Satz von Gauß

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}$ auf einem regulären räumlichen Bereich V, der durch eine Fläche S mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$ berandet wird, gilt

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \, .$$

Satz von Gauß

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}$ auf einem regulären räumlichen Bereich V, der durch eine Fläche S mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement $d\vec{S}$ berandet wird, gilt

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = \iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S}\,.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an $\vec{F}$ und S können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

Beweis:

Hauptsatz für mehrdimensionale Integrale $\quad \Longrightarrow$

$$\iiint\limits_V \partial_\nu F_\nu \, dV = \iint\limits_S F_\nu n_\nu^\circ \, dS$$

mit F_ν den Komponenten von $\vec{F}$

Beweis:

Hauptsatz für mehrdimensionale Integrale $\quad \Longrightarrow$

$$\iiint\limits_V \partial_\nu F_\nu \, dV = \iint\limits_S F_\nu n^\circ_\nu \, dS$$

mit F_ν den Komponenten von $\vec{F}$
Summation über $\nu = 1, 2, 3$, $d\vec{S} = \vec{n}^\circ \, dS \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \sum_\nu \partial_\nu F_\nu \quad &= \quad \operatorname{div} \vec{F} \\ \sum_\nu F_\nu n^\circ_\nu \, dS = \quad &= \quad \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ \, dS = \vec{F} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

d.h. die behauptete Identität

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für die Einheitskugel
$V: \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ mit Oberfläche S und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \; y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \; z = r \cos\vartheta$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für die Einheitskugel
$V: \; r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ mit Oberfläche S und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \; y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \; z = r \cos\vartheta$$

Volumen- und vektorielles Flächenelement

$$\begin{aligned} dV &= r^2 \sin\vartheta \, dr d\varphi d\vartheta dr \\ d\vec{S} &= \vec{e}_r \underbrace{\sin\vartheta \, d\varphi d\vartheta}_{dS} \end{aligned}$$

(Radius $R = 1$)

(i) $I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$:

(i) $\quad I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV$:

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y xy + \partial_z z^3 = 1 + x + 3z^2$$

(i) $I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV$:
Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y xy + \partial_z z^3 = 1 + x + 3z^2$$

Darstellung mit Kugelkoordinaten $\rightsquigarrow$

$$I_V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r\cos\varphi \sin\vartheta + 3r^2 \cos^2\vartheta)\, \underbrace{r^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta dr}_{dV}$$

(i) $\quad I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV$:
Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y xy + \partial_z z^3 = 1 + x + 3z^2$$

Darstellung mit Kugelkoordinaten $\quad \rightsquigarrow$

$$I_V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r\cos\varphi \sin\vartheta + 3r^2\cos^2\vartheta)\, \underbrace{r^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta dr}_{dV}$$

Produktform des zweiten und dritten Terms, $\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, d\varphi = 0 \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} I_V &= \operatorname{vol} V + 0 + 2\pi \left(\int_0^1 r^4\, dr \right) \left(\int_0^\pi 3\cos^2\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\pi \left[\frac{1}{5} r^5 \right]_{r=0}^1 \left[-\cos^3\vartheta \right]_{\vartheta=0}^\pi = \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

(ii) $I_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:

(ii) $I_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:

$$
\begin{aligned}
F_r &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos^3\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
&= \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos\varphi\sin^3\vartheta + \cos^4\vartheta
\end{aligned}
$$

(ii) $I_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$:

$$
\begin{aligned}
F_r &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos^3\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\
&= \cos^2\varphi\sin^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos\varphi\sin^3\vartheta + \cos^4\vartheta
\end{aligned}
$$

$\rightsquigarrow$ Flussintegral

$$
\begin{aligned}
I_S &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r \underbrace{\sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta}_{dS} \\
&= \pi \int_0^\pi \sin\vartheta(1-\cos^2\vartheta)\, d\vartheta + 0 + 2\pi \int_0^\pi \cos^4\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta \\
&= \pi\left([-\cos\vartheta]_0^\pi + \left[\frac{1}{3}\cos^3\vartheta\right]_0^\pi \right) + 2\pi\left[-\frac{1}{5}\cos^5\vartheta\right]_0^\pi \\
&= 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ und die Kugel $V:\ r < R$ mit Oberfläche $S:\ r = R$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ und die Kugel $V:\ r < R$ mit Oberfläche $S:\ r = R$

Formel für die Divergenz in Kugelkoordinaten $\quad\Longrightarrow$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^s) = (s+2) r^{s-1}$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ und die Kugel $V:\ r < R$ mit Oberfläche $S:\ r = R$

Formel für die Divergenz in Kugelkoordinaten $\implies$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 r^s) = (s+2)r^{s-1}$$

$dV = 4\pi r^2\, dr \quad \implies$

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F}\, dV = 4\pi \int\limits_0^R (s+2)r^{s+1}\, dr = 4\pi R^{s+2} \quad (s > -2)$$

Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$ und die Kugel $V: \ r < R$ mit Oberfläche $S: \ r = R$

Formel für die Divergenz in Kugelkoordinaten $\implies$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^s) = (s+2) r^{s-1}$$

$dV = 4\pi r^2 \, dr \quad \implies$

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV = 4\pi \int\limits_0^R (s+2) r^{s+1} \, dr = 4\pi R^{s+2} \quad (s > -2)$$

$d\vec{S} = \vec{e}_r \, dS \quad \implies$

$$\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S R^s \, dS = \operatorname{area}(S) \, R^s = (4\pi R^2) \, R^s$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad \rightsquigarrow$

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i \, dS$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad \leadsto$

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i \, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad \leadsto$

$$3 \operatorname{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i \operatorname{area}(S)$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad \leadsto$

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i \, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad \leadsto$

$$3 \operatorname{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i \operatorname{area}(S)$$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad \rightsquigarrow$

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i\, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad \rightsquigarrow$

$$3\,\text{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i\,\text{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i \, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad\rightsquigarrow$

$$3 \operatorname{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i \operatorname{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2 \cdot a/2)/3$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{r}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r}\cdot\vec{n}^\circ}_{=\mathrm{const}} dS = r_i\, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad\rightsquigarrow$

$$3\,\mathrm{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i\,\mathrm{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2\cdot a/2)/3$
- Tetraeder mit Kantenläge a:

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{r}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r}\cdot\vec{n}^\circ}_{=\mathrm{const}}\, dS = r_i\, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad\rightsquigarrow$

$$3\,\mathrm{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i\,\mathrm{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2\cdot a/2)/3$
- Tetraeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $4\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2\sqrt{3}$, Volumen $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Inkugelradius $\frac{\sqrt{6}a}{12}$

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{r}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r}\cdot\vec{n}^\circ}_{=\text{const}}\, dS = r_i\, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad\rightsquigarrow$

$$3\,\mathrm{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i\,\mathrm{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2\cdot a/2)/3$
- Tetraeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $4\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2\sqrt{3}$, Volumen $\frac{\sqrt{2}a^3}{12} \quad\rightsquigarrow\quad$ Inkugelradius $\frac{\sqrt{6}a}{12}$
- Kugel (Grenzfall):

Beispiel

Polyeder V mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius r_i

Hesse-Normalform $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{r}\cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r}\cdot\vec{n}^\circ}_{=\text{const}}\, dS = r_i\, dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß $\quad\rightsquigarrow$

$$3\,\mathrm{vol}(V) = \iint\limits_S \vec{r}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_S r_i dS = r_i\,\mathrm{area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $6a^2$, Inkugelradius $\frac{a}{2}$, Volumen $a^3 = (6a^2\cdot a/2)/3$
- Tetraeder mit Kantenläge a:
  Oberfläche $4\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2\sqrt{3}$, Volumen $\frac{\sqrt{2}a^3}{12}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Inkugelradius $\frac{\sqrt{6}a}{12}$
- Kugel (Grenzfall):
  Volumen $\frac{4\pi r^3}{3}$, Oberfläche $4\pi r^2$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ korrektes Verhältnis $r:3$