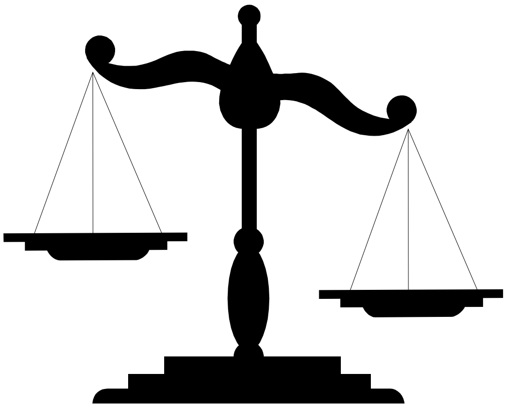
Das Rätsel mit der Balkenwaage



Mathematische Abhandlung
über ein Informationsproblem

6. Juli 1998: 1. Fassung
16. Januar 1999: 2. Fassung
24. Juni 2005: Überarbeitung

Martin Abbühl, Thun, CH
balkenwaage@abbuehl.net

0. Inhalt

1. Begriffe, Problemstellung und Notationen

1.1. Balkenwaage

Eine ***Balkenwaage*** ist eine Waage mit zwei Schalen. Eine Wägung vergleicht das Gewicht in der ersten Schale mit dem Gewicht in der zweiten. Drei Ergebnisse sind möglich:
kleiner, gleich, grösser.
In dieser Abhandlung wird für die Zahlenmenge $\{0, 1, 2, ...\}$ das Symbol N der natürlichen Zahlen und für die Zahlenmenge $\{1, 2, 3, ...\}$ das Symbol N^+ verwendet.

1.2. Problemstellung

Zur Verfügung steht eine Balkenwaage. $a \in N^+$ äusserlich nicht unterscheidbare Kugeln sind gegeben, von denen bekannt ist, dass $a-1 \in N$ Kugeln ein Gewicht G_0 besitzen und eine Kugel ein Gewicht $G_1 \neq G_0$. Der Gewichtsunterschied $|G_1-G_0|$ ist ohne Waage nicht feststellbar. Mit $n \in N$ Wägungen auf der Balkenwaage ist die Kugel mit Gewicht G_1 zu eruieren.

1.3. Motivation

Das ursprüngliche Problem hat 12 Kugeln und 3 Wägungen. Falls Sie sich noch nie mit diesem Problem beschäftigt haben, wäre dies aus Gründen der Motivation jetzt vor dem Weiterlesen günstig. Es sollte etwas Zeit für dieses Problem aufgebracht werden. Mit der Kenntnis der Notationen von Abschnitt 1.4. kann anschliessend die Lösung in Teil 2 konsultiert und mit der eigenen Lösung verglichen werden.

1.4. Begriffe und Notationen

Problem heisst ***lösbar*** $\leftrightarrow \exists$ Algorithmus, der K in jedem Fall eruiert
Problem heisst ***unlösbar*** $\leftrightarrow \nexists$ Algorithmus, der K in jedem Fall eruiert

Gewichtsinformation $GI:=\text{sgn}(G_1-G_0)$; $GI=+1 \leftrightarrow G_1>G_0$ und $GI=-1 \leftrightarrow G_1<G_0$.
K:=gesuchte Kugel mit Gewicht G_1

In der Problemstellung wurden a und n definiert:

a:=Anzahl Kugeln des Problems; $a \in N^+$
n:=Anzahl zur Verfügung stehender Wägungen. n=0 macht Sinn: Das Problem mit a=1 und n=0 ist lösbar, denn um K aus einer einzigen Kugel zu eruieren, sind 0 Wägungen notwendig.

[a, n]:=Problem mit a Kugeln und n Wägungen

i:=Position, an die Kugeln für eine Wägung gesetzt werden können; $i \in \{0, 1, 2\}$. Dabei bedeutet
i=0: Position neben der Waage, sprich ***aussen***
i=1 resp. 2: Schale 1 resp. 2

A_i:=Anzahl Kugeln, die an die i-te Position gesetzt werden

Eine Wägung, die keine Information liefert, heisst ***unecht,*** andernfalls ***echt.***
Da der Gewichtsunterschied $|G_1–G_0|$ sehr klein ist, ist bei $A_1>A_2$ resp. $A_1<A_2$ die erste resp. zweite Schale in jedem Fall schwerer. Eine echte Wägung muss deshalb $A_1=A_2$ erfüllen.

Für Wägungen, die $A_1=A_2$ erfüllen, wird definiert:

$A:=A_1=A_2$; $A=0$ impliziert eine unechte Wägung.

Alle fortan betrachteten Wägungen seien echt.

In der ersten Wägung gilt $a=A_0+2A$.

E:=Ergebnis einer Wägung, $E\in\{0, 1, 2\}$. Dabei bedeutet
E=0: gleiches Gewicht in den Schalen
E=1 resp. E=2: 1. resp. 2. Schale trägt ***<u>mehr</u>*** Gewicht
$\Rightarrow E\neq 0 \rightarrow$ ungleiches Gewicht in den Schalen

m:=fortlaufende Nummer der Wägung, $m\in\{0, 1, 2, ..., n\}$; $m=0 \rightarrow$ Zustand vor der ersten Wägung

E_m:=Ergebnis der m-ten Wägung; nur definiert für $m\neq 0$

Die Notation für Wägungen, kurz W, ist für $m\neq 0$ definiert:

$$m\geq 2: W_m(E_1, E_2, E_3, ..., E_{m-1})=(A_0, A)$$

$$m=1: W_1=(A_0, A)$$

Für eine einzelne Wägung losgelöst von einem Problem wird $W_m(E_1, E_2, E_3, ..., E_{m-1})$ resp. W_1 durch W ersetzt.

$E=0 \leftrightarrow$ K befindet sich aussen
$E\neq 0 \leftrightarrow$ K befindet sich auf der Waage

Die nicht mehr für K in Frage kommenden Kugeln heissen ***neutrale Kugeln*** und die weiterhin für K in Frage kommenden Kugeln ***verbleibende Kugeln.***

v_m:=Anzahl verbleibender Kugeln **nach** der m-ten Wägung
K ist immer verbleibend, selbst wenn sie bereits eruiert wurde $\rightarrow v_m\in\{1, 2, 3, \ldots, a\}$; $v_0\equiv a$
Wird der Index m weggelassen, z.B. wenn nur eine einzelne Wägung betrachtet wird, so bezeichnet v die Anzahl der zum entsprechenden Zeitpunkt verbleibender Kugeln.

$E_1=0 \rightarrow v_1=A_0$ und 2A Kugeln sind neutral
$E_1\neq 0 \rightarrow v_1=2A$ und A_0 Kugeln sind neutral

1.4.1. Der Index

Das Ergebnis $E\neq 0$ liefert zusätzlich zu einer Reduktion der Anzahl verbleibender Kugeln folgende Information: Befindet sich K auf der Schale mit mehr resp. weniger Gewicht, so ist GI=+1 resp. GI=–1. Folglich hat jede Kugel auf der Schale mit mehr resp. weniger Gewicht ein Gewicht$\geq G_0$ resp. ein Gewicht$\leq G_0$. Es kann daher allen Kugeln auf der Schale mit mehr resp. weniger Gewicht **in Gedanken** ein Kleber mit dem Buchstaben s wie schwerer resp. l wie leichter aufgesetzt werden. Dieser Buchstabe heisst ***Index***. Er ist eine Teilinformation über das Gewicht einer verbleibenden Kugel: Eine Kugel mit Index s resp. l hat mit Sicherheit kein Gewicht$<G_0$ resp. kein Gewicht$>G_0$. Das Gewicht neutraler Kugeln hingegen ist auf G_0 festgelegt. Ihnen wird die ***Kennung*** n zugeordnet.

Jede Kugel gehört genau einer der folgenden **Kategorien** an:

1. neutrale Kugeln, Kennung n, kurz n-Kugeln

2. verbleibende Kugeln
    2.1 Index s oder l, kurz s- oder l-Kugeln
    2.2 Index unbekannt

Es ist nicht notwendig, irgend eine Markierung auf den Kugeln anzubringen, die deren Gewicht störend verändern könnte. Es genügt, die Kugeln im Verlaufe der Wägungen in 4 Gruppen anzuordnen: n-, s- und l-Kugeln sowie verbleibende Kugeln unbekannter Indizes. Es ist also keine grosse Merkfähigkeit erforderlich, um ein Problem mit beliebig vielen Kugeln zu lösen.

1.5. Arten von Wägungen

Das Problem beginnt mit $a \equiv v_0$ verbleibenden Kugeln unbekannter Indizes. Solange die Waage E=0 zeigt, bleiben alle Indizes unbekannt. Hat die Waage das erste Mal $E \neq 0$ gezeigt, verbleiben die auf der Waage befindlichen Kugeln, von denen fortan der Index bekannt ist.
$\Rightarrow$ Bei jeder Wägung W ist entweder von keiner oder von allen verbleibenden Kugeln der Index bekannt. W heisst im ersten Fall ***Wägung 1. Art***, im zweiten Fall ***Wägung 2. Art***. W_1 ist stets eine Wägung 1. Art.

Wägungen mit n-Kugeln, Beispiel: Gegeben 2 verbleibende Kugeln verschiedener Indizes. Gesucht ist eine echte Wägung.
$A_1=A_2=A$ und $A \geq 1$ $\rightarrow$ es muss die s-Kugel auf die eine, oEdA die i-te, Schale und die l-Kugel auf die andere Schale gesetzt werden $\rightarrow$ die Waage liefert mit Sicherheit E=i und daher keine weitere Information $\rightarrow$ $\nexists$ echte Wägung.
Anders ist es, wenn eine n-Kugel zur Verfügung steht. Wird nun z.B. die s-Kugel auf die erste und die n-Kugel auf die zweite Schale gesetzt, so ist für E=0 K aussen, für E=1 ist K auf der ersten Schale und E=2 ist unmöglich. Eine solche Wägung heisst ***Vergleichswägung.***

Die eingeführte Notation ist nur für Wägungen 1. Art ohne n-Kugeln geeignet.

Für Wägungen 1. Art mit n-Kugeln wird zusätzlich definiert:

N_i:=Anzahl n-Kugeln, die an die i-te Position gesetzt werden; da aussen bleibende n-Kugeln nicht an der Wägung teilnehmen, ist $N_0 \equiv 0$.

Damit werden Wägungen 1. Art allgemein geschrieben in der Form

$$(A_0,\ A-N_1+N_1n,\ A-N_2+N_2n)$$

Sei V die Anzahl **verbleibender** Kugeln, die auf die Waage gesetzt werden. Für V gilt:

$V=2A-N_1-N_2$
Werden keine n-Kugeln auf die Waage gesetzt, d.h. $N_{1,2}=0$, so ist V=2A .
Nach Definition sind in den Anzahlen $A_{1,2}$ die n-Kugeln $N_{1,2}$ inbegriffen. Hingegen werden aussen bleibende n-Kugeln nicht gezählt, d.h. alle A_0 Kugeln aussen sind verbleibend.

Für Wägungen 2. Art wird zusätzlich definiert:

S_i:=Anzahl s-Kugeln, die an die i-te Position gesetzt werden
L_i:=Anzahl l-Kugeln, die an die i-te Position gesetzt werden
$\Rightarrow$
$A_i \equiv S_i+L_i+N_i$

Wegen $N_0 \equiv 0$ bedeutet das für i=0:
$A_0 \equiv S_0+L_0$

Wägungen 2. Art werden allgemein geschrieben als:

$$(S_0 s+L_0 l,\ S_1 s+L_1 l+N_1 n,\ S_2 s+L_2 l+N_2 n)$$

Ist eine der Grössen S_i, L_i, N_i eins, wird sie weggelassen. Ist sie null, so wird sie samt ihrem Index resp. samt ihrer Kennung weggelassen. Sind alle Anzahlen einer Position null, wird eine Null geschrieben. Beispiel A_0=0: $(0, S_1 s+L_1 l+N_1 n, S_2 s+L_2 l+N_2 n)$

Für Wägungen 2. Art gilt:

$E=0 \rightarrow v=S_0+L_0$
$E=1 \rightarrow v=S_1+L_2$
$E=2 \rightarrow v=S_2+L_1$

Dies ist die volle Information, die eine Wägung 2. Art liefert.

Tabelle 1: v bei vollständiger Informationsverwendung nach einer Wägung mit Ergebnis E

E	Wägung 1. Art	Wägung 2. Art
0	A_0	$A_0 \equiv S_0+L_0$
1	$V \equiv 2A-N_1-N_2$	S_1+L_2
2	$V \equiv 2A-N_1-N_2$	S_2+L_1

2. Einführung – [12, 3]

2.1. Lösung des ursprünglichen Problems

Die Lösung hier ist so konzipiert, dass am Ende zusätzlich die Gewichtsinformation gewonnen ist.

Bei der ersten Wägung werden auf jede Schale 4 Kugeln gesetzt, 4 bleiben aussen:

$W_1=(4, 4)$

Fall 1: $E_1=0$

K befindet sich aussen, es verbleiben $v_1=4$ Kugeln unbekannter Indizes. 8 Kugeln sind neutral.

$W_2(0)=(1, 2, 1+n)$

$E_2=0 \rightarrow$ es bleibt die Kugel aussen übrig. K ist eruiert, eine Vergleichswägung wird gemacht, um GI zu erhalten.

$$W_3(0, 0)=(0, 1, n)$$

$E_3=0$ ist unmöglich. $E_3=1 \rightarrow GI=+1$, $E_3=2 \rightarrow GI=-1$.

Falls $E_2=1$ resp. $E_2=2$, verbleiben zwei s- und eine l-Kugel resp. eine s- und zwei l-Kugeln.

$$W_3(0, 1)=(l, s, s)$$
$$W_3(0, 2)=(s, l, l)$$

Dies eruiert K. Der bekannte Index liefert die Gewichtsinformation.

Fall 2: $E_1\neq0$

K befindet sich auf der Waage, es verbleiben $v_1=8$ Kugeln, je 4 mit Index s und Index l.

$W_2(\neq0)=(2l, 2s+l, 2s+l)$

bedeutet, dass zwei Kugeln mit Index l aussen bleiben und auf jede der Schalen zwei Kugeln mit Index s und eine mit Index l gelegt werden. Selbstverständlich könnte auch $W_2(\neq0)=(2s, s+2l, s+2l)$ angesetzt werden, denn es besteht kein prinzipieller Unterschied zwischen den Indizes s und l.

$E_2=0 \rightarrow$ es verbleiben die beiden l-Kugeln aussen und $GI=-1$.

$$W_3(\neq0, 0)=(0, l, l)$$

$E_3=0$ ist unmöglich. K befindet sich auf der Schale mit weniger Gewicht.

$E_2=1 \rightarrow$ es kommen nur noch die beiden s-Kugeln der ersten Schale sowie die l-Kugel der zweiten Schale für K in Frage. Falls $E_2=2$ ist, liegt die analoge Situation mit vertauschten Schalen vor.

$$W_3(\neq0, \neq0)=(l, s, s)$$

$E_3=0 \rightarrow$ K befindet sich aussen und GI=–1.
$E_3\neq 0 \rightarrow$ K befindet sich auf der Schale mit mehr Gewicht und GI=+1.

Die Lösung von [12, 3] in Kurznotation:

1. $W_1=(4, 4)$	1.1. $W_2(0)=(1, 2, 1+n)$	1.1.1. $W_3(0, 0)=(0, 1, n)$
		1.1.2. $W_3(0, 1)=(l, s, s)$ $W_3(0, 2)=(s, l, l)$
	1.2. $W_2(\neq 0)=(2l, 2s+l, 2s+l)$	1.2.1. $W_3(\neq 0, 0)=(0, l, l)$
		1.2.2. $W_3(\neq 0, \neq 0)=(l, s, s)$

Für das Weitere wird das allgemeine [a, n] betrachtet. Ziel dieser Abhandlung ist die Beantwortung folgender zweier Fragen:

Frage 1: Für welche Werte von a und n ist [a, n] lösbar ?

Frage 2: Wenn optimal vorgegangen wird, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, für ein lösbares [a, n] **zusätzlich** die Gewichtsinformation zu gewinnen ?

3. Obere Grenze der Information

3.1. Definition von a_n

Da die Aufgabenstellung lediglich die Eruierung von K aus a Kugeln verlangt, beträgt der Informationsmangel – dies ist der Zweierlogarithmus der Anzahl möglicher Kombinationen – zu Beginn von [a, n]

$$\log_2(a) \text{ Bits}$$

Demgegenüber liefert die Waage in n Wägungen maximal eine Information von

$$\log_2(3^n) \text{ Bits}$$

da, in n Wägungen maximal 3^n Gesamtergebnisse möglich sind. In n Wägungen kann daher K nicht aus mehr als 3^n Kugeln eruiert werden. Dies ist das

Grenzprinzip der Lösbarkeit

$$\boxed{[a, n] \text{ ist lösbar} \rightarrow a \leq 3^n}$$

Grenzprinzip der Lösbarkeit und [1, n] für $\forall n \in N$ lösbar $\Rightarrow$ für $\forall n \in N$ $\exists$ obere Schranke für a, so dass [a, n] lösbar ist. Die Schranke heisst a_n:

$$\boxed{a_n := \max\{a \in N^+ : [a, n] \text{ ist lösbar}\}}$$

Die Schranke erfüllt

$$1 \leq a_n \leq 3^n$$

Definition von $a_n \rightarrow$ [a, n] ist unlösbar für $\forall\ a > a_n$.

3.2. Monotonie von a_n

[a, n] ist lösbar $\rightarrow$ [a, n’] ist lösbar für $\forall\ n' \geq n \Rightarrow [a_n, n]$ ist lösbar $\rightarrow [a_n, n+1]$ ist lösbar $\Rightarrow$

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ für } \forall n \in N$$

4. Einzelwägungen

4.1. Definitionen und Begriffe

Betrachtet wird eine einzelne Wägung W mit $k \in N^+$ verbleibenden Kugeln. Solange nicht anders vermerkt, stehen keine n-Kugeln zur Verfügung.

Sei v die Anzahl verbleibender Kugeln bei vollständiger Informationsverwendung **nach** W bei einem bestimmten Ergebnis. Für v kann also Tabelle 1 benützt werden, wobei $N_1=N_2=0$ ist.

Bei Wägungen 1. Art ist $k=A_0+2A$ und bei Wägungen 2. Art ist $k=\sum_{i=0}^{2} S_i + L_i$

v_{max}:=maximale Anzahl verbleibender Kugeln nach W: $v_{max}=\max\limits_{\forall E}\{v \text{ bei Ergebnis } E\}$

$v_{max}<k \leftrightarrow$ W ***reduziert*** k Kugeln auf v_{max} Kugeln
$v_{max}=k \leftrightarrow$ W ***reduziert nicht***

Beispiele: W=(3, 2) reduziert 7 Kugeln auf 4 Kugeln. W=(0, 1) reduziert nicht.

Da eine unechte Wägung nicht reduzieren kann, gilt die Implikation:

$$\textbf{W reduziert} \rightarrow \textbf{W ist echt} \quad \Leftrightarrow \quad \textbf{W ist unecht} \rightarrow \textbf{W reduziert nicht}$$

Das zweite Beispiel zeigt, dass eine Wägung, die nicht reduziert, Information liefern kann: Es verbleibt eine s- und eine l-Kugel, d.h. diese Wägung liefert die Indizes aller verbleibenden Kugeln.

Für Wägungen 2. Art wird definiert:

b:=Anzahl vor der Wägung verbleibender s-Kugeln. Es ist $b \leq k$, also $b \in \{0, 1, 2, ..., k\}$.

Damit existieren zwei verschiedene Situationen:

1) Wägung 1. Art: Gegeben k Kugeln unbekannter Indizes
2) Wägung 2. Art: Gegeben k Kugeln bekannter Indizes mit genau b s-Kugeln

Eine Wägung 1. resp. 2. Art heisst ***maximal reduktiv***, wenn v_{max} – für vorgegebenes k resp. vorgegebenes k und b – minimal ist. Das minimale v_{max} heisst k'. Definition

für eine Wägung 1. Art:

$$k' := \min_{\substack{\forall W \text{ mit} \\ k \text{ Kugeln}}} \{v_{max} \text{ nach } W\}$$

für eine Wägung 2. Art:

$$k' := \min_{\substack{\forall W \text{ mit } k \text{ Kugeln mit} \\ \text{genau } b \text{ s-Kugeln}}} \{v_{max} \text{ nach } W\}$$

Eine maximal reduktive Wägung reduziert also k Kugeln auf k' Kugeln. Für Wägungen 1. resp. 2. Art ist k' eine Funktion von k resp. von k und b: k'=k'(k) resp. k'=k'(k, b).

Für beide Arten von Wägungen ist die Funktion k' gesucht.

Im Folgenden werden die **Auf- und die Abrundungsfunktion** benützt, die wie folgt für $\forall x \in Q_0^+$ definiert sind:

Aufrundungsfunktion $\lceil x \rceil := \min\{r \in N: r \geq x\}$
Abrundungsfunktion $\lfloor x \rfloor := \max\{r \in N: r \leq x\}$

4.2. Obere Grenze für k'

Weil bei jeder Wägung nur 3 verschiedene Ergebnisse möglich sind, kann v_{max} und damit k' nicht kleiner als k/3 sein: $k' \geq k/3$. Wegen $k' \in N^+$, muss sogar $k' \geq \lceil k/3 \rceil$ sein.

Grenzprinzip für Einzelwägungen

$$k' \geq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$$

Wägungen 1. Art: Nach Tabelle 1 gibt es vor der Wägung 2 verschiedene Mengen Kugeln, die nach der Wägung verbleiben können: Die Menge der nicht-n-Kugeln auf der Waage und die Menge der Kugeln aussen. Daraus folgt das

Grenzprinzip für Einzelwägungen 1. Art

$$k'(k) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

Wägungen 2. Art: Nach Tabelle 1 gibt es vor der Wägung 3 verschiedene Mengen Kugeln, die nach der Wägung verbleiben können: Die Menge der s-Kugeln der 1. Schale und der l-Kugeln der 2. Schale, die Menge der s-Kugeln der 2. Schale und der l-Kugeln der 1. Schale, und die Menge der Kugeln aussen. Daraus folgt das

Grenzprinzip für Einzelwägungen 2. Art

$$k'(k, b) \geq \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$$

4.3. Wägungen 1. Art – k'(k)

Betrachtet werden Wägungen 1. Art mit $k=A_0+2A$ Kugeln. Nach Tabelle 1 ist

$$v_{max}=\max\{A_0, 2A\}$$

Für k'(k) ist das minimale v_{max} für verschiedene Wägungen mit k Kugeln gesucht. A_0 durch $k–2A$ ersetzen →

$$v_{max}=\max\{k-2A, 2A\}$$

Da k eine feste Grösse ist, wird v_{max} genau dann minimal, wenn sich $k–2A$ und $2A$ minimal unterscheiden. Also $|k-2A-2A|=|k-4A|$ minimal. Idealerweise wäre $k–4A=0$, also $A=k/4$. Wegen $A\in N$ muss aber

$$A=\lceil k/4\rceil \text{ oder } A=\lfloor k/4\rfloor$$

sein.
Sei $k=4p+q$ mit $p\in N$ und $q\in\{0, 1, 2, 3\}$. Dann ist $\lceil k/4\rceil=p+\mathrm{sgn}(q)$ und $\lfloor k/4\rfloor=p$.

$A=\lceil k/4\rceil \rightarrow A\geq k/4 \leftrightarrow 4A\geq k \leftrightarrow 2A\geq k-2A \rightarrow v_{max}=2A=2\lceil k/4\rceil=$ $\qquad v_{max}=2p+2\mathrm{sgn}(q)$
$A=\lfloor k/4\rfloor \rightarrow A\leq k/4 \leftrightarrow 4A\leq k \leftrightarrow 2A\leq k-2A \rightarrow v_{max}=k-2A=k-2\lfloor k/4\rfloor=4p+q-2p=$ $\qquad v_{max}=2p+q$

Damit ist $k'=\min\{2p+2\mathrm{sgn}(q), 2p+q\}=$

$$k'=2p+\min\{2\mathrm{sgn}(q), q\}$$

$q=0 \rightarrow k'=2p+0=k/2 \qquad =\lceil k/2\rceil$
$q=1 \rightarrow k'=2p+1=\lceil 2p+1/2\rceil=\lceil (4p+1)/2\rceil \qquad =\lceil k/2\rceil$
$q=2 \rightarrow k'=2p+2=2p+1+1=\lceil 2p+1\rceil+1=\lceil (4p+2)/2\rceil+1 \qquad =\lceil k/2\rceil+1$
$q=3 \rightarrow k'=2p+2=\lceil 2p+3/2\rceil=\lceil (4p+3)/2\rceil \qquad =\lceil k/2\rceil$

Hilfssatz über Wägungen 1. Art

Gegeben $k\in N^+$ Kugeln unbekannter Indizes. Nach maximal reduktiver Wägung gilt für die Anzahl k' verbleibender Kugeln:

$$k'(k)=\begin{cases}\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil & \text{für } k\notin\{2,6,10,...\}\\ \left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil+1 & \text{für } k\in\{2,6,10,...\}\end{cases}$$

Tabelle 2: Maximale Reduktion auf k'(k) Kugeln bei Wägungen 1. Art mit k Kugeln,
für $k\in\{1, 2, 3, ..., 18\}$.

K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
k'(k)	1	2	2	2	3	4	4	4	5	6	6	6	7	8	8	8	9	10

Beispiel: k=6. Die maximal reduktiven Wägungen sind W=(2, 2) und W=(4, 1), also $v_{max}=4=k'(6)$.

Ausser für q=2 ist es möglich, die maximale Reduktion auf $k'(k)=\lceil k/2 \rceil$ zu erreichen. Steht eine zusätzliche n-Kugel zur Verfügung, so gilt mit $W=(k/2, \lceil k/4 \rceil, \lfloor k/4 \rfloor+n)$ auch für q=2, dass $k'(k)=\lceil k/2 \rceil$ ist:

Verifiziere $A_1=A_2$: $A_1=\lceil k/4 \rceil=p+sgn(q)=p+1$; $A_2=\lfloor k/4 \rfloor+1=p+1=A_1$

Verifiziere $v_{max}=\lceil k/2 \rceil=k'(k)$: $v_{max}=max\{k/2, \lceil k/4 \rceil+\lfloor k/4 \rfloor\}=max\{2p+1, p+1+p\}=2p+1=k/2=\lceil k/2 \rceil$

Beispiel: k=6. W=(3, 2, 1+n). $v_{max}=3=\lceil k/2 \rceil=k'(6)$

Hilfssatz über Wägungen 1. Art mit n-Kugel

Gegeben $k\in N^+$ Kugeln unbekannter Indizes sowie eine n-Kugel. Nach maximal reduktiver Wägung gilt für die Anzahl k' verbleibender Kugeln:

$$k'(k)=\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$$

Tabelle 3: Maximale Reduktion auf k'(k) Kugeln bei Wägungen 1. Art mit k Kugeln und einer n-Kugel, für $k\in\{1, 2, 3, ..., 18\}$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
k'(k)	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9

4.4. Wägungen 2. Art – k'(k, b)

Hilfssatz über Wägungen 2. Art

Gegeben $k\in N^+$ Kugeln bekannter Indizes mit genau b s-Kugeln. Nach maximal reduktiver Wägung gilt für die Anzahl k' verbleibender Kugeln:

$$k'(k, b)=\begin{cases} \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil & \text{für } (k, b) \neq (2, 1) \\ 2 & \text{für } (k, b) = (2, 1) \end{cases}$$

Beweis

Die allgemeine Wägung 2. Art ohne n-Kugeln hat die Form

$$W=(S_0s+L_0l,\ S_1s+L_1l,\ S_2s+L_2l)$$

Mit einem Ansatz für W wird versucht, $v_{max}=\lceil k/3 \rceil=k'(k, b)$ zu erreichen. Die Fälle, in denen dieser Ansatz versagt, sind einerseits Fälle, für die gesondert eine Wägung mit $v_{max}=\lceil k/3 \rceil$ gefunden wird, und andererseits die Ausnahme des Hilfssatzes.

Ansatz: $S_{1,2}:=\min\{\lceil k/3\rceil, \lfloor b/2\rfloor\}$

$L_{1,2}:=\lceil k/3\rceil - S_{1,2} \geq 0$ wegen $S_{1,2} \leq \lceil k/3\rceil$

$S_0:=b-2S_{1,2}$

$L_0:=k-b-2(\lceil k/3\rceil - S_{1,2}) = k-b-2L_{1,2}$

Verifiziere $k=\sum_{i=0}^{2} S_i + L_i$: $S_0+2S_{1,2}+L_0+2L_{1,2}=b+k-b=k$

Verifiziere $b=\sum_{i=0}^{2} S_i$: $S_0+2S_{1,2}=b$

Verifiziere $A_1=A_2$: $A_1=S_1+L_1=S_2+L_2=A_2$

Verifiziere $v_{max}=\lceil k/3\rceil$. Nach Tabelle 1 ist

$$v_{max}=\max\{S_0+L_0, S_1+L_2, S_2+L_1\}$$

Nach dem Ansatz ist

$$S_0+L_0=k-2\lceil k/3\rceil$$
$$S_1+L_2=\lceil k/3\rceil$$
$$S_2+L_1=\lceil k/3\rceil$$

$\Rightarrow$ $$v_{max}=\max\{k-2\lceil k/3\rceil, \lceil k/3\rceil, \lceil k/3\rceil\}$$

Wegen $$k-2\lceil k/3\rceil \leq k-2k/3=k/3 \leq \lceil k/3\rceil$$

erfüllt der Ansatz $$v_{max}=\lceil k/3\rceil=k'(k, b)$$

Bemerke: Der Ansatz liefert auch für den Fall (k, b)=(2, 1) eine Reduktion auf $\lceil k/3\rceil=1$ Kugeln. Da es aber nicht möglich ist, aus einer s- und einer l-Kugel K zu eruieren, existiert keine reduzierende Wägung, und da alle Indizes bereits bekannt sind, auch keine echte Wägung. Der Ansatz wird deshalb in mindestens einem Fall versagen.

Verifiziere $S_i, L_i \in \mathbb{N}$ für $\forall i \in \{0, 1, 2\}$:

Ansatz $\rightarrow S_i, L_i \in \mathbb{Z}$ für $\forall i$. Es bleibt $S_i, L_i \geq 0$ für $\forall i$ zu verifizieren.
Ansatz $\rightarrow S_{1,2} \geq 0$
Ansatz $\rightarrow L_{1,2} \geq 0$
Ansatz $\rightarrow S_{1,2} \leq \lfloor b/2\rfloor \leq b/2 \rightarrow 2S_{1,2} \leq b \leftrightarrow S_0=b-2S_{1,2} \geq 0$

Es fehlt noch $L_0 \geq 0$.

Fall 1: $\lceil k/3\rceil \leq \lfloor b/2\rfloor$

Ansatz $\rightarrow S_{1,2}=\lceil k/3\rceil \rightarrow L_0=k-b-2(\lceil k/3\rceil - \lceil k/3\rceil)=k-b \geq 0$

Fall 2: $\lceil k/3\rceil > \lfloor b/2\rfloor$

Ansatz $\rightarrow S_{1,2}=\lfloor b/2\rfloor \rightarrow L_0=k-b-2\lceil k/3\rceil+2\lfloor b/2\rfloor=k-2\lceil k/3\rceil-b+2\lfloor b/2\rfloor$

Sei $k=3p+q$ mit $p \in \mathbb{N}$, $q \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \lceil k/3\rceil=p+\mathrm{sgn}(q) \rightarrow k-2\lceil k/3\rceil=3p+q-2(p+\mathrm{sgn}(q))=$

$$k-2\lceil k/3\rceil=p+q-2\operatorname{sgn}(q)$$

Fall 2.1: b gerade

$\lfloor b/2\rfloor=b/2 \rightarrow -b+2\lfloor b/2\rfloor=-b+2b/2=0 \rightarrow$

$$L_0=p+q-2\operatorname{sgn}(q)$$

$L_0<0$ und $q=0 \rightarrow p<0$, Widerspruch
$L_0<0$ und $q=1 \rightarrow p<1 \rightarrow p=0 \rightarrow k=1$. Der Hilfssatz gilt trivial für $k=1$.
$L_0<0$ und $q=2 \rightarrow p<0$, Widerspruch
$\Rightarrow L_0\geq 0$ oder der Hilfssatz gilt trivial.

Fall 2.2: b ungerade

$\lfloor b/2\rfloor=(b-1)/2 \rightarrow -b+2\lfloor b/2\rfloor=-b+2(b-1)/2=-1 \rightarrow$

$$L_0=p+q-2\operatorname{sgn}(q)-1$$

$L_0<0$ und $q=0 \rightarrow p<1 \rightarrow p=0 \rightarrow k=0$, Widerspruch
$L_0<0$ und $q=1 \rightarrow p<2 \rightarrow p\in\{0, 1\} \rightarrow k\in\{1, 4\}$

Der Hilfssatz gilt trivial für $k=1$.
$k=4 \rightarrow b\in\{1, 3\}$. Für $b=1$ liefert $W=(s+l, l, l)$ und für $b=3$ liefert $W=(s+l, s, s)$
$v_{max}=2=\lceil k/3\rceil=k'(k, b)$.

$L_0<0$ und $q=2 \rightarrow p<1 \rightarrow p=0 \rightarrow k=2 \rightarrow b=1 \rightarrow$ gegeben ist eine s- und eine l-Kugel
$\rightarrow \nexists$ echte Wägung $\rightarrow k'(2, 1)=2$

$\Rightarrow L_0\geq 0$ oder der Hilfssatz gilt.

$\Rightarrow$ Für alle Fälle gilt: $L_0\geq 0$ oder der Hilfssatz gilt $\Rightarrow$ Für alle Fälle gilt: Ansatz liefert $v_{max}=\lceil k/3\rceil$ oder der Hilfssatz gilt

$\Rightarrow$ **q.e.d.**

Beispiel für diesen Ansatz: $(k, b)=(100, 23) \rightarrow S_{1,2}=\min\{\lceil 100/3\rceil, \lfloor 23/2\rfloor\}=11$, $L_{1,2}=34-11=23$, $S_0=23-2\cdot 11=1$, $L_0=100-23-2\cdot 23=31 \rightarrow$

$$W=(s+31l, 11s+23l, 11s+23l)$$

$E=0 \rightarrow v=32$
$E\neq 0 \rightarrow v=34 \Rightarrow v_{max}=34=\lceil k/3\rceil=k'(k, b)$

Steht eine zusätzliche n-Kugel zur Verfügung, so gilt mit $W=(s, l, n)$, dass auch im Sonderfall $(k, b)=(2, 1)$ $v_{max}=1=\lceil k/3\rceil$ ist. Daraus folgt der

Hilfssatz über Wägungen 2. Art mit n-Kugel

Gegeben $k \in N^+$ Kugeln bekannter Indizes mit genau b s-Kugeln sowie eine n-Kugel. Nach maximal reduktiver Wägung gilt für die Anzahl k' verbleibender Kugeln:

$$k'(k, b) = \left\lceil \frac{k}{3} \right\rceil$$

4.5. Sonderfälle der Hilfssätze über Wägungen 1. und 2. Art

Sonderfall bei Wägungen 1. Art: k=2: $k'(k) \neq \lceil k/2 \rceil$, sondern $k'(k)=k \rightarrow \nexists$ reduzierende Wägung

Sonderfall bei Wägungen 2. Art: (k, b)=(2, 1): $k'(k, b) \neq \lceil k/3 \rceil$, $\nexists$ echte Wägung

Die beiden Sonderfälle hängen insofern zusammen, als man vom ersten zwangsläufig zum zweiten gelangt:

Sonderfall 1: Gegeben 2 Kugeln unbekannter Indizes. Für eine echte Wägung gilt $A_1=A_2=A$ und $A \geq 1$ $\rightarrow W=(0, 1) \rightarrow E \neq 0 \rightarrow$ es verbleiben zwei Kugeln verschiedener Indizes, dies ist Sonderfall 2.

Verallgemeinerung: Mit der Definition

r:=Art einer Wägung, $r \in \{1, 2\}$

können die beiden Hilfssätze über Wägungen 1. und 2. Art mit n-Kugel vereinigt werden:

Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel

Sei W_{m+1} eine maximal reduktive Wägung r-ter Art, $r \in \{1, 2\}$, mit $v_m \in N^+$ Kugeln und einer n-Kugel. Dann gilt

$$v_{m+1} = \left\lceil \frac{v_m}{r+1} \right\rceil$$

5. Die maximale Anzahl a_n Kugeln bei n Wägungen

Es wird wieder [a, n] betrachtet. Da nach Definition von a_n [a_n, n] lösbar und [a, n] unlösbar für $\forall$ $a>a_n$ ist, liefert die Bestimmung von a_n als Funktion von n eine Teilantwort auf Frage 1.

5.1. Definitionen von [a, n]' und a_n' – Werte von a_0, a_1, a_1' und a_0'

$1 \leq a_0 \leq 3^0 \rightarrow$ $\qquad a_0=1$

[a_1, 1]: In einer Wägung 1. Art wird K eruiert $\leftrightarrow$ $v_1=1$; Hilfssatz über Wägungen 1. Art $\Rightarrow$

Fall 1: $a_1 \notin \{2, 6, 10, ...\} \rightarrow v_1=\lceil a_1/2 \rceil=1 \rightarrow a_1 \in \{1, 2\}$; $a_1=2 \rightarrow$ Widerspruch $\rightarrow a_1=1$
Fall 2: $a_1 \in \{2, 6, 10, ...\} \rightarrow v_1=\lceil a_1/2 \rceil+1=1 \rightarrow a_1=0 \rightarrow$ Widerspruch

$\Rightarrow$ $\qquad a_1=1$

Steht eine zusätzliche n-Kugel zur Verfügung, so gilt nach dem Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel nach W_1 unabhängig von a_1: $v_1=\lceil a_1/2 \rceil$; $v_1=1 \rightarrow a_1 \in \{1, 2\} \Rightarrow a_1=2$
In der Problemstellung von [a, n] ist aber eine zusätzliche n-Kugel nicht vorgesehen. Es wird daher definiert:

[a, n]':=Problem mit a Kugeln, n Wägungen und einer zusätzlichen n-Kugel

$$\boxed{a_n' := \max\{a \in N^+ : [a, n]' \text{ ist lösbar}\}}$$

Mit dieser Definition kann obige Überlegung geschrieben werden als

$$a_1'=2$$

[a, n] ist lösbar $\rightarrow$ [a, n]' ist lösbar $\Rightarrow$ $\qquad a_n \leq a_n'$ für $\forall n \in N$

Das Grenzprinzip der Lösbarkeit gilt auch für [a, n]': $\qquad 1 \leq a_n' \leq 3^n$

Analog zur Monotonie von a_n folgt: $\qquad a_{n+1}' \geq a_n'$ für $\forall n \in N$

$1 \leq a_0' \leq 3^0 \rightarrow$ $\qquad a_0'=1$

5.2. Rekursionsformeln für a_{n+1} und a_{n+1}'

5.2.1. [a_{n+1}, n+1]

W_1 ist eine Wägung 1. Art $\rightarrow$ setze $\qquad a_{n+1}=A_0+2A$

$A=0 \rightarrow W_1$ ist unecht $\rightarrow$ es verbleibt $[a_{n+1}, n]$; Da $[a_{n+1}, n+1]$ lösbar ist, ist nun $[a_{n+1}, n]$ ebenfalls lösbar $\rightarrow a_{n+1} \leq a_n \rightarrow a_{n+1}=a_n \rightarrow a_{n+1}=1$ für $\forall n \in N$; $[4, 2]$ ist lösbar $\rightarrow a_2 \geq 4 \rightarrow$ Widerspruch ab $n \geq 1$

$\Rightarrow$ bei $[a_{n+1}, n+1]$ führt $A=0$ für $\forall n \in N^+$ zu einem Widerspruch

Da die Werte von a_0 und a_1 bekannt sind, suchen wir die Rekursionsformel für a_{n+1} ab Index 2, also für $n \in N^+$.

$\Rightarrow$ sei $n \in N^+$ und $A \in N^+$

a_{n+1} ist die maximale Anzahl Kugeln für n+1 Wägungen, somit muss A_0+2A maximiert werden. Werden A_0 und $2A$ unabhängig voneinander maximiert, so ist nicht gewährleistet, dass auch A_0+2A maximal ist. Es wird sich jedoch zeigen, dass beide Summanden bis zu deren Informationsgrenze maximiert werden können.

Fall 1: $E_1=0$

Es verbleiben $v_1=A_0$ Kugeln unbekannter Indizes, 2A n-Kugeln sowie n Wägungen. $A \geq 1 \rightarrow$ mindestens 2 n-Kugeln stehen zur Verfügung. Aus dem Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel und den Grenzprinzipien bei Wägungen r-ter Art geht hervor, dass mit einer n-Kugel immer die maximale Reduktion auf $\lceil v_1/(r+1) \rceil$ verbleibende Kugeln erreicht werden kann. Die zusätzlichen $2A-1$ n-Kugeln liefern deshalb keine zusätzliche Information.

$\Rightarrow$ es verbleibt $[A_0, n]'$

A_0 maximieren $\rightarrow$ $A_0=a_n'$ (Informationsgrenze)

Fall 2: $E_1 \neq 0$

Es verbleiben $v_1=2A$ Kugeln bekannter Indizes, $A_0=a_n' \geq a_1'=2$ n-Kugeln sowie n Wägungen. Grenzprinzip der Lösbarkeit $\rightarrow 2A \leq 3^n$; 2A gerade und 3^n ungerade $\rightarrow 2A \leq 3^n-1$. Es wird gezeigt, dass der maximale Wert,

$$2A=3^n-1 \quad \text{(Informationsgrenze)}$$

zulässig ist:

$A_0 \geq 2 \rightarrow$ Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel ist anwendbar
$\Rightarrow v_2=\lceil (3^n-1)/3 \rceil=3^{n-1} \rightarrow v_3=\lceil 3^{n-1}/3 \rceil=3^{n-2} \rightarrow v_{n+1}=3^{n-(n+1-1)}=1 \leftrightarrow$ K wurde eruiert

$\Rightarrow a_{n+1}=a_n'+3^n-1$ für $\forall n \in N^+$; $n=0$: $a_0'+3^0-1=1=a_1 \Rightarrow$

Rekursionsformel 1

$a_{n+1}=a_n'+3^n-1$ für $\forall n \in N$

5.2.2. $[a_{n+1}', n+1]'$

In W_1 ist $N_1 \neq 0$ oder $N_2 \neq 0$ möglich $\leftrightarrow V \neq 2A$ ist möglich $\Rightarrow$

$$a_{n+1}'=A_0+V$$

$V=0 \rightarrow W_1$ ist unecht $\rightarrow$ es verbleibt $[a_{n+1}', n]'$; $[a_{n+1}', n+1]'$ ist lösbar $\rightarrow$ $[a_{n+1}', n]'$ ist lösbar $\Rightarrow$ $a_{n+1}' \leq a_n' \rightarrow a_{n+1}'=a_n' \rightarrow a_{n+1}'=1$ für $\forall n \in N$; $a_1'=2 \rightarrow$ Widerspruch für $\forall n \in N$

$\Rightarrow$ bei $[a_{n+1}', n+1]'$ führt $V=0$ für $\forall n \in N$ zu Widerspruch

$\Rightarrow$ sei $n \in N$ und $V \in N^+$

Wie unter 5.2.1. können auch in diesem Fall beide Summanden bis zu deren Informationsgrenze maximiert werden:

Fall 1: $E_1=0$

Es verbleibt $[A_0, n]'$.

A_0 maximieren $\rightarrow$ $A_0=a_n'$ (Informationsgrenze)

Fall 2: $E_1 \neq 0$

Es verbleiben $v_1=V$ Kugeln bekannter Indizes sowie n Wägungen. Grenzprinzip der Lösbarkeit $\rightarrow V \leq 3^n$. Da eine n-Kugel zur Verfügung steht, ist es möglich, eine ungerade Anzahl verbleibender Kugeln auf die Waage zu legen. Es wird gezeigt, dass der maximale Wert,

$V=3^n$ (Informationsgrenze)

zulässig ist:

Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel ist anwendbar
$\Rightarrow v_2=\lceil 3^n/3 \rceil=3^{n-1} \rightarrow v_3=\lceil 3^{n-1}/3 \rceil=3^{n-2} \rightarrow v_{n+1}=3^{n-(n+1-1)}=1 \leftrightarrow$ K wurde eruiert

$\Rightarrow$

Rekursionsformel 2

$a_{n+1}'=a_n'+3^n$ für $\forall n \in N$

(Rekursionsformel 2) – (Rekursionsformel 1): $a_{n+1}'-a_{n+1}=1$ für $\forall n \in N \leftrightarrow a_n'-a_n=1$ für $\forall n \in N^+$
Für n=0 gilt dies nicht: $a_0'-a_0=0 \neq 1$

Relation zwischen a_n und a_n'

$a_n'=a_n+1$ für $\forall n \in N^+$

$a_0'=a_0=1$

Für $n \in N^+$ kann in Rekursionsformel 1 a_n' durch a_n+1 ersetzt werden:
$a_{n+1}=a_n'+3^n-1=a_n+1+3^n-1=a_n+3^n$
Für n=0 gilt dies nicht: $a_1 \neq a_0+3^0$

Rekursionsformel 3

$a_{n+1}=a_n+3^n$ für $\forall n\in N^+$

5.2.3. Werte von a_n und a_n'

Mit den Rekursionsformeln 2 und 3 sowie den Anfangswerten $a_0'=a_0=1$ und $a_1=1$ können prinzipiell alle a_n' und alle a_n angegeben werden. Beachte: [12, 3] stellte noch nicht die Informationsgrenze für die Anzahl Kugeln bei 3 Wägungen dar: [13, 3] ist lösbar.

Tabelle 4: a_n' und a_n für $n\in\{0, 1, 2, ..., 12\}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n'	1	2	5	14	41	122	365	1'094	3'281	9'842	29'525	88'574	265'721
a_n	1	1	4	13	40	121	364	1'093	3'280	9'841	29'524	88'573	265'720

5.3. Explizite Formel für a_n

Gesucht ist a_n als explizite Funktion von n. Aus Tabelle 4 lässt sich ein weiterer Zusammenhang zwischen a_{n+1} und a_n vermuten:

Rekursionsvermutung 3': $a_{n+1}=3a_n+1$ für $\forall n\in N^+$

Subtraktion von

Rekursionsformel 3: $a_{n+1}=a_n+3^n$ für $\forall n\in N^+$

ergibt: $0=2a_n-3^n+1$ für $\forall n\in N^+$

$\Rightarrow$ $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ für $\forall n\in N^+$

Beweis mit vollständiger Induktion über n, dass diese Formel a_n für $\forall n\in N^+$ korrekt liefert:

Induktionsanfang bei n=1: $a_1=\frac{1}{2}(3^1-1)=1$, korrekt

Induktionsschritt von n nach n+1:
Voraussetzung: $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ für $\forall n\in N^+$
Zu zeigen: $a_{n+1}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$ für $\forall n\in N^+$

In Rekursionsformel 3: $a_{n+1}=a_n+3^n$ für $\forall n\in N^+$

wird die Induktionsvoraussetzung für a_n eingesetzt:

Für $\forall n\in N^+$: $a_{n+1}=\frac{1}{2}(3^n-1)+3^n=\frac{3}{2}3^n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}3^{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$, **q.e.d.**

Damit ist die explizite Formel für a_n für $\forall n\in N^+$ gefunden. Für n=0 gilt sie nicht: $a_0\neq\frac{1}{2}(3^0-1)=0$

Explizite Formel für a_n

$a_0=1$, $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ für $\forall n\in N^+$

$\Rightarrow a_n\leq 3^n$ für $\forall n\in N$, wie vom Grenzprinzip der Lösbarkeit impliziert.

5.3.1. Rekursionsformel 3'

Rekursionsvermutung 3': $a_{n+1}=3a_n+1$ für $\forall n\in N^+$

ist korrekt: Explizite Formel für a_n $\rightarrow$ für $\forall n\in N^+$: $3a_n+1=3\frac{1}{2}(3^n-1)+1=\frac{1}{2}3^{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)=a_{n+1}$

Für n=0 gilt Rekursionsvermutung 3' nicht: $1=a_1\neq 3a_0+1=4$

Rekursionsformel 3'

$a_{n+1}=3a_n+1$ für $\forall n\in N^+$

5.4. Explizite Formel für a_n'

Relation zwischen a_n und a_n': $a_n'=a_n+1$ für $\forall n\in N^+$

Explizite Formel für a_n $\rightarrow$ $a_n'=\frac{1}{2}(3^n-1)+1=\frac{1}{2}(3^n+1)$ für $\forall n\in N^+$

Für n=0 liefert dies $a_0'=\frac{1}{2}(3^0+1)=1$, was korrekt ist.

Explizite Formel für a_n'

$a_n'=\frac{1}{2}(3^n+1)$ für $\forall n\in N$

$n\in N \rightarrow 0\leq n \leftrightarrow 3^0=1\leq 3^n \leftrightarrow 3^n+1\leq 2\cdot 3^n \leftrightarrow \frac{1}{2}(3^n+1)\leq 3^n$
$\Rightarrow a_n'\leq 3^n$ für $\forall n\in N$, wie vom Grenzprinzip der Lösbarkeit impliziert.

In Analogie zu Rekursionsformel 3' kann aus Tabelle 4

Rekursionsformel 2'

$a_{n+1}'=3a_n'-1$ für $\forall n\in N$

vermutet werden.

Beweis: Für $\forall n\in N$: $3a_n'-1=3\,\frac{1}{2}\,(3^n+1)-1=\frac{1}{2}\,3^{n+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,(3^{n+1}+1)=a_{n+1}'$, **q.e.d.**

6. Lösbarkeit von [a, n] und [a, n]’

6.1. Satz über die Lösbarkeit von [a, n]

Es folgt die Beantwortung von Frage 1: Für welche Werte von a und n ist [a, n] lösbar? Der Beweis des folgenden Satzes erfordert einige Vorüberlegungen und folgt in 6.1.4.

> **Satz über die Lösbarkeit von [a, n]**
>
> [a, n] ist lösbar $\leftrightarrow$ $a\neq 2$ und $a\leq a_n$

6.1.1. Sonderfall der Lösbarkeit von [a, n]

[a, n]: $a=2 \rightarrow \nexists$ reduzierende Wägung, einzig die Indizes können gefunden werden; wie in 1.5. gezeigt, existiert dann keine echte Wägung mehr $\Rightarrow$

> **Sonderfall der Lösbarkeit**
>
> [2, n] ist unlösbar für $\forall n\in N$.

6.1.2. Monotonie von Auf- und Abrundungsfunktion:

$x_1\leq x_2 \rightarrow \lceil x_1\rceil=\min\{r\in N: r\geq x_1\}\leq\min\{r\in N: r\geq x_2\}=\lceil x_2\rceil$
$x_1\leq x_2 \rightarrow \lfloor x_1\rfloor=\max\{r\in N: r\leq x_1\}\leq\max\{r\in N: r\leq x_2\}=\lfloor x_2\rfloor$

> **Monotoniegesetz der Rundungsfunktionen**
>
> $x_1\leq x_2 \rightarrow \lceil x_1\rceil\leq\lceil x_2\rceil$ und $\lfloor x_1\rfloor\leq\lfloor x_2\rfloor$

6.1.3. Eruierbarkeit mit n-Kugel aus maximal 3^n Kugeln bekannter Indizes

> **Folgerung 1**
>
> Aus $k\in\{1, 2, 3, ..., 3^n\}$ Kugeln bekannter Indizes kann K in n Wägungen eruiert werden, falls eine n-Kugel zur Verfügung steht.

Beweis

$v_0=k\leq 3^n$

Alle Wägungen sind 2. Art mit n-Kugel und maximal reduktiv $\Rightarrow$ nach dem Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel ist

$$v_{m+1}=\lceil v_m/3 \rceil$$

$\Rightarrow v_1=\lceil v_0/3 \rceil$; $v_0\leq 3^n \leftrightarrow v_0/3\leq 3^{n-1} \rightarrow \lceil v_0/3 \rceil\leq\lceil 3^{n-1}\rceil=3^{n-1}$, also $v_1\leq 3^{n-1}$
$\Rightarrow v_2\leq 3^{n-2} \Rightarrow ... \Rightarrow v_n\leq 3^{n-n}=1 \Rightarrow$ K wurde eruiert, **q.e.d.**

6.1.4. Beweis des Satzes über die Lösbarkeit von [a, n]

Es bleibt zu zeigen übrig, dass $[a\neq 2, n]$ für $\forall a<a_n$ lösbar ist.

n=0: $a<a_0=1 \rightarrow$ Widerspruch $\rightarrow$ nichts zu zeigen übrig
n=1: $a<a_1=1 \rightarrow$ Widerspruch $\rightarrow$ nichts zu zeigen übrig

Induktionsanfang bei n=2: $a<a_2=4 \rightarrow a\in\{1, 3\}$; [1, 2] ist trivial lösbar; [3, 2] ist lösbar: $W_1=(1, 1)$; E=0: K ist aussen, $E\neq 0$: Es verbleibt [2, 1]', was wegen $a_1'=2$ lösbar ist.

Induktionsschritt von n nach n+1 für $n\geq 2$:

Voraussetzung: $[a\neq 2, n]$ ist lösbar für $\forall a<a_n$
Zu zeigen: $[a\neq 2, n+1]$ ist lösbar für $\forall a<a_{n+1}$

$[a_n, n]$ ist lösbar $\rightarrow$
Voraussetzung': $[a\neq 2, n]$ ist lösbar für $\forall a\leq a_n$

$\Rightarrow [a\neq 2, n+1]$ ist lösbar für $\forall a\leq a_n \Rightarrow$

Zu zeigen übrig: $[a\neq 2, n+1]$ ist lösbar für $\forall a\in\{a_n+1, a_n+2, a_n+3, ..., a_{n+1}-1\}$

Ansatz: $W_1=(a-2\lfloor a/3\rfloor, \lfloor a/3\rfloor)$

Ansatz $\rightarrow A_0+2A=a$, korrekt

$a\geq a_n+1\geq a_2+1$ wegen $n\geq 2 \rightarrow$ $a\geq 5$

Ansatz $\rightarrow A_0\geq a-2a/3=a/3\geq 5/3 \rightarrow$ $A_0\geq 2$

$a\geq 5 \rightarrow \lfloor a/3\rfloor\geq\lfloor 5/3\rfloor=1$, also $A\geq 1$

$a\leq a_{n+1}-1 \rightarrow \lfloor a/3\rfloor\leq\lfloor(a_{n+1}-1)/3\rfloor$, also $A\leq\lfloor(a_{n+1}-1)/3\rfloor=\lfloor[\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)-1]/3\rfloor=\lfloor\frac{1}{2}(3^n-1)\rfloor=\lfloor a_n\rfloor=a_n$

$\Rightarrow$ $A\in\{1, 2, 3, ..., a_n\}$

Sei $a=3p+q$ mit $p\in N$ und $q\in\{0, 1, 2\} \rightarrow A_0=3p+q-2p=p+q$ und $A=p \rightarrow$

$$W_1=(p+q, p)$$

$A\leq a_n$ und $A=p \rightarrow p\leq a_n$; $q\leq 2 \Rightarrow p+q\leq a_n+2$

$p+q=a_n+2 \rightarrow p=a_n$ und $q=2 \rightarrow a=3a_n+2$; Rekursionsformel 3' $\rightarrow a=a_{n+1}+1 \rightarrow$ Widerspruch wegen $a\leq a_{n+1}-1 \Rightarrow p+q\leq a_n+1$

$p+q=a_n+1$ ist möglich: $a=a_{n+1}-2=3a_n-1 \rightarrow p=a_n-1$ und $q=2 \rightarrow p+q=a_n+1$

mit $p+q=A_0 \Rightarrow$ $A_0\in\{2, 3, 4, ..., a_n+1\}$

Fall 1: $E_1=0$

> $2A\geq 2 \rightarrow$ es verbleibt $[A_0, n]'$. Ausser für $A_0\in\{2, a_n+1\}$ ist dies nach Voraussetzung' lösbar. $a_1'=2 \rightarrow [2, n]'$ ist lösbar. $[a_n+1, n]'=[a_n', n]'$ ist nach Definition von a_n' lösbar.

Fall 2: $E_1\neq 0$

> Es verbleiben 2A Kugeln bekannter Indizes, $A_0\geq 2$ n-Kugeln sowie n Wägungen. $A\leq a_n \leftrightarrow 2A\leq 2a_n=3^n-1<3^n \Rightarrow$ nach Folgerung 1 ist dies lösbar.

$\Rightarrow$ der Ansatz vollzieht den Induktionsschritt, **q.e.d.**

6.2. Satz über die Lösbarkeit von [a, n]'

Satz über die Lösbarkeit von [a, n]'

$[a, n]'$ ist lösbar $\leftrightarrow a\leq a_n'$

Beweis

Es bleibt zu zeigen übrig, dass $[a, n]'$ für $\forall a<a_n'$ lösbar ist.

$n=0$: $a<a_0'=1 \rightarrow$ Widerspruch $\rightarrow$ nichts zu zeigen übrig

Sei also $n\in N^+$. Dann gilt $a_n'=a_n+1$, so dass zu zeigen übrig bleibt, dass $[a, n]'$ für $\forall a<a_n+1$, also für $\forall a\leq a_n$ lösbar ist. Ausser für a=2 wird dies vom Satz über die Lösbarkeit von [a, n] impliziert. Für a=2 ist folgende Äquivalenz zu zeigen:

$$[2, n]' \text{ ist lösbar} \leftrightarrow 2\leq a_n'$$

Wegen $a_1'=2$ und der Unlösbarkeit von $[2, 0]'$ ist die linke Seite genau für $n\in N^+$ wahr, respektive nach Voraussetzung $n\in N^+$ immer wahr.
Wegen $a_1'=2$, $a_0'=1<2$ sowie der Monotonie von a_n' ist die rechte Seite genau für $n\in N^+$ wahr, respektive nach Voraussetzung $n\in N^+$ immer wahr.

$\Rightarrow$ Die Seiten sind äquivalent, **q.e.d.**

7. Maximaler Algorithmus

Für lösbare [a, n] und [a, n]’ ist ein allgemeiner Algorithmus gesucht, der K eruiert und zusätzlich mit maximaler Wahrscheinlichkeit die Gewichtsinformation liefert. Ein solcher Algorithmus heisst ***maximal.***

Nach Eruierung von K ist die Kenntnis der Gewichtsinformation gleichbedeutend damit, den Index von K zu kennen. Dies ist äquivalent dazu, K mindestens einmal gewogen zu haben. Es scheint daher intuitiv klar, dass am ehesten derjenige aller K eruierenden Algorithmen maximal ist, bei dem in jeder Wägung 1. Art möglichst viele Kugeln auf die Waage gesetzt werden. Dadurch wird die Wahrscheinlichkeit, K zu wägen, maximiert. Wurde K einmal gewogen, sind von allen verbleibenden Kugeln die Indizes bekannt, was am Ende die Gewichtsinformation liefert.
Der ***Standardalgorithmus*** ist dadurch definiert, dass V maximiert wird, solange alle Indizes unbekannt sind, und dass nach dem im Beweis des Hilfssatzes über Wägungen 2. Art angegebenen Verfahren gewogen wird, falls alle Indizes bekannt sind.
Die Lösung von [12, 3] in Teil 2 beruht auf dem Standardalgorithmus.

7.1. Standardalgorithmus

w:=Anzahl verbleibender Wägungen, $w\in\{0, 1, 2, \ldots, n\}$

Start: v=a und w=n
Algorithmus stoppt $\Leftrightarrow$ Problem unlösbar oder w=0 oder (v=1 und GI bekannt)
v=1 und GI unbekannt und $w\geq 1 \Leftrightarrow$ fortfahren unter **Vergleichswägung**

[v, w]: v=2 oder $v>a_w \leftrightarrow$ [v, w] ist unlösbar

Es dürfen maximal $V=3^{w-1}$ Kugeln auf die Waage gesetzt werden. $V=2A \rightarrow$ V gerade $\rightarrow$ $V\leq 3^{w-1}-1 \rightarrow A\leq \frac{1}{2}(3^{w-1}-1)$
$V\leq v \leftrightarrow 2A\leq v \leftrightarrow A\leq v/2 \rightarrow A\leq\lfloor v/2\rfloor \Rightarrow$

$A:=\min\{\frac{1}{2}(3^{w-1}-1), \lfloor v/2\rfloor\}$
$A_0:=v-2A$

An dieser Stelle ist $v\geq 3$ und $w\geq 1$. $w=1 \rightarrow v\leq a_1=1 \rightarrow$ Widerspruch $\rightarrow w\geq 2$
$v\geq 3$ und Monotoniegesetz der Rundungsfunktionen $\rightarrow \lfloor v/2\rfloor\geq 1$; $w\geq 2 \rightarrow \frac{1}{2}(3^{w-1}-1)\geq 1 \Rightarrow$
$A\geq 1$

$W=(A_0, A)$

$E=0 \rightarrow v=A_0$; wegen $A\geq 1$ ist fortzufahren unter **[v, w]’.**
$E\neq 0 \rightarrow v=2A$ mit b=A
Der Problemfall (k, b)=(2, 1) des Hilfssatzes über Wägungen 2. Art ist ausgeschlossen:
$(k, b)=(2A, A)=(2, 1) \leftrightarrow A=1 \rightarrow A_0\geq 3-2$, da zuvor $v\geq 3$ war $\rightarrow A_0\geq 1 \Rightarrow$
$(k, b)=(2, 1) \rightarrow$ es steht eine n-Kugel zur Verfügung
Fortfahren unter **Wägungen 2. Art**

[v, w]’: $v>a_w' \leftrightarrow$ [v, w]’ ist unlösbar

Es dürfen maximal $V=3^{w-1}$ Kugeln auf die Waage gesetzt werden. Dies ist wegen der zur Verfügung stehenden n-Kugel möglich $\rightarrow V\leq 3^{w-1}$
$V\leq v \Rightarrow$

$V:=\min\{3^{w-1}, v\}$
$A:=\lceil V/2\rceil$
$A_0:=v-V$

$W=(A_0, A, \lfloor V/2\rfloor+[\lceil V/2\rceil-\lfloor V/2\rfloor]n)$

$E=0 \rightarrow v=A_0$. Fortfahren unter **[v, w]'**
$E=1 \rightarrow v=V$ mit $b=A$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**
$E=2 \rightarrow v=V$ mit $b=\lfloor V/2\rfloor$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

Wägungen 2. Art

Es steht eine n-Kugel zur Verfügung.

$(v, b)=(2, 1) \rightarrow S_0:=1; L_0:=0; S_1:=0; L_1:=1; S_2:=0; L_2:=0; N_2:=1$
$(v, b)=(4, 1) \rightarrow S_0:=1; L_0:=1; S_1:=0; L_1:=1; S_2:=0; L_2:=1; N_2:=0$
$(v, b)=(4, 3) \rightarrow S_0:=1; L_0:=1; S_1:=1; L_1:=0; S_2:=1; L_2:=0; N_2:=0$

$(v, b)\notin\{(2, 1), (4, 1), (4, 3)\} \rightarrow$ $S_1:=\min\{\lceil v/3\rceil, \lfloor b/2\rfloor\}$
$L_1:=\lceil v/3\rceil-S_1$
$S_2:=S_1$
$L_2:=L_1$
$S_0:=b-2S_1$
$L_0:=v-2\lceil v/3\rceil-b+2S_1$

$W=(S_0s+L_0l, S_1s+L_1l, S_2s+L_2l+N_2n)$

$E=0 \rightarrow v=S_0+L_0$ mit $b=S_0$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**
$E=1 \rightarrow v=S_1+L_2$ mit $b=S_1$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**
$E=2 \rightarrow v=S_2+L_1$ mit $b=S_2$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

Vergleichswägung

n-Kugel steht zur Verfügung $\rightarrow W=(0, 1, n)$
n-Kugel steht nicht zur Verfügung $\rightarrow$ GI nicht bestimmbar

Standardalgorithmus

Start: $v=a$ und $w=n$

Algorithmus stoppt $\Leftrightarrow$ Problem unlösbar oder $w=0$ oder ($v=1$ und GI bekannt)

$v=1$ und GI unbekannt und $w\geq 1$ $\Leftrightarrow$ fortfahren unter **Vergleichswägung**

[v, w]: $v=2$ oder $v>a_w \leftrightarrow [v, w]$ ist unlösbar

$A:=\min\{\frac{1}{2}(3^{w-1}-1), \lfloor v/2 \rfloor\}$

$A_0:=v-2A$

$W=(A_0, A)$

$E=0 \rightarrow v=A_0$. Fortfahren unter **[v, w]'**

$E\neq 0 \rightarrow v=2A$ mit $b=A$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art**

[v, w]': $v>a_w' \leftrightarrow [v, w]'$ ist unlösbar

$V:=\min\{3^{w-1}, v\}$

$A:=\lceil V/2 \rceil$

$A_0:=v-V$

$W=(A_0, A, \lfloor V/2 \rfloor+[\lceil V/2 \rceil-\lfloor V/2 \rfloor]n)$

$E=0 \rightarrow v=A_0$. Fortfahren unter **[v, w]'**

$E=1 \rightarrow v=V$ mit $b=A$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

$E=2 \rightarrow v=V$ mit $b=\lfloor V/2 \rfloor$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

Wägungen 2. Art

$(v, b)=(2, 1) \rightarrow S_0:=1; L_0:=0; S_1:=0; L_1:=1; S_2:=0; L_2:=0; N_2:=1$

$(v, b)=(4, 1) \rightarrow S_0:=1; L_0:=1; S_1:=0; L_1:=1; S_2:=0; L_2:=1; N_2:=0$

$(v, b)=(4, 3) \rightarrow S_0:=1; L_0:=1; S_1:=1; L_1:=0; S_2:=1; L_2:=0; N_2:=0$

$(v, b)\notin\{(2, 1), (4, 1), (4, 3)\} \rightarrow$ $S_1:=\min\{\lceil v/3 \rceil, \lfloor b/2 \rfloor\}$

$L_1:=\lceil v/3 \rceil-S_1$

$S_2:=S_1$

$L_2:=L_1$

$S_0:=b-2S_1$

$L_0:=v-2\lceil v/3 \rceil-b+2S_1$

$W=(S_0s+L_0l, S_1s+L_1l, S_2s+L_2l+N_2n)$

$E=0 \rightarrow v=S_0+L_0$ mit $b=S_0$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

$E=1 \rightarrow v=S_1+L_2$ mit $b=S_1$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

$E=2 \rightarrow v=S_2+L_1$ mit $b=S_2$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

Vergleichswägung

n-Kugel steht zur Verfügung $\rightarrow W=(0, 1, n)$

n-Kugel steht nicht zur Verfügung $\rightarrow$ GI nicht bestimmbar

7.2. Satz über die Gewichtsinformation

Für lösbare [a, n] und [a, n]’ wird definiert:

p(a, n):=P(nach dem Lösen von [a, n] mit einem maximalen Algorithmus ist GI bekannt)
p’(a, n):=P(nach dem Lösen von [a, n]’ mit einem maximalen Algorithmus ist GI bekannt)

[1, n]: $\nexists$ echte Wägung $\rightarrow$ p(1, n)=0 für $\forall$ $n\in N$

[a_{n+1}’, n+1]’: Jeder dieses Problem lösende Algorithmus beginnt mit (Positionen 1 und 2 können oEdA vertauscht werden):

$$W_1=(a_n', \tfrac{1}{2}(3^n+1), \tfrac{1}{2}(3^n-1)+n)$$

Es wird fortan das Symbol P(*Ereignis*) für die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines *Ereignisses* benützt.

p’(a_{n+1}’, n+1)=
=1–P(K befindet sich in W_1 nicht auf der Waage und die Gewichtsinformation wird im verbleibenden [a_n’, n]’ mit maximalem Algorithmus nicht gewonnen)=
=1–P(K befindet sich in W_1 nicht auf der Waage)·P(die Gewichtsinformation wird im verbleibenden [a_n’, n]’ mit maximalem Algorithmus nicht gewonnen)=

$$=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}'}\cdot[1-p'(a_n', n)]$$

$\Rightarrow$

Rekursionsformel 4

$$\boxed{p'(a_{n+1}', n+1)=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}'}\cdot[1-p'(a_n', n)]}$$

Mit dem Anfangswert p’(a_0’, 0)=0 können rekursiv alle p’(a_n’, n) berechnet werden:

$$p'(a_1', 1)=1-\frac{a_0'}{a_1'}\cdot[1-p'(a_0', 0)]=1-\tfrac{1}{2}\cdot[1-0]=\tfrac{1}{2}$$

$$p'(a_2', 2)=1-\frac{a_1'}{a_2'}\cdot[1-p'(a_1', 1)]=1-\tfrac{2}{5}\cdot[1-\tfrac{1}{2}]=\tfrac{4}{5}$$

$$p'(a_3', 3)=1-\frac{a_2'}{a_3'}\cdot[1-p'(a_2', 2)]=1-\tfrac{5}{14}\cdot[1-\tfrac{4}{5}]=\tfrac{13}{14}$$

Aus diesen ersten 4 Werten kann vermutet werden:

$$\boxed{p'(a_n', n)=1-\frac{1}{a_n'} \text{ für } \forall n\in N}$$

Beweis

Induktionsanfang bei n=0: $p'(a_0', 0)=1-\frac{1}{a_0'}=1-\frac{1}{1}=0$, korrekt

Induktionsschritt von n nach n+1:

Voraussetzung: $p'(a_n', n)=1-\frac{1}{a_n'}$

Zu zeigen: $p'(a_{n+1}', n+1)=1-\frac{1}{a_{n+1}'}$

In Rekursionsformel 4 die Voraussetzung einsetzen:

$p'(a_{n+1}', n+1)=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}'}\cdot[1-(1-\frac{1}{a_n'})]=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}'}\cdot\frac{1}{a_n'}=1-\frac{1}{a_{n+1}'}$, **q.e.d.**

$[a_{n+1}, n+1]$: Jeder dieses Problem lösende Algorithmus beginnt für $n\in N^+$ mit:

$$W_1=(a_n', \tfrac{1}{2}(3^n-1), \tfrac{1}{2}(3^n-1))$$

$A_0=a_n'$, da für $n\in N^+$ im Falle $E_1=0$ $V=3^n-1>0$ n-Kugeln zur Verfügung stehen.

$p(a_{n+1}, n+1)=$
$=1-P$(K befindet sich in W_1 nicht auf der Waage und die Gewichtsinformation wird im verbleibenden $[a_n', n]'$ mit maximalem Algorithmus nicht gewonnen)=
$=1-P$(K befindet sich in W_1 nicht auf der Waage)$\cdot$P(die Gewichtsinformation wird im verbleibenden $[a_n', n]'$ mit maximalem Algorithmus nicht gewonnen)=
$=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}}\cdot[1-p'(a_n', n)]$

$\Rightarrow p(a_{n+1}, n+1)=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}}\cdot[1-p'(a_n', n)]$ für $\forall n\in N^+$

Gilt diese Rekursionsformel auch für n=0 ? $p(a_1, 1)=1-\frac{a_0'}{a_1}\cdot[1-p'(a_0', 0)]=1-\frac{1}{1}\cdot[1-0]=0$, korrekt

$\Rightarrow$

Rekursionsformel 5

$$p(a_{n+1}, n+1)=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}}\cdot[1-p'(a_n', n)] \quad \text{für } \forall n\in N$$

$p'(a_n', n)$ durch $1-\frac{1}{a_n'}$ ersetzen:

$p(a_{n+1}, n+1)=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}}\cdot[1-(1-\frac{1}{a_n'})]=1-\frac{a_n'}{a_{n+1}}\cdot\frac{1}{a_n'}=1-\frac{1}{a_{n+1}}$ für $\forall n\in N$

$\leftrightarrow p(a_n, n)=1-\frac{1}{a_n}$ für $\forall n\in N^+$

Gilt dies auch für n=0 ? $p(a_0, 0)=1-\frac{1}{a_0}=1-\frac{1}{1}=0$, korrekt

$\Rightarrow$

$$\boxed{p(a_n, n)=1-\frac{1}{a_n} \text{ für } \forall n\in N}$$

a_n und a_n' divergieren monoton für $n\to\infty \Rightarrow p(a_n, n)$ und $p'(a_n', n)$ streben für $n\to\infty$ monoton steigend gegen 1:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} p(a_n, n)=\lim_{n\to\infty} p'(a_n', n)=1}$$

[a, n]': Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert der Standardalgorithmus die Gewichtsinformation für $a\leq a_n'-1$?

$a\geq 1 \to a_n'-1\geq 1 \leftrightarrow a_n'\geq 2 \leftrightarrow$ $n\geq 1$

$a\leq a_n'-1=\frac{1}{2}(3^n+1)-1=\frac{1}{2}(3^n-1)$, also a= $v_0\leq\frac{1}{2}(3^n-1)$

$$\boxed{\text{GI wird nicht gewonnen} \leftrightarrow E_1=E_2=E_3=...=E_n=0}$$

Es wird das Ereignis $E_1=E_2=E_3=...=E_n=0$ untersucht.

W_1: $V:=\min\{3^{n-1}, a\}$
$A_0:=a-V$

$E_1=0 \to v_1=A_0=a-V\geq 1 \to V<a \to V=3^{n-1} \to v_1=a-3^{n-1}$
$a\leq a_n'-1=\frac{1}{2}(3^n+1)-1=\frac{1}{2}(3^n-1) \to v_1\leq\frac{1}{2}(3^n-1)-3^{n-1}=\frac{3}{2}3^{n-1}-\frac{1}{2}-3^{n-1}=\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$

Zusammengefasst: $v_0\leq\frac{1}{2}(3^n-1)$ und $E_1=0 \to v_1\leq\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$

$\Rightarrow$ $v_1\leq\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$ und $E_2=0 \to v_2\leq\frac{1}{2}(3^{n-2}-1)$

$\Rightarrow$ $E_1=E_2=0 \to v_2\leq\frac{1}{2}(3^{n-2}-1)$

$\Rightarrow$ $E_1=E_2=E_3=...=E_{n-1}=0 \to v_{n-1}\leq\frac{1}{2}(3^{n-(n-1)}-1)=1$

$\Rightarrow E_1=E_2=E_3=...=E_{n-1}=0 \to$ K wurde eruiert $\to$ es bleibt eine Vergleichswägung übrig $\to E_n\neq 0$
$\Rightarrow$ das Ereignis $E_1=E_2=E_3=...=E_n=0$ ist unmöglich

Fazit: Der Standardalgorithmus liefert GI spätestens in W_n (aber möglicherweise erst in W_n), also mit Sicherheit.
$\Rightarrow$

$$\boxed{p'(a, n)=1 \text{ für } a\leq a_n'-1}$$

[a, n]: Mit welcher Wahrscheinlichkeit liefert der Standardalgorithmus die Gewichtsinformation für $a \notin \{1, 2\}$ und $a \leq a_n - 1$?

$a \geq 3$ und $a \leq a_n - 1 \rightarrow a_n - 1 \geq 3 \leftrightarrow a_n \geq 4 \leftrightarrow$ $n \geq 2$
$\rightarrow$ es kann $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$ geschrieben werden
$\Rightarrow a \leq \frac{1}{2}(3^n - 1) - 1 = \frac{1}{2}(3^n - 3)$, also $a \leq \frac{1}{2}(3^n - 3)$

Es wird wiederum das Ereignis $E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n = 0$ untersucht.

W_1: $A := \min\{\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1), \lfloor a/2 \rfloor\}$
$A_0 := a - 2A$

$E_1 = 0 \rightarrow v_1 = A_0 = a - 2 \cdot \min\{\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1), \lfloor a/2 \rfloor\}$

Fall 1: $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) \leq \lfloor a/2 \rfloor \rightarrow v_1 = a - (3^{n-1} - 1) \leq \frac{1}{2}(3^n - 3) - (3^{n-1} - 1) = \frac{3}{2} 3^{n-1} - \frac{3}{2} - 3^{n-1} + 1 = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$
Fall 2: $\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) > \lfloor a/2 \rfloor \rightarrow v_1 = a - 2\lfloor a/2 \rfloor = \left.\begin{cases} 0 & \text{für a gerade} \\ 1 & \text{für a ungerade} \end{cases}\right\} \geq 1 \rightarrow v_1 = 1 \rightarrow v_1 \leq \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$, da $n \geq 2$

$\Rightarrow$ $v_1 \leq \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$

Der Standardalgorithmus fährt fort unter $[v_1, n-1]$’, wo nach dem vorher gezeigten das Ereignis $E_2 = E_3 = E_4 = \ldots = E_n = 0$ unmöglich ist.
$\Rightarrow$ das Ereignis $E_1 = E_2 = E_3 = \ldots = E_n = 0$ ist unmöglich

Fazit: Der Standardalgorithmus liefert GI spätestens in W_n (aber möglicherweise erst in W_n, da z.B. für $(a, n) = (3, 2)$ $v_1 = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$ möglich ist), also mit Sicherheit.

$\Rightarrow$

$$\boxed{p(a, n) = 1 \text{ für } a \notin \{1, 2\} \text{ und } a \leq a_n - 1}$$

Diese Resultate sind die Beantwortung von Frage 2: Wenn möglichst optimal vorgegangen wird, wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, für ein lösbares [a, n] und – die Frage wird erweitert – für ein lösbares [a, n]’ **zusätzlich** die Gewichtsinformation zu gewinnen ?

Satz über die Gewichtsinformation

$$p(a, n) = \begin{cases} 0 & \text{für } a = 1 \\ 1 - \dfrac{1}{a_n} & \text{für } a = a_n \\ 1 & \text{für } 3 \leq a \leq a_n - 1 \end{cases}$$

$$p'(a, n) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{a_n'} & \text{für } a = a_n' \\ 1 & \text{für } a \leq a_n' - 1 \end{cases}$$

Tabelle 5: p(a, n) und p'(a, n) für (a, n)∈{1, 2, 3, ..., 14} x {0, 1, 2, 3}; n.d.:=nicht definiert

a	p(a, 0)	p'(a, 0)	p(a, 1)	p'(a, 1)	p(a, 2)	p'(a, 2)	p(a, 3)	p'(a, 3)
1	0	0	0	1	0	1	0	1
2	n.d.	n.d.	n.d.	$\frac{1}{2}$	n.d.	1	n.d.	1
3	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1	1	1
4	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	$\frac{3}{4}$	1	1	1
5	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	$\frac{4}{5}$	1	1
6	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
7	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
8	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
9	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
10	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
11	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
12	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	1	1
13	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	$\frac{12}{13}$	1
14	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	n.d.	$\frac{13}{14}$

Konsistenzbetrachtung:

Es sei p(a, n)=1 resp. p'(a, n)=1.
In diesen Fällen ∃ ein Algorithmus, der mit Sicherheit sowohl K eruiert als auch die Gewichtsinformation gewinnt. Es ∃ a Möglichkeiten für K und 2 Möglichkeiten für die Gewichtsinformation → die ermittelte Information beträgt 2a Kombinationen (=$\log_2(2a)$ Bits). Die Waage liefert in n Wägungen 3^n Kombinationen an Information → $2a \leq 3^n$; 2a gerade und 3^n ungerade → $2a \leq 3^n - 1$ ⇔

$$a \leq \tfrac{1}{2}(3^n - 1) \text{ für } \forall (a, n) \text{ mit } p(a, n)=1 \text{ oder } p'(a, n)=1$$

Satz über die Gewichtsinformation → für ∀(a, n) mit p(a, n)=1 oder p'(a, n)=1 ist

$$a \leq a_n' - 1 = \tfrac{1}{2}(3^n + 1) - 1 = \tfrac{1}{2}(3^n - 1)$$

⇒ der Satz über die Gewichtsinformation ist mit dem Informationsgrenzprinzip **konsistent**.

7.3. Satz über den Standardalgorithmus

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen der Standardalgorithmus die Gewichtsinformation liefert, sind einzig für die Fälle $[a_n', n]'$ und $[a_n, n]$ noch unbekannt.

Es wird das Ereignis $E_1=E_2=E_3=...=E_n=0$ untersucht.

n=0 → $a_n'=a_n=1$ → $p'(a_n', n)=p(a_n, n)=0$ → Standardalgorithmus liefert GI in keinem Fall

⇒ sei $n \in N^+$

$[a_n', n]'$

W_1: $V:=\min\{3^{n-1}, a_n'\}$
$A_0:=a_n'-V$

Rekursionsformel 2: $a_{n+1}'=a_n'+3^n$ für $\forall\ n\in N \leftrightarrow a_n'=a_{n-1}'+3^{n-1}$ für $\forall n\in N^+$
$\Rightarrow a_n'-3^{n-1}=a_{n-1}'>0 \leftrightarrow a_n'>3^{n-1} \Rightarrow V=3^{n-1}$
$\Rightarrow A_0=a_n'-3^{n-1}=a_{n-1}'$

$E_1=0 \rightarrow v_1=A_0=a_{n-1}' \Rightarrow$ $[a_n', n]'$: $P(E_1=0)=\dfrac{a_{n-1}'}{a_n'}$

Der Standardalgorithmus fährt fort unter $[a_{n-1}', n-1]'$.

$\Rightarrow$ $[a_n', n]'$: $P(E_2=0 \mid E_1=0)=\dfrac{a_{n-2}'}{a_{n-1}'}$

Es wird ein Zusammenhang aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendet:

$$P(E_1=0 \text{ und } E_2=0)=P(E_1=0)\cdot P(E_2=0 \mid E_1=0)$$

$\Rightarrow P(E_1=E_2=0)=\dfrac{a_{n-1}'}{a_n'}\cdot\dfrac{a_{n-2}'}{a_{n-1}'}=\dfrac{a_{n-2}'}{a_n'}$

$\Rightarrow P(E_1=E_2=E_3=...=E_n=0)=\dfrac{a_{n-n}'}{a_n'}=\dfrac{a_0'}{a_n'}=\dfrac{1}{a_n'}$

$\Rightarrow 1-P(E_1=E_2=E_3=...=E_n=0)=1-\dfrac{1}{a_n'}=$P(Standardalgorithmus liefert GI in $[a_n', n]'$)

Die Formel gilt auch für n=0: P(Standardalgorithmus liefert GI in $[a_0', 0]'$)$=1-\frac{1}{1}=0$, korrekt

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{P(Standardalgorithmus liefert GI in } [a_n', n]')=p'(a_n', n) \text{ für } \forall n\in N}$$

$[a_n, n]$

$n\in N^+ \rightarrow$ es kann $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ geschrieben werden

W_1: $A:=\min\{\frac{1}{2}(3^{n-1}-1), \lfloor a_n/2\rfloor\}$
$A_0:=a_n-2A$

$n\geq1 \leftrightarrow n-1\geq0 \leftrightarrow 3^{n-1}\geq3^0=1 \leftrightarrow 2\cdot3^{n-1}+3^{n-1}\geq2\cdot3^{n-1}+1 \leftrightarrow 3^n-3\geq2\cdot3^{n-1}+1-3 \leftrightarrow$

$$\tfrac{1}{4}(3^n-3)\geq\tfrac{1}{2}(3^{n-1}-1)$$

$\lfloor a_n/2\rfloor\geq(a_n-1)/2=[\frac{1}{2}(3^n-1)-1]/2=[\frac{1}{2}(3^n-3)]/2=\frac{1}{4}(3^n-3) \Rightarrow$

$$\lfloor a_n/2\rfloor\geq\tfrac{1}{2}(3^{n-1}-1)$$

$\Rightarrow A=\frac{1}{2}(3^{n-1}-1)$
$\Rightarrow A_0=a_n-(3^{n-1}-1)=a_n'-3^{n-1}=a_{n-1}'$

$E_1=0 \rightarrow v_1=A_0=a_{n-1}' \Rightarrow$ $\qquad P(E_1=0)=\frac{a_{n-1}'}{a_n}$

Der Standardalgorithmus fährt fort unter $[a_{n-1}', n-1]'$.

Nach dem vorher gezeigten ist $\qquad P(E_2=0 \mid E_1=0)=\frac{a_{n-2}'}{a_{n-1}'}$

$\Rightarrow P(E_1=E_2=0)=\frac{a_{n-1}'}{a_n}\cdot\frac{a_{n-2}'}{a_{n-1}'}=\frac{a_{n-2}'}{a_n}$

$\Rightarrow P(E_1=E_2=E_3=...=E_n=0)=\frac{a_{n-n}'}{a_n}=\frac{a_0'}{a_n}=\frac{1}{a_n}$
$\Rightarrow 1-P(E_1=E_2=E_3=...=E_n=0)=1-\frac{1}{a_n}$=P(Standardalgorithmus liefert GI in $[a_n, n]$)

Die Formel gilt auch für n=0: P(Standardalgorithmus liefert GI in $[a_0, 0]$)$=1-\frac{1}{1}=0$, korrekt

$\Rightarrow$

$$\boxed{\text{P(Standardalgorithmus liefert GI in } [a_n, n])=p(a_n, n) \text{ für } \forall\, n\in N}$$

Für $a\notin\{1, 2\}$ und $a\leq a_n-1$ resp. $a\leq a_n'-1$ liefert der Standardalgorithmus die Gewichtsinformation mit Sicherheit, also ebenfalls mit der maximal möglichen Wahrscheinlichkeit p(a, n) resp. p'(a, n).

$\Rightarrow$

Satz über den Standardalgorithmus

Der Standardalgorithmus ist maximal.

8. Modifizierte Probleme

8.1. Übersicht

Alle Information über die a Kugeln ist gewonnen, wenn sowohl K eruiert als auch GI bekannt ist. Es können insgesamt 10 verschiedene Probleme gestellt werden, indem Gegebenes – je beliebig 0 oder 1 Element aus den Mengen {K, GI} und {n-Kugel} – und Gesuchtes – mindestens 1 nicht-gegebenes Element aus {K, GI} – variiert werden. Es zeigt sich allerdings, dass im Fall, wo K nicht gegeben und nur GI gesucht ist, mehr als eine n-Kugel zusätzliche Information liefern kann, was eine zusätzliche Modifikation ergibt. Die folgende Tabelle listet alle 11 Möglichkeiten auf und nimmt die Resultate kommender Überlegungen vorweg.

Tabelle 6: Übersicht über alle modifizierten Probleme

Nr.	Gegeben	Gesucht	Name/Bedeutung des Problems	Lösbar ↔
0	–	K	[a, n]	$a\neq 2$ und $a\leq a_n$
1	n-Kugel	K	[a, n]’	$a\leq a_n$’
2	–	GI	genau 2 Wägungen	$a\geq 3$ und $n\geq 2$
3	n-Kugel	GI	maximal 2 Wägungen	$a=1$ und $n\geq 1$ oder $a\geq 2$ und $n\geq 2$
4	a n-Kugeln	GI	genau 1 Wägung	$n\geq 1$
5	–	K, GI	p(a, n)=1	$a\geq 3$ und $a\leq a_n-1$
6	n-Kugel	K, GI	p’(a, n)=1	$a\leq a_n$’-1
7	K	GI	Vergleichswägung	$a\geq 2$ und $n\geq 1$
8	K, n-Kugel	GI	Vergleichswägung	$n\geq 1$
9	GI	K	Grenze 3^n ausgeschöpft	$a\leq 3^n$
10	GI, n-Kugel	K	Grenze 3^n ausgeschöpft	$a\leq 3^n$

Modifikation 0 ist das unmodifizierte Problem. Für die Modifikationen 0 und 1 hält Tabelle 6 nur Bekanntes fest.

8.2. Modifikationen 2 bis 4 – Gewichtsinformation gesucht

Die Gewichtsinformation ist genau dann gewonnen, wenn alle verbleibenden Kugeln denselben Index haben.

8.2.1. Modifikation 2 – Ohne n-Kugel

$a=1 \rightarrow \nexists$ echte Wägung $\rightarrow$ Problem unlösbar
$a=2 \rightarrow W_1$ liefert eine s- und eine l-Kugel; dann $\nexists$ echte $W_2 \rightarrow$ Problem unlösbar
$a\geq 3$
Fall 1: a ungerade $\rightarrow$ in W_1 ist $A_0\geq 1 \rightarrow$ nach W_1 sind nicht alle Indizes bekannt
$\Rightarrow$ Lösbarkeit $\rightarrow n\geq 2$
Der folgende Algorithmus ermittelt GI für $\forall$ (a, n) mit a ungerade und $a\geq 3$ und $n\geq 2$:

$W_1=(\lceil a/2\rceil-\lfloor a/2\rfloor, \lfloor a/2\rfloor)$

$E_1=0 \rightarrow$ es verbleibt $v_1=1$ Kugel unbekannten Indexes und $2\lfloor a/2\rfloor$ n-Kugeln
$a\geq 3 \rightarrow \lfloor a/2\rfloor \geq 1 \rightarrow$ Vergleichswägung möglich $\rightarrow$
$W_2(0)=(0, 1, n) \rightarrow$ GI bekannt

$E_1\neq 0 \rightarrow$ es verbleiben $b=\lfloor a/2\rfloor$ s- und $\lfloor a/2\rfloor$ l-Kugeln sowie eine n-Kugel $\rightarrow$
$W_2(\neq 0)=(0, \lceil b/2\rceil s, \lfloor b/2\rfloor s+(\lceil b/2\rceil-\lfloor b/2\rfloor)n)$

$S_1+S_2=b$ und $L_1=L_2=0 \rightarrow$ es wurden alle s- und keine l-Kugeln auf die Waage gesetzt $\Rightarrow$
$E_2=0 \leftrightarrow GI=-1$

Fall 2: a gerade: $W_1=(A_0, A)$
$n=1 \rightarrow \forall$ a Kugeln müssen in W_1 auf die Waage $\rightarrow W_1=(0, a/2) \rightarrow$ je a/2 s- und l-Kugeln $\rightarrow$ GI unbekannt $\rightarrow$ Problem unlösbar $\Rightarrow$ Lösbarkeit $\rightarrow n\geq 2$

Der folgende Algorithmus löst das Problem für $\forall$ (a, n) mit a gerade und $a\geq 3$ und $n\geq 2$:

$W_1=(a-2\lfloor a/3\rfloor, \lfloor a/3\rfloor)$

Sei $a=3p+q$ mit $p\in N^+$ und $q\in \{0, 1, 2\} \rightarrow \lfloor a/3\rfloor=p \rightarrow a-2\lfloor a/3\rfloor=p+q$

$E_1=0 \rightarrow$ es verbleiben $v_1=p+q$ Kugeln unbekannter Indizes und 2p n-Kugeln
$p+q>2p \leftrightarrow q>p \rightarrow a\in\{1, 2, 5\} \rightarrow$ Widerspruch wegen $a\geq 3$ und a gerade $\Rightarrow$
$p+q\leq 2p \rightarrow$ es stehen mindestens so viele n-Kugeln wie verbleibende zur Verfügung $\rightarrow$
$W_2(0)=(0, v_1, v_1 n) \rightarrow$ GI bekannt

$E_1\neq 0 \rightarrow$ es verbleiben $b=p$ s- und p l-Kugeln sowie p+q n-Kugeln. $a\geq 3 \rightarrow p\geq 1 \rightarrow p+q\geq 1$ $\rightarrow$ es steht eine n-Kugel zur Verfügung $\rightarrow$
$W_2(\neq 0)=(0, \lceil b/2\rceil s, \lfloor b/2\rfloor s+(\lceil b/2\rceil-\lfloor b/2\rfloor)n)$

$S_1+S_2=b$ und $L_1=L_2=0 \rightarrow$ es wurden alle s- und keine l-Kugeln auf die Waage gesetzt $\Rightarrow$
$E_2=0 \leftrightarrow GI=-1$

$\Rightarrow$ Problem lösbar $\leftrightarrow a\geq 3$ und $n\geq 2$

8.2.2. Modifikation 3 – Mit n-Kugel

$a=1 \rightarrow$ Vergleichswägung $\rightarrow W_1=(0, 1, n) \rightarrow$ GI bekannt
$a\geq 2$
$n=1 \rightarrow \forall$ a Kugeln müssen in W_1 auf die Waage $\rightarrow W_1=(0, \lceil a/2\rceil, \lfloor a/2\rfloor+(\lceil a/2\rceil-\lfloor a/2\rfloor)n)$
$\Rightarrow E_1=1 \rightarrow \lceil a/2\rceil$ s- und $\lfloor a/2\rfloor$ l-Kugeln; $E_1=2 \rightarrow \lfloor a/2\rfloor$ s- und $\lceil a/2\rceil$ l-Kugeln
$a\geq 2 \rightarrow \lfloor a/2\rfloor\geq 1 \rightarrow$ nicht alle Indizes gleich $\rightarrow$ GI unbekannt $\rightarrow$ Problem unlösbar $\Rightarrow$
Lösbarkeit $\rightarrow n\geq 2$

Der folgende Algorithmus löst das Problem für $\forall$ (a, n) mit $a\geq 2$ und $n\geq 2$:

$W_1=(0, \lceil a/2\rceil, \lfloor a/2\rfloor+(\lceil a/2\rceil-\lfloor a/2\rfloor)n)$

Nach dem oben gezeigten verbleiben $\lceil a/2\rceil$ Kugeln des einen und $\lfloor a/2\rfloor$ Kugeln des anderen Indexes $\rightarrow$
$b\geq\lfloor a/2\rfloor\geq 1 \rightarrow$

$W_2=(0, \lceil b/2 \rceil s, \lfloor b/2 \rfloor s+(\lceil b/2 \rceil-\lfloor b/2 \rfloor)n)$

$S_1+S_2=b$ und $L_1=L_2=0 \rightarrow$ es wurden alle s- und keine l-Kugeln auf die Waage gesetzt $\Rightarrow$
$E_2=0 \leftrightarrow GI=-1$

$\Rightarrow$ Problem lösbar $\leftrightarrow$ ($a=1$ und $n\geq1$) oder ($a\geq2$ und $n\geq2$)

8.2.3. Modifikation 4 – Mit a n-Kugeln

$W_1=(0, a, a\ n) \rightarrow GI$ bekannt
$\Rightarrow$ Problem lösbar $\leftrightarrow n\geq1$

8.3. Modifikationen 5 und 6 – K und GI gesucht

8.3.1. Modifikation 5 – Ohne n-Kugel

Problem lösbar $\leftrightarrow p(a, n)=1 \leftrightarrow a\geq3$ und $a\leq a_n-1$

8.3.2. Modifikation 6 – Mit n-Kugel

Problem lösbar $\leftrightarrow p'(a, n)=1 \leftrightarrow a\leq a_n'-1$

Eine Modifikation mit mehr als einer n-Kugel erübrigt sich hier, da – wie gezeigt in der Konsistenzbetrachtung unter 7.2.– die Informationsgrenze bei $a_n'-1$ liegt:
$2a\leq3^n-1 \leftrightarrow a\leq\frac{1}{2}(3^n-1)=a_n'-1$

8.4. Modifikationen 7 und 8 – K gegeben und GI gesucht

$v=1 \rightarrow$ Vergleichswägung $\Rightarrow$ Lösbarkeit $\rightarrow n\geq1$

Vergleichswägung möglich $\leftrightarrow$ n-Kugel steht zur Verfügung
$\Rightarrow$ in Modifikation 7 muss $a\geq2$ sein
$\Rightarrow$ in Modifikation 8 für $\forall$ a möglich

$\Rightarrow$ Problem der Modifikation 7 lösbar $\leftrightarrow a\geq2$ und $n\geq1$
$\Rightarrow$ Problem der Modifikation 8 lösbar $\leftrightarrow n\geq1$

8.5. Modifikationen 9 und 10 – GI gegeben

$GI=+1$ gegeben $\rightarrow$ Alle a Kugeln sind s-Kugeln
$GI=-1$ gegeben $\rightarrow$ Alle a Kugeln sind l-Kugeln

Folgerung 2

Sei $n \in N$ und $v_0 \in \{1, 2, 3, ..., 3^n\}$. Gegeben v_0 verbleibende Kugeln bekannter gleicher Indizes.

K kann in n Wägungen eruiert werden.

Beweis (fast identisch mit Beweis von Folgerung 1)

$v_0 \leq 3^n$

Alle Indizes sind gleich $\rightarrow$ der Sonderfall (v, b)=(2, 1) des Hilfssatzes über Wägungen 2. Art ist ausgeschlossen $\rightarrow$

$$v_{m+1} = \lceil v_m/3 \rceil$$

$\Rightarrow v_1 = \lceil v_0/3 \rceil$; $v_0 \leq 3^n \leftrightarrow v_0/3 \leq 3^{n-1} \rightarrow \lceil v_0/3 \rceil \leq \lceil 3^{n-1} \rceil = 3^{n-1}$, also $v_1 \leq 3^{n-1}$
$\Rightarrow v_2 \leq 3^{n-2} \Rightarrow ... \Rightarrow v_n \leq 3^{n-n} = 1 \Rightarrow$ K wurde eruiert, **q.e.d.**

Bemerke: Im Unterschied zu Folgerung 1 wird keine n-Kugel benötigt.

Die Informationsgrenze ist hier – weil nur K gesucht ist – $a \leq 3^n$. Daher impliziert Folgerung 2:

Problem lösbar $\leftrightarrow a \leq 3^n$

Die in Modifikation 10 gegebene n-Kugel kann keine zusätzliche Information liefern. Die Grenze 3^n des Grenzprinzips der Lösbarkeit aus Teil 3 kann immer ausgeschöpft werden.

9. Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse

Sätze über die Lösbarkeit von [a, n] und [a, n]'

[a, n] ist lösbar $\leftrightarrow$ $a \neq 2$ und $a \leq a_n$
[a, n]' ist lösbar $\leftrightarrow$ $a \leq a_n'$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_n'	1	2	5	14	41	122	365	1'094	3'281	9'842	29'525	88'574	265'721
a_n	1	1	4	13	40	121	364	1'093	3'280	9'841	29'524	88'573	265'720

Explizite Formeln für a_n und a_n'

$a_0=1$, $a_n=\frac{1}{2}(3^n-1)$ für $\forall n\in N^+$
$a_n'=\frac{1}{2}(3^n+1)$ für $\forall n\in N$

Rekursionsrelationen

$a_{n+1}=a_n+3^n$ für $\forall n\in N^+$
$a_{n+1}=3a_n+1$ für $\forall n\in N^+$
$a_{n+1}'=a_n'+3^n$ für $\forall n\in N$
$a_{n+1}'=3a_n'-1$ für $\forall n\in N$
$a_n'=a_n+1$ für $\forall n\in N^+$

Satz über Einzelwägungen mit n-Kugel

Sei W_{m+1} eine maximal reduktive Wägung r-ter Art, $r\in\{1, 2\}$, mit $v_m\in N^+$ Kugeln und einer n-Kugel. Dann gilt

$$v_{m+1}=\left\lceil \frac{v_m}{r+1} \right\rceil$$

Satz über die Gewichtsinformation

$$p(a, n)=\begin{cases} 0 & \text{für } a=1 \\ 1-\frac{1}{a_n} & \text{für } a=a_n \\ 1 & \text{für } 3\leq a\leq a_n-1 \end{cases}$$

$$p'(a, n)=\begin{cases} 1-\frac{1}{a_n'} & \text{für } a=a_n' \\ 1 & \text{für } a\leq a_n'-1 \end{cases}$$

Standardalgorithmus

Start: v=a und w=n
Algorithmus stoppt $\Leftrightarrow$ Problem unlösbar oder w=0 oder (v=1 und GI bekannt)
v=1 und GI unbekannt und $w \geq 1$ $\Leftrightarrow$ fortfahren unter **Vergleichswägung**

[v, w]: v=2 oder $v>a_w \leftrightarrow [v, w]$ ist unlösbar

$A:=\min\{\frac{1}{2}(3^{w-1}-1), \lfloor v/2 \rfloor\}$
$A_0:=v-2A$

$W=(A_0, A)$

$E=0 \rightarrow v=A_0$. Fortfahren unter **[v, w]'**
$E\neq 0 \rightarrow v=2A$ mit b=A. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art**

[v, w]': $v>a_w' \leftrightarrow [v, w]'$ ist unlösbar

$V:=\min\{3^{w-1}, v\}$
$A:=\lceil V/2 \rceil$
$A_0:=v-V$

$W=(A_0, A, \lfloor V/2 \rfloor+[\lceil V/2 \rceil-\lfloor V/2 \rfloor]n)$

$E=0 \rightarrow v=A_0$. Fortfahren unter **[v, w]'**
$E=1 \rightarrow v=V$ mit b=A. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**
$E=2 \rightarrow v=V$ mit $b=\lfloor V/2 \rfloor$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

Wägungen 2. Art

$(v, b)=(2, 1) \rightarrow S_0:=1; L_0:=0; S_1:=0; L_1:=1; S_2:=0; L_2:=0; N_2:=1$
$(v, b)=(4, 1) \rightarrow S_0:=1; L_0:=1; S_1:=0; L_1:=1; S_2:=0; L_2:=1; N_2:=0$
$(v, b)=(4, 3) \rightarrow S_0:=1; L_0:=1; S_1:=1; L_1:=0; S_2:=1; L_2:=0; N_2:=0$

$(v, b)\notin\{(2, 1), (4, 1), (4, 3)\} \rightarrow$ $S_1:=\min\{\lceil v/3 \rceil, \lfloor b/2 \rfloor\}$
$L_1:=\lceil v/3 \rceil-S_1$
$S_2:=S_1$
$L_2:=L_1$
$S_0:=b-2S_1$
$L_0:=v-2\lceil v/3 \rceil-b+2S_1$

$W=(S_0s+L_0l, S_1s+L_1l, S_2s+L_2l+N_2n)$

$E=0 \rightarrow v=S_0+L_0$ mit $b=S_0$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**
$E=1 \rightarrow v=S_1+L_2$ mit $b=S_1$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**
$E=2 \rightarrow v=S_2+L_1$ mit $b=S_2$. Fortfahren unter **Wägungen 2. Art.**

Vergleichswägung

n-Kugel steht zur Verfügung $\rightarrow$ W=(0, 1, n)
n-Kugel steht nicht zur Verfügung $\rightarrow$ GI nicht bestimmbar

10. Nachwort

10.1. Chronologie

Es war vermutlich im Jahr 1988 – ich war etwa in der 8. Klasse – als ich zum ersten Mal mit dem Problem in Kontakt kam. Gespannt, was ich damit anfangen würde, konfrontierte mich mein Vater mit dem ursprünglichen Problem [12, 3], selbstverständlich Modifikation 0, ohne n-Kugel und ohne gegebene Gewichtsinformation. Er sagte, er hätte es von einem Mann erhalten, der mit hochbegabten Kindern arbeite.

Ich beschäftigte mich kurze Zeit damit, fand nach ein paar Tagen keinen richtigen Zugang zu einer Lösung, verlor die Motivation und stellte deshalb das Problem meinem Mathematiklehrer, der zu jener Zeit auch mein Klassenlehrer war. Dieser schien aber bereits nach einem Tag ebenfalls die Motivation verloren zu haben. Mein Vater zog inzwischen in Betracht, dass er mir die Aufgabenstellung nicht ganz korrekt überliefert haben könnte; insbesondere war er sich nicht mehr sicher, ob wirklich 12 Kugeln gegeben waren. Sicher hingegen war er sich jedoch, dass die Gewichtsinformation nicht gegeben war.

Durch Betrachten der ersten Wägung – die nach dem Hilfssatz über Wägungen 1. Art höchstens eine Reduktion auf $\lceil a/2 \rceil$ Kugeln liefern kann – gelangte ich zu der Vermutung, es müsse

$$a_n \leq 2^n$$

gelten. Da n=3 war, hielt ich $2^3=8$ für die maximale Anzahl Kugeln bei 3 Wägungen. Ich beschränkte mich also auf das bescheidene [8, 3] und fand eine Lösung.

Im Juli 1997, während einer Ferienreise in Schottland und Irland, erinnerte ich mich an [12, 3] und an das erste Mal, als mich mein Vater mit diesem Problem konfrontiert hatte. Da er damals nicht den geringsten Zweifel bezüglich einer der Angaben in der Aufgabenstellung geäussert hatte, gelangte ich zunehmend zu der Überzeugung, dass er sich nicht in der Zahl der Kugeln geirrt hatte. Ich beschäftigte mich also 9 Jahre später wieder mit [12, 3] und konnte es nach einigem Knobeln auch lösen. Meine Freude war so gross, dass ich Freunden die Problemstellung zu [12, 3] auf einer Postkarte zuschickte.

Auf dieser Ferienreise setzte ich mich fortan mit dem verallgemeinerten [a, n] auseinander. Ich wollte wissen, wann genau es lösbar ist. Da ich intuitiv davon ausging, dass [a, n] für $\forall a<a_n$ lösbar sei, beschäftigte ich mich vor allem damit, a_n als Funktion von n zu finden. In meinen Überlegungen fehlte aber die Idee, die hinter der Hilfsgrösse a_n' steckt. Ich verwendete noch nicht die Tatsache, dass ab W_2 eine n-Kugel zur Verfügung steht (siehe Herleitung des Standardalgorithmus, unter [v, w]). So erhielt ich die zu kleinen Werte

$$a_0=1,\ a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=12,\ a_4=38,\ a_5=118,\ \ldots$$

nach der expliziten Formel $\quad a_n=\frac{1}{2}\,(3^n-2n+3)$ für $\forall n\geq 2$

Ich schloss, dass für 3 Wägungen 12 die maximale Anzahl Kugeln sei, in gewisser Übereinstimmung mit der Tatsache, dass ich ursprünglich mit [12, 3] konfrontiert wurde. Während ich 1988 noch geglaubt hatte, a_3 sei 8, „stieg“ 1997 a_3 auf 12.
In diesen Ferien fand ich noch den – korrekten – Zusammenhang zwischen $p(a_n, n)$ und a_n.

Einige Monate nach meinen Ferien diskutierte ich mit mehreren Freunden, die [12, 3] gelöst hatten, über dessen Lösung sowie das allgemeine Problem. Meine Annahme, dass [a, n] für $\forall a<a_n$ lösbar sei, wurde richtigerweise als nicht gegeben empfunden. So versuchte ich, dies zu beweisen. Ich entdeckte, dass ich mich zunächst eingehend mit Einzelwägungen auseinandersetzen musste. Das war der Grundstein zu dieser Abhandlung.

Zunehmend stellte ich fest, dass sauberes Notieren und Beweisen vermuteter mathematischer Zusammenhänge sehr aufwändig ist, dafür aber neue und überraschende Erkenntnisse zu Tage fördern kann. In Teil 5 über die expliziten Formeln war es eine grosse Überraschung zu erkennen, dass $a_3=13$ ist.

Die korrekte explizite Formel für a_n,

$$a_n=\frac{1}{2}\,(3^n-1) \text{ für } \forall n\in N^+$$

erfüllt das Prinzip der **Parsimonie**: Sie ist einfacher und schöner als die frühere.

In Teil 6 über die Lösbarkeit von [a, n] schliesslich erwies sich meine Intuition betreffend Lösbarkeit für $\forall a<a_n$ – mit Ausnahme des Sonderfalles a=2 – als richtig.

Dieser Sonderfall hat eine gewisse philosophische Bedeutung: Wie soll eine Waage zwischen einer „normalen“ und einer „nicht-normalen“ Kugel unterscheiden können? Diese Frage kann nicht absolut beantwortet werden; es braucht den Vergleich mit einer n-Kugel, welche die Norm definiert.

Der Satz über die Gewichtsinformation zeigte etwas weiteres Schönes: Das ursprüngliche Problem [12, 3] kann so gelöst werden, dass die Gewichtsinformation mit Sicherheit gewonnen wird.

10.2. Versionen

Eine erste Fassung dieser Abhandlung wurde am 6. Juli 1998 fertig gestellt. Am 16. Januar 1999 entstand eine zweite, die in mancher Hinsicht kompakter war – z.T. konnten Beweise abgekürzt werden; formale Teile konnten durch eine konsequente mathematische Schreibweise verkürzt werden. Erweiterungen bzw. Vervollständigungen waren die Teile 7, 8 und 9 – Standardalgorithmus, Satz über die Gewichtsinformation, Satz über den Standardalgorithmus, Übersicht über alle modifizierten Probleme sowie die Zusammenstellung der wichtigsten Ergebnisse. Seit dieser zweiten Fassung wurden nur kleinere Änderungen gemacht. Die letzte Überarbeitung wurde am 24. Juni 2005 abgeschlossen.

Korrekturen und Anregungen sind willkommen.

10.3. Widmung

Das Schreiben, Überarbeiten und Verbessern dieser Abhandlung bereitete mir sehr viel Freude. Ohne die Faszination meines Vaters für solche Probleme wäre es dazu nicht gekommen. Es ist sehr schade, dass ich meine Freude nicht mehr mit ihm teilen konnte. Er verstarb im Februar 1996 unerwartet im Alter von nur 55 Jahren. Diese Abhandlung ist meinem Vater gewidmet.

Diese Abhandlung wurde auf Recyclingpapier gedruckt. Bitte das Papier rezyklieren, falls es nicht mehr benötigt wird.