_j + k_j) > \nu \cdot m_j$  hat. Daher ist  $o(c_\nu, 0) > \nu$ .

Zur Berechnung von  $\delta_{jl} = o(P_j(\eta_l, f_l), a_l)$  für  $l \neq j$  setzen wir  $z = \eta_l$  und  $w = f_l$  in (7) ein:  $P_j(\eta_l, f_l) = (f_l - b\eta_l)^{m_j} + \Sigma$ . Aus  $o(f_l - b\eta_l, a_l) \geq m_l$  und  $o(c_\nu \circ \eta_l, a_l) > \nu \cdot m_l$  folgt  $o(\Sigma, a_l) > m_j m_l$ . Da  $o(f_l - b\eta_l, a_l) > m_l$  genau dann eintritt, wenn  $T_{a_l}\varphi = N(z_2 - bz_1)$  ist, also mit  $T_{a_j}\varphi$  zusammenfällt, folgt (2).

Zu (3). Für den Rest des Beweises ist der Index  $j$  konstant. Wir lassen ihn weg:  $a := a_j$ ,  $\eta := \eta_j$ ,  $f := f_j$ ,  $P := P_j$ ,  $\delta := \delta_{jj}$ ,  $m := m_j$ ,  $k := k_j$ . Die Darstellung  $P(\eta, w) = \prod_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta)} (w - f \circ \alpha)$  gemäß 6.3.2(2) ergibt  $(\partial P / \partial w)(\eta, f) = \prod_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta) \setminus \{\text{id}\}} (f - f \circ \alpha)$ , also

$$(8) \quad \delta = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}(\eta) \setminus \{\text{id}\}} o(f - f \circ \alpha, a).$$

Aus  $T_a\varphi = N(z_2 - bz_1)$  folgt wegen 9.4.2(1)  $o(f - b\eta, a) = m + k$  und somit  $o(f - f \circ \alpha, a) \geq m + k$  für  $\alpha \in \mathcal{D}(\eta) \setminus \{\text{id}\}$ . Mit (8) folgt  $\delta \geq (m - 1)(m + k)$ . Um zu untersuchen, wann diese Ungleichung strikt ist, benutzen wir bei  $a$  eine Karte  $t$  mit  $t(a) = 0$  und  $\eta = t^m$ . Sei  $\mathcal{D}(\eta) \rightarrow \mu_m$ ,  $\alpha \mapsto \omega_\alpha$ , der Isomorphismus mit  $t \circ \alpha = \omega_\alpha \cdot t$ . Dann gilt  $f - b\eta = t^{m+k} \cdot f^*$  mit  $f^*(a) \neq 0$  und  $f - f \circ \alpha = t^{m+k} [f^* - \omega_\alpha^k \cdot (f^* \circ \alpha)]$  wegen  $\omega_\alpha^m = 1$ . Der Faktor [...] hat bei  $a$  den Wert  $(1 - \omega_\alpha^k) \cdot f^*(a)$ . Er ist genau dann  $= 0$ , wenn die  $m$ -te Einheitswurzel  $\omega_\alpha \neq 1$  auch eine  $k$ -te Einheitswurzel ist, also  $m$  und  $k$  einen gemeinsamen Teiler  $\geq 2$  haben.  $\square$

### 9.6.2 Folgerungen.

- (1)  $\delta_{jj} = 0 \Leftrightarrow m_j = 1$ ;  $\delta_{jj} \notin \{1, 2\}$ ;  $\delta_{jj} = 3 \Leftrightarrow m_j = 2, k_j = 1$ .
- (2) Für  $j \neq l$ :  $\delta_{jl} \geq 1$ ;  $\delta_{jl} = 1 \Leftrightarrow m_j = m_l = 1$  und  $T_{a_j}\varphi \neq T_{a_l}\varphi$ .
- (3)  $\nu_c \geq 0$ .  $\nu_c = 0 \Leftrightarrow C$  ist bei  $c$  regulär.
- (4)  $\nu_c \neq 1$ .
- (5) Für  $\nu_c = 2$  gibt es genau zwei Möglichkeiten:
  - (a)  $r_c = 2, m_1 = m_2 = 1, T_{a_1}\varphi \neq T_{a_2}\varphi, \delta_c = 2$  und
  - (b)  $r_c = 1, m_1 = 2, k_1 = 1, \delta_c = 3$ .  $\square$

Man nennt  $c$  im Falle (5a) einen *gewöhnlicher Doppelpunkt* und im Falle (5b) eine *gewöhnliche Spitze* der Kurve  $C$ . Wenn es keine anderen Singularitäten gibt, heißt  $C$  eine *Plückersche Kurve*.



**9.6.3 Plückersche Kurven.** Wenn die Fläche  $X$  eine Plückersche Kurve  $C$  vom Grade  $n$  mit  $d$  Doppelpunkten und  $s$  Spitzen normalisiert, hat sie das analytische Geschlecht  $g := \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (d+s)$  und die analytische Charakteristik  $\chi = 2 - 2g$ .

*Beweis.* Nach einer projektiven Transformation hat  $C$  keine Singularitäten auf der Geraden  $\Theta_0 := N(z_0)$ . Wegen 9.5.6(4) genügt es, in  $\mathcal{E}_1(X)$  einen Untervektorraum der Dimension  $\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (d+s)$  anzugeben: Im  $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ -dimensionalen Vektorraum  $V \subset \mathbb{C}[z, w]$  der Polynome vom Grade  $\leq n-3$  bilden sämtliche Polynome  $p$  mit  $p(c_1, c_2) = 0$  für alle Singularitäten  $c = (1 : c_1 : c_2)$  einen Untervektorraum  $U$  der Dimension  $\geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - (d+s)$ . Denn jede der  $d+s$  Gleichungen  $p(c_1, c_2) = 0$  ist eine lineare Bedingung für  $p$  und erniedrigt daher die Dimension um höchstens 1.

Sei  $\varphi = (1 : f_1 : f_2)$  die Normalisierung von  $C$  und  $\omega_0$  die polare Differentialform. Sei  $\tilde{p} := p(f_1, f_2) \in \mathcal{M}(X)$ . Alle Formen der Gestalt  $\tilde{p}\omega_0$  mit  $p \in U$  bilden einen zu  $U$  isomorphen Vektorraum. Es genügt zu zeigen, daß  $\tilde{p}\omega_0$  für  $p \in U$  holomorph ist. Wegen Satz 9.5.5 ist dies äquivalent zu

$$(1) \quad o(\tilde{p}, x) + (n-3)(\Theta_0)_\varphi(x) \geq \nu(\varphi, x) \quad \text{für } p \in U \quad \text{und } x \in X.$$

Wir zeigen zunächst:

$$(2) \quad o(\tilde{p}, x) + (n-3)(\Theta_0)_\varphi(x) \geq 0 \quad \text{für } p \in V \quad \text{und } x \in X.$$

Für eine gute Darstellung  $\varphi = (\varphi_0 : \varphi_1 : \varphi_2)$  bei  $x$  gilt  $\tilde{p} = p(\varphi_1/\varphi_0, \varphi_2/\varphi_0)$ . Da  $\varphi_1, \varphi_2$  holomorph sind und  $\text{gr } p \leq n-3$  ist, folgt  $o(\tilde{p}, x) \geq (3-n) \cdot o(\varphi_0, x)$  und damit (2) wegen  $(\Theta_0)_\varphi(x) = o(\varphi_0, x)$ .

Aus (2) folgt (1), wenn  $C$  bei  $\varphi(x)$  glatt ist. Die Singularitäten  $\varphi(x)$  liegen nicht auf  $\Theta_0$ . Daher ist  $(\Theta_0)_\varphi(x) = 0$ . Nach 9.6.2(5) gilt  $\nu(\varphi, x) = 1$  bzw.  $= 2$  für gewöhnliche Doppelpunkte bzw. Spitzen  $c = \varphi(x)$ . Zum Beweis von (1) muß nur noch  $o(\tilde{p}, x) \geq 1$  bzw.  $\geq 2$  für Doppelpunkte bzw. Spitzen gezeigt werden: Aus  $p(c_1, c_2) = 0$  folgt  $\tilde{p}(x) = 0$ , also  $o(\tilde{p}, x) \geq 1$ . Wenn  $c$  eine Spitze ist, gilt  $\min\{v(f_1, x), v(f_2, x)\} = m(\varphi, x) = 2$ . Wegen  $p(c_1, c_2) = 0$  ist dann  $o(\tilde{p}, x) \geq 2$ .  $\square$

**Bemerkung.** Der Satz gilt für beliebige Kurven  $C \subset \mathbb{P}^2$  mit  $\frac{1}{2} \sum \nu_c$  statt  $d+s$ . Die Argumentation für Doppelpunkte und Spitzen wird durch folgendes Lemma ersetzt, dessen Beweis Methoden der Funktionentheorie mehrerer Variabler erfordert, siehe z.B. die Aufgabenserie in [ACGH], p. 57 ff.

**Lemma.** Zu jeder Singularität  $c \in C$  genügen  $\frac{1}{2}\nu_c$  lineare Bedingungen an  $p \in V$ , um zu garantieren, daß  $o(\tilde{p}, x) \geq \nu(\varphi, x)$  für alle  $x \in \varphi^{-1}(c)$  gilt.

**9.6.4 Klassenformel.** Jede irreduzible Kurve  $C \subset \mathbb{P}^2$  vom Grade  $n \geq 2$  hat die Klasse

$$(1) \quad k = n(n-1) - \sum_{c \in C} \delta_c.$$

*Beweis.* Sei  $F$  das Minimalpolynom und  $(X, \varphi)$  die Normalisierung von  $C$ . Mit den partiellen Ableitungen  $F_j := \partial F / \partial z_j$  und  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  bilden wir das homogene Polynom  $\sum a_j F_j$  vom Grade  $n-1$  und den Divisor

$D := (\sum a_j F_j)_\varphi$  vom Grade  $n(n-1)$  auf  $X$ . Mit einer guten Darstellung  $\varphi|U = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$  und  $g_j := F_j(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$  gilt

$$(2) \quad D(x) = o(\sum a_j g_j, x) \text{ für } x \in U.$$

Nach 9.5.4(1) ist  $\varphi^*|U = (g_0 : g_1 : g_2)$  eine Darstellung der dualen Abbildung, die mit  $\lambda \in \mathcal{O}(U)$  und  $\psi_j := g_j/\lambda$  zur guten Darstellung  $(\psi_0 : \psi_1 : \psi_2)$  wird. Sei  $\Theta = N(\sum a_j z_j)$ . Aus (2) entsteht

$$D(x) = o(\lambda, x) + o(\sum a_j \psi_j, x) = \delta(\varphi, x) + (\Theta)_{\varphi^*}(x).$$

Die Summation über alle  $x \in X$  ergibt die Behauptung.  $\square$

Bei einer Plückerschen Kurve mit  $d$  Doppelpunkten und  $s$  Spitzen bekommt die Klassenformel die 1834 von Plücker [Plü], S. 298-301, angegebene Gestalt

$$(3) \quad k = n(n-1) - 2d - 3s. \quad \square$$

**9.6.5 Wendepunktsformeln.** Wir benutzen die Klassenformel, um in der Formel 9.5.6(3) von Clebsch  $\sum \nu_c$  durch  $k$  zu ersetzen:

$$(1) \quad \chi = 2n - k - \sum(m_c - r_c) = 2n - k - \sum(m(\varphi, x) - 1).$$

Die entsprechende Formel für die duale Kurve lautet

$$(2) \quad \chi = 2k - n - \sum(k(\varphi, x) - 1).$$

Denn die Charakteristik  $\chi$  bleibt erhalten, während  $n$  und  $k$  sowie  $m(\varphi, x)$  und  $k(\varphi, x)$  vertauscht werden. – Die mit Vielfachheiten berechnete Anzahl der Wendepunkte ist

$$(3) \quad w := \sum(k(\varphi, x) - 1) \in \mathbb{N}.$$

Durch Gleichsetzen von (1) und (2) entsteht die *Wendepunktsformel*

$$(4a) \quad w = 3(k - n) + \sum(m_c - r_c).$$

Wenn man  $k$  mittels der Klassenformel wieder durch  $\sum \delta_c$  ersetzt, bekommt die Wendepunktsformel die Gestalt

$$(4b) \quad w = 3n(n-2) - \sum(3\delta_c - m_c + r_c).$$

Für eine Plückersche Kurve mit  $d$  Doppelpunkten und  $s$  Spitzen wird (4b) zu

$$(4c) \quad w = 3n(n-2) - 6d - 8s.$$

Auch diese Formel stammt von Plücker [loc. cit.].

**9.6.6 Historisches.** *Poncelet* entdeckte 1822 ein Dualitätsprinzip der zweidimensionalen projektiven Geometrie, gemäß dem aus jedem Lehrsatz über Punkte, Geraden und Kegelschnitte (= Quadriken) durch Vertauschung von Punkten und Geraden ein dualer Lehrsatz entsteht. *Plücker* übertrug 1834 dieses Prinzip auf Kurven  $C$  höheren Grades, indem er sämtliche Tangenten an  $C$  als Punkte einer neuen dualen Kurve  $C^*$  deutete.

Klein, der 1866-68 sein Schüler und physikalischer Assistent war, nennt die Plückerschen Formeln 9.6.4(3) und 9.6.5(4) von 1834 seine Hauptleistung in der Theorie der algebraischen Kurven der Ebene, siehe [Klei 5], S. 124. Plücker widmete sich von 1834 an 30 Jahre lang der Experimentalphysik (Kristallmagnetismus, elektrische Entladungen, Spektrallinien). Danach kehrte er zur Geometrie zurück, ohne allerdings die Ideen aus Riemanns inzwischen erschienener Abhandlung [Rie 3] über Abelsche Funktionen (1857) einzubeziehen.

Die Betrachtung polarer Differentialformen geht auf *Abel*, [Ab] XII, Artikel 2 ff., und *Riemann*, [Ri 3], Artikel 9, zurück. Riemann hat die Bedeutung seiner Flächen für die algebraische Geometrie sehr wohl erkannt, aber nur am Beispiel ebener Quartiken in Vorlesungen eingehender erläutert.

Erst *Clebsch* brachte mit seiner viel mehr nach außen wirkenden Natur die Bearbeitung auf breiter Grundlage in Gang; vgl. [Klei 5], S. 296. Die Geschlechtsformel für Plücker'sche Kurven (Satz 9.6.3) bewies er 1864 mit Hilfe der Riemannschen Resultate über Abelsche Funktionen, siehe [Cle]. Seine Schüler *Brill* und *Noether* entwickelten zehn Jahre später in [BN 1] eine algebraische Theorie, in deren Rahmen die Ergebnisse von Clebsch ohne Rückgriff auf Abelsche Funktionen und transzendente Methoden begründet wurden. Dabei gelang es auch, den Einfluß beliebiger Singularitäten auf das Geschlecht zu erfassen, siehe [Noe].

Mit der Abhandlung [Cle] begründete Clebsch eine damals neue, abstraktere Sichtweise in der Geometrie: Zwei Kurven werden als isomorph angesehen, wenn ihre normalisierenden Flächen isomorph sind. Die projektiven Eigenschaften der Kurven, z.B. ihre Grade und Singularitäten, können verschieden sein. Shafarevich schrieb 1983 zu Clebschs 150. Geburtstag, [Sha 2]: „Diese Abhandlung kann als Zeugnis der Geburt der algebraischen Geometrie angesehen werden, als erster Schrei des Neugeborenen.“

## 9.7 Aufgaben

Falls nichts anderes gesagt wird, bezeichnet  $C \subset \mathbb{P}^2$  eine irreduzible projektive Kurve vom Grade  $n \geq 2$  und  $(X, \varphi)$  ihre Normalisierung.

- 1) Zeige: Jede singularitätenfreie ebene Kurve ist irreduzibel.
- 2) Sei  $\varphi = (f_0 : f_1 : f_2)$  mit  $f_j \in \mathcal{M}(X)$ . Die Funktion  $\eta := f_1/f_2 : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  heißt Projektion mit dem Zentrum  $c := (1 : 0 : 0)$ .
  - (i) Drücke  $v(\eta, x)$  durch  $m(\varphi, x)$  und  $k(\varphi, x)$  aus. Folgere:  $\text{gr } \eta = n - m_c$ . – Wenn es einen Punkt  $c \in C$  mit  $m_c = n - 1$  gibt, ist  $C$  rational.
  - (ii) Zeige: Jede Normalisierung einer glatten Quadrik ist zu  $(1 : z : z^2) : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^2$  projektiv äquivalent. – Singuläre Kubiken sind rational. – Wenn es einen Punkt  $c \in C$  mit  $m_c = n - 2$  gibt, ist  $C$  rational, elliptisch oder hyperelliptisch.
  - (iii) Vergleiche die Riemann-Hurwitzsche Formel für  $\eta$ , die Formel von Clebsch für  $C$  und die Formel 8.5.6(4) für das Gewicht von  $\varphi$  miteinander.
- 3) Zeige: Die Klasse von  $C$  ist die mit Vielfachheiten berechnete Anzahl der Tangenten, die durch einen festen Punkt außerhalb von  $C$  laufen. – Die einzige selbstduale Kurve  $C = C^*$  ist  $C = N(z_0^2 + z_1^2 + z_2^2)$ .
- 4) Deute Wendetangenten und Mehrfachtangente (= Tangente mit  $\geq 2$  Berührungspunkten) von  $C$  als Singularitäten der dualen Kurve  $C^*$ . – Zeige: Eine glatte Kubik hat neun Wendetangenten und keine Mehrfachtangente.
- 5) Sei  $C$  eine glatte Quartik.
  - (i) Zeige: Es gibt 24 gewöhnliche Wendetangenten und 28 Doppeltangenten. Dabei wird jede Tangente  $T_x \varphi$  mit  $k(\varphi, x) = 3$  als zwei gewöhnliche Wendetangenten plus eine Doppeltangente gezählt. – Die 28 Doppeltangenten sind reell sichtbar, siehe z.B. [Fi], S. 9.

(ii) Charakterisiere Tangenten, Wendetangenten und Doppeltangenten durch die entsprechenden holomorphen Differentialformen, vgl. 9.5.7.

(iii) Zeige: Für jede Wendetangente  $T_x\varphi$  von  $C = N(z_0^4 + z_1^4 + z_2^4)$  gilt  $k(\varphi, x) = 3$ . Wieviele echte Doppeltangenten gibt es?

6) Zeige: Hyperelliptische Flächen vom Geschlecht 3 lassen sich nicht in  $\mathbb{P}^2$  einbetten.

7) Sei  $(T, \varphi)$  die Normalisierung einer glatten Kubik  $C$  durch einen Torus  $T$ , so daß  $\varphi(0)$  ein Wendepunkt ist. Durch  $\varphi$  wird die additive Gruppenstruktur von  $T$  auf  $C$  übertragen. Zeige: Drei Punkte  $x, y, z \in C$  liegen genau dann auf einer Geraden  $\Theta$ , wenn  $x + y + z = 0$  ist. Wenn zwei Punkte zusammenfallen, ist  $\Theta$  die entsprechende Tangente. Genau dann, wenn  $3x = 0$  ist, ist  $x$  ein Wendepunkt. Es gibt neun Wendepunkte.

*Hinweis:* Sei  $\varphi = (f_0 : f_1 : f_2)$  mit  $f_j \in \mathcal{M}(T)$ . Es sei  $\Theta = N(L)$  und  $N(L_0)$  die Wendetangente durch 0. Wende das Abelsche Theorem 2.3.6 auf die Funktion  $L(f_0, f_1, f_2)/L_0(f_0, f_1, f_2)$  an.

8) Sei  $n \geq 3$ . Zeige: Zu jedem  $c \in C$  gibt es ein homogenes Polynom  $F$  zweiten Grades, so daß die Schnittzahl  $i_c(C; F) \geq 5$  ist. Man nennt  $c$  einen *sextaktischen Punkt*, wenn  $i_c(C; F) \geq 6$  erreicht werden kann. Zeige:

Alle Singularitäten und Wendepunkte sind sextaktisch. – Die Anzahl der sextaktischen Punkte ist endlich. – Beweise für eine glatte Kubik (Aufgabe 7) die Äquivalenz der Aussagen:  $x$  ist sextaktisch.  $\Leftrightarrow 6x = 0$ .  $\Leftrightarrow$  Die Tangente  $T_x\varphi$  trifft die Kubik in einem Wendepunkt  $y$ , wobei  $y = x$  zugelassen ist.

9) Zeige, daß die Polynome  $w^2 - (1 - z^2)(1 - \mu^2 z^2)$  für  $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0, \pm 1\}$  irreduzibel sind und nach ihrer Homogenisierung Kurven  $C_\mu \subset \mathbb{P}^2$  mit genau einer Singularität  $c$  definieren. – Wie lauten die Invarianten  $r_c, m_c$  und  $\delta_c$ ? – Zeige, daß die Kurven  $C_\mu$  durch Tori normalisiert werden, wobei alle Tori vorkommen.

Das Studium der  $\delta$ -Invarianten in 9.6.1 wird mit den Aufgaben 10)–12) fortgesetzt.

10) Beweise die Symmetrie  $\delta_{jk} = \delta_{kj}$ .

11) Wir betrachten 9.6.1(8) und lassen den konstanten Index  $j$  weg. Sei  $\eta = t^{m_0}$ , und sei  $f = c_1 t^{m_1} + c_2 t^{m_2} + \dots$  die Puiseux-Entwicklung mit  $c_\nu \neq 0$  und  $m_0 \leq m_1 < m_2 < \dots$ . Sei  $D_\nu := \text{ggT}\{m_0, \dots, m_{\nu-1}\}$ . Zeige ([Mil], p. 92 f):

(i)  $m_0 = D_1 \geq D_2 \geq \dots \geq D_{k+1} = 1$  nach endlich vielen Schritten, und  $D_{\nu+1}$  teilt  $D_\nu$ .

(ii)  $\delta := o\left(\prod_{\text{id} \neq \alpha \in \mathcal{D}(\eta)} (f - f \circ \alpha), a\right) = \sum_{\nu=1}^k m_\nu (D_\nu - D_{\nu+1})$ .

*Hinweis:* Sei  $A_\nu := \{\alpha \in D(\eta) : \alpha^{D_\nu} = \text{id} \text{ aber } \alpha^{D_{\nu+1}} \neq \text{id}\}$ . Dann ist  $\#A_\nu = D_\nu - D_{\nu+1}$  und  $o(f - f \circ \alpha, a) = m_\nu \Leftrightarrow \alpha \in A_\nu$ .

(iii)  $\delta - m_0 + 1$  ist gerade.

(iv) Folgere: Für jeden Punkt  $c \in C$  ist  $\nu_c = \delta_c - m_c + r_c$  gerade.

12) Man nennt  $c \in C$  einen *gewöhnlichen  $r$ -fachen Punkt*, wenn die Faser  $\varphi^{-1}(c) = \{a_1, \dots, a_r\}$  der Normalisierung aus  $r$  Punkten mit  $m(\varphi, a_j) = 1$  und paarweise verschiedenen Tangenten  $T_{a_j}\varphi$  besteht. Zeige, daß dann  $\delta_c = r(r-1)$  ist.

## 10. Harmonische Funktionen

Ein Fundamentalproblem der Funktionentheorie auf Riemannschen Flächen ist die Existenz nicht-konstanter meromorpher Funktionen. Nach dem Vorbild von Riemanns Dissertation (1851) konstruieren wir zunächst reelle *harmonische Funktionen*, welche lokal Realteile holomorpher Funktionen sind. Riemann benutzte dazu eine Methode der Potentialtheorie, die er als Dirichletsches Prinzip bezeichnete und nicht weiter begründete. Wir folgen statt dessen einem von Perron 1923 ersonnenen Verfahren.

Es beginnt mit *subharmonischen Funktionen*. Sie tragen nicht die Fessel des Identitätssatzes und lassen sich ähnlich wie stetige Funktionen „zusammenstückeln“. Harmonische Funktionen auf Flächen, die ein Kreisscheibenloch besitzen, werden als obere Einhüllende von Familien subharmonischer Funktionen gewonnen. Anschließend lassen wir das Scheibenloch zu einem Punkt  $a$  schrumpfen und gewinnen dadurch *Greensche Funktionen* bzw. *Elementarpotentiale*, die außerhalb von  $a$  harmonisch sind und in  $a$  eine vorgegebene Singularität wie  $\log|z|$  oder  $\operatorname{Re} z^n$  in 0 haben.

Eine harmonische Funktion  $u$  mit isolierter Singularität in  $a$  ist im allgemeinen nicht der Realteil einer außerhalb von  $a$  holomorphen Funktion, wie das Beispiel  $u(z) = \log|z|$  mit  $a = 0$  zeigt. Aber  $u$  bestimmt eine meromorphe Differentialform  $\omega_u$  (im Beispiel  $z^{-1}dz$ ). Durch die Quotienten dieser Formen für verschiedene isolierte Singularitäten erhält man genug meromorphe Funktionen, um den in 6.2.3 angekündigten *Riemannschen Existenzsatz* zur Punktentrennung zu beweisen.– Ein Nebenergebnis der Konstruktion harmonischer Funktionen auf Flächen mit Scheibenlöchern ist die *Abzählbarkeit der Topologie* für jede zusammenhängende Riemannsche Fläche.

Die Ausführung der Existenzbeweise und der darauf aufbauende Beweis des *Riemannschen Abbildungssatzes* in 11.1-2 wurde durch Vorlesungen von Huber [Hub] angeregt.– Die Differentialformen  $\omega_u$  zu den Elementarpotentialen  $u$  auf *kompakten* Flächen bilden in 13.1.2 den Ausgangspunkt für den Beweis des *Satzes von Riemann-Roch*.

Mit  $X$  wird stets eine *zusammenhängende* Riemannsche Fläche bezeichnet.

## 10.1 Grundlagen

Harmonische Funktionen  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  sind lokal Realteile holomorpher Funktionen  $f$ . Die Ableitungen  $df$  fügen sich zu einer global definierten holomorphen Differentialform  $\omega_u$  zusammen.

**10.1.1 Harmonische Funktionen und ihre holomorphen Differentialformen.** Eine Funktion  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *harmonisch*, wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung  $U$  und eine Funktion  $f \in \mathcal{O}(U)$  gibt, so daß  $u|_U = \operatorname{Re} f$  ist. Alle in  $X$  harmonischen Funktionen bilden einen reellen Vektorraum  $\mathcal{H}(X)$ . Für jede holomorphe Abbildung  $\eta : X \rightarrow Y$  und jedes  $v \in \mathcal{H}(Y)$  gehört  $v \circ \eta$  zu  $\mathcal{H}(X)$ .

**Satz.** Zu jedem  $u \in \mathcal{H}(X)$  gibt es genau eine Differentialform  $\omega_u \in \mathcal{E}_1(X)$  mit folgender Eigenschaft: Für jedes Gebiet  $G \subset X$  und jedes  $f \in \mathcal{O}(G)$  mit  $\operatorname{Re} f = u|_G$  gilt  $df = \omega_u|_G$ .

Für jeden Weg  $\gamma$  in  $X$  von  $a$  nach  $x$  gilt

$$(1) \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma} \omega_u = u(x) - u(a).$$

Die Abbildung  $\mathcal{H}(X) \rightarrow \mathcal{E}_1(X)$ ,  $u \mapsto \omega_u$ , ist  $\mathbb{R}$ -linear; ihr Kern besteht aus den konstanten Funktionen, und ihr Bild besteht aus allen Formen in  $\mathcal{E}_1(X)$  mit rein imaginären Perioden.

Wenn  $\omega_u$  eine Stammfunktion auf  $X$  besitzt, gibt es ein  $f \in \mathcal{O}(X)$  mit  $\operatorname{Re} f = u$ .

*Beweis.* Sei  $U \subset X$  eine Scheibe. Jede Funktion  $f_U \in \mathcal{O}(U)$  mit  $\operatorname{Re} f_U = u|_U$  ist bis auf die Addition einer rein imaginären Konstanten eindeutig bestimmt und hat daher eine Ableitung  $df_U$ , die nur von  $u|_U$  abhängt. Alle  $df_U$  setzen sich gemäß 7.1.2(3) zu einer Form  $\omega_u \in \mathcal{E}_1(X)$  mit der angegebenen Eigenschaft zusammen. Offenbar ist  $\omega_u = 0$ , wenn  $u$  konstant ist. – Die Gleichung (1) ist klar, wenn  $\gamma$  in einem Gebiet  $U$  liegt, wo ein  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $\omega_u = df$  existiert. Ein beliebiger Weg kann in Teilwege dieser Art zerlegt werden, so daß (1) allgemein gilt. Wegen (1) sind alle Perioden von  $\omega_u$  rein imaginär. – Folgendermaßen findet man zu jeder Form  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  mit rein imaginären Perioden ein  $u \in \mathcal{H}(X)$  mit  $\omega = \omega_u$ : Sei  $\zeta : Z \rightarrow X$  die universelle Überlagerung. Es gibt ein  $f \in \mathcal{O}(Z)$  mit  $df = \zeta^* \omega$ . Wegen der rein imaginären Perioden ist  $\operatorname{Re} f$  längs jeder  $\zeta$ -Faser konstant. Daher gibt es ein  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\operatorname{Re} f = u \circ \zeta$ . Da  $\zeta$  lokal biholomorph und  $\operatorname{Re} f$  harmonisch ist, gilt  $u \in \mathcal{H}(X)$ . Man verifiziert  $\omega = \omega_u$ . – Die letzte Behauptung ist eine Konsequenz von (1).  $\square$

Für jedes Gebiet  $X \subset \mathbb{C}$  besteht  $\mathcal{H}(X)$  aus allen  $\mathcal{C}^2$ -Funktionen  $u$ , welche mit  $z = x + iy$  die *Laplacesche Differentialgleichung*  $\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$  erfüllen. Zu  $u$  gehört die Form  $\omega_u = (u_x - iu_y)dz$ .

**10.1.2 Fundamenteleigenschaften** holomorpher Funktionen vererben sich auf harmonische Funktionen:

**Offenheitssatz.** *Jede nicht konstante Funktion  $u \in \mathcal{H}(X)$  ist eine offene Abbildung  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Jeder Punkt liegt in einer Scheibe  $U$ , so daß  $u|U = \operatorname{Re} f$  für ein  $f \in \mathcal{O}(U)$  gilt. Wir zeigen, daß  $u|U$  offen ist: Weil  $u$  nicht konstant ist, gilt  $\omega_u \neq 0$ , also auch  $df \neq 0$ . Dann ist  $f$  offen, also auch  $u|U = \operatorname{Re} \circ f$ .  $\square$

**Maximumprinzipien.** (i) *Hat  $u \in \mathcal{H}(X)$  an einer Stelle  $a \in X$  ein lokales Maximum bzw. Minimum, so ist  $u$  konstant in  $X$ . Auf kompakten, zusammenhängenden Flächen sind harmonische Funktionen konstant.*

(ii) *Sei  $G \subset X$  ein Gebiet mit kompakter Hülle  $\bar{G}$ . Wenn  $u$  auf  $\bar{G}$  stetig und in  $G$  harmonisch aber nicht konstant ist, gilt*

$$\min u(\partial G) < u(x) < \max u(\partial G) \quad \text{für alle } x \in G.$$

*Beweis.* (i) Es gibt offene Umgebungen von  $a$  mit nicht-offenen  $u$ -Bildern.–

(ii) Wegen (i) werden das Minimum  $m$  und das Maximum  $M$  von  $u$  in  $\partial G$  angenommen, und für  $x \in G$  gilt  $m < u(x) < M$ .  $\square$

**Folgerung.** *Sei  $X$  kompakt. Wenn alle Perioden von  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  reell sind, ist  $\omega = 0$ .*

Denn nach Satz 10.1.1 gilt  $i\omega = \omega_u$  für eine Funktion  $u \in \mathcal{H}(X)$ . Wegen (i) ist  $u$  konstant, also  $\omega_u = 0$ .  $\square$

**Identitätssatz.** (i) *Zwei Funktionen  $u, v \in \mathcal{H}(X)$ , die in einer nicht-leeren offenen Menge  $U$  übereinstimmen, sind identisch.*

(ii) *Sei  $G \subset X$  ein Gebiet mit kompakter Hülle  $\bar{G}$ . Seien  $u, v$  stetig auf  $\bar{G}$  und harmonisch in  $G$ . Aus  $u|_{\partial G} = v|_{\partial G}$  folgt  $u = v$  in  $\bar{G}$ .*

*Beweis.* (i) Die Funktion  $u - v \in \mathcal{H}(X)$  ist auf  $U$  konstant  $= 0$  und daher nach dem Offenheitssatz auf ganz  $X$  konstant  $= 0$ .– (ii) Man wende das Maximumprinzip (ii) auf  $u - v$  an.  $\square$

**10.1.3 Harmonische Funktionen in Ringgebieten.** Sei  $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  ein Ringgebiet um  $0$ , wobei  $0 \leq r < R \leq \infty$ .

**Satz.** *Jede Funktion  $u \in \mathcal{H}(A)$  läßt sich als*

$$(1) \quad u(z) = \beta_0 \log |z| + \operatorname{Re} f(z) \quad \text{mit } \beta_0 \in \mathbb{R} \text{ und } f \in \mathcal{O}(A)$$

*darstellen. Die zugehörige Differentialform lautet:*

$$(2) \quad \omega_u = \beta_0 dz/z + df.$$

*Die Funktion  $u$  läßt sich in eine normal konvergente reelle Fourier-Reihe entwickeln: Für  $r < t < R$  und  $\varphi \in \mathbb{R}$  gilt*

$$u(te^{i\varphi}) = \alpha_0 + \beta_0 \log t + \sum_{\nu=1}^{\infty} ((\alpha_{\nu} t^{\nu} + \alpha_{-\nu} t^{-\nu}) \cos \nu \varphi + (\beta_{\nu} t^{\nu} + \beta_{-\nu} t^{-\nu}) \sin \nu \varphi)$$

*Beweis.* Die Funktionen (1) sind auf  $A$  harmonisch, und ihre zugehörigen Formen  $\omega_u$  haben die Gestalt (2). Da jede Form in  $\mathcal{E}_1(A)$  mit rein imaginären Perioden diese Gestalt hat, folgt die erste Behauptung. In der Laurent-Entwicklung  $f = \sum a_\nu z^\nu$  können wir annehmen, daß  $\alpha_0 = a_0$  reell ist. Durch den Realteil dieser Entwicklung erhalten wir die angegebene normal konvergente Fourier-Reihe. Ihre Koeffizienten sind die Real- und Imaginärteile der Laurent-Koeffizienten:  $a_\nu = \alpha_\nu - i\beta_\nu$  für  $\nu \neq 0$ .  $\square$

Für  $r < t < R$  gelten folgende *Integralformeln*:

$$(3a) \quad a_{0,t} := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(te^{i\varphi}) d\varphi = \alpha_0 + \beta_0 \log t$$

$$(3b) \quad a_{\nu,t} := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(te^{i\varphi}) \cos \nu \varphi d\varphi = \alpha_\nu t^\nu + \alpha_{-\nu} t^{-\nu} \quad \text{für } \nu \geq 1$$

$$(3c) \quad b_{\nu,t} := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(te^{i\varphi}) \sin \nu \varphi d\varphi = \beta_\nu t^\nu + \beta_{-\nu} t^{-\nu} \quad \text{für } \nu \geq 1,$$

welche man mit der Fourier-Reihe bestätigt.  $\square$

**Ergänzung:** Wenn  $0 < r < R < \infty$  und  $u$  auf  $\bar{A}$  stetig ist, kann man beide Radien  $t = r$  und  $t = R$  in (3) einsetzen und nach den Fourier-Koeffizienten auflösen. Das führt auf die in 10.7.7 benötigten Formeln:

$$(4a) \quad \alpha_0 = \frac{a_{0,r} \log R - a_{0,R} \log r}{\log R - \log r}, \quad \beta_0 = \frac{a_{0,R} - a_{0,r}}{\log R - \log r}$$

$$(4b) \quad \alpha_\nu = \frac{R^\nu a_{\nu,R} - r^\nu a_{\nu,r}}{R^{2\nu} - r^{2\nu}}, \quad \alpha_{-\nu} = r^\nu (a_{\nu,r} - r^\nu \alpha_\nu) \quad \text{für } \nu \geq 1$$

$$(4c) \quad \beta_\nu = \frac{R^\nu b_{\nu,R} - r^\nu b_{\nu,r}}{R^{2\nu} - r^{2\nu}}, \quad \beta_{-\nu} = r^\nu (b_{\nu,r} - r^\nu \beta_\nu) \quad \text{für } \nu \geq 1. \quad \square$$

**10.1.4 Isolierte Singularitäten.** Sei  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte. Wir benutzen Satz 10.1.3 für  $r = 0$ . Für jede Funktion  $u \in \mathcal{H}(U \setminus \{a\})$  gilt  $\omega_u = \beta dz/z + df$  mit  $\beta \in \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ . Das Residuum  $\beta = \text{res}(\omega_u, a)$  und der Typ der isolierten Singularität von  $f$  in  $a$  hängen nicht von  $z$  ab. Wir nennen  $a$  einen *n-fachen Pol* von  $u$ , wenn  $\beta = 0$  ist und  $f$  in  $a$  einen *n-fachen Pol* hat. Wenn  $\beta \neq 0$  und  $f$  holomorph nach  $a$  fortsetzbar ist, nennen wir  $a$  eine *logarithmische Singularität* von  $u$ ; sie heißt *normiert*, wenn  $\beta = \text{res}(\omega_u, a) = -1$  ist.

**Hebbarkeitssatz.** Sei  $a \in X$ . Jede auf  $X \setminus \{a\}$  harmonische Funktion, die um  $a$  beschränkt ist, läßt sich nach  $a$  harmonisch fortsetzen.

*Beweis.* Für eine Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gilt  $u|(U \setminus \{a\}) = \beta \log |z| + \text{Re } f$  mit  $\beta \in \mathbb{R}$  und  $f \in \mathcal{O}(U \setminus \{a\})$ . Da  $u$  um  $a$  beschränkt ist, folgt  $\beta = 0$  aus 10.1.3(3a). Somit hat  $f$  um  $a$  einen beschränkten Realteil und läßt sich daher holomorph nach  $a$  fortsetzen.  $\square$



**10.1.5 Homologisch einfach zusammenhängende Flächen.** Sei  $E \subset X$  lokal endlich und  $H_1(X) = 0$ . Für  $u \in \mathcal{H}(X \setminus E)$  gilt:

- (i) Wenn alle Punkte von  $E$  Pole von  $u$  sind, gibt es ein  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $\operatorname{Re} f = u$  auf  $X \setminus E$ .
- (ii) Wenn  $u$  in allen Punkten von  $E$  logarithmische Singularitäten hat und die entsprechenden Residuen von  $\omega_u$  ganzzahlig sind, gibt es ein  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $|f| = e^u$  auf  $X \setminus E$  und  $o(f, x) = \operatorname{res}(\omega_u, x)$  für  $x \in X$ .

*Beweis.* (i) Man kann  $\omega_u$  zu einer Form zweiter Gattung auf  $X$  fortsetzen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz in 7.7.4 gibt es ein  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $\omega_u = df$ . Nach der letzten Aussage in Satz 10.1.1 läßt sich zusätzlich  $\operatorname{Re} f|(X \setminus E) = u$  erreichen.

(ii) Die Form  $\omega_u$  läßt sich zu einer Form dritter Gattung auf  $X$  fortsetzen, welche ganzzahlige Residuen hat. Nach 7.8.3(4) ist  $\omega_u = df/f$  die logarithmische Ableitung einer Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$ . Man wählt einen Basispunkt  $a \in X \setminus E$  und zu jedem  $x \in X \setminus E$  einen Weg  $\gamma$  in  $X \setminus E$  von  $a$  nach  $x$ . Nach 7.8.1(4) gilt  $\exp \int_\gamma \omega_u = f(x)/f(a)$ , also  $\exp(u(x) - u(a)) = |f(x)/f(a)|$ . Man bestimmt den bei  $f$  frei verfügbaren Faktor so, daß  $|f(a)| = \exp u(a)$  ist und erhält  $|f| = e^u$ .  $\square$

## 10.2 Die Poissonsche Integralformel

Die Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben wird in der Potentialtheorie durch die Poissonsche Integralformel ersetzt. Die Rolle des Cauchy-Kerns  $1/(\zeta - z)$  übernimmt der Poisson-Kern

$$P(z, \zeta) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} = \operatorname{Re} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} = \operatorname{Re} \left[ \zeta \left( \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) \right], \quad z, \zeta \in \mathbb{C}, \quad z \neq \zeta,$$

der sich in klassischer Form so schreibt:

$$P(re^{i\varphi}, Re^{i\theta}) = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2}.$$

Die Poissonsche Formel ermöglicht die Übertragung der Konvergenzsätze von Weierstraß und Montel auf harmonische Funktionen (10.2.3-4). Anschließend besprechen wir das Harnacksche Konvergenzprinzip, das die Ordnung der reellen Zahlen benutzt. Auf ihm und seiner Weiterentwicklung zum Perronschen Prinzip beruhen die wichtigen Beiträge harmonischer Funktionen zur komplexen Funktionentheorie.

Wenn  $A$  Teilmenge des Definitionsbereichs einer  $\mathbb{C}$ -wertigen Funktion  $f$  ist, benutzen wir die Bezeichnung  $|f|_A := \sup \{|f(x)| : x \in A\}$ .

**10.2.1 Cauchysche und Poissonsche Integralformel.** Wir zerlegen die Cauchysche Integralformel in Real- und Imaginärteil. Sei  $B = \mathbb{E}_R$ ,  $R < \infty$ . Sei  $f$  holomorph um  $\bar{B}$ . Für  $z \in B$  gilt

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} P(z, \zeta) f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) f(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta.$$

*Beweis.* Für jeden Punkt  $w \in B$  ist  $f(z)/(R^2 - \bar{w}z)$  als Funktion von  $z$  holomorph um  $\bar{B}$ . Daher gilt nach der Cauchyschen Integralformel

$$\frac{f(z)}{R^2 - \bar{w}z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B} \frac{f(\zeta)}{R^2 - \bar{w}\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \quad \text{für } w, z \in B.$$

Setzt man  $w := z$  und beachtet  $R^2 - \bar{z}\zeta = \zeta(\bar{\zeta} - \bar{z})$ , so folgt (1).  $\square$

Nach Satz 10.1.1 ist jede um  $\bar{B}$  harmonische Funktion der Realteil einer holomorphen Funktion  $f$ . Daher folgt aus (1) die

### Poissonsche Integralformel

$$(2) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) u(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta \quad \text{für } z \in B. \quad \square$$

Die Spezialfälle  $z = 0$  bzw.  $u = 1$  ergeben

$$(3) \quad u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta \quad (\text{Mittelwertgleichung}),$$

$$(4) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta = 1 \quad \text{für } z \in B. \quad \square$$

**10.2.2 Vorgabe von Randwerten.** Für  $B$  wie in 10.2.1 und jede stetige Funktion  $f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$(1) \quad u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) f(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta \quad \text{für } z \in B$$

der Realteil der holomorphen Funktion

$$(2) \quad h(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Re}^{i\theta} + z}{\operatorname{Re}^{i\theta} - z} f(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta.$$

Insbesondere ist  $u$  harmonisch in  $B$ . Für  $z$  mit  $|z| \leq r < R$  gilt:

$$(3) \quad |u(z)| \leq |h(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{R+r}{R-r} \int_0^{2\pi} |f(\operatorname{Re}^{i\theta})| d\theta \leq \frac{R+r}{R-r} |f|_{\partial B}.$$

*Beweis.* Offensichtlich ist  $h \in \mathcal{O}(B)$  und  $u = \operatorname{Re} h \in \mathcal{H}(B)$ . Die Abschätzungen (3) folgen aus  $|\zeta + z|/|\zeta - z| \leq (R+r)/(R-r)$  für  $|\zeta| = R$  und  $|z| \leq r$ .  $\square$

**10.2.3 Weierstraßscher Konvergenzsatz.** (a) Jede kompakt konvergente Folge  $u_n \in \mathcal{H}(X)$  hat eine Grenzfunktion  $u \in \mathcal{H}(X)$ .

(b) Sei  $G \subset X$  ein Gebiet mit kompakter Hülle  $\bar{G}$ , und sei  $u_n$  eine Folge stetiger Funktionen auf  $\bar{G}$ , die in  $G$  harmonisch sind. Wenn  $u_n$  auf  $\partial G$  gleichmäßig konvergiert, gilt dasselbe auf  $\bar{G}$ , und die auf  $\bar{G}$  stetige Grenzfunktion ist in  $G$  harmonisch.

*Beweis.* (a) Wir dürfen  $X = \mathbb{E}$  annehmen. Sei  $0 < R < 1$ . Nach 10.2.1(2) gilt

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) u_n(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta$$

für alle  $z \in B := \mathbb{E}_R$ . Da die Folge  $u_n|_{\partial B}$  gleichmäßig gegen  $u|_{\partial B}$  konvergiert, kann man Integration und Limes vertauschen:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) u(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta \quad \text{für } z \in B.$$

Nach 10.2.2 ist dann  $u \in \mathcal{H}(\mathbb{E}_R)$  für alle  $R \in (0, 1)$ , also  $u \in \mathcal{H}(\mathbb{E})$ .

(b) Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$ , so daß  $|u_m - u_n|_{\partial G} \leq \varepsilon$  für alle  $m, n \geq k$ . Das Maximumprinzip gibt  $|u_m - u_n|_{\bar{G}} \leq \varepsilon$  für alle  $m, n \geq k$ . Die Folge  $u_n$  konvergiert daher gleichmäßig auf  $\bar{G}$ .  $\square$

**10.2.4 Satz von Montel.** Jede lokal beschränkte Folge  $u_1, u_2, \dots$  in  $\mathcal{H}(X)$  hat eine kompakt konvergente Teilfolge, deren Limes zu  $\mathcal{H}(X)$  gehört.

*Beweis.* Zunächst sei  $X$  eine Umgebung von  $\bar{\mathbb{E}}_R$ . Dann existiert eine Schranke  $M$  mit  $|u_\nu(z)| \leq M$  für  $|z| \leq R$  und alle  $\nu$ . Nach 10.2.1-2 gibt es Funktionen  $h_\nu \in \mathcal{O}(\mathbb{E}_R)$  mit  $\operatorname{Re} h_\nu = u_\nu|_{\mathbb{E}_R}$ , so daß  $|h_\nu(z)| \leq M(R+r)/(R-r)$  für  $|z| \leq r < R$  und alle  $\nu$  gilt. Die Folge  $(h_\nu)$  ist somit lokal beschränkt. Nach dem kleinen Satz von Montel, siehe 5.6.3, konvergiert eine Teilfolge der  $h_\nu$  kompakt auf  $\mathbb{E}_R$ . Dasselbe gilt dann für die Realteile.

Die Fläche  $X$  wird wegen der Abzählbarkeit der Topologie, siehe 3.5.3, durch abzählbar viele Scheiben  $B_1, B_2, \dots$  mit kompakten Hüllen überdeckt. Eine Teilfolge  $u_{1,\nu}$  von  $u_\nu$  konvergiert auf  $\bar{B}_1$  gleichmäßig. Von  $u_{1,\nu}$  gibt es eine Teilfolge  $u_{2,\nu}$ , welche auf  $\bar{B}_2$ , also auch auf  $B_1 \cup B_2$  gleichmäßig konvergiert, usw. Die Diagonalfolge  $u_{\nu,\nu}$  konvergiert kompakt auf  $X$ .  $\square$

**10.2.5 Harnacksches Prinzip.** Wir verlassen die Analogie zu den holomorphen Funktionen und betrachten nach Harnack [Harn], S. 62-68, die *monotone Konvergenz* harmonischer Funktionen. (Der Mathematiker Axel Harnack (1855-1888), ein Schüler von Felix Klein, war ein Bruder des später geadelten Theologen Adolf von Harnack (1851-1930).) Der Ausgangspunkt ist die direkt aus der Mittelwertgleichung und 10.2.2(3) fließende

**Harnacksche Ungleichung.** Sei  $0 < r < R < 1$ , sei  $u$  harmonisch in  $\mathbb{E}$  und nie negativ. Dann gilt

$$(1) \quad u(z) \leq u(0)(R+r)/(R-r) \quad \text{für alle } z \in \bar{\mathbb{E}}_r. \quad \square$$

**Harnackscher Konvergenzsatz.** Sei  $u_n$  eine monoton wachsende Folge von Funktionen in  $\mathcal{H}(\mathbb{E})$ . Wenn die Folge  $u_n(a)$  an einer Stelle  $a \in \mathbb{E}$  beschränkt ist, konvergiert  $u_n$  kompakt gegen eine in  $\mathbb{E}$  harmonische Funktion.

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $a = 0$ . Wegen der Monotonie existiert  $\lim u_n(0) \in \mathbb{R}$ . Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es also ein  $N$ , so daß  $u_m(0) - u_n(0) \leq \varepsilon$  für  $m \geq n \geq N$  gilt. Mit (1) folgt, wenn  $0 < r < R < 1$  ist,  $0 \leq u_m(z) - u_n(z) \leq \varepsilon(R+r)/(R-r)$  für  $m \geq n \geq N$  und  $z \in \bar{\mathbb{E}}_r$ . Da  $r \in (0, 1)$  beliebig ist, konvergiert die Folge  $u_n$  in  $\mathbb{E}$  kompakt. Nach 10.2.3 ist ihre Grenzfunktion harmonisch in  $\mathbb{E}$ .  $\square$

**Harnacksches Prinzip.** Es sei  $\mathcal{F}$  eine nicht leere Menge von harmonischen Funktionen in  $\mathbb{E}$ . Zu je zwei Funktionen  $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$  gebe es eine Funktion  $u \in \mathcal{F}$  mit  $u \geq \max\{u_1, u_2\}$ . Die obere Einhüllende  $\tilde{u}$  mit  $\tilde{u}(z) := \sup\{u(z) : u \in \mathcal{F}\}$ , ist harmonisch in  $\mathbb{E}$  oder konstant  $\infty$ .

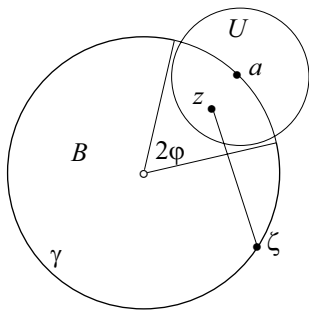
*Beweis.* Sei  $a \in \mathbb{E}$  und  $\tilde{u}(a) < \infty$ . Es gibt eine Folge von Funktionen  $u_n \in \mathcal{F}$  mit  $\lim u_n(a) = \tilde{u}(a)$ . Wir wählen induktiv Funktionen  $\hat{u}_n \in \mathcal{F}$ , so daß  $\hat{u}_1 = u_1$  und  $\hat{u}_n \geq \max\{u_n, \hat{u}_{n-1}\}$ . Dann gilt  $\hat{u}_1 \leq \hat{u}_2 \leq \dots$  in  $\mathbb{E}$  und  $\hat{u}_n(a) \leq \tilde{u}(a)$ . Nach dem Harnackschen Konvergenzsatz konvergiert  $\hat{u}_n$  in  $\mathbb{E}$  gegen eine harmonische Funktion  $\hat{u}$ . Wegen  $u_n(a) \leq \hat{u}_n(a)$  gilt  $\hat{u}(a) = \tilde{u}(a)$ . Wir behaupten, daß  $\hat{u} = \tilde{u}$  in ganz  $\mathbb{E}$  gilt: Sei  $b \in \mathbb{E}$ . Es gibt Funktionen  $v_n \in \mathcal{F}$  mit  $\lim v_n(b) = \tilde{u}(b)$ . Wir wählen  $\hat{v}_n \in \mathcal{F}$  so, daß  $\hat{v}_1 = v_1$  und  $\hat{v}_n \geq \max\{v_n, \hat{v}_{n-1}, \hat{u}_n\}$ . Wegen  $\hat{v}_n(a) \leq \tilde{u}(a)$  konvergiert die Folge  $\hat{v}_n$  in  $\mathbb{E}$  kompakt gegen eine harmonische Funktion  $\hat{v}$ . Nach Wahl der  $\hat{v}_n$  gilt  $\hat{v} \geq \hat{u}$  in  $\mathbb{E}$  und  $\hat{v}(a) = \tilde{u}(a), \hat{v}(b) = \tilde{u}(b)$ . Die in  $\mathbb{E}$  harmonische Funktion  $\hat{u} - \hat{v} \leq 0$  nimmt also in  $a$  ein Maximum an. Mit dem Maximumsprinzip folgt  $\hat{u} = \hat{v}$  in  $\mathbb{E}$ , also  $\hat{u}(b) = \tilde{u}(b)$ .  $\square$

### 10.3 Dirichletsches Randwertproblem

Sei  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem Rande eines Gebietes  $G \subset X$  stetig. Die Aufgabe,  $f$  zu einer auf  $\bar{G}$  stetigen und in  $G$  harmonischen Funktion fortzusetzen, heißt *Dirichletsches Randwertproblem*. Ausgehend von 10.2.2 lösen wir es für Kreisscheiben und anschließend für Ringgebiete. Sei  $B := \mathbb{E}_R$  und  $R < \infty$ .

**10.3.1 Satz von Schwarz (Lösung für Kreisscheiben).** Zu jeder stetigen Funktion  $f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es genau eine auf  $\bar{B}$  stetige und in  $B$  harmonische Funktion  $u$  mit  $u|_{\partial B} = f$ . Mit dem Poisson-Kern  $P$  gilt

$$(1) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, \operatorname{Re}^{i\theta}) f(\operatorname{Re}^{i\theta}) d\theta \quad \text{für } z \in B.$$



**Fig. 10.3.1** Die durch das Integral (1) definierte harmonische Funktion  $u$  auf  $B$  schließt sich in jedem Randpunkt  $a$  stetig an die gegebene Funktion  $f$  an.

*Beweis.* Die Eindeutigkeit von  $u$  folgt aus dem Identitätssatz (ii) in 10.1.2.– Wir definieren  $u : \bar{B} \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $B$  durch (1) und auf  $\partial B$  als  $f$ . Nach 10.2.2 ist  $u|_B$  harmonisch. Es bleibt zu zeigen (und das ist die crux), daß  $u$  an jeder Stelle  $a \in \partial B$  stetig ist. Folgendermaßen finden wir zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U$  von  $a$ , so daß  $|u(z) - f(a)| < \varepsilon$  für  $z \in U \cap B$  gilt, siehe Figur 10.3.1: In (1) können wir  $R$  durch  $a$  ersetzen. Wegen 10.2.1(4) gilt

$$u(z) - f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, ae^{i\theta}) (f(ae^{i\theta}) - f(a)) d\theta.$$

Durch ein  $\varphi \in (0, \pi)$  zerlegen wir die rechte Seite in zwei Integrale  $v_1(z)$  für  $-\varphi \leq \theta \leq \varphi$  und  $v_2(z)$  für  $\varphi \leq \theta \leq 2\pi - \varphi$ . Wenn man  $\varphi$  klein genug macht, gilt  $|v_1(z)| < \varepsilon/2$  für alle  $z \in B$ . Zur Abschätzung von  $v_2(z)$  wählen wir  $U$  so klein, daß  $\bar{U}$  den Bogen  $\gamma = \{ae^{i\theta} : \varphi \leq \theta \leq 2\pi - \varphi\}$  nicht trifft. Es gibt dann ein  $d > 0$ , so daß für alle  $(z, \zeta) \in (U \cap B) \times \gamma$  der Abstand  $|\zeta - z| \geq d$  ist und

$$P(z, \zeta) = \frac{|a|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} < \frac{2R}{d^2} (|a| - |z|) \leq \frac{2R}{d^2} |z - a|$$

gilt. Damit schätzen wir das Integral  $v_2(z)$  ab:

$$|v_2(z)| < 2R|z - a| \cdot M/d^2 \quad \text{mit} \quad M = \max\{|f(\zeta) - f(a)| : \zeta \in \partial B\}.$$

Wenn man  $U$  klein genug macht, folgt  $|v_2(z)| < \varepsilon/2$  für  $z \in U \cap B$ .  $\square$

Unter dem Einfluß von Weierstraß und Heine legte Schwarz in [Sch] 2, S. 178 und 188, größten Wert auf einen genauen Stetigkeitsbeweis.– Es gibt kein entsprechendes Ergebnis für holomorphe Funktionen: Eine stetige Funktion  $f : \partial\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$  hat i.a. keine stetige Fortsetzung nach  $\bar{\mathbb{E}}$ , die auf  $\mathbb{E}$  holomorph ist.

**10.3.2 Trigonometrische Approximation.** Zu jeder stetigen Funktion  $f : \partial\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein Polynom  $p \in \mathbb{C}[z]$ , so daß gilt:

$$|f - \operatorname{Re} p|_{\partial\mathbb{E}} \leq \varepsilon.$$

*Beweis.* Wählt man  $u$  zu  $f$  wie im Schwarzschen Satz, so gibt es ein  $t \in (0, 1)$  mit  $|f(\zeta) - u(t\zeta)| \leq \varepsilon/2$  für alle  $\zeta \in \partial\mathbb{E}$  (gleichmäßige Stetigkeit auf Kompakta). Es gibt ein  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{E})$  mit  $u|_{\mathbb{E}} = \operatorname{Re} h$ . Wegen der normalen Konvergenz der Taylorreihe  $h(z) = \sum_0^\infty a_\nu z^\nu$  in  $\mathbb{E}$  gilt  $|h(t\zeta) - \sum_0^n a_\nu t^\nu \zeta^\nu| \leq \varepsilon/2$  für alle  $\zeta \in \partial\mathbb{E}$  und große  $n$ . Die Behauptung folgt für  $p(z) := \sum_0^n a_\nu t^\nu z^\nu$  wegen  $f(\zeta) - \operatorname{Re} p(\zeta) = f(\zeta) - u(t\zeta) + \operatorname{Re}(h(t\zeta) - p(\zeta))$  für alle  $\zeta \in \partial\mathbb{E}$ .  $\square$

*Bemerkung.* Wegen  $\zeta = e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$  spricht man von trigonometrischer Approximation.

**10.3.3 Lösung für Ringgebiete.** Seien  $0 < r < R$  reelle Zahlen.

(1) Zu zwei komplexen Polynomen  $p(z)$  und  $P(z)$  gibt es eine auf  $\mathbb{C}^\times$  harmonische Funktion  $u$  mit  $u = \operatorname{Re} p$  auf  $\partial\mathbb{E}_r$  und  $u = \operatorname{Re} P$  auf  $\partial\mathbb{E}_R$ .

*Beweis.* Zunächst sei  $p(z) = az^n$  ein Monom  $\neq 0$  und  $P(z) = 0$ . Im Falle  $n = 0$  leistet  $u(z) = \alpha \log |z| + \beta$  mit geeigneten reellen Zahlen  $\alpha, \beta$  das Gewünschte. Im Falle  $n \geq 1$  bildet man  $u(z) = \operatorname{Re}(bz^n - \bar{b}R^{2n}z^{-n})$ . Dann ist  $u|_{\partial\mathbb{E}_R} = 0$ , und mit  $b := a/(1 - (R/r)^{2n})$  erreicht man zusätzlich  $u = \operatorname{Re}(az^n)$  längs  $\partial\mathbb{E}_r$ . Ebenso folgt (1), wenn  $p(z) = 0$  und  $P(z) = az^n$  ist. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Bildung endlicher Summen.  $\square$

**Satz.** Jede auf dem Rande  $\partial A$  des Ringgebietes  $A := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  stetige,  $\mathbb{R}$ -wertige Funktion  $f$  läßt sich in eindeutiger Weise zu einer auf  $\bar{A}$  stetigen und in  $A$  harmonischen Funktion fortsetzen.

*Beweis.* Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es wegen der trigonometrischen Approximation 10.3.2 zwei komplexe Polynome  $p_n$  und  $P_n$  mit

$$(2) \quad |f - p_n|_{\partial \mathbb{D}_r} < n^{-1} \quad \text{und} \quad |f - P_n|_{\partial \mathbb{D}_R} < n^{-1}.$$

Nach (1) kann man in (2) beide Polynome durch eine Funktion  $u_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^\times)$  ersetzen. Dann konvergiert  $u_n|_{\partial A}$  gleichmäßig nach  $f$ . Nach 10.2.3 (b) konvergiert  $u_n$  auf  $\bar{A}$  gegen eine stetige Funktion  $u$ , die in  $A$  harmonisch ist. Der Identitätssatz (ii) in 10.1.2 zeigt die Eindeutigkeit.  $\square$

**10.3.4 Historisches.** Riemann lernte in Dirichlets Vorlesungen den um 1850 aktuellen Stand der Potentialtheorie kennen, welcher kurz zuvor durch Arbeiten von W. Thompson (Lord Kelvin) erreicht worden war. Durch Riemanns Vorbild werden noch heute potentialtheoretische Probleme und Methoden nach Dirichlet benannt, obwohl er nicht der Urheber sonder nur der Vermittler war.

Das *Dirichletsche Prinzip*, welches Riemann zur Lösung der Randwertaufgabe heranzog, wird von uns nicht benutzt. Die berechtigte Kritik an diesem Prinzip, die schon zu Riemanns Lebzeiten laut wurde, erweckte seinerzeit Zweifel, ob die Riemannsche Funktionentheorie sicher begründet sei. Siehe dazu S. Hildebrandt, *Bemerkung zum Dirichletschen Prinzip*, in [Wyl 1].

## 10.4 Subharmonische Funktionen

Der Weg zur Konstruktion harmonischer Funktionen mit vorgegebenen Singularitäten wäre weniger mühsam, wenn mit je zwei harmonischen Funktionen  $u, v$  auch  $\max(u, v)$  harmonisch wäre. Subharmonische Funktionen haben diese Eigenschaft und erfüllen wie die harmonischen das Maximumprinzip. Perron schlug daher 1923 vor, Familien subharmonischer Funktionen heranzuziehen, welche in Verallgemeinerung des Harnackschen Prinzips ebenfalls harmonische obere Einhüllende besitzen.

**10.4.1 Definition. Elementare Eigenschaften.** Eine stetige Funktion  $v : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *subharmonisch*, wenn für jedes Gebiet  $G \subset X$  und jede Funktion  $h \in \mathcal{H}(G)$  gilt: Aus  $v|_G \leq h$  folgt  $v(x) < h(x)$  für alle  $x \in G$  oder  $v|_G = h$ .

Subharmonizität ist eine *lokale Eigenschaft*, d.h.  $v$  ist genau dann subharmonisch, wenn jeder Punkt in  $X$  eine Umgebung  $U$  besitzt, so daß  $v|_U$  subharmonisch ist. Wir bezeichnen die Menge aller in  $X$  subharmonischen Funktionen mit  $\mathcal{S}(X)$ . Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen gibt sofort  $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{S}(X)$ . Für  $v, v^* \in \mathcal{S}(X)$  und reelle  $\lambda \geq 0$  gilt:

$$v + v^* \in \mathcal{S}(X) \quad , \quad \lambda v \in \mathcal{S}(X) .$$

**10.4.2 Maximumprinzipien.** (1) Wenn die subharmonische Funktion  $v$  an einer Stelle  $a \in X$  ein Maximum hat, ist sie konstant.

(2) Sei  $G \subset X$  ein Gebiet mit kompakter Hülle  $\bar{G}$ . Für die stetigen Funktionen  $v, u : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$  gelte, daß  $v$  subharmonisch und  $u$  harmonisch in  $G$  ist. Aus  $v|_{\partial G} \leq u|_{\partial G}$  folgt  $v \leq u$  auf  $\bar{G}$ .

*Beweis.* (1) Man benutzt die Definition mit der konstanten harmonischen Funktion  $v(a)$ . – (2) Die Differenz  $v - u$  nimmt an einer Stelle  $a \in \bar{G}$  ihr Maximum an. Wenn  $a \in \partial G$  ist, folgt die Behauptung sofort. Bei  $a \in G$  ist  $v - u$  nach (1) auf  $G$ , also auch auf  $\bar{G}$  konstant, so daß sich  $v \leq u$  wieder von  $\partial G$  nach  $\bar{G}$  fortsetzt.  $\square$

Wir besprechen eine Variante des Maximumprinzips für nicht-kompakte Flächen  $X$ . Eine stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt längs des idealen Randes von  $X$  durch  $m \in \mathbb{R}$  (nach oben) beschränkt, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein Kompaktum  $K$  gibt, so daß  $f < m + \varepsilon$  außerhalb  $K$  gilt. Dann ist  $f$  auf ganz  $X$  durch  $m$  beschränkt, oder  $f$  nimmt in  $X$  ein Maximum  $M > m$  an. Letzteres geht für subharmonische Funktionen nicht, denn nach dem Maximumprinzip wäre  $f = M$  konstant. Da  $X$  nicht kompakt ist, gäbe es also zu jedem  $\varepsilon > 0$  einen Punkt  $x \in X$ , wo  $M = f(x) < m + \varepsilon$ , was  $M > m$  widerspricht. Damit wurde bewiesen:

**Satz.** Sei  $X$  nicht-kompakt. Wenn  $v \in \mathcal{S}(X)$  längs des idealen Randes durch  $m \in \mathbb{R}$  beschränkt ist, gilt  $v \leq m$  auf ganz  $X$ .  $\square$

**10.4.3 Heftungsprinzip.** Sind  $X_1, X_2$  offen in  $X$ , so bestimmen zwei stetige Funktionen  $v_j : X_j \rightarrow \mathbb{R}$  die (im allgemeinen unstetige) Heftungsfunktion  $v := v_1 \vee v_2 : X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $v := v_j$  auf  $X_j \setminus (X_1 \cap X_2)$  und  $v := \max(v_1, v_2)$  auf  $X_1 \cap X_2$ . Für sie gilt  $v|_{X_j} \geq v_j$ .

**Satz.** Jede stetige Heftung subharmonischer Funktionen ist subharmonisch. Insbesondere gilt  $\max(v_1, v_2) \in \mathcal{S}(X)$  für alle  $v_1, v_2 \in \mathcal{S}(X)$ .

*Beweis.* Sei  $G \subset X_1 \cup X_2$  ein Gebiet und  $v|_G \leq h \in \mathcal{H}(G)$ . An der Stelle  $a \in G$  sei  $v(a) = h(a)$ . Für  $j = 1$  oder  $= 2$  ist dann  $v(a) = v_j(a)$ , und es gilt  $v_j(x) \leq v(x) \leq h(x)$  für  $x \in G \cap X_j$ . Weil  $v_j$  subharmonisch ist, folgt  $v_j = h$  auf der Komponente  $G_0$  von  $G \cap X_j$ , die  $a$  enthält. Somit ist die abgeschlossene Menge  $A = \{x \in G : v(x) = h(x)\}$  offen, also  $= G$ .  $\square$

**10.4.4 Harmonische Majorisierung.** Nach dem Satz von Schwarz gibt es zu jeder auf  $X$  stetigen Funktion  $v$  und zu jeder kompakten Scheibe  $\bar{B} \subset X$  genau eine auf  $X$  stetige Funktion  $H_B v$ , die in  $B$  harmonisch ist und auf  $X \setminus B$  mit  $v$  übereinstimmt. Mit dem Maximumprinzip 10.4.2(2) folgt der

**Satz.** Für  $v, v^* \in \mathcal{S}(X)$  und jede kompakten Scheibe  $\bar{B} \subset X$  gilt

- (1) 
$$v \leq H_B v \in \mathcal{S}(X) ,$$
- (2) 
$$\max(H_B v, H_B v^*) \leq H_B \max(H_B v, H_B v^*) = H_B \max(v, v^*) . \quad \square$$

**10.4.5 Perronsche Familien.** Eine nicht-leere Teilmenge  $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}(X)$  heißt *Perronsche Familie*, wenn für alle  $v, v^* \in \mathcal{P}$  und jede kompakte Scheibe  $\bar{B} \subset X$  gilt:  $\max(v, v^*) \in \mathcal{P}$  und  $H_B v \in \mathcal{P}$ .

**Perronsches Prinzip.** Die obere Einhüllende  $u := \sup\{v : v \in \mathcal{P}\}$  jeder Perronschen Familie  $\mathcal{P}$  ist harmonisch oder konstant  $\infty$ .

*Beweis.* Sei  $\bar{B} \subset X$  eine kompakte Scheibe. Aus  $v \leq H_B v \in \mathcal{P}$  folgt:

$$u = \sup\{v : v \in \mathcal{P}\} \leq \sup\{H_B v : v \in \mathcal{P}\} \leq \sup\{v : v \in \mathcal{P}\}.$$

Somit ist  $u|_B$  die obere Einhüllende der Familie  $\{(H_B v)|_B : v \in \mathcal{P}\}$  harmonischer Funktionen. Sie enthält wegen Satz 10.4.4 mit  $u_1, u_2$  eine harmonische Funktion  $u^* \geq \max(u_1, u_2)$ . Nach dem Harnackschen Prinzip in 10.2.5 ist  $u$  harmonisch in  $B$  oder konstant  $\infty$ . Somit sind beide Mengen  $A := \{x \in X : u \text{ ist harmonisch um } x\}$  und  $Z := \{x \in X : u(x) = \infty\}$  offen in  $X$ . Da  $A \cup Z = X$  zusammenhängt, ist eine dieser Mengen leer.  $\square$

**10.4.6 Beschränkte Perronsche Familien.** Wichtige Beispiele sind:

- (1)  $\{v \in \mathcal{S}(X) : v \leq -v_0\}$  für eine feste Funktion  $v_0 \in \mathcal{S}(X)$ ,
- (2)  $\{v \in \mathcal{S}(G) : \limsup_{x \rightarrow \xi} v(x) \leq \lambda\}$  für ein Gebiet  $G \subset X$ , einen Punkt  $\xi \in \partial G$  und eine Schranke  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Die Mengen in (1) und (2) sind leer oder Perronsche Familien zu  $X$  bzw.  $G$ ; in beiden Fällen gehört die obere Einhüllende zur Familie und ist daher harmonisch.  $\square$

Perron hat sein Prinzip 1923 zur Lösung des Dirichletschen Randwertproblems entwickelt. Zwei Jahre später wurde es in [RR] von Radó und Riesz vereinfacht.

## 10.5 Gelochte Flächen. Abzählbarkeit der Topologie

Sei  $\bar{B} \subset X$  eine kompakte Scheibe. Wir lösen das Dirichletsche Randwertproblems für die *gelochte* Fläche  $X \setminus \bar{B}$  und jede auf dem Lochrand  $\partial B$  stetige reelle Funktion. Eine einfache Folgerung ist die Abzählbarkeit der Topologie von  $X$ . Je nachdem, ob die Lösung des Randwertproblems für  $X \setminus \bar{B}$  eindeutig ist oder nicht, unterscheiden wir ab 10.5.4 für den Rest des Kapitels und darüber hinaus zwischen *armen* und *reichen* Flächen.

**10.5.1 Existenzsatz.** Sei  $f : \partial B \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $m := \min f(\partial B)$  und  $M := \max f(\partial B)$ . Es gibt eine stetige Funktion  $u : X \setminus B \rightarrow [m, M]$ , die in  $X \setminus \bar{B}$  harmonisch ist und  $u|_{\partial B} = f$  erfüllt. Insbesondere gibt es auf jeder gelochten Fläche nicht-konstante beschränkte harmonische Funktionen.

*Beweis.* Es gibt eine Karte  $z : V \rightarrow \mathbb{E}$ , so daß  $z(\bar{B}) = \bar{\mathbb{E}}_r$  mit  $r < 1$  gilt. Sei  $\rho \in (r, 1)$  und  $B_\rho := z^{-1}(\mathbb{E}_\rho)$ . Durch die Lösung des Randwertproblems für den Ring  $A = B_\rho \setminus \bar{B}$  erhält man zwei auf  $X \setminus B$  stetige Funktionen  $v_1, v_2$  die in  $A$  harmonisch sind, so daß gilt:



$$v_1 = v_2 = f \text{ auf } \partial B \quad \text{und} \quad v_1 = m, v_2 = M \text{ auf } X \setminus B_\rho.$$

Die Funktionen  $v_1$  und  $-v_2$  sind Heftungen harmonischer Funktionen und daher auf  $X \setminus \bar{B}$  subharmonisch. Die Menge

$$\mathcal{P} = \{v \in \mathcal{S}(X \setminus \bar{B}) : v \leq v_2\}$$

enthält  $v_1$  und ist nach 10.4.6(1) eine Perronsche Familie. Daher ist  $u := \sup \mathcal{P} \in \mathcal{H}(X \setminus \bar{B})$  und  $m \leq v_1 \leq u \leq v_2 \leq M$ . Wegen  $v_1 = v_2 = f$  längs  $\partial B$  wird  $u$  durch  $u|_{\partial B} = f$  stetig nach  $\partial B$  fortgesetzt.  $\square$

**10.5.2 Abzählbarkeit der Topologie.** Jede zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  hat eine abzählbare Topologie.

*Beweis.* Sei  $\bar{B}$  eine kompakte Scheibe in  $X$ . Es genügt zu zeigen, daß  $Y := X \setminus \bar{B}$  eine abzählbare Topologie hat. Nach 10.5.1 gibt es eine nicht-konstante Funktion  $u \in \mathcal{H}(Y)$ . Auf der universellen Überlagerung  $\eta : Z \rightarrow Y$  ist  $u \circ \eta$  harmonisch und nach Satz 10.1.1 der Realteil einer nicht-konstanten holomorphen Funktion  $h$ . Nach dem Spezialfall 3.5.3(2) des Satzes von Poincaré-Volterra hat  $Z$  eine abzählbare Basis  $\mathcal{U}$  der Topologie. Da  $\eta$  stetig, offen und surjektiv ist, erhält man mit  $\{\eta(U) : U \in \mathcal{U}\}$  eine abzählbare Basis der Topologie von  $Y$ .  $\square$

**10.5.3 Historisches.** Im Jahre 1913 postulierte H. Weyl in [Wyl1] die Triangulierbarkeit Riemannscher Flächen. Er bemerkte dazu auf S. 21, daß diese Einschränkung erforderlich zu sein scheint, um die Anwendbarkeit der „Exhaustionsmethode“ zu gewährleisten. Triangulierbare Flächen haben a fortiori eine abzählbare Topologie. Die Umkehrung gilt ebenfalls, der Beweis ist allerdings mühsam.

Radó [Rad 1] wußte, daß die Existenz einer komplexen Struktur die Abzählbarkeit der Topologie zur Folge hat. Er hat seinen Beweis damals nur skizziert, da Prüfer ihm mitgeteilt hatte, daß vermutlich jede topologische Fläche triangulierbar sei. Nachdem Prüfer seine eigene Vermutung widerlegt hatte, veröffentlichte Radó seinen Satz und das Prüfersche Beispiel einer zusammenhängenden Fläche mit überabzählbarer Topologie in [Rad 2]. Es war damals unbekannt, daß Hausdorff schon 1915 solche Flächen gefunden, aber nicht publiziert hatte.

Eine vereinfachte Darstellung der Prüferschen Fläche und die ersten Beispiele von zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n \geq 2$ , deren Topologie nicht abzählbar ist, enthält [CR].

**10.5.4 Reiche und arme Flächen.** Folgende Unterscheidung spielt eine wichtige Rolle: Eine zusammenhängende Fläche  $X$  heißt *reich*, wenn es auf  $X$  nicht-konstante subharmonische Funktionen gibt, die nach oben beschränkt sind. Nicht-reiche zusammenhängende Flächen heißen *arm*.

- (1) Jedes beschränkte Gebiet in  $\mathbb{C}$  ist wegen  $\operatorname{Re} z$  reich.
- (2) Kompakte Flächen sind arm auf Grund des Maximumprinzips 10.4.2.

Weitere Beispiele geben wir in den Folgerungen des nächsten Abschnitts.

Die Einteilung der Riemannschen Flächen in reiche bzw. arme mittels subharmonischer Funktionen ist seit Ahlfors' Note [Ah 2] üblich. Er nennt allerdings reiche Flächen *hyperbolisch*; wir vermeiden diese Redeweise, da „hyperbolisch“ in der klassischen Theorie in einem anderen Sinne benutzt wird, vgl. 11.3.3.

**10.5.5 Harmonische Maße.** Sei  $\bar{B} \subset X$  eine kompakte Scheibe. Der Existenzsatz in 10.5.1 läßt offen, ob für die Randfunktion  $f = 0$  andere Lösungen des Dirichletschen Problems als  $u = 0$  existieren. Wenn  $X$  reich ist, gibt es sie. Zu ihnen gehören die *harmonischen Maße*. Das sind Funktionen in  $\mathcal{H}(X \setminus \bar{B})$  mit Werten in  $(0, 1)$ , die sich durch Null stetig nach  $\bar{B}$  fortsetzen lassen. Die Fortsetzung ist wegen des Heftungsprinzips (mit  $X_1 = X \setminus \bar{B}$  und  $X_2 = X$ ) eine beschränkte, nicht-konstante Funktion in  $\mathcal{S}(X)$ . Es folgt:

(1) *Auf armen Flächen gibt es keine harmonischen Maße.*  $\square$

*Beispiel.* Sei  $R > 1$ . Für  $X = \mathbb{E}_R$  und  $B = \mathbb{E}$  ist  $w(z) := \log |z| / \log R$  ein harmonisches Maß.

**Satz.** *Zu jeder kompakten Scheibe  $\bar{B}$  in einer reichen Fläche  $X$  existiert ein harmonisches Maß  $w_B$ .*

*Beweis.* Die Nullfunktion gehört zur Perronschen Familie

$$\mathcal{P}(X, B) := \{v \in \mathcal{S}(X \setminus \bar{B}) : v \leq 1, \limsup_{x \rightarrow \xi} v(x) \leq 0 \quad \forall \xi \in \partial B\},$$

vergleiche 10.4.6(2). Wir behaupten:

(2) *Es gibt ein  $v^* \in \mathcal{P}(X, B)$  und ein  $a \in X \setminus \bar{B}$  mit  $v^*(a) > 0$ .*

*Beweis zu (2).* Es gibt eine nicht-konstante Funktion  $v \in \mathcal{S}(X)$  mit  $v < 0$ . Dann ist  $-M := \max v(\bar{B}) < 0$ . An einer Stelle  $a \in X \setminus \bar{B}$  ist  $v(a) > -M$ ; denn sonst wäre  $v = -M$  nach dem Maximumprinzip. Man nimmt  $v^* := 1 + v/M$ .

Für die obere Einhüllende  $w_B$  von  $\mathcal{P}(X, B)$  gilt  $0 \leq w_B \leq 1$  und wegen (2)  $w_B \neq 0$ . Nach dem Perronschen Prinzip ist  $w_B \in \mathcal{H}(X \setminus \bar{B})$ . Wegen des Minimumprinzips kann  $w_B$  den Wert 0 nicht annehmen. Wenn  $w_B$  den Wert 1 annähme, müßte  $w_B = 1$  sein (Maximumprinzip). Das wird durch  $w_B \in \mathcal{P}(X, B)$  ausgeschlossen. Also gilt  $0 < w_B < 1$ .

(3)  *$w_B$  wird durch Null stetig nach  $\bar{B}$  fortgesetzt.*

*Beweis zu (3).* Sei  $z : V \rightarrow \mathbb{E}_R$  eine Karte mit  $R > 1$  und  $z(B) = \mathbb{E}$ . Sei  $A := V \setminus \bar{B}$ . Die im Beispiel angegebene Funktion  $w$  gehört zu  $\mathcal{P}(V, B)$ , und für jedes  $v \in \mathcal{P}(V, B)$  ist  $v - w \in \mathcal{S}(A)$  längs  $\partial A$  durch Null nach oben beschränkt, also  $v \leq w$  nach dem Maximumprinzip 10.4.2(2). Wegen  $\mathcal{P}(X, A) \subset \mathcal{P}(V, B)$  folgt  $0 \leq w_B \leq \log |z| / \log R$  und damit (3).  $\square$

**Folgerungen.** (a) *Ist  $Y$  reich und  $\eta : X \rightarrow Y$  holomorph und offen, so ist  $X$  reich. Insbesondere ist jedes Gebiet  $X \subset Y$  reich.*

(b) *Wenn  $X$  arm und  $A \subset X$  lokal endlich ist, bleibt  $X \setminus A$  arm. Insbesondere ist  $\mathbb{C}$  arm.*

*Beweis.* (a) Sei  $w_B \in \mathcal{H}(X \setminus \bar{B})$  ein harmonisches Maß zur kompakten Scheibe  $\bar{B} \subset \eta(X)$ . Dann ist  $w_B \circ \eta \in \mathcal{S}(X)$  beschränkt und nicht konstant. – (b) Angenommen  $X \setminus A$  ist reich. Es gibt dann eine kompakte Scheibe  $\bar{B} \subset X \setminus A$  und ein harmonisches Maß  $w_B \in \mathcal{H}(X \setminus (A \cup \bar{B}))$ . Da  $w_B$  beschränkt ist, kann man nach  $A$  harmonisch fortsetzen und erhält ein harmonisches Maß auf  $X \setminus \bar{B}$ .  $\square$

**10.5.6 Scharfes Maximum- und Minimumprinzip.** Sei  $\bar{B}$  eine kompakte Scheibe in der *armen* Fläche  $X$ . Mit  $\mathcal{H}(X \setminus B)$  wird der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aller auf  $X \setminus B$  stetigen und in  $X \setminus \bar{B}$  harmonischen Funktionen bezeichnet.

**Satz (Scharfes Maximumprinzip).** *Jede nach oben beschränkte Funktion  $u \in \mathcal{H}(X \setminus B)$  nimmt ihr Maximum auf  $\partial B$  an.*

*Beweis.* Sei  $M := |u|_{\partial B}$ . Dann wird  $\max(u, M) \in \mathcal{S}(X \setminus \bar{B})$  durch  $v|_{\bar{B}} := M$  stetig nach  $X$  fortgesetzt. Die Fortsetzung  $v$  ist nach oben beschränkt und wegen des Heftungsprinzips subharmonisch auf  $X$ , also konstant  $= M$ . Aus  $M = \max(u, M)$  folgt die Behauptung.  $\square$

Das scharfe Maximumprinzip für  $-u$  ist ein *scharfes Minimumprinzip* für  $u$ . Beide Prinzipien haben direkt zur Folge:

- (1) *Jede beschränkte Funktion  $u \in \mathcal{H}(X \setminus B)$  nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf  $\partial B$  an.*
- (2) *Zwei beschränkte Funktionen  $u, u^* \in \mathcal{H}(X \setminus B)$  stimmen auf  $X \setminus B$  bereits dann überein, wenn sie auf  $\partial B$  übereinstimmen.*  $\square$

Wenn man dieses Ergebnis mit dem Existenzsatz 10.5.1 kombiniert, folgt die eindeutige Lösung des Dirichletschen Problems:

- (3) *Jede auf  $\partial B$  stetige Funktion läßt sich eindeutig zu einer beschränkten Funktion in  $\mathcal{H}(X \setminus B)$  fortsetzen.*  $\square$

Schließlich liefert (1) eine Abschätzung für holomorphe Funktionen:

- (4) *Ist  $f$  in einer Umgebung von  $X \setminus B$  holomorph und beschränkt, so gilt  $|f|_{X \setminus B} \leq |f|_{\partial B}$ .*

*Beweis.* Sei  $u := \operatorname{Re} f$ ,  $v := \operatorname{Im} f$ . Mit (1) folgt

$$|f|_{X \setminus B}^2 \leq |u|_{X \setminus B}^2 + |v|_{X \setminus B}^2 = |u|_{\partial B}^2 + |v|_{\partial B}^2 \leq 2|f|_{\partial B}^2,$$

also  $|f|_{X \setminus B} \leq \sqrt{2}|f|_{\partial B}$ . Wegen  $|f^n| = |f|^n$  folgt ebenso  $|f|_{X \setminus B}^n \leq \sqrt{2}|f|_{\partial B}^n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mit  $n \rightarrow \infty$  ergibt sich die Behauptung.  $\square$

## 10.6 Greensche Funktionen

Zu jedem Punkt  $a$  einer *reichen* Fläche  $X$  konstruieren wir eine *Greensche Funktion*  $g_a$ , die bis auf eine logarithmische Singularität in  $a$  harmonisch ist. Mit den Quotienten der zugehörigen Differentialformen beweisen wir den Riemannschen Existenzsatz zur Punktetrennung.– Wir benutzen beim Entfernen eines Punkt die kurze Notation  $X \setminus a := X \setminus \{a\}$ .

**10.6.1 Definition. Existenz.** Unter eine *Greenschen Funktion*  $g_a$  zu  $a \in X$  verstehen wir eine auf  $X \setminus a$  harmonische, überall positive Funktion, die bei  $a$  eine normierte logarithmische Singularität besitzt, siehe 10.1.4. Beispielsweise ist  $-\log|z|$  eine Greensche Funktion zu  $0 \in \mathbb{E}$ . In 10.6.3 beweisen wir das

**Existenztheorem.** *Zu jedem  $a \in X$  gibt es eine Greensche Funktion  $g_a$ .*

**10.6.2 Anwendungen.** (1) Zu jedem  $a \in X$  existiert eine auf  $X \setminus a$  holomorphe Differentialform mit rein imaginären Perioden, die bei  $a$  einen einfachen Pol mit dem Residuum  $-1$  hat.

(2) Punkttrennung: Zu je zwei Punkten  $a \neq b$  in  $X$  gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit  $f(a) \neq f(b)$ .

*Beweis.* (1) Man nehme die Form  $\omega_a$ , welche gemäß 10.1.1 zu  $g_a$  gehört.

(2) Für  $f := \omega_a / \omega_b$  gilt  $f(a) = \infty$ ,  $f(b) = 0$ .  $\square$

**10.6.3 Existenzbeweis.** Sei  $z : (V, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte. Wir verheften die Nullfunktion auf  $X \setminus a$  mit  $-\log |z|$  auf  $V \setminus a$  zu  $v_0 \in \mathcal{S}(X \setminus a)$ ; dann gilt  $v_0 \geq 0$ . Alle in  $X \setminus a$  subharmonischen Funktionen  $v \geq v_0$  mit den Eigenschaften

(a)  $v + \log |z|$  ist subharmonisch nach  $a$  fortsetzbar,

(b) längs des idealen Randes von  $X$  ist  $0$  eine obere Schranke von  $v$ ,

bilden eine Perronsche Familie  $\mathcal{G}_a$  auf  $X \setminus a$ . Nach dem Perronschen Prinzip ist die obere Einhüllende  $u = \infty$  oder  $u \in \mathcal{H}(X \setminus a)$ . Um  $u = \infty$  auszuschließen, betrachten wir zu jedem Radius  $0 < r < 1$  die Scheibe  $B_r := z^{-1}(\mathbb{E}_r)$  mit ihrem Rand  $\partial B_r$  und bezeichnen mit  $M_r(v)$  bzw.  $m_r(v)$  das Supremum bzw. Infimum einer Funktion  $v : \partial B_r \rightarrow \mathbb{R}$ . Es genügt ein  $r < 1$  zu fixieren und zu beweisen, daß  $\{M_r(v) : v \in \mathcal{G}_a\}$  nach oben beschränkt ist. Wir benutzen dazu ein harmonisches Maß  $w$  zu  $B_r \subset X$  sowie einen weiteren Radius  $R \in (r, 1)$  und zeigen

$$(2) \quad M_r(v) \leq \frac{\log R/r}{m_R(w)} =: \alpha \quad \text{für alle } v \in \mathcal{G}_a.$$

Man beachte dabei, daß  $0 < m_R(w) < 1$  gilt und  $\alpha$  nicht von  $v$  abhängt.

Beweis zu (2). Für jedes  $v \in \mathcal{G}_a$  ist  $v - M_r(v) \cdot (1 - w)$  auf  $X \setminus \bar{B}_r$  subharmonisch und längs des idealen Randes dieses Gebietes (d.h. auf  $\partial B_r$  und längs des idealen Randes von  $X$ ) durch  $0$  nach oben beschränkt. Daraus folgt wegen Satz 10.4.2  $v < M_r(v) \cdot (1 - w)$  auf  $X \setminus \bar{B}_r$ , insbesondere

$$(3) \quad M_R(v) \leq M_r(v) \cdot (1 - m_R(w)).$$

Da  $v + \log |z|$  auf  $V = B_1$  subharmonisch ist, gilt

$$(4) \quad M_r(v) + \log r \leq M_R(v) + \log R$$

nach dem Maximumprinzip. Aus (3) und (4) folgt (2), somit  $u \in \mathcal{H}(X \setminus a)$ .

Für alle  $v \in \mathcal{G}_a$  ist  $M_r(v + \log |z|) \leq \alpha + \log r$ , also nach dem Maximumprinzip  $v + \log |z| \leq \alpha + \log r$  auf  $\bar{B}_r$ . Es folgt  $u + \log |z| \leq \alpha + \log r$  auf  $B_r \setminus a$ . Daher läßt sich  $u + \log |z|$  harmonisch nach  $u$  fortsetzen (siehe 10.1.3), d.h.  $u$  hat bei  $a$  eine normierte logarithmische Singularität. Aus  $0 \leq v_0 \leq u$  und dem Minimumprinzip folgt  $u > 0$ . Daher ist  $u$  eine Greensche Funktion zu  $a$ .  $\square$

**10.6.4 Minimalität.** Für den Beweis des Riemannschen Abbildungssatzes in 11.1 benötigen wir minimale Greensche Funktionen. Man nennt  $g_a$  *minimal*, wenn  $g_a \leq h$  für alle stetigen Funktionen  $h : X \rightarrow (0, \infty]$  gilt, die auf  $X \setminus h^{-1}(\infty)$  harmonisch sind und in  $a$  eine normierte logarithmische Singu-

larität haben. Insbesondere gilt  $g_a \leq h$  für alle Greenschen Funktionen  $h$  zur Stelle  $a$ . Daher ist die minimale Funktion  $g_a$  eindeutig bestimmt.

**Satz.** Die obere Einhüllende  $u$  der Perronschen Familie  $\mathcal{G}_a$  aus 10.6.3 ist eine minimale Greensche Funktion zu  $a$ .

*Beweis.* Es genügt zu zeigen:

$$p \leq (1 + \varepsilon)h \text{ für alle } v \in \mathcal{G}_a \text{ und alle } \varepsilon > 0.$$

Das trifft sicher dann zu, wenn für jede Funktion

$$v_\varepsilon := \max \{v - (1 + \varepsilon)h, -1\} \text{ auf } X \setminus a, \quad v_\varepsilon(a) := -1,$$

gilt, daß  $v_\varepsilon \leq 0$  ist. Wir behaupten zunächst, daß  $v_\varepsilon$  subharmonisch ist. Wir zeigen dies für die Umgebung eines beliebigen Punktes  $b \in X$  und unterscheiden dabei drei Fälle:

$$h(b) < \infty, \quad h(b) = \infty \text{ und } a \neq b, \quad h(a) = \infty \text{ und } a = b.$$

Im ersten Fall gilt  $b \neq a$ , und  $(1 + \varepsilon)h$  ist harmonisch um  $b$ ; folglich ist  $v - (1 + \varepsilon)h$  und daher auch  $v_\varepsilon$  subharmonisch um  $b$ . Im zweiten Fall ist  $v(b) - (1 + \varepsilon)h(b) = -\infty$ , also  $v_\infty = -1$  konstant um  $b$ . Im dritten Fall betrachten wir auf  $V \setminus a$  die Gleichung

$$v - (1 + \varepsilon)h = v + \log |z| - (1 + \varepsilon)(h + \log |z|) + \varepsilon \log |z|.$$

Diesmal sind  $v + \log |z|$  und  $-(1 + \varepsilon)(h + \log |z|)$  um  $a$  beschränkt, während  $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon \log z(x) = -\infty$  ist. Daher gilt  $v_\varepsilon = -1$  um  $a$ .

Wegen  $h > 0$  ist  $v_\varepsilon$  wie  $v$  längs des idealen Randes von  $X$  durch Null nach oben beschränkt. Nach Satz 10.4.2(2) folgt  $v_\varepsilon \leq 0$  auf  $X$ .  $\square$

**10.6.5 Historisches.** George Green öffnete 1828 in seiner bahnbrechenden, aber zunächst kaum beachteten Schrift *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism* das Tor zu Potentialtheorie. Die Konstruktion der Greenschen Funktion mittels einer Perronschen Familie wurde von Ahlfors [Ah 1] vorgeschlagen.

## 10.7 Elementarpotentiale

Auf *armen* Flächen  $X$  gibt es keine Greenschen Funktionen, siehe Aufgabe 10.8.7. Ihre Rolle übernehmen *Elementarpotentiale*  $h_a$ , welche bis auf einen Pol in  $a$  harmonisch sind.

**10.7.1 Definition. Existenz.** Sei  $n \in \mathbb{N}_{>0}$ . Wir nennen  $h_a \in \mathcal{H}(X \setminus a)$  ein *Elementarpotential  $n$ -ter Ordnung* zur Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ , wenn  $h_a$  außerhalb jeder Umgebung von  $a$  beschränkt ist und ein  $c \in \mathbb{C}^\times$  existiert, so daß  $h_a - \operatorname{Re}(cz^{-n})$  harmonisch nach  $a$  fortgesetzt werden kann. Wenn  $c = 1$  bzw.  $= i$  ist, nennen wir  $h_a$  *reell* bzw. *imaginär normiert*. – In 10.7.5-8 beweisen wir das

**Existenztheorem.** Zu jedem  $n$  und jeder Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  existiert ein Elementarpotential  $n$ -ter Ordnung, und zwar im kompakten Fall sogar ein reell und ein imaginär normiertes.

**10.7.2 Punktetrennung.** *Auf jeder Riemannschen Fläche  $X$  gibt es zu je zwei Punkten  $a \neq b$  eine meromorphe Funktion  $f$  mit  $f(a) \neq f(b)$ .*

Dieses Ergebnis wurde in 10.6.2(2) mittels Greenscher Funktionen für reiche Flächen bewiesen. Der Beweis läßt sich direkt auf arme Flächen übertragen, indem man Greensche Funktionen durch Elementarpotentiale ersetzt.  $\square$

**10.7.3 Differentialformen mit einem Pol.** *Sei  $X$  kompakt. Zu jeder Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ , jeder ganzen Zahl  $m \geq 2$  und jeder komplexen Zahl  $c \neq 0$  gibt es eine auf  $X \setminus a$  holomorphe Differentialform  $\omega$  mit rein imaginären Perioden, so daß  $\omega - cz^{-m}dz$  holomorph nach  $a$  fortgesetzt werden kann.*

*Beweis.* Zu  $z$  gibt es je ein reell und imaginär normiertes Elementarpotential  $h_a$  bzw.  $\hat{h}_a$  der Ordnung  $m-1$ . Gemäß der Zerlegung  $(1-m)c = \alpha + i\beta$  in Real- und Imaginärteil bilden wir  $v := \alpha h_a + \beta \hat{h}_a \in \mathcal{H}(X \setminus a)$ . Man kann  $v - \operatorname{Re}((1-m)cz^{1-m})$  harmonisch nach  $a$  fortsetzen. Für die Differentialform  $\omega_v$  gemäß 10.1.1 gilt die Behauptung.  $\square$

Wir benötigen diese Differentialformen für den Beweis des Satzes von Riemann-Roch in 13.1. Sie ermöglichen sofort folgende

**10.7.4 Charakterisierung der Zahlenkugel.** *Jede zusammenhängende und homologisch einfach zusammenhängende kompakte Riemannsche Fläche  $X$  ist zur Zahlenkugel isomorph.*

*Beweis.* Nach 10.7.3 gibt es eine Differentialform  $\omega$ , welche in einen Punkt  $a \in X$  einen doppelten Pol mit dem Residuum Null hat und sonst holomorph ist. Nach 7.7.4 besitzt  $\omega$  eine Stammfunktion  $f$ , die bis auf einen einfachen Pol bei  $a$  holomorph ist. Dann hat  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  den Grad eins.  $\square$

**10.7.5 Existenzlemma.** *Zu  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  und jeder Karte  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  gibt es zwei Konstanten  $\alpha, \hat{\alpha} \in \mathbb{R}$  und zwei Funktionen  $h_a, \hat{h}_a \in \mathcal{H}(X \setminus a)$ , die außerhalb jeder Umgebung von  $a$  beschränkt sind, so daß*

$$h_a - \alpha \log |z| - \operatorname{Re} z^{-n} \quad \text{und} \quad \hat{h}_a - \hat{\alpha} \log |z| - \operatorname{Re} (iz)^{-n}$$

*harmonisch nach  $a$  fortgesetzt werden können.*

Der Beweis folgt in 10.7.6-7.

**Beweis des Existenztheorems 10.7.1.** Falls im Lemma  $\alpha = \hat{\alpha} = 0$  ist, muß nichts bewiesen werden. Sonst ist  $\hat{\alpha} h_a - \alpha \hat{h}_a$  ein Elementarpotential  $n$ -ter Ordnung mit  $c = \hat{\alpha} - i\alpha$ . – Kompakter Fall: Die Differentialformen  $\omega_a$  und  $\hat{\omega}_a$  zu  $h_a$  bzw.  $\hat{h}_a$  sind auf  $X \setminus a$  holomorph und haben bei  $a$  Pole  $(n+1)$ -ster Ordnung mit den Residuen  $\alpha$  bzw.  $\hat{\alpha}$ . Da die Residuensumme  $= 0$  ist, folgt  $\alpha = \hat{\alpha} = 0$ .  $\square$

Wenn man die Theorie reeller Differentialformen auf Riemannsche Flächen weit genug entwickelt (Stern-Operator, Greensche Integralformel), läßt sich  $\alpha = \hat{\alpha} = 0$  auch im nicht-kompakten Fall beweisen. Es gilt folgender allgemeine Existenzsatz, vgl. [FK], S. 172-178.

Sei  $G$  ein Gebiet in einer armen Fläche  $X$ , sei  $a \in G$  und  $f \in \mathcal{O}(G \setminus a)$ . Dann gibt es eine Funktion  $h \in \mathcal{H}(X \setminus a)$ , die außerhalb jeder Umgebung von  $a$  beschränkt ist, so daß  $h - \text{Ref}$  harmonisch nach  $a$  fortgesetzt werden kann.

**10.7.6 Beweisplan zum Existenzlemma.** Der Beweis des Existenzlemmas, den wir [Hei 2] entnehmen, arbeitet nur mit harmonischen Funktionen in Ringgebieten. Wir beginnen mit einem Beweisplan, damit unter zahlreichen Abschätzungen der Überblick erhalten bleibt und deutlich wird, wie sich dank des scharfen Maximumprinzips 10.5.6 die Konstruktion der Funktion  $h_a$  von einer punktierten Scheibe  $U \setminus a$  auf  $X \setminus a$  fortsetzt.

Wir können  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}_3, 0)$  annehmen. Mittels  $z$  identifizieren wir  $U$  mit  $\mathbb{E}_3$ : Für  $\varphi \in \mathbb{R}$  und  $0 < r < 3$  ist  $re^{i\varphi} \in \mathbb{E}_3 \subset X$ .

Die gesuchte Funktion  $h_a$  hat idealerweise auf  $\mathbb{E}_3$  die einfache Gestalt  $\text{Re } z^{-n} = r^{-n} \cos n\varphi$  für  $z = re^{i\varphi}$ . Nun gibt es nach 10.5.6(3) zu jedem  $0 < s < 1$  genau eine beschränkte Funktion  $v_s \in \mathcal{H}(X \setminus \mathbb{E}_s)$  mit den Randwerten  $v_s(se^{i\varphi}) = s^{-n} \cos n\varphi$ , und es liegt nahe,  $h_a$  als Limes der  $v_s$  für  $s \rightarrow 0$  zu gewinnen.

Da  $v_s$  nicht konstant ist, gilt dasselbe für  $v_s|_{\partial\mathbb{E}}$ , und die Bilder  $v_s(\partial\mathbb{E})$  sind *echte*, kompakte Intervalle. Zur Kontrolle der Konvergenz ist es gut, wenn sie nicht von  $s$  abhängen. Daher ersetzen wir  $v_s$  durch die *Startfunktionen*  $u_s = b_s v_s + d_s$ , wobei  $c_s, d_s \in \mathbb{R}$  so gewählt sind, daß  $u_s(\partial\mathbb{E}) = [-1, 1]$  ist.

Die kompakte Konvergenz von  $(u_{s_k})$  für eine Nullfolge  $(s_k)$  und die Harmonizität der Grenzfunktion  $u_0$  folgen aus dem Satz von Montel 10.2.4, sobald sicher gestellt ist, daß die Funktionen  $u_s$  lokal gleichmäßig beschränkt sind. Bei genauer Betrachtung muß man berücksichtigen, daß die Definitionsbereiche der  $u_s$  mit fallendem  $s$  größer werden: Zu jedem Kompaktum  $K \subset X \setminus a$  gibt es ein  $t \in (0, 1)$ , so daß  $K \subset X \setminus \bar{\mathbb{E}}_t$  gilt. *Lokal gleichmäßig beschränkt* bedeutet: Alle  $u_s$  für  $s < t$  sind auf  $K$  gleichmäßig beschränkt. Um das zu erreichen, genügt es wegen des scharfen Maximumprinzips 10.5.6 zu jedem  $t \in (0, 1)$  eine von  $s$  unabhängige Schranke  $M_t \geq |u_s|_{\partial\mathbb{E}_t}$  für  $0 < s < t$  zu finden. Diese Schranken werden in 10.7.7 durch Abschätzung der Fourier-Koeffizienten von  $u_s$  im Ringgebiet  $A_s = \mathbb{E}_3 \setminus \mathbb{E}_s$  gewonnen.

Die Koeffizienten hängen von  $s$  ab und gehen für  $s \rightarrow 0$  in die Fourier-Koeffizienten von  $u_0$  über. An ihnen lesen wir in 10.7.8 ab, daß  $u_0$  bei  $a$  bis auf einen Faktor  $\neq 0$  die für  $h_a$  gewünschte Gestalt hat.

Wenn man in den Startfunktionen  $\cos n\varphi$  durch  $\sin n\varphi$  ersetzt, folgt die Existenz von  $\hat{h}_a$  analog.

**10.7.7 Abschätzung der Fourier-Koeffizienten.** Wir benutzen die Fourier-Reihe aus 10.1.3 für  $u = u_s$  und  $r = 1$ ,  $R = 2$ . Wegen  $|u_s|_{\partial\mathbb{E}_2} \leq |u_s|_{\partial\mathbb{E}} = 1$  (scharfes Maximumprinzip) gelten für die Integrale 10.1.3(3) die Abschätzungen

$$|a_{0,1}|, |a_{0,2}| \leq 1 \quad \text{und} \quad |a_{\nu,1}|, |a_{\nu,2}|, |b_{\nu,1}|, |b_{\nu,2}| \leq 2 \quad \text{für } \nu \geq 1.$$

Mit 10.1.3(4) folgt für die Fourier-Koeffizienten von  $u_s$ :

$$(1) \quad |\alpha_0| \leq 1; \quad |\beta_0| \leq \frac{2}{\log 2}; \quad |\alpha_\nu| \leq 2^{2-\nu}, \quad |\beta_\nu| \leq 2^{2-\nu} \quad \text{für } \nu \geq 1; \quad |\alpha_{-n}| \leq 4.$$

Wegen  $u_s(se^{i\varphi}) = c_s \cos n\varphi + d_s$  ergibt 10.1.3(3) für  $t = s$  und  $\nu \geq 1$ :

$$\alpha_\nu s^\nu + \alpha_{-\nu} s^{-\nu} = 0 \text{ falls } \nu \neq n \text{ und } \beta_\nu s^\nu + \beta_{-\nu} s^{-\nu} = 0.$$

Zusammen mit (1) folgt

$$(2) \quad |\alpha_{-\nu}| \leq 2^{2-\nu} s^{2\nu} \text{ für } \nu \geq 1, \nu \neq n \text{ und } |\beta_{-\nu}| \leq 2^{2-\nu} s^{2\nu} \text{ für } \nu \geq 1.$$

Die Fourier-Reihe in 10.1.3 für  $u = u_s$  wird mit (1) und (2) für  $t \in (s, 1)$  abgeschätzt:

$$\begin{aligned} |u_s|_{\partial\mathbb{E}_t} &\leq 1 + \frac{2|\log t|}{\log 2} + 8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu + \frac{4}{t^n} + 8 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{s^2}{2t}\right)^\nu \\ &\leq 1 + \frac{2|\log t|}{\log 2} + 16 \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^\nu + \frac{4}{t^n} =: M_t < \infty. \end{aligned}$$

Damit existiert die Grenzfunktion  $u_0 = \lim u_{s_k} \in \mathcal{H}(X \setminus a)$  für eine Nullfolge  $s_k$  bei lokal gleichmäßiger Konvergenz.

**10.7.8 Eigenschaften der Grenzfunktion.** Die für alle  $0 < s < t$  gültige Ungleichung  $|u_s|_{\partial\mathbb{E}_t} \leq M_t$  ergibt nach dem scharfen Maximumprinzip  $|u_s|_{X \setminus \mathbb{E}_t} \leq M_t$  und damit  $|u_0|_{X \setminus \mathbb{E}_t} \leq M_t$ , d.h.  $u_0$  ist außerhalb jeder Umgebung von  $a$  beschränkt.

Die Fourier-Koeffizienten und die Integrale 10.1.3(3) von  $u = u_s$  hängen von  $s$  ab und werden daher mit  $\alpha_0(s), \dots, b_{\nu,t}(s)$  bezeichnet. Wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz von  $u_0 = \lim u_{s_k}$  gilt für die Integrale

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{\nu,t}(s_k) = a_{\nu,t}(0) \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} b_{\nu,t}(s_k) = b_{\nu,t}(0).$$

Nach 10.1.3(4) mit  $r = 1, R = 2$  folgt für die Fourier-Koeffizienten:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_\nu(s_k) = \alpha_\nu(0) \quad , \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_\nu(s_k) = \beta_\nu(0) \quad ,$$

also wegen 10.7.7(2)

$$\alpha_{-\nu}(0) = 0 \text{ für } \nu \geq 1, \nu \neq n \quad \text{und} \quad \beta_{-\nu}(0) = 0 \text{ für } \nu \geq 1.$$

Das ergibt bei  $a$  die Gestalt

$$u_0 = \beta_0(0) \log |z| + \alpha_{-n}(0) \cdot \operatorname{Re} z^{-n} + v$$

mit einer Funktion  $v$ , die in einer Umgebung von  $a$  harmonisch ist. Wir zeigen  $\alpha_{-n}(0) \neq 0$ : Anderenfalls wäre  $u_0$  auf  $X \setminus a$  je nach dem Vorzeichen von  $\beta_0(0)$  nach oben oder unten beschränkt. Jedenfalls müßte  $u_0$  konstant sein, da  $X \setminus a$  arm ist. Aber aus  $u_{s_k}(\partial\mathbb{E}) = [-1, 1]$  folgt  $u_0(\partial\mathbb{E}) = [-1, 1]$ , d.h.  $u_0$  ist nicht konstant. – Die Funktion  $h_a := u_0/\alpha_{-n}(0)$  hat alle im Existenzlemma behaupteten Eigenschaften.  $\square$

## 10.8 Aufgaben

1) Zeige: Die normale Konvergenz einer reellen Fourier-Reihe

$$u(te^{i\varphi}) = \alpha_0 + \beta_0 \log t + \sum_{n=1}^{\infty} \left( (\alpha_n t^n + \alpha_{-n} t^{-n}) \cos n\varphi + (\beta_n t^n + \beta_{-n} t^{-n}) \sin n\varphi \right)$$

setzt sich vom Rande  $\partial A$  eines Ringgebietes  $A = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$  auf  $\bar{A}$  fort. Die Reihe stellt dann eine auf  $\bar{A}$  stetige und in  $A$  harmonische Funktion dar.



- 2) Seien  $r \neq R$  zwei Radien  $> 0$ . Wie lautet eine auf  $\mathbb{C}^\times$  harmonische Funktion  $u$ , die längs  $\partial\mathbb{E}_R$  verschwindet und längs  $\partial\mathbb{E}_r$  mit dem Realteil des komplexen Monoms  $az^n$  übereinstimmt? Ist  $u$  eindeutig bestimmt?
- 3) Zeige: Eine auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  stetige, reellwertige Funktion  $v$  ist genau dann subharmonisch, wenn für jede Scheibe  $B = \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset G$  gilt:

$$(1) \quad v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Wenn  $v$  subharmonisch ist und in (1) das Gleichheitszeichen steht, ist  $v$  im Innern von  $B$  harmonisch.

- 4) Zeige: (i) Wenn  $v$  und  $-v$  subharmonisch sind, ist  $v$  harmonisch.  
(ii) Für jede holomorphe Funktion  $f$  ist  $|f|$  subharmonisch.
- 5) Sei  $v_n$  eine Folge subharmonischer Funktionen, welche nach  $v$  kompakt konvergiert. Zeige, daß  $v$  auch subharmonisch ist.
- 6) Zeige: Eine auf einem Gebiet  $G \subset \mathbb{C}$  reellwertige  $\mathcal{C}^2$ -Funktion  $v$  ist genau dann subharmonisch, wenn  $\Delta v := v_{xx} + v_{yy} \geq 0$  ist.  
*Anleitung:* Wenn  $f$  bei  $z_0$  ein lokales Minimum hat, ist  $\Delta f(z_0) \geq 0$ . Folgere damit aus  $\Delta v > 0$ , daß  $v$  subharmonisch ist. Finde sodann eine Funktion  $u$  auf  $\mathbb{C}$  mit  $\Delta u = 1$  und folgere mit Aufgabe 5, daß  $\Delta v \geq 0$  genügt, damit  $v$  subharmonisch ist. Benutze für die Umkehrung: Aus  $\Delta v(z_0) < 0$  folgt, daß  $-v$  bei  $z_0$  subharmonisch ist.
- 7) Zeige die Äquivalenz folgender Eigenschaften einer zusammenhängender Riemannschen Fläche:  
Reichtum, Existenz *eines* harmonischen Maßes, Existenz harmonischer Maße zu jeder Scheibe, Existenz *einer* Greenschen Funktion, Existenz Greenscher Funktionen zu jeder Stelle, Ungültigkeit des scharfen Maximum-Prinzips.
- 8) Zeige: (i) Bei jeder minimalen Greenschen Funktion ist 0 das Infimum ihrer Funktionswerte.  
(ii) Wie lautet die minimale Greensche Funktion zu  $0 \in \mathbb{E}$ ?
- 9) Sei  $\eta : X \rightarrow Y$  eine nicht-konstante holomorphe Abbildung zwischen reichen Flächen mit  $f(a) = b$ . Zeige, daß für die minimalen Greenschen Funktionen  $v(\eta, a) \cdot g_a \leq g_b \circ \eta$  gilt.
- 10) Sei  $g_a$  eine Greensche Funktion zu  $a \in X$ . Zeige: Für jedes Gebiet  $G$  mit  $a \in G$  ist  $g_a|_G$  eine Greensche Funktion zu  $a \in G$ . Ist  $X \setminus G$  lokal endlich und  $g_a$  minimal, so ist  $g_a|_G$  minimal.



## 11. Riemannscher Abbildungssatz und Uniformisierung

Für jedes Polynom  $P(z)$  dritten oder vierten Grades mit einfachen Nullstellen ist die durch  $w^2 = P(z)$  definierte Riemannsche Fläche ein Torus und wird daher durch  $\mathbb{C}$  unverzweigt überlagert, siehe 7.6.1-2. Nachdem es Klein gelungen war, für die durch  $w^7 - z^2(z - 1)$  definierte Modulfläche  $X_7$  eine unverzweigte Überlagerung  $\mathbb{E} \rightarrow X_7$  zu konstruieren und diese Konstruktion auf ähnlich definierte Flächen auszudehnen, vermutete er, daß alle durch Polynome definierten Flächen, die nicht zur Zahlenkugel oder zu einem Torus isomorph sind, durch  $\mathbb{E}$  unverzweigt überlagert werden. Er und Poincaré versuchten dies 1881/2 zu beweisen. Ihren Briefwechsel findet man in [Klei 1] 3, S. 587-621. Zumindest Klein faßte die gleichzeitigen Bemühungen als Wettstreit auf, in dem er bis zur Erschöpfung kämpfte; siehe dazu seinen fast 40 Jahre später verfaßten Bericht in [Klei 5], S. 379/80, und die Darstellung in [Gra], welche die Ideengeschichte bis zu Gauß' hypergeometrischer Reihe zurückverfolgt. Weder Klein noch Poincaré gelang damals der angestrebte Beweis. Aber aus ihren Bemühungen entstand die *Theorie der automorphen Funktionen und Formen*, auf die in 5.7.5 hingewiesen wurde.

Unter Poincarés Einfluß entfiel die Beschränkung auf Flächen, die durch Polynome definiert sind. Das *Uniformisierungstheorem* lautet: *Jede zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$  wird durch  $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{E} (\approx \mathbb{H})$  unverzweigt überlagert.* Ein einigermaßen zufriedenstellender Beweis wurde erst 1907 von Koebe [Koe] und Poincaré [Po] 4, p. 70-139, gefunden. Sechs Jahre später gab Weyl der Uniformisierungstheorie eine klare Form. Sie bildet den Höhepunkt und Abschluß seines Buches [Wyl 1].

Weyl beseitigt alle durch den mehrfachen Zusammenhang von  $X$  verursachten Probleme im ersten Schritt durch den Übergang zur universellen Überlagerung  $u : Z \rightarrow X$ , vgl. 3.7.1-2. Der zweite Schritt ist der *Abbildungssatz*, den Riemann im 21. Artikel seiner Dissertation [Ri 2] aufstellt: *Jede einfach zusammenhängende Fläche ist zu  $\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{E}$  isomorph.* Dieser Satz wird im folgenden getrennt nach reichen und armen Flächen mittels Greenscher Funktionen bzw. Elementarpotentialen bewiesen.

Wir schließen einige Anwendungen des Uniformisierungssatzes an. Zu ihnen gehören die Dreiecksparkettierungen, deren Studium 1872 von Schwarz begonnen und von Klein fortgesetzt wurde.

## 11.1 Der Abbildungssatz für reiche Flächen

Mit  $X$  wird eine homologisch einfach zusammenhängende reiche Fläche bezeichnet. Mittels einer minimalen Greenschen Funktion  $g_a$  konstruieren wir einen Isomorphismus  $f_a : (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ .

**11.1.1 Normalfunktionen.** Nach 10.6.3-4 gibt es zu jedem Punkt  $a \in X$  eine minimale Greensche Funktion  $g_a$ . Dazu gehört gemäß Satz 10.1.5(ii) eine holomorphe *Normalfunktion*  $f_a : X \rightarrow \mathbb{C}$  mit einer einfachen Nullstelle in  $a$  und dem Betrag  $|f_a| = e^{-g_a}$  auf  $X \setminus \{a\}$ . Wegen  $g_a > 0$  ist  $f_a(X) \subset \mathbb{E}$ .

**Lindelöfsche Ungleichung.** Wenn  $h : (X, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  holomorph ist, gilt  $|h| \leq |f_a|$ .

*Beweis.* Das ist für die Nullfunktion  $h$  trivial. Sonst ist  $n := o(h, a) \geq 1$ . Wegen der Minimalität gilt  $g_a \leq -n^{-1} \log |h|$ , also  $|f_a| \geq |h|^{1/n} \geq |h|$ .  $\square$

**11.1.2 Surjektivität.** Für jede Normalfunktion gilt  $f_a(X) = \mathbb{E}$ .

*Beweis.* Es genügt  $|c| \geq 1$  für jeden Randpunkt  $c \in \partial f_a(X)$  zu zeigen. Weil  $f_a - c$  keine Nullstellen hat, gibt es nach dem Monodromiesatz eine holomorphe Funktion  $h$  auf  $X$ , so daß  $f_a - c = 2e^h$  ist. Wegen  $|f_a - c| < 2$  ist  $|e^h| < 1$ , also  $\operatorname{Re} h < 0$ . Durch  $B(z) := (z - h(a))/(z + \overline{h(a)})$  wird die linke Halbebene  $\{\operatorname{Re} z < 0\}$  isomorph auf  $\mathbb{E}$  abgebildet, so daß  $B \circ h(a) = 0$  ist. Aus der Lindelöfschen Ungleichung folgt  $|B \circ h| \leq |f_a|$ . Es gibt eine Folge  $x_n$  in  $X$  mit  $\lim f_a(x_n) = c$ . Dann ist  $\lim (\exp \circ h(x_n)) = 0$ , also  $\lim h(x_n) = \infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ . Es folgt  $|c| = \lim |f_a(x_n)| \geq \lim |B \circ h(x_n)| = B(\infty) = 1$ .  $\square$

**11.1.3 Homogenität der Abbildungsfamilie.** Zu je zwei Normalfunktionen  $f_a, f_b$  gibt es einen Automorphismus  $A$  von  $\mathbb{E}$ , so daß  $f_b = A \circ f_a$  ist.

*Beweis.* Es gibt einen Automorphismus  $B$  von  $\mathbb{E}$ , welcher 0 und  $f_a(b)$  vertauscht. Nach der Lindelöfschen Ungleichung ist

$$(1) \quad |B \circ f_a| \leq |f_b|,$$

insbesondere  $|f_a(b)| \leq |f_b(a)|$ . Vertauschen von  $a$  und  $b$  gibt

$$(2) \quad |f_a(b)| = |f_b(a)|.$$

Die Funktion  $h := (B \circ f_a)/f_b$  ist auf ganz  $X$  holomorph. Denn die einzige Nullstelle des Nenners liegt in  $b$ ; sie ist einfach, und in  $b$  ist auch der Zähler Null. Wegen (1) ist  $|h| \leq 1$ , und wegen (2) ist  $|h(a)| = 1$ . Nach dem Maximumprinzip ist  $h$  konstant. Für  $A := h(a)^{-1}B$  gilt  $f_b = A \circ f_a$ .  $\square$

**11.1.4 Injektivität.** Jede Normalfunktion  $f_c$  ist injektiv.

*Beweis.* Angenommen  $f_c(a) = f_c(b)$ . Nach 11.1.3 gilt  $f_b = A \circ f_c$  für ein  $A \in \operatorname{Aut}(\mathbb{E})$ , insbesondere  $0 = f_b(b) = f_b(a)$ . Weil  $b$  die einzige Nullstelle von  $f_b$  ist, folgt  $a = b$ .  $\square$

**11.1.5 Abbildungssatz.** *Jede homologisch einfach zusammenhängende reiche Fläche  $X$  ist zur Kreisscheibe  $\mathbb{E}$  isomorph.*

Denn nach 11.1.2 und 11.1.4 ist  $f_a : X \rightarrow \mathbb{E}$  biholomorph.  $\square$

Dieser elegante Beweis mit Hilfe der Homogenität der Familie  $\{f_a\}$  stammt von Heins [Hei 1]. Ahlfors kommentierte in [Ah 3], S. 136: „A special argument due to Heins in one step eliminates several difficulties in the classical proof.“

Der Abbildungssatz für reiche Flächen enthält den Abbildungssatz für einfach zusammenhängende Gebiete  $\neq \mathbb{C}$  in  $\mathbb{C}$ , der in vielen Lehrbüchern der Funktionentheorie ohne Potentialtheorie bewiesen wird. Solche Gebiete sind nämlich zu beschränkten Gebieten in  $\mathbb{C}$  isomorph und folglich nach 10.5.4(1) reich.

## 11.2 Der Abbildungssatz für arme Flächen

In diesem Paragraphen bezeichnet  $X$  eine *homologisch einfach zusammenhängende, arme* Fläche. Das Ziel ist ein Isomorphismus  $X \approx \mathbb{C}$  oder  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Der Weg dorthin führt in Analogie zu 11.1 über Elementarpotentiale (statt Greenscher Funktionen), Normalfunktionen und deren Homogenität.

Für kompakte Flächen ist das Ergebnis bereits bekannt, siehe 10.7.4. Die folgenden Überlegungen sind nur für den nicht-kompakten Fall nötig.

**11.2.1 Normalfunktionen.** Eine auf  $X \setminus a$  holomorphe Funktion  $f_a$  heißt *Normalfunktion zur Stelle  $a \in X$* , wenn  $f_a$  außerhalb von  $a$  beschränkt ist und in  $a$  einen einfachen Pol hat. Beispiele sind  $f_a(z) = (z - a)^{-1}$  auf  $X = \mathbb{C}$  oder  $\widehat{\mathbb{C}}$  und  $f_\infty(z) = z$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Der Realteil  $\operatorname{Re} f_a$  ist ein Elementarpotential erster Ordnung. Aus dem Existenztheorem 10.7.1 zusammen mit Satz 10.1.5(i) folgt:

- (1) *Zu jedem  $a \in X$  gibt es eine Funktion  $F \in \mathcal{O}(X \setminus a)$  mit einem einfachen Pol in  $a$ , deren Realteil außerhalb von  $a$  beschränkt ist.*  $\square$

Wenn es reell und imaginär normierte Elementarpotentiale gibt, kann man auch die Beschränkung von  $\operatorname{Im} F$  zeigen, und  $F$  ist eine Normalfunktion, siehe [FK], S. 186/7. Da die Existenz *normierter* Elementarpotentiale in 10.7 nicht bewiesen wurde, machen wir einen in [Hei 1] vorgeschlagenen Umweg:

- (2) *Alle  $a$ , zu denen Normalfunktionen  $f_a$  existieren, liegen dicht in  $X$ .*

*Beweis.* Sei  $F$  eine Funktion gemäß (1) zu  $b \in X$ . Es genügt zu zeigen: In jeder Umgebung von  $b$  liegt ein  $a$ , so daß  $f_a := (F(a) - F)^{-1}$  eine Normalfunktion zu  $a$  ist. Wegen  $o(F, b) = -1$  gibt es eine Umgebung  $V \subset X$  von  $b$  mit kompaktem Abschluß, so daß  $F|_V$  injektiv ist. Sei  $A := |\operatorname{Re} F|_{X \setminus V} < \infty$ . In jeder Umgebung von  $b$  liegt ein Punkt  $a \neq b$ , wo  $|\operatorname{Re} F(a)| \geq 2A > 0$  ist. Aus  $F(x) = F(a)$  folgt  $x = a$ . Denn zunächst gilt  $x \in V$ , und dort ist  $F$  injektiv. Daher ist  $f_a$  auf  $X \setminus \{a\}$  holomorph und hat in  $a$  einen einfachen Pol. Da

$$|F(a) - F(x)| \geq |\operatorname{Re} F(a) - \operatorname{Re} F(x)| \geq |\operatorname{Re} F(a)| - |\operatorname{Re} F(x)| \geq A$$

für  $x \in X \setminus V$  gilt, folgt  $|f_a(x)|_{X \setminus V} \leq A^{-1}$ .  $\square$

- (3) Aus einer Normalfunktion  $f_a$  zu  $a \in X$  erhält man alle in der Gestalt  $g = qf_a + b$  mit  $q \in \mathbb{C}^\times$  und  $b \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Offenbar sind alle  $qf_a + b$  Normalfunktionen zu  $a$ . Sei umgekehrt  $g$  eine Normalfunktion. Dann gibt es Zahlen  $c, e \in \mathbb{C}^\times$ , so daß  $h := cf_a - eg \in \mathcal{O}(X)$  ist. Mit  $f_a$  und  $g$  ist auch  $h$  außerhalb von  $a$  beschränkt. Dann ist  $h$  auf ganz  $X$  beschränkt, also konstant wegen der Armut von  $X$ .  $\square$

**11.2.2 Konvergenz normierter Normalfunktionen.** Sei  $\bar{B} \subset X$  eine kompakte Scheibe. Eine Normalfunktion zu  $a \in B$  heißt *längs  $\partial B$  normiert*, wenn  $|f|(\partial B) = [1, 2]$  gilt. Dann ist  $|f|_{X \setminus B} = 2$  wegen des scharfen Maximumprinzips 10.5.6.

- (1) Wenn es zu  $a \in B$  überhaupt eine Normalfunktion  $F$  gibt, dann auch eine längs  $\partial B$  normierte.

*Beweis.* Da  $F|_{\partial B}$  nicht konstant ist, gibt es im kompakten Bild  $F(\partial B)$  zwei Punkte  $b, c$  mit maximalem Abstand  $|c - b| > 0$ . Nach 11.2.1(3) ist  $f := (c - b)^{-1}(F + b - 2c)$  eine normierte Normalfunktion zur selben Stelle  $a$ .  $\square$

**Konvergenzlemma.** Sei  $z: (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}_3, 0)$  eine Karte und  $B_r = z^{-1}(\mathbb{E}_r)$ . Sei  $a_n$  eine Folge in  $B_1$  mit  $\lim a_n = a$ . Sei  $f_n$  ein längs  $\partial B_1$  normierte Normalfunktion zur Stelle  $a_n$ . Die Folge  $f_n$  besitzt ein Teilfolge, die kompakt gegen eine Normalfunktion  $f$  zur Stelle  $a$  konvergiert.

*Beweis.* Sei  $B := B_1$  und  $z_n := z(a_n)$ . Die Funktionen  $g_n := (z - z_n)f_n$  sind auf  $U$  holomorph und werden längs  $\partial B_2$  wegen  $|f_n|_{X \setminus B} = 2$  durch  $|g_n| \leq \frac{9}{4}|f_n| \leq \frac{9}{2}$  abgeschätzt. Wegen des Maximumprinzips gilt die Abschätzung auch auf  $B_2$ . Nach dem kleinen Satz von Montel konvergiert eine Teilfolge, die wir wieder mit  $(g_n)$  bezeichnen, auf  $B_2$  kompakt gegen eine Funktion  $g \in \mathcal{O}(B_2)$ . Längs  $\partial B$  ist  $\frac{3}{4}|f_n| \leq |g_n| \leq \frac{5}{4}|f_n|$ . Für Stellen  $x, y \in \partial B$ , wo gemäß der Normierung  $|f_n(x)| = 1$  bzw.  $|f_n(y)| = 2$  wird, ist  $|g_n(x)| \leq \frac{5}{4}$  bzw.  $|g_n(y)| \geq \frac{3}{2}$ . Dasselbe gilt für  $g = \lim g_n$ . Insbesondere ist  $|g|$  auf  $\partial B$  nicht konstant.

Die Folge  $f_n = g_n/(z - z_n)$  konvergiert auf  $B_2 \setminus a$  kompakt gegen  $g/z$ . Längs  $\partial B_1$  konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig. Nach dem scharfen Maximumprinzip ist  $|f_m - f_n|_{X \setminus B} = |f_m - f_n|_{\partial B}$ . Daher konvergiert  $f_n$  auf  $X \setminus B$  gleichmäßig. Insgesamt konvergiert  $f_n$  auf  $X \setminus a$  lokal gleichmäßig gegen eine dort holomorphe Funktion  $f$  mit  $f|_{B_2} = g/z$ . Die aus der Normierung folgende Gleichung  $|f_n|_{X \setminus B} = 2$  bleibt für  $f$  gültig; also ist  $f$  außerhalb  $a$  beschränkt.

Wegen  $g \in \mathcal{O}(B_2)$  gilt  $o(f, a) \geq -1$ . Wäre  $a$  kein Pol von  $f$ , so wäre  $f$  auf ganz  $X$  holomorph und beschränkt, also konstant, weil  $X$  arm ist. Das geht nicht, da  $|g|$  auf  $\partial B$  nicht konstant ist. Also hat  $f$  in  $a$  einen einfachen Pol und ist eine Normalfunktion.  $\square$

Aus den Ergebnissen von 11.2.1-2 folgt direkt der

**Satz.** Auf jeder homologisch einfach zusammenhängenden armen Fläche gibt es zu jeder Stelle eine Normalfunktion.  $\square$

**11.2.3 Homogenität der Abbildungsfamilie.** Sei  $f_a$  eine Normalfunktion zu  $a \in X$ . Zu jedem Punkt  $x \in X$  gibt es einen Automorphismus  $A$  von  $\widehat{\mathbb{C}}$ , so daß  $A \circ f_a$  eine Normalfunktion zu  $x$  ist.

Der Beweis beginnt mit einem

**Hilfsatz.** Zu jeder Normalfunktion  $f_a$  gibt es eine Umgebung  $V$  von  $a$ , so daß  $f_b := (f_a(b) - f_a)^{-1}$  für jedes  $b \in V$  eine Normalfunktion ist.

Der Beweis des Hilfsatzes entspricht dem Beweis zu Satz 11.2.1. Statt  $|\operatorname{Re} F|$  benutzt man  $|f_a|$ . Man wählt eine Umgebung  $W$  von  $a$ , so daß  $f_a|_W$  injektiv ist und verkleinert zur Umgebung  $V$  von  $a$ , so daß  $|f_a(b)| \geq 2|f_a|_{X \setminus W}$  für alle  $b \in V$  gilt.  $\square$

*Beweis der Homogenität.* Sei  $M_a$  die Menge aller Stellen  $x$ , zu denen Normalfunktionen der Gestalt  $A \circ f_a$  existieren. Dann ist  $a \in M_a$ , und nach dem Hilfsatz ist  $M_a$  offen. Sei  $b \in \overline{M}_a$  und  $f_b$  eine Normalfunktion zu  $b$ . Man wählt  $c \in M_a \cap M_b$ . Es gibt  $A, B \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ , so daß  $A \circ f_a$  und  $B \circ f_b$  Normalfunktionen zu  $c$  sind. Nach 11.2.1(3) gibt es ein  $C \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  mit  $B \circ f_b = C \circ A \circ f_a$ , also  $b \in M_a$ . Damit ist  $M_a \neq \emptyset$ , offen und abgeschlossen, also  $M_a = X$ .  $\square$

**11.2.4 Abbildungssatz für arme Flächen.** Jede holomologisch einfach zusammenhängende, arme Fläche  $X$  ist zu  $\mathbb{C}$  oder  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph.

*Beweis.* Es genügt, eine injektive meromorphe Funktion  $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  zu finden. Denn dann ist  $X$  zum Gebiet  $f(X) \subset \widehat{\mathbb{C}}$  isomorph. Das Komplement  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus f(X)$  enthält höchstens einen Punkt. Denn sonst wäre  $X$  reich, wie schon am Ende von 11.1.5 festgestellt wurde.

Wir zeigen die Injektivität jeder Normalfunktion  $f_c$ . Angenommen  $f_c(a) = f_c(b)$ . Nach 11.2.3 gibt es ein  $A \in \operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ , so daß  $f_b := A \circ f_c$  eine Normalfunktion zur Stelle  $b$  ist. Dann ist  $f_b(a) = f_b(b) = \infty$ . Weil  $b$  der einzige Pol von  $f_b$  ist, folgt  $a = b$ .  $\square$

Wir fassen mit 11.1.5 zusammen:

**11.2.5 Riemannscher Abbildungssatz.** Jede homologisch einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche ist zu  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  isomorph.  $\square$

## 11.3 Uniformisierung

Wenn man die Existenz der universellen Überlagerung 3.7.2(2) mit dem Riemannschen Abbildungssatz kombiniert, folgt der

**11.3.1 Uniformisierungssatz.** Jede zusammenhängende Fläche wird durch  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$  unverzweigt überlagert.  $\square$

Man nennt jede unverzweigte Überlagerung  $u : Z \rightarrow X$  durch  $Z = \widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H} (\approx \mathbb{E})$  eine *Uniformisierung* von  $X$ . Sie ist wie jede universelle Überlagerung normal und bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Nach 3.6.3 ist die Fundamentalgruppe  $\pi(X)$  zur Deckgruppe  $\mathcal{D}(u)$  isomorph. Letztere ist eine Untergruppe von  $\text{Aut}(Z)$ , welche frei und diskontinuierlich operiert. Umgekehrt ist jede freie und diskontinuierliche Untergruppe von  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ ,  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  oder  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  die Deckgruppe einer Uniformisierung, siehe 4.4.5.

**11.3.2 Eindeutigkeit.** Seien  $u_j : Z_j \rightarrow X_j$  mit  $j \in \{0, 1\}$ , zwei Uniformisierungen. Genau dann, wenn  $X_0$  und  $X_1$  isomorph sind, ist  $Z_0 = Z_1$  und  $\mathcal{D}(u_0)$  konjugiert zu  $\mathcal{D}(u_1)$  in  $\text{Aut}(Z_0)$ .

*Beweis.* Zu jedem Isomorphismus  $\varphi : X_0 \rightarrow X_1$  gibt es nach dem Monodromiesatz einen Isomorphismus  $\alpha : Z_0 \rightarrow Z_1$ , so daß  $\varphi \circ u_0 = u_1 \circ \alpha$  ist. Wegen  $Z_j \in \{\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$  ist  $Z_0 = Z_1$  und  $\alpha \in \text{Aut}(Z_0)$ . Es gilt  $\alpha \mathcal{D}(u_0) \alpha^{-1} = \mathcal{D}(u_1)$ .

Umgekehrt: Wenn  $Z_0 = Z_1$  und  $\alpha \mathcal{D}(u_0) \alpha^{-1} = \mathcal{D}(u_1)$  ist, gibt es genau einen Isomorphismus  $\varphi : X_0 \rightarrow X_1$  mit  $\varphi \circ u_0 = u_1 \circ \alpha$ .  $\square$

**11.3.3 Hyperbolische Flächen.** Da jeder Automorphismus von  $\widehat{\mathbb{C}}$  einen Fixpunkt hat, ist jede Uniformisierung  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X$  ein Isomorphismus. – Auch die Möglichkeiten für Uniformisierungen  $u : \mathbb{C} \rightarrow X$  sind nach der Folgerung in 2.5.1 sehr beschränkt:

- (1)  $u$  ist ein Isomorphismus; oder
- (2) es gibt einen Isomorphismus  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}^\times$  mit  $\varphi \circ u = \exp$ ; oder
- (3) es gibt ein Gitter  $\Omega < \mathbb{C}$  und einen Isomorphismus  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ , so daß  $\varphi \circ u$  die Torusprojektion ist.

Eine zusammenhängende Riemannsche Fläche heißt *hyperbolisch*, wenn sie durch  $\mathbb{H}$  uniformisiert wird, also nicht zu  $\widehat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{C}^\times$  oder einem Torus isomorph ist.

## 11.4 Abelsche Fundamentalgruppen

Wir suchen nach abelschen Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , welche frei und diskontinuierlich operieren. Dank des Uniformisierungssatzes ergibt die Klassifikation dieser Gruppen die Klassifikation aller Flächen mit abelschen Fundamentalgruppen.

**11.4.1 Translationen und Homothetien.** Eine Möbiustransformation ist genau dann eine *Translation*  $\neq \text{id}$ , wenn  $\infty$  der einzige Fixpunkt ist. *Homothetien* heißen diejenigen Möbiustransformationen, welche 0 und  $\infty$  als Fixpunkte haben. Sie bilden die zu  $\mathbb{C}^\times$  isomorphe Gruppe  $\{z \mapsto cz : c \in \mathbb{C}^\times\}$ .

**Lemma.** Jede Möbiustransformation  $\alpha$ , die mit einer Translation bzw. Homothetie  $\gamma \neq \pm \text{id}$  vertauscht werden kann, ist selbst eine Translation bzw. Homothetie.



*Beweis.* Wegen  $\alpha\gamma = \gamma\alpha$  und  $\gamma(\infty) = \infty$  ist  $\alpha(\infty)$  ein Fixpunkt von  $\gamma$ . Falls  $\gamma$  eine Translation ist, folgt  $\alpha(\infty) = \infty$ , und  $\alpha$  ist eine Translation, wenn es keinen anderen Fixpunkt gibt. Wenn  $c$  ein weiterer Fixpunkt ist, gibt es drei verschiedene Fixpunkte  $\infty, c, \gamma(c)$ , also  $\alpha = \text{id}$ .

Wenn  $\gamma$  eine Homothetie ist, folgt  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(\infty) = \infty$  oder  $\alpha(0) = \infty$ ,  $\alpha(\infty) = 0$ . Im ersten Fall ist  $\alpha$  eine Homothetie. Der zweite Fall ist unmöglich: Mit  $\sigma(z) = -1/z$  bilden wir die Homothetie  $\sigma\alpha$ . Sie kann mit  $\gamma$  vertauscht werden. Daraus folgt  $\gamma = \pm \text{id}$ .  $\square$

**11.4.2 Die Automorphismen von  $\mathbb{H}$**  sind die Möbius-Transformationen mit reellen Koeffizienten. Nach ihrem Fixpunkt-Verhalten unterscheidet man drei Typen:

- (1) *Elliptische* Automorphismen haben einen Fixpunkt in  $\mathbb{H}$  und einen dazu konjugiert komplexen Fixpunkt in  $-\mathbb{H}$ .
- (2) *Hyperbolische* Automorphismen haben *zwei* verschiedene Fixpunkte in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .
- (3) *Parabolische* Automorphismen haben *einen* Fixpunkt in  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

Jeder Typ bleibt bei Konjugation mit einer reellen Möbius-Transformation erhalten. Wir interessieren uns hauptsächlich für Transformationen ohne Fixpunkte in  $\mathbb{H}$ .

- (4) *Jeder parabolische Automorphismus  $\alpha$  ist in  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  zu  $z \mapsto z \pm 1$  konjugiert.*

*Beweis.* Durch Konjugation mit einer Transformation, welche den einzigen Fixpunkt von  $\alpha$  nach  $\infty$  legt, bekommt  $\alpha$  die Gestalt  $\alpha(z) = z + r$  mit  $0 \neq r \in \mathbb{R}$ . Man konjugiert sodann mit  $z \mapsto z/|r|$ .  $\square$

Die beiden Translationen  $z \mapsto z + 1$  und  $z \mapsto z - 1$  sind zwar in  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  aber nicht in  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  zueinander konjugiert.

- (5) *Jeder hyperbolische Automorphismus  $\alpha$  ist in  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  zu einer Homothetie  $z \mapsto rz$  konjugiert, deren Dehnungsfaktor  $r > 1$  durch  $\alpha$  eindeutig bestimmt ist.*

*Beweis.* Durch Konjugation mit einer Transformation, welche die beiden Fixpunkte von  $\alpha$  nach 0 und  $\infty$  legt, bekommt  $\alpha$  die Gestalt  $\alpha(z) = rz$  mit  $r > 0$ . Durch eine weitere Konjugation mit  $z \mapsto -1/z$  geht  $\alpha$  in  $z \mapsto z/r$  über. Man kann also  $r > 1$  erreichen. – Zur Eindeutigkeit von  $r$ : Wenn  $z \mapsto rz$  zu  $z \mapsto sz$  konjugiert ist, gilt  $\alpha(sz) = r\alpha(z)$  für die konjugierende Transformation  $\alpha$ . Dann sind  $\alpha(0)$  und  $\alpha(\infty)$  Fixpunkte von  $z \mapsto rz$ , also  $\alpha(0) = 0$ ,  $\alpha(\infty) = \infty$  oder  $\alpha(0) = \infty$ ,  $\alpha(\infty) = 0$ . Im ersten Fall ist  $\alpha$  eine Homothetie und folglich  $r = s$ . Im zweiten Fall ist  $\alpha(z) = t/z$  mit  $t < 0$  und folglich  $r = 1/s$ . Letzteres ist unmöglich, wenn  $r$  und  $s$  beide  $> 1$  sind.  $\square$

**11.4.3 Abelsche Deckgruppen.** Jede nicht-triviale abelsche Untergruppe  $G < \text{Aut}(\mathbb{H})$ , welche frei und diskontinuierlich operiert, ist zu

$$\{z \mapsto z + n : n \in \mathbb{Z}\} \text{ oder } \{z \mapsto e^{ns}z : n \in \mathbb{Z}\} \text{ mit } s > 0$$

konjugiert. Im zweiten Fall ist  $s$  durch  $G$  eindeutig bestimmt. Die Orbitprojektion lautet im ersten Fall

$$(1) \quad u: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{E}^\times, u(z) = e^{2\pi iz},$$

und im zweiten Fall

$$(2) \quad u: \mathbb{H} \rightarrow \{z \in \mathbb{E} : |z| > r\}, u(z) = e^{iq \log z},$$

mit  $q = 2\pi/s$  und  $r = e^{-\pi q} < 1$ .

Dabei ist  $\log z = \log |z| + i\varphi$  für  $z = |z|e^{i\varphi}$  und  $0 < \varphi < \pi$ .

*Beweis.* Es gibt keine elliptischen Elemente in  $G$ . *Erster Fall.* Wenn es ein parabolisches Element  $\alpha$  gibt, kann man nach Konjugation annehmen, daß  $\alpha$  eine Translation ist, siehe 11.4.2(4). Weil  $G$  abelsch ist, folgt aus 11.4.1, daß alle Elemente von  $G$  Translationen sind, also  $G = \{z \mapsto z + b\}$ , wobei  $b$  eine additive Untergruppe  $A$  von  $\mathbb{R}$  durchläuft. Weil  $G$  diskontinuierlich operiert, ist  $A \subset \mathbb{R}$  lokal endlich. Es gibt ein kleinstes  $a > 0$  in  $A$ . Dann wird  $G$  von  $z \mapsto z + a$  erzeugt. Nach einer weiteren Konjugation wird  $a = 1$  erreicht. Die Orbitprojektion (1) ist dann leicht zu verifizieren.

*Zweiter Fall.* Wenn es ein hyperbolisches Element  $\alpha \in G$  gibt, kann man nach Konjugation annehmen, daß  $\alpha$  eine Homothetie ist, siehe 11.4.2(5). Weil  $G$  abelsch ist, folgt aus 11.4.1, daß alle Elemente von  $G$  Homothetien sind, also  $G = \{z \mapsto e^r z\}$ , wobei  $r$  eine additive Untergruppe  $A$  von  $\mathbb{R}$  durchläuft. Analog zum ersten Fall gibt es ein kleinstes  $s > 0$  in  $A$ , und  $G$  wird von  $\gamma(z) = e^s z$  erzeugt. Wegen der Eindeutigkeit des Dehnungsfaktors ist  $s$  durch  $G$  eindeutig bestimmt. Man verifiziert sodann die angegebene Orbitprojektion (2).  $\square$

**11.4.4 Ausnahmeflächen** heißen die zusammenhängenden Riemannschen Flächen mit abelschen Fundamentalgruppen. Dazu gehören alle nicht-hyperbolischen Flächen, nämlich  $\widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^\times$  und die Tori. Darüber hinaus gilt der

**Satz.** *Bis auf Isomorphie sind  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{E}^\times$  und die Ringgebiete  $A_r := \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z| < 1\}$  die einzigen hyperbolischen Ausnahmeflächen. Die angegebenen Ringgebiete sind weder untereinander noch zu  $\mathbb{E}^\times$  isomorph.*

*Beweis.* Sei  $u: \mathbb{H} \rightarrow X$  die Uniformisierung einer hyperbolischen Ausnahmefläche. Die zur Fundamentalgruppe  $\pi(X)$  isomorphe Deckgruppe  $\mathcal{D}(u) < \text{Aut}(\mathbb{H})$  ist abelsch. Aus 11.4.3 und dem Eindeutigkeitsatz 11.3.2 folgt die Behauptung.  $\square$

## 11.5 Der Satz von Poincaré-Weyl

Dieser Satz charakterisiert die Ausnahmeflächen  $X$  dadurch, daß  $\text{Aut}(X)$  nicht diskontinuierlich ist. Für den Beweis benötigen wir die Beschreibung der diskontinuierlichen Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  durch diskrete Matrizengruppen (11.5.1-2) und die universelle Liftung aus 4.8.4.

**11.5.1 Beschränkte Matrizen.** Sei  $\iota : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$  der Epimorphismus, welcher jeder Matrix  $A$  den Automorphismus  $A(z)$  zuordnet:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad A(z) = \frac{az + b}{cz + d} .$$

Um die Untergruppen  $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  zu charakterisieren, deren Bild  $\iota(G) < \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$  diskontinuierlich ist, benötigen wir folgendes

**Lemma.** Für jedes Kompaktum  $K \subset \mathbb{H}$  ist die Menge

$$M := \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) : A(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

beschränkt im Zahlenraum  $\mathbb{R}^4$  der 4-Tupel  $(a, b, c, d)$ .

*Beweis.* Zu  $K$  gibt es eine reelle Schranke  $r > 0$ , so daß gilt:

$$(2) \quad r^{-1} \leq \mathrm{Im} \tau \leq r \quad \text{und} \quad |\tau| \leq r \quad \text{für alle } \tau \in K .$$

Sei  $\tau := s + it \in K$  und  $A(\tau) \in K$ . Mit  $\mathrm{Im} A(\tau) = |c\tau + d|^{-2} \mathrm{Im} \tau$  und (2) ergibt sich:

$$|c\tau + d|^2 \leq r^2, \quad |a\tau + b| = |c\tau + d| |A(\tau)| \leq r^2 .$$

Wegen  $|c\tau + d|^2 = (cs + d)^2 + c^2t^2$  ist  $|c|t \leq r$  und analog  $|a|t \leq r^2$ . Mit  $t \geq r^{-1}$  folgt:  $|c| \leq r^2$  und  $|a| \leq r^3$ . Wegen  $|\tau| \leq r$  folgt weiter

$$|d| \leq |c\tau + d| + |c||\tau| \leq r + r^3, \quad |b| \leq |a\tau + b| + |a||\tau| \leq r^2 + r^4 .$$

Damit hat man Schranken für  $a, b, c, d$ . □

**11.5.2 Diskrete Gruppen.** Eine Untergruppe  $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  heißt *diskret*, wenn die Einheitsmatrix  $E$  isoliert in  $G$  liegt: Es gibt eine Umgebung  $U$  von  $E$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^4$ , so daß  $U \cap G = \{E\}$  ist.

(1) *Diskrete Gruppen sind lokal endlich.*

*Beweis.* Angenommen,  $G$  trifft ein Kompaktum  $K \subset \mathbb{R}^4$  unendlich oft. Es gäbe eine Folge  $(A_n)$  in  $G \cap K$  mit paarweise verschiedenen Gliedern, welche in  $K$  konvergiert. Dann konvergiert  $(A_n A_{2n}^{-1})$  nach  $E$ . Jede Umgebung  $U$  von  $E$  enthält ein von  $E$  verschiedenes Element  $A_n A_{2n}^{-1} \in G$ . □

**Satz.** Folgende Aussagen über eine Gruppe  $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  sind äquivalent:

- (a)  $G$  operiert diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$ .
- (b) Es gibt mindestens zwei verschiedene Punkte  $\alpha, \beta \in \mathbb{H}$ , die auf lokal endlichen  $G$ -Bahnen liegen.
- (c)  $G$  ist diskret in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* (a)  $\Rightarrow$  (b) gilt, weil alle Bahnen lokal endlich sind. – (b)  $\Rightarrow$  (c): Wenn  $G$  nicht diskret wäre, gäbe es eine Folge  $(A_n)$  in  $G \setminus \{E\}$  mit  $\lim A_n = E$ . Für fast alle Indizes  $n$  gilt  $A_n(\alpha) = \alpha$ ,  $A_n(\beta) = \beta$ , weil  $\alpha$  und  $\beta$  isoliert in  $G(\alpha)$  bzw.  $G(\beta)$  liegen. Da jeder Automorphismus von  $\mathbb{H}$  mit zwei Fixpunkten die Identität ist, folgt  $A_n = -E$  für fast alle  $n$  im Widerspruch zu  $\lim A_n = E$ . – (c)  $\Rightarrow$  (a): Für jedes kompakte  $K \subset \mathbb{H}$  ist  $M := \{A \in G : A(K) \cap K \neq \emptyset\}$  nach Lemma 11.5.1 beschränkt in  $\mathbb{R}^4$  und daher wegen (1) sogar endlich. □

Die Folgerung (a)  $\Rightarrow$  (c) läßt sich mit denselben Methoden verallgemeinern:

Wenn eine Untergruppe  $G < \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  auf einer nicht-leeren Menge  $U \subset \hat{\mathbb{C}}$  diskontinuierlich operiert, ist  $G$  diskret.

Die Vermutung, daß umgekehrt *jede* diskrete Untergruppe von  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$  auf einem Gebiet in  $\widehat{\mathbb{C}}$  diskontinuierlich operiert, hat Picard 1884 durch ein Beispiel widerlegt, siehe Aufgabe 11.8.8. Man kennt notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Diskontinuitätsbereiche und kann diese genau beschreiben, siehe [Be], Sec. 5.3.

**11.5.3 Satz von Poincaré-Weyl.** *Eine zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  ist genau dann eine Ausnahmefläche, wenn ihre Automorphismengruppe nicht diskontinuierlich ist.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, daß jede hyperbolische Fläche  $X$ , deren Automorphismengruppe  $\mathrm{Aut}(X)$  nicht diskontinuierlich ist, eine abelsche Fundamentalgruppe  $\pi(X)$  hat. Wir benutzen die Uniformisierung  $u: \mathbb{H} \rightarrow X$  und die Normalisierung  $N$  der zu  $\pi(X)$  isomorphen Deckgruppe  $\mathcal{D} := \mathcal{D}(u)$  in  $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ . Nach 4.8.4(2) ist  $N$  nicht diskontinuierlich.

Wir finden zunächst eine Folge  $f_n \in N \setminus \{\mathrm{id}\}$ , so daß für jedes  $g \in \mathcal{D}$  gilt:

$$(*) \quad f_n \circ g = g \circ f_n \quad \text{für fast alle } n.$$

Seien  $\mathcal{D}', N'$  die Urbilder von  $\mathcal{D}, N$  unter dem Epimorphismus  $\iota: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ , vergleiche 11.5.1. Offenbar ist  $N'$  der Normalisator von  $\mathcal{D}'$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ . Nach Satz 11.5.2 ist  $\mathcal{D}'$  diskret, aber  $N'$  nicht diskret. Es gibt also eine Folge  $(A_n)$  in  $N' \setminus \{\pm E\}$  mit  $\lim A_n = E$ . Für jedes  $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  gilt dann  $\lim A_n B A_n^{-1} = B$ . Aus  $B \in \mathcal{D}'$  folgt  $A_n B A_n^{-1} \in \mathcal{D}'$ , und weil  $\mathcal{D}'$  diskret ist, sogar  $A_n B A_n^{-1} = B$  für fast alle  $n$ . Mit  $f_n := \iota(A_n)$  folgt (\*).

Da  $\mathcal{D}$  keine elliptischen Elemente enthält, können wir  $\mathcal{D}$  gemäß 11.4.2 durch eine konjugierte Gruppe ersetzen, die eine Translation oder Homothetie  $h \neq \mathrm{id}$  enthält. Aus (\*) angewendet auf  $g = h$  folgt mit Lemma 11.4.1, daß fast alle  $f_n$  Translationen bzw. Homothetien  $\neq \mathrm{id}$  sind. Da (\*) für jedes  $g \in \mathcal{D}$  gilt, sind alle  $g \in \mathcal{D}$  Translationen bzw. Homothetien. Jedenfalls ist  $\mathcal{D}$  abelsch.  $\square$

**11.5.4 Kompakte Flächen.** *Jede kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche, die nicht zur Zahlenkugel oder einem Torus isomorph ist, hat eine endliche Automorphismengruppe.*

Denn solch' eine Fläche  $X$  ist keine Ausnahmefläche. Somit ist  $\mathrm{Aut}(X)$  diskontinuierlich und wegen der Kompaktheit sogar endlich.  $\square$

**11.5.5 Historisches.** Das letzte Ergebnis über die Automorphismengruppen kompakter Flächen wird auch als *Satz von Schwarz* bezeichnet. Denn er zeigt 1875 in [Sch] 2, S. 285–291: Eine algebraische Fläche, die „durch eine Schaar abbildender Functionen auf sich selbst eindeutig, zusammenhängend und in den kleinsten Theilen ähnlich abgebildet werden kann“, hat das Geschlecht 0 oder 1. Die „Schaar“ hängt dabei analytisch von einem Parameter ab; daher zeigt Schwarz noch nicht, daß die Automorphismengruppe für Flächen vom Geschlecht  $\geq 2$  endlich ist.

Klein formuliert in seiner Schrift über Riemann, [Klei 1] 3, S. 560, vage, daß „Gleichungen  $p > 1$  niemals unendlich oft eindeutig in sich transformiert werden können“. Er gibt ein Plausibilitätsargument und zitiert die Arbeit von Schwarz. In einem Brief an H. Poincaré vom 3. April 1882 erwähnte Klein den Satz, [Klei 1] 3,

S. 610. Darauf veröffentlichte Poincaré 1885 unter Bezug auf Kleins Brief den Beweis, welchem wir oben gefolgt sind, siehe [Po] 3, p. 4-31.

Klein und Poincaré wußten nicht, daß Weierstraß bereits in einem Brief vom 3. Oktober 1875 an Schwarz, [Wst] 2, S. 325-244, dessen Ergebnis kritisiert hatte, weil die Endlichkeit der Automorphismengruppe „als sozusagen selbstverständliche Wahrheit“ aus der Theorie der Weierstraß-Punkte folgt, siehe hierzu 13.5.7. Dieser Brief wurde erst 1895 veröffentlicht.

Die Beweise von Schwarz und Weierstraß hätten nicht vermuten lassen, daß die Kompaktheit (oder Algebraizität) der Fläche entbehrlich ist, wenn man nur die Diskontinuität der Automorphismengruppe zeigen will. Erst Weyl hebt hervor, daß Poincarés Beweis „wörtlich auch für offene Flächen gültig“ bleibt. In dieser Form nimmt er das Ergebnis und den Beweis in sein Buch [Wyl 1], S. 163, auf.

## 11.6 Dreiecksgruppen

Bei der Untersuchung diskontinuierlicher Automorphismengruppen der Ebene  $\mathbb{C}$  und der Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}}$  ergaben sich in 2.6 bzw. 4.2 bis auf triviale Ausnahmen Gruppen, deren Orbitprojektionen über drei Punkten verzweigte Überlagerungen der Zahlenkugel sind. Da sich die Wirkung dieser Gruppen durch euklidische bzw. sphärische Dreiecksparkettierungen veranschaulichen läßt, heißen sie *Dreiecksgruppen*.

Die Definition dieser Gruppen durch die angegebene Gestalt ihrer Orbitprojektionen läßt sich von  $\mathbb{C}$  und  $\hat{\mathbb{C}}$  direkt auf  $\mathbb{H}$  (und sogar auf beliebige Riemannsche Flächen) übertragen. Wir studieren diese Gruppen unter dem Gesichtspunkt der Kreisverwandtschaften. Die dabei erzielten Ergebnisse ermöglichen im nächsten Paragraphen 11.7 die Wirkung der Dreiecksgruppen auf  $\mathbb{H}$  durch *hyperbolische Dreiecksparkettierungen* zu veranschaulichen.

**11.6.1 Definition. Eindeutigkeit und Existenz.** Sei  $Z \in \{\hat{\mathbb{C}}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ . Eine Untergruppe  $G < \text{Aut}(Z)$  heißt *Dreiecksgruppe*, wenn es eine holomorphe  $G$ -Orbitprojektion  $\eta : Z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  gibt, deren Verzweigungsort aus drei Punkten besteht. Nach 4.3.4 sind Dreiecksgruppen diskontinuierlich. Man kann annehmen, daß  $\eta$  über  $0, 1, \infty$  mit den Windungszahlen  $p, q, r$  verzweigt ist, wobei  $2 \leq p \leq q \leq r$  gilt. Das Tripel  $(p, q, r)$  heißt *Typ* der Dreiecksgruppe. Es ist manchmal bequem, alle Tripel  $(q_1, q_2, q_3)$ , die durch eine Permutation aus den festen Tripel  $(p, q, r)$  hervorgehen, als Typenbezeichnung derselben Dreiecksgruppe zuzulassen.

- (1) *Durch  $(p, q, r)$  ist die Fläche  $Z$  eindeutig bestimmt, und die Gruppe  $G$  ist bis auf Konjugation in  $\text{Aut}(Z)$  eindeutig bestimmt.*

Denn  $\eta$  ist die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte universelle Überlagerung mit dem Verzweigungsort  $\{0, 1, \infty\}$ , deren Signatur  $S$  die Werte  $S(0) := p$ ,  $S(1) := q$ ,  $S(\infty) := r$  hat, vgl. 4.8.3(b).  $\square$

**Existenzsatz.** *Jedes Tripel  $(p, q, r)$  ganzer Zahlen  $\geq 2$  ist der Typ einer Dreiecksgruppe.*

Wir realisieren für  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} \geq 1$  alle Möglichkeiten durch bereits bekannte Gruppen. Der Existenzbeweis für alle Tripel mit  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$  wird nach geometrischen Vorbereitungen in 11.6.3-4 und 11.6.6 mit Satz 11.6.7 vollendet.

Die *sphärischen Dreiecksgruppen*  $G < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  sind die endlichen, nicht-zyklischen Untergruppen von  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ , welche in 4.2 klassifiziert wurden:

$G < \text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$	$r$ -Dieder	Tetraeder	Oктаeder	Ikosaeder
Typ	2, 2, $r$	2, 3, 3	2, 3, 4	2, 3, 5

Die *euklidischen Dreiecksgruppen*  $G < \text{Aut}(\mathbb{C})$  traten in 2.6.2 als Flächengruppen auf:

$G < \text{Aut}(\mathbb{C})$	$F_3(\Omega)$	$F_4(\Omega)$	$F_6(\Omega)$
Typ	3, 3, 3	2, 4, 4	2, 3, 6

Alle Tripel  $(p, q, r)$  mit  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1$  bzw.  $= 1$  sind Typen sphärischer bzw. euklidischer Dreiecksgruppen. Für  $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$  sind die Dreiecksgruppen hyperbolisch, d.h. Untergruppen von  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ .  $\square$

**Beispiel.** Die Modulgruppe  $G_n$  ist die Deckgruppe der normalen Modulüberlagerung  $\eta_n : X_n \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , welche über  $0, 1, \infty$  mit den Windungszahlen  $3, 2, n$  verzweigt ist, siehe 5.7.1-2. Daher ist die universelle Liftung (siehe 4.8.4) von  $G_n$  die Dreiecksgruppe vom Typ  $(3, 2, n)$ . Sie ist sphärisch für  $n \leq 5$ , euklidisch für  $n = 6$  und hyperbolisch für  $n \geq 7$ .  $\square$

**11.6.2 Präsentation.** In jeder Dreiecksgruppe  $G$  vom Typ  $(q_1, q_2, q_3)$  gibt es drei Elemente  $\rho_\nu$  mit Fixpunkten  $A_\nu$  und Ableitungen  $\rho'_\nu(A_\nu) = e^{2\pi i/q_\nu}$ , so daß  $G$  von  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  erzeugt wird und

$$(1) \quad \rho_1^{q_1} = \rho_2^{q_2} = \rho_3^{q_3} = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \text{id}$$

die einzigen Relationen sind.

*Beweis.* Die  $G$ -Orbitprojektion  $\eta : Z \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ist die universelle Überlagerung mit drei Verzweigungspunkten  $b_\nu \in \{0, 1, \infty\}$  und der Verzweigungssignatur  $S(b_\nu) = q_\nu$ . Es gibt einfache Schleifen  $v_\nu$  um  $b_\nu$ , so daß  $\pi(\mathbb{C}^{\times \times})$  von  $[v_1], [v_2]$  frei erzeugt wird und  $[v_1] \cdot [v_2] \cdot [v_3] = 1$  gilt. Sei  $P : \pi(\mathbb{C}^{\times \times}) \rightarrow G$  der Poincarésche Epimorphismus. Die Elemente  $\rho_\nu := P[v_\nu]$  erzeugen  $G$  und erfüllen  $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \text{id}$ . Nach 4.7.2 besitzt  $\rho_\nu := P[v_\nu]$  einen Fixpunkt  $A_\nu \in \varphi^{-1}(b_\nu)$  mit  $\rho'_\nu(A_\nu) = e^{2\pi i/q_\nu}$ . Aus der Beschreibung des Kernes von  $P$  in 4.8.2 folgt, daß die Relationen (1) die einzigen sind.  $\square$

**11.6.3 Drehungen.** Für jede Möbius-Transformation  $g \neq \text{id}$  der Gestalt

$$g(z) = (az + b)/(cz + d) \quad \text{mit} \quad ad - bc = 1$$

sind folgende Eigenschaften äquivalent:

- (1)  $g$  ist in  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$  zu  $z \mapsto \omega z$  mit  $|\omega| = 1$  konjugiert.
- (2)  $g$  besitzt zwei verschiedene Fixpunkte  $A, A'$  mit konjugiert komplexen Ableitungen  $g'(A) = g'(A')$ .

(3) Es gibt einen Fixpunkt  $A$  von  $g$  mit  $|g'(A)| = 1$ .

(4) Die Spur  $a + d$  ist reell und  $|a + d| < 2$ .

*Beweis.* Die Gültigkeit der Aussagen (1)-(4) ändert sich nicht, wenn wir  $g$  durch eine konjugierte Transformation ersetzen. Wenn  $g$  genau einen Fixpunkt hat, legen wir ihn nach  $\infty$ . Dann ist  $g(z) = z + b$  für ein  $b \neq 0$ , und keine Aussage trifft zu. Wenn  $g$  zwei Fixpunkte hat, legen wir sie nach 0 und  $\infty$ . Dann ist  $g(z) = u^2 z$  für ein  $u \in \mathbb{C}^{\times}$ . Die Ableitungen lauten  $u^2$  und  $u^{-2}$ . Die Spur ist  $u + u^{-1}$ . Für  $|u| = 1$  treffen alle Aussagen zu, für  $|u| \neq 1$  trifft keine zu.  $\square$

Transformationen mit den Eigenschaften (1)-(4) heißen *Drehungen*. Wenn  $g$  im Fixpunkt  $A$  die Ableitung  $e^{i\alpha}$  hat, nennt man  $\alpha$  den *Drehwinkel* bei  $A$ . Zwei Drehungen  $g$  und  $h$  sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Fixpunkte  $A, A'$  und dieselben Ableitungen  $g'(A) = h'(A)$  haben.

Eine Drehung gehört genau dann zur Untergruppe  $\text{Aut}(\mathbb{C})$  bzw.  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ , wenn  $\infty$  ein Fixpunkt ist bzw. beide Fixpunkte zueinander konjugiert komplex sind.

**11.6.4 Kreisverwandtschaften.** Wir fügen jeder euklidischen Geraden  $l \subset \mathbb{C}$  den Punkt  $\infty$  zu und nennen  $l \cup \{\infty\} \subset \hat{\mathbb{C}}$  einen *Kreis durch  $\infty$* . Diese Kreise werden den euklidischen Kreisen in  $\mathbb{C}$  gleichberechtigt zur Seite gestellt. Die Kreise in  $\hat{\mathbb{C}}$  sind dann genau die Teilmengen  $g(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  für  $g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ .

Man erweitert die komplexe Konjugation  $z \mapsto \bar{z}$  durch  $\overline{\infty} = \infty$  zu einem Homöomorphismus  $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ . Die *erweiterte Automorphismengruppe*  $\text{Aut}^*(\hat{\mathbb{C}})$  besteht aus  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  und den *antiholomorphen Möbius-Transformationen*  $z \mapsto g(\bar{z})$  mit  $g \in \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ . Sie enthält  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  als Normalteiler vom Index 2. Sämtliche Elemente von  $\text{Aut}^*(\hat{\mathbb{C}})$  sind *Kreisverwandtschaften*, d.h. sie transformieren Kreise in Kreise.

Die erweiterten Automorphismengruppen  $\text{Aut}^*(\mathbb{C})$  und  $\text{Aut}^*(\mathbb{H})$  bestehen aus allen Elementen  $g \in \text{Aut}^*(\hat{\mathbb{C}})$ , für die  $g(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$  bzw.  $g(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$  gilt. Die antiholomorphen Transformationen in  $\text{Aut}^*(\mathbb{C})$  bzw.  $\text{Aut}^*(\mathbb{H})$  haben die Gestalt  $z \mapsto g(\bar{z})$  mit  $g \in \text{Aut}(\mathbb{C})$  bzw.  $z \mapsto -g(\bar{z})$  mit  $g \in \text{Aut}(\mathbb{H})$ .

Sämtliche Elemente von  $\text{Aut}^*(\mathbb{C})$  transformieren euklidische Geraden in euklidische Geraden. Um ein entsprechendes Ergebnis für  $\text{Aut}^*(\mathbb{H})$  zu erhalten, definiert man: Die euklidischen Halbgeraden und Halbkreise, welche auf der reellen Achse senkrecht stehen, heißen *hyperbolische Geraden*, siehe Figur 11.6.4a. Offenbar sind dies genau die Durchschnitte  $l \cap \mathbb{H}$  derjenigen Geraden  $l \subset \hat{\mathbb{C}}$ , die mit jedem  $z$  auch  $\bar{z}$  enthalten. Es gilt:

- (1) Sämtliche Elemente von  $\text{Aut}^*(\mathbb{H})$  transformieren hyperbolische Geraden in hyperbolische Geraden.
- (2) Durch je zwei verschiedene Punkte in  $\mathbb{H}$  läßt sich genau eine hyperbolische Gerade ziehen.  $\square$

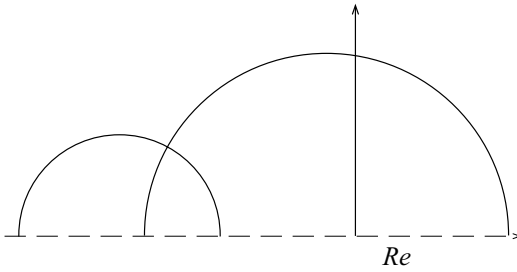
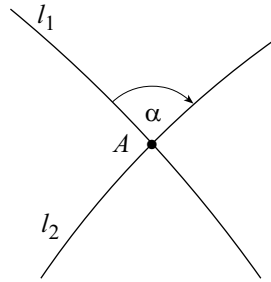
Fig. 11.6.4 a. Hyperbolische Geraden in  $\mathbb{H}$ .

Fig. 11.6.4 b. Schnittwinkel zwischen zwei Kreisen.

Die Halbebene  $\mathbb{H}$  läßt sich mit einer Metrik versehen, so daß  $\text{Aut}^*(\mathbb{H})$  die Gruppe aller Isometrien ist.- Das Parallelenaxiom gilt nicht. Vielmehr lassen sich durch jeden Punkt außerhalb einer hyperbolischen Geraden  $l$  unendlich viele hyperbolische Geraden ziehen, die  $l$  nicht treffen.

Alle zu  $\kappa(z) := \bar{z}$  konjugierten Elemente  $\sigma = g^{-1} \circ \kappa \circ g$  mit  $g \in \text{Aut}^*(\hat{\mathbb{C}})$  heißen *Spiegelungen*. Der *Spiegelkreis*  $g(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  ist die Menge der Fixpunkte von  $\sigma$ . Jeder Kreis in  $\hat{\mathbb{C}}$  ist Spiegelkreis genau einer Spiegelung. Eine Spiegelung gehört genau dann zu  $\text{Aut}^*(\mathbb{C})$  bzw.  $\text{Aut}^*(\mathbb{H})$ , wenn ihr Spiegelkreis durch  $\infty$  läuft bzw.  $\mathbb{R}$  senkrecht schneidet.

**Satz** (siehe Figur 11.6.4 b). *Seien  $A \neq A' \in \hat{\mathbb{C}}$ . Sämtliche Drehungen mit den Fixpunkten  $A, A'$  zusammen mit allen Spiegelungen an Kreisen durch  $A$  und  $A'$  bilden eine Untergruppe von  $\text{Aut}^*(\hat{\mathbb{C}})$ . Dabei ist das Produkt  $\rho := \sigma_1 \circ \sigma_2$  der Spiegelungen an zwei Kreisen  $l_1$  und  $l_2$ , welche sich bei  $A$  unter dem Winkel  $\alpha$  schneiden, eine Drehung mit dem Drehwinkel  $2\alpha$  bei  $A$ .*

*Wenn sich zwei Spiegelkreise  $l_1, l_2$  berühren oder gar nicht treffen, ist das Produkt  $\rho := \sigma_1 \circ \sigma_2$  der entsprechenden Spiegelungen keine Drehung.*

*Beweis.* Man kann  $A = 0, A' = \infty$  annehmen. Dann sind die Kreise durch  $A$  und  $A'$  euklidische Geraden, und die erste Behauptung wird zu einem Ergebnis der elementaren Geometrie. Wenn sich  $l_1, l_2$  in höchstens einem Punkt treffen, kann man annehmen, daß  $l_1$  der Einheitskreis und  $l_2 = \mathbb{R} - 2ia$  eine Parallele zur reellen Achse mit  $a \geq 1$  ist. Dann hat  $\rho(z) = z^{-1} - 2ai$  die Spur  $2a \geq 2$  und ist wegen 11.6.3(4) keine Drehung.  $\square$

**11.6.5 Sphärische Geometrie** ist die Einschränkung der euklidische Geometrie des  $\mathbb{R}^3$  auf  $S^2$ . Sie wird durch die stereographische Projektion  $\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  in die Geometrie der Kreisverwandtschaften eingebettet.

**Satz.** (1) *Sei  $E \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene durch den Ursprung. Das Bild  $\pi(K)$  des Großkreises  $K := E \cap S^2$  ist ein Kreis in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Die euklidische Spiegelung  $s : S^2 \rightarrow S^2$  an  $E$  geht in die Spiegelung  $\pi \circ s \circ \pi^{-1} \in \text{Aut}^*(\hat{\mathbb{C}})$  am Kreis  $\pi(K)$  über.*

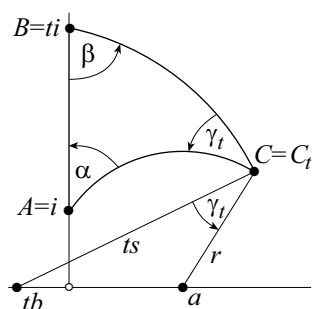


(2) Für jedes  $T \in \mathrm{SO}(3) \setminus \{\mathrm{id}\}$  ist  $\pi \circ T \circ \pi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  eine Drehung mit denselben Drehwinkeln  $\pm \alpha$  wie  $T$ .

(3) Für zwei verschiedene Großkreise  $K$  und  $L$  haben  $\pi(K)$  und  $\pi(L)$  denselben Schnittwinkel wie  $K$  und  $L$ . Insbesondere ist für jedes sphärische Dreieck  $\Delta \subset S^2$  das stereographische Bild  $\pi(\Delta) \subset \hat{\mathbb{C}}$  ein Kreisbogen-Dreieck mit denselben Innenwinkeln wie  $\Delta$ .

*Beweis.* (1) Für die Spiegelung  $s_2$  an der Ebene mit der Gleichung  $x_2 = 0$  ist  $\kappa := \pi \circ s_2 \circ \pi^{-1}$  die komplexe Konjugation. Zu jeder Spiegelung  $s$  gibt es ein  $T \in \mathrm{SO}(3)$  mit  $s = T \circ s_2 \circ T^{-1}$ . Mit  $g := \pi \circ T \circ \pi^{-1} \in \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ , siehe Satz 4.2.6, folgt  $\pi \circ s \circ \pi^{-1} = g \circ \kappa \circ g^{-1}$ . Das Bild  $\pi(K)$  ist die Fixpunktmenge und damit der Spiegelkreis von  $\pi \circ s \circ \pi^{-1}$ . – Analog beweist man (2), und (3) ist eine Folgerung von (1) und (2).  $\square$

**11.6.6 Hyperbolische Dreiecke.** Zu drei Zahlen  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt es genau dann ein hyperbolisches Dreieck mit den Innenwinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma$ , wenn  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$  ist. Dieses Dreieck ist bis auf einen Automorphismus von  $\mathbb{H}$  eindeutig bestimmt.



**Fig. 11.6.6.** Konstruktion eines hyperbolischen Dreiecks  $ABC$  in spezieller Lage mit vorgegebenen Innenwinkeln  $\alpha, \beta$  und  $\gamma = \gamma_t$ .

*Beweis.* Jedes hyperbolische Dreieck  $\Delta = ABC$  mit den Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  läßt sich durch einen Automorphismus von  $\mathbb{H}$  so transformieren, daß  $A = i$ ,  $B = ti$  mit  $t > 0$  und  $\operatorname{Re} C > 0$  gelten. Es genügt daher, Dreiecke in dieser speziellen Lage zu betrachten, siehe Figur 11.6.6. Sei  $a := \cot \alpha$ ,  $r := |a - i|$  und  $b := -\cot \beta$ ,  $s := |b - i|$ . Das Dreieck  $\Delta$  hat genau dann bei  $i$  den Innenwinkel  $\alpha$ , wenn die Seite  $AC$  auf der hyperbolischen Geraden  $k$  mit der Gleichung  $|z - a| = r$  liegt. Es hat genau dann bei  $ti$  den Innenwinkel  $\beta$ , wenn die Seite  $BC$  auf der Geraden  $l_t$  mit der Gleichung  $|z - tb| = ts$  liegt. Die Geraden  $k$  und  $l_t$  schneiden sich genau dann in einem Punkte  $C_t := C \in \mathbb{H}$  mit  $\operatorname{Re} C > 0$ , wenn  $1 < t < u := (a + r)/(b + s)$  gilt. Für  $t = 1$  schneiden sie sich in  $C_1 = i$ , und für  $t = u$  berühren sie sich in  $C_u = a + r \in \mathbb{R}$ . Das hyperbolische Dreieck  $\Delta$  hat bei  $C_t$  denselben Innenwinkel  $\gamma_t$  wie das euklidische Dreieck mit den Ecken  $a, tb$  und  $C_t$ . Der Cosinus-Satz, auf letzteres angewendet, ergibt  $\cos \gamma_t = (t^2 + 2abt + 1)/(2rst)$ .

Daher ist  $\gamma_t$  eine stetige, streng monoton fallende Funktion von  $t \in (1, u)$ . Aus  $C_1 = i$  und  $C_u \in \mathbb{R}$  folgt, daß  $\gamma_t$  an den Intervallenden die Grenzwerte  $\gamma_1 = \pi - \alpha - \beta$  und  $\gamma_u = 0$  hat. Zu jedem  $\gamma \in (0, \pi - \alpha - \beta)$  gibt es daher genau ein hyperbolisches Dreieck in spezieller Lage mit den Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$ . Für  $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$  gibt es keine Dreiecke in spezieller Lage.  $\square$

**11.6.7 Hyperbolische Dreiecksgruppen.** Um jedes Tripel  $(q_1, q_2, q_3)$  mit  $q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1} < 1$  als Typ einer hyperbolischen Dreiecksgruppe zu realisieren, benötigen wir folgendes

**Lemma.** Sei  $A_1 A_2 A_3$  ein hyperbolisches Dreieck mit den Innenwinkeln  $\alpha_\nu$ . Sei  $\sigma_\nu$  die Spiegelung an der Seite  $a_\nu$ , die  $A_\nu$  gegenüberliegt. Für drei hyperbolische Drehungen  $\rho_\nu$  um  $A_\nu$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1)  $\rho_\nu$  hat den Drehwinkel  $2\alpha_\nu$ .
- (2) Für jede zyklische Permutation  $(\lambda, \mu, \nu)$  von  $(1, 2, 3)$  gilt  $\rho_\nu = \sigma_\lambda \circ \sigma_\mu$ .
- (3)  $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \text{id}$ .

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Nach Satz 11.6.4 ist  $\sigma_\lambda \circ \sigma_\mu$  eine hyperbolische  $(2\alpha_\nu)$ -Drehung um  $A_\nu$ . Da hyperbolische Drehungen durch ihre Drehpunkte und Drehwinkel eindeutig bestimmt sind, folgt (2). – (2)  $\Rightarrow$  (3) wegen  $(\sigma_\nu)^2 = \text{id}$ . – (3)  $\Rightarrow$  (1): Nach Satz 11.6.4 sind  $s_1 := \sigma_3 \rho_2$  und  $s_2 := \rho_1 \sigma_3$  Spiegelungen an hyperbolischen Geraden  $k_1$  durch  $A_2$  bzw.  $k_2$  durch  $A_1$ . Wegen  $\rho_1 \rho_2 s_1 s_2 = s_2 \sigma_3 \sigma_3 s_1 s_1 s_2 = \text{id} = \rho_1 \rho_2 \rho_3$  ist  $s_1 s_2 = \rho_3$ . Daher schneiden sich  $k_1$  und  $k_2$  in  $A_3$ . Somit liegen die Seiten  $a_1$  auf  $k_1$  und  $a_2$  auf  $k_2$ . Es folgt  $s_1 = \sigma_1$ ,  $s_2 = \sigma_2$  und somit (1).  $\square$

*Bemerkung.* Das Lemma und sein Beweis lassen sich direkt auf den euklidischen Fall übertragen. Die Folgerungen (2)  $\Rightarrow$  (1) und (2)  $\Rightarrow$  (3) gelten für beliebige Kreisbogen-Dreiecke in  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Zu drei ganze Zahlen  $q_\nu \geq 2$  mit  $q_1^{-1} + q_2^{-1} + q_3^{-1} < 1$  gibt es nach 11.6.6 ein hyperbolisches Dreieck  $\Delta = A_1 A_2 A_3$  mit den Innenwinkeln  $\pi/q_\nu$ .

**Satz.** Die hyperbolischen  $(2\pi/q_\nu)$ -Drehungen  $\rho_\nu$  um  $A_\nu$  erzeugen eine Dreiecksgruppe  $G$  vom Typ  $(q_1, q_2, q_3)$ .

*Beweis.* Sei  $G$  die von  $\rho_1, \rho_2, \rho_3$  erzeugte Untergruppe in  $\text{Aut}(\mathbb{H})$ . Wegen des Lemmas hat  $\rho_\nu$  die Ordnung  $q_\nu$ , und es gilt  $\rho_1 \circ \rho_2 \circ \rho_3 = \text{id}$ . Nach 4.7.4 ist  $G$  die Deckgruppe einer normalen Überlagerung  $X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ , die über drei Punkten mit den Windungszahlen  $q_\nu$  verzweigt ist. Die universelle Liftung dieser Deckgruppe, siehe 4.8.4(3), ist eine Dreiecksgruppe  $\hat{G}$  des Typs  $(q_1, q_2, q_3)$ . Nach 11.6.2 wird sie durch drei  $(2\pi/q_\nu)$ -Drehungen  $r_\nu \in \text{Aut}(\mathbb{H})$  mit paarweise verschiedenen Fixpunkten  $B_\nu$  erzeugt, wobei  $r_1 \circ r_2 \circ r_3 = \text{id}$  gilt. Wegen des Lemmas hat das hyperbolische Dreieck  $\hat{\Delta} := B_1 B_2 B_3$  dieselben Innenwinkel  $\pi/q_\nu$  wie  $\Delta = A_1 A_2 A_3$ . Nach 11.6.6 gehen  $\Delta$  und  $\hat{\Delta}$  durch einen Automorphismus von  $\mathbb{H}$  auseinander hervor. Daher sind  $G$  und  $\hat{G}$  in  $\text{Aut}(\mathbb{H})$  zueinander konjugiert, und  $G$  ist wie  $\hat{G}$  eine Dreiecksgruppe vom Typ  $(q_1, q_2, q_3)$ .  $\square$

**11.6.8 Verzweigungssignaturen.** Wir zeigen, daß bis auf die Ausnahmen gemäß 3.3.4 jede Signatur eine Verzweigungssignatur ist.

**Lemma.** *Sei  $S$  eine Signatur auf der zusammenhängenden Fläche  $Y$ . Wenn es zu jedem  $b \in Y$  eine Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  gibt, deren Signatur  $S_\eta$  ein Teiler von  $S$  ist und den speziellen Wert  $S_\eta(b) = S(b)$  hat, ist  $S$  eine Verzweigungssignatur.*

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine Überlagerung zu  $S$  gemäß 4.8.2. Da  $S_\varphi$  ein Teiler von  $S$  ist, genügt es zu zeigen, daß für jede Stelle  $b$  der Wert  $S_\varphi(b)$  ein Vielfaches von  $S(b)$  ist. Die Überlagerung  $\eta$  wird von  $\varphi$  dominiert. Insbesondere ist  $S_\varphi(b)$  ein Vielfaches von  $S_\eta(b) = S(b)$ .  $\square$

(1) *Wenn die Fläche  $Y$  durch  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{E}$  unverzweigt überlagert wird, ist jede Signatur  $S$  auf  $Y$  eine Verzweigungssignatur.*

*Beweis.* (1) Wegen des Lemmas genügt es zu jedem  $b \in Y$  und jeder ganzen Zahl  $n \geq 2$  eine Überlagerung  $\eta : X \rightarrow Y$  anzugeben, welche nur über  $b$  verzweigt, wobei  $S_\eta(b) = n$  ist. Der folgende Beweis für den Fall  $\mathbb{E}$  läßt sich wörtlich auf den Fall  $\mathbb{C}$  übertragen: Es gibt eine unverzweigte Überlagerung  $\zeta : (\mathbb{E}, 0) \rightarrow (Y, b)$ . Dann leistet  $\eta : (\mathbb{E}, 0) \rightarrow (Y, b)$ ,  $\eta(z) = \zeta(z^n)$ , das Gewünschte.  $\square$

Nach dem Uniformisierungssatz 11.3.1 ist  $\hat{\mathbb{C}}$  die einzige Fläche, welche nicht durch  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{E}$  unverzweigt überlagert wird. Daher müssen nur noch Signaturen  $S$  auf  $\hat{\mathbb{C}}$  untersucht werden. Hier gilt zunächst:

(\*) *Jede Signatur  $S$  auf  $\hat{\mathbb{C}}$  mit drei Trägerpunkten ist eine Verzweigungssignatur.*

Denn wenn  $S$  längs des Trägers die Werte  $q_1, q_2, q_3$  hat, ist  $S$  die Verzweigungssignatur der Orbitprojektion zur Dreiecksgruppe vom Typ  $(q_1, q_2, q_3)$ .

(2) *Eine Signatur auf  $\hat{\mathbb{C}}$  ist genau dann eine Verzweigungssignatur, wenn sie mindestens drei Trägerpunkte hat oder in zwei Trägerpunkte gleiche Werte annimmt.*

*Beweis.* Sei  $B$  der Träger von  $S$ . Der Fall  $\sharp B \leq 2$  ist durch 3.3.4 erledigt. Wenn  $\sharp B \geq 3$  ist, kann man zu jedem  $b \in B$  zwei weitere Punkte  $a, c \in B$  finden. Die Signatur, welche auf  $\{a, b, c\}$  dieselbe Werte wie  $S$  und sonst den Wert 1 hat, ist nach (\*) eine Verzweigungssignatur  $S_\eta$ . Durch  $\eta$  wird die Voraussetzung des Lemmas erfüllt, und  $S$  ist daher eine Verzweigungssignatur.  $\square$

*Bemerkung.* Jede Verzweigungssignatur auf einer kompakten Fläche ist sogar die Verzweigungssignatur einer endlichen normalen Überlagerung. Dieses von Fenchel vermutete Ergebnis wurde 1951/52 durch Bundgaard/Nielsen [BuNi] und Fox [Fox] bewiesen.

## 11.7 Dreiecksparkettierungen

Wir ordnen die Schwarz-Weiß-Parkettierungen der Ebene  $\mathbb{C}$  (2.6.4) und der Sphäre  $S^2$  (4.2.7-8) durch euklidische bzw. sphärische Dreiecke in die Geometrie der Kreisverwandtschaften ein und konstruieren analoge Parkettierungen zu den hyperbolischen Dreiecksgruppen.

**11.7.1 Euklidische und sphärische Parkettierungen.** Im sphärischen Fall identifizieren wir  $S^2$  mit  $\widehat{\mathbb{C}}$  durch die stereographische Projektion und benutzen anschließend die Sätze 11.6.4 und 11.6.5.

Jedes Teildreieck  $\Delta = A_1 A_2 A_3$  der Parkettierung zur Dreiecksgruppe  $G$  vom Typ  $(q_1, q_2, q_3)$  hat die Innenwinkel  $\pi/q_1, \pi/q_2, \pi/q_3$ . Sei  $\sigma_\nu$  die Spiegelung an der Seite, die der Ecke  $A_\nu$  gegenüber liegt. Durch die zyklischen Vertauschungen  $(\lambda, \mu, \nu)$  von  $(1, 2, 3)$  entstehen die  $(2\pi/q_\nu)$ -Drehungen  $\rho_\nu := \sigma_\lambda \circ \sigma_\mu$  um die Ecken  $A_\nu$ . Sie erzeugen die Dreiecksgruppe  $G$ , siehe Satz 2.6.4 für den euklidischen und Satz 4.2.3 für den sphärischen Fall.

Die von den drei Spiegelungen  $\sigma_\nu$  erzeugte Untergruppe  $G^* < \text{Aut}^*(\widehat{\mathbb{C}})$  bzw.  $G^* < \text{Aut}^*(\mathbb{C})$  heißt *erweiterte Dreiecksgruppe*. Sie enthält  $G$  als Normalteiler von Index zwei. Nach Wahl eines festen Teildreiecks  $\Delta$  der Parkettierung entsprechen alle Teildreiecke  $g(\Delta)$  umkehrbar eindeutig den Elementen  $g \in G^*$ . Genau dann, wenn  $g \in G$  ist, haben  $\Delta$  und  $g(\Delta)$  dieselbe Farbe.

**11.7.2 Hyperbolische Parkettierungen.** Sei  $G$  eine hyperbolische Dreiecksgruppe vom Typ  $(q_1, q_2, q_3)$ . Der Ausgangspunkt einer  $G$ -invarianten Dreiecksparkettierung von  $\mathbb{H}$  ist ein hyperbolisches Dreieck  $\Delta$  wie in Lemma 11.6.7. Analog zum euklidischen und sphärischen Fall wird  $G$  von den Drehungen  $\rho_\nu$  erzeugt und liegt als Normalteiler vom Index 2 in der von den Spiegelungen  $\sigma_\nu$  erzeugten erweiterten Dreiecksgruppe  $G^*$ .

**Satz.** *Ganz  $\mathbb{H}$  ist die lokal endliche Vereinigung aller Dreiecke  $g(\Delta)$  für  $g \in G^*$ . Zwei verschiedene Dreiecke treffen sich längs einer gemeinsamen Seite oder in einer gemeinsamen Ecke oder gar nicht.*

*Man färbt jedes Dreieck  $g(\Delta)$  schwarz bzw. weiß, je nachdem ob  $g \notin G$  oder  $\in G$  ist. Dreiecke mit gemeinsamer Seite haben dann wie die Felder auf dem Schachbrett verschiedene Farben.*

**Beweis.** Sei  $(\lambda, \mu, \nu)$  eine zyklische Permutation von  $(1, 2, 3)$ . Die beiden Spiegelungen  $\sigma_\lambda$  und  $\sigma_\mu$  erzeugen die Standgruppe  $G_\nu^* < G^*$  von  $A_\nu$  in  $G^*$ . Wir benutzen sie, um eine Fläche  $X$  aus Dreiecken künstlich zusammenzusetzen, so daß die Behauptungen des Satzes für  $X$  statt  $\mathbb{H}$  zutreffen:

Durch  $(g \circ \sigma_\nu, t) \sim (g, \sigma_\nu(t)) = (g, t)$  für  $t \in a_\nu$  und  $\nu = 1, 2, 3$  erzeugen wir auf  $G^* \times \Delta$  eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse  $[g, t]$  von  $(g, t)$  besteht aus  $(g, t)$  allein, wenn  $t$  ein innerer Punkt von  $\Delta$  ist. Sie besteht aus  $(g, t)$  und  $(g \circ \sigma_\nu, t)$ , wenn  $t$  ein innerer Punkt der Seite  $a_\nu$  ist. Sie besteht aus  $\{(g \circ \alpha, t) : \alpha \in G_\nu^*\}$  für  $t = A_\nu$ .

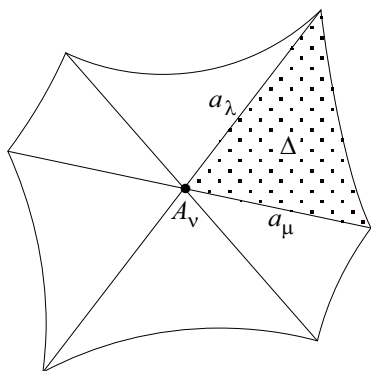
Sei  $X$  die Menge der Äquivalenzklassen, versehen mit der Quotiententopologie bezüglich  $p : G^* \times \Delta \rightarrow X$ ,  $(g, t) \rightarrow [g, t]$ . Dabei trägt  $G^*$  die diskrete Topologie. Durch  $h[g, t] := [hg, t]$  operiert  $G^*$  auf  $X$ . Aus der Beschreibung der Äquivalenzklassen folgt, daß  $X$  aus den Dreiecken  $p(g \times \Delta)$ , ihren Seiten  $p(g \times a_\nu)$  und Ecken  $[g, aA_\nu]$  für  $g \in G^*$  so zusammengesetzt ist, daß die Behauptungen des Satzes mutatis mutandis zutreffen.

Die Abbildung  $\eta : X \rightarrow \mathbb{H}$ ,  $\eta[g, t] := g(t)$ , ist stetig und mit der  $G^*$ -Operation verträglich. Es genügt zu zeigen, daß  $\eta$  ein Homomorphismus ist; denn dann gehen die Eigenschaften der Dreieckszerlegung von  $X$  in die Behauptungen des Satzes über. Wir zeigen:

- (1)  $X$  hängt wegweise zusammen. (2)  $\eta$  ist lokal topologisch.  
 (3)  $\eta$  ist unbegrenzt.

Dann ist  $\eta$  nach 3.2.4(3) ein Homöomorphismus.

Zu (1). Zu jedem  $s \in \Delta$  und  $t \in a_\nu$  gibt es einen Weg von  $[g, s]$  nach  $[g\sigma_\nu, t] = [g, \sigma_\nu(t)]$ . Weil  $G^*$  von  $\{\sigma_\nu\}$  erzeugt wird, folgt durch Induktion über die Anzahl der Faktoren  $\sigma_\nu$  in  $g$ , daß sich jeder Punkt  $[g, t]$  mit  $[\text{id}, A_1]$  durch einen Weg verbinden läßt.



**Fig. 11.7.2.** Die Sternumgebung der Ecke  $A_\nu$  in einer Dreiecksparkettierung.

Zu (2). Der Stern  $S_\nu := \{g(t) : g \in G_\nu^*, t \in \Delta_\nu \setminus \{a_\nu\}\}$  ist eine offene Umgebung von  $A_\nu$  in  $\mathbb{H}$ , siehe Fig. 11.7.2. Entsprechend ist der Stern  $\Sigma_\nu := \{[g, t] : g \in G_\nu^*, t \in \Delta_\nu \setminus \{a_\nu\}\}$  eine offene Umgebung von  $[\text{id}, A_\nu]$  in  $X$ . Durch  $\eta$  wird  $\Sigma_\nu$  homöomorph auf  $S_\nu$  abgebildet. Zu jedem Punkt  $x \in X$  gibt es ein  $\nu \in \{1, 2, 3\}$  und ein  $h \in G_\nu^*$  mit  $x \in h(\Sigma_\nu)$ . Daher ist  $\eta$  lokal topologisch.

Zu (3). Jeder Weg  $u : [0, 1) \rightarrow X$  ohne Endpunkt kann stetig nach 1 fortgesetzt werden, sobald dies für  $\eta \circ u$  gilt: Die Kurve  $K := \{\eta \circ u(s) : s \in [0, 1]\}$  und das Dreieck  $\Delta$  sind kompakte Teilmengen von  $\mathbb{H}$ . Wie  $G$  operiert auch  $G^*$  diskontinuierlich auf  $\mathbb{H}$ . Daher ist  $M := \{g \in G^* : g^*(\Delta) \cap K\}$  endlich und  $L := \{[g, t] : g \in M, t \in \Delta\}$  kompakt. Wegen  $u(s) \in L$  für  $0 \leq s < 1$  läßt sich  $u$  stetig nach 1 fortsetzen.  $\square$

Schwarz begann 1872 mit der Untersuchung von Dreiecksparkettierungen; siehe seine Zeichnung einer Parkettierung des Typ (2,4,5) von  $\mathbb{E}$  in [Sch] 2, S. 240.

Der Parkettierungssatz ist ein Spezialfall des Poincaréschen Satzes über Polygon-Parkettierungen [Po] 2, p. 108-168. In [Mask] wird er mit topologischen Methoden bewiesen, welche wir für obigen Beweis übernahmen, vgl. auch [DR].

In [Be] und [Mag](viele Bilder) werden Parkettierungen ausführlich behandelt.

**11.7.3 Fundamentalbereich und Orbitprojektion.** Die Orbitprojektion  $\eta : Z \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  der Dreiecksgruppe  $G < \text{Aut}(Z)$  wird so gewählt, daß  $\{0, 1, \infty\}$  der Verzweigungsort ist.

**Satz.** (1) *Jedes Doppeldreieck  $D_\nu := \Delta \cup \sigma_\nu(\Delta)$  ist ein Fundamentalbereich der  $G$ -Operation auf  $Z$ .*

(2) *Für jedes  $g \in G^* \setminus G$  ist  $\eta \circ g = \bar{\eta}$  zu  $\eta$  konjugiert komplex.*

*Beweis.* Da  $\Delta$  ein Fundamentalbereich der  $G^*$ -Operation ist und  $G < G^*$  den Index zwei hat, folgt (1).–Zu (2). Wegen (1) wird das Innere  $D_\nu^\circ$  durch  $\eta$  biholomorph auf eine offene Menge  $U_\nu \subset \hat{\mathbb{C}}$  abgebildet. Es gilt  $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = \mathbb{C}^{\times \times}$ . Sei  $s_\nu := (\eta|D_\nu^\circ)^{-1}$ . Die drei antiholomorphen Automorphismen

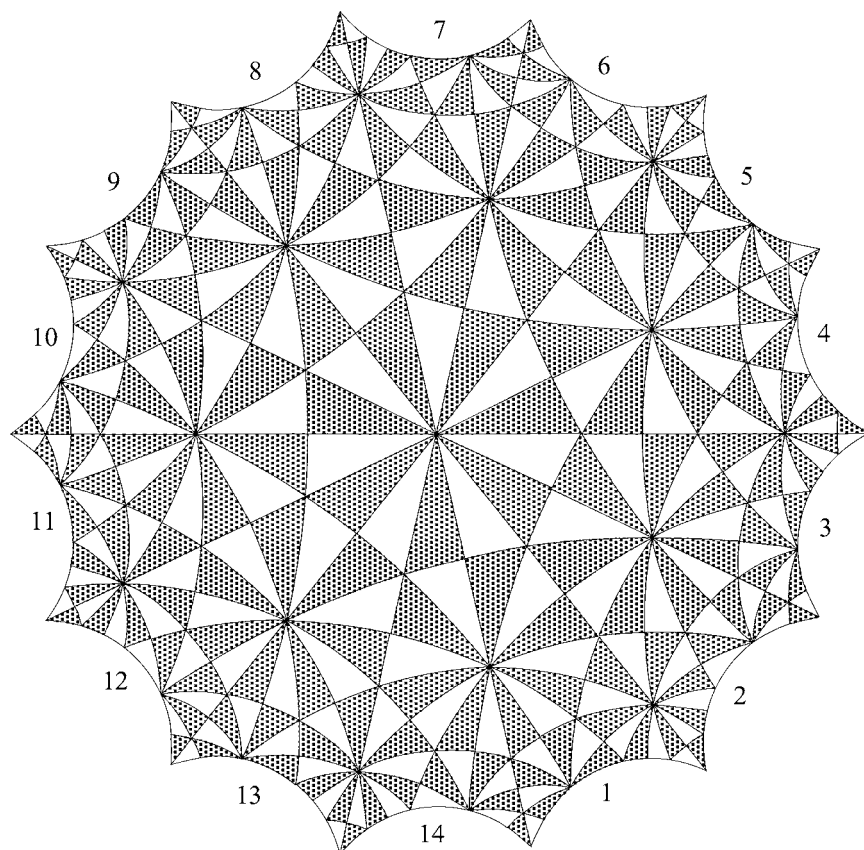
$$\varphi_\nu : U_\nu \xrightarrow{s_\nu} D_\nu^\circ \xrightarrow{\sigma_\nu} D_\nu^\circ \xrightarrow{\eta_\nu} U_\nu$$

stimmen auf den paarweisen Durchschnitten überein und setzen sich daher zu einem antiholomorphen Automorphismus  $\varphi$  von  $\mathbb{C}^{\times \times}$  zusammen, der sich stetig auf  $\hat{\mathbb{C}}$  fortsetzen läßt, so daß 0, 1 und  $\infty$  zu Fixpunkten werden. Nach dem Hebbbarkeitssatz ist  $\varphi$  ein antiholomorpher Automorphismus von  $\hat{\mathbb{C}}$ , und zwar wegen der drei Fixpunkte die komplexe Konjugation. Dann gilt  $\bar{\eta} = \eta \circ \sigma_\nu$  zunächst auf  $D_\nu^\circ$  und sodann wegen des Identitätssatzes auf ganz  $Z$ . Weil sich jedes  $g \in G^* \setminus G$  als  $g = h \circ \sigma_\nu$  mit  $h \in G$  darstellen läßt, folgt die Behauptung  $\bar{\eta} = \eta \circ g$ .  $\square$

**11.7.4 Das Kleinsche 14-Eck.** Sei  $\eta_n : X_n \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  die Modulüberlagerung, d.h. die Orbitprojektion der Modulgruppe  $G_n$ , vgl. 5.7.2. Durch Vorschalten der unverzweigten universellen Überlagerung  $\zeta_n$  entsteht für  $n \geq 7$  die Orbitprojektion

$$\eta : \mathbb{H} \xrightarrow{\zeta_n} X_n \xrightarrow{\eta_n} \hat{\mathbb{C}}$$

der universellen Liftung  $\hat{G}_n < \text{Aut}(\mathbb{H})$ , siehe 4.8.4(3). Diese Gruppe ist eine Dreiecksgruppe vom Typ (2, 3,  $n$ ). Wegen  $G_n \cong \hat{G}_n / \mathcal{D}(\zeta_n)$  setzen sich  $\sharp G_n$  viele Doppeldreiecke der  $\hat{G}_n$ -Parkettierung zu einem Fundamentalbereich des Normalteilers  $\mathcal{D}(\zeta_n) \triangleleft \hat{G}_n$  zusammen. Für  $n=7$  mit  $\sharp G_7 = 168$  zeigt Figur 11.7.4 diesen 14-eckigen Fundamentalbereich. Dabei wurde  $\mathbb{H}$  durch die isomorphe Kreisscheibe  $\mathbb{E}$  ersetzt, damit eine 7-fache Drehsymmetrie in die Augen fällt. Durch die angegebenen, richtungsumkehrenden paarweisen Identifikationen der 14 Seiten entsteht die Modulfläche  $X_7$ . Dieses 14-Eck wurde von Klein 1878 angegeben, siehe [Klei 1], Bd. 3, S. 126 ff und [Gra], S. 225 ff.

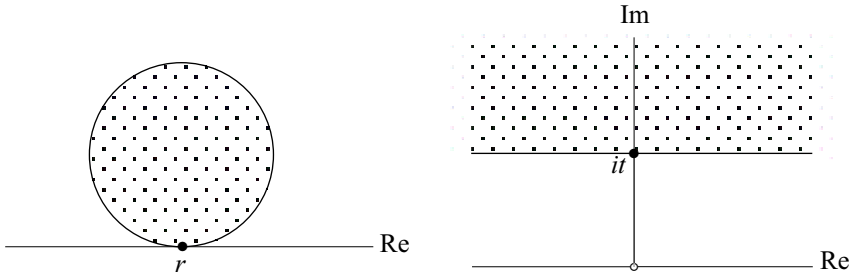


**Fig. 11.7.4.** Das Kleinsche 14-Eck ist Teil einer Dreiecksparkettierung des Typs  $(2,3,7)$  von  $\mathbb{E}$ . Durch Identifizieren der Seiten 1 mit 6, 3 mit 8, 5 mit 10, 7 mit 12, 9 mit 14, 11 mit 2, 13 mit 4 entsteht die Modulfläche  $X_7$ .

## 11.8 Aufgaben

- 1) Wie lautet die Normalfunktion  $f_0$  zu  $X = \mathbb{E}$ ? Was besagt in diesem Fall die Lindelöfschen Ungleichung 11.1.1?
- 2) Sei  $X$  eine zusammenhängende Fläche. Zeige:
  - (i) Jede holomorphe Abbildung von  $X$  in eine hyperbolische Fläche ist konstant, wenn  $X$  nicht-hyperbolisch ist.
  - (ii) Jede injektive holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C} \rightarrow X$  ist ein Isomorphismus; oder  $X$  ist zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorph, und  $X \setminus f(\mathbb{C})$  besteht aus einem Punkt.
  - (iii) Wenn es eine surjektive holomorphe Abbildung  $\widehat{\mathbb{C}} \rightarrow X$  gibt, ist  $X$  zur Zahlenkugel isomorph (Satz von Lüroth, vgl. 7.2.2).
- 3) Finde in der Fundamentalgruppe einer Fläche die Elemente endlicher Ordnung.

- 4) Welche Elemente in der Deckgruppe  $\mathcal{D}(\lambda)$  der  $\lambda$ -Funktion sind parabolisch bzw. hyperbolisch?
- 5) Zeige: Die einzigen zusammenhängenden Riemannschen Flächen, welche nicht durch Ring-Gebiete unverzweigt überlagert werden können, sind die Ausnahmeflächen, welche keine Ring-Gebiete sind.
- 6) Zeige, daß jedes Ring-Gebiet zu  $A_r := \{z \in \mathbb{C} : r^{-1} < |z| < r\}$  mit  $r > 1$  isomorph ist. Wann sind zwei Ring-Gebiete dieser Gestalt zueinander isomorph? Bestimme  $\text{Aut}(A_r)$  und alle nicht-trivialen Standgruppen.
- 7) Zeige für Untergruppen  $G < \text{Aut}(\mathbb{C})$  bzw.  $\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ : Wenn mindestens zwei bzw. drei Punkte auf lokal endlichen Bahnen liegen, ist  $G$  diskontinuierlich.
- 8) Der Gaußsche Zahlenring  $\mathbb{Z}[i] := \{\alpha + \beta i : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$  ist ein euklidischer Unterring von  $\mathbb{C}$ . Zeige:  
 $\text{SL}_2(\mathbb{Z}[i]) < \text{SL}_2(\mathbb{C})$  ist diskret. Der Quotientenkörper  $K$  von  $\mathbb{Z}[i]$  liegt dicht in  $\mathbb{C}$ . Wenn  $b, d \in \mathbb{Z}[i]$  teilerfremd sind, gibt es Zahlen  $a, c \in \mathbb{Z}[i]$ , so daß  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$  ist. Es gibt kein Gebiet in  $\widehat{\mathbb{C}}$ , auf dem  $\text{SL}_2(\mathbb{Z}[i])$  diskontinuierlich operiert.  
 Dieses Beispiel wurde 1884 von Picard angegeben.



**Fig. 11.8.9** Horozykel bei  $r \in \mathbb{R}$  und bei  $\infty$ .

Ein *Horozykel bei  $r \in \mathbb{R}$*  besteht aus  $r$  und einer offenen Kreisscheibe in  $\mathbb{H}$ , welche  $\mathbb{R}$  bei  $r$  berührt. Ein *Horozykel bei  $\infty$*  besteht aus  $\infty$  und einer offenen Halbebene  $\{z \in \mathbb{H} : \text{Im } z > t\}$  für ein  $t \geq 0$ , siehe Fig. 11.8.9.

- 9) Zeige: Folgende Umgebungsbasen bestimmen bestimmen auf  $\widehat{\mathbb{H}} := \mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  eine Topologie, die feiner als die Spurtopologie der Einbettung  $\widehat{\mathbb{H}} \subset \widehat{\mathbb{C}}$  ist: Die Basisumgebungen von  $z \in \mathbb{H}$  sind die offenen Kreisscheiben in  $\mathbb{H}$  mit dem Zentrum  $z$ ; die Basisumgebungen von  $r \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  sind die Horozykel bei  $r$ .
- 10) Zeige im Anschluß an 5.7.2: (i) Auf  $\widehat{\mathbb{H}} = \mathbb{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ , versehen mit der *Horozykel-Topologie* von Aufgabe 9, operiert die Modulgruppe  $\Gamma$ . Die Jot-Funktion läßt sich zur  $\Gamma$ -Orbitprojektion  $\widehat{\mathbb{H}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  stetig fortsetzen.  
 (ii) Für jede Kongruenzgruppe  $\Gamma_n$  läßt sich  $\lambda_n : \mathbb{H} \rightarrow X_n^*$  zur  $\Gamma_n$ -Orbitprojektion  $\widehat{\mathbb{H}} \rightarrow X_n$  stetig fortsetzen. Wie verteilen sich die Punkte von  $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  auf die  $\Gamma_n$ -Orbiten?



## 12. Polyederflächen

Um Integrale auf einer kompakten Fläche  $X$  zu untersuchen, zerschneidet Riemann  $X$  in ein einfach zusammenhängendes ebenes Flächenstück und gewinnt durch Integration längs der Schnitte *Periodenrelationen* der Differentialformen, die für ein tieferes Verständnis der Abelschen Integrale eine wichtige Rolle spielen.

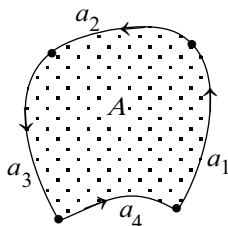
Riemann ging davon aus, daß jede kompakte Fläche in einer kanonischen Weise zerschnitten werden kann. Für den genauen Beweis entwickeln wir kombinatorische Methoden der Flächentopologie. Aus der kanonischen Zerschneidung ergibt sich die *topologische Klassifikation* aller kompakten, zusammenhängenden Riemannschen Flächen durch ihr Geschlecht  $g$ . Es bestimmt die analytische Charakteristik  $\chi = 2 - 2g$ , und die Homologie  $H_1(X)$  ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang  $2g$ .

Das vorliegende Kapitel enthält alle notwendigen Begriffe und Ergebnisse aus der kombinatorischen Topologie im Normaldruck. Im Kleindruck abgesetzt sind die teilweise umfangreichen Beweise dieser Ergebnisse und einige historische Bemerkungen.

### 12.1 Flächenkomplexe

Die Zerschneidung Riemannscher Flächen in Polygone wird durch das umgekehrte Verfahren vorbereitet: Unter einen *Flächenkomplex* verstehen wir eine Menge von Polygonen zusammen mit einer Anleitung, wie man sie zu einer Fläche zusammenfügt.

**12.1.1 Topologische Polygone.** Wenn der Rand  $\partial\mathbb{E}$  der abgeschlossenen Kreisscheibe  $\mathbb{E}$  durch  $n \geq 2$  Punkte in  $n$  Bögen unterteilt wird, spricht man von einem *topologischen  $n$ -Eck*. Die Teilungspunkte heißen *Ecken*, und die Bögen heißen *Seiten*. Man durchläuft  $\partial\mathbb{E}$  gegen den Uhrzeigersinn und legt dadurch eine Reihenfolge der Seiten bis auf zyklische Vertauschung fest. Außerdem bekommt jede Seite  $a$  dabei eine Richtung und je eine Ecke als Anfangs- bzw. Endpunkt zugeteilt. Wenn man die Eckenzahl nicht betonen will, sagt man *topologisches Polygon* statt  $n$ -Eck. Homöomorphe Bilder topologischer Polygone heißen ebenfalls topologische Polygone. Man schreibt



**Fig. 12.1.1.** Ein topologisches Viereck  $A$  mit dem Rand  $\partial A = a_1 a_2 a_3 a_4$ .

$\partial A = a_1 a_2 \dots a_n$ , um auszudrücken, daß im Rande des topologischen  $n$ -Ecks  $A$  die Seiten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  zyklisch aufeinander folgen, siehe Figur 12.1.1.

**12.1.2 Flächenkomplexe.** Wir bilden zu jeder Menge  $M$  die Menge der orientierten Objekte  $M \times \mu_2$  mit der Involution  $(a, \varepsilon) \mapsto (a, -\varepsilon) =: (a, \varepsilon)^-$  für  $a \in M$  und  $\varepsilon = \pm 1$ . Wir schreiben  $a^\pm := (a, \pm 1)$  und identifizieren  $a \in M$  mit  $a^+ \in M \times \mu_2$ .

Ein Flächenkomplex  $K = (K_0, K_1, K_2, \partial, \text{st})$  besteht aus drei endlichen Mengen  $K_j$  und zwei Operatoren  $\partial$  (Rand) und  $\text{st}$  (Stern). Die Elemente von  $K_0, K_1$  bzw.  $K_2$  heißen Ecken, Kanten, bzw. Polygone. Die orientierten Kanten, d.h. die Elemente von  $K \times \mu_2$ , heißen Seiten. Der Randoperator  $\partial$  ordnet jedem Polygon  $A$  eine zyklische, d.h. eine endliche, bis auf zyklische Vertauschung eindeutig bestimmte Folge  $\partial A = a_1 \dots a_n$  von Seiten zu. Analog ordnet der Sternoperator  $\text{st}$  jeder Ecke  $\alpha$  eine zyklische Folge  $\text{st } \alpha = (b_1, \dots, b_m)$  von Seiten zu. Dabei gelten die Axiome:

- (1) Jeder Rand besteht aus mindestens zwei Seiten.
- (2) Jeder Stern besteht aus mindestens einer Seite.
- (3) Jede Seite kommt genau einmal in einem Rand vor.
- (4) Jede Seite kommt genau einmal in einem Stern vor.
- (5) Für jedes Seitenpaar  $(a, b)$  gilt:

$$\exists \alpha \in K_0 \text{ mit } \text{st } \alpha = (a, b, \dots) \Leftrightarrow \exists A \in K_2 \text{ mit } \partial A = b^- a \dots$$

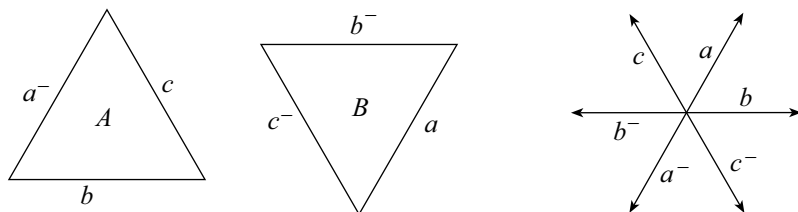
Das Polygon  $A$  wird  $n$ -Eck genannt, wenn sein Rand  $\partial A$  aus  $n$  Seiten besteht. Wenn die Seite  $a$  im Stern der Ecke  $\alpha$  vorkommt, heißt  $\alpha$  Anfangspunkt von  $a$ . Die Anzahl der Seiten in  $\text{st } \alpha$  heißt Ordnung  $o(\alpha)$  von  $\alpha$ . Wir nennen

$$e(K) := \#K_0 - \#K_1 + \#K_2$$

die Euler-Poincarésche Charakteristik von  $K$ .

**Satz.** Jeder Flächenkomplex ist durch sein Datum  $(K_1, K_2, \partial)$  eindeutig bestimmt. Letzteres kann unter Beachtung der Axiome (1) und (3) beliebig vorgegeben werden.

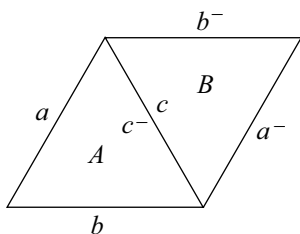
*Beweis.* Man definiert durch (5), wann eine zyklische Folge von Seiten Stern genannt wird. Dann gelten (2) und (4). Man definiert sodann  $K_0$  als Menge der Sterne.  $\square$



**Fig. 12.1.2.** Ein Flächenkomplex mit 1 Ecke, 3 Kanten und 2 Polygonen. Das rechte Bild zeigt den Stern der einzigen Ecke.

*Beispiel*, siehe Figur 12.1.2:  $K_0 = \{\alpha\}$ ,  $K_1 = \{a, b, c\}$ ,  $K_2 = \{A, B\}$  mit  $\partial A = a^-bc$ ,  $\partial B = ab^-c^-$ ;  $\text{st } \alpha = (b, a, c, b^-, a^-, c^-)$ . Beide Polygone sind Dreiecke. Die einzige Ecke hat die Ordnung 6. Der Komplex hat die Charakteristik  $e = 1 - 3 + 2 = 0$ .

**12.1.3 Realisierung.** Der Flächenkomplex  $K$  ist eine kombinatorische Vorschrift, um topologische Polygone zu einer Polyederfläche zusammenzusetzen. Dazu wählen wir zu jedem  $n$ -Eck  $A \in K_2$  ein topologisches  $n$ -Eck  $A^*$ . Gemäß dem Rand  $\partial A = a_1 \dots a_n$  ordnen wir jeder Seite  $a_j$  unter Wahrung der Reihenfolge eine Seite  $a_j^*$  von  $A^*$  zu. Zu jeder Kante  $a \in K_1$  wählen wir als *Kantenheftung* einen Homöomorphismus  $h_a : a^* := (a^+)^* \rightarrow (a^-)^*$ , der die Richtung umkehrt. Wir bilden sodann die disjunkte Vereinigung  $K^* = \uplus A^*$  über alle  $A \in K_2$  und identifizieren für jede Kante  $a$  den Punkt  $x \in a^*$  mit  $h_a(x) \in (a^-)^*$ . Der Identifikationsraum wird mit  $|K|$  und die Projektion mit  $\rho : K^* \rightarrow |K|$ ,  $\rho(t) = [t, A]$  für  $t \in A^*$  und  $A \in K_2$ , bezeichnet. Wir nennen  $|K|$  eine *Polyederfläche* und  $\rho$  eine *Realisierung* von  $K$ , siehe Figur 12.1.3.



**Fig. 12.1.3.** Im Flächenkomplex der Figur 12.1.2 wird  $c$  mit  $c^-$  identifiziert. (Anschließend werden  $a$  mit  $a^-$  und  $b$  mit  $b^-$  identifiziert, so daß wie in Figur 2.3.1 b ein Torus entsteht.)

**Lemma.** Die Polyederfläche  $|K|$  ist durch den Komplex  $K$  bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Seien  $(K^*, \rho)$  und  $(K^*, \sigma)$  zwei Realisierungen mit den Kantenheftungen  $h_a$  bzw.  $k_a$ . Für jede Kante  $a$  wird ein richtungstreuer Homöomorphismus  $f_a : a^* \rightarrow a^*$  gewählt. Man definiert  $f_a^- = k_a f_a h_a^{-1} : (a^-)^* \rightarrow (a^-)^*$ . Die  $f_a$  und  $f_a^-$  setzen sich für jedes Polygon  $A$  zu einem Homöomorphismus  $\partial A^* \rightarrow \partial A^*$  der Ränder zusammen. Dieser wird zu einem Homöomorphismus  $f_A : A^* \rightarrow A^*$  der

topologischen Polygone erweitert. Dadurch erhält man einen Homöomorphismus  $f: K^* \rightarrow K^*$ , welcher mit den Kantenheftungen  $h_a, k_a$  verträglich ist und folglich einen Homöomorphismus der Polyederflächen induziert.  $\square$

Nach Wahl einer Realisierung  $\rho: K^* \rightarrow |K|$  bezeichnen wir die topologischen Polygone und ihrer Seiten kurz mit  $A$  und  $a_j$  statt  $A^*$  und  $a_j^*$ .

Die Eckenmenge  $K_0$  wird mit einer Teilmenge von  $|K|$  identifiziert, also  $K_0 \subset |K|$ : Sei  $a$  eine Seite von  $A \in K_2$  mit dem Anfangspunkt  $\alpha \in K_0$ . Als Seite des topologischen Polygons  $A$  beginnt  $a$  in einer Ecke  $Q$  von  $A$ . Man identifiziert  $\alpha \in K_0$  mit  $\rho(Q) \in |K|$ . Wegen Axiom (5) in 12.1.2 hängt  $\rho(Q)$  nicht von der Wahl der Seite  $a$  ab.

Für jede  $\rho$ -Faser gibt es drei Möglichkeiten:

- (1) Sie besteht aus genau einem *inneren* Punkt eines Polygons  $A$ .
- (2) Sie besteht aus dem *inneren* Punkt  $x$  einer Polygonseite  $a$  und dem entsprechenden Punkt  $h_a(x) \in a^-$ .
- (3) Sie besteht aus endlich vielen Polygonecken.

**Satz.** Die Polyederfläche  $|K|$  ist ein kompakter Hausdorffraum.

*Beweis.* Die Realisierung  $\rho: K^* \rightarrow |K|$  ist eine abgeschlossene Abbildung. Denn für jede abgeschlossene Menge  $M \subset K^*$  ist

$$\rho^{-1}(\rho(M)) = M \cup \bigcup_{a \in K_1} h_a(M \cap a) \cup E \quad \text{mit } E \subset K_0.$$

abgeschlossen in  $K^*$ , also auch  $\rho(M)$  abgeschlossen in  $|K|$ .

Nun seien  $x, y$  zwei verschiedene Punkte in  $|K|$ . Weil  $\rho$  endliche Fasern hat und  $K^*$  hausdorffsch ist, gibt es disjunkte Umgebungen  $U$  von  $\rho^{-1}(x)$  und  $V$  von  $\rho^{-1}(y)$ . Da  $\rho$  abgeschlossen ist, gibt es Umgebungen  $U'$  von  $x$  und  $V'$  von  $y$  mit  $\rho^{-1}(U') \subset U$  und  $\rho^{-1}(V') \subset V$ . Daraus folgt  $U' \cap V' = \emptyset$ .

Die Fläche  $|K| = \rho(K^*)$  ist kompakt, weil  $K^*$  eine endliche Vereinigung kompakter Polygone ist.  $\square$

**12.1.4 Brezelflächen.** Bei Flächenkomplexen mit einem einzigen Polygon  $A$  genügt es wegen Satz 12.1.2, den Rand  $\partial A$  anzugeben. In diesem Sinne sind folgende *kanonische Komplexe*  $T_g$  vom Geschlecht  $g$  zu verstehen.

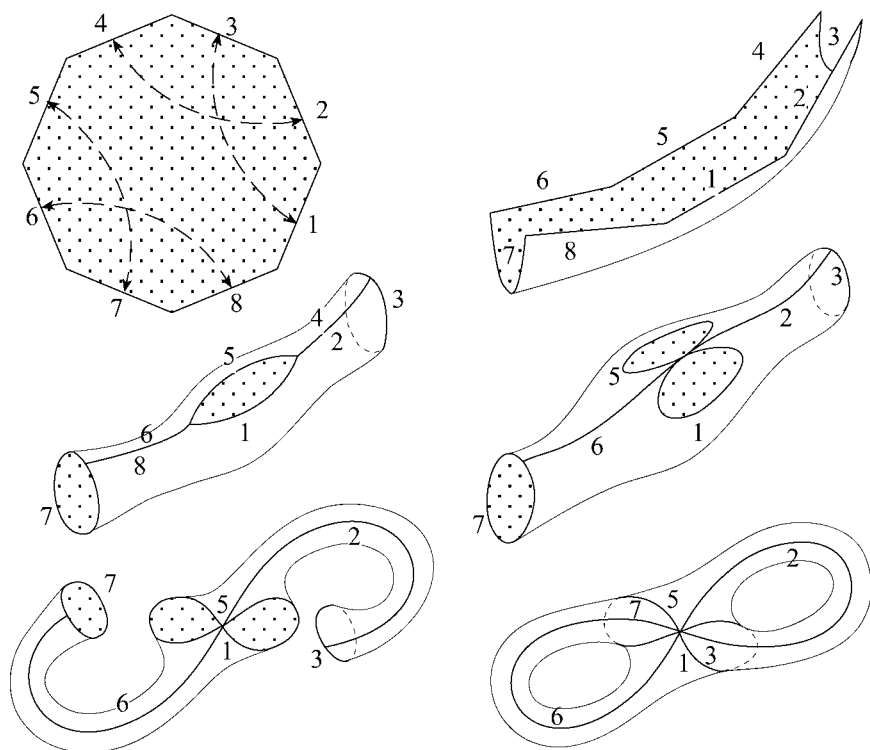
$$\begin{aligned} T_0 &: aa^- \\ T_g &: a_1 b_1 a_1^- b_1^- \dots a_g b_g a_g^- b_g^- \quad \text{für } g = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Bei  $T_0$  gibt es zwei und sonst nur eine Ecke. Die Charakteristik lautet

$$(1) \quad e(T_g) = 2 - 2g.$$

Um die Polyederfläche  $|T_0|$  konkret anzugeben, nehmen wir als topologisches Polygon  $A$  die kompakte Scheibe  $\overline{\mathbb{E}}$ , deren Rand durch die beiden Ecken  $\pm 1$  in zwei Seiten  $a$  und  $a^-$  unterteilt wird. Als Kantenheftung dient die komplexe Konjugation. Dann ist  $|T_0|$  zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  homöomorph.

Um  $T_g$  für  $g \geq 1$  zu realisieren, nehmen wir als topologisches Polygon  $A$  ein regelmäßiges  $4g$ -Eck. Als Kantenheftungen dienen Isometrien, siehe Figur 2.3.1 b für  $g = 1$  (Torus) und Figur 12.1.4 für  $g = 2$ . Die Polyederfläche  $|T_g|$  heißt *Brezelfläche vom Geschlecht  $g$* .



**Fig. 12.1.4.** Herstellung der Brezelfläche vom Geschlecht 2 aus einem Achteck mit nummerierten Seiten. Zu verheftende Seiten sind durch gebogene Doppelpfeile verbunden. Um die Notation des Textes auf die Figur zu übertragen, muß man die Seitennummern 1, 2, ..., 8 durch  $a_1, b_1, \dots, b_2^-$  ersetzen. (Entsprechendes gilt für Figur 2.3.1 b.)

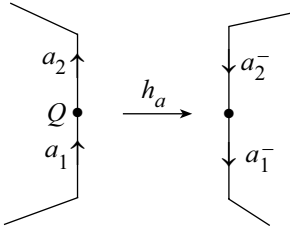
Ein Flächenkomplex  $K$  heißt *zusammenhängend*, wenn die Polyederfläche  $|K|$  zusammenhängt. Das ist genau dann der Fall, wenn sich  $K$  nicht als disjunkte Vereinigung von zwei nicht-leeren Flächenkomplexen darstellen läßt.

**12.1.5 Klassifikationstheorem.** *Zu jedem zusammenhängenden Flächenkomplex  $K$  gibt es einen kanonischen Flächenkomplex  $T_g$  mit gleicher Charakteristik wie  $K$ , so daß  $|K|$  und  $|T_g|$  homöomorph sind.*

Der Beweis folgt im nächsten Paragraphen. Wegen  $e(K) = e(T_g) = 2 - 2g$  ist das *Geschlecht*  $g$  durch  $K$  eindeutig bestimmt. Es nimmt alle ganzen Zahlen  $\geq 0$  als Werte an. Das Klassifikationstheorem wird durch die Berechnung der Fundamentalgruppe  $\pi(|T_g|)$  und Homologie  $H_1(|T_g|)$  in 12.3 ergänzt.

## 12.2 Kombinatorische Klassifikation

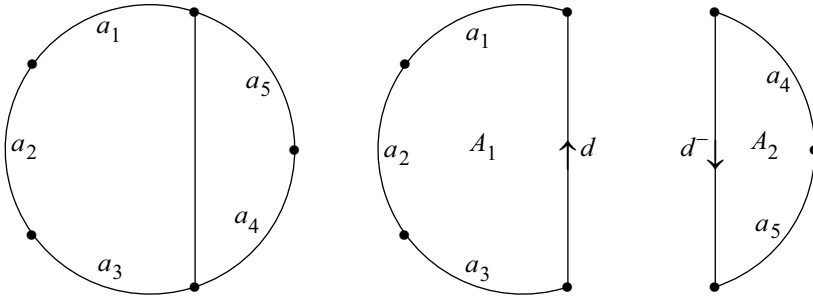
Die kombinatorische Äquivalenz von Flächenkomplexen  $K$  wird durch Teilen von Kanten und Polygonen erklärt. Dabei ändert sich die Charakteristik nicht, und die Polyederflächen  $|K|$  bleiben homöomorph. Jeder zusammenhängende Flächenkomplex ist zu einem kanonischen Komplex  $T_g$  kombinatorisch äquivalent.



**Fig. 12.2.1.** Die Teilung der Seite  $a$  wird durch die Kantenheftung  $h_a$  auf die Seite  $a^-$  übertragen.

**12.2.1 Teilung einer Kante.** Eine Kante  $a \in K_1$  wird dadurch geteilt, daß man sie durch zwei Kanten  $a_1, a_2$  ersetzt und gleichzeitig in den Polygonrändern  $a$  durch  $a_1 a_2$  sowie  $a^-$  durch  $a_2^- a_1^-$  (Reihenfolge!) ersetzt. Dabei kommt der Anfangspunkt von  $a_2$  als neue Ecke hinzu, und die Charakteristik ändert sich nicht.

In der Realisierung  $\rho : K^* \rightarrow |K|$  teilt man die Seite  $a$  durch einen inneren Punkt  $Q$  in zwei Seiten  $a_1, a_2$  und überträgt mit der Kantenheftung  $h_a$  diese Teilung auf die Seite  $a^-$ , siehe Figur 12.2.1. Die Seitenheftungen  $h_{a_1}$  und  $h_{a_2}$  sind die Beschränkungen von  $h_a$ . Daher ändert sich die Polyederfläche  $|K|$  nicht.  $\square$



**Fig. 12.2.2.** Teilung eines Polygons durch eine neue Kante  $d$ .

**12.2.2 Teilung eines Polygons.** Ein  $n$ -Eck  $A$  mit dem Rand  $\partial A = a_1 \dots a_n$  wird durch eine neue Kante  $d$  geteilt, indem man  $A$  durch zwei neue Polygone  $A_1, A_2$  mit den Rändern

$$\partial A_1 = a_1 \dots a_r d \quad , \quad \partial A_2 = d^- a_{r+1} \dots a_n$$

ersetzt. Die Charakteristik ändert sich nicht. In der Realisierung  $\rho : K^* \rightarrow |K|$  können wir annehmen, daß  $A$  eine Kreisscheibe mit den Seiten  $a_1, \dots, a_n$  und den Ecken  $Q_0, \dots, Q_{n-1}$  ist. Sie wird durch die Sekante  $d$  von  $Q_0$  nach  $Q_r$  in zwei topologische Polygone  $A_1$  und  $A_2$  zerschnitten, siehe Figur 12.2.2. Die Heftungen aller alten Kanten bleiben erhalten. Als neue Heftung kommt  $h_d = \text{id}$  hinzu. Daher ändert sich die Realisierung  $|K|$  nicht.  $\square$

**12.2.3 Kombinatorische Äquivalenz.** Auf der Menge aller Flächenkomplexe werden die Relationen  $K \rightarrow L$  und  $K \Rightarrow L$  dadurch definiert, daß  $L$  aus  $K$  durch Teilung einer Kante bzw. eines Polygons hervorgeht. Die durch  $\rightarrow$  und  $\Rightarrow$  erzeugte Äquivalenzrelation heißt *kombinatorische Äquivalenz*. Kombinatorisch äquivalente Komplexe haben dieselbe Charakteristik und besitzen homöomorphe Polyederflächen. Das Klassifikationstheorems 12.1.5 folgt aus dem

**Klassifikationssatz.** *Jeder zusammenhängende Flächenkomplex ist zu einem kanonischen Komplex  $T_g$  kombinatorisch äquivalent.*

Dieser Satz wird in den Abschnitten 12.2.4-9 bewiesen.

**12.2.4 Zusammenhang.** *Jeder zusammenhängende Komplex  $K$  ist zu einem Komplex äquivalent, der nur ein Polygon besitzt.*

*Beweis.* Wenn  $K$  mindestens zwei Polygone besitzt, muß es wegen des Zusammenhangs eine Kante  $a$  geben, so daß  $a^+$  und  $a^-$  zu verschiedenen Polygonen  $A_1$  und  $A_2$  gehören:  $\partial A_1 = ua$ ,  $\partial A_2 = a^-v$  mit nicht-leeren Seitenfolgen  $u, v$ . Man ersetzt  $A_1$  und  $A_2$  durch ein Polygon  $A$  mit dem Rand  $\partial A = uv$  und erhält einen äquivalenten Komplex, weil  $A_1$  und  $A_2$  durch Teilung des Polygons  $A$  entstehen. Man wiederholt dieses Verfahren, bis nur noch ein Polygon vorhanden ist.  $\square$

**12.2.5 Kürzung.** Im Rande eines Polygons treten die beiden Seiten  $a^-$  und  $a$  genau dann unmittelbar hintereinander auf, wenn der Anfangspunkt von  $a$  die Ordnung eins hat. Von dieser Situation handelt das

**Lemma.** *Wenn im Rande eines  $n$ -Ecks  $A$  ( $n \geq 4$ ) die Seiten  $a$  und  $a^-$  unmittelbar hintereinander auftreten, kann man  $a$  und  $a^-$  streichen: Man erhält einen äquivalenten Komplex, der gleich viele Polygone aber eine Kante und eine Ecke weniger besitzt.*

*Beweis.* Man hat  $\partial A = a^-uva$  mit nicht leeren Folgen  $u, v$ . Dann gilt:

$$\begin{array}{llll} \partial A = a^-uva & \Rightarrow & \partial A_1 = a^-ud = uda^-, \partial A_2 = d^-va = ad^-v \\ \leftarrow & \partial A_1 = ub, \partial A_2 = b^-v & \Leftarrow & \partial B = uv. \end{array} \quad \square$$

**12.2.6 Erniedrigung der Ordnung.** *Vom Komplex  $K$  wird vorausgesetzt: Er enthält nur ein Polygon  $A$ . Es gibt wenigstens zwei Ecken. Die minimale Eckenordnung ist  $r \geq 2$ . – Dann gibt es einen äquivalenten Komplex mit gleicher Anzahl von Ecken, Kanten und Polygonen, bei dem die minimale Ordnung  $\leq r - 1$  ist.*

*Beweis.* Es gibt eine Seite  $c$ , deren Anfangspunkt  $\alpha$  die minimale Ordnung  $o(\alpha) = r$  hat und deren Endpunkt ( $:=$  Anfangspunkt von  $c^-$ )  $\beta \neq \alpha$  ist. Sei  $b$  der Vorgänger von  $c$  in  $\partial A$ , also  $\partial A = bcu$ . Es ist  $b \neq c^-$ , da sonst die minimale Ordnung 1 aufträte. Daher muß  $b^-$  in der Seitenfolge  $u$  vorkommen,  $u = xb^-y$ . Wir gehen zu einen äquivalenten Komplex über

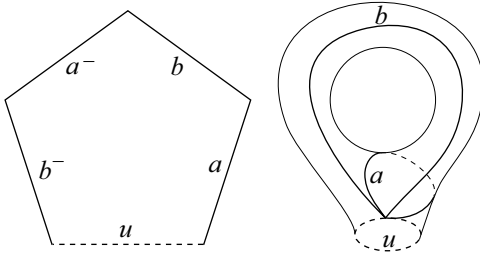
$$\begin{array}{ll} \partial A = ubc & \Rightarrow \partial A_1 = ud = xb^-yd = b^-ydx, \partial A_2 = d^-bc = cd^-b \\ \Leftarrow & \partial B = cd^-ydx. \end{array}$$

Damit ist die Kante  $b$  verschwunden und die neue Kante  $d$  aufgetaucht. Die Seitenfolge  $y$  hat denselben Anfangs- und Endpunkt  $\gamma$ , welcher zunächst auch Anfangspunkt von  $b$  ist und nach der Änderung Anfangspunkt von  $d$  wird. Erster Fall  $\gamma = \alpha$ : Der Stern  $st \alpha$  verliert zwei Seiten  $b, b^-$  und gewinnt nur eine Seite  $d$ . Denn  $d^-$  beginnt in  $\beta$ . Zweiter Fall  $\gamma \neq \alpha$ : Der Stern  $st \alpha$  verliert eine Seite  $b$  und gewinnt nichts, weil  $d$  den Anfangspunkt  $\gamma$  und  $d^-$  den Anfangspunkt  $\beta$  hat. In beiden Fällen sinkt  $r = o(\alpha)$  um 1.  $\square$

**12.2.7 Reduzierte Komplexe** haben nur *eine* Ecke und *ein* Polygon. Alle Normalformen  $T_g$  außer  $T_0$  sind reduziert.

**Lemma.** Jeder zusammenhängende Flächenkomplex  $K$  ist zur Normalform  $T_0$  oder zu einem reduzierten Komplex äquivalent.

*Beweis.* Nach 12.2.4 können wir annehmen, daß  $K$  nur ein Polygon besitzt. Wenn  $K$  wenigstens zwei Ecken hat, erniedrigen wir mit 12.2.6 die minimale Ordnung, bis sie  $= 1$  ist. Die Eckenzahl bleibt erhalten. Dann ist entweder  $T_0$  erreicht, oder man kann kürzen (12.2.5). Dabei nimmt die Eckenzahl um eins ab. Wir wiederholen das Verfahren, bis  $T_0$  oder ein Komplex mit nur einer Ecke erreicht ist.  $\square$



**Fig. 12.2.8.** Herstellung eines Henkels.

**12.2.8 Henkel.** Man nennt die Seitenfolge  $aba^-b^-$  in einem Rande  $\partial A = aba^-b^-u$  einen *Henkel*. Denn die Verheftung von  $a$  mit  $a^-$  und  $b$  mit  $b^-$  macht aus dem Polygon  $A$  einen Henkel (= Torus mit einem Loch), wie Figur 12.2.8 zeigt.

**Lemma.** Wenn der Rand eines Polygons die Gestalt  $\partial A = axbya^-zb^-w$  hat, wobei  $a, b$  Seiten und  $x, y, z, w$  (eventuell leere) Seitenfolgen sind, gibt es einen äquivalenten Komplex, in dem  $a, b, a^-, b^-$  durch neue Seiten  $c, d, c^-, d^-$  und das Polygon  $A$  durch ein Polygon  $C$  mit dem Rande  $\partial C = cdc^-d^-yxwz$  ersetzt sind.

*Beweis* durch Teilen und Zusammenfügen von Polygonen:

$$\begin{aligned}
 \partial A &= b^-waxbya^-z & \Rightarrow \\
 \partial A_1 &= b^-waxbd = xdbb^-wa, \partial A_2 = d^-ya^-z = a^-zd^-y & \Leftarrow \\
 \partial B &= xdbb^-wzd^-y = b^-wz d^-yxbd & \Rightarrow \\
 \partial C_1 &= b^-wzc, \partial C_2 = c^-d^-yxbd = dc^-d^-yxb & \Leftarrow \\
 \partial C &= dc^-d^-yxwz = cdc^-d^-yxwz.
 \end{aligned}$$

Die Anzahl der Polygone und Kanten sowie die Charakteristik ändern sich bei der Bildung eines Henkels nicht. Daher ist auch die Anzahl der Ecken dieselbe. Insbesondere bleibt ein reduzierter Komplex reduziert.  $\square$

**12.2.9 Ende des Beweises.** Jeder reduzierte Komplex ist zu einem kanonischen Komplex  $T_g$  äquivalent.

*Beweis* durch Induktion über die Anzahl  $n$  der Kanten, die nicht in einem Henkel erfaßt sind: Bei  $n = 0$  liegt eine Normalform vor. Schluß von  $n$  auf  $n + 1$ : Es sei  $a$  eine Kante, die nicht in einem Henkel liegt, also  $\partial A = aua^-v$  mit nicht leeren Seitenfolgen  $u$  und  $v$ . Wir zeigen zunächst:

(1) Es gibt eine Seite  $b$  in  $u$ , deren Partner  $b^-$  in  $v$  vorkommt.

*Beweis* durch Widerspruch: Der Endpunkt  $\alpha$  von  $a$  ist Anfangs- und Endpunkt der Seitenfolge  $u$ . Wenn  $u$  mit jeder Seite  $b$  auch ihren Partner  $b^-$  enthielte, würden alle Seiten  $\neq a$  mit dem Endpunkt  $\alpha$  zu  $u$  gehören. Weil  $a^-$  nicht zu  $u$  gehört, hätte  $a$  einen Anfangspunkt  $\neq \alpha$ . Aber es gibt nur eine Ecke.



Wegen (1) lautet der Rand genauer  $\partial A = axbya^-zb^-w$ . Alle vorhandenen Henkel sind in  $x, y, z$  oder  $w$  enthalten. Nach dem letzten Lemma kann man einen weiteren Henkel bilden, ohne die vorhandenen zu zerstören und ohne die Ecken- oder Kantenzahl zu erhöhen. Die Anzahl der nicht in Henkeln erfaßten Kanten vermindert sich, und der Komplex bleibt reduziert.  $\square$

## 12.3 Fundamentalgruppe und Homologie

Für jede zusammenhängende Polyederfläche  $|K|$  wird die Fundamentalgruppe und die Homologie berechnet. Wegen des Klassifikationstheorems 12.1.5 genügt es, die Brezelflächen  $|T_g|$  für  $g \geq 1$  zu betrachten.

**12.3.1 Rückkehrschnitte.** Das einzige Polygon von  $T_g$  ist ein regelmäßiges  $4g$ -Eck  $A$ , dessen Seiten den Rand  $\partial A = a_1b_1a_1^-b_1^- \dots a_gb_ga_g^-b_g^-$  bilden. Alle Ecken von  $A$  werden durch die Realisierung  $\rho : A \rightarrow |T_g|$  auf die einzige Ecke  $P \in |T_g|$  abgebildet, die im folgenden als Basispunkt dient. Wir bezeichnen mit  $a_j : [0, 1] \rightarrow A$  auch die lineare, richtungstreue Parametrisierung der Seite  $a_j$ . Entsprechendes gilt für  $b_j$ . Dadurch erhalten wir  $2g$  Schleifen  $\rho \circ a_j$  und  $\rho \circ b_j$  in  $|T_g|$  von und nach  $P$ . Sie heißen *Rückkehrschnitte*. Ihre Homotopieklassen werden mit  $\alpha_j := [\rho \circ a_j]$  und  $\beta_j := [\rho \circ b_j] \in \pi(|T_g|, P)$  bezeichnet.

**Satz.** Die Fundamentalgruppe  $\pi(|T_g|, P)$  wird durch die  $2g$  Erzeugenden  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$  mit der einzigen Relation  $[\alpha_1, \beta_1] \dots [\alpha_g, \beta_g] = 1$  (Produkt der Kommutatoren  $[\alpha_j, \beta_j] := \alpha_j\beta_j\alpha_j^{-1}\beta_j^{-1}$ ) präsentiert.

Das bedeutet: Zu jeder Abbildung  $\varphi : \{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g\} \rightarrow G$  in eine Gruppe  $G$ , welche  $[\varphi(\alpha_1), \varphi(\beta_1)] \dots [\varphi(\alpha_g), \varphi(\beta_g)] = 1$  erfüllt, gibt es genau einen Homomorphismus  $f : \pi(|T_g|, P) \rightarrow G$ , welcher  $\varphi$  fortsetzt.

Der Beweis des Satzes folgt nach vorbereitenden Überlegungen (12.3.4-5) in 12.3.6.

**12.3.2 Homologie.** Die im Satz 12.3.1 angegebene Relation ist trivial erfüllt, wenn man zur Homologie übergeht, vgl. 7.7:

**Satz.** Die Homologie  $H_1(|T_g|)$  ist die von den  $2g$  Homologieklassen der Rückkehrschnitte  $\rho \circ a_1, \rho \circ b_1, \dots, \rho \circ a_g, \rho \circ b_g$  frei erzeugte abelsche Gruppe. Daher sind Brezelflächen verschiedenen Geschlechtes nicht homöomorph.  $\square$

Mit dem Klassifikationstheorem 12.1.5 erhält man die

**Folgerung.** Die Homologie  $H_1(|K|)$  der Realisierung eines jeden zusammenhängenden Flächenkomplexes  $K$  vom Geschlecht  $g$  ist eine freie abelsche Gruppe vom Rang  $2g$ . Zwei zusammenhängende Komplexe haben genau dann homöomorphe Realisierungen, wenn ihre Geschlechter gleich sind.  $\square$

Der Spezialfall  $g = 0$  ist der

**Eulersche Polyedersatz.** *Jeder Flächenkomplex, dessen Realisierung zur Zahlenkugel homöomorph ist, hat die Charakteristik 2.*  $\square$

**12.3.3 Historisches.** Die kombinatorische Topologie entstand aus der Formel  $e - k + f = 2$  für die Anzahlen  $e$  der Ecken,  $k$  der Kanten und  $f$  der Seitenflächen eines Polyeders, die *Euler* in einem Brief vom 14.11.1750 an Goldbach mitteilte und später mit einem „Beweis“ veröffentlichte, [Eu] 1, Bd. 26, S. 71-108. Bis zur Mitte des vorigen Jahrhunderts blieben alle Beweise der Formel unvollständig: Es fehlte eine genaue Definition der Polyeder, und man konnte nicht auf anschaulich plausible Argumente verzichten, deren strenge Begründung offen blieb.

Zu Beginn des 19. Jahrhunderts wurden (nicht-konvexe) Polyeder entdeckt, bei denen die Eulersche Formel nicht gilt. *S. L'Huilier* [*Ann. math. pures et appl. (Gergonne)*], vol. 3 (1812-13), S. 169-192] verallgemeinerte sie zu  $e - k + f = 2 - 2g$ , wenn die Oberfläche des Polyeders das Geschlecht  $g$  hat. Aber der Beschäftigung mit solchen Kuriositäten fehlte zunächst die Beziehung zu anderen Gebieten der Mathematik, die damals schon weiter entwickelt waren und ernster genommen wurden. Das änderte sich, nachdem *Riemann* in seiner Dissertation und der Abhandlung über Abelsche Funktionen gezeigt hatte, welche Bedeutung das Studium der Geschlechter geschlossener Flächen für die Klärung der von Abel und Jacobi hinterlassenen Probleme der Funktionentheorie hat.

*Möbius* bewies, daß das Geschlecht die einzige topologische Invariante für kompakte Flächen im dreidimensionalen Raum ist. Er verfaßte die entsprechende Abhandlung [Mö] 2, S. 435-471, mit 71 Jahren und reichte sie erfolglos für den Grand Prix de Mathématique der Pariser Akademie ein.

In den folgenden Jahrzehnten wurden auch berandete und (für die Funktionentheorie uninteressante) nicht-orientierbare Flächen wie das Möbius-Band in die Klassifikation einbezogen. Die von *Poincaré* erfundene Fundamentalgruppe und Homologie kamen als Werkzeuge hinzu.

**12.3.4 Deformationsretrakt.** Ein topologischer Raum  $X$  läßt sich auf den Teilraum  $A \subset X$  *zusammenziehen*, wenn es für das Intervall  $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$  eine stetige Abbildung  $D : X \times I \rightarrow X$  gibt, so daß  $D(x, 0) = x$  und  $D(x, 1) \in A$  für alle  $x \in X$  sowie  $D(a, t) = a$  für alle  $a \in A$  und  $0 \leq t \leq 1$  gelten. Man nennt  $D$  eine *Deformationsretraktion* und  $A$  einen *Deformationsretrakt* von  $X$ . Beispielsweise läßt sich jede sternförmige Menge  $X \subset \mathbb{R}^n$  auf ihr Zentrum  $\{c\}$  zusammenziehen,  $D(x, t) = tc + (1 - t)x$ . Die Einheitsphäre  $S^{n-1}$  ist Deformationsretrakt von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  wegen  $D(x, t) = (1 - t + t/|x|)x$ .

**Lemma.** *Wenn sich  $X$  auf  $A$  zusammenziehen läßt, gilt  $\pi(A) = \pi(X)$  für die Fundamentalgruppen, genauer: Nach Wahl eines Basispunktes  $a \in A$  induziert die Einbettung  $j : A \hookrightarrow X$  einen Isomorphismus  $j_* : \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$ .*

*Beweis.* Man definiert  $r : X \rightarrow A$ ,  $r(x) = D(x, 1)$ . Dann ist  $r \circ j = \text{id}$ , und es folgt, daß  $j_*$  monomorph ist. Zur Epimorphie: Jede Schleife  $u$  in  $X$  mit dem Basispunkt  $a$  ist zur Schleife  $r \circ u$  in  $A$  homotop.  $\square$

**Beispiel.** Wie  $\pi(\mathbb{C}^\times)$ , siehe 3.6.4, ist  $\pi(S^1)$  die von  $\gamma := [u]$  mit  $u(s) := \exp(is)$  für  $0 \leq s \leq 2\pi$  erzeugte unendlich zyklische Gruppe.

**12.3.5 Die Ein-Punkt-Vereinigung** von zwei topologischen Räumen  $(X, a)$  und  $(Y, b)$  mit Basispunkten entsteht dadurch, daß man in der disjunkten Vereinigung  $X \sqcup Y$  durch  $a \sim b$  eine Äquivalenzrelation erzeugt und den Quotientenraum  $X \vee Y$  bildet, dessen Basispunkt die Äquivalenzklasse  $c = \{a, b\}$  ist. Man faßt  $X$  und  $Y$  als Teilräume von  $X \vee Y$  auf.

**Lemma.** Wenn es Umgebungen  $U$  und  $V$  gibt, die sich auf  $a$  bzw.  $b$  zusammenziehen lassen, ist  $\pi(X \vee Y, c) = \pi(X, a) * \pi(Y, b)$  das freie Produkt.

*Beweis.* Die Teilmengen  $X' = X \vee V$  und  $Y' = U \vee Y$  bilden eine offene Überdeckung von  $X \vee Y$ . Der Durchschnitt  $X' \cap Y' = U \vee V$  läßt sich auf  $c$  zusammenziehen. Nach dem Satz von Seifert und van Kampen ist  $\pi(X \vee Y) = \pi(X') * \pi(Y')$ , siehe 3.8.3(1). Da  $X$  und  $Y$  Deformationsretrakte von  $X'$  bzw.  $Y'$  sind, ist  $\pi(X) = \pi(X')$  und  $\pi(Y) = \pi(Y')$ .  $\square$

**Folgerung.** Bei der Einpunkt-Vereinigung  $S_1 \vee \dots \vee S_n$  von  $n$  Kreislinien wird  $\pi(S_1 \vee \dots \vee S_n)$  von den  $n$  Elementen  $\gamma_j \in \pi(S_j) \cong \mathbb{Z}$  frei erzeugt.  $\square$

**12.3.6 Berechnung der Fundamentalgruppe.** Zum Beweis von Satz 12.3.1 benutzen wir als  $4g$ -Eck  $A$  die Scheibe  $\mathbb{E}$  mit den  $4g$ -ten Einheitswurzeln als Ecken. Sie unterteilt den Rand  $\partial\mathbb{E}$  in die  $4g$  Seiten  $a_1, \dots, b_g^-$ , siehe Figur 12.3.6.

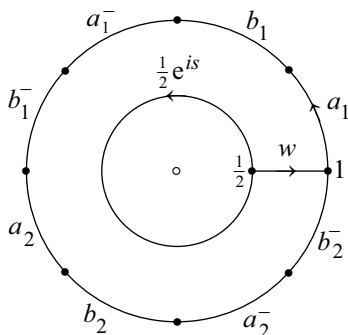
Die beiden Mengen  $U = \rho(\mathbb{E})$  und  $V = |T_g| \setminus \{\rho(0)\}$  bilden eine offene Überdeckung von  $|T_g|$ . Durch  $\rho$  wird  $\mathbb{E}$  homöomorph auf  $U$  und  $\mathbb{E}^\times$  homöomorph auf  $U \cap V$  abgebildet. Die Homotopieklasse der Schleife  $u(s) = \rho(\frac{1}{2}e^{is})$ ,  $0 \leq s \leq 2\pi$ , erzeugt die unendlich zyklische Fundamentalgruppe  $\pi(U \cap V, Q)$  mit  $Q := \rho(\frac{1}{2})$ . Nach Seifert / van Kampen (Beispiel in 3.8.1) gilt:

(1) Die Einbettung  $V \hookrightarrow |T_g|$  induziert einen Epimorphismus  $\pi(V, Q) \rightarrow \pi(|T_g|, Q)$ , dessen Kern der von  $[u]$  erzeugte Normalteiler ist.

Nach 12.3.4 folgt  $\pi(\rho(\partial\mathbb{E})) = \pi(V)$  wegen der Deformationsretraktion

$$D: V \times I \rightarrow V, D(\rho(z), t) := \rho((1-t+z/t) \cdot z)$$

von  $V$  auf  $\rho(\partial\mathbb{E})$ . Da  $\rho(\partial\mathbb{E})$  die Einpunkt-Vereinigung von  $2g$  Kreislinien ist, die sich in der einzigen Ecke  $P$  treffen, wird  $\pi(\rho(\partial\mathbb{E}), P)$  nach der Folgerung in 12.3.5 von  $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g$  frei erzeugt.



**Fig. 12.3.6.** Die Schleife  $\frac{1}{2}e^{is}$  ( $0 \leq s \leq 2\pi$ ) wird längs  $w$  in die Schleife  $e^{is}$  verschoben, welche der Reihe nach die  $4g$  Seiten  $a_1, b_1, \dots, a_g^-, b_g^-$  durchläuft ( $g=2$ ).

Sei  $w$  der lineare Weg von  $\frac{1}{2}$  nach  $1$  in  $\mathbb{E}$ , siehe Figur 12.3.6. Bei der Verschiebung des Basispunktes  $Q$  längs  $\rho \circ w$  nach  $P$  geht die Homotopieklasse  $[u]$  in  $[v]$  über, wobei  $v(t) = \rho(e^{it})$  mit  $0 \leq s \leq 2\pi$  gilt. Der Weg  $e^{is}$  durchläuft der Reihe nach alle Seiten  $a_1, b_1, \dots, a_g^-, b_g^-$  des Randes  $\partial\mathbb{E}$ . Daraus folgt

$$[v] = [\rho \circ a_1][\rho \circ b_1][\rho \circ a_1^-][\rho \circ b_1^-] \dots [\rho \circ a_g][\rho \circ b_g][\rho \circ a_g^-][\rho \circ b_g^-] \in \pi(\rho(\partial\mathbb{E}), P).$$

Durch die Deformationsretraktion und die Verschiebung des Basispunktes geht (1) in die Aussage (2) über, welche mit der Beschreibung von  $[v]$  den Satz 12.3.1 ergibt:

(2) Durch  $\rho(\partial\mathbb{E}) \hookrightarrow |T_g|$  wird ein Epimorphismus  $\pi(\rho(\partial\mathbb{E}), P) \rightarrow \pi(|T_g|, P)$  induziert, dessen Kern der von  $[v]$  erzeugte Normalteiler ist.  $\square$

## 12.4 Die Zerschneidung Riemannscher Flächen

Um die kombinatorische Flächentopologie zum Studium kompakter Riemannscher Flächen einzusetzen, wird gezeigt, daß sie zu Polyederflächen homöomorph sind.

**12.4.1 Zerschneidung in Polygone.** Eine *Zerschneidung*  $(K, \rho)$  der Riemannschen Fläche  $X$  besteht aus einem zusammenhängenden Flächenkomplex  $K$  und einer stetigen Abbildung  $\rho: K^* \rightarrow X$ , die einen Homöomorphismus  $|K| \rightarrow X$  induziert. Offenbar ist dann  $X$  kompakt und zusammenhängend. Bei einem kanonischen Flächenkomplex  $K = T_g$  ist  $\Delta := K^*$  ein  $4g$ -Eck. Wir nennen  $\rho: \Delta \rightarrow X$  eine *kanonische Zerschneidung*.

**Satz.** *Jede kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  läßt sich in einen Flächenkomplex  $K$  zerschneiden, dessen Euler-Poincarésche Charakteristik  $e(K) = \chi(X)$  die analytische Charakteristik von  $X$  ist.*

Dieser Satz wird in 12.4.2-4 bewiesen. – Mit dem Klassifikationstheorem 12.1.5 und der Homologieberechnung in 12.3.2 erhalten wir die

**Folgerung.** *Jede kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche  $X$  kann kanonisch zerschnitten werden und ist daher zu einer Brezelfläche  $|T_g|$  homöomorph. Das Geschlecht  $g$  ist dadurch charakterisiert, daß die Homologie  $H_1(X)$  eine freie abelsche Gruppe vom Rang  $2g$  ist. Für die analytische Charakteristik gilt  $\chi(X) = 2 - 2g$ . Genau dann wenn  $X$  zu  $\hat{\mathbb{C}}$  isomorph ist, gilt  $g = 0$ .  $\square$*

Die letzte Behauptung, welche aus 10.7.4 folgt, und  $\chi = 2 - 2g$  wurden schon in 7.1.5 (mit der ad hoc Definition  $g = \frac{1}{2}(2 - \chi)$ ) und in 7.2.2-6 benutzt.

Wir nennen  $g =: g_{\text{top}}(X)$  das *topologische Geschlecht* der Fläche  $X$  und müssen es vorerst noch vom analytischen Geschlecht  $g_{\text{an}}(X) := \dim \mathcal{E}_1(X)$  unterscheiden, das in 8.2.1 eingeführt wurde. Aus Satz 8.2.1 folgt  $g_{\text{an}} \leq g_{\text{top}}$ . Der Satz von Riemann-Roch wird  $g_{\text{an}} = g_{\text{top}}$  ergeben, siehe 13.1.5.

**12.4.2 Verzweigte Überlagerungen.** Sei  $\eta: X \rightarrow Y$  eine  $n$ -blättrige verzweigte Überlagerung zwischen kompakten, zusammenhängenden Riemannschen Flächen. Angenommen,  $Y$  läßt sich in einen Flächenkomplex  $L$  zerschneiden, so daß alle Verzweigungspunkte Ecken sind. Dann läßt sich  $X$  in einen Flächenkomplex  $K$  zerschneiden. Für die Euler-Poincaréschen Charakteristiken gilt in Analogie zur Riemann-Hurwitzsche Formel

$$(1) \quad e(K) = n \cdot e(L) - \sum_{x \in X} [v(\eta, x) - 1].$$

*Beweis.* Sei  $\sigma: L^* \rightarrow Y$  die Zerschneidung. Mit dem induzierten Homöomorphismus identifizieren wir  $|L| = Y$ . – Sei  $A \in L_2$ . Zu jedem  $t \in \check{A} := A \setminus \{\text{Ecken}\}$  und jedem  $x \in X$  mit  $\eta(x) = |t, A|$  gehört genau eine  $\eta$ -Liftung  $\varphi$  von  $\sigma|_{\check{A}}$  mit  $\varphi(t) = x$ . Sie läßt sich nach Lemma 4.6.4 in die Ecken von  $A$  stetig fortsetzen. Die Paare  $(a, \varphi)$  sind die Polygone des Flächenkomplexes  $K$ . Seine Kanten sind die Paare  $(a, \psi)$  mit  $a \in L_1$  und einer  $\eta$ -Liftung  $\psi$  von  $\sigma|_a$ . Daher ist  $\sharp K_j = n \cdot \sharp L_j$  für  $j = 1, 2$ .

Der Rand  $\partial(A, \varphi)$  entsteht aus dem Rand  $\partial A$ , indem man dort jede Seite  $a^+$  durch  $(a, \varphi|a)^+$  und jede Seite  $b^-$  durch  $(b, \varphi \circ h_b)^-$  ersetzt.

Die Punkte in  $(A, \varphi)$  werden als Paare  $(t, \varphi)$  mit  $t \in A$  notiert. Die Kantenheftung  $h_{(a, \psi)}$  zu  $(a, \psi) \in K_1$  wird wie folgt definiert: Es gibt eindeutig bestimmte Polygone  $A, B \in L_2$ , so daß  $a^+$  und  $a^-$  Seiten von  $A$  bzw.  $B$  sind. Es gibt eindeutig bestimmte Liftungen  $\varphi^+$  von  $\sigma|A$  bzw.  $\varphi^-$  von  $\sigma|B$ , so daß  $\varphi^+|a = \psi = \varphi^- \circ h_a$  ist. Für jedes  $t \in a$  ist  $(t, \varphi^+) \in (A, \varphi^+)$  sowie  $h_a(t) \in a^- \subset B$ . Man definiert  $h_{(a, \psi)}(t, \varphi^+) = (h_a(t), \varphi^-)$ . Durch diese Kantenheftungen entsteht aus  $K^* = \mathfrak{U}(A, \varphi)$  die Polyederfläche  $|K|$  mit der Projektion  $K^* \rightarrow |K|$ ,  $(t, \varphi) \mapsto |t, \varphi|$ .

Schließlich wird die stetige Abbildung  $p : K^* \rightarrow X$  durch  $p(t, \varphi) = \varphi(t)$  definiert. Sie ist mit den Kantenheftungen verträglich und induziert daher die stetige Abbildung  $r : |K| \rightarrow X$ ,  $|t, \varphi| \mapsto \varphi(t)$ . Für  $(A, \varphi) \in K_2$  und  $t \in A$  ist  $\eta \circ r|t, \varphi| = |t, A|$ . Daher gilt  $K_0 = (\eta \circ r)^{-1}(L_0)$  für die Eckenmenge.

(2) Die Abbildung  $r : |K| \rightarrow X$  ist surjektiv.

*Beweis* zu (2): Sei  $x \in X$  und  $\eta(x) \notin L_0$ , also  $\eta(x) = |t, A|$  für ein  $A \in L_2$  und ein  $t \in A$ . Da  $\eta$  über  $Y \setminus L_0$  unverzweigt ist, gibt es eine  $\eta$ -Liftung  $\varphi$  von  $\sigma|A^*$  mit  $\varphi(t) = x$ . Somit ist  $r|t, \varphi| = x$ , also  $X \setminus \eta^{-1}(L_0) \subset \text{Bild } r$ . Da  $X$  die abgeschlossene Hülle von  $X \setminus \eta^{-1}(L_0)$  ist und  $|K|$  kompakt ist, folgt  $X \subset \text{Bild } r$ .

(3) Wenn  $y \in Y \setminus L_0$  ist, gibt es zu jedem  $x \in \eta^{-1}(y)$  höchstens einen Punkt  $z \in |K|$  mit  $r(z) = x$ .

*Beweis* zu (3): Es gibt ein  $A \in K_2$  und ein  $t \in \check{A}$  mit  $y = |t, A|$ . Das Paar  $(t, A)$  ist durch  $y$  eindeutig bestimmt, wenn  $t$  innerer Punkt von  $A^*$  ist. Aus  $r(z) = x$  folgt  $\eta \circ r(z) = y = |t, A|$ , also  $z = |t, \varphi|$  für eine  $\eta$ -Liftung  $\varphi$  von  $\sigma|A$ . Diese ist durch  $x = r(z) = \varphi(t)$  eindeutig bestimmt. Wenn  $t$  kein innerer Punkt eines Polygons ist, gibt es genau eine Kante  $a \in L_2$ , so daß  $t$  innerer Punkt von  $a$  ist. Seien  $A$  und  $B$  die Polygone, welche  $a^+$  bzw.  $a^-$  als Seiten haben. Dann ist  $y = |t, A| = |h_a(t), B|$ , also  $z = |t, \varphi|$  oder  $= |h_a(t), \psi|$ , wobei die  $\eta$ -Liftungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $\sigma|A$  bzw.  $\sigma|B$  durch  $\varphi(t) = \psi h_a(t) = x$  eindeutig bestimmt sind. Es folgt  $\varphi|a = \psi h_a$ , also  $h_{(a, \varphi)}(t, \varphi) = (h_a(t), \psi)$  und somit  $|t, \varphi| = |h_a(t), \psi|$ .  $\square$

Nach (2) und (3) ist die Beschränkung  $r' : |K| \setminus (\eta \circ r)^{-1}(L_0) \rightarrow X \setminus \eta^{-1}(L_0)$  von  $r$  bijektiv. Sie ist wie  $r$  eigentlich, also ein Homöomorphismus. Wir zeigen: Für jedes  $x \in \eta^{-1}(L_0)$  besteht  $r^{-1}(x)$  aus einem Punkt: Wir wählen paarweise disjunkte Umgebungen  $V_z$  der Punkte  $z \in r^{-1}(x)$  so klein, daß  $z$  die einzige Ecke in  $V_z$  ist. Weil  $r$  abgeschlossen ist, gibt es eine Scheibenumgebung  $U$  von  $x$  in  $X$ , so daß  $r^{-1}(U) \subset \mathfrak{U}V_z$ . Die Menge  $U \setminus \{x\}$  ist die disjunkte Vereinigung der offenen Mengen  $r'(V_z \setminus \{z\})$  für  $z \in r^{-1}(x)$ . Da  $U \setminus \{x\}$  zusammenhängt, gibt es nur ein  $z \in r^{-1}(x)$ .

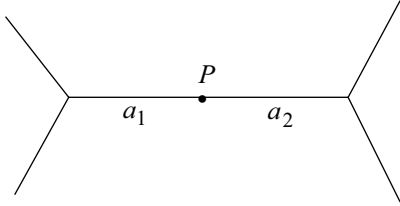
Durch  $r$  wird  $\eta^{-1}(L_0)$  bijektiv auf  $K_0 \subset |K| = X$  abgebildet. Daher ist  $\sharp K_0 = \sum_{x \in L_0} [v(\eta, x) - 1]$ . Zusammen mit  $\sharp K_j = n \cdot \sharp L_j$  für  $j = 1, 2$  folgt (1).  $\square$

**12.4.3 Beweis des Zerschneidungssatzes 12.4.1.** Die Fläche  $X$  läßt sich durch eine nicht-konstante meromorphe Funktion  $\eta$  der Zahlenkugel  $\hat{\mathbb{C}}$  verzweigt überlagern. Sei  $n = \text{gr } \eta$ . Wir zeigen unten:

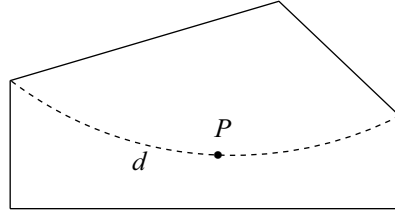
(1) Man kann  $\hat{\mathbb{C}}$  so in einen Flächenkomplex  $L$  zerschneiden, daß eine vorgegebene endliche Menge  $B \subset \hat{\mathbb{C}}$  nur aus Ecken besteht.

Nach dem Eulerschen Polyedersatz in 12.3.2 ist  $e(L) = 2$ . Wenn man  $B$  als Verzweigungsort von  $\eta$  wählt, ist die Voraussetzung von 12.4.2 erfüllt: Man kann  $X$  in einen Flächenkomplex  $K$  zerschneiden, so daß  $e(K) = 2n - \sum [v(\eta, x) - 1]$  ist. Rechts steht wegen der Riemann-Hurwitzschen Formel 7.2.1(RH) und  $\chi(\hat{\mathbb{C}}) = 2$  die analytische Charakteristik  $\chi(X)$ .

*Beweis zu (1) durch Induktion über  $\sharp B$ . Für  $B = \emptyset$  kann man jede Zerschneidung nehmen. Induktionsschritt: Bei einer Zerschneidung seien mit *einer* Ausnahme alle Punkte von  $B$  Ecken. Wenn der Ausnahmepunkt  $P$  innerer Punkt einer Kante  $a$  ist, teilt man diese durch  $P$  in zwei Kanten  $a_1, a_2$ , siehe Figur 12.4.3 a, und macht dadurch  $P$  zur Ecke eines neuen Komplexes  $L'$ , der wie in 12.2.1 aus  $L$  durch Kantenenteilung entsteht. Wenn  $P$  innerer Punkt eines Flächenstücks ist, teilt man es wie in 12.2.2 durch eine neue Kante  $d$ , auf der  $P$  liegt, und teilt anschließend diese Kante durch die neue Ecke  $P$ , siehe Figur 12.4.3 b.  $\square$*



**Fig. 12.4.3 a.** Ein innerer Kantenpunkt  $P$  wird neue Ecke.



**Fig. 12.4.3 b.** Ein innerer Flächenpunkt  $P$  wird neue Ecke.

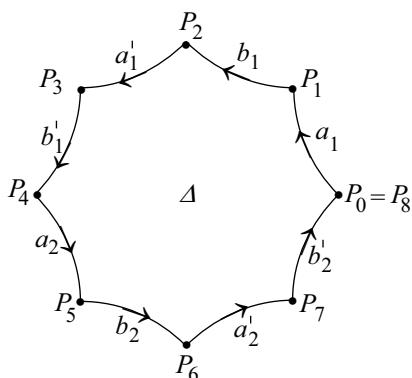
## 12.5 Riemannsche Periodenrelationen

Sei  $\eta : Z \rightarrow X$  eine Uniformisierung der Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 1$ . Mit einem topologischen Polygon  $\Delta \subset Z$  wird  $X$  durch  $\eta|_{\Delta}$  kanonisch zerschnitten. Durch Integration längs des Randes  $\partial\Delta$  entstehen die *Periodenrelationen* aus [Ri3], Artikel 19-21, welche im 14. und 15. Kapitel eine wichtige Rolle spielen. Wir vermeiden Pole des Integranden auf dem Rande  $\partial\Delta$  durch eine

**12.5.1 Allgemeine Lage.** *Zu jeder kanonischen Zerschneidung  $\rho : \Delta \rightarrow X$  und jeder endliche Menge  $M \subset X$  gibt es einen zur Identität homotopen Homöomorphismus  $h : X \rightarrow X$ , so daß  $h \circ \rho(\partial\Delta) \cap M = \emptyset$ . Die Rückkehrschnitte der Zerschneidungen  $\rho$  und  $h \circ \rho$  haben dieselben Homologieklassen.*

*Beweis.* Das Komplement  $X \setminus \rho(\partial\Delta)$  liegt offen und dicht in  $X$ . Zu jedem  $c \in M$  gibt es eine topologische Karte  $z_c : (U_c, c) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ , so daß die Scheiben  $U_c$  paarweise disjunkt sind. Es gibt ein  $b_c \in U_c \setminus \rho(\partial\Delta)$  mit  $|z_c(b_c)| < \frac{1}{3}$  und einen zur Identität homotopen Homöomorphismus  $h_c$  von  $\mathbb{E}$  auf sich, so daß  $h_c(0) = z_c(b_c)$  und  $h_c(t) = t$  für  $|t| \geq \frac{1}{2}$  gilt. Durch  $h(x) = x$  für  $x \notin \bigcup U_a$  und  $h|_{U_c} = z_c^{-1} \circ h_c \circ z_c$  wird ein Homöomorphismus  $h$  mit der gewünschten Eigenschaft definiert. Die letzte Behauptung folgt, weil  $\rho$  und  $h \circ \rho$  homotop sind, siehe 7.7.2(1).  $\square$

**12.5.2 Das kanonische Polygon.** Sei  $\rho : \Delta \rightarrow X$  eine kanonische Zerschneidung. Die Ecken und Seiten des topologischen  $4g$ -Ecks  $\Delta$  werden so bezeichnet werden, wie es die Figur 12.5.2 für  $g = 2$  zeigt. Zu jeder Seite



**Fig. 12.5.2.** Ein kanonisches Polygon  $\Delta$  mit seinen Ecken und Seiten ( $g=2$ ).

$c \in \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g\}$  gehört die richtungsumkehrende Kantenheftung  $h_c : c \rightarrow c'$ . Der Weg, der die Seite  $c$  bzw.  $c'$  durchläuft, wird ebenfalls mit  $c$  bzw.  $c'$  bezeichnet. Dann ist  $c' = (h_c \circ c)^-$ .

Alle Ecken haben denselben Bildpunkt  $Q := \rho(P_j) \in X$ . Sei  $\eta : Z \rightarrow X$  eine Uniformisierung. Nach Wahl eines Basispunktes  $P \in \eta^{-1}(Q)$  gibt es genau eine  $\eta$ -Liftung  $\tilde{\rho} : (\Delta, P_0) \rightarrow (Z, P)$  von  $\rho$ .

Die Fundamentalgruppe  $\pi(X, Q)$  wird nach Satz 12.3.1 durch die Homotopieklassen  $\alpha_j := [\rho \circ a_j]$ ,  $\beta_j := [\rho \circ b_j]$  erzeugt. Das Kommutatorenprodukt  $[\alpha_1, \beta_1] \cdot \dots \cdot [\alpha_g, \beta_g] = 1$  ist die einzige Relation. Wir identifizieren  $\pi(X, Q)$  durch den Poincaréschen Isomorphismus mit der Deckgruppe  $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\eta)$ .

**Satz.** Durch  $\tilde{\rho}$  wird  $\Delta$  homöomorph auf  $\tilde{\rho}(\Delta)$  abgebildet. Dabei ist  $\tilde{\rho}(\Delta)$  ein Fundamentalbereich der Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$ .

*Beweis.* Die Ecken  $\tilde{\rho}(P_j)$  gehen aus  $P$  wie folgt hervor:  $\tilde{\rho}(P_1) = \alpha_1(P)$ ,  $\tilde{\rho}(P_2) = \alpha_1\beta_1(P)$ ,  $\tilde{\rho}(P_3) = \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}(P)$ ,  $\tilde{\rho}(P_4) = [\alpha_1\beta_1](P)$ ,  $\dots$ . Da  $\mathcal{D}(\eta)$  frei operiert und das Kommutatorenprodukt die einzige Relation ist, sind alle  $\tilde{\rho}(P_j)$  paarweise verschieden.

*Zur Homöomorphie.* Es genügt zu zeigen, daß  $\tilde{\rho}$  injektiv ist. Wir führen die Annahme, daß zwei verschiedene Punkte  $x, y \in \Delta$  denselben Bildpunkt  $\tilde{\rho}(x) = \tilde{\rho}(y)$  haben, zum Widerspruch. Da  $x$  und  $y$  keine Ecken sind, kann  $\rho(x) = \rho(y)$  (nach eventueller Vertauschung von  $x$  und  $y$ ) wegen 12.1.3 nur eintreten, wenn  $x$  innerer Punkt einer Seite  $c$  und  $y = h_c(x)$  ist. Dann haben die Wege  $\tilde{\rho} \circ c$  und  $\tilde{\rho} \circ h_c \circ c$  an einer Stelle denselben Wert und sind daher wegen der Eindeutigkeit der Wegeliftung gleich. Aber die Wege  $c$  und  $h_c \circ c$  haben verschiedene Ecken  $P_j \neq P_k$  als Anfangspunkte. Daher sind die Anfangspunkte  $\tilde{\rho}(P_j)$  von  $\tilde{\rho} \circ c$  und  $\tilde{\rho}(P_k)$  von  $\tilde{\rho} \circ h_c \circ c$  verschieden.

*Zum Fundamentalbereich.* Wegen  $\eta(\tilde{\rho}(\Delta)) = \rho(\Delta) = X$  wird  $\tilde{\rho}(\Delta)$  von jedem  $\mathcal{D}(\eta)$ -Orbit getroffen. Wenn für zwei verschiedene Punkte  $x, y \in \Delta$  die Bilder  $\tilde{\rho}(x), \tilde{\rho}(y) \in \Delta$  im selben Orbit liegen, ist  $\rho(x) = \rho(y)$ , also  $x, y \in \partial\Delta$  und somit  $\tilde{\rho}(x), \tilde{\rho}(y) \in \partial\tilde{\rho}(\Delta)$ .  $\square$

Wenn man  $\Delta$  und  $\tilde{\rho}(\Delta)$  mittels  $\tilde{\rho}$  identifiziert, geht  $\rho$  in die Zerschneidung  $\eta|\Delta$  über. Wir nennen  $\Delta \subset Z$  ihr *kanonisches Polygon*. Unter Berücksichtigung der allgemeinen Lage (12.5.1) erhält man die

**Folgerung.** *Zu jeder kanonischen Zerschneidung  $\rho$  von  $X$  und jeder endlichen Menge  $M \subset X$  gibt es ein kanonisches Polygon  $\Delta \subset Z$ , so daß  $\eta(\partial\Delta) \cap M = \emptyset$  ist und die Rückkehrschnitte der Zerschneidungen  $\rho$  und  $\eta|\Delta$  dieselben Homologieklassen haben.*  $\square$

Für  $g \geq 2$  kann man  $\Delta \subset \mathbb{H}$  als konvexes  $4g$ -Eck in im Sinne der hyperbolischen Geometrie wählen. Der Beweis ist aufwendig, siehe [FrK] 1, S. 285-315, und [Kee].

**12.5.3 Residuenformel.** *Sei  $\psi \in \mathcal{E}(Z)$  eine Form ohne Pole längs  $\partial\Delta$ , so daß  $\gamma^*\psi = \psi$  für alle  $\gamma \in [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$  (Kommutator-Untergruppe) gilt. Dann ist*

$$2\pi i \sum_{z \in \Delta} \text{res}(\psi, z) = \sum_{j=1}^g \left( \int_{a_j} (\psi - \beta_j^* \psi) + \int_{b_j} (\psi - (\alpha_j^{-1})^* \psi) \right).$$

*Beweis.* Nach dem klassischen Residuensatz gilt

$$2\pi i \sum_{z \in \Delta} \text{res}(\psi, z) = \int_{\partial\Delta} \psi = \sum_{j=1}^g (\int_{a_j} \psi + \int_{a'_j} \psi + \int_{b_j} \psi + \int_{b'_j} \psi).$$

Zu  $\alpha_j, \beta_j \in \mathcal{D}$  gibt es konjugierte Elemente  $\alpha'_j, \beta'_j$  mit  $a'^{-}_j = \beta'_j \circ a_j$  und  $b'^{-}_j = (\alpha'^{-1}_j) \circ b_j$ . Daher ist  $\int_{a'_j} \psi = -\int_{a_j} (\beta'_j)^* \psi = -\int_{a_j} (\beta_j)^* \psi$  und  $\int_{b'_j} \psi = -\int_{b_j} (\alpha'^{-1}_j)^* \psi = -\int_{b_j} (\alpha_j^{-1})^* \psi$ .  $\square$

**12.5.4 Periodenrelation.** *Sei  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$ , sei  $h \in \mathcal{O}(Z)$  eine Stammfunktion von  $\eta^*\omega$ , sei  $\varphi \in \mathcal{E}_3(X)$  ohne Pole auf  $\eta(\partial\Delta)$ . Dann ist*

$$(1) \quad 2\pi i \sum_{z \in \Delta} h(z) \cdot \text{res}(\varphi, \eta(z)) = \sum_{j=1}^g \left( \int_{\eta \circ a_j} \omega \cdot \int_{\eta \circ b_j} \varphi - \int_{\eta \circ b_j} \omega \cdot \int_{\eta \circ a_j} \varphi \right).$$

*Insbesondere gilt*

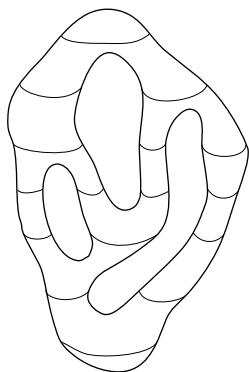
$$(2) \quad \sum_{j=1}^g \int_{\eta \circ a_j} \omega \cdot \int_{\eta \circ b_j} \varphi = \sum_{j=1}^g \int_{\eta \circ b_j} \omega \cdot \int_{\eta \circ a_j} \varphi \quad \text{für } \omega, \varphi \in \mathcal{E}_1(X).$$

*Beweis.* Für jede Schleife  $c$  in  $X$  mit  $\gamma := [c] \in \pi(X) = \mathcal{D}$  ist  $h \circ \gamma - h = \int_c \omega$  konstant, insbesondere  $= 0$ , falls  $\gamma \in [\mathcal{D}, \mathcal{D}]$ . Für  $\psi := h \cdot \eta^* \varphi$  gilt  $\psi - \gamma^* \psi = \int_c \omega \cdot \eta^* \varphi$ . Mit der Residuenformel folgt die Behauptung.  $\square$

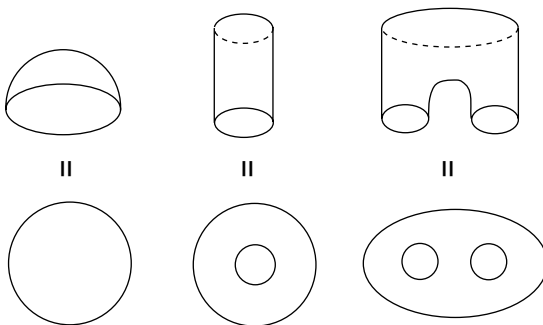


## 12.6 Aufgaben

- 1) Die Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 1$  sei in einen Flächenkomplex  $K$  mit *einem* Polygon zerschnitten. Zeige:  $\sharp K_1 \geq 2g$ ;  $\sharp K_1 = 2g \Leftrightarrow \sharp K_0 = 1$ . Identifiziere im letzten Fall  $K_1$  mit einer Basis der Homologie  $H_1(X)$ .
- 2) Deute Kleins Darstellung der Modulfläche  $X_7$  durch das 14-Eck von Figur 11.7.4 als Zerschneidung in einen Flächenkomplex mit *einem* Polygon  $A$ . Man gebe  $\partial A$  an, bestimme die Ecken und berechne die Charakteristik.

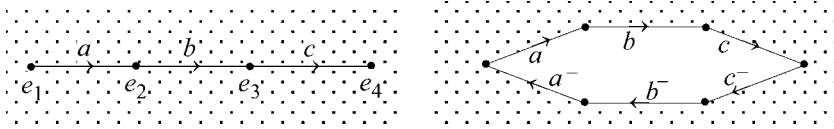


**Fig. 12.6.3.** Möbius' Flächenzerlegung.



**Fig. 12.6.4.** Unionen, Binionen und Trinionen.

- 3) Welches Geschlecht hat die Fläche der Figur 12.6.3? Die Figur stammt aus Möbius' Abhandlung [Mö] 2, S. 435-471, die in 12.3.3 zitiert wurde.
- 4) Möbius (loc. cit.) zerlegt jede geschlossene Fläche in *Unionen*, *Binionen* und *Trinionen*, siehe die Figuren 12.6.3 und 12.6.4. Begründe sein Ergebnis: Die Charakteristik ist die Anzahl der Unionen minus die Anzahl der Trinionen.
- 5) Ein Flächenkomplex  $K$  heißt *regulär* vom Typ  $(p, q)$ , wenn alle Polygone dieselbe Seitenzahl  $p$  und alle Ecken dieselbe Ordnung  $q$  haben. Zeige:
  - (i) Zu jedem regulären Komplex  $K$  vom Typ  $(p, q)$  gibt es einen *dualen* regulären Komplex  $L$  vom Typ  $(q, p)$ , so daß  $\sharp K_0 = \sharp L_2$ ,  $\sharp K_1 = \sharp L_1$  und  $\sharp K_2 = \sharp L_0$ , insbesondere  $e(K) = e(L)$  ist.
  - (ii) Für einen regulären Komplex  $K$  mit  $|K| \approx \hat{\mathbb{C}}$  gibt es nur folgende Typen  $(p, q)$  mit  $p \leq q$ :  
 $(2, q)$  für  $q = 2, 3, \dots$ ;  $(3, 3)$ ;  $(3, 4)$ ;  $(3, 5)$ .  
 Deute diese Komplexe als  $q$ -Dieder  $(2, q)$ , als Tetraeder  $(3, 3)$ , als Oktaeder  $(3, 4)$  und als Ikosaeder  $(3, 5)$ . Beschreibe die dualen Komplexe als Tetraeder, Würfel bzw. Dodekaeder.
- 6) Gewinne aus der Dreiecksparkettierung des Kleinschen 14-Ecks (siehe 11.7.4) eine Zerschneidung der Modulfläche  $X_7$  in einen regulären Flächenkomplex vom Typ  $(3, 7)$ . Wieviele Ecken, Kanten und Polygone hat er?



**Fig. 12.6.7.** Eine lineare Zerschneidung der Zahlenkugel  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

- 7) Sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ein zweiblättrige Überlagerung mit den Verzweigungspunkten  $e_1, \dots, e_4$ .

(i) Zerschneide  $\widehat{\mathbb{C}}$  in einen Flächenkomplex  $L$  mit *einem* Polygon  $A$  gemäß Figur 12.6.7 und gib dazu eine Zerschneidung von  $X$  an, wie sie in 12.4.2 benutzt wurde.

Über der Kante  $a$  von  $L$  liegen zwei Kanten  $a_1, a_2$  von  $K$ . Entsprechendes gilt für  $b$  und  $c$ . Bezeichne mit  $a_1, a_2$  usw. auch die entsprechenden Wege in  $X$ . Zeige:

(ii) Die Produktwege  $u := a_2^- a_1$  und  $v := b_1 b_2^-$  sind Schleifen, deren Homotopieklassen eine Basis der Fundamentalgruppe  $\pi(X)$  bilden.

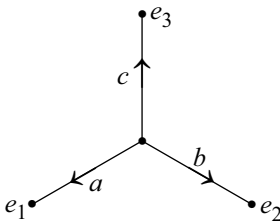
- 8) Durch das Polynom  $w^2 - (z - e_1) \cdots (z - e_4)$  bzw.  $w^2 - (z - e_1) \cdots (z - e_3)$  für  $e_4 = \infty$  wird eine 2-blättrige Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  definiert. Wenn  $e_1 < e_2 < e_3$  reell sind und  $e_4 = \infty$  ist, kann man in Figur 12.6.7 längs der reellen Achse schneiden. Sei  $\omega = dz/w$ . Zeige für  $u, v$  wie in Aufgabe 7:

$$\int_u \omega = -2 \int_{e_1}^{e_2} \left( (x - e_1)(e_2 - x)(e_3 - x) \right)^{-\frac{1}{2}} dx \in \mathbb{R}$$

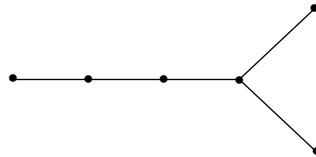
$$\int_v \omega = -2i \int_{e_2}^{e_3} \left( (x - e_1)(e_2 - x)(e_3 - x) \right)^{-\frac{1}{2}} dx \in \mathbb{R} \cdot i.$$

Folgere: Wenn die vier Verzweigungspunkte  $e_1, \dots, e_4$  auf einem Kreis oder einer Geraden (= Kreis durch  $\infty$ ) liegen, ist  $X$  zu einem Torus  $\mathbb{C}/\Omega$  mit rechteckigem Gitter  $\Omega$  isomorph.

- 9) Löse die zu 7) analoge Aufgabe für die Zerschneidung gemäß Figur 12.6.9.
- 10) Löse die zu 7) analoge Aufgabe für 6 statt 4 Verzweigungspunkte gemäß Figur 12.6.10. Betrachte die Homologie statt der Fundamentalgruppe.



**Fig. 12.6.9.** Eine sternförmige Zerschneidung der Zahlenkugel.



**Fig. 12.6.10.** Eine Zerschneidung der Zahlenkugel mit 6 Verzweigungspunkten.

## 13. Der Satz von Riemann-Roch

In diesem Kapitel wird mit der Formel von Riemann-Roch (RR) ein Höhepunkt der Theorie kompakter Riemannscher Flächen erreicht. Die Formel wurde in 8.2.1 angekündigt. Spezialfälle wurden beim Studium der Weierstraß-Punkte in 8.6.2-4 bereits benutzt. Aber erst die analytischen Resultate des 10. Kapitels zusammen mit den topologischen des 12. Kapitels ermöglichen nunmehr den vollständigen Beweis. Zahlreiche in früheren Kapiteln erzielte Ergebnisse lassen sich mit Hilfe der Riemann-Rochschen Formel verbessern und ergänzen.

Mit  $X$  wird eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche vom topologischen Geschlecht  $g$  bezeichnet. Wir benutzen die Begriffe und Ergebnisse aus 8.1, insbesondere die jedem Divisor  $D$  zugeordneten Vektorräume  $\mathcal{L}(D)$ ,  $\mathcal{L}^1(D)$  und  $l(D) := \dim \mathcal{L}(D)$ ,  $i(D) := \dim \mathcal{L}^1(-D)$ .

### 13.1 Beweis des Satzes von Riemann-Roch

Im 10.7.3 wurden aus Elementarpotentialen meromorphe Differentialformen mit einer einzigen Polstelle gewonnen. Diese Formen bilden wie in [Wyl1] den Ausgangspunkt des Beweises. Wir führen zunächst *Hauptteilsysteme* ein, um das Ergebnis aus 10.7.3 auf mehrere Polstellen zu verallgemeinern. Es folgt der Beweis des Satzes von Riemann-Roch in zwei Etappen.

**13.1.1 Hauptteilsysteme.** Wir betrachten meromorphe Differentialformen  $\omega$ , die in eventuell verschiedenen Umgebungen eines festen Punktes  $a \in X$  definiert sind, und erklären durch

$$\omega_1 \sim \omega_2 \quad \Leftrightarrow \quad o(\omega_1 - \omega_2, a) \geq 0$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen heißen *Hauptteile* bei  $a$ . Sie bilden in naheliegender Weise einen komplexen Vektorraum.

Jeder Hauptteil hat eine wohlbestimmte Polstellen-Vielfachheit und ein wohlbestimmtes Residuum: Sei  $z : (U, a) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  eine Karte. Jede auf  $U \setminus \{a\}$  holomorphe Form in  $\mathcal{E}(U)$  hat die Gestalt  $\omega = f dz$  mit einer Funktion  $f \in \mathcal{M}(U)$ , die sich in eine Laurentreihe nach Potenzen von  $z$  entwickeln läßt. Der Hauptteil  $h_\omega(a)$  von  $\omega$  bei  $a$  ist durch den klassischen Hauptteil  $\sum_{j=1}^m c_j z^{-j}$  dieser Reihe bestimmt. An ihm liest man die Polstellen-Vielfachheit  $m$  (für  $c_m \neq 0$ ) und das Residuum  $c_1$  ab.

Ein *Hauptteil-System*  $h$  auf  $X$  ordnet jedem Punkt  $x \in X$  einen Hauptteil  $h(x)$  bei  $x$  zu, so daß der Träger  $\{x \in X : h(x) \neq 0\}$  lokal endlich ist. Zu  $h$  gehört der positive Divisor  $(h)$ , welcher jeder Stelle  $x \in X$  die Polstellen-Vielfachheit von  $h(x)$  zuordnet. Alle Hauptteilsysteme bilden einen komplexen Vektorraum. Zu jeder Stelle  $x \in X$  gehört die lineare Funktion  $h \mapsto \text{res}(h, x) := \text{Residuum des Hauptteils } h(x)$ . Systeme  $h$  mit  $\text{res}(h, x) = 0$  für alle  $x \in X$  heißen *residuenfrei*.– Durch Beschränkung der Polstellen-Vielfachheiten erhält man endlich-dimensionale Räume, genauer:

**Satz.** *Sei  $D$  ein positiver Divisor. Alle Hauptteilsysteme  $h$  mit  $(h) \leq D$  bilden einen Vektorraum  $\mathcal{S}(D)$  der Dimension  $\text{gr} D$ . Der Untervektorraum  $\mathcal{S}_2(D)$  der residuenfreien Systeme hat die Dimension  $\text{gr} D - \sharp \text{Tr}(D)$ .  $\square$*

Jede Form  $\omega \in \mathcal{E}(X)$  bestimmt das Hauptteilsystem  $h_\omega$ . Die Zuordnung  $\mathcal{E}(X) \rightarrow \{\text{Hauptteilsysteme}\}, \omega \mapsto h_\omega$ , ist  $\mathbb{C}$ -linear und hat den Kern  $\mathcal{E}_1(X)$ . Wir fragen, welche Systeme durch Differentialformen *realisiert* werden, d.h. im Bilde dieser Zuordnung liegen.

**13.1.2 Residuenfreie Systeme.** *Jedes residuenfreie Hauptteilsystem wird durch eine Differentialform mit rein imaginären Perioden realisiert.*

*Beweis.* Für den Spezialfall, daß der Träger des Systems nur aus einem Punkt  $a$  besteht und das System bezüglich einer Karte  $z$  mit  $z(a) = 0$  durch  $cz^{-m}dz$  mit  $c \in \mathbb{C}^\times$  repräsentiert wird, entspricht die Behauptung dem Ergebnis 10.7.3. Dabei ist  $m \geq 2$ , weil das Residuum  $= 0$  ist.– Da jedes residuenfreie Hauptteilsystem eine endliche Summe dieser speziellen Systeme ist, folgt der allgemeine Fall.  $\square$

Bei Verzicht auf rein-imaginäre Perioden läßt sich ein Hauptteilsystem bereits dann durch eine Differentialform realisieren, wenn seine Residuensumme Null ist, siehe 13.6.5.

Wir erinnern an die Abbildung  $\Phi : \mathcal{E}_2(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{C})$  aus 7.7.4. Aus dem gerade bewiesenen Ergebnis folgt: Für jeden positiven Divisor  $D$  ist die Abbildung  $\mathcal{L}^1(D) \cap \text{Kern}(\text{Re } \Phi) \rightarrow \mathcal{S}_2(D), \omega \mapsto h_\omega$ ,  $\mathbb{R}$ -linear und surjektiv, insbesondere gilt

$$(1) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^1(D) \cap \text{Kern}(\text{Re } \Phi)) \geq \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}_2(D) = 2(\text{gr } D - \sharp \text{Tr}(D)).$$

Die Beschränkung  $\Phi' : \mathcal{L}^1(D) \cap \text{Kern}(\text{Re } \Phi) \rightarrow \text{Re } H^1(X, \mathbb{C})$  von  $\Phi$  ist  $\mathbb{R}$ -linear. Wegen (1) gilt

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(\Phi') + \dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}(\Phi') &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^1(D) \cap \text{Kern}(\text{Re } \Phi)) \\ &\geq 2(\text{gr } D - \sharp \text{Tr}(D)). \end{aligned}$$

Mit  $\text{Bild}(\Phi') \subset \text{Re } H^1(X, \mathbb{C})$  und  $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Re } H^1(X, \mathbb{C})) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$  folgt  $\dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(\Phi') + 2g \geq 2(\text{gr } D - \sharp \text{Tr}(D))$ , also

$$(2) \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}^1(D) \cap \text{Kern}(\Phi)) \geq \text{gr } D - \sharp \text{Tr}(D) - g$$

wegen  $\text{Kern}(\Phi') = \mathcal{L}^1(D) \cap \text{Kern}(\Phi)$ . Damit ist eine Vorstufe der folgenden Ungleichung erreicht.

**13.1.3 Riemannsche Ungleichung.** Für positive Divisoren  $D$  gilt

$$(1) \quad l(D) \geq \operatorname{gr} D - g + 1.$$

*Beweis.* Wir definieren  $D^*$  durch  $D^*(x) := D(x) + 1$  für  $x \in \operatorname{Tr}(D)$  und  $D^*(x) := 0$  sonst. Dann gilt:

$$\operatorname{Tr}(D^*) = \operatorname{Tr}(D), \quad \operatorname{gr} D^* = \operatorname{gr} D + \sharp \operatorname{Tr}(D), \quad f \in \mathcal{L}(D) \Leftrightarrow df \in \mathcal{L}^1(D^*).$$

Wenn man  $\mathcal{M}(X)$  durch den Untervektorraum  $\mathcal{L}(D)$  ersetzt, geht die exakte Sequenz 7.7.4(1) in die weiterhin exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}^1(D^*) \cap \operatorname{Kern}(\Phi) \rightarrow 0$$

über. Daher ist  $1 - l(D) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{L}^1(D^*) \cap \operatorname{Kern}(\Phi)) = 0$ . Mit der Vorstufe 13.1.2(2), angewendet auf  $D^*$  statt  $D$ , folgt die Behauptung.  $\square$

**Historische Notiz.** Riemann untersucht 1857 in [Ri 3], Artikel 5, wieviele Parameter zur Festlegung einer Funktion auf einer Fläche von Geschlecht  $g$  frei verfügbar bleiben, wenn man an  $m$  vorgegebenen Stellen einfache Pole zuläßt aber ausserhalb dieser Stellen Holomorphie verlangt. Die Möglichkeit, daß mehrere einfache Pole zu einem mehrfachen Pol zusammenfallen, wird auch berücksichtigt. Er begründet die Existenz solcher Funktionen mit dem Dirichletschen Prinzip und kommt für  $m \geq g$  auf (mindestens)  $m - g + 1$  frei verfügbare Parameter. Diese Urform der Ungleichung (1) gehört zu den Grundlagen, auf denen Riemann die Theorie Abelscher Funktionen aufbaut.

**13.1.4 Folgerungen.** Für  $\operatorname{gr} D \geq g + 1$  folgt  $l(D) \geq 2$ , d.h.  $\mathcal{L}(D)$  enthält nicht-konstante Funktionen. Wir wenden dies auf einen  $(g+1)$ -fachen Punktdivisor an und erhalten:

(1) Zu jedem Punkt  $a \in X$  gibt es eine auf  $X \setminus \{a\}$  holomorphe, nicht-konstante Funktion, die in  $a$  einen höchstens  $(g+1)$ -fachen Pol hat. Insbesondere läßt sich  $X$  der Zahlenkugel mit  $\leq g+1$  Blättern überlagern, und jede Fläche vom Geschlecht Null ist zur Zahlenkugel isomorph.  $\square$

(2) Jeder Automorphismus  $\gamma \neq \operatorname{id}$  hat höchstens  $2g+2$  Fixpunkte.

*Beweis.* Sei  $\gamma(a) \neq a$ . Nach (1) gibt es eine auf  $X \setminus \{a\}$  holomorphe Funktion  $f$ , die bei  $a$  einen  $k$ -fachen Pol hat, wobei  $k \leq g+1$  ist. Dann hat  $h := f - f \circ \gamma$  bei  $a$  und  $\gamma^{-1}(a)$  je einen  $k$ -fachen Pol und ist sonst holomorph. Daher hat  $h$  höchstens  $2k$  verschiedene Nullstellen. Da die Fixpunkte von  $\gamma$  Nullstellen von  $h$  sind, folgt die Behauptung.  $\square$

Wenn die Fläche hyperelliptisch ist, hat  $\gamma \neq \operatorname{id}$  höchstens vier Fixpunkte, siehe 8.3.6(2).

(3) Jede Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g = 1$  ist zu einem Torus isomorph.

*Beweis.* Wegen 11.5.4 genügt zu zeigen:

Zu je zwei Punkten  $P \neq Q$  gibt es ein  $\sigma \in \operatorname{Aut}(X)$  mit  $\sigma(P) = Q$ .

Nach der Riemannschen Ungleichung ist  $l(P+Q) \geq 2$ . Daher gibt es eine nicht-konstante Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$ , die außerhalb von  $P$  und  $Q$  holomorph ist und in  $P, Q$  höchstens einfache Pole besitzt. Die beiden Pole sind tatsächlich vorhanden. Denn bei nur einem Pol wäre  $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  ein Isomorphismus. Somit ist  $f : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine zweiblättrige Überlagerung mit  $f^{-1}(\infty) = \{P, Q\}$ , und es gibt eine Deckabbildung  $\sigma$  mit  $\sigma(P) = Q$ .  $\square$

**13.1.5 Der Satz von Riemann und Roch.** Die Riemannsche Ungleichung wurde 1865 von Roch [Ro] zu einer Gleichung verbessert, welche eine interessante und folgenreiche Reziprozität zwischen Funktionen und Differentialformen darstellt. Wir benutzen Begriffe und Ergebnisse aus 8.1.3.

**Satz von Riemann-Roch.** Für jeden Divisor  $D$  gilt

$$(RR) \quad ch(D) := l(D) - i(D) = \text{gr } D - g + 1.$$

*Beweis.* Sei  $K$  ein kanonischer Divisor. Wir wählen einen positiven Divisor  $P$ , so daß  $D+P \geq 0$  und  $\text{gr}(K-D-P) < 0$ , also nach dem Endlichkeitssatz in 8.1.2  $\mathcal{L}(K-D-P) = 0$  ist und somit

$$ch(D+P) = l(D+P) \geq \text{gr } D + \text{gr } P - g + 1$$

nach der Riemannschen Ungleichung gilt. Wir kombinieren mit 8.1.3 (5):

$$(1) \quad ch(D) \geq \text{gr } D - g + 1.$$

Dieses Ergebnis für  $K-D$  statt  $D$  lautet  $ch(K-D) \geq \text{gr } K - \text{gr } D - g + 1$ .

Wegen 8.1.3 (4) und  $\text{gr } K = -e(X) = 2g - 2$ , siehe 12.4.1, folgt

$$(2) \quad -ch(D) = ch(K-D) \geq -\text{gr } D + g - 1.$$

Aus (1) und (2) ergibt sich (RR).  $\square$

Wenn man (RR) auf den Nulldivisor anwendet, erhält man die

**Erste Folgerung.** *Topologisches und analytisches Geschlecht sind gleich,  $g_{\text{top}} = g_{\text{an}} =: g$ . Die analytische Charakteristik ist  $\chi = 2 - 2g$ .*  $\square$

Damit läßt sich 13.1.4 (3) (Flächen vom Geschlecht  $g = 1$  sind Tori) ohne die Folgerung 11.5.4 des Satzes von Poincaré-Weyl beweisen: Es gibt eine holomorphe Differentialform  $\neq 0$ . Da ihr Divisor den Grad 0 hat, besitzt sie keine Nullstellen. Nach 7.6.2 ist die Fläche dann zu einem Torus isomorph.

**Zweite Folgerung.** *Jede Fläche  $X$  vom Geschlecht 2 ist hyperelliptisch.*

*Beweis.* Wegen der ersten Folgerung gibt es zwei linear unabhängige holomorphe Differentialformen  $\omega_1$  und  $\omega_2$ . Ihr Quotient  $f := \omega_1/\omega_2 \in \mathcal{M}(X)$  ist nicht konstant und hat wegen  $\text{gr}(\omega_2) = 2g - 2 = 2$  einen Grad  $\leq 2$ . Da  $f : X \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  kein Isomorphismus ist, folgt  $\text{gr } f = 2$ .  $\square$

## 13.2 Die kanonische Abbildung

Wir gewinnen aus (RR) Ergebnisse über holomorphe Differentialformen und die kanonische Abbildung  $\kappa : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  (8.3.5).– Wir setzen  $g \geq 2$  voraus.

**13.2.1 Die kanonische Schar  $\mathcal{K}$  und die Schnittschar  $\mathcal{S}(\kappa)$  sind gleich.** Genauer gilt:

- (1) Jeder Punktdivisor  $P$  hat den Index  $i(P) = g - 1$ .
- (2) Die holomorphen Differentialformen haben keine gemeinsame Nullstelle, d.h.  $\mathcal{K}$  hat keine Basispunkte.
- (3) Die Schnittschar  $\mathcal{S}(\kappa)$  ist die kanonische Schar  $\mathcal{K}$ ; insbesondere hat  $\kappa$  den Grad  $2g - 2$ .

*Beweis.* Wegen  $l(P) = 1$  folgt (1) aus (RR).– Zu (2). Wenn  $P$  eine gemeinsame Nullstelle wäre, müßte  $\mathcal{L}^1(-P) = \mathcal{E}_1(X)$ , also  $i(P) = g$  sein.– Zu (3). Mit einer Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  von  $\mathcal{E}_1(X)$  gilt  $\kappa = (\omega_1 : \dots : \omega_g)$ . Für jede Karte  $z : (U, x) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  ist  $\omega_j|_U = \kappa_j dz$ . Wegen (2) haben  $\kappa_1, \dots, \kappa_g \in \mathcal{O}(U)$  keine gemeinsame Nullstelle, d.h.  $\kappa|_U = (\kappa_1 : \dots : \kappa_g)$  ist eine gute Darstellung. Jede Hyperebene  $\Theta \subset \mathbb{P}^{g-1}$  mit der Gleichung  $\sum a_j z_j = 0$  hat nach 8.4.1(1) die Schnittzahl  $(\Theta)_\kappa(x) = o(\sum a_j \kappa_j, x) = o(\sum a_j \omega_j, x)$ . Daher ist  $(\Theta)_\kappa$  der kanonische Divisor  $(\sum a_j \omega_j)$ . Daraus folgt  $\mathcal{S}(\kappa) = \mathcal{K}$  und  $\text{gr } \kappa = \text{gr } \mathcal{K} = 2g - 2$ .  $\square$

**13.2.2 Kanonische Einbettungen.** Die kanonische Abbildung  $\kappa$  ist genau dann eine Einbettung, wenn  $X$  nicht-hyperelliptisch ist. Insbesondere sind alle Flächen vom Geschlecht 2 hyperelliptisch.

*Beweis.* Wenn  $\kappa$  nicht injektiv ist, gibt es zwei Punkte  $P \neq Q$  mit  $\kappa(P) = \kappa(Q)$ . Dann hat jede holomorphe Differentialform mit einer Nullstelle bei  $P$  auch eine Nullstelle bei  $Q$ , also  $\mathcal{L}^1(-P) \subset \mathcal{L}^1(-P - Q)$ , und somit  $i(P) \leq i(P + Q)$ . Mit (RR) und 13.2.1(1) folgt  $l(P + Q) = i(P + Q) + 3 - g \geq i(P) + 3 - g = 2$ . Wegen Satz 8.1.1 ist dann  $X$  hyperelliptisch.

Wenn  $\kappa$  bei  $P$  eine kritische Stelle hat, folgt für jede holomorphe Differentialform  $\omega$  aus  $o(\omega, P) \geq 1$  bereits  $o(\omega, P) \geq 2$ , also  $\mathcal{L}^1(-P) \subset \mathcal{L}^1(-2P)$ . Die vorangehende Überlegung, diesmal mit  $Q = P$ , zeigt wieder, daß  $X$  hyperelliptisch ist.

Für hyperelliptischer Flächen siehe Satz 8.3.5.  $\square$

**13.2.3 Divisoren und Abbildungen vom Grade  $2g - 2$ .** Hierunter fallen die kanonischen Divisoren und Abbildungen. Welche anderen Möglichkeiten gibt es?

- (1) Für jeden Divisor  $D$  vom Grad  $2g - 2$  ist  $l(D) = g - 1$  oder  $= g$ . Im zweiten Fall ist  $D$  kanonisch.

*Beweis.* Nach der Riemannschen Ungleichung ist  $l(D) \geq g - 1$ . Angenommen  $l(D) \geq g$ . Nach (RR) gilt dann  $l(K - D) \geq 1$  für jeden kanonischen Divisor  $K$ . Wegen  $\text{gr}(K - D) = 0$  ist  $K - D$  ein Hauptdivisor, und somit ist  $D$  wie  $K$  kanonisch.  $\square$

- (2) Sei  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine hyperelliptische Überlagerung. Für jeden Divisor  $D$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade  $g - 1$  ist der geliftete Divisor  $\eta^*D$  kanonisch.

*Beweis.* Nach 7.2.1 (2) ist  $\text{gr } \eta^*D = 2g - 2$  und nach 8.1.1 (5)-(6)  $l(\eta^*D) \geq l(D) = g$ . Wegen (1) ist  $\eta^*D$  dann kanonisch.  $\square$

- (3) Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  eine nicht-entartete holomorphe Abbildung vom Grade  $2g - 2$ . Dann ist  $n \leq g - 2$ , oder  $\varphi$  ist kanonisch.

*Beweis.* Für jeden Schnittdivisor  $D$  von  $\varphi$  gilt  $n + 1 \leq l(D)$  und  $\text{gr } D = 2g - 2$ . Nach (1) ist  $l(D) = g - 1$ , also  $n \leq g - 2$ , oder  $D$  ist kanonisch. Daher kann  $n > g - 2$  nur eintreten, wenn  $\mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{K}$  ist. Aus  $\mathcal{K} = \mathcal{S}(\kappa)$ , siehe 13.2.1(3), folgt mit Satz 8.4.2, daß  $\varphi$  kanonisch ist.  $\square$

### 13.3 Darstellungen der Automorphismengruppe

Wir betrachten drei Darstellungen der Automorphismengruppe  $\text{Aut}(X)$  einer Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  und zeigen, daß sie treu, d.h. injektiv sind.

**13.3.1 Projektive Darstellung.** Sei  $\kappa : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  eine kanonische Abbildung.

**Lemma.** *Zu jedem  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  gibt es genau einen Automorphismus  $\hat{\alpha}$  von  $\mathbb{P}^{g-1}$ , so daß  $\hat{\alpha} \circ \kappa = \kappa \circ \alpha$  gilt.*

*Beweis.* Da  $\kappa \circ \alpha$  ebenfalls eine kanonische Abbildung ist, folgt die Existenz von  $\hat{\alpha}$  wie in 8.3.6.– Zur Eindeutigkeit: Die Fixpunktmenge jedes Automorphismus  $\Phi$  von  $\mathbb{P}^{g-1}$  ist eine disjunkte Vereinigung projektiver Unterräume. Da  $\kappa(X)$  zusammenhängt und in keinem echten Unterraum liegt, folgt aus  $\Phi \circ \kappa = \kappa$ , daß  $\Phi = \text{id}$  ist.  $\square$

Die *projektive Darstellung*  $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{P}^{g-1})$ ,  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ , ist ein Homomorphismus. Wenn man  $\kappa$  mit einem Automorphismus  $\Phi$  von  $\mathbb{P}^{g-1}$  durch  $\Phi \circ \kappa$  ersetzt, geht die Darstellung  $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$  in die konjugierte Darstellung  $\alpha \mapsto \Phi \circ \hat{\alpha} \circ \Phi^{-1}$  über.

**Satz.** *Bei nicht-hyperelliptischen Flächen ist die projektive Darstellung injektiv. Bei hyperelliptischen Flächen besteht ihr Kern aus der hyperelliptischen Involution  $\sigma$  und der Identität.*

*Beweis.* Aus  $\hat{\alpha} = \text{id}$  folgt  $\kappa = \kappa \circ \alpha$ . Bei nicht-hyperelliptischen Flächen ist  $\kappa$  injektiv (13.2.2), also  $\alpha = \text{id}$ . Bei hyperelliptischen Flächen ist  $\kappa = \rho \circ \eta$  die 2-blättrige Überlagerung  $\eta : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  gefolgt von der injektiven rationalen Raumkurve  $\rho : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ , siehe 8.3.6. Aus  $\kappa = \kappa \circ \alpha$  folgt dann  $\eta = \eta \circ \alpha$ , also  $\alpha \in \mathcal{D}(\eta) = \{\text{id}, \sigma\}$ .  $\square$

**13.3.2 Lineare Darstellung.** Zu jedem Automorphismus  $\alpha \in \text{Aut}(X)$  gehört der lineare Automorphismus  $\alpha^* : \mathcal{E}_1(X) \rightarrow \mathcal{E}_1(X)$ ,  $\omega \mapsto \alpha^* \omega$ .

**Satz.** *Die Abbildung  $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{E}_1(X))$ ,  $\alpha \mapsto \alpha^*$ , ist ein Anti-Monomorphismus. Für jede hyperelliptische Involution  $\sigma$  gilt  $\sigma^* = -\text{id}$ .*

*Beweis.* Nur die Injektivität muß gezeigt werden. Sei  $\alpha^* = \text{id}$ . Aus 13.3.1(1) folgt  $\kappa = \kappa \circ \alpha = \hat{\alpha} \circ \kappa$ , also  $\hat{\alpha} = \text{id}$ , weil  $\kappa$  nicht entartet ist. Nach Satz 13.3.1 ist dann  $\alpha = \text{id}$  oder  $\alpha = \sigma$ . Aber  $\sigma^* = -\text{id}$ , wie man anhand der in 8.2.2 angegebenen Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$  nachprüft.  $\square$

*Beispiel.* Sei  $X$  die Kleinsche Fläche im Riemannschen Gebilde  $(X, \eta, f)$  mit dem Minimalpolynom  $w^7 - z^2(z-1)$ . Sei  $\varepsilon^7 = 1$  aber  $\varepsilon \neq 1$ . Die Gebilde  $(X, \eta, \varepsilon f)$  und  $(X, 1-1/\eta, -f^2/\eta)$  haben dasselbe Minimalpolynom  $w^7 - z^2(z-1)$ . Nach der universellen Eigenschaft 6.2.6 gibt es holomorphe Abbildungen  $\alpha, \beta : X \rightarrow X$  mit  $\eta \circ \alpha = \eta$  und  $f \circ \alpha = \varepsilon f$  bzw.  $\eta \circ \beta = 1-1/\eta$  und  $f \circ \beta = -f^2/\eta$ . Aus  $\eta \circ \alpha = \eta$  bzw.  $\eta \circ \beta = 1-1/\eta$  folgt  $\alpha, \beta \in \text{Aut}(X)$ .



Die Elemente  $f^{-6}\eta d\eta$ ,  $f^{-5}\eta d\eta$ ,  $f^{-3}\eta d\eta$  der Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$ , siehe 8.2.3, werden durch  $\alpha^*$  mit  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  bzw.  $\varepsilon^4$  multipliziert und durch  $\beta^*$  zyklisch vertauscht. – Weitere Ergebnisse zur linearen Darstellung der Modulgruppe  $G_7 = \text{Aut}(X)$  findet man in [Klei 1], Bd. 3, S. 91–108.

**13.3.3 Homologische Darstellung.** Nach 7.5.2 bestimmt jeder Automorphismus  $\alpha$  der Fläche  $X$  einen Automorphismus  $\alpha_* : H_1(X) \rightarrow H_1(X)$  ihrer Homologie.

**Satz.** Die homologische Darstellung  $\text{Aut}(X) \rightarrow \text{Aut}(H_1(X))$ ,  $\alpha \mapsto \alpha_*$ , ist für Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$  ein Monomorphismus. Insbesondere sind verschiedene Automorphismen nicht zueinander homotop.

*Beweis.* Nur die Injektivität muß gezeigt werden. Aus  $\alpha_* = \text{id}$  folgt für jedes  $u \in H_1(X)$  und jedes  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$ , daß  $\langle u, \omega \rangle = \langle \alpha_*(u), \omega \rangle = \langle u, \alpha^*\omega \rangle$  ist, siehe 7.7.3 und 7.4.2(2). Da  $\Phi$  nach Satz 7.7.4 injektiv ist, gilt  $\omega = \alpha^*\omega$  für alle  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$ , also  $\alpha = \text{id}$  wegen Satz 13.3.2.  $\square$

## 13.4 Der Satz von Clifford

Die Abschätzung  $l(D) \leq 1 + \text{gr } D$  aus 8.1.2 läßt sich mit (RR) für manche Divisoren  $D$  um den Faktor  $1/2$  verbessern. Dieses Ergebnis von Clifford wird in 13.5.3 auf Weierstraß-Punkte angewendet. – Wir betrachten Flächen vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Mit  $K$  wird ein kanonischer Divisor bezeichnet.

**13.4.1 Summenformel.** Für je zwei Divisoren  $D_1, D_2$  mit  $l(D_j) > 0$  gilt

$$l(D_1) + l(D_2) \leq 1 + l(D_1 + D_2).$$

*Beweis.* Angenommen,  $l(D_1 + D_2) \leq l(D_1) + l(D_2) - 2 =: k$ . Nach Satz 8.1.4 gibt es einen Divisor  $E \geq 0$  vom Grade  $k$ , so daß  $l(D_1 + D_2 - E) = 0$  ist. Wir zerlegen  $E = E_1 + E_2$  in zwei positive Divisoren mit  $\text{gr } E_j = l(D_j) - 1$ . Nach 8.1.2 ist  $l(D_j - E_j) \geq 1$ , d.h. es gibt einen zu  $D_j - E_j$  linear äquivalenten positiven Divisor  $C_j$ . Dann ist  $C_1 + C_2$  positiv und zu  $D_1 + D_2 - E$  linear äquivalent im Widerspruch zu  $l(D_1 + D_2 - E) = 0$ .  $\square$

**13.4.2 Triviale Fälle** der Cliffordsche Ungleichung bzw. Gleichung

$$(1) \quad 2l(D) \leq 2 + \text{gr } D \quad \text{bzw.} \quad 2l(D) = 2 + \text{gr } D.$$

Wegen (RR) gelten Ungleichung bzw. Gleichung genau dann für einen Divisor  $D$ , wenn sie für  $K - D$  gelten. – Für  $\text{gr } D \leq -3$  und für  $\text{gr } D \geq 2g + 1$  gilt die Ungleichung nie. – Für alle Divisoren vom Grade  $-2$  und vom Grade  $2g$  trifft die Gleichung zu. Die Ungleichung ist auch für  $\text{gr } D \in \{-1, 0, 2g - 2, 2g - 1\}$  erfüllt. – Die Gleichung ist für Divisoren ungeraden Grades nie erfüllt. Sie gilt für  $\text{gr } D = 0$  genau dann, wenn  $D$  ein Hauptdivisor und für  $\text{gr } D = 2g - 2$  genau dann, wenn  $D$  ein kanonischer Divisor ist.

**13.4.3 Die Cliffordsche Ungleichung** gilt genau dann für den Divisor  $D$ , wenn  $-2 \leq \operatorname{gr} D \leq 2g$  ist.

*Beweis.* Es genügt, Divisoren  $D$  mit  $1 \leq \operatorname{gr} D \leq g-1$  zu betrachten. Der Fall  $l(D) = 0$  ist trivial. Für  $l(D) > 0$  gilt  $l(K-D) > 0$  nach (RR). Nach 13.4.1 ist dann  $l(D) + l(K-D) \leq 1 + l(K) = 1 + g$ . Wenn man hierzu (RR), d.h.  $l(D) - l(K-D) = \operatorname{gr} D - g + 1$  addiert, folgt die Behauptung.  $\square$

**13.4.4 Projektive Kurven.** Sei  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$  eine nicht-entartete holomorphe Abbildung vom Grade  $d < 2n$ . Dann hat  $X$  ein Geschlecht  $g \leq d - n$ . Für  $g = d - n$  ist  $\varphi$  eine Einbettung mit vollständiger Schnittschar.

*Beweis.* Sei  $D$  ein Schnittdivisor von  $\varphi$ . Die Schnittschar  $g_d^n$  ist in  $|D|$  enthalten, also gilt  $n \leq l(D) - 1$ . Der Fall  $d \leq 2g$  ist unmöglich. Denn dann würde die Cliffordsche Ungleichung  $n + 1 \leq l(D) \leq 1 + d/2$  ergeben, was der Voraussetzung  $d < 2n$  widerspricht. Somit ist  $d > 2g$ , also  $i(D) = 0$  und daher  $n + 1 \leq l(D) = d - g + 1$  nach (RR). Der Fall  $g = d - n$  tritt genau dann ein, wenn  $n = l(D) - 1$ , also  $g_d^n = |D|$  vollständig ist. Nach Satz 8.5.1 ist  $\varphi$  eine Einbettung, wenn  $l(D - B) = l(D) - 2$  für jeden positiven Divisor  $B$  vom Grade zwei gilt. Das ist hier erfüllt. Denn  $\operatorname{gr}(D - B) = d - 2 > 2g - 2$ , also nach (RR)  $l(D - B) = d - 2 - g + 1 = l(D) - 2$ .  $\square$

**13.4.5 Die strikte Ungleichung**  $2l(D) < 2 + \operatorname{gr} D$  gilt für alle Divisoren  $D$  mit  $1 \leq \operatorname{gr} D \leq 2g - 3$  auf nicht-hyperelliptischen Flächen.

*Beweis.* Wenn ein Divisor  $D$  vom Grade 2 die Gleichung  $2l(D) = 2 + \operatorname{gr} D$  erfüllt, ist  $l(D) = 2$ , und die Fläche ist nach Satz 8.1.1 hyperelliptisch. Wir führen den Fall  $4 \leq \operatorname{gr} D \leq g - 1$  durch Induktion über  $\operatorname{gr} D$  darauf zurück. Für den Induktionsschritt genügt es zu zeigen: Wenn  $D$  die Gleichung (1) erfüllt, gibt es auch einen Divisor  $D_0$  mit  $2 \leq \operatorname{gr} D_0 < \operatorname{gr} D$ , der (1) erfüllt.

Wegen (1) und (RR) ist  $l(K - D) > 0$ . Es gibt also einen zu  $K - D$  linear äquivalenten positiven Divisor  $D_2$ . Wir zeigen unten:

(\*) Es gibt einen zu  $D$  linear äquivalenten positiven Divisor  $D_1$ , so daß  $D_0 := \min \{D_1, D_2\} \neq 0$  und  $\neq D_1$  ist.

Dann ist  $\operatorname{gr} D_0 < \operatorname{gr} D$ . Der Beweis von  $2l(D_0) = 2 + \operatorname{gr} D_0$  beruht auf folgender exakter Sequenz:

$$0 \rightarrow \mathcal{L}(D_0) \rightarrow \mathcal{L}(D_1) \oplus \mathcal{L}(D_2) \rightarrow \mathcal{L}(D_1 + D_2 - D_0).$$

Dabei ist  $f_0 \mapsto (f_0, f_0)$  der erste und  $(f_1, f_2) \mapsto f_1 - f_2$  der zweite Homomorphismus. Es folgt  $l(D) + l(K - D) \leq l(D_0) + l(K - D_0)$ , also wegen (RR)  $2l(D) - \operatorname{gr} D \leq 2l(D_0) - \operatorname{gr} D_0$ . Mit der Cliffordschen Gleichung für  $D$  und der Ungleichung für  $D_0$  ergibt sich  $2 \leq 2l(D_0) - \operatorname{gr} D_0 \leq 2$ .

*Beweis zu (\*).* Da  $D_2 \neq 0$  ist, gibt es einen Punkt  $P \in \operatorname{Tr}(D_2)$ . Wir wählen außerdem  $Q \in X \setminus \operatorname{Tr}(D_2)$ . Wegen  $l(D) \geq 3$  enthält  $\mathcal{L}(D)$  den Untervektorraum  $\mathcal{L}(D - P - Q) \neq 0$ . Wir wählen daraus ein  $f \neq 0$ . Für  $D_1 := D + (f)$  gilt (\*): Wegen  $D_1(P) > 0$  und  $D_2(P) > 0$  ist  $D_0(P) > 0$  also  $D_0 \neq 0$ . Wegen  $D_1(Q) > 0$  und  $D_2(Q) = 0$  ist  $D_0(Q) = 0$ , also  $D_0 \neq D_1$ .  $\square$

**13.4.6 Die Cliffordsche Gleichung.** Sei  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  eine hyperelliptische Überlagerung. Für einen Divisor  $D$  auf  $X$  vom Grade  $2e$  mit  $0 \leq e \leq g-1$  gilt  $2l(D) = 2 + \text{gr} D$  genau dann, wenn  $D$  zur Liftung  $\eta^*E$  eines Divisors  $E$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  linear äquivalent ist.

*Beweis.* Sei  $E$  ein Divisor auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade  $e$ . Nach 7.2.1(2) ist  $\text{gr} \eta^*E = 2e$  und nach 8.1.1 (5)-(6)  $l(\eta^*E) \geq l(E) = 1 + \text{gr} E$ , also  $2l(\eta^*E) \geq 2 + \text{gr} \eta^*E$ . – Umgekehrt sei  $\text{gr} D = 2e$ . Mit einem Divisor  $E_1$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$  vom Grade  $g-1-e$  gilt  $\text{gr}(D + \eta^*E_1) = 2g-2$  und  $l(D + \eta^*E_1) \geq l(D) + l(\eta^*E_1) - 1$  nach 13.4.1, also  $l(D + \eta^*E_1) \geq g$ . Wegen 13.2.3 (1)-(2) gibt es einen Divisor  $E_2$  auf  $\widehat{\mathbb{C}}$ , so daß  $D + \eta^*E_1$  zu  $\eta^*E_2$ , also  $D$  zu  $\eta^*(E_2 - E_1)$  linear äquivalent ist.  $\square$

**13.4.7 Historisches. Ausblick.** Die Quelle der Cliffordschen Ergebnisse ist der Aufsatz „On the classification of loci“ von 1878 in [Cli], no. XXXIII. – Ausgehend von der Abbildung  $|D| \times |K - D| \rightarrow |K|$ ,  $(D_1, D_2) \mapsto D_1 + D_2$ , lassen sich die Resultate auch mit Methoden der algebraischen Geometrie beweisen; siehe [Nam 1], [Nar] und [ACGH].

## 13.5 Weierstraß-Punkte

Wir hatten in Paragraph 8.6 begonnen, unter Vorwegnahme von Konsequenzen der Riemann-Rochschen Formel Ergebnisse über die Weierstraß-Punkte nicht-hyperelliptischer Flächen zu gewinnen. Diese nunmehr vollständig bewiesenen Ergebnisse werden im folgenden ergänzt. Der Ausgangspunkt ist eine auf (RR) beruhende

**13.5.1 Charakterisierung der Lücken.** Folgende Aussagen über eine Punkt  $P \in X$  und eine natürliche Zahl  $k \geq 1$  sind äquivalent:

- (a)  $k$  ist eine Lücke der kanonischen Abbildung bei  $P$ .
- (b) Es gibt keine auf  $X \setminus \{P\}$  holomorphe Funktion mit einem  $k$ -fachen Pol bei  $P$ .
- (c) Es gibt eine holomorphe Differentialform  $\omega$  mit einer  $(k-1)$ -fachen Nullstelle bei  $P$ .
- (d)  $l((k-1)P) = l(kP)$ .
- (e)  $i(kP) + 1 = i((k-1)P)$ .

*Beweis.* Die Äquivalenzen (b)  $\Leftrightarrow$  (d) und (c)  $\Leftrightarrow$  (e) folgen aus den Definitionen von  $l$  bzw.  $i$ . Die Äquivalenz (d)  $\Leftrightarrow$  (e) folgt aus (RR); (a)  $\Leftrightarrow$  (c) folgt aus  $\mathcal{S}(\kappa) = \mathcal{K}$ , siehe 13.2.1(3).  $\square$

Die Aussage (b) motiviert die von Weierstraß vorgeschlagene Bezeichnung *Lücke*.

### 13.5.2 Folgerungen.

- (i)  $P$  ist genau dann ein Weierstraß-Punkt, wenn  $l(gP) \geq 2$  ist.
- (ii) Jede Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  läßt sich der Zahlenkugel mit höchstens  $g$  Blättern überlagern.

(iii) Wenn  $k_1$  und  $k_2$  keine Lücken bei  $P$  sind, ist  $k_1 + k_2$  auch keine Lücke bei  $P$ .

*Beweis.* (i)  $P$  ist genau dann ein Weierstraß-Punkt, wenn eine der Zahlen  $2, \dots, g$  keine Lücke bei  $P$  ist, d.h. wenn in der Folge  $1 = l(0) \leq l(P) \leq l(2P) \leq \dots \leq l(gP)$  mindestens eine echte Ungleichung auftritt.

(ii) Nach 8.6.1 gibt es einen Weierstraß-Punkt  $P$ . Wegen (i) existiert eine nicht konstante Funktion  $f \in \mathcal{L}(gP)$ . Für sie gilt  $\text{gr } f \leq g$ .

(iii) Es gibt zwei Funktionen  $f_j$ , die bei  $P$  einen  $k_j$ -fachen Pol haben und sonst holomorph sind. Dann hat  $f_1 \cdot f_2$  bei  $P$  einen  $(k_1 + k_2)$ -fachen Pol und ist sonst holomorph. Folglich ist  $k_1 + k_2$  keine Lücke.  $\square$

**13.5.3 Abschätzung der Gewichte.** Bei nicht-hyperelliptischen Flächen von Geschlecht  $g$  hat jeder Punkt  $P$  ein Gewicht  $\tau(P) \leq 1 + \frac{1}{2}(g-1)(g-2)$ .

*Beweis.* Sei  $1 = k_1 < \dots < k_g \leq 2g-1$  die Lückenfolge bei  $P$ . Aus 13.5.1(d) folgt  $l((k_j-1)P) = l(k_jP) = k_j - j + 1$ . Nach Clifford, siehe 13.4.5, gilt  $l((k_j-1)P) < 1 + \frac{1}{2}(k_j-1)$  für  $1 \leq k_j-1 \leq 2g-3$ , also  $k_j < 2j-1$ , falls  $2 \leq k_j \leq 2g-2$ . Somit ist  $k_1 = 1, k_2 = 2, k_j \leq 2j-2$  für  $j = 3, \dots, g-1$  und  $k_g \leq 2g-1$ . Daraus folgt für  $\tau(P) := \sum (k_j - j)$  die Behauptung.  $\square$

*Bemerkungen.* (1) Aus  $k_g = 2g-1$  folgt  $l((2g-2)P) = l((2g-1)P) = g$ . Nach 13.2.3(1) ist dann  $(2g-2)P$  ein kanonischer Divisor. Wenn man diesen Fall ausschließt, gilt  $\tau(P) \leq \frac{1}{2}(g-1)(g-2)$ .

(2) Bei hyperelliptischen Flächen haben alle Weierstraß-Punkte dasselbe Gewicht  $\frac{1}{2}g(g-1)$ , siehe Satz 8.5.3.

Hurwitz benutzt in [Hur] 1, S. 398, zur Abschätzung des Gewichtes statt der Cliffordschen Ungleichung die Halbgruppen-Eigenschaft 13.5.2(iii) der Nicht-Lücken. Seine Ergebnisse sind schwächer. Unser Beweis ist eine verbesserte Version von [GH], S. 275.

**13.5.4 Anzahl der Weierstraß-Punkte.** Für die nicht gewichtete Anzahl  $n$  der Weierstraß-Punkte einer nicht-hyperelliptischen Fläche vom Geschlecht  $g$  gilt

$g$	3	4	5	6	$\geq 7$
$n \geq$	12	15	18	20	$2g+7$

*Beweis.* Da jeder Weierstraß-Punkt ein Gewicht  $\leq w := 1 + \frac{1}{2}(g-1)(g-2)$  hat, gilt für die in 8.6.3 bestimmte gewichtete Anzahl  $g^3 - g \leq n \cdot w$ , also

$$n \geq \frac{g^3 - g}{w} = 2g + 6 + \frac{8(g-3)}{g(g-3)+4}.$$

Da  $n$  ganzzahlig ist, folgen die Werte der Tabelle.  $\square$

*Bemerkung.* Hyperelliptische Flächen haben  $2g+2$  Weierstraß-Punkte, siehe Satz 8.5.3.

**13.5.5 Fixpunkte.** *Wenn bei einem Automorphismus  $\gamma \neq \text{id}$  alle Weierstraß-Punkte Fixpunkte sind, ist  $\gamma = \sigma$  die hyperelliptische Involution.*

*Beweis.* Hyperelliptische Flächen haben  $2g + 2 \geq 6$  Weierstraß-Punkte. Nach 8.3.6(2) folgt  $\gamma = \sigma$ . Im nicht-hyperelliptischen Fall gibt es  $\geq 2g + 6$  Weierstraß-Punkte. Aber wegen 13.1.4(2) hat  $\gamma$  höchstens  $2g + 2$  Fixpunkte.  $\square$

**13.5.6 Endlichkeit der Automorphismengruppe.** *Für jede kompakte Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  ist die Automorphismengruppe  $\text{Aut}(X)$  endlich.*

*Beweis.* Sei  $W \subset X$  die endliche Menge der Weierstraß-Punkte, und sei  $\mathcal{S}(W)$  die Gruppe aller Permutationen von  $W$ . Da  $W$  unter jedem Automorphismus von  $X$  invariant bleibt, ist  $\Phi: \text{Aut } X \rightarrow \mathcal{S}(W), \gamma \mapsto \gamma|_W$ , ein Homomorphismus. Nach dem letzten Ergebnis ist  $\Phi$  für nicht-hyperelliptische Flächen injektiv und hat bei hyperelliptischen Flächen einen Kern der Ordnung 2. Da  $\mathcal{S}(W)$  endlich ist, gilt dasselbe für  $\text{Aut}(X)$ .  $\square$

Wegen dieses Beweises nannte Weierstraß die Endlichkeit der Automorphismengruppe „eine sozusagen selbstverständliche Wahrheit“; siehe auch 11.5.4–5.

## 13.6 Weitere Anwendungen

handeln von projektiven Einbettungen kompakter Flächen, von der Darstellung der Cohomologie durch Differentialformen und von der Realisierung vorgegebener Hauptteile durch Differentialformen bzw. Funktionen.

**13.6.1 Projektive Einbettungen.** *Jede vollständige Linearschar  $\mathcal{S}$  vom Grade  $n \geq 2g + 1$  ist die Schnittschar einer Einbettung  $X \rightarrow \mathbb{P}^{n-g}$ .*

*Beweis.* Für  $D \in \mathcal{S}$ , jeden kanonischen Divisor  $K$  und jeden Divisor  $B$  vom Grade 2 ist  $\text{gr}(K - D - B) < 0$ , also nach (RR)  $l(D - B) = n - g + 1 - \text{gr} B = l(D) - 2$ . Mit Satz 8.5.1 folgt daraus die Behauptung.  $\square$

Mit Methoden der höher-dimensionalen, projektiv algebraischen Geometrie lassen sich stets eine Einbettung  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^3$  und eine Abbildung  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^2$  erreichen, deren Bild  $\varphi(X) \subset \mathbb{P}^2$  keine anderen Singularitäten als gewöhnliche Doppelpunkte hat; siehe [GH], S. 173 und 215, oder [Hart], S. 309 ff.

**13.6.2 Allgemeine Divisoren.** Nach der Riemannschen Ungleichung gilt  $l(D) \geq \max\{1, n - g + 1\}$  für positive Divisoren  $D$  vom Grade  $n > 0$ . Wir nennen  $D$  einen *allgemeinen Divisor*, wenn  $l(D) = \max\{1, n - g + 1\}$  minimal ist. Aus Satz 8.1.4 mit  $E = K$  und (RR) folgt

**Satz.** *Im  $n$ -fachen symmetrischen Produkt  $X_n$  bilden die allgemeinen Divisoren eine offene und dichte Teilmenge.*  $\square$

**13.6.3 Meromorphe Formen und Cohomologie.** In der exakten Sequenz

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{d} \mathcal{E}_2(X) \xrightarrow{\Phi} H^1(X, \mathbb{C})$$

des Satzes 7.7.4 gilt:

(2) *Bei kompakten Flächen  $X$  ist  $\Phi$  epimorph.*

*Beweis.* Wie beim Beweis der Riemannschen Ungleichung in 13.1.3 bilden wir zu jedem positiven Divisor  $D$  den Divisor  $D^*$  und den  $(\operatorname{gr} D)$ -dimensionalen komplexen Vektorraum  $\mathcal{S}_2(D^*)$ . Die Abbildung  $\mathcal{L}^1(D^*) \cap \mathcal{E}_2(X) \rightarrow \mathcal{S}_2(D^*)$ , die jeder Form  $\omega$  ihr Hauptteilsystem  $h_\omega$  zuordnet, ist nach 13.1.2 epimorph und hat den Kern  $\mathcal{E}_1(X)$ . Daher ist  $\dim(\mathcal{L}^1(D^*) \cap \mathcal{E}_2(X)) = g + \operatorname{gr} D$ . Aus (1) entsteht durch Einschränkung die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(D) \xrightarrow{d} \mathcal{L}^1(D^*) \cap \mathcal{E}_2(X) \xrightarrow{\Phi_D} H^1(X, \mathbb{C}).$$

Daher ist  $\operatorname{rg} \Phi_D = g + \operatorname{gr} D - l(D) + 1$ . Wenn man für  $D$  einen allgemeinen Divisor vom Grade  $\operatorname{gr} D \geq g$  wählt, ist  $l(D) = \operatorname{gr} D - g + 1$ , siehe 13.6.2, also  $\operatorname{rg} \Phi \geq \operatorname{rg} \Phi_D = 2g = \dim H^1(X, \mathbb{C})$ , d.h.  $\Phi$  ist epimorph.  $\square$

Man kann diesen Satz und seinen Beweis als Methode interpretieren, um zu  $\mathcal{E}_1(X)$ , aufgefaßt als Untervektorraum von  $H^1(X, \mathbb{C})$ , einen komplementären Untervektorraum zu finden. Wir können dies auch durch komplexe Konjugation erreichen. Das Verfahren heißt

**13.6.4 Hodge-Zerlegung.** Jedes Element  $v \in H^1(X, \mathbb{C})$  der Cohomologie ist ein Gruppenhomomorphismus  $v : H_1(X) \rightarrow (\mathbb{C}, +)$  und besitzt daher ein konjugiert komplexes Element  $\bar{v}$ . Für jeden komplexen Untervektorraum  $V \subset H^1(X, \mathbb{C})$  ist  $\bar{V} := \{\bar{v} : v \in V\}$  ein komplexer Untervektorraum mit  $\dim \bar{V} = \dim V$ . Die Elemente des zu  $\mathcal{E}_1(X) \subset H^1(X, \mathbb{C})$  konjugiert komplexen Untervektorraums  $\bar{\mathcal{E}}_1(X)$  heißen *antiholomorphe* Differentialformen. Die Cohomologie ist die direkte Summe

$$(1) \quad H^1(X, \mathbb{C}) = \mathcal{E}_1(X) \oplus \bar{\mathcal{E}}_1(X).$$

*Beweis.* Wegen  $\dim \bar{\mathcal{E}}_1(X) = \dim \mathcal{E}_1(X) = g$  und  $\dim H^1(X, \mathbb{C}) = 2g$  genügt es,  $\mathcal{E}_1(X) \cap \bar{\mathcal{E}}_1(X) = 0$  zu zeigen: Für jedes  $\omega \in \mathcal{E}_1(X) \cap \bar{\mathcal{E}}_1(X)$  ist  $\omega + \bar{\omega}$  eine holomorphe Form mit reellen Perioden, also  $\omega = -\bar{\omega}$  nach der Folgerung in 10.1.2. Dann hat  $i\omega$  reelle Perioden und ist somit  $= 0$ .  $\square$

Man nennt (1) die *Hodge-Zerlegung*, da es sich um den Spezialfall eines Zerlegungstheorems handelt, welches Hodge [Ho] für die Cohomologie projektiver Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimensionen bewies. Die Gültigkeit dieser Zerlegung wurde auf kompakte Kählersche Mannigfaltigkeiten verallgemeinert und spielt in deren Theorie eine fundamentale Rolle, siehe z.B. [GH], S. 80-127.

**13.6.5 Hauptteile von Differentialformen.** Der Beweis der Riemann-Rochschen Formel ging von der Realisierung aller residuenfreien Hauptteilsysteme durch Differentialformen zweiter Gattung aus, siehe 13.1.2. Wie dort schon angekündigt wurde, kann man die Residuenfreiheit abschwächen.

**Satz.** *Ein Hauptteilsystem wird genau dann durch eine meromorphe Differentialform realisiert, wenn seine Residuensumme  $= 0$  ist.*

*Beweis.* Nach 7.3.6 ist „Residuensumme = 0“ notwendig. Umgekehrt betrachten wir zu einem beliebigen positiven Divisor  $D \neq 0$  den Vektorraum  $\mathcal{S}_0(D)$  aller Hauptteilsysteme  $h$ , die durch  $(h) \leq D$  beschränkt sind und die Residuensumme = 0 haben. Es genügt zu zeigen: Die Abbildung  $h : \mathcal{L}^1(D) \rightarrow \mathcal{S}_0(D)$ , welche jeder Form  $\omega$  ihr Hauptteilsystem  $h_\omega$  zuordnet, ist epimorph. Da Kern  $h = \mathcal{E}_1(X)$  die Dimension  $g$  hat, folgt  $\text{rg } h = i(-D) - g$ . Nun ist  $l(-D) = 0$ , also nach (RR)  $i(-D) = \text{gr } D + g - 1$  und somit  $\text{rg } h = \text{gr } D - 1 = \dim \mathcal{S}_0(D)$ .  $\square$

**13.6.6 Hauptteile meromorpher Funktionen.** Analog zu den Hauptteilsystemen meromorpher *Differentialformen*, siehe 13.1.1, werden die Hauptteilsysteme  $\mu$  meromorpher *Funktionen* definiert. Auch hier gehört zu  $\mu$  ein positiver Divisor  $(\mu)$ . Aber Residuen machen keinen Sinn.

Jede Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  bestimmt ein Hauptteilsystem  $\mu_f$ . Die Zuordnung  $\mathcal{M}(X) \rightarrow \{\text{Hauptteilsysteme } \mu\}$ ,  $f \mapsto \mu_f$ , ist  $\mathbb{C}$ -linear. Ihr Kern ist  $\mathbb{C}$ . Um Bedingungen zu formulieren, unter denen ein System  $\mu$  durch eine Funktion  $f$  realisiert wird, definieren wir zu jeder Form  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  folgendes Hauptteilsystem meromorpher Differentialformen  $\mu\omega$ : Sei  $f$  eine bei  $a \in X$  definierte meromorphe Funktion mit dem Hauptteil  $\mu(a)$ . Dann bestimmt die bei  $a$  definierte Form  $f\omega$  den Hauptteil  $\mu\omega(a)$ .

**Satz.** *Ein Hauptteilsystem  $\mu$  meromorpher Funktionen auf der Fläche  $X$  wird genau dann durch eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  realisiert, wenn für jedes  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  das System  $\mu\omega$  die Residuensumme Null hat.*

*Beweis.* Wir bezeichnen die *Residuensumme* mit  $\text{Res}(\mu\omega)$ . Wenn  $\mu$  durch  $f$  realisiert wird, realisiert die Form  $f\omega$  das System  $\mu\omega$ . Daher ist  $\text{Res}(\mu\omega) = \text{Res}(f\omega) = 0$ .

Die  $g$  Bedingungen  $\text{Res}(\mu\omega_j) = 0$  für eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  von  $\mathcal{E}_1(X)$  genügen, damit  $\text{Res}(\mu\omega) = 0$  für alle  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  gilt.

Sei  $D$  ein beliebiger positiver Divisor  $\neq 0$ . Alle Hauptteilsysteme  $\mu$ , die durch  $(\mu) \leq D$  beschränkt sind, bilden einen  $(\text{gr } D)$ -dimensionalen Vektorraum  $F(D)$ . Für jede Funktion  $f \in \mathcal{L}(D)$  ist  $\text{Res}(\mu_f) = 0$ , also  $\mu_f \in F_0(D) = \{\mu \in F(D) : \text{Res}(\mu\omega) = 0 \text{ für alle } \omega \in \mathcal{E}_1(X)\}$ . Die Abbildung  $\mu : \mathcal{L}(D) \rightarrow F_0(D)$ ,  $f \mapsto \mu_f$ , ist linear und hat den Kern  $\mathbb{C}$ . Die Behauptung ist zur Surjektivität der Abbildung  $\mu$  und damit zur Dimensionsformel

$$(1) \quad \dim F_0(D) = l(D) - 1 \quad \text{für alle } D$$

äquivalent. Wir beginnen den Beweis von (1) mit der bilinearen Abbildung

$$(2) \quad F(D) \times \mathcal{E}_1(X) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\mu, \omega) \mapsto \text{Res}(\mu\omega).$$

Ihre Nullräume sind  $F_0(D) \subset F(D)$  und

$$\mathcal{L}^1(-D) = \{\omega : \text{Res}(\mu\omega) = 0 \text{ für alle } \mu \in F(D)\} \subset \mathcal{E}_1(X).$$

Daher induziert (2) eine *nicht-entartete* Paarung

$$F(D)/F_0(D) \times \mathcal{E}_1(X)/\mathcal{L}^1(-D) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Insbesondere haben beide Faktoren dieselbe Dimension  $\text{gr } D - \dim F_0(D) = g - i(D)$ . Hieraus folgt mit (RR) die Behauptung (1).  $\square$

## 13.7 Aufgaben

Alle Aufgaben handeln, wenn nichts anderes angegeben wird, von einer kompakten und zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$ , deren Geschlecht mit  $g$  bezeichnet wird.

- 1) Zeige, daß folgende Aussage zum Satz von Riemann-Roch äquivalent ist:  
Wenn die Summe  $D + E$  zweier Divisoren ein kanonischer Divisor ist, gilt  $2l(D) - \text{gr } D = 2l(E) - \text{gr } E$ .
- 2) (i) Zeige: Zu jedem positiven Divisor  $D$  vom Grade  $\geq g$  gibt es eine meromorphe Funktion  $f$ , deren Nullstellendivisor  $(f)_0 \geq D$  ist. Wann kann man  $(f)_0 = D$  erreichen?  
(ii) Zeige: Zu jedem positiven Divisor  $E$  vom Grade  $\leq g - 2$  gibt es einen kanonischen Divisor  $K \geq E$ .
- 3) Zeige: Zu jedem Divisor vom Grade  $> 3(g - 1)$  gibt es einen kanonischen Divisor  $K \leq D$ .
- 4) (i) Zeige: Jeder positive Divisor  $D$  vom Grade  $2g$  ist der Schnittdivisor einer nicht-entarteten, vollständigen Abbildung  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ . Bestimme  $d$ .  
(ii) Zeige: Entweder ist  $\varphi$  eine Einbettung, oder es gibt einen kanonischen Divisor  $K \leq D$ .
- 5) Sei  $g = 3$ . Zeige:
  - (i) Zu jedem  $P \in X$  bilden alle  $D \in X_3$ , für die  $P + D$  kanonisch ist, eine vollständige eindimensionale Linearschar.
  - (ii) Für jedes  $D \in X_3$  ist  $\dim |D| = 0$  oder  $= 1$ . Der zweite Fall tritt genau dann ein, wenn es (genau?) ein  $P \in X$  gibt, so daß  $P + D$  kanonisch ist.
- 6) (i) Zeige: Jede projektive Einbettung einer Fläche vom Geschlecht 2 hat einen Grad  $\geq 5$ . Es gibt eine Einbettung vom Grade 5 in den  $\mathbb{P}^3$ .  
(ii) Zeige für Flächen vom Geschlecht 3: Der kleinstmögliche Grad einer projektiven Einbettung ist 4 für nicht-hyperelliptische und 6 für hyperelliptische Flächen.
- 7) Sei  $P_1, P_2, \dots$  eine Punktfolge auf der Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 2$ . Bilde die Divisoren  $D_0 = 0$ ,  $D_k = P_1 + \dots + P_k$ . Zeige:
  - (i)  $1 = l(D_0) \leq l(D_1) \leq \dots \leq l(D_{2g-1}) = g$ .
  - (ii) Bei jedem Schritt ist  $l(D_k) = l(D_{k-1})$  oder  $= l(D_{k-1}) + 1$ . Im ersten Fall heißt  $k$  eine *Lücke* der Folge  $P_j$ .
  - (iii) Es gibt genau  $g$  Lücken  $1 = k_1 < k_2 < \dots < k_g < 2g$ .
  - (iv) Genau dann, wenn 2 keine Lücke ist, ist  $\{P_1, P_2\}$  die Faser einer 2-blättrigen Überlagerung  $\eta: X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ .
  - (v)  $k_g = 2g - 1 \Leftrightarrow D_{2g-1}$  ist ein kanonischer Divisor.
  - (vi) Die Lückenfolge kann nicht mit  $\dots < 2g - 2 < 2g - 1$  enden. Wenn sie mit  $\dots < 2g - 3 < 2g - 1$  endet, ist  $X$  hyperelliptisch.
- 8) (i) Zeige: Zeige im Anschluß an Aufgabe 7.9.1: Der Vektorraum  $\mathcal{E}_1^n(X)$  der holomorphen  $n$ -Differentialformen hat für  $n \geq 2$  die Dimension  $d := (2n - 1)(g - 1)$ .



- (ii) Gib für die durch  $w^2 - (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_{2g+1})$  definierte hyperelliptische Fläche und  $n = 2$  eine Basis dieses Vektorraums an. Benutze dazu Formen der Gestalt  $f(dz)^2/w$ .
- (iii) Benutze eine Basis von  $\mathcal{E}_1^n(X)$  zur Definition der  $n$ -fach kanonischen Abbildung  $\kappa_n : X \rightarrow \mathbb{P}^{d-1}$ . Welchen Grad hat sie? Für welche  $g$  und  $n$  ist  $\kappa_n$  eine Einbettung?
- (iv) Zeige: Der Gewichtsddivisor  $\tau_n$  von  $\kappa_n$  hat den Grad  $gd^2$ . (Die Punkte seines Trägers heißen  $n$ -fache Weierstraß-Punkte. Mehr dazu findet man in [Ac], Chap. 6. Wegen der Bedeutung der  $n$ -fachen Differentialformen für den Modulraum siehe [Mu 2], Lecture II.)
- 9) Zeige: Die durch  $z^4 + w^4 = 1$  bestimmte Fläche besitzt 12 Weierstraß-Punkte. Jeder hat das Gewicht 2.
- 10) Bestimme für jeden Torus die homologische Darstellung seiner Automorphismengruppe.
- 11) Für die hyperelliptische Fläche  $X$  zum Polynom  $w^2 - (z - e_1) \cdot \dots \cdot (z - e_{2g+1})$  bilden die Differentialformen

$$dz/w, z dz/w, \dots, z^{g-1} dz/w$$

eine Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$ , siehe 8.2.2(1). Ergänze sie gemäß 13.6.3 durch explizit angegebene Formen zweiter Gattung zu einem System von  $2g$  Formen, das eine Basis der Cohomologie  $H^1(X, \mathbb{C})$  repräsentiert.

- 12) Sei  $\eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$  eine Torusprojektion. Mit der  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega$  und ihren Ableitungen definiert man folgende Differentialformen  $\sigma, \omega_{k,a}, \omega_b$  auf  $\mathbb{C}/\Omega$ , die durch ihre  $\eta$ -Liftings bestimmt sind:

$$\eta^* \sigma = dz,$$

$$\eta^* \omega_{k,a} = \wp^{(k)}(z - \alpha) dz \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } \alpha \in \mathbb{C} \text{ mit } \eta(\alpha) = a,$$

$$\eta^* \omega_b = \frac{1}{2} \frac{\wp'(z) + \wp'(\beta)}{\wp(z) - \wp(\beta)} dz \text{ für } \beta \in \mathbb{C} \setminus \Omega \text{ mit } \eta(\beta) = b.$$

Beweise folgende Realisierungen vorgegebener Hauptteilsysteme durch die angegebenen Formen:

- (i) Endliche Linearkombinationen  $\omega$  der Formen  $\omega_{k,a}$  realisieren alle residuenfreien Hauptteilsysteme.
- (ii) Wenn man  $\sigma$  hinzunimmt, kann man zusätzlich  $\text{Re Per}(\omega) = 0$  erreichen.
- (iii) Endliche Linearkombinationen der Formen  $\sigma, \omega_{k,a}$  und  $\omega_b$  realisieren alle Hauptteilsysteme, deren Residuensummen null sind.
- 13) Beweise folgende geometrische Version von (RR) für  $g \geq 2$ : Sei  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  die kanonische Abbildung. Definiere für jeden positiven Divisor  $D$  den projektiven Unterraum  $\bar{D} \subset \mathbb{P}^{g-1}$  als Durchschnitt aller Hyperebenen  $\Theta$  mit  $(\Theta)_\varphi \geq D$ . Dann ist  $\dim \bar{D} + \dim |D| = \text{gr} D - 1$ .  
*Hinweise.* In 8.4.1 wird  $(\Theta)_\varphi$  definiert. Wenn  $\varphi = (\omega_1 : \dots : \omega_g)$  durch die Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  von  $\mathcal{E}_1(X)$  beschrieben wird, ordnet man jeder Form  $\omega = \sum a_j \omega_j$  die Hyperebene  $\Theta_\omega := N(\sum a_j z_j)$  zu.



## 14. Der Periodentorus

Nach Abels frühem Tod (1829) versuchte Jacobi die erfolgreiche Umkehrung elliptischer Integrale durch doppelt-periodische Funktionen auf Abelsche Integrale auszudehnen. Er entdeckte an Beispielen, daß für das Geschlecht  $g$  die Abelschen Funktionen, d.h. die Umkehrfunktionen Abelscher Integrale  $2g$ -fach periodisch sind und von  $g$  komplexen Variablen abhängen, also modern ausgedrückt einen komplex  $g$ -dimensionalen Torus als Definitionsbereich haben.

Wir beginnen in 14.1 mit der Geschichte einiger Resultate von Euler, Abel und Jacobi, die zur „Entdeckung“ der Periodentori durch Riemann führten. Die systematische Darstellung ab 14.2 folgt nicht dem historischen Ablauf sondern stützt sich von Anfang an auf die Homologie kompakter Flächen. Wir erreichen in 14.3 die wesentlichen Ergebnisse, welche auf Abel und Jacobi zurückgehen. Nach der Einführung holomorpher Strukturen auf den symmetrischen Produkten Riemannscher Flächen werden diese Ergebnisse in 14.4.7 mit dem Satz von Riemann-Roch zu einem Theorem über *Periodenabbildungen* zusammengefaßt.

### 14.1 Vom Additionstheorem zum Periodentorus

Wir stellen einige Resultate in moderner Formulierung vor, die von 1750 an erzielt wurden und wesentliche Impulse für die Entwicklung mathematischer Ideen gaben, welche zum Periodengitter führten, das Riemann (1857) jeder kompakten Fläche zuordnete.

**14.1.1 Das Eulerschen Additionstheorem** von 1753, welches wir in 2.4.1(7) zitierten, lautet qualitativ formuliert:

Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei Wege mit gleichem Anfangspunkt  $P$  in der durch  $w^2 - z^4 + 1$  definierten Riemannschen Fläche  $X$ . Dann gibt es einen dritten Weg  $u$ , der ebenfalls in  $P$  beginnt, so daß

$$(1) \quad \int_{u_1} \omega + \int_{u_2} \omega = \int_u \omega$$

für jede holomorphe Differentialform  $\omega$  gilt.

In dieser Form gilt das Theorem für jede Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g = 1$ . Denn es gibt eine universelle Überlagerung  $\eta: \mathbb{C} \rightarrow X$  mit  $\eta(0) = P$ . Man hebt  $u_1, u_2$  zu Wegen  $v_1, v_2$  in  $\mathbb{C}$  hoch, die in 0 beginnen. Seien  $a_1, a_2$  ihre Endpunkte. Mit jedem Weg  $v$  von 0 nach  $a_1 + a_2$  gilt (1) für  $u := \eta \circ v$  wegen  $\eta^*\omega = cdz$  mit  $c \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**14.1.2 Das Abelsche Additionstheorem.** Abel befaßte sich in seinem Mémoire von 1826, das wir in 7.5.3 erwähnten, mit dem Problem, ein dem Eulerschen entsprechendes Additionstheorem für holomorphe Differentialformen  $\omega = R(z, w)dz$  zu gewinnen, wenn  $z$  und  $w$  durch eine beliebige irreduzible, polynomiale Gleichung  $F(z, w) = 0$  verbunden sind. Er entdeckte, daß man bei beliebig vielen Summanden auf der linken Seite von 14.1.1(1) rechts eine Summe von  $g$  Integralen benötigt, wobei  $g$  nur von  $F$  abhängt. In Riemanns Deutung ist  $g$  das Geschlecht der durch  $F(z, w) = 0$  definierten Fläche  $X$ , und das *Abelsche Additionstheorem* lautet:

Auf einer Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 1$  seien  $n$  Wege  $u_1, \dots, u_n$  gegeben, die im selben Punkt  $P$  beginnen. Dann gibt es  $g$  Wege  $v_1, \dots, v_g$ , die ebenfalls in  $P$  beginnen, mit

$$\sum_{j=1}^n \int_{u_j} \omega = \sum_{k=1}^g \int_{v_k} \omega \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{E}_1(X).$$

*Beweis.* Sei  $Q_j$  der Endpunkt von  $u_j$ . Für  $n \leq g$  ist nichts zu beweisen. Für  $n > g$  folgt aus der Riemannschen Ungleichung

$$l(\sum Q_i - P) \geq n - 1 - g + 1 > 0.$$

Daher gibt es Punkte  $P_1, \dots, P_{n-1}$ , so daß

$$Q_1 - P_1 + \dots + Q_{n-1} - P_{n-1} + Q_n - P$$

ein Hauptdivisor ist. Wir wählen Wege  $v_j$  von  $P$  nach  $P_j$ . Nach der Abelschen Relation 7.5.3 gibt es eine Schleife  $v$  von  $P$  nach  $P$  mit

$$\int_{u_1} \omega - \int_{v_1} \omega + \dots + \int_{u_{n-1}} \omega - \int_{v_{n-1}} \omega + \int_{u_n} \omega = \int_v \omega \quad \text{für } \omega \in \mathcal{E}_1(X).$$

Wenn man  $v_{n-1}$  durch  $v \cdot v_{n-1}$  ersetzt, folgt  $\sum_{j=1}^n \int_{u_j} \omega = \sum_{j=1}^{n-1} \int_{v_j} \omega$  und damit der Induktionsschritt zum Beweis des Additionstheorems.  $\square$

Dieses Theorem, welches Abel 1829 kurz vor seinem Tode auf zwei Seiten zusammengefaßt auch in Crelles Journal veröffentlichte, wurde seinerzeit sehr bewundert und mit dem geflügelten Wort des Dichters Horaz [Ode III, 30] ein „monumentum aere perennius“ genannt, vgl. [Bj], S. 123. Für eine ausführliche Würdigung des Mémoires siehe [Sha 1], S. 416.

**14.1.3 Die Umkehrung Abelscher Integrale.** Jacobi befaßte sich in zwei Abhandlungen [Ja] II, Nr. 2 und 4, die 1832 und 1834/35 in Crelles Journal (Band 9 und 13) erschienen, mit der Umkehrung Abelscher Integrale: Zunächst verwarf er die Umkehrung einzelner Integrale  $\int \omega$  als *absurd*, da die Gruppe  $\text{Per } \omega$   $2g$ -fach periodisch ist und daher für  $g \geq 2$  dicht in  $\mathbb{C}$  liegt, siehe Aufgabe 7.9.8. Durch Abels Resultate angeregt schlug er statt dessen

vor,  $g$ -fache Summen  $\int_a^{z_1} \omega + \dots + \int_a^{z_g} \omega$  zu betrachten und zwar nicht nur für eine, sondern für alle holomorphen Differentialformen  $\omega$  gleichzeitig. Er führte dies für hyperelliptische Gleichungen  $w^2 = p(z)$  mit einem Polynom  $p$  vom Grade 5 oder 6 näher aus. Dann liegt das Geschlecht  $g = 2$  vor. Dementsprechend sind zwei Summen mit je zwei Summanden zu betrachten:

$$\int_a^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} + \int_a^{z_2} \frac{dz}{\sqrt{p(z)}} = u_1 \quad , \quad \int_a^{z_1} \frac{zdz}{\sqrt{p(z)}} + \int_a^{z_2} \frac{zdz}{\sqrt{p(z)}} = u_2 \quad .$$

Die beiden Integranden bilden eine Basis des Vektorraums der holomorphen Differentialformen. Jacobi behauptet, daß die oberen Grenzen  $z_1$  und  $z_2$  (genauer ihre symmetrischen Funktionen wie  $z_1 + z_2, z_1 z_2$ ) vierfach periodische Funktionen der beiden Variablen  $u_1, u_2$  seien. Er gibt an, wie man die Perioden aus den Nullstellen von  $p(z)$  berechnet und schlägt vor, die Umkehrfunktionen, welche er Abelsche Transzendenten nennt, durch *Thetareihen* in  $u_1, u_2$  darzustellen, siehe dazu das 15. Kapitel.

**14.1.4 Abelsche Funktionen.** Jacobis Ideen wurden von seinen Schülern in Spezialfällen genauer ausgeführt. Aber erst nach 25 Jahren gelang es Riemann, mit der Abhandlung [Ri3] eine allgemeine Theorie Abelscher Funktionen (so wurden mittlerweile die Abelschen Transzendenten genannt) zu entwickeln. Als Grundlage wählt er bei einer Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  aller holomorphen Differentialformen und bildet die  $g$ -Tupel  $(\int_u \omega_1, \dots, \int_u \omega_g) \in \mathbb{C}^g$  für gemeinsame Integrationswege  $u$ . Anders als  $\text{Per } \omega < \mathbb{C}$  liegt

$$\Gamma := \left\{ \left( \int_u \omega_1, \dots, \int_u \omega_g \right) : u \text{ Schleife in } X \right\} \subset \mathbb{C}^g$$

niemals dicht, sondern ist ein Gitter vom Rang  $2g$ , welches das Periodengitter elliptischer Integrale ( $g = 1$ ) verallgemeinert. Eine Basis von  $\Gamma$  beschreibt Riemann, indem er  $u$  die  $2g$  Rückkehrschnitte einer kanonischen Zerschneidung von  $X$  durchlaufen läßt. Zu  $X$  gehören als Abelsche Funktionen die  $\Gamma$ -periodischen meromorphen Funktionen auf  $\mathbb{C}^g$ .

Das Rechnen modulo  $\Gamma$  ersetzen wir durch die Bildung der Faktorgruppe  $\mathbb{C}^g/\Gamma$ , die mit der von  $\mathbb{C}^g$  induzierten topologischen und holomorphen Struktur zu einer kompakten Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension  $g$  wird. Sie ist zum  $2g$ -fachen Produkt  $S^1 \times \dots \times S^1$  der Kreislinie homöomorph, vergleiche 4.4.6, und wird zur Erinnerung an Jacobis Verdienste *Jacobischer Periodentorus*  $J(X)$  der Fläche  $X$  genannt.

## 14.2 Perioden. Abelsches Theorem

Im folgenden wird die Abelsche Relation 7.5.3 im umfassenderen Abelschen Theorem (14.2.4) aufgehen, das ein notwendiges und *hinreichendes* Integralkriterium für die lineare Äquivalenz von Divisoren angibt. – Mit  $X$  wird eine kompakte, zusammenhängende Fläche vom Geschlecht  $g \geq 1$  bezeichnet.

**14.2.1 Das Periodengitter.** Die Integrationspaarung

$$(1) \quad H_1(X) \times \mathcal{E}_1(X) \rightarrow \mathbb{C}, (a, \omega) \mapsto \langle a, \omega \rangle := \int_a \omega$$

von 7.7.3 bestimmt den additiven Homomorphismus

$$(2) \quad \iota : H_1(X) \rightarrow \mathcal{E}_1(X)^*, \iota(a) := \langle a, - \rangle,$$

in den zu  $\mathcal{E}_1(X)$  dualen Vektorraum.

**Satz.** *Durch  $\iota$  wird  $H_1(X)$  als Gitter vom Rang  $2g$  in  $\mathcal{E}_1(X)^*$  eingebettet.*

*Beweis.* Alle additiven Homomorphismen  $H_1(X) \rightarrow \mathbb{R}$  bilden einen Vektorraum  $H^1(X, \mathbb{R})$ , der nach der ersten Folgerung in 13.1.5 dieselbe reelle Dimension  $2g$  wie  $\mathcal{E}_1(X)$  hat. Wegen der Folgerung in 10.1.2 ist  $\mathcal{E}_1(X) \rightarrow H^1(X, \mathbb{R}), \omega \mapsto \text{Im} \langle -, \omega \rangle$ , monomorph also isomorph. Daher läßt sich für jedes  $c \in \mathcal{E}_1(X)^*$  der Imaginärteil  $\text{Im} c$  in eindeutiger Weise als reelle Linearkombination der Elemente  $\text{Im} \langle a_1, - \rangle, \dots, \text{Im} \langle a_{2g}, - \rangle$  für eine Basis  $a_1, \dots, a_{2g}$  von  $H_1(X)$  darstellen. Folglich ist  $\langle a_1, - \rangle, \dots, \langle a_{2g}, - \rangle$  eine reelle Basis von  $\mathcal{E}_1(X)^*$ .  $\square$

**14.2.2 Die Periodenabbildung.** Sei  $\eta : Z \rightarrow X$  die Uniformisierung mit  $Z = \mathbb{C}$  für  $g = 1$  und  $Z = \mathbb{H}$  für  $g \geq 2$ . Sei  $Q_0 \in Z$  ein Basispunkt. Zu jedem  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  gehört genau eine Stammfunktion  $h_\omega \in \mathcal{O}(Z)$  von  $\eta^* \omega$  mit dem Wert  $h_\omega(Q_0) = 0$ . Wir definieren

$$(1) \quad h : Z \rightarrow \mathcal{E}_1(X)^* \quad \text{durch} \quad h(z)(\omega) := h_\omega(z).$$

Für jeden Weg  $v$  in  $Z$  von  $z_1$  nach  $z_2$  gilt

$$(2) \quad (h(z_2) - h(z_1))(\omega) = \int_v \eta^* \omega = \int_{\eta \circ v} \omega.$$

Insbesondere hängt die Differenz  $h(z_2) - h(z_1)$  nicht von der Wahl des Basispunktes  $Q_0$  ab. Wenn  $z_1$  und  $z_2$  in derselben  $\eta$ -Faser liegen, ist  $u := \eta \circ v$  eine Schleife, und aus (2) folgt

$$(3) \quad h(z_2) - h(z_1) = \text{kl } u \in H_1(X) \subset \mathcal{E}_1(X)^*.$$

Wir benutzen  $P_0 = \eta(Q_0)$  als Basispunkt in  $X$  und identifizieren die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta) = \pi(X, P_0)$  mit der Fundamentalgruppe, siehe 3.6.3. Dadurch wird  $H_1(X) = \mathcal{AD}(\eta)$  zur abelsch gemachten Deckgruppe, und (3) bedeutet

$$(4) \quad h \circ \gamma = \mathcal{A}(\gamma) + h \quad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{D}(\eta).$$

Wir bilden den Restklassen-Epimorphismus

$$(5) \quad p : \mathcal{E}_1(X)^* \rightarrow J(X) := \mathcal{E}_1(X)^* / H_1(X).$$

Zunächst interessiert der *Periodentorus*  $J(X)$  nur als abelsche Gruppe. In 14.3 werden wir uns mit seiner topologischen und holomorphen Struktur beschäftigen. Wegen (3) induziert  $h$  eine Abbildung  $\mu$ , die folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & \mathcal{E}_1(X)^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\mu} & J(X). \end{array}$$

Da  $J(X)$  eine abelsche Gruppe ist, läßt sich die *Periodenabbildung*  $\mu$  zu einem Homomorphismus

$$\mu : \operatorname{Div}(X) \rightarrow J(X), \mu(D) := \sum_{x \in X} D(x) \mu(x),$$

der Divisorengruppe  $\operatorname{Div}(X)$  fortsetzen. Er hängt bis auf die Addition eines konstanten Elementes  $c \in J(X)$  nicht von der Wahl des Basispunktes ab:  $(\mu + c)(D) = \mu(D) + \operatorname{gr} D \cdot c$ . Auf der Untergruppe  $\operatorname{Div}_0(X)$  der Divisoren vom Grade Null ist  $\mu$  eindeutig bestimmt.

Alle Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe  $\operatorname{Div}_H(X) < \operatorname{Div}_0(X)$ . Die Abelsche Relation 7.5.3 läßt sich in der Formel  $\mu(\operatorname{Div}_H(X)) = 0$  zusammenfassen. Tatsächlich werden die Hauptdivisoren  $D$  durch  $\operatorname{gr} D = 0$  und  $\mu(D) = 0$  charakterisiert. Wir benötigen zum Beweis:

**14.2.3 Die exakte Periodensequenz.** Wir wählen eine kanonische Zerschneidung der Fläche  $X$  mit den Rückkehrschnitten  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  gemäß 12.4.1 und 12.3.1. Ihre Homologieklassen, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen, bilden eine Basis des Gitters  $H_1(X) < \mathcal{E}_1(X)^*$ .

**Lemma.** *Folgende Sequenz  $\mathbb{C}$ -linearer Abbildungen ist exakt:*

- (1)  $0 \rightarrow \mathcal{E}_1(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}^{2g} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{E}_1(X)^* \rightarrow 0 \quad \text{mit}$
- (2)  $\varepsilon(\omega) := (\langle a_1, \omega \rangle, \langle b_1, \omega \rangle, \dots, \langle a_g, \omega \rangle, \langle b_g, \omega \rangle) \text{ und}$
- (3)  $\kappa(z_1, w_1, \dots, z_g, w_g) := \sum_{j=1}^g (w_j a_j - z_j b_j).$

*Beweis.* Wegen  $\dim \mathcal{E}_1(X) = \dim \mathcal{E}_1(X)^* = g$  genügt es zu zeigen, daß  $\varepsilon$  monomorph und  $\kappa$  epimorph ist, sowie  $\kappa \circ \varepsilon = 0$  gilt. Aus  $\varepsilon(\omega) = 0$  folgt  $\omega = 0$ , siehe Satz 7.7.4. Nach Satz 14.2.1 bilden die Elemente  $a_1, \dots, b_g$  eine reelle Basis von  $\mathcal{E}_1(X)^*$ . Daher ist  $\kappa$  surjektiv. Die letzte Behauptung  $\kappa \circ \varepsilon = 0$  ist die Periodenrelation 12.5.4(2).  $\square$

**14.2.4 Abelsches Theorem.** *Die Gruppe  $\operatorname{Div}_H(X)$  aller Hauptdivisoren ist der Kern des Periodenhomomorphismus  $\mu : \operatorname{Div}_0(X) \rightarrow J(X)$ .*

Wie Weyl [Wyl 1], S. 126, Fußnote, bemerkt, steht dieses Ergebnis in [Ri 3] „zwischen den Zeilen“ und wurde explizit (aber ohne zureichenden Beweis) durch Clebsch in [Cle], S. 198, ausgesprochen. Obwohl Abel nur  $\operatorname{Div}_H(X) < \operatorname{Kern} \mu$  bewies, folgen wir Weyls Vorschlag und benennen das ganze Theorem nach Abel.

*Beweis.* Sei  $D \in \operatorname{Div}_0(X)$ . Nach 13.6.5 gibt es eine Form  $\varphi \in \mathcal{E}_3(X)$  mit den Residuen  $\operatorname{res}(\varphi, x) = D(x)$  für  $x \in X$ . Sie ist durch  $D$  bis auf die Addition einer Form  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  eindeutig bestimmt. Genau dann, wenn  $D = (f)$  ein Hauptdivisor ist, kann man  $\varphi = df/f$  als logarithmische Ableitung wählen. Nach 7.8.3(4) ist letzteres genau dann der Fall, wenn alle Perioden von  $\varphi$  ganzzahlige Vielfache von  $2\pi i$  sind. Somit reduziert sich das Abelsche Theorem auf die Aussage:

- (\*) *Genau dann wenn  $\mu(D) = 0$  ist, gibt es ein  $\varphi$  mit  $\operatorname{res}(\varphi, -) = D(-)$  und  $\operatorname{Per}(\varphi) < 2\pi i\mathbb{Z}$ .*

Zum Beweis von (\*) benutzen wir eine kanonische Zerschneidung, deren Rückkehrschnitte  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$  den Träger von  $D$  nicht treffen, siehe 12.5.1. Aus 14.2.2 folgt  $\mu(D) = p(c)$ , wobei  $c \in \mathcal{E}_1(X)^*$  dadurch bestimmt ist, daß

$$(1) \quad c(\omega) = \sum_{z \in \Delta} D(\eta(z)) \cdot h_\omega(z) \text{ für } \omega \in \mathcal{E}_1(X)$$

gilt. Summiert wird über alle Punkte eines kanonischen Polygons  $\Delta \subset Z$  der Zerschneidung, vergleiche 12.5.2. Nach der Periodenrelation 12.5.4(1) gilt

$$(2) \quad 2\pi i c(\omega) = \sum_{j=1}^g (\langle a_j, \omega \rangle \langle b_j, \varphi \rangle - \langle a_j, \varphi \rangle \langle b_j, \omega \rangle) \text{ für } \omega \in \mathcal{E}_1(X).$$

Wenn alle Perioden  $\langle a_j, \varphi \rangle$  und  $\langle b_j, \varphi \rangle$  in  $2\pi i\mathbb{Z}$  liegen, ist  $c$  die entsprechende ganzzahlige Linearkombination von  $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ , also  $c \in H_1(X)$  und damit  $\mu(D) = p(c) = 0$ . Damit ist die Abelsche Relation 7.5.3 erneut bewiesen. – Wenn umgekehrt  $\mu(D) = 0$  vorausgesetzt wird, ist  $c \in H_1(X)$ , also  $c = \sum (\beta_j a_j - \alpha_j b_j)$  mit  $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{Z}$ . Aus (2) folgt

$$(3) \quad \sum_{j=1}^g ((2\pi i \beta_j - \langle b_j, \varphi \rangle) a_j - (2\pi i \alpha_j - \langle a_j, \varphi \rangle) b_j) = 0.$$

Wegen der exakten Sequenz 14.2.3(1) liegt der Vektor

$$(2\pi i \alpha_1 - \langle a_1, \varphi \rangle, 2\pi i \beta_1 - \langle b_1, \varphi \rangle, \dots, 2\pi i \alpha_g - \langle a_g, \varphi \rangle, 2\pi i \beta_g - \langle b_g, \varphi \rangle) \in \mathbb{C}^{2g}$$

im Kern von  $\kappa$  und somit im Bild von  $\varepsilon$ . Es gibt ein  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  mit  $\langle a_j, \varphi + \omega \rangle = 2\pi i \alpha_j$  und  $\langle b_j, \varphi + \omega \rangle = 2\pi i \beta_j$ . Damit ist  $\text{Per}(\varphi + \omega) < 2\pi i\mathbb{Z}$  erreicht. Weil wir  $\varphi$  durch  $\varphi + \omega$  ersetzen dürfen, ist (\*) bewiesen.  $\square$

**14.2.5 Linearscharen.** Sei  $X_n \subset \text{Div}(X)$  die Menge aller positiven Divisoren vom Grade  $n \geq 1$ , vgl. 8.1.4. Sei  $\mu_n : X_n \rightarrow J(X)$  die Einschränkung des Periodenhomomorphismus  $\mu : \text{Div}(X) \rightarrow J(X)$ .

**Satz.** Die Faser von  $\mu_n$ , welche den Divisor  $D$  enthält, ist die vollständige Linearschar  $|D|$ . Die Periodenabbildung  $\mu : X \rightarrow J(X)$  ist injektiv.

Denn für jedes  $C \in X_n$  gilt  $\mu_n(C) = \mu_n(D)$  genau dann, wenn  $C - D$  ein Hauptdivisor ist (Abelsches Theorem), also  $C \in |D|$  ist. Für  $n = 1$  folgt  $C = D$ , weil sonst  $X \approx \widehat{\mathbb{C}}$  wäre.  $\square$

## 14.3 Analytische Eigenschaften der Periodenabbildung

Um die Surjektivität des Periodenhomomorphismus  $\mu : \text{Div}(X) \rightarrow J(X)$  zu beweisen, wird die topologische und analytische Struktur des *Periodentorus*  $J(X)$  benötigt. – Wie bisher bezeichnet  $X$  eine kompakte zusammenhängende Fläche vom Geschlecht  $g \geq 1$ .

**14.3.1 Der Periodentorus als Mannigfaltigkeit.** Durch die Wahl einer Basis  $\omega_1, \dots, \omega_g$  von  $\mathcal{E}_1(X)$  werden die  $\mathbb{C}$ -Vektorräume identifiziert:

$$(1) \quad \mathcal{E}_1(X)^* \cong \mathbb{C}^g, c \mapsto (c(\omega_1), \dots, c(\omega_g)).$$

Das Bild von  $H_1(X)$  in  $\mathcal{E}_1(X)^*$  ist das Gitter

$$(2) \quad \Gamma := \{(\langle a, \omega_1 \rangle, \dots, \langle a, \omega_g \rangle) : a \in H_1(X)\} < \mathbb{C}^g.$$

Wir verstehen die Faktorgruppe  $\mathbb{C}^g/\Gamma$  mit der Quotiententopologie und der holomorphen Quotientenstruktur bezüglich der Restklassen-Projektion  $p : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^g/\Gamma$ . Da das Gitter  $\Gamma$  den maximalen Rang  $2g$  hat (Satz 14.2.1), ist  $\mathbb{C}^g/\Gamma$  ein Torus der komplexen Dimension  $g$ , siehe 4.4.6, und



$p$  wird zu einer unverzweigten, universellen holomorphen Überlagerung mit der Deckgruppe  $\mathcal{D}(p) = \Gamma \cong H_1(X)$ .

Mit dem durch (1)-(2) induzierten Gruppenisomorphismus  $J(X) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$  wird die topologische und holomorphe Struktur von  $\mathbb{C}^g/\Gamma$  auf den *Periodentorus*  $J(X)$  übertragen. Die Übertragung hängt nicht von der Basiswahl  $\omega_1, \dots, \omega_g$  ab, da ein Basiswechsel sich nur als Vektorraum-Automorphismus von  $\mathbb{C}^g$  auswirkt.

Das kommutative Diagramm in 14.2.2 wird zu

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^g \\ \eta \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\mu} & J(X). \end{array}$$

Dabei sind  $\eta$  und  $p$  universelle Überlagerungen, und  $p$  ist außerdem ein Homomorphismus der additiven Gruppen mit dem Kern  $\Gamma$ . Die Komponenten von  $h = (h_1, \dots, h_g)$  sind die Stammfunktionen von  $\eta^*\omega_j$ , welche im Basispunkt  $Q_0 \in Z$  den Wert Null haben. Insbesondere ist  $h$  und damit die Periodenabbildung  $\mu$  holomorph. Da  $\eta$  und  $p$  lokal biholomorph sind, hat  $\mu$  an jeder Stelle  $\eta(z)$  denselben Rang wie  $h$  an der Stelle  $z$ .

**Satz.** *Die Periodenabbildung  $\mu : X \rightarrow J(X)$  ist eine holomorphe Einbettung und daher für  $g = 1$  ein Isomorphismus.*

*Beweis.* Wegen 14.2.5 muß nur gezeigt werden, daß  $h$  überall den Rang 1 hat: Nach 13.2.1(2) hat an jeder Stelle  $z \in Z$  mindestens eine Differentialform  $\eta^*\omega_j$  keine Nullstelle. Dann hat die Komponente  $h_j$  dort den Rang 1.  $\square$

*Insbesondere folgt erneut und zwar unabhängig von früheren Beweisen, daß jede Fläche vom Geschlecht 1 zu einem Torus isomorph ist.*

**14.3.2 Der Rang der Periodenabbildung.** Um den letzten Satz auf Divisoren zu verallgemeinern, betrachten wir das  $n$ -fache kartesische Produkt  $X^n = X \times \dots \times X$  und die Summe der Periodenabbildungen

$$\mu^n : X^n \rightarrow J(X), \quad \mu^n(x_1, \dots, x_n) = \mu(x_1) + \dots + \mu(x_n).$$

**Ranglemma.** *Wenn die Punkte  $P_1, \dots, P_n \in X$  paarweise verschieden sind, hat  $\mu^n$  an der Stelle  $(P_1, \dots, P_n) \in X^n$  den Rang  $g - i(D) = 1 + n - l(D)$ , wobei  $D := P_1 + \dots + P_n$  die Summe der Punktdivisoren ist.*

Die Voraussetzung „paarweise verschieden“ kann entfallen, siehe 14.4.6.

*Beweis.* Da die Punkte  $P_j$  paarweise verschieden sind, gehört  $\omega \in \mathcal{E}_1(X)$  genau dann zum Untervektorraum  $\mathcal{L}^1(-D)$ , wenn  $P_1, \dots, P_n$  Nullstellen von  $\omega$  sind. Sei  $r = i(D) = \dim \mathcal{L}^1(-D)$ . Wir wählen eine Basis  $\omega_1, \dots, \omega_r$  von  $\mathcal{L}^1(-D) \subset \mathcal{E}_1(X)$ , ergänzen sie durch  $\omega_{r+1}, \dots, \omega_g$  zu einer Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$  und benutzen letztere, um  $\mathcal{E}_1(X)^*$  mit  $\mathbb{C}^g$  zu identifizieren. Die Abbildung  $h : Z \rightarrow \mathbb{C}^g$  des Diagramms in 14.3.1 hat die Komponenten  $h = (h_1, \dots, h_g)$  mit den Ableitungen  $\eta^*\omega_j = dh_j = h'_j dz$  bezüglich der Koordinate  $z$  auf  $Z = \mathbb{H}$  oder  $= \mathbb{C}$ . Die Summenabbildung

$$Z^n \rightarrow \mathbb{C}^g, (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\sum_j h_1(z_j), \dots, \sum_j h_g(z_j)),$$

hat die Funktionalmatrix

$$M := \begin{pmatrix} h'_1(z_1) & \cdots & h'_1(z_n) \\ \vdots & & \vdots \\ h'_g(z_1) & \cdots & h'_g(z_n) \end{pmatrix}.$$

Sei  $\eta(Q_j) = P_j$  für  $j = 1, \dots, n$ . Dann hat  $\mu^n$  an der Stelle  $(P_1, \dots, P_n)$  denselben Rang wie die Matrix  $M$  bei  $Q := (Q_1, \dots, Q_n)$ . Wir bestimmen ihn folgendermaßen: Wegen  $\omega_1, \dots, \omega_r \in \mathcal{L}^1(-D)$  bestehen die ersten  $r$  Zeilen aus Nullen. Die übrigen Zeilen sind linear unabhängig. Denn wenn eine Linearkombination dieser Zeilen die Nullzeile ergibt, ist die entsprechende Linearkombination von  $\omega_{r+1}, \dots, \omega_g$  eine Differentialform mit den Nullstellen  $P_1, \dots, P_n$  und gehört also zu  $\mathcal{L}^1(-D)$ . Wegen der Basisergänzung müssen alle Koeffizienten der Linearkombination  $= 0$  sein. Somit hat  $M$  bei  $Q$  den Rang  $g - r$ . Aus (RR) folgt  $g - i(D) = 1 + n - l(D)$ .  $\square$

**14.3.3 Surjektivität.** *Der Periodenhomomorphismus  $\mu: \text{Div}_0(X) \rightarrow J(X)$  und die Periodenabbildungen  $\mu_n: X_n \rightarrow J(X)$  für  $n \geq g$  sind surjektiv.*

*Beweis.* Alle  $g$ -Tupel  $(P_1, \dots, P_g)$  paarweise verschiedener Punkte  $P_j \in X$ , deren Divisoren  $D = P_1 + \dots + P_g$  allgemein sind, bilden nach Satz 13.6.2 eine offene, nicht-leere (sogar dichte) Teilmenge  $U \subset X^g$ . Wegen  $i(D) = 0$  folgt mit dem Ranglemma, daß  $\mu^g|_U$  überall den maximalen Rang  $g$  hat und daher lokal biholomorph ist. Insbesondere ist  $\mu^g(U) \subset J(X)$  offen und nicht-leer. Aus  $J(X) \cong \mathbb{C}^g/\Gamma$  folgt: Jedes  $w \in J(X)$  läßt sich als  $w = q(v_1 - v_0)$  mit  $q \in \mathbb{N}$  und  $v_0, v_1 \in \mu^g(U)$  darstellen. Es gibt also positive Divisoren  $D_0, D_1$  vom Grade  $g$ , so daß  $w = \mu(qD_1 - qD_0) \in \mu(\text{Div}_0(X))$  liegt.

Zur Surjektivität von  $\mu_n$ : Wegen  $\mu(P_0) = 0$  für den Basispunkt  $P_0$  genügt es, zu jedem  $D \in \text{Div}_0(X)$  eine Funktion  $f \neq 0$  zu finden, so daß  $D + nP_0 + (f) \geq 0$  ist. Wegen (RR) und  $n \geq g$  ist  $l(D + nP_0) \geq n - g + 1 \geq 1$ . Daher enthält  $\mathcal{L}(D + nP_0)$  Funktionen  $f \neq 0$ .  $\square$

Die Periodenabbildung  $\mu_g: X_g \rightarrow J(X)$  ist für keine Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 2$  injektiv. Denn für jeden Weierstraß-Punkt  $P$  ist die Faser  $|gP| \subset X_g$  von  $\mu_g$  ein projektiver Raum der Dimension  $l(gP) - 1 \geq 1$ .

Für  $g = 2$  läßt sich die Gestalt von  $\mu_2: X_2 \rightarrow J(X)$  einfach überblicken: In  $X_2$  liegt als Faser von  $\mu_2$  die zu  $\widehat{\mathbb{C}}$  isomorphe kanonische Schar  $\mathcal{K}$ . Alle anderen Fasern sind einpunktig. Das symmetrische Produkt  $X_2$  entsteht also aus dem Torus  $J(X)$ , indem man einen Punkt zur Zahlenkugel „aufbläst“.

Ein entsprechendes Ergebnis gilt für alle  $g$ , siehe 15.3.7.

**14.3.4 Die Picardsche Gruppe** der Fläche  $X$  ist die Faktorgruppe  $\text{Div}_0(X)/\text{Div}_H(X)$ . Das Abelsche Theorem 14.2.4 läßt sich mit der Surjektivität  $\mu(\text{Div}_0(X)) = J(X)$  gemäß 14.3.3 zusammenfassen:

**Theorem von Abel-Jacobi.** *Die Periodenabbildung induziert einen Isomorphismus  $\text{Div}_0(X)/\text{Div}_H(X) \rightarrow J(X)$  der abelschen Gruppen.*  $\square$

## 14.4 Symmetrische Produkte

Wir definieren *Cotangentialräume* komplexer Mannigfaltigkeiten und Cotangentialhomomorphismen, um sie zur Untersuchung der Periodenabbildung  $\mu_n : X_n \rightarrow J(X)$  einzusetzen, nachdem das *symmetrische Produkt*  $X_n$  der kompakten, zusammenhängenden Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 1$  mit der Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit versehen wurde.

**14.4.1 Cotangentialräume und -homomorphismen.** Sei  $a$  ein Punkt der  $n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $M$ . Wir nennen zwei Differentialformen  $\omega$  und  $\omega'$ , die in Umgebungen von  $a$  definiert und holomorph sind,  $a$ -äquivalent, wenn  $\omega - \omega'$  bei  $a$  eine Nullstelle hat. Die Äquivalenzklassen  $[\omega]_a$  bilden einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $T_a^*M$ , welcher *Cotangentialraum* von  $M$  bei  $a$  heißt. Er ist  $n$ -dimensional. Denn für jede Karte  $z = (z_1, \dots, z_n)$  bei  $a$  ist  $\{[dz_1]_a, \dots, [dz_n]_a\}$  eine Basis von  $T_a^*M$ .

Jede holomorphe Abbildung  $f : (M, a) \rightarrow (N, b)$  zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten bestimmt die lineare *Cotangentialabbildung*

$$T_a^*f : T_b^*N \rightarrow T_a^*M, [\omega]_b \mapsto [f^*\omega]_a.$$

Ihr Rang  $\text{rg}(f, a)$  heißt *Rang* von  $f$  bei  $a$ .

(1) Für  $(M, a) \xrightarrow{f} (N, b) \xrightarrow{g} (L, c)$  gilt  $T_a^*(g \circ f) = T_a^*f \circ T_b^*g$ . □

**Beispiel.** Sei  $\Gamma < V$  ein Gitter maximalen Ranges im  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  mit der Restklassenprojektion  $p : V \rightarrow V/\Gamma$  auf den Torus. Jede lineare Funktion  $u \in V^*$  hat die  $\Gamma$ -invariante Ableitung  $du$ . Daher gibt es genau eine holomorphe Form  $\varphi_u$  auf  $V/\Gamma$  mit  $du = p^*\varphi_u$ . Mit ihr definiert man für jeden Punkt  $a \in V/\Gamma$  den *kanonischen Isomorphismus*

$$(2) \quad V^* \cong T_a^*(V/\Gamma), u \mapsto [\varphi_u]_a.$$

Nun sei  $V := \mathcal{E}_1(X)^*$  und  $\Gamma := H_1(X)$ . Wir fassen jede Form  $\omega \in \mathcal{E}_1(X) = \mathcal{E}_1(X)^{**}$  als lineare Funktion auf und erhalten wegen  $J(X) = \mathcal{E}_1(X)^*/H_1(X)$  für  $a \in J(X)$  den kanonischen Isomorphismus

$$(3) \quad \mathcal{E}_1(X) \cong T_a^*J(X), \omega \mapsto [\varphi_\omega]_a.$$

(4) Für die Periodenabbildung  $\mu : X \rightarrow J(X)$  gilt  $\mu^*\varphi_\omega = \omega$ .

Denn  $\eta^*\mu^*\varphi_\omega = h^*p^*\varphi_\omega = d(\omega \circ h) = \eta^*\omega$ . Wegen der Injektivität von  $\eta^*$ , siehe 7.1.6(2), folgt (4). □

**14.4.2 Symmetrische Funktionen.** Die symmetrische Gruppe  $\mathcal{S}_n$  operiert auf  $\mathbb{C}^n$  durch Permutation der Koordinaten. Die elementarsymmetrischen Polynome  $\sigma_j(z_1, \dots, z_n)$  werden bekanntlich durch die Identität

(1)  $(x - z_1)(x - z_2) \cdots (x - z_n) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n \sigma_n$  definiert. Mit den garbentheoretischen Begriffen aus 4.4 gilt der

**Satz.** Die Polynome  $\sigma_j$  sind die Komponenten der  $\mathcal{S}_n$ -Orbitprojektion

$$(2) \quad \sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n.$$

Die Bildgarbe  $\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}^n$  ist die holomorphe Strukturgarbe auf  $\mathbb{C}^n$ .

*Beweis.* Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, daß  $\sigma$  surjektiv ist und die  $\sigma$ -Fasern die Orbits der  $\mathcal{S}_n$ -Operation sind. Wegen der Folgerung in 1.2.3 ist  $\sigma$  offen, also eine topologische  $\mathcal{S}_n$ -Orbitprojektion.

Aus der Holomorphie von  $\sigma$  folgt  $\mathcal{O}^n \subset \mathcal{O}_\sigma$ . Zum Beweis der Inklusion  $\mathcal{O}_\sigma \subset \mathcal{O}^n$  betrachten wir die Diskriminante  $\Delta(w)$  des Polynoms  $x^n - w_1x^{n-1} + w_2x^{n-2} - \dots + (-1)^nw_n$ . Sie wird durch  $\Delta \circ \sigma(z) := D(z) := \prod_{1 \leq j < k \leq n} (z_j - z_k)^2$  definiert. Die Beschränkung

$$\sigma : Z := \{z \in \mathbb{C}^n : D(z) \neq 0\} \rightarrow \{w \in \mathbb{C}^n : \Delta(w) \neq 0\} =: W$$

ist wohldefiniert und nach der Folgerung in 1.2.3 lokal biholomorph. Daher gilt  $\mathcal{O}_{\sigma|Z} \subset \mathcal{O}_W$ . Daraus folgt  $\mathcal{O}_\sigma \subset \mathcal{O}^n$ . Denn nach dem Hebbarkeitssatz der Funktionentheorie mehrerer Variabler ist jede auf einer offenen Menge  $V \subset \mathbb{C}^n$  stetige Funktion auf ganz  $V$  holomorph, sobald sie außerhalb der Nullstellenmenge von  $\Delta$  holomorph ist.  $\square$

**Folgerung.** Es gibt eine offene Menge  $V \subset \mathbb{C}^n$ , so daß die Beschränkung von  $\sigma$  auf  $\mathbb{E}^n := \mathbb{E} \times \dots \times \mathbb{E}$  eine  $\mathcal{S}_n$ -Orbitprojektion  $\sigma : \mathbb{E}^n \rightarrow V$  ist, deren Bildgarbe  $\mathcal{O}_\sigma = \mathcal{O}_V$  die holomorphe Strukturgabe ist.  $\square$

**14.4.3 Die holomorphe Struktur symmetrischer Produkte.** Die in 8.1.4 definierte Abbildung  $p : X^n \rightarrow X_n, (P_1, \dots, P_n) \mapsto P_1 + \dots + P_n$ , des  $n$ -fachen kartesischen Produktes der Fläche  $X$  auf ihr  $n$ -faches symmetrisches Produkt ist die Orbitprojektion zur Operation der symmetrischen Gruppe  $\mathcal{S}_n$  durch Vertauschung der  $n$  Faktoren. Nach Satz 4.3.1 ist  $X_n$ , versehen mit der Quotiententopologie, ein Hausdorff-Raum.

**Satz.** Das symmetrische Produkt  $(X_n, \mathcal{O}_p)$  mit der Bildgarbe  $\mathcal{O}_p$  der Orbitprojektion ist eine  $n$ -dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit.

*Beweis.* Wir benutzen Satz 4.4.4. Um dessen Voraussetzung zu erfüllen, geben wir zu jedem  $D \in X_n$  ein  $R \in p^{-1}(D)$ , eine privilegierte Umgebung  $U$  von  $R$  in  $X^n$  und eine  $(\mathcal{S}_n)_R$ -Orbitprojektion  $\varphi : U \rightarrow V$  auf eine offene Menge  $V \subset \mathbb{C}^n$  an, so daß die Bildgarbe  $\mathcal{O}_\varphi$  die Strukturgabe  $\mathcal{O}_V$  ist: Der Divisor  $D = n_1Q_1 + \dots + n_rQ_r$  ist eine Linearkombination von paarweise verschiedenen Punkten  $Q_j \in X$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $n_j > 0$ , wobei  $n = n_1 + \dots + n_r$ . Wir wählen holomorphe Karten

$$(1) \quad z_j : (U_j, Q_j) \rightarrow (\mathbb{E}, 0) \quad \text{mit} \quad U_j \cap U_k = \emptyset \quad \text{für} \quad j \neq k$$

und  $R := (Q_1, \dots, Q_1; \dots; Q_r, \dots, Q_r)$ , wobei  $Q_j$   $n_j$ -mal auftritt. Die Standgruppe  $(\mathcal{S}_n)_R = \mathcal{S}_{n_1} \times \dots \times \mathcal{S}_{n_r}$  besteht aus den Permutationen, die jeden Faktor  $X^{n_j}$  von  $X^n = X^{n_1} \times \dots \times X^{n_r}$  in sich transformieren. Die Umgebung  $U_1^{n_1} \times \dots \times U_r^{n_r}$  von  $R$  ist privilegiert. Nach der Folgerung in 14.4.2 gibt es eine offene Menge  $V_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$  und eine  $\mathcal{S}_{n_j}$ -Orbitprojektion  $s_j : \mathbb{E}^{n_j} \rightarrow V_j$  mit  $\mathcal{O}_{s_j} = \mathcal{O}_{V_j}$ . Das  $n_j$ -fache kartesische Produkt der Karte  $z_j$  ist ein Isomorphismus  $w_j : U^{n_j} \rightarrow \mathbb{E}^{n_j}$ . Durch Hintereinanderschalten entsteht die  $\mathcal{S}_{n_j}$ -Orbitprojektion  $\varphi_j := s_j \circ w_j : U^{n_j} \rightarrow \mathbb{E}^{n_j} \rightarrow V_j$  mit  $\mathcal{O}_{\varphi_j} = \mathcal{O}_{V_j}$ . Das Produkt  $\varphi := \varphi_1 \times \dots \times \varphi_r : U := U^{n_1} \times \dots \times U^{n_r} \rightarrow V_1 \times \dots \times V_r =: V$  ist die gesuchte Projektion.  $\square$

**14.4.4 Potenzsummen-Koordinaten.** Für manche Anwendungen sind die *Potenzsummen*  $\pi_k(z_1, \dots, z_n) := z_1^k + \dots + z_n^k$  besser geeignet als die elementarsymmetrischen Polynome  $\sigma_k$ . Um  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  durch

$$(1) \quad \pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

als  $\mathcal{S}_n$ -Orbitprojektion zu ersetzen, benutzen wir das

**Lemma.** *Es gibt zueinander inverse polynomiale Abbildungen*

$$\Phi, \Psi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \quad \text{mit} \quad \pi = \Phi \circ \sigma \quad \text{und} \quad \sigma = \Psi \circ \pi.$$

*Beweis.* Sei  $\sigma_0 := 1$  und  $\sigma_j := 0$  für  $j < 0$  und  $j > n$ . Durch Induktion über  $n$  folgt für  $r \geq 1$

$$(2) \quad \pi_r - \pi_{r-1}\sigma_1 + \pi_{r-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^{r-1}\pi_1\sigma_{r-1} + (-1)^r r \sigma_r = 0.$$

Für den Induktionsschritt benutzt man die Formel  $\sigma_j(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}) = \sigma_j(z_1, \dots, z_n) + z_{n+1}\sigma_{j-1}(z_1, \dots, z_n)$ , die sich aus 14.4.2(1) durch Multiplikation mit  $x - z_{n+1}$  ergibt. Aus (2) gewinnt man durch Induktion über  $r$  Polynome  $\varphi_r(z_1, \dots, z_r)$  und  $\psi_r(w_1, \dots, w_r)$ , so daß  $\pi_r = \varphi_r(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$  und  $\sigma_r = \psi_r(\pi_1, \dots, \pi_r)$  gelten. Sie sind die Komponenten der Abbildungen  $\Phi := (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  und  $\Psi := (\psi_1, \dots, \psi_n)$ .  $\square$

Sei  $D = n_1 Q_1 + \dots + n_r Q_r$  ein Divisor auf der Fläche  $X$  mit paarweise verschiedenen Punkten  $Q_j \in X$  und  $n_j > 0$ . Seien  $z_j : (U_j, Q_j) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$  Karten mit  $U_j \cap U_k = \emptyset$ . Die Umgebung  $W_j := \{\sum_{\nu=1}^{n_j} P_\nu : P_\nu \in U_j\}$  von  $n_j Q_j$  in  $X_{n_j}$  ist der Orbitraum der  $\mathcal{S}_{n_j}$ -Orbitprojektion  $p_j : U_j^{n_j} \rightarrow W_j$ . Nach dem Lemma sind die Potenzsummen

$$(3) \quad u_{j,k} : U_j^{n_j} \rightarrow \mathbb{C}, (P_1, \dots, P_{n_j}) \mapsto \sum_{\nu=1}^{n_j} z_j(P_\nu)^k, \text{ für } k = 1, \dots, n_j$$

Komponentenfunktionen einer holomorphen  $\mathcal{S}_{n_j}$ -Orbitprojektion  $U_j^{n_j} \rightarrow V_j$  auf eine offene Menge  $V_j \subset \mathbb{C}^{n_j}$ . Die durch  $u_{j,k} = v_{j,k} \circ p_j$  bestimmten Funktionen  $v_{j,k} : W_j \rightarrow \mathbb{C}$  ( $k = 1, \dots, n_j$ ) sind die Komponenten einer biholomorphen Abbildung  $v_j : W_j \rightarrow V_j$ . Durch die injektive offene Abbildung

$$W_1 \times \dots \times W_r \rightarrow X_n, (E_1, \dots, E_r) \mapsto E_1 + \dots + E_r,$$

wird  $W_1 \times \dots \times W_r$  mit einer Umgebung  $W$  von  $D$  in  $X_n$  identifiziert. Die Isomorphismen  $v_j$  setzen sich daher zur holomorphen Karte

$$w := (v_1, \dots, v_r) : W = W_1 \times \dots \times W_r \rightarrow V_1 \times \dots \times V_r \subset \mathbb{C}^n$$

zusammen. Ihre Komponenten sind die *Potenzsummen-Koordinaten*

$$w_{j,k} : W \rightarrow \mathbb{C}, E_1 + \dots + E_r \mapsto v_{j,k}(E_j); k = 1, \dots, n_j, j = 1, \dots, r.$$

Wir benutzen sie zur Beschreibung der

**14.4.5 Cotangentialräume symmetrischer Produkte.** Wie in 14.4.4 sei  $D = n_1 Q_1 + \dots + n_r Q_r \in X_n$  mit paarweise verschiedenen Punkten  $Q_j$  dargestellt. Wir nennen zwei holomorphe Differentialformen  $\omega$  und  $\omega'$ , die auf Umgebungen von  $\{Q_1, \dots, Q_r\}$  in  $X$  definiert sind, *D-äquivalent*, wenn  $o(\omega - \omega', Q_j) \geq n_j$  für  $j = 1, \dots, r$  gilt.

**Lemma.** *Die D-Äquivalenzklassen  $\langle \omega \rangle_D$  bilden einen  $n$ -dimensionalen komplexen Vektorraum  $\tau_D X$ , der zum Cotangentialraum  $T_D^* X_n$  kanonisch isomorph ist.*

Zur Definition des Isomorphismus benutzen wir die Abbildungen

$$(1) \quad \Delta_j : X \rightarrow X_n, \quad \Delta_j(P) := n_j P + \sum_{l \neq j} n_l Q_l.$$

Sie sind holomorph. Die Form  $\psi$  sei auf einer Umgebung  $W$  von  $D$  holomorph. Wir wählen paarweise disjunkte Scheiben  $U_j$  mit Zentren  $Q_j$ , so daß  $\Delta_j(U_j) \subset W$ , also  $\Delta_j^* \psi \in \mathcal{E}_1(U_j)$  ist. Durch  $(\Delta^* \psi)|_{U_j} := \Delta_j^* \psi / n_j$  wird  $\Delta^* \psi \in \mathcal{E}_1(U_1 \cup \dots \cup U_r)$  und der *kanonische Isomorphismus*

$$(2) \quad T_D^* X_n \rightarrow \tau_D X, \quad [\psi]_D \mapsto \langle \Delta^* \psi \rangle_D,$$

definiert. Die Abbildung (2) hängt nicht von der Wahl der Umgebungen  $W$  und  $U_j$  ab. Sie ist linear.

Für den *Isomorphiebeweis* wählen wir Karten  $z_j : (U_j, Q_j) \rightarrow (\mathbb{E}, 0)$ . Sei  $z_j|_{U_l} := 0$  für  $l \neq j$ . Dann ist  $\{\langle z_j^{k-1} dz_j \rangle_D\}$  mit  $k = 1, \dots, n_j$  und  $j = 1, \dots, r$  eine Basis von  $\tau_D X$ . Die Ableitungen der Potenzsummen-Koordinaten  $w_{j,k} : W \rightarrow \mathbb{C}$  zu den Karten  $z_j$  bestimmen die Basis  $\{[dw_{j,k}]_D\}$  von  $T_D^*(X_n)$ . Aus  $w_{j,k} \circ \Delta_j = n_j z_j^k$  folgt  $[dw_{j,k}]_D \mapsto \langle k z_j^{k-1} dz_j \rangle_D$  bei der Abbildung (2), die somit ein Isomorphismus ist.  $\square$

**14.4.6 Die Ränge der Periodenabbildung.** Die Periodenabbildung  $\mu_n : X_n \rightarrow J(X)$  ist holomorph, da sie durch die  $\mathcal{S}_n$ -invariante holomorphe Abbildung  $X^n \rightarrow J(X), (x_1, \dots, x_n) \mapsto \mu(x_1) + \dots + \mu(x_n)$ , induziert wird.

**Satz.** *Der Cotangentialhomomorphismus von  $\mu_n : (X_n, D) \rightarrow (J(X), a)$  bekommt durch Vor- und Nachschalten der kanonischen Isomorphismen 14.4.1(3) bzw. 14.4.5(2) die Gestalt*

$$\mathcal{E}_1(X) \cong T_a^* J(X) \xrightarrow{T_D^* \mu_n} T_D^* X_n \cong \tau_D X, \quad \omega \mapsto \langle \omega \rangle_D.$$

*Er hat den  $i(D)$ -dimensionalen Kern  $\mathcal{L}^1(-D)$  und somit den Rang  $g - i(D)$ .*

*Beweis.* Der Isomorphismus 14.4.1(3) gefolgt von  $T_D^* \mu_n$  transformiert  $\omega$  nach  $[\mu_n^* \varphi]_D \in T_D^* X_n$ . Beim Isomorphismus 14.4.5(2) entsteht daraus  $\langle \Delta^* \mu_n^* \varphi \rangle_D$ . Mit  $\mu_{n_j} \circ \Delta_j = n_j \mu|_{U_j}$  und 14.4.1(4) folgt  $(\Delta^* \mu_n^* \varphi)|_{U_j} = n_j^{-1} \Delta_j^* \mu_n^* \varphi = (\mu^* \varphi)|_{U_j} = \omega|_{U_j}$ , also insgesamt  $\omega \mapsto \langle \Delta^* \mu_n^* \varphi \rangle_D = \langle \omega \rangle_D$ .  $\square$

## 14.5 Linearscharen

Sei  $X$  eine kompakte, zusammenhängende Riemannsche Fläche. In 8.4.3 wurde jede Linearschar auf  $X$  mit der Struktur eines projektiven Raumes versehen. Ein aufwendiger Beweis bestätigt die naheliegende Vermutung:

**14.5.1 Linearscharen sind Untermannigfaltigkeiten,** genauer: *Jede Linearschar  $L$  vom Grad  $n$  auf  $X$  ist mit ihrer Struktur als projektiver Raum eine Untermannigfaltigkeit des symmetrischen Produktes  $X_n$ .*

*Beweis.* Sei  $q = \dim L$ . Zu jedem  $D \in L$  gibt es  $q + 1$  linear unabhängige Funktionen  $1, f_1, \dots, f_q \in \mathcal{L}(D)$ , so daß  $L$  das Bild der injektiven Abbildung

$$(1) \quad \varphi : \mathbb{P}^q \rightarrow X_n, \quad \varphi(t_0 : t_1 : \dots : t_q) := D + (t_0 + t_1 f_1 + \dots + t_q f_q)$$

ist, siehe 8.4.3(4). Es genügt zu zeigen, daß  $\varphi$  bei  $(1 : 0 : \dots : 0)$  holomorph ist und dort den maximalen Rang  $q$  hat. Wir setzen  $t_0 := 1$  und betrachten  $t := (t_1, \dots, t_q)$  als affine Koordinaten. Sei  $g_t = 1 + t_1 f_1 + \dots + t_q f_q$  und  $\varphi : \mathbb{C}^q \rightarrow X_n$ ,  $\varphi(t) := D + (g_t)$ . Wir benutzen wie in 14.4.4 die Darstellung  $D = \sum n_j Q_j$ , die Karten  $(U_j, z_j)$  von  $X$ , die Umgebung  $W$  von  $D$  in  $X_n$  und die Koordinaten  $w_{j,k}$  auf  $W$ . Sei  $V_j = \{x \in U_j : |z_j(x)| < \frac{1}{2}\}$ .

(2) Für alle  $t$  in einer Umgebung  $T$  von  $0 \in \mathbb{C}^q$  gilt  $\sum_{x \in V_j} \varphi(t)(x) = n_j$ .

*Beweis zu (2):* Es gibt eine Scheibe  $T$  um  $0$ , so daß  $g_t$  für alle  $t \in T$  längs der kompakten Ränder  $\partial V_1 \cup \dots \cup \partial V_r$  keine Nullstellen hat. Polstellen gibt es dort auch nicht, da diese im Träger  $\{Q_1, \dots, Q_r\}$  von  $D$  liegen. Das Null- und Polstellen zählende Integral

$$\sum_{x \in V_j} o(g_t, x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial V_j} dg_t / g_t$$

hängt wie sein Integrand stetig von  $t \in T$  ab und nimmt nur ganzzahlige Werte an. Daher ist  $\sum_{x \in V_j} o(g_t, x) = \sum_{x \in V_j} o(1, x) = 0$ . Wegen  $\sum_{x \in V_j} D(x) = D(Q_j) = n_j$  folgt (2) und daher  $\varphi(T) \subset W$ .

Die Funktionen  $h_{j,k} := w_{j,k} \circ \varphi|_T$  sind die Komponenten einer Koordinatendarstellung  $h : T \rightarrow \mathbb{C}^n$  von  $\varphi$  in einer Umgebung von  $(1 : 0 : \dots : 0)$ . Daher genügt es zu zeigen:

(3) Die Funktionen  $h_{j,k}$  sind holomorph. Die Abbildung  $h$  hat bei  $t = 0$  den maximalen Rang  $q$ .

*Beweis zu (3):* Nach den Definitionen von  $w_{j,k}$  und  $\varphi(t)$  ist

$$h_{j,k}(t) = \sum_{x \in V_j} (D(x) + o(g_t, x)) z_j(x)^k = \sum_{x \in V_j} o(g_t, x) z_j(x)^k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial V_j} z_j^k dg_t / g_t.$$

Da der Integrand und damit das Integral holomorph von  $t$  abhängt, ist  $h_{j,k}$  holomorph. Die partiellen Ableitungen werden unter dem Integral berechnet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{j,k}}{\partial t_m}(0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial V_j} z_j^k df_m = -\frac{k}{2\pi i} \oint_{\partial V_j} z_j^{k-1} f_m dz \\ (4) \quad &= -k \text{ mal Koeffizient von } z^{-k} \text{ in der Laurent-Entwicklung} \\ &\quad \text{von } f_m \text{ an der Stelle } Q_j. \end{aligned}$$

Wenn die Funktionalmatrix von  $h$  an der Stelle  $t = 0$  nicht den maximalen Rang  $q$  hätte, wäre eine nicht triviale Linearkombination ihrer  $q$  Spalten die Nullspalte. Wegen (4) hätte die entsprechende Linearkombination von  $f_1, \dots, f_q$  keine Pole und wäre konstant. Das widerspricht der linearen Unabhängigkeit von  $1, f_1, \dots, f_q$ .  $\square$

**14.5.2 Vollständige Linearscharen.** Für jeden Punkt  $a$  einer komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  ist der *Tangententialraum*  $T_a M := (T_a^* M)^*$  der Dualraum des Cotangententialraumes. Der *Tangententialhomomorphismus* einer holomorphen Abbildung  $f : (M, a) \rightarrow (N, b)$  ist der zu  $T_a^* f$  duale Homomorphismus  $T_a f : T_a M \rightarrow T_b N$ .

Für eine Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 1$  ist nach 14.2.5 ist die  $\mu_n$ -Faser durch  $D \in X_n$  die vollständige Linearschar  $|D|$ , also  $T_D|D| \subset \text{Kern}(T_D \mu_n)$ . Nach Satz 14.4.6 hat  $T_D \mu_n$  den Rang  $g - i(D)$ ; somit ist  $\dim \text{Kern}(T_D \mu_n) = n - g + i(D)$ . Wegen (RR) ist diese Dimension  $= l(D) - 1 = \dim |D|$ , also  $T_D|D| = \text{Kern}(T_D \mu_n)$ . Das Abelsche Theorem (in der Gestalt des Satzes 14.2.5) vereinigt sich daher mit (RR) zum

**Theorem.** *Die Fasern der Periodenabbildung  $\mu_n : X_n \rightarrow J(X)$  sind die vollständigen Linearscharen vom Grade  $n$ . An jeder Stelle  $D \in X_n$  ist  $T_D|D| = \text{Kern}(T_D \mu_n)$  und  $\text{rg}(\mu_n, D) = g - i(D)$ .*  $\square$

**14.5.3 Ausblick.** Nach 13.6.2 ist die Teilmenge  $U \subset X_g$  der allgemeinen Divisoren offen und dicht. Wegen  $l(D) = 1$  für  $D \in U$  wird  $U$  durch  $\mu_g$  biholomorph auf die offene und dichte Menge  $\mu_g(U) \subset J(X)$  abgebildet. Für die Körper der meromorphen Funktionen ist daher die Liftung  $\mathcal{M}(J(X)) \rightarrow \mathcal{M}(X_g)$ ,  $f \mapsto f \circ \mu_g$ , ein Isomorphismus.

Nun sei  $n \leq g$ . Nach Remmerts Satz über eigentliche holomorphe Abbildungen, vgl. 9.2.5, ist  $W_n := \mu_n(X_n) \subset J(X)$  eine analytische Menge, die wie  $X_n$  irreduzibel ist. Wie im Spezialfall  $n = g$  bilden die allgemeinen Divisoren eine offene und dichte Teilmenge  $U \subset X_n$ , die durch  $\mu_n$  biholomorph auf die offene und dichte Teilmenge  $\mu_n(U) \subset W_n$  abgebildet wird. Daher ist  $\dim W_n = n$ . Insbesondere ist  $W_{g-1}$  eine Hyperfläche in  $J(X)$ . Riemann beschreibt sie als Nullstellenmenge der Thetafunktion, siehe 15.1.4(3). Kempf [Kem 1] untersucht für alle  $n < g - 1$  die Singularitäten von  $W_n$  und gibt ihre Tangentialkegel an. Seine Ergebnisse bilden einen Höhepunkt der (oft nach Brill und Noether benannten) Theorie der Varietäten spezieller Divisoren. Die in mehr als 100 Jahren angesammelten Ergebnisse dieser Theorie füllen ein eigenes Buch, siehe [ACGH].

## 14.6 Aufgaben.

- 1) Folgere das Abelsche Additionstheorem (14.1.2) aus der Surjektivität der Periodenabbildung  $\mu_g$  (14.3.3).
- 2) Wir benutzen die Bezeichnungen aus dem Beispiel in 14.4.1. Sei  $T := V/\Gamma$ .
  - (i) Zeige: Die Abbildung  $V^* \rightarrow \mathcal{E}_1(T)$ ,  $u \mapsto \varphi_u$ , ist linear und injektiv. Sei  $X$  eine Fläche vom Geschlecht  $g \geq 1$ , und sei  $f : X \rightarrow T$  eine holomorphe Abbildung. Sie induziert die lineare Abbildung  $f^* : V^* \rightarrow \mathcal{E}_1(X)$ ,  $\omega \mapsto f^* \omega$ .
  - (ii) Zeige: Bei der dualen Abbildung  $f^{**} : \mathcal{E}_1(X)^* \rightarrow V$  wird das Gitter  $H_1(X)$  in das Gitter  $\Gamma$  abgebildet und daher ein holomorpher Homomorphismus  $\hat{f} : J(X) \rightarrow T$  induziert.
  - (iii) Zeige: Wenn der Basispunkt  $P_0$  der Periodenabbildung  $\mu : X \rightarrow J(X)$  den Wert  $f(P_0) = 0 \in T$  hat, ist  $\hat{f} \circ \mu = f$ .
- 3) Wir benutzen die Bezeichnungen aus Aufgabe 2. Sei  $\eta : Z \rightarrow X$  die Uniformisierung. Sei  $f : X \rightarrow T$  eine holomorphe Immersion, d.h.  $\text{rg}(f, x) = 1$  für alle  $x \in X$ . Zeige:
  - (i) Es gibt eine holomorphe Abbildung  $F : Z \rightarrow \mathbb{C}^n$  mit  $p \circ F = f \circ \eta$ .
  - (ii) Es gibt einen Homomorphismus  $h : \mathcal{D}(\eta) \rightarrow \Gamma$ , so daß  $F \circ \gamma = F + h(\gamma)$  für alle  $\gamma \in \mathcal{D}(\eta)$  gilt.



Wegen  $Z = \mathbb{C}$  oder  $= \mathbb{H}$  kann man die Ableitung  $F' : Z \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  bilden und die Projektion  $q : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  nachschalten. Zeige:

(iii) Es gibt genau eine holomorphe Abbildung  $f' : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  mit

$$q \circ F' = f' \circ \eta.$$

(iv) Aus der Periodenabbildung  $\mu : X \rightarrow J(X)$  entsteht die kanonische Abbildung  $\mu' : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ .

- 4) Sei  $\mu : X \rightarrow J(X)$  die Periodenabbildung einer hyperelliptischen Fläche  $X$ . Der Basispunkt  $P_0$  mit  $\mu(P_0) = 0$  sei ein Weierstraß-Punkt. Zeige: Ein Punkt  $P \in X$  ist genau dann ein Weierstraß-Punkt, wenn  $2\mu(P) = 0 \in J(X)$ .
- 5) Zeige: Das  $n$ -fache symmetrische Produkt  $\hat{\mathbb{C}}_n$  der Zahlenkugel ist zum projektiven Raum  $\mathbb{P}^n$  isomorph.
- 6) Zeige: Bei jeder Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  bilden die regulären Werte von  $\mu_d : X_d \rightarrow J(X)$  für jedes  $d \geq g$  eine dichte und offene Teilmenge  $U \subset J(X)$ . Für  $d \geq 2g - 1$  ist  $U = J(X)$ . Bestimme  $U$  für  $d = 2g - 2$ .
- 7) Beweise die am Ende von 14.3.3 aufgestellte Behauptung: Bei jeder Fläche  $X$  vom Geschlecht 2 hat die Periodenabbildung  $\mu_2 : X_2 \rightarrow J(X)$  genau eine zur Zahlenkugel isomorphe Faser. Alle anderen Fasern sind einpunktig.
- 8) Deute das Ergebnis der Aufgabe 13.7.5 als Aussage über die Ränge und Faserdimensionen der Periodenabbildung  $\mu_3 : X_3 \rightarrow J(X)$ .
- 9) Sei  $X$  eine Fläche vom Geschlecht 3. Zeige:
  - (i) Die Periodenabbildung  $\mu_2$  ist eine Einbettung, falls  $X$  nicht-hyperelliptisch ist.
  - (ii) Im hyperelliptischen Fall bilden alle Divisoren  $P + \sigma(P)$  für  $P \in X$  und die hyperelliptische Involution  $\sigma$  eine eindimensionale  $\mu_2$ -Faser  $F$ . Das Komplement  $X_2 \setminus F$  wird durch  $\mu_2$  eingebettet.
- 10) Untersuche die Ränge und Faserdimensionen der Periodenabbildungen  $\mu_4$  für Flächen vom Geschlecht 4.
- 11) Untersuche die Fasern der Differenzabbildung  $\delta : X \times X \rightarrow J(X)$ ,  $\delta(x, y) := \mu(x) - \mu(y)$ . Das Ergebnis hängt davon ab, ob  $X$  hyperelliptisch ist oder nicht. Welchen Rang hat  $\delta$ ?
- 12) Präzisiere und begründe die in 14.1.3 zitierte Behauptung von Jacobi:
 

*Die symmetrischen Funktionen von  $z_1, z_2$  sind vierfach periodische Funktionen von  $u_1, u_2$ .*

Benutze dazu den Liftungsisomorphismus  $\mu_g^* : \mathcal{M}(J(X)) \rightarrow \mathcal{M}(X_g)$  aus 14.5.3.



## 15 Die Riemannsche Thetafunktion

Die Grundlage für das Studium elliptischer Funktionen war im 2. Kapitel die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion. Jacobis ältere Methode, welche von der Theta-Reihe  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \pi i n(n\tau + 2z)$  für  $\tau \in \mathbb{H}$  und  $z \in \mathbb{C}$  ausgeht, ist komplizierter. Aber sie ermöglicht auch einen Zugang zu den Abelschen Funktionen, welche nicht mehr elliptisch sind, wenn die zugehörige Fläche ein Geschlecht  $g > 1$  hat. Wie bereits von Jacobi vorgeschlagen wurde, benutzt man dann eine Thetareihe in  $g$  Variablen. Diese Idee, welche sich bei Jacobi noch auf den hyperelliptischen Fall beschränkte, griff Riemann auf und verwirklichte sie in der Weise, daß er jeder kompakten Fläche  $X$  eine Thetafunktion zuordnete, aus der sich *alle* meromorphen Funktionen auf  $X$  gewinnen lassen. Diese *Riemannsche Theorie der Thetafunktion* steht im Mittelpunkt des Kapitels.

### 15.1 Der Weg zur Riemannschen Thetafunktion

Riemann widmete den zweiten Teil seiner Abhandlung über Abelsche Funktionen [Ri 3] der Thetafunktion und ergänzte diese Abhandlung acht Jahre später durch eine Untersuchung der Nullstellen dieser Funktion, [Ri 5]. Bereits die Definition der Thetafunktion ist kompliziert, und ihre Eigenschaften erfordern umfangreiche Beweise. Damit deutlich wird, welche Ziele erreicht werden sollen, verzichten wir zunächst auf alle längeren Beweise und manche Einzelheiten, die außerhalb des Hauptweges liegen.– Mit  $X$  wird stets eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 1$  bezeichnet.

**15.1.1 Die Periodenmatrix.** Nach 14.2.1 liegt die ganzzahlige Homologie  $H_1(X)$  als Gitter vom Rang  $2g$  im Dualraum  $\mathcal{E}_1(X)^*$  des  $g$ -dimensionalen Vektorraums  $\mathcal{E}_1(X)$  aller holomorphen Differentialformen auf  $X$ , also

$$(1) \quad H_1(X) \subset \mathcal{E}_1(X)^*.$$

Die Fläche  $X$  wird wie in 12.4 kanonisch zerschnitten. Die Homologieklassen der Rückkehrschnitte  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  bilden eine Basis von  $H_1(X)$ , siehe 12.3.2. Gemäß (1) sind  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  Vektoren in  $\mathcal{E}_1(X)^*$ .

$$(2) \quad \text{Die Vektoren } a_1, \dots, a_g \text{ bilden eine Basis von } \mathcal{E}_1(X)^*.$$

Wenn man nun  $b_1, \dots, b_g$  als Linearkombinationen dieser Basisvektoren darstellt,

$$b_j = \sum_{k=1}^g \tau_{jk} a_k,$$

entsteht die  $(g \times g)$ -Periodenmatrix  $T := (\tau_{jk})$ .

- (3) Die Periodenmatrix  $T$  ist symmetrisch und hat einen positiv definiten Imaginärteil  $\operatorname{Im} T = \frac{i}{2}(\bar{T} - T)$ .

**15.1.2 Die Thetareihe.** Mit der Periodenmatrix  $T$  wird die *Thetareihe*

$$(1) \quad \vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \langle n, 2z + Tn \rangle)$$

für  $z := (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$  gebildet. Summiert wird über alle  $g$ -Tupel  $n := (n_1, \dots, n_g)$  ganzer Zahlen. Dabei bezeichnet  $Tn$  das Produkt der Matrix  $T$  mit der Spalte  $n$ , und  $\langle z, w \rangle := \sum_{j=1}^g z_j w_j$  ist das Produkt der Vektoren  $z = (z_1, \dots, z_g)$  und  $w = (w_1, \dots, w_g)$ .— Da  $\operatorname{Im} T$  positiv definit ist, folgt:

- (2) Die Thetareihe konvergiert normal und stellt daher eine auf  $\mathbb{C}^g$  holomorphe Funktion dar. Offenbar ist  $\vartheta(-z) = \vartheta(z)$ .

**15.1.3 Periodizität.** Durch  $z := (z_1, \dots, z_g) \mapsto \sum z_j a_j$  wird  $\mathbb{C}^g$  mit  $\mathcal{E}_1(X)^*$  identifiziert. Dadurch wird die Thetareihe zur *Thetafunktion*  $\vartheta \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1(X)^*)$ . Sie ist  $a_k$ -periodisch, d.h.

$$(1) \quad \vartheta(z + a_k) = \vartheta(z) \text{ für } z \in \mathcal{E}_1(X)^* \text{ und } k = 1, \dots, g.$$

Bei den  $b_k$ -Perioden treten nullstellenfreie Faktoren auf: Für  $z = \sum z_k a_k$  gilt

$$(2) \quad \vartheta(z + b_k) = \exp(-\pi i(2z_k + \tau_{kk})) \cdot \vartheta(z).$$

**15.1.4 Nullstellen.** Wegen 15.1.3 ist die Nullstellenordnung  $o(\vartheta, z) \in \mathbb{N}$  an der Stelle  $z \in \mathcal{E}_1(X)^*$  bei Translationen um Vektoren  $c \in H_1(X)$  invariant:  $o(\vartheta, z + c) = o(\vartheta, z)$ . Es gibt daher eine Funktion  $\Theta : J(X) \rightarrow \mathbb{N}$  auf dem in 14.2.2 eingeführten Periodentorus  $J(X)$ , so daß

$$(1) \quad \Theta(p(z)) = o(\vartheta, z) \text{ für } z \in \mathcal{E}_1(X)^*$$

und die Projektion  $p : \mathcal{E}_1(X)^* \rightarrow \mathcal{E}_1(X)^*/H_1(X) =: J(X)$  gilt.

Zwischen dem *Thetadivisor*  $\Theta$  und seinem Träger

$$(2) \quad N := \{\xi \in J(X) : \Theta(\xi) \geq 1\}$$

einerseits sowie den positiven Divisoren  $D$  auf  $X$  vom Grade  $g-1$  andererseits besteht eine wunderbare Beziehung. Bekanntlich bilden diese Divisoren das  $(g-1)$ -fache symmetrische Produkt  $X_{g-1}$ . Dieses wird durch die Periodenabbildung  $\mu : X_{g-1} \rightarrow J(X)$  in den Periodentorus abgebildet, siehe 14.2.2 und 14.3.

- (3) Es gibt eine Konstante  $\kappa \in J(X)$ , so daß  $W_{g-1} := \mu(X_{g-1}) = \kappa + N$  ist. Dabei hat jeder Divisor  $D \in X_{g-1}$  die Dimension

$$l(D) = \Theta(\mu(D) - \kappa).$$

Die *Verschiebungsformel*  $W_{g-1} = \kappa + N$  bewies Riemann bereits in [Ri 3]. Die Dimensionsformel (Manche Autoren nennen sie *Riemanns Singularitätentheorem*) ist das Hauptergebnis der ergänzenden Abhandlung [Ri 5].

**15.1.5 Primfunktionen.** Die universelle Überlagerung  $\eta : Z \rightarrow X$  ist mit der Projektion  $p : \mathcal{E}_1(X)^* \rightarrow J(X)$  durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{h} & \mathcal{E}_1(X)^* \\ \eta \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\mu} & J(X) . \end{array}$$

verbunden, siehe 14.2.2. Riemann definiert zu jedem  $e \in \mathcal{E}_1(X)^*$  die holomorphe Funktion  $\vartheta_e := \vartheta \circ (e + h)$  auf  $Z$ . Man nennt  $\vartheta_e$  eine *Primfunktion*, falls sie nicht konstant  $= 0$  ist. Wie im nächsten Abschnitt ausgeführt wird, läßt sich analog zur Primzerlegung rationaler Zahlen jede meromorphe Funktion auf  $X$  als Quotient von Produkten von Primfunktionen darstellen.

Die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta) = \pi(X)$  ist die Fundamentalgruppe. Das Periodenverhalten der Thetafunktion ergibt für die Homotopieklassen  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  der Rückkehrschnitte

$$(1) \quad \vartheta_e \circ \alpha_k = \vartheta_e \quad , \quad \vartheta_e \circ \beta_k = \exp(-\pi i(\tau_{kk} + 2e_k + 2h_k)) \cdot \vartheta_e .$$

Dabei ist  $e = \sum e_k a_k$  und  $h = \sum h_k a_k$ . Die Ordnung  $o(\vartheta_e, z)$  an der Stelle  $z \in Z$  hängt nur von  $\varepsilon := p(e) \in J(X)$  und  $\eta(z) \in X$  ab. Somit ist der positive Divisor  $\Theta_\varepsilon$  auf  $X$  durch

$$(2) \quad \Theta_\varepsilon(\eta(z)) := o(\vartheta_e, z) \quad \text{für } z \in Z$$

wohldefiniert. Er heißt *Primdivisor*. Für den Träger, den Grad und den Periodenwert gelten mit der Konstante  $\kappa$  aus 15.1.4

$$(3) \quad \text{Tr}(\Theta_\varepsilon) = \{x \in X : \mu(x) + \varepsilon \in N\} \quad , \quad \text{gr}(\Theta_\varepsilon) = g \quad , \quad \mu(\Theta_\varepsilon) = \kappa - \varepsilon .$$

**15.1.6 Darstellung meromorpher Funktionen.** Das Verhalten der Primfunktionen gegenüber Deckabbildungen vereinfacht sich für Quotienten:

$$(1) \quad (\vartheta_e / \vartheta_{e'}) \circ \beta_k = \exp(2\pi i(e'_k - e_k)) \cdot (\vartheta_e / \vartheta_{e'}) .$$

Der Schlüssel in Riemanns Beweis des Abelschen Theorems mittels der Thetafunktion ist folgendes Ergebnis:

$$(2) \quad \text{Zu je zwei Punkten } Q, Q' \in Z \text{ gibt es Primfunktionen } \vartheta_e, \vartheta_{e'} , \text{ so daß} \\ e - e' = h(Q') - h(Q) \quad \text{und} \quad \Theta_\varepsilon - \Theta_{\varepsilon'} = \eta(Q) - \eta(Q') \\ \text{für } \varepsilon := p(e) , \varepsilon' := p(e') \text{ gelten.}$$

**Theorem.** Auf der Fläche  $X$  seien  $2r$  Punkte  $P_1, \dots, P_{2r}$  mit  $P_j \neq P_{r+k}$  für alle  $j, k \in \{1, \dots, r\}$  gegeben, so daß

$$(3) \quad \sum_{j=1}^r \mu(P_j) = \sum_{j=1}^r \mu(P_{j+r})$$

ist. Es gibt eine Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  mit dem Hauptdivisor

$$(f) = \sum_{j=r}^r (P_j - P_{j+r})$$

und Primfunktionen  $\vartheta_{e_j}$  mit

$$(4) \quad f \circ \eta = \prod_{j=1}^r (\vartheta_{e_j} / \vartheta_{e_{r+j}}) .$$

In diesem Theorem werden mit  $e_j$  Punkte in  $\mathcal{E}_1(X)^*$  und nicht wie bisher die Komponenten eines Punktes  $e$  bezeichnet. Die erste Behauptung ist die

schwierige Richtung des Abelschen Theorems 14.2.4. Sie wird im folgenden neu bewiesen.

*Beweis.* Wir wählen zu jedem  $P_j$  einen Punkt  $Q_j \in Z$  mit  $\eta(Q_j) = P_j$ . Die Voraussetzung (3) lautet dann  $\sum_j (h(Q_j) - h(Q_{r+j})) \in H_1(X)$ . Wenn man  $Q_1$  die Faser  $\eta^{-1}(P_1)$  durchlaufen läßt, durchläuft  $h(Q_1)$  eine volle  $H_1(X)$ -Restklasse. Man kann daher  $\sum_j (h(Q_j) - h(Q_{r+j})) = 0$  durch passende Wahl von  $Q_1$  erreichen.

Nach (1)-(2) gibt es Primfunktionen  $\vartheta_{e_j}, \vartheta_{e_{r+j}}$ , so daß  $(\vartheta_{e_j}/\vartheta_{e_{r+j}}) \circ \beta_k = \exp(h_k(Q_{j+r}) - h_k(Q_j)) \cdot (\vartheta_{e_j}/\vartheta_{e_{r+j}})$  und  $\Theta_{\varepsilon_j} - \Theta_{\varepsilon_{j+r}} = P_j - P_{j+r}$  gilt. Für das Produkt  $\tilde{f} := \prod_j (\vartheta_{e_j}/\vartheta_{e_{r+j}})$  folgt  $\tilde{f} \circ \beta_k = \tilde{f}$  und  $\tilde{f} \circ \alpha_k = \tilde{f}$ , letzteres wegen 1.5.1(1). Da  $\mathcal{D}(\eta)$  von  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$  erzeugt wird, gilt  $\tilde{f} \circ \gamma = \tilde{f}$  für alle  $\gamma \in \mathcal{D}(\eta)$ . Daher gibt es eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $X$  mit  $\tilde{f} = f \circ \eta$ . Wegen  $o(\tilde{f}, z) = o(f, \eta(z))$  hat sie den Hauptdivisor  $(f) = \sum_j (\Theta_{\varepsilon_j} - \Theta_{\varepsilon_{j+r}}) = \sum_j (P_j - P_{j+r})$ .  $\square$

Jede Funktion  $f \in \mathcal{M}(X)$  ist durch ihre Nullstellen  $P_1, \dots, P_r$  und Polstellen  $P_{r+1}, \dots, P_{2r}$  bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Wegen der Abelschen Relation 7.5.3 ist die Bedingung (3) erfüllt. Daher hat  $f \circ \eta$  bis auf einen konstanten Faktor eine Primzerlegung (4).

## 15.2 Thetafunktionen

Zu jeder komplexen symmetrischen  $(g \times g)$ -Matrix  $T$ , deren Imaginärteil positiv definit ist, wird eine konvergente *Thetareihe* gebildet, die eine holomorphe Funktion in  $g$  Variablen  $z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$  darstellt. Sie erfüllt Periodizitätsformeln bezüglich der Einheitsvektoren und der Spaltenvektoren von  $T$  und ist durch diese Formeln bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. – Wie man zu jeder Riemannschen Fläche vom Geschlecht  $g$  eine Matrix  $T$  findet, wird im zweiten Teil dieses Paragraphen erörtert.

**15.2.1 Die Thetareihe.** Im  $\frac{1}{2}g(g+1)$ -dimensionalen Vektorraum aller symmetrischen  $g \times g$ -Matrizen bilden die Matrizen  $T = (\tau_{jk})$ , deren Imaginärteile  $\text{Im } T$  positiv definit sind, eine offene und konvexe Teilmenge  $\mathcal{H}_g$ . Man nennt  $\mathcal{H}_g$  den *Siegelschen Halbraum* und seine Elemente *Siegelsche Matrizen*. C. L. Siegel hat diese Matrizen in [Si 1] systematisch untersucht.

Wir definieren wie in 15.1.2 auf  $\mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g$  die *Thetareihe*

$$(1) \quad \vartheta(z, T) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i \langle n, 2z + Tn \rangle).$$

**Satz.** Die Reihe (1) konvergiert normal und stellt daher eine holomorphe Funktion auf  $\mathbb{C}^g \times \mathcal{H}_g$  dar. Offenbar gilt  $\vartheta(-z, T) = \vartheta(z, T)$ .

*Beweis.* Sei  $z = x + iy$ . Dann ist

$$|\exp \pi i \langle n, 2z + Tn \rangle| = \exp(-\pi(\langle n, 2y \rangle + \text{Im} \langle n, Tn \rangle)).$$

Weil  $\operatorname{Im} T$  positiv definit ist, gibt es eine Konstante  $c'' \geq 0$ , so daß

$$\operatorname{Im} \langle n, Tn \rangle \leq c'' |n|^2 := c'' (n_1^2 + \dots + n_g^2).$$

Zu jedem Kompaktum  $K$  gibt es eine Konstante  $c' \geq 0$ , so daß  $\langle n, y \rangle \leq c' |n|$  für alle  $z = x + iy \in K$  gilt. Daher ist  $\sum_n \exp(-\pi(2c' |n| + c'' |n|^2))$  eine konvergente Majorante der Thetareihe für alle  $z \in K$ .  $\square$

**Bemerkung.** Die Thetareihe erfüllt die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = 2\pi i (1 + \delta_{jk}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{jk}},$$

wie man durch gliedweises Differenzieren der Reihe 15.2.1(1) bestätigt.

**15.2.2 Periodizität.** Da  $\operatorname{Im} T$  regulär ist, bilden die üblichen Einheitsvektoren des  $\mathbb{C}^g$ , die wir hier mit  $a_j$  bezeichnen, zusammen mit den Spaltenvektoren  $b_j := Ta_j$  der Matrix  $T$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{C}^g$  und spannen daher das Gitter

$$\Gamma := \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_g + \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_g \subset \mathbb{C}^g$$

mit dem maximalen Rang  $2g$  auf. Der Torus  $\mathbb{C}^g/\Gamma$  heißt *Abelsche Varietät* der Matrix  $T$ . Jedes  $c \in \Gamma$  läßt sich eindeutig als  $c = c' + Tc''$  mit  $c', c'' \in \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_g$  darstellen.

Für die Thetareihe  $\vartheta(z) := \vartheta(z, T)$  gilt die *Periodizitätsformel*

$$(1) \quad \vartheta(z + c' + Tc'') = \vartheta(z + Tc'') = \exp(-\pi i \langle c'', 2z + Tc'' \rangle) \cdot \vartheta(z).$$

*Beweis.* Nach 15.2.1(1) ist

$$\vartheta(z + c' + Tc'') = \sum_n (\exp \pi i \langle n, 2z + 2Tc'' + Tn \rangle) \cdot \exp(2\pi i \langle n, c' \rangle).$$

Wegen  $\langle n, c' \rangle \in \mathbb{Z}$  ist der zweite Faktor = 1. Mit  $m = n + c''$  gilt

$$\vartheta(z + c) = \sum_m \exp(\pi i \langle m - c'', 2z + Tc'' + Tm \rangle).$$

Wegen der Symmetrie von  $T$  folgt die Behauptung aus

$$\langle m - c'', 2z + Tc'' + Tm \rangle = \langle m, 2z + Tm \rangle - \langle c'', 2z + Tc'' \rangle. \quad \square$$

**Periodizitätssatz.** Alle Funktionen  $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ , welche

$$(2a) \quad h(z + a_k) = h(z) \quad \text{und} \quad (2b) \quad h(z + b_k) = \exp(-\pi i (2z_k + \tau_{kk})) \cdot h(z)$$

für  $k = 1, \dots, g$  erfüllen, bilden einen eindimensionalen komplexen Vektorraum  $\mathcal{L}$ . Er wird von der Thetareihe  $\vartheta$  aufgespannt.

*Beweis.* Wegen der Periodizitätsformel erfüllt die Thetareihe (2a) und (2b). Alle Funktionen, die (1a) erfüllen, lassen sich als Fourierreihe  $h(z) = \sum_n \gamma_n \exp 2\pi i \langle n, z \rangle$  mit Koeffizienten  $\gamma_n \in \mathbb{C}$  darstellen. Aus (1b) folgt

$$\begin{aligned} h(z + b_k) &= \exp(-\pi i \tau_{kk}) \cdot \sum_n \gamma_n \exp(2\pi i \langle n - a_k, z \rangle) \\ &= \exp(-\pi i \tau_{kk}) \cdot \sum_m \gamma_{m+a_k} \exp(2\pi i \langle m, z \rangle). \end{aligned}$$

Andererseits ist  $h(z + b_k) = \sum_n \exp 2\pi i \langle n, b_k \rangle \cdot \gamma_n \cdot \exp 2\pi i \langle n, z \rangle$ . Der Koeffizientenvergleich ergibt  $\gamma_{n+a_k} \exp(-\pi i \tau_{kk}) = \gamma_n \exp(2\pi i \langle n, b_k \rangle)$ . Durch Induktion über  $|n| = |n_1| + \dots + |n_g|$  folgt: Genau dann, wenn  $\gamma_0 = 0$  ist, gilt  $\gamma_n = 0$  für alle  $n$ . Daher ist  $\dim \mathcal{L} = 1$ . Die Thetareihe spannt  $\mathcal{L}$  auf, weil ihr Fourierkoeffizient  $\gamma_0 = 1$  ist.  $\square$

Man nennt  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^g)$  eine *Thetafunktion* der Ordnung  $n \geq 1$ , wenn

$$(1) \quad f(z + c' + Tc'') = f(z + Tc'') = \exp(-n\pi i \langle c'', 2z + Tc'' \rangle)$$

gilt. Diese Funktionen bilden eine  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $\mathcal{L}_n$  der Dimension  $n^g$ . Offenbar ist die direkte Summe  $\oplus \mathcal{L}_n$  eine gradierte  $\mathbb{C}$ -Algebra.

**Lefschetz' Einbettungssatz.** Sei  $n \geq 3$ . Für jede Basis  $f_1, \dots, f_{n^g}$  von  $\mathcal{L}_n$  induziert die Abbildung  $(f_1, \dots, f_{n^g}) : \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^{n^g}$  eine Einbettung  $\mathbb{C}^g/\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^{n^g-1}$  der Abelschen Varietät. – Ein komplexer Torus ist genau dann zu einer Abelschen Varietät isomorph, wenn er in einen projektiven Raum  $\mathbb{P}^m$  eingebettet werden kann.

Das Studium Abelscher Varietäten und ihrer Thetafunktionen hat sich zu einer umfangreichen selbständigen Theorie entwickelt. Zur schnellen Orientierung eignen sich die einführenden Lehrbücher [Deb] und [SD]. Umfangreichere Darstellungen findet man in [Kem 2], [LB] und [Mu 1], [Mu 3].

**15.2.3 Gewinnung Siegelscher Matrizen.** Wir bilden auf dem Dualraum  $V^*$  eines  $g$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  mit  $2g$  Vektoren  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \in V$  die Bilinearform  $R$  und die Hermitesche Form  $S$  durch

$$R(\omega, \varphi) := \sum_{j=1}^g \omega(a_j) \varphi(b_j) \text{ bzw. } S(\omega, \varphi) := \frac{i}{2} \sum_{j=1}^g (\omega(a_j) \overline{\varphi(b_j)} - \omega(b_j) \overline{\varphi(a_j)}).$$

**Satz.** Genau dann wenn  $R$  symmetrisch und  $S$  positiv definit ist, bilden die ersten  $g$  Vektoren  $a_1, \dots, a_g$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $V$ , und man erhält eine Siegelsche Matrix  $T = (\tau_{jk})$  durch

$$(1) \quad b_j = \sum_{k=1}^g \tau_{jk} a_k.$$

*Beweis.* Sei  $\omega_1, \dots, \omega_g$  eine Basis von  $V^*$ . Wir bilden die  $(g \times g)$ -Matrizen  $A := (\omega_j(a_k))$ ,  $B := (\omega_j(b_k))$ ,  $R := (R(\omega_j, \omega_k))$  und  $S := (S(\omega_j, \omega_k))$ . Weil  $S = \frac{i}{2}(A^t \cdot \bar{B} - B^t \cdot \bar{A})$  positiv definit ist, hat  $A$  den maximalen Rang  $g$ , d.h.  $a_1, \dots, a_g$  ist eine Basis von  $V$ . Wir wählen  $\omega_1, \dots, \omega_g$  als dazu duale Basis. Dann ist  $A = E$  die Einheitsmatrix, und  $T = R = B$ . Folglich ist  $T$  wie  $R$  symmetrisch, und  $\text{Im } T = \frac{i}{2}(\bar{T} - T) = S$  ist positiv definit. – Der Beweis der Umkehrung bleibt dem Leser überlassen (Aufgabe 15.8.10).

**15.2.4 Schnittform. Symplektische Basen.** Sei  $X$  eine Riemannsche Fläche vom Geschlecht  $g \geq 1$ . Wir benutzen die Algebra  $\Omega^*(X)$  der  $\mathbb{C}$ -wertigen  $C^\infty$ -Differentialformen mit der Ableitung  $d$  und dem alternierenden Produkt  $\wedge$ . Es ist  $\Omega^\nu(X) = 0$  für  $\nu \notin \{0, 1, 2\}$ . Die exakten bzw. geschlossenen Formen bilden Untervektorräume  $\mathcal{B}^\nu(X)$  bzw.  $\mathcal{Z}^\nu(X)$  von  $\Omega^\nu(X)$ . Der Faktorraum  $H_{DR}^\nu(X) := \mathcal{Z}^\nu(X)/\mathcal{B}^\nu(X)$  heißt  $\nu$ -te *DeRham-Cohomologie*.

Für  $\omega \in \mathcal{Z}^1(X)$  und jede Homologieklass  $c \in H_1(X)$  ist das Integral  $\int_c \omega \in \mathbb{C}$  definiert. Genau dann, wenn  $\int_c \omega = 0$  für alle  $c \in H_1(X)$  gilt, ist  $\omega \in \mathcal{B}^1(X)$ , vgl. Satz 7.4.6 für den holomorphen Fall.

Für jede Form  $\sigma \in \Omega^2(X)$  ist das Integral  $\int_X \sigma \in \mathbb{C}$  definiert. Es ist genau dann  $= 0$ , wenn  $\sigma$  in  $\mathcal{B}^2(X)$  liegt. Für  $\omega \in \Omega^1(X)$  und die konjugiert komplexe Form  $\bar{\omega}$  ist  $i \int_X \omega \wedge \bar{\omega} \geq 0$ , und zwar  $> 0$ , sobald  $\omega \neq 0$  ist.

**Satz.** Seien  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  die Homologieklassen der Rückkehrschnitte einer kanonischen Zerschneidung der Fläche  $X$ . In  $\mathcal{Z}^1(X)$  gibt es Formen  $\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g$ , so daß für  $\omega \in \mathcal{Z}^1(X)$  und  $j, k \in \{1, \dots, g\}$  gilt:



$$(1) \quad \int_{a_j} \omega = \int_X \alpha_j \wedge \omega \quad \text{und} \quad \int_{b_j} \omega = \int_X \beta_j \wedge \omega,$$

$$(2) \quad \int_X \alpha_j \wedge \alpha_k = \int_X \beta_j \wedge \beta_k = 0 \quad \text{und} \quad \int_X \alpha_j \wedge \beta_k = \delta_{jk}.$$

Einen Beweis findet man z.B. in [Fu], p. 247-254. Die folgenden Ergebnisse sind einfache Konsequenzen dieses Satzes, wenn man berücksichtigt, daß die Klassen  $a_1, \dots, b_g$  eine Basis von  $H_1(X)$  bilden, siehe 12.3.2 und 12.4.1.

Dadurch, daß man jeder Form  $\omega \in \mathcal{Z}^1(X)$  die Abbildung  $H_1(X) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $c \mapsto \int_c \omega$  zuordnet, entsteht ein Isomorphismus  $H_{DR}^1(X) \cong H^1(X, \mathbb{C})$ . Die Cohomologieklassen von  $\alpha_1, \dots, \beta_g$  bilden eine Basis von  $H_{DR}^1(X)$ .

Für  $\varphi, \omega \in \mathcal{Z}^1(X)$  hängt  $\int_X \varphi \wedge \omega$  nur von den durch  $\varphi, \omega$  repräsentierten Cohomologieklassen in  $H_{DR}^1(X)$  ab. Wir bezeichnen im folgenden die Formen in  $\mathcal{Z}^1(X)$ , ihre Cohomologieklassen in  $H_{DR}^1(X)$  und die entsprechenden Elemente in  $H^1(X, \mathbb{C})$  mit denselben griechischen Buchstaben. Die Bilinearform

$$(3) \quad H^1(X, \mathbb{C}) \times H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (\varphi, \omega) \mapsto \int_X \varphi \wedge \omega,$$

hat bezüglich der Basis  $\alpha_1, \dots, \beta_g$  von  $H^1(X, \mathbb{C})$  die Matrix  $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$  mit der  $g \times g$ -Einheitsmatrix  $E$ . Sie ist nicht-entartet, d.h. zu jeder linearen Abbildung  $\lambda: H^1(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$  gibt es genau ein  $\varphi \in H^1(X, \mathbb{C})$  mit  $\lambda(\omega) = \int_X \varphi \wedge \omega$  für alle  $\omega \in H^1(X, \mathbb{C})$ .

Daher gibt es zu jeder Homologieklassse  $c \in H_1(X)$  genau eine *Poincaré-duale* Cohomologieklassse  $\gamma \in H^1(X, \mathbb{C})$  mit

$$(4) \quad \int_c \omega = \int_X \gamma \wedge \omega \quad \text{für alle } \omega \in H_{DR}^1(X).$$

Insbesondere sind  $\alpha_j, \beta_j$  zu den Rückkehrschnitten  $a_j, b_j$  dual.

Für zwei Klassen  $c_1, c_2 \in H_1(X)$  mit den dualen Klassen  $\gamma_1, \gamma_2$  definiert man die *Schnittzahl*

$$(5) \quad s(c_1, c_2) := \int_X \gamma_1 \wedge \gamma_2 = \int_{c_1} \gamma_2 = - \int_{c_2} \gamma_1$$

Die Rückkehrschnitte  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  haben die Schnittzahlen

$$(6) \quad s(a_j, a_k) = s(b_j, b_k) = 0, \quad s(a_j, b_k) = \delta_{jk}.$$

Daher ist die *Schnittform*

$$(7) \quad s: H_1(X) \times H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

schiefsymmetrisch, ganzzahlig und nicht-entartet.

Jede Basis  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  von  $H_1(X)$  mit den Schnittzahlen (6) heißt *symplektisch*. Mit solchen Basen gilt für  $\varphi, \omega \in \mathcal{Z}^1(X)$ :

$$(8) \quad \int_X \varphi \wedge \omega = \sum_{j=1}^g \left( \int_{a_j} \varphi \cdot \int_{b_j} \omega - \int_{a_j} \omega \cdot \int_{b_j} \varphi \right). \quad \square$$

**15.2.5 Periodenmatrizen.** Bei jeder symplektischen Basis  $(a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g)$  des Homologiegitters  $H_1(X) < \mathcal{E}_1(X)^*$  bilden die ersten  $g$  Vektoren  $a_1, \dots, a_g$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $\mathcal{E}_1(X)^*$ , und die durch

$$b_j = \sum_{k=1}^g \tau_{jk} a_k$$

bestimmte Periodenmatrix  $T = (\tau_{jk})$  ist Siegelsch.

*Beweis.* Wie in 15.2.3 bilden wir für  $V := \mathcal{E}_1(X)^*$  die Bilinearform  $R$  und die Hermitesche Form  $S$ . Dabei ist  $\varphi(a_j) := \int_{a_j} \varphi$  und  $\omega(b_j) := \int_{b_j} \omega$ . Nach 15.2.4(8) gilt

$$R(\varphi, \omega) - R(\omega, \varphi) = \int_X \varphi \wedge \omega = 0 \quad \text{und} \quad S(\varphi, \omega) = \frac{i}{2} \int_X \varphi \wedge \bar{\omega}.$$

Denn für  $\varphi, \omega \in \mathcal{E}_1(X)$  ist  $\varphi \wedge \omega = 0$ . Somit ist  $R$  symmetrisch und  $S$  positiv definit. Mit Satz 15.2.3 folgt die Behauptung.  $\square$

Wir bilden zu jeder symplektischen Basis  $a_1, \dots, b_g$  von  $H_1(X)$  die Periodenmatrix  $T$  und definieren mit ihr wie in 15.1.2-3 die *Riemannsche Thetafunktion*  $\vartheta \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1(X)^*)$  durch

$$(1) \quad \vartheta(z) := \vartheta(z_1, \dots, z_g; T) \quad \text{für } z = \sum_{j=1}^g z_j a_j \in \mathcal{E}_1(X)^* \quad \text{mit } z_j \in \mathbb{C}.$$

In den folgenden Paragraphen 15.3-5 benutzen wir eine Basis  $a_1, \dots, b_g$ , die aus den Rückkehrschnitten einer kanonischen Zerschneidung von  $X$  besteht und daher nach 15.2.4(6) symplektisch ist. Die Abhängigkeit von der Zerschneidung wird in 15.4.4 untersucht. Beliebige symplektische Basen werden in 15.6.5 zugelassen.

## 15.3 Darstellung meromorpher Funktionen

Mit der soeben eingeführten Thetafunktion  $\vartheta \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1(X)^*)$  werden wie in 15.1.5 Primfunktionen  $\vartheta_e \in \mathcal{O}(Z)$  definiert. Wir beweisen die in 15.1.6 angegebene Darstellung aller meromorphen Funktionen auf  $X$  als Quotienten von Produkten dieser Primfunktionen. – Wir benutzen Basispunkte  $Q_0 \in Z$  mit  $h(Q_0) = 0$  und  $P_0 := \eta(Q_0) \in X$ . Die Deckgruppe  $\mathcal{D}(\eta)$  wird mit der Fundamentalgruppe  $\pi(X)$  identifiziert und durch  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\eta) \rightarrow H_1(X)$  abelsch gemacht. Die Rückkehrschnitte einer kanonischen Zerschneidung von  $X$  und ihre Homologieklassen werden mit  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  bezeichnet.

**15.3.1 Primfunktionen.** Sei  $\omega_1, \dots, \omega_g$  die zu  $a_1, \dots, a_g$  duale Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$ . Sei  $h_j \in \mathcal{O}(Z)$  die Stammfunktion von  $\eta^* \omega_j$  mit  $h_j(Q_0) = 0$ .

Für jedes  $c \in H_1(X)$  gilt  $c = \sum (m_j a_j + n_j b_j)$  mit ganzzahligen Koeffizienten  $m_j = m_j(c)$  und  $n_j = n_j(c)$ . Wir definieren den Epimorphismus

$$(1) \quad n : H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}^g, \quad n(c) := (n_1(c), \dots, n_g(c)).$$

Wir identifizieren  $\mathcal{E}_1(X)^* \cong \mathbb{C}^g, e = \sum e_j a_j \mapsto (e_1, \dots, e_g)$ , und benutzen auf  $\mathbb{C}^g$  das Produkt  $\langle z, w \rangle := \sum z_j \bar{w}_j$ . Wie in 15.1.5 sei  $\vartheta_e := \vartheta(e + h)$ .

**Satz.** Für jede Deckabbildung  $\gamma \in \mathcal{D}(\eta)$  mit  $\mathcal{A}\gamma = c \in H_1(X)$  gilt

$$(2) \quad \vartheta_e \circ \gamma = \varphi_{c,e} \cdot \vartheta_e \quad \text{mit} \quad \varphi_{c,e} = \exp(-\pi i \langle n(c), 2e + 2h + Tn(c) \rangle).$$

Insbesondere ist

$$(3) \quad \varphi_{a_j,e} = 1 \quad \text{und} \quad \varphi_{b_j,e} = \exp(-\pi i (2e_j + 2h_j + \tau_{jj})).$$

Für die logarithmische Ableitung gilt

$$(4) \quad \gamma^*(d\vartheta_e/\vartheta_e) = d\vartheta_e/\vartheta_e - 2\pi i \sum_{j=1}^g n_j(c) \eta^* \omega_j.$$

*Beweis.* Nach 14.2.2(4) gilt  $\vartheta_e \circ \gamma = \vartheta(e + h + c)$ . Daher folgen (2)-(3) aus der Periodizitätsformel 15.2.2(1).– Wegen  $dh_j = \eta^* \omega_j$  ist  $\gamma^*(d\vartheta_e/\vartheta_e) = d(\varphi_{c,e} \cdot \vartheta_e)/(\varphi_{c,e} \cdot \vartheta_e) = d\vartheta_e/\vartheta_e + d\varphi_{c,e}/\varphi_{c,e} = d\vartheta_e/\vartheta_e - 2\pi i d\langle n(c), h \rangle$ . Daraus folgt (4).  $\square$

**15.3.2 Primdivisoren.** Die Nullstenordnungen jeder Primfunktion  $\vartheta_e$  bestimmen zu  $\varepsilon := p(e) \in J(X)$  den Primdivisor  $\Theta_\varepsilon$  auf  $X$  durch

$$(1) \quad \Theta_\varepsilon(\eta(z)) := o(\vartheta_e, z) \quad \text{für alle } z \in Z.$$

Offenbar ist  $\Theta_\varepsilon$  positiv. Für den Grad gilt

$$(2) \quad \text{gr } \Theta_\varepsilon = g.$$

*Beweis.* Wenn  $p(e) = p(e')$  ist, gibt es ein  $c \in H_1(X)$  mit  $e' = e + c$ . Dann ist  $\vartheta_{e'} = \vartheta(e + c + h) = \varphi_{c,e} \cdot \vartheta_e$ . Weil  $\varphi_{c,e}$  keine Nullstellen hat, folgt  $o(\vartheta_{e'}, z) = o(\vartheta_e, z)$ .– Wenn  $\eta(z) = \eta(z')$  ist, gibt es ein  $\gamma \in \mathcal{D}(\eta)$  mit  $z' = \gamma(z)$ . Sei  $c := \mathcal{A}\gamma$ . Dann ist  $o(\vartheta_e, z') = o(\vartheta_e \circ \gamma, z) = o(\varphi_{c,e} \cdot \vartheta_e, z) = o(\vartheta_e, z)$ . Daher ist (1) sinnvoll.– Zu (2). Nach der Folgerung in 12.5.2 gibt es eine kanonische Zerschneidung  $\rho: \Delta \rightarrow X$  mit den Rückkehrschnitten  $a_1, \dots, b_g$ , wobei  $\Delta \subset Z$ ,  $\rho = \eta|_\Delta$  und  $\text{Tr}(\Theta_\varepsilon) \cap \eta(\partial\Delta) = \emptyset$  ist. Wir wenden die Residuenformel in 12.5.3 auf  $\psi = d\vartheta_e/\vartheta_e$  an: Wegen 15.3.1(4) ist  $\psi - \beta_j^* \psi = 2\pi i \eta^* \omega_j$  und  $\psi - (\alpha_j^{-1})^* \psi = 0$ , also

$$\text{gr } \Theta_\varepsilon = \sum_{z \in \Delta} \text{res}(\psi, z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \int_{a_j} \omega_j = g. \quad \square$$

**Satz.** Zu jeder kanonischen Zerschneidung  $\rho: \Delta \rightarrow X$  mit den Rückkehrschnitten  $a_1, \dots, b_g$  gibt es eine Riemannsche Konstante  $\kappa \in J(X)$ , so daß für die Periodenabbildung der Primdivisoren  $\mu(\Theta_\varepsilon) = \kappa - \varepsilon$  gilt.

*Beweis.* Wie im Beweis zu  $\text{gr } \Theta_\varepsilon = g$  wird die Folgerung in 12.5.2 und die Residuenformel in 12.5.3 benutzt. Für jede Schleife  $c$  in  $X$  mit der Homotopieklasse  $\gamma \in \pi(X) = \mathcal{D}(\eta)$  ist  $h_k \circ \gamma - h_k = \int_c \omega_k$  konstant. Für  $\psi := h_k d\vartheta_e/\vartheta_e$  und  $\gamma \in \mathcal{D}(\eta)$  mit  $c := \mathcal{A}\gamma \in H_1(X)$  gilt

$$\psi - \gamma^* \psi = - \int_c \omega_k \cdot d\vartheta_e/\vartheta_e + 2\pi i \left( \int_c \omega_k + h_k \right) \sum_j n_j(c) \eta^* \omega_j.$$

Die Residuenformel ergibt

$$(3) \quad \sum_{z \in \Delta} o(\vartheta_e, z) h_k(z) = \sum_{z \in \Delta} \text{res}(\psi, z) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \tau_{jk} \int_{\tilde{a}_j} \frac{d\vartheta_e}{\vartheta_e} + \int_{\tilde{b}_k} \frac{d\vartheta_e}{\vartheta_e} + \lambda_k$$

mit einer nur von  $a_1, \dots, b_g$  abhängigen Konstanten  $\lambda_k$ .

Die Integrale in (3) werden wie folgt ausgewertet: Sei  $A_j$  der Anfangspunkt von  $\tilde{a}_j$ . Dann ist  $\alpha'_j(A_j)$  der Endpunkt, wobei  $\alpha'_j$  zu  $\alpha_j$  konjugiert ist. Mit 7.8.1(4) folgt  $\exp \int_{\tilde{a}_j} d\vartheta_e/\vartheta_e = \vartheta_e(\alpha'_j(A_j))/\vartheta_e(A_j) = 1$ , letzteres weil  $\vartheta_e \circ \alpha'_j = \vartheta_e \circ \alpha_j = \varphi_{a_j} \cdot \vartheta_e$  und  $\varphi_{a_j} = 1$  ist, siehe 15.3.1(3). Daher gilt

$$(4) \quad \int_{\tilde{a}_j} d\vartheta_e/\vartheta_e = 2\pi i l_j(e) \quad \text{mit } l_j(e) \in \mathbb{Z}.$$

In analoger Weise folgt  $\exp \int_{\tilde{b}_k} d\vartheta_e/\vartheta_e = \exp(-\pi i(2e_k + 2h_k(B_k) + \tau_{kk}))$  für den Anfangspunkt  $B_k$  von  $\tilde{b}_k$ , also

$$(5) \quad \int_{\tilde{b}_k} d\vartheta_e/\vartheta_e = 2\pi i(-e_k + m_k(e)) + \mu_k$$

mit  $m_k(e) \in \mathbb{Z}$  und einer nur von  $a_1, \dots, b_g$  abhängigen Konstanten  $\mu_k$ . Einsetzen von (4) und (5) in (3) ergibt

$$\sum_{z \in \Delta} o(\vartheta_e, z) \cdot h_k(z) = - \sum_{j=1}^g \tau_{jk} l_j(e) - e_k + m_k(e) + \kappa_k$$

mit einer nur von  $a_1, \dots, b_g$  abhängigen Konstanten  $\kappa_k$ . Wir multiplizieren mit  $a_k$  und summieren über  $k = 1, \dots, g$ . Dabei entsteht

$$\sum_{z \in \Delta} o(\vartheta_e, z) \cdot h(z) = -e - \sum_{j=1}^g l_j(e) b_j - \sum_{k=1}^g m_k(e) a_k + \sum_{k=1}^g \kappa_k a_k.$$

Mit  $p$  erhält man links  $\mu(\Theta_e)$  und rechts  $-\varepsilon + \kappa$  für  $\kappa := p(\sum \kappa_k a_k)$ .  $\square$

**15.3.3 Satz von Lewittes** (Theorem 11 in [Lew]). Für die Riemannsche Konstante  $\kappa$  und jeden kanonischen Divisor  $K$  gilt  $\mu(K) = 2\kappa$ .

*Beweis.* Für  $g=1$  ist  $K=0$  und  $\kappa=0$ . Für  $g \geq 2$  gibt es wegen  $\mu(X_{2g-2}) = J(X)$  ein  $D \in X_{2g-2}$  mit  $\mu(D) = 2\kappa$ . Es genügt,  $l(D) \geq g$  zu zeigen. Denn nach 13.2.3(1) ist  $D$  dann kanonisch, und jeder kanonische Divisor  $K$  hat denselben Wert  $\mu(K) = \mu(D)$ . Nach Satz 8.1.4 gibt es ein  $E \in X_{g-1}$  mit  $l(D-E) = \max\{0, l(D)-g+1\}$ . Nach der Verschiebungsformel ist  $W_{g-1} = 2\kappa - W_{g-1}$ . Daher gibt es ein  $E' \in X_{g-1}$  mit  $2\kappa = \mu(E+E')$ . Nach dem Abelschen Theorem sind  $D$  und  $E+E'$ , also auch  $D-E$  und  $E'$  linear äquivalent. Aus  $1 \leq l(E') = l(D-E) = l(D)-g+1$  folgt  $l(D) \geq g$ .  $\square$

**15.3.4 Analytische Mengen.** Als Schlüssel zur Darstellung aller meromorphen Funktionen durch Primfunktionen wurde in 15.1.6(2) ein Ergebnis angegeben, dessen Beweis genauere Kenntnisse über die Stellen  $e \in \mathcal{E}_1^*(X)$  erfordert, für die  $\vartheta_e$  eine Primfunktion, also nicht konstant  $= 0$  ist. Dazu werden *analytische Mengen* benutzt. Ohne deren Theorie von Grund auf zu entwickeln, stellen wir wesentlichen Definitionen und Ergebnisse zusammen. Ausführliche Darstellungen findet man z.B. in [GH] und [GR].

Sei  $M$  eine komplexe Mannigfaltigkeit der Dimension  $n$ . Eine Teilmenge  $A \subset M$  heißt *analytisch*, wenn es zu jedem Punkt in  $M$  eine Umgebung  $U$  und Funktionen  $f_1, \dots, f_q \in \mathcal{O}(U)$  gibt, so daß

$$U \cap A = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_q(x) = 0\}.$$

Ein Punkt von  $A$  heißt *regulär*, wenn er im Definitionsbereich einer holomorphen Karte  $(U, z)$  liegt, für die  $U \cap A = \{x \in U : z_1(x) = \dots = z_q(x) = 0\}$  ist. Die Menge  $R(A)$  aller regulären Punkte liegt dicht und offen in  $A$ . Sie ist die disjunkte Vereinigung von abzählbar vielen zusammenhängenden Untermannigfaltigkeiten  $Y_j$ , die verschiedene Dimensionen haben können. Wenn  $R(A)$  zusammenhängt, heißt  $A$  *irreduzibel*. Der topologische Abschluß  $A_j$  von  $Y_j$  in  $M$  ist eine irreduzible analytische Menge, und  $A = \cup A_j$  ist die eindeutig bestimmte *Zerlegung in irreduzible Komponenten*. Sie ist lokal endlich, also endlich, falls  $M$  kompakt ist. Man definiert  $\dim A_j := \dim Y_j$  und  $\dim A := \max\{\dim A_j\}$ .

Wenn die analytische Menge  $A$  irreduzibel ist, gilt  $\dim B < \dim A$  oder  $B = A$  für jede analytische Teilmenge  $B \subset A$ .

Das kartesische Produkt  $A \times A' \subset M \times M'$  von zwei analytischen Mengen  $A \subset M$  und  $A' \subset M'$  ist analytisch. Es ist irreduzibel, wenn  $A$  und  $A'$  irreduzibel sind. Die Dimensionen addieren sich.

Sei  $\varphi: M \rightarrow M'$  eine eigentliche, holomorphe Abbildung. Für jede (irreduzible) analytische Menge  $A \subset M$  ist das Bild  $\varphi(A) \subset M'$  eine (irreduzible) analytische Menge mit einer Dimension  $\dim \varphi(A) \leq \dim A$ .

Wenn alle Komponenten  $A_j$  die Dimension  $n-1$  haben, heißt  $A$  *Hyperfläche*. Eine Teilmenge  $A \subset M$  ist genau dann eine Hyperfläche, wenn es zu jedem Punkt in  $M$  eine zusammenhängende Umgebung  $U$  und eine von Null verschiedene Funktion  $f \in \mathcal{O}(U)$  mit  $A \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$  gibt.

Jede bei  $x \in M$  holomorphe Funktion  $f$  läßt sich nach Wahl lokaler Koordinaten  $z_1, \dots, z_n$  mit  $z_j(x) = 0$  als konvergente Potenzreihe  $f = \sum a_\alpha z^\alpha$  darstellen. Die kleinste Zahl  $k$ , für die ein Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| = k$  und  $a_\alpha \neq 0$  existiert, heißt *Ordnung* von  $f$  bei  $x$ . Sie hängt nicht von der Wahl der Koordinaten ab und wird mit  $o(f, x) = k$  bezeichnet. Für  $f \in \mathcal{O}(M)$  und  $q \in \mathbb{N}$  sind die Mengen  $\{x \in M : o(f, x) \geq q\}$  analytisch.

**15.3.5 Gute Nullstellen.** Der in 15.1.3 eingeführte Träger  $N \subset J(X)$  des Thetadivisors  $\Theta$  ist eine analytische Menge der Dimension  $g-1$ . Für jeden Primdivisor  $\Theta_\varepsilon$  gilt offenbar

$$(1) \quad \text{Tr}(\Theta_\varepsilon) = \{x \in X : \varepsilon + \mu(x) \in N\}.$$

Sei  $W_1 := \mu(X) \subset J(X)$ . Die Funktion  $\vartheta_e$  ist genau dann konstant  $= 0$ , wenn  $p(e) + W_1 \subset N$ . Wegen  $\mu(P_0) = 0$  ist

$$(2) \quad N_1 := \{\varepsilon \in J(X) : \varepsilon + W_1 \subset N\} \subset N.$$

Die Punkte in  $N \setminus N_1$  nennen wir *gute Nullstellen* der Thetafunktion. Um  $N \setminus N_1 = \emptyset$  auszuschließen, beweisen wir

$$(3) \quad \dim N_1 \leq g-2.$$

Wenn es eine  $(g-1)$ -dimensionale irreduzible Komponente  $E$  von  $N_1$  gäbe, wäre  $E \times X$  irreduzibel und folglich auch das Bild  $\varphi_1(E \times X) \subset N$  unter der eigentlichen holomorphen Abbildung  $\varphi_1: E \times X \rightarrow J(X)$ ,  $(\varepsilon, x) \mapsto \varepsilon + \mu(x)$ . Daher wäre  $E \subset \varphi_1(E \times X) \subset N$ , also  $g-1 = \dim E \leq \dim \varphi_1(E \times X) \leq \dim N = g-1$ . Aus der Irreduzibilität von  $\varphi_1(E \times X)$  folgt

$$(4) \quad \varphi_1(E \times X) = E.$$

Sei  $\varphi: E \times \text{Div}(X) \rightarrow J(X)$ ,  $\varphi(\varepsilon, D) := \varepsilon + \mu(D)$ . Für alle  $\varepsilon \in E$  und alle positiven Divisoren  $D$  gilt  $\varphi(\varepsilon, D) \in E$ . Das folgt mit (4) durch Induktion über  $\text{gr } D$ . Andererseits gibt es nach 14.3.3 zu jedem  $\alpha \in J(X)$  und zu jedem  $\varepsilon \in E$  ein  $D \in X_g$  mit  $\varphi(\varepsilon, D) = \alpha$ . Somit wäre  $E = J(X)$  im Widerspruch zu  $\dim E = g-1 < \dim J(X)$ .  $\square$

**15.3.6 Riemanns Verschiebungsformel.** Für  $W_{g-1} := \mu(X_{g-1})$  gilt mit der Riemannschen Konstanten  $\kappa$  aus 15.3.3 die Formel

$$W_{g-1} = \kappa - N = \kappa + N.$$

*Beweis.* Für jede gute Nullstelle  $\varepsilon$  gilt  $\varepsilon + \mu(P_0) = \varepsilon \in N$ , also  $P_0 \in \text{Tr}(\Theta_\varepsilon)$  wegen 15.3.5(1). Da  $\Theta_\varepsilon$  positiv ist und den Grad  $g$  hat, folgt  $\Theta_\varepsilon - P_0 \in X_{g-1}$  und  $\mu(\Theta_\varepsilon - P_0) = \kappa - \varepsilon$ . Somit ist  $N \setminus N_1 \subset \kappa - W_{g-1}$ . Durch Abschluß folgt  $N \subset \kappa - W_{g-1}$ . Links und rechts stehen Hyperflächen, die rechte ist wie  $X_{g-1}$  irreduzibel. Daher ist  $-N = N = \kappa - W_{g-1}$ .  $\square$

Der Thetadivisor  $\Theta$  auf  $J(X)$  hängt von der kanonischen Zerschneidung ab. Die Verschiebungsformel zeigt, daß sein Träger bis auf eine Translation eindeutig bestimmt ist. Das gilt auch für den Divisor  $\Theta$ , siehe 15.4.4.

**15.3.7 Jacobischer Umkehrsatz.** Sei  $X_g^\circ = \{D \in X_g : \dim |D| = 0\}$  und  $X_g^1 = \{D \in X_g : \dim |D| \geq 1\}$ , also  $X_g = X_g^\circ \uplus X_g^1$ . Nach 13.6.2 liegt  $X_g^\circ$  dicht und offen in  $X_g$ .

**Umkehrsatz.** Für  $\varphi : X_g \rightarrow J(X)$ ,  $\varphi(D) := \kappa - \mu(D)$ , gilt

$$(1) \quad \varphi(X_g^\circ) = J(X) \setminus N_1, \quad \varphi(X_g^1) = N_1.$$

Die Beschränkung  $\varphi : X_g^\circ \rightarrow J(X) \setminus N_1$  ist biholomorph und wird durch  $\varepsilon \mapsto \Theta_\varepsilon$  umgekehrt.

*Beweis.* Wegen der Verschiebungsformel 15.3.6 ist (1) äquivalent zu

$$(1') \quad X_g^1 = \{D \in X_g : \mu(D) - W_1 \subset W_{g-1}\}.$$

Beweis zu (1'): Sei  $D \in X_g$ . Nach 8.1.5 gilt  $D \in X_g^1$  genau dann, wenn es zu jedem  $P \in X$  einen zu  $D - P$  linear äquivalenten Divisor  $B \in X_{g-1}$  gibt. Wegen 14.2.5 ist letzteres zu  $\mu(D) - \mu(P) \in W_{g-1}$  äquivalent.

Da  $\varphi|_{X_g^\circ}$  nach 14.2.5 und 14.4.6 eine Einbettung ist, folgt die letzte Behauptung aus  $\varphi(\Theta_\varepsilon) = \varepsilon$ , siehe Satz 15.3.2.  $\square$

**Folgerung.** Für jeden Divisor  $D \in X_g$  sind äquivalent:

$$D \text{ Primdivisor} \Leftrightarrow \dim |D| = 0 \Leftrightarrow \kappa - \mu(D) \notin N_1. \quad \square$$

**15.3.8 Quotienten von Primfunktionen.** Wie in 15.1.6 ausgeführt wurde, folgt die Darstellung aller meromorphen Funktionen auf  $X$  durch Primfunktionen aus dem

**Lemma.** Sei  $j = 1, 2$ . Zu je zwei Punkten  $Q_j \in Z$  gibt es Primfunktionen  $\vartheta_{e_j}$ , so daß mit  $\varepsilon_j := p(e_j)$  gilt:

$$e_1 - e_2 = h(Q_2) - h(Q_1) \quad \text{und} \quad \Theta_{\varepsilon_1} - \Theta_{\varepsilon_2} = \eta(Q_1) - \eta(Q_2).$$

*Beweis.* Sei  $P_j := \eta(Q_j)$ . Alle allgemeinen Divisoren bilden nach 13.6.2 eine offene und dichte Teilmenge in  $X_{g-1}$ . Dasselbe gilt nach 15.3.5 für alle Divisoren  $D$  mit  $\mu(D) \notin \kappa - \mu(P_j) - N_1$ . Es gibt daher einen allgemeinen Divisor  $D \in X_{g-1}$  mit  $\mu(D) \notin \kappa - \mu(P_j) - N_1$ . Dadurch erreicht man  $\varepsilon_j := \kappa - \mu(D) - \mu(P_j) \notin N_1$ . Wir wählen  $e_1 \in \mathcal{E}_1(X)^*$ , so daß  $p(e_1) = \varepsilon_1$  ist, und definieren  $e_2 := e_1 + h(Q_1) - h(Q_2)$ . Dann ist  $p(e_2) = \varepsilon_2$ .

Wegen  $\varepsilon_j + \mu(P_j) = \kappa - \mu(D) \in \kappa - W_{g-1} = N$  ist  $P_j \in \text{Tr}(\Theta_{\varepsilon_j})$ , siehe 15.3.5(1), also  $\Theta_{\varepsilon_j} - P_j \in X_{g-1}$ . Wegen  $\mu(\Theta_{\varepsilon_j} - P_j) = \mu(D)$  und  $\dim |D| = 0$  folgt  $\Theta_{\varepsilon_j} - P_j = D$  aus 14.2.5. Daher ist  $\Theta_{\varepsilon_1} - \Theta_{\varepsilon_2} = P_1 - P_2$ .  $\square$

## 15.4 Über das Verschwinden der Thetafunktionen

Nach Riemanns Verschiebungsformel ist der Träger  $N$  des Thetadivisors  $\Theta$  das Bild der verschobenen Periodenabbildung  $\varphi := \mu - \kappa : X_{g-1} \rightarrow J(X)$ . Für jedes  $\varepsilon \in N$  ist die Faser  $\varphi^{-1}(\varepsilon) = |D|$  eine Linearschar. Man ordnet  $\varepsilon = \varphi(D)$  die Dimension  $l(D) = 1 + \dim |D|$  zu. Andererseits hat  $\Theta$  bei  $\varepsilon$  einen Wert  $\Theta(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ . Wie in 15.1.4 gesagt wurde, bewies Riemann 1865 in [Ri 5], daß beide Werte gleich sind:

$$(*) \quad l(D) = \Theta(\mu(D) - \kappa).$$

Obwohl dieses Ergebnis weit über hundert Jahre alt ist, hat man bisher keinen einfachen Beweis gefunden. Die für  $l(D) \geq \Theta(\mu(D) - \kappa)$  notwendige Abschätzung der Nullstellenordnung der Thetafunktion ist besonders mühsam. Wir beginnen mit einer Charakterisierung der Dimension  $l(D)$  durch

**15.4.1 W-Differenzen.** Sei  $W_r = \mu(X_r) \subset J(X)$  und  $\varepsilon \in W_{g-1}$ . Wenn  $\varepsilon + \alpha - \beta \in W_{g-1}$  für alle Paare  $\alpha, \beta \in W_s$  gilt, schreiben wir

$$(1) \quad \varepsilon + W_s - W_s \subset W_{g-1}.$$

Diese Inklusion gilt stets für  $s = 0$ . Wenn (1) für ein  $s_0$  gilt, dann auch für alle  $s \leq s_0$ . Für  $s = g$  gilt (1) nicht, weil die linke Seite  $= J(X)$  ist.

**Satz.** Sei  $D \in X_{g-1}$  und  $\varepsilon = \mu(D)$ . Die Dimension  $s = \dim |D|$  ist die größte Zahl, für welche (1) gilt.

*Beweis.* Wir zeigen:

- (i) Für  $s = \dim |D|$  gilt (1).
- (ii) Wenn  $s$  die größte Zahl ist, für welche (1) gilt, ist  $\dim |D| \geq s$ .

Zu (i): Seien  $A, B \in X_s$  gegeben. Zu zeigen ist  $\mu(D) + \mu(A) - \mu(B) \in W_{g-1}$ . Wegen  $l(D - B) \geq l(D) - \text{gr } B \geq 1$  ist  $D - B$  zu einem Divisor in  $X_{g-s-1}$  linear äquivalent, also  $\mu(D) - \mu(B) \in W_{g-s-1}$ . Dann ist

$$\mu(D) + \mu(A) - \mu(B) \in \mu(A) + W_{g-s-1} \subset W_s + W_{g-s-1} \subset W_{g-1}.$$

Zu (ii). Es gibt  $\alpha, \beta \in W_{s+1}$ , so daß  $\mu(D) + \alpha - \beta \notin W_{g-1} = \kappa - N$ , also  $-\mu(D) + \kappa - \alpha + \beta \notin N$ . Beliebige nahe bei  $\alpha$  liegt in  $W_{s+1}$  ein Punkt  $\mu(P_1 + \dots + P_{s+1})$  mit paarweise verschiedenen Stellen  $P_j \in X$ . Weil  $N$  abgeschlossen ist, können wir  $\alpha = \mu(P_1 + \dots + P_{s+1})$  annehmen. Sei  $\beta = \mu(Q_1 + B)$  mit  $Q_1 \in X$  und  $B \in X_s$ . Für alle  $C$  in einer Umgebung  $U$  von  $B$  in  $X_s$  ist  $-\mu(D) + \kappa - \mu(P_1 + \dots + P_{s+1}) + \mu(Q_1) + \mu(C) \notin N$ . Daher ist  $\gamma := -\mu(D) + \kappa - \mu(P_1 + \dots + P_{s+1}) + \mu(C) \notin N_1$ , und es existiert der Divisor  $S := \Theta_\gamma$  mit  $\mu(S) = \mu(D) + \mu(P_1 + \dots + P_{s+1}) - \mu(C)$ , siehe Satz 15.3.2. Die Punkte  $P_j$  liegen nach 15.3.5(1) im Träger von  $S$ , weil  $\mu(P_j) - \mu(D) + \kappa - \mu(P_1 + \dots + P_{s+1}) + \mu(C) \subset \kappa - \mu(D) - W_s + W_s \subset \kappa - W_{g-1} = N$ . Da die  $P_j$  paarweise verschieden sind, hat  $S$  die Gestalt  $P_1 + \dots + P_{s+1} + T$  mit  $T \in X_{g-s-1}$ . Es folgt  $\mu(P_1 + \dots + P_{s+1}) + \mu(T) = \mu(S) = \mu(D) + \mu(P_1 + \dots + P_{s+1}) - \mu(C)$ , also  $\mu(D) = \mu(C + T)$ . Nach dem Abelschen Theorem sind  $D$  und  $C + T$  linear äquivalent. Damit wurde

gezeigt: Zu jedem  $C \in U \subset X_s$  existiert ein  $T \in X_{g-s-1}$ , so daß  $D$  und  $C + T$  linear äquivalent sind. Somit hat  $|D|$  mindestens  $s$  Freiheitsgrade, und nach 8.1.5 folgt  $\dim|D| \geq s$ .  $\square$

**15.4.2 Erste Abschätzung der Nullstellenordnung.** Wegen des letzten Satzes bleibt für den Beweis der Riemannschen Formel (\*) zu zeigen:

$$\Theta(\varepsilon) = s := \max\{r : \varepsilon + W_{r-1} - W_{r-1} \subset N\}.$$

Wir dürfen  $s \geq 1$  voraussetzen und zeigen für  $e \in \mathcal{E}_1(X)^*$  mit  $p(e) = \varepsilon$ :

$$(1) \quad o(\vartheta, e) \geq s, \quad (2) \quad o(\vartheta, e) \leq s.$$

Wir identifizieren  $\mathcal{E}_1(X)^*$  mit  $\mathbb{C}^g$  durch  $\sum z_j a_j \mapsto (z_1, \dots, z_g)$ . Dann sind für  $f \in \mathcal{E}_1(X)^*$  die höheren partiellen Ableitungen  $D^\alpha f$  definiert, und es gilt:  $o(f, e) \geq s \Leftrightarrow D^\alpha f(e) = 0$  für  $|\alpha| < s$ . Für  $e \in \mathcal{E}_1(X)^*$  und  $r \in \mathbb{N}$  sei  $\mathcal{H}_e^r$  die Menge aller Funktionen  $f \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1(X)^*)$  mit der Eigenschaft

$$f(e + h(P_1) - h(Q_1) + \dots + h(P_r) - h(Q_r)) = 0 \text{ für alle } P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r \in Z.$$

Wegen  $p(e) + W_{s-1} - W_{s-1} \subset N$  ist  $\vartheta \in \mathcal{H}_e^{s-1}$ , und (1) folgt aus dem

**Lemma.** Für  $f \in \mathcal{H}_e^r$  ist  $o(f, e) \geq r + 1$ .

*Beweis.* Es gilt  $\mathcal{H}_e^r \subset \mathcal{H}_e^q$  für  $q \leq r$  und  $f \in \mathcal{H}_e^0 \Leftrightarrow f(e) = 0$ . Wir zeigen:

- (i)  $f \in \mathcal{H}_e^1 \Rightarrow \partial f / \partial z_j \in \mathcal{H}_e^0$  für  $j = 1, \dots, g$ .
- (ii)  $f \in \mathcal{H}_e^r \Rightarrow \partial f / \partial z_j \in \mathcal{H}_e^{r-1}$  für  $j = 1, \dots, g$ .

Zu (i): Für jedes  $Q \in Z$  ist  $\varphi := f(e + h - h(Q))$  die Nullfunktion auf  $Z$ . Mit  $f_j := \partial f / \partial z_j$  folgt  $0 = d\varphi = \sum f_j(e + h - h(Q)) dh_j$ . Da die Formen  $\omega_j$  mit  $\eta^* \omega_j = dh_j$  eine Basis von  $\mathcal{E}_1(X)$  bilden, erhält man mit der Koordinate  $z$  auf  $Z = \mathbb{H}$  aus  $dh_j =: u_j dz$  die linear unabhängigen Funktionen  $u_1, \dots, u_g$ . Für alle  $P, Q \in Z$  ist  $0 = \sum f_j(e + h(P) - h(Q)) u_j(P) = 0$ . Mit  $P = Q$  folgt  $0 = \sum f_j(e) u_j$ , also  $f_1(e) = \dots = f_g(e) = 0$ .

Zu (ii): Aus  $f \in \mathcal{H}_e^r$  folgt  $f \in \mathcal{H}_e^1$  für alle  $P_1, Q_1, \dots, P_{r-1}, Q_{r-1} \in Z$  und  $c := e + h(P_1) - h(Q_1) + \dots + h(P_{r-1}) - h(Q_{r-1})$ . Nach (i) folgt  $\partial f / \partial z_j \in \mathcal{H}_c^0$ . Wegen der Beliebigkeit von  $P_1, \dots, Q_{r-1}$  bedeutet dies  $\partial f / \partial z_j \in \mathcal{H}_e^{r-1}$ .

Aus (ii) folgt das Lemma durch Induktion über  $r$ .  $\square$

**15.4.3 Zweite Abschätzung der Nullstellenordnung.** Für  $\varepsilon \in J(X)$  ist  $\Theta(\varepsilon) \leq s := \max\{r : \varepsilon + W_{r-1} - W_{r-1} \subset N\}$ .

*Beweis.* Wegen  $\varepsilon + W_s - W_s \not\subset N = -N$  gibt es Punkte  $A_1, B_1, \dots, A_s, B_s$  in  $Z$ , welche sich in folgendem Sinne in allgemeiner Lage befinden:

Die Bildpunkte  $\eta(A_1), \dots, \eta(B_s) \in X$  sind paarweise verschieden, und es gilt  $\pm \varepsilon + ph(A_1) - ph(B_1) + \dots + ph(A_s) - ph(B_s) \notin N$ .

Sei  $p(e) = \varepsilon$ . Mit der Abbildung  $m : Z^s \rightarrow \mathcal{E}_1(X)^*$ ,

$$m(P_1, \dots, P_s) := e + h(P_1) - h(A_1) + \dots + h(P_s) - h(A_s),$$

und der Funktion  $\sigma := \vartheta \circ m$  auf  $Z^s$  gilt  $o(\vartheta, e) = o(\vartheta, m(A)) \leq o(\sigma, A)$  für  $A = (A_1, \dots, A_s) \in Z^s$ . Also genügt es,  $o(\sigma, A) \leq s$  zu beweisen. Dazu definieren wir analog zu  $\sigma$  die Funktion  $\tau$  mit  $B_j$  statt  $A_j$ . Wegen der allgemeinen Lage ist  $A$  keine Nullstelle von  $\tau$ , also  $o(\sigma, A) = o(\sigma/\tau, A)$ , und



es genügt  $o(\sigma/\tau, A) \leq s$  zu beweisen. Nach 15.3.8 gibt es  $e_j, e'_j \in \mathcal{E}_1(X)^*$  mit  $\varepsilon_j := p(e_j)$ ,  $\varepsilon'_j := p(e'_j) \notin N_1$  sowie

$$(1) \quad e'_j - e_j = h(A_j) - h(B_j) \quad \text{und} \quad \Theta_{\varepsilon_j} - \Theta_{\varepsilon'_j} = \eta(A_j) - \eta(B_j).$$

Sei  $t_j := \vartheta_{e_j}/\vartheta_{e'_j}$ . Das Produkt  $G(P_1, \dots, P_s) = \prod_{j,k=1}^s t_j(P_k)$  ist eine Funktion auf  $Z^s$  mit der Ordnung  $o(G, A) = s$ . Es genügt zu zeigen, daß sich  $G$  und  $F := \sigma/\tau$  nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die partiellen Ableitungen  $\partial_1(G/F), \dots, \partial_s(G/F)$  in Richtung der Faktoren des kartesischen Produktes  $Z^s$  verschwinden. Da  $F$  und  $G$  symmetrische Funktionen von  $P_1, \dots, P_s$  sind, genügt es,  $\partial_1(G/F)(P_1, \dots, P_s) = 0$  für alle  $(P_1, \dots, P_s)$  zu zeigen, welche

$$p(e) + ph(P_1) - ph(A_1) + \dots + ph(P_s) - ph(A_s) \notin N,$$

$$p(e) + ph(P_1) - ph(B_1) + \dots + ph(P_s) - ph(B_s) \notin N$$

erfüllen. Denn diese Punkte bilden eine offene und dichte Teilmenge in  $Z^s$ . Wir betrachten  $G/F$  bei festen  $P_2, \dots, P_s$  als Funktion von  $P = P_1 \in Z$ . Der Zähler ist bis auf einen konstanten Faktor  $\neq 0$  die Funktion  $t := t_1 \dots t_r$ , und der Nenner ist der Quotient  $f = \vartheta_a/\vartheta_b$  der Primfunktionen zu

$$a := e - h(A_1) + h(P_2) - h(A_2) + \dots + h(P_s) - h(A_s) \quad \text{und}$$

$$b := e - h(B_1) + h(P_2) - h(B_2) + \dots + h(P_s) - h(B_s).$$

Wir zeigen, daß  $t/f$  konstant ist: Für die Homotopieklassen  $\alpha_k, \beta_k$  der Rückkehrschnitte gilt nach (1) und 15.1.6(1)

$$t_j \circ \alpha_k = t_j \quad \text{und} \quad t_j \circ \beta_k = \exp(2\pi i(h_k(A_j) - h_k(B_j))) \circ t_j,$$

$$f \circ \alpha_k = f \quad \text{und} \quad f \circ \beta_k = \exp(2\pi i \sum_j (h_k(A_j) - h_k(B_j))) \circ f.$$

Daher gilt  $(t/f) \circ \gamma = t/f$  für alle  $\gamma \in \mathcal{D}(\eta)$ , also  $t/f = u \circ \eta$  für eine Funktion  $u \in \mathcal{M}(X)$ . Sie hat wegen (1) den Hauptdivisor

$$(u) = \sum_j (\eta(A_j) - \eta(B_j)) - (\Theta_{p(a)} - \Theta_{p(b)}).$$

Wegen  $\varepsilon + W_{s-1} - W_{s-1} \subset N$  liegen die paarweise verschiedenen Punkte  $\eta(A_1), \dots, \eta(A_s)$  im Träger  $\text{Tr}(\Theta_{p(a)}) = \{x \in X : p(a) + \mu(x) \in N\}$ , siehe 15.3.5(1). Daher gilt  $\Theta_{p(a)} = \eta(A_1) + \dots + \eta(A_s) + C$  mit  $C \in X_{g-s}$ . Entsprechend ist  $\Theta_{p(b)} = \eta(B_1) + \dots + \eta(B_s) + D$  mit  $D \in X_{g-s}$ . Somit ist  $(u) = D - C$ . Aus Satz 15.3.2, angewendet auf  $\Theta_{p(a)}$  und  $\Theta_{p(b)}$  folgt  $\mu(C) = \kappa - \varepsilon - ph(P_2) - \dots - ph(P_s) = \mu(D)$ . Wegen des Abelschen Theorems sind dann  $C$  und  $D$  linear äquivalent. Nun ist  $l(C) \leq l(\Theta_{p(a)}) = 1$ , letzteres nach der Folgerung in 15.3.7. Somit ist  $D = C$ , also  $(u) = 0$ . Daher sind  $u$  und  $t/f = u \circ \eta$  konstant.  $\square$

**15.4.4 Eindeutigkeit der Thetafunktion.** Da die Dimensionen der Divisoren  $D \in X_{g-1}$  nicht von der kanonischen Zerschneidung der Fläche  $X$  abhängen, folgt aus der Riemannschen Formel (\*):

Für die Thetafunktionen  $\vartheta_1, \vartheta_2$  und ihre Thetadivisoren  $\Theta_1, \Theta_2$  zu zwei verschiedenen Zerschneidungen gibt es eine Konstante  $d \in \mathcal{E}_1(X)^*$  und eine Funktion  $f \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1(X)^*)$ , so daß  $\vartheta_2(z) = \exp f(z) \cdot \vartheta_1(z + d)$  für alle  $z \in \mathcal{E}_1(X)^*$  sowie  $\Theta_2(\varepsilon) = \Theta_1(\varepsilon + p(d))$  für  $\varepsilon \in J(X)$  gelten.  $\square$

**15.4.5 Ausblick.** Für  $\varepsilon \in W_{g-1}$  läßt sich der Wert  $\Theta(\varepsilon - \kappa)$  als Grad des projektivierten Tangentialkegels  $T_{\varepsilon - \kappa}N = T_{\varepsilon}W_{g-1} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}_1(X)^*) = \mathbb{P}^{g-1}$  deuten. G. Kempf zeigt für alle  $d < g$ , siehe [Kem 1]:

*Für jedes  $\varepsilon \in W_d$  ist  $T_{\varepsilon}W_d \subset \mathbb{P}^{g-1}$  die Vereinigung aller projektiven Unterräume  $\bar{D}$  der Divisoren  $D \in X_d$  mit  $\mu(D) = \varepsilon$ . Dieser Kegel hat den Grad  $\binom{g-d+r}{r}$  für  $r := l(D) - 1$ .*

Für die Definition von  $\bar{D}$  siehe Aufgabe 13.7.13.– Die glatten Punkte werden also durch folgende äquivalente Aussagen beschrieben:

$W_d$  ist bei  $\varepsilon$  glatt.  $\Leftrightarrow$  Die Faser  $\mu^{-1}(\varepsilon)$  enthält genau einen Divisor  $D \in X_d$ .  
 $\Leftrightarrow l(D) = 1 \Leftrightarrow T_{\varepsilon}W_d = \bar{D} \Leftrightarrow T_{\varepsilon}W_d$  hat den Grad 1.

Kempfs Ergebnisse werden auch in [ACGH] und [GH] bewiesen.

## 15.5 Der Torellische Satz

Jede kanonisch zerschnittene Riemannsche Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  bestimmt eine Periodenmatrix  $T \in \mathcal{H}_g$ . Ist  $X$  durch  $T$  bis auf Isomorphie bestimmt? Welche Matrizen  $T \in \mathcal{H}_g$  sind Periodenmatrizen Riemannscher Flächen? Wir befassen uns zunächst mit der ersten Frage und stellen die zweite, welche auch *Schottkysches Problem* genannt wird, bis 15.7 zurück.

Durch  $T$  sind der Periodentorus  $J(X)$ , die Thetafunktion, der Thetadivisor und sein Träger  $N \subset J(X)$  bestimmt. Wegen der Verschiebungsformel in 15.3.6 ist damit auch  $W_{g-1} := \mu(X_{g-1}) \subset J(X)$  bis auf eine Translation bestimmt. Um die erste Frage mit "ja" zu beantworten, genügt daher zu zeigen: *Zwei Flächen  $X$  und  $X'$  sind isomorph, sobald die entsprechenden Paare  $(J(X), W_{g-1})$  und  $(J(X'), W'_{g-1})$  isomorph sind.*

Dieses Ergebnis wurde 1913/14 von Torelli [To] veröffentlicht. Der im folgenden auszuführende Beweis stammt aus [Mar]. Die vorbereitenden Lemmata gehen auf Weil [Wil 2] zurück, der sie für einen anderen Beweis benutzte. In [ACGH] findet man auf Seite 245 ff. einen Beweis von Andreotti und auf Seite 261 einen Überblick über weitere Beweise.

**15.5.1 Erstes W-Lemma.** Sei  $0 \leq r \leq g-1$ . Für  $W_n := \mu(X_n) \subset J$  und  $a \in J$  gilt:  $a \in W_{g-r-1} \Leftrightarrow a + W_r \subset W_{g-1}$ .

*Beweis.*  $\Rightarrow$  ist klar. Zu  $\Leftarrow$ : Sei  $P_0 \in X$  der Basispunkt mit  $\mu(P_0) = 0$ . Dann ist  $a = a + \mu(rP_0) \in W_{g-1}$ , also  $a = \mu(A)$  für ein  $A \in X_{g-1}$ . Sei  $K$  ein kanonischer Divisor. Wir zeigen unten:

(\*) *Der Divisor  $K - A + rP_0$  hat  $r$  Freiheitsgrade, d.h. zu jedem  $D \in X_r$  gibt es ein  $B \in X_{g-1}$ , so daß  $K - A + rP_0 \sim D + B$  (linear äquivalent).*

Nach 8.1.5 ist  $l(K - A + rP_0) > r$ , also  $l(A - rP_0) \geq 1$  nach (RR). Daher ist  $a = \mu(A - rP_0) \in W_{g-r-1}$ .

Zu (\*): Nach der Voraussetzung gibt es ein  $B' \in X_{g-1}$  mit  $\mu(A + D) = \mu(B') = \mu(B' + rP_0)$ , also  $A + D \sim B' + rP_0$  wegen des Abelschen Theorems. Es folgt  $K - A + rP_0 \sim D + K - B'$ . Nach (RR) ist  $l(K - B') = l(B') \geq 1$ , also  $K - B' \sim B$  für ein  $B \in X_{g-1}$ .  $\square$

**15.5.2 Zweites W-Lemma.** Für  $0 \leq r \leq g-1$  gilt

$$W_{g-r-1} = \bigcap_{b \in W_r} (-b + W_{g-1}).$$

*Beweis.* Zu  $\subset$ : Sei  $b = \mu(B)$  mit  $b \in X_r$ . Für jedes  $A \in X_{g-r-1}$  ist  $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A+B) \in W_{g-1}$ . Zu  $\supset$ : Sei  $a \in \cap(-b + W_{g-1})$ . Dann ist  $a + W_r \subset W_{g-1}$ , also nach dem ersten W-Lemma  $a \in W_{g-r-1}$ .  $\square$

**15.5.3 Drittes W-Lemma.** Der kanonische Divisor  $K$  hat  $g-1$  Freiheitsgrade. Daraus folgt

$$(1) \quad k - W_{g-1} = W_{g-1} \quad \text{für} \quad k := \mu(K). \quad \square$$

**Lemma.** Sei  $0 \leq r \leq g-2$ , sei  $(x, y) \in W_1 \times W_{g-r-1}$ . Aus  $W_{r+1} \not\subset x - y + W_{g-1}$  folgt

$$(2) \quad (x - y + W_{g-1}) \cap W_{r+1} = (x + W_r) \cup (W_{r+1} \cap (k - y - W_{g-2})).$$

*Beweis.* Sei  $x = \mu(P)$  für  $P \in X$ , und sei  $y = \mu(D)$  für  $D \in X_{g-r-1}$ . Angenommen  $P \in \text{Tr}(D)$ . Dann ist  $y - x \in W_{g-r-2}$ , somit

$W_{r+1} = x - y + y - x + W_{r+1} \subset x - y + W_{g-r-2} + W_{r+1} \subset x - y + W_{g-1}$ . Das ist nach der Voraussetzung ausgeschlossen, also  $P \notin \text{Tr}(D)$ .

Wir zeigen nun, daß bei (2) die linke in der rechten Seite enthalten ist: Sei  $u \in (x - y + W_{g-1}) \cap W_{r+1}$ , also  $u = \mu(P - D + D') = \mu(D'')$  mit  $D' \in X_{g-1}$  und  $D'' \in X_{r+1}$ . Mit dem Abelschen Theorem folgt die lineare Äquivalenz  $P - D + D' \sim D''$ .

Wenn  $P - D + D' = D''$  ist, gilt  $P \in \text{Tr}(D'')$  wegen  $P \notin \text{Tr}(D)$ , also  $D'' = P + C$  mit  $C \in X_r$ . Es folgt  $u \in x + W_r$ .

Wenn  $P + D' \neq D + D''$  ist, enthält  $|P + D'|$  mindestens diese beiden Elemente, also ist  $l(P + D') \geq 2$ . Nach 8.1.5 gibt es zu jedem  $Q \in X$  ein  $B \in X_{g-1}$ , so daß  $Q + B \sim P + D'$ , also  $u + y \in \cap(w + W_{g-1})$  mit dem Durchschnitt über alle  $w \in W_1$ . Nach dem zweiten Lemma für  $r = 1$  ist  $W_{g-2} = \cap(-w + W_{g-1})$ , also  $k - W_{g-2} = \cap(w + W_{g-1})$  wegen (1). Es folgt  $u + y \in k - W_{g-2}$ , d.h.  $u \in k - y - W_{g-2}$ .

Zur Inklusion der rechten in der linken Seite von (2): Es ist  $x + W_r \subset W_{r+1}$ . Aus  $x = x - y + y = x - y + \mu(D) \in x - y + W_{g-r-1}$  folgt  $x + W_r \subset x - y + W_r + W_{g-r-1} \subset x - y + W_{g-1}$ . Schließlich ist  $k - y - W_{g-2} = k - x + (x - y) - W_{g-2} \subset k + (x - y) - W_{g-1} = x - y + W_{g-1}$ .  $\square$

**15.5.4 Torus-Abbildungen.** Jede holomorphe Abbildung  $f : \mathbb{C}^n / \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^q / \Gamma'$  zwischen kompakten, komplexen Tori wird durch eine affine Abbildung  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^q$  induziert.

*Beweis.* Seien  $p : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / \Gamma =: T$  und  $p' : \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{C}^q / \Gamma' =: T'$  die Projektionen. Nach dem Monodromiesatz gibt es eine holomorphe Abbildung  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^q$  mit  $p' \circ \varphi = f \circ p$ . Für jedes  $\gamma \in \Gamma$  ist die Abbildung  $z \mapsto \varphi(z + \gamma) - \varphi(z)$  konstant, weil ihre Werte in  $\Gamma'$  liegen. Für die Komponenten  $\varphi_j$  von  $\varphi$  folgt

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z + \gamma) = \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_k}(z) \text{ für } z \in \mathbb{C}^n \text{ und } \gamma \in \Gamma.$$

Daher faktorisiert  $\partial \varphi_j / \partial z_k$  über  $T$ , und wegen der Kompaktheit von  $T$  sind alle partiellen Ableitungen  $\partial \varphi_j / \partial z_k$  konstant. Somit gilt  $\varphi(z) = Az + b$  mit einer konstanten Matrix  $A$  und einem konstanten Vektor  $b$ .  $\square$

**15.5.5 Satz (Torelli).** *Seien  $X$  und  $Y$  zwei Flächen vom Geschlecht  $g \geq 1$ . Wenn es eine biholomorphe Abbildung  $\Phi : J(X) \rightarrow J(Y)$  zwischen ihren Periodentori gibt, welche den Träger  $N$  eines Thetadivisors von  $X$  auf den Träger  $\Phi(N)$  eines Thetadivisors von  $Y$  abbildet, sind  $X$  und  $Y$  isomorph.*

Nach Satz 15.5.4 gibt es ein  $b \in J(Y)$ , so daß  $b + \Phi : J(X) \rightarrow J(Y)$  ein Isomorphismus der Torusgruppen ist. Der Periodenhomomorphismus  $\nu : \text{Div}(Y) \rightarrow J(Y)$  kann daher durch den Homomorphismus  $(b + \Phi)^{-1} \circ \nu : \text{Div}(Y) \rightarrow J(X) =: J$  ersetzt werden, welcher wieder mit  $\nu$  bezeichnet wird. Die Lemmata 15.5.1-3 gelten für die analytischen Mengen  $W_n = \mu(X_n)$  und  $V_n = \nu(Y_n)$  in  $J$ . Wegen der Verschiebungsformel lautet die Voraussetzung:  $W_{g-1} = d + V_{g-1}$  für ein  $d \in J$ . Es genügt zu zeigen:

(\*) *Es gibt eine Konstante  $c \in J$  mit  $W_1 = c \pm V_1$ .*

**15.5.6 Beweis des Satzes von Torelli.** Sei  $r \in \{0, \dots, g-2\}$  der minimale Grad, für den eine Konstante  $a \in J$  existiert, so daß  $V_1 \subset a \pm W_{r+1}$  ist. Wir nehmen  $V_1 \subset a + W_{r+1}$  an. Zur Vereinfachung der Notation identifizieren wir  $Y$  und  $V_1$  mittels  $\nu$ .

Für jedes  $x \in W_1$  ist der Durchschnitt  $M(x) := V_1 \cap (a + x + W_r)$  endlich.  
(\*\*) *Tatsächlich besteht  $M(x)$  aus genau einem Punkt  $P(x) \in V_1$ . Die in  $J$  gebildete Differenz  $x - P(x)$  nimmt für alle  $x \in W_1$  nur endlich viele Werte an.*

Daher gibt es ein  $c \in J$ , so daß  $x = c + P(x) \in c + V_1$  für unendlich viele  $x \in W_1$  gilt, also  $W_1 = c + V_1$  ist. – Der folgende Beweis zu (\*\*) benutzt die  $W$ -Lemmata 15.5.2-3 und Eigenschaften der Primdivisoren  $\Theta_\varepsilon$ .

Es sei stets  $x \in W_1$  und  $y \in W_{g-r-1}$ . Die Teilmenge

$$Z := \{(x, y) : V_1 \subset a + x - y + W_{g-1}\} \subset W_1 \times W_{g-r-1}$$

ist analytisch. Für jedes  $x$  und jedes  $y$  sind

$$Z(x) := \{y : (x, y) \in Z\} \subset W_{g-r-1} \text{ und } Z'(y) := \{x : (x, y) \in Z\} \subset W_1$$

analytische Teilmengen. Insbesondere ist  $Z'(y) = W_1$  oder endlich.

(1) *Für jedes  $x$  ist  $Z(x) \neq W_{g-r-1}$  und  $M(x) := V_1 \cap (a + x + W_r)$  endlich.*

*Beweis zu (1).* Aus  $Z(x) = W_{g-r-1}$  folgt nach 15.5.2

$$V_1 \subset a + x + \bigcap_{y \in W_{g-r-1}} (-y + W_{g-1}) = a + x + W_r$$

im Widerspruch zur Minimalität von  $r$ . – Wenn  $M(x)$  nicht endlich ist, gilt  $V_1 = M(x) \subset a + x + W_r$  im Widerspruch zur Minimalität von  $r$ .  $\square$

(2) *Die analytische Menge  $N(y) := V_1 \cap (a + k - y - W_{g-2})$  ist genau dann  $= V_1$ , wenn  $y \in Z(x)$  für alle  $x \in W_1$  gilt. Sonst ist  $N(y)$  endlich.*

*Beweis zu (2).* Nach 15.5.2 gilt  $N(y) = V_1 \Leftrightarrow V_1 \subset a + k - y - W_{g-2} = a + k - y - \bigcap_{x \in W_1} (-x + W_{g-1})$ . Wegen  $k - W_{g-1} = W_{g-1}$  ist dies zu  $V_1 \subset a + x - y + W_{g-1}$ , also zu  $y \in Z(x)$  für alle  $x$  äquivalent.  $\square$

Wegen (1) ist  $Z_0 := \bigcap_{x \in W_1} Z(x) \subset W_{g-r-1}$  eine echte analytische Teilmenge. Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$y \in Z_0 \Leftrightarrow Z'(y) = W_1 \Leftrightarrow N(y) = V_1. \quad \square$$

Wegen  $\varepsilon + V_1 \not\subset V_{g-1} - \kappa$ , vgl. 15.3.5(1) und 15.3.6, läßt sich die Abbildung

$$\Theta : (W_1 \times W_{g-r-1}) \setminus Z \rightarrow Y_g, \Theta(x, y) := \Theta_\varepsilon \text{ mit } \varepsilon := y - x - a - d - \kappa,$$

definieren; denn  $\varepsilon + V_1 \subset V_{g-1} - \kappa \Leftrightarrow y - x - a - d + V_1 \subset V_{g-1} \Leftrightarrow y - x - a + V_1 \subset W_{g-1} \Leftrightarrow (x, y) \in Z$ . Nach 15.3.3 gilt

$$(3) \quad \nu \circ \Theta(x, y) = 2\kappa + a + d + x - y. \quad \square$$

$$(4) \quad \text{Tr}(\Theta(x, y)) = M(x) \cup N(y).$$

*Beweis zu (4).* Nach 15.3.5(1) ist  $\text{Tr}(\Theta(x, y)) = \{z \in V_1 : \varepsilon + z \in V_{g-1} - \kappa\} = V_1 \cap (x - y + a + d + V_{g-1}) = V_1 \cap (a + x - y + W_{g-1})$ . Für jedes  $y \notin Z(x)$  gilt  $W_{r+1} \not\subset x - y + W_{g-1}$ . Denn sonst wäre  $V_1 \subset a + W_{r+1} \subset a + x - y + W_{g-1}$ , also  $y \in Z(x)$ . Mit Lemma 15.5.3 folgt

$$W_{r+1} \cap (x - y + W_{g-1}) = (x + W_r) \cup (W_{r+1} \cap (k - y - W_{g-2}))$$

und damit wegen  $V_1 \subset a + W_{r+1}$  auch

$$V_1 \cap (a + x - y + W_{g-1}) = (V_1 \cap (a + x + W_r)) \cup (V_1 \cap (a + k - y - W_{g-2})).$$

Links steht  $\text{Tr}(\Theta(x, y))$  und rechts  $M(x) \cup N(y)$ .  $\square$

(5) Für jedes  $x$  ist  $M(x) \neq \emptyset$ .

*Beweis zu (5).* Wenn  $M(x_0) = \emptyset$  ist, gibt es eine Umgebung  $U$  von  $x_0$  in  $W_1$  mit  $M(x) = \emptyset$  für alle  $x \in U$ . Sei  $y \notin Z_0$ . Dann sind  $Z'(y)$  und  $N(y)$  endlich. Für jedes  $x \in U \setminus Z'(y)$  ist  $\text{Tr}(\Theta(x, y)) \subset N(y)$ . Daher ist  $\{\Theta(x, y) : x \in U \setminus Z'(y)\}$  eine endliche Menge. Aber die Menge ihrer  $\nu$ -Bilder  $\{\nu \circ \Theta(x, y)\} = 2\kappa + a + d - y + (U \setminus Z'(y))$  ist unendlich.  $\square$

(6) Es gibt keinen von  $y$  unabhängigen Divisor  $D \in Y_2$  mit  $\Theta(x, y) - D \geq 0$  für alle  $y \notin Z(x)$ .

*Beweis zu (6).* Wenn man  $\Theta(x, y) - D \geq 0$ , d.h.  $\Theta(x, y) - D \in Y_{g-2}$  annimmt und darauf  $\nu$  anwendet, folgt  $b - y \in V_{g-2}$  mit  $b := 2\kappa + a + d - \nu(D) + x$ , also  $W_{g-r-1} \setminus Z(x) \subset b - V_{g-2}$  und nach Hüllenbildung  $W_{g-r-1} \subset b - V_{g-2}$ .

Nach 15.5.2 ist  $b + V_1 = \bigcap_{z \in V_{g-2}} (b - z + V_{g-1}) \subset \bigcap_{w \in W_{g-r-1}} (w + V_{g-1}) = k - d + \bigcap_{w \in W_{g-r-1}} (w - W_{g-1})$ . Indem man 15.5.2 noch einmal anwendet, folgt  $V_1 \subset b + d - k + \bigcap_{w \in W_{g-r-1}} (w + W_{g-1}) = b + d - k + W_r$ . Das widerspricht der Minimalität von  $r$ .  $\square$

(7) Für jedes  $x$  ist  $\sharp M(x) = 1$ .

*Beweis zu (7).* Nach (5) ist  $M(x) \neq \emptyset$ . Wenn es zwei verschiedenen Punkte  $P \neq Q$  in  $M(x)$  gäbe, entstünde mit  $D := P + Q$  ein Widerspruch zu (6).

Wir definieren  $P : W_1 \rightarrow V_1$  durch  $M(x) = \{P(x)\}$ . Für jedes  $y \notin Z(x)$  ist  $\Theta(x, y) - P(x) \in V_{g-1}$ . Für den Träger dieses Divisors gilt

$$(8) \quad \text{Tr}(\Theta(x, y) - P(x)) \subset N(y).$$

*Beweis zu (8).* Wenn man  $\text{Tr}(\Theta(x, y_0) - P(x)) \not\subset N(y_0)$  annimmt, folgt wegen  $\text{Tr}(\Theta(x, y_0) - P(x)) \subset \text{Tr}(\Theta(x, y_0))$  und (4)  $P := P(x) \in \text{Tr}(\Theta(x, y_0) - P) \setminus N(y_0)$ . Der Punkt  $P$  und die endliche Menge  $N(y_0)$  besitzen in  $Y$  disjunkte Umgebungen  $U_1$  bzw.  $U_2$ . Wie  $\Theta_\varepsilon$  von  $\varepsilon$  (siehe 15.3.7) hängt  $\Theta(x, y) - P$  von  $y$  stetig ab. Für alle  $y$  in einer Umgebung von  $y_0$  in  $W_{g-r-1}$  gilt daher  $\text{Tr}(\Theta(x, y) - P) \cap U_1 \neq \emptyset$  und  $N(y) \subset U_2$ , also  $P \in \text{Tr}(\Theta(x, y) - P)$ .

In  $W_{g-r-1} \setminus Z(x)$  bilden alle  $y$  mit  $P \in \text{Tr}(\Theta(x, y) - P)$  eine analytische Teilmenge  $B$ . Sie enthält die gerade angegebene Umgebung von  $y_0$ . Weil  $W_{g-r-1} \setminus Z(x)$  irreduzibel ist, folgt  $B = W_{g-r-1} \setminus Z(x)$ , d.h. für alle  $y \in W_{g-r-1} \setminus Z(x)$  gilt  $P \in \text{Tr}(\Theta(x, y) - P)$ . Dann erhält man mit  $D := 2P$  einen Widerspruch zu (6).  $\square$

Mit einem Schubfachargument wird der Beweis abgeschlossen: Man wählt  $y \notin Z_0$ . Dann sind  $Z'(y)$  und  $N(y)$  endlich. Für alle  $x \in W_1 \setminus Z'(y)$  ist  $\Theta(x, y)$  definiert. Wegen (8) ist die Menge  $\{\Theta(x, y) - P(x) : x \in W_1 \setminus Z'(y)\}$  endlich. Daher ist die Menge ihrer  $\nu$ -Bilder  $2\kappa + a + d - y - P(x) + x$  endlich. Somit ist  $x - P(x) = c$  für unendlich viele  $x \in W_1$  konstant, also  $\sharp(W_1 \cap (c + V_1)) = \infty$  und daher  $W_1 = c + V_1$ .  $\square$

## 15.6 Die Polarisierung

Für Leser, welche die Cohomologietheorie höher-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, holomorphe Geradenbündel und ihre Beschreibung durch Chernsche Klassen kennen, wird gezeigt, wie sich die Riemannsche Thetafunktion in die Welt dieser Begriffe einordnet.

**15.6.1 Die Cohomologie der Tori.** Sei  $V$  ein komplexer Vektorraum der Dimension  $g$ , und sei  $\Gamma < V$  ein Gitter vom maximalen Rang  $2g$ . Die Projektion  $p : V \rightarrow V/\Gamma =: J$  ist eine universelle Überlagerung mit der abelschen Deckgruppe  $\Gamma$ . Sie wird mit der Fundamentalgruppe und der ersten Homologiegruppe identifiziert:  $\pi(J) = H_1(J, \mathbb{Z}) = \Gamma$ .

**Satz.** *Der ganzzahlige Cohomologiering  $H^*(J, \mathbb{Z}) = \Lambda^* \Gamma$  ist die alternierende  $\mathbb{Z}$ -Algebra der freien abelschen Gruppe  $\Gamma$ .*

Einen Beweis findet man z.B. in [LB], S. 13.

Die Elemente von  $H^2(V/\Gamma, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 \Gamma$  sind schiefsymmetrische  $\mathbb{Z}$ -Bilinearformen  $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ . Wenn  $J = V/\Gamma = \mathcal{E}_1(X)^*/H_1(X) = J(X)$  der Periodentorus einer kompakten Riemannschen Fläche  $X$  ist, nennt man die Schnittform  $s : H_1(X) \times H_1(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , aufgefaßt als Element  $s \in \Lambda^2 H_1(X) = H^2(J, \mathbb{Z})$ , die *Polarisierung* des Torus.

**15.6.2 Geradenbündel auf Tori.** Unter günstigen Umständen sind Geradenbündel  $L$  über einem Torus  $V/\Gamma$  durch ihre Chernsche Klasse  $c(L) \in H^2(V/\Gamma, \mathbb{Z}) = \Lambda^2 \Gamma$  fast eindeutig bestimmt.

**Satz.** Wenn  $c(L) \in \Lambda^2 \Gamma$  nicht entartet ist, gibt zu jedem Geradenbündel  $L'$  mit derselben Klasse  $c(L') = c(L)$  eine Torustranslation  $t : V/\Gamma \rightarrow V/\Gamma$ , so daß  $L' = t^*L$  das induzierte Bündel ist.

Einen Beweis findet man z.B. in [LB], S. 41.

**15.6.3 Automorphiefaktoren.** Eine Funktion  $f : \Gamma \times V \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $(c, z) \mapsto f(c, z)$  heißt *Automorphiefaktor*, wenn sie holomorph von  $z$  abhängt und

$$(1) \quad f(a + b, z) = f(a, z + b) \cdot f(b, z) \quad \text{für } a, b \in \Gamma, z \in V$$

erfüllt. Sie bestimmt folgendes holomorphe Geradenbündel  $\pi : L \rightarrow V/\Gamma$ : Auf dem Produkt  $\mathbb{C} \times V$  operiert  $\Gamma$  durch

$$(2) \quad c \cdot (y, z) := (f(c, z)y, z + c).$$

Der Orbit von  $(y, z)$  wird mit  $[y, z]$  bezeichnet. Dann ist  $L$  der Orbitraum, und die Projektion lautet  $\pi[y, z] := z + \Gamma$ .

Jeder holomorphe Schnitt  $\sigma : V/\Gamma \rightarrow L$  hat die Gestalt  $z + \Gamma \mapsto [\vartheta(z), z]$ . Dabei erfüllt  $\vartheta \in \mathcal{O}(V)$  die *Translationsformel*

$$(3) \quad \vartheta(z + c) = f(c, z)\vartheta(z) \quad \text{für } c \in \Gamma, z \in V.$$

Der Vektorraum  $\mathcal{L}(L)$  aller holomorphen Schnitte entspricht dem Vektorraum dieser Funktionen  $\vartheta$ .

**Satz.** Die Chernsche Klasse  $c(L) \in \Lambda^2 \Gamma$  läßt sich folgendermaßen aus dem Automorphiefaktor  $f$  berechnen: Man wählt zu jedem  $c \in \Gamma$  eine Funktion  $f_c \in \mathcal{O}(V)$  mit  $f(c, z) = \exp(-2\pi i f_c(z))$ . Dann gilt

$$(4) \quad c(L)(a, b) = f_b(z + a) - f_b(z) - f_a(z) + f_a(z).$$

Einen Beweis findet man z.B. in [LB], S. 25.

**15.6.4 Geradenbündel zu Siegelschen Matrizen.** Wie in 15.2.2 bilden wir zur Matrix  $T \in \mathcal{H}_g$  das Gitter  $\Gamma = \mathbb{Z}a_1 + \dots + \mathbb{Z}a_g + \mathbb{Z}b_1 + \dots + \mathbb{Z}b_g$ . Dann ist

$$(1) \quad f : \Gamma \times \mathbb{C}^g \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad f(c, z) := \exp(-\pi i \langle c'', 2z + Tc'' \rangle)$$

ein Automorphiefaktor. Das entsprechende Bündel  $L = L(T)$  über  $\mathbb{C}^g/\Gamma$  hat wegen des Periodizitätssatzes in 15.2.2 bis auf einen konstanten Faktor nur den Schnitt  $\sigma(p(z)) = [z, \vartheta(z, T)]$ , also  $\dim \mathcal{L}(L) = 1$ . Die Berechnung der Chernschen Klasse nach Satz 15.6.3 ergibt

$$(2) \quad c(L)(a_j, a_k) = 0, \quad c(L)(b_j, b_k) = 0, \quad c(L)(a_j, b_k) = \delta_{jk}. \quad \square$$

**15.6.5 Riemannsche Geradenbündel.** Sei  $X$  eine Fläche vom Geschlecht  $g > 0$ . Jede symplektische Basis  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$  der Homologie  $H_1(X)$  bestimmt nach 15.2.5 eine Siegelsche Matrix  $T$ . Das zugehörige Bündel  $L = L(T)$  über dem Periodentorus  $J(X)$  nennen wir das *Riemannsche Geradenbündel* zur Basis  $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ . Seine holomorphen Schnitte werden nach 15.6.4 durch die Riemannsche Thetafunktion  $\vartheta = \vartheta(-, T)$  beschrieben. Wegen  $\dim \mathcal{L}(L) = 1$  ist der Thetadivisor  $\Theta$  zu  $\vartheta$  ist durch  $L$  eindeutig bestimmt:

(1) Für jeden Schnitt  $\sigma \in \mathcal{L}(L) \setminus \{0\}$  gilt  $\Theta(\varepsilon) = o(\sigma, \varepsilon)$  für alle  $\varepsilon \in J(X)$ .

Aus 15.6.4(2) folgt:

(2) Alle Riemannschen Geradenbündel haben dieselbe Chernsche Klasse, nämlich die Schnittform oder Polarisierung  $s \in \Lambda^2 H_1(X)$ .  $\square$

Da  $s$  nicht entartet ist, folgt aus 15.6.2 der

**Satz.** Zu je zwei symplektischen Basen von  $H_1(X)$  gibt es eine Translation  $t$  des Periodentorus  $J(X)$ , so daß  $L' = t^*L$  und  $\Theta' = \Theta \circ t$  für die entsprechenden Riemannschen Geradenbündel bzw. Thetadivisoren gilt. Für die Thetafunktionen folgt  $\vartheta' = (\exp f) \cdot (\vartheta \circ t)$  mit  $f \in \mathcal{O}(\mathcal{E}_1(X)^*)$ .  $\square$

**15.6.6 Homologische Version des Torellischen Satzes.** Zwei kompakte Riemannsche Flächen  $X$  und  $X'$  vom Geschlecht  $g \geq 1$  sind genau dann isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $\Phi: J \rightarrow J'$  ihrer Periodentori gibt, so daß für die Polarisierungen  $\Phi^*(s') = s$  gilt.

*Beweis.* Seien  $L \rightarrow J$  und  $L' \rightarrow J'$  Riemannsche Bündel zu kanonischen Zerschneidungen von  $X$  bzw.  $X'$ . Seien  $N \subset J$  und  $N' \subset J'$  die Träger ihrer Thetadivisoren. Nach 15.6.5(2) und der Voraussetzung ist  $c(\Phi^*L') = \Phi^*(c(L')) = \Phi^*(s') = s = c(L)$ . Nach Satz 15.6.2 gibt es eine Translation  $t: J \rightarrow J$  mit  $(\Phi \circ t)^*L' = L$ . Mit 15.6.5(1) folgt  $(\Phi \circ t)(N) = N'$ . Damit sind die Voraussetzungen des Torellischen Satzes in 15.5.5 erfüllt.  $\square$

## 15.7 Das Schottkysche Problem

Periodenmatrizen kompakter Riemannscher Flächen sind Siegelsch, siehe 15.2.5. Aber nicht jede Siegelsche Matrix ist die Periodenmatrix einer Fläche. Das „wußte“ bereits Riemann. Denn in [Ri 3], Artikel 12, zählt er  $3g - 3$  Parameter, die benötigt werden, um eine Fläche vom Geschlecht  $g \geq 2$  bis auf Isomorphie festzulegen. Für  $g \geq 4$  ist das weniger als die Dimension  $\frac{1}{2}g(g+1)$  des Siegelschen Halbraumes  $\mathcal{H}_g$ . Die ersten Ergebnisse zur Charakterisierung der Periodenmatrizen für  $g = 4$  stammen von Schottky [Sky] (1888). Daher wird das Problem, die Teilmenge der Periodenmatrizen in  $\mathcal{H}_g$  zu beschreiben, nach ihm benannt.

**15.7.1 Einfache Matrizen.** Auch für  $g = 2$  und  $= 3$  gibt es Siegelsche Matrizen, die keine Periodenmatrizen sind. Denn es gilt der

**Satz.** Die Periodenmatrix  $T$  jeder Riemannschen Fläche ist einfach, d.h. sie kann nicht in zwei Blöcke  $T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$  mit  $T_1 \neq 0 \neq T_2$  zerlegt werden.

*Beweis.* Wenn  $T$  zerlegt ist, gilt entsprechendes für  $\mathbb{C}^g = \mathbb{C}^{g_1} \times \mathbb{C}^{g_2}$ , für das Gitter  $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ , den Torus  $\mathbb{C}^g/\Gamma = (\mathbb{C}^{g_1}/\Gamma_1) \times (\mathbb{C}^{g_2}/\Gamma_2)$  und die Thetafunktion  $\vartheta(z, T) = \vartheta(z_1, T_1) \cdot \vartheta(z_2, T_2)$  mit  $z = (z_1, z_2)$ .



Die Nullstellenmenge  $N \subset \mathbb{C}^g/\Gamma$  von  $\vartheta(-, T)$  setzt sich dann folgendermaßen aus den Nullstellenmengen  $N_j \subset \mathbb{C}^{g_i}/\Gamma_j$  von  $\vartheta(-, T_j)$  zusammen:  $N = N_1 \times (\mathbb{C}^{g_2}/\Gamma_2) \cup (\mathbb{C}^{g_1}/\Gamma_1) \times N_2$ . Aber im Falle einer Riemannschen Fläche  $X$  überträgt die Verschiebungsformel die Irreduzibilität von  $W_{g-1}$  auf  $N$ .

**15.7.2 Der Teichmüller-Raum.** Jede Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g$  wird durch die Wahl einer symplektischen Basis  $(a_1, \dots, a_g; b_1, \dots, b_g)$  von  $H_1(X)$  *markiert*. Zwei markierte Flächen  $(X; a_j, b_j)$  und  $(X'; a'_j, b'_j)$  heißen isomorph, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow X'$  mit  $a'_j = f_*(a_j)$  und  $b'_j = f_*(b_j)$  gibt. Man erhält eine Abbildung von der Menge  $\mathcal{T}_g$  aller Isomorphieklassen markierter Flächen vom Geschlecht  $g$  in den Siegelschen Halbraum  $\mathcal{H}_g$ , indem man jeder markierten Fläche ihre Periodenmatrix gemäß 15.2.5 zuordnet. Nach dem Torellischen Satz ist diese Abbildung injektiv.

Für  $g \geq 2$  läßt sich der *Teichmüller-Raum*  $\mathcal{T}_g$  als beschränktes Gebiet in  $\mathbb{C}^{3g-3}$  realisieren. Seine Dimension  $3g - 3$  entspricht dem Ergebnis der Riemannschen Parameterzählung. Die Abbildung  $\mathcal{T}_g \rightarrow \mathcal{H}_g$  ist holomorph. Für  $g \geq 3$  ist ihr Rang genau in den Punkten maximal  $= 3g - 3$ , die nicht den hyperelliptischen Flächen entsprechen. Für  $g = 2$  ist der Rang überall maximal  $= 3$ . Genauere Ausführungen und Beweise der genannten Ergebnisse, die auf [Tei], Nr. 20 und 29, zurückgehen, findet man z.B. in [IT], Chapter 6 und Appendix A.2.

Für  $g = 2, 3$  liegen die Periodenmatrizen dicht in  $\mathcal{H}_g$ . Für  $g \geq 4$  ist die Codimension  $\dim \mathcal{H}_g - \dim \mathcal{T}_g = \frac{1}{2}(g-2)(g-3) > 0$ .

### 15.7.3 Die Kadomtsev-Petviashvilische (KP) Differentialgleichung.

Aus *Thetafunktionen Riemannscher Flächen* lassen sich Lösungen gewisser nicht-linearer Differentialgleichungen vom Korteweg-deVries'schen (*KdV*) Typ gewinnen, siehe hierzu die Übersichtsartikel [KN], [Du] und das Buch [NMPZ]. In diesem Zusammenhang wurde 1976-1984 von verschiedenen Autoren folgende Charakterisierung der Periodenmatrizen gefunden:

*Eine einfache Matrix  $T \in \mathcal{H}_g$  ist genau dann die Periodenmatrix einer markierten Riemannschen Fläche  $X$  vom Geschlecht  $g \geq 1$ , wenn es drei Vektoren  $u \neq 0, v, w \in \mathbb{C}^g$  gibt, so daß die Funktion*

$$f(x, y, z; t) := \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \vartheta(xu + yv + zw + t, T)$$

*für jeden Parametervektor  $t \in \mathbb{C}^g$  die KP-Gleichung erfüllt:*

$$3f_{yy} = \frac{\partial}{\partial x}(f_z - 3ff_x - 2f_{xx}).$$

*Die drei Vektoren  $u, v, w$  geben die Tangente, die Normale und die Binormale der komplexen Kurve  $\mu(X) \subset J(X)$  im Basispunkt an.*

Mehr Informationen zu dieser Lösung des Schottkyschen Problems und weitere Literaturangaben findet man in [Shio] und im Übersichtsartikel [Ar].

## 15.8 Aufgaben

Die Aufgaben 1)-7) handeln von Thetafunktionen für  $g = 1$ : Bilde mit  $\tau \in \mathbb{H} = \mathcal{H}_1$  das Gitter  $\Omega = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau < \mathbb{C}$  und den Torus  $X = \mathbb{C}/\Omega$  mit der Projektion  $\eta: \mathbb{C} \rightarrow X$ . Identifiziere  $\Omega < \mathbb{C}$  mit  $H_1(X) < \mathcal{E}_1(X)^*$ .

- 1) Wie lautet die Thetareihe  $\vartheta(z) = \vartheta(z, \tau)$ ? Wie lauten die Periodizitätsformeln für  $\vartheta(z+1)$  und  $\vartheta(z+\tau)$ ?
- 2) Zeige: (i) Die Funktion  $\vartheta_*(z) := \exp(-\pi iz) \cdot \vartheta(z + ([1+\tau]/2))$  ist ungerade. Ihre Nullstellen liegen in den Gitterpunkten und sind einfach.  
(ii) Der Thetadivisor auf  $X$  ist der Punktdivisor  $\eta([1+\tau]/2)$ .  
Bestimme die Riemannsche Konstante  $\kappa \in J(X) = X$ .
- 3) Zeige: Zu jedem positiven Divisor  $D$  auf  $X$  gibt es ein Produkt  $f(z)$  von Primfunktionen  $\vartheta_*(z - e_j)$  mit  $o(f, z) = D(\eta(z))$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

- 4) Zeige, daß die Zerlegung meromorpher Funktionen auf  $X$  in Primfunktionen gemäß 15.1.6(4) folgendem Ergebnis entspricht:

Für die Punkte  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$  gelte  $\{\eta(a_j)\} \cap \{\eta(b_k)\} = \emptyset$  und  $\sum a_j = \sum b_j$ . Bis auf einen konstanten Faktor gibt es genau eine meromorphe Funktion  $f$  auf  $X$  mit  $(f) = \sum(\eta(a_j) - \eta(b_j))$  und

$$f \circ \eta = \prod_{j=1}^n \frac{\vartheta_*(z - a_j)}{\vartheta_*(z - b_j)}.$$

- 5) Zeige: Die negative Ableitung  $-(\vartheta'_*/\vartheta_*)'$  der logarithmischen Ableitung ist  $\Omega$ -periodisch und ihre Laurent-Reihe hat die Gestalt  $z^{-2} + c_0 + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{2j}$ . Wenn man  $c_0$  subtrahiert, erhält man die Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion zum Gitter  $\Omega$ .
- 6) Zeige: Die Weierstraßsche  $\sigma$ -Funktion, siehe 2.3.3-4, und  $\exp(\frac{1}{2}c_0 z^2)\vartheta_*(z)$  mit  $c_0$  wie in Aufgabe 5 unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor. Der durch 2.3.4(3) definierte Homomorphismus  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  hat die Werte  $h(1) = c_0$  und  $h(\tau) = c_0\tau - 2\pi i$ . – Vergleiche die Produktdarstellungen in 2.3.5 und in Aufgabe 4 miteinander.
- 7) Zeige: Mit  $\vartheta$  erhält man eine Lösung  $f$  der  $KP$ -Gleichung gemäß 15.7.3 für  $v = 0$ . Für passende  $u \neq 0$  und  $w$  erfüllt  $f$  die  $KdV$ -Gleichung

$$f_z - 3ff_x - 2f_{xxx} = 0.$$

- 8) Sei  $C$  eine komplexe  $(g \times 2g)$ -Matrix, deren Spalten ein Gitter  $\Gamma < \mathbb{C}^g$  maximalen Ranges aufspannen. Zeige: Wenn der Torus  $\mathbb{C}^g/\Gamma$  eine Abelsche Varietät ist, gibt es eine ganzzahlige schiefsymmetrische  $(2g \times 2g)$ -Matrix  $Q$  mit  $\det Q = 1$ , so daß  $C \cdot Q \cdot {}^t C = 0$  ist. Benutze dieses Ergebnis, um einen Torus  $\mathbb{C}^2/\Gamma$  anzugeben, der keine Abelsche Varietät ist.

*Hinweis:* Es gibt eine Matrix  $G \in \mathrm{SL}_{2g}(\mathbb{Z})$  mit  $(E, T) = C \cdot G$ . Dabei ist  $E$  die Einheitsmatrix und  $T$  eine Siegelsche Matrix. Mit  $S = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$  gilt  $(E, T) \cdot S \cdot {}^t(E, T) = 0$ .

- 9) Seien  $T \in \mathcal{H}_g$ ,  $\vartheta(z) := \vartheta(z, T)$  und  $\Gamma$  wie in 15.2.1-2 definiert. Zeige, daß folgende Methoden  $\Gamma$ -periodische meromorphe Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{C}^g$  und daher Funktionen in  $\mathcal{M}(\mathbb{C}^g/\Gamma)$  definieren:

$$(1) \quad f = \prod_{j=1}^n \frac{\vartheta(e_j + z)}{\vartheta(e_{n+j} + z)} \quad \text{für } e_1, \dots, e_{2n} \in \mathbb{C}^g \text{ mit } \sum_j (e_j - e_{n+j}) \in \mathbb{Z}^g,$$

$$(2) \quad f = \frac{\partial}{\partial z_j} \log \frac{\vartheta(a + z)}{\vartheta(b + z)} \quad \text{für } a, b \in \mathbb{C}^g,$$

$$(3) \quad f = \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_k} \log \vartheta(z).$$

In (2) und (3) wird die partielle logarithmische Ableitung  $\partial(\log h)/\partial z_j := (\partial h/\partial z_j)/h$  benutzt.

- 10) Beweise die Umkehrung zu Satz 15.2.3: Sei  $(a_1, \dots, a_g)$  eine Basis von  $V$ . Sei  $T = (\tau_{j,k})$  eine Siegelsche Matrix und  $b_j = \sum \tau_{j,k} a_k$ . Dann sind die in 15.2.3 definierten Formen  $R$  und  $S$  symmetrisch bzw. hermitesch positiv definit.
- 11) Gib mittels Quotienten von Primfunktionen zu je zwei Punkten  $P \neq Q$  einer kompakten Fläche eine Differentialform an, die in  $P, Q$  einfache Pole mit den Residuen 1 bzw.  $-1$  besitzt und sonst holomorph ist.
- 12) Zeige für den Thetadivisor  $\Theta : J(X) \rightarrow \mathbb{N}$  und die in 15.3.5 eingeführte Menge  $N_1$ : Aus  $\Theta(\varepsilon) \geq 2$  folgt  $\varepsilon \in N_1$ , d.h. alle Singularitäten von  $N$  liegen in  $N_1$ .



# Literaturverzeichnis

- [Ab] Abel, N.H.: *Œuvres complètes*. Christiania: Grondahl & Son 1881; Nachdruck: New York, Johnson Reprint Corp. 1965
- [Abk] Abikoff, W.: The uniformization theorem. *Amer. Math. Monthly* 88, p. 574-592 (1981)
- [Ac] Accola, R.D.M.: *Topics in the Theory of Riemann Surfaces*. (Lecture Notes in Mathem. 1595) Berlin: Springer 1994
- [Ah 1] Ahlfors, L.V.: *Collected Papers*, 2 vol. Basel: Birkhäuser 1982
- [Ah 2] Ahlfors, L.V.: On the characterization of hyperbolic Riemann surfaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A.I. Math.-Phys.* 125, 1952; *Collected Papers*, vol. 1, p. 486 ff.
- [Ah 3] Ahlfors, L.V.: *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. New York: McGraw Hill 1973
- [Ak] Akhiezer, D.H.: *Lie group actions in complex analysis*. Aspects in Mathem. 27, Braunschweig: Vieweg 1995
- [Ar] Arbarello, E.: Periods of Abelian integrals, Theta functions and differential equations of KdV type. *Proc. Intern. Congr. Mathem. Berkeley 1986*, Providence RI: Amer. Mathem Soc. 1987
- [ACGH] Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P. and Harris, J.: *Geometry of Algebraic Curves*. New York: Springer 1985
- [AS] Ahlfors, L.V. and Sario, L.: *Riemann Surfaces*. Princeton: Univ. Press 1960
- [Be 1] Beardon, A.F.: *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Springer 1984
- [Be 2] Beardon, A.F.: *A Primer on Riemann Surfaces*. London Mathem. Soc. Lecture Notes 78, Cambridge: Univ. Press 1984
- [Bj] Bjerknes, C.A.: *Niels Henrik Abel. Eine Schilderung seines Lebens und seiner Arbeit*. Berlin: Springer 1930
- [Bor] Borel, A. et al: *Seminar on Complex Multiplication*. (Lecture Notes in Mathem 21) Berlin: Springer 1966
- [Bos] Bosch, S.: *Algebra*. Berlin: Springer 1993
- [Bou] Bourbaki, N.: *Elements of Mathematics. General Topology*, part I. Paris: Hermann 1966
- [BK] Brieskorn, E. und Knörrer, H.: *Ebene algebraische Kurven*. Basel: Birkhäuser 1981
- [BN 1] Brill, A. und Noether, M.: Über die algebraischen Functionen und ihre Anwendungen in der Geometrie. *Mathem. Annalen* 7, S. 269-310 (1873)
- [BN 2] Brill, A. und Noether, M.: Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. *Jahresber. Deutsche Math. Ver.* 3, S. 107-566 (1894)
- [BS] Behnke, H. und Sommer, F.: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen*. Berlin: Springer <sup>2</sup>1962

- [BuNi] Bungaard, S. and Nielsen, J.: On normal subgroups with finite index in F-groups. *Matem. Tidskrift B*, p. 56-58 (1951)
- [Cy 1] Carathéodory, C.: *Funktionentheorie*. 2 Bde. Basel: Birkhäuser 1950
- [Cy 2] Carathéodory, C.: *Gesammelte Mathematische Schriften*. 5 Bde. München: C.H.Beck 1954-57.
- [Cn] Cartan, H.: *Œuvres*, 3 vol. Berlin: Springer 1979
- [Cle] Clebsch, A. Ueber die Anwendung der Abelschen Functionen in der Geometrie. *Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik* 63, 189-243 (1864)
- [Cli] Clifford, W.K.: *Mathem. Papers*. London: Macmillan 1892, reprint New York: Chelsea 1968
- [CG] Clebsch, A.; Gordan, P.: *Theorie der Abelschen Functionen*. Leipzig: Teubner 1866
- [CL] Clebsch, A.; Lindemann, F. *Vorlesungen über Geometrie*. 2 Bde. Leipzig: Teubner <sup>2</sup>1932
- [CR] Calabi, E., Rosenlicht, M.: Complex analytic manifolds without countable base. *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, p. 335-340 (1953)
- [Deb] Debarre, O.: *Tores et variétés abéliennes complexes*. Soc. Mathém. de France, EDP Sciences 1999
- [Ded] Dedekind, R.: *Gesammelte mathem. Werke*, 3 Bände. Braunschweig: Vieweg 1930-1932
- [Di 1] Dieudonné, J.: *Abrégé de l'histoire des mathématiques 1700-1900*. 2 vol. Paris: Hermann 1978. Deutsche Übersetzung: *Geschichte der Mathematik 1700-1900*. Braunschweig: Vieweg 1985
- [Di 2] Dieudonné, J.: *Cours de géométrie algébrique I*. Paris: Presses Univ. de France 1974
- [Do] Dolbeault, P.: *Analyse Complexe*. Paris: Masson 1990
- [DR] De Rham, G.: Sur les polygones générateurs de groupes fuchsien. *L'Enseignement Mathém.* 17, p. 49-61 (1971)
- [Du] Dubrovin, B.A.: Theta functions and non-linear equations. *Russian Mathem. Surveys (Uspechi)* 36, p. 11-92 (1981)
- [DV] DuVal, P.: *Homographies, Quaternions and Rotations*. Oxford: Univ. Press 1964
- [Eu] Euler, L.: *Opera Omnia*. Zürich: O. Füssli 1911 ff.
- [Fa] Fay, J. *Theta-Functions on Riemann Surfaces*. Springer Lecture Notes 352. Berlin: Springer 1973.
- [Fi] Fischer, G.: *Ebene algebraische Kurven*. Braunschweig: Vieweg 1994
- [Ford] Ford, L.R.: *Automorphic Functions*. New York: Chelsea <sup>2</sup>1951
- [For] Forster, O.: *Riemannsche Flächen*. Berlin: Springer 1977
- [Fox] Fox, R.H.: On Fenchel's conjecture about F-groups. *Matematisk Tidskrift B* 1952, p. 61-65
- [FB] Freitag, E.; Busam, R.: *Funktionentheorie*. Berlin: Springer <sup>3</sup>2000
- [FK] Farkas, H.M and Kra, I.: *Riemann Surfaces*. New York: Springer 1980
- [FN] Fenchel, W.; Nielsen, J.: *Discontinuous Groups of Isometries in the Hyperbolic Plane*. Berlin: de Gruyter 2003
- [FrK] Fricke, R., Klein, F.: *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. 2 Bände. Leipzig: Teubner 1926
- [Fr] Frobenius, F.G.: *Gesammelte Abhandlungen*, Band I-III. Berlin: Springer 1968
- [Fu] Fulton, W.: *Algebraic Topology. A First Course*. New York: Springer 1995
- [Ga] Gauss, C.F.: *Werke I- IX*. Göttinger königl. Ges. der Wiss. (Leipzig: Teubner) <sup>2</sup>1870 – 1903
- [Go] Godbillon, C.: *Éléments de la topologie algébrique*. Paris: Hermann 1971

- [Gra] Gray, J.: *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*. Boston-Basel, Birkhäuser 1986
- [Gri] Griffiths, P.A.: *Introduction to Algebraic Curves*. Providence R.I.: Amer. Mathem. Soc. 1989
- [Gu 1] Gunning, R.C.: *Lectures on modular forms*. (Annals of Mathem. Studies 48) Princeton: Univ. Press 1962
- [Gu 2] Gunning, R.C.: *Lectures on Riemann surfaces*. (Mathem. Notes) Princeton: Univ. Press 1966
- [GH] Griffiths, P. and Harris, J.: *Principles of Algebraic Geometry*. New York: John Wiley 1978
- [GN] Gunning, R.C. and Narasimhan, R.: Immersion of open Riemann surfaces. *Mathem. Annalen* 174, S. 103-108 (1967)
- [GtN] Guenot, J., Narasimhan, R.: Introduction à la théorie de Riemann. *L'Enseignement Mathém.*, II<sup>e</sup> Série, t. 21, p.123-328, 1975
- [GR] Grauert, H. und Remmert, R.: *Coherent analytic sheaves*. Berlin: Springer 1984
- [Harn] Harnack, A.: *Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials und der eindeutigen Potentialfunktionen in der Ebene*. Leipzig: Teubner 1887
- [Hart] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*. New York: Springer 1977
- [Hei 1] Heins, M.: The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces. *Annals of Math.* 50, p. 686-690 (1949)
- [Hei 2] Heins, M.: Remark on the elliptic case of the mapping theorem for simply connected Riemann surfaces. *Nagoya Mathem. J.* 9, p. 17-20 (1955)
- [Hei 3] Heins, M.: The conformal mapping of simply-connected Riemann surfaces II. *Nagoya Math. J.* 12, p. 139-143 (1957)
- [Hei 4] Heins, M.: *Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable*. New York: Holt, Rinehart and Winston 1962
- [Her] Hermite, C.: *Œuvres complètes*. 4 vol. Paris: Gauthier-Villars, 1905-1917
- [Ho] Hodge, W.V.D.: *The Theory and Applications of Harmonic Integrals*. Cambridge: Univ. Press 1941
- [Hub] Huber, H.: *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*, unveröffentlichte Mitschriften von H.P. Kraft (Wintersemester 1966/67) und R. Kellerhals (Wintersemester 1978/79), Basel
- [Hul] Hulek, K.: *Elementare algebraische Geometrie*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 2000
- [Hur] Hurwitz, A.: *Mathematische Werke*. 2 Bände. Basel: Birkhäuser 1932/33
- [Hus] Husemöller, D.: *Elliptic Curves*. Berlin: Springer <sup>2</sup>2004
- [HC] Hurwitz, A. und Courant, R.: *Vorlesungen über allgemeine Funktionen-theorie und elliptische Funktionen mit einem Abschnitt über geometrische Funktionentheorie*. Berlin: Springer <sup>4</sup>1964
- [IT] Iwayoshi, Y. und Taniguchi, M.: *An Introduction to Teichmüller Spaces*. Tokyo: Springer 1992
- [Ja] Jacobi, C.G.J.: *Gesammelte Werke*. 7 Bände. Berlin: G. Reimer 1881-1891
- [Jo] Jordan, C.: Des contours tracés sur les surfaces. In: *Œuvres*. Paris: Gauthiers-Villars 1961, t. IV, p. 91-111
- [Jos] Jost, J.: *Compact Riemann Surfaces*. Berlin: Springer <sup>2</sup>2002
- [Ka] Katok, S.: *Fuchsian Groups*. Chicago,: Univ. of Chicago Press, 1992
- [Kee] Keen, L.: Canonical polygons for finitely generated Fuchsian Groups. *Acta Math.* 115, p. 1-16 (1966)
- [Kel] Kelley, J.L.: *General Topology*. New York: Van Nostrand (reprint Springer) 1955

- [Kem 1] Kempf, G.: On the geometry of a theorem of Riemann. *Annals of Mathem.* 98, 178-185 (1973)
- [Kem 2] Kempf, G.: *Complex Abelian Varieties and Theta Functions*. Berlin: Springer 1991
- [Klei 1] Klein, F.: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Band I-III. Berlin: Springer 1921-23
- [Klei 2] Klein, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Leipzig: Teubner 1884; Neuauflage, herausgegeben von P. Slodowy, 1993
- [Klei 3] Klein, F.: *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*, 2 Bände, ausgearbeitet von R. Fricke. Leipzig: Teubner 1890. Nachdruck: New York: Johnson Reprint Corp. 1965
- [Klei 4] Klein, F.: *Riemannsche Flächen*. Vorlesungen, gehalten in Göttingen 1891/92. Leipzig: Teubner 1986
- [Klei 5] Klein, F.: *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert I*. Berlin: Springer 1926/27, Nachdruck 1979
- [Klem] Klemm, M.: *Symmetrien von Ornamenten und Kristallen*. Berlin: Springer 1982
- [Kn] Knapp, A.W.: *Elliptic Curves*. Princeton: Univ. Press 1992
- [Kob] Koblitz, N.: *Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms*. New York: Springer 1984
- [Koe] Koebe, P. Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. *Nachrichten d. Königl. Ges. d. Wiss. Göttingen*. 1907, S. 191-210, 633-669
- [Ku] Kunz, E.: *Einführung in die algebraische Geometrie*. Braunschweig/ Wiesbaden: Vieweg 1997
- [Kr] Krichever, I.M.: Methods of algebraic geometry in the theory of non-linear equations. *Russian Mathem. Surveys (Uspechi)* 32, 6, p.185-213 (1977)
- [KK] Koecher, M.; Krieg, A.: *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Berlin: Springer 1998
- [KN] Krichever, I.M. and Novikov, S.P.: Holomorphic bundles over algebraic curves and non-linear equations. *Russian Mathem. Surveys (Uspechi)* 35:6, p. 53-79 (1980)
- [Lag] Lagrange, J.L.: *Œuvres*, 14 vol. Paris: Gauthiers-Villars 1867-92
- [Lam] Lamotke, K.: *Regular solids and isolated singularities*. Braunschweig: Vieweg 1986
- [Land] Landau, E.: *Collected Works*. 9 vol. Essen: Thales (ohne Jahr)
- [Lang] Lang, S.: *Introduction to Algebraic and Abelian Functions*. Reading: Addison-Wesley 1972
- [Leh] Lehner, J.: *Discontinuous Groups and Automorphic Functions*. (Mathem. Surveys VIII). Providence, Rhode Island: Amer. Mathem. Soc. 1964
- [Lew] Lewittes, J.: Riemann surfaces and their Theta function. *Acta Mathem.* 111, p. 37-61 (1964)
- [LB] Lange, H. and Birkenhake, Ch.: *Complex Abelian Varieties*. Berlin: Springer 1992
- [LG] Landau, E., Gaier, D.: *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*. Berlin: Springer <sup>3</sup>1986
- [Mag] Magnus, J.W.: *Non-Euclidean Tessellations and their Groups*. New York: Academic Press 1974
- [Mar] Martens, H.: A new proof of Torelli's theorem. *Annals of Mathem.* 78, p. 107-111 (1963)
- [Mask] Maskit, B.: On Poincaré's theorem for fundamental polygons. *Advances in Mathem.* 7, p.219-230 (1971)



- [Mass] Massey, W.: *A Basic Course in Algebraic Topology*. New York: Springer 1991
- [Mil] Milnor, J.: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*. (Annals of Mathem. Studies No. 61) Princeton: Univ. Press 1968
- [Mir] Miranda, R.: *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*. (Graduate Studies in Mathem. 5) Providence, Rhode Island: Amer. Mathem. Soc. 1995
- [Miy] Miyake, T.: *Modular Forms*. Berlin: Springer 1989
- [Mö] Möbius, A.F.: *Gesammelte Werke*, Band 1-4. Leipzig: Hirzel 1885-89
- [Mo 1] Montel, P.: Sur les suites infinies de fonctions. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 24, p. 233-334 (1907)
- [Mo 2] Montel, P.: Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans une domaine. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 29, p. 487-535 (1912)
- [Mo 3] Montel, P.: *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leur applications*. Paris: Gauthiers-Villars 1927, Nachdruck: Bronx, New York: Chelsea 1974
- [Mu 1] Mumford, D.: *Abelian Varieties*. Oxford: Univ. Press <sup>2</sup>1974
- [Mu 2] Mumford, D.: *Curves and their Jacobians*. Ann Arbor: Univ. of Michigan Press 1975
- [Mu 3] Mumford, D.: *Tata Lectures on Theta*, I-III. Boston-Basel: Birkhäuser 1983
- [MM] Mattuck, A. and Mayer, A.: The Riemann-Roch theorem for algebraic curves. *Annali Scuola Norm. Pisa* 17, p. 223-237 (1963)
- [Nam 1] Namba, M.: *Geometry of Projective Algebraic Curves*. New York: Marcel Dekker 1984
- [Nam 2] Namba, M.: *Branched coverings and algebraic functions*. (Pitman Research Notes in Math. 161). Harlow (England): Longman 1987
- [Nar] Narasimhan, R.: *Compact Riemann Surfaces*. (Lectures in Mathem. ETH Zürich) Basel: Birkhäuser 1992
- [Neu] Neumann, C.: *Vorlesung über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale*. Leipzig: Teubner 1865, <sup>2</sup>1884
- [New 1] Newton, I.: *The correspondence*. Cambridge: Univ. Press 1960
- [New 2] Newton, I.: Enumeratio Linearum Tertii Ordinis, in *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, edited by P.T. Whiteside, vol. VII, part III. Cambridge: Univ. Press 1976
- [Noe] Noether, M.: Ueber die singulären Wertesysteme einer algebraischen Funktion und die singulären Punkte einer algebraischen Kurve. *Mathem. Annalen* 9, S. 166-182 (1876)
- [NMPZ] Novikov, S.; Manakov, S.V.; Pitaevskii, L.P.; Zakharov, V.E.: *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*. New York: Consultants Bureau 1984
- [Pa] Patterson, S.: Uniformisierung und diskontinuierliche Gruppen. In [Wyl 1], Neuauflage 1997
- [Pe] Perron, O.: Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ . *Math. Zeitschrift* 18, S. 42-54 (1923)
- [Pi] Picard, E.: *Œuvres*. Paris: Ed. de C.N.R.S 1979
- [Pla] Platon: *Werke in 8 Bänden*, griechisch/deutsch. Darmstadt: wiss. Buchges. 1977
- [Plü] Plücker, J.: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Leipzig: Teubner 1895
- [Po] Poincaré, H.: *Œuvres*, 11 vol. Paris: Gauthier-Villars 1916-1956
- [Pu] Puiseux, V.: Recherches sur les fonctions algébriques. *J. de Mathém.* (1) 15, p. 365-480 (1850)

- [Rad 1] Radó, T.: Bemerkung zur Arbeit des Herrn Bieberbach: Über die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstraßsche Funktionentheorie (Math. Annalen 78). *Math. Annalen* 90, S. 30-37 (1923)
- [Rad 2] Radó, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. *Acta Szege* 2, S. 101-121 (1925)
- [Ran] Rankin, R.A.: The construction of branched covering Riemann surfaces. *Proc. Glasgow Mathem Assoc.* 3, p. 199-207 (1958)
- [Re 1] Remmert, R.: *Funktionentheorie 1*. Berlin: Springer <sup>4</sup>1995
- [Re 2] Remmert, R.: *Funktionentheorie 2*. Berlin, Springer <sup>2</sup>1995
- [Re 3] Remmert, R.: Projektionen analytischer Mengen. *Math. Annalen* 130, S. 410-441 (1956)
- [Ri 1] Riemann, B.: *Gesammelte mathematische Werke*. Leipzig: Teubner <sup>2</sup>1892; Berlin, Springer und Teubner, Leipzig <sup>3</sup>1990
- [Ri 2] Riemann, B.: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe (Inauguraldissertation, Göttingen 1851). *Werke*, S. 3-42
- [Ri 3] Riemann, B.: Theorie der Abel'schen Functionen. *Borchardt's [= Crelle's] J. für reine und angew. Math.* 54 (1857), *Werke* S. 86-142
- [Ri 4] Riemann, B.: Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  darstellbaren Functionen (Göttingen 1857). *Werke*, S. 67-83
- [Ri 5] Riemann, B.: Über das Verschwinden der Theta-Functionen. *Borchardt's [= Crelle's] J. für reine und angew. Math.* 65 (1865), *Werke* S. 214-224
- [Ro] Roch, G.: Über die dritte Gattung der Abelschen Integrale erster Ordnung. *Borchardt's [= Crelle's] J. f. reine und angew. Math.* 64, S. 372-376 (1865)
- [Ry] Reyssat, E.: *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann*. Basel: Birkhäuser 1989
- [RR] Radó, T., Riesz, F.: Über die Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ . *Mathem. Zeitschrift* 22, S. 41-44 (1925)
- [Sky] Schottky, F.: Zur Theorie der Abelschen Functionen von vier Variablen. *Crelle's J. für reine und angew. Math.* 102, S. 304-352 (1888)
- [Sch] Schwarz, H.A.: *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. 2 Bände. Berlin: Springer 1890
- [SD] Swinnerton-Dyer, H.P.F.: *Analytic Theory of Abelian Varieties*. London Mathem. Soc. Lecture Note Ser. 14, Cambridge: Univ. Press 1974
- [Se] Serre, J.P.: *A Course in Arithmetic*. New York: Springer 1973
- [Sha 1] Shafarevich, I.R.: *Basic Algebraic Geometry*. Berlin: Springer 1977
- [Sha 2] Shafarevich, I.R.: Zum 150. Geburtstag von Alfred Clebsch. *Mathem. Annalen* 266 (2), S. 135-140 (1983)
- [Shim] Shimura, G.: *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*. Princeton: Univ. Press 1971
- [Shio] Shiota, T.: Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations. *Inventiones Mathem.* 83, p. 333-382 (1986)
- [Si 1] Siegel, C.L.: Symplectic Geometry. *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Springer 1966. Band 2, Nr 41
- [Si 2] Siegel, C.L.: *Topics in Complex Function Theory.*, 3 vol., New York: Wiley 1973
- [SpG] Springer, G.: *Introduction to Riemann Surfaces*. Reading, Addison-Wesley 1957
- [SpT] Springer, T.: *Invariant Theory*. (Lecture Notes in Mathem. 585), Berlin: Springer 1977
- [Str] Strebel, K.: *Vorlesungen über Riemannsche Flächen*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1980

- [Stu] Stubhaug, A.: *Ein aufleuchtender Blitz. Niels Henrik Abel und seine Zeit*. Berlin: Springer 2003
- [SO] Scharlau, W., Opolka, H.: *Von Fermat bis Minkowski*. Berlin: Springer 1980
- [ST] Seifert, H. und Threlfall, W.: *Lehrbuch der Topologie*. Leipzig: Teubner 1934
- [Te] Teichmüller, O.: *Gesammelte Abhandlungen*. Berlin: Springer 1982
- [To] Torelli, R.: Sulle Varietà di Jacobi. *Rendiconti R. Acad. Lincei. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* (5) 22, p. 98-103 (1913)
- [Ul] Ullrich, P.: The Poicaré-Volterra theorem: From hyperbolic integrals to manifolds with countable topology. *Arch. Hist. Exact Sci.* 54, p. 375-402 (2000)
- [vdW] van der Waerden, B.L.: *Algebra I*. Berlin: Springer <sup>4</sup>1955.
- [Vo] Volterra, V.: *Opere matematiche*. 5 vol., Roma: Acc. Naz. Lincei 1954-1962
- [Wal] Walker, R.: *Algebraic Curves*. Princeton: Univ. Press 1950 (Nachdruck New York: Springer 1978)
- [Wll] Wall, C.T.C.: *Singular points of plane curves*. Cambridge: Univ. Press 2004
- [Wst] Weierstrass, K.: *Mathematische Werke*, Band 1-6. Berlin: Mayer und Müller 1894-1915
- [Wil 1] Weil, A.: *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 88. Berlin: Springer 1976
- [Wil 2] Weil, A.: Zum Beweis des Torellischen Satzes. *Œuvres scientifiques / collected papers*. New York: Springer 1979. Vol II, p. 307-327
- [Wu] Wu, H. et al.: *Introduction to Compact Riemann Surfaces*. Academica Sinica Press 1981
- [Wyl 1] Weyl, H.: *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Stuttgart-Leipzig: Teubner 1913; Neuauflage herausgegeben von R. Remmert 1997
- [Wyl 2] Weyl, H.: *Gesammelte Abhandlungen*, Band I-IV. Berlin: Springer 1968

# Namensverzeichnis

- Abel, Niels Henrik (1802-1829) 30,  
32, 35, 145, 148 f, 274, 277  
Ahlfors, Lars Valerian (1907-1996)  
209, 213  
Appolonius von Perga (ca. 262-  
190 v.Chr.) 177  
Bernoulli, Jakob (1655-1705) 33  
Bernoulli, Johann (1667-1748) 33  
Bézout, Étienne (1730-1783) 185  
Carathéodory, Constantin (1873-1950)  
55, 111  
Cauchy Augustin-Louis (1789-1857)  
1, 153, 202  
Clebsch, Alfred (1833-1872) 177, 190,  
194 f  
Clifford, William Kingdon (1845-1879)  
264 ff.  
Dedekind, Richard (1831-1916) 97,  
99, 101, 131  
Descartes, René (1596-1650) 177  
Dirichlet, Peter Gustav Lejeune  
(1805-1859) 204 f  
Eisenstein, Ferdinand (1823-1852) 1,  
35  
Euklid (lebte um 300 v.Chr.) 76  
Euler, Leonhard (1707-1783) 34, 185,  
249, 273  
Fagnano del Toschi, Giulio Carlo  
(1682-1766) 34  
Gauß, Carl Friedrich (1777-1855) 1,  
34 f, 97  
Green, George (1793-1841) 213  
Harnack, Axel (1855-1888) 203  
Hermite, Charles (1822-1901) 101  
Hodge, William (1903-1975) 269  
Hurwitz, Adolf (1859-1919) 86, 99,  
101, 111, 128 f, 139 ff, 174  
Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804-1851)  
2, 35, 105, 145, 274, f, 280, 288, 299  
Jordan, Camille (1838-1922) 43, 59  
Klein, Felix (1849-1925) 2, 4, 59, 70,  
76, 97, 101, 115, 128, 218, 227, 237 f  
Koebe, Paul (1882-1945) 111, 218  
Lagrange, Joseph-Louis (1736-1813)  
33, 97 ff, 126  
Landau, Edmund (1877-1938) 110 f  
Legendre, Adrien-Marie (1752-1833)  
33  
Liouville, Joseph (1809-1882) 35  
Menächmus (ca. 380-320 v.Chr.) 177  
Möbius, August Ferdinand (1790-1868)  
22, 249, 256  
Montel, Paul (1876-1975) 109 f, 203  
Newton, Isaac (1643-1727) 33, 121,  
126, 132, 177  
Perron, Oskar (1880-1975) 197, 208  
Picard, Émile (1856-1941) 91, 105,  
110, 280  
Platon (428-348 v. Chr.) 73-76  
Plücker, Julius (1801-1886) 177, 185,  
187, 192-195  
Poincaré, Henri (1854-1912) 43, 57,  
59, 61, 76, 115, 218, 227 f, 237, 241  
Poisson, Siméon-Denis (1781-1840)  
201 f  
Poncelet, Jean-Victor (1788-1867)  
177, 185, 194  
Puisseux, Victor (1820-1883) 125 f  
Radó, Tibor (1895-1965) 209  
Riemann, Bernhard (1826-1866) 1, 5,  
55, 61, 117, 125 f, 139, 152 f, 177, 195  
, 206, 218, 249, 253, 260, 275, 288 ff,  
296, 300, 309  
Roch, Gustav (1839-1866) 261  
Schottky, Friedrich Hermann (1851-  
1935) 309  
Schwarz, Hermann Amandus (1843-  
1921) 61, 108, 204 f, 227, 237  
Siegel, Carl Ludwig (1896-1981) 291  
Teichmüller, Oswald (1913-1943) 310  
Thompson (Lord Kelvin), William  
(1824-1907) 206  
Weierstraß, Karl (1815-1897) 24, 35,  
53, 55, 105, 125, 171, 174, 228, 266 ff  
Weyl, Hermann (1885-1955) 2, 6, 55,  
209, 218, 227  
Wronski (Hoëné), Joseph (1878-1853)  
171 f

# Sachverzeichnis

- Abbildungsgrad 16, 19, 120, 166, 261, 265  
Abbildungssatz (Riemann) 218-222  
Abel-Jacobi (Theorem) 280  
Abelsche Funktion 275  
Abelsche Relation 30, 147 f, 275, 278  
Abelsches Integral 145, 274 f  
Abelsches Theorem 32, 277  
Abelsche Varietät 292 f  
abelsch machen 151  
abgeschlossene Abbildung 11, 15  
Ableitung 12, 18, 135 f  
abzählbare Topologie 56 f, 209  
Additionstheorem 34, 41, 273  
affine Abbildung 37, 52, 304  
affine Kurve 179 f  
algebraisch abhängig 119  
algebraisches Gebilde 120 f, 123, 181  
allgemeine Lage 253  
allgemeiner Divisor 268 f  
amalgiiertes Produkt 62 f  
analytische Charakteristik 136-139, 161, 190, 194, 251  
analytische Fortsetzung 53 ff, 57  
analytische Menge 12, 297  
analytisches Geschlecht 161, 165, 173 ff, 251, 261  
anharmonische Gruppe 92, 105, 116  
antiholomorph 230, 269  
äquivalent (Gitter) 37  
arme Fläche 209, 213 ff, 220 ff  
Atlas 2, 135, 163  
Ausnahmefläche 225, 227  
Ausnahmemenge 119 f  
Ausnahmeorbit 18, 70, 94, 140  
Auswertungsfunktion 54, 146, 154  
Automorphiefaktor 308 f  
Automorphismus, Automorphismengruppe 5, 18, 22, 69 ff, 79, 93, 126 ff, 140 f, 163, 174, 224 f, 227 ff, 260, 263 f, 268  
Bahn = Orbit 17 f  
Bandgruppe 39  
Basispunkt 45, 58, 168 f, 175  
Bézout (Formel) 185  
biholomorph 5  
Bildgarbe 79 f, 282  
binäre Form 97 ff  
blättrig 16  
Bogenlänge 33  
Brezelfläche 6, 243 f, 251  
Cauchyscher Integralsatz 152  
Cayleysche Abbildung 5  
Charakteristik 136 ff, 159, 161, 190, 194, 241, 251, 261  
charakteristisches Polynom 118 f  
Chernsche Klasse 307 ff  
chordale Metrik 72  
Clebsch (Formel) 190  
Clifford (Ungleichung, Gleichung) 264 ff  
Cohomologie 152, 269, 293 f, 307  
Cotangentialraum 281, 283  
Darstellung (Automorphismengruppe) 263 f  
Datum (Flächenkomplex) 241  
Deckabbildung, Deckgruppe 5, 18 ff, 21, 27, 36, 39 f, 52, 77, 85 ff, 101, 104, 112 f, 127 ff, 131, 224 f  
Deformation 249  
Delta-Invariante 188 f, 191 f, 196  
Dieder 70 f, 73  
Differentialform 135-138, 142-155, 159, 161 f, 165, 189 f, 198 ff, 212, 214, 255, 258 f, 261, 263, 269, 274 ff  
Differentialgleichung 25, 28, 42, 310 f  
Dimension eines Divisors 158 ff, 260 f, 268  
Dirichletsches Randwertproblem 204 ff

- diskontinuierlich 76 ff, 226 ff
- diskrete Gruppe 226
- Diskriminante 119
- Divisor 21, 32, 136, 148, 157-160, 183, 259-266, 268, 276 ff, 283-286, 289 f, 296-302, 309
- Dodekaeder 75 f
- dominieren 88
- Doppelpunkt 170, 192 ff
- Doppeltangente 190, 195
- doppelt periodisch 24
- Doppelverhältnis 115 f
- Drehung 229 ff
- Dreieck 40 f, 73 ff, 232 ff, 235-239
- Dreiecksgruppe 228-239
- Dreiecksparkettierung 40 f, 73 ff, 96, 235-239
- dual 187 f, 195
- Ecke 240 ff
- eigentlich 15, 182
- Einbettung 169, 262, 265, 268, 279
- einfach zusammenhängend 46 f, 50 f, 55, 61, 88 f, 152 f, 201, 219-222
- einhüllend 208
- Eisenstein-Reihe 27, 100
- Elementarpotential 213 ff
- elementar überlagert 16 f
- elliptisch 24, 33 ff, 87, 150, 181, 189, 224
- endliche Abbildung 9, 14 ff, 117-131
- erweiterte Automorphismengruppe 230 f
- euklidisch 229, 235
- Euler-Poincarésche Charakteristik 241, 243, 251
- Existenzsatz (Punkttrennung) 122 f, 212, 214
- Faktorisierung 14, 50, 82 f
- Fixpunkt 22, 141, 165, 224, 260, 268
- Fläche der Keime 54 f, 145 f, 154
- Flächengruppe 39 f, 229
- Flächenkomplex 241 ff, 251
- Fortsetzung 13, 53 ff, 83 f, 118
- Fourier-Reihe 14, 107 f, 199 f, 292
- frei (Operation) 18 f, 77, 80
- frei erzeugt, freie Gruppe, freies Produkt 64 f, 250
- Freiheitsgrad 160
- Fundamentalebene 94, 106, 237
- Fundamentalgruppe 45 f, 50, 58-66, 151, 225, 248 ff, 276
- Funktionenkeim 53 ff, 132, 146, 154
- Funktionenkörper 20, 25, 117 ff, 130 f
- G-Überlagerung 61 ff
- Galois-Gruppe 130 f
- Garbe 78 ff, 281 f
- Gattung (Differentialform) 142, 154
- gelifteter Divisor 139, 155, 158, 262, 266
- Gerade 163, 178, 186, 189, 230 f
- Geradenbündel 307 ff
- geringer Raum 78
- Geschlecht 6, 136-141, 161, 167, 173 f, 190, 195, 243, 248, 251, 260 f, 275
- Gewicht 171 ff, 176, 195, 267, 272
- Gitter 10, 24, 30, 34-40, 80, 94, 98 ff, 275 f, 278, 288, 292, 307 f
- Gitterinvarianten 28 f, 99 f
- glatt (= regulär) 186
- gleichverzweigt 17, 19, 88 f, 139 f
- Grad 15 f, 19 ff, 24, 120, 137, 158, 166, 178, 185, 190, 193 f, 265 f
- Greensche Funktion 211 f, 219
- gute Darstellung 163
- gute Nullstelle 298
- Halbebene 4 f, 93-96, 100-115, 222-239
- Halbperiode 27, 103 ff
- harmonisch 198-217
- Harnack (Konvergenzsatz, Prinzip, Ungleichung) 203 f
- Hauptdivisor 21, 32, 148 f, 157, 277
- Hauptkongruenzgruppe 103 ff
- Hauptorbit 18
- Hauptteil 258 f, 269 f
- hebbar 13, 200
- Heftung 207, 242
- Henkel 247
- hexagonal 37 f, 100, 113, 116, 137
- Hodge-Zerlegung 269
- holomorphe Abbildung, Funktion 3, 5, 11-19, 78, 163, 281
- holomorphe Differentialform 136, 142, 144 f, 160 ff, 261
- holomorphe Struktur 3, 7, 9 f, 79
- homogene Koordinaten 163
- homogenisieren 179 f
- Homologie 151 f, 248, 251, 264, 276, 288, 293 f, 307 ff
- homologisch einfach zusammenhängend 152, 156, 201, 219-222
- Homothetie 223 f
- homotop 43 f, 49, 146, 151, 154, 264

- Horozykel 239
- hyperbolisch 223, 229-233 ff, 235
- Hyperebene 162, 166
- hyperelliptisch 87, 128 f, 133, 137, 161, 165, 171, 175 f, 261 f, 265 f, 267
- Hyperfläche 298
- idealer Rand 207
- Identitätssatz 13, 199
- Ikosaeder 70 f, 73-76, 92, 229
- Immersion 169
- Index (Divisor) 159, 261
- Integral 31, 33, 144-149, 152-154, 198 ff, 255, 274 f
- invariante Differentialform 142 f
- inverser Weg 45
- Involution 165
- irreduzibel 119, 122, 179, 297, 310
- isomorph (Riemannsche Flächen) 5, 79, 131
- isomorph (Überlagerungen) 51, 84, 86 f, 90
- Isometrie 72, 231
- Isotropiegruppe = Standgruppe 18 f
- Jacobisches Problem (für elliptische Funktionen) 29, 35, 42, 101, 150
- Jot ( $J$ )-Funktion, -Invariante 99 ff, 108, 112
- kanonische Abbildung (Einbettung) 164 f, 171, 190, 261 f, 271
- kanonischer Divisor, kanonische Schar 136, 157, 167, 261 f, 287, 297
- kanonischer Komplex 243 f, 251
- kanonisch erzeugend 85 f
- kanonisches Polygon 254 f
- kanonische Zerschneidung 251, 253 ff, 277, 288, 294 f, 303
- Kante, Kantenheftung 241 f
- Karte 2, 135, 163, 297
- Keim = Funktionenkeim 53 f
- Klasse (einer Kurve) 188, 193 ff
- Kleinsche Fläche (=Modulfläche  $X_7$ ) 114, 128, 137, 162, 165, 174, 182, 237 f, 263 f
- kombinatorisch äquivalent 246 ff
- komplexe Kurve 124 f
- komplexe Multiplikation 38
- komplexer Raum 182
- Komponente 15, 121 f, 126, 179, 182, 297
- Körpererweiterung 20, 25, 117 ff, 122, 129 f
- Kongruenzgruppe 103, 112
- KP-Differentialgleichung 310
- Kreisverwandschaft 230
- kritisch 169
- Kubik 178, 189, 196
- Kurve 125, 164 f, 177-196, 265
- Landauscher Radius 109 f
- Lambda ( $\lambda$ )-Funktion 103-111
- Laurent-Reihe 6, 14, 25, 27, 53, 107 f, 125 f, 200
- Lemniskate, lemniskatischer Sinus 33 f, 42
- Lewittes (Satz von) 297
- Liftung 7, 20, 47-50, 52, 90, 117, 138 f
- linear äquivalent 157
- Linearisierung 81
- Linearschar 167 f, 175, 278, 284 f
- logarithmische Ableitung 153 f, 296
- logarithmische Singularität 200, 212 f
- lokal biholomorph 5
- lokal endlich 6, 47, 226
- lokal wegzusammenhängend 50
- lokale Darstellung 11, 163
- lokale Normalform 12
- Lokal-Global-Prinzip 3, 5, 78
- Lücke 171, 266, 271
- Lüroth (Satz) 139, 238
- Majorisierung 207
- Mannigfaltigkeit 4, 50, 56, 61, 63, 78 ff, 163, 281, 284, 307
- Maximumprinzip 13, 199, 207, 211
- meromorph 6, 20 ff, 135, 269 f
- Minimalpolynom 119-127, 179
- Möbius-Transformation 22, 72 f, 93, 223 f, 230
- Modul 36, 94 f, 98
- Modulbereich, Modulparkettierung 36, 94 ff, 102, 106
- Modulfläche, Modulüberlagerung 112 f, 137 f, 140, 174, 237, 239
- Modulform, Modulfunktion 100, 115
- Modulgruppe 93-96, 98, 112 ff, 229, 237, 239
- Monodromie 47, 50, 55, 108
- Montel (Sätze von) 109, 203
- Morphismus 78
- Multiplizität 169, 186
- nicht-entartet 163, 294
- nirgends konstant 11

- normale Abbildung (Überlagerung) 18 f, 21, 36, 39 f, 51, 58 f, 85 ff, 119
- Normalisierung 125, 180 f, 186
- normiert (Elementarpotential, Singularität) 200, 213
- nullhomotop 45
- Nullstellendivisor 157
- Nullstellengebilde 9, 16, 123
- Ny-Invariante 189 f, 192
  
- offene Abbildung 11-14, 199
- Oktaeder 70-76, 92, 229
- operieren = wirken 17
- Orbit = Bahn 17, 68-76
- Orbitfläche (-raum, -projektion) 68 ff, 77, 80 ff, 91, 101, 103, 140, 237, 282
- Ordnung 20, 53, 126 f, 136, 184, 241, 246, 289, 298, 301 ff, 308
  
- Parabel 121, 168, 170, 176, 181
- parabolisch 224
- Parallelenaxiom 231
- Parallelogramm 30
- Parkettierung 40 f, 73 ff, 94, 96, 115, 235 ff
- Periode 146 f, 149, 154
- Periodenabbildung, -homomorphismus 276-280 ff, 284, 286 f, 289, 296 f, 300
- Periodengitter 34, 275 ff
- Periodenmatrix 289, 295, 309 f
- Periodenrelation 255
- Periodentorus 275 f, 278 f, 289 f, 296-309
- Perron (Familie, Prinzip) 208
- $\wp$ -Funktion 25-30, 39, 103, 121
- Picard (Satz) 105, 110
- Picardsche Gruppe 280
- Platonischer Körper 74 ff
- Plückersche Kurve 192 ff
- Poincaréscher Epi (Homo, Iso)-morphismus 58 f, 61 ff, 85 f, 89, 113
- Poincaré-Volterra (Satz) 56
- Poincaré-Weyl (Satz) 227
- Poissonsche Integralformel 202
- Pol 6, 136, 200, 212, 214, 259 f
- polare Differentialform 189
- Polarisierung 307 f
- Polstellendivisor 157
- Polyederfläche 242 ff, 251
- Polyedersatz (Euler) 249
- Polygon 240 f, 254
- positiv (Divisor) 157, 159 f, 278
- Potenzsumme 283
  
- Primdivisor, Primfunktion 290, 295-299, 305 f
- privilegiert 18, 77
- Produktweg 44
- projektiver Automorphismus 163
- projektiv äquivalent 163, 167
- projektive Eigenschaft 163
- projektive Kurve 178
- projektiver Raum 162 f, 167, 284 f
- Puiseux-Theorie 125 f
- Punktdivisor 148, 261
- Punktentrennung 122 f, 212, 214
- punktierte Flächen 52, 64, 151
  
- quadratisches Gitter 37, 100
- Quadrik 178
- Quartik 178, 190, 195
- Quotientenprinzip 9, 68 f
  
- Rand(operator) (Flächenkomplex) 241
- Randwertproblem (Dirichlet) 204
- Rang (Periodenabbildung) 279, 281, 284
- rationale Funktionen 21 f
- rationale (Raum-) Kurve 164, 171, 174
- Realisierung (Flächenkomplex) 242
- Reduktion, reduziert 36, 99, 119, 178, 247
- regulär (siehe auch *glatt*) 169, 186, 256, 297
- reich 209, 211 f, 219 f
- reines Polynom 127 f
- Residuum 142 ff, 147, 153, 255, 259, 269 f
- Resolvente 129
- Resultante 184
- Riemann-Hurwitzsche Formel 139 ff, 195
- Riemann-Roch (Formel = Satz) 161, 175, 261
- Riemannsche Fläche (Definition) 3
- Riemannsche Konstante 289, 296 f, 300
- Riemannsches Gebilde 120-126
- Riemannsches Geradenbündel 308 f
- Riemannsche Ungleichung 260
- Riemannscher Existenzsatz (Punktentrennung) 122, 212, 214
- Ringgebiet 199, 205 f, 225, 239
- Rückkehrschnitt 248, 288, 294 f



- scharfes Maximumprinzip 211  
 Scheibe 4, 14, 17, 52, 82, 125 f  
 Schleife 45, 64 f, 86, 146 f, 151  
 Schnitt 48, 308  
 Schnittdivisor, -schar, -zahl 166 ff,  
 170 f, 176, 183 f, 187, 261  
 Schnittform 294, 307  
 Schnittwinkel 231  
 Schottkysches Problem 309 f  
 Schwarz (Satz) 204  
 Schwarzsches Lemma 108  
 Seifert/van Kampen (Satz) 63  
 Seite (Polygon) 240 f  
 sextaktisch 196  
 Siegelsche Matrix, Siegelscher  
 Halbraum 291-295, 303, 309 f  
 Sigma ( $\sigma$ )-Funktion 31, 42, 311  
 Signatur 17, 88 ff, 139, 234  
 singulär, Singularität 13, 82, 186, 192,  
 200  
 sphärisch 229, 232, 235  
 Spiegelung 231 f  
 Spitze 96, 107, 170, 192  
 Spur (Differentialform) 143, 148, 155  
 Stammfunktion 135, 146 f  
 Standgruppe 18 f, 70, 76, 81, 85 f, 94,  
 127, 140  
 stereographische Projektion 4 f, 72  
 Stern 236, 241  
 Strukturgarbe 79  
 subharmonisch 206 f, 217  
 symmetrische Funktion 281 f  
 Symmetriegruppe 71 f  
 symmetrisches Produkt 160, 268,  
 282 ff  
 symplektisch 294, 309  
  
 Tangente 186, 195  
 Tangentialraum 285  
 Teichmüller-Raum 310  
 Teilung (Kante, Polygon) 245 f  
 Tetraeder 70-76, 92, 229  
 Thetadivisor 289, 298, 300-303, 305,  
 309  
 Thetafunktion, Thetareihe 275, 288 f,  
 291-295, 300 f, 308, 310  
 topologisches Geschlecht 161, 251,  
 258-261  
 Torellischer Satz 303, 305, 309  
 Torus 7, 10 f, 22, 24, 30 f, 36 f, 50, 52,  
 59, 80, 121, 137, 149 ff, 164, 168, 175,  
 181 f, 196, 260, 275 f, 281, 292, 303 f,  
 307 f; siehe auch Periodentorus  
  
 Torus-Abbildung 37, 52, 304 f  
 Torus-Projektion 10, 19, 48, 59, 80  
 Träger 21, 289, 298, 300, 303, 305  
 Transformationsgruppe 17  
 Translation 223, 308  
 trigonometrische Approximation 205  
  
 Übergangsfunktion 174  
 Überlagerung 16 f, 27, 39 ff, 48-53,  
 58-62, 68 f, 83-90, 104, 112, 117 f, 120,  
 123, 128 ff, 139 f, 146, 154, 222, 251  
 Umkehrsatz (Jacobi) 299  
 unbegrenzt 48 ff, 55, 150, 236  
 Uniformisierung 218, 222 f  
 unitär 72 f  
 universell 51 f, 59, 61, 88 ff, 124, 151,  
 181, 218, 237  
 unverzweigt 17, 19, 48, 218, 222  
 unzerlegbar 84  
  
 Verschiebung 45, 289, 298  
 Verteilung 172  
 verzweigt 12, 17, 25, 53, 68, 82-90,  
 139 f, 234, 251  
 Verzweigungssignatur 17, 88, 113, 139,  
 234  
 Vielfachheit (Tangente) 187  
 Vierzehneck (Klein) 237 f, 256  
 vollständig (Linearschar) 167, 268,  
 278, 285 f  
  
 Weg 43  
 wegzusammenhängend 43, 50  
 Weierstraß-Punkt 171, 174, 266 ff  
 Weierstraßscher Konvergenzsatz 202  
 Wendepunkt, -tangente 171, 173 f,  
 176, 187, 194 ff  
 Windungsabbildung 14, 125  
 Windungsdvisor 139  
 Windungspunkt, -zahl 11 f, 18 f, 25,  
 27, 137  
 Wronskische Determinante 171 ff  
 Wurzel 8 f, 118  
  
 Zahlenebene 3, 24-40, 222 f, 225, 229  
 Zahlenkugel 4, 21 f, 47, 53, 65, 69-76,  
 87 f, 128 f, 137, 151, 163, 214, 260  
 Zerschneiden 251, 253, 256 f  
 Zeta ( $\zeta$ )-Funktion (Weierstraß) 32  
 Zusammenhangskriterium 17  
 zusammenhängend (Überlagerung) 51  
 Zweig 126  
 zyklische Überlagerung 18 f, 87, 127 ff

# Symbolverzeichnis

- $\text{Aut}(X)$  Automorphismengruppe 5
- $AG$  abelsch gemachte Gruppe 151
- $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  4
- $\mathbb{C}^{\times \times} := \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  93
- $\mathbb{C}$  Zahlenkugel 4
- $ch$  Charakteristik 159
- $D$  Deckgruppe 5
- $\text{Div}$  Gruppe der Divisoren 157,  $\text{Div}_0$ ,  $\text{Div}_H$  277
- $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  4
- $\mathbb{E}^\times := \mathbb{E} \setminus \{0\}$  punktierte Kreisscheibe
- $e(K)$  Euler-Poincarésche Charakteristik 241
- $\mathcal{E}(X)$  Vektorraum der Differentialformen 135 f
- $\mathcal{E}_j(X)$   $j$ -te Gattung der Differentialformen ( $j = 1, 2, 3$ ) 142
- $g_{an}$ ,  $g_{top}$  analytisches, topologisches Geschlecht 161, 251
- $g_d^n$  Linearschar 167
- $gr$  Grad 16, 21, 166, 178
- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 1\}$  4
- $\mathcal{H}(X)$  Vektorraum der harmonischen Funktionen auf  $X$  198
- $H_1(X)$  Homologie von  $X$  151
- $H^1(X)$  Cohomologie von  $X$  152
- $\mathcal{H}_g$  Siegelscher Halbraum 291
- $i(D) := \dim \mathcal{L}^1(-D)$  Index 159
- $\text{Im}$  Imaginärteil
- $J(\tau)$   $J$ -Funktion 100,  $\hat{J}$  101
- $J(X)$  Periodentorus 276, 278 f
- $\mathcal{K}$  kanonische Schar 167
- $kl u$  Homologiekategorie von  $u$  151
- $\mathcal{L}(D)$  157;  $\mathcal{L}^1(D)$  159
- $l(D) := \dim \mathcal{L}(D)$  158
- $m(\varphi, x)$ ,  $m_c$  Multiplizität 169, 186
- $\mathcal{M}$  Fläche der Keime 54
- $\mathcal{M}(X)$  Ring (Körper) der meromorphen Funktionen auf  $X$  6
- $N$  Träger des Thetadivisors 289
- $\mathcal{O}$  holomorphe Strukturgarbe 79
- $\mathcal{O}(X)$  Ring der holomorphen Funktionen auf  $X$  3
- $o$  Ordnung 20, 136, 298
- $\mathbb{P}(V)$ ,  $\mathbb{P}^n$  projektiver Raum 162
- $\wp$   $\wp$ -Funktion 26,  $\hat{\wp}$  27,  $\wp' := \hat{\wp}'$
- $\text{Re}$  Realteil
- $\text{res}$  Residuum 142
- (RH) Riemann-Hurwitzsche Formel 139
- (RR) Satz (Formel) von Riemann-Roch 261
- $\mathcal{S}$  Schnittschar 166; Menge der subharmonischen Funktionen 206
- $S_n$  167
- $sp$  Spur 143
- $\text{Sym}$  Symmetriegruppe 71
- $S^1$  Kreislinie 10;  $S^2$  Sphäre 4
- $T(D)$  Träger von  $D$  21
- $v(\eta, a)$  Windungszahl von  $\eta$  bei  $a$  11
- $W_n := \mu_n(X_n)$  300
- $X_n$   $n$ -faches symmetrisches Produkt der Fläche  $X$  159, 282
- $\Gamma$  Modulgruppe 93; Gitter 292;  $\Gamma_n$  Kongruenzgruppe 112
- $\delta$  Delta-Invariante 188 f
- $\vartheta$  Thetafunktion 291;  $\vartheta_e$  290
- $\Theta$  Hyperebene in  $\mathbb{P}^n$  166,  $(\Theta)_\varphi$  ihr Schnittdivisor 166; Thetadivisor 289,  $\Theta_\epsilon$  290
- $\kappa$  kanonische Abbildung 164; Riemannsche Konstante 296
- $\lambda$  Lambda-Funktion 103,  $\hat{\lambda}$  106
- $\mu$ ,  $\mu_n$  Periodenabbildung 276, 278
- $\mu_n$  multiplikative Gruppe der  $n$ -ten Einheitswurzeln 6
- $\nu$  Ny-Invariante 189
- $\rho, \rho_n$  rationale Raumkurve 164
- $\tau$  Gewicht 171
- $\chi$  analytische Charakteristik 136
- $\Omega$  ebenes Gitter 10
- $\approx$  isomorph (Riemannsche Flächen) 5
- $\cong$  isomorph (Gruppen)
- $<$  kleiner; Untergruppe
- $\triangleleft$  Normalteiler
- $[..]$  Homotopieklasse 44
- $(..)$  Hauptdivisor 21;  $(..)_{\varphi}$  Schnittdivisor 166
- $|..|$  Absolutbetrag; vollständige Linearschar 157, 167; Polyederfläche 242
- $|..|_A$  Supremum 201
- $\#$  Anzahl, Mächtigkeit