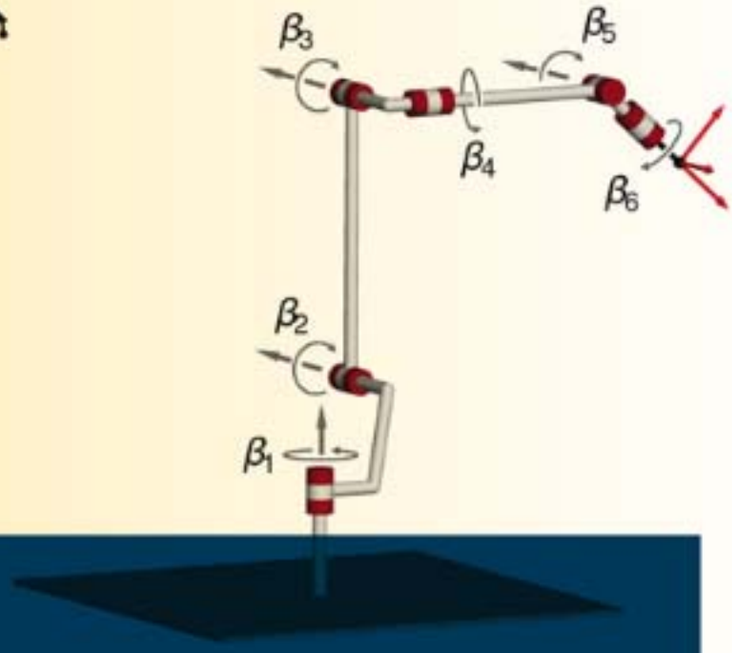


Christoph Woernle

Mehrkörpersysteme

Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper

Springer

Mehrkörpersysteme

Christoph Woernle

Mehrkörpersysteme

Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper

Springer

Prof. Dr.-Ing. Christoph Woernle
Lehrstuhl für Technische Dynamik
Fakultät für Maschinenbau und Schiffstechnik
Universität Rostock
18051 Rostock
woernle@uni-rostock.de

ISBN 978-3-642-15981-7 e-ISBN 978-3-642-15982-4
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011
Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.
Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Mehrkörpersysteme sind spezielle mechanische Systeme von Körpern, die untereinander durch Gelenke gekoppelt sind und sich unter dem Einfluss von Kräften im Raum bewegen. Sie werden als mechanische Ersatzmodelle zur Beschreibung der Bewegungen und Beanspruchungen in komplexen mechanischen Systemen eingesetzt. Anwendungen sind zum Beispiel Straßen- und Schienenfahrzeuge, Roboter, Werkzeugmaschinen, Verarbeitungsmaschinen oder biomechanische Bewegungsabläufe. Für die Erstellung der mathematischen Simulationsmodelle stehen rechnergestützte Formalismen zur Verfügung, die Eingang in kommerzielle Simulationsprogramme gefunden haben.

Das vorliegende Buch entstand aus einem Manuskript zu meiner Vorlesung *Dynamik von Mehrkörpersystemen*, die ich seit vielen Jahren an der Universität Rostock halte. Es führt den Leser von den Grundlagen der Technischen Mechanik zu den für die rechnergestützte Aufstellung geeigneten Formulierungen der Bewegungsgleichungen von klassischen Mehrkörpersystemen mit starren Körpern. Das Buch richtet sich damit an Studierende des Maschinenbaus und verwandter Studienrichtungen insbesondere in der letzten Phase des Bachelor-Studiums oder in der ersten Phase des Master-Studiums. Darüber hinaus vermittelt es Ingenieuren und Naturwissenschaftlern, die in der beruflichen Praxis mit Mehrkörper-Simulationsmodellen arbeiten, die dazu gehörenden mathematischen und physikalischen Grundlagen.

Im Mittelpunkt der Darstellung der Mehrkörperdynamik stehen die *Bindungen*, welche die Bewegung der Teilkörper geometrisch beschränken. Die Bindungen legen die freien Bewegungsmöglichkeiten des Systems fest, und sie definieren entsprechend dem Prinzip von D'Alembert-Lagrange die Richtungen der Reaktionskräfte und -momente. Aus den impliziten und expliziten mathematischen Darstellungen der Bindungen ergeben sich in Verbindung mit den Impuls- und Drallsätzen der Körper unmittelbar die verschiedenen bekannten Formulierungen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen in voneinander unabhängigen Minimalkoordinaten oder als differential-algebraische Gleichungssysteme in voneinander abhängigen, redundanten Koordinaten. Die bevorzugte

Verwendung dieser Formulierungen richtet sich dann nach dem topologischen Aufbau der Mehrkörpermodelle.

Bei *offenen Mehrkörpersystemen*, die eine *Baumstruktur* aufweisen, werden die Bewegungsgleichungen günstig in den relativen Gelenkkoordinaten, die hier Minimalkoordinaten sind, als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen formuliert. Das System der Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Beschleunigungen und Reaktionskräfte kann dabei mit Hilfe rekursiver Mehrkörperformalismen, welche sich an dem topologischen Aufbau des Systems orientieren, effizient gelöst werden.

Bei *geschlossenen Mehrkörpersystemen*, die *kinematische Schleifen* aufweisen, sind die Gelenkkoordinaten dagegen nicht mehr voneinander unabhängig, sondern unterliegen den *Schleifenschließbedingungen*. Die Bewegungen der Teilkörper unterliegen dadurch wesentlich komplexeren Bindungen. Die Schließbedingungen sind implizite Bindungen, die i.Allg. aber nur numerisch in die explizite Form gebracht werden können. Aus diesem Grund werden die Bewegungsgleichungen hier meistens in den voneinander abhängenden Gelenkkoordinaten des *aufspannenden Baumes*, der durch gedankliches Auftrennen der Schleifen entsteht, aufgestellt. Die alternative Formulierung der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten hat vor allem dann Vorteile, wenn die Schließbedingungen analytisch in die explizite Form überführt werden können, was in vielen Fällen möglich ist.

Die beschriebenen Methoden stellen für den Leser Grundlagen für eigene Programmentwicklungen bereit. Für das Arbeiten mit kommerziellen Mehrkörperprogrammen werden die Grundkenntnisse der verwendeten physikalischen Beschreibungen und Algorithmen vermittelt, die für die physikalisch korrekte Modellerstellung, die Beurteilung von Simulationsergebnissen und die Behandlung evt. auftretender numerischer Probleme benötigt werden.

Meinen Mitarbeitern Dipl.-Ing. René Bartkowiak und Dipl.-Ing. Roman Rachholz danke ich für die Durchsicht des Manuskripts. Herrn Dipl.-Ing. János Zierath und Herrn André Harmel danke ich für die Unterstützung bei der Erstellung von Abbildungen. Schließlich danke ich Frau Hestermann-Beyerle vom Springer-Verlag für das mir entgegengebrachte Vertrauen und die gute Zusammenarbeit.

Rostock,
März 2011 *Christoph Woernle*

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung 1
1.1 Mehrkörpersysteme 1
1.2 Physikalische Grundlagen der Mehrkörperdynamik 2
1.3 Entwicklung der Mehrkörperdynamik 6
1.4 Mehrkörperformalismen 8
1.5 Anwendungen von Mehrkörpersystemen 11
1.6 Inhaltsübersicht 17

2 Grundlagen der Vektorrechnung 19
2.1 Skalare und Vektoren 19
2.2 Koordinaten von Vektoren 19
2.3 Rechenregeln für Vektoren 21
2.4 Transformation von Vektorkoordinaten 26
2.5 Tensoren zweiter Stufe 30

3 Grundlagen der Kinematik 33
3.1 Allgemeine Bewegung des starren Körpers 33
3.1.1 Aufgabenstellung 33
3.1.2 Lage 35
3.1.3 Geschwindigkeit, Bewegungswinder 36
3.1.4 Beschleunigung 37
3.1.5 Beispiel zur Bewegung eines starren Körpers 38
3.1.6 Sonderfälle der allgemeinen Bewegung 39
3.2 Relativbewegungen starrer Körper 40
3.2.1 Relative zeitliche Ableitung von Vektoren 40
3.2.2 Zusammensetzung zweier Bewegungen 45
3.2.3 Beispiel zur Zusammensetzung zweier Bewegungen 48
3.2.4 Umgekehrte Relativbewegung 52
3.3 Drehzeiger und Drehtensor 55
3.3.1 Drehzeiger 55
3.3.2 Drehtensor 56

3.3.3 Passive und aktive Betrachtung der Drehung 58
3.3.4 Beispiele für Drehungen 60
3.4 Mehrfache Drehungen 62
3.4.1 Nichtkommutativität von Drehungen 62
3.4.2 Drehungen um die Ausgangsachsen 63
3.4.3 Drehungen um die mitgedrehten Achsen 65
3.4.4 Gegenüberstellung der Drehreihenfolgen 68
3.5 Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit 68
3.5.1 Infinitesimale Drehung und Winkelgeschwindigkeit 68
3.5.2 Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit 70
3.6 KARDAN-Winkel und EULER-Winkel 71
3.6.1 xyz-KARDAN-Winkel und Drehmatrix 72
3.6.2 xyz-KARDAN-Winkel aus gegebener Drehmatrix 74
3.6.3 xyz-KARDAN-Winkel und Winkelgeschwindigkeit 75
3.6.4 Gegenüberstellung verschiedener Drehreihenfolgen 76
3.7 EULER-Parameter (Quaternionen) 80
3.7.1 EULER-Parameter und Drehtensor 80
3.7.2 EULER-Parameter aus gegebener Drehmatrix 82
3.7.3 EULER-Parameter als Quaternionen 83
3.7.4 EULER-Parameter und mehrfache Drehungen 84
3.7.5 EULER-Parameter und Winkelgeschwindigkeit 86
3.8 RODRIGUES-Parameter 90
3.8.1 RODRIGUES-Parameter und Drehtensor 90
3.8.2 RODRIGUES-Parameter und Winkelgeschwindigkeit 90
3.9 Beispiele zu Koordinaten von Drehungen 92
3.9.1 Koordinaten zu einer gegebenen Drehung 92
3.9.2 Kinematische Bewegungsgleichungen 94

4 Grundlagen der Dynamik 97
4.1 Impuls und Drall 97
4.1.1 Impuls 98
4.1.2 Drall (Drehimpuls, Impulsmoment) 98
4.2 Schwerpunktsatz und Drallsatz 100
4.2.1 Impulssatz und Schwerpunktsatz 100
4.2.2 Drallsatz (Momentensatz) 101
4.3 Impuls und Drall des starren Körpers 102
4.3.1 Masse und Massenmittelpunkt 103
4.3.2 Impuls des starren Körpers 104
4.3.3 Drall des starren Körpers 104
4.4 Trägheitstensor 104
4.4.1 Eigenschaften des Trägheitstensors 105
4.4.2 Parallelverschiebung des Bezugssystems 106
4.4.3 Drehung des Bezugssystems 108
4.4.4 Hauptachsensystem 109
4.4.5 Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders 110

4.5 Impulssatz und Drallsatz für den starren Körper 112
4.5.1 Impulssatz 112
4.5.2 Drallsatz 112
4.5.3 D'ALEMBERTsche Trägheitskräfte 114
4.6 Kinetische Energie des starren Körpers 115
4.7 Kraftwirkungen von Rotoren 116
4.8 Dynamik von Kreiseln 119
4.8.1 Bewegungen eines momentenfreien Kreisels 119
4.8.2 Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels 123

5 Mechanische Systeme mit Bindungen 127
5.1 Freie und gebundene mechanische Systeme 127
5.2 Kinematik holonomer Systeme 129
5.2.1 Skleronome und rheonome holonome Bindungen 129
5.2.2 Beispiel: Bindungen eines Verladekrans 130
5.2.3 Zweiseitige und einseitige holonome Bindungen 131
5.2.4 Freiheitsgrad holonomer Systeme 132
5.2.5 Minimalkoordinaten holonomer Systeme 133
5.2.6 Implizite holonome Bindungen 134
5.2.7 Explizite holonome Bindungen 137
5.2.8 Geometrische und kinematische Bindungen 141
5.2.9 Bindungen des Verladekrans 141
5.3 Dynamik holonomer Systeme 143
5.3.1 Eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte 144
5.3.2 Explizite Reaktionsbedingungen 145
5.3.3 Implizite Reaktionsbedingungen 146
5.3.4 Reaktionsbedingungen für den Verladekran 146
5.3.5 Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten ... 147
5.3.6 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten 150
5.3.7 Bewegungsgleichungen des Verladekrans 154
5.3.8 Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels 154
5.4 Kinematik nichtholonomer Systeme 159
5.4.1 Implizite nichtholonome Bindungen 160
5.4.2 Freiheitsgrad nichtholonomer Systeme 162
5.4.3 Explizite nichtholonome Bindungen 163
5.5 Dynamik nichtholonomer Systeme 165
5.5.1 Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten 166
5.5.2 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten 168
5.6 Prinzipien und Methoden der Dynamik 171
5.6.1 Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE 172
5.6.2 Prinzip von JOURDAIN 174
5.6.3 Prinzip von GAUSS 175
5.6.4 LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art 177
5.6.5 Gleichungen von HAMILTON und GIBBS-APPELL 182
5.7 Zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen 182

5.7.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen 183
5.7.2 Differential-algebraische Gleichungen 186
5.7.3 Nichtlineare Gleichungssysteme 189

6 Bindungen in Mehrkörpersystemen 191
6.1 Gelenke in Mehrkörpersystemen 191
6.1.1 Gelenke mit holonomen skleronomen Bindungen 192
6.1.2 Gelenke mit holonomen rheonomen Bindungen 194
6.1.3 Gelenke mit nichtholonomen Bindungen 194
6.1.4 Zur Modellierung von Gelenken 195
6.2 Klassifizierungen von Mehrkörpersystemen 197
6.2.1 Topologische Klassifizierung 197
6.2.2 Kinematische Klassifizierung 199
6.3 Statische und kinematische Bestimmtheit 200
6.3.1 Definitionen und Begriffe 200
6.3.2 Freiheitsgrad statisch bestimmter Systeme 202
6.3.3 Freiheitsgrad statisch unbestimmter Systeme 205
6.3.4 Freiheitsgrad ebener und sphärischer Systeme 207
6.4 Implizite holonome Bindungen von Gelenken 208
6.4.1 Bewegungsgrößen eines starren Körpers 208
6.4.2 Implizite Bindungen eines holonomen Gelenks 209
6.4.3 Elementare implizite Bindungen von Gelenken 210
6.4.4 Implizite Bindungen des Drehgelenks 215
6.5 Explizite holonome Bindungen von Gelenken 216
6.5.1 Explizite Bindungen eines holonomen Gelenks 216
6.5.2 Explizite Bindungen des Drehgelenks 220
6.5.3 Explizite Bindungen des Schubgelenks 221
6.5.4 Explizite Bindungen des Kugelgelenks 222
6.6 Reaktionsbedingungen für holonome Gelenke 225
6.6.1 Explizite Reaktionsbedingungen 226
6.6.2 Implizite Reaktionsbedingungen 226
6.6.3 Reaktionsbedingungen für das Drehgelenk 227
6.7 Nichtholonome Bindungen von Gelenken 228
6.7.1 Implizite Bindungen eines nichtholonomen Gelenks 229
6.7.2 Explizite Bindungen eines nichtholonomen Gelenks 230
6.7.3 Reaktionsbedingungen für ein nichtholonomes Gelenk 233
6.8 Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen 234

7 Offene Mehrkörpersysteme 237
7.1 Topologie offener Mehrkörpersysteme 237
7.2 Kinematik offener Mehrkörpersysteme 239
7.2.1 Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten 240
7.2.2 Explizite Bindungen einer Kettenstruktur 241
7.2.3 Kettenstruktur mit Standardgelenken 247

7.2.4 Explizite Bindungen einer Baumstruktur 251
7.3 Dynamik offener Mehrkörpersysteme 253
7.3.1 Implizite Reaktionsbedingungen für offene MKS 253
7.3.2 Impuls- und Drallsätze 258
7.3.3 Eingeprägte Kräfte und Momente 259
7.3.4 Bestimmungsgleichungen offener MKS 263
7.4 Nichtrekursiver Formalismus für offene MKS 265
7.5 Rekursiver Formalismus für offene MKS 269
7.5.1 Rekursive Lösung der Bestimmungsgleichungen 269
7.5.2 Ablauf der rekursiven Berechnung 273
7.6 Beispiele offener Mehrkörpersysteme 274
7.6.1 Vertikaler Knickarm-Roboter 274
7.6.2 Schwerer Kreisel mit Fixpunktlagerung 283

8 Geschlossene Mehrkörpersysteme 287
8.1 Kinematik einer einzelnen Mehrkörperschleife 287
8.1.1 Implizite Schließbedingungen 288
8.1.2 Explizite Schließbedingungen 293
8.1.3 Kinematik eines ebenen Gelenkvierecks 297
8.2 Kinematik mehrschleifiger Systeme 307
8.2.1 Primäre Gelenkkoordinaten 307
8.2.2 Implizite Schließbedingungen 308
8.2.3 Zur Definition unabhängiger Schleifen 312
8.2.4 Zusätzliche kinematische Ketten 314
8.2.5 Explizite Schließbedingungen 315
8.3 Dynamik geschlossener Mehrkörpersysteme 318
8.3.1 Sekundäre Reaktionskraftwinder 318
8.3.2 Impuls- und Drallsätze 319
8.4 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten 320
8.4.1 Bestimmungsgleichungen geschlossener MKS 320
8.4.2 Nichtrekursiver Formalismus für geschlossene MKS 323
8.4.3 Rekursiver Formalismus für geschlossene MKS 324
8.5 Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten 329
8.5.1 Zustandsgleichungen 329
8.5.2 Minimalform der Bewegungsgleichungen 330
8.6 Dynamik eines ebenen Schubkurbelgetriebes 332
8.6.1 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten 333
8.6.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform 336
8.7 Dynamik eines räumlichen Koppelgetriebes 337
8.7.1 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten 338
8.7.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform 342
8.8 Dynamik eines Parallelroboters 346
8.8.1 Statisch bestimmte Mehrkörpermodelle 347

8.8.2 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten ... 349
8.9 Auf einer rotierenden Ebene rollende Kugel ... 355
8.9.1 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten ... 355
8.9.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform ... 360

A Mathematische Grundlagen ... 363
A.1 Matrizen ... 363
A.2 Quaternionen ... 368

B Zur Integrierbarkeit kinematischer Bindungen ... 371
B.1 Wagen mit zwei Rädern (Kufe) ... 371
B.2 Integrierbarkeitsbedingungen ... 375
B.3 Beispiele ... 377
B.3.1 Wagen mit nicht zusammenfallenden Radachsen ... 377
B.3.2 Zweirädriger Wagen mit Raddrehungen ... 380
B.3.3 Wagen mit Lenkung ... 382

Literaturverzeichnis ... 385

Sachverzeichnis ... 391

Schreibweisen und Formelzeichen

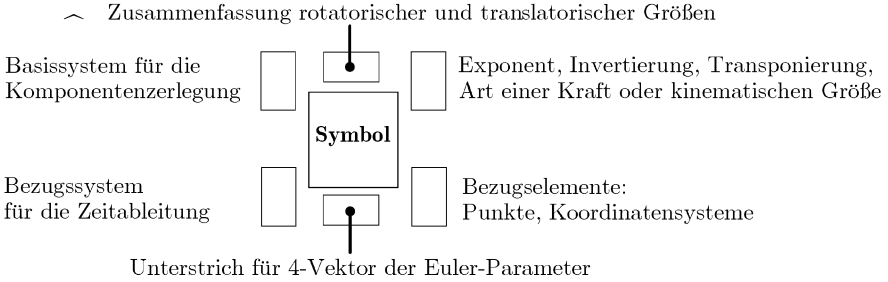
Schreibweisen

Symboldarstellung Skalare werden durch Buchstaben mit normaler Schrift, Vektoren und Spaltenmatrizen durch in der Regel kleine Buchstaben in fetter Schrift sowie Tensoren zweiter Stufe und Matrizen durch große Buchstaben in fetter Schrift gekennzeichnet. Der Nullvektor und die Nullmatrix werden ohne Dimensionsangabe als $\mathbf{0}$ geschrieben. Handschriftlich wird der Fettdruck durch einen Unterstrich ersetzt.

Koordinatensysteme Orthonormierte Koordinatensysteme (O_i, x_i, y_i, z_i) werden durch $\mathcal{K}_i$ gekennzeichnet.

Schema der Indizierung

$\cdot, \cdot\cdot$ Operatoren für Zeitableitungen
$\sim$ Bilden der schiefsymmetrischen Matrix zum Vektorprodukt
$-$ Notation für Terme in Bindungsgleichungen, auch konjugierte Quaternion
$\frown$ Zusammenfassung rotatorischer und translatorischer Größen



Notation für mechanische Größen Kinematische Größen relativer Bewegungen haben einem Doppelindex der entsprechenden Bezugssysteme:

$\boldsymbol{R}_{ji}$ (3,3)-Drehtensor, dreht $\mathcal{K}_i$ nach $\mathcal{K}_j$,
$\underline{\boldsymbol{p}}_{ji}$ 4-Vektor der EULER-Parameter, drehen $\mathcal{K}_i$ nach $\mathcal{K}_j$,

$\boldsymbol{r}_{ji}$	Vektor vom Punkt O_i zum Punkt O_j,
$\boldsymbol{v}_{ji}$	Vektor der Geschwindigkeit von O_j relativ zu $\mathcal{K}_i$,
$\boldsymbol{\omega}_{ji}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$,
$\boldsymbol{a}_{ji}$	Vektor der Beschleunigung von O_j relativ zu $\mathcal{K}_i$,
$\boldsymbol{\alpha}_{ji}$	Vektor der Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$.

Ist das Bezugssystem das raumfeste Inertialsystem $\mathcal{K}_0$, so wird der zweite Index in der Regel weggelassen, also z.B. $\boldsymbol{v}_j \mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{v}_{j0}$.

Kräfte und Momente werden bezeichnet als

$\boldsymbol{f}$	Kraftvektor,
$\boldsymbol{\tau}$	Momentvektor.

Koordinatendarstellung von Vektoren Das Koordinatensystem für die Koordinatendarstellung von Vektoren wird durch den linken oberen Index angegeben, also z.B.

${}^{k}\boldsymbol{r}_{ji}$	Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{r}_{ji}$ im System $\mathcal{K}_k$.

Bei Transformationsmatrizen stehen die Indizes der Koordinatensysteme ebenfalls links oben,

${}^{ij}\boldsymbol{T}$	orthogonale (3,3)-Transformationsmatrix, überführt Vektorkoordinaten von $\mathcal{K}_j$ nach $\mathcal{K}_i$: ${}^{i}\boldsymbol{r} = {}^{ij}\boldsymbol{T}\,{}^{j}\boldsymbol{r}$. Es ist ${}^{ij}\boldsymbol{T} = {}^{i}\boldsymbol{R}_{ji}$.

Bezugssystem für die Zeitableitung von Vektoren Das Bezugssystem für die zeitliche Ableitung von Vektoren und Tensoren wird durch den unteren linken Index angegeben, siehe Abschnitt 3.2.1. Dieser Index tritt nur in Verbindung mit der zeitlichen Ableitung (Ableitungspunkt) auf, z.B.

${}_{k}\dot{\boldsymbol{r}}_{ji}$	zeitliche Änderung des Vektors $\boldsymbol{r}_{ji}$ relativ zum Bezugssystem $\mathcal{K}_k$.

Räumliche Vektoren Rotatorische und translatorische mechanische Größen werden zu — hier so genannten — räumlichen 6-Vektoren, gekennzeichnet durch ein übergesetztes $\widehat{\ }$, zusammengefasst,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_{ji} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_{ji} \\ \boldsymbol{r}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{ji} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ji} \\ \boldsymbol{v}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{a}}_{ji} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{ji} \\ \boldsymbol{a}_{ji} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{f}}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j \\ \boldsymbol{f}_j \end{bmatrix}.$$

Bei Verwendung der vier EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}_{ji}$ zur Beschreibung der Orientierung ist $\hat{\boldsymbol{r}}_{ji}$ ein 7-Vektor.

Für das gesamte System mit n Körpern werden die jeweiligen Größen zu ($7n$,1)- bzw. ($6n$,1)-Vektoren ohne Index zusammengefasst,

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{r}}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{f}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n \end{bmatrix}.$$

Abkürzungen der trigonometrischen Funktionen In großen Ausdrücken werden die Schreibweisen $\mathrm{s}\varphi \mathrel{\hat{=}} \sin\varphi$, $\mathrm{c}\varphi \mathrel{\hat{=}} \cos\varphi$ verwendet.

Ableitungsregeln in Matrizenschreibweise Bezeichnet $\boldsymbol{x}$ einen Spaltenvektor (Koordinatenvektor), also

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{0.1}$$

so wird die Ableitung der skalaren Funktion $y(\boldsymbol{x}) = y(x_1, \dots, x_n)$ nach dem Vektor $\boldsymbol{x}$ als Zeilenvektor definiert,

$$\frac{\partial\, y(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{0.2}$$

Die Ableitung von $y(\boldsymbol{x})$ nach dem Zeilenvektor $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}$ wird als Spaltenvektor definiert,

$$\frac{\partial\, y(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = \left(\frac{\partial\, y(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right)^{\mathrm{T}}. \tag{0.3}$$

Speziell gilt für die Ableitung der *linearen Form* für $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{a}$

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{a} \tag{0.4}$$

und für die Ableitung der *quadratischen Form* $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

$$\frac{\partial\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = 2\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}} = 2\, \boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}\,. \tag{0.5}$$

Die Ableitung der Funktion eines m-Vektors $\boldsymbol{y}$ von einem n-Vektor $\boldsymbol{x}$ nach dem Vektor $\boldsymbol{x}$ ergibt die (m,n)-Funktionalmatrix oder Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial \boldsymbol{x}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial \boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right). \tag{0.6}$$

Die totale Ableitung des m-Vektors $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}(t), t)$ mit dem n-Vektor $\boldsymbol{x}(t)$ nach der Zeit t lautet nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}(t), t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_m}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{0.7}$$

Verwendete Formelzeichen

Es wird die Nummer der Gleichung angegeben, in der das jeweilige Formelzeichen zum ersten Mal verwendet wird. Zu Bindungen gelten die Angaben L – Lageebene, G – Geschwindigkeitsebene, B – Beschleunigungsebene.

Lateinische Buchstaben

$\boldsymbol{a}$	Beschleunigungsvektor, (3.18)
$\bar{\boldsymbol{a}}$	Vektor in expliziter Bindung (B), (5.46)
$\bar{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (B), (6.74)
$\hat{\boldsymbol{a}}$	Vektor der räumlichen Beschleunigung (6.22)
$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}$	räumlicher Vektor in expliziter Bindung (B), (7.35)
$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}}$	räumlicher Vektor in expliziter Gelenkbindung (B), (6.73)
$\hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}}$	Anteil d. Körperbeschleunigungen im rekursiven Formalismus, (8.129)
A	Fläche, (4.15)
A	Hauptträgheitsmoment, (4.54)
$\boldsymbol{A}$	Matrix im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (8.129)
b	Anzahl Bindungen, (5.15), (5.120)
b^{r}	Anzahl redundanter Bindungen, (5.68), (6.11)
b^{s}	Anzahl sekundärer kinematischer Gelenkbindungen, (8.7)
b^{u}	Anzahl unabhängiger Bindungen, (6.10)
b_{L}	Anzahl geometrischer Bindungen, (5.121)
$b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$	Anzahl sekundärer geometrischer Gelenkbindungen, (8.4)
$b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sk}}$	Anzahl skleronomer holonomer Gelenkbindungen, (6.1)
$b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{rh}}$	Anzahl rheonomer holonomer Gelenkbindungen, (6.2)
$\boldsymbol{b}$	Vektor vom Körper-Bezugspunkt zu einem Körperpunkt, (4.8)
B	Hauptträgheitsmoment, (4.54)
$\boldsymbol{B}$	Versatzmatrix in expliziten Gelenkbindungen (G,B), (6.67)
c	Federkonstante, (5.195)
$\boldsymbol{c}$	Vektor von einem Körper-Bezugspunkt zu einer Gelenkachse, (6.30)
C	Hauptträgheitsmoment, (4.54)
$\boldsymbol{C}$	JACOBI-Matrix in expliziten Gelenkbindungen (G,B), (6.67)
$\boldsymbol{C}_{\mathrm{R/T}}$	JACOBI-Matrix der Rotation/Translation eines Gelenks, (6.65), (6.66)
$\boldsymbol{d}$	Vektor von einer Gelenkachse zu einem Körper-Bezugspunkt, (6.75)
$\boldsymbol{D}$	Koeffizientenmatrix der Bestimmmungsgleichungen, (8.128)
$\boldsymbol{e}$	Einheitsvektor, (2.1)
$\boldsymbol{E}$	Einheitsmatrix bzw. Einheitstensor, (2.34)
f	(Geschwindigkeits-)Freiheitsgrad, (5.15), (5.120)
f^{frei}	Freiheitsgrad eines freigeschnittenen Systems, (6.8)
f^{o}	Anzahl primärer Gelenkgeschwindigkeiten und Freiheitsgrad des aufspannenden Baumes, (8.2)

f_{L}	Lage-Freiheitsgrad, (5.121)
$f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$	Anzahl primärer Gelenkkoordinaten und Lage-Freiheitsgrad des aufspannenden Baumes, (8.1)
$\boldsymbol{f}$	Kraftvektor, (4.12)
$\boldsymbol{f}^{\mathrm{a}}$, $\boldsymbol{f}^{\mathrm{i}}$	äußere bzw. innere Kraft, (4.13)
$\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}$	eingeprägte Kraft, (5.54)
$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$	Reaktionskraft, (5.54)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}}$	Kraftwinder von Kreisel- und Zentrifugalkräften, (7.79)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}$	Eingeprägter Kraftwinder, (7.79)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}}$	Summe von $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}$, (7.93)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$	Reaktionskraftwinder in primären Gelenken, (7.62)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{po}}$	Anteil der Reaktionskraftwinder im rekursiven Formalismus, (8.129)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$	Reaktionskraftwinder, (6.97), (7.64)
$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}$	Reaktionskraftwinder in sekundären Gelenken, (8.111)
$\boldsymbol{F}$	Matrix im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (8.129)
g	Erdbeschleunigung, (4.28)
$\boldsymbol{g}$	Residuum impliziter Bindungen (L), (5.4)
$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}$	Residuum impliziter sekundärer Bindungen (L), (8.4)
$\boldsymbol{g}^{\ell}$	Residuum impliziter Schließbedingungen (L), (8.6)
$\boldsymbol{G}$	Bindungsmatrix in impliziten Bindungen (G,B), (5.24)
$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}$	Bindungsmatrix in sekundären Bindungen (G,B), (8.7)
$\boldsymbol{G}^{\ell}$	Bindungsmatrix in impliziten Schließbedingungen (G,B), (8.9)
$\bar{\boldsymbol{h}}$	Vektor in kinematischer Bewegungsgleichung für Minimalkoordinaten bei geschlossenen MKS, (8.31), (8.108)
$\boldsymbol{H}$	Matrix in kinematischer Bewegungsgleichung, (3.161), (7.15)
$\widehat{\boldsymbol{H}}$	Matrix in kinematischer Bewegungsgleichung, (6.21)
$\overline{\boldsymbol{H}}$	Matrix in kinematischer Bewegungsgleichung für Minimalkoordinaten bei geschlossenen MKS, (8.30), (8.108)
$\boldsymbol{j}$	Spaltenvektor der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$, (5.126), (B.2)
$\boldsymbol{J}$	JACOBI-Matrix in expliziten Bindungen von Körpern (G,B), (5.36)
$\boldsymbol{J}_{\mathrm{R/T}}$	JACOBI-Matrix der Rotation/Translation (G,B), (7.28)
$\boldsymbol{J}^{\ell}$	JACOBI-Matrix in expliziten Schließbedingungen (G,B), (8.26)
$\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}$	verallgemeinerte CORIOLIS-Kräfte, (5.80), (7.104), (8.123)
$\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}$	verallgemeinerte eingeprägte Kräfte, (5.81), (7.105), (8.123)
$\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$	verallgemeinerte sekundäre Reaktionskräfte in geschlossenen MKS, bezogen auf primäre Gelenkgeschwindigkeiten, (5.78), (7.97), (8.123)
$\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}}$	verallgemeinerte CORIOLIS-Kräfte in geschlossenen MKS, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (8.162)
$\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}$	verallgemeinerte eingeprägte Kräfte in geschlossenen MKS, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (8.162)
$\underline{\boldsymbol{k}}$	Quaternion zur Koordinatentransformation, (3.186)

l	Länge, (3.20)
$\boldsymbol{l}$	Differenzvektor in einer Gelenkbindung, (6.30)
$\boldsymbol{l}$	Verbindungsvektor in Beispielen geschlossener MKS, (8.36)
$\boldsymbol{l}$	Drallvektor, (4.6)
L	LAGRANGE-Funktion, (5.201)
$\boldsymbol{L}$	Matrix im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (8.129)
m	Masse, (4.3)
$\boldsymbol{m}$	Einheitsvektor in impliziter Gelenkbindung, (6.55)
$\boldsymbol{M}$	Massenmatrix, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (5.78), (7.97), bei geschlossenen MKS bez. auf primäre Gelenkgeschwindigkeiten, (8.123)
$\overline{\boldsymbol{M}}$	Massenmatrix geschlossener MKS, bezogen auf Minimalgeschwindigkeiten, (8.162)
$\widehat{\boldsymbol{M}}$	Massenmatrix, bezogen auf Absolutgeschwindigkeiten, (5.56), (7.79)
n	Anzahl Massenpunkte (Kap. 5), Anzahl Körper (in Kap. 7 und 8)
n	Anzahl Lagekoordinaten (Anhang B)
n_{G}	Anzahl Gelenke, (6.6)
n_{K}	Anzahl Körper, (5.15); in Kapitel 7 und 8 entfällt der Index K
n_{P}	Anzahl Massenpunkte, (5.16)
n_{S}	Anzahl kinematischer Schleifen, (6.7)
$\boldsymbol{n}$	Normalenvektor, Einheitsvektor in impliziter Gelenkbindung, (6.55)
$\boldsymbol{N}$	Matrix im rekursiven Formalismus, (7.119)
$\boldsymbol{p}$	Impulsvektor, (4.1)
$\underline{\boldsymbol{p}}$	4-Vektor der EULER-Parameter bzw. Quaternionen, (3.166)
p_{s}	Skalarteil der EULER-Parameter bzw. Quaternionen, (3.166)
$\boldsymbol{p}$	Vektorteil der EULER-Parameter bzw. Quaternionen, (3.166)
P	Leistung, (5.162)
$\boldsymbol{q}$	minimale (voneinander unabhängige) Lagekoordinaten, (5.19)
$\boldsymbol{r}$	Ortsvektor, (3.1)
$\hat{\boldsymbol{r}}$	Lagegrößen eines Körpers, (6.17)
R	Radius, (4.28)
$\boldsymbol{R}$	Drehtensor (Drehmatrix), (3.92)
$\boldsymbol{s}$	minimale (voneinander unabhängige) Geschwindigkeiten, (5.83)
S	Spur einer Drehmatrix, (3.177)
$\boldsymbol{S}$	Inzidenzmatrix, (7.1)
t	Zeit, (3.1)
T	kinetische Energie, (4.71)
${}^{ij}\boldsymbol{T}$	Transformationsmatrix für Vektorkoordinaten (Drehmatrix), (2.46)
$\boldsymbol{T}$	Wegematrix, (7.3)
$\boldsymbol{u}$	Drehachs-Einheitsvektor im Drehzeiger, (3.92)

U	potentielle Energie, (5.191)
$\boldsymbol{v}$	Geschwindigkeitsvektor, (3.9)
$\bar{\boldsymbol{v}}$	Vektor in expliziter Bindung (G), (5.41)
$\bar{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (G), (6.66)
$\hat{\boldsymbol{v}}$	Vektor der räumlichen Geschwindigkeit, (6.19)
$\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}$	räumlicher Vektor in expliziter Bindung (G), (7.26)
$\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}}$	räumlicher Vektor in expliziter Gelenkbindung (G), (6.67)
V	Volumen, (4.15)
$\boldsymbol{w}$	Drehachs-Einheitsvektor im Drehzeiger, (3.117)
W	Arbeit, (5.190)
$\boldsymbol{x}$	Vektor von Zustandsgrößen, (5.71)
$\boldsymbol{x}$	Lagekoordinaten (Anhang B)
$\boldsymbol{z}$	Zustandsgröße im integralen Kraftgesetz, (7.87)
Z	Zwang im Prinzip von Gauss, (5.168)

Griechische Buchstaben

α	Kardan-Winkel, (3.153)
$\boldsymbol{\alpha}$	Vektor der Winkelbeschleunigung, (3.19)
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}$	Vektor in expliziter Bindung (B), (7.32)
$\bar{\boldsymbol{\alpha}}^{\mathrm{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (B), (6.74)
β	Kardan-Winkel, (3.153)
$\boldsymbol{\beta}$	relative Gelenkkoordinaten, (7.12)
$\boldsymbol{\beta}$	Vektor der drei Kardan- oder Euler-Winkel, (3.153)
γ	Kardan-Winkel, (3.153)
$\boldsymbol{\gamma}$	Residuum impliziter Bindungen (G), (5.24)
$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}$	Residuum impliziter sekundärer Bindungen (G), (8.7)
$\boldsymbol{\gamma}^{\ell}$	Residuum impliziter Schließbedingungen (G), (8.9)
$\bar{\boldsymbol{\gamma}}$	Term in impliziter Bindung (G), (5.24)
$\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}$	Term in impliziter sekundärer Bindung (G), (8.7)
$\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}$	Term in impliziter Schließbedingung (G), (8.9)
$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}$	Term in impliziter Bindung (B), (5.30)
$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}}$	Term in impliziter sekundärer Bindung (B), (8.12)
$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}$	Term in impliziter Schließbedingung (B), (8.14)
$\boldsymbol{\zeta}$	Vektor vom Massenmittelpunkt zu einem Körperpunkt, (4.41)
$\boldsymbol{\eta}$	relative Gelenkgeschwindigkeiten, (7.14)
$\bar{\boldsymbol{\eta}}$	Term in expliziter Schließbedingung (G), (8.26)
$\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}$	Term in expliziter Schließbedingung (B), (8.33)

$\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}}$	Anteil der primären Gelenkbeschleunigungen im rekursiven Formalismus für geschlossene MKS, (8.129)
θ	EULER-Winkel, Tabelle 3.11
$\boldsymbol{\Theta}$, θ	Trägheitstensor, Trägheitsmoment, (4.33)
$\boldsymbol{\lambda}$	RODRIGUES-Parameter, (3.212)
$\boldsymbol{\lambda}$	minimale Reaktionskoordinaten (LAGRANGE-Multiplikatoren), (5.58)
$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$	sekundäre Reaktionskoordinaten, (8.111)
$\boldsymbol{\pi}$	Quasikoordinaten, (5.125)
ρ	Dichte, (4.26)
$\boldsymbol{\tau}$	Momentvektor, (4.18)
$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{e}}$	eingeprägtes Moment, (7.78)
$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{kr}}$	Kreiselmoment, (4.70)
$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{r}}$	Reaktionsmoment, (5.136), (6.97)
φ	Drehwinkel im Drehzeiger, (3.92)
ϕ	EULER-Winkel, Tabelle 3.11
$\boldsymbol{\phi}$	Residuen der Nebenbedingungen der EULER-Parameter, (3.167)
ψ	Drehwinkel im Drehzeiger, (3.117)
ψ	EULER-Winkel, Tabelle 3.11
$\boldsymbol{\Psi}$	Vektor der rechten Seite einer Zustandsgleichung, (5.85)
$\boldsymbol{\omega}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit, (3.11)
$\bar{\boldsymbol{\omega}}$	Vektor in expliziter Bindung (G), (7.28)
$\bar{\boldsymbol{\omega}}^{\mathrm{rel}}$	Vektor in expliziter Gelenkbindung (G), (6.65)

Rechts hochgestellte Attribute

au, in	äußere bzw. innere Kraft, (4.13)
c	CORIOLIS-Kraft, (5.80)
e	eingeprägte Kraft, (5.54)
k	konservative Kraft, (5.196)
kr	Kreiselmoment, (4.70)
ℓ	auf Schleifenschließbedingungen bezogene Größe, (8.6)
o	auf aufspannenden Baum bezogene Größe, (8.1)
p	auf primäre Gelenke bezogene Größe, (7.62)
r	Reaktionskraft bzw. -moment, (5.54)
rel	auf Gelenk-Relativbewegung bezogene Größe, (6.65), (7.19)
s	auf sekundäre Gelenke kinematischer Schleifen bezogene Größe, (8.4)
sk, rh	skleronom bzw. rheonom, (6.2)
u, a	unabhängige bzw. abhängige primäre Gelenkkoordinaten, (8.19)
t	D'ALEMBERTsche Trägheitskraft bzw. -Drehmoment, (4.67)
$*$	aufsummierte Größen im rekursiven Formalismus, (7.123)

Kapitel 1
Einführung

Die Entwicklung technischer Produkte, wie z.B. Maschinen, Roboter oder Straßen- und Schienenfahrzeuge, ist heute ohne den Einsatz rechnergestützter Analyse- und Entwurfsmethoden nicht mehr vorstellbar. Zeitraubende, teure und gegebenenfalls risikoreiche Versuche können dadurch teilweise ersetzt werden. Eine zentrale Rolle bei der Auslegung eines mechanischen Systems spielt die Untersuchung des dynamischen Verhaltens, also der Wechselwirkung zwischen Kräften und Bewegungen. Die Grundlage für die theoretische Untersuchung des dynamischen Verhaltens bildet ein geeignetes, an die jeweilige Aufgabenstellung angepasstes physikalisches Ersatzmodell des realen Systems. Es muss so detailliert sein, dass es die zur Lösung der jeweiligen Aufgabenstellung wesentlichen physikalischen Eigenschaften des realen Systems erfasst. Zugleich soll aber der Aufwand für die heute in der Regel rechnergestützte Aufstellung und Lösung der beschreibenden mathematischen Modellgleichungen gering bleiben. Bei der Modellbildung sollte daher der Grundsatz gelten: *So komplex wie nötig, so einfach wie möglich.*

1.1 Mehrkörpersysteme

Aus physikalischer Sicht bestehen mechanische Systeme aus massebehafteten, deformierbaren Körpern, über deren Volumen und Oberfläche stetig verteilte Kräfte wirken. Die Beschreibung mit Hilfe der Methoden der Kontinuumsmechanik führt auf partielle, von Ort und Zeit abhängende Differentialgleichungen, die aber nur in Sonderfällen, wie z.B. für Saiten, Balken oder Platten, analytisch gelöst werden können. Für allgemeinere Fälle können durch eine räumliche Diskretisierung numerische Näherungslösungen erhalten werden. Bei mechanischen Systemen wird die Diskretisierung günstig bereits auf der Ebene der physikalischen Modellbildung hergestellt. Die am häufigsten verwendeten diskreten mechanischen Systemmodelle sind die *Finite-Elemente-Systeme* und die *Mehrkörpersysteme.*

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_1, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Ein klassisches Mehrkörpersystem (MKS) besteht aus massebehafteten starren Körpern, deren Bewegungen durch *Bindungen* geometrisch beschränkt sind und auf die verteilte und diskrete Kräfte und Momente einwirken (Abb. 1.1). Bei den im vorliegenden Buch nicht behandelten *flexiblen Mehrkörpersystemen* werden auch deformierbare Körper berücksichtigt. Die Bindungen sind Modelle von Gelenken, welche die Körper miteinander verbinden, und von Lagestellgliedern, welche dem System zeitlich vorgegebene Bewegungen aufprägen. Die dazugehörigen Formulierungen als so genannte skleronome und rheonome Bindungen stehen im Mittelpunkt der mathematischen Modellbildung von Mehrkörpersystemen, weil sie den Aufbau der Bewegungsgleichungen festlegen. Die auf die Körper wirkenden Kräfte und Momente lassen sich unterteilen in die eingeprägten Kräfte und Momente, welche durch masselose Federn, Dämpfer und Antriebsmotoren hervorgerufen werden, und in die Reaktionskräfte und Reaktionsmomente, welche die Schnittreaktionen an den Bindungen sind. Die Richtungen der Reaktionskräfte und -momente sind dabei durch die Geometrie der Bindungen festgelegt. Die Modellelemente eines Mehrkörpersystems sind stets Idealisierungen der entsprechenden Bauelemente des realen Systems. Der Begriff Mehrkörpersystem repräsentiert daher zugleich auch eine Methode der mechanischen Modellbildung.

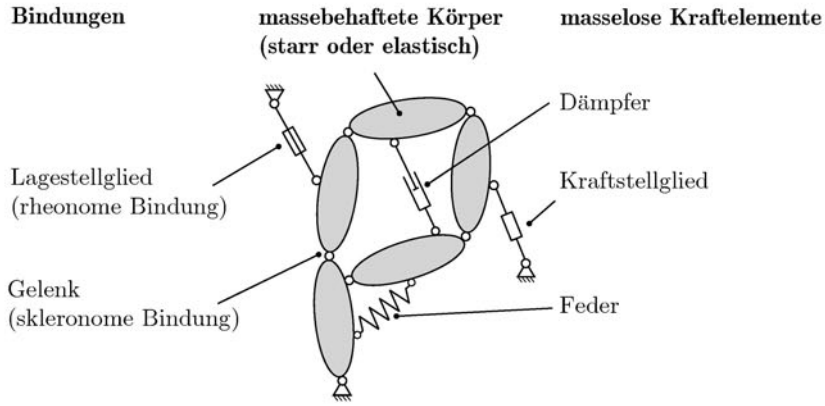


Abb. 1.1 Modellelemente eines Mehrkörpersystems

1.2 Physikalische Grundlagen der Mehrkörperdynamik

Das vorliegende Buch baut auf dem Kenntnisstand aus den Grundvorlesungen zur Technischen Mechanik an Universitäten auf. Die dort vermittelten Methoden und Prinzipien der Statik und Dynamik bilden bereits wesentliche Grundlagen für die Beschreibung von Systemen starrer Körper.

Das zweite Gesetz bzw. Axiom[1] von NEWTON[2] besagt, dass die Änderung der translatorischen Bewegung eines Körpers, gekennzeichnet durch das Produkt von Masse und Geschwindigkeit, proportional zur einwirkenden Kraft ist [69]. Hierbei gilt das *Parallelogrammaxiom* der vektoriellen Addition von Kräften. Die mathematische Formulierung als *Impulssatz* erfolgte aber erst durch EULER[3] zusammen mit dem *Drallsatz* oder *Momentensatz* als einem davon unabhängigen Axiom [21]. Der Impulssatz und der Drallsatz werden oft auch als die NEWTON-EULER-Gleichungen bezeichnet. Zusammen mit dem *Gegenwirkungsgesetz* von NEWTON und dem auf EULER zurückgehenden *Schnittprinzip* können damit die Bewegungsgleichungen von Systemen starrer Körper aufgestellt werden. Für mechanische Systeme, deren Bewegungen durch *Bindungen* geometrisch beschränkt sind, wird aber noch eine Systematik zur Elimination der Reaktionskräfte benötigt.

D'ALEMBERT[4] definierte die (negativen) Reaktionskräfte eines dynamischen Systems als die für die Beschleunigung des Systems „verlorenen" Kräfte [16]. Das *Prinzip von* D'ALEMBERT besagt, dass sich die verlorenen Kräfte in den Raumrichtungen, die durch die Bindungen gesperrt sind, im statischen Gleichgewicht befinden. Damit sind zugleich die eingeprägten Kräfte zusammen mit den Trägheitskräften in den freien Raumrichtungen im statischen Gleichgewicht. Das *Prinzip von* LAGRANGE[5] kombiniert das Prinzip von D'ALEMBERT mit dem *Prinzip der virtuellen Arbeit*, das 1717 von JOHANN BERNOULLI[6] formuliert worden ist [54]. Es wird deswegen oft auch als das *Prinzip von* D'ALEMBERT *in der Fassung von* LAGRANGE oder hier als das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE bezeichnet. Das Prinzip ermöglicht die systematische Elimination der Reaktionskräfte, um zu Bewegungsgleichungen in voneinander unabhängigen *Minimalkoordinaten* zu gelangen.

Diese Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen von Systemen starrer Körper werden bereits im Rahmen der Grundlagen der Technischen Mechanik behandelt, siehe z.B. MAGNUS und MÜLLER-SLANY [59]. Die Vorgehensweisen werden für das in Tabelle 1.1 gezeigte System gegenübergestellt. Es besteht aus einer Schiebemuffe 1 mit Federfesselung (Steifigkeit c) und dem damit gelenkig verbundenen Stab 2 (Lagekoordinaten x_i, y_i, φ_i, Massen m_i, Trägheitsmomente θ_{Si} bzgl. der Massenmittelpunkte S_i, $i = 1, 2$). Entsprechend dem Freiheitsgrad zwei können die angegebenen Bewegungsgleichungen in den zwei Minimalkoordinaten $q_1 = s$ und $q_2 = \beta$ aufgestellt werden. Der Aufbau der Bewegungsgleichungen ist dabei unabhängig von der Methode der Herleitung und hängt ausschließlich von der Definition der Minimalkoordinaten ab.

---

[1] Ein Axiom (griech. Axioma = „für recht halten") ist eine nicht beweisbare, sondern nur durch Beobachtungen bzw. Messungen abgesicherte Aussage.

[2] SIR ISAAC NEWTON, *1643 in Woolthorpe/London, †1727 in Kensington

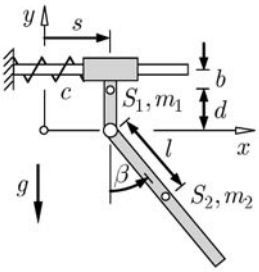
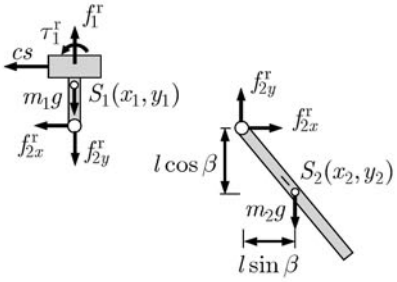
[3] LEONHARD EULER, *1707 in Basel, †1783 in St. Petersburg

[4] JEAN LE RONDE D'ALEMBERT, *1717 in Paris, †1783 in Paris

[5] JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE, *1736 in Paris, †1813 in Paris

[6] JOHANN BERNOULLLI, *1655 in Basel, †1705 in Basel

Tabelle 1.1 Gegenüberstellung von Methoden zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen

Analytische Methode: LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art	Synthetische Methode: NEWTON-EULER-Gleichungen
	
Minimalkoordinaten $q_1 = s\,, \qquad q_2 = \beta$ Bindungen (Lage, Geschwindigkeit) $x_1 = s\,, \qquad \dot{x}_1 = \dot{s}$ $y_1 = d\,, \qquad \dot{y}_1 = 0$ $\varphi_1 = 0\,, \qquad \dot{\varphi}_1 = \omega_1 = 0$ $x_2 = l\,\sin\beta + s\,, \qquad \dot{x}_2 = l\,\cos\beta\,\dot{\beta} + \dot{s}$ $y_2 = -l\,\cos\beta\,, \qquad \dot{y}_2 = l\,\sin\beta\,\dot{\beta}$ $\varphi_2 = \beta\,, \qquad \dot{\varphi}_2 = \omega_2 = \dot{\beta}$ Kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\,m_1\,(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}\,\theta_{S1}\,\omega_1^2$ $+\frac{1}{2}\,m_2\,(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2}\,\theta_{S2}\,\omega_2^2$ Potentielle Energie $U = \frac{1}{2}\,c\,s^2 + m_1\,g\,y_1 + m_2\,g\,y_2$ LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2$	Bindungen (Beschleunigungen) $\ddot{x}_1 = \ddot{s}$ $\ddot{y}_1 = 0$ $\dot{\omega}_1 = 0$ $\ddot{x}_2 = l\,\cos\beta\,\ddot{\beta} - l\,\sin\beta\,\dot{\beta}^2 + \ddot{s}$ $\ddot{y}_2 = l\,\sin\beta\,\ddot{\beta} + l\,\cos\beta\,\dot{\beta}^2$ $\dot{\omega}_2 = \ddot{\beta}\,.$ Impuls- und Drallsätze Schiebemuffe 1: $m_1\,\ddot{x}_1 = -f_{2x}^{\mathrm{r}} - c\,s$ $m_1\,\ddot{y}_1 = f_1^{\mathrm{r}} - f_{2y}^{\mathrm{r}} - m_1\,g$ $\theta_{S1}\,\dot{\omega}_1 = \tau_1^{\mathrm{r}} + c\,s\,b - f_{2x}^{\mathrm{r}}\,d$ Stab 2: $m_2\,\ddot{x}_2 = f_{2x}^{\mathrm{r}}$ $m_2\,\ddot{y}_2 = f_{2y}^{\mathrm{r}} - m_2\,g$ $\theta_{S2}\,\dot{\omega}_2 = -f_{2x}^{\mathrm{r}}\,l\,\cos\beta - f_{2y}^{\mathrm{r}}\,l\,\sin\beta$ Elimination von $f_1^{\mathrm{r}},\ \tau_1^{\mathrm{r}},\ f_{2x}^{\mathrm{r}},\ f_{2y}^{\mathrm{r}},$ $\ddot{x}_1,\ \ddot{y}_1,\ \dot{\omega}_1,\ \ddot{x}_2,\ \ddot{y}_2,\ \dot{\omega}_2$
Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten s und β: $(m_1 + m_2)\,\ddot{s} + m_2\,l\,\cos\beta\,\ddot{\beta} - m_2\,l\,\sin\beta\,\dot{\beta}^2 + c\,s = 0$ $m_2\,l\,\cos\beta\,\ddot{s} + (\theta_{S2} + m_2\,l^2)\,\ddot{\beta} + m_2\,g\,l\,\sin\beta = 0$	

Die NEWTON-EULER-Gleichungen werden für die freigeschnittenen Körper unter Berücksichtigung der Reaktionskräfte bzw. -momente f_1^{r}, τ_1^{r}, f_{2x}^{r}, f_{2y}^{r} und der eingeprägten Kraft der Feder (Federkonstante c, Feder ungespannt bei $s = 0$) aufgestellt. Weiterhin gelten die Bindungsgleichungen, welche die geometrischen Bewegungsbeschränkungen durch die Gelenke beschrei-

ben. Durch Elimination der Reaktionskräfte und -momente und der abhängigen kinematischen Größen werden die Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten $q_1 = s$ und $q_2 = \beta$ erhalten. Diese Vorgehensweise wird auch als *synthetische Methode* bezeichnet, weil die Bewegungsgleichungen aus den angegebenen Bestimmungsgleichungen der Teilsysteme aufgebaut werden.

Für die Anwendung dieser Methode auf komplexe Mehrkörpersysteme müssen noch die Richtungen der Reaktionskräfte und -momente an den Gelenken, die sich in dem Beispiel von Tabelle 1.1 direkt aus der Anschauung heraus ergeben, analytisch mit Hilfe der Bindungsgleichungen ausgedrückt werden. Hierzu wird das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE herangezogen. Es besagt, dass die Reaktionskräfte und -momente in den durch die Bindungen gesperrten Raumrichtungen liegen. Diese stehen wiederum senkrecht auf den freien Raumrichtungen. Die sich daraus ergebende algebraische Struktur der kinematischen und kinetischen Bestimmungsgleichungen ermöglicht dann die effiziente rechnergestützte Aufstellung der Bewegungsgleichungen.

Bei den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art werden die Bewegungsgleichungen dagegen aus den funktionalen Abhängigkeiten der kinetischen und potentiellen Energien des Gesamtsystems von den verallgemeinerten Koordinaten erhalten. Diese Vorgehensweise wird daher auch als *analytische Methode* bezeichnet. Mit den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art können die Bewegungsgleichungen kleiner Systeme mit wenigen Freiheitsgraden häufig — wie auch im vorliegenden Beispiel — manuell durchaus schneller aufgestellt werden als mit Hilfe der NEWTON-EULER-Gleichungen, da die Reaktionskräfte bereits im Ansatz eliminiert sind. Bei großen Mehrkörpersystemen können die Bewegungsgleichungen aber ohnehin nur mit dem Rechner aufgestellt werden. Hier erweist sich dann die Berechnung der Ableitungen der Energieausdrücke unter Berücksichtigung der Bindungen als aufwendiger, während umgekehrt die Elimination der Reaktionskräfte aus den NEWTON-EULER-Gleichungen effizient möglich ist. Im vorliegenden Buch wird daher die synthetische Methode auf der Grundlage der NEWTON-EULER-Gleichungen beschrieben.

Neben den bisher betrachteten Systemen mit holonomen Bindungen können damit auch Systeme mit den von HERTZ[7] eingeführten nichtholonomen Bindungen behandelt werden, und es können auch nicht integrierbare Geschwindigkeiten als Zustandsgrößen verwendet werden. Die Grundlagen hierzu formulierten u.A. GIBBS,[8] APPELL,[9] MAGGI[10] und HAMEL.[11]

Einführungen in die analytische Dynamik geben z.B. HILLER [38], BREMER [11], PFEIFFER [78] sowie SCHIEHLEN und EBERHARD [92]. Weiterführende Darstellungen sind u.A. bei HAMEL [32], PARS [77], FISCHER und STEPHAN [24] und PAPASTAVRIDIS [76] zu finden.

---

[7] HEINRICH RUDOLF HERTZ, *1857 in Hamburg, †1894 in Bonn

[8] JOSHUA WILLARD GIBBS, *1839 in New Haven, †1903 in New Haven

[9] PAUL EMILE APPELL, *1855 in Straßburg, †1930 in Paris

[10] GIAN ANTONIO MAGGI, *1856 in Milano, †1937 in Milano

[11] GEORG HAMEL, *1877 in Düren, †1954 in Landshut

1.3 Entwicklung der Mehrkörperdynamik

Wie in Abschnitt 1.2 beschrieben, sind wesentliche Grundlagen der Mehrkörperdynamik aus physikalischer Sicht bereits seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts bekannt. Ohne Rechner konnten allerdings nur Systeme mit zumindest näherungsweise analytisch lösbaren Bewegungsgleichungen untersucht werden. Die Modellkomplexität in Bezug auf den Freiheitsgrad und die Anzahl der Körper war dadurch zwangsläufig stark begrenzt. Im Zentrum der Betrachtungen standen Lösungen der EULERschen Gleichungen zur Beschreibung von Drehungen starrer Körper. Die Geometrie der Drehungen wurde von RODRIGUES[12] [88] ausführlich beschrieben.

Von besonderem Interesse waren dabei die vielfältigen dynamischen Eigenschaften von *Kreiseln*. Aus dem von BOHNENBERGER[13] im Jahr 1817 erfundenen kardanisch gelagerten Kreisel gemäß Abb. 1.2 entwickelte FOUCAULT[14] um das Jahr 1852 sein *Gyroskop* für das Studium von Kreiselphänomenen. Es bildete den Ausgangspunkt für die am Beginn des 20. Jahrhunderts einsetzende Entwicklung von Kreiselgeräten als Sensoren für die Bewegungserfassung und Navigation von Schiffen, Flugzeugen und Raumfahrzeugen. Eine umfassende Darstellung der Kreiseldynamik gibt MAGNUS [58].

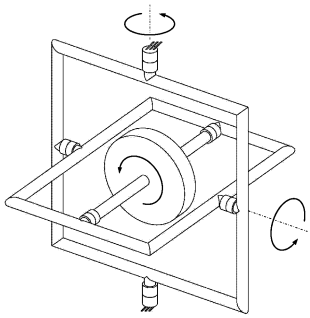


Abb. 1.2 Kardanisch gelagerter Kreisel

Eine weitere Wurzel hat die Mehrkörperdynamik in der Theorie der *Mechanismen* für die Übertragung von Bewegungen und Kräften in Maschinen, siehe z.B. LUCK und MODLER [57]. Die Bewegungen der Bauteile von Mechanismen sind durch Gelenke stark miteinander gekoppelt, wodurch das Gesamtsystem häufig nur einen Freiheitsgrad besitzt. Für die Analyse und Synthese des kinematischen und dynamischen Verhaltens wurden leistungsfähige graphische Verfahren entwickelt, die aber weitgehend auf ebene Mechanismen beschränkt sind. Als ein Beispiel eines komplexen ebenen Mechanismus zeigt Abb. 1.3 das Triebwerk einer Dampflokomotive mit HEUSINGER-Steuerung.[15]

[12] BENJAMIN OLINDE RODRIGUES, *1794 in Bordeaux, †1851 in Paris

[13] JOHANN GOTTLIEB FRIEDRICH BOHNENBERGER, *1765 in Simmozheim, †1831 in Tübingen

[14] JEAN BERNARD LÉON FOUCAULT, *1819 in Paris, †1868 in Paris

[15] EDMUND HEUSINGER VON WALDEGG, *1817 in Langenschwalbach, †1886 in Hannover

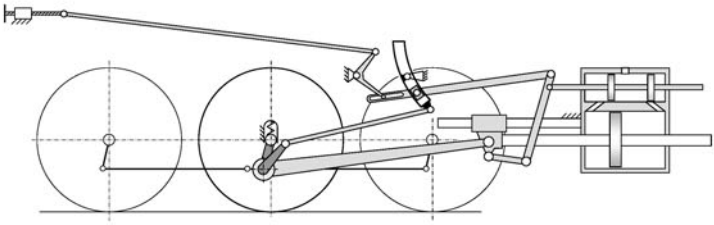


Abb. 1.3 Triebwerk einer Dampflokomotive mit HEUSINGER-Steuerung

Die Getriebelehre und später die Robotertechnik verdeutlichen die große Bedeutung der Kinematik innerhalb der Mehrkörperdynamik. Grundlagen der Kinematik vermitteln BOTTEMA und ROTH [8] und HUSTY et al. [43].

Weitere wichtige Beiträge zur Mehrkörperdynamik entstanden für die Analyse der *Biomechanik* des menschlichen Bewegungsapparates. Bereits im Jahr 1905 stellte FISCHER[16] Bewegungsgleichungen für entsprechende Modelle gelenkig miteinander gekoppelter Körper auf [23].

Die moderne Mehrkörperdynamik als eine Methode der mechanischen Modellbildung konnte sich jedoch erst mit der zunehmenden Verfügbarkeit digitaler Rechner ab den sechziger Jahren des vorigen Jahrhunderts entwickeln. Vorangetrieben wurde diese Entwicklung zunächst durch die Raumfahrt. Eine typische Aufgabenstellung war die Simulation des Ausfaltens von Antennen und Solarzellenflächen von Satelliten. Wegen der nicht verfügbaren Testmöglichkeiten unter realen Einsatzbedingungen und der hohen Kosten müssen die Simulationsmodelle hier eine besonders hohe Vorhersagegenauigkeit aufweisen. Ein wichtiges Ziel war bereits, die Bewegungsgleichungen nicht nur mit Hilfe des Rechners numerisch zu lösen, sondern auch aufzustellen. Erste Algorithmen, die auch als *Mehrkörperformalismen* bezeichnet werden, formulierten HOOKER und MARGULIES [41] sowie ROBERSON und WITTENBURG [87]. Zusammenfassende Darstellungen zur weiteren Entwicklung der Mehrkörperformalismen geben SCHIEHLEN [91] und FEATHERSTONE [22]. Im Bereich der Starrkörpersysteme ist dabei Anfang der neunziger Jahre ein gewisser Abschluss erreicht worden. Über die Dynamik von Mehrkörpersystemen mit starren Körpern sind mehrere Monographien erschienen, wie z.B. WITTENBURG [109], KANE [46], NIKRAVESH [70, 72], ROBERSON und SCHWERTASSEK [86], HAUG [34] sowie SCHIEHLEN und EBERHARD [92]. Beiträge zur Modellierung komplexer Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen wurden von ANGELES und KECSKEMÉTHY [4] zusammengestellt.

Flexible Mehrkörpersysteme, welche die Wechselwirkungen zwischen den großen Starrkörperbewegungen und den in der Regel kleinen Deformationen der Körper erfassen, werden von AMIROUCHE [2], HUSTON [42], SAMIN und FISETTE [89], VALÁŠEK und STEJSKAL [102], BREMER und PFEIFFER [14], SCHWERTASSEK und WALLRAPP [95], GÉRADIN und CARDONA [27], SHABANA [96] sowie BREMER [13] behandelt.

[16] OTTO FISCHER, *1861 in Altenburg, †1916 in Leipzig

1.4 Mehrkörperformalismen

Mehrkörperformalismen sind Algorithmen für die rechnergestützte Aufstellung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen. Ihre Formulierung wird durch die Topologie der Mehrkörpersysteme wesentlich bestimmt.

Offene Mehrkörpersysteme besitzen eine *Baumstruktur*. Beim Schnitt an einem beliebigen Gelenk zerfällt das System in zwei Teilsysteme. Die Relativbewegungen der Körper sind voneinander unabhängig. Ein Beispiel ist das in Abb. 1.4 a gezeigte Doppelpendel mit dem Freiheitsgrad zwei.

Geschlossene Mehrkörpersysteme weisen *kinematische Schleifen* auf, welche die Bewegungen in den Gelenken über die *(Schleifen-)Schließbedingungen* miteinander koppeln. Wird der Endpunkt P des Doppelpendels auf der x-Achse geführt, so entsteht die in Abb. 1.4 b gezeigte ebene Schubkurbel mit einer kinematischen Schleife. Die Schließbedingung verlangt, dass der Abstand d des Punktes P von der Führung auf der x-Achse während der Bewegung stets null ist,

$$d \equiv l_1 \cos\beta_1 + l_2 \cos(\beta_1 + \beta_2) = 0\,. \tag{1.1}$$

Die Schließbedingung (1.1) reduziert den Freiheitsgrad von zwei auf eins. Nur einer der beiden Gelenkwinkel β_1 und β_2 ist daher unabhängig. Der Mechanismus aus Abb. 1.3 besitzt mehrere kinematische Schleifen.

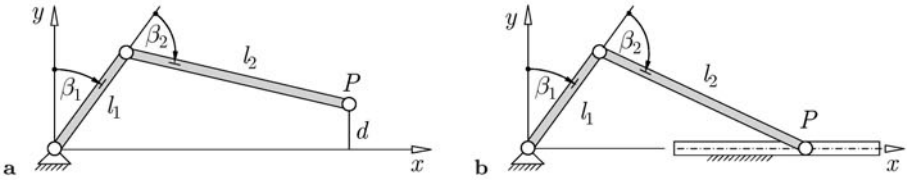


Abb. 1.4 Topologien von Mehrkörpersystemen. **a** Offenes Mehrkörpersystem: Doppelpendel. **b** Geschlossenes Mehrkörpersystem: Schubkurbel

Die Literatur über Mehrkörperformalismen ist überaus vielfältig und kann hier nicht ausführlich diskutiert werden. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit werden im Folgenden einige typische Klassifizierungsmerkmale von Mehrkörperformalismen angegeben.

Klassifizierung nach den beschreibenden Koordinaten Ein zentrales Merkmal von Mehrkörperformalismen sind die Koordinaten, in denen die Bewegungsgleichungen formuliert werden, siehe z.B. Nikravesh [71] und Featherstone [22]. Die zuerst entwickelten Programmsysteme zur Simulation von Mehrkörpersystemen verwendeten die *absoluten Lagekoordinaten* der Körper. Im Beispiel aus Tabelle 1.1 sind dies die sechs Lagekoordinaten x_i, y_i, φ_i, $i = 1, 2$, der beiden Körper in der Ebene. Die absoluten Koordinaten unterliegen den Bindungen an den Gelenken. Die Bewegungsgleichungen bil-

den ein großes, dünn besetztes System differential-algebraischer Gleichungen. Die Methode lässt sich unabhängig von der Topologie des Mehrkörpersystems relativ einfach implementieren. Die numerische Verarbeitung der Bewegungsgleichungen ist allerdings weniger effizient.

Aus diesen Gründen ist es günstig, die Bewegungsgleichungen nicht auf numerischem Weg, sondern mit Hilfe physikalischer Überlegungen zu reduzieren. Erreicht wird dies durch die Verwendung der *relativen Gelenkkoordinaten*, die bei offenen MKS zugleich voneinander unabhängige Minimalkoordinaten sind. Wie bereits in dem Beispiel aus Tabelle 1.1 gezeigt wurde, können die Bewegungsgleichungen auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in den Minimalkoordinaten, hier $q_1 = s$ und $q_2 = \beta$, reduziert werden, für dessen Lösung ausgereifte numerische Verfahren zur Verfügung stehen. Bei geschlossenen MKS sind die Gelenkkoordinaten dagegen keine Minimalkoordinaten mehr, sondern unterliegen den Schließbedingungen. Es werden dann wieder differential-algebraische Bewegungsgleichungen erhalten, die allerdings im Vergleich zur Absolutkoordinaten-Formulierung nur noch wenige algebraische Gleichungen enthalten, was die numerische Lösung vereinfacht.

Um bei geschlossenen MKS ebenfalls die numerisch vorteilhaften gewöhnlichen Differentialgleichungen zu erhalten, können die relativen Gelenkkoordinaten durch eine *Koordinatenpartitionierung* entsprechend dem Freiheitsgrad in unabhängige Minimalkoordinaten und weitere, davon abhängige Gelenkkoordinaten aufgeteilt werden. Die Schließbedingungen der Schleifen müssen hierzu nach den abhängigen Gelenkkoordinaten aufgelöst werden. Bei der ebenen Schubkurbel in Abb. 1.4 b kann z. B. der Winkel β_1 als Minimalkoordinate gewählt werden. Der Winkel β_2 wird dann durch β_1 ausgedrückt, indem die Schließbedingung nach β_2 aufgelöst wird. Analytische Lösungen der Schließbedingungen sind allerdings nur in speziellen Fällen möglich, während im Allgemeinen das nichtlineare algebraische Gleichungssystem der Schließbedingungen numerisch zu lösen ist. Der hierfür erforderliche Aufwand konkurriert dann mit dem Mehraufwand für die numerische Lösung der differential-algebraischen Bewegungsgleichungen der Gelenkkoordinaten-Formulierung.

Klassifizierung nach den Algorithmen Die Art und Weise, wie die Bestimmungsgleichungen nach den Beschleunigungen und Reaktionskräften aufgelöst werden, hat einen wesentlichen Einfluss auf die Effizienz eines Mehrkörperformalismus. Unterschieden werden nichtrekursive und rekursive Formalismen, siehe Featherstone [22]. Entsprechend der Größenordnung der erforderlichen Rechenoperationen über der Anzahl n der Körper bei offenen Mehrkörpersystemen werden rekursive Formalismen auch als $\mathcal{O}(n)$-Formalismen bezeichnet. Formulierungen für offene Mehrkörpersysteme, inbesondere Roboter, wurden von Vereshchagin [106] und später von Brandl et al. [9] und Bae und Haug [5] entwickelt. Ausführliche Untersuchungen zur Effizienz liegen u.A. von Stelzle et al. [100], Valášek und Stejskal [102] und Rein [84] vor. Rekursive Formalismen für geschlossene Mehrkörpersysteme geben u.A. Brandl et al. [10], Bae und Haug [6], Wehage [108]

und Rein [84] an. Die Formulierung von Brandl et al. [10] wird in dem MKS-Simulationsprogramm *SIMPACK* (Simpack AG [99]) verwendet.

Klassifizierung nach den Methoden der Dynamik Die Bewegungsgleichungen können mit Hilfe synthetischer oder analytischer Methoden der Dynamik hergeleitet werden, vgl. Tabelle 1.1. Die meisten Mehrkörperformalismen basieren auf der synthetischen Methode. Die Herleitung der Bewegungsgleichungen auf Basis der Lagrange-Gleichungen zweiter Art wird u.A. von Maisser [61] beschrieben. Die Endform der Bewegungsgleichungen ist jedoch weitgehend unabhängig von den mechanischen Prinzipien.

Klassifizierung nach der Verarbeitung der Gleichungen Ein weiteres Merkmal von Mehrkörperformalismen ist die *numerische* oder *symbolische* Verarbeitung der Gleichungen. Mit Hilfe eines Computeralgebrasystems können Bewegungsgleichungen in symbolischer Form aufgestellt werden. Vorteile des symbolischen Rechnens sind u.A. die analytische Vereinfachung von Termen, eine exakte Arithmetik und die Möglichkeit zur analytischen Weiterverarbeitung der Gleichungen, wie z.B. Linearisierung oder Optimierung. Erste MKS-Simulationsprogramme mit symbolischer Gleichungsgenerierung wurden von Levinson [55] und von Kreuzer [51] entwickelt.

Klassifizierung nach der Implementierung Die MKS-Simulationsprogramme lassen sich in zwei große Kategorien einteilen. Bei *abgeschlossenen MKS-Programmen* erstellt der Anwender das Simulationsmodell über eine festgelegte Benutzerschnittstelle. Die Generierung der Bewegungsgleichungen und die numerische Lösung übernimmt das Programm nach einem festgelegten Schema. Im Vordergrund steht die rasche Erzeugung und Darstellung von Simulationsergebnissen, ohne dass dazu spezifisches Fachwissen über die zu Grunde liegenden Formalismen erforderlich ist. Beispiele sind die Programmsysteme *SIMPACK* oder *Adams* (MSC.Software [64]).

Das zweite Grundkonzept sind *anwendungsspezifische MKS-Implementierungen*, die immer dann sinnvoll sein können, wenn die von abgeschlossenen Programmsystemen bereitgestellten Funktionalitäten nicht ausreichend sind. Dies können spezielle, vom Programmentwickler nicht vorgesehene Modellelemente oder Simulationsmodi sein oder die Option, Modelle auf einem Prozessrechner in Echtzeit zu simulieren. Der hohe Entwicklungsaufwand für problemspezifische Simulationsprogramme kann durch eine objektorientierte Formulierung wesentlich verringert werden. Bei Mehrkörpersystemen ist dieser Ansatz anschaulich, da er die physikalischen Eigenschaften der Modellelemente direkt umsetzt. An die Stelle eines abgeschlossenen Programmsystems treten dann Softwarebibliotheken, aus denen der Anwender effiziente, problemangepasste Simulationsprogramme erstellt. Derartige objektorientierte Implementierungen sind z.B. die von Kecskeméthy [47] entwickelte C++-Klassenbibliothek M⌬BILE und die von Rein [84] aufgebaute Mehrkörper-Programmierumgebung mit einer speziell an Mehrkörperformalismen angepassten effizienten Numerik.

1.5 Anwendungen von Mehrkörpersystemen

Die Mehrkörpersimulation ist heute ein etabliertes Werkzeug bei der Entwicklung technischer Produkte, wie z.B. Luft- und Raumfahrzeuge, Schienen- und Straßenfahrzeuge, Maschinen oder Roboter. Einige Beispiele sollen dies im Folgenden verdeutlichen.

Die *Robotertechnik* hat die Entwicklung von Mehrkörperformalismen maßgeblich vorangetrieben. Die Grundlagen der Roboterkinematik und -dynamik beschreiben u. A. Kreuzer et al. [52], Angeles [3] und Craig [15]. Roboter sind zugleich Beispiele für *mechatronische Systeme*, die ihre Funktionalität durch das Zusammenwirken von Mechanik, Elektronik und Informationsverarbeitung erlangen, siehe z.B. Heimann et al. [35]. Im Mittelpunkt der Entwicklung steht oft der Entwurf der Steuerung bzw. Regelung. Für die Beschreibung der mechanischen Regelstrecke sind Mehrkörpermodelle besonders gut geeignet, da sie im Vergleich zu Finite-Elemente-Modellen eine kleine Anzahl von Freiheitsgraden aufweisen und die kinematischen und dynamischen Effekte großer Starrkörperbewegungen sehr gut erfassen.

Entsprechend dem Aufbau der typischen Industrieroboter als offenes Mehrkörpersystem gemäß Abb. 1.5, hier oft als *serielle Kinematik* bezeichnet, lag der Schwerpunkt zunächst auf effizienten Algorithmen für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen offener kinematischer Ketten. Mit Hilfe der Bewegungsgleichungen können z. B. die für eine gewünschte Bewegung des Endeffektors benötigten Antriebsmomente berechnet und als Vorsteuerung aufgeschaltet werden. Die Achsregler müssen dann nur noch die im Modell nicht erfassten Systemunsicherheiten und Störungen ausgleichen, wodurch die Bahngenauigkeit des Roboters verbessert wird. Diese Berechnung wird häufig als *inverse Dynamik* oder, insbesondere in der Robotertechnik, als die *Methode der berechneten Antriebsmomente* (*computed torque*) bezeichnet.

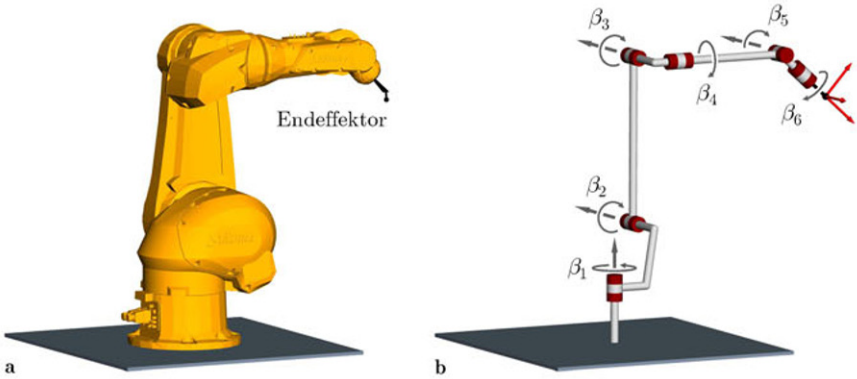


Abb. 1.5 Industrieroboter Stäubli TX200. **a** Aufbau. **b** *SIMPACK*-Mehrkörpermodell

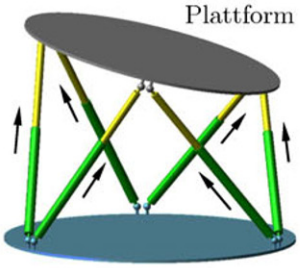


Abb. 1.6 *SIMPACK*-Mehrkörpermodell einer Hexapod-Plattform

Bewegungssysteme mit *paralleler Kinematik*, wie die in Abb. 1.6 gezeigte Hexapod-Plattform mit sechs längenveränderlichen Führungslenkern sind dagegen geschlossene Mehrkörpersysteme. Sie werden als Bewegungsplattformen für Flug- und Fahrsimulatoren, als Roboter für Handhabungs- und Bearbeitungsaufgaben und als Werkzeugmaschinen eingesetzt. Grundlagen und Anwendungen parallelkinematischer Bewegungssysteme beschreiben Neugebauer [68] und Merlet [63].

Ebenfalls einen parallelkinematischen Aufbau besitzt das in Abb. 1.7 a gezeigte so genannte seilgeführte Handhabungssystem, das an der Universität Rostock von Maier [60] und Heyden [36] entwickelt worden ist.

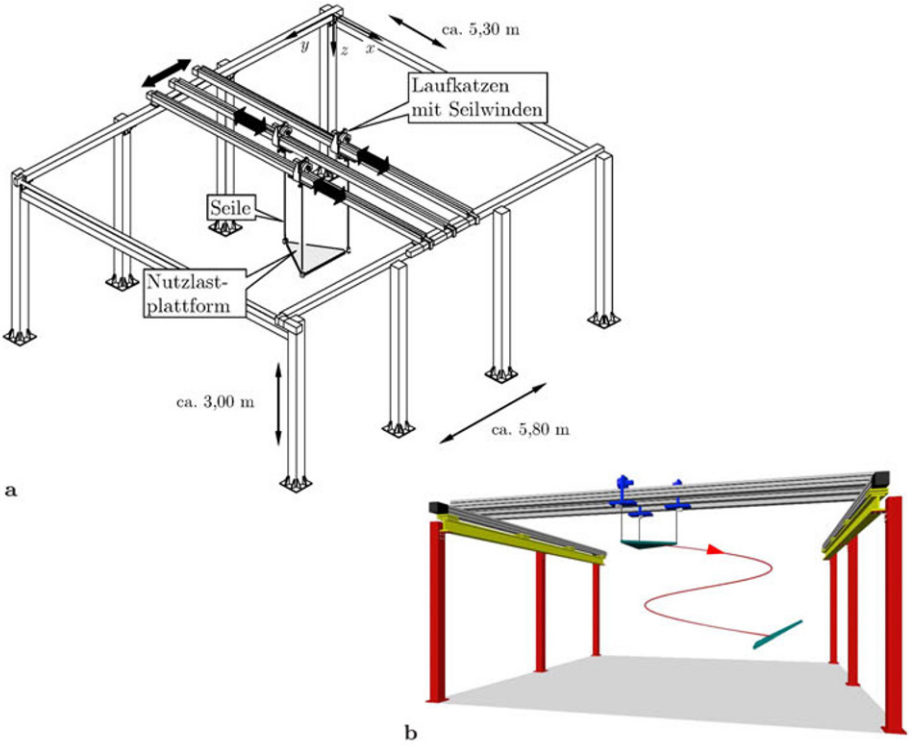


Abb. 1.7 Seilgeführtes Handhabungssystem [36]. **a** Aufbau. **b** Mehrkörpermodell mit Simuation einer räumlichen Bewegung der Nutzlastplattform

Das Ziel ist es, Nutzlasten bahngenau im Raum zu führen und dadurch die für Krane typische Handhabung schwerer Nutzlasten in großen Arbeitsräumen mit der Beweglichkeit von Robotern zu kombinieren. Die Nutzlastplattform wird durch drei Seile getragen, deren Seilwinden jeweils auf einer Laufkatze angeordnet sind. Die drei Laufkatzen bewegen sich dabei auf parallelen Führungsbahnen einer gemeinsamen Kranbrücke. Durch koordiniertes Verfahren der sieben Antriebe kann die Nutzlastplattform mit sechs Freiheitsgraden im Raum bewegt werden. Die möglichen Lastpendelschwingungen werden durch eine Bahnfolgeregelung, die mit Hilfe eines Mehrkörpermodells entworfen worden ist, aktiv gedämpft (Abb. 1.7 b). Der Reglereingriff erfolgt dabei über die Bewegungen der Brücke und der Laufkatzen.

Die Simulation der Dynamik von *Straßen- und Schienenfahrzeugen* hat die Entwicklung von Mehrkörperprogrammen ebenfalls wesentlich beeinflusst, siehe z.B. Kortüm und Lugner [50], Popp und Schiehlen [82] sowie Schramm et al. [93]. Insbesondere werden hier spezifische Modelle für die Beschreibung des Reifen-Fahrbahn-Kontaktes bzw. des Rad-Schiene-Kontaktes benötigt. Das in Abb. 1.8 dargestellte Mehrkörpermodell eines Personenwagens wurde mit *Adams* erstellt. Die Radführungen sind als räumliche Mechanismen mit kinematischen Schleifen berücksichtigt. Weiterhin ist der Antriebsstrang abgebildet.

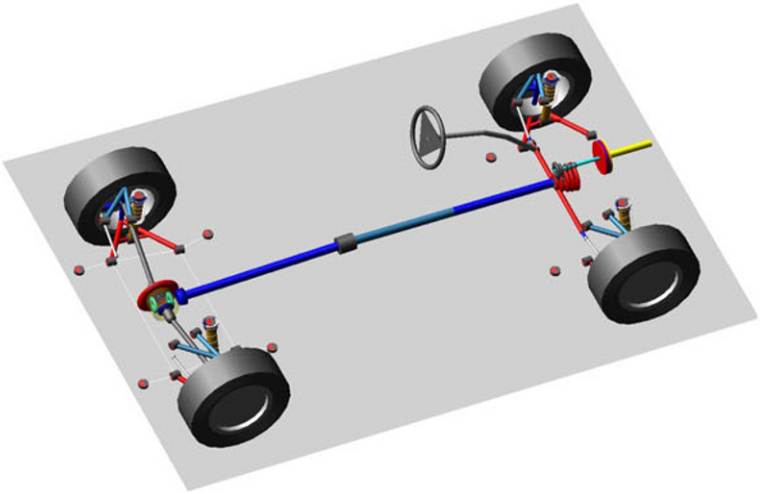


Abb. 1.8 *Adams*-Mehrkörpermodell eines Personenwagens (Fahrzeugaufbau nicht dargestellt)

Solche Mehrkörpermodelle sind geeignet, das Fahrzeugverhalten bei unterschiedlichsten, vom Fahrer eingeleiteten Fahrmanövern mit hoher Genauigkeit zu beschreiben, wobei auch die Beanspruchungen der einzelnen Bau-

teile ermittelt werden können. Da relevante konstruktive Parameter, wie z.B. Feder- und Dämpferkennlinien, kinematische Kenngrößen der Radführungen, Reifeneigenschaften oder die Massengeometrie der Bauteile im Modell physikalisch abgebildet werden, kann das Systemverhalten bereits in der Entwurfsphase optimiert werden. Im Entwicklungsprozess können damit zeit- und kostenaufwendige reale Fahrversuche teilweise durch Rechnersimulationen ersetzt werden.

Wie bereits erwähnt, ist die Modellierung von *Mechanismen* zur ungleichförmigen Bewegungsübertragung oder zur kinematischen Führung von Maschinenkomponenten eines der urspünglichen Anwendungsfelder der Mehrkörperdynamik. Ein Beispiel ist das in Abb. 1.9 dargestellte, mit *Adams* aufgebaute Mehrkörpermodell der Hochauftriebssysteme eines modernen Verkehrsflugzeugs (Zierath et al. [111]).

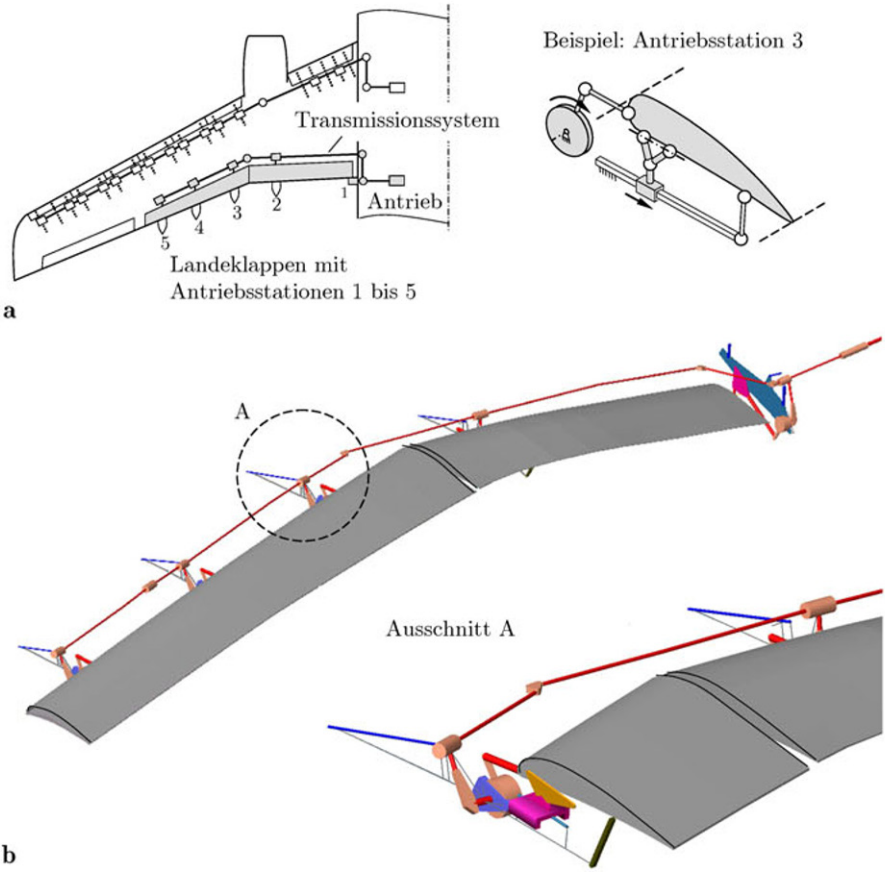


Abb. 1.9 Hochauftriebssysteme eines Verkehrsflugzeugs. **a** Gesamtanordnung. **b** Elastisches *Adams*-Mehrkörpermodell der Landeklappen mit Transmissionssystem (Quelle: Airbus Operations GmbH)

Das Modell umfasst die Klappensysteme der Vorder- und Hinterkante des Flügels mit ihren Antriebs- und Führungsmechanismen. Da sich die Baugruppen unter den wirkenden Luftkräften erheblich verformen, werden die Körper elastisch modelliert. Mit Hilfe des Mehrkörpermodells können die Bewegungen und Beanspruchungen der Bauteile unter den aerodynamischen Belastungen analysiert werden.

Die Modellierung des dynamischen Verhaltens von *Antriebssträngen* in Maschinen und Fahrzeugen ist ein weiteres großes Anwendungsgebiet der Mehrkörperdynamik. Ein Beispiel ist das in Abb. 1.10 a dargestellte *Adams*-Mehrkörpermodell einer Windenergieanlage. Hier werden ebenfalls elastische Körper verwendet. Mit solchen Modellen können neben den Bewegungen und Schwingungen der gesamten Struktur insbesondere auch Schwingungserscheinungen im Antriebsstrang und die dabei auftretenden Bauteilbeanspruchungen simuliert werden.

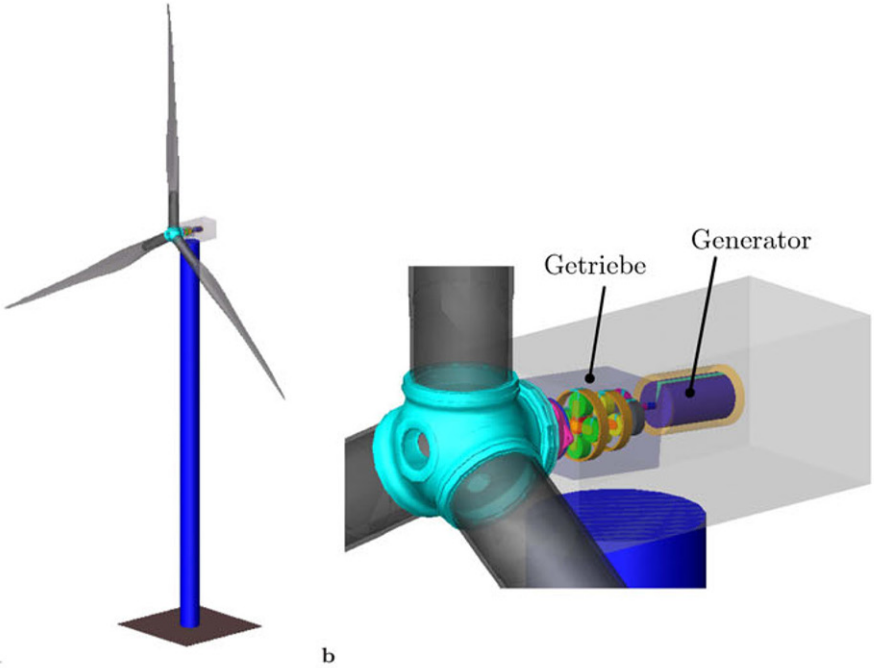


Abb. 1.10 Mehrkörpermodell einer Windenergieanlage. **a** *Adams*-Modell des Gesamtsystems. **b** Antriebsstrang (Quelle: W2E Wind to Energy GmbH, Rostock)

In der *Biomechanik* werden Mehrkörpermodelle erfolgreich für die Simulation von Bewegungen und Belastungen des menschlichen Körpers eingesetzt. Als ein Beispiel zeigt Abb. 1.11 a ein *SIMPACK*-Mehrkörpermodell der rechten unteren Körperextremität, das an der Universität Rostock für die Simulation der Kräfte im Hüftgelenk entwickelt worden ist, siehe KÄHLER et al. [45].

Die kinematische Kette der Skelettstrukturen wird durch die in Abb. 1.11 a als Bänder dargestellten Modelle der Muskel- und Weichteilstrukturen ergänzt. Die Bewegung erfolgt hier symmetrisch zur Sagittalebene.

Eine typische Aufgabenstellung besteht darin, für gemessene Bewegungsabläufe, wie z. B. die in Abb. 1.11 b dargestellte Aufstehbewegung aus einer Sitzposition, die dafür erforderlichen Muskelkräfte sowie die Belastungen der Gelenke zu ermitteln. Hierzu werden physiologisch begründete Modelle für die Verteilung der redundanten Muskel- und Weichteilkräfte an den Gelenken benötigt.

Das Modell wird für die Hardware-in-the-Loop Simulation von Hüftendoprothesen eingesetzt. Die im biomechanischen Simulationsmodell berechneten Bewegungen und Belastungen des Hüftgelenks werden durch einen kombiniert lage- und kraftgeregelten Roboter auf eine reale Endoprothese übertragen. Auf diese Weise kann das kinematische und dynamische Verhalten von Hüftimplantaten für die experimentelle Evaluation klinisch relevanter Daten nachgebildet werden. Ein Ziel ist die Analyse von Einflussparametern auf die so genannte Luxation. Hierbei wird in ungünstigen Bewegungs- und Belastungssituationen der Prothesenkopf aus der Gelenkpfanne herausgehebelt.

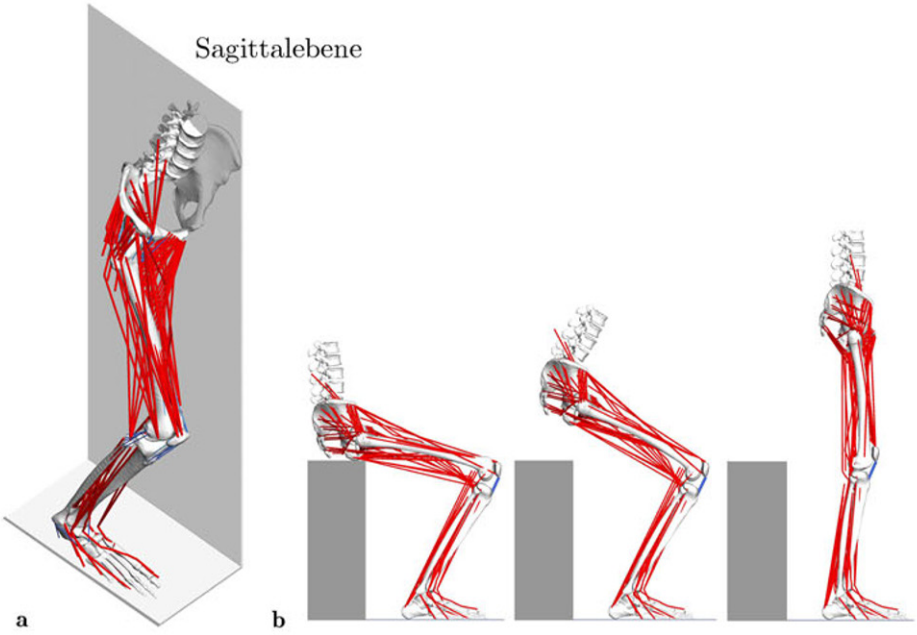


Abb. 1.11 **a** *SIMPACK*-Mehrkörpermodell der unteren rechten Körperextremität mit Muskel- und Weichteilstrukturen. **b** Simulation einer Aufstehbewegung

1.6 Inhaltsübersicht

Zur Übersicht sind wesentliche Inhalte der einzelnen Kapitel in Tabelle 1.2 zusammengestellt.

Eine Zusammenfassung der Vektoralgebra in Kapitel 2 bereitet die durchgängig vektorielle Formulierung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten vor. Die in den Grundlagenvorlesungen zur Technischen Mechanik häufig nur knapp behandelte räumliche Kinematik und Dynamik von starren Körpern wird in den Kapiteln 3 und 4 ausführlich beschrieben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Kinematik und Dynamik von Drehbewegungen.

Im Mittelpunkt der Mehrkörperdynamik stehen die in Kapitel 5 eingeführten holonomen und nichtholonomen Bindungen, welche die Bewegungen mechanischer Systeme beschränken. Die expliziten und impliziten Formulierungen der Bindungen und die sich daraus mit Hilfe des Prinzips von D'Alembert-Lagrange ergebenden Bewegungsgleichungen als differential-algebraische Gleichungssysteme oder als gewöhnliche Differentialgleichungssysteme werden jeweils in direkter Gegenüberstellung entwickelt und überwiegend an Massenpunktsystemen veranschaulicht. Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen mathematischen Formulierungen werden dadurch unmittelbar sichtbar.

In Kapitel 6 werden die impliziten und expliziten Bindungen an Gelenken räumlicher Mehrkörpersysteme ebenfalls in direkter Gegenüberstellung formuliert. Die bevorzugte Verwendung der beiden Bindungsformulierungen richtet sich nach der Topologie der Mehrkörpersysteme.

Für offene Mehrkörpersysteme, die eine Baumstruktur aufweisen, werden die Bewegungsgleichungen in Kapitel 7 mit Hilfe der expliziten Bindungen in den relativen Gelenkkoordinaten, die hier zugleich Minimalkoordinaten sind, formuliert. Erhalten wird ein lineares Gleichungssystem in den absoluten Beschleunigungen der Körper, in den Beschleunigungen der Gelenkkoordinaten und in den Reaktionskräften der Gelenke. Es bildet den gemeinsamen Zugang zu den nichtrekursiven und den — in Simulationsprogrammen wegen ihrer Effizienz häufig eingesetzen — rekursiven Mehrkörperformalismen.

Für geschlossene Mehrkörpersysteme, die kinematische Schleifen besitzen, werden die Bewegungsgleichungen in Kapitel 8 entweder mit Hilfe der impliziten Schließbedingungen der Schleifen als differential-algebraische Gleichungssysteme in den — hier voneinander abhängigen — Gelenkkoordinaten oder unter Verwendung der expliziten Schließbedingungen als gewöhnliche Differentialgleichungen in Minimalkoordinaten formuliert.

Die benötigten mathematischen Grundlagen der Matrizenrechnung und der Quaternionenalgebra sind als Anhang zusammengefasst. Ergänzend zur Betrachtung nichtholonomer Bindungen in Kapitel 5 werden weiterhin Bedingungen für die Integrierbarkeit kinematischer Bindungen formuliert und an Beispielen veranschaulicht.

Tabelle 1.2 Aufbau des Buches

1 Einführung
2 Grundlagen der Vektorrechnung Vektoralgebra Transformation von Vektorkoordinaten
3 Grundlagen der Kinematik Bewegung des starren Körpers im Raum Relativbewegungen Drehbewegungen
4 Grundlagen der Dynamik Impulssatz und Drallsatz Trägheitseigenschaften des starren Körpers Kreiselwirkungen
5 Mechanische Systeme mit Bindungen Implizite Bindungen, explizite Reaktionsbedingungen → Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten als *differential-algebraische Gleichungen* Explizite Bindungen, implizite Reaktionsbedingungen → Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten als *gewöhnliche Differentialgleichungen*
6 Bindungen in Mehrkörpersystemen Freiheitsgrad und statische Bestimmtheit Implizite und explizite Bindungen an Gelenken Explizite und implizite Reaktionsbedingungen an Gelenken
7 Offene Mehrkörpersysteme Explizite Bindungen, implizite Reaktionsbedingungen → Bewegungsgleichungen in den Gelenkkoordinaten als *gewöhnliche Differentialgleichungen*
8 Geschlossene Mehrkörpersysteme Implizite Schließbedingungen → Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten als *differential-algebraische Gleichungen* Explizite Schließbedingungen → Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten als *gewöhnliche Differentialgleichungen*
Anhang Matrizen Quaternionen Integrierbarkeitsbedingungen für kinematische Bindungen

Kapitel 2
Grundlagen der Vektorrechnung

Die Gleichungen zur Beschreibung der Kinematik und Dynamik von Mehrkörpersystemen werden mit Hilfe von Vektoren und Tensoren zweiter Stufe formuliert. Die benötigten Grundlagen der Vektorrechnung und die verwendeten Schreibweisen werden in diesem Kapitel beschrieben, siehe auch VDI-Richtlinien 2120 [103] und 2739 [105].

2.1 Skalare und Vektoren

Skalar Ein Skalar ist eine mathematische Größe, die als ein Produkt aus Zahlenwert (Maßzahl) und Einheit festgelegt ist. Beispiele: Länge $\ell = 5\,\mathrm{m}$, Zeit $t = 10\,\mathrm{s}$, Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$.

Vektor Ein Vektor ist eine mathematische Größe, zu deren Festlegung noch die Angabe der Richtung und des Richtungssinnes notwendig ist (gerichtete Größe). Beispiele: Ortsvektor $\boldsymbol{r}$, Beschleunigung $\boldsymbol{a}$, Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$.

Unter dem Betrag eines Vektors $\boldsymbol{a}$ wird der Betrag seiner Größe verstanden. Es gilt die Schreibweise $|\boldsymbol{a}| = a$. Ein dimensionsloser Vektor vom Betrag 1 heißt Einheitsvektor. Die Schreibweise ist

$$\boldsymbol{e}_\mathrm{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \qquad \text{mit} \qquad |\boldsymbol{e}_\mathrm{a}| = 1\,, \tag{2.1}$$

wobei der Richtungssinn von $\boldsymbol{e}_\mathrm{a}$ mit dem von $\boldsymbol{a}$ übereinstimmt.

2.2 Koordinaten von Vektoren

Ein Vektor $\boldsymbol{a}$ lässt sich in Komponenten in Richtung der Basisvektoren (Einheitsvektoren) $\boldsymbol{e}_{x1}$, $\boldsymbol{e}_{y1}$, $\boldsymbol{e}_{z1}$ eines orthogonalen, rechtshändigen Koordinaten-

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

systems $\mathcal{K}_1$ zerlegen (Abb. 2.1):

$$\boldsymbol{a} = {}^1a_x\,\boldsymbol{e}_{x1} + {}^1a_y\,\boldsymbol{e}_{y1} + {}^1a_z\,\boldsymbol{e}_{z1}\,. \tag{2.2}$$

Die vektoriellen Summanden ${}^1a_x\,\boldsymbol{e}_{x1}$, ${}^1a_y\,\boldsymbol{e}_{y1}$, ${}^1a_z\,\boldsymbol{e}_{z1}$ sind die *vektoriellen Komponenten* des Vektors $\boldsymbol{a}$ im Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$. Die Größen ${}^1a_x$, ${}^1a_y$, ${}^1a_z$ (z.B. ${}^1a_x$ sprich a_x in 1) werden *Koordinaten* (skalare Komponenten) des Vektors $\boldsymbol{a}$ im Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ genannt.

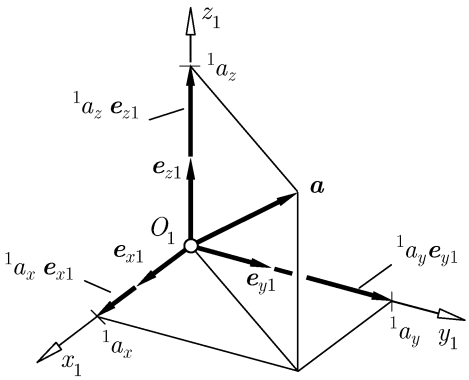


Abb. 2.1 Koordinatendarstellung eines Vektors $\boldsymbol{a}$ im Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$

Für numerische Berechnungen werden die Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{a}$ in einer Spaltenmatrix (Spaltenvektor) angeordnet, die hier ebenfalls durch den in fett gesetzten Buchstaben des Vektors bezeichnet wird,

$${}^1\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1a_x & {}^1a_y & {}^1a_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad \text{oder} \quad {}^1\boldsymbol{a} = {}^1\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = {}^1\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{2.3}$$

Die Spaltenmatrix ${}^1\boldsymbol{a}$ wird auch als Koordinatenmatrix oder Koordinatenvektor bezeichnet. Die hochgestellte 1 stellt den Bezug zum gewählten Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ her. Die Matrizenschreibweise hat den Vorteil, dass alle vektoriellen Rechenoperationen nach den Regeln der Matrizenrechnung ausgeführt werden können. Die benötigten Grundlagen der Matrizenrechnung sind als Anhang A.1 zusammengestellt.

Entsprechend der Definition der Vektorkoordinaten ergeben sich für Koordinatensysteme mit unterschiedlich gerichteten Einheitsvektoren unterschiedliche Koordinatenmatrizen desselben Vektors. Die Transformation von Vektorkoordinaten mit Hilfe orthogonaler Transformationsmatrizen wird in Abschnitt 2.4 angegeben.

Für den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}}$ des Vektors $\boldsymbol{a}$ gilt die Koordinatendarstellung

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{a}} = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \qquad \text{mit dem Betrag} \qquad a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{2.4}$$

2.3 Rechenregeln für Vektoren

Mit der Veranschaulichung von Vektoren als gerichtete Strecken im Raum werden die Rechenregeln geometrisch definiert und in Vektorschreibweise sowie in Matrizenschreibweise formuliert. In den weiteren Kapiteln dieses Buches wird dann die Matrizenschreibweise verwendet.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar Das Produkt eines Skalars m mit einem Vektor $\boldsymbol{a}$ ist

$$\boldsymbol{b} = m\,\boldsymbol{a} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\,a_x \\ m\,a_y \\ m\,a_z \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Der Vektor $\boldsymbol{b}$ hat den m-fachen Betrag des Vektors $\boldsymbol{a}$ und die gleiche Richtung. Bei positivem m bleibt der Richtungssinn erhalten, bei negativem m kehrt er sich um (Abb. 2.2 a). Es gilt das Kommutativgesetz $m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}\,m$. Mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\mathrm{a}$ von $\boldsymbol{a}$ ist $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e}_\mathrm{a}$ (Abb. 2.2 b).

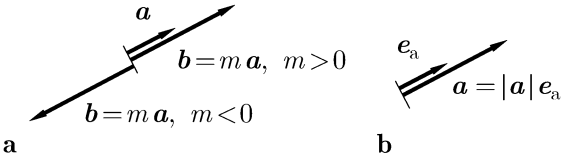


Abb. 2.2 **a** Multiplikation eines Vektors $\boldsymbol{a}$ mit Skalaren. **b** Darstellung des Vektors $\boldsymbol{a}$ als Produkt des Betrages $|\boldsymbol{a}|$ mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_\mathrm{a}$

Addition zweier Vektoren Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ werden addiert, indem die dazugehörigen gerichteten Strecken aneinandergefügt werden (Abb. 2.3 a).

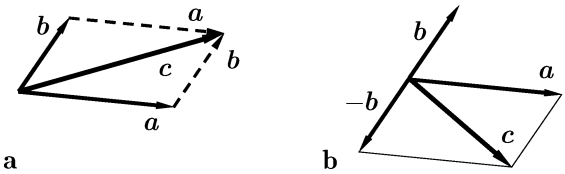


Abb. 2.3 **a** Addition und **b** Subtraktion zweier Vektoren

Der Summenvektor lautet

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Es gilt das Kommutativgesetz $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ werden voneinander subtrahiert, indem der zum Vektor $\boldsymbol{b}$ betragsgleiche, entgegengesetzt gerichtete Vektor $-\boldsymbol{b}$ zum Vektor $\boldsymbol{a}$ addiert wird (Abb. 2.3 b).

Skalarprodukt zweier Vektoren

Vektorschreibweise Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Skalar s, der gleich ist dem Produkt aus den Beträgen beider Vektoren multipliziert mit dem Cosinus des von diesen Vektoren eingeschlossenen Winkels φ (Abb. 2.4 a),

$$s = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\varphi\,. \tag{2.7}$$

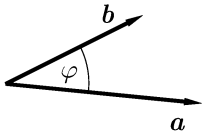


Abb. 2.4 Zum Skalarprodukt zweier Vektoren

Das Skalarprodukt ist kommutativ, also $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$. Stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander, so ist das Skalarprodukt null. Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$(m\,\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (m\,\boldsymbol{b}) = m\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\,, \qquad m \text{ skalar}\,, \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}\,. \tag{2.9}$$

Mit den Skalarprodukten der Basisvektoren eines orthonormierten Koordinatensystems $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = 1$ und $\boldsymbol{e}_x \cdot \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_y \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_x = 0$ lautet das Skalarprodukt $s = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned} & s = (a_x\,\boldsymbol{e}_x + a_y\,\boldsymbol{e}_y + a_z\,\boldsymbol{e}_z) \cdot (b_x\,\boldsymbol{e}_x + b_y\,\boldsymbol{e}_y + b_z\,\boldsymbol{e}_z) \\ \rightarrow\ & s = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z\,. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Matrizenschreibweise In Matrizenschreibweise wird das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ berechnet, indem die transponierte Koordinatenmatrix $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ des ersten Faktors $\boldsymbol{a}$ mit der Koordinatenmatrix $\boldsymbol{b}$ des zweiten Faktors multipliziert wird,

$$\begin{aligned} & s = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \\ \rightarrow\ & s = a_x\,b_x + a_y\,b_y + a_z\,b_z\,. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Es gilt $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{a}$.

Vektorprodukt (Kreuzprodukt) zweier Vektoren

Vektorschreibweise Das Vektorprodukt oder Kreuzprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist ein Vektor $\boldsymbol{c}$, der auf $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ senkrecht steht und so gerichtet ist, dass $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ ein rechtshändiges System bilden (Abb. 2.5).

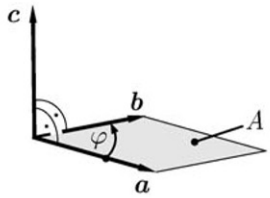


Abb. 2.5 Vektorprodukt zweier Vektoren

Das Vektorprodukt wird geschrieben als

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \,. \tag{2.12}$$

Der Zahlenwert des Betrages c des Vektors $\boldsymbol{c}$ ist gleich dem Zahlenwert der Fläche A des durch die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Mit dem Winkel φ zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gilt damit

$$|\boldsymbol{c}| = c = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\varphi \,. \tag{2.13}$$

Wird die Reihenfolge der Faktoren des Vektorprodukts vertauscht, so gilt

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \,. \tag{2.14}$$

Es gelten die weiteren Rechenregeln

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \,, \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \,, \tag{2.16}$$

$$m\,(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (m\,\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (m\,\boldsymbol{b}) \,, \qquad m \text{ skalar} \,. \tag{2.17}$$

Koordinatendarstellung Mit den Vektorprodukten der Basisvektoren eines orthonormierten Koordinatensystems $\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_y \times \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_x = \boldsymbol{e}_y$ in Verbindung mit (2.14) und (2.15) lautet das Vektorprodukt (2.13)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{c} = (a_x\,\boldsymbol{e}_x + a_y\,\boldsymbol{e}_y + a_z\,\boldsymbol{e}_z) \times (b_x\,\boldsymbol{e}_x + b_y\,\boldsymbol{e}_y + b_z\,\boldsymbol{e}_z) \\ \rightarrow\ &\boldsymbol{c} = (a_y\,b_z - a_z\,b_y)\,\boldsymbol{e}_x + (a_z\,b_x - a_x\,b_z)\,\boldsymbol{e}_y + (a_x\,b_y - a_y\,b_x)\,\boldsymbol{e}_z \,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Dieses Ergebnis ergibt sich auch aus der Determinante (Entwicklung nach erster Spalte)

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & a_x & b_x \\ \boldsymbol{e}_y & a_y & b_y \\ \boldsymbol{e}_z & a_z & b_z \end{vmatrix} \,. \tag{2.19}$$

Matrizenschreibweise Die Koordinaten des Vektorprodukts $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ werden berechnet, indem unter Verwendung der Koordinaten a_x, a_y, a_z des Vektors $\boldsymbol{a}$ die (3,3)-Matrix

$$\widetilde{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

gebildet und mit der (3,1)-Koordinatenmatrix des Vektors $\boldsymbol{b}$ multipliziert wird, also

$$\boldsymbol{c} = \widetilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b}\,, \tag{2.21}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_y\, b_z - a_z\, b_y \\ a_z\, b_x - a_x\, b_z \\ a_x\, b_y - a_y\, b_x \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Das Symbol $\sim$ wird als Operator für die Bildung der Matrix $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ aus den Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{a}$ definiert. Die Matrix $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ ist schiefsymmetrisch, so dass gilt $\widetilde{\boldsymbol{a}} = -\widetilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}}$. Entsprechend zu $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ ist

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = -\widetilde{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}\,. \tag{2.23}$$

Für die Berechnung des Koordinatenvektors $\boldsymbol{a}$ aus der Matrix $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ wird der Operator vec definiert,

$$\boldsymbol{a} = \mathrm{vec}(\widetilde{\boldsymbol{a}})\,. \tag{2.24}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalarprodukt

Vektorschreibweise Das Produkt

$$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\, m \tag{2.25}$$

des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit dem Skalar $m = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ ist ein Vektor in Richtung von $\boldsymbol{a}$.

Matrizenschreibweise Das Produkt (2.25) kann als das Produkt der drei Koordinatenmatrizen berechnet werden,

$$\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{c}\,. \tag{2.26}$$

Wegen des Assoziativgesetzes der Matrizenmultiplikation (A.12) kann in (2.26) die Klammersetzung entfallen. Die Berechnung von $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}$ lautet

$$\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x\, b_x\, c_x + a_x\, b_y\, c_y + a_x\, b_z\, c_z \\ a_y\, b_x\, c_x + a_y\, b_y\, c_y + a_y\, b_z\, c_z \\ a_z\, b_x\, c_x + a_z\, b_y\, c_y + a_z\, b_z\, c_z \end{bmatrix}.$$

Wegen $\boldsymbol{a}\,m = m\,\boldsymbol{a}$ ist $\boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}$, wobei bei dem Ausdruck $(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})\,\boldsymbol{a}$ die Klammern nicht weggelassen werden dürfen.

Spatprodukt dreier Vektoren

Vektorschreibweise Das Spatprodukt dreier Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ lautet

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = a_x(b_y c_z - b_z c_y) - a_y(b_x c_z - b_z c_x) + a_z(b_x c_y - b_y c_x)\,. \tag{2.27}$$

Bei zyklischer Vertauschung der Vektoren gilt

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,. \tag{2.28}$$

Das Spatprodukt liefert das Volumen des von den Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Spats). Das Spatprodukt ist null, falls die drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ parallel zu einer Ebene sind oder zwei der drei Vektoren des Spatproduktes parallel sind.

Matrizenschreibweise Das Spatprodukt (2.28) wird mit den drei Koordinatenmatrizen $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ wie folgt berechnet:

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,(\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}\,. \tag{2.29}$$

Wegen des Assoziativgesetzes der Matrizenmultiplikation (A.12) kann in (2.29) die Klammersetzung entfallen. Bei zyklischer und antizyklischer Vertauschung der Faktoren gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c} &= \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}\,, \\ \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c} &= -\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{c} = -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{b}\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Entwicklungssatz (Grassmann-Identität)[1]

Vektorschreibweise Der Entwicklungssatz lautet

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,, \tag{2.31}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\,. \tag{2.32}$$

Die Ergebnisse sind jeweils Vektoren.

Matrizenschreibweise Das Vektorprodukt $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ wird in Matrizenschreibweise wie folgt berechnet:

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}\,(\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}) = (\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}})\,\boldsymbol{c} = \widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}\,. \tag{2.33}$$

[1] Hermann Grassmann, *1809 in Stettin, †1877 in Stettin

Wegen des Assoziativgesetzes der Matrizenmultiplikation (A.12) kann in (2.33) die Klammersetzung entfallen. Der Entwicklungssatz (2.31) ermöglicht die Umformung

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} \\ \rightarrow\ &\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c} = \left[\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{E}\,\right]\,\boldsymbol{c}\,, \end{aligned}$$

woraus mit der Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ folgt

$$\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{E}\,. \tag{2.34}$$

Das Vektorprodukt $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ lautet in Matrizenschreibweise

$$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c}\,. \tag{2.35}$$

Der Entwicklungssatz (2.32) ermöglicht die Umformung

$$\begin{aligned} &\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{c} \\ \rightarrow\ &\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{c}\,, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\,. \tag{2.36}$$

Unter Berücksichtigung von (2.34) gilt $\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$, woraus durch Vergleich mit (2.36) folgt

$$\widetilde{\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b}} = \widetilde{\boldsymbol{a}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}} - \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{a}}\,. \tag{2.37}$$

Skalares Produkt zweier Vektorprodukte (LAGRANGE-Identität)

Vektorschreibweise Die LAGRANGE-Identität lautet

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{d})\,. \tag{2.38}$$

Das Ergebnis ist ein Skalar.

Matrizenschreibweise Der Ausdruck (2.38) lautet

$$(\widetilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}\,\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d})\,. \tag{2.39}$$

2.4 Transformation von Vektorkoordinaten

Für die praktische Rechnung mit Vektoren wird der Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Vektors in verschiedenen Koordinatensystemen benötigt. Mit der gegebenen Komponentenzerlegung

$$\boldsymbol{a} = {}^{2}a_x\,\boldsymbol{e}_{x2} + {}^{2}a_y\,\boldsymbol{e}_{y2} + {}^{2}a_z\,\boldsymbol{e}_{z2} \tag{2.40}$$

des Vektors $\boldsymbol{a}$ im rechtshändigen Koordinatensystem $\mathcal{K}_2$ und der gesuchten Komponentenzerlegung

$$\boldsymbol{a} = {}^1a_x\,\boldsymbol{e}_{x1} + {}^1a_y\,\boldsymbol{e}_{y1} + {}^1a_z\,\boldsymbol{e}_{z1} \tag{2.41}$$

des Vektors $\boldsymbol{a}$ im rechtshändigen Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ gilt (Abb. 2.6)

$${}^1a_x\,\boldsymbol{e}_{x1} + {}^1a_y\,\boldsymbol{e}_{y1} + {}^1a_z\,\boldsymbol{e}_{z1} = {}^2a_x\,\boldsymbol{e}_{x2} + {}^2a_y\,\boldsymbol{e}_{y2} + {}^2a_z\,\boldsymbol{e}_{z2}\,. \tag{2.42}$$

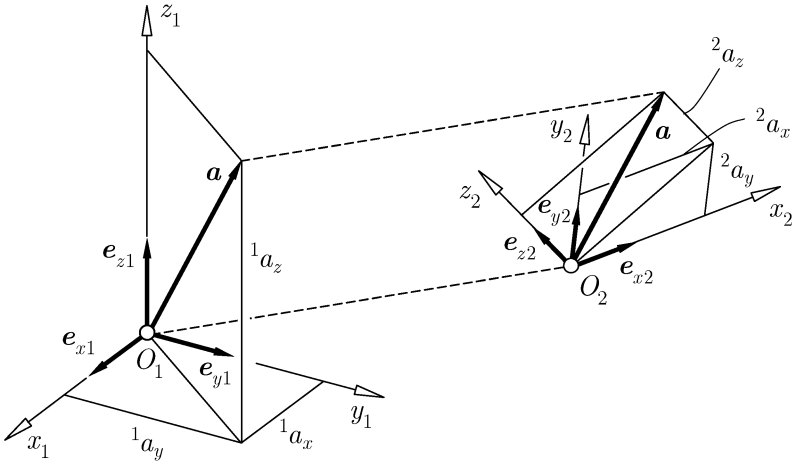


Abb. 2.6 Transformation der Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{a}$

Skalare Multiplikation der Vektorgleichung (2.42) mit $\boldsymbol{e}_{x1}$, $\boldsymbol{e}_{y1}$ bzw. $\boldsymbol{e}_{z1}$ liefert unter Berücksichtigung der Orthonormalitätsbedingungen der Basisvektoren $\boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{x1} = \boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{y1} = \boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{z1} = 1$ und $\boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{y1} = \boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{z1} = \boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_{x1} = 0$

$${}^1a_x = {}^2a_x\,\boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} + {}^2a_y\,\boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{y2} + {}^2a_z\,\boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{z2}\,, \tag{2.43}$$

$${}^1a_y = {}^2a_x\,\boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} + {}^2a_y\,\boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{y2} + {}^2a_z\,\boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{z2}\,, \tag{2.44}$$

$${}^1a_z = {}^2a_x\,\boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} + {}^2a_y\,\boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{y2} + {}^2a_z\,\boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{z2}\,. \tag{2.45}$$

Diese drei Gleichungen können zu einer Matrizengleichung zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} {}^1a_x \\ {}^1a_y \\ {}^1a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} & \boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{y2} & \boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{z2} \\ \boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} & \boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{y2} & \boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{z2} \\ \boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} & \boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{y2} & \boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{z2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^2a_x \\ {}^2a_y \\ {}^2a_z \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

$$\rightarrow \quad {}^1\boldsymbol{a} = {}^{12}\boldsymbol{T}\;{}^2\boldsymbol{a}\,.$$

Die *Transformationsmatrix* ${}^{12}\boldsymbol{T}$ transformiert damit die Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{a}$ vom System $\mathcal{K}_2$ in das System $\mathcal{K}_1$. Sie besitzt die folgenden Eigenschaften:

- In den Spalten von ${}^{12}\boldsymbol{T}$ stehen die Koordinaten der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{x2}$, $\boldsymbol{e}_{y2}$, $\boldsymbol{e}_{z2}$ des Koordinatensystems $\mathcal{K}_2$ im System $\mathcal{K}_1$ und in den Zeilen die Koordinaten der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{x1}$, $\boldsymbol{e}_{y1}$, $\boldsymbol{e}_{z1}$ des Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ im System $\mathcal{K}_2$:

$$ {}^{12}\boldsymbol{T} = \left[\, {}^{1}\boldsymbol{e}_{x2} \;\; {}^{1}\boldsymbol{e}_{y2} \;\; {}^{1}\boldsymbol{e}_{z2} \,\right] = \begin{bmatrix} {}^{2}\boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}} \\ {}^{2}\boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}} \\ {}^{2}\boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} . \tag{2.47} $$

- Die Spaltenvektoren von ${}^{12}\boldsymbol{T}$ enthalten die Cosinuswerte der Winkel der Einheitsvektoren von $\mathcal{K}_2$ gegenüber den Einheitsvektoren von $\mathcal{K}_1$, die auch als *Richtungscosinus* bezeichnet werden. Beispielsweise gilt für die erste Spalte (Abb. 2.7)

$$ {}^{1}\boldsymbol{e}_{x2} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{x1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} \\ \boldsymbol{e}_{y1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} \\ \boldsymbol{e}_{z1}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_{x2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_3 \end{bmatrix} . \tag{2.48} $$

Die Transformationsmatrix ${}^{12}\boldsymbol{T}$ wird deswegen auch als *Richtungscosinusmatrix* bezeichnet.

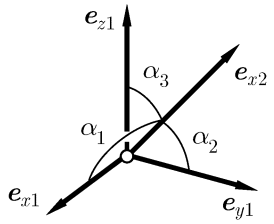


Abb. 2.7 Richtungswinkel des Einheitsvektors $\boldsymbol{e}_{x2}$ gegenüber dem System $\mathcal{K}_1$

- Die Zeilen- und Spaltenvektoren von ${}^{12}\boldsymbol{T}$ bilden ein orthonormales Rechtssystem. Mit (2.29) hat die Determinante den Wert $\det({}^{12}\boldsymbol{T}) = +1$. Die Transformationsmatrix ${}^{12}\boldsymbol{T}$ ist deswegen *eigentlich orthogonal*. Die inverse Transformationsmatrix ${}^{12}\boldsymbol{T}^{-1} = {}^{21}\boldsymbol{T}$ für die umgekehrte Transformation vom System $\mathcal{K}_1$ in das System $\mathcal{K}_2$ ist die Transponierte von ${}^{12}\boldsymbol{T}$, also

$$ {}^{2}\boldsymbol{a} = {}^{21}\boldsymbol{T}\,{}^{1}\boldsymbol{a} \qquad \text{mit} \qquad {}^{21}\boldsymbol{T} = {}^{12}\boldsymbol{T}^{-1} = {}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} . \tag{2.49} $$

Es besteht die Beziehung

$$ {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E} \qquad \text{oder} \qquad {}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,{}^{12}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E} , \tag{2.50} $$

woraus sich die sechs Orthonormalitätsbedingungen ergeben. Wird z.B. von der Matrizengleichung ${}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,{}^{12}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}$ ausgegangen, so liefern die Gleichungen auf der Hauptdiagonalen die Normierungsbedingungen für die drei Spaltenvektoren von ${}^{12}\boldsymbol{T}$,

$$ {}^{1}\boldsymbol{e}_{x2}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{x2} = 1\,, \qquad {}^{1}\boldsymbol{e}_{y2}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{y2} = 1\,, \qquad {}^{1}\boldsymbol{e}_{z2}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{z2} = 1\,. \tag{2.51} $$

Von den sechs Gleichungen der Nebendiagonalen sind drei unabhängig, welche die paarweise Orthogonalität der drei Spaltenvektoren von ${}^{12}\boldsymbol{T}$ beschreiben,

$$ {}^{1}\boldsymbol{e}_{x2}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{y2} = 0\,, \qquad {}^{1}\boldsymbol{e}_{y2}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{z2} = 0\,, \qquad {}^{1}\boldsymbol{e}_{x2}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{z2} = 0. \tag{2.52} $$

Wegen der sechs Orthonormalitätsbedingungen (2.51) und (2.52) sind nur drei der neun Elemente der Transformationsmatrix ${}^{12}\boldsymbol{T}$ voneinander unabhängig, was dem Freiheitsgrad drei der Drehung des Koordinatensystems $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$ entspricht.

Beispiele Das Koordinatensystem $\mathcal{K}_2$ sei gegenüber dem Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ um den Winkel φ_1 um die x_1-Achse gedreht (Abb. 2.8 a). Für die Transformation der Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{r}$ gilt mit den Abkürzungen $\mathrm{s}\varphi \mathrel{\hat{=}} \sin\varphi$, $\mathrm{c}\varphi \mathrel{\hat{=}} \cos\varphi$

$$ {}^{1}\boldsymbol{r} = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r} \quad \text{mit} \quad {}^{12}\boldsymbol{T} = \left[\,{}^{1}\boldsymbol{e}_{x2}\;\; {}^{1}\boldsymbol{e}_{y2}\;\; {}^{1}\boldsymbol{e}_{z2}\,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi_1 & -\mathrm{s}\varphi_1 \\ 0 & \mathrm{s}\varphi_1 & \mathrm{c}\varphi_1 \end{bmatrix}. \tag{2.53} $$

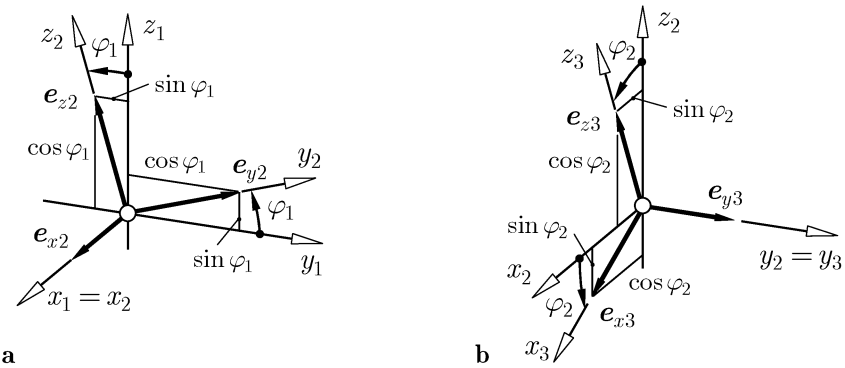


Abb. 2.8 Drehungen von Koordinatensystemen. **a** Drehung um die x_1-Achse. **b** Drehung um die y_2-Achse

Das Koordinatensystem $\mathcal{K}_3$ sei gegenüber dem Koordinatensystem $\mathcal{K}_2$ um den Winkel φ_2 um die y_2-Achse gedreht (Abb. 2.8 b):

$$ {}^2\boldsymbol{r} = {}^{23}\boldsymbol{T}\,{}^3\boldsymbol{r} \quad \text{mit} \quad {}^{23}\boldsymbol{T} = \left[{}^2\boldsymbol{e}_{x3} \;\; {}^2\boldsymbol{e}_{y3} \;\; {}^2\boldsymbol{e}_{z3}\right] = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\varphi_2 & 0 & \mathrm{s}\varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}\varphi_2 & 0 & \mathrm{c}\varphi_2 \end{bmatrix}. \tag{2.54} $$

Für die zwei aufeinanderfolgenden Transformationen der Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{r}$ vom Koordinatensystem $\mathcal{K}_3$ über $\mathcal{K}_2$ nach $\mathcal{K}_1$ gilt

$$ {}^1\boldsymbol{r} = {}^{13}\boldsymbol{T}\,{}^3\boldsymbol{r} \;\; \text{mit} \;\; {}^{13}\boldsymbol{T} = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{23}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\varphi_2 & 0 & \mathrm{s}\varphi_2 \\ \mathrm{s}\varphi_1\,\mathrm{s}\varphi_2 & \mathrm{c}\varphi_1 & -\mathrm{s}\varphi_1\,\mathrm{c}\varphi_2 \\ -\mathrm{c}\varphi_1\,\mathrm{s}\varphi_2 & \mathrm{s}\varphi_1 & \mathrm{c}\varphi_1\,\mathrm{c}\varphi_2 \end{bmatrix}. \tag{2.55} $$

2.5 Tensoren zweiter Stufe

Ein Vektor wird durch seine Transformationseigenschaften als Tensor erster Stufe definiert. Auch Tensoren zweiter Stufe werden durch das Transformationsverhalten ihrer Koordinaten erklärt.

Tensor zweiter Stufe als Abbildungsoperator

Vektorschreibweise Ein Tensor zweiter Stufe $\boldsymbol{D}$ wird als ein Operator definiert, der einen Vektor $\boldsymbol{r}$ in einen anderen Vektor $\boldsymbol{s}$ linear abbildet:

$$ \boldsymbol{s} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{r}\,. \tag{2.56} $$

Das durch $\cdot$ gekennzeichnete Produkt wird in der Tensorrechnung als das verjüngende Produkt bezeichnet. Ein Sonderfall des verjüngenden Produkts ist bereits das Skalarprodukt, das zwei Tensoren erster Stufe (Vektoren) miteinander verknüpft. Tensoren zweiter Stufe werden im Folgenden nur als Tensoren bezeichnet, da Tensoren höherer Stufe hier nicht betrachtet werden.

Matrizenschreibweise Wird die Vektorabbildung (2.56) in Koordinaten eines orthonormierten Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ ausgewertet, so werden die Koordinaten ${}^1\boldsymbol{r}$ des Vektors $\boldsymbol{r}$ in die Koordinaten ${}^1\boldsymbol{s}$ des Vektors $\boldsymbol{s}$ durch eine (3,3)-Matrix ${}^1\boldsymbol{D}$ abgebildet, welche die neun Koordinaten des Tensors $\boldsymbol{D}$ im Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ enthält,

$$ {}^1\boldsymbol{s} = {}^1\boldsymbol{D}\,{}^1\boldsymbol{r} \quad \text{bzw.} \quad {}^1\begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = {}^1\begin{bmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & D_{zz} \end{bmatrix} {}^1\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \tag{2.57} $$

Einheitstensor Der Einheitstensor $\boldsymbol{E}$ ist das neutrale Element der Vektorabbildung (2.56),

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{r} \,. \tag{2.58}$$

Die Koordinaten des Einheitstensors bilden die (3,3)-Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$.

Vektorprodukt als lineare Vektorabbildung

Vektorschreibweise Das Vektorprodukt $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ kann gemäß (2.56) als eine Abbildung des Vektors $\boldsymbol{b}$ in den Vektor $\boldsymbol{c}$ mit Hilfe eines aus dem Vektor $\boldsymbol{a}$ gebildeten Tensors $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ angesehen werden,

$$\boldsymbol{c} = \widetilde{\boldsymbol{a}} \cdot \boldsymbol{b} \,. \tag{2.59}$$

Matrizenschreibweise In Matrizenschreibweise wurde das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ bereits in (2.22) unter Verwendung der aus den Koordinaten von $\boldsymbol{a}$ gebildeten schiefsymmetrischen Matrix $\widetilde{\boldsymbol{a}}$ berechnet,

$$\boldsymbol{c} = \widetilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} = -\widetilde{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{T}} \,. \tag{2.60}$$

Dyadisches (tensorielles) Produkt zweier Vektoren

Vektorschreibweise Aus dem Ausdruck gemäß (2.25),

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}) \;, \tag{2.61}$$

lässt sich der Vektor $\boldsymbol{c}$ durch Bildung eines Tensors $\boldsymbol{D}$ mit Hilfe des dyadischen Produkts (tensoriellen Produkts) $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ herauslösen:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{c} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} \,. \tag{2.62}$$

Das Symbol $\otimes$ kennzeichnet das dyadische Produkt in Vektorschreibweise.

Matrizenschreibweise In Matrizenschreibweise wurde das dyadische Produkt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ in (2.26) berechnet, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{c}$. Damit gilt

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{D}\, \boldsymbol{c} \tag{2.63}$$

mit den Tensorkoordinaten

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{a}\, \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x\, b_x & a_x\, b_y & a_x\, b_z \\ a_y\, b_x & a_y\, b_y & a_y\, b_z \\ a_z\, b_x & a_z\, b_y & a_z\, b_z \end{bmatrix} . \tag{2.64}$$

Weitere Tensoren in der Dynamik starrer Mehrkörpersysteme sind der Drehtensor (Abschnitt 3.3.2) und der Trägheitstensor (Abschnitt 4.4).

Transformation von Tensorkoordinaten Die Koordinaten ${}^{1}\boldsymbol{D}$ eines Tensors $\boldsymbol{D}$ im System $\mathcal{K}_1$ können mit Hilfe der Transformationsmatrix ${}^{12}\boldsymbol{T}$ in die Koordinaten ${}^{2}\boldsymbol{D}$ in einem System $\mathcal{K}_2$ transformiert werden. Für die Herleitung der Transformationsbeziehung wird von der in $\mathcal{K}_1$ dargestellten Vektorabbildung

$$ {}^{1}\boldsymbol{s} = {}^{1}\boldsymbol{D}\,{}^{1}\boldsymbol{r} \tag{2.65} $$

ausgegangen. Einsetzen der Transformationen für die Vektorkoordinaten

$$ {}^{1}\boldsymbol{s} = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{s}\,, \qquad {}^{1}\boldsymbol{r} = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r} \tag{2.66} $$

ergibt ${}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{s} = {}^{1}\boldsymbol{D}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r}$ und nach Multiplikation mit ${}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ von links

$$ {}^{2}\boldsymbol{s} = {}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,{}^{1}\boldsymbol{D}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r}\,. \tag{2.67} $$

Der Vergleich von (2.67) mit der im System $\mathcal{K}_2$ dargestellten Vektorabbildung, also

$$ {}^{2}\boldsymbol{s} = {}^{2}\boldsymbol{D}\,{}^{2}\boldsymbol{r}\,, \tag{2.68} $$

liefert unter Berücksichtigung von ${}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = {}^{21}\boldsymbol{T}$ die Gleichung für die Transformation der Tensorkoordinaten vom System $\mathcal{K}_1$ in das System $\mathcal{K}_2$

$$ {}^{2}\boldsymbol{D} = {}^{21}\boldsymbol{T}\,{}^{1}\boldsymbol{D}\,{}^{21}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,. \tag{2.69} $$

Entsprechend lautet die umgekehrte Transformation der Tensorkoordinaten von $\mathcal{K}_2$ nach $\mathcal{K}_1$

$$ {}^{1}\boldsymbol{D} = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{D}\,{}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,. \tag{2.70} $$

Während die Multiplikation der Koordinatenmatrix der Tensorkoordinaten mit der Transformationsmatrix von links der Transformation von Vektorkoordinaten gemäß (2.46) entspricht, kommt bei der Transformation von Tensorkoordinaten die Multiplikation mit der transponierten Transformationsmatrix von rechts hinzu.

Kapitel 3
Grundlagen der Kinematik

Die Kinematik ist die Lehre von der Geometrie der Bewegungen von Punkten und Körpern. Kräfte und Momente, welche die Bewegungen verursachen, werden nicht betrachtet. In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Kinematik räumlicher Starrkörperbewegungen behandelt.

Die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines starren Körpers im Raum werden in Abschnitt 3.1 vektoriell beschrieben. Die Definition der zeitlichen Ableitung von vektoriellen Bewegungsgrößen gegenüber verschiedenen bewegten Bezugssystemen führt in Abschnitt 3.2 auf die Beziehungen für die Zusammensetzung zweier Teilbewegungen zu einer resultierenden Bewegung, die in der Kinematik von Mehrkörpersystemen eine zentrale Bedeutung besitzen. Mit Hilfe des in Abschnitt 3.3 eingeführten Drehzeigers und des daraus abgeleiteten Drehtensors werden Drehbewegungen geometrisch anschaulich beschrieben. Damit können auch mehrfache Drehungen in Abschnitt 3.4 und die Winkelgeschwindigkeit in Abschnitt 3.5 geometrisch interpretiert werden. In den Abschnitten 3.6 bis 3.9 werden die EULER- und KARDAN-Winkel sowie die vom Drehzeiger abgeleiteten EULER- und RODRIGUES-Parameter als Koordinaten zur Beschreibung von Drehbewegungen eingeführt und ihre Anwendung an Beispielen gezeigt.

3.1 Allgemeine Bewegung des starren Körpers

Für die allgemeine Bewegung eines starren Körpers im Raum werden die Lage, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung betrachtet.

3.1.1 Aufgabenstellung

Zur Beschreibung der räumlichen Bewegung eines starren Körpers relativ zu einem Koordinatensystem $\mathcal{K}_0$ wird ein körperfestes Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ eingeführt (Abb. 3.1).

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_3, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

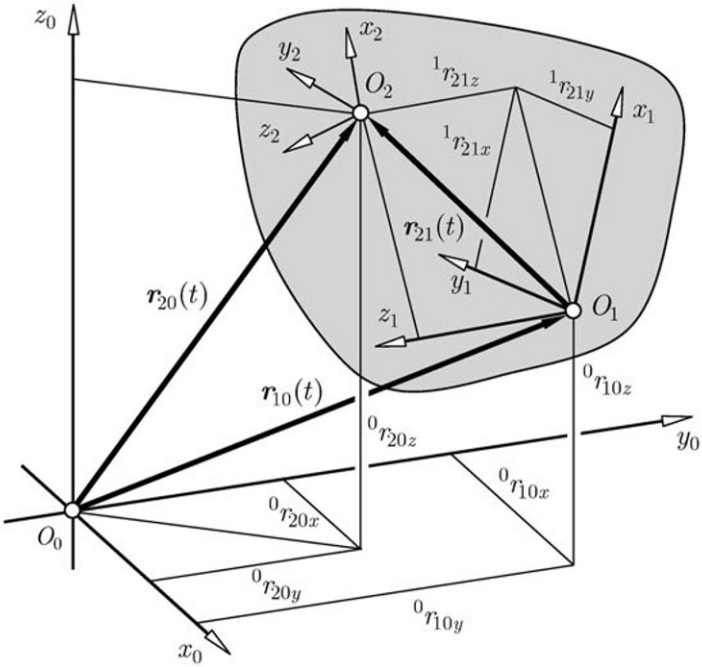


Abb. 3.1 Beschreibung der Lage eines starren Körpers im Raum

Die allgemeine räumliche Bewegung des Körpers bzw. des damit fest verbundenen Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ lässt sich nach einem Satz von EULER durch die Bahnbewegung des Körperpunkts O_1 und der Drehbewegung des Körpers um O_1 darstellen:

- *Bahnbewegung* des Punktes O_1, beschrieben durch den zeitlich veränderlichen Koordinatenvektor ${}^0\boldsymbol{r}_{10}(t)$ des Vektors $\boldsymbol{r}_{10}(t)$ von O_0 nach O_1 im System $\mathcal{K}_0$,

$$ {}^0\boldsymbol{r}_{10}(t) = {}^0\begin{bmatrix} r_{10x}(t) \\ r_{10y}(t) \\ r_{10z}(t) \end{bmatrix} . \tag{3.1} $$

- *Drehbewegung* des Systems $\mathcal{K}_1$ um den Punkt O_1, beschrieben durch die zeitlich veränderliche (3,3)-Transformationsmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ vom System $\mathcal{K}_1$ in das System $\mathcal{K}_0$ gemäß (2.47),

$$ {}^{01}\boldsymbol{T}(t) = \left[\, {}^0\boldsymbol{e}_{x1}(t) \quad {}^0\boldsymbol{e}_{y1}(t) \quad {}^0\boldsymbol{e}_{z1}(t) \,\right] . \tag{3.2} $$

Da die Transformationsmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ die Orientierung des Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ kennzeichnet, wird sie auch als *Drehmatrix* bezeichnet.

Betrachtet wird nun ein weiteres körperfestes Koordinatensystem $\mathcal{K}_2$. Die Lage von $\mathcal{K}_2$ relativ zum körperfesten System $\mathcal{K}_1$ wird durch den zeitlich konstanten Koordinatenvektor

$$ {}^1\boldsymbol{r}_{21} = {}^1\begin{bmatrix} r_{21x} \\ r_{21y} \\ r_{21z} \end{bmatrix} \tag{3.3} $$

des körperfesten Vektors $\boldsymbol{r}_{21}$ von O_1 nach O_2 im System $\mathcal{K}_1$ beschrieben. Die Orientierung des Systems $\mathcal{K}_2$ gegenüber $\mathcal{K}_1$ beschreibt die zeitlich konstante Drehmatrix

$$ {}^{12}\boldsymbol{T} = \left[\, {}^1\boldsymbol{e}_{x2} \;\; {}^1\boldsymbol{e}_{y2} \;\; {}^1\boldsymbol{e}_{z2} \,\right] . \tag{3.4} $$

Für die allgemeine Bewegung des Körpers werden im Folgenden die Lage, die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes O_2 sowie die Orientierung des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ ermittelt.

3.1.2 Lage

Unter Verwendung des körperfesten Vektors $\boldsymbol{r}_{21}$ von O_1 nach O_2 gilt für den zeitlich veränderlichen Vektor $\boldsymbol{r}_{20}(t)$ von O_0 nach O_2

$$ \boldsymbol{r}_{20}(t) = \boldsymbol{r}_{10}(t) + \boldsymbol{r}_{21}(t) . \tag{3.5} $$

Im System $\mathcal{K}_0$ lautet diese Vektorgleichung ${}^0\boldsymbol{r}_{20}(t) = {}^0\boldsymbol{r}_{10}(t) + {}^0\boldsymbol{r}_{21}(t)$. Der zeitlich veränderliche Koordinatenvektor ${}^0\boldsymbol{r}_{21}(t)$ lässt sich aus dem zeitlich konstanten Koordinatenvektor ${}^1\boldsymbol{r}_{21}$ aus (3.3) mit Hilfe der zeitlich veränderlichen Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ vom System $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_0$ ermitteln:

$$ {}^0\boldsymbol{r}_{21}(t) = {}^{01}\boldsymbol{T}(t)\, {}^1\boldsymbol{r}_{21} . \tag{3.6} $$

Damit gilt insgesamt

$$ {}^0\boldsymbol{r}_{20}(t) = {}^0\boldsymbol{r}_{10}(t) + {}^{01}\boldsymbol{T}(t)\, {}^1\boldsymbol{r}_{21} . \tag{3.7} $$

Die Orientierung des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ wird beschrieben durch die Drehmatrix

$$ {}^{02}\boldsymbol{T}(t) = {}^{01}\boldsymbol{T}(t)\, {}^{12}\boldsymbol{T} . \tag{3.8} $$

3.1.3 Geschwindigkeit, Bewegungswinder

Die Zeitableitung des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_{20}(t)$ des Punktes O_2 aus (3.5) liefert den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\boldsymbol{r}}_{20} = \boldsymbol{v}_{20}$ von O_2,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}_{20}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_{10}(t) + \dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) \qquad \text{oder} \\ \boldsymbol{v}_{20}(t) &= \boldsymbol{v}_{10}(t) + \dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t)\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Die zeitliche Änderung des körperfesten Vektors $\boldsymbol{r}_{21}$ ergibt sich aus der Bedingung, dass der Betrag r_{21} von $\boldsymbol{r}_{21}$ konstant ist. Damit ist auch $r_{21}^2 = \boldsymbol{r}_{21}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{r}_{21}$ konstant, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_{21}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_{21})}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{und damit} \qquad 2\,\boldsymbol{r}_{21}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{r}}_{21} = 0\,. \tag{3.10}$$

Der Vektor $\dot{\boldsymbol{r}}_{21}$ steht also senkrecht auf $\boldsymbol{r}_{21}$. Damit kann $\dot{\boldsymbol{r}}_{21}$ als das vektorielle Produkt eines Vektors $\boldsymbol{\omega}_{10}$ mit $\boldsymbol{r}_{21}$, ausgedrückt werden,

$$\dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\boldsymbol{r}_{21}(t)\,. \tag{3.11}$$

Das Vektorprodukt ist hier mit Hilfe des gemäß (2.20) aus den Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ gebildeten schiefsymmetrischen Tensors

$$\boldsymbol{\omega}_{10} = \begin{bmatrix} \omega_{10x} \\ \omega_{10y} \\ \omega_{10z} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{10z} & \omega_{10y} \\ \omega_{10z} & 0 & -\omega_{10x} \\ -\omega_{10y} & \omega_{10x} & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

dargestellt. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}_{10}$ ist die Winkelgeschwindigkeit des körperfesten Systems $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$. Einsetzen von (3.11) in (3.9) ergibt

$$\boldsymbol{v}_{20}(t) = \boldsymbol{v}_{10}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\boldsymbol{r}_{21}(t)\,. \tag{3.13}$$

Dies ist der Satz von Euler für die Geschwindigkeiten der Körperpunkte O_1 und O_2. Eine geometrische Interpretation der Winkelgeschwindigkeit wird in Abschnitt 3.5.1 angegeben.

Bewegungswinder Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{10}$ definieren dem Bewegungswinder $(\boldsymbol{\omega}_{10}, \boldsymbol{v}_{10})$ des Körpers bezüglich des Punktes O_1, der den räumlichen Geschwindigkeitszustand des Körpers beschreibt, vgl. Magnus und Müller-Slany [59]. Mit Hilfe der Übergangsgleichung (3.13) kann der äquivalente Bewegungswinder $(\boldsymbol{\omega}_{10}, \boldsymbol{v}_{20})$ bezüglich des Punktes O_2 berechnet werden.

Winkelgeschwindigkeit und Drehmatrix Um die Elemente des Koordinatenvektors ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}(t)$ der Winkelgeschwindigkeit im System $\mathcal{K}_0$ aus den Elementen der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ zu bestimmen, wird (3.6) unter Berücksichtigung des zeitlich konstanten Koordinatenvektors ${}^1\boldsymbol{r}_{21}$ aus (3.3) nach der

Zeit abgeleitet, also

$$ {}^{0}\dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) = {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}(t)\, {}^{1}\boldsymbol{r}_{21} \,. \tag{3.14} $$

Einsetzen der umgekehrten Transformation ${}^{1}\boldsymbol{r}_{21} = {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(t)\, {}^{0}\boldsymbol{r}_{21}(t)$ ergibt

$$ {}^{0}\dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) = {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}(t)\, {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(t)\, {}^{0}\boldsymbol{r}_{21}(t) \,. \tag{3.15} $$

Der Vergleich von (3.15) mit der im System $\mathcal{K}_0$ dargestellten Vektorgleichung (3.11), also ${}^{0}\dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) = {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, {}^{0}\boldsymbol{r}_{21}(t)$, liefert die POISSON[1]-Gleichung

$$ {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t) = {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}(t)\, {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(t) \,. \tag{3.16} $$

Der Koordinatenvektor ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{10}(t)$ lautet damit gemäß (2.24)

$$ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{10}(t) = \mathrm{vec}\left({}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}(t)\, {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}(t) \right) \,. \tag{3.17} $$

Die POISSON-Gleichung (3.16) wird in Abschnitt 3.5.2 geometrisch interpretiert.

3.1.4 Beschleunigung

Die Zeitableitung des Geschwindigkeitsvektors $\boldsymbol{v}_{20}(t)$ des Punktes O_2 liefert den Beschleunigungsvektor $\dot{\boldsymbol{v}}_{20}(t) = \boldsymbol{a}_{20}(t)$ von O_2,

$$ \begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{r}}_{20}(t) &= \ddot{\boldsymbol{r}}_{10}(t) + \ddot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) \qquad \text{oder} \\ \dot{\boldsymbol{v}}_{20}(t) &= \dot{\boldsymbol{v}}_{10}(t) + \ddot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) \qquad \text{oder} \\ \boldsymbol{a}_{20}(t) &= \boldsymbol{a}_{10}(t) + \ddot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) \,. \end{aligned} \tag{3.18} $$

Die zeitliche Ableitung von $\dot{\boldsymbol{r}}_{21}$ aus (3.11) ergibt

$$ \ddot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) = \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{10}(t)\, \boldsymbol{r}_{21}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, \dot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) $$

bzw. mit dem Vektor der Winkelbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10} = \boldsymbol{\alpha}_{10}$ des Systems $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ und dem Vektor $\dot{\boldsymbol{r}}_{21}$ aus (3.11)

$$ \ddot{\boldsymbol{r}}_{21}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}(t)\, \boldsymbol{r}_{21}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, \boldsymbol{r}_{21}(t) \,. $$

Zusammen mit (3.18) lautet dann die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{20}(t)$ des Punktes O_2

$$ \boldsymbol{a}_{20}(t) = \boldsymbol{a}_{10}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}(t)\, \boldsymbol{r}_{21}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, \boldsymbol{r}_{21}(t) \,. \tag{3.19} $$

Dies ist der Satz von EULER für die Beschleunigungen der Körperpunkte O_1 und O_2.

---

[1] SIMON-DENIS POISSON, *1781 in Pithiviers, †1840 in Paris

3.1.5 Beispiel zur Bewegung eines starren Körpers

Betrachtet wird die Dreh-Schubbewegung des Körpers 1 mit dem damit verbundenen Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ entlang der z_0-Achse des im Gestell 0 liegenden Koordinatensystems $\mathcal{K}_0$ (Abb. 3.2). Bei gegebenen zeitlichen Verläufen des Drehwinkels $\beta(t)$ und der Verschiebung $s(t)$ sind die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung des mit dem Körper 1 verbundenen Koordinatensystems $\mathcal{K}_2$ zu bestimmen.

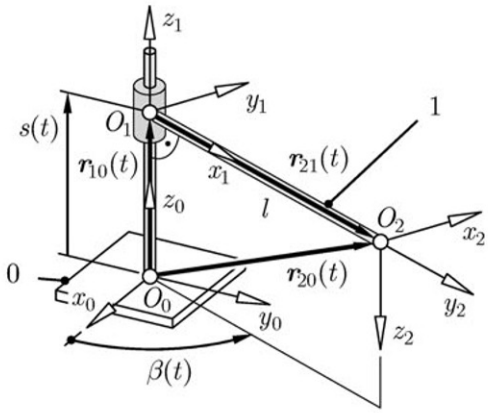


Abb. 3.2 Dreh-Schubbewegung eines starren Körpers

Lage von $\mathcal{K}_2$ Die Koordinatendarstellung des Vektors $\boldsymbol{r}_{20}$ von O_0 nach O_2 im System $\mathcal{K}_0$ lautet gemäß (3.7) ${}^0\boldsymbol{r}_{20} = {}^0\boldsymbol{r}_{10} + {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^1\boldsymbol{r}_{21}$, also

$$
{}^0\boldsymbol{r}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l\cos\beta \\ l\sin\beta \\ s \end{bmatrix}. \tag{3.20}
$$

Die Orientierung des Systems $\mathcal{K}_2$ gegenüber dem System $\mathcal{K}_0$ wird gemäß (3.8) beschrieben durch die Drehmatrix ${}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}$, also

$$
{}^{02}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta & 0 \\ \sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3.21}
$$

Geschwindigkeit von $\mathcal{K}_2$ Da die Achse der Drehbewegung durch den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_{z0}$ gegeben ist, kann die Winkelgeschwindigkeit ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}$ unmittelbar angegeben werden,

$$
{}^0\boldsymbol{\omega}_{10} = \dot{\beta}\,{}^0\boldsymbol{e}_{z0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{bmatrix}. \tag{3.22}
$$

Zum Vergleich können die Koordinaten des schiefsymmetrischen Tensors $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ in $\mathcal{K}_0$ gemäß (3.16) durch ${}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}\,{}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ berechnet werden, also

$$
{}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}\sin\beta & -\dot{\beta}\cos\beta & 0 \\ \dot{\beta}\cos\beta & -\dot{\beta}\sin\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & 0 \\ \dot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.23}
$$

Der Vergleich der Matrizenelemente in (3.23) mit der Koordinatendarstellung des Vektorprodukts nach (3.12) liefert ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10} = \mathrm{vec}({}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10})$ gemäß (3.22).

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{20}$ des Punktes O_2 im System $\mathcal{K}_0$ lautet gemäß (3.13) ${}^0\boldsymbol{v}_{20} = {}^0\boldsymbol{v}_{10} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}_{21}$, also

$$
{}^0\boldsymbol{v}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & 0 \\ \dot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\,\cos\beta \\ l\,\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l\,\dot{\beta}\sin\beta \\ l\,\dot{\beta}\cos\beta \\ \dot{s} \end{bmatrix}. \tag{3.24}
$$

Dasselbe Ergebnis wird auch durch die zeitliche Ableitung des Koordinatenvektors ${}^0\boldsymbol{r}_{20}$ aus (3.20) erhalten.

Beschleunigung von O_2 Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{20}$ des Punktes O_2 im System $\mathcal{K}_0$ ist gemäß (3.19) ${}^0\boldsymbol{a}_{20} = {}^0\boldsymbol{a}_{10} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}_{21} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}_{21}$, also

$$
{}^0\boldsymbol{a}_{20} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{s} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\beta} & 0 \\ \ddot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\,\cos\beta \\ l\,\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & 0 \\ \dot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\beta} & 0 \\ \dot{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\,\cos\beta \\ l\,\sin\beta \\ 0 \end{bmatrix}
$$

bzw.

$$
{}^0\boldsymbol{a}_{20} = \begin{bmatrix} -l\,\ddot{\beta}\,\sin\beta - l\,\dot{\beta}^2\,\cos\beta \\ l\,\ddot{\beta}\,\cos\beta - l\,\dot{\beta}^2\,\sin\beta \\ \ddot{s} \end{bmatrix}. \tag{3.25}
$$

Dasselbe Ergebnis wird auch durch die zeitliche Ableitung des Koordinatenvektors ${}^0\boldsymbol{v}_{20}$ aus (3.24) erhalten.

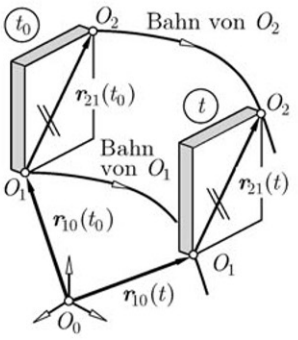
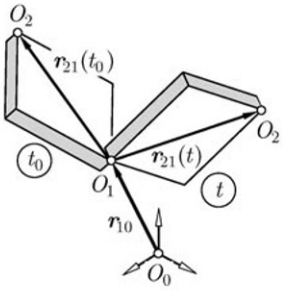
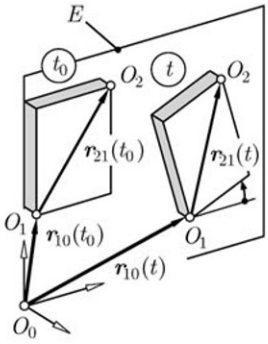
3.1.6 Sonderfälle der allgemeinen Bewegung

Die in Tabelle 3.1 gezeigten drei Sonderfälle der allgemeinen Bewegung eines Körpers im Raum werden häufig betrachtet:

- Ist die Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ zeitlich konstant, so führt der Körper eine reine *Translationsbewegung* aus: Alle Körperpunkte bewegen sich auf Bahnen, die zu der Bahn $\boldsymbol{r}_{10}(t)$ des Punktes O_1 parallel verschoben sind. Körperfeste Vektoren, wie z.B. der Vektor $\boldsymbol{r}_{21}$, ändern ihre Richtung nicht.

- Ist der Körperpunkt O_1 raumfest, so führt der Körper eine *Drehbewegung um den Fixpunkt* O_1 (Fixpunktdrehung) aus: Die Körperpunkte bewegen sich auf den Oberflächen von konzentrischen Kugeln um O_1.
- Bei der *ebenen Bewegung* bewegen sich alle Körperpunkte parallel zu einer Ebene E: Es treten nur Verschiebungen parallel zu E und Drehungen um Achsen senkrecht zu E auf.

Tabelle 3.1 Sonderfälle der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers

Translationsbewegung	Drehbewegung	Ebene Bewegung
		

3.2 Relativbewegungen starrer Körper

Die Bildung zeitlicher Ableitungen von Vektoren erfordert die Angabe des Bezugssystems für die zeitliche Änderung. Dies ist das Koordinatensystem, von dem aus die zeitliche Änderung beobachtet wird. In den Betrachtungen des vorangehenden Abschnitts wurde stets das raumfeste Koordinatensystem $\mathcal{K}_0$ als Bezugssystem zugrunde gelegt. In diesem Abschnitt wird die Zeitableitung von Vektoren relativ zu bewegten Bezugssystemen definiert und die Umrechnung auf ein anderes Bezugssystem hergeleitet. Mit dieser Definition können die kinematischen Größen einer aus zwei Teilbewegungen zusammengesetzten Bewegung berechnet werden.

3.2.1 Relative zeitliche Ableitung von Vektoren

Neben dem raumfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_0$ wird ein weiteres Koordinatensytem $\mathcal{K}_1$ mit $O_0 = O_1$ eingeführt, das sich relativ zu $\mathcal{K}_0$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ dreht. Weiterhin wird ein beliebiger, ebenfalls zeitlich

veränderlicher Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ betrachtet. Die Aufgabe besteht nun darin, die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{r}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ bzw. zu $\mathcal{K}_1$ auszudrücken (Abb. 3.3).

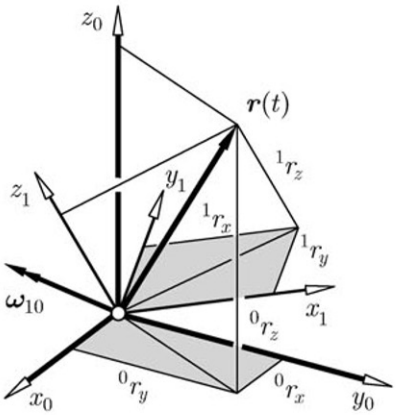


Abb. 3.3 Zeitliche Ableitung eines Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zu den Bezugssystemen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$

Komponentenzerlegung im raumfesten System $\mathcal{K}_0$ Der Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ kann als Linearkombination der raumfesten und damit zeitlich konstanten Einheitsvektoren von $\mathcal{K}_0$ dargestellt werden,

$$\boldsymbol{r}(t) = {}^0r_x(t)\,\boldsymbol{e}_{x0} + {}^0r_y(t)\,\boldsymbol{e}_{y0} + {}^0r_z(t)\,\boldsymbol{e}_{z0}\,. \tag{3.26}$$

Die zeitliche Ableitung von $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ lautet

$$\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,{}^0r_x(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{x0} + \frac{\mathrm{d}\,{}^0r_y(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{y0} + \frac{\mathrm{d}\,{}^0r_z(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{z0}\,. \tag{3.27}$$

In der Schreibweise $\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ kennzeichnet der linke untere Index das Bezugssystem, hier $\mathcal{K}_0$, für die zeitliche Änderung des Vektors $\boldsymbol{r}(t)$.

Komponentenzerlegung im bewegten System $\mathcal{K}_1$ Die Komponentenzerlegung des Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ im System $\mathcal{K}_1$ lautet mit den nun zeitlich veränderlichen Einheitsvektoren

$$\boldsymbol{r}(t) = {}^1r_x(t)\,\boldsymbol{e}_{x1}(t) + {}^1r_y(t)\,\boldsymbol{e}_{y1}(t) + {}^1r_z(t)\,\boldsymbol{e}_{z1}(t)\,. \tag{3.28}$$

Wird wiederum die zeitliche Ableitung des Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ gebildet, so sind die zeitlichen Änderungen der Basisvektoren von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ zu berücksichtigen,

$$\begin{aligned}\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\,{}^1r_x(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{x1}(t) + \frac{\mathrm{d}\,{}^1r_y(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{y1}(t) + \frac{\mathrm{d}\,{}^1r_z(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{z1}(t) + \\ &\quad + {}^1r_x(t)\,\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{x1}(t)}{\mathrm{d}t} + {}^1r_y(t)\,\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{y1}(t)}{\mathrm{d}t} + {}^1r_z(t)\,\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{z1}(t)}{\mathrm{d}t}\,.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Die ersten drei Summanden in (3.29) definieren in Analogie zu (3.27) die zeitliche Änderung des Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$,

$$\frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,{}^1r_x(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{x1}(t) + \frac{\mathrm{d}\,{}^1r_y(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{y1}(t) + \frac{\mathrm{d}\,{}^1r_z(t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{e}_{z1}(t)\,. \tag{3.30}$$

Die zeitlichen Änderungen der Basisvektoren von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ können entsprechend (3.11) mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ ausgedrückt werden,

$$\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{e}_{\alpha1}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv {}_0\dot{\boldsymbol{e}}_{\alpha1}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\boldsymbol{e}_{\alpha1}(t)\,, \qquad \alpha = x, y, z\,. \tag{3.31}$$

Mit (3.30) und (3.31) geht (3.29) über in

$$\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\underbrace{\big({}^1r_x(t)\,\boldsymbol{e}_{x1}(t) + {}^1r_y(t)\,\boldsymbol{e}_{y1}(t) + {}^1r_z(t)\,\boldsymbol{e}_{z1}(t)\big)}_{(3.28):\ \boldsymbol{r}(t)}$$

bzw. zusammengefasst

$$\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\boldsymbol{r}(t)\,. \tag{3.32}$$

Wird in Verbindung mit dem Ableitungspunkt das Bezugssystem für die zeitliche Ableitung durch einen Index links unten gekennzeichnet, also

$${}_0\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,, \qquad {}_1\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t}\,, \tag{3.33}$$

so kann (3.32) auch geschrieben werden als

$${}_0\dot{\boldsymbol{r}}(t) = {}_1\dot{\boldsymbol{r}}(t) + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\boldsymbol{r}(t)\,. \tag{3.34}$$

Die Gleichungen (3.32) bzw. (3.34) beschreiben den Zusammenhang zwischen den zeitlichen Ableitungen eines Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$.

Bei der Berechnung von zeitlichen Ableitungen von Vektoren in verschiedenen Koordinatensystemen sind die folgenden Zusammenhänge zwischen der physikalischen Bedeutung der Vektoren und der jeweiligen Koordinatendarstellung zu beachten:

- Gleichung (3.34) ist eine Vektorgleichung. Die Vektoren können daher in jedem beliebigen Koordinatensystem $\mathcal{K}_i$ dargestellt werden, also

  $${}^i[\,{}_0\dot{\boldsymbol{r}}\,](t) = {}^i[\,{}_1\dot{\boldsymbol{r}}\,](t) + {}^i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,{}^i\boldsymbol{r}(t)\,. \tag{3.35}$$

  Die Klammersetzung drückt aus, dass die durch die Indizes 0 und 1 links unten gekennzeichneten Bezugssysteme für die zeitliche Ableitung des Vektors $\boldsymbol{r}$ Merkmale der physikalischen Vektoren ${}_0\dot{\boldsymbol{r}}$ bzw. ${}_1\dot{\boldsymbol{r}}$ sind.

- Die zeitliche Ableitung der Koordinaten ${}^{i}\boldsymbol{r}(t)$ eines Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ in einem System $\mathcal{K}_i$ liefert die Koordinaten des Vektors ${}_{i}\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ in $\mathcal{K}_i$, also

$$\frac{\mathrm{d}\,{}^{i}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} {}^{i}r_x(t) \\ {}^{i}r_y(t) \\ {}^{i}r_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}^{i}r_x(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}^{i}r_y(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,{}^{i}r_z(t) \end{bmatrix} = {}^{i}[\,{}_{i}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t)\,. \tag{3.36}$$

  Die zeitliche Ableitung eines Koordinatenvektors erfordert keine Angabe eines Bezugssystems, da hier lediglich die drei skalaren Koordinaten abgeleitet werden.
- Werden die Koordinatenvektoren ${}^{0}\boldsymbol{r}(t)$ und ${}^{1}\boldsymbol{r}(t)$ *desselben* Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ in den Systemem $\mathcal{K}_0$ bzw. $\mathcal{K}_1$ nach der Zeit abgeleitet, so werden gemäß (3.36) die Koordinaten ${}^{0}[\,{}_{0}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t)$ bzw. ${}^{1}[\,{}_{1}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t)$ der *verschiedenen* Vektoren ${}_{0}\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ bzw. ${}_{1}\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ erhalten. Sie können mit der Transformationsmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ in das jeweils andere System transformiert werden, also

$${}^{1}[\,{}_{0}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t) = {}^{10}\boldsymbol{T}(t)\;{}^{0}[\,{}_{0}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t) \quad \text{bzw.} \quad {}^{0}[\,{}_{1}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t) = {}^{01}\boldsymbol{T}(t)\;{}^{1}[\,{}_{1}\dot{\boldsymbol{r}}\,](t)\,. \tag{3.37}$$

- Aus (3.34) folgt, dass die zeitlichen Ableitungen des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}(t)$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ übereinstimmen,

$${}_{0}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t) = {}_{1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t) + \underbrace{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,\boldsymbol{\omega}_{10}(t)}_{\mathbf{0}}\,. \tag{3.38}$$

  Sie definieren die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_{10}$ von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$,

$$\boldsymbol{\alpha}_{10}(t) = {}_{0}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t) = {}_{1}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\,. \tag{3.39}$$

Beispiel Der Roboterarm 1 mit dem körperfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ dreht sich um die z_0-Achse des raumfesten Koordinatensystems $\mathcal{K}_0$ (Abb. 3.4). Auf dem Roboterarm bewegt sich die Schiebemuffe 2 parallel zur y_1-Achse. Bei gegebenen zeitlichen Verläufen des Drehwinkels $\varphi(t)$ und der Verschiebung $u(t)$ ist der Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ von O_0 zum Punkt P auf der Schiebemuffe zeitlich veränderlich. Ausgehend von den Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{r}$ in $\mathcal{K}_1$,

$${}^{1}\boldsymbol{r}(t) = \begin{bmatrix} l & u(t) & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.40}$$

sind die zeitlichen Änderungen von $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zu den Systemen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_0$ zu berechnen und jeweils in den Systemen $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_0$ anzugeben.

Die Drehung des Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ wird durch die Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ beschrieben,

$${}^{01}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}. \tag{3.41}$$

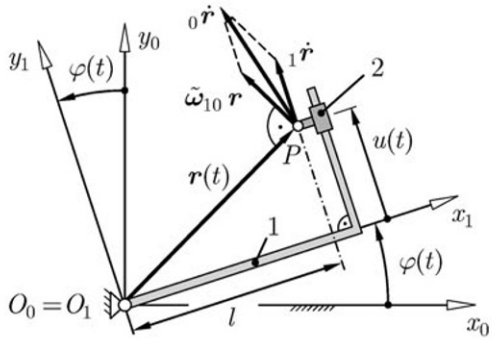


Abb. 3.4 Zeitliche Ableitung des Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zu den Bezugssystemen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$

Unter Verwendung der Beziehungen (3.35), (3.36) und (3.37) können die zeitlichen Änderungen $_1\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ und $_0\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ von $\boldsymbol{r}(t)$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_0$ auf den in Tabelle 3.2 dargestellten Wegen berechnet werden ($\mathrm{s}\varphi \mathrel{\hat{=}} \sin\varphi$, $\mathrm{c}\varphi \mathrel{\hat{=}} \cos\varphi$).

Tabelle 3.2 Berechnung der zeitlichen Ableitungen des Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ gemäß Abb. 3.4

Vektoren	**Darstellungen in $\mathcal{K}_0$**		**Darstellungen in $\mathcal{K}_1$**
Vektor $\boldsymbol{r}$	$^0\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} l\,\mathrm{c}\varphi - u\,\mathrm{s}\varphi \\ l\,\mathrm{s}\varphi + u\,\mathrm{c}\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\xleftarrow{\;^{01}\boldsymbol{T}\;}$	$^1\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} l \\ u \\ 0 \end{bmatrix}$
	$^0[_0\dot{\boldsymbol{r}}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,^0\boldsymbol{r}$		$^1[_1\dot{\boldsymbol{r}}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,^1\boldsymbol{r}$
Vektor $_1\dot{\boldsymbol{r}}$: zeitliche Änderung von $\boldsymbol{r}$ relativ zu $\mathcal{K}_1$	$^0[_1\dot{\boldsymbol{r}}] = \begin{bmatrix} -\dot{u}\,\mathrm{s}\varphi \\ \dot{u}\,\mathrm{c}\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\xleftarrow{\;^{01}\boldsymbol{T}\;}$	$^1[_1\dot{\boldsymbol{r}}] = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{u} \\ 0 \end{bmatrix}$
	$^0[_0\dot{\boldsymbol{r}}] = {}^0[_1\dot{\boldsymbol{r}}] + {}^0\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}$		$^1[_0\dot{\boldsymbol{r}}] = {}^1[_1\dot{\boldsymbol{r}}] + {}^1\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^1\boldsymbol{r}$
Vektor $_0\dot{\boldsymbol{r}}$: zeitliche Änderung von $\boldsymbol{r}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$	$^0[_0\dot{\boldsymbol{r}}] = \begin{bmatrix} -(l\,\mathrm{s}\varphi + u\,\mathrm{c}\varphi)\dot{\varphi} - \dot{u}\,\mathrm{s}\varphi \\ (l\,\mathrm{c}\varphi - u\,\mathrm{s}\varphi)\dot{\varphi} + \dot{u}\,\mathrm{c}\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$	$\xleftarrow{\;^{01}\boldsymbol{T}\;}$	$^1[_0\dot{\boldsymbol{r}}] = \begin{bmatrix} -u\,\dot{\varphi} \\ \dot{u} + l\,\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$

Die unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen der Vektoren $_1\dot{\boldsymbol{r}}$ und $_0\dot{\boldsymbol{r}}$ sind in Abb. 3.4 erkennbar. Der Vektor $_1\dot{\boldsymbol{r}}$ ist die Geschwindigkeit des Punktes P relativ zu $\mathcal{K}_1$, die auf die Schiebegeschwindigkeit $\dot{u}$ zurückgeht. Er zeigt in die Richtung der y_1-Achse. Der Vektor $_0\dot{\boldsymbol{r}}$ ist die Geschwindigkeit des Punktes P relativ zu $\mathcal{K}_0$. Der zu $_1\dot{\boldsymbol{r}}$ hinzukommende Vektor $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,\boldsymbol{r}$ ist die Geschwindigkeit von P auf Grund der Drehung des Roboterarms mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ bei $\dot{u} = 0$. Er steht senkrecht auf dem Vektor $\boldsymbol{r}$.

3.2.2 Zusammensetzung zweier Bewegungen

Eine grundlegende Aufgabenstellung der Kinematik besteht darin, aus der gegebenen Bewegung eines Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ relativ zu einem System $\mathcal{K}_0$ und der gegebenen Bewegung eines Koordinatensystems $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$ die Bewegung des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ zu berechnen (Abb. 3.5). Betrachtet werden jeweils die Lage (L), die Geschwindigkeit (G) und die Beschleunigung (B).

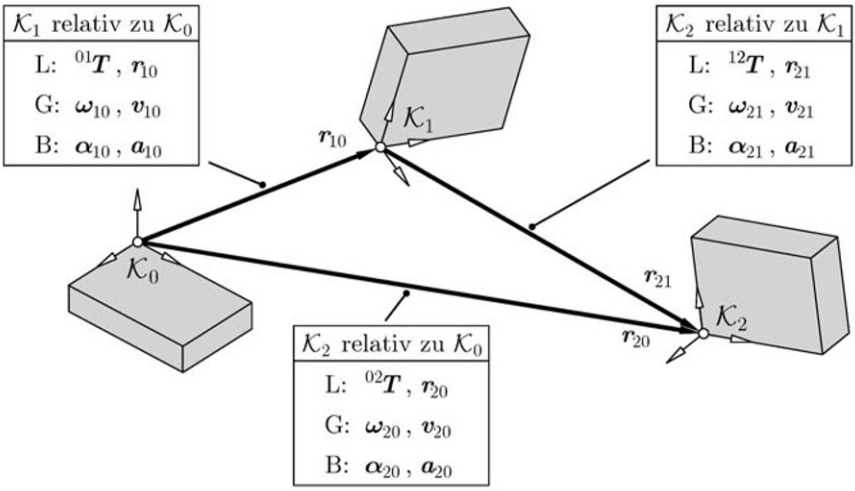


Abb. 3.5 Zusammensetzung der Bewegungen von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ zur Bewegung von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$

Bewegung von System $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$

Lage

Drehmatrix von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$: ${}^{01}\boldsymbol{T}$

Vektor von O_0 nach O_1: $\boldsymbol{r}_{10}$

Geschwindigkeit

Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$: $\boldsymbol{\omega}_{10}$

Geschwindigkeit von O_1 relativ zu $\mathcal{K}_0$: $\boldsymbol{v}_{10} = \dfrac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{10}}{\mathrm{d}t} = {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{10}$

Beschleunigung

Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$: $\boldsymbol{\alpha}_{10} = \dfrac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{10}}{\mathrm{d}t} = {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10}$

Beschleunigung von O_1 relativ zu $\mathcal{K}_0$: $\boldsymbol{a}_{10} = \dfrac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{10}}{\mathrm{d}t} = {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{10}$

Bewegung von System $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$

Lage

Drehmatrix von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_1$: ${}^{12}\boldsymbol{T}$

Vektor von O_1 nach O_2: $\boldsymbol{r}_{21}$

Geschwindigkeit

Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_1$: $\boldsymbol{\omega}_{21}$

Geschwindigkeit von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_1$: $\boldsymbol{v}_{21} = \dfrac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{21}}{\mathrm{d}t} = {}_1\dot{\boldsymbol{r}}_{21}$

Beschleunigung

Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_1$: $\boldsymbol{\alpha}_{21} = \dfrac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t} = {}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$

Beschleunigung von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_1$: $\boldsymbol{a}_{21} = \dfrac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{21}}{\mathrm{d}t} = {}_1\dot{\boldsymbol{v}}_{21}$

Bewegung von System $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$

Lage Die Orientierung des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ wird beschrieben durch die Drehmatrix

$$ {}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,. \tag{3.42}$$

Der Vektor von O_0 nach O_2 lautet gemäß Abb. 3.5

$$ \boldsymbol{r}_{20} = \boldsymbol{r}_{10} + \boldsymbol{r}_{21}\,. \tag{3.43}$$

Geschwindigkeit Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{20}$ von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ kann mit Hilfe der POISSON-Gleichung (3.16) aus der Drehmatrix ${}^{02}\boldsymbol{T}$ aus (3.42) hergeleitet werden. Es gilt

$$ {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{20} = {}^{02}\dot{\boldsymbol{T}}\,{}^{02}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{3.44}$$

mit ${}^{02}\dot{\boldsymbol{T}} = {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}\,{}^{12}\boldsymbol{T} + {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\dot{\boldsymbol{T}}$ und ${}^{02}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \left({}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{T}} = {}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,{}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ und damit

$$ {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{20} = \underbrace{{}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}\;\overbrace{{}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}^{\boldsymbol{E}}\;{}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}_{{}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}} + \underbrace{{}^{01}\boldsymbol{T}\;\overbrace{{}^{12}\dot{\boldsymbol{T}}\,{}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}^{{}^{1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{21}}\;{}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}}_{{}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{21},\ \text{vgl. (2.70)}}\,. $$

Unter Berücksichtigung von (3.17) ergibt sich daraus die in $\mathcal{K}_0$ dargestellte Vektorgleichung ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{20} = {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{10} + {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{21}$. Die Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ ist damit die vektorielle Summe der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Teilbewegungen,

$$ \boldsymbol{\omega}_{20} = \boldsymbol{\omega}_{10} + \boldsymbol{\omega}_{21}\,. \tag{3.45}$$

Dieses Ergebnis wird in Abschnitt 3.5.1 geometrisch interpretiert.

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{20}$ von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$ ist die zeitliche Ableitung des Vektors $\boldsymbol{r}_{20}$ aus (3.43) relativ zu $\mathcal{K}_0$,

$$ {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{20} = {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{10} + {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{v}_{20} = \boldsymbol{v}_{10} + {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21} \,. \tag{3.46} $$

Die Zeitableitung des Vektors $\boldsymbol{r}_{21}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird mit Hilfe von (3.34) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit ${}_1\dot{\boldsymbol{r}}_{21} = \boldsymbol{v}_{21}$ von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_1$ und der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ dargestellt,

$$ {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21} = {}_1\dot{\boldsymbol{r}}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} \qquad \text{bzw.} \qquad {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21} = \boldsymbol{v}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} \,. \tag{3.47} $$

Die Geschwindigkeit von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$ lautet damit

$$ \boldsymbol{v}_{20} = \boldsymbol{v}_{10} + \boldsymbol{v}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} \,. \tag{3.48} $$

Beschleunigung Die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_{20}$ von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ ist die zeitliche Ableitung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{20}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ aus (3.45),

$$ {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{20} = {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{10} + {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{20} = \boldsymbol{\alpha}_{10} + {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \,. \tag{3.49} $$

Die Zeitableitung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{21}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird mit Hilfe von (3.34) durch die Winkelbeschleunigung ${}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} = \boldsymbol{\alpha}_{21}$ von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ dargestellt,

$$ {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} = {}_1\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{\omega}_{21} \qquad \text{bzw.} \qquad {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} = \boldsymbol{\alpha}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{\omega}_{21} \,. \tag{3.50} $$

Die Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ lautet damit

$$ \boldsymbol{\alpha}_{20} = \boldsymbol{\alpha}_{10} + \boldsymbol{\alpha}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{\omega}_{21} \,. \tag{3.51} $$

Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{20}$ von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$ ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{20}$ von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$,

$$ \begin{aligned} {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{20} &= {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{10} + {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{21} + {}_0\dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21} \qquad \text{bzw.} \\ \boldsymbol{a}_{20} &= \boldsymbol{a}_{10} + {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21} \,. \end{aligned} \tag{3.52} $$

Die Zeitableitung der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{21}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird mit Hilfe von (3.34) durch die Beschleunigung ${}_1\dot{\boldsymbol{v}}_{21} = \boldsymbol{a}_{21}$ von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_1$ und die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ dargestellt,

$$ {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{21} = {}_1\dot{\boldsymbol{v}}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{v}_{21} \qquad \text{bzw.} \qquad {}_0\dot{\boldsymbol{v}}_{21} = \boldsymbol{a}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{v}_{21} \,. \tag{3.53} $$

Zusammen mit ${}_0\dot{\boldsymbol{r}}_{21}$ aus (3.47) lautet damit die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{20}$ von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$

$$ \boldsymbol{a}_{20} = \boldsymbol{a}_{10} + \boldsymbol{a}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} + 2\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{v}_{21} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{21} \,. \tag{3.54} $$

In (3.54) treten die EULER-Beschleunigung $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\,\boldsymbol{r}_{21}$, die CORIOLIS-Beschleunigung[2] $2\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,\boldsymbol{v}_{21}$ und die Zentripetalbeschleunigung $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,\boldsymbol{r}_{21}$ auf. Für die Auswertung der vektoriellen Gleichungen (3.43) bis (3.54) in einem Koordinatensystem sind zusätzliche Koordinatentransformationen erforderlich. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

3.2.3 Beispiel zur Zusammensetzung zweier Bewegungen

Der in Abb. 3.6 gezeigte Roboter besitzt die beiden Armsegmente 1 und 2 (körperfeste Koordinatensysteme $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$, Längen l_1, l_2), die durch Drehgelenke (Drehwinkel β_1, β_2) miteinander bzw. mit dem Gestell (raumfestes Koordinatensystem $\mathcal{K}_0$) verbunden sind. Zu einem Zeitpunkt t seien die Drehwinkel β_1, β_2, die Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_1$, $\dot{\beta}_2$ und die Winkelbeschleunigungen $\ddot{\beta}_1$, $\ddot{\beta}_2$ gegeben. Gesucht sind die Größen der Bewegungen des Systems $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$, des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ und des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$. Alle Vektoren sollen im System $\mathcal{K}_0$ dargestellt werden. Dieser Berechnungsvorgang wird auch als *Vorwärtskinematik* bezeichnet.

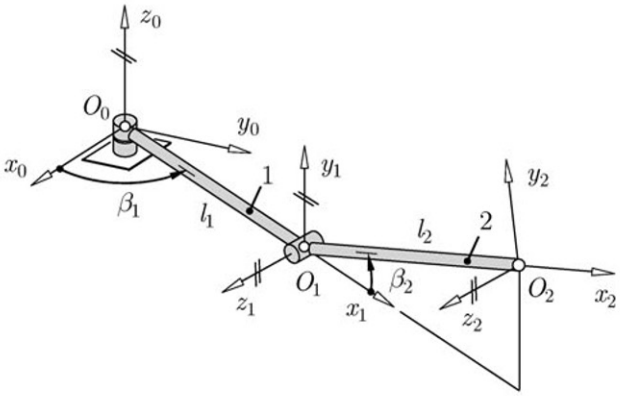


Abb. 3.6 Roboter mit zwei Armsegmenten

Bewegung von System $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$

Lage ($\mathrm{s}\beta \mathrel{\hat{=}} \sin\beta$, $\mathrm{c}\beta \mathrel{\hat{=}} \cos\beta$)

$$
{}^{01}\boldsymbol{T} = \left[\ {}^{0}\boldsymbol{e}_{x1}\ \ {}^{0}\boldsymbol{e}_{y1}\ \ {}^{0}\boldsymbol{e}_{z1}\ \right] = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1 & 0 & \mathrm{s}\beta_1 \\ \mathrm{s}\beta_1 & 0 & -\mathrm{c}\beta_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.55}
$$

$$
{}^{0}\boldsymbol{r}_{10} = l_1 \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1 \\ \mathrm{s}\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.56}
$$

[2] GASPARD GUSTAVE DE CORIOLIS, *1792 in Paris, †1843 in Paris

Geschwindigkeit

$$ {}^0\boldsymbol{\omega}_{10} = \dot{\beta}_1\, {}^0\boldsymbol{e}_{z0} \qquad \rightarrow \qquad {}^0\boldsymbol{\omega}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_1 \end{bmatrix}, \tag{3.57} $$

$$ {}^0\boldsymbol{v}_{10} = {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}^0\boldsymbol{r}_{10} \qquad \rightarrow \qquad {}^0\boldsymbol{v}_{10} = l_1 \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_1\, \dot{\beta}_1 \\ \mathrm{c}\beta_1\, \dot{\beta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^0\boldsymbol{r}_{10}}{\mathrm{d}t} \right). \tag{3.58} $$

Beschleunigung

$$ {}^0\boldsymbol{\alpha}_{10} = \ddot{\beta}_1\, {}^0\boldsymbol{e}_{z0} \qquad \rightarrow \qquad {}^0\boldsymbol{\alpha}_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_1 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^0\boldsymbol{\omega}_{10}}{\mathrm{d}t} \right), \tag{3.59} $$

$$ {}^1\boldsymbol{a}_{10} = {}^0\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\, {}^0\boldsymbol{r}_{10} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}^0\boldsymbol{r}_{10} $$

$$ \rightarrow \qquad {}^0\boldsymbol{a}_{10} = l_1 \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_1\, \ddot{\beta}_1 - \mathrm{c}\beta_1\, \dot{\beta}_1^2 \\ \mathrm{c}\beta_1\, \ddot{\beta}_1 - \mathrm{s}\beta_1\, \dot{\beta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^0\boldsymbol{v}_{10}}{\mathrm{d}t} \right). \tag{3.60} $$

Bewegung von System $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$

Lage

$$ {}^{12}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}^1\boldsymbol{e}_{x2} & {}^1\boldsymbol{e}_{y2} & {}^1\boldsymbol{e}_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_2 & -\mathrm{s}\beta_2 & 0 \\ \mathrm{s}\beta_2 & \mathrm{c}\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.61} $$

$$ {}^1\boldsymbol{r}_{21} = l_2 \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_2 \\ \mathrm{s}\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.62} $$

Geschwindigkeit

$$ {}^1\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\beta}_2\, {}^1\boldsymbol{e}_{z1} \qquad \rightarrow \qquad {}^1\boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix}, \tag{3.63} $$

$$ {}^1\boldsymbol{v}_{21} = {}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{21}\, {}^1\boldsymbol{r}_{21} \qquad \rightarrow \qquad {}^1\boldsymbol{v}_{21} = l_2 \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_2\, \dot{\beta}_2 \\ \mathrm{c}\beta_2\, \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^1\boldsymbol{r}_{21}}{\mathrm{d}t} \right). \tag{3.64} $$

Beschleunigung

$$
{}^1\boldsymbol{\alpha}_{21} = \ddot{\beta}_2\, {}^1\boldsymbol{e}_{z1} \qquad \rightarrow \qquad {}^1\boldsymbol{\alpha}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^1\boldsymbol{\omega}_{21}}{\mathrm{d}t} \right), \tag{3.65}
$$

$$
{}^1\boldsymbol{a}_{21} = {}^1\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{21}\, {}^1\boldsymbol{r}_{21} + {}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{21}\, {}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{21}\, {}^1\boldsymbol{r}_{21}
$$

$$
\rightarrow \qquad {}^1\boldsymbol{a}_{21} = l_2 \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_2\, \ddot{\beta}_2 - \mathrm{c}\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \\ \mathrm{c}\beta_2\, \ddot{\beta}_2 - \mathrm{s}\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^1\boldsymbol{v}_{21}}{\mathrm{d}t} \right). \tag{3.66}
$$

Resultierende Bewegung von System $\mathcal{K}_2$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$

Lage Die Drehmatrix des Systems $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ lautet gemäß (3.42) ${}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\, {}^{12}\boldsymbol{T}$ mit ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.55) und ${}^{12}\boldsymbol{T}$ aus (3.61)

$$
{}^{02}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\, \mathrm{c}\beta_2 & -\mathrm{c}\beta_1\, \mathrm{s}\beta_2 & \mathrm{s}\beta_1 \\ \mathrm{s}\beta_1\, \mathrm{c}\beta_2 & -\mathrm{s}\beta_1\, \mathrm{s}\beta_2 & -\mathrm{c}\beta_1 \\ \mathrm{s}\beta_2 & \mathrm{c}\beta_2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.67}
$$

Der Vektor von O_0 nach O_2 wird gemäß (3.43) im System $\mathcal{K}_0$ berechnet, ${}^0\boldsymbol{r}_{20} = {}^0\boldsymbol{r}_{10} + {}^0\boldsymbol{r}_{21}$. Mit ${}^0\boldsymbol{r}_{10}$ aus (3.56) und

$$
{}^0\boldsymbol{r}_{21} = {}^{01}\boldsymbol{T}\, {}^1\boldsymbol{r}_{21} = l_2 \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\, \mathrm{c}\beta_2 \\ \mathrm{s}\beta_1\, \mathrm{c}\beta_2 \\ \mathrm{s}\beta_2 \end{bmatrix} \tag{3.68}
$$

lautet er

$$
{}^0\boldsymbol{r}_{20} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1 (l_1 + l_2\, \mathrm{c}\beta_2) \\ \mathrm{s}\beta_1 (l_1 + l_2\, \mathrm{c}\beta_2) \\ l_2\, \mathrm{s}\beta_2 \end{bmatrix}. \tag{3.69}
$$

Geschwindigkeit Die Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ lautet im System $\mathcal{K}_0$ gemäß (3.45) ${}^0\boldsymbol{\omega}_{20} = {}^0\boldsymbol{\omega}_{10} + {}^0\boldsymbol{\omega}_{21}$. Mit ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}$ aus (3.57) und

$$
{}^0\boldsymbol{\omega}_{21} = {}^{01}\boldsymbol{T}\, {}^1\boldsymbol{\omega}_{21} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}\beta_1\, \dot{\beta}_2 \\ -\mathrm{c}\beta_1\, \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.70}
$$

ist

$$
{}^0\boldsymbol{\omega}_{20} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}\beta_1\, \dot{\beta}_2 \\ -\mathrm{c}\beta_1\, \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_1 \end{bmatrix}. \tag{3.71}
$$

Die Geschwindigkeit von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird mit Hilfe von (3.48) im System $\mathcal{K}_0$ berechnet, ${}^0\boldsymbol{v}_{20} = {}^0\boldsymbol{v}_{10} + {}^0\boldsymbol{v}_{21} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}_{21}$. Mit ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}$ aus (3.57), ${}^0\boldsymbol{v}_{10}$ aus (3.58) und

$$
{}^0\boldsymbol{v}_{21} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^1\boldsymbol{v}_{21} = \begin{bmatrix} -\mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 \\ -\mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 \\ \mathrm{c}\beta_2 \end{bmatrix} l_2\,\dot{\beta}_2 \tag{3.72}
$$

lautet sie

$$
{}^0\boldsymbol{v}_{20} = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_1\,(l_1 + l_2\,\mathrm{c}\beta_2)\,\dot{\beta}_1 - l_2\,\mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2\,\dot{\beta}_2 \\ \mathrm{c}\beta_1\,(l_1 + l_2\,\mathrm{c}\beta_2)\,\dot{\beta}_1 - l_2\,\mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2\,\dot{\beta}_2 \\ l_2\,\mathrm{c}\beta_2\,\dot{\beta}_2 \end{bmatrix}. \tag{3.73}
$$

Dasselbe Ergebnis wird durch die zeitliche Ableitung der Vektorkoordinaten ${}^0\boldsymbol{r}_{20}$ aus (3.69) erhalten.

Beschleunigung Die Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ lautet im System $\mathcal{K}_0$ gemäß (3.51) ${}^0\boldsymbol{\alpha}_{20} = {}^0\boldsymbol{\alpha}_{10} + {}^0\boldsymbol{\alpha}_{21} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{\omega}_{21}$. Mit ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}$ aus (3.57), ${}^0\boldsymbol{\omega}_{21}$ aus (3.70) und

$$
{}^0\boldsymbol{\alpha}_{21} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^1\boldsymbol{\alpha}_{21} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}\beta_1\,\ddot{\beta}_2 \\ -\mathrm{c}\beta_1\,\ddot{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.74}
$$

ist

$$
{}^0\boldsymbol{\alpha}_{20} = \begin{bmatrix} \mathrm{s}\beta_1\,\ddot{\beta}_2 + \mathrm{c}\beta_1\,\dot{\beta}_1\,\dot{\beta}_2 \\ -\mathrm{c}\beta_1\,\ddot{\beta}_2 + \mathrm{s}\beta_1\,\dot{\beta}_1\,\dot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_1 \end{bmatrix} \left(= \frac{\mathrm{d}^0\boldsymbol{\omega}_{20}}{\mathrm{d}t} \right). \tag{3.75}
$$

Dasselbe Ergebnis wird durch die zeitliche Ableitung der Vektorkoordinaten ${}^0\boldsymbol{\omega}_{20}$ aus (3.71) erhalten.

Die Beschleunigung von O_2 relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird gemäß (3.54) im System $\mathcal{K}_0$ berechnet, ${}^0\boldsymbol{a}_{20} = {}^0\boldsymbol{a}_{10} + {}^0\boldsymbol{a}_{21} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}_{21} + 2\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{v}_{21} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,{}^0\boldsymbol{r}_{21}$. Mit ${}^0\boldsymbol{a}_{10}$ aus (3.60), ${}^0\boldsymbol{\alpha}_{10}$ aus (3.59), ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}$ aus (3.57), ${}^0\boldsymbol{v}_{21}$ aus (3.72) und

$$
{}^0\boldsymbol{a}_{21} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^1\boldsymbol{a}_{21} = \begin{bmatrix} -\mathrm{c}\beta_1\,(\,\mathrm{s}\beta_2\,\ddot{\beta}_2 + \mathrm{c}\beta_2\,\dot{\beta}_2^2\,) \\ -\mathrm{s}\beta_1\,(\,\mathrm{s}\beta_2\,\ddot{\beta}_2 + \mathrm{c}\beta_2\,\dot{\beta}_2^2\,) \\ \mathrm{c}\beta_2\,\ddot{\beta}_2 - \mathrm{s}\beta_2\,\dot{\beta}_2^2 \end{bmatrix} l_2 \tag{3.76}
$$

lautet sie (Abkürzung $l_{12} = l_1 + l_2\,\mathrm{c}\beta_2$)

$$
{}^{0}\boldsymbol{a}_{20} = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_1\, l_{12}\, \ddot{\beta}_1 - l_2\, \mathrm{c}\beta_1\, \mathrm{s}\beta_2\, \ddot{\beta}_2 \\ \mathrm{c}\beta_1\, l_{12}\, \ddot{\beta}_1 - l_2\, \mathrm{s}\beta_1\, \mathrm{s}\beta_2\, \ddot{\beta}_2 \\ l_2\, \mathrm{c}\beta_2\, \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} +
$$

$$
+ \begin{bmatrix} -\mathrm{c}\beta_1\, l_{12}\, \dot{\beta}_1^2 + 2\, l_2\, \mathrm{s}\beta_1\, \mathrm{s}\beta_2\, \dot{\beta}_1\, \dot{\beta}_2 - l_2\, \mathrm{c}\beta_1\, \mathrm{c}\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \\ -\mathrm{s}\beta_1\, l_{12}\, \dot{\beta}_1^2 - 2\, l_2\, \mathrm{c}\beta_1\, \mathrm{s}\beta_2\, \dot{\beta}_1\, \dot{\beta}_2 - l_2\, \mathrm{s}\beta_1\, \mathrm{c}\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \\ -l_2\, \mathrm{s}\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \end{bmatrix} . \tag{3.77}
$$

Dasselbe Ergebnis wird durch die zeitliche Ableitung der Vektorkoordinaten ${}^{0}\boldsymbol{v}_{20}$ aus (3.73) erhalten.

3.2.4 Umgekehrte Relativbewegung

In Mehrkörpersystemen kann es erforderlich sein, aus den gegebenen Größen der Bewegung eines Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ die Größen der Bewegung des Koordinatensystems $\mathcal{K}_0$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$ zu berechnen (Abb. 3.7). Diese Aufgabenstellung ist ein Sonderfall der Zusammensetzung zweier Bewegungen gemäß Abb. 3.5, wenn die Koordinatensysteme $\mathcal{K}_2$ und $\mathcal{K}_0$ übereinstimmen. Damit ist in den Beziehungen (3.42) bis (3.54) lediglich der Index 2 gleich 0 zu setzen.

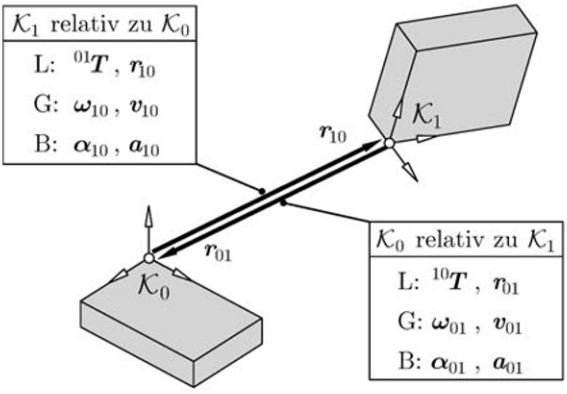


Abb. 3.7 Umgekehrte Relativbewegung

Lage Die Drehmatrix ${}^{10}\boldsymbol{T}$ der Orientierung des Systems $\mathcal{K}_0$ relativ zum System $\mathcal{K}_1$ ergibt sich aus (3.42) mit ${}^{00}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}$,

$$
{}^{10}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} . \tag{3.78}
$$

Der Vektor von O_1 nach O_0 ergibt sich aus (3.43) mit $\boldsymbol{r}_{00} = \boldsymbol{0}$,

$$
\boldsymbol{r}_{01} = -\boldsymbol{r}_{10} . \tag{3.79}
$$

Geschwindigkeit Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{01}$ von $\mathcal{K}_0$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ ergibt sich aus (3.45) unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{\omega}_{00} = \mathbf{0}$,

$$\boldsymbol{\omega}_{01} = -\boldsymbol{\omega}_{10} \,. \tag{3.80}$$

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{01}$ von O_0 relativ zu $\mathcal{K}_1$ folgt aus (3.48) mit $\boldsymbol{v}_{00} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{01}$ aus (3.80) und $\boldsymbol{r}_{01}$ aus (3.79),

$$\boldsymbol{v}_{01} = -\boldsymbol{v}_{10} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{10} \,. \tag{3.81}$$

Beschleunigung Die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_{01}$ von $\mathcal{K}_0$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ ergibt sich aus (3.51) mit $\boldsymbol{\alpha}_{00} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{01}$ aus (3.80) und $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{\omega}_{01} = \mathbf{0}$,

$$\boldsymbol{\alpha}_{01} = -\boldsymbol{\alpha}_{10} \,. \tag{3.82}$$

Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{01}$ von O_0 relativ zu $\mathcal{K}_1$ folgt aus (3.54) mit $\boldsymbol{a}_{00} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_{01}$ aus (3.82), $\boldsymbol{v}_{01}$ aus (3.81), $\boldsymbol{\omega}_{01}$ aus (3.80) und $\boldsymbol{r}_{01}$ aus (3.79),

$$\boldsymbol{a}_{01} = -\boldsymbol{a}_{10} + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{10} + 2\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{v}_{10} - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, \boldsymbol{r}_{10} \,. \tag{3.83}$$

Beispiel Der Roboter aus Abb. 3.6 befindet sich zu einem betrachteten Zeitpunkt in der Lage $\beta_1 = \beta_2 = 90°$ und besitzt die Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\beta}_1$ und $\dot{\beta}_2$ und Gelenkbbeschleunigungen $\ddot{\beta}_1 = \ddot{\beta}_2 = 0$. Im Koordinatensystem $\mathcal{K}_2$ befindet sich ein Sensor, der die Geschwindigkeit und die Beschleunigungen von Punkten in den drei Richtungen x_2, y_2, z_2 misst.

Gesucht sind die gemessene Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{32}$ und die gemessene Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{32}$ eines Punktes O_3 relativ zu $\mathcal{K}_2$, der sich im Abstand u von O_1 mit der Geschwindigkeit $\dot{u}$ und der Beschleunigung $\ddot{u}$ auf der negativen y_0-Achse bewegt.

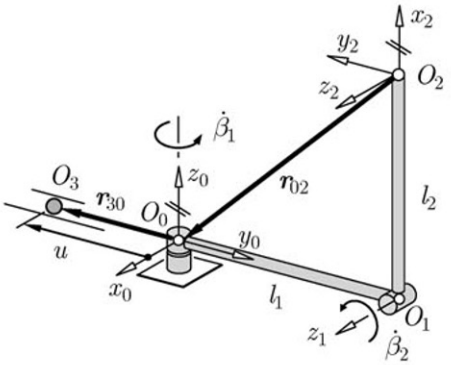


Abb. 3.8 Bewegung des Punktes O_3 relativ zum Bezugssystem $\mathcal{K}_2$

Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{32}$ und die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{32}$ von O_3 relativ zu $\mathcal{K}_2$ werden aus der Bewegung von O_3 relativ zu $\mathcal{K}_0$ und der Bewegung von $\mathcal{K}_0$ relativ zu $\mathcal{K}_2$ entsprechend (3.43), (3.48) und (3.54) berechnet,

$$\boldsymbol{r}_{32} = \boldsymbol{r}_{02} + \boldsymbol{r}_{30} \,, \tag{3.84}$$

$$\boldsymbol{v}_{32} = \boldsymbol{v}_{02} + \boldsymbol{v}_{30} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\, \boldsymbol{r}_{30} \,, \tag{3.85}$$

$$\boldsymbol{a}_{32} = \boldsymbol{a}_{02} + \boldsymbol{a}_{30} + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{02}\, \boldsymbol{r}_{30} + 2\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\, \boldsymbol{v}_{30} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{02}\, \boldsymbol{r}_{30} \,. \tag{3.86}$$

Die Größen der Bewegung von $\mathcal{K}_0$ relativ zu $\mathcal{K}_2$ werden aus den vorliegenden Größen der Bewegung von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ mit Hilfe der Umkehrgleichungen (3.78) bis (3.83) berechnet.

Die Lage von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird durch ${}^{20}\boldsymbol{T} = {}^{02}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ gemäß (3.78) und ${}^{0}\boldsymbol{r}_{02} = -{}^{0}\boldsymbol{r}_{20}$ gemäß (3.79) beschrieben,

$${}^{20}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{r}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_1 \\ -l_2 \end{bmatrix}. \tag{3.87}$$

Die Geschwindigkeit von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ lautet ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{02} = -{}^{0}\boldsymbol{\omega}_{20}$ gemäß (3.80) und ${}^{0}\boldsymbol{v}_{02} = -{}^{0}\boldsymbol{v}_{20} + {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{20}\, {}^{0}\boldsymbol{r}_{20}$ gemäß (3.81),

$${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{02} = -\begin{bmatrix} \dot{\beta}_2 \\ 0 \\ \dot{\beta}_1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{v}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1\, \dot{\beta}_2 \end{bmatrix}. \tag{3.88}$$

Die Beschleunigung von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ wird mit ${}^{0}\boldsymbol{\alpha}_{02} = -{}^{0}\boldsymbol{\alpha}_{20}$ gemäß (3.82) und ${}^{0}\boldsymbol{a}_{02} = -{}^{0}\boldsymbol{a}_{20} + {}^{0}\,\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{20}\, {}^{0}\boldsymbol{r}_{20} + 2\, {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{20}\, {}^{0}\boldsymbol{v}_{20} - {}^{0}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{20}\, {}^{0}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{20}\, {}^{0}\boldsymbol{r}_{20}$ gemäß (3.83) berechnet,

$${}^{0}\boldsymbol{\alpha}_{02} = -\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta}_1\, \dot{\beta}_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{a}_{02} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\, \dot{\beta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.89}$$

Zusammen mit den Größen der Bewegung von O_3 relativ zu $\mathcal{K}_0$,

$${}^{0}\boldsymbol{r}_{30} = \begin{bmatrix} 0 \\ -u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{v}_{30} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{u} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{a}_{30} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ddot{u} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.90}$$

werden die Größen der Bewegung von O_3 relativ zu $\mathcal{K}_2$ mit Hilfe von (3.84), (3.85) und (3.86) berechnet, wobei die Vektoren mit Hilfe der Transformationsmatrix ${}^{20}\boldsymbol{T}$ aus (3.87) im System $\mathcal{K}_2$ dargestellt werden,

$$\begin{aligned} {}^{2}\boldsymbol{r}_{32} &= \begin{bmatrix} -l_2 \\ l_1 + u \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^{2}\boldsymbol{v}_{32} = \begin{bmatrix} (\, l_1 + u)\, \dot{\beta}_2 \\ \dot{u} \\ -u\, \dot{\beta}_1 \end{bmatrix}, \\ {}^{2}\boldsymbol{a}_{32} &= \begin{bmatrix} 2\, \dot{u}\, \dot{\beta}_2 \\ \ddot{u} - (\, l_1 + u)\, \dot{\beta}_2^2 - u\, \dot{\beta}_1^2 \\ -2\, \dot{u}\, \dot{\beta}_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.91}$$

3.3 Drehzeiger und Drehtensor

In Abschnitt 3.1.2 wurde die Drehung eines starren Körpers durch die zeitlich veränderliche Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ gemäß (3.2) beschrieben. Geometrisch kennzeichnet ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ die Richtungen der Achsen des gedrehten, körperfesten Systems $\mathcal{K}_1$ relativ zum Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$.

Eine andere geometrische Beschreibung der Drehung ist der auf EULER zurückgehende Drehzeiger, der das Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ durch eine einzige Drehung in die Endlage $\mathcal{K}_1$ überführt. Die Drehmatrix repräsentiert bei dieser Betrachtung die Koordinaten eines Drehtensors. Aus dem Drehzeiger werden in Abschnitt 3.7 die EULER-Parameter als Koordinaten der Drehung abgeleitet. Die verschiedenen Darstellungen von Drehungen werden von ALTMANN [1] umfassend behandelt.

3.3.1 Drehzeiger

Betrachtet wird in Abb. 3.9 die Drehung eines Körpers mit dem körperfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ um den Fixpunkt O relativ zu einer Ausgangslage $\mathcal{K}_0$, vgl. Tabelle 3.1. Ein beliebiger körperfester Vektor, entsprechend dem Vektor $\boldsymbol{r}_{21}$ in Abb. 3.1, hat dann die zeitlich konstante Ausgangslage $\boldsymbol{r}_0$ und die zeitlich veränderliche, gedrehte Lage $\boldsymbol{r}(t)$.

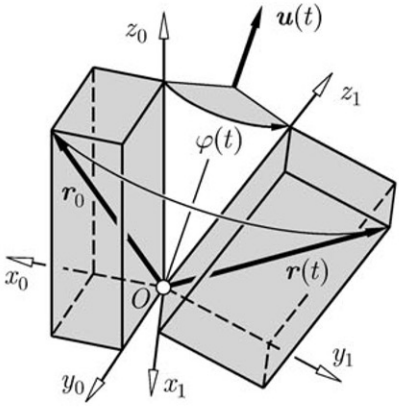


Abb. 3.9 Drehung eines Vektors von der Ausgangslage $\boldsymbol{r}_0$ in die Lage $\boldsymbol{r}(t)$ mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))$

Es gilt nun der *Satz von Euler für die Fixpunktdrehung*: Der Übergang eines körperfesten Vektors von der Ausgangslage $\boldsymbol{r}_0$ in die gedrehte Lage $\boldsymbol{r}(t)$ kann durch eine einzige Drehung um eine Achse durch den Fixpunkt O mit dem normierten Richtungsvektor $\boldsymbol{u}$ und dem darauf, gemäß der Rechtsschraubenregel, bezogenen Drehwinkel φ beschrieben werden. Entsprechend werden durch diese Drehung die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{x0}$, $\boldsymbol{e}_{y0}$, $\boldsymbol{e}_{z0}$ des Koordinatensystems $\mathcal{K}_0$ in die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{x1}(t)$, $\boldsymbol{e}_{y1}(t)$, $\boldsymbol{e}_{z1}(t)$ des Koordinatensy-

stems $\mathcal{K}_1$ überführt. Das Paar der Größen $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ wird im Folgenden in Anlehnung an HILLER [37] als der *Drehzeiger* der Drehung bezeichnet. Bei einer Drehung ändern sich i. Allg. sowohl $\boldsymbol{u}$ als auch φ über der Zeit: Zu jedem Zeitpunkt t gibt es einen Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))$, der den Übergang des Ausgangsvektors $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ beschreibt.

3.3.2 Drehtensor

Die Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ mit dem zeitlich veränderlichen Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))$ kann durch eine Vektorabbildung gemäß (2.56) mit Hilfe des *Drehtensors* $\boldsymbol{R}(t)$ formuliert werden,

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))\,. \tag{3.92}$$

Um den Drehtensor $\boldsymbol{R}$ durch den Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ auszudrücken, wird der gedrehte Vektor $\boldsymbol{r}$ gemäß Abb. 3.10 durch die Linearkombination der drei senkrecht aufeinander stehenden Hilfs-Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ mit den Linearfaktoren c_1, c_2, c_3 dargestellt,

$$\boldsymbol{r} = c_1\,\boldsymbol{e}_1 + c_2\,\boldsymbol{e}_2 + c_3\,\boldsymbol{e}_3\,. \tag{3.93}$$

Die Einheitsvektoren und die Linearfaktoren lauten

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_0)}{r\,\sin\delta}\,, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{r}_0}{r\,\sin\delta}\,, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}\,, \tag{3.94}$$

$$c_1 = r\,\sin\delta\,\cos\varphi\,, \qquad c_2 = r\,\sin\delta\,\sin\varphi\,, \qquad c_3 = r\cos\delta \tag{3.95}$$

mit dem konstanten Betrag $r = |\boldsymbol{r}_0| = |\boldsymbol{r}|$ und dem Winkel δ zwischen $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{r}_0$ bzw. $\boldsymbol{r}$.

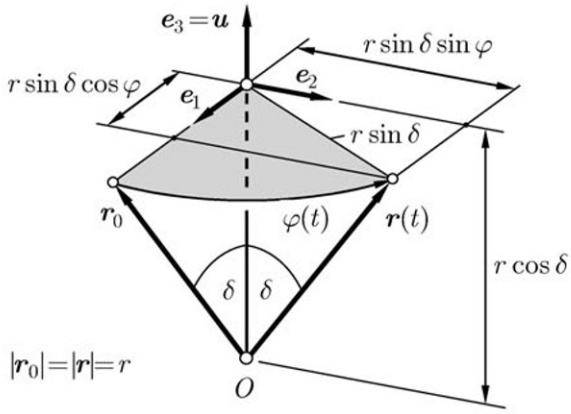


Abb. 3.10 Berechnung des gedrehten Vektors $\boldsymbol{r}(t)$ aus dem Ausgangsvektor $\boldsymbol{r}_0$ und dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$

Die Auswertung von (3.93) mit (3.94) und (3.95) ergibt

$$\boldsymbol{r} = \cos\varphi\,\boldsymbol{r}_0 + \sin\varphi\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{r}_0 + (1-\cos\varphi)\,\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{r}_0)\,. \tag{3.96}$$

Um daraus die Vektorabbildung (3.92) zu erhalten, wird der Vektor $\boldsymbol{r}_0$ nach rechts herausgelöst. Mit Hilfe des Einheitstensors $\boldsymbol{E}$, des Tensors $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ zum Vektorprodukt gemäß (2.59) und des Zusammenhangs $\boldsymbol{u}\,(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}_0) = (\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\,\boldsymbol{r}_0$ aus (2.26) geht (3.96) in die Form (3.92) über mit dem Drehtensor

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{E} + \sin\varphi\,\widetilde{\boldsymbol{u}} + (1-\cos\varphi)\,\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\,. \tag{3.97}$$

Mit der Umformung $\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} = \widetilde{\boldsymbol{u}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\,\boldsymbol{E}$ gemäß (2.34) und $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} = 1$ kann der Drehtensor aus (3.97) auch geschrieben werden in der Form

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\varphi) = \boldsymbol{E} + \sin\varphi\,\widetilde{\boldsymbol{u}} + (1-\cos\varphi)\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\,. \tag{3.98}$$

Die Vektordrehung (3.92) mit dem Drehtensor aus (3.97) bzw. (3.98) ist auch als die RODRIGUES-Gleichung für die Drehbewegung bekannt.

Die Vektordrehung (3.92) kann in jedem beliebigen Koordinatensystem ausgewertet werden. Im System $\mathcal{K}_0$ lautet sie

$${}^0\boldsymbol{r}(t) = {}^0\boldsymbol{R}(t)\,{}^0\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{mit} \qquad {}^0\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}(t),\varphi(t))\,. \tag{3.99}$$

Mit den Achsvektorkoordinaten ${}^0\boldsymbol{u} = {}^0[\,u_x\;\;u_y\;\;u_z\,]^{\mathrm{T}}$ wird die (3,3)-Koordinatenmatrix des Drehtensors mit Hilfe von (3.97) oder (3.98) berechnet,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u},\varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{E} + \sin\varphi\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{u}} + (1-\cos\varphi)\,{}^0\boldsymbol{u}\,{}^0\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \qquad \text{bzw.}\\ &\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u},\varphi) = \boldsymbol{E} + \sin\varphi\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{u}} + (1-\cos\varphi)\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{u}}\,{}^0\widetilde{\boldsymbol{u}}\,. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Die Auswertung von (3.100) liefert mit den Abkürzungen $\mathrm{s}\varphi \hat{=} \sin\varphi$, $\mathrm{c}\varphi \hat{=} \cos\varphi$ und $k = 1-\cos\varphi$

$$\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u},\varphi) = {}^0\begin{bmatrix} \mathrm{c}\varphi + k\,u_x^2 & k\,u_x\,u_y - \mathrm{s}\varphi\,u_z & k\,u_x\,u_z + \mathrm{s}\varphi\,u_y \\ k\,u_x\,u_y + \mathrm{s}\varphi\,u_z & \mathrm{c}\varphi + k\,u_y^2 & k\,u_y\,u_z - \mathrm{s}\varphi\,u_x \\ k\,u_x\,u_z - \mathrm{s}\varphi\,u_y & k\,u_y\,u_z + \mathrm{s}\varphi\,u_x & \mathrm{c}\varphi + k\,u_z^2 \end{bmatrix}. \tag{3.101}$$

Der Drehtensor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\varphi)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Die Drehzeiger $(\boldsymbol{u},\varphi)$ und $(-\boldsymbol{u},-\varphi)$ beschreiben dieselbe Drehung, also

  $$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\varphi) = \boldsymbol{R}(-\boldsymbol{u},-\varphi)\,. \tag{3.102}$$

  Um diese Mehrdeutigkeit zu umgehen, ist es sinnvoll, den Drehzeiger stets so anzugeben, dass $0 < \varphi < \pi$ ist.
- Der Drehtensor $\boldsymbol{R}$ ist orthogonal, d.h. es ist $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}$. Diese Eigenschaft ergibt sich aus der Bedingung $|\boldsymbol{r}| \overset{!}{=} |\boldsymbol{r}_0|$ zusammen mit (3.92)

  $$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{r}_0 \overset{!}{=} \boldsymbol{r}_0^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{r}_0 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{E}\,. \tag{3.103}$$

- Zum inversen Drehtensor $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ gehören die beiden gleichwertigen Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, -\varphi)$ und $(-\boldsymbol{u}, \varphi)$, welche die Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}$ in den Vektor $\boldsymbol{r}_0$ beschreiben. Damit gilt

$$\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, -\varphi)\, \boldsymbol{r} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, -\varphi) \equiv \boldsymbol{R}(-\boldsymbol{u}, \varphi) = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}, \varphi)\,. \tag{3.104}$$

- Der Drehachsvektor $\boldsymbol{u}$ ist unter der Drehung invariant,

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \varphi)\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\,. \tag{3.105}$$

Um aus einer gegebenen Koordinatenmatrix des Drehtensors den Drehzeiger zu berechnen, ist es empfehlenswert, zuerst die aus dem Drehzeiger abgeleiteten EULER-Parameter gemäß Abschnitt 3.7.2 zu berechnen und daraus den Drehzeiger zu bestimmen. Ein Beispiel wird in Abschnitt 3.9.1 gezeigt.

3.3.3 Passive und aktive Betrachtung der Drehung

In (3.6) wurde die Drehung des Körpers durch die Transformation der Koordinaten eines körperfesten Vektors mit Hilfe der Transformationsmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ gemäß (3.2) vom gedrehten System $\mathcal{K}_1$ in das Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ berechnet, also

$${}^{0}\boldsymbol{r}(t) = {}^{01}\boldsymbol{T}(t)\, {}^{1}\boldsymbol{r} \qquad \text{mit} \qquad {}^{01}\boldsymbol{T} = \left[\, {}^{0}\boldsymbol{e}_{x1} \;\; {}^{0}\boldsymbol{e}_{y1} \;\; {}^{0}\boldsymbol{e}_{z1} \,\right]. \tag{3.106}$$

Die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{r}$ im mitgedrehten System $\mathcal{K}_1$ stimmen mit den Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ überein, da Vektor und Koordinatensystem dieselbe Drehung erfahren, also

$${}^{0}\boldsymbol{r}_0 = {}^{1}\boldsymbol{r}\,. \tag{3.107}$$

Der Vergleich der Koordinatentransformation (3.106) mit der in $\mathcal{K}_0$ formulierten Vektorabbildung (3.99) zeigt, dass die als Transformationsmatrix eingeführte Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}(t)$ auch als die Koordinatenmatrix des Drehtensors ${}^{0}\boldsymbol{R}(t)$ im System $\mathcal{K}_0$ aufgefaßt werden kann,

$${}^{01}\boldsymbol{T}(t) = {}^{0}\boldsymbol{R}(t) \equiv \boldsymbol{R}({}^{0}\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))\,. \tag{3.108}$$

Da der Drehachsvektor $\boldsymbol{u}$ unter der Drehung invariant ist, stimmen die Koordinaten des Drehachsvektors $\boldsymbol{u}$ und damit auch die Koordinaten des Drehtensors $\boldsymbol{R}$ in den Koordinatensystemen $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ überein, also

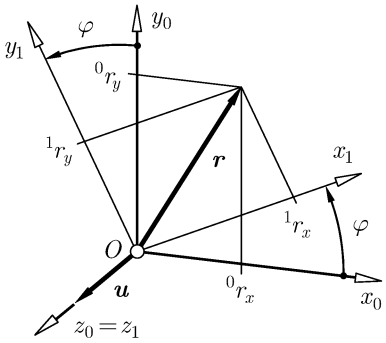
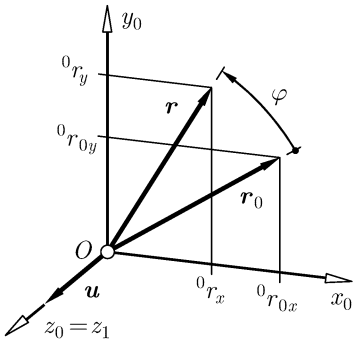
$${}^{0}\boldsymbol{u} = {}^{1}\boldsymbol{u} \qquad \text{und} \qquad {}^{0}\boldsymbol{R} = {}^{1}\boldsymbol{R}\,. \tag{3.109}$$

Aus (3.108) ergeben sich zwei gleichwertige Betrachtungsweisen der Drehung:

1. *Passive Betrachtung* als Koordinatentransformation gemäß (3.106): Das physikalische Objekt, repräsentiert durch den Vektor $\boldsymbol{r}$, wird beibehalten, und das Koordinatensystem wird gedreht. Die Drehmatrix transformiert die Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{r}$ vom mitgedrehten Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ zurück in das Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$.
2. *Aktive Betrachtung* als Vektordrehung gemäß (3.99): Das physikalische Objekt, repräsentiert durch den Vektor $\boldsymbol{r}$, wird gedreht, und das Koordinatensystem wird beibehalten. Die Drehmatrix berechnet die Koordinaten des gedrehten Vektors $\boldsymbol{r}$ aus denjenigen des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ bei Darstellung im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$.

Am Beispiel der Drehung eines Vektors in der x, y-Ebene sind die beiden Betrachtungsweisen in Tabelle 3.3 gegenübergestellt.

Tabelle 3.3 Passive und aktive Betrachtung der Drehung

Passive Betrachtung	Aktive Betrachtung
• Beibehaltung des Vektors $\boldsymbol{r}$ • Transformation der Koordinaten von $\boldsymbol{r}$ von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_0$ mit Hilfe der Transformationsmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$	• Beibehaltung des Koordinatensystems • Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}$ mit Hilfe des Drehtensors $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \varphi)$
	
${}^0\boldsymbol{r} = {}^{01}\boldsymbol{T}\ {}^1\boldsymbol{r}$	${}^0\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)\ {}^0\boldsymbol{r}_0$
$\begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1r_x \\ {}^1r_y \\ {}^1r_z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} {}^0r_x \\ {}^0r_y \\ {}^0r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0r_{0x} \\ {}^0r_{0y} \\ {}^0r_{0z} \end{bmatrix}$
Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)$	

3.3.4 Beispiele für Drehungen

Elementardrehungen Eine Drehung um eine der Koordinatenachsen wird als *Elementardrehung* bezeichnet (Tabelle 3.4). Aus den Koordinaten der Einheitsvektoren ergeben sich mit Hilfe von (3.100) die Koordinatenmatrizen der Drehtensoren (aktive Betrachtung), die wegen (3.108) mit den Transformationsmatrizen (passive Betrachtung) übereinstimmen.

Für die Elementardrehung um die x-Achse mit dem Drehwinkel α gilt

$$ {}^0\boldsymbol{e}_{x0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{e}_{x0}, \alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha \\ 0 & \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha \end{bmatrix} \equiv {}^{01}\boldsymbol{T}\,, \tag{3.110} $$

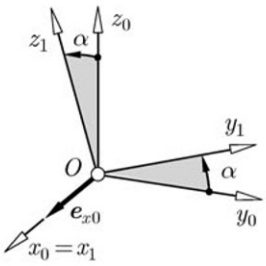
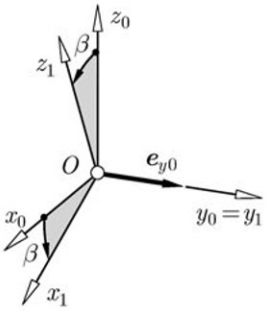
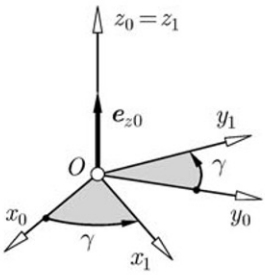
für die Elementardrehung um die y-Achse mit dem Drehwinkel β

$$ {}^0\boldsymbol{e}_{y0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{e}_{y0}, \beta) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta & 0 & \mathrm{s}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}\beta & 0 & \mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \equiv {}^{01}\boldsymbol{T} \tag{3.111} $$

und für die Elementardrehung um die z-Achse mit dem Drehwinkel γ

$$ {}^0\boldsymbol{e}_{z0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{e}_{z0}, \gamma) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\gamma & 0 \\ \mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv {}^{01}\boldsymbol{T}\,. \tag{3.112} $$

Tabelle 3.4 Elementardrehungen

Drehung um x-Achse	Drehung um y-Achse	Drehung um z-Achse
		

Drehung mit einem gegebenen Drehzeiger Das Rechteck $A_0B_0C_0O$ wird mit dem folgenden Drehzeiger gedreht (Abb. 3.11 a):

$$ {}^0\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(Raumdiagonale)}\,, \qquad \varphi = \frac{2}{3}\pi \quad (\hat{=}120^\circ)\,. \tag{3.113} $$

Gesucht sind die Drehmatrix sowie die gedrehte Lage des Rechtecks.

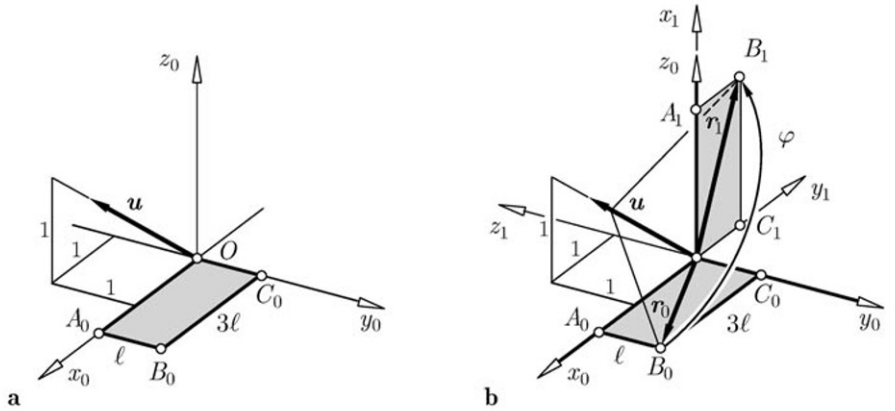


Abb. 3.11 Drehung mit einem gegebenen Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$. **a** Ausgangslage. **b** Drehung

Mit dem gegebenen Drehzeiger $({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)$ wird die Drehmatrix mit Hilfe der RODRIGUES-Gleichung (3.100) berechnet,

$$ \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \equiv {}^{01}\boldsymbol{T}. \tag{3.114} $$

Mit dem aus (3.106) bekannten Aufbau als Transformationsmatrix können daraus die Koordinaten der Einheitsvektoren des gedrehten körperfesten Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$ abgelesen werden (Abb. 3.11b),

$$ {}^0\boldsymbol{e}_{x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad {}^0\boldsymbol{e}_{y1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad {}^0\boldsymbol{e}_{z1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. $$

Bei der aktiven Betrachtung wird der Vektor $\boldsymbol{r}_0$ mit Hilfe des Drehtensors $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)$ in den Vektor $\boldsymbol{r}_1$ gedreht,

$$ {}^0\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)\, {}^0\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\,l \\ l \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l \\ 0 \\ 3\,l \end{bmatrix}. \tag{3.115} $$

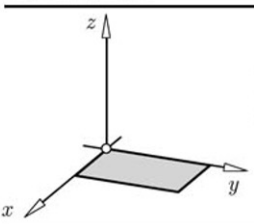
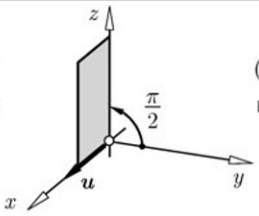
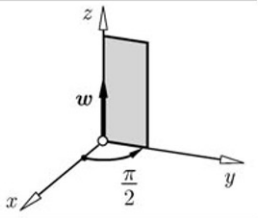
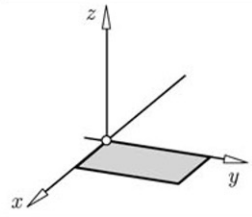
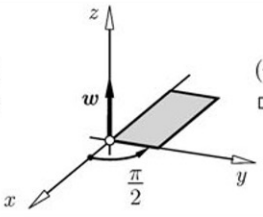
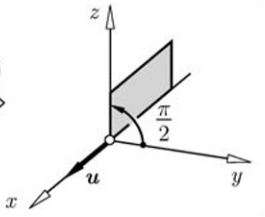
3.4 Mehrfache Drehungen

Bereits in Abschnitt 3.2.2 wurde bei der Zusammensetzung zweier Bewegungen die Beschreibung von zwei hintereinandergeschalteten Drehungen mit Hilfe von Koordinatentransformationen gezeigt. Diese Formulierung entspricht der in Abschnitt 3.3.3 eingeführten passiven Betrachtungsweise der Drehungen. In diesem Abschnitt wird die aktive Betrachtungsweise mehrfacher Drehungen mit Hilfe der Drehzeiger der Einzeldrehungen gegenübergestellt.

3.4.1 Nichtkommutativität von Drehungen

Die Beschreibung der Resultierenden zweier Einzeldrehungen gemäß (3.42) zeigt bereits, dass die Reihenfolge der Drehungen wegen der Nichtkommutativität des Produkts der Drehmatrizen nicht vertauschbar ist. Dieser Sachverhalt lässt sich mit Hilfe der Drehzeiger der Einzeldrehungen geometrisch veranschaulichen. Das Beispiel in Tabelle 3.5 zeigt, wie die in unterschiedlicher Reihenfolge ausgeführten Drehungen mit den Drehzeigern $(\boldsymbol{u}, \frac{\pi}{2})$ und $(\boldsymbol{w}, \frac{\pi}{2})$ zu unterschiedlichen Endlagen führen.

Tabelle 3.5 Nichtkommutativität zweier hintereinandergeschalteter Drehungen

Ausgangslage		Zwischenlage		Endlage
	$(\boldsymbol{u}, \frac{\pi}{2})$ ⇒		$(\boldsymbol{w}, \frac{\pi}{2})$ ⇒	
	$(\boldsymbol{w}, \frac{\pi}{2})$ ⇒		$(\boldsymbol{u}, \frac{\pi}{2})$ ⇒	

Die Beschreibung zweier hintereinandergeschalteter Drehungen durch Drehzeiger wird nun am Beispiel des in Abb. 3.12 a dargestellten Stabes genauer untersucht. Der stabfeste Vektor $\boldsymbol{r}_0$ soll zuerst eine Elementardrehung $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ um die x_0-Achse und danach eine Elementardrehung $(\boldsymbol{w}, \psi)$ um die z_0-Achse ausführen. Diese Drehreihenfolge kann gemäß Abb. 3.12 b mit Hilfe einer gedachten kinematischen Kette mit zwei hintereinandergeschalteten Drehgelen-

ken, in deren Gelenkachsen die beiden Drehzeiger liegen, anschaulich definiert werden. Das vom Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ aus gesehen erste Drehgelenk 1 wird dazu in die Achse $\boldsymbol{w}$ der zweiten Drehung $(\boldsymbol{w}, \psi)$ und das Drehgelenk 2 in die Achse $\boldsymbol{u}$ der ersten Drehung $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ gelegt.

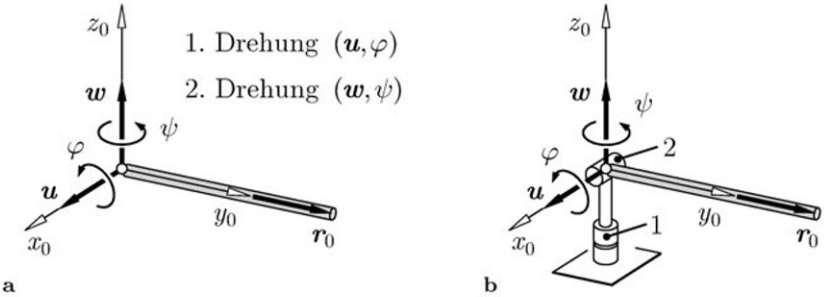


Abb. 3.12 Zweifache Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$. **a** Gegebene Einzeldrehungen. **b** Festlegung der Drehreihenfolge durch zwei Drehgelenke

Wird nun zuerst das Drehgelenk 2 um den Winkel φ und danach das Drehgelenk 1 um den Winkel ψ gedreht, so werden gerade die beiden Drehzeiger in der gemäß Abb. 3.12 a gegebenen Reihenfolge ausgeführt. Da hier die Drehung im Gelenk 2 stattfindet, während sich die Achse dieses Gelenks noch in der Ausgangslage befindet, wird diese Beschreibung der beiden Drehungen auch als *Drehungen um die Ausgangsachsen* bezeichnet.

Die beiden Drehgelenke gemäß Abb. 3.12 b veranschaulichen noch eine zweite, gleichwertige Beschreibung der beiden Drehungen. Wird zuerst das Drehgelenk 1 um den Winkel ψ und danach das Drehgelenk 2 um den Winkel φ gedreht, so wird offensichtlich dieselbe Endlage des Stabes wie bei den Drehungen um die Ausgangsachsen erreicht. Da hier die Achse des Drehgelenks 2 bei der Ausführung der Drehung bereits um den Winkel ψ des Drehgelenks 1 gedreht ist, wird diese Beschreibung der beiden Drehungen auch als *Drehungen um die mitgedrehten Achsen* bezeichnet.

Diese beiden — gleichwertigen — Beschreibungen mehrfacher Drehungen werden im Folgenden mathematisch formuliert. Die Einzeldrehungen können dabei jeweils wieder aktiv als Vektordrehungen oder passiv als Koordinatentransformationen angesehen werden.

3.4.2 Drehungen um die Ausgangsachsen

Aktive Betrachtung als Vektordrehungen Gemäß Tabelle 3.6 dreht zuerst der Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ den Vektor $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}_{1'}$. Im System $\mathcal{K}_0$ ist das eine Elementardrehung um die x_0-Achse,

$$ {}^0\boldsymbol{r}_{1'} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)\, {}^0\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.116} $$

Anschließend dreht der Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$ den Vektor $\boldsymbol{r}_{1'}$ in den Vektor $\boldsymbol{r}_2$. Im System $\mathcal{K}_0$ ist dies eine Elementardrehung um die z_0-Achse,

$$ {}^0\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, {}^0\boldsymbol{r}_{1'} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi & 0 \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.117} $$

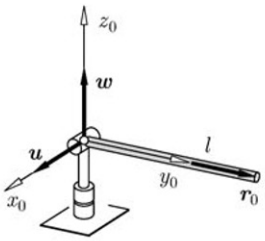
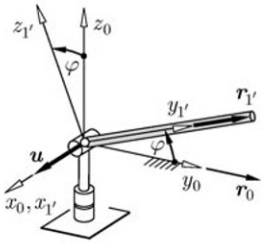
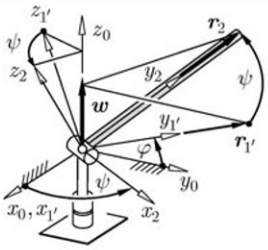
Einsetzen von (3.116) in (3.117) liefert die resultierende Vektordrehung von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}_2$,

$$ {}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_{20}\, {}^0\boldsymbol{r}_0 \tag{3.118} $$

mit dem resultierenden Drehtensor

$$ {}^0\boldsymbol{R}_{20} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.119} $$

Tabelle 3.6 Drehungen um die Ausgangsachsen

Ausgangslage	Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$	Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$
		
Einzeldrehungen, aktive Betrachtung als Vektordrehungen	${}^0\boldsymbol{r}_{1'} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)\, {}^0\boldsymbol{r}_0$ mit $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}$	${}^0\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, {}^0\boldsymbol{r}_{1'}$ mit $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi & 0 \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Gesamte Drehung	${}^0\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)\, {}^0\boldsymbol{r}_0$ $\rightarrow \begin{bmatrix} -l\,\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\varphi \\ l\,\mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\varphi \\ l\,\mathrm{s}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{bmatrix}$	

Passive Betrachtung als Koordinatentransformationen Bei der Drehreihenfolge um die Ausgangsachsen gemäß Tabelle 3.6 geht ein mit dem Stab verbundenes Koordinatensystem von der Ausgangslage $\mathcal{K}_0$ über die Zwischenlage $\mathcal{K}_{1'}$ in die Endlage $\mathcal{K}_2$ über. Die erste Drehung mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ wird dann passiv beschrieben durch die Transformationen der Koordinaten eines beliebigen Vektors, z.B. des Vektors $\boldsymbol{r}_2$, vom System $\mathcal{K}_{1'}$ in das System $\mathcal{K}_0$,

$$ {}^{0}\boldsymbol{r}_2 = {}^{01'}\boldsymbol{T}\,{}^{1'}\boldsymbol{r}_2\,, \qquad \text{mit} \qquad {}^{01'}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^{0}\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.120} $$

Die zweite Drehung mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$ wird beschrieben durch die Koordinatentransformation vom System $\mathcal{K}_2$ in das System $\mathcal{K}_{1'}$,

$$ {}^{1'}\boldsymbol{r}_2 = {}^{1'2}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{mit} \qquad {}^{1'2}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^{1'}\boldsymbol{w}, \psi)\,. \tag{3.121} $$

Der Achsvektor $\boldsymbol{w}$ hat in $\mathcal{K}_{1'}$ die Koordinaten ${}^{1'}\boldsymbol{w} = {}^{1'0}\boldsymbol{T}\,{}^{0}\boldsymbol{w} = [\,0 \quad \mathrm{s}\varphi \quad \mathrm{c}\varphi\,]^{\mathrm{T}}$, weswegen die daraus mit Hilfe von (3.100) aufgebaute Transformationsmatrix ${}^{1'2}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^{1'}\boldsymbol{w}, \psi)$ keine Elementardrehung beschreibt,

$$ {}^{1'2}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{c}\varphi\,\mathrm{s}\psi & \mathrm{s}\varphi\,\mathrm{s}\psi \\ \mathrm{c}\varphi\,\mathrm{s}\psi & (1-\mathrm{c}\psi)\,\mathrm{s}^2\varphi + \mathrm{c}\psi & (1-\mathrm{c}\psi)\,\mathrm{s}\varphi\,\mathrm{c}\varphi \\ -\mathrm{s}\varphi\,\mathrm{s}\psi & (1-\mathrm{c}\psi)\,\mathrm{s}\varphi\,\mathrm{c}\varphi & (1-\mathrm{c}\psi)\,\mathrm{c}^2\varphi + \mathrm{c}\psi \end{bmatrix}. \tag{3.122} $$

Einsetzen von (3.121) in (3.120) liefert die resultierende Transformation vom System $\mathcal{K}_2$ in das System $\mathcal{K}_0$,

$$ {}^{0}\boldsymbol{r}_2 = {}^{02}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{r}_2\,. \tag{3.123} $$

Die resultierende Transformationsmatrix

$$ {}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01'}\boldsymbol{T}\,{}^{1'2}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \tag{3.124} $$

stimmt gemäß (3.108) mit dem Drehtensor aus (3.119) überein, ${}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{0}\boldsymbol{R}_{20}$.

3.4.3 Drehungen um die mitgedrehten Achsen

Aktive Betrachtung als Vektordrehungen Gemäß Tabelle 3.7 dreht jetzt zuerst der Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$ den Vektor $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}_1$. Dies ist die bereits in (3.117) verwendete Elementardrehung um die z_0-Achse,

$$
{}^0\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, {}^0\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi & 0 \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{3.125}
$$

Die zweite Drehung erfolgt nun um die mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$ der ersten Drehung von $\boldsymbol{u}$ nach $\boldsymbol{u}_1$ gedrehte Achse $\boldsymbol{u}_1$ mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}_1, \varphi)$. Sie dreht den Vektor $\boldsymbol{r}_1$ in den Vektor $\boldsymbol{r}_2$,

$$
{}^0\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi)\, {}^0\boldsymbol{r}_1 \qquad \text{mit} \qquad {}^0\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, {}^0\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi \\ \mathrm{s}\psi \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{3.126}
$$

Der mit ${}^0\boldsymbol{u}_1$ gemäß (3.100) gebildete Drehtensor $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi)$ beschreibt damit in $\mathcal{K}_0$ keine Elementardrehung,

$$
\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi) = \begin{bmatrix} (1-\mathrm{c}\varphi)\,\mathrm{c}^2\psi + \mathrm{c}\varphi & (1-\mathrm{c}\varphi)\,\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\psi & \mathrm{s}\varphi\,\mathrm{s}\psi \\ (1-\mathrm{c}\varphi)\,\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\psi & (1-\mathrm{c}\varphi)\,\mathrm{s}^2\psi + \mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi\,\mathrm{c}\psi \\ -\mathrm{s}\varphi\,\mathrm{s}\psi & \mathrm{s}\varphi\,\mathrm{c}\psi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} . \tag{3.127}
$$

Einsetzen von (3.126) in (3.125) liefert die resultierende Vektordrehung von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}_2$,

$$
{}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^0\boldsymbol{R}_{20}\, {}^0\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{mit} \qquad {}^0\boldsymbol{R}_{20} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi)\, \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) , \tag{3.128}
$$

wobei wieder der resultierende Drehtensor ${}^0\boldsymbol{R}_{20}$ gemäß (3.119) erhalten wird.

Der nicht elementare Drehtensor $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi)$ aus (3.127) kann mit Hilfe der elementaren Drehtensoren $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)$ aus (3.116) und $\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)$ aus (3.117) ausgedrückt werden, indem (3.119) gleich (3.128) gesetzt wird,

$$
{}^0\boldsymbol{R}_{20} \equiv \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi) = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi)\, \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) .
$$

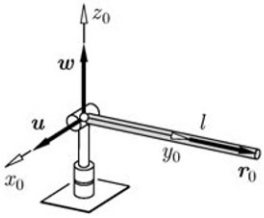
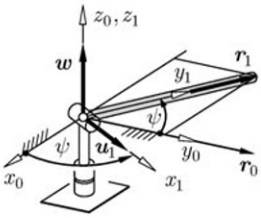
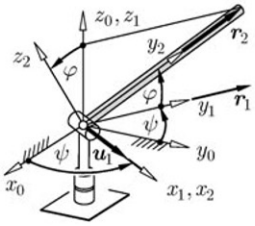
Multiplikation mit dem inversen Drehtensor $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)$ von rechts ergibt

$$
\boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}_1, \varphi) = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi)\, \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)\, \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) . \tag{3.129}
$$

Passive Betrachtung als Koordinatentransformationen Bei der Drehreihenfolge um die mitgedrehten Achsen gemäß Tabelle 3.7 geht das mit dem Stab verbundene Koordinatensystem von der Ausgangslage $\mathcal{K}_0$ über die Zwischenlage $\mathcal{K}_1$ in die Endlage $\mathcal{K}_2$ über. Die erste Drehung mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$ wird dann passiv beschrieben durch die Transformationen der Koordinaten z.B. des Vektors $\boldsymbol{r}_2$ vom System $\mathcal{K}_1$ in das System $\mathcal{K}_0$,

$$
{}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^{01}\boldsymbol{T}\, {}^1\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{mit} \qquad {}^{01}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{w}, \psi) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi & 0 \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{3.130}
$$

Tabelle 3.7 Drehungen um mitgedrehte Achsen

Ausgangslage	Drehzeiger $(\boldsymbol{w}, \psi)$	Drehzeiger $(\boldsymbol{u}_1, \varphi)$
		
Einzeldrehungen, passive Betrachtung als Koordinatentransformationen	${}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^1\boldsymbol{r}_2$ mit ${}^{01}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi & 0 \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	${}^1\boldsymbol{r}_2 = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^2\boldsymbol{r}_2$ mit ${}^{12}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}$
Gesamte Drehung	${}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^2\boldsymbol{r}_2$ $\rightarrow \begin{bmatrix} -l\,\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\varphi \\ l\,\mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\varphi \\ l\,\mathrm{s}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l \\ 0 \end{bmatrix}$	

Die zweite Drehung mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}_1, \varphi)$ wird beschrieben durch die Koordinatentransformation vom System $\mathcal{K}_2$ in das System $\mathcal{K}_1$,

$$ {}^1\boldsymbol{r}_2 = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^2\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{mit} \qquad {}^{12}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^1\boldsymbol{u}_1, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}. \tag{3.131} $$

Damit beschreiben beide Koordinatentransformationen Elementardrehungen.

Einsetzen von (3.131) in (3.130) liefert die resultierende Transformation vom System $\mathcal{K}_2$ in das System $\mathcal{K}_0$,

$$ {}^0\boldsymbol{r}_2 = {}^{02}\boldsymbol{T}\,{}^2\boldsymbol{r}_2 \qquad \text{mit} \qquad {}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,, \tag{3.132} $$

wobei wieder die resultierende Transformationsmatrix ${}^{02}\boldsymbol{T}$ gemäß (3.124) erhalten wird.

Die nicht elementare Transformationsmatrix ${}^{1'2}\boldsymbol{T}$ aus (3.127) kann mit Hilfe der elementaren Transformationsmatrizen ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.130) und ${}^{12}\boldsymbol{T}$ aus (3.131) ausgedrückt werden, indem (3.123) gleich (3.132) gesetzt wird,

$$ {}^{02}\boldsymbol{T} \equiv {}^{01'}\boldsymbol{T}\,{}^{1'2}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,. $$

Multiplikation mit der inversen Transformatiosmatrix ${}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$ von links ergibt unter Berücksichtigung von ${}^{01'}\boldsymbol{T} = {}^{12}\boldsymbol{T}$

$$ {}^{1'2}\boldsymbol{T} = {}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\, {}^{01}\boldsymbol{T}\, {}^{12}\boldsymbol{T} \,. \tag{3.133} $$

3.4.4 Gegenüberstellung der Drehreihenfolgen

Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, dass bei Drehungen um die Ausgangsachsen die aktive Betrachtungsweise und bei Drehungen um die mitgedrehten Achsen die passive Betrachtungsweise jeweils übersichtlicher ist. Die entsprechenden Formulierungen sind in den Tabellen 3.6 und 3.7 zusammengefaßt. Die eindeutige Festlegung mehrfacher Drehungen durch eine gedachte kinematische Kette mit Drehgelenken wird bei der Parametrierung von Drehungen mit Hilfe von KARDAN- bzw. EULER-Winkeln in Abschnitt 3.6 verwendet.

3.5 Drehzeiger und Winkelgeschwindigkeit

Mit Hilfe des Drehzeigers können die in Abschnitt 3.1.3 eingeführte Winkelgeschwindigkeit und der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung der Drehmatrix und der Winkelgeschwindigkeit aus (3.16) geometrisch hergeleitet und interpretiert werden.

3.5.1 Infinitesimale Drehung und Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit kann aus der Betrachtung einer Drehung $(\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\varphi)$ mit einem infinitesimalen Drehwinkel $\mathrm{d}\varphi$ hergeleitet werden. Der entsprechend (3.92) gebildete Drehtensor

$$ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\varphi) = \cos \mathrm{d}\varphi\, \boldsymbol{E} + \sin \mathrm{d}\varphi\, \widetilde{\boldsymbol{u}} + (1 - \cos \mathrm{d}\varphi)\, \boldsymbol{u}\, \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} \tag{3.134} $$

kann dann bezüglich $\mathrm{d}\varphi$ linearisiert werden. Mit den Reihenentwicklungen bis zu Termen erster Ordnung $\cos \mathrm{d}\varphi \approx 1$ und $\sin \mathrm{d}\varphi \approx \mathrm{d}\varphi$ lautet er

$$ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\varphi) \approx \boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi\, \widetilde{\boldsymbol{u}} \,. \tag{3.135} $$

Die Anwendung des Drehtensors $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\varphi)$ auf einen Vektor $\boldsymbol{r}$ ergibt die Änderung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ von $\boldsymbol{r}$, die senkrecht auf $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{r}$ steht (Abb. 3.13),

$$ (\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi\, \widetilde{\boldsymbol{u}})\, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\varphi\, \widetilde{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{r} \,. \tag{3.136} $$

Findet die Drehung $(\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\varphi)$ in einem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ statt, so ergibt sich aus (3.136) die zeitliche Änderung des Vektors $\boldsymbol{r}$ bei einer Drehung um die Achse $\boldsymbol{u}$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\,\boldsymbol{r} \qquad \text{oder} \qquad \dot{\boldsymbol{r}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{r} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{u}\,. \tag{3.137}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{\omega}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit.

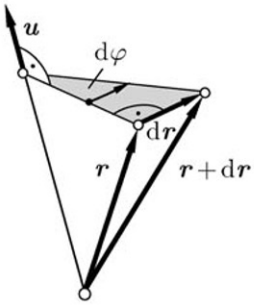


Abb. 3.13 Infinitesimale Drehung eines Vektors $\boldsymbol{r}$ um den Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \mathrm{d}\varphi)$

Auch die bereits in (3.45) hergeleitete additive Zusammensetzung von Winkelgeschwindigkeiten lässt sich mit Hilfe der Drehzeiger geometrisch begründen. Die Hintereinanderschaltung von zwei infinitesimalen Drehungen $(\boldsymbol{u}_1, \mathrm{d}\varphi_1)$ und $(\boldsymbol{u}_2, \mathrm{d}\varphi_2)$ ergibt gemäß (3.118)

$$\boldsymbol{R}_{20} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_1, \mathrm{d}\varphi_1)\,\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_2, \mathrm{d}\varphi_2) = (\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1)\,(\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2)$$

$$\rightarrow \boldsymbol{R}_{20} = \boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \mathrm{d}\varphi_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 + \mathrm{d}\varphi_1\,\mathrm{d}\varphi_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 \tag{3.138}$$

und bei Vernachlässigung des Produkts der infinitesimalen Drehwinkel

$$\boldsymbol{R}_{20} = \boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \mathrm{d}\varphi_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,. \tag{3.139}$$

Werden die beiden Drehungen in der umgekehrten Reihenfolge ausgeführt, so wird dasselbe Ergebnis erhalten. Im Gegensatz zu endlichen Drehungen sind damit infinitesimale Drehungen kommutativ. Die Anwendung des Drehtensors $\boldsymbol{R}_{20}$ aus (3.139) auf einen Vektor $\boldsymbol{r}$ ergibt

$$(\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\varphi_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \mathrm{d}\varphi_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2)\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\boldsymbol{r} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}\boldsymbol{r} = (\mathrm{d}\varphi_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \mathrm{d}\varphi_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2)\,\boldsymbol{r}\,. \tag{3.140}$$

Wird die Änderung $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ von $\boldsymbol{r}$ auf Grund der Drehung wieder wie in (3.137) auf das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ bezogen, so ergibt sich die zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{r}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{r}$, wobei die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ die vektorielle Summe der beiden Teilwinkelgeschwindigkeiten ist,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{u}_1\,, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{u}_2\,. \tag{3.141}$$

3.5.2 Drehtensor und Winkelgeschwindigkeit

Der Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung des Drehtensors und dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit aus (3.16) kann durch zwei hintereinandergeschaltete Drehungen geometrisch interpretiert werden.

Bei der Fixpunktdrehung eines Körpers mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))$ sei zu einem Zeitpunkt t ein körperfester Vektor mit Hilfe des Drehtensors $\boldsymbol{R}(t)$ aus der Ausgangslage $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}(t)$ gedreht worden (Abb. 3.14 a),

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t)\,\boldsymbol{r}_0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))\,. \tag{3.142}$$

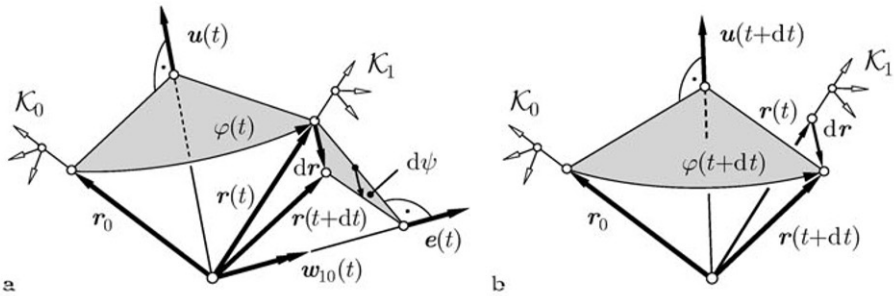


Abb. 3.14 Zur zeitlichen Änderung des Drehtensors. **a** Hintereinanderschaltung der endlichen Drehung $(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))$ und der infinitesimalen Drehung $(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi)$. **b** Resultierende Drehung $(\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t), \varphi(t+\mathrm{d}t))$

Besitzt der Körper zum Zeitpunkt t die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}(t)$, so wird der Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ in einem anschließenden infinitesimalen Zeitintervall $\mathrm{d}t$ durch den Drehzeiger $(\boldsymbol{e}(t), \mathrm{d}\psi)$ mit

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \omega_{10} = |\boldsymbol{\omega}_{10}|\,, \qquad \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{10}}{\omega_{10}} \tag{3.143}$$

in die Lage $\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)$ weitergedreht. Der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}(t)$ kennzeichnet die Richtung der *momentanen Drehachse* des Körpers zum Zeitpunkt t. Mit dem bezüglich $\mathrm{d}\psi$ linearisierten Drehtensor $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi)$ gemäß (3.135) gilt

$$\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi)\,\boldsymbol{r}(t) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{R}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi) = \boldsymbol{E} + \mathrm{d}\psi\,\widetilde{\boldsymbol{e}}\,. \tag{3.144}$$

Die gesamte Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)$ gemäß Abb. 3.14 b wird durch den Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t), \varphi(t+\mathrm{d}t))$ beschrieben,

$$\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t) = \boldsymbol{R}(t+\mathrm{d}t)\,\boldsymbol{r}(t) \tag{3.145}$$

mit $\boldsymbol{R}(t+\mathrm{d}t) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t), \varphi(t+\mathrm{d}t))$. Einsetzen von (3.142) in (3.144) ergibt durch Vergleich mit (3.145) den resultierenden Drehtensor

$$\boldsymbol{R}(t+\mathrm{d}t) = (\boldsymbol{E} + \mathrm{d}\psi\,\widetilde{\boldsymbol{e}}\,)\,\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}(t) + \mathrm{d}\boldsymbol{R} \tag{3.146}$$

mit der Änderung des Drehtensors $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ auf Grund der infinitesimalen Drehung $(\boldsymbol{e}(t), \mathrm{d}\psi)$,

$$\mathrm{d}\boldsymbol{R} = \mathrm{d}\psi\, \widetilde{\boldsymbol{e}}(t)\, \boldsymbol{R}(t)\,. \tag{3.147}$$

Wird $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$ auf das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ bezogen, so ergibt sich mit (3.143) die zeitliche Änderung des Drehtensors $\boldsymbol{R}(t)$ relativ zum Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$

$$\frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{R}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\, \widetilde{\boldsymbol{e}}(t)\, \boldsymbol{R}(t) \qquad \text{oder} \qquad {}_0\dot{\boldsymbol{R}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}(t)\, \boldsymbol{R}(t)\,. \tag{3.148}$$

Dies ist die vektorielle Form der aus (3.16) bekannten POISSON-Gleichung.

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ Die vektorielle POISSON-Gleichung (3.148) wird günstig im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ ausgewertet, da die Ableitung der Drehtensorkoordinaten ${}^0\boldsymbol{R}$ direkt die zeitliche Änderung relativ zu $\mathcal{K}_0$ liefert, vgl. (3.36). Mit ${}^0\dot{\boldsymbol{R}} \equiv {}^0[{}_0\dot{\boldsymbol{R}}]$ ist

$${}^0\dot{\boldsymbol{R}} = {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}^0\boldsymbol{R}\,. \tag{3.149}$$

Unter Berücksichtigung des Zusammenhangs ${}^0\boldsymbol{R} = {}^{01}\boldsymbol{T}$ gemäß (3.108) ist dies die POISSON-Gleichung entsprechend (3.16)

$${}^{01}\dot{\boldsymbol{T}} = {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\, {}^{01}\boldsymbol{T} \qquad \text{oder} \qquad {}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}\, {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,. \tag{3.150}$$

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ Werden die Koordinaten des schiefsymmetrischen Tensors ${}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ gemäß (2.70) durch die Koordinaten ${}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ ausgedrückt,

$${}^0\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = {}^{01}\boldsymbol{T}\; {}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\; {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,, \tag{3.151}$$

so ergibt sich aus (3.149) bzw. (3.150) die POISSON-Gleichung mit den körperfesten Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit,

$${}^{01}\dot{\boldsymbol{T}} = {}^{01}\boldsymbol{T}\; {}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} \qquad \text{oder} \qquad {}^1\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = {}^{01}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\; {}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}\,. \tag{3.152}$$

3.6 KARDAN-Winkel und EULER-Winkel

Eine allgemeine Drehung kann anschaulich durch die Drehwinkel von drei aufeinanderfolgenden Elementardrehungen beschrieben werden. Eine eindeutige Definition der Drehreihenfolge wird gemäß Abschnitt 3.4 mit Hilfe einer gedachten kinematischen Kette mit drei Drehgelenken, deren aufeinanderfolgende Drehachsen jeweils senkrecht aufeinander stehen, erhalten. Tatsächlich werden solche kinematischen Ketten eingesetzt, um allgemeine Drehungen mit dem Freiheitsgrad drei zu realisieren. Beispiele sind die kardanische La-

gerung eines Kreisels (Abb. 1.2) oder die sich in einem Punkt schneidenden Handachsen eines Industrieroboters (Abb. 1.5).

Die Benennungen der drei Drehwinkel sind in der Literatur nicht einheitlich. Zu finden ist die übergeordnete Benennung EULER-Winkel, wobei zusätzlich die Reihenfolge der Elementardrehungen, in der Regel um die mitgedrehten Achsen, angegeben wird. Beispielsweise wird unter den zyx-EULER-Winkeln die Folge von drei Elementardrehungen um die mitgedrehten z-, y- und x-Achsen verstanden. Meistens werden jedoch die drei Drehwinkel der zxz-Drehungsfolge als EULER-Winkel und die drei Drehwinkel der xyz- oder der zyx-Drehungsfolge als KARDAN[3]-Winkel bezeichnet. Diese Benennungen werden auch in diesem Buch verwendet, wobei jeweils die Drehfolge mit angegeben wird. In der englischsprachigen Literatur werden die KARDAN-Winkel als BRYAN[4]-Winkel oder BRYAN-TAIT[5]-Winkel bezeichnet.

Im Folgenden werden die kinematischen Gleichungen für die xyz-KARDAN-Winkel hergeleitet und zum Vergleich die Ergebnisse für die zyx-KARDAN-Winkel und die zyz-EULER-Winkel angegeben.

*3.6.1 xyz-*KARDAN*-Winkel und Drehmatrix*

Die xyz-KARDAN-Winkel

$$\boldsymbol{\beta} = [\,\alpha \;\; \beta \;\; \gamma\,]^{\mathrm{T}} \tag{3.153}$$

sind dadurch gekennzeichnet, dass die Elementardrehungen in der Reihenfolge x–y–z, bezogen auf die mitgedrehten Achsen, erfolgen. Die Drehungsfolge mit der dazu gehörenden kinematischen Kette ist in Tabelle 3.8 dargestellt. In der Ausgangslage $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$ fallen die Achsen des körperfesten Koordinatensystems $\mathcal{K}_3$ mit denjenigen des raumfesten Systems $\mathcal{K}_0$ zusammen.

Mit den Elementar-Transformationsmatrizen der drei Einzeldrehungen gemäß Tabelle 3.8 lautet die Transformation der Koordinaten eines beliebigen Vektors $\boldsymbol{r}$ vom körperfesten System $\mathcal{K}_3$ in das Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ (passive Betrachtung) ${}^{0}\boldsymbol{r} = {}^{03}\boldsymbol{T}(\alpha,\beta,\gamma)\;{}^{3}\boldsymbol{r}$ mit der Drehmatrix

$${}^{03}\boldsymbol{T}(\alpha,\beta,\gamma) = {}^{01}\boldsymbol{T}(\alpha)\;{}^{12}\boldsymbol{T}(\beta)\;{}^{23}\boldsymbol{T}(\gamma) \tag{3.154}$$

bzw.

$${}^{03}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta}) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\beta \\ \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\gamma + \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\gamma - \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta \\ \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\gamma - \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\gamma + \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta \end{bmatrix}. \tag{3.155}$$

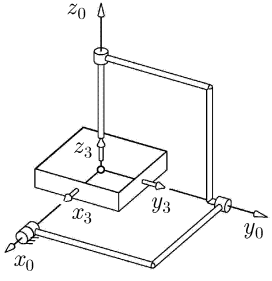
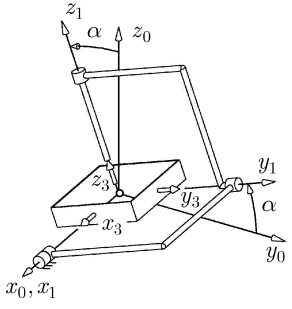
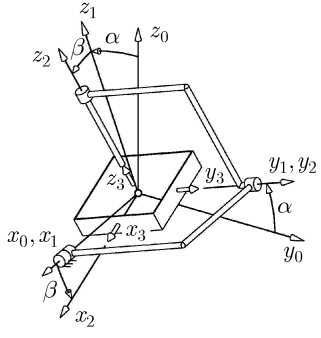
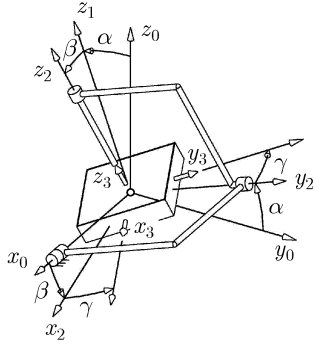
---

[3] GEROLAMO CARDANO, *1501 in Pavia, †1576 in Rom

[4] GEORGE HARTLEY BRYAN, *1864 in Cambridge, †1928 in Bordighera

[5] PETER GUTHRIE TAIT, *1831 in Dalkeith, †1901 in Edinburgh

Tabelle 3.8 Drehungsfolge der xyz-KARDAN-Winkel

Ausgangslage	1. Drehung	2. Drehung	3. Drehung
$\mathcal{K}_0 \equiv \mathcal{K}_3$	Winkel α um die $x_3(= x_0)$-Achse	Winkel β um die $y_3(= y_1)$-Achse	Winkel γ um die $z_3(= z_2)$-Achse
			
Drehmatrizen	${}^{01}\boldsymbol{T}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha \\ 0 & \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha \end{bmatrix}$	${}^{12}\boldsymbol{T}(\beta) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta & 0 & \mathrm{s}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}\beta & 0 & \mathrm{c}\beta \end{bmatrix}$	${}^{23}\boldsymbol{T}(\gamma) = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\gamma & 0 \\ \mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
Transformation der Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{r}$	${}^{0}\boldsymbol{r} = {}^{01}\boldsymbol{T}(\alpha)\,{}^{1}\boldsymbol{r}$	${}^{1}\boldsymbol{r} = {}^{12}\boldsymbol{T}(\beta)\,{}^{2}\boldsymbol{r}$	${}^{2}\boldsymbol{r} = {}^{23}\boldsymbol{T}(\gamma)\,{}^{3}\boldsymbol{r}$

3.6.2 *xyz*-KARDAN-*Winkel aus gegebener Drehmatrix*

Aus einer vorliegenden Drehmatrix ${}^{03}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ werden die *xyz*-KARDAN-Winkel unter Berücksichtigung des Aufbaus aus (3.155) wie folgt berechnet:

1. Zwei Lösungen für β werden erhalten aus

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - T_{13}^2}\,, \qquad \sin\beta = T_{13}\,. \tag{3.156}$$

2. Für jede Lösung β aus (3.156) werden γ und α eindeutig berechnet aus

$$\cos\gamma = \frac{T_{11}}{\cos\beta}\,, \qquad \sin\gamma = -\frac{T_{12}}{\cos\beta}\,, \tag{3.157}$$

$$\cos\alpha = \frac{T_{33}}{\cos\beta}\,, \qquad \sin\alpha = -\frac{T_{23}}{\cos\beta}\,. \tag{3.158}$$

Anmerkungen:

- Aus den sin- und cos-Werten werden die jeweiligen Kardan-Winkel mit Hilfe der atan2-Funktion mit dem Wertebereich $]-\pi,\,\pi\,]$ erhalten.
- Die beiden Lösungen in (3.156) entsprechen den beiden *Konfigurationen* der kinematischen Ersatzkette bei gegebener Lage von $\mathcal{K}_3$ gegenüber $\mathcal{K}_0$ (Abb. 3.15). Um diese Mehrdeutigkeit zu umgehen, wird die „+"-Lösung, die den Wertebereich $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ besitzt, verwendet.
- In den *singulären Lagen* mit $|\beta| = \frac{\pi}{2}$ ist die Auflösung nach den *xyz*-KARDAN-Winkeln nicht möglich. Bei einer kardanisch gelagerten Plattform liegt in dieser Stellung eine *Rahmensperre* vor.
- Die *xyz*-KARDAN-Winkel eignen sich insbesondere für die Beschreibung von Drehungen, bei denen der Winkel β klein und dadurch der Abstand von der singulären Lage $|\beta| = \frac{\pi}{2}$ groß ist.

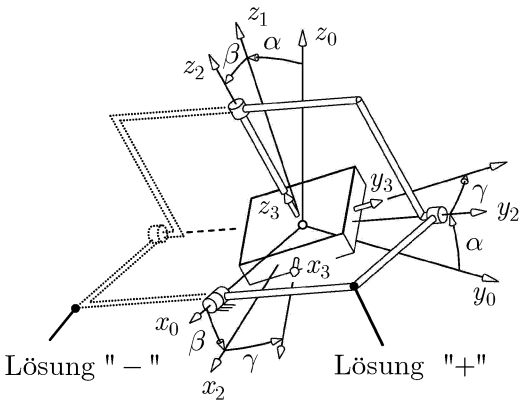


Abb. 3.15 Interpretation der beiden Lösungen in (3.156)

*3.6.3 xyz-*KARDAN*-Winkel und Winkelgeschwindigkeit*

Der Zusammenhang zwischen den zeitlichen Änderungen der xyz-KARDAN-Winkel α, β, γ und der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{30}$ des körperfesten Systems $\mathcal{K}_3$ relativ zum Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ kann durch Einsetzen der Drehmatrix (3.155) und deren Zeitableitung in die POISSON-Gleichung (3.150) bzw. (3.152) hergeleitet werden. Dieser Rechenweg ist allerdings mühsam.

Einfacher und anschaulicher wird der gesuchte Zusammenhang erhalten, indem die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{30}$ gemäß (3.45) bzw. (3.141) als die vektorielle Summe der Teilwinkelgeschwindigkeiten um die Drehachsen der kinematischen Ersatzkette dargestellt wird (Abb. 3.16):

$$\boldsymbol{\omega}_{30} = \dot{\alpha}\,\boldsymbol{e}_{x0} + \dot{\beta}\,\boldsymbol{e}_{y1} + \dot{\gamma}\,\boldsymbol{e}_{z2} \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\omega}_{30} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{x0} & \boldsymbol{e}_{y1} & \boldsymbol{e}_{z2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}^{-1}} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \tag{3.159}$$

Da in den Bewegungsgleichungen der umgekehrte Zusammenhang benötigt wird, ist die (3,3)-Abbildungsmatrix $\boldsymbol{H}^{-1}$ als Inverse eingeführt. Die Auswertung dieser Vektorgleichung erfolgt bevorzugt in $\mathcal{K}_0$ oder in $\mathcal{K}_3$.

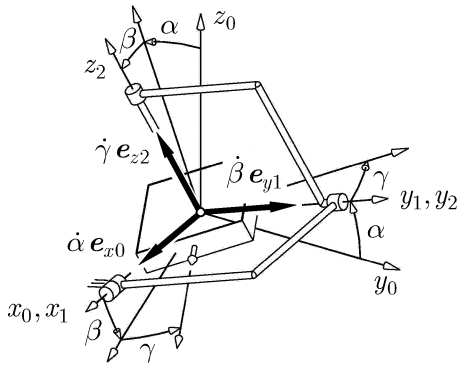


Abb. 3.16 xyz-KARDAN-Winkel und Winkelgeschwindigkeit

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{30}$ im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ Die Vektorgleichung (3.159) lautet im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$

$${}^0\boldsymbol{\omega}_{30} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^0\boldsymbol{e}_{x0} & {}^0\boldsymbol{e}_{y1} & {}^0\boldsymbol{e}_{z2} \end{bmatrix}}_{{}^0\boldsymbol{H}^{-1}} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}. \tag{3.160}$$

Die Koordinaten der Achs-Einheitsvektoren werden wie folgt berechnet:

${}^0\boldsymbol{e}_{x0}$ unmittelbar als Einheitsvektor der x_0-Achse im System $\mathcal{K}_0$,
${}^0\boldsymbol{e}_{y1}$ aus der zweiten Spalte von ${}^{01}\boldsymbol{T} = [\,{}^0\boldsymbol{e}_{x1} \;\; {}^0\boldsymbol{e}_{y1} \;\; {}^0\boldsymbol{e}_{z1}\,]$,
${}^0\boldsymbol{e}_{z2}$ aus der dritten Spalte von ${}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\;{}^{12}\boldsymbol{T} = [\,{}^0\boldsymbol{e}_{x2} \;\; {}^0\boldsymbol{e}_{y2} \;\; {}^0\boldsymbol{e}_{z2}\,]$.

Damit lautet (3.160)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^0\omega_{30x} \\ {}^0\omega_{30y} \\ {}^0\omega_{30z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathrm{s}\beta \\ 0 & \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta \\ 0 & \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}^0\boldsymbol{\omega}_{30} &= {}^0\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}} \ . \end{aligned} \tag{3.161}$$

Die Auflösung nach $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ führt auf die kinematische Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} &= \frac{1}{\mathrm{c}\beta} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta & -\mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta \\ 0 & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta \\ 0 & -\mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_{30x} \\ {}^0\omega_{30y} \\ {}^0\omega_{30z} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} &= {}^0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \qquad {}^0\boldsymbol{\omega}_{30} \ . \end{aligned} \tag{3.162}$$

In den singulären Lagen mit $|\beta| = \frac{\pi}{2}$ ist die Matrix ${}^0\boldsymbol{H}$ singulär, und das Gleichungssystem (3.161) kann nicht nach $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ aufgelöst werden.

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{30}$ im körperfesten System $\mathcal{K}_3$ Die Vektorgleichung (3.159) lautet im körperfesten System $\mathcal{K}_3$

$${}^3\boldsymbol{\omega}_{30} = \underbrace{\begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{e}_{x0} & {}^3\boldsymbol{e}_{y1} & {}^3\boldsymbol{e}_{z2} \end{bmatrix}}_{{}^3\boldsymbol{H}^{-1}} \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} \tag{3.163}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^3\omega_{30x} \\ {}^3\omega_{30y} \\ {}^3\omega_{30z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{s}\gamma & 0 \\ -\mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\gamma & 0 \\ \mathrm{s}\beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}^3\boldsymbol{\omega}_{30} &= {}^3\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{\beta}) \qquad \dot{\boldsymbol{\beta}} \ . \end{aligned} \tag{3.164}$$

Auflösen nach $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ führt auf die kinematische Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} &= \frac{1}{\mathrm{c}\beta} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\gamma & 0 \\ \mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma & 0 \\ -\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\omega_{30x} \\ {}^3\omega_{30y} \\ {}^3\omega_{30z} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} &= {}^3\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \qquad {}^3\boldsymbol{\omega}_{30} \ . \end{aligned} \tag{3.165}$$

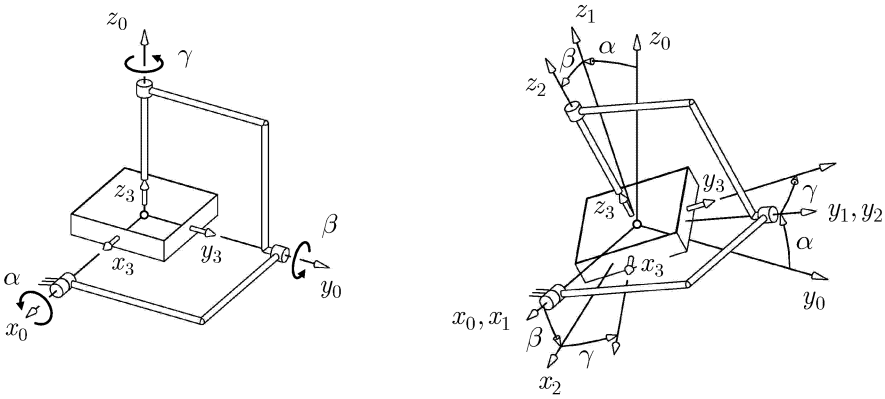
3.6.4 Gegenüberstellung verschiedener Drehreihenfolgen

Die kinematischen Gleichungen für die xyz-KARDAN-Winkel werden in Tabelle 3.9 nochmals zusammengefaßt und den in der gleichen Weise herleitbaren Zusammenhängen für die zyx-KARDAN-Winkel in Tabelle 3.10 und für die zxz-EULER-Winkel in Tabelle 3.11 gegenübergestellt.

Tabelle 3.9 Definition und kinematische Gleichungen für die xyz-KARDAN-Winkel

- Drehungsfolge für die xyz-KARDAN-Winkel $\boldsymbol{\beta} = [\ \alpha \quad \beta \quad \gamma\ ]^{\mathrm{T}}$:

  Ausgangslage $\alpha = \beta = \gamma = 0$ Gedrehte Lage



- Drehmatrix:

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha \\ 0 & \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta & 0 & \mathrm{s}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}\beta & 0 & \mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\gamma & 0 \\ \mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\beta \\ \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\gamma + \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\gamma - \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta \\ \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\gamma - \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\gamma + \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta \end{bmatrix} .
$$

- Berechnung der xyz-KARDAN-Winkel aus der Drehmatrix ${}^{03}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{c}\beta = \sqrt{1 - T_{13}^2}\,, && \mathrm{s}\beta = T_{13} && \rightarrow\ \beta && (-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2})\,, \\
&\mathrm{c}\gamma = \frac{T_{11}}{\mathrm{c}\beta}\,, && \mathrm{s}\gamma = -\frac{T_{12}}{\mathrm{c}\beta} && \rightarrow\ \gamma\,, \\
&\mathrm{c}\alpha = \frac{T_{33}}{\mathrm{c}\beta}\,, && \mathrm{s}\alpha = -\frac{T_{23}}{\mathrm{c}\beta} && \rightarrow\ \alpha\,.
\end{aligned}
$$

- Singularität: $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Kinematische Bewegungsgleichungen

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im Ausgangsystem $\mathcal{K}_0$:

$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^0\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{30}: \qquad \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{c}\beta} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta & -\mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta \\ 0 & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta \\ 0 & -\mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_{30x} \\ {}^0\omega_{30y} \\ {}^0\omega_{30z} \end{bmatrix},
$$

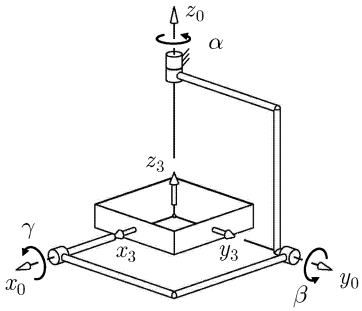
  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten System $\mathcal{K}_3$:

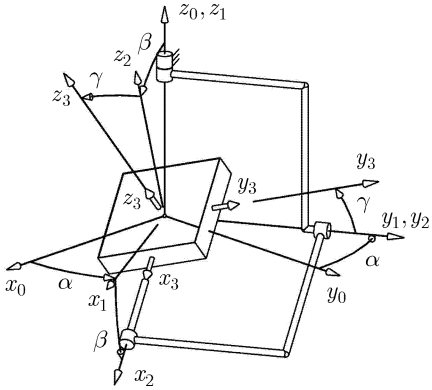
$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^3\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\ {}^3\boldsymbol{\omega}_{30}: \qquad \begin{bmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{c}\beta} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\gamma & 0 \\ \mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma & 0 \\ -\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma & \mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\omega_{30x} \\ {}^3\omega_{30y} \\ {}^3\omega_{30z} \end{bmatrix}.
$$

Tabelle 3.10 Definition und kinematische Gleichungen für die zyx-KARDAN-Winkel

- Drehungsfolge für die zyx-KARDAN-Winkel $\boldsymbol{\beta} = [\ \alpha \quad \beta \quad \gamma\ ]^{\mathrm{T}}$:

  Ausgangslage $\alpha = \beta = \gamma = 0$ Gedrehte Lage





- Drehmatrix:

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\alpha & -\mathrm{s}\alpha & 0 \\ \mathrm{s}\alpha & \mathrm{c}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta & 0 & \mathrm{s}\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}\beta & 0 & \mathrm{c}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\gamma & -\mathrm{s}\gamma \\ 0 & \mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta & -\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\gamma + \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\gamma + \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma \\ \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\gamma + \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & -\mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\gamma + \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma \\ -\mathrm{s}\beta & \mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma \end{bmatrix} .
$$

- Berechnung der zyx-KARDAN-Winkel aus der Drehmatrix ${}^{03}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{c}\beta = \sqrt{1 - T_{31}^2}\,, && \mathrm{s}\beta = -T_{31} && \rightarrow\ \beta && (-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2})\,, \\
&\mathrm{c}\alpha = \frac{T_{11}}{\mathrm{c}\beta}\,, && \mathrm{s}\alpha = \frac{T_{21}}{\mathrm{c}\beta} && \rightarrow\ \alpha\,, \\
&\mathrm{c}\gamma = \frac{T_{33}}{\mathrm{c}\beta}\,, && \mathrm{s}\gamma = \frac{T_{32}}{\mathrm{c}\beta} && \rightarrow\ \gamma\,.
\end{aligned}
$$

- Singularität: $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$.
- Kinematische Bewegungsgleichungen

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im Ausgangsystem $\mathcal{K}_0$:

$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^{0}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{30}: \qquad \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{c}\beta} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{s}\beta & \mathrm{s}\alpha\,\mathrm{s}\beta & \mathrm{c}\beta \\ -\mathrm{s}\alpha\,\mathrm{c}\beta & \mathrm{c}\alpha\,\mathrm{c}\beta & 0 \\ \mathrm{c}\alpha & \mathrm{s}\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{0}\omega_{30x} \\ {}^{0}\omega_{30y} \\ {}^{0}\omega_{30z} \end{bmatrix},
$$

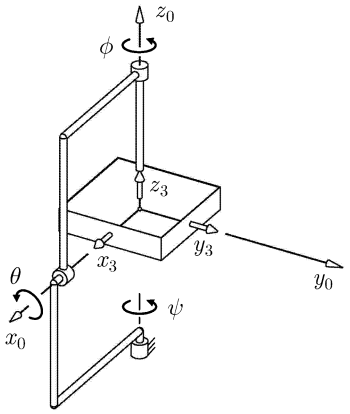
  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten System $\mathcal{K}_3$:

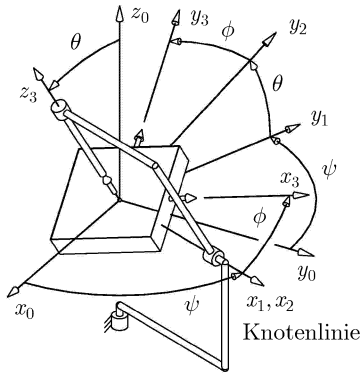
$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^{3}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\ {}^{3}\boldsymbol{\omega}_{30}: \qquad \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{c}\beta} \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{s}\gamma & \mathrm{c}\gamma \\ 0 & \mathrm{c}\beta\,\mathrm{c}\gamma & -\mathrm{c}\beta\,\mathrm{s}\gamma \\ \mathrm{c}\beta & \mathrm{s}\beta\,\mathrm{s}\gamma & \mathrm{s}\beta\,\mathrm{c}\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{3}\omega_{30x} \\ {}^{3}\omega_{30y} \\ {}^{3}\omega_{30z} \end{bmatrix}.
$$

Tabelle 3.11 Definition und kinematische Gleichungen für die zxz-EULER-Winkel

- Drehungsfolge für die zxz-EULER-Winkel $\boldsymbol{\beta} = [\ \psi \quad \theta \quad \phi\ ]^{\mathrm{T}}$:

  Ausgangslage $\psi = \theta = \phi = 0$ Gedrehte Lage





- Drehmatrix:

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi & -\mathrm{s}\psi & 0 \\ \mathrm{s}\psi & \mathrm{c}\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\theta & -\mathrm{s}\theta \\ 0 & \mathrm{s}\theta & \mathrm{c}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{c}\phi & -\mathrm{s}\phi & 0 \\ \mathrm{s}\phi & \mathrm{c}\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\phi - \mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\theta\,\mathrm{s}\phi & -\mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\phi - \mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\theta\,\mathrm{c}\phi & \mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\theta \\ \mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\phi + \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\theta\,\mathrm{s}\phi & -\mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\phi + \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\theta\,\mathrm{c}\phi & -\mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\theta \\ \mathrm{s}\theta\,\mathrm{s}\phi & \mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\phi & \mathrm{c}\theta \end{bmatrix} .
$$

- Berechnung der zxz-EULER-Winkel aus der Drehmatrix ${}^{03}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{c}\theta = T_{33}\,, && \mathrm{s}\theta = \sqrt{1 - T_{33}^2} && \rightarrow\ \theta \quad (0 < \theta < \pi)\,, \\
&\mathrm{c}\phi = \frac{T_{32}}{\mathrm{s}\theta}\,, && \mathrm{s}\phi = \frac{T_{31}}{\mathrm{s}\theta} && \rightarrow\ \phi\,, \\
&\mathrm{c}\psi = -\frac{T_{23}}{\mathrm{s}\theta}\,, && \mathrm{s}\psi = \frac{T_{13}}{\mathrm{s}\theta} && \rightarrow\ \psi\,.
\end{aligned}
$$

- Singularität: $\theta = 0,\ \pi$.
- Kinematische Bewegungsgleichungen

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$:

$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^{0}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\ {}^{0}\boldsymbol{\omega}_{30}: \qquad \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{s}\theta} \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\psi\,\mathrm{c}\theta & \mathrm{c}\psi\,\mathrm{c}\theta & \mathrm{s}\theta \\ \mathrm{c}\psi\,\mathrm{s}\theta & \mathrm{s}\psi\,\mathrm{s}\theta & 0 \\ \mathrm{s}\psi & -\mathrm{c}\psi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{0}\omega_{30x} \\ {}^{0}\omega_{30y} \\ {}^{0}\omega_{30z} \end{bmatrix},
$$

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten System $\mathcal{K}_3$:

$$
\dot{\boldsymbol{\beta}} = {}^{3}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\ {}^{3}\boldsymbol{\omega}_{30}: \qquad \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathrm{s}\theta} \begin{bmatrix} \mathrm{s}\phi & \mathrm{c}\phi & 0 \\ \mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\phi & -\mathrm{s}\theta\,\mathrm{s}\phi & 0 \\ -\mathrm{c}\theta\,\mathrm{s}\phi & -\mathrm{c}\theta\,\mathrm{c}\phi & \mathrm{s}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{3}\omega_{30x} \\ {}^{3}\omega_{30y} \\ {}^{3}\omega_{30z} \end{bmatrix}.
$$

3.7 EULER-Parameter (Quaternionen)

Die geometrische Bedeutung des Drehzeigers $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ aus Abb. 3.9 (Seite 55) legt es zunächst nahe, die vier Größen u_x, u_y, u_z, φ als Koordinaten der Drehung zu verwenden. Wegen der fehlenden Definition des Achsvektors $\boldsymbol{u}$ in der Lage $\varphi = 0$ ist dies aber ungünstig. Daher werden die aus dem Drehzeiger abgeleiteten EULER-Parameter (auch EULER-RODRIGUES-Parameter) eingeführt, siehe z.B. auch WITTENBURG [109] und NIKRAVESH [70]. Durch die Verwendung von vier Koordinaten besitzen die EULER-Parameter im Gegensatz zu den KARDAN- oder EULER-Winkeln keine Singularitäten.

In diesem Abschnitt werden die kinematischen Gleichungen für die EULER-Parameter zunächst aus dem Drehzeiger und dem Drehtensor entwickelt. Zusätzlich werden die Zusammenhänge auch mit Hilfe der Algebra der Quaternionen formuliert, womit u.A. die resultierenden EULER-Parameter mehrfacher Drehungen unmittelbar berechnet werden können.

3.7.1 EULER-*Parameter und Drehtensor*

Die vier EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}$ werden mit Hilfe des Drehzeigers $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ aus Abb. 3.9 definiert,

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} \\ \hline p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \hline u_x\,\sin\frac{\varphi}{2} \\ u_y\,\sin\frac{\varphi}{2} \\ u_z\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} . \tag{3.166}$$

Hierbei werden $p_\mathrm{s} = \cos\frac{\varphi}{2}$ als der Skalarteil und $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2}$ als der Vektorteil der EULER-Parameter eingeführt. Die vier EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}$ unterliegen der Normierungsbedingung

$$\phi(\underline{\boldsymbol{p}}) \equiv p_\mathrm{s}^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 1 = 0 \qquad \text{oder} \qquad p_\mathrm{s}^2 + \boldsymbol{p}^\mathrm{T}\boldsymbol{p} - 1 = 0\,, \tag{3.167}$$

wodurch nur drei der vier Größen voneinander unabhängig sind, entsprechend dem Freiheitsgrad drei der freien Drehung.

Der Drehtensor aus (3.97), $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}, \varphi) = \cos\varphi\,\boldsymbol{E} + \sin\varphi\,\widetilde{\boldsymbol{u}} + (1 - \cos\varphi)\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{u}^\mathrm{T}$, kann durch Einsetzen der trigonometrischen Umformungen

$$\cos\varphi = 2\cos^2\tfrac{\varphi}{2} - 1\,, \quad \sin\varphi = 2\sin\tfrac{\varphi}{2}\,\cos\tfrac{\varphi}{2}\,, \quad 1 - \cos\varphi \;=\; 2\sin^2\tfrac{\varphi}{2} \tag{3.168}$$

in Abhängigkeit von den EULER-Parametern dargestellt werden. Die Faktoren $\sin\frac{\varphi}{2}$ lassen sich dann mit dem Achsvektor $\boldsymbol{u}$ zum Vektorteil $\boldsymbol{p}$ der EULER-Parameter aus (3.166) zusammenfassen,

$$\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{p}}) = (2p_\mathrm{s}^2 - 1)\boldsymbol{E} + 2p_\mathrm{s}\,\widetilde{\boldsymbol{p}} + 2\,\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}^\mathrm{T}\,. \tag{3.169}$$

Mit der Umformung $\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}} \overset{(2.34)}{=} \widetilde{\boldsymbol{p}}\,\widetilde{\boldsymbol{p}} + (\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})\,\boldsymbol{E} \overset{(3.167)}{=} \widetilde{\boldsymbol{p}}\,\widetilde{\boldsymbol{p}} + (1 - p_{\mathrm{s}}^2)\,\boldsymbol{E}$ kann der Drehtensor auch geschrieben werden in der Form

$$\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E} + 2\,p_{\mathrm{s}}\,\widetilde{\boldsymbol{p}} + 2\,\widetilde{\boldsymbol{p}}\,\widetilde{\boldsymbol{p}}\,. \tag{3.170}$$

Die EULER-Parameter hängen vom gewählten Koordinatensystem des Vektorteils $\boldsymbol{p}$ ab. Wird das System der Ausgangslage $\mathcal{K}_0$ gewählt, also

$$^0\underline{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{s}} \\ {}^0\boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ {}^0\boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.171}$$

so entspricht die Koordinatendarstellung des Drehtensors der Drehmatrix

$$\boldsymbol{R}(^0\underline{\boldsymbol{p}}) = 2\,{}^0\begin{bmatrix} p_{\mathrm{s}}^2 + p_x^2 - \frac{1}{2} & p_x\,p_y - p_{\mathrm{s}}\,p_z & p_x\,p_z + p_{\mathrm{s}}\,p_y \\ p_x\,p_y + p_{\mathrm{s}}\,p_z & p_{\mathrm{s}}^2 + p_y^2 - \frac{1}{2} & p_y\,p_z - p_{\mathrm{s}}\,p_x \\ p_x\,p_z - p_{\mathrm{s}}\,p_y & p_y\,p_z + p_{\mathrm{s}}\,p_x & p_{\mathrm{s}}^2 + p_z^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.172}$$

die gemäß (3.108) zugleich die Transformationsmatrix $^{01}\boldsymbol{T}(t)$ von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_0$ ist, $\boldsymbol{R}(^0\underline{\boldsymbol{p}}) = {}^{01}\boldsymbol{T}$. Wegen (3.109) stimmen die Koordinaten von $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}\sin\frac{\varphi}{2}$ in $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_1$ überein,

$$^0\boldsymbol{p} = {}^1\boldsymbol{p} \qquad \text{und damit} \qquad {}^0\underline{\boldsymbol{p}} = {}^1\underline{\boldsymbol{p}}\,. \tag{3.173}$$

Der Drehtensor $\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{p}})$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

- Die EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}$ und $-\underline{\boldsymbol{p}}$ beschreiben dieselbe Drehung, also

  $$\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{R}(-\underline{\boldsymbol{p}})\,. \tag{3.174}$$

  Um diese Mehrdeutigkeit zu umgehen, werden die EULER-Parameter üblicherweise so angegeben, dass der Skalarteil $p_{\mathrm{s}} \geq 0$ ist.
- Für die Bildung der Drehmatrix der umgekehrten Drehung $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(\underline{\boldsymbol{p}})\,\boldsymbol{r}$ ist das Vorzeichen des Vektorteils $\boldsymbol{p}$ umzukehren, also

  $$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(p_{\mathrm{s}}, \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{R}(p_{\mathrm{s}}, -\boldsymbol{p})\,. \tag{3.175}$$

Beispiel Die EULER-Parameter der in Abb. 3.11 (Seite 61) dargestellten Drehung mit dem Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ aus (3.113) lauten (Darstellung in $\mathcal{K}_0$)

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \ \varphi = \tfrac{2}{3}\pi \quad \rightarrow \quad \underline{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{s}} \\ \hline p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \hline u_x\,\sin\frac{\varphi}{2} \\ u_y\,\sin\frac{\varphi}{2} \\ u_z\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.176}$$

Einsetzen von (3.176) in (3.172) ergibt die Drehmatrix (3.114).

3.7.2 EULER-*Parameter aus gegebener Drehmatrix*

Für die Berechnung der EULER-Parameter ${}^0\underline{\boldsymbol{p}}$ aus einer gegebenen Drehmatrix $\boldsymbol{R}({}^0\underline{\boldsymbol{p}}) = {}^{01}\boldsymbol{T}$ ergeben sich aus (3.172) die folgenden Bestimmungsgleichungen. Die Kennzeichnung des Systems $\mathcal{K}_0$ wird dabei weggelassen.

Gleichungen aus den Hauptdiagonalelementen Die Hauptdiagonalelemente der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$ liefern vier Bestimmungsgleichungen:

- Die Spur, also die Summe der Hauptdiagonalelemente, lautet

$$\begin{aligned} S &= T_{11} + T_{22} + T_{33} = 2\,(3\,p_\mathrm{s}^2 + \underbrace{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}_{(3.167):\ 1 - p_\mathrm{s}^2}\,) - 3 \\ \rightarrow\ S &= 4\,p_\mathrm{s}^2 - 1\,. \end{aligned} \tag{3.177}$$

  Daraus folgt $p_\mathrm{s}^2 = \frac{1}{4}(1 + S)$ bzw. mit einer formalen Erweiterung für die einheitliche Darstellung des nachfolgenden Berechnungsalgorithmus

$$p_\mathrm{s}^2 = \tfrac{1}{4}\,(1 + 2\,T_{00} - S) \qquad \text{mit} \qquad T_{00} = S\,. \tag{3.178a}$$

- Die einzelnen Hauptdiagonalelemente lauten

$$T_{11} = 2\,(p_\mathrm{s}^2 + p_x^2) - 1\,, \quad T_{22} = 2\,(p_\mathrm{s}^2 + p_y^2) - 1\,, \quad T_{33} = 2\,(p_\mathrm{s}^2 + p_z^2) - 1\,.$$

  Mit p_s^2 aus (3.178a) und der Spur S aus (3.177) folgen daraus

$$p_x^2 = \tfrac{1}{4}\,(1 + 2\,T_{11} - S)\,, \tag{3.178b}$$
$$p_y^2 = \tfrac{1}{4}\,(1 + 2\,T_{22} - S)\,, \tag{3.178c}$$
$$p_z^2 = \tfrac{1}{4}\,(1 + 2\,T_{33} - S)\,. \tag{3.178d}$$

Gleichungen aus den Nebendiagonalelementen Die Nebendiagonalelemente der Drehmatrix (T_{ij}) liefern sechs weitere Bestimmungsgleichungen:

- Die schiefsymmetrischen Nebendiagonalelemente liefern

$$4\,p_\mathrm{s}\,p_x = T_{32} - T_{23}\,, \tag{3.179a}$$
$$4\,p_\mathrm{s}\,p_y = T_{13} - T_{31}\,, \tag{3.179b}$$
$$4\,p_\mathrm{s}\,p_z = T_{21} - T_{12}\,. \tag{3.179c}$$

- Die symmetrischen Nebendiagonalelemente liefern

$$4\,p_y p_z = T_{32} + T_{23}\,, \tag{3.179d}$$
$$4\,p_z p_x = T_{13} + T_{31}\,, \tag{3.179e}$$
$$4\,p_x p_y = T_{21} + T_{12}\,. \tag{3.179f}$$

Algorithmus zur Berechnung der EULER-Parameter Aus den insgesamt zehn Bestimmungsgleichungen (3.178) und (3.179) können die vier EULER-Parameter p_s, p_x, p_y, p_z auf vielen Wegen berechnet werden. Ein singularitätsfreier und numerisch gut konditionierter Algorithmus wird von SHEPPERD [98] angegeben:

1. Berechnung der Spur $S \equiv T_{00} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$.
2. Aus einer der vier Gleichungen (3.178) wird der betragsgrößte EULER-Parameter berechnet. Werden die vier EULER-Parameter für diese Betrachtung mit p_0, p_1, p_2, p_3 bezeichnet, so wird der Index k des betragsgrößten EULER-Parameters auf Grund des gleichartigen Aufbaus der vier Gleichungen (3.178) unmittelbar so ermittelt, dass

$$T_{kk} = \max(T_{00}, T_{11}, T_{22}, T_{33}) \tag{3.180}$$

gilt. Der betragsgrößte EULER-Parameter lautet dann

$$p_k = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{1 + 2\,T_{kk} - S}\,. \tag{3.181}$$

Das Vorzeichen von p_k kann frei gewählt werden. Dies entspricht den beiden möglichen Vorzeichen der EULER-Parameter gemäß (3.174).
3. Aus den drei der sechs Gleichungen (3.179), die den betragsgrößten EULER-Parameter p_k aus (3.181) enthalten, werden die drei noch fehlenden EULER-Parameter berechnet, indem jeweils durch p_k dividiert wird.
4. Wird aus dieser Berechnung $p_0 \equiv p_\mathrm{s} < 0$ erhalten, so werden die erhaltenen EULER-Parameter mit -1 multipliziert.

Beispiele werden in Abschnitt 3.9 gezeigt.

3.7.3 EULER-*Parameter als Quaternionen*

Die EULER-Parameter können mathematisch auch als *Quaternionen* dargestellt werden. Damit können insbesondere die EULER-Parameter einer aus zwei Teildrehungen zusammengesetzten Drehung sowie der Zusammenhang mit der Winkelgeschwindigkeit günstig hergeleitet werden. Eine kurze allgemeine Einführung in die Algebra der Quaternionen gibt Anhang A.2.

Mit den vier EULER-Parametern aus (3.166) wird die Quaternion in Spaltenschreibweise als der 4-Vektor

$$\underline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \tag{3.182}$$

definiert. Wegen der Nebenbedingung (3.167) ist $\underline{\boldsymbol{p}}$ eine *Einheitsquaternion* mit der Eigenschaft $|\underline{\boldsymbol{p}}| = p_\mathrm{s}^2 + \boldsymbol{p}^\mathrm{T}\,\boldsymbol{p} = 1$. Mit der Quaternion $\underline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{u}, \varphi)$ kann die Drehung gemäß Abb. 3.9 (Seite 55) in Analogie zur Drehmatrizendarstellung in der aktiven oder in der passiven Betrachtungsweise dargestellt werden.

Aktive Betrachtung als Vektordrehung Die Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}(t)$,

$$ {}^0\boldsymbol{r}(t) = {}^0\boldsymbol{R}(t)\,{}^0\boldsymbol{r}_0 \qquad \text{mit} \qquad {}^0\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))\,, \tag{3.183} $$

wird unter Verwendung der Quaternion ${}^0\underline{\boldsymbol{p}} = \underline{\boldsymbol{p}}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)$ und ihrer Konjugierten $\overline{\underline{\boldsymbol{p}}}$ mit Hilfe des doppelten Quaternionenprodukts (Multiplikationsoperator $\circ$)

$$ \begin{aligned} {}^0\underline{\boldsymbol{r}}(t) &= {}^0\underline{\boldsymbol{p}}(t) \circ {}^0\underline{\boldsymbol{r}}_0 \circ {}^0\overline{\underline{\boldsymbol{p}}}(t) \\ \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\boldsymbol{r}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_\mathrm{s}(t) \\ {}^0\boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\boldsymbol{r}_0 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} p_\mathrm{s}(t) \\ -{}^0\boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.184} $$

formuliert. Die Vektoren ${}^0\boldsymbol{r}_0$ und ${}^0\boldsymbol{r}$ werden als *Vektorquaternionen* ${}^0\underline{\boldsymbol{r}}_0$ bzw. ${}^0\underline{\boldsymbol{r}}$, deren Skalarteil null ist, aufgefasst. Wird die Quaternionengleichung (3.184) mit Hilfe der Multiplikationsregel (A.34) unter Berücksichtigung von (A.35) ausgewertet, so liefert der Skalarteil der Gleichung die Identität $0 = 0$ und der Vektorteil die Vektordrehung (3.183).

Passive Betrachtung als Koordinatentransformation Die Transformation der Koordinaten eines Vektors $\boldsymbol{r}$ vom gedrehten System $\mathcal{K}_1$ in das Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ gemäß

$$ {}^0\boldsymbol{r}(t) = {}^{01}\boldsymbol{T}(t)\,{}^1\boldsymbol{r} \qquad \text{mit} \qquad {}^{01}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^0\boldsymbol{u}(t), \varphi(t)) \tag{3.185} $$

wird unter Verwendung der *Transformationsquaternion* ${}^{01}\underline{\boldsymbol{k}} = \underline{\boldsymbol{p}}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi)$ und ihrer Konjugierten ${}^{01}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}}$ mit Hilfe des doppelten Quaternionenprodukts

$$ {}^0\underline{\boldsymbol{r}}(t) = {}^{01}\underline{\boldsymbol{k}}(t) \circ {}^1\underline{\boldsymbol{r}} \circ {}^{01}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}}(t) \quad \text{mit} \quad {}^{01}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}} = \underline{\boldsymbol{p}}({}^0\boldsymbol{u}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ {}^0\boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.186} $$

formuliert. Unter Berücksichtigung von ${}^0\underline{\boldsymbol{r}}_0 = {}^1\underline{\boldsymbol{r}}$ stimmen die Quaternionengleichungen (3.184) und (3.186) überein.

3.7.4 Euler-*Parameter und mehrfache Drehungen*

Bei der Beschreibung von zwei hintereinandergeschalteten Drehungen mit Hilfe von Quaternionen können wie in Abschnitt 3.4 die aktive und die passive Betrachtungsweise unterschieden werden.

Aktive Betrachtung, Drehungen um die Ausgangsachsen Die hintereinandergeschalteten Drehungen mit den Drehzeigern $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ und $(\boldsymbol{w}, \psi)$ gemäß Tabelle 3.6 (Seite 64) lauten in Quaternionendarstellung (Darstellung aller Vektoren in $\mathcal{K}_0$)

$$
{}^0\underline{r}_{1'} = {}^0\underline{p}_1 \circ {}^0\underline{r}_0 \circ {}^0\overline{\underline{p}}_1 \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} p_{1\mathrm{s}} \\ {}^0\boldsymbol{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ {}^0\boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \hline \sin\frac{\varphi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.187}
$$

$$
{}^0\underline{r}_2 = {}^0\underline{p}_2 \circ {}^0\underline{r}_{1'} \circ {}^0\overline{\underline{p}}_2 \quad \text{mit} \quad {}^0\underline{p}_2 = \begin{bmatrix} p_{2\mathrm{s}} \\ {}^0\boldsymbol{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi}{2} \\ {}^0\boldsymbol{w}\,\sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi}{2} \\ \hline 0 \\ 0 \\ \sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.188}
$$

Einsetzen von (3.187) in (3.188) liefert die resultierende Drehung

$$
{}^0\underline{r}_2 = \underbrace{{}^0\underline{p}_2 \circ {}^0\underline{p}_1}_{{}^0\underline{p}_{20}} \circ {}^0\underline{r}_0 \circ \underbrace{{}^0\overline{\underline{p}}_1 \circ {}^0\overline{\underline{p}}_2}_{{}^0\overline{\underline{p}}_{20}} \tag{3.189}
$$

mit der resultierenden Quaternion ${}^0\underline{p}_{20} = {}^0\underline{p}_2 \circ {}^0\underline{p}_1$ oder

$$
{}^0\underline{p}_{20} = \begin{bmatrix} p_{20\mathrm{s}} \\ {}^0\boldsymbol{p}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2\mathrm{s}}\,p_{1\mathrm{s}} - {}^0\boldsymbol{p}_2^{\mathrm{T}}\,{}^0\boldsymbol{p}_1 \\ p_{2\mathrm{s}}\,{}^0\boldsymbol{p}_1 + p_{1\mathrm{s}}\,{}^0\boldsymbol{p}_2 + {}^0\widetilde{\boldsymbol{p}}_2\,{}^0\boldsymbol{p}_1 \end{bmatrix} \tag{3.190}
$$

und der konjugierten Quaternion ${}^0\overline{\underline{p}}_{20} = {}^0\overline{\underline{p}}_1 \circ {}^0\overline{\underline{p}}_2 = \overline{{}^0\underline{p}_2 \circ {}^0\underline{p}_1}$. Mit Hilfe von (3.190) werden die EULER-Parameter der resultierenden Drehung direkt aus den EULER-Parametern der Einzeldrehungen berechnet.

Die Auswertung von (3.190) mit (3.187) und (3.188) ergibt

$$
{}^0\underline{p}_{20} = \begin{bmatrix} p_{20\mathrm{s}} \\ {}^0\boldsymbol{p}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2}\,\cos\frac{\psi}{2} \\ \hline \cos\frac{\varphi}{2}\,\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2}\,\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2}\,\sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.191}
$$

Geometrisch lassen sich die EULER-Parameter $\underline{p}_{20}$ der Gesamtdrehung mit Hilfe des Drehzeigers $(\boldsymbol{e}_{20}, \gamma)$ interpretieren, der den Vektor $\boldsymbol{r}_0$ direkt in den Vektor $\boldsymbol{r}_2$ überführt. Aus dem Aufbau der EULER-Parameter $\underline{p}_{20}$ mit $p_{20\mathrm{s}} = \cos\frac{\gamma}{2}$, $\boldsymbol{p}_{20} = \boldsymbol{e}_{20}\sin\frac{\gamma}{2}$ ergibt sich der Drehzeiger $(\boldsymbol{e}_{20}, \gamma)$ mit

$$
\boldsymbol{e}_{20} = \frac{\boldsymbol{p}_{20}}{|\boldsymbol{p}_{20}|}, \qquad \gamma = 2\arccos p_{20\mathrm{s}}\,. \tag{3.192}
$$

Passive Betrachtung, Drehungen um die mitgedrehten Achsen Die Koordinaten z.B. des Vektors $\boldsymbol{r}_2$ werden gemäß Tabelle 3.7 (Seite 67) mit Hilfe der Transformationsquaternionen vom System $\mathcal{K}_2$ der Endlage über das Zwischensystem $\mathcal{K}_1$ in das Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ transformiert,

$$ {}^{0}\underline{\boldsymbol{r}}_2 = {}^{01}\underline{\boldsymbol{k}} \circ {}^{1}\underline{\boldsymbol{r}}_2 \circ {}^{01}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}} \quad \text{mit} \quad {}^{01}\underline{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\psi}{2} \\ {}^{0}\boldsymbol{w}\,\sin\frac{\psi}{2} \end{bmatrix}, \tag{3.193} $$

$$ {}^{1}\underline{\boldsymbol{r}}_2 = {}^{12}\underline{\boldsymbol{k}} \circ {}^{2}\underline{\boldsymbol{r}}_2 \circ {}^{12}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}} \quad \text{mit} \quad {}^{12}\underline{\boldsymbol{k}} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ {}^{1}\boldsymbol{u}_1\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ {}^{0}\boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.194} $$

Einsetzen von (3.194) in (3.193) liefert die Koordinatentransformation

$$ {}^{0}\underline{\boldsymbol{r}}_2 = {}^{02}\underline{\boldsymbol{k}} \circ {}^{2}\underline{\boldsymbol{r}}_2 \circ {}^{02}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}} \qquad \text{mit} \qquad {}^{02}\underline{\boldsymbol{k}} = {}^{01}\underline{\boldsymbol{k}} \circ {}^{12}\underline{\boldsymbol{k}}\,. \tag{3.195} $$

Unter Berücksichtigung von ${}^{0}\underline{\boldsymbol{r}}_0 = {}^{2}\underline{\boldsymbol{r}}_2$ und von ${}^{0}\underline{\boldsymbol{p}}_{20} = {}^{02}\underline{\boldsymbol{k}}$ stimmen die Quaternionengleichungen (3.189) und (3.195) überein.

3.7.5 EULER-*Parameter und Winkelgeschwindigkeit*

Der Zusammenhang zwischen den zeitlichen Änderungen der EULER-Parameter $\dot{\boldsymbol{p}}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10}$ des körperfesten Systems $\mathcal{K}_1$ relativ zum Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ kann hergeleitet werden, indem gemäß Abb. 3.14 a (Seite 70) der endlichen Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ die infinitesimale Drehung in den Vektor $\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)$ nachgeschaltet wird.

Die Drehung des Vektors $\boldsymbol{r}_0$ in den Vektor $\boldsymbol{r}(t)$ mit dem zeitlich veränderlichen Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t), \varphi(t))$ lautet in Quaternionendarstellung

$$ \underline{\boldsymbol{r}}(t) = \underline{\boldsymbol{p}}(t) \circ \underline{\boldsymbol{r}}_0 \circ \overline{\underline{\boldsymbol{p}}}(t) \quad \text{mit} \quad \underline{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{s}}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.196} $$

Die anschließende infinitesimale Drehung von $\boldsymbol{r}(t)$ nach $\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)$ erfolgt um den Drehzeiger $(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi)$. In Quaternionendarstellung lautet sie

$$ \boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t) = \underline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi) \circ \underline{\boldsymbol{r}}(t) \circ \overline{\underline{\boldsymbol{p}}}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi) \tag{3.197} $$

mit der bezüglich des Winkels $\mathrm{d}\psi$ linearisierten Quaternion

$$ \underline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\mathrm{d}\psi}{2} \\ \boldsymbol{e}\,\sin\frac{\mathrm{d}\psi}{2} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{e}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.198} $$

Einsetzen von (3.196) in (3.197) ergibt die Drehung von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)$,

$$ \boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t) = \underline{\boldsymbol{p}}(t+\mathrm{d}t) \circ \underline{\boldsymbol{r}}_0 \circ \overline{\underline{\boldsymbol{p}}}(t+\mathrm{d}t)\,, \tag{3.199} $$

mit der Quaternion zum Drehzeiger $(\boldsymbol{u}(t+\mathrm{d}t), \varphi(t+\mathrm{d}t))$ gemäß Abb. 3.14 b

$$ \underline{\boldsymbol{p}}(t+\mathrm{d}t) = \underline{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi) \circ \underline{\boldsymbol{p}}(t) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{2} \end{bmatrix} \right) \circ \begin{bmatrix} p_{\mathrm{s}}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix} \tag{3.200} $$

bzw. mit (A.36)

$$\underline{\boldsymbol{p}}(t+\mathrm{d}t) = \underbrace{\begin{bmatrix} p_\mathrm{s}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix}}_{\underline{\boldsymbol{p}}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{e}\,\frac{\mathrm{d}\psi}{2} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} p_\mathrm{s}(t) \\ \boldsymbol{p}(t) \end{bmatrix}}_{\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{p}}} . \tag{3.201}$$

Hierbei ist $\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{p}}$ die Änderung der Quaternion $\underline{\boldsymbol{p}}(t)$ auf Grund der infinitesimalen Drehung $(\boldsymbol{e}, \mathrm{d}\psi)$. Wird $\mathrm{d}\underline{\boldsymbol{p}}$ auf das Zeitintervall $\mathrm{d}t$ bezogen, so ergibt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{10} = \boldsymbol{e}\,\dot{\psi}$ gemäß (3.143) die zeitliche Änderung ${}_0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}}$ der Quaternion $\underline{\boldsymbol{p}}$ relativ zum Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}p_\mathrm{s}}{\mathrm{d}t} \\ \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}_0\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \quad \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{1}{2}\ \underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} \circ \underline{\boldsymbol{p}} \qquad\qquad \rightarrow \quad {}_0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}} = \tfrac{1}{2}\ \underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} \circ \underline{\boldsymbol{p}} \end{aligned} \tag{3.202}$$

mit der zu $\boldsymbol{\omega}_{10}$ gehörenden Vektorquaternion $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}$. Mit dem Quaternionenprodukt in Matrizenschreibweise gemäß (A.40) lautet (3.202)

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}_0\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & -\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \quad {}_0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}} = \tfrac{1}{2}\ \underline{\boldsymbol{P}}(\underline{\boldsymbol{p}})\ \underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} . \end{aligned} \tag{3.203}$$

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ Die Vektorgleichung (3.203) wird günstig im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ ausgewertet, da die Ableitung der $\mathcal{K}_0$-Koordinaten des Vektorteils ${}^0\boldsymbol{p}$ gemäß (3.36) direkt die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{p}$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ liefert, also ${}^0\dot{\boldsymbol{p}} \equiv {}^0[{}_0\dot{\boldsymbol{p}}]$. Damit ist

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & -{}^0\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ {}^0\boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\boldsymbol{E} - {}^0\widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \quad {}^0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}} = \tfrac{1}{2}\ \underline{\boldsymbol{P}}({}^0\underline{\boldsymbol{p}})\ {}^0\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} . \end{aligned} \tag{3.204}$$

Die Matrix $\underline{\boldsymbol{P}}$ in (3.204) ist orthogonal, also $\underline{\boldsymbol{P}}^{-1} = \underline{\boldsymbol{P}}^\mathrm{T}$, was sich durch Berechnen von $\underline{\boldsymbol{P}}\,\underline{\boldsymbol{P}}^\mathrm{T} = \boldsymbol{E}_4$ bestätigen läßt. Damit kann auch $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ durch ${}^0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}}$ ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 \\ {}^0\boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & {}^0\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ -{}^0\boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\boldsymbol{E} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \quad {}^0\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} = 2\ \underline{\boldsymbol{P}}^\mathrm{T}({}^0\underline{\boldsymbol{p}})\ {}^0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}} . \end{aligned} \tag{3.205}$$

Die erste Gleichung in (3.205) ist die Zeitableitung der Normierungsbedingung (3.167).

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ Werden die Koordinaten ${}^0\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ mit Hilfe der Transformation in Quaternionendarstellung gemäß (3.186) durch ${}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ ausgedrückt,

$$ {}^0\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} = {}^{01}\underline{\boldsymbol{k}} \circ {}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} \circ {}^{01}\overline{\underline{\boldsymbol{k}}} \qquad \text{mit} \qquad {}^{01}\underline{\boldsymbol{k}} = {}^0\underline{\boldsymbol{p}}\,, \tag{3.206} $$

und in die in $\mathcal{K}_0$ dargestellte Gleichung (3.202) eingesetzt, so ergibt sich

$$ {}^0\underline{\dot{\boldsymbol{p}}} = \tfrac{1}{2}\,{}^0\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} \circ {}^0\underline{\boldsymbol{p}} = \tfrac{1}{2}\,{}^0\underline{\boldsymbol{p}} \circ {}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} \circ \underbrace{{}^0\overline{\underline{\boldsymbol{p}}} \circ {}^0\underline{\boldsymbol{p}}}_{\underline{1}} \tag{3.207} $$

oder mit dem Quaternionenprodukt in Matrizenschreibweise gemäß (A.39)

$$ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & -{}^0\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ {}^0\boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^1\boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}^0\underline{\dot{\boldsymbol{p}}} &= \tfrac{1}{2} \qquad \underline{\boldsymbol{P}}({}^0\underline{\boldsymbol{p}}) \qquad {}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,. \end{aligned} \tag{3.208} $$

Der umgekehrte Zusammenhang ergibt sich aus (3.208) mit $\underline{\boldsymbol{P}}^{-1} = \underline{\boldsymbol{P}}^\mathrm{T}$

$$ \begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^1\boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & {}^0\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ -{}^0\boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} - {}^0\widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}^0\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10} &= 2 \qquad \underline{\boldsymbol{P}}^\mathrm{T}({}^0\underline{\boldsymbol{p}}) \qquad {}^0\underline{\dot{\boldsymbol{p}}}\,. \end{aligned} \tag{3.209} $$

Die kinematischen Gleichungen für die EULER-Parameter sind in Tabelle 3.12 zusammengefaßt.

Weitere Interpretation von (3.208) Wird im Vektorteil von (3.203), also ${}_0\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2} p_\mathrm{s}\,\boldsymbol{\omega}_{10} - \widetilde{\boldsymbol{p}}\,\boldsymbol{\omega}_{10}$, die Zeitableitung des Vektorteils der Quaternion ${}_0\dot{\boldsymbol{p}}$ mit Hilfe der Übergangsgleichung (3.34) durch die Zeitableitung ${}_1\dot{\boldsymbol{p}}$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ ausgedrückt, also ${}_0\dot{\boldsymbol{p}} = {}_1\dot{\boldsymbol{p}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,\boldsymbol{p}$, so geht (3.203) über in

$$ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}_1\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & -\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} + \widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}_1\underline{\dot{\boldsymbol{p}}} &= \tfrac{1}{2} \qquad \underline{\boldsymbol{P}}(\underline{\boldsymbol{p}}) \qquad \underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,. \end{aligned} \tag{3.210} $$

Im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ lautet (3.210) mit ${}^1\dot{\boldsymbol{p}} \equiv {}^1[{}_1\dot{\boldsymbol{p}}]$

$$ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ {}^1\dot{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} & -{}^1\boldsymbol{p}^\mathrm{T} \\ {}^1\boldsymbol{p} & p_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} + {}^1\widetilde{\boldsymbol{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ {}^1\boldsymbol{\omega}_{10} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}^1\underline{\dot{\boldsymbol{p}}} &= \tfrac{1}{2} \qquad \underline{\boldsymbol{P}}({}^1\underline{\boldsymbol{p}}) \qquad {}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}\,. \end{aligned} \tag{3.211} $$

Diezeitliche Ableitung von ${}^0\boldsymbol{p} = {}^1\boldsymbol{p}$ gemäß (3.173) ergibt unter Berücksichtigung von (3.36) ${}^0[{}_0\dot{\boldsymbol{p}}] = {}^1[{}_1\dot{\boldsymbol{p}}]$. Damit stimmt (3.211) mit (3.208) überein.

Tabelle 3.12 Definition und kinematische Gleichungen für die EULER-Parameter

- Definition der EULER-Parameter mit Hilfe des Drehzeigers $(\boldsymbol{u}, \varphi)$:

$$\underline{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} p_\mathrm{s} \\ \hline p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \hline u_x \sin\frac{\varphi}{2} \\ u_y \sin\frac{\varphi}{2} \\ u_z \sin\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \qquad (\underline{\boldsymbol{p}} \text{ in } \mathcal{K}_0 \text{ dargestellt}).$$

- Nebenbedingung:

$$\phi(\underline{\boldsymbol{p}}) \equiv p_\mathrm{s}^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 1 = 0\,.$$

- Drehtensorkoordinaten, Drehmatrix:

$$\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{p}}) = 2 \begin{bmatrix} p_\mathrm{s}^2 + p_x^2 - \frac{1}{2} & p_x\,p_y - p_\mathrm{s}\,p_z & p_x\,p_z + p_\mathrm{s}\,p_y \\ p_x\,p_y + p_\mathrm{s}\,p_z & p_\mathrm{s}^2 + p_y^2 - \frac{1}{2} & p_y\,p_z - p_\mathrm{s}\,p_x \\ p_x\,p_z - p_\mathrm{s}\,p_y & p_y\,p_z + p_\mathrm{s}\,p_x & p_\mathrm{s}^2 + p_z^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = {}^{01}\boldsymbol{T}.$$

- Berechnung der EULER-Parameter aus der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$:

  1. Berechnen der Spur

     $$S = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

  2. Berechnen des betragsgrößten EULER-Parameters aus

     $$\begin{aligned} p_\mathrm{s}^2 &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\,T_{00} - S) \quad \text{mit} \quad T_{00} = S\,, \\ p_x^2 &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\,T_{11} - S)\,, \\ p_y^2 &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\,T_{22} - S)\,, \\ p_z^2 &= \tfrac{1}{4}(1 + 2\,T_{33} - S) \end{aligned}$$

  3. Berechnen der drei weiteren EULER-Parameter aus

     $$\begin{aligned} 4p_\mathrm{s}\,p_x &= T_{32} - T_{23}\,, \\ 4p_\mathrm{s}\,p_y &= T_{13} - T_{31}\,, \\ 4p_\mathrm{s}\,p_z &= T_{21} - T_{12}\,, \\ 4p_y p_z &= T_{32} + T_{23}\,, \\ 4p_z p_x &= T_{13} + T_{31}\,, \\ 4p_x p_y &= T_{21} + T_{12}\,. \end{aligned}$$

  4. Bei $p_\mathrm{s} < 0$ Multiplikation aller EULER-Parameter mit -1.

- Singularität: entfällt.

- Kinematische Bewegungsgleichungen

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im Ausgangsystem $\mathcal{K}_0$ gemäß (3.204):

$$\dot{\underline{\boldsymbol{p}}} = \tfrac{1}{2}\,\overline{\boldsymbol{P}}(\underline{\boldsymbol{p}})\,{}^0\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}: \qquad \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ \hline \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \left[\begin{array}{c|ccc} p_\mathrm{s} & -p_x & -p_y & -p_z \\ \hline p_x & p_\mathrm{s} & p_z & -p_y \\ p_y & -p_z & p_\mathrm{s} & p_x \\ p_z & p_y & -p_x & p_\mathrm{s} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \hline {}^0\omega_{10x} \\ {}^0\omega_{10y} \\ {}^0\omega_{10z} \end{bmatrix}$$

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ gemäß (3.208) bzw. (3.211):

$$\dot{\underline{\boldsymbol{p}}} = \tfrac{1}{2}\,\underline{\boldsymbol{P}}(\underline{\boldsymbol{p}})\,{}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}: \qquad \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ \hline \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \left[\begin{array}{c|ccc} p_\mathrm{s} & -p_x & -p_y & -p_z \\ \hline p_x & p_\mathrm{s} & -p_z & p_y \\ p_y & p_z & p_\mathrm{s} & -p_x \\ p_z & -p_y & p_x & p_\mathrm{s} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \hline {}^1\omega_{10x} \\ {}^1\omega_{10y} \\ {}^1\omega_{10z} \end{bmatrix}.$$

3.8 Rodrigues-Parameter

Die $m = 3$ Rodrigues-Parameter werden aus den $m = 4$ Euler-Parametern $\underline{\boldsymbol{p}}$ erhalten, indem der Vektorteil $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u} \sin \frac{\varphi}{2}$ mit dem Skalarteil $p_\mathrm{s} = \cos \frac{\varphi}{2}$ normiert wird,

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{p}}{p_\mathrm{s}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{u} \tan \frac{\varphi}{2} \,. \tag{3.212}$$

Der Vektor $\boldsymbol{\lambda}$ wird auch als Gibbs-Vektor bezeichnet. Die Rodrigues-Parameter sind bei dem Drehwinkel $\varphi = \pi$ singulär.

3.8.1 Rodrigues-*Parameter und Drehtensor*

Der Drehtensor (3.170), $\boldsymbol{R}(\underline{\boldsymbol{p}}) = \boldsymbol{E} + 2\, p_\mathrm{s}\, \widetilde{\boldsymbol{p}} + 2\, \widetilde{\boldsymbol{p}}\, \widetilde{\boldsymbol{p}}$, kann mit Hilfe von $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\lambda}\, p_\mathrm{s}$ und mit p_s aus der trigonometrischen Beziehung

$$p_\mathrm{s}^2 \equiv \cos^2 \tfrac{\varphi}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} \qquad \text{und damit} \qquad p_\mathrm{s}^2 = \frac{1}{1 + \boldsymbol{\lambda}^\mathrm{T} \boldsymbol{\lambda}} \tag{3.213}$$

in Abhängigkeit von den Rodrigues-Parametern $\boldsymbol{\lambda}$ ausgedrückt werden,

$$\boldsymbol{R}_{10}(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{E} + 2\, \frac{\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} + \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}\, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}}}{1 + \boldsymbol{\lambda}^\mathrm{T} \boldsymbol{\lambda}} \,. \tag{3.214}$$

3.8.2 Rodrigues-*Parameter und Winkelgeschwindigkeit*

Die zeitlichen Änderungen der Rodrigues-Parameter ${}_0\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ relativ zum Ausgangssystem der Drehung $\mathcal{K}_0$ lauten ausgehend von (3.212)

$${}_0\dot{\boldsymbol{p}} = {}_0\dot{\boldsymbol{\lambda}}\, p_\mathrm{s} + \boldsymbol{\lambda}\, \dot{p}_\mathrm{s} \qquad \rightarrow \qquad {}_0\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \frac{1}{p_\mathrm{s}} \left({}_0\dot{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{\lambda}\, \dot{p}_\mathrm{s} \right) \,. \tag{3.215}$$

Einsetzen der zeitlichen Änderung der Euler-Parameter aus (3.204),

$$\dot{p}_\mathrm{s} = -\tfrac{1}{2}\, \boldsymbol{p}^\mathrm{T}\, \boldsymbol{\omega}_{10} \,, \qquad {}_0\dot{\boldsymbol{p}} = \tfrac{1}{2}\, \left(p_\mathrm{s}\, \boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{p}} \right) \boldsymbol{\omega}_{10} \,, \tag{3.216}$$

liefert unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{\lambda}\, p_\mathrm{s}$ die kinematischen Bewegungsgleichungen für die Rodrigues-Parameter in vektorieller Form

$${}_0\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \tfrac{1}{2} \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\lambda}\, \boldsymbol{\lambda}^\mathrm{T} - \widetilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) \boldsymbol{\omega}_{10} \,. \tag{3.217}$$

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ im Ausgangssystem $\mathcal{K}_0$ Die kinematischen Bewegungsgleichungen (3.217) lauten in $\mathcal{K}_0$ mit ${}^0\dot{\boldsymbol{\lambda}} \equiv {}^0[{}_0\dot{\boldsymbol{\lambda}}]$

$$ {}^0\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{E} + {}^0\boldsymbol{\lambda}\,{}^0\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} - {}^0\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) {}^0\boldsymbol{\omega}_{10} \,. \tag{3.218} $$

Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ körperfesten System $\mathcal{K}_1$ Die kinematischen Bewegungsgleichungen bei Darstellung von $\boldsymbol{\omega}_{10}$ im gedrehten System $\mathcal{K}_1$ werden aus (3.208) erhalten,

$$ {}^0\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{E} + {}^0\boldsymbol{\lambda}\,{}^0\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} + {}^0\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} \right) {}^1\boldsymbol{\omega}_{10} \,. \tag{3.219} $$

Die kinematischen Gleichungen für die RODRIGUES-Parameter sind in Tabelle 3.13 zusammengefasst.

Tabelle 3.13 Definition und kinematische Gleichungen für die RODRIGUES-Parameter

- Definition der RODRIGUES-Parameter mit Hilfe des Drehzeigers $(\boldsymbol{u}, \varphi)$:

$$ \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \tan\frac{\varphi}{2} \\ u_y \tan\frac{\varphi}{2} \\ u_z \tan\frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{\lambda} \text{ in } \mathcal{K}_0 \text{ dargestellt}). $$

- Drehtensorkoordinaten, Drehmatrix:

$$ \begin{aligned} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\lambda}) &= {}^{01}\boldsymbol{T} \\ &= \frac{1}{1+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}} \begin{bmatrix} 1+\lambda_x^2-\lambda_y^2-\lambda_z^2 & 2(\lambda_x\,\lambda_y-\lambda_z) & 2(\lambda_x\,\lambda_z+\lambda_y) \\ 2(\lambda_x\,\lambda_y+\lambda_z) & 1-\lambda_x^2+\lambda_y^2-\lambda_z^2 & 2(\lambda_y\,\lambda_z-\lambda_x) \\ 2(\lambda_x\,\lambda_z-\lambda_y) & 2(\lambda_y\,\lambda_z+\lambda_x) & 1-\lambda_x^2-\lambda_y^2+\lambda_z^2 \end{bmatrix} \end{aligned} $$

- Berechnung der RODRIGUES-Parameter aus der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T} = (T_{ij})$:
  1. Berechnen der EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}} = [\, p_{\mathrm{s}} \;\; p_x \;\; p_y \;\; p_z \,]^{\mathrm{T}}$ gemäß Tabelle 3.12.
  2. Berechnen der RODRIGUES-Parameter aus

$$ \lambda_x = \frac{p_x}{p_{\mathrm{s}}}\,, \qquad \lambda_y = \frac{p_y}{p_{\mathrm{s}}}\,, \qquad \lambda_z = \frac{p_z}{p_{\mathrm{s}}}\,. $$

- Singularität: $\tan\frac{\varphi}{2} = p_{\mathrm{s}} = 0$ bzw. $\varphi = \pi$.
- Kinematische Bewegungsgleichungen

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im Ausgangsystem $\mathcal{K}_0$ gemäß (3.218):

$$ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{\lambda})\,{}^0\boldsymbol{\omega}_{10} : \quad \begin{bmatrix} \dot\lambda_x \\ \dot\lambda_y \\ \dot\lambda_z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\lambda_x^2 & \lambda_x\,\lambda_y+\lambda_z & \lambda_x\,\lambda_z-\lambda_y \\ \lambda_x\,\lambda_y-\lambda_z & 1+\lambda_y^2 & \lambda_y\,\lambda_z+\lambda_x \\ \lambda_x\,\lambda_z+\lambda_y & \lambda_y\,\lambda_z-\lambda_x & 1+\lambda_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^0\omega_{10x} \\ {}^0\omega_{10y} \\ {}^0\omega_{10z} \end{bmatrix} $$

  Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ gemäß (3.219):

$$ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{\lambda})\,{}^1\boldsymbol{\omega}_{10} : \quad \begin{bmatrix} \dot\lambda_x \\ \dot\lambda_y \\ \dot\lambda_z \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\lambda_x^2 & \lambda_x\,\lambda_y-\lambda_z & \lambda_x\,\lambda_z+\lambda_y \\ \lambda_x\,\lambda_y+\lambda_z & 1+\lambda_y^2 & \lambda_y\,\lambda_z-\lambda_x \\ \lambda_x\,\lambda_z-\lambda_y & \lambda_y\,\lambda_z+\lambda_x & 1+\lambda_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1\omega_{10x} \\ {}^1\omega_{10y} \\ {}^1\omega_{10z} \end{bmatrix} $$

3.9 Beispiele zu Koordinaten von Drehungen

Die Definition von Koordinaten, wie die KARDAN- und EULER-Winkel, die EULER-Parameter und die RODRIGUES-Parameter, wird auch als *Parametrierung* der Drehung bezeichnet. In diesem Abschnitt werden Beispiele für die kinematischen Gleichungen beschrieben. Für eine gegebene Drehung werden die dazu gehörenden Koordinaten ermittelt. Weiterhin wird zu einer gegebenen Winkelgeschwindigkeit die zeitlichen Änderung der Koordinaten mit Hilfe der kinematischen Bewegungsgleichungen berechnet.

3.9.1 Koordinaten zu einer gegebenen Drehung

Gegeben ist die in Abb. 3.17 a dargestellte Drehung einer rechteckigen Platte mit der Ausgangslage $\mathcal{K}_0$ und der gedrehte Lage $\mathcal{K}_1$ des körperfesten Koordinatensystems. Gesucht sind die Werte der verschiedenen Koordinaten.

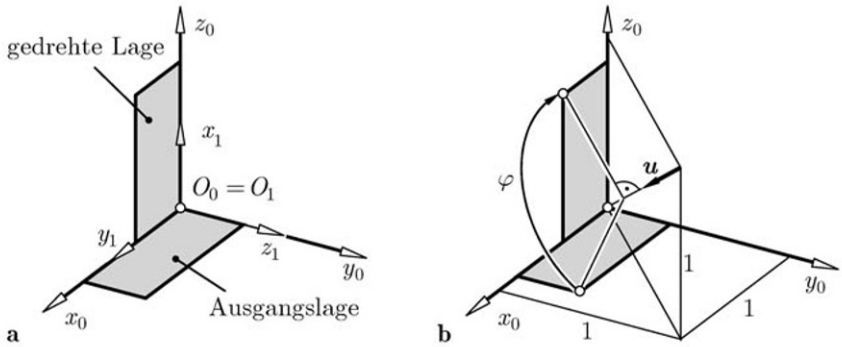


Abb. 3.17 Drehung eines Körpers. **a** Ausgangs- und Endlage. **b** Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$

Drehmatrix Die aus Abb. 3.17 a direkt zu entnehmenden Koordinaten der Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{x1}$, $\boldsymbol{e}_{y1}$, $\boldsymbol{e}_{z1}$ des Systems $\mathcal{K}_1$ im System $\mathcal{K}_0$ ergeben mit (3.2) die Drehmatrix

$$^{01}\boldsymbol{T} = \left[\, {}^{0}\boldsymbol{e}_{x1} \;\; {}^{0}\boldsymbol{e}_{y1} \;\; {}^{0}\boldsymbol{e}_{z1} \,\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (T_{ij})\,. \tag{3.220}$$

***xyz*-KARDAN-Winkel** Die zu der Drehmatrix $^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.220) gehörenden xyz-KARDAN-Winkel lauten gemäß Tabelle 3.9

$$\cos\beta = \sqrt{1 - T_{13}^2} = 1\,, \quad \sin\beta = T_{13} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \beta = 0\,, \tag{3.221}$$

$$\cos\gamma = \frac{T_{11}}{\cos\beta} = 0\,, \qquad \sin\gamma = -\frac{T_{12}}{\cos\beta} = -1 \qquad \rightarrow \qquad \gamma = -\frac{\pi}{2}\,, \tag{3.222}$$

$$\cos\alpha = \frac{T_{33}}{\cos\beta} = 0\,, \qquad \sin\alpha = -\frac{T_{23}}{\cos\beta} = -1 \qquad \rightarrow \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2}\,. \tag{3.223}$$

***zxz*-Euler-Winkel** Die zu der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.220) gehörenden zxz-Euler-Winkel lauten gemäß Tabelle 3.11

$$\cos\theta = T_{33} = 0\,, \qquad \sin\theta = \sqrt{1 - T_{33}^2} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi}{2}\,, \tag{3.224}$$

$$\cos\phi = \frac{T_{32}}{\sin\theta} = 0\,, \qquad \sin\phi = \frac{T_{31}}{\sin\theta} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \phi = \frac{\pi}{2}\,, \tag{3.225}$$

$$\cos\psi = -\frac{T_{23}}{\sin\theta} = -1\,, \quad \sin\psi = \frac{T_{13}}{\sin\theta} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \psi = \pi\,. \tag{3.226}$$

Euler-Parameter Die Spur der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.220) ist $S \equiv T_{00} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 0$. Wegen $T_{00} = T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$ haben alle Euler-Parameter den gleichen Betrag. Es kann frei entschieden werden, welcher Euler-Parameter aus den Gleichungen (3.178) zuerst berechnet wird. Gewählt wird $p_0 \mathrel{\hat{=}} p_\mathrm{s}$. Für den Index $k = 0$ ergibt (3.181) bei Wahl des positiven Vorzeichens

$$p_0 \mathrel{\hat{=}} p_\mathrm{s} = +\frac{1}{2}\sqrt{1 + 2\,T_{00} - S} \qquad \rightarrow \qquad p_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\,. \tag{3.227}$$

Die weiteren drei Euler-Parameter werden aus den Bestimmungsgleichungen (3.179a), (3.179b) und (3.179c) berechnet,

$$p_1 \mathrel{\hat{=}} p_x = \frac{1}{4\,p_\mathrm{s}}\,(T_{32} - T_{23}) = -\frac{1}{2}\,, \tag{3.228}$$

$$p_2 \mathrel{\hat{=}} p_y = \frac{1}{4\,p_\mathrm{s}}\,(T_{13} - T_{31}) = -\frac{1}{2}\,, \tag{3.229}$$

$$p_3 \mathrel{\hat{=}} p_z = \frac{1}{4\,p_\mathrm{s}}\,(T_{21} - T_{12}) = -\frac{1}{2}\,. \tag{3.230}$$

Rodrigues-Parameter Die zu der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.220) gehörenden Rodrigues-Parameter werden aus den mit (3.227) bis (3.230) vorliegenden Euler-Parametern berechnet,

$$\lambda_x = \frac{p_x}{p_\mathrm{s}} = -1\,, \qquad \lambda_y = \frac{p_y}{p_\mathrm{s}} = -1\,, \qquad \lambda_z = \frac{p_z}{p_\mathrm{s}} = -1\,. \tag{3.231}$$

Drehzeiger Der zu der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.220) gehörende Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ wird ebenfalls aus den mit (3.227) bis (3.230) vorliegenden EULER-Parametern berechnet. Mit der Definition (3.166) der EULER-Parameter,

$$p_{\mathrm{s}} = \cos\frac{\varphi}{2} \quad (\geq 0)\,, \qquad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}\,\sin\frac{\varphi}{2}\,, \quad |\boldsymbol{u}| = 1\,,$$

ergibt sich der Drehwinkel $\varphi \geq 0$ aus

$$\cos\frac{\varphi}{2} = p_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \text{(Hauptwert)} \quad \rightarrow \quad \varphi = \frac{2\pi}{3} \tag{3.232}$$

und der Einheitsvektor der Drehachse

$$\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\,\boldsymbol{p} = \frac{1}{|\boldsymbol{p}|}\,\boldsymbol{p} \qquad \rightarrow \qquad {}^{0}\boldsymbol{u} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{3.233}$$

Der Drehzeiger $(\boldsymbol{u}, \varphi)$ ist in Abb. 3.17 b dargestellt.

3.9.2 Kinematische Bewegungsgleichungen

Ein Körper führt eine Drehung aus. Zu einem Zeitpunkt t sei die Orientierung gegeben durch die xyz-KARDAN-Winkel

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{3.234}$$

und es werden die Koordinaten des Winkelgeschwindigkeitsvektors im körperfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ gemessen,

$${}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}}\,. \tag{3.235}$$

Gesucht sind die zeitlichen Änderungen der Koordinaten der Drehung in den verschiedenen Parametrierungen.

Zeitliche Änderung der Drehmatrix Mit den gegebenen xyz-KARDAN-Winkeln lautet die Drehmatrix entsprechend (3.155)

$${}^{01}\boldsymbol{T}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.236}$$

Die zeitliche Änderung der Drehmatrix ${}^{01}\dot{\boldsymbol{T}}$ für die gegebene Orientierung mit der Drehmatrix aus (3.236) und die gegebene Winkelgeschwindigkeit mit

den Koordinaten ${}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10}$ im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ aus (3.235) wird mit der POISSON-Gleichung (3.152) berechnet,

$$
{}^{01}\dot{\boldsymbol{T}} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{1}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{10} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -5\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 3 & -2-\sqrt{2} & 2+4\sqrt{2} \\ -3 & 2-\sqrt{2} & -2+4\sqrt{2} \end{bmatrix}\frac{1}{\mathrm{s}}\,. \tag{3.237}
$$

Dasselbe Ergebnis wird auch mit Hilfe der POISSON-Gleichung (3.150) erhalten unter Verwendung der raumfesten Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit

$$
{}^{0}\boldsymbol{\omega}_{10} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2}-5 \\ 2\sqrt{2}+5 \end{bmatrix}\frac{1}{\mathrm{s}}\,. \tag{3.238}
$$

Zeitliche Änderung der xyz-KARDAN-Winkel Für die gegebene Orientierung mit den xyz-KARDAN-Winkeln $\boldsymbol{\beta}$ aus (3.234) und die gegebene Winkelgeschwindigkeit mit den Koordinaten ${}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10}$ im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ aus (3.235) wird die zeitliche Änderung der KARDAN-Winkel $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ mit Hilfe der kinematischen Bewegungsgleichung (3.165) berechnet,

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\beta}} &= {}^{1}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\;{}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} &= \sqrt{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\mathrm{s}} = \begin{bmatrix} -4\sqrt{2} \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}\frac{1}{\mathrm{s}}\,.
\end{aligned} \tag{3.239}
$$

Dasselbe Ergebnis wird auch mit Hilfe der kinematischen Bewegungsgleichung (3.162) unter Verwendung der raumfesten Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit ${}^{0}\boldsymbol{\omega}_{10}$ aus (3.238) erhalten.

Zeitliche Änderung der EULER-Parameter Die EULER-Parameter werden, wie im Beispiel aus Abschnitt 3.9.1, aus den Elementen der Drehmatrix ${}^{01}\boldsymbol{T}$ aus (3.236) berechnet,

$$
p_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}\,, \qquad {}^{0}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \tag{3.240}
$$

Für die gegebene Orientierung mit den EULER-Parametern aus (3.240) und die gegebene Winkelgeschwindigkeit mit den Koordinaten ${}^{1}\boldsymbol{\omega}_{10}$ im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ aus (3.235) wird die zeitliche Änderung der EULER-Parameter $\underline{\dot{\boldsymbol{p}}}$ mit Hilfe der kinematischen Bewegungsgleichung (3.208) berechnet,

$$
\begin{array}{lcl}
{}^0\underline{\dot{\boldsymbol{p}}} & = \frac{1}{2} & \underline{\boldsymbol{P}}({}^0\underline{\boldsymbol{p}}) \qquad {}^1\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}
\end{array}
$$

$$
\rightarrow \begin{bmatrix} \dot{p}_\mathrm{s} \\ \hline \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2-\sqrt{2} \\ \hline 2-4\sqrt{2} \\ 3+2\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \,. \tag{3.241}
$$

Unter Verwendung der raumfesten Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit ${}^0\boldsymbol{\omega}_{10}$ aus (3.238) wird dasselbe Ergebnis mit Hilfe der kinematischen Bewegungsgleichung (3.204) erhalten.

Zeitliche Änderung des Drehzeigers Mit den EULER-Parametern aus (3.240) wird der Drehzeiger wie in (3.232) und (3.233) berechnet,

$$
{}^0\boldsymbol{u} = \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad \varphi = \frac{2\pi}{3} \,. \tag{3.242}
$$

Die zeitliche Änderung $(\dot{\boldsymbol{u}}, \dot{\varphi})$ des Drehzeigers wird mit der in (3.241) berechneten zeitlichen Änderung der EULER-Parameter $\dot{p}_\mathrm{s}$, $\dot{\boldsymbol{p}}$ erhalten, indem die Definitionsgleichungen der EULER-Parameter (3.166) nach der Zeit abgeleitet und nach $\dot{\boldsymbol{u}}$ und $\dot{\varphi}$ aufgelöst werden,

$$
\begin{aligned}
p_\mathrm{s} = \cos\frac{\varphi}{2} \qquad & \rightarrow \qquad \dot{p}_\mathrm{s} = -\frac{\dot{\varphi}}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \\
& \rightarrow \qquad \dot{\varphi} = -\frac{2\dot{p}_\mathrm{s}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \,, \qquad (3.243)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{p} = \boldsymbol{u}\sin\frac{\varphi}{2} \qquad & \rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{u}}\sin\frac{\varphi}{2} + \boldsymbol{u}\frac{\dot{\varphi}}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\
& \rightarrow \qquad \dot{\boldsymbol{u}} = \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\dot{\boldsymbol{p}} - \boldsymbol{u}\frac{\dot{\varphi}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) . \qquad (3.244)
\end{aligned}
$$

Die Ergebnisse lauten

$$
\dot{\varphi} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,(2+\sqrt{2})\,\frac{1}{\mathrm{s}}\,, \qquad {}^0\dot{\boldsymbol{u}} = \frac{\sqrt{3}}{18} \begin{bmatrix} 4-13\sqrt{2} \\ 9+6\sqrt{2} \\ 13-2\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\mathrm{s}} \,. \tag{3.245}
$$

Da der Einheitsvektor der Drehachse $\boldsymbol{u}$ nur seine Richtung, nicht aber seine Länge ändert, steht der Vektor seiner zeitlichen Änderung $\dot{\boldsymbol{u}}$ senkrecht auf $\boldsymbol{u}$, also $\boldsymbol{u}^\mathrm{T}\dot{\boldsymbol{u}} = 0$.

Kapitel 4
Grundlagen der Dynamik

In der Dynamik wird der Zusammenhang zwischen Kräften und Bewegungen untersucht. Die kinetischen Größen Impuls und Drall sowie der Impulssatz und der Drallsatz werden in den Abschnitten 4.1 und 4.2 zunächst allgemein eingeführt und anschließend in den Abschnitten 4.3 und 4.5 auf den starren Körper spezialisiert, wobei die Eigenschaften des Trägheitstensors in Abschnitt 4.4 beschrieben werden. Die kinetische Energie des starren Körpers wird in Abschnitt 4.6 hergeleitet. Zur Veranschaulichung physikalischer Wirkungen rotierender starrer Körper werden in Abschnitt 4.7 die Kraftwirkungen eines um eine raumfeste Achse drehenden Rotors sowie einige klassische Phänomene der Kreiseldynamik dargestellt.

4.1 Impuls und Drall

Betrachtet wird ein mechanisches System K als ein System materieller Körper, das aus seiner Umgebung freigeschnitten ist (Abb. 4.1).

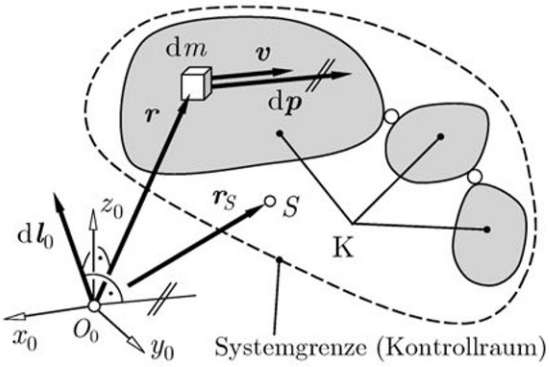


Abb. 4.1 Impuls $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ und Drall $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_0$ eines Massenelements $\mathrm{d}m$

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_4, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

4.1.1 Impuls

Ein Volumenelement $\mathrm{d}V$ mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ stellt bei einer i. Allg. ortsabhängigen Dichte $\rho(\boldsymbol{r})$ ein Massenelement $\mathrm{d}m = \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V$ dar. Bewegt sich das Massenelement $\mathrm{d}m$ mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ relativ zu einem ruhenden Bezugssystem $\mathcal{K}_0$, so ist sein Impuls $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ definiert durch das Produkt

$$\mathrm{d}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.1}$$

Der Impuls des mechanischen Systems K ist die Gesamtheit der Impulse aller Massenelemente,

$$\boldsymbol{p} = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.2}$$

Hierbei ist die Integration über die Massenelemente des gesamten Systems K auszuführen.

Ist das System K abgeschlossen, d.h. ist seine Gesamtmasse m konstant, so folgt aus der Definition des Ortsvektors $\boldsymbol{r}_S$ des Massenmittelpunktes S

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{1}{m}\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m \qquad \text{mit} \qquad m = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}m \tag{4.3}$$

durch Ableitung nach der Zeit ($\dot{m} = 0$)

$$\dot{\boldsymbol{r}}_S = \frac{1}{m}\int_{\mathrm{K}} \dot{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}m \qquad \text{bzw.} \qquad m\,\boldsymbol{v}_S = \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.4}$$

Einsetzen von (4.4) in (4.2) liefert dann den Impuls des Systems K als Produkt seiner Gesamtmasse m mit der absoluten Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_S$ seines Massenmittelpunktes S,

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}_S\,. \tag{4.5}$$

4.1.2 Drall (Drehimpuls, Impulsmoment)

Der Drall ist definiert als das Moment des Impulses bezüglich eines Bezugspunktes. Er ist damit ebenfalls ein Vektor. Unterschieden werden der absolute Drall (Absolutdrall) bezüglich eines raumfesten Punktes und der relative Drall (Relativdrall) bezüglich eines bewegten Punktes.

Absoluter Drall Der absolute Drall $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_0$ eines Massenelements $\mathrm{d}m$ ist definiert als das Moment des Impulses $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ aus (4.1) bezüglich des raumfesten Punktes O_0 (Abb. 4.1),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_0 = \widetilde{\boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.6}$$

Entsprechend lautet der absolute Drall des Systems K

$$\boldsymbol{l}_0 = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{l}_0 = \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.7}$$

Relativer Drall Der relative Drall wird bezüglich eines beliebigen, bewegten Bezugspunktes Q mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}_Q$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_Q = \dot{\boldsymbol{r}}_Q$ definiert. Wird der Ortsvektor eines Massenelements $\mathrm{d}m$ gemäß Abb. 4.2 mit Hilfe von $\boldsymbol{r}_Q$ und dem Vektor $\boldsymbol{b}$ von Q zu $\mathrm{d}m$ ausgedrückt,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_Q + \boldsymbol{b} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_Q + \dot{\boldsymbol{b}}\,, \tag{4.8}$$

und in (4.7) eingesetzt, so lautet der Drall

$$\boldsymbol{l}_0 = \int_{\mathrm{K}} (\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q + \widetilde{\boldsymbol{b}})\,(\boldsymbol{v}_Q + \dot{\boldsymbol{b}})\,\mathrm{d}m = \widetilde{\boldsymbol{r}}_Q \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m}_{(4.4):\ m\,\boldsymbol{v}_S} + \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{v}_Q\,\mathrm{d}m + \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\dot{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m$$

$$\boldsymbol{l}_0 = m\,\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\,\boldsymbol{v}_S + \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m}_{m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S}\,\boldsymbol{v}_Q + \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\dot{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m}_{\boldsymbol{l}_Q}\,. \tag{4.9}$$

Hierbei sind $\boldsymbol{b}_S$ der Vektor von Q zum Massenmittelpunkt S und $\boldsymbol{l}_Q$ der relative Drall des Systems K bezüglich des Punktes Q,

$$\boldsymbol{l}_Q = \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\dot{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.10}$$

Mit (4.9) gilt damit zwischen dem Absolutdrall $\boldsymbol{l}_0$ bezüglich O und dem Relativdrall $\boldsymbol{l}_Q$ bezüglich Q der Zusammenhang

$$\boldsymbol{l}_0 = m\,\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\,\boldsymbol{v}_S + m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\boldsymbol{v}_Q + \boldsymbol{l}_Q\,. \tag{4.11}$$

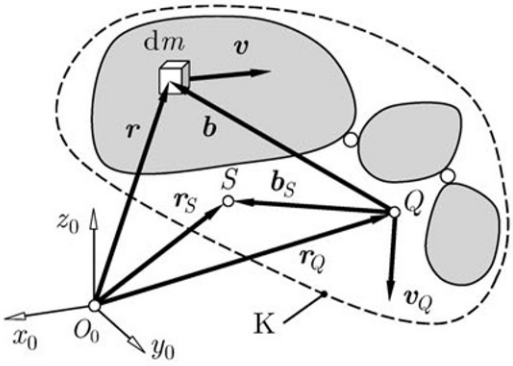


Abb. 4.2 Zum relativen Drall bezüglich des bewegten Punktes Q

4.2 Schwerpunktsatz und Drallsatz

Der Schwerpunktsatz und der Drallsatz werden für das aus seiner Umgebung herausgeschnittene System K aus Abb. 4.2 formuliert.

4.2.1 Impulssatz und Schwerpunktsatz

Der Impulssatz für ein Massenelement $\mathrm{d}m$ besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses $\mathrm{d}\boldsymbol{p}$ bezüglich des Inertialsystems gleich der Resultierenden $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ aller am Massenelement wirkenden Kräfte ist, also

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}\boldsymbol{p}) = \mathrm{d}\boldsymbol{f} \qquad \text{bzw.} \qquad \dot{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}m = \mathrm{d}\boldsymbol{f}\,. \tag{4.12}$$

Die Kraft $\mathrm{d}\boldsymbol{f}$ lässt sich in zwei Anteile aufspalten:

- Die *innere Kraft* $\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{in}}$ ist die auf das Massenelement $\mathrm{d}m$ wirkende Schnittkraft zwischen $\mathrm{d}m$ und anderen Massenelementen des Systems.
- Die *äußere Kraft* $\mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{au}}$ wirkt von außen über die Systemgrenze auf den Massenpunkt m_i.

Innere und äußere Kräfte können sowohl eingeprägte Kräfte als auch Reaktionskräfte sein, siehe Abschnitt 5.3.1.

Die Summe der Impulssätze aller Massenelemente des Systems K lautet

$$\int_{\mathrm{K}} \dot{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}m = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{f} \qquad \text{bzw.} \qquad \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{f} = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{in}} + \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{au}}\,. \tag{4.13}$$

Wegen des Gegenwirkungsprinzips (innere Kräfte treten stets paarweise entgegengesetzt innerhalb der Systemgrenze auf) heben sich die inneren Kräfte auf, $\int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{in}} = \boldsymbol{0}$. Wird wieder ein abgeschlossenes System (Gesamtmasse $m = \text{const}$) zu Grunde gelegt, so geht (4.13) mit (4.3) über in

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{f} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{f} = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}\boldsymbol{f}^{\mathrm{au}}\,. \tag{4.14}$$

Dies ist der *Schwerpunktsatz*: Der Massenmittelpunkt S eines abgeschlossenen Systems bewegt sich so, als ob die gesamte Masse in ihm vereinigt wäre und alle äußeren Kräfte an ihm angreifen würden. Wenn nur die Bewegung des Massenmittelpunktes S interessiert, kann das mechanische System durch einen Massenpunkt in S ersetzt werden.

Die Resultierende $\boldsymbol{f}$ der äußeren Kräfte kann sich aus Volumenkräften (z.B. Gewichtskräfte, magnetische Kräfte), Oberflächenkräften (z.B. Luftwiderstandskräfte) und Einzelkräften zusammensetzen

$$\boldsymbol{f} = \underbrace{\int_V \boldsymbol{f}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{b},t)\,\mathrm{d}V}_{\text{Volumenkräfte}} + \underbrace{\int_A \boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{b},t)\,\mathrm{d}A}_{\text{Oberflächenkräfte}} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{f}_i}_{\text{Einzelkräfte}}\,. \tag{4.15}$$

Hierbei sind $\boldsymbol{f}_{\mathrm{V}}$ die Volumenkraftdichte (Dimension $\frac{\text{Kraft}}{\text{Volumen}}$) und $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}$ die Flächenkraftdichte (Dimension $\frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$).

Bei Zerlegung im Inertialsystem $\mathcal{K}_0$ lautet der Schwerpunktsatz (4.14)

$$\begin{bmatrix} m\,\dot{v}_{Sx} \\ m\,\dot{v}_{Sy} \\ m\,\dot{v}_{Sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} . \tag{4.16}$$

4.2.2 Drallsatz (Momentensatz)

Der Drallsatz (Momentensatz) für ein Massenpunktsystem besagt, dass die zeitliche Änderung des auf einen festen Punkt O_0 bezogenen absoluten Dralls des Systems gleich dem resultierenden Moment aller auf das System einwirkenden äußeren Kräfte bezüglich O_0 ist, also

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_0}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_0 . \tag{4.17}$$

Das resultierende Moment $\boldsymbol{\tau}_0$ der äußeren Kräfte bzgl. O_0 setzt sich gemäß (4.15) aus Momenten der Volumenkräfte $\boldsymbol{f}_{\mathrm{V}}$, der Oberflächenkräfte $\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}$ und der Einzelkräfte $\boldsymbol{f}_i$ sowie aus freien Einzelmomenten $\boldsymbol{\tau}_i^{\text{frei}}$ zusammen,

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \int\limits_V \widetilde{\boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{f}_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{b},t)\,\mathrm{d}V + \int\limits_A \widetilde{\boldsymbol{r}}\,\boldsymbol{f}_{\mathrm{A}}(\boldsymbol{b},t)\,\mathrm{d}A + \sum_i \widetilde{\boldsymbol{r}}_i\,\boldsymbol{f}_i + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{\tau}_i^{\text{frei}}}_{\text{freie Einzelmomente}} . \tag{4.18}$$

Die gesamte physikalische Wirkung des Kräftesystems bezüglich des Punktes O_0 wird durch den *Kraftwinder* $(\boldsymbol{\tau}_0, \boldsymbol{f})$ bezüglich O_0 gekennzeichnet, vgl. Magnus und Müller-Slany [59].

Mit $\dot{\boldsymbol{r}}_Q = \boldsymbol{v}_Q$ und $\dot{\boldsymbol{r}}_S = \boldsymbol{v}_S$ lautet die Zeitableitung des absoluten Dralls $\boldsymbol{l}_0$ aus (4.11)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_0}{\mathrm{d}t} = m\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_Q\,\boldsymbol{v}_S + m\,\dot{\widetilde{\boldsymbol{b}}}_S\,\boldsymbol{v}_Q + m\,\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\,\dot{\boldsymbol{v}}_S + m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\dot{\boldsymbol{v}}_Q + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} .$$

Wird der zweite Summand mit $\dot{\boldsymbol{b}}_S = \boldsymbol{v}_S - \boldsymbol{v}_Q$ umgeformt,

$$m\,\dot{\widetilde{\boldsymbol{b}}}_S\,\boldsymbol{v}_Q = m\,(\widetilde{\boldsymbol{v}}_S - \widetilde{\boldsymbol{v}}_Q)\,\boldsymbol{v}_Q = m\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_S\,\boldsymbol{v}_Q - m\,\underbrace{\widetilde{\boldsymbol{v}}_Q\,\boldsymbol{v}_Q}_{\boldsymbol{0}} = m\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_S\,\boldsymbol{v}_Q ,$$

so ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_0}{\mathrm{d}t} = \underbrace{m\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_Q\,\boldsymbol{v}_S + m\,\widetilde{\boldsymbol{v}}_S\,\boldsymbol{v}_Q}_{\boldsymbol{0}} + m\,\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\,\dot{\boldsymbol{v}}_S + m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\dot{\boldsymbol{v}}_Q + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} . \tag{4.19}$$

Das Moment $\boldsymbol{\tau}_0$ lässt sich mit Hilfe der resultierenden äußeren Kraft $\boldsymbol{f}$ aus (4.15) durch das Moment $\boldsymbol{\tau}_Q$ bezüglich Q ausdrücken,

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_Q + \widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\, \boldsymbol{f}\,. \tag{4.20}$$

Einsetzen von (4.19) und (4.20) in (4.17) ergibt

$$m\,\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\, \dot{\boldsymbol{v}}_S \;+\; m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\, \dot{\boldsymbol{v}}_Q \;+\; \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_Q + \widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\, \boldsymbol{f}$$

und mit dem Schwerpunktsatz $m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{f}$ aus (4.14)

$$\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\, \underbrace{(m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S - \boldsymbol{f})}_{\boldsymbol{0}} + m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\, \dot{\boldsymbol{v}}_Q \;+\; \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_Q\,.$$

Der Drallsatz bezüglich des bewegten Punktes Q lautet damit

$$m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\, \dot{\boldsymbol{v}}_Q \;+\; \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_Q \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l}_Q = \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\, \dot{\boldsymbol{b}}\, \mathrm{d}m\,. \tag{4.21}$$

Der Term $m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\, \dot{\boldsymbol{v}}_Q$ verschwindet in den folgenden Fällen:

1. Der Bezugspunkt Q ist der Massenmittelpunkt S. Dann ist $\boldsymbol{b}_S = \boldsymbol{0}$, und der Drallsatz (4.21) lautet

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_S}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_S\,. \tag{4.22}$$

2. Der Bezugspunkt Q ist unbeschleunigt, also $\dot{\boldsymbol{v}}_Q = \boldsymbol{0}$.
3. Die Vektoren $\boldsymbol{b}_S$ und $\dot{\boldsymbol{v}}_Q$ sind parallel.

4.3 Impuls und Drall des starren Körpers

Ein wichtiger Sonderfall eines allgemeinen Massensystems ist der starre Körper. Betrachtet wird ein freigeschnittener starrer Körper K (Abb. 4.3). Gegenüber einem allgemeinen Massensystem sind die Bewegungen der Massenelemente kinematisch gekoppelt. Wird entsprechend Abschnitt 3.1.1 ein körperfestes Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ definiert, dessen Ursprung $O_1 = Q$ i. Allg. nicht mit dem Massenmittelpunkt S zusammenfällt, so gilt für die Bewegung eines Massenelements $\mathrm{d}m$ relativ zum Inertialsystem $\mathcal{K}_0$

$$\boldsymbol{r} \overset{(3.5)}{=} \boldsymbol{r}_Q + \boldsymbol{b}\,, \tag{4.23}$$

$$\dot{\boldsymbol{r}} \overset{(3.13)}{=} \boldsymbol{v}_Q + \dot{\boldsymbol{b}} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{b}} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\, \boldsymbol{b}\,, \tag{4.24}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \overset{(3.19)}{=} \dot{\boldsymbol{v}}_Q + \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}\, \boldsymbol{b} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\, \boldsymbol{b}\,. \tag{4.25}$$

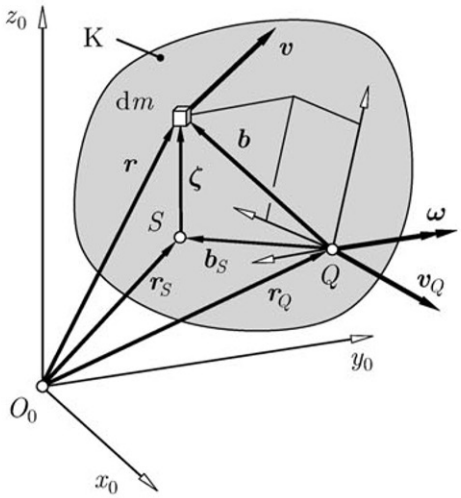


Abb. 4.3 Zur Kinematik und Massengeometrie eines starren Körpers

4.3.1 Masse und Massenmittelpunkt

Die *Masse* m eines starren Körpers K mit der ortsabhängigen Dichte $\rho(\boldsymbol{r})$ wird durch Integration über das Volumen V berechnet,

$$m = \int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}m = \int_V \rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V\,. \tag{4.26}$$

Bei einem homogenen Körper ist die Dichte ρ ortsunabhängig, und es gilt für die Masse $m = \rho V$.

Der Vektor $\boldsymbol{r}_S$ von O_0 zum *Massenmittelpunkt* S des Körpers K lautet gemäß (4.3)

$$\boldsymbol{r}_S = \tfrac{1}{m}\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}m = \tfrac{1}{m}\int_V \boldsymbol{r}\,\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V\,. \tag{4.27}$$

Der *Gewichtsschwerpunkt* $\bar{S}$ ist definiert als der Angriffspunkt der resultierenden Gravitationskraft G in einem parallelen Schwerefeld, bei dem alle Gravitationskräfte parallel zur Richtung der i. Allg. ortsabhängigen Schwerebeschleunigung $g(\boldsymbol{r})$ sind,

$$\boldsymbol{r}_{\bar{S}} = \frac{1}{G}\int_V \boldsymbol{r}\,\underbrace{g(\boldsymbol{r})\,\overbrace{\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V}^{\mathrm{d}m}}_{\mathrm{d}G} \qquad \text{mit} \qquad G = \int_V g(\boldsymbol{r})\,\rho(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}V\,. \tag{4.28}$$

Im homogenen Schwerefeld (ortsunabhängige Schwerebeschleunigung g) fallen Gewichtsschwerpunkt $\bar{S}$ und Massenmittelpunkt S zusammen, $\boldsymbol{r}_{\bar{S}} = \boldsymbol{r}_S$.

4.3.2 Impuls des starren Körpers

Für den Impuls des starren Körpers ergibt sich durch die kinematische Kopplung (4.24) keine Änderung gegenüber dem allgemeinen Massensystem. Gemäß (4.5) ist damit der Impuls eines starren Körpers

$$\boldsymbol{p} = m\,\boldsymbol{v}_S\,. \tag{4.29}$$

4.3.3 Drall des starren Körpers

Der absolute Drall $\boldsymbol{l}_0$ bezüglich des raumfesten Punkts O_0 aus (4.11) lautet

$$\boldsymbol{l}_0 = m\,\widetilde{\boldsymbol{r}}_Q\,\boldsymbol{v}_S \;+\; m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\boldsymbol{v}_Q \;+\; \boldsymbol{l}_Q \tag{4.30}$$

mit dem relativen Drall bezüglich des körperfesten Punktes Q gemäß (4.10)

$$\boldsymbol{l}_Q = \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\dot{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.31}$$

Der relative Drall $\boldsymbol{l}_Q$ kann für den starren Körper ausgewertet werden, indem die kinematische Kopplung (4.24) in (4.31) eingesetzt wird. Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ kann dann als Faktor nach rechts herausgelöst werden,

$$\boldsymbol{l}_Q = \int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\;\underbrace{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b}}_{-\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\omega}}\;\mathrm{d}m = -\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}m = -\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m\,\boldsymbol{\omega}\,,$$

$$\rightarrow\;\boldsymbol{l}_Q = \boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.32}$$

Der Ausdruck

$$\boldsymbol{\Theta}_Q = -\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m \tag{4.33}$$

beschreibt die Massenverteilung des Körpers bezüglich des Körperpunktes Q. Er ist ein Tensor zweiter Stufe, der den Vektor $\boldsymbol{\omega}$ in den Vektor $\boldsymbol{l}_Q$ abbildet, und wird als der *Trägheitstensor* des Körpers bezüglich des Punktes Q bezeichnet.

4.4 Trägheitstensor

Wird der relative Drall $\boldsymbol{l}_Q$ aus (4.31) im körperfesten System $\mathcal{K}_1$ ausgewertet,

$${}^1\boldsymbol{l}_Q = {}^1\boldsymbol{\Theta}_Q\,{}^1\boldsymbol{\omega}\,, \tag{4.34}$$

so hat der Vektor $\boldsymbol{b}$ die zeitlich konstanten Koordinaten (Abb. 4.4)

$$^1\boldsymbol{b} = \left[\, x \;\; y \;\; z \,\right]^{\mathrm{T}}. \tag{4.35}$$

Die Auswertung von (4.33) in $\mathcal{K}_1$ ergibt die zeitlich konstanten Koordinaten des Trägheitstensors

$$^1\boldsymbol{\Theta}_Q = -\int_{\mathrm{K}} {}^1\widetilde{\boldsymbol{b}}\,{}^1\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m = -\int_{\mathrm{K}} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}m$$

bzw.

$$^1\boldsymbol{\Theta}_Q = \begin{bmatrix} \int_{\mathrm{K}} (y^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{K}} x\,y\,\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{K}} x\,z\,\mathrm{d}m \\ -\int_{\mathrm{K}} x\,y\,\mathrm{d}m & \int_{\mathrm{K}} (x^2+z^2)\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{K}} y\,z\,\mathrm{d}m \\ -\int_{\mathrm{K}} x\,z\,\mathrm{d}m & -\int_{\mathrm{K}} y\,z\,\mathrm{d}m & \int_{\mathrm{K}} (x^2+y^2)\mathrm{d}m \end{bmatrix}. \tag{4.36}$$

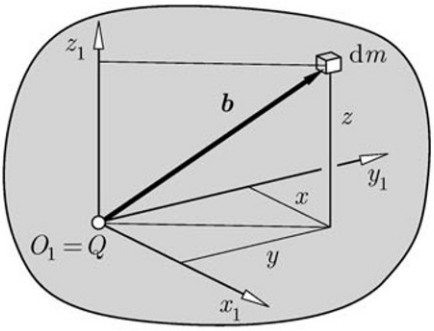


Abb. 4.4 Zur Herleitung des Trägheitstensors

4.4.1 Eigenschaften des Trägheitstensors

Der Trägheitstensor (4.36) besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Die Koordinaten des Trägheitstensors bilden die symmetrische (3,3)-Matrix (Koordinatenindex 1 weggelassen)

$$\boldsymbol{\Theta}_Q = \begin{bmatrix} \theta_x & -\theta_{xy} & -\theta_{xz} \\ -\theta_{xy} & \theta_y & -\theta_{yz} \\ -\theta_{xz} & -\theta_{yz} & \theta_z \end{bmatrix} \tag{4.37}$$

mit den *Massenträgheitsmomenten*

$$\theta_x = \int_K (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m\,,\ \theta_y = \int_K (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}m\,,\ \theta_z = \int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m \tag{4.38}$$

und den *Deviationsmomenten*

$$\theta_{xy} = \int_K x\,y\,\mathrm{d}m\,, \qquad \theta_{yz} = \int_K y\,z\,\mathrm{d}m\,, \qquad \theta_{xz} = \int_K x\,z\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.39}$$

Die Massenträgheitsmomente sind stets positiv, während die Deviationsmomente positiv, negativ oder Null sein können.

2. Der Trägheitstensor ist symmetrisch, also $\boldsymbol{\Theta}_Q = \boldsymbol{\Theta}_Q^{\mathrm{T}}$.

3. Die Addition der drei Massenträgheitsmomente aus (4.38) ergibt

$$\theta_x + \theta_y + \theta_z = 2\int_K (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m = 2\int_K \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}m\,.$$

Dieses Integral hängt nur vom Bezugspunkt Q, nicht aber von der Ausrichtung des Bezugssystem $\mathcal{K}_1$ ab. Die *Spur* des Trägheitstensors, d. h. die Summe der Hauptdiagonalelemente $\theta_x + \theta_y + \theta_z$, ist damit eine *Invariante* des Trägheitstensors.

4. Es gilt die Relation

$$\theta_x + \theta_y \equiv \int_K (x^2 + y^2 + 2z^2)\,\mathrm{d}m \quad \geq \quad \theta_z \equiv \int_K (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m\,.$$

Das Gleichheitszeichen gilt im Sonderfall, wenn der Körper keine Ausdehnung in die z-Richtung hat (Scheibe in der x, y-Ebene). Durch zyklische Vertauschung der Indizes ergeben sich die *Dreiecksungleichungen*

$$\theta_x + \theta_y \geq \theta_z\,, \qquad \theta_y + \theta_z \geq \theta_x\,, \qquad \theta_z + \theta_x \geq \theta_y\,. \tag{4.40}$$

5. Die Koordinaten des Trägheitstensors hängen vom Bezugspunkt und von der Orientierung des Koordinatensystems ab. Diese Abhängigkeiten werden in den Abschnitten 4.4.2 bis 4.4.4 hergeleitet.

4.4.2 Parallelverschiebung des Bezugssystems

Betrachtet wird eine Verschiebung des Bezugspunktes von Q in den Massenmittelpunkt S bei festgehaltener Orientierung des Bezugssystems (Abb. 4.5). Mit dem Vektor $\boldsymbol{\zeta}$ vom Massenmittelpunkt S zum Massenelement $\mathrm{d}m$ gilt

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_S + \boldsymbol{\zeta} \qquad \text{und damit auch} \qquad \widetilde{\boldsymbol{b}} = \widetilde{\boldsymbol{b}}_S + \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,. \tag{4.41}$$

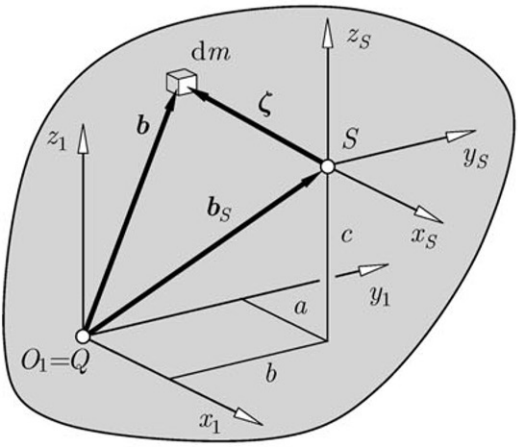


Abb. 4.5 Zur Herleitung des Satzes von Huygens-Steiner

Einsetzen von (4.41) in (4.33) ergibt

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}_Q &= -\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m = -\int_{\mathrm{K}} (\widetilde{\boldsymbol{b}}_S + \widetilde{\boldsymbol{\zeta}})\,(\widetilde{\boldsymbol{b}}_S + \widetilde{\boldsymbol{\zeta}})\,\mathrm{d}m\,,\\
\rightarrow \boldsymbol{\Theta}_Q &= -\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\mathrm{d}m \;-\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\mathrm{d}m \;-\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{d}m \;-\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{d}m\,,\\
\rightarrow \boldsymbol{\Theta}_Q &= -\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}m}_{m} - \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{d}m}_{\mathbf{0}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S - \widetilde{\boldsymbol{b}}_S \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{d}m}_{\mathbf{0}} - \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}\,\mathrm{d}m}_{\boldsymbol{\Theta}_S}\,,
\end{aligned}
$$

wegen $\boldsymbol{\zeta}_S = \frac{1}{m}\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{\zeta}\,\mathrm{d}m = \mathbf{0}$. Damit gilt der Zusammenhang

$$
\boldsymbol{\Theta}_Q = \boldsymbol{\Theta}_S - m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,. \tag{4.42}
$$

Hierbei ist $\boldsymbol{\Theta}_S$ der Trägheitstensor bezüglich des Massenmittelpunktes S. Werden die Koordinaten von $\boldsymbol{b}_S$ in $\mathcal{K}_1$ bezeichnet als

$$
{}^1\boldsymbol{b}_S = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},
$$

so lautet (4.42)

$$
\begin{bmatrix} \theta_{Qx} & -\theta_{Qxy} & -\theta_{Qxz} \\ -\theta_{Qxy} & \theta_{Qy} & -\theta_{Qyz} \\ -\theta_{Qxz} & -\theta_{Qyz} & \theta_{Qz} \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \theta_{Sx} + m\,(b^2+c^2) & -\theta_{Sxy} - m\,a\,b & -\theta_{Sxz} - m\,a\,c \\ -\theta_{Sxy} - m\,a\,b & \theta_{Sy} + m\,(c^2+a^2) & -\theta_{Syz} - m\,b\,c \\ -\theta_{Sxz} - m\,a\,c & -\theta_{Syz} - m\,b\,c & \theta_{Sz} + m\,(a^2+b^2) \end{bmatrix}, \tag{4.43}
$$

also

$$\left.\begin{aligned} \theta_{Qx} &= \theta_{Sx} + m(b^2+c^2)\,, & \theta_{Qyz} &= \theta_{Syz} + m\,b\,c\,, \\ \theta_{Qy} &= \theta_{Sy} + m(c^2+a^2)\,, & \theta_{Qxz} &= \theta_{Sxz} + m\,a\,c\,, \\ \theta_{Qz} &= \theta_{Sz} + m(a^2+b^2)\,, & \theta_{Qxy} &= \theta_{Sxy} + m\,a\,b\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.44}$$

Die Beziehungen (4.44) repräsentieren den Satz von HUYGENS[1]-STEINER[2] für den Trägheitstensor beim Wechsel des Bezugspunkts vom Massenmittelpunkt S zu einem allgemeinen Punkt Q. Die Trägheitsmomente θ_{Sx}, θ_{Sy}, θ_{Sz} bezüglich der Achsen durch S sind dabei stets kleiner als die Trägheitsmomente θ_{Qx}, θ_{Qy}, θ_{Qz} bezüglich der dazu parallelen Achsen durch Q.

4.4.3 Drehung des Bezugssystems

Bei einer Drehung des Bezugssystems von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_2$ bei Beibehaltung des Bezugspunktes Q werden die Koordinaten des Trägheitstensors mit Hilfe der Transformationsmatrix ${}^{21}\boldsymbol{T}$ transformiert (Abb. 4.6). Werden in die Drallformulierung ${}^{1}\boldsymbol{l}_Q = {}^{1}\boldsymbol{\Theta}_Q\,{}^{1}\boldsymbol{\omega}$ aus (4.34) die Transformationsbeziehungen für die Vektorkoordinaten ${}^{1}\boldsymbol{l}_Q = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{l}_Q$ und ${}^{1}\boldsymbol{\omega} = {}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{2}\boldsymbol{\omega}$ eingesetzt und die Gleichung mit ${}^{21}\boldsymbol{T}$ von links durchmultipliziert, so gilt unter Berücksichtigung von ${}^{21}\boldsymbol{T} = {}^{12}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$

$${}^{2}\boldsymbol{l}_Q = {}^{21}\boldsymbol{T}\,{}^{1}\boldsymbol{\Theta}_Q\,{}^{21}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,{}^{2}\boldsymbol{\omega}. \tag{4.45}$$

Der Vergleich von (4.45) mit ${}^{2}\boldsymbol{l}_Q = {}^{2}\boldsymbol{\Theta}_Q\,{}^{2}\boldsymbol{\omega}$ (4.34) liefert die Transformation der Koordinaten des Trägheitstensors von $\mathcal{K}_1$ nach $\mathcal{K}_2$, vgl. (2.69),

$${}^{2}\boldsymbol{\Theta}_Q = {}^{21}\boldsymbol{T}\,{}^{1}\boldsymbol{\Theta}_Q\,{}^{21}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,. \tag{4.46}$$

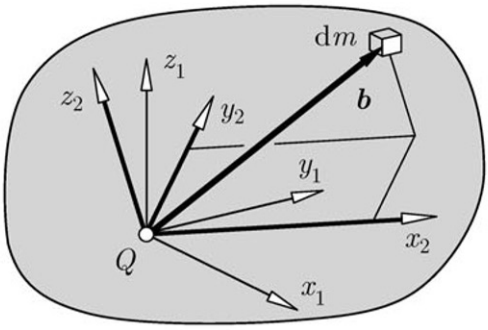


Abb. 4.6 Drehung des Bezugssystems

[1] CHRISTIAAN HUYGENS, *1629 in Den Haag, †1695 in Den Haag

[2] JAKOB STEINER, *1796 in Utzensdorf, †1863 in Bern

4.4.4 Hauptachsensystem

Für jeden Bezugspunkt Q gibt es ein spezielles Koordinatensystem $\mathcal{K}_h$ mit drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen, für das alle Deviationsmomente verschwinden. Dieses Koordinatensystem wird *Hauptachsensystem* genannt.

Die Bedingung für eine Hauptachse lautet, dass der Relativdrallvektor $\boldsymbol{l}_Q$ parallel zur Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ liegt, also

$$\boldsymbol{l}_Q \parallel \boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{l}_Q = \lambda\,\boldsymbol{\omega} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega} = \lambda\,\boldsymbol{\omega}\,, \qquad \lambda \text{ skalar}\,. \tag{4.47}$$

Dies führt auf das Eigenwertproblem

$$(\boldsymbol{\Theta}_Q - \lambda\,\boldsymbol{E}\,)\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0} \qquad \text{oder} \qquad (\boldsymbol{\Theta}_Q - \lambda\,\boldsymbol{E}\,)\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \tag{4.48}$$

mit einem zunächst beliebigen Vektor $\boldsymbol{u}$. Das lineare homogene Gleichungssystem (4.48) hat Lösungen $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, wenn die Koeffizientenmatrix $(\boldsymbol{\Theta}_Q - \lambda\,\boldsymbol{E})$ einen Rangabfall hat. Dies ist der Fall, wenn ihre Determinante Null ist. Diese Bedingung liefert die charakteristische Gleichung

$$\det(\boldsymbol{\Theta}_Q - \lambda\,\boldsymbol{E}\,) = 0 \tag{4.49}$$

als Polynomgleichung dritter Ordnung in λ mit den Lösungen (*Eigenwerten*) λ_1, λ_2, λ_3. Für jeden Eigenwert λ_i, $i = 1, 2, 3$, liefert das lineare homogene Gleichungssystem (4.48) einen Lösungsvektor (*Eigenvektor*) $\boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{0}$,

$$(\boldsymbol{\Theta}_Q - \lambda_i\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}\,, \qquad i = 1, 2, 3\,. \tag{4.50}$$

Der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_Q$ ist symmetrisch. Allgemein haben die Eigenwerte und die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix folgende Eigenschaften, siehe z.B. Zurmühl und Falk [112]:

- Alle Eigenwerte λ_i sind reell.
- Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind zueinander orthogonal. Damit gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.
- Der Rangabfall der Matrix $(\boldsymbol{\Theta}_Q - \lambda\,\boldsymbol{E})$ stimmt mit der Vielfachheit ν der Eigenwerte λ überein. Bei einfachen Eigenwerten λ_i sind die dazu gehörenden Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_i$ bis auf einen konstanten Vorfaktor bestimmt. Sie können daher zu Einheitsvektoren normiert werden. Stimmen $\nu > 1$ Eigenwerte λ überein, so kann der dazu gehörende Lösungsvektor $\boldsymbol{u}$ als Linearkombination von ν zueinander orthogonalen Einheitsvektoren dargestellt werden.

In jedem Fall kann damit den drei Eigenwerten λ_1, λ_2, λ_3 ein System von drei zueinander orthogonalen Eigenvektoren $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ zugeordnet werden. Es kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit so geordnet werden, dass die Eigenvektoren ein Rechtssystem definieren.

Die drei Gleichungssysteme (4.50) können zu einer Matrizengleichung zusammengefasst werden,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \theta_{Qx} & -\theta_{Qxy} & -\theta_{Qxz} \\ -\theta_{Qxy} & \theta_{Qy} & -\theta_{Qyz} \\ -\theta_{Qxz} & -\theta_{Qyz} & \theta_{Qz} \end{bmatrix}}_{{}^{1}\boldsymbol{\Theta}_Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}}_{{}^{1h}\boldsymbol{T}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix}}_{{}^{1h}\boldsymbol{T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}}_{{}^{h}\boldsymbol{\Theta}_Q} . \tag{4.51}$$

Die Eigenvektoren bilden damit die Spalten der orthogonalen Transformationsmatrix ${}^{1h}\boldsymbol{T} = {}^{h1}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}$, die Vektor- und Tensorkoordinaten vom *Hauptachsensystem* $\mathcal{K}_h$ in das Ausgangssystem $\mathcal{K}_1$ transformiert,

$${}^{1h}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \end{bmatrix} = {}^{h1}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}. \tag{4.52}$$

Multiplikation von (4.51) mit ${}^{h1}\boldsymbol{T}$ von links ergibt die Transformation der Koordinaten des Trägheitstensors vom Ausgangssystem $\mathcal{K}_1$ in das Hauptachsensystem $\mathcal{K}_h$ entsprechend dem Transformationsgesetz (4.46)

$${}^{h}\boldsymbol{\Theta}_Q = {}^{h1}\boldsymbol{T}\ {}^{1}\boldsymbol{\Theta}_Q\ {}^{h1}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} . \tag{4.53}$$

Im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_h$ hat der Trägheitstensor Diagonalgestalt mit den *Hauptträgheitsmomenten* $\lambda_1 = A$, $\lambda_2 = B$, $\lambda_3 = C$,

$${}^{h}\boldsymbol{\Theta}_Q = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} . \tag{4.54}$$

Das größte und das kleinste Hauptträgheitsmoment sind die maximalen bzw. minimalen Trägheitsmomente des Körpers. Bei homogenen, symmetrischen Körpern sind die Symmetrieachsen stets Hauptachsen (Beispiel: Quader). Bei rotationssymmetrischen Körpern sind die Symmetrieachse und jede dazu senkrechte Achse Hauptachsen (Beispiele: Zylinder, Kegel).

4.4.5 Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders

Exemplarisch wird der Trägheitstensor eines homogenen Kreiszylinders (Radius R, Länge l, Dichte ρ, Masse m) aufgestellt (Abb. 4.7). Der Trägheitstensor bezüglich des Massenmittelpunkts S, dargestellt im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$, lautet

$$\boldsymbol{\Theta}_S = \begin{bmatrix} \theta_{Sx} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{Sy} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{Sz} \end{bmatrix} . \tag{4.55}$$

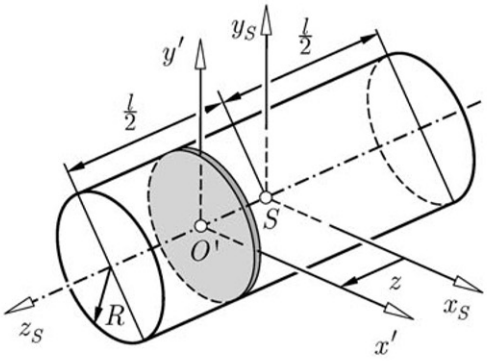


Abb. 4.7 Homogener Kreiszylinder

Im Trägheitsmoment $\theta_{Sz} = \int (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}m$ um die z_S-Achse tritt unter Berücksichtigung von $\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ das polare Flächenträgheitsmoment einer Kreisfläche $I_{\mathrm{p}z}$ auf,

$$\theta_{Sz} = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}m = \rho \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \underbrace{\left[\int\int (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]}_{I_{\mathrm{p}z} = \frac{\pi}{2} R^4} \mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}\,\underbrace{\rho\,\overbrace{l\,\pi\,R^2}^{V}}_{m}\,R^2$$

$$\rightarrow\ \theta_{Sz} = \tfrac{1}{2}\,m\,R^2\,. \tag{4.56}$$

Das Trägheitsmoment θ_{Sx} des Zylinders um die x_S-Achse kann über das Trägheitsmoment $\mathrm{d}\theta_{x'}$ einer Kreisscheibe (Dicke $\mathrm{d}z$) bezüglich der x'-Achse berechnet werden, wobei das axiale Flächenträgheitsmoment einer Kreisfläche I_x auftritt,

$$\mathrm{d}\theta_{x'} = \rho\,\mathrm{d}z\ \underbrace{\int y^2\,\mathrm{d}A}_{I_x = \frac{\pi}{4} R^4} = \tfrac{\pi}{4}\,\rho\,R^4\,\mathrm{d}z\,.$$

Nach der Umrechnung des axialen Flächenträgheitsmoments auf die zur x'-Achse parallele Bezugsachse x_S mit Hilfe des Satzes von HUYGENS-STEINER,

$$\mathrm{d}\theta_x = \mathrm{d}\theta_{x'} + \rho\,\pi\,R^2\,\mathrm{d}z \cdot z^2 = \rho\,\pi\,R^2\big(\tfrac{R^2}{4} + z^2\big)\,\mathrm{d}z\,,$$

liefert die Integration über z das Trägheitsmoment θ_{Sx},

$$\theta_{Sx} = \int \mathrm{d}\theta_x = \rho\,\pi\,R^2 \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \big(\tfrac{R^2}{4} + z^2\big)\mathrm{d}z = \rho\,\pi\,R^2\big(\tfrac{R^2}{4}\,l + \tfrac{l^3}{12}\big)$$

bzw. mit der Masse des Zylinders $m = \rho\,\pi\,R^2\,l$

$$\theta_{Sx} = \tfrac{1}{12}\,m\,\left(3\,R^2 + l^2\right) = \theta_{Sy} \qquad \text{(Symmetrie)}\,. \tag{4.57}$$

4.5 Impulssatz und Drallsatz für den starren Körper

Die Impuls- und Drallsätze aus Abschnitt 4.2 werden für einen starren Körper formuliert. Sie werden auch als die NEWTON-EULER-Gleichungen bezeichnet.

4.5.1 Impulssatz

Der Schwerpunktsatz (4.14) gilt auch für einen starren Körper (Abb. 4.3). Mit der Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{v}}_S$ des Massenmittelpunktes S und der Resultierenden aller am freigeschnittenen Körper wirkenden Kräfte $\boldsymbol{f}$ lautet er

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = \boldsymbol{f}\,. \tag{4.58}$$

Der Schwerpunktsatz für den starren Körper (4.58) wird meist als Impulssatz bezeichnet. Im Inertialsystem $\mathcal{K}_0$ (Koordinatenindex weggelassen) lautet er

$$\begin{bmatrix} m\,\dot{v}_{Sx} \\ m\,\dot{v}_{Sy} \\ m\,\dot{v}_{Sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}. \tag{4.59}$$

4.5.2 Drallsatz

Der Drallsatz (4.21) gilt auch für den starren Körper mit einem körperfesten Punkt Q als Bezugspunkt. Mit dem relativen Drall $\boldsymbol{l}_Q$ des starren Körpers bezüglich Q aus (4.32) lautet er

$$m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\dot{\boldsymbol{v}}_Q + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_Q \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l}_Q = \boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.60}$$

Die zeitliche Änderung des relativen Dralls $\boldsymbol{l}_Q$ in (4.60) ist bezüglich des raumfesten Systems $\mathcal{K}_0$ zu bilden. Der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_Q$ wird gemäß (4.33) mit Hilfe der körperfesten Vektoren $\boldsymbol{b}$ berechnet, die sich relativ zu $\mathcal{K}_0$ ändern, aber relativ zum körperfesten System $\mathcal{K}_1$ konstant sind. Aus diesem Grund ist es günstig, die zeitliche Änderung des Drallvektors $\boldsymbol{l}_Q$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ gemäß (3.32) über die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{l}_Q$ relativ zu $\mathcal{K}_1$ unter Verwendung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ auszudrücken,

$$\begin{aligned}
& \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} && + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{l}_Q\,, \\
\rightarrow\ & \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} && + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}\,, \\
\rightarrow\ & \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}_Q}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Theta}_Q\,\frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} && + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}\,.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_Q$ ändert sich relativ zum körperfesten System $\mathcal{K}_1$ nicht. Damit ist

$$\frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta}_Q}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0}\,.$$

Die zeitlichen Änderungen der Winkelgeschwindigkeit relativ zum raumfesten System $\mathcal{K}_0$ und relativ zum körperfesten System $\mathcal{K}_1$ stimmen gemäß (3.39) überein und definieren die Winkelbeschleunigung von $\mathcal{K}_1$ relativ zu $\mathcal{K}_0$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{{}_0\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{{}_1\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{4.62}$$

Der Drallsatz (4.60) eines starren Körpers bezüglich eines beliebigen körperfesten Punktes Q lautet damit

$$m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\dot{\boldsymbol{v}}_Q \;+\; \boldsymbol{\Theta}_Q\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_Q\,. \tag{4.63}$$

Der Term $m\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\dot{\boldsymbol{v}}_Q$ verschwindet in den folgenden Fällen:

1. Der Bezugspunkt Q ist der Massenmittelpunkt S, also $\boldsymbol{b}_S = \mathbf{0}$. Der Drallsatz lautet dann

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_S}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_S \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l}_S = \boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega}$$

$$\rightarrow\; \boldsymbol{\Theta}_S\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_S\,. \tag{4.64}$$

2. Der körperfeste Bezugspunkt Q ist unbeschleunigt, also $\dot{\boldsymbol{v}}_Q = \mathbf{0}$. Der Drallsatz hat dann die gleiche Form wie für den Massenmittelpunkt,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_Q \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l}_Q = \boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}$$

$$\rightarrow\; \boldsymbol{\Theta}_Q\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_Q\,. \tag{4.65}$$

3. Die Vektoren $\boldsymbol{b}_S$ und $\dot{\boldsymbol{v}}_Q$ sind parallel.

Der Drallsatz (4.60) wird bevorzugt in einem körperfesten Koordinatensystem ausgewertet, da dort die Koordinaten des Trägheitstensors konstant sind. Die einfachste Darstellung liegt in einem körperfesten Hauptachsensystem vor, in dem der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat.

Wird der Drallsatz (4.64) eines beliebig bewegten Körpers bezüglich des Massenmittelpunktes S in einem körperfesten Hauptachsensystem $\mathcal{K}_h$ mit den Trägheitstensor- und Vektorkoordinaten

$${}^h\boldsymbol{\Theta}_S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \qquad {}^h\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \qquad {}^h\boldsymbol{\tau}_S = \begin{bmatrix} \tau_{Sx} \\ \tau_{Sy} \\ \tau_{Sz} \end{bmatrix},$$

ausgewertet, so lauten seine Koordinatengleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\,\dot{\omega}_x - (B-C)\,\omega_y\,\omega_z &= \tau_{Sx}\,, \\ B\,\dot{\omega}_y - (C-A)\,\omega_z\,\omega_x &= \tau_{Sy}\,, \\ C\,\dot{\omega}_z - (A-B)\,\omega_x\,\omega_y &= \tau_{Sz}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.66}$$

Wegen (4.62) beschreibt die zeitliche Änderung der körperfesten Koordinaten von $\boldsymbol{\omega}$ auch die zeitliche Änderung von $\boldsymbol{\omega}$ relativ zum raumfesten System. Die Differentialgleichungen (4.66) werden auch als die EULERschen Kreiselgleichungen bezeichnet.

Die Koordinatengleichungen des Drallsatzes (4.65) bezüglich eines unbeschleunigten Körperpunktes Q haben in einem Hauptachsensystem ebenfalls die Form (4.66).

4.5.3 D'ALEMBERT*sche Trägheitskräfte*

Der Impulssatz (4.58) und der Drallsatz (4.64) haben die Form der sechs statischen Gleichgewichtsbedingungen des freigeschnittenen Körpers, wenn die D'ALEMBERT*schen Trägheitskräfte* oder *Scheinkräfte*

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{t}} = -m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S \tag{4.67}$$

und die D'ALEMBERT*schen Trägheits-Drehmomente* oder *Scheinmomente*

$$\boldsymbol{\tau}_S^{\mathrm{t}} = -\boldsymbol{\Theta}_S\,\dot{\boldsymbol{\omega}} - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega} \tag{4.68}$$

als weitere eingepägte Kräfte aufgefasst werden (Abb. 4.8):

$$\boldsymbol{f}_S + \boldsymbol{f}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}\,, \qquad \boldsymbol{\tau}_S + \boldsymbol{\tau}_S^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{0}\,. \tag{4.69}$$

Der Anteil

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{kr}} = -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega} \tag{4.70}$$

des Trägheits-Drehmoments $\boldsymbol{\tau}_S^{\mathrm{t}}$ in (4.68) wird als *Kreiselmoment* bezeichnet. Es tritt immer dann auf, wenn der Drallvektor $\boldsymbol{l}_S = \boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega}$ nicht parallel zum Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ liegt. Dies ist stets dann der Fall, wenn $\boldsymbol{\omega}$ nicht in einer Hauptträgheitsachse des Körpers liegt.

Das Prinzip von D'ALEMBERT besagt, dass sich in einem mechanischen System mit Bindungen die eingeprägten Kräfte zusammen mit den Scheinkräften und -momenten das Gleichgewicht halten. In äquivalenter Weise besagt es, dass sich die für die Beschleunigung des Systems „verlorenen" Reaktionskräfte und -momente das Gleichgewicht halten. Die auf LAGRANGE zurückgehende Formulierung dieser Gleichgewichtsaussage mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeit aus der Statik führt auf das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE, siehe Abschnitt 5.6.1.

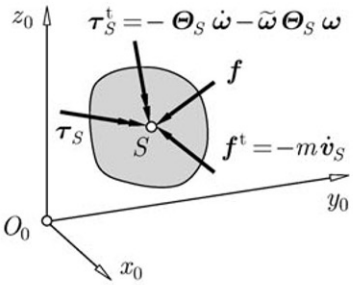


Abb. 4.8 Am freigeschnittenen Körper wirkende Kräfte mit D'ALEMBERTscher Trägheitskraft $\boldsymbol{f}^{\mathrm{t}}$ und Trägheits-Drehmoment $\boldsymbol{\tau}_S^{\mathrm{t}}$

4.6 Kinetische Energie des starren Körpers

Die kinetische Energie des starren Körpers setzt sich aus den kinetischen Energien der Massenelemente zusammen (Abb. 4.3):

$$T = \tfrac{1}{2} \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}m\,. \tag{4.71}$$

Die Auswertung mit Hilfe der Starrkörpergleichung (4.24) liefert

$$T \;=\; \tfrac{1}{2} \int_{\mathrm{K}} (\boldsymbol{v}_Q + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\,(\boldsymbol{v}_Q + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b})\,\mathrm{d}m\,,$$

$$T \;=\; \tfrac{1}{2} \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_Q\,\mathrm{d}m \;+\; 2\,\tfrac{1}{2} \int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b}\,\mathrm{d}m \;+\; \tfrac{1}{2} \int_{\mathrm{K}} (\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b}\;\mathrm{d}m\,.$$

Mit $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b} = -\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\omega}$ und $(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} = (-\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{\omega})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}$ ist

$$T = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_Q \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \mathrm{d}m}_{m} + \boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}} \underbrace{\int_{\mathrm{K}} \boldsymbol{b}\,\mathrm{d}m}_{m\,\boldsymbol{b}_S} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \underbrace{\left(-\int_{\mathrm{K}} \widetilde{\boldsymbol{b}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}\,\mathrm{d}m\right)}_{\boldsymbol{\Theta}_Q} \boldsymbol{\omega}\,.$$

Damit lautet die kinetische Energie eines einzelnen starren Körpers

$$T = \tfrac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_Q \;+\; m\,\boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b}_S \;+\; \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_Q\,\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.72}$$

Der mittlere Summand $m\,\boldsymbol{v}_Q^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{b}_S$ verschwindet in den folgenden Fällen:

1. Der Körper-Bezugspunkt Q ist der Massenmittelpunkt S, also $\boldsymbol{b}_S = \boldsymbol{0}$. Die kinetische Energie vereinfacht sich dann zu

$$T = \tfrac{1}{2}\,m\,\boldsymbol{v}_S^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_S + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega}\,. \tag{4.73}$$

2. Der Punkt Q ist in Ruhe, also $\boldsymbol{v}_Q = \boldsymbol{0}$.

Die kinetische Energie wird u.A. bei den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art benötigt, siehe Abschnitt 5.6.4.

4.7 Kraftwirkungen von Rotoren

Ein Rotor ist ein starrer Körper, der sich um eine raumfeste Achse dreht. Dieser Sonderfall der allgemeinen Bewegung ist im Maschinenbau von grundlegender Bedeutung (Dresig und Holzweissig [18]).

Als ein Beispiel wird ein kreiszylindrischer homogener Rotor (Radius R, Länge l, Masse m) betrachtet, der sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine raumfeste Achse dreht (Abb. 4.9). Der Massenmittelpunkt S hat einen Abstand (Exzentrizität) e von der Drehachse (*statische Unwucht*), und die Symmetrieachse z_S weicht um den Winkel β von der Drehachse ab (*dynamische Unwucht*). Gesucht sind die Lagerkräfte f_A, f_B auf den Rotor bei bezüglich S symmetrischer Lageranordnung (Lagerabstand $2\,b$).

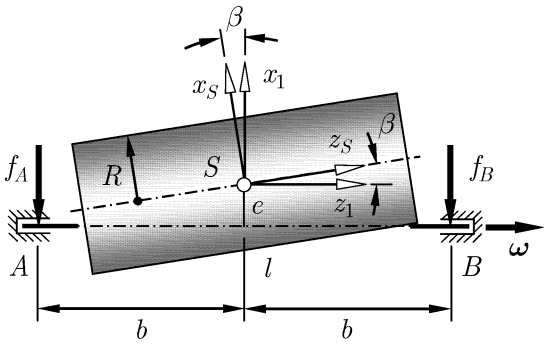


Abb. 4.9 Kreiszylindrischer Rotor mit statischer und dynamischer Unwucht

Für die Berechnung der Lagerkräfte werden das rotorfeste Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ (z_S-Achse in Zylinderachse) und das rotorfeste Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ (z_1-Achse parallel zur Drehachse) mit gemeinsamer y-Achse eingeführt (Verdrehwinkel β).

Der Impulssatz (4.58) lautet für den freigeschnittenen Rotor

$$m\,\dot{\boldsymbol{v}}_S = -(f_A + f_B)\,\boldsymbol{e}_{x1} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{v}}_S = -e\,\omega^2\,\boldsymbol{e}_{x1}\,. \tag{4.74}$$

Hier ist $\boldsymbol{f}^{\mathrm{z}} = m\,e\,\omega^2\,\boldsymbol{e}_{x1}$ die umlaufende Zentrifugalkraft (d'Alembertsche Trägheitskraft). In x_1-Richtung gilt damit

$$m\,e\,\omega^2 = f_A + f_B\,. \tag{4.75}$$

Der Drallsatz (4.64) bezüglich des Massenmittelpunktes S lautet für den freigeschnittenen Rotor

$$\boldsymbol{\Theta}_S\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\tau}_S \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{e}_{z1}\,, \quad \boldsymbol{\tau}_S = (f_A\,b - f_B\,b)\,\boldsymbol{e}_y\,. \tag{4.76}$$

Wegen $\omega = \text{const}$ ist $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}\,\boldsymbol{e}_{z1} = \boldsymbol{0}$. Die Auswertung des Drallsatzes (4.76) wird für das Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ und das System $\mathcal{K}_1$ gezeigt.

Auswertung des Drallsatzes im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ Die Auswertung im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ hat den Vorteil, dass alle Deviationsmomente verschwinden. Allerdings muss der Winkelgeschwindigkeitsvektor in seine Komponenten in den Richtungen der Hauptachsen zerlegt werden. Mit dem zylindersymmetrischen Trägheitstensor und den Vektorkoordinaten

$$^S\boldsymbol{\Theta}_S = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}, \qquad ^S\boldsymbol{\omega} = \omega \begin{bmatrix} -\sin\beta \\ 0 \\ \cos\beta \end{bmatrix}, \quad ^S\boldsymbol{\tau}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ (f_A - f_B)\, b \\ 0 \end{bmatrix}$$

verbleibt im Drallsatz (4.76) nur die y-Koordinatengleichung

$$-(A - C)\,\omega^2 \,\sin\beta\cos\beta = (f_A - f_B)\, b\,.$$

bzw. mit der Umformung $\sin\beta\cos\beta = \frac{1}{2}\sin 2\beta$

$$-\tfrac{1}{2}\,(A - C)\,\omega^2 \,\sin 2\beta = (f_A - f_B)\, b\,. \tag{4.77}$$

Das Kreiselmoment um die y-Achse ist, vgl. (4.70),

$$\tau_y^{\mathrm{kr}} = \tfrac{1}{2}\,(A - C)\,\omega^2 \,\sin 2\beta\,. \tag{4.78}$$

Auswertung des Drallsatzes im Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ Im rotorfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ entfällt die Zerlegung der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, da sie parallel zur z_1-Achse liegt. Allerdings sind in $\mathcal{K}_1$ die Deviationsmomente in der Regel nicht null. Mit der Transformationsmatrix

$$^{1S}\boldsymbol{T} = \left[\, ^1\boldsymbol{e}_{xS} \;\; ^1\boldsymbol{e}_{yS} \;\; ^1\boldsymbol{e}_{zS} \,\right] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

werden die Koordinaten des Drehtensors gemäß (4.46) von $\mathcal{K}_S$ nach $\mathcal{K}_1$ transformiert,

$$^1\boldsymbol{\Theta}_S = {}^{1S}\boldsymbol{T}\; {}^S\boldsymbol{\Theta}_S\; {}^{1S}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} A\cos^2\beta + C\sin^2\beta & 0 & (C - A)\sin\beta\cos\beta \\ 0 & A & 0 \\ (C - A)\sin\beta\cos\beta & 0 & A\sin^2\beta + C\cos^2\beta \end{bmatrix}.$$

Mit den Vektorkoordinaten im System $\mathcal{K}_1$

$$^1\boldsymbol{\omega} = \omega \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ^1\boldsymbol{\tau}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ (f_A - f_B)\, b \\ 0 \end{bmatrix}$$

stimmt die y-Koordinatengleichung des Drallsatzes (4.76) mit (4.77) überein.

Lagerkräfte Mit (4.75) und (4.77) liegen zwei Gleichungen für die Lagerkräfte f_A und f_B vor. Die Auflösung liefert

$$f_A = \frac{e\,m\,\omega^2}{2} - \frac{A-C}{4b}\,\sin 2\beta\,\omega^2\,, \tag{4.79}$$

$$f_B = \frac{e\,m\,\omega^2}{2} + \frac{A-C}{4b}\,\sin 2\beta\,\omega^2 \tag{4.80}$$

und mit den Hauptträgheitsmomenten des Zylinders (Radius R, Länge l, Masse m) aus (4.57) und (4.56) $A = B = \frac{1}{12}\,m\,\left(3R^2 + l^2\right)$ und $C = \frac{1}{2}\,m\,R^2$

$$f_A = \frac{e\,m\,\omega^2}{2} - \frac{l^2 - 3\,R^2}{48\,b}\,\sin 2\beta\,m\,\omega^2\,, \tag{4.81}$$

$$f_B = \frac{e\,m\,\omega^2}{2} + \frac{l^2 - 3\,R^2}{48\,b}\,\sin 2\beta\,m\,\omega^2\,. \tag{4.82}$$

Die Lagerkräfte sind parallel zur x_1-Achse und laufen mit dem Rotor um. Der erste Summand ist der Anteil auf Grund der umlaufenden Zentrifugalkraft (statische Unwucht). Der zweite Summand ist der Anteil der Lagerkräfte auf Grund des Kreiselmoments τ_y^{k} (dynamische Unwucht).

Die Richtung des Kreiselmoments τ_y^{kr} aus (4.78) hängt von den Massenträgheitsmomenten ab:

- Fall $A > C$ oder $l > \sqrt{3}\,R$: Schlanker Rotor (Abb. 4.10 a)
  Das Kreiselmoment $\tau_y^{\mathrm{kr}} > 0$ hat die Tendenz, die dynamische Unwucht, repräsentiert durch den Winkel β, zu vergrößern.
- Fall $A < C$ oder $l < \sqrt{3}\,R$: Flacher Rotor (Abb. 4.10 b)
  Das Kreiselmoment $\tau_y^{\mathrm{kr}} < 0$ hat die Tendenz, die dynamische Unwucht, repräsentiert durch den Winkel β, zu verkleinern.
- Fall $A = C$ oder $l = \sqrt{3}\,R$
  Das Kreiselmoment τ_y^{kr} verschwindet. Es tritt keine dynamische Unwucht auf.

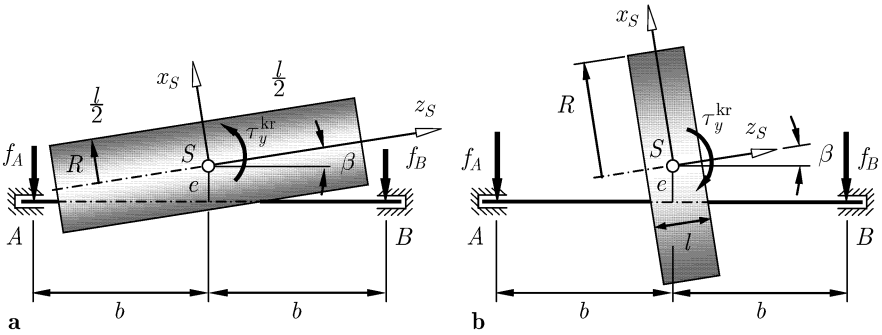


Abb. 4.10 Kreiselmoment τ_y^{k} bei einem Rotor. **a** Schlanker Rotor. **b** Flacher Rotor

4.8 Dynamik von Kreiseln

Als Kreisel wird allgemein ein starrer Körper bezeichnet, der beliebige Drehungen durchführt. In diesem Abschnitt werden exemplarisch einige typische Phänomene der Kreiseldynamik betrachtet, siehe auch MAGNUS und MÜLLER-SLANY [59]. Eine umfassende Darstellung der Dynamik von Kreiseln gibt MAGNUS [58].

4.8.1 Bewegungen eines momentenfreien Kreisels

Ein momentenfreier Kreisel liegt vor, wenn das resultierende Moment der äußeren Kräfte verschwindet. Ein tyisches Beispiel ist ein kardanisch gelagerter Kreisel mit dem Massenmittelpunkt S als Fixpunkt (Schnittpunkt der Drehachsen), Abb. 4.11. Das körperfeste Koordinatensystem $\mathcal{K}_S$ sei ein Hauptachsensystem mit den Hauptträgheitsmomenten A, B und C. Die Massen der Kardanrahmen und Reibungseinflüsse in den Gelenken werden vernachlässigt.

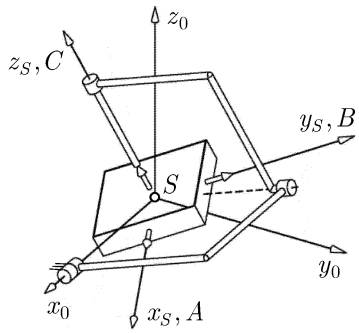


Abb. 4.11 Kardanisch gelagerter Kreisel

EULERsche Kreiselgleichungen Der Drallsatz (4.64) lautet mit $\boldsymbol{\tau}_S = \mathbf{0}$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_S}{\mathrm{d}t} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{l}_S \equiv \boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega} = \text{const}\,. \tag{4.83}$$

Die Auswertung im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ liefert die EULERschen Kreiselgleichungen, vgl. (4.66),

$$A\,\dot{\omega}_x - (B - C)\,\omega_y\,\omega_z = 0\,, \tag{4.84}$$

$$B\,\dot{\omega}_y - (C - A)\,\omega_z\,\omega_x = 0\,, \tag{4.85}$$

$$C\,\dot{\omega}_z - (A - B)\,\omega_x\,\omega_y = 0\,. \tag{4.86}$$

Stabilität der Drehungen um die Hauptachsen Ein einfacher Fall liegt vor, wenn sich der Kreisel um eine Hauptachse dreht, also der Vektor $\boldsymbol{\omega}$ in einer Hauptachse, z.B. der z_S-Achse, liegt. Dann ist $\omega_x = \omega_y = 0$, und aus (4.86) folgt $\omega_z(t) = \omega_{z0} = \text{const}$ mit der Anfangsbedingung $\omega_z(t_0) = \omega_{z0}$, d.h. der Kreisel dreht sich um die z_S-Achse, die dabei raumfest bleibt.

Es lässt sich zeigen, unter welcher Bedingung die Drehung um die z_S-Achse stabil ist. Hierzu wird eine Nachbarbewegung zur Drehung um die z_S-Achse betrachtet, bei der $\boldsymbol{\omega}$ "fast" in der z_S-Achse liegt, also $\omega_z \gg \omega_x$ und $\omega_z \gg \omega_y$. Unter dieser Voraussetzung kann in (4.86) der Term mit dem Produkt $\omega_x\,\omega_y$ vernachlässigt werden. Es gilt dann $C\,\dot{\omega}_z \approx 0$, also weiterhin $\omega_z(t) \approx \omega_{z0} = \text{const}$. Einsetzen dieses Ergebnisses in (4.84) und (4.85) liefert

$$A\,\dot{\omega}_x - (B - C)\,\omega_y\,\omega_{z0} = 0\,, \tag{4.87}$$

$$B\,\dot{\omega}_y - (C - A)\,\omega_{z0}\,\omega_x = 0\,. \tag{4.88}$$

Wird (4.88) nach $\dot{\omega}_y$ aufgelöst und in die einmal nach der Zeit abgeleitete Gleichung (4.87) eingesetzt, so ergibt sich

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2\,\omega_x = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Omega^2 = \frac{(C - A)\,(C - B)}{A\,B}\,\omega_{z0}^2\,. \tag{4.89}$$

Diese Gleichung hat die Form einer linearen Schwingungsdifferentialgleichung mit dem Quadrat der Eigenkreisfrequenz Ω^2. Stabile Lösungen $\omega_x(t)$ in der Form einer ungedämpften Schwingung werden erhalten für $\Omega^2 > 0$. Instabile Lösungen $\omega_x(t)$ in der Form eines exponentiell über der Zeit aufklingenden Verlaufs ergeben sich dagegen für $\Omega^2 < 0$. Daraus folgen die Stabilitätsbedingungen:

stabile Bewegung, $\Omega^2 > 0$: $C > A$ und $C > B$ oder $C < A$ und $C < B$,

instabile Bewegung, $\Omega^2 < 0$: $A > C > B$ oder $B > C > A$.

Drehungen um die Achsen des größten und kleinsten Hauptträgheitsmoments sind damit stabil, während die Drehung um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments instabil ist.

Nutation eines momentenfreien symmetrischen Kreisels Bei einem symmetrischen Kreisel mit der z_S-Achse als Symmetrieachse (*Figurenachse*) ist $A = B \neq C$. Die Drehung um die z_S-Achse ist sowohl für $C > A = B$ als auch für $C < A = B$ stabil. Mit $A = B$ vereinfacht sich (4.86) zu

$$C\,\dot{\omega}_z = 0 \qquad \rightarrow \qquad \omega_z(t) = \omega_{z0} = \text{const}\,, \tag{4.90}$$

d.h. die Winkelgeschwindigkeit ω_z um die z_S-Achse ist jetzt für beliebige ω_x und ω_y exakt konstant.

Aus (4.87) und (4.88) folgt wieder durch Elimination von $\dot{\omega}_y$ die "Schwingungsdifferentialgleichung" (4.89) für $\omega_x(t)$,

$$\ddot{\omega}_x + \Omega^2\,\omega_x = 0 \qquad \text{mit} \qquad \Omega^2 = \frac{(C-A)^2}{A^2}\,\omega_{z0}^2\,. \tag{4.91}$$

Ihre Lösung lautet

$$\omega_x(t) = k_1\,\cos\Omega t + k_2\,\sin\Omega t \tag{4.92}$$

mit den Integrationskonstanten k_1, k_2. Aus (4.87) ergibt sich für $A = B$

$$\omega_y(t) = \frac{A}{(A-C)\,\omega_{z0}}\,\dot{\omega}_x(t)\,.$$

und nach dem Einsetzen von $\omega_x(t)$ aus (4.92)

$$\omega_y(t) = \frac{A\,\Omega}{(A-C)\,\omega_{z0}}\,(-k_1\,\sin\Omega t + k_2\,\cos\Omega t) \quad \text{mit} \quad \Omega \overset{(4.91)}{=} \frac{|C-A|}{A}\,\omega_{z0}$$

$$\rightarrow \omega_y(t) = -\text{sign}(C-A)\,(-k_1\,\sin\Omega t + k_2\,\cos\Omega t)\,. \tag{4.93}$$

Der mit $\omega_{z0} = \text{const}$ rotierende Kreisel werde nun, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, mit den folgenden Anfangsbedingungen ($t_0 = 0$) angestoßen:

$$\omega_x(0) = \omega_{x0}\,, \quad \omega_y(0) = 0 \qquad \rightarrow \qquad k_1 = \omega_{x0}\,, \quad k_2 = 0\,. \tag{4.94}$$

Die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ lauten damit

$$\omega_x(t) \overset{(4.92)}{=} \omega_{x0}\,\cos\Omega t\,, \tag{4.95}$$

$$\omega_y(t) \overset{(4.93)}{=} \text{sign}(C-A)\,\omega_{x0}\,\sin\Omega t\,, \tag{4.96}$$

$$\omega_z(t) \overset{(4.90)}{=} \omega_{z0} = \text{const}\,, \tag{4.97}$$

wobei gilt

$$\omega_x^2(t) + \omega_y^2(t) = \omega_{x0}^2 = \text{const}\,. \tag{4.98}$$

Dies bedeutet, dass der Winkel α zwischen dem Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und der Figurenachse z_S konstant ist. Es gilt

$$\tan\alpha = \frac{\omega_{x0}}{\omega_{z0}}\,. \tag{4.99}$$

Der Drallvektor $\boldsymbol{l}_S = \boldsymbol{\Theta}_S\,\boldsymbol{\omega}$ hat im Hauptachsensystem $\mathcal{K}_S$ die Koordinaten

$$l_{Sx}(t) = A\,\omega_x(t) \overset{(4.95)}{=} A\,\omega_{x0}\,\cos\Omega t\,, \tag{4.100}$$

$$l_{Sy}(t) = A\,\omega_y(t) \overset{(4.96)}{=} \text{sign}(C-A)\;A\,\omega_{x0}\,\sin\Omega t\,, \tag{4.101}$$

$$l_{Sz}(t) = C\,\omega_z(t) \overset{(4.97)}{=} C\,\omega_{z0} = \text{const}\,, \tag{4.102}$$

wobei gilt

$$l_{Sx0}^2 \equiv l_{Sx}^2(t) + l_{Sy}^2(t) = A\,\omega_{x0} = \text{const}\,. \tag{4.103}$$

Dies bedeutet, dass auch der Winkel β zwischen dem Drallvektor $\boldsymbol{l}_S$ und der Figurenachse z_S konstant ist. Es gilt

$$\tan\beta = \frac{A\,\omega_{x0}}{C\,\omega_{z0}}\,. \tag{4.104}$$

Die Bewegung des Kreisels kann durch das Abrollen zweier Kegel veranschaulicht werden: Der körperfeste *Gangpolkegel* mit der Figurenachse z_S rollt auf dem raumfesten *Rastpolkegel* mit dem Drallvektor $\boldsymbol{l}_S$ in der Kegelachse ab. Die momentane Berührlinie der beiden Kegel ist die momentane Drehachse, in der die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ liegt. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 4.12 für den Zeitpunkt $t_0 = 0$ dargestellt.

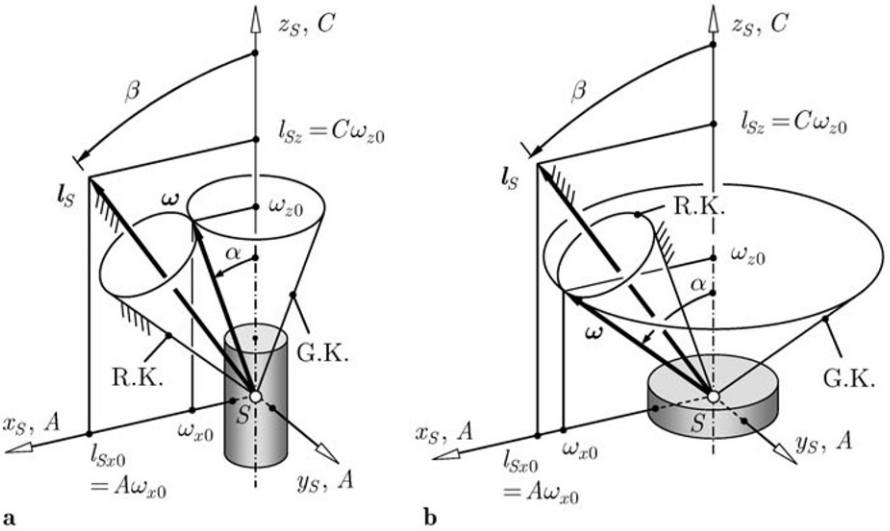


Abb. 4.12 Nutation: Abrollen des kreiselfesten Gangpolkegels (G.K.) auf dem raumfesten Rastpolkegel (R.K.). **a** Fall $C < A$ (schlanker Kreisel). **b** Fall $C > A$ (flacher Kreisel)

Entsprechend Abb. 4.13 kann die absolute Winkelgeschwindigkeit des Kreisels $\boldsymbol{\omega}$ zerlegt werden in die *Nutationsgeschwindigkeit (Nutationskreisfrequenz)* $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{N}$, mit der die Figurenachse z_S um die raumfeste Drallachse $\boldsymbol{l}_S$ umläuft, und einen Anteil $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}$ in Richtung der Figurenachse, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_\mathrm{N} + \boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}$. Der Betrag der Nutationsgeschwindigkeit ω_N ist

$$\left.\begin{aligned} \omega_{x0} &= \omega\,\sin\alpha \\ \omega_{x0} &= \omega_\mathrm{N}\,\sin\beta \end{aligned}\right\} \quad\rightarrow\quad \omega_\mathrm{N} = \omega\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\,. \tag{4.105}$$

Weiterhin ist

$$\left.\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\omega_{x0}}{\omega_{z0}} \\ \tan\beta &= \frac{l_{Sx0}}{l_{Sz}} = \frac{A\,\omega_{x0}}{C\,\omega_{z0}} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{C}{A}\,. \tag{4.106}$$

Für kleine Winkel α und β gilt näherungsweise

$$\left.\begin{aligned} \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} &= \frac{C}{A} \approx \frac{\alpha}{\beta} \\ \omega_{\mathrm{N}} &= \omega\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \omega\,\frac{\alpha}{\beta} \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \omega_{\mathrm{N}} \approx \frac{C}{A}\,\omega\,. \tag{4.107}$$

Die Nutationsgeschwindigkeit ω_{N} ist damit zur Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ω proportional und hängt vom Verhältnis der Trägheitsmomente A und C ab.

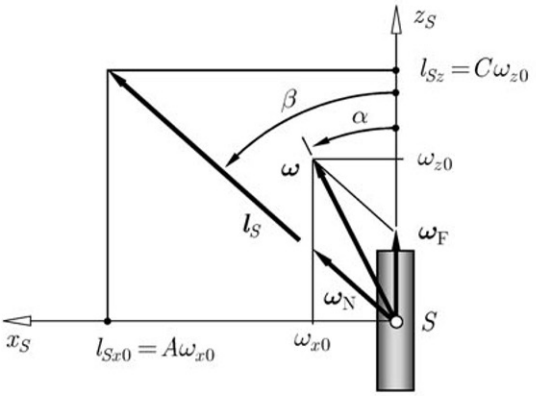


Abb. 4.13 Zur Definition der Nutationsgeschwindigkeit ω_{N}

4.8.2 Bewegung eines schweren symmetrischen Kreisels

Eine erzwungene Bewegung eines Kreisels liegt vor, wenn äußere Momente wirken. Als ein Beispiel wird ein in einem Fixpunkt Q frei drehbarer Kreisel im Schwerefeld betrachtet (Abb. 4.14 a). Der Kreisel hat die Hauptträgheitsmomente A, B, C um die Achsen des körperfesten Koordinatensystems $\mathcal{K}_1$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll sich der Massenmittelpunkt S zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gerade in der x_0,z_0-Ebene befinden und die Kreiselachse z_1 um den Winkel θ gegenüber der vertikalen z_0-Achse geneigt sein.

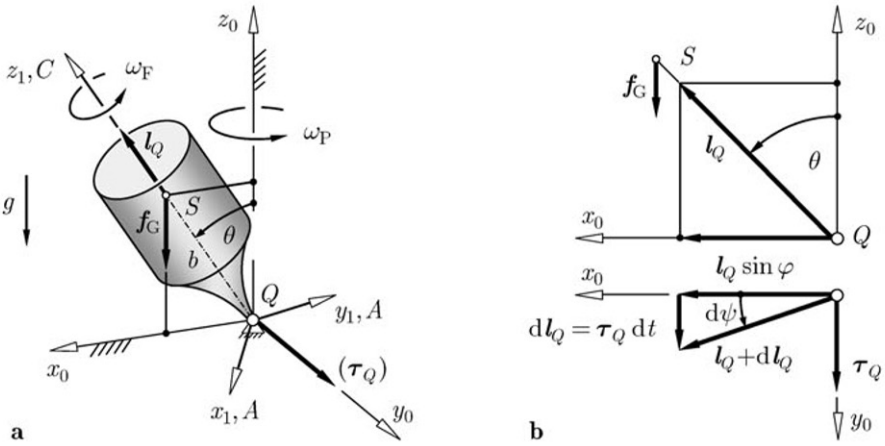


Abb. 4.14 Schwerer Kreisel mit Fixpunkt Q. **a** Drallvektor $\boldsymbol{l}_Q$ und äußeres Moment $\boldsymbol{\tau}_Q$. **b** Zeitliche Änderung des Drallvektors

Der Drallsatz (4.65) bezüglich des raumfesten Körperpunktes Q lautet unter Berücksichtigung des Moments $\boldsymbol{\tau}_Q$ der Gewichtskraft $\boldsymbol{f}_G$ (Masse m, Abstand $QS = b$)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\tau}_Q \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\tau}_Q = m\,g\,b\,\sin\theta\;\boldsymbol{e}_{y0}\,. \tag{4.108}$$

Es wird nun angenommen, dass die Winkelgeschwindigkeit ω_F des Kreisels um seine Figurenachse z_1 groß gegenüber den Winkelgeschwindigkeitskomponenten um die x_1- und y_1-Achse sei. Dann liegt der Drallvektor $\boldsymbol{l}_Q$ näherungsweise in der z_1-Achse,

$$\boldsymbol{l}_Q \approx C\,\omega_F\,\boldsymbol{e}_{z1}\,. \tag{4.109}$$

Aus dem Drallsatz (4.108) ergibt sich in einem Zeitintervall $\mathrm{d}t$ ein Zuwachs des Dralls $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q$ in der Richtung $\boldsymbol{e}_{y0}$ des äußeren Moments $\boldsymbol{\tau}_Q$ (Abb. 4.14 b),

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q = \boldsymbol{\tau}_Q\,\mathrm{d}t \qquad \text{bzw.} \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q = \boldsymbol{e}_{y0}\,m\,g\,b\,\sin\theta\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.110}$$

Der Drallvektor dreht sich damit im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ um den Winkel

$$\mathrm{d}\psi = \frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{l}_Q|}{|\boldsymbol{l}_Q|\,\sin\theta} = \frac{m\,g\,b\,\sin\theta\,\mathrm{d}t}{C\,\omega_F\,\sin\theta} \qquad \rightarrow \qquad \mathrm{d}\psi = \frac{m\,g\,b}{C\,\omega_F}\,\mathrm{d}t\,. \tag{4.111}$$

Es stellt sich daher eine Winkelgeschwindigkeit des Drallvektors $\boldsymbol{l}_Q$ bzw. der Figurenachse z_1 um die z_0-Achse ein, die *Präzessionsgeschwindigkeit*

$$\omega_P = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \qquad \rightarrow \qquad \omega_P = \frac{m\,g\,b}{C\,\omega_F}\,. \tag{4.112}$$

Die Präzessionsgeschwindigkeit ω_P ist damit proportional zum äußeren Moment τ_Q und umgekehrt proportional zur Winkelgeschwindigkeit ω_F des Kreisels um seine Figurenachse.

Das Ergebnis (4.112) verdeutlicht das durch den Drallsatz (4.111) definierte Gesetz vom *gleichsinnigen Parallelismus*: Der Drallvektor eines drehenden Körpers hat die Tendenz, sich gleichsinnig in die Richtung des Vektors des äußeren Moments einzustellen.

Bei der Präzessionsbewegung ist das Kreiselmoment

$$\boldsymbol{\tau}^\mathrm{kr} = -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{P}\, \boldsymbol{l}_Q = -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{P}\, \boldsymbol{\Theta}_Q\, \boldsymbol{\omega}_\mathrm{F} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\tau}^\mathrm{kr} = -\omega_\mathrm{P}\, C\, \omega_\mathrm{F} \sin\theta\, \boldsymbol{e}_{y0} \tag{4.113}$$

mit dem äußeren Moment $\boldsymbol{\tau}_Q$ im Gleichgewicht und verhindert dadurch das Herunterfallen des Kreisels,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_Q + \boldsymbol{\tau}^\mathrm{kr} = \boldsymbol{0} \quad &\rightarrow \quad m\, g\, b \sin\theta - \omega_\mathrm{P}\, C\, \omega_\mathrm{F} \sin\theta = 0 \\ &\rightarrow \quad \omega_\mathrm{P} = \frac{m\, g\, b}{C\, \omega_\mathrm{F}}\,, \quad \text{vgl. (4.112)}\,. \end{aligned} \tag{4.114}$$

Das Kreiselmoment $\boldsymbol{\tau}^\mathrm{kr}$ begründet sich hier in CORIOLIS-Kräften, deren Entstehung in Abb. 4.15 für den Fall $\theta = 90°$ dargestellt wird.

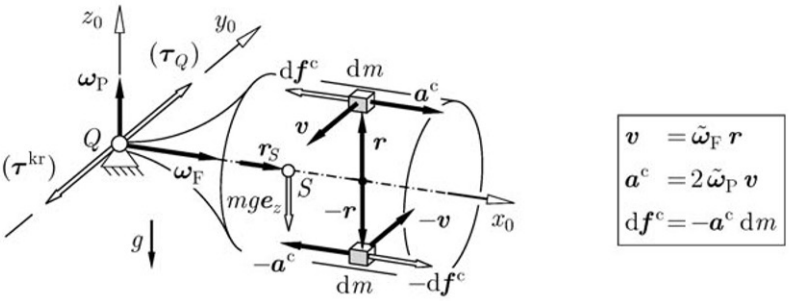


Abb. 4.15 Zur Entstehung des Kreiselmoments

Die horizontal liegende Kreiselachse läuft mit der Präzessionsgeschwindigkeit ω_P um. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll sie zum betrachteten Zeitpunkt in der x_0-Achse liegen. Zwei bezüglich der Kreiselachse gegenüberliegende Massenelemente $\mathrm{d}m$ in der x_0, z_0-Ebene haben für $\omega_\mathrm{F} \gg \omega_\mathrm{P}$ etwa die Umfangsgeschwindigkeit $\pm\boldsymbol{v} = \pm\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{F}\, \boldsymbol{r}$. In Verbindung mit der Präzessionsgeschwindigkeit ω_P erfahren sie die CORIOLIS-Beschleunigung $\pm\boldsymbol{a}^\mathrm{c} = \pm 2\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_\mathrm{P}\, \boldsymbol{v}$. Die dazu gehörenden, entgegengesetzt gerichteten D'ALEMBERTschen Trägheitskräfte gegenüberliegender Massenelemente bilden ein Kräftepaar $(\mathrm{d}\boldsymbol{f}^\mathrm{c}, -\mathrm{d}\boldsymbol{f}^\mathrm{c})$ mit $\mathrm{d}\boldsymbol{f}^\mathrm{c} = -\boldsymbol{a}^\mathrm{c}\, \mathrm{d}m$. Die integrale Wirkung aller derartigen Kräftepaare bildet das Kreiselmoment $\boldsymbol{\tau}^\mathrm{kr}$, das mit dem Moment der Gewichtskraft $\boldsymbol{\tau}_Q = m\, g\, b\, \boldsymbol{e}_{y0}$ aus (4.108) im Gleichgewicht ist. Die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ von nicht in der x_0, z_0-Ebene liegenden Massenele-

menten steht nicht senkrecht auf $\boldsymbol{\omega}_\mathrm{F}$, wodurch sich ihr Beitrag zum Kreiselmoment verringert. Massenelemente, die sich momentan in der x_0, y_0-Ebene befinden, tragen nicht zum Kreiselmoment bei.

Die Bewegung des Kreisels hängt von den Anfangsbedingungen ab. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll sich die Figurenachse z_1 zum Anfangszeitpunkt entsprechend Abb. 4.14a in der x_0, z_0-Ebene befinden. Wird als Anfangsbedingung die Figurenachse an ihrem vom Fixpunkt entfernt liegenden Ende zunächst festgehalten, also $\omega_\mathrm{P} = 0$, so tritt kein Kreiselmoment auf. Wird die Achse nun losgelassen, so führt sie am Anfang eine kleine Fallbewegung aus, die einer Winkelgeschwindigkeit um die y_0-Achse entspricht. Nach dem Abb. 4.15 beschriebenen Prinzip entsteht dadurch ein Kreiselmoment um die senkrecht auf y_0 und z_1 stehende Achse, das eine Drehbeschleunigung der Figurenachse um die z_0-Achse hervorruft. Die Bahn des Endpunkts der Figurenachse hat deswegen im Anfangspunkt eine Spitze, die sich während der Bewegung periodisch wiederholt, siehe Abb. 4.16. Bei anderen Anfangsbedingungen treten auch wellen- oder schleifenförmige Bahnen auf. Die Präzessionsbewegung ist hier jeweils durch Nutationsbewegungen überlagert, welche der Lösung der homogenen EULERschen Kreiselgleichungen entsprechen, vgl. Abschnitt 4.8.1.

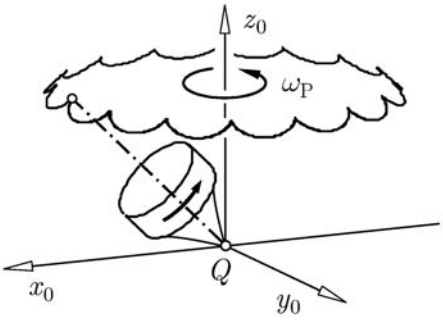


Abb. 4.16 Bewegung eines schweren Kreisels

Eine reine Präzessionsbewegung (*reguläre Präzession*), bei der die Figurenachse z_1 auf einem Kreiskegel um die vertikale Achse z_0 umläuft, ist nur bei geeigneten Anfangsbedingungen möglich. Bei der in Abb. 4.14a dargestellten Anfangslage lauten die erforderlichen Anfangswerte der Winkelgeschwindigkeitskomponenten im raumfesten System $\mathcal{K}_0$

$$\left.\begin{aligned} \omega_x(0) &= \omega_\mathrm{F} \sin\theta\,, \\ \omega_y(0) &= 0\,, \\ \omega_z(0) &= \omega_\mathrm{F} \cos\theta + \omega_\mathrm{P} \qquad \text{mit} \qquad \omega_\mathrm{P} = \frac{m\,g\,b}{C\,\omega_\mathrm{F}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.115}$$

Die vollständigen Bewegungsgleichungen des schweren symmetrischen Kreisels werden in Abschnitt 7.6.2 aufgestellt.

Kapitel 5
Mechanische Systeme mit Bindungen

Bindungen oder *Zwangsbedingungen* beschränken geometrisch die Bewegung eines mechanischen Systems. Entsprechend dem Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE legen die Bindungen zugleich die Richtungen der Reaktionskräfte fest. Die Formulierungen der Bewegungsgleichungen von mechanischen Systemen mit Bindungen werden in diesem Kapitel entwickelt.

Ausgehend von einer Übersicht über die unterschiedlichen Arten von Bindungen in Abschnitt 5.1 werden in den Abschnitten 5.2 und 5.3 die Kinematik und Dynamik von Systemen mit *holonomen* Bindungen behandelt, welche die größte Bedeutung besitzen. Die implizite Formulierung der holonomen Bindungen wird zusammen mit den dazu gehörenden expliziten Bedingungen für die Reaktionskräfte zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen in voneinander abhängigen Koordinaten verwendet. Erhalten wird ein System differential-algebraischer Gleichungen. Die explizite Formulierung der holonomen Bindungen liefert zusammen mit den dazu gehörenden impliziten Bedingungen für die Reaktionskräfte die Bewegungsgleichungen in voneinander unabhängigen Minimalkoordinaten. Hier wird ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten.

Die Betrachtungen werden in den Abschnitten 5.4 und 5.5 auf Systeme mit *nichtholonomen* Bindungen erweitert. In Abschnitt 5.6 wird das zu Grunde liegende Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE in weitere Prinzipien und Methoden der analytischen Dynamik eingeordnet. Auf die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen wird in Abschnitt 5.7 eingegangen.

5.1 Freie und gebundene mechanische Systeme

In einem *Mehrkörpersystem* mit n_{K} starren Körpern wird die Lage des i-ten Körpers mit dem körperfesten Koordinatensystem $\mathcal{K}_i$ relativ zum Inertialsystem $\mathcal{K}_0$ beschrieben durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}_i$ des Ursprungspunkts O_i von $\mathcal{K}_i$ und Koordinaten der Drehung von $\mathcal{K}_i$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$, hier

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_5, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

die EULER-Parameter $\underline{p}_i$ (Abb. 5.1 a). Die rotatorischen und translatorischen Lagegrößen von $\mathcal{K}_i$ werden zum räumlichen 7-Lagevektor

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_i \\ \boldsymbol{r}_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n_\mathrm{K}\,, \tag{5.1}$$

zusammengefasst. Aus den EULER-Parametern $\underline{p}_i$ ergibt sich gemäß (3.172) die Drehmatrix ${}^{0i}\boldsymbol{T} = {}^{0}\boldsymbol{R}_i(\underline{\boldsymbol{p}}_i)$. Werden an Stelle der EULER-Parameter $\underline{p}_i$ z.B. KARDAN-Winkel verwendet, so hat der Vektor $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ die Dimension sechs.

Die Lagegrößen aller n_K Körper werden zusammengefasst zum Vektor

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{r}}_{nK} \end{bmatrix}. \tag{5.2}$$

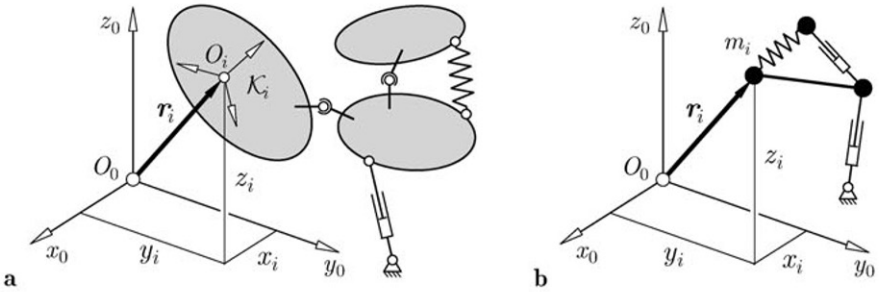


Abb. 5.1 Räumliche Ersatzmodelle. **a** Mehrkörpersystem. **b** Massenpunktsystem

Ein System von n_P Massenpunkten m_i (Abb. 5.1 b) kann als ein Sonderfall eines Mehrkörpersystems angesehen werden. Seine räumliche Lage wird beschrieben durch den $3n_\mathrm{P}$-Vektor der Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_i$ der Massenpunkte

$$\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_{n_\mathrm{P}} \end{bmatrix}. \tag{5.3}$$

In der Technischen Dynamik werden unterschieden:

- *Freie Systeme*: Die Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ können aus geometrischer Sicht beliebige Werte annehmen. Beispiele sind ein sich im Flug befindliches Flugzeug oder der Aufbau eines Straßenfahrzeugs, bei dem der Fahrbahn-Reifen-Kontakt in allen Richtungen durch eingeprägte Kräfte modelliert ist.
- *Gebundene Systeme*: Die Körper sind untereinander bzw. mit der Umgebung durch starre Lager und Gelenke verbunden, welche die Bewegun-

gen durch *Bindungen* oder *Zwangsbedingungen* geometrisch beschränken. Mehrkörpermodelle sind meist gebundene Systeme. Ein Beispiel ist ein Industrieroboter mit gelenkig miteinander verbundenen Armsegmenten.

Bindungen können nach jeweils einem der folgenden physikalischen Merkmalen klassifiziert werden:

holonom	—	*nichtholonom (anholonom)*
skleronom	—	*rheonom*
geometrisch	—	*kinematisch*
zweiseitig	—	*einseitig.*

Ein weiteres Merkmal kennzeichnet die mathematische Form der Bindungen:

implizit	—	*explizit.*

Die Bedeutungen dieser Merkmale werden im Folgenden beschrieben.

5.2 Kinematik holonomer Systeme

Holonome Systeme besitzen ausschließlich die in diesem Abschnitt eingeführten holonomen Bindungen. Bei der Modellbildung von Mehrkörpersystemen haben holonome Systeme gegenüber den in den Abschnitten 5.4 und 5.5 behandelten nichtholonomen Systemen die weitaus größere Bedeutung.

5.2.1 Skleronome und rheonome holonome Bindungen

Holonome[1] *Bindungen* beschränken die Lagegrößen der Körper eines mechanischen Systems. Technische Realisierungen sind ideale, d.h. unnachgiebige Gelenke, Lager oder Führungen. Für ein System, das aus $n(= n_{\mathrm{K}})$ starren Körpern oder aus $n(= n_{\mathrm{P}})$ Massenpunkten mit den Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}_i$, $i = 1, \ldots, n$, besteht, können holonome Bindungen eine der beiden folgenden Formen besitzen:

$$g(\hat{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{r}}_n) = 0 \qquad \text{(skleronome holonome Bindung)} \tag{5.4}$$

$$g(\hat{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{r}}_n, t) = 0 \qquad \text{(rheonome holonome Bindung)}\,. \tag{5.5}$$

Die Menge der Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{r}}_n$, welche die Bindungen erfüllen, bilden eine *Mannigfaltigkeit* (Groche et al. [30]). Im Fall eines Massenpunkts im Raum mit einer Bindung $g(x, y, z) = 0$ entspricht die Mannigfaltigkeit einer Fläche im dreidimensionalen Raum. Bei skleronomen[2] Bindungen ist die Mannigfaltigkeit zeitlich konstant. Bei rheonomen[3] Bindungen ist die Mannigfaltigkeit in vorgegebener Weise zeitlich veränderlich.

---

[1] griechisch *hólos* – ganz(heitlich), *nómos* – Gesetz

[2] griechisch *sclerós* – starr

[3] griechisch *rhéo* – fließen

5.2.2 Beispiel: Bindungen eines Verladekrans

Das in Abb. 5.2 a gezeigte einfache Modell eines Verladekrans besteht aus einer punktförmigen Lastmasse m im Punkt Q, die durch zwei starre Führungsstangen (Längen l_1, l_2) mit jeweils Kugelgelenken an den Enden getragen wird. Die Aufhängepunkte P_1, P_2 (Ortsvektoren $\boldsymbol{r}_{P1}$, $\boldsymbol{r}_{P2}$) der Führungsstangen befinden sich auf einer Brücke, die durch einen ideal lagegeregelten Antriebsmotor gemäß einer vorgegebenen Zeitfunktion $u(t)$ in Richtung der horizontalen y-Achse verfahren wird. Der Fußpunkt P_0 der Höhe l des Dreiecks P_1P_2Q unterteilt die Strecke $\overline{P_1P_2}$ in die Längen

$$d_1 = \overline{P_1P_0} = \sqrt{l_1^2 - l^2} \qquad \text{und} \qquad d_2 = \overline{P_0P_2} = \sqrt{l_2^2 - l^2}\,. \tag{5.6}$$

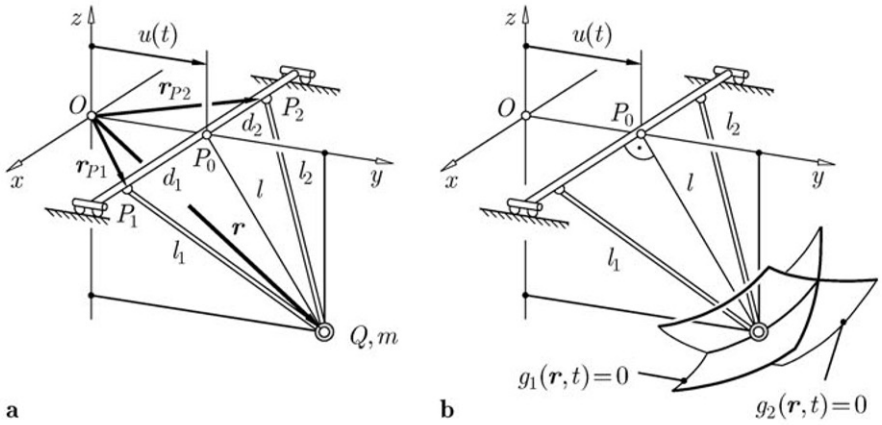


Abb. 5.2 Verladekran. **a** Mechanisches Modell als Massenpunkt mit zwei rheonomen holonomen Bindungen. **b** Bindungsflächen

Die Lagekoordinaten des Massenpunkts

$$\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r} = [\,x \quad y \quad z\,]^{\mathrm{T}} \tag{5.7}$$

unterliegen wegen der konstanten Abstände l_1, l_2 des Punktes Q von den geführten Aufhängepunkten P_1, P_2 mit den Ortsvektoren

$$\boldsymbol{r}_{P1}(t) = [\,d_1 \quad u(t) \quad 0\,]^{\mathrm{T}}\,, \qquad \boldsymbol{r}_{P2}(t) = [\,-d_2 \quad u(t) \quad 0\,]^{\mathrm{T}} \tag{5.8}$$

den beiden Bindungen

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{P1}| \stackrel{!}{=} l_1 \qquad \text{oder} \qquad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{P1})^2 \stackrel{!}{=} l_1^2\,, \tag{5.9}$$

$$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{P2}| \stackrel{!}{=} l_2 \qquad \text{oder} \qquad (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{P2})^2 \stackrel{!}{=} l_2^2\,. \tag{5.10}$$

Die quadratische Formulierung der Bindungen vereinfacht die Berechnung der für die Bewegungsgleichungen benötigten zeitlichen Ableitungen. Mit den Vektoren $\boldsymbol{r}$ aus (5.7) sowie $\boldsymbol{r}_{P1}$ und $\boldsymbol{r}_{P2}$ aus (5.8) lauten die Bindungen in der Form (5.5)

$$g_1(\boldsymbol{r},t) \equiv (x-d_1)^2 + (y-u)^2 + z^2 - l_1^2 = 0\,, \tag{5.11}$$

$$g_2(\boldsymbol{r},t) \equiv (x+d_2)^2 + (y-u)^2 + z^2 - l_2^2 = 0\,. \tag{5.12}$$

Diese Bindungen sind holonom, weil sie die Lagegrößen $\boldsymbol{r} = [\,x\;\;y\;\;z\,]^{\mathrm{T}}$ beschränken, und rheonom, weil sie wegen der gegebenen Zeitfunktion $u(t)$ explizit von der Zeit t abhängen. Sie besitzen die folgenden Eigenschaften:

1. Die Bindungen (5.11) und (5.12) repräsentieren die Oberflächen von Kugeln um die Aufhängepunkte P_1 und P_2 mit den Radien l_1 und l_2 (Abb. 5.2 b). Der Massenpunkt bewegt sich auf dem Schnittkreis der beiden Kugeloberflächen, der wegen der speziellen Abmessungen (5.6) den Mittelpunkt P_0 und den Radius l besitzt und in der y,z-Ebene liegt. Dieser Kreis ist die durch das System der Bindungen (5.11) und (5.12) definierte Bindungs-Mannigfaltigkeit.
2. Rheonome holonome Bindungen sind dadurch gekennzeichnet, dass die Bindungs-Mannigfaltigkeit zeitlich veränderlich (zeitvariant) ist. In dem Beispiel bewegt sich der Schnittkreis der beiden Kugeloberflächen mit dem vorgegebenen Bewegungsgesetz $u(t)$ der Aufhängepunkte in der y-Richtung und ist damit zeitlich veränderlich.
3. Bei skleronomen holonomen Bindungen ist die Bindungs-Mannigfaltigkeit dagegen zeitlich konstant (zeitinvariant). Im Beispiel liegt dieser Fall vor, wenn die Verschiebung u konstant ist, also die Aufhängepunkte P_1, P_2 raumfest sind. Die Bindungen (5.11) bzw. (5.12) hängen dann nicht mehr explizit von der Zeit ab und sind skleronom.

5.2.3 Zweiseitige und einseitige holonome Bindungen

Die Bindungen (5.11) bzw. (5.12) sind *zweiseitige* holonome Bindungen. Dies bedeutet, dass das System die Bindungsflächen nach keiner Seite hin verlassen kann. Bei *einseitigen* holonomen Bindungen kann das System die Bindungsflächen nach einer Seite hin verlassen. Einseitige holonome Bindungen werden allgemein durch *Ungleichungen* der folgenden Formen beschrieben:

$$g(\hat{\boldsymbol{r}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{r}}_n) \geq 0 \qquad \text{einseitige skleronome holonome Bindung} \tag{5.13}$$

$$g(\hat{\boldsymbol{r}}_1,\ldots,\hat{\boldsymbol{r}}_n,t) \geq 0 \qquad \text{einseitige rheonome holonome Bindung}\,. \tag{5.14}$$

Wird eine einseitige Bindung in der Form $g \leq 0$ aufgestellt, so kann sie durch Multiplikation mit -1 stets auf die Form (5.13) bzw. (5.14) gebracht werden.

Als ein Beispiel zeigt Abb. 5.3 zwei Ausführungen eines ebenen Massenpunktpendels (Pendellänge l). Der Massenpunkt m hat die Lagekoordinaten $\boldsymbol{r} = [\,x \;\; y\,]^{\mathrm{T}}$. Ist der Massenpunkt durch einen starren Stab geführt, so kann er die Bindungs-Mannigfaltigkeit $g(x, y) = 0$, hier der Kreis um O mit dem Radius l, nicht verlassen. Es liegt eine zweiseitige holonome Bindung vor.

Ist der Massenpunkt dagegen durch einen undehnbaren Faden gefesselt, so kann er die Bindungs-Mannigfaltigkeit $g(x, y) = 0$ nach innen verlassen. Es liegt eine einseitige holonome Bindung vor. Die Bindung ist nur wirksam (aktiv), wenn der Faden straff gespannt ist; andernfalls ist die Bindung nicht wirksam (inaktiv). Es liegt ein *strukturvariables System* vor. Beim Übergang von der inaktiven zur aktiven Bindung tritt i.Allg. ein *Stoß* auf.

Mit einseitigen Bindungen können Kontaktvorgänge an starren Oberflächen, wie z. B. starre Lager mit Spiel oder der spielbehaftete Eingriff zweier Zahnräder, modelliert werden. Systeme mit einseitigen Bindungen werden im vorliegenden Buch nicht betrachtet. Umfassende Darstellungen strukturvariabler Mehrkörpersysteme geben PFEIFFER und GLOCKER [80] sowie PFEIFFER [79].

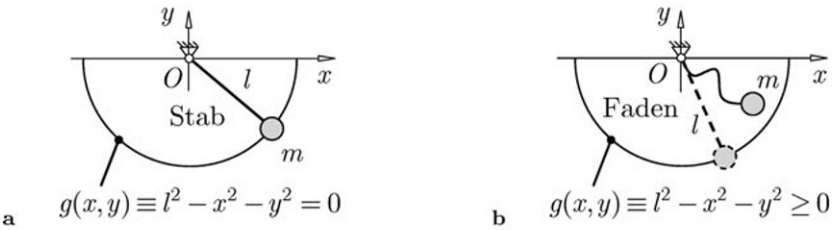


Abb. 5.3 Gebundener Massenpunkt. **a** Zweiseitige Bindung. **b** Einseitige Bindung

5.2.4 Freiheitsgrad holonomer Systeme

Der Freiheitsgrad f eines holonomen Systems ist gleich der Anzahl der unabhängigen Lagegrößen des Systems. Ein räumliches Mehrkörpersystem mit n_{K} starren Körpern, die keinen Bindungen unterliegen, besitzt wegen der jeweils sechs unabhängigen Lagegrößen jedes Körpers den Freiheitsgrad $f = 6\,n_{\mathrm{K}}$. Liegen b holonome Bindungen vor, so wird die Anzahl der unabhängigen Lagegrößen um b verringert, und der Freiheitsgrad des Systems beträgt

$$f = 6\,n_{\mathrm{K}} - b\,. \tag{5.15}$$

In entsprechender Weise ergibt sich der Freiheitsgrad f eines räumlichen Systems von n_{P} Massenpunkten mit b holonomen Bindungen zu

$$f = 3\,n_{\mathrm{P}} - b\,. \tag{5.16}$$

Der Freiheitsgrad ebener Mehrkörpersysteme bzw. Massenpunktsysteme kann in entsprechender Weise ermittelt werden zu

$$f = 3\,n_{\mathrm{K}} - b \qquad \text{(ebenes Mehrkörpersystem)}\,, \tag{5.17}$$

$$f = 2\,n_{\mathrm{P}} - b \qquad \text{(ebenes Massenpunktsystem)}\,. \tag{5.18}$$

Im Beispiel aus Abb. 5.2 ist $n_{\mathrm{P}} = 1$ und $b = 2$, und es gilt mit (5.16) $f = 1$.

Die Beziehungen (5.15) bis (5.18) gelten allerdings nur, wenn die b Bindungen voneinander unabhängig sind, siehe Abschnitt 6.3.

5.2.5 Minimalkoordinaten holonomer Systeme

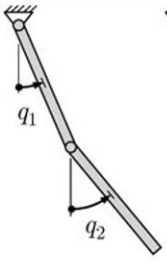
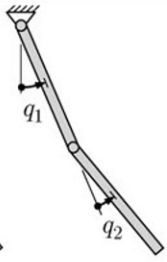
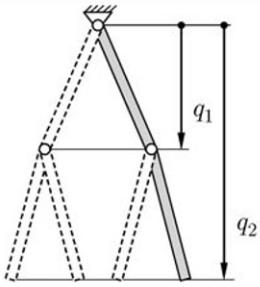
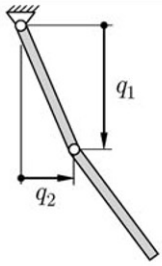
Die Lage eines holonomen Systems mit dem Freiheitsgrad f wird durch f voneinander unabhängige Koordinaten, die *Minimalkoordinaten*,[4]

$$\boldsymbol{q} = \left[\, q_1 \;\; \dots \;\; q_f \,\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.19}$$

beschrieben. Die Minimalkoordinaten q_i können Verschiebungen oder Winkel sein. Sie müssen die Lage des Systems eindeutig beschreiben.

Als ein Beispiel wird in Tabelle 5.1 ein doppeltes Körperpendel mit zwei Drehgelenken ($n_{\mathrm{K}} = 2$ Körper, $b = 10$ Bindungen[5]) betrachtet. Gemäß (5.15) hat es den Freiheitsgrad $f = 2$, und seine Lage wird durch $f = 2$ Minimalkoordinaten q_1, q_2 beschrieben. Zulässige Minimalkoordinaten sind z.B. die absoluten oder relativen Gelenkwinkel, nicht jedoch Koordinaten, die keine eindeutige Lagebeschreibung liefern oder voneinander abhängig sind.

Tabelle 5.1 Zur Definition von Minimalkoordinaten für ein Doppelpendel ($f = 2$)

zulässige Definitionen		unzulässige Definitionen	
			
Absolutwinkel	Relativwinkel	q_1, q_2 nicht eindeutig	q_1, q_2 nicht unabhängig

[4] Die Minimalkoordinaten werden oft auch als verallgemeinerte Koordinaten bezeichnet, wobei diese Benennung auch für voneinander abhängige Koordinaten verwendet wird.

[5] Ein Drehgelenk weist $b = 5$ holonome Bindungen auf, siehe Abschnitt 6.1.

5.2.6 Implizite holonome Bindungen

Da die holonomen Bindungen (5.4) und (5.5) implizite Gleichungen in den Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}$ sind, werden sie auch als *implizite* holonome Bindungen bezeichnet. Die holonomen Bindungen beschränken nicht nur die Lagegrößen, sondern auch deren zeitliche Ableitungen. Da im Impuls- und Drallsatz die Beschleunigungen auftreten, müssen die Bindungen auch für die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen aufgestellt werden. Weiterhin wird der Begriff der virtuellen Verschiebungen eingeführt, und es werden die dazu gehörenden impliziten holonomen Bindungen formuliert.

Die Bindungen werden für Massenpunktsysteme gemäß Abb. 5.1 b aufgestellt. Gegenüber Mehrkörpersystemen sind die Gleichungsstrukturen durch den Wegfall der rotatorischen Größen übersichtlicher. Holonome Bindungen für starre Körper werden in Abschnitt 6.4 formuliert.

Implizite holonome Bindungen auf Lageebene Ein System von $n(= n_{\mathrm{P}})$ Massenpunkten besitzt insgesamt $3n$ Lagekoordinaten gemäß (5.3),

$$\hat{\boldsymbol{r}} \equiv \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} . \tag{5.20}$$

Die holonomen Bindungen auf Lageebene beschränken die Lagegrößen $\boldsymbol{r}$ des Systems. Die Lagegrößen $\boldsymbol{r}$ unterliegen $b < 3n$ holonomen, i. Allg. rheonomen Bindungen, die als implizite Bindungen die Form (5.5) besitzen,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_1(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) \\ \vdots \\ g_b(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{0} \quad . \end{aligned} \tag{5.21}$$

Die Bindungen (5.21) bilden ein unterbestimmtes nichtlineares System von b Gleichungen in den $3n > b$ Lagekoordinaten $\boldsymbol{r}$. Es wird vorausgesetzt, dass die Bindungen voneinander unabhängig sind. Die Menge der $3n$ Lagekoordinaten $\boldsymbol{r}$, welche die Bindungen (5.21) erfüllen, bildet dann die $(3n - b)$-dimensionale Bindungs-Mannigfaltigkeit. Der Freiheitsgrad des Systems beträgt $f = 3n - b$.

Implizite holonome Bindungen auf Geschwindigkeitsebene Die Geschwindigkeiten des Massenpunktsystems sind

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{r}}_n \end{bmatrix} \\ \rightarrow \qquad \boldsymbol{v} &= \dot{\boldsymbol{r}} \quad . \end{aligned} \tag{5.22}$$

Die impliziten Bindungen auf Geschwindigkeitsebene werden durch die totale zeitliche Ableitung der impliziten Lagebindungen (5.21) erhalten. Mit der Matrizenschreibweise vektorieller Ableitungen gemäß (0.6) gilt

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{g}} &\equiv \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}_1}\ \dot{\boldsymbol{r}}_1 + \ldots + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}_n}\ \dot{\boldsymbol{r}}_n + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow\ \dot{\boldsymbol{g}} &\equiv \boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r},t)\ \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \boldsymbol{G}_n(\boldsymbol{r},t)\ \boldsymbol{v}_n + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}\ . \end{aligned} \tag{5.23}$$

Die (b,3)-Funktionalmatrizen (Jacobi-Matrizen)[6]

$$\boldsymbol{G}_i = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}_i} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}_i} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_b}{\partial \boldsymbol{r}_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_i} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_i} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_b}{\partial x_i} & \dfrac{\partial g_b}{\partial y_i} & \dfrac{\partial g_b}{\partial z_i} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

werden jetzt als die *Bindungsmatrizen* des i-ten Massenpunkts bezeichnet. Der b-Vektor der partiellen Zeitableitungen

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_b}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

tritt nur bei rheonomen Bindungen auf. In Blockmatrizendarstellung lauten die Bindungen (5.23)

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{g}} &\equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}_1} & \ldots & \dfrac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial \boldsymbol{r}_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} + \frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow\ & \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t) \qquad\qquad \boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{5.26}$$

mit der (b,3n)-Bindungsmatrix des Systems der impliziten Bindungen (5.21)

$$\boldsymbol{G} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \underbrace{\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}_1}}_{\boldsymbol{G}_1} & \ldots & \underbrace{\dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}_n}}_{\boldsymbol{G}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial g_b}{\partial \boldsymbol{r}_1} & \ldots & \dfrac{\partial g_b}{\partial \boldsymbol{r}_n} \end{bmatrix}. \tag{5.27}$$

Der Rang der Bindungsmatrix $\mathrm{r}(\boldsymbol{G})$ entspricht der Anzahl voneinander unabhängiger Bindungen. Bei vollem Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}) = b$ sind alle b Bindungen voneinander unabhängig.

---

[6] Carl Gustav Jacob Jacobi, *1804 in Potsdam, †1851 in Berlin

Implizite holonome Bindungen auf Beschleunigungsebene Die Beschleunigungen des Massenpunktsystems sind

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \vdots \\ \ddot{\boldsymbol{r}}_n \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{a} &= \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{r}} \ . \end{aligned} \tag{5.28}$$

Die impliziten holonomen Bindungen auf Beschleunigungsebene werden durch die totale zeitliche Ableitung der impliziten Geschwindigkeitsbindungen (5.26) erhalten, also

$$\ddot{\boldsymbol{g}} \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\,\dot{\boldsymbol{v}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \boldsymbol{0} \tag{5.29}$$

mit dem nicht von den Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$ abhängenden b-Vektor

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{v} + \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r},t)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{5.30}$$

Implizite holonome Bindungen für die virtuellen Verschiebungen Für die Kennzeichnung der freien Raumrichtungen wird häufig der Begriff der *virtuellen Verschiebungen*, gekennzeichnet durch das Symbol δ, eingeführt. Virtuelle Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ sind gedachte Änderungen der Lagegrößen $\boldsymbol{r}$, die mit den skleronomen und den zum betrachteten Zeitpunkt „erstarrten“ rheonomen Bindungen des Systems in erster Näherung verträglich sind. Dies bedeutet, dass die virtuellen Verschiebungen die in eine Taylorreihe bis zu Gliedern erster Ordnung in $\boldsymbol{r}$ entwickelten holonomen Bindungen $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ erfüllen, wobei keine Reihenentwicklung nach der Zeit t erfolgt,

$$\delta\boldsymbol{g} \equiv \underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{G}}\,\delta\boldsymbol{r} + \frac{\partial\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\,\underbrace{\delta t}_{0} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \delta\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\,\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \ . \tag{5.31}$$

Das Symbol δ kennzeichnet damit ein spezielles Differential, für das $\delta t = 0$ gilt. Die Bindungen (5.31) für die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ bedeuten, dass diese senkrecht auf den Zeilenvektoren der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ stehen. Vektoren mit dieser Eigenschaft liegen im *Nullraum* oder *Kern* der (b,$3n$)-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)$,

$$\delta\boldsymbol{r} \in \ker(\boldsymbol{G}) \ . \tag{5.32}$$

Der Nullraum hat die Dimension $f = 3n - b$. Er entspricht dem f-dimensionalen *Tangentialraum* der Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ im Punkt $\boldsymbol{r}$. Die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ in der Lage $\boldsymbol{r}$ zum Zeitpunkt t sind damit beliebige, im Tangentialraum der Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ liegende Vektoren.

5.2.7 Explizite holonome Bindungen

Aus den im vorangehenden Abschnitt formulierten impliziten Bindungen werden durch die Definition von Minimalkoordinaten gemäß Abschnitt 5.2.5 *explizite Bindungen* erhalten.

Explizite holonome Bindungen auf Lageebene Die f Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ können allgemein durch f nichtlineare Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_1^*(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_n) \\ \vdots \\ g_f^*(\boldsymbol{r}_1,\ldots,\boldsymbol{r}_n) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \end{bmatrix} \\ \rightarrow \qquad \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{r}) &= \boldsymbol{q} \end{aligned} \tag{5.33}$$

so definiert werden, dass (5.33) zusammen mit den Bindungen (5.21) ein vollständig bestimmtes nichtlineares System von $3n$ Gleichungen in den $3n$ Lagegrößen $\boldsymbol{r}$ bildet,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{g}^*(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} b \text{ implizite Bindungen} \\ f = 3n - b \text{ Definitionsgleichungen.} \end{array} \tag{5.34}$$

Wird (5.34) nach den Lagegrößen $\boldsymbol{r}$ aufgelöst, so werden die Lagegrößen $\boldsymbol{r}$ in Abhängigkeit von den Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ erhalten,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q},t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{q},t) \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q},t) \quad . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Die Gleichungen (5.35) werden als die *expliziten* holonomen Bindungen für die Lagegrößen $\boldsymbol{r}$ bezeichnet. Die explizite Zeitabhängigkeit tritt bei rheonomen Bindungen auf. Explizite skleronome Bindungen lauten $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q})$.

Anmerkung Bei *offenen Mehrkörpersystemen* können die expliziten Bindungen (5.35) zumindest bei Dreh- und Schubgelenken und daraus aufgebauten weiteren Gelenken unmittelbar, also ohne vorherige Aufstellung der impliziten Bindungen, formuliert werden, siehe Abschnitt 7.2. Bei *geschlossenen Mehrkörpersystemen* werden die Minimalkoordinaten in der Regel als Teilmenge der abhängigen (Gelenk-)Koordinaten definiert. Die Definitionsgleichung (5.33) vereinfacht sich dadurch, siehe (8.20).

Explizite holonome Bindungen auf Geschwindigkeitsebene Die expliziten holonomen Bindungen auf Geschwindigkeitsebene werden als die total nach der Zeit abgeleiteten expliziten Lagebindungen erhalten. Die zeitliche Ableitung der Lagebindungen des i-ten Massenpunkts aus (5.35) lautet

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}}_i \;\equiv\; \boldsymbol{v}_i \;&=\; \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_f \end{bmatrix} + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial t} \\
\rightarrow \quad \boldsymbol{v}_i \;&=\; \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{q},t) \quad \dot{\boldsymbol{q}} \;+\; \bar{\boldsymbol{v}}_i(\boldsymbol{q},t)
\end{aligned} \tag{5.36}$$

mit der (3,f)-Funktionalmatrix (JACOBI-Matrix)

$$\boldsymbol{J}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial x_i}{\partial q_f} \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_i}{\partial q_f} \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial z_i}{\partial q_f} \end{bmatrix}. \tag{5.37}$$

Sie wird jetzt als die JACOBI-Matrix zur expliziten Bindung $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t)$ des i-ten Massenpunkts aus (5.35) bezeichnet.[7] Der nicht von $\dot{\boldsymbol{q}}$ abhängende 3-Vektor der partiellen Zeitableitungen

$$\bar{\boldsymbol{v}}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial t} \\ \dfrac{\partial z_i}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

tritt nur bei rheonomen Bindungen auf. Die expliziten Geschwindigkeitsbindungen (5.36) lassen sich zusammenfassen zum Gesamtsystem

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q},t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q},t) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{v}}_1(\boldsymbol{q},t) \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{v}}_n(\boldsymbol{q},t) \end{bmatrix} \\
\rightarrow \quad \boldsymbol{v} \;&=\; \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},t) \quad \dot{\boldsymbol{q}} \;+\; \bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q},t)
\end{aligned} \tag{5.39}$$

mit der ($3n$,f)-JACOBI-Matrix

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial \boldsymbol{q}} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial \boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial q_f} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_f} \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{q}} \tag{5.40}$$

[7] Zur Unterscheidung wurde die JACOBI-Matrix der impliziten Bindungen $\boldsymbol{G}$ aus (5.27) als Bindungsmatrix bezeichnet.

des Systems der expliziten Bindungen (5.35) und dem nur bei rheonomen Bindungen auftretenden, nicht von $\dot{\boldsymbol{q}}$ abhängenden $3n$-Vektor

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial t} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial t} \end{bmatrix} . \tag{5.41}$$

Orthogonalität der freien und gesperrten Raumrichtungen Die impliziten und expliziten holonomen Bindungen auf Geschwindigkeitsebene (5.26) und (5.39) können geometrisch wie folgt interpretiert werden:

- Die $3n$-Zeilenvektoren der $(b,3n)$-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ aus (5.27)

$$\frac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{r}_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_i}{\partial \boldsymbol{r}_n} \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, b\,, \tag{5.42}$$

  kennzeichnen die durch die i-te Bindung $g_i(\boldsymbol{r}, t) = 0$ *gesperrte* Richtung im Raum der Lagekoordinaten $\boldsymbol{r}$. Diese Richtung liegt im *Kotangentialraum* der Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$.

- Die $3n$-Spaltenvektoren der $(3n,f)$-Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ aus (5.40)

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_1}{\partial q_j} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{r}_n}{\partial q_j} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, f\,, \tag{5.43}$$

  kennzeichnen die zu einer differentiellen Änderung $\mathrm{d}q_j$ der j-ten Minimalkoordinate gehörende *freie* Richtung im Raum der Lagekoordinaten $\boldsymbol{r}$, die im *Tangentialraum* der Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$ liegt.

- Die expliziten Bindungen (5.39) sind Lösungen des unterbestimmten linearen Gleichungssystems der impliziten Bindungen (5.26). Einsetzen von (5.39) in (5.26) ergibt

$$\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{v}}) + \bar{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{G}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.44}$$

  Da die Gleichung (5.44) für beliebige Werte der unabhängigen Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ erfüllt sein muss, verschwinden die Terme $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}$ und $\boldsymbol{G}\,\bar{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}$ jeweils für sich. Es gilt die *Orthogonalitätsbeziehung* zwischen den freien und gesperrten Raumrichtungen, d. h. die f Spaltenvektoren der $(3n,f)$-Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}$ stehen jeweils senkrecht auf allen b Zeilenvektoren der $(b,3n)$-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$,

$$\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.45}$$

Der Tangentialraum und der Kotangentialraum im Punkt $\boldsymbol{r}$ der Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}$ sind damit zueinander orthogonal.

Explizite holonome Bindungen auf Beschleunigungsebene Die expliziten holonomen Bindungen auf Beschleunigungsebene werden durch die totale zeiliche Ableitung der Geschwindigkeitsbindungen (5.39) erhalten,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q},t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n(\boldsymbol{q},t) \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}_1(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{a}}_n(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},t) \quad \ddot{\boldsymbol{q}} + \quad \bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \ , \end{aligned} \tag{5.46}$$

mit dem nicht von $\ddot{\boldsymbol{q}}$ abhängenden Beschleunigungsanteilen der Massenpunkte $\bar{\boldsymbol{a}}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ im $3n$-Vektor

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_1}{\mathrm{d}t}\,\dot{\boldsymbol{q}} + \dfrac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{v}}_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_n}{\mathrm{d}t}\,\dot{\boldsymbol{q}} + \dfrac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{v}}_n}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} . \tag{5.47}$$

Die expliziten Beschleunigungsbindungen (5.46) erfüllen für beliebige Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{q}}$ die impliziten Beschleunigungsbindungen (5.29), also

$$\boldsymbol{G}\,(\boldsymbol{J}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{a}}) + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}\ddot{\boldsymbol{q}} + (\boldsymbol{G}\,\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}) = \boldsymbol{0} \ . \tag{5.48}$$

Neben der Orthogonalität $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$ gilt damit die Beziehung $\boldsymbol{G}\,\bar{\boldsymbol{a}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} = \boldsymbol{0}$.

Explizite holonome Bindungen für die virtuellen Verschiebungen Die expliziten holonomen Bindungen für die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ werden mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung der expliziten Lagebindung (5.35) bis zu Termen erster Ordnung unter Berücksichtigung der Bedingung der festgehaltenen Zeit $\delta t = 0$ erhalten, also

$$\delta\boldsymbol{r} = \underbrace{\frac{\partial\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q},t)}{\partial\boldsymbol{q}}}_{\boldsymbol{J}}\,\delta\boldsymbol{q} + \frac{\partial\boldsymbol{r}(\boldsymbol{q},t)}{\partial t}\,\underbrace{\delta t}_{0} \qquad \rightarrow \qquad \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},t)\,\delta\boldsymbol{q} \ . \tag{5.49}$$

Die expliziten Bindungen (5.49) erfüllen die impliziten Bindungen (5.31),

$$\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}\,\delta\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \ . \tag{5.50}$$

Da die virtuellen Änderungen $\delta\boldsymbol{q}$ der Minimalkoordinaten beliebige Werte annehmen können, folgt aus (5.50) wieder die Orthogonalitätsbeziehung (5.45), $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$.

5.2.8 Geometrische und kinematische Bindungen

Die holonomen Bindungen auf Lageebene (5.21) bzw. (5.35) werden auch als *geometrische* Bindungen bezeichnet, die Bindungen (5.26) bzw. (5.39) auf Geschwindigkeitsebene als *kinematische* Bindungen, siehe z.B. Hiller [38]. In der Literatur werden diese Begriffe aber nicht einheitlich verwendet.

Die kinematischen holonomen Bindungen (5.26) bzw. (5.39) werden als integrierbar bezeichnet, da sie die zeitlichen Ableitungen der geometrischen Bindungen (5.21) sind, also durch zeitliche Integration wieder in diese überführbar sind.

5.2.9 Bindungen des Verladekrans

Für den rheonom geführten Verladekran aus Abschnitt 5.2.2 sind die impliziten und expliziten Bindungen auf Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene in Tabelle 5.2 zusammengestellt.

Tabelle 5.2 Holonome Bindungen des Verladekrans (Abb. 5.2), Lage (L), Geschwindigkeit (G), Beschleunigung (B), virtuelle Verschiebung (V)

	Implizite Bindungen	Explizite Bindungen (Minimalkoordinate $q = \beta$)
L	$\begin{bmatrix}(x-d_1)^2+(y-u)^2+z^2-l_1^2\\(x+d_2)^2+(y-u)^2+z^2-l_2^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$	$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\u+l\,\mathrm{s}\beta\\-l\,\mathrm{c}\beta\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(q,t)$
G	$2\begin{bmatrix}x-d_1 & y-u & z\\x+d_2 & y-u & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot x\\\dot y\\\dot z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar\gamma_1(\boldsymbol{r},t)\\\bar\gamma_2(\boldsymbol{r},t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\ \boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ mit $\bar\gamma_1=\bar\gamma_2=-2\,(y-u)\,\dot u$	$\begin{bmatrix}\dot x\\\dot y\\\dot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\l\,\mathrm{c}\beta\\l\,\mathrm{s}\beta\end{bmatrix}\dot\beta+\begin{bmatrix}0\\\dot u\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(q)\ \dot q + \bar{\boldsymbol{v}}(t)$
B	$2\begin{bmatrix}x-d_1 & y-u & z\\x+d_2 & y-u & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot x\\\ddot y\\\ddot z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\bar\gamma}_1(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\\\bar{\bar\gamma}_2(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\ \dot{\boldsymbol{v}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) = \boldsymbol{0}$ mit $\bar{\bar\gamma}_1=\bar{\bar\gamma}_2=2\,(\,\dot x^2+(\dot y-\dot u)^2+\dot z^2-(y-u)\,\ddot u\,)$	$\begin{bmatrix}\ddot x\\\ddot y\\\ddot z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\l\,\mathrm{c}\beta\\l\,\mathrm{s}\beta\end{bmatrix}\ddot\beta+\begin{bmatrix}0\\\ddot u-l\,\mathrm{s}\beta\,\dot\beta^2\\l\,\mathrm{c}\beta\,\dot\beta^2\end{bmatrix}$ $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}(q)\ \ddot q + \bar{\boldsymbol{a}}(q,\dot q,t)$
V	$2\begin{bmatrix}x-d_1 & y-u & z\\x+d_2 & y-u & z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\\delta y\\\delta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\ \delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$	$\begin{bmatrix}\delta x\\\delta y\\\delta z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\l\,\mathrm{c}\beta\\l\,\mathrm{s}\beta\end{bmatrix}\delta\beta$ $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}(q)\ \delta q$
	Orthogonalität: $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$	

Für die Aufstellung der expliziten Bindungen wird als Minimalkoordinate der in Abb. 5.4 a dargestellte Pendelwinkel $q = \beta$ definiert. In dem speziellen Beispiel treten in den Termen $\boldsymbol{J}$, $\bar{\boldsymbol{v}}$ und $\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}$ nicht alle i.Allg. möglichen funktionalen Abhängigkeiten auf.

Die Bindungen in Tabelle 5.2 besitzen die folgenden Eigenschaften:

- Wie bereits in Abschnitt 5.2.1 beschrieben, definiert das System der beiden impliziten Lagebindungen $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$ die Bindungs-Mannigfaltigkeit als einen Kreis in der y, z-Ebene um den Punkt P_0 mit dem Radius l. Als Folge der rheonomen Bindung ist der Kreis nicht raumfest, sondern bewegt sich gemäß der vorgeschriebenen Zeitfunktion $u(t)$ in der y-Richtung.
- Die Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$ besitzt in jedem Punkt $\boldsymbol{r}$ einen eindimensionalen Tangentialraum, die Tangente an den Kreis um P_0, und einen zweidimensionalen Kotangentialraum, die Ebene mit dem Tangenten-Richtungsvektor als Normalenvektor (Abb. 5.4 b). Die Zeilenvektoren der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ sind di — i.Allg. nicht auf die Länge eins normierten — Normalenvektoren

$$\frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 2\,(x - d_1) \\ 2\,(y - u) \\ 2\,z \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}} = \begin{bmatrix} 2\,(x + d_2) \\ 2\,(y - u) \\ 2\,z \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

der beiden Kugelflächen und Basisvektoren des zweidimensionalen Kotangentialraums. Der — hier eine — Spaltenvektor der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ ist ein Basisvektor des eindimensionalen Tangentialraums. Die Orthogonalität von Tangential- und Kotangentialraum ist anschaulich erkennbar.

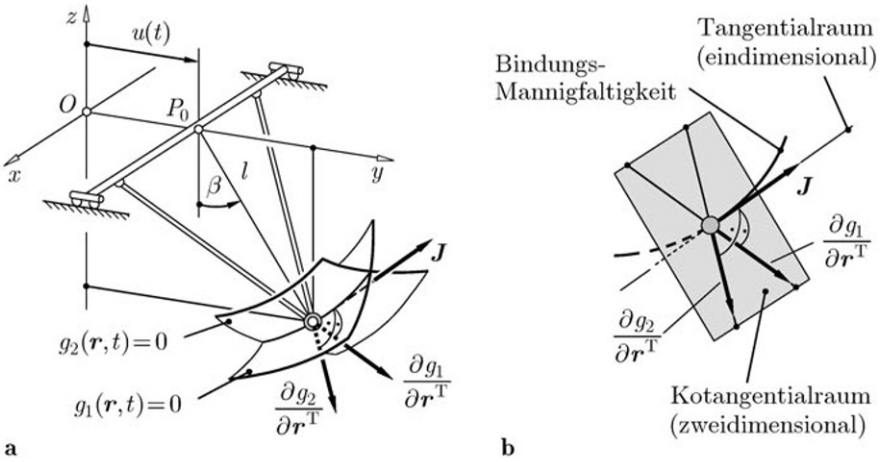


Abb. 5.4 Geometrie der holonomen Bindungen des Verladekrans. **a** Freie und gesperrte Raumrichtungen. **b** Tangential- und Kotangentialraum

- Der Unterschied zwischen virtuellen Verschiebungen und allgemeinen differentiellen Verschiebungen wird in der Ansicht der y, z-Ebene in Abb. 5.5 veranschaulicht. Die virtuellen Verschiebungen $\delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}\,\delta\beta$ liegen im Tangentialraum, während allgemeine differentielle Verschiebungen

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{J}\,\mathrm{d}\beta + \bar{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{mit} \qquad \bar{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t = \dot{u}\,\boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}t \tag{5.52}$$

bei dem vorliegenden rheonomen System i. Allg. Komponenten im Kotangentialraum besitzen. Bei skleronomen Systemen liegen auch die allgemeinen differentiellen Verschiebungen $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ausschließlich im Tangentialraum.

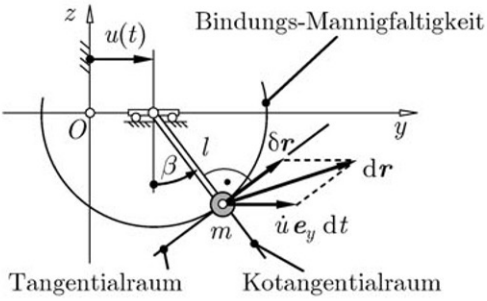


Abb. 5.5 Virtuelle Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ und allgemeine differentielle Verschiebungen $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ am Beispiel des Verladekrans

5.3 Dynamik holonomer Systeme

In diesem Abschnitt werden die Bewegungsgleichungen eines holonomen Massenpunktsystems aufgestellt. Von zentraler Bedeutung sind die an den Bindungen auftretenden *Reaktionskräfte*, deren Richtungen durch die Bindungen geometrisch festgelegt sind. Die Reaktionskräfte werden auch als *Zwangskräfte* bezeichnet. Die geometrischen Bedingungen für die Richtungen der Reaktionskräfte werden mit Hilfe der Bindungen formuliert, wobei sowohl von den impliziten als auch von den expliziten Bindungen ausgegangen werden kann. Die *impliziten Bindungen* liefern die hier so genannten *expliziten Reaktionsbedingungen*, während die *expliziten Bindungen* auf die *impliziten Reaktionsbedingungen* führen. Diese Formulierungen entsprechen dem Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE, auf das in Abschnitt 5.6.1 eingegangen wird.

Für die Formulierung der Bewegungsgleichungen holonomer Systeme bestehen damit zwei grundsätzliche Möglichkeiten:

1. Bewegungsgleichungen in voneinander abhängigen Koordinaten: Sie werden unter Verwendung der *impliziten Bindungen* und der *expliziten Reaktionsbedingungen* als *differential-algebraische Gleichungen* (DAE, *Differential-Algebraic Equations*) formuliert.

2. Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten: Sie werden mit Hilfe der *expliziten Bindungen* und der *impliziten Reaktionsbedingungen* als *gewöhnliche Differentialgleichungen* (ODE, *Ordinary Differential Equations*) formuliert.

5.3.1 Eingeprägte Kräfte und Reaktionskräfte

Für den freigeschnittenen Massenpunkt m_i gilt der Impulssatz (4.12),

$$m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{f}_i\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{5.53}$$

Die Resultierende $\boldsymbol{f}_i$ aller am freigeschnittenen Massenpunkt m_i wirkenden Kräfte setzt sich zusammen aus der Resultierenden $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}$ der eingeprägten Kräfte und der Resultierenden $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ der Reaktionskräfte,

$$\boldsymbol{f}_i = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}\,. \tag{5.54}$$

Eingeprägte Kräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}$ können in Abhängigkeit von der Lage und der Geschwindigkeit des Systems sowie von der Zeit angegeben werden, also

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n, t) \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\,. \tag{5.55}$$

Beispiele eingeprägter Kräfte sind Gravitationskräfte, Federkräfte, geschwindigkeitsabhängige Dämpfungskräfte oder Magnetkräfte.

Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ beschreiben dagegen die Wirkungen der Bindungen am freigeschnittenen System. Ihre Wirkungsrichtungen sind durch die Bindungen definiert. Dieser Zusammenhang kann sowohl mit Hilfe der impliziten als auch der expliziten Bindungen formuliert werden. Erhalten werden implizite oder explizite geometrische Bedingungen für die Reaktionskräfte, die hier als die impliziten und expliziten Reaktionsbedingungen bezeichnet werden.

Einen Sonderfall bilden COULOMBsche[8] (Gleit-)Reibungskräfte. Dies sind eingeprägte Kräfte, die von der Normalkraft an der Reibstelle, also einer Reaktionskraft, abhängen. Die Reaktionskräfte können dann nicht mehr in der in den Abschnitten 5.3.5 und 5.3.6 beschriebenen Weise eliminiert werden. Auf Reibungskräfte wird in Abschnitt 7.3.3 eingegangen.

Zur kompakteren Schreibweise werden die Impulssätze (5.53) mit (5.54) zusammengefasst zu der Matrizengleichung

$$\begin{array}{ccccccccc} & \begin{bmatrix} m_1\boldsymbol{E} & \ldots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \ldots & m_n\boldsymbol{E} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} & \\ \rightarrow & \widehat{\boldsymbol{M}} & \dot{\boldsymbol{v}} & = & \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} & + & \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} & . \end{array} \tag{5.56}$$

[8] CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB, *1736 in Angoulême, †1806 in Paris

Die globale $(3n,3n)$-Massenmatrix $\widehat{\boldsymbol{M}}$ ist für $m_i \neq 0$ positiv definit, siehe (A.23). Diese Eigenschaft ergibt sich aus der kinetischen Energie

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \, v_i^2 = \tfrac{1}{2} \, \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}} \, \boldsymbol{v} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0} \\ = 0 & \text{für} \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \, . \end{cases} \tag{5.57}$$

5.3.2 Explizite Reaktionsbedingungen

Die am Massenpunkt m_i wirkende resultierende Reaktionskraft $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ hat entsprechend dem Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE nur Komponenten in Richtung der Normalenvektoren der impliziten Bindungen. Die Normalenvektoren am Ort $\boldsymbol{r}_i$ des Massenpunkts m_i werden durch die Zeilenvektoren der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}_i$ aus (5.24) beschrieben. Die Reaktionskraft $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ kann dann als Linearkombination der Bindungsnormalen mit noch unbekannten Linearfaktoren λ_k ausgedrückt werden,

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} = \sum_{k=1}^{b} \frac{\partial g_k}{\partial \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}} \, \lambda_k \, , \qquad i = 1, \ldots, n \, ,$$

oder

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}} & \cdots & \dfrac{\partial g_b}{\partial \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_b \end{bmatrix} \, , \quad i = 1, \ldots, n \, , \\ \rightarrow \; \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} &= \qquad \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}} \qquad\qquad \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \tag{5.58}$$

oder zusammengefasst mit der $(b,3n)$-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ aus (5.27)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} &= \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\lambda} \, . \end{aligned} \tag{5.59}$$

Die Linearfaktoren $\boldsymbol{\lambda}$ sind voneinander unabhängige und damit minimale Koordinaten der Reaktionskräfte, die im Folgenden als *minimale Reaktionskoordinaten* bezeichnet werden. Sie werden oft auch als LAGRANGE-Multiplikatoren bezeichnet. Da die Gleichungen (5.59) die Reaktionskräfte explizit in Abhängigkeit von den minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ darstellen, werden sie hier als die *expliziten Reaktionsbedingungen* bezeichnet.

Die physikalische Interpretation der Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ ist i.Allg. unübersichtlich. Die dazugehörenden Reaktionskräfte ergeben sich aber unmittelbar aus den expliziten Reaktionsbedingungen (5.59).

5.3.3 Implizite Reaktionsbedingungen

Multiplikation der expliziten Reaktionsbedingungen (5.59) von links mit der JACOBI-Matrix der expliziten Bindungen $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$ liefert unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehung (5.45), also $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ und damit $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$,

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,| \qquad \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \underbrace{\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{0}}\,\boldsymbol{\lambda}\,. \tag{5.60}$$

Die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ unterliegen damit den hier so genannten *impliziten Reaktionsbedingungen*

$$\begin{aligned} &\left[\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \;\ldots\; \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow \qquad &\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \qquad\qquad \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} \quad = \boldsymbol{0}\,. \end{aligned} \tag{5.61}$$

5.3.4 Reaktionsbedingungen für den Verladekran

Die Reaktionsbedingungen für den Verladekran (Abb. 5.2 und 5.4) werden mit Hilfe der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ und der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ aus Tabelle 5.2 aufgestellt und sind in Tabelle 5.3 angegeben.

Tabelle 5.3 Explizite und implizite Reaktionsbedingung für den Verladekran aus Abb. 5.2

Explizite Reaktionsbedingung (minimale Reaktionskoordinaten λ_1, λ_2)	Implizite Reaktionsbedingung
$\begin{bmatrix} f_x^{\mathrm{r}} \\ f_y^{\mathrm{r}} \\ f_z^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,(x-d_1) & 2\,(x+d_2) \\ 2\,(y-u) & 2\,(y-u) \\ 2\,z & 2\,z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$	$\left[\,0 \;\; l\,\cos\beta \;\; l\,\sin\beta\,\right] \begin{bmatrix} f_x^{\mathrm{r}} \\ f_y^{\mathrm{r}} \\ f_z^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = 0$
$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} \;=\; \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \;\; \boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \;\; \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = 0$

Die im Kotangentialraum liegende Reaktionskraft $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ ist damit eine Linearkombination der beiden Normalenvektoren der Bindungsflächen mit den $b = 2$ minimalen Reaktionskoordinaten λ_1, λ_2 (Abb. 5.6),

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \frac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}\,\lambda_1 + \frac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}\,\lambda_2 = \begin{bmatrix} 2\,(x-d_1) \\ 2\,(y-u) \\ 2\,z \end{bmatrix} \lambda_1 + \begin{bmatrix} 2\,(x+d_2) \\ 2\,(y-u) \\ 2\,z \end{bmatrix} \lambda_2\,. \tag{5.62}$$

Die Reaktionskoordinaten λ_1 und λ_2 haben hier die Dimension $\frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$.

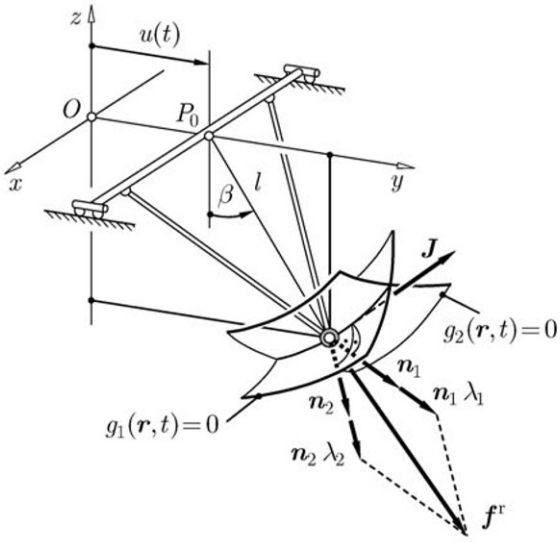


Abb. 5.6 Reaktionskraft $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ im Kotangentialraum mit $\boldsymbol{n}_1 = \dfrac{\partial g_1}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}$, $\boldsymbol{n}_2 = \dfrac{\partial g_2}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}$

5.3.5 Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten

Um die Bewegungsgleichungen des holonomen Massenpunktsystems in den voneinander abhängigen Lagekoordinaten $\boldsymbol{r}$ aufzustellen, wird von den in Tabelle 5.4 angegebenen Bestimmungsgleichungen ausgegangen.

Tabelle 5.4 Bestimmungsgleichungen für die Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten für ein System mit n Massenpunkten

Kinematische Bewegungsgleichungen:			
(5.22) :	$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}$	oder	$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i\,, \quad i = 1, \ldots, n$
Kinetische Differentialgleichungen:			
(5.56) :	$\widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$	oder	$m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}\,, \quad i = 1, \ldots, n$
Implizite holonome Bindungen:			
(5.21) :	$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}\,,$		
(5.26) :	$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, t)\,\boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$	oder	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{r}, t)\,\boldsymbol{v}_i + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$
(5.29) :	$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, t)\,\dot{\boldsymbol{v}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \boldsymbol{0}$	oder	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{G}_i(\boldsymbol{r}, t)\,\dot{\boldsymbol{v}}_i + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \boldsymbol{0}$
Explizite Reaktionsbedingungen (b minimale Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$):			
(5.59) :	$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}$	oder	$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}\,, \quad i = 1, \ldots, n$

Differential-algebraische Bewegungsgleichungen Die Differentialgleichungen (5.22) und (5.56) mit den Reaktionskräften $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ aus (5.59) und den algebraischen Bindungen (5.21) sind die *Lagrange-Gleichungen erster Art.* Sie bilden ein System *differential-algebraischer Gleichungen* für die Bewegungsgrößen $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ und die Koordinaten der Reaktionskräfte $\boldsymbol{\lambda}(t)$,

$$\begin{array}{lrcl} (5.22): & \dot{\boldsymbol{r}} & = & \boldsymbol{v}\,, \\ (5.56) \text{ mit } (5.59): & \widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\boldsymbol{v}} & = & \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{\lambda}\,, \\ (5.21): & \boldsymbol{0} & = & \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)\,. \end{array} \tag{5.63}$$

Die Bewegungsgleichungen (5.63) werden auch als *Deskriptorgleichungen* bezeichnet. Gesucht sind Lösungen für die *Deskriptor-Variablen*

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t) \\ \boldsymbol{v}(t) \\ \boldsymbol{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad \text{mit den Anfangsbedingungen} \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_0) \\ \boldsymbol{v}(t_0) \\ \boldsymbol{\lambda}(t_0) \end{bmatrix}. \tag{5.64}$$

Lösung der Deskriptorgleichungen Die Existenz von Lösungen $\boldsymbol{y}(t)$ der Deskriptorgleichungen (5.63) lässt sich zeigen, indem (5.63) in ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen überführt wird. Unter Verwendung der impliziten Bindungen auf Beschleunigungsebene (5.29) wird ein System von $3n + b$ linearen Gleichungen für die $3n$ Koordinaten der Absolutbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$ und die b minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ erhalten,

$$\begin{array}{l} (5.56) \text{ mit } (5.59): \\ (5.29): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\gamma}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{r} 3\,n \text{ Gln.} \\ b \text{ Gln.} \end{array} \tag{5.65}$$

Wird vorausgesetzt, dass die Massenmatrix $\widehat{\boldsymbol{M}}$ positiv definit und damit regulär ist, vgl. (5.57), so kann (5.56) nach $\dot{\boldsymbol{v}}$ aufgelöst werden,

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,(\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}\,)\,, \tag{5.66}$$

und in (5.29) eingesetzt wird. Erhalten wird ein System von b linearen Gleichungen für die b minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$,

$$\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} - \bar{\bar{\gamma}} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,. \tag{5.67}$$

Es besitzt eine eindeutige Lösung, wenn die (b,b)-Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{Q}$ regulär ist. Dies ist der Fall, wenn die $(b,3n)$-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ aus (5.27) den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}) = b$ besitzt und damit die Bindungen voneinander unabhängig sind.

Liegt ein Rangabfall vor, also $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}) < b$, so sind

$$b^{\mathrm{r}} = b - \mathrm{r}(\boldsymbol{G}) \tag{5.68}$$

voneinander abhängige, redundante Bindungen vorhanden. Der Freiheitsgrad ist dann $f = 3n - \mathrm{r}(\boldsymbol{G})$. Die minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ können hier nicht eindeutig bestimmt werden: Das System ist statisch unbestimmt. Dieser Fall kann bei kinematischen Schleifen auftreten, siehe Abschnitt 8.4.2.

Im Folgenden seien alle Bindungen voneinander unabhängig, also $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}) = b$, und damit $\boldsymbol{Q}$ regulär. Die Lösung von (5.67) lautet dann

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = -\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \bar{\bar{\gamma}})\,. \tag{5.69}$$

Einsetzen von (5.69) in (5.66) liefert die Beschleunigungen

$$\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) = \widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}^{-1}\,\boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\right)\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} - \widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{Q}^{-1}\,\bar{\bar{\gamma}}\,. \tag{5.70}$$

Mit (5.22) und (5.70) liegt ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ vor,

$$\begin{array}{l}(5.22):\\(5.66):\end{array}\quad \begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{r}}\\ \dot{\boldsymbol{v}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}\\ \dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{r}(t_0)\\ \boldsymbol{v}(t_0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_0\\ \boldsymbol{v}_0\end{bmatrix}. \tag{5.71}$$

Es besitzt für jede Anfangsbedingung $\boldsymbol{r}(t_0)$, $\boldsymbol{v}(t_0)$ Lösungen $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$, für die sich aus (5.69) auch eine Lösung $\boldsymbol{\lambda}(t)$ berechnen lässt. Diese Lösungen erfüllen die Bindungen auf Beschleunigungsebene (5.29).

Es sind aber nur solche Lösungen $\boldsymbol{r}(t)$, $\boldsymbol{v}(t)$ der gewöhnlichen Differentialgleichung (5.71) auch Lösungen des differential-algebraischen Gleichungssystems (5.65), welche die in (5.71) nicht berücksichtigten Bindungen auf Lageebene (5.21) und auf Geschwindigkeitsebene (5.26) erfüllen. Damit müssen die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}_0$ und $\boldsymbol{v}_0$ mit den Bindungen (5.21) und (5.26) konsistent sein,

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0, t_0) = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.72}$$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_0, t_0)\,\boldsymbol{v}_0 + \bar{\gamma}(\boldsymbol{r}_0, t_0) = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.73}$$

Die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ werden mit Hilfe von (5.59) unter Verwendung der minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ aus (5.69) berechnet,

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)\,. \tag{5.74}$$

Differentieller Index Der *differentielle Index* des differential-algebraischen Gleichungssystems (5.63) ist gleich der Anzahl der zeitlichen Ableitungen der algebraischen Bindungsgleichungen (5.21), um zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen in den Deskriptorvariablen $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ zu gelangen. Hierzu werden die Bindungen (5.21) so oft nach der Zeit abgeleitet, bis die erste Zeitableitung der Reaktionskoordinaten $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ auftritt. Die zweite Zeitableitung, also die Beschleunigungsbindung (5.29), konnte mit $\dot{\boldsymbol{v}}$ aus (5.66) in die Form (5.67) gebracht werden, in der die Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ erstmals erscheinen. Die weitere Zeitableitung von (5.67) liefert eine Differentialglei-

chung mit $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$,

$$\boldsymbol{Q}\,\dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\dot{\boldsymbol{Q}}\,\boldsymbol{\lambda} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}\right) . \tag{5.75}$$

Insgesamt muss damit die Lagebindung (5.21) drei Mal nach der Zeit abgeleitet werden, um eine Differentialgleichung mit $\dot{\boldsymbol{\lambda}}$ gemäß (5.75) zu erhalten. Der differentielle Index eines mechanischen Systemmodells mit Bindungen auf Lageebene gemäß (5.63) beträgt daher drei.

Tatsächlich muss der — i.Allg. sehr aufwendige — letzte Ableitungsschritt nach (5.75) jedoch nicht ausgeführt werden, da bereits die Formulierung (5.65) der Bewegungsgleichungen mit den Bindungen auf Beschleunigungsebene mit dem differentiellen Index eins in das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (5.71) überführt werden kann.

Auf die numerische Lösung der Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten wird in Abschnitt 5.7.2 eingegangen.

5.3.6 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten

Um die Bewegungsgleichungen des holonomen Massenpunktsystems in den f Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ aufzustellen, wird von den in Tabelle 5.5 zusammengestellten Bestimmungsgleichungen ausgegangen.

Tabelle 5.5 Bestimmungsgleichungen für die Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten für ein System mit n Massenpunkten

Kinetische Differentialgleichungen:				
(5.56) :	$\widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$	oder	$m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}\,,$	$i = 1,\ldots,n$
Explizite Bindungen (f Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$):				
(5.35) :	$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q},t)$	oder	$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q},t),$	$i = 1,\ldots,n$
(5.39) :	$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},t)\,\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{q},t)$	oder	$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{q},t)\,\dot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{v}}_i(\boldsymbol{q},t),$	$i = 1,\ldots,n$
(5.46) :	$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q},t)\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$	oder	$\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{J}_i(\boldsymbol{q},t)\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{a}}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t),$	$i = 1,\ldots,n$
Implizite Reaktionsbedingungen:				
(5.61) :	$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0}$	oder	$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0}$	

Erhalten wird ein System von $3n + 3n + f$ linearen Gleichungen für die $3n$ Koordinaten der Absolutbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$, die $3n$ Koordinaten der Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ und die f Beschleunigungen der Minimalkoordinaten $\ddot{\boldsymbol{q}}$,

$$\begin{array}{l} (5.56): \\ (5.46): \\ (5.61): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} \\ \ddot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\ -\bar{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 3\,n \text{ Gln.} \\ 3\,n \text{ Gln.} \\ f \text{ Gln.} \end{array} \tag{5.76}$$

Bewegungsgleichungen Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ wird das lineare Gleichungssystem (5.76) nach den Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{q}}$ aufgelöst. Einsetzen der Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ aus den Impulssätzen (5.56) in die impliziten Reaktionsbedingungen (5.61) ergibt

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,(\widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\,(m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.77}$$

Die Gleichung (5.77) projiziert die Impulssätze in den Tangentialraum der Bindungs-Mannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ aus (5.21), wodurch die im Kotangentialraum liegenden Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ eliminiert werden. Sie wird daher von Bremer [11] auch als *Projektionsgleichung* bezeichnet.

Einsetzen der expliziten Bindungen (5.35), (5.39) und (5.46) in die Projektionsgleichung (5.77) liefert die Bewegungsgleichungen als ein System von f gewöhnlichen nichtlinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t)\,\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,, \tag{5.78}$$

mit der symmetrischen, positiv definiten (f,f)-*Massenmatrix*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t) &= \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{J} \\
\rightarrow\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t) &= \left[\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\ \ldots\ \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\,\right] \begin{bmatrix} m_1\,\boldsymbol{E} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & m_n\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} \\
\rightarrow\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q},t) &= \sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{J}_i\,,
\end{aligned} \tag{5.79}$$

dem f-Vektor der *verallgemeinerten* Coriolis-*Kräfte*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &= -\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\bar{\boldsymbol{a}} \\
\rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &= -\left[\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\ \ldots\ \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\,\right] \begin{bmatrix} m_1\,\boldsymbol{E} & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & m_n\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} \\
\rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &= -\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{a}}_i\,,
\end{aligned} \tag{5.80}$$

und dem f-Vektor der *verallgemeinerten eingeprägten Kräfte*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &= \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\
\rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &= \left[\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\ \ldots\ \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} \\
\rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}_i^{e}\,.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Positive Definitheit der Massenmatrix Die Massenmatrix $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \widehat{\boldsymbol{M}} \boldsymbol{J}$ in (5.78) ist positiv definit und damit auch regulär, vgl. (A.23), wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind :

1. Die Matrix $\widehat{\boldsymbol{M}}$ ist positiv definit, was in (5.57) vorausgesetzt worden ist.
2. Die $(3n,f)$-JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ besitzt den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}) = f$. Dies ist der Fall, wenn die f Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{q}}$ voneinander unabhängig sind, was bei der Definition von $\boldsymbol{q}$ vorausgesetzt worden ist.

Die Bedingung 1 ist nur hinreichend, aber nicht notwendig für die positive Definitheit von $\boldsymbol{M}$. Ein Beispiel liefert das in Abschnitt 5.3.8 behandelte Doppelpendel mit den Massenpunkten m_1 und m_2. Für $m_1 = 0$ ist $\widehat{\boldsymbol{M}}$ in (5.92) nur positiv semidefinit, aber $\boldsymbol{M}$ in (5.113) ist positiv definit, sofern der Differenzwinkel $\beta_2 - \beta_1$ nicht gleich 0 oder π ist.

Die Bedingung 2 läßt sich über die kinetische Energie am Beispiel eines skleronomen Systems verdeutlichen. Einsetzen der expliziten Geschwindigkeitsbindung (5.39), $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{q}}$, in die kinetische Energie aus (5.57) liefert unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{q}})^{\mathrm{T}} = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}$

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \tfrac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\,\underbrace{\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{J}}_{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}\,\dot{\boldsymbol{q}} \quad \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad \dot{\boldsymbol{q}} \neq \boldsymbol{0} \\ = 0 & \text{für} \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}\,. \end{cases} \tag{5.82}$$

Die kinetische Energie ist nur dann null, wenn alle Minimalgeschwindigkeiten null sind, also das System in Ruhe ist.

Bewegungsgleichungen in Zustandsform Das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung (5.78) kann in ein System erster Ordnung überführt werden. Hierzu werden die f unabhängigen Geschwindigkeiten oder *Minimalgeschwindigkeiten* $\boldsymbol{s}$ als die Zeitableitungen der f Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ definiert. Es gelten dann die *kinematischen Bewegungsgleichungen*

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{s}\,. \tag{5.83}$$

Mit den *Zustandsgrößen* im $2f$-Zustandsvektor

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{s} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Lage} \\ \text{Geschwindigkeit} \end{matrix} \tag{5.84}$$

bilden die *Bewegungsgleichungen in Zustandsform* ein nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{array}{lrcl} (5.83): & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q},t)\,\big(\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t)\big) \end{bmatrix} \\ (5.78): & & & \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t)\,. \end{array} \tag{5.85}$$

Die dazu gehörenden Anfangsbedingungen (Zeitpunkt t_0) sind

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}(t_0) \\ \boldsymbol{s}(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_0 \\ \boldsymbol{s}_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Anfangslage} \\ \text{Anfangsgeschwindigkeit} \end{matrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0 \, . \end{aligned} \tag{5.86}$$

Die Bewegungsgleichungen (5.85) können mit numerischen Standardverfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen integriert werden, siehe Abschnitt 5.7.1. Wenn die expliziten Bindungen zur Verfügung stehen, was insbesondere bei baumstrukturierten Mehrkörpersystemen mit Dreh- und Schubgelenken stets der Fall ist, so ist die ODE-Formulierung der Bewegungsgleichungen (5.85) der DAE-Formulierung (5.63) vorzuziehen.

Anmerkung Die Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s}$ können allgemeiner als eine lageabhängige Linearkombination der Zeitableitungen der Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ definiert werden. Die kinematischen Bewegungsgleichungen (5.83) haben dann die Form $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{s}$, siehe Abschnitt 7.2.1.

Berechnung der Reaktionskräfte Mit den aus (5.78) bzw. (5.85) berechneten Beschleunigungen $\ddot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{s}}$ werden die Reaktionskräfte mit Hilfe der Impulssätze (5.56) unter Berücksichtigung von (5.46) berechnet,

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{a}} \tag{5.87}$$

oder

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} = m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{J}_i\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{a}}_i \, , \qquad i = 1, \ldots, n \, . \tag{5.88}$$

Reaktionsgleichungen Die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ können auch ohne vorherige Berechnung der Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$ berechnet werden, wenn zusätzlich eine $(b,3n)$-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$, welche die Orthogonalitätsbedingung $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ entsprechend (5.45) erfüllt, aufgestellt wird. Die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ in (5.87) können dann mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingung (5.59) in Abhängigkeit von b minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ ausgedrückt werden. Die anschließende Multiplikation von (5.87) von links mit der Matrix $\boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}$ liefert

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1} \cdot | \qquad \underbrace{\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}}_{\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}} &= \widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{J}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \widehat{\boldsymbol{M}}\,\bar{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} &= \underbrace{\boldsymbol{G}\,\overbrace{\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{M}}}^{\boldsymbol{E}}\,\boldsymbol{J}}_{(5.45):\ \boldsymbol{0}}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{G}\,\overbrace{\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\widehat{\boldsymbol{M}}}^{\boldsymbol{E}}\,\bar{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

und damit

$$\boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{G}\,\bar{\boldsymbol{a}} - \boldsymbol{G}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \, . \tag{5.89}$$

Dies ist ein System von b linearen Gleichungen zur Berechnung der b minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ bei gegebener Lage $\boldsymbol{q}$ und Geschwindigkeit $\dot{\boldsymbol{q}}$ des Systems. Die von SCHIEHLEN und EBERHARD [92] als *Reaktionsgleichungen* bezeichneten Gleichungen (5.89) stellen die Projektion der Impulssätze in den Kotangentialraum der Bindungsmannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$ aus (5.21), also in die gesperrten Raumrichtungen, dar.

Mit den minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ aus (5.89) können anschließend die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingungen (5.59) ermittelt werden, also $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}$.

5.3.7 Bewegungsgleichungen des Verladekrans

Für den Verladekran (Abb. 5.2) sind in Tabelle 5.6 die Bewegungsgleichungen in den abhängigen Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und in der Minimalkoordinate $q = \beta$ angegeben.

Tabelle 5.6 Bewegungsgleichungen für den Verladekran aus Abb. 5.2 als differential-algebraische Gleichungen (DAE) in abhängigen Koordinaten $\boldsymbol{r} = [\,x\; y\; z\,]^{\mathrm{T}}$ und als gewöhnliche Differentialgleichung (ODE) in der Minimalkoordinate $q = \beta$

DAE (5.65) :
$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{r}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|cc} m & 0 & 0 & -2(x-d_1) & -2(x+d_2) \\ 0 & m & 0 & -2(y-u) & -2(y-u) \\ 0 & 0 & m & -2z & -2z \\ \hline -2(x-d_1) & -2(y-u) & -2z & 0 & 0 \\ -2(x+d_2) & -2(y-u) & -2z & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \hline \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -m\,g \\ \hline \bar{\bar{\gamma}}_1 \\ \bar{\bar{\gamma}}_2 \end{array}\right]$$

mit $\bar{\bar{\gamma}}_1 = \bar{\bar{\gamma}}_2 = 2\,(\,\dot{x}^2 + (\dot{y} - \dot{u})^2 + \dot{z}^2 - (y-u)\,\ddot{u}\,)$

ODE (5.78):
$$M \quad \ddot{q} = k^{\mathrm{c}} + k^{\mathrm{e}}$$
$$\rightarrow \quad \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \widehat{\boldsymbol{M}}\, \boldsymbol{J} \quad \ddot{q} = -\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \widehat{\boldsymbol{M}}\, \bar{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}$$
$$\rightarrow \quad m\,\ell^2 \quad \ddot{\beta} = -m\,\ell\,\cos\beta\,\ddot{u} - m\,g\,\ell\,\sin\beta$$

5.3.8 Bewegungsgleichungen eines Doppelpendels

Die Massenpunkte m_1, m_2 des in Abb. 5.7 dargestellten doppelten Massenpunktpendels gleiten reibungsfrei auf einer geneigten Ebene (Neigungswinkel φ gegenüber der Vertikalen). Die masselosen Pendelstangen sind in O und P um alle Achsen frei drehbar gelagert. Die Bewegungsgleichungen werden in den abhängigen Lagekoordinaten der beiden Massenpunkte sowie in den Minimalkoordinaten aufgestellt.

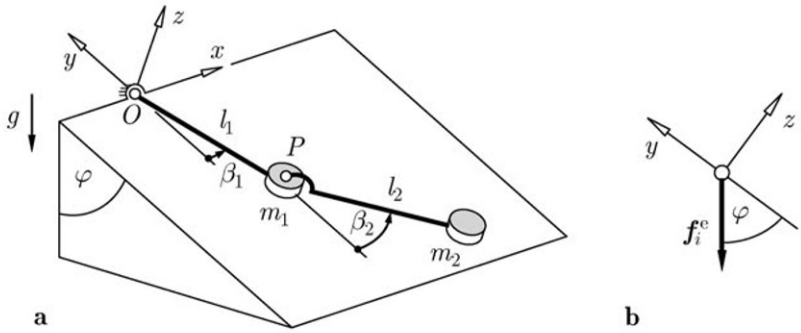


Abb. 5.7 Doppelpendel auf geneigter Ebene. **a** Gesamtsystem. **b** Gewichtskräfte

Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten Die $n = 2$ Massenpunkte haben im Raum $3n = 6$ Lagekoordinaten

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.90}$$

Für die Bewegungsgleichungen in den voneinander abhängigen Koordinaten $\boldsymbol{r}$ werden gemäß Tabelle 5.4 die folgenden Gleichungen benötigt:

- Kinematische Bewegungsgleichungen gemäß (5.22)

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix}. \tag{5.91}$$

- Kinetische Bewegungsgleichungen (Impulssätze) gemäß (5.56)

$$\widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} m_1\,\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_2\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{5.92}$$

  mit den Gewichtskräften als eingeprägten Kräften

$$\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1\,g\,\cos\varphi \\ -m_1\,g\,\sin\varphi \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_2\,g\,\cos\varphi \\ -m_2\,g\,\sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{5.93}$$

- $b = 4$ holonome implizite Bindungen auf Lageebene gemäß (5.21),

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - l_1^2 \\ z_1 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - l_2^2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Abstand } l_1 \\ m_1 \text{ in } xy\text{-Ebene} \\ \text{Abstand } l_2 \\ m_2 \text{ in } xy\text{-Ebene} \end{array} \tag{5.94}$$

auf Geschwindigkeitsebene gemäß (5.26)

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \text{oder} \qquad \left[\,\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r})\;\;\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{r})\,\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1\\ \boldsymbol{v}_2\end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{5.95}$$

mit den Bindungsmatrizen

$$\boldsymbol{G}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}_1} = 2\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -(x_2-x_1) & -(y_2-y_1) & -(z_2-z_1) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.96}$$

$$\boldsymbol{G}_2 = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{r}_2} = 2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{5.97}$$

und auf Beschleunigungsebene gemäß (5.29)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) \qquad\qquad \dot{\boldsymbol{v}} \quad &+ \bar{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow \left[\,\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r})\;\;\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{r})\,\right]\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{v}}_1\\ \dot{\boldsymbol{v}}_2\end{bmatrix} &+ \bar{\bar{\gamma}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{5.98}$$

mit dem nicht von $\dot{\boldsymbol{v}}$ abhängenden Term

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\gamma}} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{v}_1 + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{G}_2(\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{v}_2 \\ \rightarrow\; \bar{\bar{\gamma}} &= 2\begin{bmatrix} \dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2 \\ 0 \\ (\dot{x}_2-\dot{x}_1)^2+(\dot{y}_2-\dot{y}_1)^2+(\dot{z}_2-\dot{z}_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.99}$$

- Explizite Reaktionsbedingungen gemäß (5.59) ($b = 4$ minimale Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$)

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} \qquad \text{oder} \qquad \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}}\\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\end{bmatrix}. \tag{5.100}$$

Die Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}_1$, $\dot{\boldsymbol{v}}_2$ und die Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ werden aus dem Gleichungssystem (5.65) berechnet,

$$\begin{bmatrix} m_1\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{G}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & m_2\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G}_1 & -\boldsymbol{G}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{v}}_1\\ \dot{\boldsymbol{v}}_2\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}}\\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}}\\ \bar{\bar{\gamma}}\end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 3 \text{ Gln.} \\ 3 \text{ Gln.} \\ 4 \text{ Gln.} \end{matrix} \tag{5.101}$$

Wird der Anteil der Reaktionskraft auf den Massenpunkt m_i, $i = 1, 2$, auf Grund der Bindung $g_j(\boldsymbol{r}) = 0$, $j = 1, \ldots, 4$, mit $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}(j)}$ bezeichnet, so können die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}}$ und $\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}}$ den einzelnen Bindungen zugeordnet werden,

$$\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2\,x_1 \\ 2\,y_1 \\ 2\,z_1 \end{bmatrix} \lambda_1}_{\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_2}_{\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}(2)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -2\,(x_2 - x_1) \\ -2\,(y_2 - y_1) \\ -2\,(z_2 - z_1) \end{bmatrix} \lambda_3}_{\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}(3)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_4}_{\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}(4)}}, \tag{5.102}$$

$$\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_1}_{\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}(1)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \lambda_2}_{\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}(2)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\,(x_2 - x_1) \\ 2\,(y_2 - y_1) \\ 2\,(z_2 - z_1) \end{bmatrix} \lambda_3}_{\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}(3)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \lambda_4}_{\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}(4)}}. \tag{5.103}$$

In Abb. 5.8 sind die Anteile der Reaktionskräfte aus (5.102) und (5.103) sowie die Komponenten $\boldsymbol{f}_{iy}^{\mathrm{e}}$ und $\boldsymbol{f}_{iz}^{\mathrm{e}}$ der Gewichtskräfte (eingeprägte Kräfte) in y- und z-Richtung dargestellt.

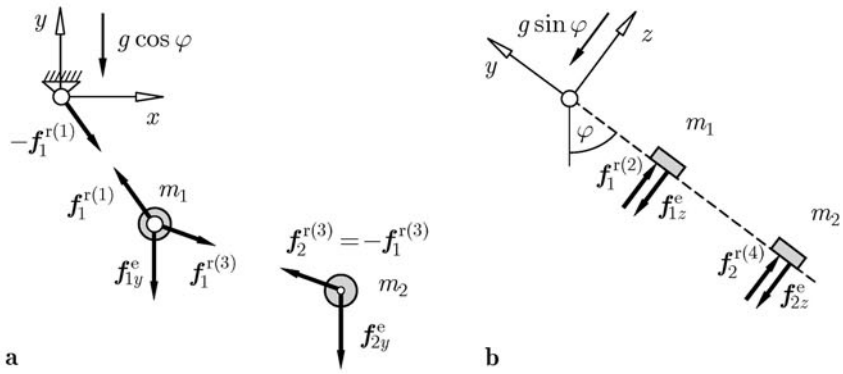


Abb. 5.8 Reaktionskräfte an den freigeschnittenen Massenpunkten.
a Kräfte in der xy-Bewegungsebene. **b** Kräfte in der z-Richtung

Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten Mit $n = 2$ Massenpunkten und $b = 4$ Bindungen beträgt der Freiheitsgrad gemäß (5.16) $f = 2$. Als Minimalkoordinaten werden die beiden Gelenkwinkel $\boldsymbol{q} = [\,\beta_1 \;\beta_2\,]^{\mathrm{T}}$ gewählt. Gemäß Tabelle 5.5 werden die folgenden Gleichungen benötigt:

- Kinetische Bewegungsgleichungen gemäß (5.56), siehe (5.92).
- Explizite Bindungen auf Lageebene gemäß (5.35)

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{oder} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \tag{5.104}$$

mit den expliziten Bindungen der beiden Massenpunkte

$$\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \sin\beta_1 \\ -l_1 \cos\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \sin\beta_1 + l_2 \sin\beta_2 \\ -l_1 \cos\beta_1 - l_2 \cos\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.105}$$

auf Geschwindigkeitsebene gemäß (5.39)

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{oder} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \tag{5.106}$$

mit den JACOBI-Matrizen der beiden Massenpunkte

$$\boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos\beta_1 & 0 \\ l_1 \sin\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} l_1 \cos\beta_1 & l_2 \cos\beta_2 \\ l_1 \sin\beta_1 & l_2 \sin\beta_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.107}$$

und auf Beschleunigungsebene gemäß (5.46)

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \quad \text{oder} \quad \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{v}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1(\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{J}_2(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{a}}_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \\ \bar{\boldsymbol{a}}_2(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \end{bmatrix} \tag{5.108}$$

mit den nicht von $\ddot{\boldsymbol{q}}$ abhängenden Beschleunigungsanteilen

$$\bar{\boldsymbol{a}}_1(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\beta_1\, \dot{\beta}_1^2 \\ l_1 \cos\beta_1\, \dot{\beta}_1^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.109}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}}_2(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin\beta_1\, \dot{\beta}_1^2 - l_2 \sin\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \\ l_1 \cos\beta_1\, \dot{\beta}_1^2 + l_2 \cos\beta_2\, \dot{\beta}_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{5.110}$$

- Implizite Reaktionsbedingungen gemäß (5.61)

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{oder} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.111}$$

Die Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten (5.78) lauten

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\,\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \tag{5.112}$$

mit der (f,f)-Massenmatrix gemäß (5.79)[9]

[9] Umformung $\cos\beta_1 \cos\beta_2 + \sin\beta_1 \sin\beta_2 = \cos(\beta_1 - \beta_2) = \cos(\beta_2 - \beta_1)$.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{J} = m_1\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{J}_1 + m_2\,\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{J}_2 \\ \rightarrow\ \boldsymbol{M}(\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix} (m_1+m_2)\,l_1^2 & m_2\,l_1\,l_2\,\cos(\beta_2-\beta_1) \\ m_2\,l_1\,l_2\,\cos(\beta_2-\beta_1) & m_2\,l_2^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{5.113}$$

dem f-Vektor der verallgemeinerten CORIOLIS-Kräfte gemäß (5.80)[10]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= -\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\bar{\boldsymbol{a}} = -m_1\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{a}}_1 - m_2\,\boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{a}}_2 \\ \rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) &= \begin{bmatrix} m_2\,l_1\,l_2\,\sin(\beta_2-\beta_1)\,\dot{\beta}_2^2 \\ -m_2\,l_1\,l_2\,\sin(\beta_2-\beta_1)\,\dot{\beta}_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5.114}$$

und dem f-Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte gemäß (5.81)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q}) &= \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} \\ \rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q}) &= \begin{bmatrix} -(m_1+m_2)\,g\,l_1\,\cos\varphi\,\sin\beta_1 \\ -m_2\,g\,l_2\,\cos\varphi\,\sin\beta_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{5.115}$$

5.4 Kinematik nichtholonomer Systeme

Nichtholonome Bindungen beschränken nur die Geschwindigkeit, nicht aber die Lage eines mechanischen Systems. Der Lage-Freiheitsgrad nichtholonomer Systeme ist dadurch größer als der (Geschwindigkeits-)Freiheitsgrad. Typische Anwendungen des Modells der nichtholonomen Bindung sind schlupffreie Abrollvorgänge von starren Rädern oder Körpern. Nichtholonome Systeme werden ausführlich von NEĬMARK und FUFAEV [67] behandelt.

Nichtholonome Bindungen werden häufig in Entwurfsmodellen für die Steuerung und Regelung mobiler Roboter verwendet, siehe z.B. MURRAY et al. [66] und DE LUCA und ORIOLO [17]). Technische Rollkontakte z.B. an den Rädern von Straßen- und Schienenfahrzeugen werden in der Regel jedoch nicht durch Bindungen, sondern durch eingeprägte Kräfte beschrieben, wodurch die spezifischen Schlupfeffekte erfasst werden können, siehe z.B. POPP und SCHIEHLEN [82] sowie SCHRAMM et al. [93].

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften nichtholonomer Bindungen am klassischen Beispiel eines Wagens mit zwei seitenschlupffrei auf einer Ebene abrollenden Rädern (Abb. 5.9 a) betrachtet. Nichtholonome Bindungen können ebenfalls implizit oder explizit formuliert werden.

[10] Umformung $\sin\beta_1\cos\beta_2 - \cos\beta_1\sin\beta_2 = \sin(\beta_1-\beta_2) = -\sin(\beta_2-\beta_1)$.

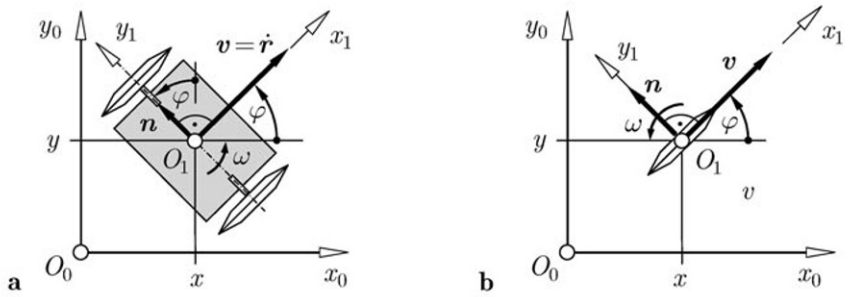


Abb. 5.9 Modelle eines nichtholonomen Systems. **a** Wagen mit zwei auf einer Ebene abrollenden Rädern. **b** Auf einer Ebene gleitende Kufe

5.4.1 Implizite nichtholonome Bindungen

Implizite nichtholonome Bindung auf Geschwindigkeitsebene Die Lage des Wagens in der x, y-Ebene wird beschrieben durch den zweidimensionalen Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ von O_1 und den Drehwinkel φ, die in Anlehnung an (5.3) zum Vektor der Lagegrößen

$$\hat{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \boldsymbol{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{5.116}$$

zusammengefasst werden. Die Bedingung des seitenschlupffreien Abrollens der Räder ist dadurch gekennzeichnet, dass ein beliebiger Punkt O_1 keine Geschwindigkeit in der Richtung der Radachse besitzt. Damit steht der Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ von O_1 senkrecht auf dem Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ der Radachse, also $\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}} = 0$. Diese Bewegungsbeschränkung wird oft auch durch eine auf einer Ebene gleitende Kufe gemäß Abb. 5.9 b veranschaulicht. Wie der Wagen in Abb. 5.9 a besitzt die Kufe keine Geschwindigkeit in der Richtung $\boldsymbol{n}$ senkrecht zu ihrer Längsachse.

Mit dem hier zweidimensionalen Einheitsvektor $\boldsymbol{n} = [\,-\sin\varphi \quad \cos\varphi\,]^{\mathrm{T}}$ kann die Bindung unter Verwendung des dreidimensionalen Vektors der Geschwindigkeit des Wagens $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \hat{\boldsymbol{v}}$ dargestellt werden,

$$\begin{aligned} \gamma(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}) &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \qquad & \boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad\qquad \hat{\boldsymbol{v}} \quad = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.117}$$

Die kinematische Bindung (5.117) hat die algebraische Form einer impliziten holonomen skleronomen Bindung auf Geschwindigkeitsebene gemäß (5.26). Dennoch können der Wagen bzw. die Kufe in jede Lage $\hat{\boldsymbol{r}}$ bewegt wer-

den, ohne die Bindung (5.117) zu verletzen. Damit existiert keine Bindungs-Mannigfaltigkeit $g(\hat{\boldsymbol{r}}) = 0$, auf die das System beschränkt ist, obwohl es in jeder Lage $\hat{\boldsymbol{r}}$ eine gesperrte Raumrichtung, beschrieben durch den — hier einen — Zeilenvektor der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}})$ aus (5.117), gibt. Die kinematische Bindung (5.117) kann daher nicht durch zeitliche Integration in eine Lagebindung überführt werden. Diese Eigenschaft unterscheidet die kinematische Bindung (5.117) von einer holonomen kinematischen Bindung der Form (5.26). Eine solche nicht integrierbare kinematische Bindung wird als *nichtholonom* bezeichnet.

Implizite nichtholonome Bindung für die virtuellen Verschiebungen Gemäß (5.31) liegen die virtuellen Verschiebungen im Nullraum der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$. Dies gilt auch für die nichtholonome Bindung (5.117), wobei hier die virtuellen Verschiebungen $\delta\hat{\boldsymbol{r}}$ neben den translatorischen Verschiebungen δx, δy die virtuelle Drehung $\delta\varphi$ umfassen,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \quad &\qquad \boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad\qquad \delta\hat{\boldsymbol{r}} \quad = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.118}$$

Die virtuellen Verschiebungen $\delta\hat{\boldsymbol{r}}$ in einer Lage $\hat{\boldsymbol{r}}$ befinden sich damit in den in Abb. 5.10 a qualitativ dargestellten Flächenelementen mit den Normalenvektoren $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{r}})$. Die Nichtintegierbarkeit der kinematischen Bindung (5.117) bzw. (5.118) lässt sich so interpretieren, dass diese Flächenelemente keine glatte, also differenzierbare, Fläche bzw. Mannigfaltigkeit $g(\hat{\boldsymbol{r}}) = 0$ bilden. Bedingungen für die Integrierbarkeit kinematischer Bindungen werden im Anhang B behandelt.

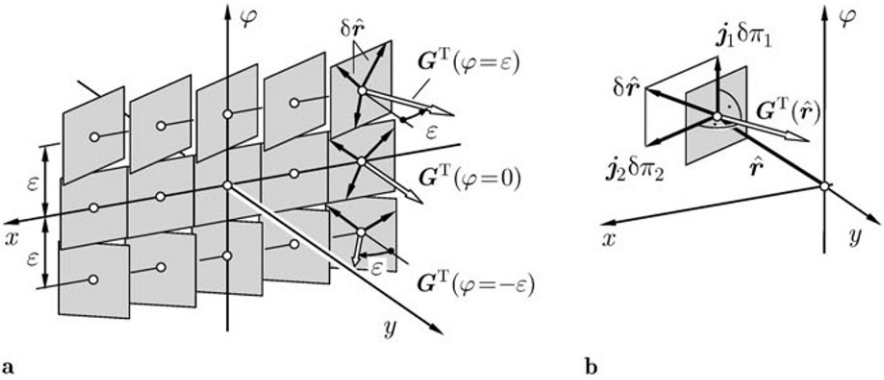


Abb. 5.10 Kinematische Bindung des Wagens. **a** Freie und gesperrte Richtungen mit virtuellen Verschiebungen $\delta\hat{\boldsymbol{r}}$. **b** Quasikoordinaten π_1, π_2, siehe (5.125)

Implizite nichtholonome Bindung auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung der nichtholonomen Bindung (5.117) liefert die nichtholonome Bindung auf Beschleunigungsebene,

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \dot{\hat{\boldsymbol{v}}}) &\equiv \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} + (-\cos\varphi\,\dot{x} - \sin\varphi\,\dot{y})\,\dot{\varphi} = 0 \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} \quad + \quad \bar{\bar{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}) \quad = 0\,. \end{aligned} \tag{5.119}$$

Sie besitzt die algebraische Form einer holonomen Bindung auf Beschleunigungsebene entsprechend (5.29).

Anmerkung Ein erweitertes kinematisches Modell, das auch die hier nicht betrachteten Drehungen der Räder berücksichtigt, wird in Abschnitt B.3.2 beschrieben.

5.4.2 Freiheitsgrad nichtholonomer Systeme

Mit den Betrachtungen zur Kinematik des nichtholonomen Beispielsystems kann der Begriff des Freiheitsgrades aus Abschnitt 5.2.4 für nichtholonome Systeme definiert werden. Ein nichtholonomes System ist dadurch gekennzeichnet, dass die Anzahl der impliziten geometrischen Bindungen b_{L}, also die Anzahl der holonomen Bindungen, kleiner ist als die Anzahl der impliziten kinematischen Bindungen b, also die Anzahl der holonomen und nichtholonomen Bindungen. Der Freiheitsgrad f entspricht der Anzahl der unabhängigen Geschwindigkeitsgrößen und damit der Anzahl der freien Bewegungsrichtungen des Systems. Für ein räumliches System mit n_{K} Körpern beträgt er

$$f = 6\,n_{\mathrm{K}} - b\,. \tag{5.120}$$

In diesem Zusammenhang wird der Freiheitsgrad f auch als der *Geschwindigkeits-Freiheitsgrad* bezeichnet.

Der *Lage-Freiheitsgrad* f_{L} entspricht der Anzahl der unabhängigen Lagegrößen. Er beträgt

$$f_{\mathrm{L}} = 6\,n_{\mathrm{K}} - b_{\mathrm{L}}\,. \tag{5.121}$$

Bei holonomen Systemen ist $f_{\mathrm{L}} = f$, bei nichtholonomen Systemen gilt dagegen $f_{\mathrm{L}} > f$. Der Wagen mit zwei Rädern aus Abschnitt 5.4.1 hat den Lage-Freiheitsgrad $f_{\mathrm{L}} = 3$ und den Freiheitsgrad $f = 2$.

5.4.3 Explizite nichtholonome Bindungen

Explizite nichtholonome Bindung auf Geschwindigkeitsebene Die nichtholonome Bindung des Wagens mit zwei Rädern aus Abschnitt 5.4.1 wird nun in expliziter Form aufgestellt. Entsprechend dem Geschwindigkeits-Freiheitsgrad kann die Geschwindigkeit des Wagens $\hat{\boldsymbol{v}} = \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$ durch $f = 2$ unabhängige *Minimalgeschwindigkeiten* $\boldsymbol{\eta}$ ausgedrückt werden.

Entsprechend der zwei möglichen Bewegungsrichtungen des Wagens werden als Minimalgeschwindigkeiten günstig die Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse und die Geschwindigkeit v des Punktes Q definiert, also

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}. \tag{5.122}$$

Die Geschwindigkeit des Wagens in der Ebene $\hat{\boldsymbol{v}} = \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$ kann dann in Abhängigkeit von den Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad \boldsymbol{\eta} \ . \end{aligned} \tag{5.123}$$

Die beiden Spalten der Matrix $\boldsymbol{J}$ kennzeichnen die freien Bewegungsrichtungen in der Lage $\hat{\boldsymbol{r}}$. Da die kinematische Bindung (5.123) nicht integrierbar ist, existiert keine explizite Bindung auf Lageebene. Die Matrix $\boldsymbol{J}$ in (5.123) ist damit keine Funktionalmatrix (JACOBI-Matrix) einer expliziten Lagebindung. Entsprechend der lokal definierten Ableitung $\boldsymbol{J} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{\eta}}$ wird sie hier aber weiterhin als JACOBI-Matrix bezeichnet.

Die explizite kinematische Bindung (5.123) ist die homogene Lösung des unterbestimmten linearen Gleichungssystems der impliziten kinematischen Bindung (5.117) mit den Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ als den freien Lösungsparametern. Einsetzen von (5.123) in (5.117) ergibt die Gleichung $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{0}$, die für beliebige Werte der Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ erfüllt ist. Auch bei nichtholonomen Bindungen gilt die Orthogonalitätsbeziehung zwischen den freien und gesperrten Raumrichtungen

$$\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0} \quad \text{bzw.} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{5.124}$$

d. h. die hier $f = 2$ Spaltenvektoren der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ stehen jeweils senkrecht auf dem $b = 1$ Zeilenvektor der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$.

Explizite nichtholonome Bindung für die virtuellen Verschiebungen Die explizite Bindung für die virtuellen Verschiebungen wird als die homogene Lösung der impliziten Bindung (5.118) erhalten. Die virtuellen Verschiebungen $\delta\hat{\boldsymbol{r}}$ können dann mit Hilfe von $f = 2$ unabhängigen virtuellen Verschiebungen $\delta\pi_1$, $\delta\pi_2$ ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\pi_1 \\ \delta\pi_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \delta\hat{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad \delta\boldsymbol{\pi} \quad . \end{aligned} \tag{5.125}$$

Während π_1 dem Drehwinkel φ entspricht, ist π_2 eine so genannte *Quasikoordinate*, die nur als Ableitung $\dot{\pi}_2 = v$ definiert ist: Es gibt keine Lagegröße π_2, deren Zeitableitung die Geschwindigkeit v des Wagens ist. In Abb. 5.10 b sind die virtuellen Verschiebungen unter Verwendung der beiden Spaltenvektoren $\boldsymbol{j}_1$ und $\boldsymbol{j}_2$ der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ dargestellt,

$$\delta\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{j}_1\,\delta\pi_1 + \boldsymbol{j}_2\,\delta\pi_2\,. \tag{5.126}$$

Mit den im Prinzip von JOURDAIN verwendeten virtuellen Geschwindigkeiten kann die Benennung von Quasikoordinaten vermieden werden, was die Schreibweise vereinfacht, siehe Abschnitt 5.6.2.

Explizite nichtholonome Bindung auf Beschleunigungsebene Die explizite nichtholonome Bindung auf Beschleunigungsebene werden als die total nach der Zeit abgeleitete explizite Geschwindigkeitsbindung (5.123) erhalten, also

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\,v\,\sin\varphi \\ \omega\,v\,\cos\varphi \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} &= \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad + \quad \bar{\boldsymbol{a}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\eta}) \end{aligned} \tag{5.127}$$

mit dem nicht von den unabhängigen Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden Beschleunigungsanteil $\bar{\boldsymbol{a}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\eta})$. Sie erfüllt die implizite Bindung (5.119).

Die impliziten und expliziten nichtholonomen Bindungen des Wagens sind in Tabelle 5.7 zusammenfassend gegenübergestellt. Die nichtholonomen Bindungen haben denselben algebraischen Aufbau wie die holonomen Bindungen auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsebene, vgl. Tabelle 5.2

Tabelle 5.7 Nichtholonome Bindung des zweirädrigen Wagens (Abb. 5.9), Lage (L), Geschwindigkeit (G), Beschleunigung (B), virtuelle Verschiebung (V)

	Implizite Bindung	Explizite Bindung (Minimal-geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta} = [\,\omega\ v\,]^{\mathrm{T}}$)
L	–	–
G	$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot x \\ \dot y \end{bmatrix} = 0$ $\boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \hat{\boldsymbol{v}} = 0$	$\begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot x \\ \dot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix}$ $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \boldsymbol{\eta}$
B	$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot\varphi \\ \ddot x \\ \ddot y \end{bmatrix} + (-\mathrm{c}\varphi\,\dot x - \mathrm{s}\varphi\,\dot y)\,\dot\varphi = 0$ $\boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} + \bar{\bar{\gamma}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}) = 0$	$\begin{bmatrix} \ddot x \\ \ddot y \\ \ddot\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\omega \\ \dot v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega\, v\, \mathrm{s}\varphi \\ \omega\, v\, \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix}$ $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}} = \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\boldsymbol{a}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \boldsymbol{\eta})$
V	$\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = 0$ $\boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \delta\hat{\boldsymbol{r}} = 0$	$\begin{bmatrix} \delta\varphi \\ \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}\varphi \\ 0 & \mathrm{s}\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\pi_1 \\ \delta\pi_2 \end{bmatrix}$ $\delta\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \delta\boldsymbol{\pi}$
	Orthogonalität: $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$	

5.5 Dynamik nichtholonomer Systeme

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen nichtholonomer Systeme werden die zu den Bindungen gehörenden Reaktionskräfte benötigt. Hierbei wird von den Bindungen auf Geschwindigkeitsebene ausgegangen, da diese die freien und gesperrten Raumrichtungen definieren. Da diese Bindungen dieselbe algebraische Struktur wie bei holonomen Systemen aufweisen, haben auch die expliziten und impliziten Reaktionsbedingungen denselben Aufbau.

Als ein klassisches Beispiel werden die Bewegungsgleichungen des Wagens mit zwei Rädern auf der entsprechend Abb. 5.11 a um den Winkel α geneigten x_0, y_0-Ebene aufgestellt, siehe z.B. Neĭmark und Fufaev [67], Fischer und Stephan [24], Hiller [38] sowie Schiehlen und Eberhard [92]. Ein Kippen des Wagenkörpers sei z.B. durch ein masseloses, frei um eine vertikale Achse drehbares Stützrad verhindert. Der Massenmittelpunkt S des Wagenkörpers soll auf der Radachse liegen. Entsprechend der auf die ebene Bewegung beschränkten Betrachtung werden nur Kräfte parallel und Momente senkrecht zur x_0, y_0-Bewegungsebene berücksichtigt. Für die ebene Bewegung des Wagenkörpers (Masse m, Trägheitsmoment θ_S bzgl. S) gelten der Drallsatz bezüglich S sowie die x- und y-Komponenten des Impulssatzes, die in Anlehnung an (5.56) zu einer Matrizengleichung zusammengefasst werden,

$$\begin{bmatrix} \theta_S & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g\,\sin\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_S^{\mathrm{r}} \\ f_x^{\mathrm{r}} \\ f_y^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{5.128}$$

$$\rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{M}} \quad \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} \quad = \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \quad .$$

Der eingeprägte ebene Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}$ besteht aus dem eingeprägten Moment $\tau_S^{\mathrm{e}} = 0$ und den Komponenten der Gewichtskraft in der x_0, y_0-Ebene. Der ebene Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ mit dem Reaktionsmoment τ_S^{r} und der Reaktionskraft $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$ unterliegt der zu der nichtholonomen Bindung gehörenden Reaktionsbedingung. Wie bei den holonomen Systemen in Abschnitt 5.3 werden zwei Formulierungen der Bewegungsgleichungen betrachtet:

- Die Bewegungsgleichungen in den $f_{\mathrm{L}} = 3$ unabhängigen Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}$ und den voneinander abhängigen Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}} = \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}$ werden als ein differential-algebraisches Gleichungssystem aufgestellt.
- Die Bewegungsgleichungen in den $f_{\mathrm{L}} = 3$ unabhängigen Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}$ und den $f = 2$ unabhängigen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ werden als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen aufgestellt.

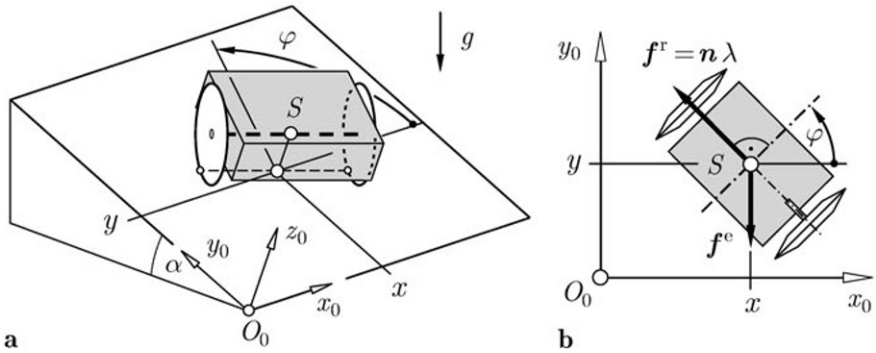


Abb. 5.11 Wagen mit zwei Rädern auf einer schiefen Ebene. **a** Gesamtsystem. **b** Kräfte

5.5.1 Bewegungsgleichungen in abhängigen Koordinaten

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den unabhängigen Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}$ und den voneinander abhängigen Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}}$ werden die implizite nichtholonome Bindung (5.117) und die dazu gehörende explizite Reaktionsbedingung verwendet. Die Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ der impliziten Bindung (5.117) definiert die gesperrten Raumrichtungen, in denen die Reaktionskräfte wirken. Die explizite Reaktionsbedingung hat damit die gleiche Form wie bei holonomen Systemen mit der hier $b = 1$ minimalen Reaktions-

koordinate λ, vgl. (5.59),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_S^{\mathrm{r}} \\ f_x^{\mathrm{r}} \\ f_y^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \lambda \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} &= \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{r}}) \quad \lambda \,. \end{aligned} \tag{5.129}$$

Es gelten dann die Deskriptorgleichungen, vgl. (5.63),

$$\begin{aligned} & & \dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v} \,, \\ & (5.128) \text{ mit } (5.129): & \widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}} &= \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{r})\,\lambda \,, \\ & (5.117): & 0 &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{v} \,. \end{aligned} \tag{5.130}$$

Werden die Bindungen (5.117) ein Mal nach der Zeit abgeleitet, können die Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}$ und die Reaktionskoordinate λ aus dem folgenden linearen Gleichungssystem berechnet werden, vgl. (5.65),

$$\begin{matrix} (5.128) \text{ mit } (5.129): \\ (5.119): \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\gamma}} \end{bmatrix} \tag{5.131}$$

oder ausgeschrieben

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \theta_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 0 & m & -\cos\varphi \\ \hline 0 & \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \hline \lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -m\,g\,\sin\alpha \\ \hline -(\cos\varphi\,\dot{x} + \sin\varphi\,\dot{y}\,)\,\dot{\varphi} \end{array}\right] . \tag{5.132}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems (5.131) liefert $\lambda = \lambda(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}})$ und $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}} = \dot{\hat{\boldsymbol{v}}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}})$. Mit dem aus $\hat{\boldsymbol{r}}$ und $\hat{\boldsymbol{v}}$ gebildeten Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ liegt damit ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung vor,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}} \\ \dot{\hat{\boldsymbol{v}}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}(t_0) \\ \hat{\boldsymbol{v}}(t_0) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_0 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x}(t_0) &= \boldsymbol{x}_0 \quad . \end{aligned} \tag{5.133}$$

Da keine holonome Bindung besteht, kann die Anfangslage $\hat{\boldsymbol{r}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{r}}_0$ frei vorgegeben werden. Die Anfangsgeschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{v}}_0$ unterliegt dagegen der kinematischen Bindung (5.117),

$$\boldsymbol{G}(\hat{\boldsymbol{r}}_0)\,\hat{\boldsymbol{v}}_0 = 0 \,. \tag{5.134}$$

Der differentielle Index des Deskriptorsystems (5.130) beträgt zwei, da die Bindungen (5.117) auf Geschwindigkeitsebene zwei Mal nach der Zeit

abzuleiten sind, um zu einem System gewöhnlicher Differentialgleichungen in $\hat{\boldsymbol{r}}$, $\hat{\boldsymbol{v}}$ und λ zu gelangen. Tatsächlich ausgeführt wird nur eine Ableitung, da nach Elimination von λ bereits das gewöhnliche Differentialgleichungssystem (5.133) erhalten wird.

5.5.2 Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den $f_{\mathrm{L}} = 3$ minimalen Lagekoordinaten $\boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{r}}$ und den $f = 2$ minimalen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta}$ werden die explizite nichtholonome Bindung (5.123) und die dazu gehörende implizite Reaktionsbedingung verwendet. Wegen $\boldsymbol{q} = \hat{\boldsymbol{r}}$ definiert die nichtholonome Bindung (5.123) hier zugleich die kinematische Bewegungsgleichung für die minimalen Koordinaten,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q}) \qquad \boldsymbol{s} \ . \end{aligned} \tag{5.135}$$

Die Spaltenvektoren der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ der expliziten Bindung (5.123) definieren die freien Raumrichtungen, zu denen die Reaktionskräfte orthogonal sind. Die impliziten Reaktionsbedingungen haben daher dieselbe Form wie bei holonomen Systemen, vgl. (5.61),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_S^{\mathrm{r}} \\ f_x^{\mathrm{r}} \\ f_y^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \qquad \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \qquad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} &= \boldsymbol{0} \ . \end{aligned} \tag{5.136}$$

Zusammen mit den kinetischen Gleichungen (5.128) und den expliziten Bindungen auf Beschleunigungsebene (5.127) liegt ein lineares Gleichungssystem vor mit derselben Form wie bei holonomen Systemen, vgl. (5.76),

$$\begin{array}{l} (5.128): \\ (5.127): \\ (5.136): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\boldsymbol{v}}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \\ \dot{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \\ -\bar{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \text{ Gln.} \\ 3 \text{ Gln.} \\ 2 \text{ Gln.} \end{array} \tag{5.137}$$

Werden die Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}$ und die Reaktionskräfte $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ entsprechend Abschnitt 5.3.6 eliminiert, so ergibt sich die kinetische Bewegungsgleichung

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\,\dot{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}) \tag{5.138}$$

mit der Massenmatrix

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \theta_S & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \tag{5.139}$$

den verallgemeinerten CORIOLIS-Kräften

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}) = -\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\bar{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.140}$$

und den den verallgemeinerten eingeprägten Kräften

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m\,g\,\sin\alpha\,\sin\varphi \end{bmatrix}. \tag{5.141}$$

Die Zustandsgleichungen bestehen entsprechend (5.85) aus der kinematischen Bewegungsgleichung (5.135) und der nach $\dot{\boldsymbol{s}}$ aufgelösten kinetischen Bewegungsgleichung (5.138),

$$\begin{array}{lcl} (5.135): & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{s} \\ \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{q})\,\big(\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s}) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s})\,\big) \end{bmatrix} \\ (5.138): & & \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{x}} \;=\; & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})\,, \end{array} \tag{5.142}$$

bzw. ausgeschrieben und mit den dazu gehörenden Anfangsbedingungen (Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$) und der Abkürzung $g^* = g\,\sin\alpha$

$$\begin{array}{cccccccc} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \hline \dot{\omega} \\ \dot{v} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \omega \\ v\,\cos\varphi \\ v\,\sin\varphi \\ \hline 0 \\ -g^*\,\sin\varphi \end{bmatrix} & \begin{matrix} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \\ \text{(iv)} \\ \text{(v)} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ x(0) \\ y(0) \\ \hline \omega(0) \\ v(0) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ \hline \omega_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})\,, & & \boldsymbol{x}(0) & = & \boldsymbol{x}_0\,. \end{array} \tag{5.143}$$

Analytische Lösung der Bewegungsgleichungen Das Differentialgleichungssystem (5.143) kann analytisch gelöst werden, siehe z.B. HILLER [38]. Die Integration von (iv) und (i) liefert den Drehwinkel $\varphi(t)$,

$$\omega(t) = \omega_0 \qquad \xrightarrow{\int\cdot\,\mathrm{d}t} \qquad \varphi(t) = \omega_0\,t + \varphi_0\,. \tag{5.144}$$

Einsetzen von $\varphi(t)$ in (v) ergibt durch Integration die Geschwindigkeit $v(t)$,

$$\dot{v}(t) = -g^*\,\sin(\omega_0\,t + \varphi_0) \qquad \xrightarrow{\int\cdot\,\mathrm{d}t} \qquad v(t) = \frac{g^*}{\omega_0}\,\cos\underbrace{(\omega_0\,t + \varphi_0)}_{\varphi(t)} + C_1\,,$$

mit der Integrationskonstanten C_1. Einsetzen von $v(t)$ in (i) und (ii) liefert Differentialgleichungen für die Bahn des Punktes S,

$$\dot{x} = \frac{g^*}{\omega_0} \cos^2\varphi + C_1 \cos\varphi \,, \tag{5.145}$$

$$\dot{y} = \frac{g^*}{\omega_0} \cos\varphi \sin\varphi + C_1 \sin\varphi \,, \tag{5.146}$$

die mit

$$\dot{x} \equiv \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \quad \overset{\text{(i)}}{\rightarrow} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi}\,\omega \quad \text{mit} \quad \omega(t) = \omega_0 \,,$$

(entsprechend für y) jeweils nach Trennung der Variablen x bzw. y und φ integriert werden können. Mit den Integrationskonstanten C_2 und C_3 lauten die Lösungen

$$x(\varphi) = \frac{g^*}{4\,\omega_0^2}\,(2\varphi + \sin 2\varphi) + \frac{C_1}{\omega_0} \sin\varphi + C_2 \tag{5.147}$$

und

$$y(\varphi) = \frac{g^*}{2\,\omega_0^2} \sin^2\varphi - \frac{C_1}{\omega_0} \cos\varphi + C_3 \quad \text{mit} \quad \sin^2\varphi = \tfrac{1}{2}\,(1 - \cos 2\varphi)$$

$$\rightarrow y(\varphi) = -\frac{g^*}{4\,\omega_0^2} \cos 2\varphi - \frac{C_1}{\omega_0} \cos\varphi + \frac{g^*}{4\,\omega_0^2} + C_3 \,. \tag{5.148}$$

Die Funktionen $x(\varphi)$ und $y(\varphi)$ definieren die Bahn von S in Parameterdarstellung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die konstanten Summanden durch eine geeignete Wahl der Anfangsbedingungen zu Null gebracht werden. Mit den dimensionslosen Bahnkoordinaten

$$\bar{x} = x\,\frac{4\,\omega_0^2}{g^*} \,, \qquad \bar{y} = y\,\frac{4\,\omega_0^2}{g^*}$$

lauten die Bahngleichungen (5.147) und (5.148)

$$\bar{x} = \sin 2\varphi + \kappa \sin\varphi + 2\,\varphi \,, \tag{5.149}$$

$$\bar{y} = -\cos 2\varphi - \kappa \cos\varphi \qquad \text{mit} \qquad \kappa = C_1\,\frac{4\,\omega_0}{g^*} \,. \tag{5.150}$$

Zur geometrischen Interpretation werden in (5.149) der Term $2\,\varphi$ auf die linke Seite gebracht und anschließend beide Gleichungen quadriert und addiert,

$$(\bar{x} - 2\,\varphi)^2 + \bar{y}^2 = 1 + \kappa^2 + 2\,\kappa \cos\varphi \,. \tag{5.151}$$

Unter Berücksichtigung des Winkels $\varphi(t)$ aus (5.144) ist dies die Gleichung eines Kreises, dessen Radius sich periodisch verändert (Periode $\frac{2\pi}{\omega_0}$) und des-

sen Mittelpunkt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $2\,\dot{\varphi} = 2\,\omega_0$ auf der $\bar{x}$-Achse bewegt. Die mittlere Höhe der Bahnkurven in $\bar{y}$-Richtung ist konstant. Bahnkurven für exemplarische Werte der Konstanten κ zeigt Abb. 5.12.

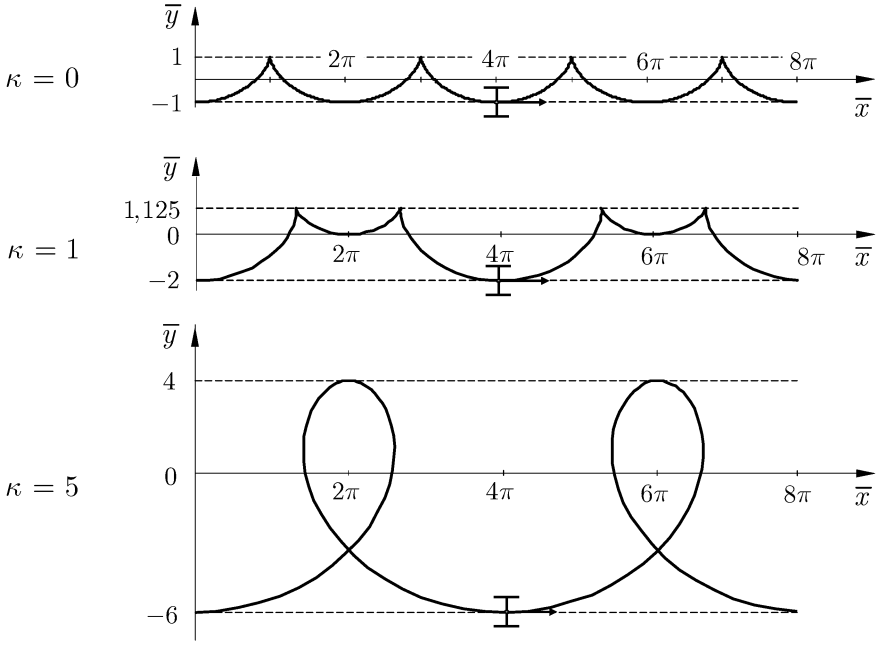


Abb. 5.12 Bahnkurven des zweirädrigen Wagens auf einer schiefen Ebene (Hiller [38])

5.6 Prinzipien und Methoden der Dynamik

Unter einem Prinzip der Mechanik wird eine Aussage verstanden, aus der in der Statik die Gleichgewichtsbedingungen und in der Dynamik die Bewegungsgleichungen abgeleitet werden können. Im Laufe der von Szabó [101] beschriebenen Entwicklung der Mechanik wurden zahlreiche Prinzipien formuliert. Allgemein werden unterschieden:

- Differentialprinzipien: Sie machen eine Aussage über die Bewegung bzw. Verformung eines mechanischen Systems zu einem bestimmten Zeitpunkt. Beispiele sind die in diesem Abschnitt behandelten Prinzipien von d'Alembert-Lagrange, Jourdain und Gauss.
- Integralprinzipien (Minimalprinzipien): Sie machen eine Aussage über die Bewegung eines mechanischen Systems in einem endlichen Zeitintervall. Die Aufgabe wird mit Hilfe der Variationsrechnung gelöst. Ein Beispiel ist das hier nicht behandelte Prinzip von Hamilton.[11]

[11] Sir William Rowan Hamilton, *1805 in Dublin, †1865 in Dublin

In diesem Abschnitt werden einige Differentialprinzipien beschrieben. Weiterhin werden die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art als klassische analytische Methode zur Aufstellung von Bewegungsgleichungen beschrieben und die Bewegungsgleichungen von HAMILTON und GIBBS-APPELL angesprochen.

5.6.1 Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE

Das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE wird oft auch das Prinzip von D'ALEMBERT in der Fassung von LAGRANGE genannt. Mit den in (5.31) für holonome Massenpunktsysteme definierten virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}_i$ besagt das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE, dass die *virtuelle Arbeit* aller Reaktionskräfte des Systems δW^{r} verschwindet,

$$\delta W^{\mathrm{r}} \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}\,\mathrm{T}} \delta\boldsymbol{r}_i = 0 \qquad \text{oder} \qquad \underbrace{\left[\, \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}\,\mathrm{T}} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{r}\,\mathrm{T}} \,\right]}_{\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}\,\mathrm{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{r}_1 \\ \vdots \\ \delta\boldsymbol{r}_n \end{bmatrix}}_{\delta\boldsymbol{r}} = 0\,. \tag{5.152}$$

Die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ liegen gemäß (5.31) im Nullraum der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ der impliziten Bindungen, also $\boldsymbol{G}\,\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE entspricht der Aussage, dass die Reaktionskräfte in den durch die Bindungen gesperrten Raumrichtungen liegen. Dieser Sachverhalt wurde durch die expliziten Reaktionsbedingungen (5.59) mit den minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ ausgedrückt,

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}\,. \tag{5.153}$$

Einsetzen der Reaktionskräfte aus (5.153) in (5.152) bestätigt, dass die virtuelle Arbeit verschwindet,

$$\delta W^{\mathrm{r}} \;\equiv\; (\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda})^{\mathrm{T}}\,\delta\boldsymbol{r} = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \delta W^{\mathrm{r}} \;\equiv\; \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\,\underbrace{\boldsymbol{G}\,\delta\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} = 0\,. \tag{5.154}$$

Werden in (5.152) die Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ durch die Impulssätze (5.53) für die freigeschnittenen Massenpunkte ausgedrückt, also

$$m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{5.155}$$

so lautet das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE

$$\delta W^{\mathrm{r}} \;\equiv\; \sum_{i=1}^{n} (m_i\,\dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}\,\delta\boldsymbol{r}_i = 0\,. \tag{5.156}$$

Im Sonderfall statischer Systeme ist $\dot{\boldsymbol{v}}_i \equiv \boldsymbol{0}$, $i = 1, \ldots, n$, und (5.156) geht über in das *Prinzip der virtuellen Arbeit* in der Statik,

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}\,\mathrm{T}}\, \delta \boldsymbol{r}_i = 0\,. \tag{5.157}$$

Es besagt, dass die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte im statischen Gleichgewicht verschwindet (Gleichgewichtsaussage).

Um z.B. die Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten (5.78) aus der Formulierung (5.156) des Prinzips von D'ALEMBERT-LAGRANGE herzuleiten, werden die virtuellen Verschiebungen $\delta \boldsymbol{r}_i$ mit Hilfe der expliziten Bindungen aus (5.49) ausgedrückt (Faktoren im Skalarprodukt vertauscht),

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(\boldsymbol{J}_i\, \delta \boldsymbol{q})^{\mathrm{T}}}_{\delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}} (m_i\, \dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\, (m_i\, \dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}})}_{\stackrel{!}{=}\, \boldsymbol{0}} = 0\,. \tag{5.158}$$

Da die voneinander unabhängigen virtuellen Lageänderungen $\delta \boldsymbol{q}$ beliebige Werte annehmen können, muss der Summenausdruck für sich verschwinden, wodurch wieder die Projektionsgleichung (5.77) erhalten wird.

Das Prinzip von D'ALEMBERT-LAGRANGE gilt auch für nichtholonome Systeme, da auch hier die Reaktionskräfte und -momente in den durch die Bindungen gesperrten Raumrichtungen und die virtuellen Verschiebungen in den freien Raumrichtungen liegen. Im Beispiel aus Abb. 5.11 lautet die virtuelle Arbeit des Reaktionskraftwinders $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ aus (5.129) mit der virtuellen Verschiebung $\delta \hat{\boldsymbol{r}}$ aus (5.125) und der Orthogonalität $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ gemäß (5.124)

$$\delta W^{\mathrm{r}} \equiv \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}\,\mathrm{T}}\, \delta \hat{\boldsymbol{r}} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lambda\, \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J}\, \delta \boldsymbol{\pi} = 0\,. \tag{5.159}$$

Angemerkt sei noch, dass die tatsächliche Arbeit der Reaktionskräfte

$$\mathrm{d}W^{\mathrm{r}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}\mathrm{T}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r}_i \tag{5.160}$$

nur bei skleronomen, jedoch nicht bei rheonomen Systemen verschwindet, weil die Verschiebungsvektoren $\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i$ hier Komponenten im Kotangentialraum besitzen, vgl. Abb. 5.5. Ein Beispiel ist ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit angetriebenes Pendel im Schwerefeld, dessen Antrieb durch eine rheonome Bindung modelliert wird, siehe auch Tabelle 6.6 (Seite 196). Das Antriebsmoment ist hier ein Reaktionsmoment, das am System Arbeit leistet, was an der sich über dem Drehwinkel verändernden potentiellen Energie bei konstanter kinetischer Energie direkt erkennbar ist. Die häufig zu lesende Aussage, dass Reaktionskräfte keine Arbeit leisten, ist daher i.Allg. nicht korrekt. Sie gilt nur in Bezug auf die virtuelle Arbeit.

5.6.2 Prinzip von Jourdain

Die Aussage, das die Reaktionskräfte in den durch die Bindungen gesperrten Raumrichtungen liegen, kann auch mit Hilfe des *Prinzips von* Jourdain[12] formuliert werden [44]. Hierzu werden die *virtuellen Geschwindigkeiten* $\delta'\boldsymbol{v}_i$ als gedachte, mit den Bindungen verträgliche Geschwindigkeitsänderungen bei festgehaltener Lage und Zeit definiert. Damit kennzeichnet δ' ein spezielles Differential, für das gilt

$$\begin{aligned} \delta'\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{0} \qquad \text{(festgehaltene Lage)}\,, \\ \delta' t &= 0 \qquad \text{(festgehaltene Zeit)}\,. \end{aligned} \tag{5.161}$$

Das Prinzip von Jourdain besagt, dass die *virtuelle Leistung* $\delta' P^{\mathrm{r}}$ aller Reaktionskräfte am System verschwindet,

$$\delta' P^{\mathrm{r}} \equiv \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}\mathrm{T}}\, \delta'\boldsymbol{v}_i = 0 \quad \text{oder} \quad \underbrace{\left[\, \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}\mathrm{T}} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{r}\mathrm{T}} \,\right]}_{\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}\mathrm{T}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \delta'\boldsymbol{v}_1 \\ \vdots \\ \delta'\boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}}_{\delta'\boldsymbol{v}} = 0\,, \tag{5.162}$$

bzw. nach dem Ersetzen der Reaktionskräfte mit Hilfe der Impulssätze

$$\delta' P^{\mathrm{r}} \equiv \sum_{i=1}^{n} (m_i\, \dot{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}\, \delta'\boldsymbol{v}_i = 0\,. \tag{5.163}$$

Die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta'\boldsymbol{v}$ aus (5.162) müssen die kinematischen Bindungen erfüllen. Das totale Differential der impliziten kinematischen Bindungen der allgemeinen Form (Residuum $\boldsymbol{\gamma}$)

$$\boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, t)\, \boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0} \tag{5.164}$$

unter Verwendung des δ'-Differentials aus (5.161) ergibt

$$\delta'\boldsymbol{\gamma} \equiv \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \boldsymbol{r}} \underbrace{\delta'\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{0}} + \underbrace{\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial \boldsymbol{v}}}_{\boldsymbol{G}} \delta'\boldsymbol{v} + \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}}{\partial t} \underbrace{\delta' t}_{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{G}\, \delta'\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.165}$$

Die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta'\boldsymbol{v}$ sind damit, ebenso wie die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ in (5.31), beliebige Vektoren im Nullraum der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ der impliziten kinematischen Bindungen, siehe auch Bremer [12]. Gegenüber dem Prinzip von d'Alembert-Lagrange findet damit beim Prinzip von Jourdain lediglich eine Umbenennung der virtuellen Größen statt. Die physikalische Aussage der beiden Prinzipien, dass die Reaktions-

[12] Philip Edward Bertrand Jourdain , *1879 in Ashbourne, †1919 in Crookham

kräfte in den durch die Bindungen gesperrten Raumrichtungen liegen, ist identisch. Sie gilt für holonome und nichtholonome Systeme.[13]

Als ein gewisser Vorteil des δ'-Differentials kann die bequemere Schreibweise bei nichtholonomen Geschwindigkeitsgrößen gesehen werden, da die Benennung von Quasikoordinaten entfällt. Beispielsweise kann die explizite nichtholonome Bindung für die virtuellen Verschiebungen (5.125) mit Hilfe der virtuellen Geschwindigkeiten $\delta'\boldsymbol{v}$ und der unabhängigen virtuellen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta} = [\,\omega \;\; v\,]^{\mathrm{T}}$ mit der nichtholonomen Geschwindigkeit v formuliert werden,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta'\dot{\varphi} \\ \delta'\dot{x} \\ \delta'\dot{y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta'\omega \\ \delta' v \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \delta'\hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J}(\hat{\boldsymbol{r}}) \qquad \delta'\boldsymbol{\eta} \;. \end{aligned} \tag{5.166}$$

Einsetzen von (5.166) in (5.165) ergibt die Orthogonalitätsbeziehung (5.124).

5.6.3 Prinzip von Gauss

Das Prinzip von Gauss[14] wird auch als das *Prinzip des kleinsten Zwanges* bezeichnet [26]. Es kann auf zwei Arten formuliert werden.

Erste Formulierung des Prinzips von Gauss Nach Gauss wird der *Zwang* eines gebundenen mechanischen Systems (nicht zu verwechseln mit den Zwangsbedingungen, also den Bindungen) als die mittlere quadratische, mit den Massen gewichtete Differenz der Beschleunigungen mit Bindungen und ohne Bindungen definiert. Ohne Bindungen hat ein Massenpunktsystem die Beschleunigungen

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{i,\mathrm{frei}} \equiv \boldsymbol{a}_{i,\mathrm{frei}} = \frac{1}{m_i}\,\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}\,, \quad i = 1,\ldots,n\,, \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{a}_{\mathrm{frei}} = \widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \tag{5.167}$$

mit $\boldsymbol{a}_{\mathrm{frei}}$, $\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}$ und $\widehat{\boldsymbol{M}}$ entsprechend (5.56). Mit den Beschleunigungen des gebundenen Systems $\boldsymbol{a}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_i$ lautet der Zwang

$$Z(\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i,\mathrm{frei}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{a}_{i,\mathrm{frei}}) \tag{5.168}$$

Mit dem Vorfaktor $\frac{1}{2}$ wird bei der nachfolgenden Ableitung der Faktor 2 umgangen.

---

[13] Es wird vorausgesetzt, dass die nichtholonomen Bindungen in den Geschwindigkeiten linear sind. Die von Hamel in [32], S. 495ff diskutierten, in den Geschwindigkeiten nichtlinearen Bindungen werden ausgeschlossen.

[14] Carl Friedrich Gauss, *1777 in Braunschweig, †1855 in Göttingen

In Matrizenschreibweise lautet (5.168)

$$
\begin{aligned}
Z(\boldsymbol{a}) &= \tfrac{1}{2}\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_{\text{frei}})^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}_{\text{frei}}) \\
\rightarrow\; Z(\boldsymbol{a}) &= \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}_{\text{frei}}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a}_{\text{frei}} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}_{\text{frei}}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a}_{\text{frei}}\,.
\end{aligned}
$$

Unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{a}_{\text{frei}}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a}_{\text{frei}}$ und mit $\boldsymbol{a}_{\text{frei}}$ aus (5.167) ist

$$
Z(\boldsymbol{a}) = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \;+\; \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}\,. \tag{5.169}
$$

Das Prinzip von Gauss besagt nun, dass die Beschleunigungen des gebundenen Systems $\boldsymbol{a}$ den Zwang $Z(\boldsymbol{a})$ minimieren. Daneben muss $\boldsymbol{a}$ die Bindungen (5.29) erfüllen. Damit liegt das folgende Extremwertproblem mit den impliziten Bindungen auf Beschleunigungsebene (5.29) als Nebenbedingungen vor,

$$
Z(\boldsymbol{a}) \equiv \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \overset{!}{=} \min_{\boldsymbol{a}}\,, \tag{5.170}
$$

$$
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{a} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},t) \overset{!}{=} \boldsymbol{0}\,. \tag{5.171}
$$

Die Nebenbedingungen werden mit den Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ in die erweiterte Zielfunktion

$$
\bar{Z}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\lambda}) \equiv \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}^{-1}\,\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\,(\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{a} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}) \overset{!}{=} \min_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{\lambda}} \tag{5.172}
$$

eingearbeitet. Die Extremalbedingungen für (5.172) lauten mit den Matrizenschreibweisen (0.4) und (0.5)

$$
\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}} \equiv \widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} - \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda} \overset{!}{=} \boldsymbol{0}\,, \tag{5.173}
$$

$$
\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}} \equiv \boldsymbol{G}\,\boldsymbol{a} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} \overset{!}{=} \boldsymbol{0}\,, \tag{5.174}
$$

wobei (5.174) die Nebenbedingung (5.171) ist. Damit wird ein lineares Gleichungssysten für $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ erhalten, das den bekannten Bewegungsgleichungen in den abhängigen Koordinaten (5.65) entspricht. Die Lagrange-Multiplikatoren des Extremwertproblems (5.172) sind damit gerade die minimalen Reaktionskoordinaten.

Zweite Formulierung des Prinzips von Gauss Aus der Extremwertaufgabe (5.170), (5.171) lässt sich eine weitere Formulierung des Prinzips von Gauss ableiten. Gesucht ist die Beschleunigung $\boldsymbol{a}$, welche den Zwang $Z(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},t)$ aus (5.170) extremal macht und dabei die Bindungen (5.171) erfüllt. Hierzu wird die *virtuelle Änderung der Beschleunigung* als eine gedachte, mit den Bindungen verträgliche Beschleunigungsänderung bei festgehaltener Zeit t, Lage $\boldsymbol{r}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ definiert. Die virtuelle Änderung der Beschleunigung wird als ein spezielles Differential $\delta''\boldsymbol{a}$ der Beschleunigung

formuliert. Für das δ''-Differential gilt

$$\begin{aligned} \delta''\boldsymbol{r} &= \mathbf{0} && \text{(festgehaltene Lage)}\,, \\ \delta''\boldsymbol{v} &= \mathbf{0} && \text{(festgehaltene Geschwindigkeit)}\,, \\ \delta''t &= 0 && \text{(festgehaltene Zeit)}\,. \end{aligned} \tag{5.175}$$

Der Zwang Z bei gegebener Lage $\boldsymbol{r}$, Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ und Zeit t ist bezüglich der mit den Bindungen verträglichen Beschleunigungen $\boldsymbol{a}$ extremal, wenn bei festgehaltenen $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$, t die Änderung von Z über $\boldsymbol{a}$ in erster Näherung null ist,

$$\delta''Z(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},t) \equiv \frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{r}}\underbrace{\delta''\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}} + \frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{v}}\underbrace{\delta''\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} + \frac{\partial Z}{\partial \boldsymbol{a}}\,\delta''\boldsymbol{a} + \frac{\partial Z}{\partial t}\underbrace{\delta''t}_{0} \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Mit der Funktion $Z(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},t)$ aus (5.169) entsteht daraus die differentielle Formulierung des Prinzips von Gauss,

$$\delta''Z \equiv (\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}\,\delta''\boldsymbol{a} = 0 \tag{5.176}$$

oder

$$\delta''Z \equiv \sum_{i=1}^{n} (m_i\,\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}})^{\mathrm{T}}\,\delta''\boldsymbol{a}_i = 0\,. \tag{5.177}$$

Die virtuellen Beschleunigungen $\delta''\boldsymbol{a} = \left[\,\delta''\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\ \ldots\ \delta''\boldsymbol{a}_n^{\mathrm{T}}\,\right]^{\mathrm{T}}$ müssen die Bindungen erfüllen. Das totale Differential der impliziten kinematischen Bindungen auf Beschleunigungsebene (5.171) unter Verwendung des δ''-Differentials aus (5.175) ergibt

$$\begin{aligned} \delta''\dot{\gamma} &\equiv \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\boldsymbol{r}}\underbrace{\delta''\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}} + \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\boldsymbol{v}}\underbrace{\delta''\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} + \underbrace{\frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial\boldsymbol{a}}}_{\boldsymbol{G}}\,\delta''\boldsymbol{a} + \frac{\partial\dot{\gamma}}{\partial t}\underbrace{\delta''t}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0} \\ &\rightarrow \quad \boldsymbol{G}\,\delta''\boldsymbol{a} = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{5.178}$$

Die virtuellen Beschleunigungen $\delta''\boldsymbol{a}$ sind damit, ebenso wie die virtuellen Verschiebungen $\delta\boldsymbol{r}$ und die virtuellen Geschwindigkeiten $\delta'\boldsymbol{v}$, beliebige Vektoren im Nullraum der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ der impliziten kinematischen Bindungen, siehe auch Bremer [12]. Von den Prinzipien von d'Alembert-Lagrange (5.156) und Jourdain (5.163) unterscheidet sich daher das Prinzip von Gauss (5.177) lediglich durch die Benennung dieser Vektoren.

5.6.4 Lagrange-*Gleichungen zweiter Art*

Die Lagrange-Gleichungen zweiter Art repräsentieren eine analytische Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen, siehe Tabelle 1.1 (Seite 4). Sie werden im Folgenden für holonome Systeme hergeleitet.

Herleitung der LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art Die Herleitung geht von der Projektionsgleichung (5.77) aus. Mit $\ddot{\boldsymbol{r}}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_i$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}} \left(m_i \, \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{f}_i^e\right) = \boldsymbol{0} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{J}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial \boldsymbol{q}} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_1} \; \dots \; \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_f}\right] . \tag{5.179}$$

Dies sind f skalare Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \, \ddot{\boldsymbol{r}}_i - \boldsymbol{f}_i^e\right)^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = 0 \, , \qquad j = 1, \dots, f \, ,$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \, \ddot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{e\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \, , \qquad j = 1, \dots, f \, . \tag{5.180}$$

Auf der rechten Seite von (5.180) stehen die verallgemeinerten eingeprägten Kräfte

$$k_j^e = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{e\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \, , \qquad j = 1, \dots, f \, . \tag{5.181}$$

Die linke Seite von (5.180) wird mit Hilfe der Produktregel umgeformt:

$$\begin{aligned} &\text{allg.:} \quad \tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \; w &&= \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\,w) &&- u \; \tfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \\ &\text{hier:} \quad m_i \, \ddot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} &&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i \, \dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) &&- m_i \, \dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) . \end{aligned} \tag{5.182}$$

Für die weitere Umformung werden zwei analytische Zusammenhänge ausgenutzt. Die partielle Ableitung der expliziten holonomen Bindungen auf Geschwindigkeitsebene (5.36),

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \sum_{j=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t)}{\partial q_j} \, \dot{q}_j + \frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t)}{\partial t} \, , \tag{5.183}$$

nach der j-ten Minimalgeschwindigkeit $\dot{q}_j$ ergibt die Beziehung

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_i(\boldsymbol{q}, t)}{\partial q_j} \, . \tag{5.184}$$

Weiterhin kann in (5.182) die Reihenfolge der partiellen und der totalen Ableitung vertauscht werden,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right) \, . \tag{5.185}$$

Mit (5.184) und (5.185) wird (5.182) weiter umgeformt,

$$m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\rightarrow m_i\,\ddot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\underbrace{\left(\frac{1}{2}m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)}_{T_i} - \frac{\partial}{\partial q_j}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\,m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)}_{T_i}. \tag{5.186}$$

Hierbei ist $T_i = \frac{1}{2}m_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_i^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{r}}_i$ die kinetische Energie des Massenpunkts m_i. Einsetzen von (5.181) und (5.186) in (5.180) ergibt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = k_j^e\,, \qquad j = 1,\ldots,f\,, \tag{5.187}$$

mit der kinetischen Energie des Massenpunktsystems

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\,\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_i \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{v}_i \overset{(5.183)}{=} \dot{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,.$$

Dies sind die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art. In Matrizenschreibweise gemäß (0.3) lauten sie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}\,. \tag{5.188}$$

Die kinetische Energie eines Systems mit n_{K} Körpern lautet gemäß (4.73)

$$T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n_{\mathrm{K}}}\left(\,m_i\,\boldsymbol{v}_{Si}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_{Si} + \boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_{Si}\,\boldsymbol{\omega}_i\right)\,. \tag{5.189}$$

Konservative Kräfte, potentielle Energie Eine *konservative Kraft* $\boldsymbol{f}^{\mathrm{k}}(\boldsymbol{r})$ ist eine eingeprägte Kraft, deren Arbeit

$$W = \int\limits_{\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}^{\mathrm{k}^{\mathrm{T}}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \tag{5.190}$$

für jeden Weg ihres Angriffspunktes von einem Punkt $\boldsymbol{r}_0$ zu einem Punkt $\boldsymbol{r}$ gleich ist und damit nur vom Anfangspunkt $\boldsymbol{r}_0$ und dem Endpunkt $\boldsymbol{r}$ abhängt (Abb. 5.13), also $W = W(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r})$.

Die *potentielle Energie* $U(\boldsymbol{r})$ wird als die „Arbeitsfähigkeit“ des Systems an der Stelle $\boldsymbol{r}$ definiert. Es gilt dann

$$U(\boldsymbol{r}_0) = U(\boldsymbol{r}) + W(\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{r}) \tag{5.191}$$

mit der auf dem Weg von $\boldsymbol{r}_0$ nach $\boldsymbol{r}$ geleisteten Arbeit $W(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{r})$. Wird Arbeit geleistet, $W > 0$, so ist die Arbeitsfähigkeit in der Endlage $\boldsymbol{r}$ kleiner als in der Anfangslage $\boldsymbol{r}$, also $U(\boldsymbol{r}) < U(\boldsymbol{r}_0)$.

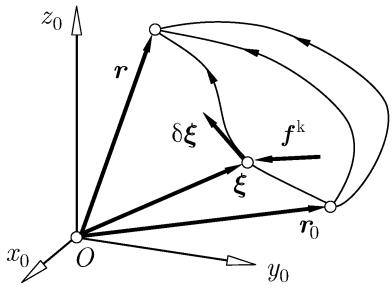


Abb. 5.13 Wegunabhängigkeit der Arbeit einer konservativen Kraft $\boldsymbol{f}^{\mathrm{k}}$

Mit (5.190) gilt für die potentielle Energie

$$U(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r}_0) - \int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}^{\mathrm{k}\,\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}\,. \tag{5.192}$$

Umgekehrt liefert die Ableitung der potentiellen Energie $U(\boldsymbol{r})$ nach dem Lagevektor $\boldsymbol{r}$ die dazugehörige konservative Kraft

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{k}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U(\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}}\,. \tag{5.193}$$

Die potentielle Energie eines Körpers im homogenen Schwerefeld $g = \text{const}$ gemäß Abb. 5.14 a ist mit $\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} = -m\,g\,\boldsymbol{e}_z$ und $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}_x\,\mathrm{d}x + \boldsymbol{e}_y\,\mathrm{d}y + \boldsymbol{e}_z\,\mathrm{d}z$

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}^{e\,\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \qquad \rightarrow \qquad U(z) = \int_{z_0}^{z} m\,g\,\underbrace{\boldsymbol{e}_z^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_z}_{1}\,\mathrm{d}\bar{z}$$

$$U(z) = m\,g\,z - m\,g\,z_0\,. \tag{5.194}$$

Die potentielle Energie einer Feder mit linearer Kennlinie (ungespannte Länge l_0, Federkonstante c) gemäß Abb. 5.14 b lautet mit $\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} = -c\,x\,\boldsymbol{e}_x$

$$U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{f}^{e\,\mathrm{T}}(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi} \qquad \rightarrow \qquad U(x) = \int_{0}^{x} c\,x\,\underbrace{\boldsymbol{e}_x^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{e}_x}_{1}\,\mathrm{d}\bar{x}$$

$$U(x) = \tfrac{1}{2}\,c\,x^2 \qquad \text{oder} \qquad U(y) = \tfrac{1}{2}\,c\,(y - l_0)^2\,. \tag{5.195}$$

In einem Massenpunktsystem gilt für die potentielle Energie die Abhängigkeit $U = U(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_n)$, und die konservativen Kräfte lauten

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{k}}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i^{\mathrm{T}}}\,. \tag{5.196}$$

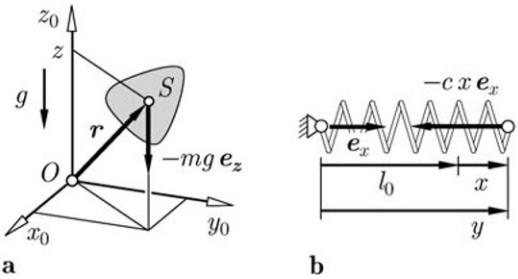


Abb. 5.14 Potentialkräfte. **a** Gewichtskraft. **b** Federkraft

Die gemäß (5.181) für die Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ berechneten konservativen verallgemeinerten Kräfte können dann auch durch U ausgedrückt werden,

$$k_j^{\mathrm{k}} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{k}\,\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_i} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \,. \tag{5.197}$$

Wird U mit Hilfe der expliziten Bindungen (5.35) in Abhängigkeit von $\boldsymbol{q}$ dargestellt, $U = U(\boldsymbol{r}_1(\boldsymbol{q},t),\ldots,\boldsymbol{r}_n(\boldsymbol{q},t)) = U(\boldsymbol{q},t)$, so lauten die verallgemeinerten eingeprägten Kräfte unter Berücksichtigung der Kettenregel

$$k_j^{\mathrm{k}} = -\frac{\partial U}{\partial q_j} \tag{5.198}$$

oder in Matrizenschreibweise

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{k}} = -\left[\, \frac{\partial U}{\partial q_1} \;\cdots\; \frac{\partial U}{\partial q_f} \,\right]^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}} \,. \tag{5.199}$$

LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art mit konservativen Kräften Mit (5.199) lauten die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art (5.188)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{nk}} \tag{5.200}$$

mit den nichtkonservativen verallgemeinerten Kräften $\boldsymbol{k}^{\mathrm{nk}}$.

LAGRANGE-Funktion Mit der LAGRANGE-Funktion

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - U(\boldsymbol{q},t) \tag{5.201}$$

können die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art (5.200) auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{nk}} \tag{5.202}$$

geschrieben werden. Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen hat die Form (5.202) keine Vorteile gegenüber (5.200).

LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art für Mehrkörpersysteme Die Auswertung der LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art (5.200) unter Berücksichtigung der expliziten Bindungen (5.35), (5.39) und (5.46) führt wieder auf die Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten (5.78). Um dieses Ergebnis zu erhalten, ist es bei komplexen Mehrkörpersystemen aber einfacher und übersichtlicher, die expliziten Bindungen direkt in die Projektionsgleichung (5.77) einzusetzen, wie es in Abschnitt 5.3.6 gezeigt worden ist.

5.6.5 Gleichungen von HAMILTON *und* GIBBS-APPELL

Zwei weitere analytische Methoden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen gebundener mechanischer Systeme sollen hier noch erwähnt, jedoch nicht behandelt werden. Ausführliche Darstellungen sind in zahlreichen Monografien zur analytischen Mechanik zu finden, wie z.B. HAMEL [32], PARS [77], FISCHER und STEPHAN [24], HILLER [38] und PAPASTAVRIDIS [76].

Die kanonischen Gleichungen von HAMILTON sind Bewegungsgleichungen in Zustandsform, die aus der HAMILTON-Funktion abgeleitet werden. Die Zustandsgrößen sind die minimalen Lagekoordinaten und die darauf bezogenen verallgemeinerten Impulse. Bei skleronomen Systemen ist die HAMILTON-Funktion die Gesamtenergie des Systems.

Die Gleichungen von GIBBS und APPELL liefern die Bewegungsgleichungen holonomer und nichtholonomer Systeme in minimalen Lagekoordinaten und Geschwindigkeiten. Die analytische Formulierung erfolgt ausgehend von der GIBBS-APPELL-Funktion, die wegen ihres formal der kinetischen Energie ähnelnden Aufbaus auch als Beschleunigungsenergie bezeichnet wird. Zur Anwendung bei Mehrkörpersystemen gelten dabei die Aussagen zu den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art.

5.7 Zur numerischen Lösung von Bewegungsgleichungen

In den Abschnitten 5.3 bis 5.5 wurden die Bewegungsgleichungen von gebundenen mechanischen Systemen entweder als Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen in den Minimalkoordinaten oder als differential-algebraische Gleichungssysteme in voneinander abhängigen Koordinaten aufgestellt. Dieser Abschnitt gibt einen kurzen Überblick über Verfahren zur numerischen Lösung der Bewegungsgleichungen. Ausführlichere Darstellungen geben z.B. die anwendungsorientierten Einführungen von GIPSER [28], PIETRUSZKA [81] sowie RILL und SCHAEFFER [85]. Die numerische Lösung differential-algebraischer Gleichungssysteme wird von HAIRER und WANNER [31] allgemein behandelt. EICH-SÖLLNER und FÜHRER [20] sowie VON SCHWERIN [94] beschreiben die numerische Lösungen der Deskriptorgleichungen von Mehrkörpersystemen.

5.7.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die universellen Verfahren für die numerische Integration von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen gehen von der Zustandsform, also einem System von nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung in den Zustandsgrößen $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ mit den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}_0$ aus,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}, t) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \; . \tag{5.203}$$

Beispiele sind die Zustandsgleichungen eines holonomen Systems (5.85) und eines nichtholonomen Systems (5.142).

Da analytische Lösungen $\boldsymbol{x}(t)$ des Anfangswertproblems (5.203) nur in Sonderfällen, insbesondere bei Systemen linearer Differentialgleichungen, existieren, sind i.Allg. numerische Näherungslösungen zu berechnen. Eine numerische Lösung des Anfangswertproblems (5.203) ist stets eine zeitdiskrete Lösung. Zu diskreten Zeitpunkten t_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, werden Werte des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, berechnet, welche möglichst nahe an der unbekannten exakten Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ liegen, also $\boldsymbol{x}_k \approx \boldsymbol{x}(t_k)$. Der Abstand der diskreten Zeitpunkte $h_k = t_k - t_{k-1}$ heißt *(Zeit-)Schrittweite.*

Die Aufgabe besteht dann darin, ausgehend von den Werten $(t_k, \boldsymbol{x}_k)$ die nachfolgenden Werte $(t_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+1})$ zu berechnen. Hierbei werden zwei Verfahrensklassen unterschieden:

- *Einschrittverfahren*: Zur Berechnung der Werte $(t_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+1})$ wird nur der Wert $(t_k, \boldsymbol{x}_k)$ verwendet.
- *Mehrschrittverfahren*: Zur Berechnung des Werts $(t_{k+1}, \boldsymbol{x}_{k+1})$ werden auch zurückliegende Werte $(t_{k-1}, \boldsymbol{x}_{k-1})$, $(t_{k-2}, \boldsymbol{x}_{k-2})$, ... verwendet.

Das einfachste Einschrittverfahren ist das explizite EULER-Verfahren, bei dem die unbekannte Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ im Zeitintervall $[t_k, t_{k+1}]$ linear mit der Steigung zum Zeitpunkt t_k approximiert wird. In Abb. 5.15 ist dies für die skalare Differentialgleichung $\dot{x} = \Psi(x, t)$ dargestellt. Bei konstanter Schrittweite h lautet die Zahlenfolge der Näherungswerte

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_k, t_k) \; , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \; . \tag{5.204}$$

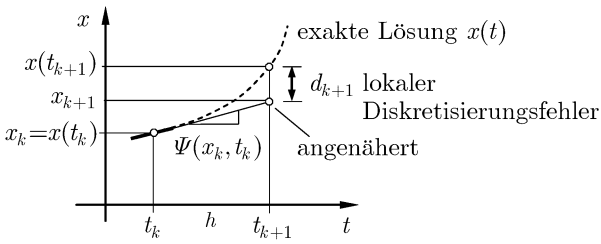


Abb. 5.15 Explizites EULER-Verfahren für die skalare Differentialgleichung $\dot{x} = \Psi(x, t)$

Liegt der Punkt $\boldsymbol{x}_k$ auf der exakten Lösung, also $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(t_k)$, so entsteht-Nnch einem Rechenschritt (5.204) der *lokale Diskretisierungsfehler*

$$d_{k+1} = |\,\boldsymbol{x}(t_{k+1}) - \boldsymbol{x}_{k+1}\,| \,. \tag{5.205}$$

Die Größenordnung des nach N Schritten aufgelaufenen *globalen Fehlers* $D(t_N)$ lässt sich über die Summe der lokalen Diskretisierungsfehler der einzelnen Schritte abschätzen und wird durch die *(Fehler-)Ordnung* p des Verfahrens charakterisiert:

$$D(t_N) = \mathcal{O}(h^p) \,. \tag{5.206}$$

Die Ordnung kann wie folgt interpretiert werden: Wird die Schrittweite h z.B. um den Faktor 2 verkleinert, so wird der globale Fehler $D(t_N)$ um den Faktor 2^p kleiner. Die absolute Größe des globalen Fehlers kann allerdings nicht allgemein angegeben werden. Das explizite EULER-Verfahren (5.204) besitzt die Ordnung $p = 1$.

Der globale Fehler einer numerischen Integration kann damit durch die Verkleinerung der Schrittweite h verringert werden. Die dadurch vergrößerte Anzahl von Integrationsschritten erhöht jedoch den Berechnungsaufwand für die numerische Integration. Bei der für Mehrkörpersysteme typischen aufwendigen rechten Seite $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$ der Differentialgleichung kann der Aufwand für die Integration über ein gegebenes Zeitintervall überschlägig durch die Anzahl der Auswertungen von $\boldsymbol{\Psi}$ abgeschätzt wird. Wegen der Rundungsfehler durch das Rechnen mit einer begrenzten Stellenanzahl kann die Schrittweite aber zur Genauigkeitserhöhung nicht beliebig verkleinert werden.

Eine weitere Möglichkeit zur Verkleinerung des globalen Fehlers ist der Übergang auf ein Verfahren höherer Ordnung. Ein weit verbreitetes Einschrittverfahren ist das explizite RUNGE[15]-KUTTA[16]-Verfahren vierter Ordnung

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \tfrac{h}{6}\,(\boldsymbol{y}_1 + 2\boldsymbol{y}_2 + 2\boldsymbol{y}_3 + \boldsymbol{y}_4)\,, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ &\text{mit}\;\; \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_k, t_k)\,, \qquad \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_k + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{y}_1, t_k + \tfrac{h}{2})\,, \\ &\qquad \boldsymbol{y}_3 = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_k + \tfrac{h}{2}\boldsymbol{y}_2, t_k + \tfrac{h}{2})\,, \;\; \boldsymbol{y}_4 = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{y}_3, t_k + h)\,. \end{aligned} \tag{5.207}$$

Das Verfahren erfordert damit pro Zeitschritt vier Auswertungen von $\boldsymbol{\Psi}$. Dennoch verringert sich i.Allg. der Rechenaufwand gegenüber dem expliziten EULER-Verfahren, weil durch die höhere Ordnung bei gleicher Genauigkeit mit Schrittweiten gerechnet werden kann, die weit über den Faktor vier größer sind als diejenigen des Einschrittverfahrens.

Bei der *Schrittweitensteuerung* wird die Schrittweite adaptiv so berechnet, dass der lokale Diskretisierungsfehler d_{k+1} aus (5.205) stets unterhalb einer vorgegebenen Schranke bleibt. Da die exakte Lösung unbekannt ist,

---

[15] CARL RUNGE, *1856 in Bremen, †1927 in Göttingen

[16] MARTIN WILHELM KUTTA, *1867 in Pitschen, †1944 in Fürstenfeldbruck

muss d_{k+1} geschätzt werden. Hierzu wird günstig eine Vergleichsrechnung mit einem zweiten Verfahren höherer Ordnung durchgeführt. Werden die Stützstellen des Ausgangsverfahrens auch für das Verfahren der höheren Ordnung verwendet, kann der Mehraufwand für die Schrittweitensteuerung minimiert werden. Beispielsweise ist das Verfahren ODE45 in MATLAB ein explizites RUNGE-KUTTA-Verfahren der Ordnung vier, das auf diese Weise in ein Verfahren der Ordnung fünf eingebettet ist.

Wie bereits angesprochen, nutzen explizite *Mehrschrittverfahren* zur Berechnung des folgenden Näherungswertes $\boldsymbol{x}_{k+1}$ neben dem aktuellen Wert $\boldsymbol{x}_k$ zusätzlich zeitlich zurückliegende Werte $\boldsymbol{x}_{k-1}$, $\boldsymbol{x}_{k-2}$,..., die hierzu abzuspeichern sind. Da zum Start der Integration noch keine zurückliegenden Werte vorliegen, ist eine Anlaufrechnung mit einem Einschrittverfahren erforderlich. Gegenüber Einschrittverfahren kann die Anzahl der Auswertungen der rechten Seite $\boldsymbol{\Psi}$ und damit der gesamte Rechenaufwand verringert werden. Die Implementierung ist allerdings komplizierter. Für Mehrkörpersysteme sehr gut geeignet ist das explizite Mehrschrittverfahren von SHAMPINE und GORDON mit adaptiver Schrittweiten- und Ordnungssteuerung [97]. In MATLAB ist es als ODE113 implementiert. Die Vorteile von Mehrschrittverfahren können aber nur ausgenutzt werden, wenn die Funktionen $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$ hinreichend stetig sind. Typische Unstetigkeiten in mechanischen Systemmodellen sind Stöße, Haft-Gleit-Übergänge oder schaltende Regler. In solchen Fällen sind dann häufig Einschrittverfahren wiederum besser geeignet.

Steife Systeme besitzen Systemanteile mit sehr unterschiedlichen Zeitkonstanten oder Eigenkreisfrequenzen. Ein einfaches Beispiel ist ein an Feder-Dämpfer-Elementen aufgehängtes Stabpendel, siehe Tabelle 6.5 (Seite 195). Werden zur Annäherung an ein ideales Drehgelenk große Werte der Feder- und Dämpferkonstanten gewählt, so besitzt das System mit der Pendelbewegung im Schwerefeld eine „langsame“ Dynamik mit kleiner Eigenkreisfrequenz und mit den viskoelastischen Verschiebungen des Stabendpunktes eine „schnelle“ Dynamik mit kleiner Zeitkonstante. Hier kommt es zu dem unerwarteten Effekt, dass die Schrittweitensteuerung eines expliziten Verfahrens auch dann eine Schrittweite in der Größenordnung der kleinsten Zeitkonstante des Systems berechnet, wenn die zeitlichen Lösungsverläufe des Pendelwinkels und der Lagerpunktauslenkungen nach einer anfänglichen kurzen Einschwingzeit nur noch die „langsamen“ Anteile erkennen lassen. Beim Versuch, die Schrittweite unter Inkaufnahme eines größeren Diskretisierungsfehlers zu erhöhen, wird die Integration numerisch instabil. Dies bedeutet, dass die Zahlenfolgen der numerischen Näherungswerte aufklingen, obwohl das physikalische Systemmodell stabil ist. Die erforderlichen kleinen Schrittweiten führen zu unvertretbar langen Rechenzeiten. Ab einer gewissen Grenze des Verhältnisses zwischen kleinsten und größten Zeitkonstanten des Systems wird, auch wegen des Rundungsfehlers, kein numerisches Ergebnis mehr erhalten.

Bei steifen Systemen haben *implizite* Integrationsverfahren Vorteile, da sie sehr große numerische Stabilitätsbereiche aufweisen. Zwar ist der Rechenauf-

wand pro Integrationsschritt gegenüber expliziten Verfahren deutlich größer, weil in jedem Schritt ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen ist. Bei steifen Systemen lohnt sich dies jedoch wegen der möglichen größeren Schrittweiten und weil oft überhaupt nur auf diesem Weg numerische Lösungen erhalten werden können. Die Erhöhung der Schrittweite führt zu größeren Diskretisierungsfehlern, die sich hier aber vor allem bei den „schnellen" und kaum bei den „langsamen" Lösungsanteilen auswirken und bei mechanischen Systemen meistens in Kauf genommen werden können.

5.7.2 Differential-algebraische Gleichungen

In Abschnitt 5.3.5 wurden die Bewegungsgleichungen in voneinander abhängigen Koordinaten als differential-algebraische Gleichungen der Form (5.63) aufgestellt. Durch Auuflösen des linearen Gleichungssystems (5.65) nach den Beschleunigungen wurde das System gewöhnlicher Differentialgleichungen (5.71) in den voneinander abhängigen Koordinaten $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{v}$ erhalten,

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}(t_0) \\ \boldsymbol{v}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_0 \\ \boldsymbol{v}_0 \end{bmatrix}. \tag{5.208}$$

In (5.208) sind die Bindungen auf Beschleunigungsebene, jedoch nicht auf Lage- und Geschwindigkeitsebene, berücksichtigt. Die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{r}_0$, $\boldsymbol{v}_0$ zum Zeitpunkt t_0 müssen daher so gewählt werden, dass sie mit den Bindungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene konsistent sind,

$$\boldsymbol{g}(t_0) \equiv \boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_0, t_0) = \boldsymbol{0}\,, \tag{5.209}$$

$$\dot{\boldsymbol{g}}(t_0) \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_0, t_0)\,\boldsymbol{v}_0 + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r}_0, t_0) = \boldsymbol{0}\,. \tag{5.210}$$

Zwischen der Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen in unabhängigen Koordinaten (5.203) und in abhängigen Koordinaten (5.208) besteht ein grundlegender Unterschied in der Wirkung des numerischen Diskretisierungsfehlers, der in Abb. 5.16 für eine skleronome Bindung $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$ qualitativ dargestellt ist. Bei der numerischen Integration von (5.203) tritt der Fehler in den Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}(t)$ auf. Die daraus berechneten Näherungen der Bewegung $\boldsymbol{r}_{\text{num}}(t)$ sind dann ebenfalls fehlerbehaftet. Sie erfüllen aber wegen der in den Bewegungsgleichungen berücksichtigten expliziten Bindungen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{q})$ stets die Bindungen $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}$, siehe Abb. 5.16 a.

In den Differentialgleichungen (5.208) sind die Bindungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene dagegen nicht berücksichtigt. Auch wenn die numerische Integration mit den konsistenten Anfangsbedingungen (5.209), (5.210) gestartet wird, werden die Bindungen wegen des Diskretisierungsfehlers verletzt, und es tritt eine *numerische Drift* gemäß Abb. 5.16 b auf. Die Ursache dieser Instabilität liegt darin, dass bei der numerischen Integration des Differentialgleichungssystems (5.208) die dort berücksichtigten Residuen der

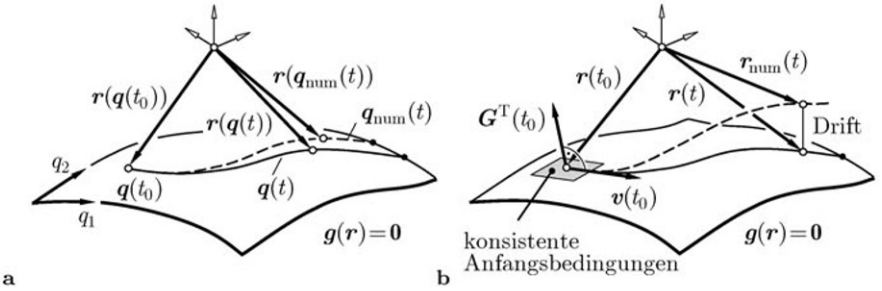


Abb. 5.16 Auswirkungen des Diskretisierungsfehlers bei der numerischen Integration von Bewegungsgleichungen. **a** Gewöhnliche Differentialgleichungen in Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$: Bindungen bleiben erfüllt. **b** Differential-algebraische Gleichungen: Bindungsverletzung durch numerische Drift

Bindungen auf Beschleunigungsebene $\ddot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{G}\,\dot{\boldsymbol{v}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}$ ausgehend von den Anfangswerten $\boldsymbol{g}(t_0)$ und $\dot{\boldsymbol{g}}(t_0)$ zeitlich integriert werden,

$$\ddot{\boldsymbol{g}}(t) \overset{\int \cdot \,\mathrm{d}t}{\longrightarrow} \dot{\boldsymbol{g}}(t) = \ddot{\boldsymbol{g}}\,t + \dot{\boldsymbol{g}}(t_0) \overset{\int \cdot \,\mathrm{d}t}{\longrightarrow} \boldsymbol{g}(t) = \tfrac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{g}}\,t^2 + \dot{\boldsymbol{g}}(t_0)\,t + \boldsymbol{g}(t_0)\,. \quad (5.211)$$

Bei exakt erfüllten Beschleunigungsbindungen $\ddot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{0}$ und konsistenten Anfangsbedingungen $\boldsymbol{g}(t_0) = \boldsymbol{0}$ und $\dot{\boldsymbol{g}}(t_0) = \boldsymbol{0}$ ist $\boldsymbol{g}(t) \equiv \boldsymbol{0}$. Ein kleiner numerischer Fehler in der Berechnung des Residuums der Beschleunigungsbindung $|\ddot{\boldsymbol{g}}| = \epsilon_a$ führt damit zu einem linear ansteigenden Fehler im Residuum der Geschwindigkeitsbindung $\dot{\boldsymbol{g}}(t)$ und einen quadratisch ansteigenden Fehler im Residuum der Lagebindung $\boldsymbol{g}(t)$. Ein zusätzlicher, linear ansteigender Fehleranteil entsteht durch nicht konsistente Anfangsbedingungen auf Geschwindigkeitsebene $\dot{\boldsymbol{g}}(t_0) \neq \boldsymbol{0}$.

Die Drift kann mit Hilfe einer *numerischen Stabilisierung* begrenzt werden. Zwei typische Methoden werden kurz beschrieben.

Stabilisierung nach Baumgarte [7] Das Gleichungssystem (5.65) wird um stabilisierende Zusatzterme erweitert, die bei Verletzung der Bindungen durch fiktive Feder- und Dämpferkräfte das System wieder auf die Bindungen zurückführen, siehe Abb. 5.17 a. An die Stelle der zweiten Zeitableitung der Bindungen $\ddot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{0}$ tritt die Bedingung

$$\ddot{\boldsymbol{g}} + 2\,\alpha\,\dot{\boldsymbol{g}} + \beta^2\,\boldsymbol{g} = \boldsymbol{0} \qquad \text{mit} \qquad \ddot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{G}\,\dot{\boldsymbol{v}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}\,. \quad (5.212)$$

Die j-te Komponente von (5.212) entspricht damit einem Feder-Masse-Schwinger mit der Eigenkreisfrequenz β und der Abklingkonstante α. Asymptotisch stabiles Verhalten liegt für $\alpha > 0$ vor. Günstig ist die Festlegung des aperiodischen Grenzfalls mit dem Lehrschen Dämpfungsmaß $D = \frac{\alpha}{\beta} = 1$, also $\alpha = \beta$.

Das lineare Gleichungssystem (5.65) wird ersetzt durch

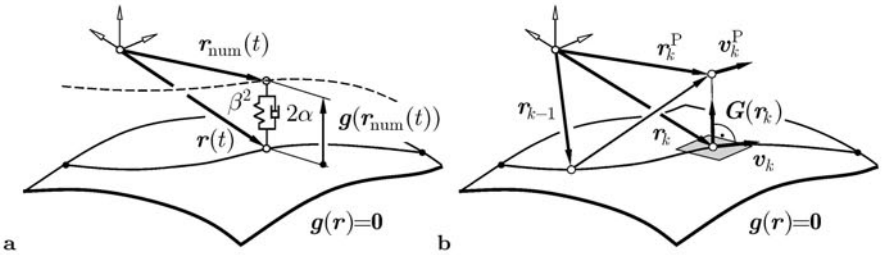


Abb. 5.17 Numerische Stabilisierung. **a** Stabilisierung nach BAUMGARTE [7]. **b** Stabilisierung durch Projektion

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{v}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}} + 2\,\alpha\,\dot{\boldsymbol{g}} + \beta^2\,\boldsymbol{g} \end{bmatrix}. \tag{5.213}$$

mit den Residuen der Bindungen auf Lageebene $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t)$ und Geschwindigkeitsebene $\dot{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r},t)\,\boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r},t)$. Die zusätzlichen Terme in (5.212) können als ein PD-Regler für das Residuum der Bindung interpretiert werden. Mit den aus (5.213) berechneten Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$ kann dann das Differentialgleichungssystem (5.208) mit einem Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen integriert werden.

Typischerweise oszillieren die Bindungsresiduen g_i während der Integration um den exakten Wert $g_i = 0$. Diese Dynamik kann die interessierende Dynamik des mechanischen Systemmodells verfälschen. Die Eigenkreisfrequenz β sollte möglichst kleiner als die kleinste Eigenfrequenz des Systemmodells sein. Zu kleine Werte führen aber zu einem steifen System. Insgesamt gibt es keine allgemein gültigen Regeln für die Festlegung von α und β.

Stabilisierung durch Projektion Eine numerisch genaue Einhaltung der Bindungen kann erreicht werden, indem der Fehler in den Bindungen nach jedem Integrationsschritt durch eine geeignete Projektion auf die Bindungsmannigfaltigkeit korrigiert wird, siehe Abb. 5.17 b. Die nach einem Integrationsschritt (Prädiktorschritt) im Zeitintervall $[\,t_{k-1}, t_k\,]$ berechneten Lagegrößen $\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{P}}$ und Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{P}}$ erfüllen die Bindungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene wegen der numerischen Drift i.Allg. nicht. In einem ersten Schritt werden die Lagegrößen auf die Bindungsmannigfaltigkeit $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ projiziert. Wegen $\dim(\boldsymbol{g}) \leq \dim \boldsymbol{r}$ ist die Projektion nicht eindeutig. Das Prinzip ist, den Punkt $\boldsymbol{r}_k$ auf der Bindungsmannigfaltigkeit zu berechnen, der den kürzesten Abstand zum Näherungswert $\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{P}}$ hat. Dies führt auf das Optimierungsproblem

$$\left.\begin{aligned} &\left\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_k^{\mathrm{P}}\right\|_2 \stackrel{!}{=} \min_{\boldsymbol{r}_k} \\ &\boldsymbol{g}(\boldsymbol{r}_k, t_k) = \boldsymbol{0} \qquad \text{(Nebenbedingung)} \end{aligned}\right\}, \tag{5.214}$$

mit der quadratischen Norm des Fehlervektors $\left\|\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_k^{\mathrm{P}}\right\|_2 = (\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{r}_k^{\mathrm{P}})^2$. Die Lösung dieses Optimierungsproblems erfolgt i.Allg. iterativ.

In einem zweiten Schritt wird die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{P}}$ auf den Wert $\boldsymbol{v}_k$ korrigiert, der die Geschwindigkeitsbindung $\dot{\boldsymbol{g}} \equiv \boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_k, t_k)\,\boldsymbol{v}_k + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r}_k, t_k) = \boldsymbol{0}$ im berechneten Projektionspunkt $\boldsymbol{r}_k$ erfüllt. Dies führt auf das in $\boldsymbol{v}_k$ lineare Optimierungsproblem

$$\left.\begin{aligned} &\left\|\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_k^{\mathrm{P}}\right\|_2 \stackrel{!}{=} \min_{\boldsymbol{v}_k} \\ &\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}_k, t_k)\,\boldsymbol{v}_k + \bar{\boldsymbol{\gamma}}(\boldsymbol{r}_k, t_k) = \boldsymbol{0} \qquad \text{(Nebenbedingung)} \end{aligned}\right\} . \tag{5.215}$$

Eine genaue Beschreibung der Lösungsverfahren geben z.B. Eich-Söllner und Führer [20]. Die Projektionsmethode kann in Verbindung mit Ein- und Mehrschrittverfahren angewandt werden.

5.7.3 Nichtlineare Gleichungssysteme

Bei der Formulierung der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten werden die abhängigen Koordinaten durch die Minimalkoordinaten ausgedrückt. Auf Lageebene ist hierzu das nichtlineare Gleichungssystem der impliziten Bindungen und der Definitionsgleichungen der Minimalkoordinaten (5.34) zu lösen, was i.Allg. nur numerisch möglich ist.

Die allgemeine Aufgabe lautet, für eine Vektorfunktion

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \begin{bmatrix} g_1(y_1, \ldots, y_m) \\ \vdots \\ g_m(y_1, \ldots, y_m) \end{bmatrix} \tag{5.216}$$

einen Lösungsvektor (Nullstelle) $\boldsymbol{y}^*$ so zu bestimmen, dass $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{0}$ erfüllt ist. Das numerische Standardverfahren ist das Verfahren von Newton-Raphson.[17] Es umfaßt die folgenden Schritte, siehe Abb. 5.18:

1. Festlegung (Abschätzung) eines Startwerts $\boldsymbol{y}^{(0)}$.
2. Linearisierung der Funktion $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ an der Stelle $\boldsymbol{y}^{(0)}$, also

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) \approx \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^{(0)}) + \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{y}^{(0)}} \Delta \boldsymbol{y} \,, \tag{5.217}$$

und Berechnung der Nullstelle der linearisierten Funktion (5.217) durch Auflösen des linearen Gleichungssystems mit der (m,m)-Funktionalmatrix $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}^{(0)})$ der Funktion $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ an der Stelle $\boldsymbol{y}^{(0)}$

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}^{(0)})\,\Delta \boldsymbol{y}^{(0)} = -\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^{(0)}) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}^{(0)}) = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}}\right|_{\boldsymbol{y}^{(0)}} \tag{5.218}$$

[17] Joseph Raphson, * um 1648 in Middlesex, England, † um 1715 in England

nach dem Zuwachs $\Delta \boldsymbol{y}^{(0)}$. Die Nullstelle von (5.217) lautet dann

$$\boldsymbol{y}^{(1)} = \boldsymbol{y}^{(0)} + \Delta \boldsymbol{y}^{(0)} \ . \tag{5.219}$$

3. Überprüfen der Abbruchbedingung (Schranke ϵ)

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^{(k)})\| \leq \epsilon \ . \tag{5.220}$$

Es gilt z.B. die euklidische Norm $\|\boldsymbol{g}\| = \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{g}$.

Die Schritte 2 und 3 werden wiederholt, bis die Abbruchbedingung (5.220) erfüllt ist. Zur Verringerung des Berechnungsaufwands kann die Funktionalmatrix $\boldsymbol{G}$ häufig ohne wesentliche Konvergenzverschlechterung über mehrere Iterationsschritte beibehalten werden.

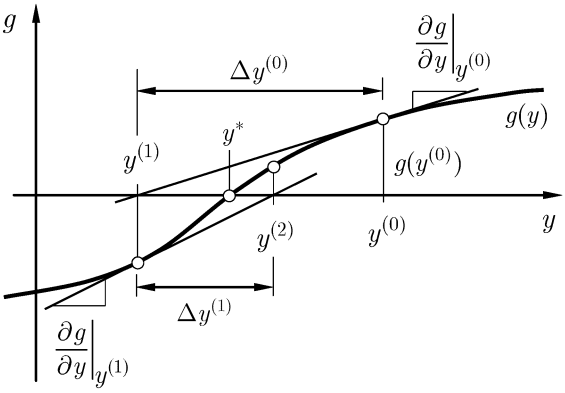


Abb. 5.18 Zwei Iterationsschritte des Newton-Raphson-Verfahrens, dargestellt für eine skalare Funktion $g(y)$

Bei der numerischen Integration der Bewegungsgleichungen tritt die Iteration bei der Berechnung der rechten Seite der Differentialgleichung auf. Als Startwert $\boldsymbol{y}^{(0)}$ wird dann jeweils der Wert aus dem vorangehenden Iterationsschritt verwendet.

Implizite Bindungsgleichungen besitzen i.Allg. mehrere Nullstellen. Beispiele sind die Schließbedingungen kinematischer Schleifen, die für verschiedene Konfigurationen des Systems erfüllt sind. Beispiele werden in den Abschnitten 8.1.3 (Tabelle 8.4), 8.6.2 (Abb. 8.17) und 8.7.2 (Abb. 8.22) betrachtet.

Die numerische Ermittlung *aller* Nullstellen der impliziten Schließbedingungen ist mit dem Newton-Raphson-Verfahren ohne Weiteres nicht möglich. Alle Lösungen der Schließbedingungen werden allerdings nur benötigt, wenn alle Zusammenbau-Konfigurationen eines Mechanismus oder alle Konfigurationen eines seriellen Roboters für eine gegebene Lage des Endeffektors gesucht sind. In diesen Fällen ist es daher besonders vorteilhaft, wenn analytische Formulierungen der expliziten Schließbedingungen zur Verfügung stehen, wie es in den angegebenen Beispielen der Fall ist.

Kapitel 6
Bindungen in Mehrkörpersystemen

Die Bindungen in Mehrkörpersystemen gehen auf die Gelenke zurück, welche die Körper miteinander verbinden. In diesem Kapitel werden die Bindungen für allgemeine Gelenke und für typische spezielle Gelenktypen formuliert.

Hierzu werden zunächst in Abschnitt 6.1 häufig verwendete Gelenktypen beschrieben. Die Kopplungen der Körper durch Gelenke legen gemäß Abschnitt 6.2 den topologischen Aufbau als offenes System mit Baumstruktur oder als geschlossenes System mit kinematischen Schleifen fest. Die Gesamtheit aller Bindungen der Gelenke definiert gemäß Abschnitt 6.3 die kinematische und statische Bestimmtheit eines Mehrkörpersystems. In den Abschnitten 6.4 und 6.5 werden die Bindungen der Gelenke sowohl in impliziter als auch in expliziter Form aufgestellt. Die sich daraus ergebenden Orthogonalitätsbeziehungen zwischen den freien und gesperrten Raumrichtungen führen in Abschnitt 6.1 auf die dazu gehörenden impliziten und expliziten Reaktionsbedingungen. Die erweiterten Formulierungen für Gelenke mit nichtholonomen Bindungen werden in Abschnitt 6.7 gezeigt. Abschließend gibt Abschnitt 6.8 eine Übersicht über die Verwendung der impliziten und expliziten Gelenkbindungen und Reaktionsbedingungen in den verschiedenen Formulierungen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen.

6.1 Gelenke in Mehrkörpersystemen

Ein Gelenk verbindet jeweils zwei Körper eines Mehrkörpersystems so, dass sie in dauernder gegenseitiger Berührung gehalten werden und dabei relativ zueinander beweglich sind. Damit stellt ein Gelenk zweiseitige Bindungen zwischen den Körpern her. Die geometrische Form der Berührelemente des Gelenks definiert die freien und gesperrten Richtungen der relativen Bewegung der Körper. Im Folgenden werden Gelenke betrachtet, welche durch holonome oder nichtholonome, zweiseitige Bindungen modelliert werden können. Zusätzlich können Gelenkbindungen skleronom oder rheonom sein.

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_6, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

6.1.1 Gelenke mit holonomen skleronomen Bindungen

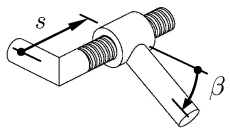
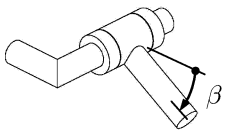
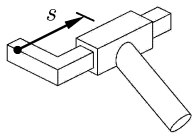
Skleronome Gelenkbindungen werden durch die zeitlich nicht veränderlichen geometrischen Formen der Berührelemente des Gelenks definiert. Ein Gelenk mit $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sk}}$ holonomen, skleronomen Bindungen lässt relative Bewegungen der beiden Körper mit dem Freiheitsgrad

$$f = 6 - b \qquad \text{mit} \qquad b = b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sk}} \tag{6.1}$$

zu, die durch f Lagekoordinaten, die relativen Gelenkkoordinaten, beschrieben werden können. Grenzfälle sind die starre Verbindung mit $b = 6$ bzw. $f = 0$ und die freie Relativbewegung mit $b = 0$ bzw. $f = 6$.

Ein Gelenk mit dem Freiheitsgrad $f = 1$ ist das in Tabelle 6.1 gezeigte Schraubgelenk (**H**elical joint). Wird der relative Drehwinkel β als Gelenkkoordinate definiert, so ergibt sich bei einer konstanten Schraubensteigung h die relative Verschiebung $s = h\,\beta$. Sonderfälle des Schraubgelenks sind das Drehgelenk (**R**evolute joint) mit der Steigung $h = 0$ und das Schubgelenk (**P**rismatic joint) mit der Steigung $h = \infty$.

Tabelle 6.1 Gelenke mit dem Freiheitsgrad $f = 1$

Schraubgelenk (**H**elical joint)	Drehgelenk (**R**evolute joint)	Schubgelenk (**P**rismatic joint)
		
$s = h\,\beta$ (Steigung h)	Steigung $h = 0$	Steigung $h = \infty$

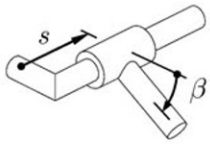
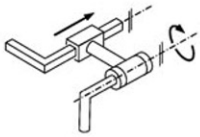
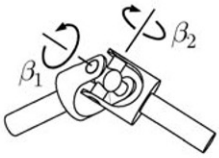
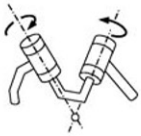
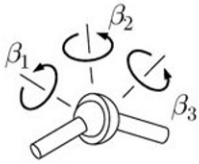
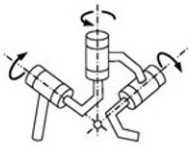
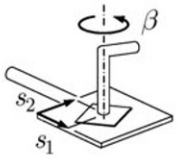
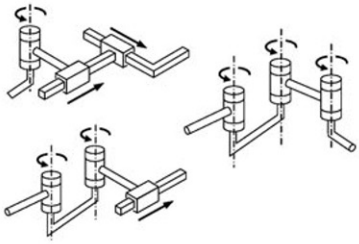
Zahlreiche Gelenke mit dem Freiheitsgrad $f > 1$ lassen sich aus Anordnungen hintereinandergeschalteter Dreh- und Schubgelenke aufbauen. Tabelle 6.2 zeigt exemplarisch das Dreh-Schubgelenk (**C**ylindrical joint), das Kardangelenk (**U**niversal Joint, Hooke[1] joint), das Kugelgelenk (**S**pherical joint) und das ebene Gelenk (**E**ben). Die Ersatzanordnungen gelten aber u.U. nicht im gesamten Bewegungsbereich des Gelenks. Beispielsweise entsprechen drei Drehgelenke mit sich gemeinsam in einem Punkt schneidenden Achsen nur dann einem Kugelgelenk, wenn die Achsen nicht in einer Ebene liegen.

Als eine weitere Klassifizierung werden nach Reuleaux[2] entsprechend der Art der Körperberührung *niedrige Elementenpaare* (Standardgelenke, *lower pairs*) und *höhere Elementenpaare* (*higher pairs*) unterschieden.

[1] Robert Hooke, *1635 auf Isle of Wright, †1703 in London

[2] Franz Reuleaux, *1829 in Eschweiler, †1905 in Berlin

Tabelle 6.2 Aus Dreh- und Schubgelenken zusammensetzbare Gelenke

Gelenk	f	Darstellung	Ersatzanordnungen
Drehschub-gelenk (**C**ylindric)	2		
Kardan-gelenk (**U**niversal)	2		
Kugel-gelenk (**S**pherical)	3		
Ebenes Gelenk (**E**ben)	3		

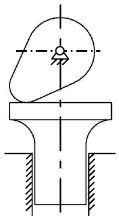
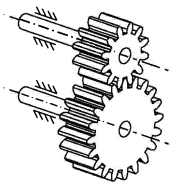
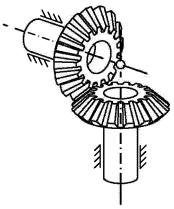
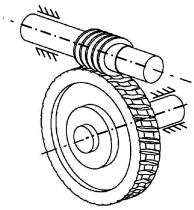
Niedrige Elementenpaare Die Körper berühren sich entlang von Flächen. Es werden die in Tabelle 6.3 aufgeführten sechs niedrigen Elementenpaare unterschieden.

Tabelle 6.3 Niedrige Elementenpaare

Gelenk	**Symbol**	**Berührfläche**
Schraubgelenk	H	Schraubenfläche
Drehgelenk	R	Rotationsfläche
Schubgelenk	P	Mantelfläche eines Prismas
Dreh-Schubgelenk	C	Zylindermantel
Kugelgelenk	S	Kugeloberfläche
Ebenes Gelenk	E	Ebene

Höhere Elementenpaare Die Körper berühren sich entlang von Linien oder Punkten. Beispiele sind in Tabelle 6.4 dargestellt.

Tabelle 6.4 Beispiele höherer Elementenpaare

Kurvengetriebe (eben)	Stirnradverzahnung (eben)	Kegelradverzahnung (sphärisch)	Schneckenverzahnung (räumlich)
			

6.1.2 Gelenke mit holonomen rheonomen Bindungen

Bei der Modellbildung besteht häufig die Aufgabenstellung, dass die zeitlichen Verläufe einzelner Gelenkkoordinaten $\beta(t)$ vorgegebenen Funktionen folgen sollen. Die Zeitfunktionen können dann durch eine rheonome Bindung vorgegeben werden.

Ein Gelenk mit b holonomen Bindungen, bestehend aus $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sk}}$ skleronomen und $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{rh}}$ rheonomen Bindungen, besitzt den Freiheitsgrad

$$f = 6 - b \qquad \text{mit} \qquad b = b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{sk}} + b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{rh}} \,. \tag{6.2}$$

Ein solches Gelenk hat f freie und $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{rh}}$ rheonom geführte Gelenkkoordinaten.

6.1.3 Gelenke mit nichtholonomen Bindungen

Ein Gelenk mit holonomen und nichtholonomen Bindungen weist i.Allg. b_{L} geometrische (holonome) Bindungen und $b > b_{\mathrm{L}}$ kinematische Bindungen auf. Das Gelenk besitzt dann den Lage-Freiheitsgrad

$$f_{\mathrm{L}} = 6 - b_{\mathrm{L}} \tag{6.3}$$

und den (Geschwindigkeits-)Freiheitsgrad

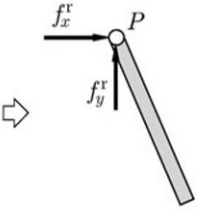
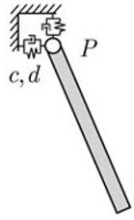
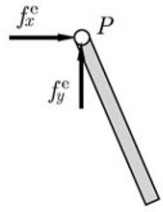
$$f = 6 - b \; < f_{\mathrm{L}} \,. \tag{6.4}$$

6.1.4 Zur Modellierung von Gelenken

Die Art und Weise, wie eine gelenkige Verbindung zweier Körper eines Mehrkörpersystems modelliert wird, hängt von den getroffenen Annahmen ab, beeinflußt aber auch den Aufwand bei der Modellierung und für die numerische Simulation. Dies wird an zwei Beispielen erläutert.

Zur Modellierung von skleronomen Gelenken Als ein Beispiel wird in Tabelle 6.5 ein drehbar gelagerter Stab in der Ebene betrachtet. Wird die Lagerung durch ein ideales Drehgelenk modelliert, so ist die Lage des Stabendpunktes P durch zwei skleronome Bindungen geometrisch exakt festgelegt. Der Stab hat damit den Freiheitsgrad $f = 1$. Als Schnittkräfte treten die Reaktionskräfte f_x^{r} und f_y^{r} auf.

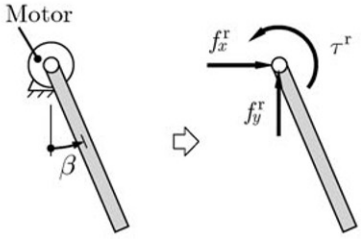
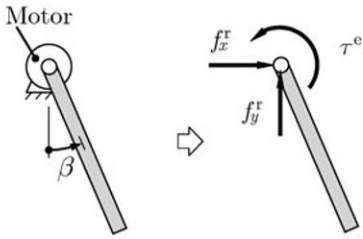
Tabelle 6.5 Modelle der drehbaren Aufhängung eines Stabes in der Ebene

Lagerung durch ein Drehgelenk:		Viskoelastische Aufhängung:	
$\rightarrow$ *Punkt P skleronom gebunden*		$\rightarrow$ *Punkt P nicht gebunden*	
			
Freiheitsgrad $f = 1$	Reaktionskräfte f_x^{r}, f_y^{r}	Freiheitsgrad $f = 3$	Eingeprägte Kräfte f_x^{e}, f_y^{e}

Alternativ kann die Lage des Punktes P durch zwei viskoelastische Kraftelemente (Federsteifigkeit c, Dämpfungskonstante d) gefesselt werden. Die Lage des Stabes ist dann geometrisch nicht beschränkt, und er hat in der Ebene den Freiheitsgrad $f = 3$. Die Schnittkräfte sind nun die eingeprägten Federkräfte f_x^{e} und f_y^{e}. Der Vorteil dieses Modells gegenüber dem Bindungsmodell ist die Möglichkeit, Steifigkeiten der Lagerung abzubilden. Durch Vergrößerung der Federsteifigkeit, also $c \rightarrow \infty$, wird der Übergang in das Bindungsmodell erreicht. Große Federsteifigkeiten und Dämpfungskonstanten führen allerdings zu steifen Differentialgleichungen, die numerisch weniger günstig sind, vgl. Abschnitt 5.7.1. Sofern der Einfluss von Gelenksteifigkeiten vernachlässigt werden kann, ist daher das Bindungsmodell zu bevorzugen.

Zur Modellierung von rheonomen Gelenken Als ein Beispiel wird in Tabelle 6.6 ein in einem Drehgelenk gelagerter Stab betrachtet, dessen Drehwinkel $\beta(t)$ durch einen geregelten Antriebsmotor dem gegebenen zeitlichen Verlauf $\beta_{\mathrm{soll}}(t)$ nachgeführt wird. Der Regler berechnet aus der Differenz

Tabelle 6.6 Modelle eines Drehantriebs

Ideal lagegeregelter Motor erzeugt gewünschte Bewegung $\beta(t) = \beta_{\text{soll}}(t)$:	Momentgeregelter Motor erzeugt gewünschtes Moment $\tau^{\text{e}}(t)$:
$\rightarrow$ *Winkel* $\beta(t)$ *rheonom gebunden*	$\rightarrow$ *Winkel* $\beta(t)$ *nicht gebunden*
	
Freiheitsgrad $f = 0$	Freiheitsgrad $f = 1$
Reaktionsmoment τ^{r}	Eingeprägtes Moment τ^{e}

der Ist- und Sollgrößen und gegebenenfalls weiterer Systeminformationen das hierzu erforderliche Motormoment $\tau(t)$.

Unter der Annahme einer ideal genauen Regelung kann eine rheonome Bindung für den Drehwinkel β modelliert werden,

$$g(\beta, t) \equiv \beta - \beta_{\text{soll}}(t) = 0\,. \tag{6.5}$$

Diese Bindung legt zusammen mit den beiden skleronomen Bindungen des Drehgelenks die Lage des Stabes zu jedem Zeitpunkt t vollständig fest. Der Freiheitsgrad des Systems ist daher $f = 0$. Das durch den idealen Regler berechnete Motormoment ist das zu der Bindung (6.5) gehörende Reaktionsmoment τ^{r}. Ein Sonderfall ist der Antrieb einer Maschine mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Dies wird häufig bereits ohne zusätzliche Regelung näherungsweise dadurch erreicht, dass das Trägheitsmoment des Antriebsmotors groß ist gegenüber den auf die Antriebswelle reduzierten, ungleichförmig bewegten Massen.

Soll dagegen das dynamische Verhalten des geregelten Antriebs modelliert werden, so muss der Gelenkwinkel β als eine freie Koordinate definiert werden. Der Stab hat dann den Freiheitsgrad $f = 1$. Das Antriebsmoment ist ein eingeprägtes Moment τ^{e}, das durch den Regler aus den gemessenen Lage- und Geschwindigkeitsgrößen des Systems berechnet wird. Der Verlauf des Gelenkwinkels $\beta(t)$ ergibt sich unter den Wirkungen des Antriebsmoments und der weiteren am System wirkenden Kräfte und Momente.

Soll mit diesem Modell eine gegebene Bewegung $\beta_{\text{soll}}(t)$ des Systems simuliert werden, so muss ein Regler entworfen und parametriert werden, selbst wenn das Verhalten der Regelung nicht interessiert. Das rheonome Bindungsmodell hat damit den Vorteil, dass das Verhalten des Systems bei einer vorgegebenen Bewegung ohne Reglerentwurf unmittelbar simuliert werden kann.

6.2 Klassifizierungen von Mehrkörpersystemen

Ein System von Körpern, die durch Gelenke miteinander verbunden sind, wird als kinematisch zusammenhängendes Mehrkörpersystem bezeichnet. Ein kinematisch nicht zusammenhängendes Mehrkörpersystem kann durch Einführung von Gelenken mit dem Freiheitsgrad $f = 6$ formal in ein kinematisch zusammenhängendes System überführt werden (Abb. 6.1). Solche Gelenke können z.B. durch Hintereinanderschaltung von drei senkrecht aufeinander stehenden Schubgelenken (3P) und einem Kugelgelenk (S) aufgebaut werden.

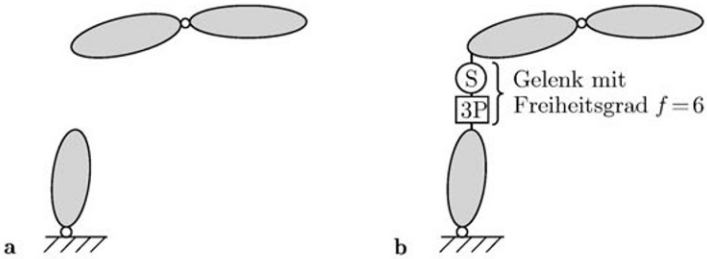


Abb. 6.1 Mehrkörpersysteme. **a** Kinematisch nicht zusammenhängend. **b** Übergang auf ein kinematisch zusammenhängendes System durch ein Gelenk mit dem Freiheitsgrad $f = 6$

Im Folgenden werden zwei für die Modellbildung wichtige Klassifizierungen von Mehrkörpersystemen betrachtet.

6.2.1 Topologische Klassifizierung

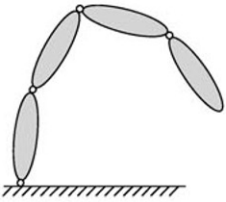
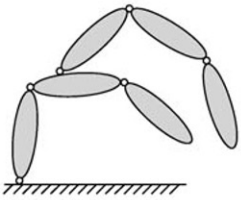
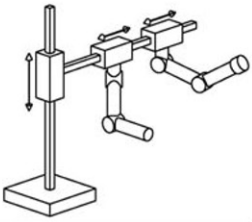
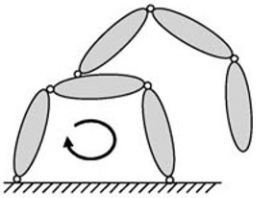
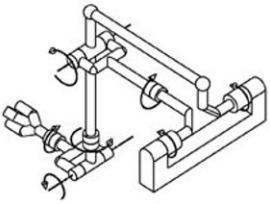
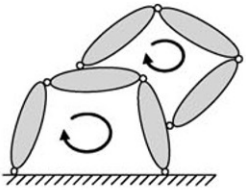
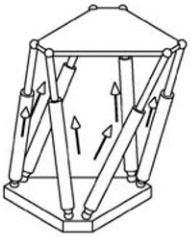
Betrachtet wird ein mit dem raumfesten Bezugssystem $\mathcal{K}_0$ kinematisch zusammenhängendes Mehrkörpersystem mit n_G Gelenken und n_K starren Körpern, wobei das raumfeste Bezugssystem nicht als Körper gezählt wird. Es werden zwei topologische Grundprinzipien unterschieden (Tabelle 6.7).

Offene Mehrkörpersysteme Bei einem offenen Mehrkörpersystem ist der Weg von jedem Körper zu jedem beliebigen anderen Körper eindeutig bestimmt. Insbesondere besteht damit ein eindeutiger Weg vom raumfesten Bezugssystem, der im Folgenden so genannten *Baumwurzel*, hin zu jedem Körper des Systems. Bei einem Schnitt an einem Gelenk zerfällt ein offenes Mehrkörpersystem in zwei Teile. Die Anzahl der Gelenke stimmt mit der Anzahl der Körper überein,

$$n_\mathrm{G} = n_\mathrm{K} \,. \tag{6.6}$$

Offene Mehrkörpersysteme können eine Kettenstruktur oder eine Baumstruktur aufweisen.

Tabelle 6.7 Topologische Klassifizierung von Mehrkörpersystemen

	Prinzip	Beispiel
Offene Mehrkörpersysteme n_K Körper $n_G = n_K$ Gelenke	Kettenstruktur 	Knickarm-Roboter
	Baumstruktur 	Mehrarm-Roboter 
Geschlossene Mehrkörpersysteme n_K Körper $n_G > n_K$ Gelenke $n_S = n_G - n_K$ Schleifen	teilweise geschlossenes System 	Scherenarm-Manipulator 
	vollständig geschlossenes System 	Hexapod-Plattform 

Geschlossene Mehrkörpersysteme Werden in einem offenen Mehrkörpersystem weitere Gelenke eingefügt, so entsteht ein geschlossenes Mehrkörpersystem. Mit jedem weiteren Gelenk entsteht jeweils eine unabhängige kinematische Mehrkörperschleife. Ausgehend von (6.6) gilt damit für die Anzahl unabhängiger kinematischer Schleifen

$$n_{\mathrm{S}} = n_{\mathrm{G}} - n_{\mathrm{K}} \ . \tag{6.7}$$

Weiterhin lassen sich teilweise und vollständig geschlossene Mehrkörpersysteme unterscheiden. Ein teilweise geschlossenes Mehrkörpersystem besitzt offene Teilsysteme. Bei Schnitten an einem Gelenk der offenen Teilsysteme zerfällt das System in zwei Teile. Bei einem vollständig geschlossenen Mehrkörpersystem ist jeder Körper Teil einer Mehrkörperschleife. Es gibt kein Gelenk, an dem das System in zwei Teile geschnitten werden kann.

Eine vollständig geschlossene kinematische Kette mit einem raumfesten Körper (Gestell) wird auch als Mechanismus bezeichnet.

6.2.2 Kinematische Klassifizierung

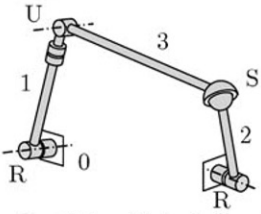
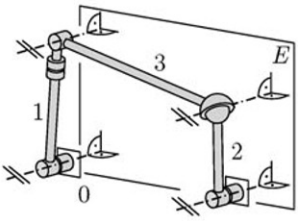
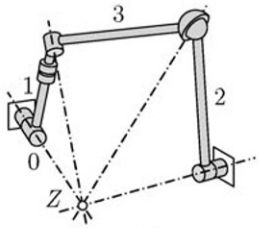
Nach der Art der Bewegung der Körper gemäß Tabelle 3.1 lassen sich Mehrkörpersysteme in räumliche, ebene und sphärische Systeme einteilen. Diese Einteilung kann nicht aus der topologischen Struktur oder den Gelenkarten abgeleitet werden, sondern hängt von den Abmessungen der Körper und der Gelenke ab.

Als ein Beispiel wird das in Tabelle 6.8 gezeigte Gelenkviereck betrachtet. Der Mechanismus besteht aus den zwei drehbar im Gestell 0 gelagerten Hebeln 1 und 2, deren Enden mit der Koppelstange 3 über ein Kardangelenk (U) und ein Kugelgelenk (S) verbunden sind. Mit $n_{\mathrm{K}} = 3$ Körpern, $n_{\mathrm{G}} = 4$ Gelenken und damit $n_{\mathrm{S}} = n_{\mathrm{G}} - n_{\mathrm{K}} = 1$ kinematischen Schleife hat das Gelenkviereck gemäß des im folgenden Abschnitt hergeleiteten GRÜBLER-KUTZBACH-Kriteriums (6.14) den Freiheitsgrad $f = 1$. Bei zueinander windschiefer Lage der beiden gestellfesten Drehachsen führt die Koppelstange eine räumliche Bewegung aus. Es liegt ein *räumliches Mehrkörpersystem* vor.

Sind die beiden gestellfesten Drehachsen und eine Drehachse des Kardangelenks parallel, so bewegen sich alle Körperpunkte parallel zu einer Ebene E, die senkrecht auf den gestellfesten Drehachsen steht. Im Kugelgelenk tritt nur eine Drehung um die senkrecht zu E stehende Achse auf. Es liegt ein *ebenes Mehrkörpersystem* vor.

Schneiden sich die beiden gestellfesten Drehachsen und eine Drehachse des Kardangelenks in einem Punkt Z, so bewegen sich alle Körperpunkte auf Kugeloberflächen um den Punkt Z bzw. alle Körper führen Drehungen um den Fixpunkt Z aus. Im Kugelgelenk tritt nur eine Drehung um die Achse durch Z auf. Es liegt ein *sphärisches Mehrkörpersystem* vor.

Tabelle 6.8 Kinematische Klassifizierung von Mehrkörpersystemen

	Merkmale	Beispiel
räumliches Mehrkörpersystem	• räumliche Bewegungen der Körper	 räumliches Gelenkviereck
ebenes Mehrkörpersystem	• alle Körperpunkte bewegen sich parallel zu einer Bewegungsebene E • nur Verschiebungen parallel zu E und Drehungen um Achsen senkrecht zu E	 ebenes Gelenkviereck
sphärisches Mehrkörpersystem	• alle Körperpunkte bewegen sich auf Kugeloberflächen um den Fixpunkt Z • nur Drehungen um Achsen durch Z	 sphärisches Gelenkviereck

6.3 Statische und kinematische Bestimmtheit

6.3.1 Definitionen und Begriffe

Für ein räumliches Mehrkörpersystem mit

n_{K}	starren Körpern (ohne raumfestes Bezugssystem $\mathcal{K}_0$),
n_{G}	Gelenken mit jeweils dem Freiheitsgrad f_i und damit
$b_i = 6 - f_i$	kinematischen Gelenkbindungen gemäß (6.4)

wird in Abb. 6.2 die Anzahl der unbekannten Größen der Anzahl der verfügbaren Gleichungen gegenübergestellt.

Die Impuls- und Drallsätze liefern für jeden Körper jeweils sechs Gleichungen und damit insgesamt

$$f^{\mathrm{frei}} = 6\, n_{\mathrm{K}} \tag{6.8}$$

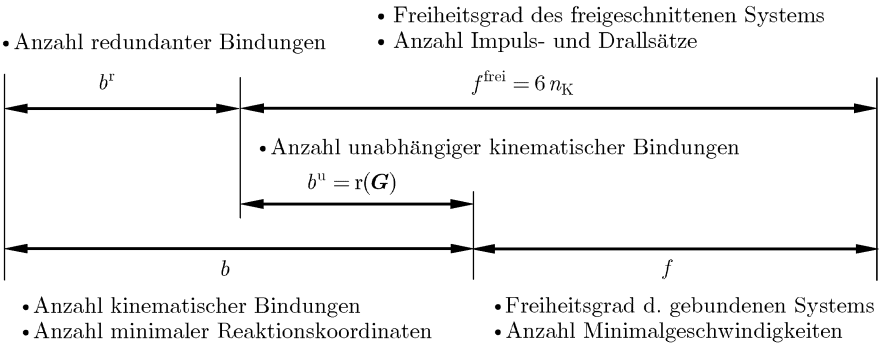


Abb. 6.2 Zur kinematischen und statischen Bestimmtheit gebundener Systeme

Gleichungen. Dies ist zugleich die Anzahl der Impuls- und Drallsätze der freigeschnittenen Körper und der Freiheitsgrad des freigeschnittenen Systems.

Anzahl Bindungen, statische Bestimmtheit Die Anzahl aller kinematischer Bindungen des Systems ist unter Berücksichtigung von (6.4)

$$b = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{G}}} b_i = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{G}}} (6 - f_i) \ . \tag{6.9}$$

Dies ist zugleich die Anzahl der minimalen Reaktionskoordinaten.

Die Anzahl voneinander unabhängiger kinematischer Bindungen b^{u} ist gleich dem Rang der — in (5.27) für holonome Massenpunktsysteme und in (5.117) für ein nichtholonomes System aufgestellten — Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$,

$$b^{\mathrm{u}} = \mathrm{r}(\boldsymbol{G}) \ . \tag{6.10}$$

Die Anzahl der unabhängigen kinematischen Bindungen b^{u} kann nicht größer sein als der Freiheitsgrad f^{frei} der freigeschnittenen Körper. Mit b^{u} aus (6.10) besitzt das System

$$b^{\mathrm{r}} = b - b^{\mathrm{u}} \tag{6.11}$$

redundante Bindungen. Es gilt

$b^{\mathrm{r}} = 0$: System ist statisch bestimmt,

$b^{\mathrm{r}} > 0$: System ist b^{r}-fach statisch unbestimmt (überbestimmt).

Im Fall redundanter Bindungen können die Reaktionskoordinaten mit Hilfe des Starrkörpermodells nicht eindeutig berechnet werden. Redundante Bindungen können nur bei geschlossenen Mehrkörpersystemen auftreten.

Anmerkung Der aus der Starrkörperstatik kommende Begriff der statischen Bestimmtheit wird hier auf die Kinetik verallgemeinert.

Freiheitsgrad, kinematische Bestimmtheit Mit f^{frei} aus (6.8) und b^{u} aus (6.10) ist der Freiheitsgrad des Systems

$$f = f^{\text{frei}} - b^{\text{u}} \qquad \text{bzw.} \qquad f = 6\,n_{\text{K}} - b^{\text{u}}\,. \tag{6.12}$$

Es gilt

$f = 0$: System ist kinematisch bestimmt, d.h. unbeweglich,
$f > 0$: System ist kinematisch unbestimmt, d.h. beweglich.

Sind alle Bindungen voneinander unabhängig, also $b = b^{\text{u}}$ (statisch bestimmtes System), so kann der Freiheitsgrad f in (6.12) mit (6.9) geschrieben werden als

$$f = 6\,n_{\text{K}} - \sum_{i=1}^{n_{\text{G}}} (6 - f_i) \tag{6.13}$$

bzw. mit der Anzahl der Schleifen $n_{\text{S}} = n_{\text{G}} - n_{\text{K}}$ aus (6.7)

$$f = \sum_{i=1}^{n_{\text{G}}} f_i - 6\,n_{\text{S}}\,. \tag{6.14}$$

Die Beziehung (6.14) wird als das GRÜBLER[3]-KUTZBACH[4]-Kriterium für den Freiheitsgrad eines statisch bestimmten Mehrkörpersystems bezeichnet. Bei holonomen Systemen liefert (6.14) zugleich den Lage-Freiheitsgrad $f_{\text{L}} = f$.

6.3.2 Freiheitsgrad statisch bestimmter Systeme

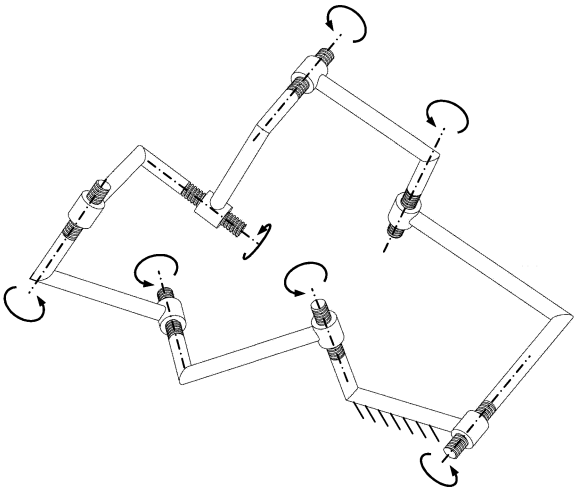
Anwendungen des GRÜBLER-KUTZBACH-Kriteriums (6.14) werden an Beispielen statisch bestimmter Mehrkörpersysteme mit holonomen skleronomen Gelenkbindungen gezeigt. Sind Gelenkkoordinaten rheonom geführt, so verringert sich der Freiheitsgrad um deren Anzahl.

7H-Mechanismus Der in Abb. 6.3 gezeigte 7H-Mechanismus besitzt sieben Schraubgelenke. Er kann als ein allgemeiner einschleifiger Mechanismus mit dem Freiheitsgrad $f = 1$ angesehen werden. Mechanismen mit dem Freiheitsgrad $f = 1$ werden auch als *zwangläufig* bezeichnet. Durch Spezialisierung der Schraubgelenke zu Dreh- oder Schubgelenken entsprechend Tabelle 6.1 kann eine Vielzahl von Mechanismen aufgebaut werden.

---

[3] MARTIN FÜRCHTEGOTT GRÜBLER , *1851 in Meerane, †1935 in Dresden

[4] FRANZ KARL KUTZBACH, *1875 in Trier, †1942 in Dresden



$$\left.\begin{array}{l} n_{\mathrm{K}} = 6 \\ n_{\mathrm{G}} = 7 \end{array}\right\} \overset{(6.7)}{\rightarrow} n_{\mathrm{S}} = 1$$

$$\sum_i f_i = 7 \overset{(6.14)}{\rightarrow} f = 1$$

Abb. 6.3 Kinematische Schleife mit sieben Schraubgelenken (7H-Mechanismus)

Räumliches Gelenkviereck Als ein Sonderfall eines 7H-Mechanismus besitzt das räumliche Gelenkviereck (RUSR-Mechanismus) in Abb. 6.4 sieben Drehgelenke (R). Die Achsen von zwei Drehgelenken schneiden sich in einem Punkt und bilden dadurch gemäß Tabelle 6.2 ein Kardangelenk (U). Die Achsen von drei weiteren Drehgelenken schneiden sich ebenfalls in einem gemeinsamen Punkt und bilden ein Kugelgelenk (S). Wird die Anzahl der Schleifen unter Berücksichtigung dieser zusammengesetzten Gelenke gemäß (6.7) ermittelt, so werden die mit $*$ gekennzeichneten Zwischenkörper der Gelenke nicht mitgezählt, da sie Teil der zusammengesetzten Gelenke sind. Der Freiheitsgrad beträgt $f = 1$.

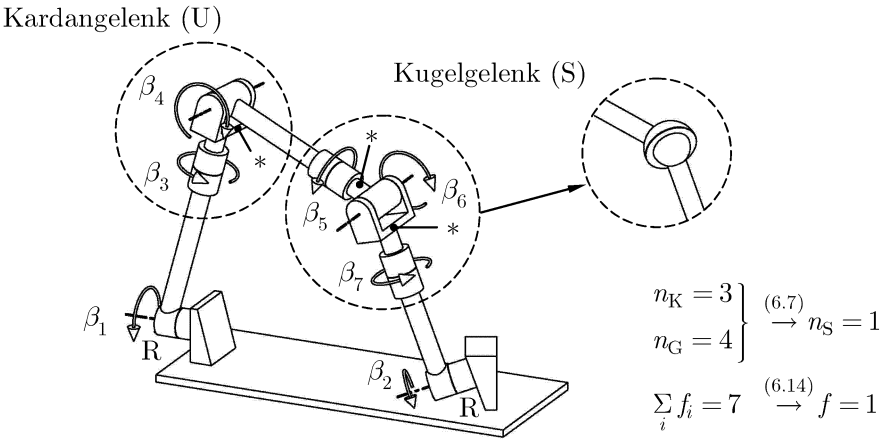
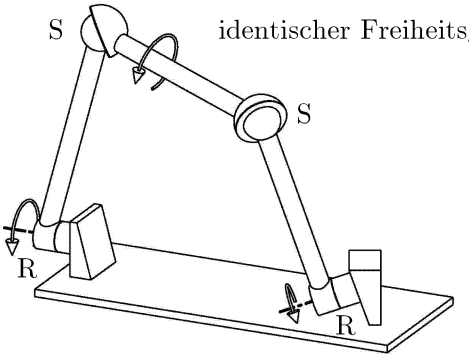


Abb. 6.4 Räumliches Gelenkviereck (RUSR-Mechanismus)

Räumliches Gelenkviereck mit zwei Kugelgelenken Wird im RUSR-Mechanismus das Kardangelenk durch ein Kugelgelenk ersetzt, so entsteht der in Abb. 6.5 dargestellte RSSR-Mechanismus mit dem Freiheitsgrad $f = 2$. Der hinzugekommene Freiheitsgrad entspricht der Drehung der Koppelstange um ihre Längsachse. Da er kinematisch keinen Einfluß auf die Bewegung der übrigen Körper hat, wird er als *identischer* oder *isolierter Freiheitsgrad* bezeichnet (Abb. 6.5).

Beim Aufbau von Mehrkörpermodellen sollten identische Freiheitsgrade vermieden werden, hier durch Verwendung eines Kardangelenks entsprechend Abb. 6.4, da wegen des kleinen oder sogar verschwindenden Massenträgheitsmoments der Koppelstange die Massenmatrix des Mehrkörpersystems schlecht konditioniert bzw. singulär ist. Technische Kugelgelenke lassen die freie Drehung ohnehin nicht zu.



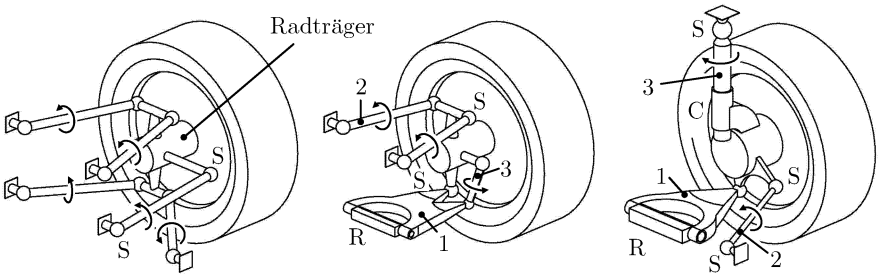
$$\left.\begin{array}{l} n_{\mathrm{K}} = 3 \\ n_{\mathrm{G}} = 4 \end{array}\right\} \overset{(6.7)}{\rightarrow} n_{\mathrm{S}} = 1$$

$$\sum_i f_i = 8 \overset{(6.14)}{\rightarrow} f = 2$$

Abb. 6.5 Räumliches Gelenkviereck (RSSR-Mechanismus)

Radführungen mit mehreren kinematischen Schleifen Bei Radführungen von Straßenfahrzeugen wird der Radträger, an dem das Rad gelagert ist, relativ zum Fahrzeugaufbau durch in der Regel mehrere Lenker räumlich geführt, siehe MATSCHINSKY [62]. Die in Abb. 6.6 gezeigten Mehrkörpermodelle von Einzelradführungen sind räumliche Mechanismen mit mehreren kinematischen Schleifen. Der Freiheitsgrad ist jeweils $f = 1$, entsprechend der Einfederbewegung des Rades. Die Drehung des Rades relativ zum Radträger ist dabei nicht berücksichtigt.

Mit den verwendeten Gelenken haben die Modelle die jeweils gekennzeichneten identischen Freiheitsgrade. Bei den Radführungen in Abb. 6.6 a und b werden die identischen Freiheitsgrade durch Ersatz jeweils eines Kugelgelenks (S) an jedem Lenker durch ein Kardangelenk (U) vermieden. Bei der Radführung in Abb. 6.6 c mit radführendem Dämpfer wird der identische Freiheitsgrad am Dämpfer entfernt, indem das Dreh-Schubgelenk (C) durch ein Schubgelenk (P) oder das obere Kugelgelenk (S) durch ein Kardangelenk (U) ersetzt wird.



$$\left.\begin{array}{l} n_{\mathrm{K}} = 6 \\ n_{\mathrm{G}} = 10 \end{array}\right\} \xrightarrow{(6.7)} n_{\mathrm{S}} = 4 \qquad \left.\begin{array}{l} n_{\mathrm{K}} = 5 \\ n_{\mathrm{G}} = 8 \end{array}\right\} \xrightarrow{(6.7)} n_{\mathrm{S}} = 3 \qquad \left.\begin{array}{l} n_{\mathrm{K}} = 4 \\ n_{\mathrm{G}} = 6 \end{array}\right\} \xrightarrow{(6.7)} n_{\mathrm{S}} = 2$$

$$\sum_i f_i = 30 \xrightarrow{(6.14)} f = 6 \qquad \sum_i f_i = 22 \xrightarrow{(6.14)} f = 4 \qquad \sum_i f_i = 15 \xrightarrow{(6.14)} f = 3$$

a 5 identische Fhg. **b** 3 identische Fhg. **c** 2 identische Fhg.

Abb. 6.6 Radführungen mit mehreren kinematischen Schleifen [62], $\curvearrowleft$: identische Freiheitsgrade. **a** Fünf Stablenker. **b** Querlenker 1, zwei Stablenker 2, Integrallenker 3. **c** Querlenker 1, Stablenker (Spurstange) 2, radführender Dämpfer 3

6.3.3 Freiheitsgrad statisch unbestimmter Systeme

Statisch unbestimmte Mehrkörpersysteme werden auch als überbestimmt oder übergeschlossen bezeichnet. Sie besitzen redundante Bindungen, also mit (6.11) $b^{\mathrm{r}} > 0$. Das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium (6.14) gilt hier nicht. Redundante Bindungen treten am häufigsten bei ebenen und sphärischen Mehrkörpersystemen auf. Dies wird am Beispiel der in Tabelle 6.9 gezeigten ebenen und sphärischen Gelenkvierecke mit jeweils zwei Drehgelenken und einem Kugel- und Kardangelenk und dem Freiheitsgrad $f = 1$ veranschaulicht.

Das ebene Gelenkviereck bleibt mit dem Freiheitsgrad $f = 1$ beweglich, wenn das Drehgelenk $*$ entfällt und das Kugelgelenk durch ein parallel zu den gestellfesten Achsen angeordnetes Drehgelenk ersetzt werden. In entsprechender Weise ist das sphärische Gelenkviereck mit vier Drehgelenken, deren Achsen sich im Fixpunkt Z schneiden, mit dem Freiheitsgrad $f = 1$ beweglich.

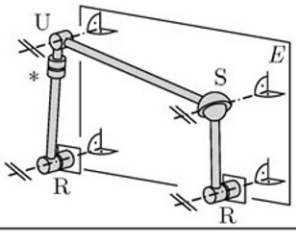
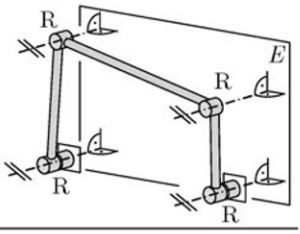
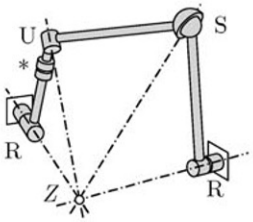
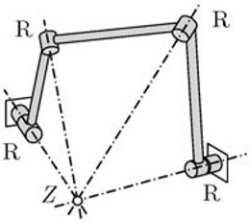
In beiden Fällen liefert das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium (6.14) $f = -2$ und gilt damit nicht. Es liegen jeweils $b^{\mathrm{r}} = 3$ redundante Bindungen vor. Die Gelenkvierecke sind $b^{\mathrm{r}} = 3$-fach statisch unbestimmt und nur auf Grund der speziellen Abmessungen mit $f = 1$ beweglich.

Es gibt aber auch räumliche Systeme mit redundanten Bindungen. Ein klassisches Beispiel ist der in Abb. 6.7 gezeigte Mechanismus mit sechs Drehgelenken (6R) nach BRICARD[5] und SCHATZ[6] [90]. Er hat den Freiheits-

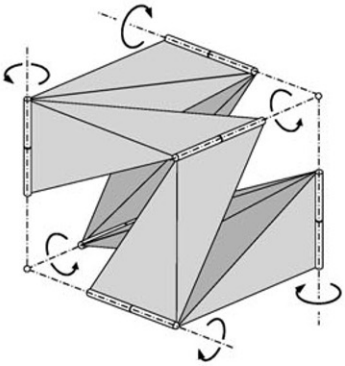
[5] RAOUL BRICARD, *1870, †1944

[6] PAUL SCHATZ, *1898 in Konstanz, †1979 in Dornach(CH)

Tabelle 6.9 Ebene und sphärische Gelenkvierecke als überbestimmte Systeme

	statisch bestimmtes System	**kinematisch äquivalentes, statisch unbestimmtes System**
Ebenes Gelenkviereck		
Sphärisches Gelenkviereck		
Anzahl		
• Körper	$n_K = 3$	$n_K = 3$
• Bindungen	$b = 17$	$b = 20$
• redundante B.	$b^r = 0$	$b^r = 3$
• Freiheitsgrad	$f = 1$	$f = 1$

grad $f = 1$, während das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium (6.14) $f = 0$ liefert. Die sechs Drehachsen sind so angeordnet, dass sie in einer Grundstellung des Mechanismus in den Seitenkanten eines Würfels liegen und damit paarweise zueinander windschief und orthogonal sind. Der BRICARD-SCHATZ-Mechanismus besitzt $b^r = 1$ redundante Bindung.



$$\left.\begin{array}{l} n_K = 5 \\ n_G = 6 \end{array}\right\} \overset{(6.7)}{\rightarrow} n_S = 1$$

$$\sum_i f_i = 6 \quad \overset{(6.14)}{\rightarrow} f = 0$$

aber:

$b^r = 1$ redundante Bindung

$f = 1$

Abb. 6.7 BRICARD-SCHATZ-Mechanismus (überbestimmter 6R-Mechanismus)

6.3.4 Freiheitsgrad ebener und sphärischer Systeme

Bei der Ermittlung des Freiheitsgrads ebener und sphärischer Systeme wird häufig von vornherein davon ausgegangen, dass jeder Körper nur den maximalen Freiheitsgrad drei hat. An Stelle von (6.8) ist dann $f^{\text{frei}} = 3\,n_{\text{K}}$. Dementsprechend werden nur die Bindungen betrachtet, welche die ebene bzw. sphärische Bewegung der Körper beschränken. An Stelle von (6.9) ist dann

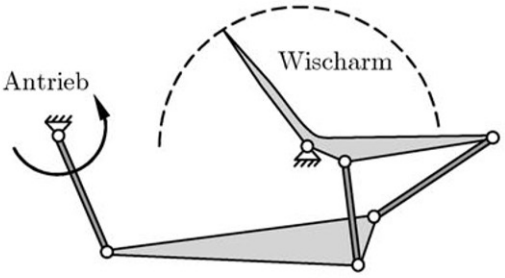
$$b = \sum_{i=1}^{n_{\text{G}}} b_i = \sum_{i=1}^{n_{\text{G}}} (3 - f_i) \ . \tag{6.15}$$

Hierbei werden nur die Gelenkfreiheitsgrade f_i gezählt, die für die ebene bzw. sphärische Bewegung des Systems erforderlich sind. Bei ebenen Systemen sind dies Verschiebungen parallel zur Bewegungsebene und Drehungen um Achsen senkrecht zur Bewegungsebene, bei sphärischen Systemen Drehungen um Achsen durch den Fixpunkt.

Sind die Bindungen voneinander unabhängig, so ergibt sich der Freiheitsgrad aus dem modifizierten GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium

$$f = \sum_{i=1}^{n_{\text{G}}} f_i - 3\,n_{\text{S}} \qquad \text{mit} \qquad n_{\text{S}} = n_{\text{G}} - n_{\text{K}} \ . \tag{6.16}$$

Ein Beispiel ist der in Abb. 6.8 dargestellte ebene Antriebsmechanismus eines Scheibenwischers mit sieben parallelen Drehgelenken und dem Freiheitsgrad $f = 1$. Die umlaufende Bewegung des Antriebshebels wird in die oszillierende Bewegung des Wischarms mit großem Schwenkwinkel umgesetzt.



$$\left.\begin{array}{l} n_{\text{K}} = 5 \\ n_{\text{G}} = 7 \end{array}\right\} \overset{(6.7)}{\rightarrow} n_{\text{S}} = 2$$

$$\sum_i f_i = 7 \overset{(6.16)}{\rightarrow} f = 1$$

Abb. 6.8 Ebener Antriebsmechanismus eines Scheibenwischers

Bei der Modellierung ebener und sphärischer Mehrkörpersysteme als räumliche Systeme ist aber zu beachten, dass redundante Bindungen vorhanden sein können. Mit dem Starrkörpermodell können dann nicht alle Reaktionskräfte berechnet werden. Die redundanten Bindungen sollten daher entfernt werden, indem zusätzliche Gelenkfreiheitsgrade, welche die Bewegung des Systems nicht verändern, eingeführt werden. Beispiele zeigt Tabelle 6.9.

6.4 Implizite holonome Bindungen von Gelenken

Die impliziten holonomen Gelenkbindungen beschränken die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der beiden durch ein Gelenk verbundenen Körper. Sie werden insbesondere bei kinematischen Schleifen in Kapitel 8 benötigt.

6.4.1 Bewegungsgrößen eines starren Körpers

Lage Die Lage des körperfesten Koordinatensystems $\mathcal{K}_i$ relativ zum raumfesten System $\mathcal{K}_0$ wird durch den in (5.1) eingeführten 7-Lagevektor mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}_i$ und den EULER-Parametern $\underline{\boldsymbol{p}}_i$ beschrieben,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_i \\ \boldsymbol{r}_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n_{\mathrm{K}} \,, \tag{6.17}$$

Häufig kann die Orientierung von $\mathcal{K}_i$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ ohne Verwendung der EULER-Parameter unmittelbar mit Hilfe der Drehmatrix ${}^0\boldsymbol{R}_i = {}^{0i}\boldsymbol{T}$ angegeben werden, wie es in den Abschnitten 3.1.5 und 3.2.3 gezeigt worden ist. Daher wird unter $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ zugleich die aus der Drehmatrix und dem Ortsvektor des Körpers $\mathcal{K}_i$ gebildete Menge seiner Lagegrößen verstanden,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \{\boldsymbol{R}_i,\, \boldsymbol{r}_i\} \,. \tag{6.18}$$

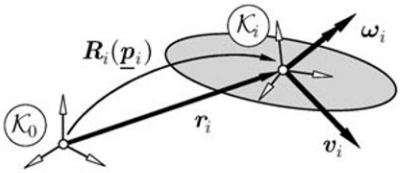


Abb. 6.9 Lage und Geschwindigkeit eines Körpers

Geschwindigkeit, Bewegungswinder Die Geschwindigkeit des Körpers im Raum wird durch die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_i$ des Systems $\mathcal{K}_i$ relativ zum System $\mathcal{K}_0$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i$ des Punktes O_i relativ zu $\mathcal{K}_0$ beschrieben. Diese Größen definieren entsprechend Abschnitt 3.1.3 den Bewegungswinder des Körpers, der im Folgenden zum räumlichen 6-Vektor

$$\hat{\boldsymbol{v}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} \tag{6.19}$$

zusammengefasst wird. Der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_i$ und der zeitlichen Ableitung der EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}_i$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ ist durch die kinematische Bewegungsgleichung (3.203) gegeben. Sie lautet ohne die in (3.203) mit dem oberen Nullelement der Vektorquaternion $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ multiplizierte linke Spalte der (4,4)-Matrix $\underline{\overline{\boldsymbol{P}}}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{p}_{\mathrm{si}} \\ {}_0\dot{\boldsymbol{p}}_i \end{bmatrix}}_{{}_0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}}_i} = \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}} \\ p_{\mathrm{si}}\,\boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{p}}_i \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{H}_i(\underline{\boldsymbol{p}}_i)} \boldsymbol{\omega}_i \,. \tag{6.20}$$

Insgesamt gilt für den Körper $\mathcal{K}_i$ die kinematische Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}_0\dot{\underline{\boldsymbol{p}}}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_i(\underline{\boldsymbol{p}}_i) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\hat{\boldsymbol{r}}}_i &= \widehat{\boldsymbol{H}}_i \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad . \end{aligned} \tag{6.21}$$

Beschleunigung Die Winkelbeschleunigung $\boldsymbol{\alpha}_i$ und die Translationsbeschleunigung $\boldsymbol{a}_i$ von $\mathcal{K}_i$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ sind die zeitlichen Ableitungen von $\boldsymbol{\omega}_i$ und $\boldsymbol{v}_i$ relativ zu $\mathcal{K}_0$. Sie werden zusammengefasst im räumlichen 6-Vektor

$$\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \\ \dot{\boldsymbol{v}}_i \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{\boldsymbol{a}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix}. \tag{6.22}$$

6.4.2 Implizite Bindungen eines holonomen Gelenks

Betrachtet werden zwei Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ einer kinematischen Kette, die durch ein Gelenk mit $b_{ij} = b_{\mathrm{L}ij}$ holonomen Bindungen miteinander verbunden sind (Abb. 6.10). Es ist $0 < b_{ij} \leq 6$.

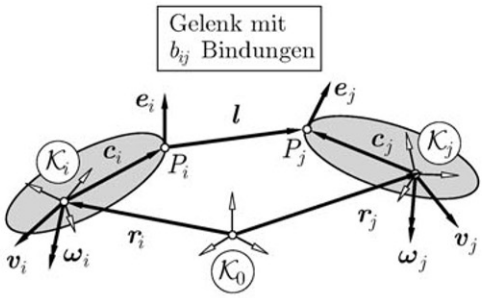


Abb. 6.10 Zur Formulierung der impliziten holonomen Bindungen eines Gelenks

Lageebene Die Lage von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ ist eingeschränkt durch b_{ij} implizite geometrische Gelenkbindungen der Form

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} g_1(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t) \\ \vdots \\ g_{b_{ij}}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t) \end{bmatrix}_{ij} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{g}_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t) &= \boldsymbol{0} \quad . \end{aligned} \tag{6.23}$$

Geschwindigkeitsebene Die totale zeitliche Ableitung der Lagebindungen (6.23) liefert unter Berücksichtigung der Kettenregel in den Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ lineare, implizite Bindungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{g}_{ij}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{g}_{ij}}{\partial \hat{\boldsymbol{r}}_i}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_{ij}}{\partial \hat{\boldsymbol{r}}_j}\,\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{r}}_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \boldsymbol{g}_{ij}}{\partial t} \tag{6.24}$$

oder mit (6.21)

$$\dot{\boldsymbol{g}}_{ij} \equiv \boldsymbol{G}_i\,\hat{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{G}_j\,\hat{\boldsymbol{v}}_j + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} = \boldsymbol{0} \tag{6.25}$$

mit den (b_{ij},6)-Bindungsmatrizen des Gelenks

$$\boldsymbol{G}_i(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j) = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \hat{\boldsymbol{r}}_i}\,\widehat{\boldsymbol{H}}_i\,, \qquad \boldsymbol{G}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j) = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \hat{\boldsymbol{r}}_j}\,\widehat{\boldsymbol{H}}_j\,. \tag{6.26}$$

und dem nur bei rheonomen Bindungen auftretenden b_{ij}-Vektor

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t) = \frac{\partial \boldsymbol{g}_{ij}}{\partial t}\,. \tag{6.27}$$

Werden die Lagebindungen (6.23) vektoriell formuliert, so können die zeitlichen Ableitungen der darin auftretenden Vektoren unmittelbar unter Verwendung der Winkelgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_i$ bzw. $\boldsymbol{\omega}_j$ entsprechend (3.11) ausgedrückt werden. Hierdurch werden die Bindungsmatrizen der Gelenke $\boldsymbol{G}_i$ und $\boldsymbol{G}_j$ in (6.25) erhalten, ohne die partiellen Ableitungen der Bindungsfunktionen $\boldsymbol{g}_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t)$ nach den Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{r}}_j$ in (6.26) berechnen zu müssen. Beispiele werden in Abschnitt 6.4.3 gezeigt.

Beschleunigungsebene Die totale zeitliche Ableitung der Geschwindigkeitsbindungen (6.25) liefert die impliziten Bindungen

$$\ddot{\boldsymbol{g}}_{ij} \equiv \boldsymbol{G}_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i + \boldsymbol{G}_j\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = \boldsymbol{0} \tag{6.28}$$

mit dem nicht von den Körperbeschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j$ abhängenden b_{ij}-Vektor

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, \hat{\boldsymbol{v}}_i, \hat{\boldsymbol{v}}_j, t) = \dot{\boldsymbol{G}}_i\,\hat{\boldsymbol{v}}_i + \dot{\boldsymbol{G}}_j\,\hat{\boldsymbol{v}}_j + \frac{\mathrm{d}\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.29}$$

6.4.3 Elementare implizite Bindungen von Gelenken

Die Bindungen von Standardgelenken lassen sich mit Hilfe des Verbindungsvektors $\boldsymbol{l}$ zweier körperfester Punkte P_i und P_j sowie der körperfesten Richtungsvektoren $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{e}_j$ aus Abb. 6.10 ausdrücken. Mit Hilfe der im Folgenden formulierten vier elementaren Bindungstypen lassen sich die Bindungen zahlreicher Gelenke aufbauen, siehe z.B. Nikravesh [70, 71].

Bindungstyp I: Zusammenfallende Punkte P_i und P_j

Lageebene Die Punkte P_i auf Körper $\mathcal{K}_i$ und P_j auf Körper $\mathcal{K}_j$ fallen zusammen, d. h. der Verbindungsvektor $\boldsymbol{l}$ dieser Punkte ist der Nullvektor (Abb. 6.11). Dies ist eine Vektorgleichung mit drei skalaren Bindungen,

$$\boldsymbol{g}_{ij} \equiv \boldsymbol{l} \equiv \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{0}\,. \tag{6.30}$$

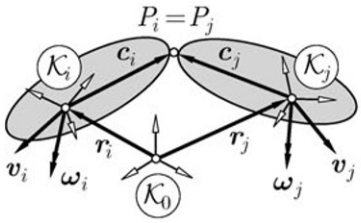


Abb. 6.11 Bindungstyp I: Zusammenfallende Punkte P_i und P_j ($b_{ij} = 3$ Bindungen)

Geschwindigkeitsebene Mit $\dot{\boldsymbol{l}} = \dot{\boldsymbol{r}}_j + \dot{\boldsymbol{c}}_j - \dot{\boldsymbol{r}}_i - \dot{\boldsymbol{c}}_i$ und den Vektoren

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_i, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_j = \boldsymbol{v}_j, \quad \dot{\boldsymbol{c}}_i = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{c}_i = -\widetilde{\boldsymbol{c}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i, \quad \dot{\boldsymbol{c}}_j = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{c}_j = -\widetilde{\boldsymbol{c}}_j\,\boldsymbol{\omega}_j \tag{6.31}$$

lautet die Zeitableitung der Bindung (6.30)

$$\dot{\boldsymbol{g}}_{ij} \equiv \dot{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{v}_j - \widetilde{\boldsymbol{c}}_j\,\boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{v}_i + \widetilde{\boldsymbol{c}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i\,. \tag{6.32}$$

Sie kann in die Form (6.68) gebracht werden,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{g}}_{ij} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_i & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_j & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}_i \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad + \quad \boldsymbol{G}_j \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j \quad = \boldsymbol{0}\,. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Da die Bindung skleronom ist, gilt $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} = \boldsymbol{0}$.

Beschleunigungsebene Die zweite Zeitableitung der Bindung (6.30) ergibt sich aus (6.32) zu

$$\ddot{\boldsymbol{g}}_{ij} \equiv \ddot{\boldsymbol{l}} = \dot{\boldsymbol{v}}_j - \widetilde{\boldsymbol{c}}_j\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_j - \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_j\,\boldsymbol{\omega}_j - \dot{\boldsymbol{v}}_i + \widetilde{\boldsymbol{c}}_i\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i\,. \tag{6.34}$$

Sie kann in die Form (6.28) gebracht werden mit dem nicht von den Beschleunigungen von $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ abhängenden 3-Vektor

$$\begin{aligned} &\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i - \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_j\,\boldsymbol{\omega}_j \\ \rightarrow\ &\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{c}_j - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{c}_i\,. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Bindungstyp II: Projektion von $\boldsymbol{l}$ auf $\boldsymbol{e}_i$

Lageebene Die Projektion l_0 des Verbindungsvektors $\boldsymbol{l}$ der Punkte P_i und P_j auf den Richtungsvektor $\boldsymbol{e}_i$ auf Körper $\mathcal{K}_i$ ist konstant (Abb. 6.12),

$$g_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{l} - l_0 = 0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{c}_i\,. \tag{6.36}$$

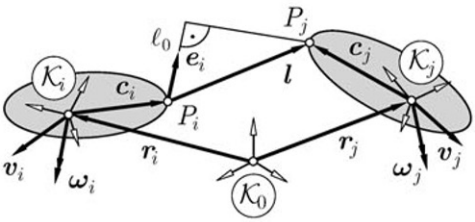


Abb. 6.12 Bindungstyp II: Projektion l_0 von $\boldsymbol{l}$ auf $\boldsymbol{e}_i$ ($b_{ij} = 1$ Bindung)

Geschwindigkeitsebene Die Zeitableitung von (6.36) ergibt die Bindung auf Geschwindigkeitsebene

$$\dot{g}_{ij} \equiv \dot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{l} + \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{l}} = 0 \tag{6.37}$$

Mit $\dot{\boldsymbol{l}}$ aus (6.32) und

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{e}_i = -\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i \tag{6.38}$$

kann sie in die Form (6.68) gebracht werden,

$$\begin{aligned} \dot{g}_{ij} \;&\equiv\; \left[\, \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,(\widetilde{\boldsymbol{c}}_i + \widetilde{\boldsymbol{l}}) \;\; -\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \left[\, -\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_j \;\; \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \qquad \boldsymbol{G}_i \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_i \;&+\; \boldsymbol{G}_j \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_j \;= 0\,. \end{aligned} \tag{6.39}$$

Beschleunigungsebene Die Ableitung von (6.37) lautet

$$\ddot{g}_{ij} \equiv \ddot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{l} + 2\dot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\ddot{\boldsymbol{l}} = 0 \tag{6.40}$$

mit $\ddot{\boldsymbol{l}}$ aus (6.34) und

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_i = \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_i\,\boldsymbol{e}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{e}}_i\,. \tag{6.41}$$

Aus (6.40) ergibt sich die Beschleunigungsbindung in der Form (6.28) mit dem nicht von den Beschleunigungen von $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ abhängenden Term

$$\bar{\bar{\gamma}}_{ij} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\,\left(\dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i - \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_j\,\boldsymbol{\omega}_j\right) + 2\,\dot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{l}} \tag{6.42}$$

mit $\dot{\boldsymbol{c}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{c}}_j$ aus (6.31), $\dot{\boldsymbol{l}}$ aus (6.32) und $\dot{\boldsymbol{e}}_i$ aus (6.38).

Bindungstyp III: Winkel zwischen $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{e}_j$

Lageebene Der Winkel φ zwischen den Richtungsvektoren $\boldsymbol{e}_i$ auf Körper $\mathcal{K}_i$ und $\boldsymbol{e}_j$ auf Körper $\mathcal{K}_j$ ist konstant (Abb. 6.13),

$$g_{ij} \equiv \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{e}_j - \cos\varphi = 0\,. \tag{6.43}$$

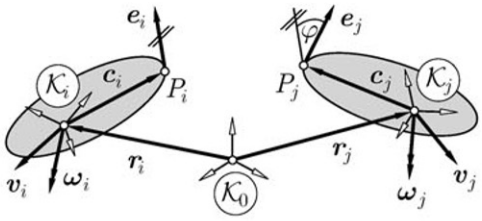


Abb. 6.13 Bindungstyp III: Winkel φ zwischen $\boldsymbol{e}_i$ und $\boldsymbol{e}_j$ ($b_{ij} = 1$ Bindung)

Geschwindigkeitsebene Die Zeitableitung von (6.43) ergibt die Bindung

$$\dot{g}_{ij} \equiv \dot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\, \dot{\boldsymbol{e}}_j = 0 \tag{6.44}$$

Mit $\dot{\boldsymbol{e}}_i$ aus (6.38) und

$$\dot{\boldsymbol{e}}_j = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\, \boldsymbol{e}_j = -\widetilde{\boldsymbol{e}}_j\, \boldsymbol{\omega}_j \tag{6.45}$$

kann sie unter Verwendung von (2.30) in die Form (6.68) gebracht werden

$$\begin{aligned} \dot{g}_{ij} &\equiv \left[\, \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \quad \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \left[\, -\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\, \widetilde{\boldsymbol{e}}_j \quad \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}_i \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad + \quad \boldsymbol{G}_j \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_j \quad = 0\,. \end{aligned} \tag{6.46}$$

Beschleunigungsebene Die Ableitung von (6.44) lautet

$$\ddot{g}_{ij} \equiv \ddot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\, \ddot{\boldsymbol{e}}_j + 2\, \dot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\, \dot{\boldsymbol{e}}_j = 0 \tag{6.47}$$

mit $\ddot{\boldsymbol{e}}_i$ aus (6.41) und

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_j = \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_j\, \boldsymbol{e}_j + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\, \dot{\boldsymbol{e}}_j\,. \tag{6.48}$$

Aus (6.47) ergibt sich die Beschleunigungsbindung in der Form (6.28) mit dem nicht von den Beschleunigungen von $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ abhängenden Term

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\gamma}}_{ij} &= \boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\, \dot{\boldsymbol{e}}_i + \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\, \dot{\boldsymbol{e}}_j + 2\, \dot{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}}\, \dot{\boldsymbol{e}}_j \\ \rightarrow \quad \bar{\bar{\gamma}}_{ij} &= \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\, \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j - 2\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\right) \boldsymbol{e}_j\,. \end{aligned} \tag{6.49}$$

Bindungstyp IV: Abstand der Punkte P_i und P_j

Lageebene Der konstante Abstand l der Punkte P_i auf Körper $\mathcal{K}_i$ und P_j auf Körper $\mathcal{K}_j$ wird mit Hilfe des Quadrats des Betrages des Vektors $\boldsymbol{l}$ formuliert (Abb. 6.14),

$$g_{ij} \equiv \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} - l^2\right) = 0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{c}_i\,. \tag{6.50}$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ wird eingeführt, um in den nachfolgenden Zeitableitungen den sonst auftretenden Faktor 2 zu umgehen, vgl. Tabelle 5.2 (Seite 141).

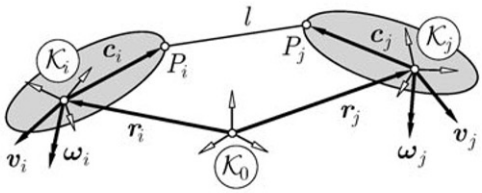


Abb. 6.14 Bindungstyp IV: Abstand l der Punkte P_i und P_j ($b_{ij} = 1$ Bindung)

Geschwindigkeitsebene Die Zeitableitung von (6.50),

$$\dot{g}_{ij} \equiv \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{l}} = 0\,, \tag{6.51}$$

kann mit $\dot{\boldsymbol{l}}$ aus (6.32) in die Form (6.68) gebracht werden,

$$\begin{aligned} \dot{g}_{ij} &\equiv \left[\,\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{c}}_i \quad -\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\,\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_i\\ \boldsymbol{v}_i\end{bmatrix} + \left[\,-\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\widetilde{\boldsymbol{c}}_j \quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\,\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\omega}_j\\ \boldsymbol{v}_j\end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}_i \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad + \quad \boldsymbol{G}_j \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j \quad = 0\,. \end{aligned} \tag{6.52}$$

Beschleunigungsebene Die Zeitableitung von (6.52),

$$\ddot{g}_{ij} \equiv \ddot{\boldsymbol{l}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} + \dot{\boldsymbol{l}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{l}} = 0\,, \tag{6.53}$$

kann mit $\ddot{\boldsymbol{l}}$ aus (6.34) in die Form (6.28) gebracht werden. Der nicht von den Beschleunigungen von $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ abhängende Term lautet

$$\bar{\bar{\gamma}}_{ij} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\dot{\boldsymbol{c}}_j - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{c}}_i\right) + \dot{\boldsymbol{l}}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{l}} \tag{6.54}$$

mit $\dot{\boldsymbol{c}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{c}}_j$ aus (6.31) und $\dot{\boldsymbol{l}}$ aus (6.32).

6.4.4 Implizite Bindungen des Drehgelenks

Mit Hilfe der in Abschnitt 6.4.3 beschriebenen vier elementaren holonomen Bindungen können die impliziten Bindungen zahlreicher Gelenke formuliert werden. Als ein Beispiel werden die $b_{\mathrm{L}ij} = b_{ij} = 5$ impliziten Bindungen des Drehgelenks aufgestellt (Abb. 6.15). Die impliziten Bindungen weiterer Gelenke werden im Zusammenhang mit den Schließbedingungen kinematischer Schleifen in Tabelle 8.2 (Seite 291) angegeben.

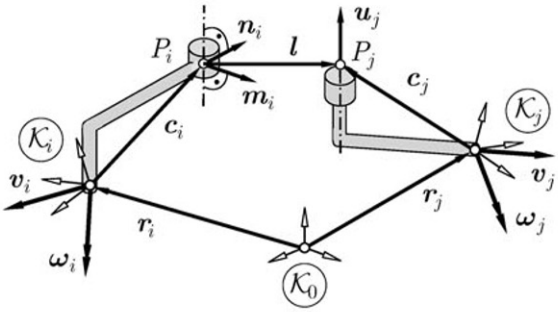


Abb. 6.15 Zur Formulierung der impliziten Bindungen eines Drehgelenks

Lageebene Die jeweils auf der Drehachse des Gelenks liegenden Punkte P_i auf Körper $\mathcal{K}_i$ und P_j auf Körper $\mathcal{K}_j$ fallen zusammen, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$ (Bindungstyp I). Zusätzlich steht der Richtungsvektor der Drehachse $\boldsymbol{u}_j$ auf Körper $\mathcal{K}_j$ senkrecht auf den beiden Normalenvektoren $\boldsymbol{m}_i$ und $\boldsymbol{n}_i$ auf Körper $\mathcal{K}_i$ (jeweils Bindungstyp III). Damit lauten die $b_{ij} = 5$ Bindungen auf Lageebene

$$\begin{array}{lcl} \text{Typ I:} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{c}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \text{3 Bindungen} \\ \text{Typ III:} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \text{1 Bindung} \\ \text{Typ III:} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{u}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} & \text{1 Bindung} \\ \rightarrow & \boldsymbol{g}_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j) = \boldsymbol{0} \ . & \end{array} \tag{6.55}$$

Geschwindigkeitsebene Die impliziten Bindungen auf Geschwindigkeitsebene haben die Form (6.25) mit den Bindungsmatrizen gemäß (6.33) für die Bindung des Typs I und gemäß (6.46) für die beiden Bindungen des Typs III,

$$\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{g}}_{ij} \equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_i & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_j & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_j & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_j & \boldsymbol{E} \\ -\boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_j & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_j & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}_i \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad + \quad \boldsymbol{G}_j \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j \quad = \quad \boldsymbol{0} \end{array} \tag{6.56}$$

mit den (5,6)-Bindungsmatrizen $\boldsymbol{G}_i$ und $\boldsymbol{G}_j$.

Beschleunigungsebene Die impliziten Bindungen auf Beschleunigungsebene haben die Form (6.28) mit den nicht von den Beschleunigungen der Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ abhängenden Termen gemäß (6.35) für die Bindung des Typs I und gemäß (6.49) für die beiden Bindungen des Typs III,

$$\bar{\bar{\gamma}}_{ij} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \boldsymbol{c}_j - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \boldsymbol{c}_i \\ \boldsymbol{m}_i^{\mathrm{T}} \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j - 2 \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \right) \boldsymbol{u}_j \\ \boldsymbol{n}_i^{\mathrm{T}} \left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j - 2 \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \right) \boldsymbol{u}_j \end{bmatrix} . \tag{6.57}$$

6.5 Explizite holonome Bindungen von Gelenken

Die expliziten Bindungen von Gelenken werden für die Berechnung der Vorwärtskinematik bei offenen Mehrkörpersystemen verwendet, siehe Abschnitt 7.2. Zunächst werden die expliziten holonomen Bindungen eines allgemeinen Gelenks formuliert. Anschließend werden die expliziten Bindungen des Drehgelenks, des Schubgelenks und des Kugelgelenks angegeben, die in Mehrkörpermodellen am häufigsten benötigt werden.

6.5.1 Explizite Bindungen eines holonomen Gelenks

Mit Hilfe der expliziten holonomen Gelenkbindungen wird die Bewegung des Körpers $\mathcal{K}_j$ relativ zum Körper $\mathcal{K}_i$ mit Hilfe relativer Gelenkkoordinaten beschrieben. Dazu wird eine Durchlaufrichtung des Gelenks festgelegt, hier vom Körper $\mathcal{K}_i$ zum Körper $\mathcal{K}_j$ (Abb. 6.16). Der Körper $\mathcal{K}_i$ wird dadurch als der eindeutige *Vorgängerkörper* von Körper $\mathcal{K}_j$ definiert. Die gelenkbezogenen Größen können daher durch den einfachen Index des Körpers $\mathcal{K}_j$ eindeutig gekennzeichnet werden. Weiterhin wird der Vektor $\boldsymbol{c}_j$ aus Abb. 6.10 durch den in Durchlaufrichtung liegenden Vektor $\boldsymbol{d}_{jj} = -\boldsymbol{c}_j$ ersetzt.

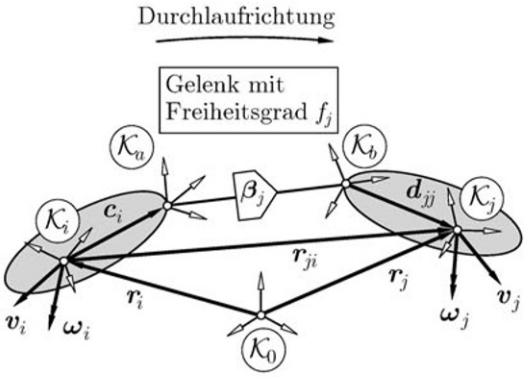


Abb. 6.16 Zur Formulierung der expliziten holonomen Bindungen eines Gelenks

Lageebene Die Lage des Körpers $\mathcal{K}_j$ relativ zu seinem Vorgängerkörper $\mathcal{K}_i$ wird entsprechend dem Gelenkfreiheitsgrad $f_j = 6 - b_{ij}$ durch f_j gelenkspezifische relative Gelenkkoordinaten

$$\boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix} \beta_{j,1} \\ \vdots \\ \beta_{j,f_j} \end{bmatrix} . \tag{6.58}$$

festgelegt. Werden z.B. bei einem Kugelgelenk die vier EULER-Parameter als Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_j$ verwendet, so gilt die Nebenbedingung (3.167),

$$\phi_j(\boldsymbol{\beta}_j) = 0 . \tag{6.59}$$

Mit Hilfe der expliziten Gelenkbindungen werden die Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_j$ des Körpers $\mathcal{K}_j$ in Abhängigkeit von den Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ des Vorgängerkörpers $\mathcal{K}_i$ und den f_j Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_j$ berechnet,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_j = \hat{\boldsymbol{r}}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \boldsymbol{\beta}_j, t) . \tag{6.60}$$

Die explizite Zeitabhängigkeit tritt nur bei rheonomen Bindungen auf. Die expliziten Gelenkbindungen (6.60) erfüllen für beliebige Werte der Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_j$ die impliziten Gelenkbindungen (6.23).

Kinematische Differentialgleichung Für die Beschreibung der Geschwindigkeit des Körpers $\mathcal{K}_j$ relativ zum Körper $\mathcal{K}_i$ werden f_j unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten

$$\boldsymbol{\eta}_j = \begin{bmatrix} \eta_{j,1} \\ \vdots \\ \eta_{j,f_j} \end{bmatrix} \tag{6.61}$$

so eingeführt, dass die Zeitableitungen der Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_j$ lageabhängige Linearkombinationen von $\boldsymbol{\eta}_j$ sind. Es gelten also kinematische Bewegungsgleichungen der Form

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_j = \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{\beta}_j)\, \boldsymbol{\eta}_j . \tag{6.62}$$

mit der $(\dim(\boldsymbol{\beta}_j), f_j)$-Matrix $\boldsymbol{H}_j$. Im Standardfall $\boldsymbol{\eta}_j = \dot{\boldsymbol{\beta}}_j$ ist $\boldsymbol{H}_j = \boldsymbol{E}$.

Geschwindigkeitsebene Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_j$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_j$ von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ setzen sich aus den Geschwindigkeitsgößen $\boldsymbol{\omega}_i$, $\boldsymbol{v}_i$ von $\mathcal{K}_i$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ und den Geschwindigkeitsgößen $\boldsymbol{\omega}_{ji}$, $\boldsymbol{v}_{ji}$ von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ zusammen. Gemäß (3.45) und (3.48) gilt

$$\boldsymbol{\omega}_j = \boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_{ji} , \tag{6.63}$$

$$\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \boldsymbol{r}_{ji} + \boldsymbol{v}_{ji} . \tag{6.64}$$

Die Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ und die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{ji}$ von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ lassen sich mit Hilfe der Gelenkgeschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}_j$ ausdrücken,

$$\boldsymbol{\omega}_{ji} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}j}\,\boldsymbol{\eta}_j + \bar{\boldsymbol{\omega}}_j^{\mathrm{rel}}\,, \tag{6.65}$$

$$\boldsymbol{v}_{ji} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{T}j}\,\boldsymbol{\eta}_j + \bar{\boldsymbol{v}}_j^{\mathrm{rel}}\,, \tag{6.66}$$

mit den rotatorischen und translatorischen (3,f_j)-Jacobi-Matrizen des Gelenks $\boldsymbol{C}_{\mathrm{R}j}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j)$ und $\boldsymbol{C}_{\mathrm{T}j}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j)$ sowie den nur bei rheonomen Gelenkbindungen auftretenden Vektoren $\bar{\boldsymbol{\omega}}_j^{\mathrm{rel}}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t)$ und $\bar{\boldsymbol{v}}_j^{\mathrm{rel}}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t)$.

Einsetzen in (6.63) und (6.64) ergibt die expliziten Gelenkbindungen auf Geschwindigkeitsebene. Als Matrizengleichung lauten sie

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}j} \\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{T}j} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_j + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\omega}}_j^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\boldsymbol{v}}_j^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j &= \boldsymbol{B}_{ji} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{C}_j \quad \boldsymbol{\eta}_j + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_j^{\mathrm{rel}} \quad . \end{aligned} \tag{6.67}$$

Die Terme in (6.67) lassen sich wie folgt interpretieren: Der Term $\boldsymbol{B}_{ji}\,\hat{\boldsymbol{v}}_i$ ist die Geschwindigkeit des Körpers $\mathcal{K}_j$ bei einer gedachten starren Verbindung zwischen $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$. Die (6,6)-Versatzmatrix $\boldsymbol{B}_{ji}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j)$ hängt nicht vom Gelenktyp ab. Die Term $\boldsymbol{C}_j\,\boldsymbol{\eta}_j$ mit der (6,f_j)-Jacobi-Matrix $\boldsymbol{C}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j)$ gibt den Beitrag der Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}_j$ zur Geschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ von $\mathcal{K}_j$ an. Der gelenkspezifische 6-Vektor $\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_j^{\mathrm{rel}}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t)$ ist der Beitrag der rheonom geführten Gelenkbewegungen zu $\hat{\boldsymbol{v}}_j$.

Orthogonalität der freien und gesperrten Raumrichtungen Die expliziten Gelenkbindungen (6.67) sind Lösungen der impliziten Gelenkbindungen (6.25). Zur Verdeutlichung dieses Sachverhaltes werden die impliziten Gelenkbindungen (6.25) als ein unterbestimmtes System von b_{ij} linearen Gleichungen für die insgesamt 12 Komponenten der Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ der beiden Körper geschrieben,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_i & \boldsymbol{G}_j \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{G}_{ij}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_i \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j \end{bmatrix} = -\bar{\gamma}_{ij}\,. \tag{6.68}$$

Die (1,12)-Zeilenvektoren der (b_{ij},12)-Bindungsmatrix des Gelenks $\boldsymbol{G}_{ij}$ kennzeichnen die gesperrten Bewegungsrichtungen der Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$.

Die expliziten Gelenkbindungen (6.67) liefern für beliebige Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ des Körpers $\mathcal{K}_i$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}_j$ die mit der Bindung verträgliche Geschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ des Körpers $\mathcal{K}_j$. Sie bilden die Lösung des Gleichungssystems (6.68), was durch die Erweiterung von (6.67) um die Identität $\hat{\boldsymbol{v}}_i = \hat{\boldsymbol{v}}_i$ verdeutlicht wird,

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_i \\ \hat{\boldsymbol{v}}_j \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{ji} & \boldsymbol{C}_j \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{L}_{ji}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_i \\ \boldsymbol{\eta}_j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_j^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix}. \tag{6.69}$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (6.69) ist die partikuläre Lösung des Gleichungssystems (6.68), die nur bei rheonomen Gelenkbindungen, also $\bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} = \mathbf{0}$, auftritt. Der erste Summand ist die homogene Lösung des Gleichungssystems (6.68), die für beliebige Werte der Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ und $\boldsymbol{\eta}_j$ gilt. Die 12-Spaltenvektoren der (12,12)-Matrix $\boldsymbol{L}_{ji}$ kennzeichnen die freien Bewegungsrichtungen der Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$. Sie stehen senkrecht auf den (1,12)-Zeilenvektoren der (b_{ij},12)-Gelenk-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}_{ij}$. Es gilt die Orthogonalitätsbeziehung zwischen den freien und gesperrten Bewegungsrichtungen der Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$

$$\boldsymbol{G}_{ij}\,\boldsymbol{L}_{ji} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad \left[\,\boldsymbol{G}_i \;\; \boldsymbol{G}_j\,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{B}_{ji} & \boldsymbol{C}_j \end{bmatrix} = \left[\,\mathbf{0} \;\; \mathbf{0}\,\right] \tag{6.70}$$

oder

$$\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{G}_j\,\boldsymbol{B}_{ji} = \mathbf{0}\,, \tag{6.71}$$

$$\boldsymbol{G}_j\,\boldsymbol{C}_j = \mathbf{0}\,. \tag{6.72}$$

Beschleunigungsebene Die Ableitung der expliziten Gelenkbindungen auf Geschwindigkeitsebene (6.67) nach der Zeit liefert die expliziten Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene

$$\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j = \boldsymbol{B}_{ji}\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i + \boldsymbol{C}_j\,\dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} \tag{6.73}$$

mit den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ und dem nicht von den Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ abhängenden 6-Vektor

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{v}}_i, \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\eta}_j, t) = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_j^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\boldsymbol{a}}_j^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} = \dot{\boldsymbol{B}}_{ji}\,\hat{\boldsymbol{v}}_i + \dot{\boldsymbol{C}}_j\,\boldsymbol{\eta}_j + \frac{\mathrm{d}\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_j^{\mathrm{rel}}}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6.74}$$

Die expliziten Gelenkbindungen (6.73) erfüllen für beliebige Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ die impliziten Gelenkbindungen (6.28).

Die Gelenkbindungen sind in Tabelle 6.10 zusammengefasst.

Tabelle 6.10 Gelenkbindungen,
Lageebene (L), Geschwindigkeitsebene (G), Beschleunigungsebene (B)

	Implizite Gelenkbindungen	Explizite Gelenkbindungen (Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$, Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$)
L	(6.23): $\boldsymbol{g}_{ij}(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \hat{\boldsymbol{r}}_j, t)\,.$	(6.60): $\hat{\boldsymbol{r}}_j = \hat{\boldsymbol{r}}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \boldsymbol{\beta}_j, t)\,,$
G	(6.25): $\boldsymbol{G}_i\,\hat{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{G}_j\,\hat{\boldsymbol{v}}_j + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} = \mathbf{0}$	(6.67): $\hat{\boldsymbol{v}}_j = \boldsymbol{B}_{ji}\,\hat{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{C}_j\,\boldsymbol{\eta}_j + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_j^{\mathrm{rel}}$
B	(6.28): $\boldsymbol{G}_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i + \boldsymbol{G}_j\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = \mathbf{0}$	(6.73): $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j = \boldsymbol{B}_{ji}\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i + \boldsymbol{C}_j\,\dot{\boldsymbol{\eta}}_j + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}}$
	Orthogonalität (6.71): $\boldsymbol{G}_i + \boldsymbol{G}_j\,\boldsymbol{B}_{ji} = \mathbf{0}$	
	(6.72): $\boldsymbol{G}_j\,\boldsymbol{C}_j = \mathbf{0}$	

6.5.2 Explizite Bindungen des Drehgelenks

Für das in Abb. 6.17 dargestellte Drehgelenk mit dem Gelenkfreiheitsgrad $f_j = 1$ werden die expliziten Bindungen aufgestellt.

Lageebene Als die $f_j = 1$ freie Gelenkkoordinate wird der Drehwinkel β_j des Gelenk-Koordinatensystems $\mathcal{K}_b$ relativ zu dem System $\mathcal{K}_a$ um die Gelenkachse $\boldsymbol{u}_j$ definiert. Die expliziten Gelenkbindungen (6.60) lauten dann für die Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{r}}_j$ entsprechend (6.18)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} {}^{0j}\boldsymbol{T} \\ {}^{0}\boldsymbol{r}_j \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} {}^{0i}\boldsymbol{T}\ {}^{ia}\boldsymbol{T}\ {}^{ab}\boldsymbol{T}(\beta_j)\ {}^{bj}\boldsymbol{T} \\ {}^{0}\boldsymbol{r}_i + {}^{0i}\boldsymbol{T}\left({}^{i}\boldsymbol{c}_i + {}^{ia}\boldsymbol{T}\ {}^{ab}\boldsymbol{T}(\beta_j)\ {}^{b}\boldsymbol{d}_{jj}\right) \end{array} \right\} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{r}}_j &= \hat{\boldsymbol{r}}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \beta_j)\,. \end{aligned} \tag{6.75}$$

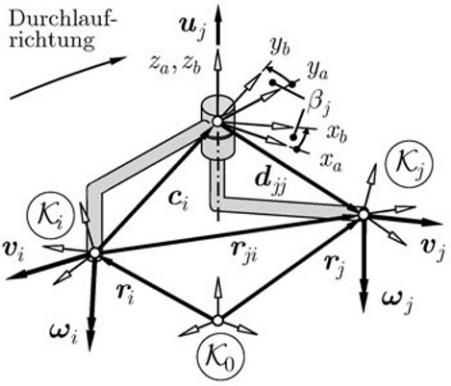


Abb. 6.17 Zur Formulierung der expliziten Bindungen des Drehgelenks

Kinematische Differentialgleichung Mit der Definition der Gelenkgeschwindigkeit $\eta_j = \dot{\beta}_j$ lautet die kinematische Bewegungsgleichung (6.62)

$$\dot{\beta}_j = \eta_j \qquad (\boldsymbol{H}_j = 1)\,. \tag{6.76}$$

Geschwindigkeitsebene Mit den relativen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_{ji} = \dot{\beta}_j\, \boldsymbol{u}_j$ und $\boldsymbol{v}_{ji} = \dot{\beta}_j\, \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\, \boldsymbol{d}_{jj}$ ergeben sich aus (6.63) und (6.64) die expliziten Gelenkbindungen in der Form (6.67),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_j \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\, \boldsymbol{d}_{jj} \end{bmatrix} \dot{\beta}_j \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j &= \boldsymbol{B}_{ji} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{C}_j \quad \eta_j\,. \end{aligned} \tag{6.77}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$, $\boldsymbol{C}_j$ der expliziten Gelenkbindungen (6.77) und $\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{G}_j$ der impliziten Gelenkbindungen (6.56) erfüllen unter Berücksichtigung der Umbezeichnung $\boldsymbol{d}_{jj} = -\boldsymbol{c}_j$ die Orthogonalitätsbeziehungen (6.71), (6.72).

Beschleunigungsebene Die Ableitung von (6.77) nach der Zeit liefert die expliziten Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene gemäß (6.73) mit dem nicht von den Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ abhängenden 6-Vektor

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_j\,\dot{\beta}_j \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_{ji} + \dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj}\,\dot{\beta}_j + \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\dot{\boldsymbol{d}}_{jj}\,\dot{\beta}_j \end{bmatrix}.$$

Mit $\dot{\boldsymbol{u}}_j = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j$, $\dot{\boldsymbol{r}}_{ji} = \dot{\boldsymbol{c}}_i + \dot{\boldsymbol{d}}_{jj} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{c}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj}$ und $\dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj} = -\widetilde{\boldsymbol{d}}_{jj}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j$ ist

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j\,\dot{\beta}_j \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{c}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj} - \widetilde{\boldsymbol{d}}_{jj}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j\,\dot{\beta}_j + \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj}\,\dot{\beta}_j \end{bmatrix}$$

und mit $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj} + \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj}\,\dot{\beta}_j = (\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\beta}_j\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_j)\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj}$

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j\,\dot{\beta}_j \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{c}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\boldsymbol{d}_{jj} - \widetilde{\boldsymbol{d}}_{jj}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j\,\dot{\beta}_j \end{bmatrix}. \tag{6.78}$$

6.5.3 Explizite Bindungen des Schubgelenks

Für das in Abb. 6.18 dargestellte Schubgelenk mit dem Gelenkfreiheitsgrad $f_j = 1$ werden die expliziten Bindungen aufgestellt.

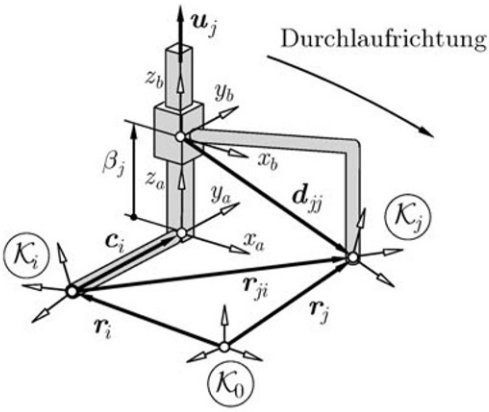


Abb. 6.18 Zur Formulierung der expliziten Bindungen des Schubgelenks

Lageebene Als die $f_j = 1$ freie Gelenkkoordinate wird die Verschiebung β_j des Gelenk-Koordinatensystems $\mathcal{K}_b$ relativ zu dem System $\mathcal{K}_a$ in Richtung der Gelenkachse $\boldsymbol{u}_j$ definiert. Die expliziten Gelenkbindungen (6.60) für die Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{r}}_j$ entsprechend (6.18) lauten dann

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} {}^{0j}\boldsymbol{T} \\ {}^{0}\boldsymbol{r}_j \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} {}^{0i}\boldsymbol{T}\,{}^{ia}\boldsymbol{T}\,{}^{ab}\boldsymbol{T}\,{}^{bj}\boldsymbol{T} \\ {}^{0}\boldsymbol{r}_i + {}^{0i}\boldsymbol{T}\left({}^{i}\boldsymbol{c}_i + \beta_j\,{}^{i}\boldsymbol{u}_j + {}^{ia}\boldsymbol{T}\,{}^{ab}\boldsymbol{T}\,{}^{b}\boldsymbol{d}_{jj}\right) \end{array} \right\} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{r}}_j &= \hat{\boldsymbol{r}}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \beta_j)\,. \end{aligned} \tag{6.79}$$

Bei parallelen Gelenk-Koordinatensystemen $\mathcal{K}_a$ und $\mathcal{K}_b$ ist ${}^{ab}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{E}$.

Kinematische Differentialgleichung Mit der Definition der Gelenkgeschwindigkeit $\eta_j = \dot{\beta}_j$ lautet die kinematische Differentialgleichung (6.62)

$$\dot{\beta}_j = \eta_j \qquad (\boldsymbol{H}_j = 1)\,. \tag{6.80}$$

Geschwindigkeitsebene Mit den relativen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_{ji} = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{v}_{ji} = \dot{\beta}_j\,\boldsymbol{u}_j$ folgen aus (6.63) und (6.64) die expliziten Gelenkbindungen der Form (6.67)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_j \end{bmatrix} \dot{\beta}_j \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j &= \boldsymbol{B}_{ji} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i + \boldsymbol{C}_j \quad \eta_j\,. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Beschleunigungsebene Die Ableitung von (6.81) nach der Zeit liefert die expliziten Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene gemäß (6.73) mit dem nicht von den Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ abhängenden 6-Vektor

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_{ji} + \dot{\beta}_j\,\dot{\boldsymbol{u}}_j \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

und mit $\dot{\boldsymbol{r}}_{ji} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{r}_{ji} + \dot{\beta}_j\,\boldsymbol{u}_j$ sowie $\dot{\boldsymbol{u}}_j = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{u}_j$

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\left(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{r}_{ji} + 2\,\dot{\beta}_j\,\boldsymbol{u}_j\right) \end{bmatrix}. \tag{6.83}$$

6.5.4 Explizite Bindungen des Kugelgelenks

Zwei durch ein Kugelgelenk miteinander verbundene Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ können freie Relativdrehungen um beliebige Achsen durchführen (Abb. 6.19). Für die Definition der relativen Gelenkkoordinaten bestehen gemäß den Abschnitten 3.6 bis 3.8 zahlreiche Möglichkeiten. Die Wahl von KARDAN- bzw. EULER-Winkeln entspricht dem Ersatz des Kugelgelenks durch drei hintereinandergeschaltete Drehgelenke mit sich im Drehpunkt des Kugelgelenks schneidenden Gelenkachsen, vgl. Abschnitt 3.6 und Tabelle 6.2. Auf Grund der unvermeidbaren Singularitäten gelten die mit Hilfe der KARDAN- bzw. EULER-Winkel formulierten expliziten Bindungen jeweils nur in einem be-

grenzten Bewegungsbereich des Kugelgelenks (was für viele Aufgabenstellungen ausreichend ist). Die im Folgenden angegebene Formulierung mit EULER-Parametern gemäß Abschnitt 3.7 vermeidet diesen Nachteil.

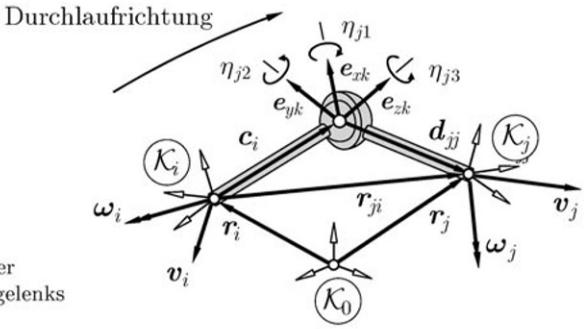


Abb. 6.19 Zur Formulierung der expliziten Bindungen des Kugelgelenks

Lageebene Als die Gelenkkoordinaten des Kugelgelenks werden die vier EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}_{ji}$ gemäß (3.166) definiert, welche die Orientierung des Koordinatensystems $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ beschreiben,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_{j0} \\ \hline \beta_{j1} \\ \beta_{j2} \\ \beta_{j3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} p_{ji,\mathrm{s}} \\ \hline {}^i p_{ji,x} \\ {}^i p_{ji,y} \\ {}^i p_{ji,z} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} p_{ji,\mathrm{s}} \\ \hline {}^i\boldsymbol{p}_{ji} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta}_j &= {}^i\underline{\boldsymbol{p}}_{ji} \; . \end{aligned} \tag{6.84}$$

Die drei Koordinaten des Vektorteils der EULER-Parameter $\boldsymbol{p}_{ji}$ sind im Ausgangssystem der relativen Drehung, hier $\mathcal{K}_i$, angegeben, wobei entsprechend (3.173) ${}^j\boldsymbol{p}_{ji} = {}^i\boldsymbol{p}_{ji}$ gilt. Die algebraische Nebenbedingung (3.167) der EULER-Parameter ist

$$\phi_j(\boldsymbol{\beta}_j) \equiv \beta_{j0}^2 + \beta_{j1}^2 + \beta_{j2}^2 + \beta_{j3}^2 - 1 = 0 \, . \tag{6.85}$$

Die expliziten Bindungen (6.60) lauten dann für das Kugelgelenk

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} {}^{0j}\boldsymbol{T} \\ {}^0\boldsymbol{r}_j \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} {}^{0i}\boldsymbol{T}\,{}^{ij}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta}_j) \\ {}^0\boldsymbol{r}_i + {}^{0i}\boldsymbol{T}\left({}^i\boldsymbol{c}_i + {}^{ij}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta}_j)\,{}^j\boldsymbol{d}_{jj}\right) \end{Bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{r}}_j &= \hat{\boldsymbol{r}}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \beta_j) \, . \end{aligned} \tag{6.86}$$

Die Drehmatrix ${}^{ij}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta}_j)$ ist gemäß (3.172) aufgebaut,

$${}^{ij}\boldsymbol{T} = 2 \begin{bmatrix} \beta_{j0}^2 + \beta_{j1}^2 - \frac{1}{2} & \beta_{j1}\beta_{j2} - \beta_{j0}\beta_{j3} & \beta_{j1}\beta_{j3} + \beta_{j0}\beta_{j2} \\ \beta_{j1}\beta_{j2} + \beta_{j0}\beta_{j3} & \beta_{j0}^2 + \beta_{j2}^2 - \frac{1}{2} & \beta_{j2}\beta_{j3} - \beta_{j0}\beta_{j1} \\ \beta_{j1}\beta_{j3} - \beta_{j0}\beta_{j2} & \beta_{j2}\beta_{j3} + \beta_{j0}\beta_{j1} & \beta_{j0}^2 + \beta_{j3}^2 - \frac{1}{2} \end{bmatrix} . \tag{6.87}$$

Kinematische Differentialgleichung Die Gelenkgeschwindigkeiten des Kugelgelenks $\boldsymbol{\eta}_j$ werden günstig unter Ausnutzung des allgemeinen Aufbaus der kinematischen Differentialgleichung (6.62) als die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ um die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{xk}$, $\boldsymbol{e}_{yk}$, $\boldsymbol{e}_{zk}$ eines frei wählbaren Koordinatensystems $\mathcal{K}_k$ definiert,

$$\boldsymbol{\eta}_j = {}^k\boldsymbol{\omega}_{ji} \,. \tag{6.88}$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ lautet damit

$$\boldsymbol{\omega}_{ji} = \eta_{j1}\,\boldsymbol{e}_{xk} + \eta_{j2}\,\boldsymbol{e}_{yk} + \eta_{j3}\,\boldsymbol{e}_{zk} \,. \tag{6.89}$$

Zwischen der Zeitableitung der EULER-Parameter ${}_i\underline{\dot{\boldsymbol{p}}}_{ji}$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ und der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ gilt gemäß (3.203) der vektorielle Zusammenhang

$${}_i\underline{\dot{\boldsymbol{p}}}_{ji} \equiv \begin{bmatrix} \dot{p}_{ji,\mathrm{s}} \\ {}_i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}_{ji}^{\mathrm{T}} \\ p_{ji,\mathrm{s}}\,\boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{p}}_{ji} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ji} \,. \tag{6.90}$$

Die in (3.203) mit dem oberen Nullelement der Vektorquaternion $\underline{\boldsymbol{\omega}}_{10}$ multiplizierte linke Spalte der (4,4)-Matrix $\underline{\boldsymbol{P}}$ wurde hier nicht mehr angeschrieben. Die Darstellung der Vektorgleichung (6.90) im System $\mathcal{K}_i$ lautet unter Berücksichtigung von ${}^i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji} \equiv {}^i[{}_i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji}]$ und von ${}^i\boldsymbol{\omega}_{ji} = {}^{ik}\boldsymbol{T}\,{}^k\boldsymbol{\omega}_{ji} = {}^{ik}\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{\eta}_j$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{p}_{ji,\mathrm{s}} \\ {}^i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\,{}^i\boldsymbol{p}_{ji}^{\mathrm{T}}\,{}^{ik}\boldsymbol{T} \\ \frac{1}{2}(p_{ji,\mathrm{s}}\,\boldsymbol{E} - {}^i\widetilde{\boldsymbol{p}}_{ji})\,{}^{ik}\boldsymbol{T} \end{bmatrix} {}^k\boldsymbol{\omega}_{ji} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\beta}}_j &= \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{\beta}_j) \qquad \boldsymbol{\eta}_j \,. \end{aligned} \tag{6.91}$$

Geschwindigkeitsebene Mit den relativen Geschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ aus (6.89) und $\boldsymbol{v}_{ji} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ji}\,\boldsymbol{d}_{jj}$ ergeben sich aus (6.63) und (6.64) die expliziten Gelenkbindungen in der Form (6.67),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{xk} & \boldsymbol{e}_{yk} & \boldsymbol{e}_{zk} \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_{xk}\,\boldsymbol{d}_{jj} & \widetilde{\boldsymbol{e}}_{yk}\,\boldsymbol{d}_{jj} & \widetilde{\boldsymbol{e}}_{zk}\,\boldsymbol{d}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \eta_{j3} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j &= \boldsymbol{B}_{ji} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad + \quad \boldsymbol{C}_j \quad \boldsymbol{\eta}_j \,. \end{aligned} \tag{6.92}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$, $\boldsymbol{C}_j$ der expliziten Gelenkbindungen (6.92) und $\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{G}_j$ der impliziten Bindungen des Kugelgelenks (6.33) erfüllen unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{c}_j = -\boldsymbol{d}_{jj}$ die Orthogonalitätsbeziehungen (6.71) und (6.72).

Beschleunigungsebene Die Ableitung von (6.63) und (6.64) nach der Zeit liefert die Beschleunigung des Systems $\mathcal{K}_j$,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_j = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ji} \,, \tag{6.93}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_j = \dot{\boldsymbol{v}}_i + \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_i\,\boldsymbol{r}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{r}}_{ji} + \dot{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}}_{ji}\,\boldsymbol{d}_{jj} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ji}\,\dot{\boldsymbol{d}}_{jj} \,, \tag{6.94}$$

mit $\dot{\boldsymbol{r}}_{ji} = \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i$, $\dot{\boldsymbol{d}}_{jj} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \boldsymbol{d}_{jj}$ und

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ji} &= {}_k\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k \, \boldsymbol{\omega}_{ji} \\ \rightarrow \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ji} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{xk} & \boldsymbol{e}_{yk} & \boldsymbol{e}_{zk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\eta}_{j1} \\ \dot{\eta}_{j2} \\ \dot{\eta}_{j3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k \, \boldsymbol{e}_{xk} & \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k \, \boldsymbol{e}_{yk} & \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k \, \boldsymbol{e}_{zk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \eta_{j3} \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{6.95}$$

Die expliziten Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene können dann in die Form (6.73) gebracht werden mit dem nicht von den Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ abhängenden 6-Vektor

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k \, \boldsymbol{\omega}_{ji} \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, (\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i) - \widetilde{\boldsymbol{d}}_{jj} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k \, \boldsymbol{\omega}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ji} \, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \boldsymbol{d}_{jj} \end{bmatrix} . \tag{6.96}$$

Die Verwendung der Koordinaten der relativen Winkelgeschwindigkeit als Gelenkgeschwindigkeiten an Stelle der Zeitableitungen der EULER-Parameter bzw. auch anderer Koordinaten der Drehung, wie z.B. der KARDAN-Winkel, führt zu einem einfacheren Aufbau der expliziten Bindungen auf Geschwindigkeitsebene sowie der kinetischen Bewegungsgleichungen. Ein Beispiel wird in Abschnitt 7.6.2 behandelt.

6.6 Reaktionsbedingungen für holonome Gelenke

Wird das Gelenk zwischen den Körpern $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ freigeschnitten, so können die zu den b_{ij} Bindungen (6.23) gehörenden Reaktionskräfte und -momente als Kraftwinder bezüglich der Ursprungspunkte der Koordinatensysteme ausgedrückt und zu räumlichen 6-Vektoren zusammengefaßt werden (Abb. 6.20),

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} , \qquad \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} . \tag{6.97}$$

Hierbei ist $\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}}$ der vom Körper $\mathcal{K}_i$ auf den Körper $\mathcal{K}_j$ wirkende Reaktionskraftwinder bezüglich O_j und $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}}$ der vom Körper $\mathcal{K}_j$ auf den Körper $\mathcal{K}_i$ wirkende Reaktionskraftwinder bezüglich O_i.

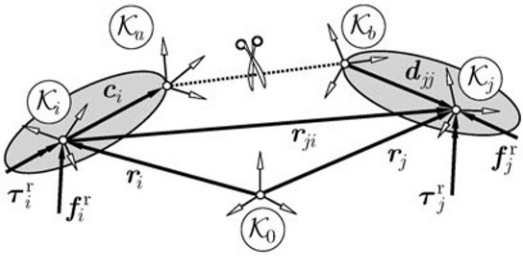


Abb. 6.20 Reaktionskraftwinder an einem allgemeinen Gelenk zwischen den Körpern $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$

6.6.1 Explizite Reaktionsbedingungen

Die Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}}$ liegen in den durch die Gelenkbindungen gesperrten Raumrichtungen, die durch die Zeilenvektoren der (b_{ij},12)-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}_{ij} = [\,\boldsymbol{G}_i \;\; \boldsymbol{G}_j\,]$ der impliziten Gelenkbindungen (6.68) definiert sind. Mit den b_{ij} minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ gelten die expliziten Reaktionsbedingungen

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{ij} \,. \tag{6.98}$$

Die expliziten Reaktionsbedingungen (6.98) werden in Abschnitt 8.3 für die Formulierung der dort so genannten sekundären Reaktionskraftwinder an den geschnittenen sekundären Gelenken von kinematischen Schleifen verwendet.

6.6.2 Implizite Reaktionsbedingungen

Die Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}}$ stehen senkrecht auf den freien Raumrichtungen der Gelenkbindungen, die durch die Spaltenvektoren der (12,12)-Matrix $\boldsymbol{L}_{ji}$ der expliziten Gelenkbindungen (6.69) definiert sind. Es gelten die impliziten Reaktionsbedingungen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}_{ji}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_j^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{L}_{ji}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{6.99}$$

oder

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} + \boldsymbol{B}_{ji}^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{6.100}$$

$$\boldsymbol{C}_j^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0} \,. \tag{6.101}$$

Die implizite Reaktionsbedingung (6.100) mit der Versatzmatrix $\boldsymbol{B}_{ji}$ gilt unabhängig vom Gelenktyp. Sie repräsentiert den Zusammenhang zwischen den Reaktionskraftwindern an den beiden Körpern unter Berücksichtigung des Gegenwirkungsprinzips und des Versatzmomentes von O_j nach O_i,

$$\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} = -\left(\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} + \widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji}\, \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}}\right) \,, \tag{6.102}$$

$$\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} = -\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \,. \tag{6.103}$$

Die implizite Reaktionsbedingung (6.101) hängt dagegen wegen der gelenkspezifischen JACOBI-Matrix $\boldsymbol{C}_j$ vom Gelenktyp ab.

Die Reaktionsbedingungen an einem Gelenk sind in Tabelle 6.11 zusammengefasst. In Abschnitt 6.6.3 werden sie für das Drehgelenk aufgestellt.

Tabelle 6.11 Reaktionsbedingungen an einem Gelenk (Matrizen aus Tabelle 6.10)

Explizite Reaktionsbedingungen (minimale Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$)	Implizite Reaktionsbedingungen
(6.98): $\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{ij}$	(6.99): $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}_{ji}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_j^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$

6.6.3 Reaktionsbedingungen für das Drehgelenk

Explizite Reaktionsbedingungen Für das Drehgelenk mit den $b_{ij} = 5$ impliziten Gelenkbindungen (6.55) werden die expliziten Reaktionsbedingungen (6.98) mit der (5,12)-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}_{ij} = [\,\boldsymbol{G}_i \;\; \boldsymbol{G}_j\,]$ der impliziten Gelenkbindungen (6.56) aufgestellt. Mit dem Vektor $\boldsymbol{\lambda}_{123} = [\,\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3\,]^{\mathrm{T}}$ gilt

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_{ij} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_i & -\widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{m}_i & -\widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{n}_i \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{123} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}, \tag{6.104}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_{ij} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_j & \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{m}_i & \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{n}_i \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{123} \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}. \tag{6.105}$$

Für die physikalische Interpretation werden die Reaktionskraftwinder umgerechnet auf einen beliebigen Punkt $P \equiv P_i \equiv P_j$ der Gelenkachse (Abb. 6.21),

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}(P)} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}(P)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} + (-\widetilde{\boldsymbol{c}}_i)\,\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{m}_i\,\lambda_4 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{n}_i\,\lambda_5 \\ -\boldsymbol{\lambda}_{123} \end{bmatrix}, \tag{6.106}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}(P)} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}(P)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} + (-\widetilde{\boldsymbol{c}}_j)\,\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{m}_i\,\lambda_4 + \widetilde{\boldsymbol{u}}_j\,\boldsymbol{n}_i\,\lambda_5 \\ \boldsymbol{\lambda}_{123} \end{bmatrix}. \tag{6.107}$$

Nach dem Gegenwirkungsprinzip sind die Reaktionskräfte und Reaktionsmomente an den beiden Schnittufern des Drehgelenks betragsgleich und entgegengesetzt gerichtet (Abb. 6.21). Die Reaktionsmomente $\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}(P)}$ bzw. $\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}(P)}$ stehen senkrecht auf der Gelenkachse $\boldsymbol{u}_j$. Wegen der freien Relativdrehung um die Gelenkachse tritt in Richtung von $\boldsymbol{u}_j$ kein Reaktionsmoment auf.

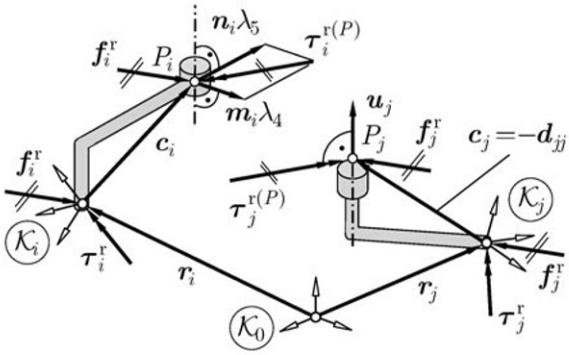


Abb. 6.21 Reaktionskräfte und -momente an einem freigeschnittenen Drehgelenk

Implizite Reaktionsbedingungen Die vom Gelenktyp unabhängige implizite Reaktionsbedingung (6.100) wurde bereits mit (6.102) und (6.103) interpretiert. Die gelenkspezifische implizite Reaktionsbedingung (6.101) lautet für das Drehgelenk mit der Matrix $\boldsymbol{C}_j$ aus (6.77)

$$\boldsymbol{C}_j^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{d}}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = 0\,. \tag{6.108}$$

bzw.

$$\boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\,(\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} + \widetilde{\boldsymbol{d}}_{jj}\,\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}(P)} = 0\,. \tag{6.109}$$

Das auf einem beliebigen Punkt P der Gelenkachse bezogene Reaktionsmoment $\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}(P)}$ steht senkrecht auf dem Achsvektor $\boldsymbol{u}_j$.

6.7 Nichtholonome Bindungen von Gelenken

Die Bindungen und Reaktionsbedingungen für nichtholonome Gelenke haben dieselbe algebraische Struktur wie die entsprechenden Beziehungen für holonome Gelenke. Die in Tabelle 6.10 zusammengefassten Formulierungen für die holonomen Gelenkbindungen aus den Abschnitten 6.4 bis 6.6 können daher auch für Gelenke mit nichtholonomen Bindungen angewandt werden. Entsprechend (6.4) ist hier die Anzahl der geometrischen Bindungen $b_{\mathrm{L}ij}$ kleiner als die Anzahl der kinematischen Bindungen b_{ij}. Dementsprechend ist der Lage-Gelenkfreiheitsgrad $f_{\mathrm{L}j}$ größer als der Gelenkfreiheitsgrad f_j.

Exemplarisch werden für eine auf einer Ebene schlupffrei abrollende Kugel die impliziten und expliziten Bindungen und die dazu gehörenden expliziten und impliziten Reaktionsbedingungen aufgestellt.

6.7.1 Implizite Bindungen eines nichtholonomen Gelenks

Eine Kugel (Mittelpunkt O_j, Radius R, kugelfestes Koordinatensystem $\mathcal{K}_j$) rollt auf der Ebene (Koordinatensystem $\mathcal{K}_i$) schlupffrei ab (Abb. 6.22). Der Fall des Abhebens der Kugel von der Ebene wird nicht betrachtet.

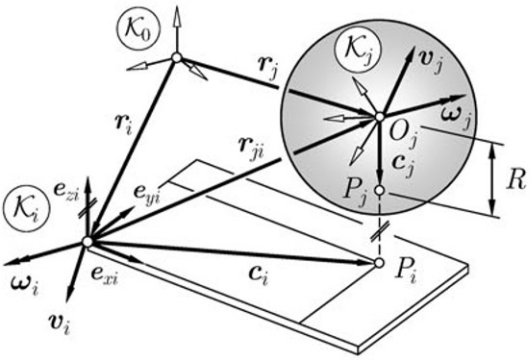


Abb. 6.22 Zur Formulierung der impliziten Bindungen einer auf einer Ebene abrollenden Kugel

Lageebene Der Kugelmittelpunkt O_j hat den konstanten Abstand R von der Ebene, entsprechend der Projektion des Differenzvektors $\boldsymbol{r}_{ji}$ auf den Normalen-Einheitsvektor der Ebene $\boldsymbol{e}_{zi}$. Dies ist $b_{\mathrm{L}ij} = 1$ holonome implizite Gelenkbindung des Typs II entsprechend (6.36),

$$g \equiv \boldsymbol{e}_{zi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{ji} - R = 0 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{r}_{ji} = \boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_i \,. \tag{6.110}$$

Geschwindigkeitsebene Die Kugel rollt schlupffrei ab, wenn die Differenzgeschwindigkeit der momentanen Berührpunkte P_j auf der Kugel und P_i auf der Ebene verschwindet,

$$\boldsymbol{v}_{Pj} - \boldsymbol{v}_{Pi} = \boldsymbol{0} \,. \tag{6.111}$$

Mit den Vektoren $\boldsymbol{c}_j$ von O_j nach P_j und $\boldsymbol{c}_i$ von O_i nach P_i können die Geschwindigkeiten von P_j und P_i ausgedrückt werden,

$$\boldsymbol{v}_{Pj} = \boldsymbol{v}_j + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j \, \boldsymbol{c}_j \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{c}_j = -R \, \boldsymbol{e}_{zi} \,, \tag{6.112}$$

$$\boldsymbol{v}_{Pi} = \boldsymbol{v}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i \, \boldsymbol{c}_i \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{r}_{ji} + \boldsymbol{c}_j \,. \tag{6.113}$$

Einsetzen von (6.112) und (6.113) in (6.111) führt auf ein System von $b_{ij} = 3$ impliziten kinematischen Gelenkbindungen, das die algebraische Form der holonomen kinematischen Bindungen (6.25) aufweist,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}_{ij} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_i & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_j & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\ &\rightarrow \quad \boldsymbol{G}_i \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad + \quad \boldsymbol{G}_j \quad \hat{\boldsymbol{v}}_j \quad = \boldsymbol{0} \,. \end{aligned} \tag{6.114}$$

Hierbei ist $\boldsymbol{\gamma}_{ij}$ das Residuum der kinematischen Bindungen. Skalare Multiplikation der kinematischen Bindungen (6.114) mit dem Normalenvektor der Ebene $\boldsymbol{e}_{zi}$ ergibt die Zeitableitung der geometrischen Bindung (6.110).

Freiheitsgrad Mit der $b_{\mathrm{L}ij} = 1$ geometrischen Bindung (6.110) und den $b_{ij} = 3$ kinematischen Bindungen (6.114) hat die Kugel relativ zur Ebene den Lage-Freiheitsgrad $f_{\mathrm{L}j} = 6 - b_{\mathrm{L}ij} = 5$ und den Freiheitsgrad $f_j = 6 - b_{ij} = 3$.

Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung der kinematischen Bindungen (6.114) ergibt die Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene in der algebraischen Form der holonomen Beschleunigungsbindungen (6.28),

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_{ij} \equiv \boldsymbol{G}_i\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i + \boldsymbol{G}_j\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = \boldsymbol{0}\,. \tag{6.115}$$

Der nicht von den Körperbeschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_j$ abhängende 3-Vektor lautet

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j\,\dot{\boldsymbol{c}}_j - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\dot{\boldsymbol{c}}_i \tag{6.116}$$

mit den Zeitableitungen der Vektorem $\boldsymbol{c}_j$ und $\boldsymbol{c}_i$ aus (6.112) und (6.113),

$$\dot{\boldsymbol{c}}_j = -R\,\dot{\boldsymbol{e}}_{zi} = -R\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{e}_{zi}\,, \tag{6.117}$$

$$\dot{\boldsymbol{c}}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_{ji} + \dot{\boldsymbol{c}}_j = \dot{\boldsymbol{r}}_{ji} - R\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{e}_{zi} \quad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{r}}_{ji} = \dot{\boldsymbol{r}}_j - \dot{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i\,. \tag{6.118}$$

Einsetzen von (6.117) und (6.118) in (6.116) ergibt

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{ij} = R\,(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_j - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i)\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{e}_{zi} - \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_i)\,. \tag{6.119}$$

6.7.2 Explizite Bindungen eines nichtholonomen Gelenks

Die Bewegung der Kugel relativ zur Ebene kann mit Hilfe expliziter Gelenkbindungen durch $f_{\mathrm{L}j} = 5$ unabhängige Gelenkkordinaten $\boldsymbol{\beta}_j$ und durch $f_j = 3$ unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}_j$ beschrieben werden.

Lageebene Als Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_j$ werden die vier EULER-Parameter $\underline{\boldsymbol{p}}_{ji}$, welche wie beim Kugelgelenk die Orientierung des Koordinatensystems $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ beschreiben, und zusätzlich die zwei Koordinaten s_1 und s_2 des Kontaktpunktes P auf der Abrollebene definiert (Abb. 6.23 a),

$$\boldsymbol{\beta}_j = \begin{bmatrix} {}^i\underline{\boldsymbol{p}}_{ji} \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}. \tag{6.120}$$

Die EULER-Parameter ${}^i\underline{\boldsymbol{p}}_{ji}$ unterliegen der Nebenbedingung (6.85).

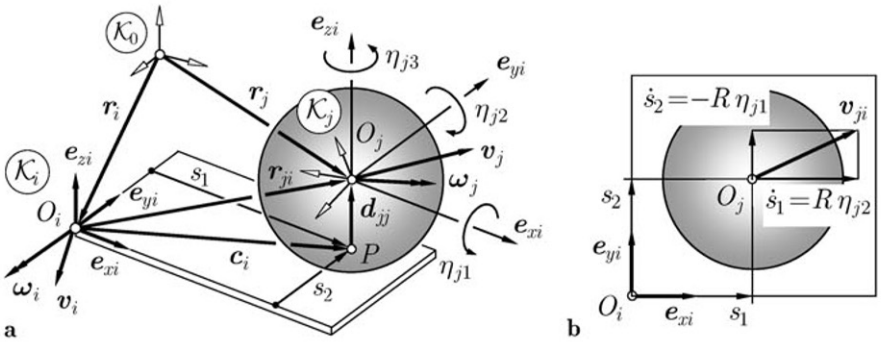


Abb. 6.23 Zur Formulierung der expliziten Bindungen einer auf einer Ebene abrollenden Kugel. **a** Geometrische und kinematische Größen. **b** Ansicht senkrecht zur Ebene

Mit der Drehmatrix ${}^{ij}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{R}({}^{i}\underline{\boldsymbol{p}}_{ji})$ gemäß (3.172) lauten dann die expliziten Bindungen für die abrollende Kugel (Vektor $\boldsymbol{d}_{jj} = -\boldsymbol{c}_j = R\,\boldsymbol{e}_{zi}$)

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} {}^{0j}\boldsymbol{T} \\ {}^{0}\boldsymbol{r}_j \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{c} {}^{0i}\boldsymbol{T}\;{}^{ij}\boldsymbol{T}({}^{i}\underline{\boldsymbol{p}}_{ji}) \\ {}^{0}\boldsymbol{r}_i + {}^{0i}\boldsymbol{T}\left(s_1\,{}^{i}\boldsymbol{e}_{xi} + s_2\,{}^{i}\boldsymbol{e}_{yi} + R\,{}^{i}\boldsymbol{e}_{zi}\right) \end{array} \right\} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{r}}_j &= \hat{\boldsymbol{r}}_j(\hat{\boldsymbol{r}}_i, \boldsymbol{\beta}_j)\,. \end{aligned} \tag{6.121}$$

Kinematische Differentialgleichung Als die $f_j = 3$ unabhängigen Gelenkgeschwindigkeiten η_j werden wie beim Kugelgelenk die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ um drei Achsen eines Koordinatensystems $\mathcal{K}_k$ definiert, wobei hier $\mathcal{K}_k \equiv \mathcal{K}_i$ gewählt wird,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \eta_{j3} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \omega_{ji,x} \\ \omega_{ji,y} \\ \omega_{ji,z} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta}_j &= {}^{i}\boldsymbol{\omega}_{ji}\,. \end{aligned} \tag{6.122}$$

Der Vektor der Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_j$ relativ zu $\mathcal{K}_i$ lautet damit

$$\boldsymbol{\omega}_{ji} = \eta_{j1}\,\boldsymbol{e}_{xi} + \eta_{j2}\,\boldsymbol{e}_{yi} + \eta_{j3}\,\boldsymbol{e}_{zi}\,. \tag{6.123}$$

Die Abrollbedingung liefert die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{ji}$ des Kugelmittelpunktes O_j relativ zu $\mathcal{K}_i$ in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_{ji} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ji}\,\boldsymbol{d}_{jj} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{d}_{jj} = R\,\boldsymbol{e}_{zi} \\ \rightarrow\; &\boldsymbol{v}_{ji} = -R\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_{zi}\,\boldsymbol{\omega}_{ji} \overset{(6.123)}{=} -R\,\boldsymbol{e}_{yi}\,\eta_{j1} + R\,\boldsymbol{e}_{xi}\,\eta_{j2}\,. \end{aligned} \tag{6.124}$$

Die Geschwindigkeiten $\dot{s}_1$ und $\dot{s}_2$ sind die x_i- und y_i-Komponenten der Relativgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_{ji}$ (Abb. 6.23 b),

$$\dot{s}_1 = \boldsymbol{e}_{xi}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_{ji} = -R\,\boldsymbol{e}_{xi}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_{zi}\,\omega_{ji} = R\,\boldsymbol{e}_{yi}^{\mathrm{T}}\,\omega_{ji} \quad \overset{(6.123)}{\longrightarrow} \quad \dot{s}_1 = R\,\eta_{j2}\,, \tag{6.125}$$

$$\dot{s}_2 = \boldsymbol{e}_{yi}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_{ji} = -R\,\boldsymbol{e}_{yi}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_{zi}\,\omega_{ji} = -R\,\boldsymbol{e}_{xi}^{\mathrm{T}}\,\omega_{ji} \quad \overset{(6.123)}{\longrightarrow} \quad \dot{s}_2 = -R\,\eta_{j1}\,. \tag{6.126}$$

Zusammen mit (6.90) gilt damit der vektorielle Zusammenhang

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{ji,\mathrm{s}} \\ {}_i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji} \\ \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} -\boldsymbol{p}_{ji}^{\mathrm{T}} \\ p_{ji,\mathrm{s}}\,\boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{p}}_{ji} \\ 2\,R\,\boldsymbol{e}_{yi}^{\mathrm{T}} \\ -2\,R\,\boldsymbol{e}_{xi}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{ji}\,. \tag{6.127}$$

Die Auswertung von (6.127) im System $\mathcal{K}_i$ liefert mit ${}^i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji} \equiv {}^i[\,{}_i\dot{\boldsymbol{p}}_{ji}\,]$ die kinematische Bewegungsgleichung des Gelenks

$$\begin{array}{ccccc} & \begin{bmatrix} \dot{p}_{ji,\mathrm{s}} \\ \hline {}^i\dot{p}_{ji,x} \\ {}^i\dot{p}_{ji,y} \\ {}^i\dot{p}_{ji,z} \\ \hline \dot{s}_1 \\ \dot{s}_2 \end{bmatrix} & = \tfrac{1}{2} & \begin{bmatrix} -{}^ip_{ji,x} & -{}^ip_{ji,y} & -{}^ip_{ji,z} \\ \hline {}^ip_{ji,\mathrm{s}} & {}^ip_{ji,z} & -{}^ip_{ji,y} \\ -{}^ip_{ji,z} & {}^ip_{ji,\mathrm{s}} & {}^ip_{ji,x} \\ {}^ip_{ji,y} & -{}^ip_{ji,x} & {}^ip_{ji,\mathrm{s}} \\ \hline 0 & 2R & 0 \\ -2R & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \eta_{j3} \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{\beta}}_j & = & \boldsymbol{H}_j(\boldsymbol{\beta}_j) & \boldsymbol{\eta}_j\,. \end{array} \tag{6.128}$$

Geschwindigkeitsebene Mit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ aus (6.123) und $\boldsymbol{v}_{ji}$ aus (6.124) ergeben sich aus (6.63) und (6.64) die expliziten Gelenkbindungen in der Form (6.67),

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_j \\ \boldsymbol{v}_j \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{xi} & \boldsymbol{e}_{yi} & \boldsymbol{e}_{zi} \\ -R\,\boldsymbol{e}_{yi} & R\,\boldsymbol{e}_{xi} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \eta_{j1} \\ \eta_{j2} \\ \eta_{j3} \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \hat{\boldsymbol{v}}_j & = & \boldsymbol{B}_{ji} & \hat{\boldsymbol{v}}_i & + & \boldsymbol{C}_j & \boldsymbol{\eta}_j\,. \end{array} \tag{6.129}$$

Die Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$, $\boldsymbol{C}_j$ aus (6.129) und $\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{G}_j$ aus (6.114) erfüllen unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{c}_j = -\boldsymbol{d}_{jj}$ die Orthogonalitätsbeziehungen (6.71), (6.72).

Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung von (6.129) ergibt die expliziten Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene in der Form (6.73) mit dem von den Beschleunigungen $\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}_i$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_j$ unabhängigen 6-Vektor

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_j^{\mathrm{rel}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\omega}_{ji} \\ \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,(\boldsymbol{v}_j - \boldsymbol{v}_j) + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{v}_{ji} \end{bmatrix} \tag{6.130}$$

mit $\boldsymbol{\omega}_{ji}$ aus (6.123) und $\boldsymbol{v}_{ji}$ aus (6.124).

6.7.3 Reaktionsbedingungen für ein nichtholonomes Gelenk

Explizite Reaktionsbedingungen Mit den Matrizen $\boldsymbol{G}_i$ und $\boldsymbol{G}_j$ der impliziten Gelenkbindungen (6.114) und den $b_{ij} = 3$ minimalen Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ lauten die expliziten Reaktionsbedingungen

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}_i^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_{ij} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_i \\ -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{ij}\,, \tag{6.131}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{G}_j^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_{ij} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_j \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{ij}\,. \tag{6.132}$$

Die Reaktionsmomente $\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}}$ und $\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}}$ sind die parallel zur x_i, y_i-Abrollebene liegenden Momente der Reaktionskraft $\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}}$ bzw. $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} = -\boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}}$ bezüglich der Ursprungspunkte der Bezugssysteme $\mathcal{K}_j$ bzw. $\mathcal{K}_i$ (Abb. 6.24). Bezüglich des Kontaktpunktes treten keine Reaktionsmomente auf.

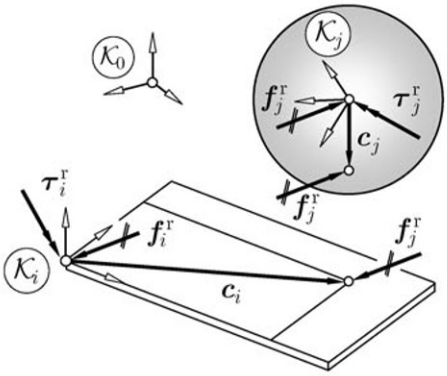


Abb. 6.24 Reaktionskraftwinder an einer auf einer Ebene abrollenden Kugel

Implizite Reaktionsbedingungen Mit der (6,3)-JACOBI-Matrix $\boldsymbol{C}_j$ aus (6.129) lauten die gelenkspezifischen impliziten Reaktionsbedingungen gemäß (6.101)

$$\boldsymbol{C}_j^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{xi}^{\mathrm{T}} & -R\,\boldsymbol{e}_{yi}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_{yi}^{\mathrm{T}} & R\,\boldsymbol{e}_{xi}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{e}_{zi}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6.133}$$

Hieraus folgt ebenfalls, dass das Reaktionsmoment $\boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{r}}$ parallel zur x_i, y_i-Abrollebene ist.

6.8 Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen

Mit den beschriebenen Bindungen von Gelenken und den dazu gehörenden Reaktionsbedingungen können verschiedene Formulierungen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen aufgebaut werden. Übersichten geben NIKRAVESH [71] und FEATHERSTONE [22]. Die im vorliegenden Buch behandelten Ansätze sind in Tabelle 6.12 zusammengefaßt.

Bewegungsgleichungen in absoluten Körperkoordinaten Für alle Gelenke des Systems werden die impliziten Bindungen verwendet. Die Bewegungsgleichungen werden in den absoluten Lagekoordinaten $\hat{\boldsymbol{r}}$ der Körper relativ zum raumfesten System $\mathcal{K}_0$ unter Berücksichtigung der expliziten Reaktionsbedingungen mit den minimalen Koordinaten der Reaktionskraftwinder an den Gelenken aufgestellt. Erhalten wird eine große Anzahl von Differentialgleichungen und algebraischen Bindungsgleichungen, die schwach miteinander verkoppelt sind. Nur bei freien Systemen sind die absoluten Koordinaten zugleich Minimalkoordinaten.

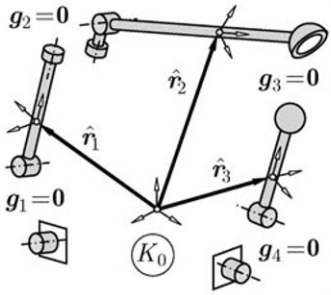
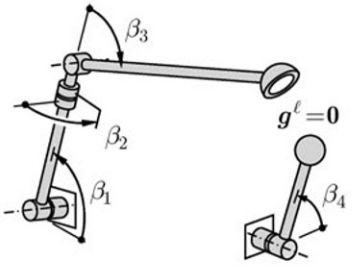
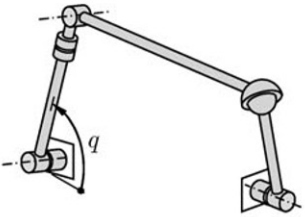
Die Methode lässt sich wegen des einheitlichen und von der Systemtopologie unabhängigen Aufbaus aller Gleichungen relativ einfach implementieren, siehe z.B. NIKRAVESH [70]. Für die numerische Auflösung nach den Unbekannten werden so genannte *sparse-matrix*-Techniken eingesetzt (ORLANDEA et al. [75]). Nachteilig ist die schlechtere numerische Effizienz. Dies äußert sich in erhöhten Rechenzeiten und in manchen Fällen auch in numerischen Problemen, die sich nicht mehr ohne Weiteres einer Ursache im mechanischen Modell zuordnen lassen.

Im vorliegenden Buch wird die Formulierung der Bewegungsgleichungen in absoluten Körperkoordinaten nicht gesondert betrachtet. Sie kann jedoch als ein Grenzfall der Formulierung in Gelenkkoordinaten für geschlossene Mehrkörpersysteme in Abschnitt 8.4 behandelt werden, indem vom raumfesten System $\mathcal{K}_0$ zu jedem Körper eine gedachte kinematische Kette mit drei Schubgelenken und einem Kugelgelenk eingeführt wird, deren Gelenkkoordinaten gerade die absoluten Körperkoordinaten sind. Beispiele werden in den Abschnitten 8.8 und 8.9 behandelt.

Bewegungsgleichungen offener und geschlossener MKS in Gelenkkoordinaten In Abschnitt 6.5 wurde gezeigt, dass für Dreh- und Schubgelenke und daraus zusammengesetzte Gelenke die expliziten Bindungen unmittelbar, also ohne die vorangehende Aufstellung der impliziten Bindungen, formuliert werden können. Damit werden die Bewegungsgleichungen offener Mehrkörpersysteme günstig in den Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ aufgestellt, die hier zugleich Minimalkoordinaten sind. Die Bewegungsgleichungen sind damit gewöhnliche Differentialgleichungen.

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den Gelenkkoordinaten wird von den auf Mehrkörpersysteme erweiterten Bestimmungsgleichungen aus Tabelle 5.5 ausgegangen. Für die recheneffiziente Elimination der Reaktionskräfte und Absolutbeschleunigungen wurden zahlreiche Formalis-

Tabelle 6.12 Formulierungen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen

Bewegungsgleichungen : (1) : kinematische Bewegungsgln. (2): kinetische Bewegungsgln. (3): algebraische Gleichung		**Beispiel :** Räumliches Gelenkviereck (RUSR-Mechanismus) Anz. Gln.	Schnittdarstellung
Bewegungsgleichungen in absoluten Körperkoordinaten			
(1):	$\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = \widehat{\boldsymbol{H}}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{v}}$	21*	
(2):	$\widehat{\boldsymbol{M}}\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}} = \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}}(\hat{\boldsymbol{r}},\hat{\boldsymbol{v}},t) + \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{r}},t)\,\boldsymbol{\lambda}$	18	
(3):	$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{r}},t)$	17	
	$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{\phi}(\hat{\boldsymbol{r}})^{*}$	3*	
bei freien Systemen Minimalkoordinaten			
Bewegungsgleichungen in Gelenkkoordinaten			
(1):	$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta}$	4	
(2):	$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},t)\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{ec}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) + \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta},t)\,\boldsymbol{\lambda}$	4	
(3):	$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t)$	3	
bei offenen Systemen Minimalkoordinaten			
Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten			
(1):	$\dot{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q})\,\boldsymbol{s}$	1	
(2):	$\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q},t)\,\dot{\boldsymbol{s}} = \overline{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{ec}}(\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{s},t)$	1	

*bei EULER-Parametern

men entwickelt. Nichtrekursive Formalismen werden u.A. von WALKER und ORIN [107], KIM undVANDERPLOEG [49] sowie NIKRAVESH und GIM [74] beschrieben. Die rekursive Elimination wird von VERESHCHAGIN [106] und später u.A. von BRANDL et al. [9] und BAE und HAUG [5] angegeben. Die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in Gelenkkoordinaten für offene Mehrkörpersysteme wird in Kapitel 7 behandelt.

Bei geschlossenen Mehrkörpersystemen sind die Gelenkkoordinaten über die impliziten Schleifenschließbedingungen miteinander verkoppelt und damit keine Minimalkoordinaten mehr. Die Bewegungsgleichungen in den Gelenkkoordinaten sind damit differential-algebraische Gleichungen. Im Vergleich zur Formulierung in Absolutkoordinaten ist die Anzahl der Gleichungen jedoch wesentlich kleiner, siehe z.B. Featherstone [22]. Rekursive Formalismen beschreiben u.A. Brandl et al. [10], Bae und Haug [6], Wehage [108] und Rein [84]. Die Bewegungsgleichungen für geschlossene Mehrkörpersysteme in Gelenkkoordinaten werden in Abschnitt 8.4 angegeben.

Bewegungsgleichungen geschlossener MKS in Minimalkoordinaten Um die Bewegungsgleichungen geschlossener Mehrkörpersysteme ebenfalls in der numerisch vorteilhaften Form der gewöhnlichen Differentialgleichungen zu erhalten, müssen die Gelenkkoordinaten mit Hilfe der expliziten Schleifenschließbedingungen durch Minimalkoordinaten ausgedrückt werden. Wegen der komplexen algebraischen Struktur der impliziten Schließbedingungen ist der Übergang auf die expliziten Schließbedingungen jedoch i. Allg. nur durch numerische Verfahren zu Lösung nichtlinearer algebraischer Gleichungssysteme möglich. Dieser Aufwand konkurriert dann mit dem Mehraufwand zur Lösung der differential-algebraischen Gleichungen bei der Formulierung in Gelenkkoordinaten.

Die Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten sind aber auf jeden Fall vorteilhaft, wenn die expliziten Schließbedingungen analytisch aufgestellt werden können, was bei vielen Systemen möglich ist, siehe Hiller [39] und Kecskeméthy [47]. Die Bewegungsgleichungen für geschlossene Mehrkörpersysteme in Minimalkoordinaten werden in Abschnitt 8.5 angegeben.

Bewegungsgleichungen in absoluten Punktkoordinaten Diese, im vorliegenden Buch nicht behandelte, Formulierung geht von der Überlegung aus, dass ein starrer Körper aus Massenpunkten aufgebaut werden kann, deren Abstand konstant ist, siehe Nikravesh und Affifi [73]. Die Koordinaten der Systembeschreibung sind dann die absoluten Lagekoordinaten der Punkte. Die Abstandsbedingungen werden als implizite Bindungen für diese Koordinaten formuliert. Gegenüber der Formulierung in absoluten Körperkoordinaten ist die Anzahl von Differentialgleichungen noch größer. Es wird aber keine Beschreibung von Starrkörperdrehungen z.B. durch Euler-Parameter benötigt, und auch die Formulierung vieler Gelenkbindungen wird einfacher. Zahlreiche Gelenke lassen sich bereits dadurch definieren, dass Punkte zugleich zwei Körpern angehören. Ein gemeinsamer Punkt entspricht z.B. einem Kugelgelenk, zwei gemeinsame Punkte beschreiben ein Drehgelenk. Weitere Gelenke lassen sich über Beziehungen zwischen Verbindungsvektoren von Punkten definieren. Einen verwandten Ansatz unter Verwendung körperfester Punkte und Richtungsvektoren beschreiben Garcia de Jalón und Bayo [25].

Kapitel 7
Offene Mehrkörpersysteme

Bei offenen Mehrkörpersystemen sind die Gelenkkoordinaten zugleich Minimalkoordinaten. Die Bewegungsgleichungen werden günstig als gewöhnliche Differentialgleichungen in den Gelenkkoordinaten aufgestellt, da die expliziten Bindungen zumindest bei Dreh- und Schubgelenken und daraus zusammengesetzten Gelenken unmittelbar, also ohne vorherige Aufstellung der impliziten Bindungen, analytisch formuliert werden können.

Auf der Grundlage der topologischen Beschreibung der Baumstruktur mit Hilfe von Topologiematrizen in Abschnitt 7.1 werden in Abschnitt 7.2 die expliziten Bindungen der einzelnen Körper mit Hilfe der in den Abschnitten 6.5 und 6.7.2 hergeleiteten expliziten Bindungen der Gelenke aufgebaut. Zusammen mit den dazu gehörenden impliziten Reaktionsbedingungen und den Impuls- und Drallsätzen der Körper wird in Abschnitt 7.3 ein System von linearen Bestimmungsgleichungen für die absoluten Beschleunigungen der Körper, die Gelenkbeschleunigungen und die Reaktionskraftwinder aufgestellt. Es bildet den gemeinsamen Zugang zu den nichtrekursiven und rekursiven Formalismen für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten, die in den Abschnitten 7.4 und 7.5 beschrieben werden. Beispiele offener Mehrkörpersysteme folgen in Abschnitt 7.6.

7.1 Topologie offener Mehrkörpersysteme

Gemäß Tabelle 6.7 (Seite 198) weisen offene Mehrkörpersysteme Ketten- oder Baumstruktur auf. Die Anzahl der Körper n_{K} (ohne Bezugskörper), im Folgenden vereinfacht durch n bezeichnet, stimmt mit der Anzahl der Gelenke n_{G} überein. Das raumfeste Bezugssystem wird auch als die *Baumwurzel* bezeichnet. Bei einem offenen Mehrkörpersystem besteht ein eindeutiger Weg vom raumfesten Bezugssystem hin zu jedem Körper des Systems. Entlang dieses Weges hat jeder Körper einen eindeutigen *Vorgängerkörper*. Der oder die unmittelbar an einen Körper anschließenden Körper werden als die *Nachfolgekörper* dieses Körpers bezeichnet. Ein Körper mit mehreren Nach-

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_7, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

folgekörpern wird *Verzweigungskörper* genannt. Die jeweils äußeren Körper, die keinen Nachfolgekörper besitzen, werden als *Blattkörper* bezeichnet.

Die n Körper werden nun so nummeriert, dass entlang aller Wege vom raumfesten System zu den Blattkörpern aufsteigende Nummernfolgen vorliegen, wobei die Ziffern von 1 bis n verwendet werden. Dem raumfesten System wird die Ziffer 0 zugeordnet. Abbildung 7.1 zeigt drei Beispiele.

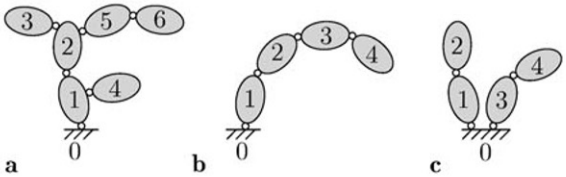


Abb. 7.1 Zur topologischen Beschreibung offener Mehrkörpersysteme

Die topologische Beschreibung des Systems gibt wieder, welche Körper des Systems durch Gelenke miteinander verbunden sind. Hierzu werden zwei Matrizen, die *Inzidenzmatrix* $\boldsymbol{S}$ und die *Wegematrix* $\boldsymbol{T}$, gebildet. Die (n,n)-Inzidenzmatrix $\boldsymbol{S}$ gibt für jeden Körper i den jeweiligen Vorgängerkörper $p(i)$ an. Die Elemente S_{ij} der Inzidenzmatrix $\boldsymbol{S}$ lauten

$$S_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j \qquad \text{(Hauptdiagonale)} \\ -1 & \text{für} \quad j = p(i) \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{7.1}$$

Die Baumstruktur mit $n = 6$ Körpern in Abb. 7.1 a besitzt damit die (6,6)-Inzidenzmatrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & \boxed{2} & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow \boxed{5} \\ \leftarrow 6 \end{array}\,. \tag{7.2}$$

Wegen der vom raumfesten System 0 aufsteigenden Körpernummern liegt eine untere Dreieckmatrix vor. Alle Hauptdiagonalelemente sind 1. Exemplarisch wird der Körper $i = 5$ betrachtet. Er hat den Vorgängerkörper $p(5) = 2$. In Zeile $i = 5$ steht damit an der Stelle $p(5) = 2$ das Element -1.

Die (n,n)-*Wegematrix* $\boldsymbol{T}$ gibt an, welche Körper entlang des Weges vom raumfesten System 0 zu einem Körper liegen. Ihre Elemente T_{ij} lauten

$$T_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad i = j \qquad \text{(Hauptdiagonale)} \\ 1 & \text{falls} \quad j \text{ auf dem Weg von 0 nach } i \text{ liegt} \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{7.3}$$

Die Wegematrix $\boldsymbol{T}$ ist die Inverse der Inzidenzmatrix $\boldsymbol{S}$, also

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}^{-1} \qquad \text{oder} \qquad \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\,. \tag{7.4}$$

Die Baumstruktur in Abb. 7.1 a besitzt gemäß (7.3) die (6,6)-Wegematrix

$$\boldsymbol{T} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \boxed{5} & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow 1 \\ \leftarrow 2 \\ \leftarrow 3 \\ \leftarrow 4 \\ \leftarrow \boxed{5} \\ \leftarrow 6 \end{array} . \tag{7.5}$$

Die Wegematrix ist ebenfalls eine untere Dreieckmatrix. Alle Hauptdiagonalelemente sind 1. Exemplarisch wird wieder der Körper $i = 5$ betrachtet. Die Indizes der Körper entlang des Weges vom raumfesten System 0 zum Körper 5 sind 1 und 2. Dementsprechend steht in der Zeile $i = 5$ an den Elementen 1 und 2 jeweils eine 1.

Für die Kettenstruktur in Abb. 7.1 b mit $n = 4$ Körpern lauten die (4,4)-Inzidenz- und Wegematrizen

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.6}$$

Für die Baumstruktur mit $n = 4$ Körpern in Abb. 7.1 c lauten die (4,4)-Inzidenz- und Wegematrizen

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.7}$$

7.2 Kinematik offener Mehrkörpersysteme

Die Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Körper eines offenen Mehrkörpersystems werden mit Hilfe der expliziten Bindungen in Abhängigkeit von den Gelenkkoordinaten, Gelenkgeschwindigkeiten und Gelenkbeschleunigungen ausgedrückt.

7.2.1 Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten

Ein offenes Mehrkörpersystem besitzt $n\,(= n_{\mathrm{K}} = n_{\mathrm{G}})$ Körper und Gelenke und weist Ketten- oder Baumstruktur auf (Abb. 7.2). Die Lage der Körper wird durch körperfeste Koordinatensysteme $\mathcal{K}_i$ (Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{p(i)}$) repräsentiert, deren Ursprungspunkte O_i i. Allg. nicht mit den Massenmittelpunkten S_i übereinstimmen. Die Lage und Geschwindigkeit der Körper relativ zu einem Inertialsystem $\mathcal{K}_0$ werden entsprechend (6.18) und (6.19) beschrieben durch die Lagegrößen und Geschwindigkeitsvektoren

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \{\boldsymbol{R}_i,\, \boldsymbol{r}_i\}\,, \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{7.8}$$

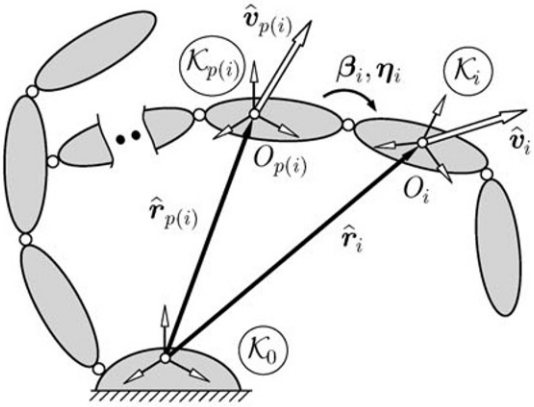


Abb. 7.2 Mehrkörpersystem mit Baumstruktur, Körper $\mathcal{K}_i$ mit Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{p(i)}$ (Bewegungswinder $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ durch Doppelpfeil gekennzeichnet)

Jedem Körper $\mathcal{K}_i$ ist ein i. Allg. nichtholonomes Gelenk mit dem Lage-Freiheitsgrad $f_{\mathrm{L}i}$ und dem Freiheitsgrad f_i und den relativen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_i$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}_i$ eindeutig zugeordnet,

$$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} \beta_{i,1} \\ \vdots \\ \beta_{i,f_{\mathrm{L}i}} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta}_i = \begin{bmatrix} \eta_{i,1} \\ \vdots \\ \eta_{i,f_i} \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

Bei holonomen Gelenken ist $f_{\mathrm{L}i} = f_i$. Werden gemäß (6.84) EULER-Parameter als Gelenkkoordinaten verwendet, so ist $\dim(\boldsymbol{\beta}_i) = f_{\mathrm{L}i} + 1$, und es gilt die Nebenbedingung (6.59),

$$\phi_i(\boldsymbol{\beta}_i) = 0\,. \tag{7.10}$$

Die Zeitableitungen der Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_i$ sind durch kinematische Bewegungsgleichungen mit der $(\dim(\boldsymbol{\beta}_i), f_i)$-Matrix $\boldsymbol{H}_i$ mit den Gelenkgeschwin-

digkeiten $\boldsymbol{\eta}_i$ verknüpft,

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_i = \boldsymbol{H}_i(\boldsymbol{\beta}_i)\,\boldsymbol{\eta}_i\,. \tag{7.11}$$

Das gesamte Mehrkörpersystem hat den Lage-Freiheitsgrad $f_\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} f_{\mathrm{L}i}$. Die relativen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}_i$ aller n Gelenke werden zusammengefasst zum f_L-Vektor der Gelenkkoordinaten

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\beta} = \left[\, \boldsymbol{\beta}_1^\mathrm{T} \;\; \boldsymbol{\beta}_2^\mathrm{T} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{\beta}_n^\mathrm{T} \,\right]^\mathrm{T}. \tag{7.12}$$

Die Nebenbedingungen (7.10) ggf. verwendeter EULER-Parameter werden zusammengefasst zu

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{7.13}$$

Der Vektor $\boldsymbol{\beta}$ aus (7.12) hat dann die Dimension $\dim(\boldsymbol{\beta}) = f_\mathrm{L} + \dim(\boldsymbol{\phi})$.

Der Freiheitsgrad des Mehrkörpersystems ist $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$. Die f unabhängigen relativen Geschwindigkeiten der Gelenke $\boldsymbol{\eta}_i$ werden zusammengefasst zum f-Vektor der Gelenkgeschwindigkeiten

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\eta} = \left[\, \boldsymbol{\eta}_1^\mathrm{T} \;\; \boldsymbol{\eta}_2^\mathrm{T} \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{\eta}_n^\mathrm{T} \,\right]^\mathrm{T}. \tag{7.14}$$

Die kinematischen Bewegungsgleichungen (7.11) werden zusammengefasst zu

$$\begin{array}{cccc} & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \vdots \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{\beta}_1) & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \boldsymbol{H}_n(\boldsymbol{\beta}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{\beta}} & = & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \qquad\qquad \boldsymbol{\eta} \end{array} \tag{7.15}$$

mit der $(f_\mathrm{L} + \dim(\boldsymbol{\phi}), f)$-Matrix $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})$. Im Standardfall $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}}$, der insbesondere bei Dreh- und Schubgelenken gewählt wird, siehe Abschnitte 6.5.2 und 6.5.3, ist $f_\mathrm{L} = f$, $\dim(\boldsymbol{\phi}) = 0$ und $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$.

7.2.2 Explizite Bindungen einer Kettenstruktur

Die expliziten Bindungen in offenen Mehrkörpersystemen liefern die absoluten Bewegungsgrößen aller Körper, wenn die relativen Bewegungen durch die Gelenkkoordinaten vorgegeben sind. Diese Berechnung wird auch als *Vorwärtskinematik* bezeichnet, vgl. Abschnitt 3.2.3. Die expliziten Bindungen eines offenen Mehrkörpersystems werden mit Hilfe der expliziten Gelenkbindungen aus Abschnitt 6.5 aufgestellt. In diesem Abschnitt werden Systeme mit Kettenstruktur betrachtet. Entsprechend Abschnitt 7.1 seien die n Körper ausgehend vom Inertialsystem $\mathcal{K}_0$ aufsteigend nummeriert (Abb. 7.3).

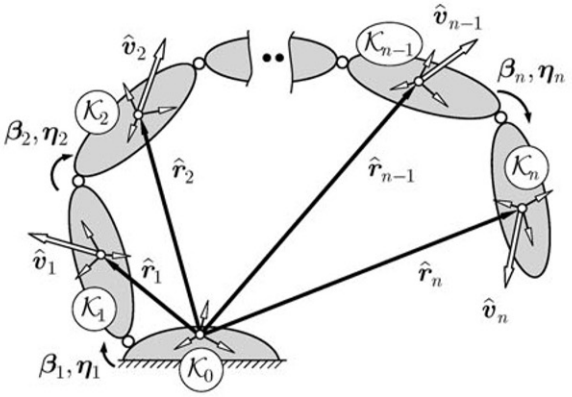


Abb. 7.3 Zur Berechnung der expliziten Bindungen eines Systems mit Kettenstruktur

Explizite Bindungen auf Lageebene Bei gegebenen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ können die Lagegrößen aller Körper relativ zum System $\mathcal{K}_0$ berechnet werden, indem die expliziten Gelenkbindungen (6.60) ausgehend vom Inertialsystem $\mathcal{K}_0$ (Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_0$ mit $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{0}$ und $\boldsymbol{R}_0 = \boldsymbol{E}$) rekursiv ausgewertet werden,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i(\hat{\boldsymbol{r}}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}_i, t), \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{7.16}$$

Werden die Gelenkbindungen (7.16) sukzessive ineinander eingesetzt, so werden die expliziten *Körperbindungen* erhalten, welche die Lage der Körper in Abhängigkeit von den Gelenkkoordinaten beschreiben,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i(\boldsymbol{\beta}, t), \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{7.17}$$

In zusammenfassender Matrizenschreibweise lauten die expliziten Körperbindungen (7.17)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{r}}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{r}}_1(\boldsymbol{\beta}, t) \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{r}}_n(\boldsymbol{\beta}, t) \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{r}} \quad &= \quad \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\beta}, t)\ . \end{aligned} \tag{7.18}$$

Explizite Bindungen auf Geschwindigkeitsebene Bei gegebenen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ können die Geschwindigkeiten der Körper $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ ausgehend vom ruhenden System $\mathcal{K}_0$, also $\hat{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{0}$, mit Hilfe der expliziten Gelenkbindungen (6.67) rekursiv berechnet werden,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{i,i-1} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_{i-1} \\ \boldsymbol{v}_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}i} \\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{T}i} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_i + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\omega}}_i^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\boldsymbol{v}}_i^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_i \quad &= \quad \boldsymbol{B}_{i,i-1} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_{i-1} \quad + \quad \boldsymbol{C}_i \quad \boldsymbol{\eta}_i + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_i^{\mathrm{rel}} \quad , \ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Mit der globalen $(6n,6n)$-Versatzmatrix $\boldsymbol{B}(\hat{\boldsymbol{r}})$, der globalen $(6n,f)$-JACOBI-Matrix der Gelenke $\boldsymbol{C}(\hat{\boldsymbol{r}})$ und dem nur bei rheonomen Bindungen auftretenden $6n$-Vektor $\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}}(\hat{\boldsymbol{r}},t)$ lauten die Gelenkbindungen (7.19)

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_{32} & \boldsymbol{E} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & -\boldsymbol{B}_{n,n-1} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \hat{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} = \\
\rightarrow\quad & \qquad\qquad \boldsymbol{B} \qquad\qquad\qquad\qquad \hat{\boldsymbol{v}} \qquad = \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3 & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{C}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \boldsymbol{\eta}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{n-1} \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_2^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_3^{\mathrm{rel}} \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_{n-1}^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_n^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} \\
&= \qquad\qquad \boldsymbol{C} \qquad\qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\eta} \qquad + \qquad \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}} \ .
\end{aligned}
\tag{7.20}
$$

Der Aufbau der Versatzmatrix $\boldsymbol{B}$ folgt aus der Inzidenzmatix $\boldsymbol{S}$ der Kettenstruktur gemäß (7.6), indem die mit 1 belegten Hauptdiagonalelemente S_{ii} durch (6,6)-Einheitsmatrizen $\boldsymbol{E}$ und die mit -1 belegten Nebendiagonalelemente S_{ji} durch die (6,6)-Versatzmatrizen $-\boldsymbol{B}_{ji}$ ersetzt werden.

Die expliziten Körperbindungen auf Geschwindigkeitsebene liefern die Geschwindigkeiten der Körper in Abhängigkeit von den Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und den Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$. Sie werden durch Multiplikation der Gelenkbindungen (7.20) mit $\boldsymbol{B}^{-1}$ von links erhalten,

$$\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{B}^{-1}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}} \ . \tag{7.21}$$

Die Inverse $\boldsymbol{B}^{-1}$ existiert stets, da $\boldsymbol{B}$ als eine untere Dreieckmatrix, deren Hauptdiagonalelemente den Wert 1 haben, regulär ist. Sie lässt sich herleiten, indem die Gelenkbindungen (7.19), also (Abkürzung $\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{\eta}_i + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_i^{\mathrm{rel}}$)

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}}_1 &= \boldsymbol{B}_{10}\,\hat{\boldsymbol{v}}_0 + \boldsymbol{y}_1 \qquad \text{mit} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{0}\,, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_2 &= \boldsymbol{B}_{21}\,\hat{\boldsymbol{v}}_1 + \boldsymbol{y}_2\,, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \boldsymbol{B}_{32}\,\hat{\boldsymbol{v}}_2 + \boldsymbol{y}_3\,, \\
&\ \vdots \\
\hat{\boldsymbol{v}}_n &= \boldsymbol{B}_{n,n-1}\,\hat{\boldsymbol{v}}_{n-1} + \boldsymbol{y}_n\,,
\end{aligned}
$$

sukzessive ineinander eingesetzt werden,

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}}_1 &= \boldsymbol{y}_1 \,, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_2 &= \boldsymbol{B}_{21}\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \,, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \boldsymbol{B}_{32}\,\boldsymbol{B}_{21}\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{B}_{32}\,\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3 \,, \\
&\vdots \\
\hat{\boldsymbol{v}}_n &= \boldsymbol{B}_{n,n-1}\cdots\boldsymbol{B}_{21}\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{B}_{n,n-1}\cdots\boldsymbol{B}_{32}\,\boldsymbol{y}_2 + \ldots + \boldsymbol{B}_{n,n-1}\,\boldsymbol{y}_{n-1} + \boldsymbol{y}_n \,.
\end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

Zwei Versatzmatrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ und $\boldsymbol{B}_{kj}$ können durch ihren Aufbau gemäß (7.19) unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{r}_{ki} = \boldsymbol{r}_{ji} + \boldsymbol{r}_{kj}$ entsprechend Abb. 7.4 zu der gleichartig aufgebauten Versatzmatrix $\boldsymbol{B}_{ki}$ multipliziert werden,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ki} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{kj} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \\
\rightarrow \quad &\boldsymbol{B}_{ki} = \boldsymbol{B}_{kj} \quad \boldsymbol{B}_{ji} \,.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

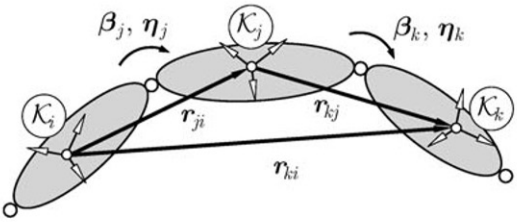


Abb. 7.4 Zur Zusammenfassung der Versatzmatrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ und $\boldsymbol{B}_{kj}$ in (7.23)

Damit lautet (7.22)

$$\left.\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}}_1 &= \boldsymbol{y}_1 \,, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_2 &= \boldsymbol{B}_{21}\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 \,, \\
\hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \boldsymbol{B}_{31}\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{B}_{32}\,\boldsymbol{y}_2 + \boldsymbol{y}_3 \,, \\
&\vdots \\
\hat{\boldsymbol{v}}_n &= \boldsymbol{B}_{n,1}\,\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{B}_{n,2}\,\boldsymbol{y}_2 + \ldots + \boldsymbol{B}_{n,n-1}\,\boldsymbol{y}_{n-1} + \boldsymbol{y}_n
\end{aligned}\right\} \tag{7.24}$$

oder in Blockmatrizenform

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \hat{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \ldots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{31} & \boldsymbol{B}_{32} & \boldsymbol{E} & \ldots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{n-1,1} & \boldsymbol{B}_{n-1,2} & \boldsymbol{B}_{n-1,3} & \ldots & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{n,1} & \boldsymbol{B}_{n,2} & \boldsymbol{B}_{n,3} & \ldots & \boldsymbol{B}_{n,n-1} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \boldsymbol{y}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_{n-1} \\ \boldsymbol{y}_n \end{bmatrix} \\
\rightarrow \quad &\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{B}^{-1} \quad \boldsymbol{y} \,.
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Die Matrix $\boldsymbol{B}^{-1}$ geht damit aus der Wegematrix $\boldsymbol{T}$ aus (7.6) hervor, indem die mit 1 belegten Hauptdiagonalelemente T_{ii} durch (6,6)-Einheitsmatrizen $\boldsymbol{E}$ und die mit 1 belegten Nebendiagonalelemente T_{ji} durch die (6,6)-Versatzmatrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ ersetzt werden.

Mit $\boldsymbol{B}^{-1}$ aus (7.25) lauten die expliziten Körperbindungen (7.21)

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}\;\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{B}^{-1}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}} \\ \rightarrow\ \hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J}\;\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_n \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.26}$$

mit der globalen $(6n,f)$-JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta},t)$ aller Körper und dem nur bei rheonomen Gelenkbindungen auftretenden $6n$-Vektor $\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}(\boldsymbol{\beta},t) = \boldsymbol{B}^{-1}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}}$.

Die globale JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ lautet

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J} &= \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \boldsymbol{J}_2 \\ \boldsymbol{J}_3 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_{n-1} \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{21}\,\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{31}\,\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_{32}\,\boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{n-1,1}\,\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_{n-1,2}\,\boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{C}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{n,1}\,\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B}_{n,2}\,\boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{B}_{n,n-1}\,\boldsymbol{C}_{n-1} & \boldsymbol{C}_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Die Zeilenmatrizen von $\boldsymbol{J}$ sind die $(6,f)$-JACOBI-Matrizen $\boldsymbol{J}_i$ der einzelnen Körper $\mathcal{K}_i$. Sie setzen sich wiederum aus der $(3,f)$-JACOBI-*Matrix der Rotation* $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}$ und der $(3,f)$-JACOBI-*Matrix der Translation* $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}$ zusammen. Die expliziten Bindungen der Körper aus (7.26) lauten dann

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{v}}_i &= \boldsymbol{J}_i\;\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_i \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{v}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\omega}}_i \\ \bar{\boldsymbol{v}}_i \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

In der $(6,f)$-JACOBI-Matrix des Körpers $\mathcal{K}_j$

$$\boldsymbol{J}_j = \left[\ \boldsymbol{J}_{j1}\ \ \boldsymbol{J}_{j2}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{J}_{jj}\ \ \boldsymbol{0}\ \ \dots\ \ \boldsymbol{0}\ \right] \tag{7.29}$$

stehen die $(6,f_i)$-Matrizen

$$\boldsymbol{J}_{ji} = \begin{cases} \boldsymbol{B}_{ji}\,\boldsymbol{C}_i & \text{für } j \geq i \qquad (\boldsymbol{B}_{jj} = \boldsymbol{E}) \\ \boldsymbol{0} & \text{für } j < i\,, \end{cases} \tag{7.30}$$

welche den Einfluß der Gelenkgeschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}_i$ des i-ten Gelenks auf die Geschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}_j$ des Körpers $\mathcal{K}_j$ beschreiben. Die expliziten Körperbindungen (7.26) lauten damit

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J} \quad \boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_{n-1} \\ \hat{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \dots \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \dots \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{J}_{n-1,1} & \boldsymbol{J}_{n-1,2} & \dots \boldsymbol{J}_{n-1,n-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{n,1} & \boldsymbol{J}_{n,2} & \dots \boldsymbol{J}_{n,n-1} & \boldsymbol{J}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{n-1} \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_{n-1} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_n \end{bmatrix} .
\end{aligned} \tag{7.31}$$

Explizite Bindungen auf Beschleunigungsebene Bei gegebenen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$, Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ und Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ können die Beschleunigungen aller Körper relativ zum System $\mathcal{K}_0$ mit Hilfe der expliziten Gelenkbindungen (6.73) rekursiv berechnet werden,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{i,i-1} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{R}i} \\ \boldsymbol{C}_{\mathrm{T}i} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_i + \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} \\
\rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}}_i &= \boldsymbol{B}_{i,i-1} \quad \hat{\boldsymbol{a}}_{i-1} + \boldsymbol{C}_i \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_i + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}} \quad , \; i = 1, \dots, n \, .
\end{aligned} \tag{7.32}$$

In Analogie zu (7.20) können die Gelenkbindungen (7.32) in Matrizenform zusammengefasst werden zu

$$\boldsymbol{B}\, \hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{C}\, \dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \tag{7.33}$$

mit den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ sowie dem von $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ unabhängigen $6n$-Vektor

$$\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}, t) = \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_n^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} . \tag{7.34}$$

Die expliziten Körperbindungen auf Beschleunigungsebene werden in Analogie zu (7.21) durch Multiplikation von (7.33) mit der Matrix $\boldsymbol{B}^{-1}$ von links erhalten. In Anlehnung an (7.26) lauten sie

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{a}} &= \boldsymbol{B}^{-1}\, \boldsymbol{C} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{B}^{-1}\, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \\
\rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}} &= \boldsymbol{J} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.35}$$

mit der globalen $(6n,f)$-JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta},t)$ gemäß (7.27) und dem von den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ unabhängigen $6n$-Vektor $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) = \boldsymbol{B}^{-1}\,\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}}$ mit den Anteilen der Körper $\mathcal{K}_i$

$$\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_i = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_i \\ \bar{\boldsymbol{a}}_i \end{bmatrix}. \tag{7.36}$$

Der Vektor $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}$ kann auch ausgehend von (7.31) mit Hilfe der Zeitableitung der globalen JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ ausgedrückt werden,

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}} & = & \dot{\boldsymbol{J}} & \boldsymbol{\eta} & + & \dot{\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_1 \\ \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_2 \\ \vdots \\ \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_{n-1} \\ \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{J}}_{11} & \boldsymbol{0} & \dots \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{21} & \dot{\boldsymbol{J}}_{22} & \dots \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots \; \vdots & \vdots \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{n-1,1} & \dot{\boldsymbol{J}}_{n-1,2} & \dots \dot{\boldsymbol{J}}_{n-1,n-1} & \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{n,1} & \dot{\boldsymbol{J}}_{n,2} & \dots \dot{\boldsymbol{J}}_{n,n-1} & \dot{\boldsymbol{J}}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\eta}_{n-1} \\ \boldsymbol{\eta}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}}_1 \\ \dot{\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}}_{n-1} \\ \dot{\bar{\tilde{\boldsymbol{v}}}}_n \end{bmatrix}. \tag{7.37}$$

7.2.3 Kettenstruktur mit Standardgelenken

Für die expliziten Körperbindungen auf Geschwindigkeitsebene (7.31) und Beschleunigungsebene (7.37) werden die JACOBI-Matrizen $\boldsymbol{J}_{ji}$ und deren Zeitableitung $\dot{\boldsymbol{J}}_{ji}$ benötigt. Diese Matrizen hängen vom Typ des Gelenks am Körper $\mathcal{K}_i$ ab. Im Folgenden werden $\boldsymbol{J}_{ji}$ und $\dot{\boldsymbol{J}}_{ji}$ für das Drehgelenk, das Schubgelenk und das Kugelgelenk angegeben, deren explizite Bindungen in den Abschnitten 6.5.2 bis 6.5.4 betrachtet worden sind.

Drehgelenk Für ein Drehgelenk (Gelenkwinkel β_i um die Gelenkachse $\boldsymbol{u}_i$, Geschwindigkeit $\eta_i = \dot{\beta}_i$) in einer offenen kinematischen Kette entsprechend Abb. 7.5 lautet die Matrix $\boldsymbol{J}_{ji}$ gemäß (7.30) unter Berücksichtigung der Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ und $\boldsymbol{C}_i$ aus (6.77)

$$\boldsymbol{J}_{ji} = \boldsymbol{B}_{ji}\,\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_i\,\boldsymbol{d}_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_i\,\boldsymbol{d}_{ji} \end{bmatrix} \tag{7.38}$$

mit dem Vektor $\boldsymbol{d}_{ji} = \boldsymbol{d}_{ii} + \boldsymbol{r}_{ji}$ von der Gelenkachse $\boldsymbol{u}_i$ zum Körper $\mathcal{K}_j$. Die Matrix $\dot{\boldsymbol{J}}_{ji}$ ergibt sich daraus zu

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{ji} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_i \\ \dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_i\,\boldsymbol{d}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{u}}_i\,\dot{\boldsymbol{d}}_{ji} \end{bmatrix} \tag{7.39}$$

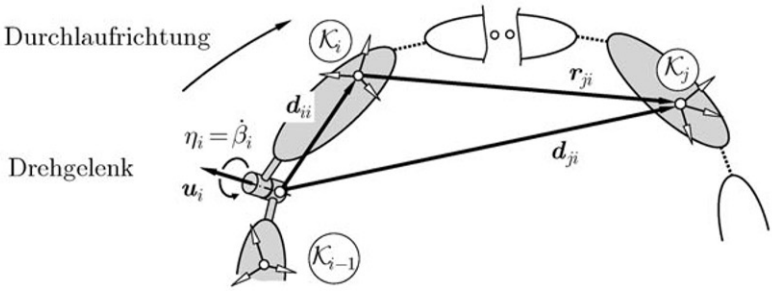


Abb. 7.5 Zur Berechnung der expliziten Bindungen bei einem Drehgelenk

mit den Zeitableitungen der Vektoren

$$\dot{\boldsymbol{u}}_i = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}\, \boldsymbol{u}_i\,, \qquad \dot{\boldsymbol{d}}_{ji} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{i-1}\, \boldsymbol{d}_{ji} + \sum_{\alpha=i}^{j} \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\alpha,\alpha-1}\, \boldsymbol{d}_{j\alpha}\,. \tag{7.40}$$

Schubgelenk Für ein Schubgelenk (Verschiebung β_i in Richtung der Gelenkachse $\boldsymbol{u}_i$, Schiebegeschwindigkeit $\eta_i = \dot{\beta}_i$) gemäß Abb. 7.6 gilt unter Berücksichtigung der Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ und $\boldsymbol{C}_i$ aus (6.81)

$$\boldsymbol{J}_{ji} = \boldsymbol{B}_{ji}\, \boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \boldsymbol{J}_{ji} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_i \end{bmatrix}. \tag{7.41}$$

Die Matrix $\dot{\boldsymbol{J}}_{ji}$ ergibt sich daraus mit $\dot{\boldsymbol{u}}_i$ aus (7.40) zu

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{ji} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{u}}_j \end{bmatrix}. \tag{7.42}$$

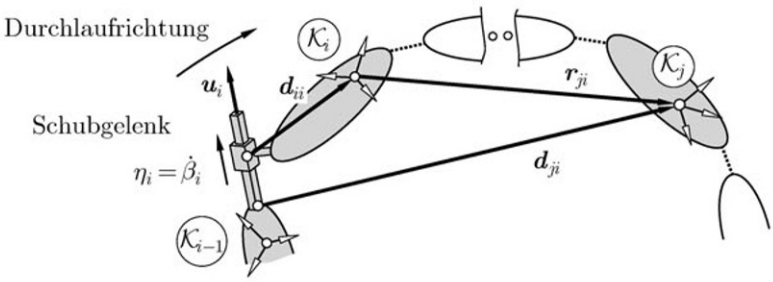


Abb. 7.6 Zur Berechnung der expliziten Bindungen bei einem Schubgelenk

Kugelgelenk Für ein Kugelgelenk lautet die Matrix $\boldsymbol{J}_{ji}$ mit den Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ und $\boldsymbol{C}_i$ aus (6.92) und mit den entsprechend (6.89) definierten Gelenkgeschwindigkeiten $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \eta_{i3}$ um die Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_{xk}, \boldsymbol{e}_{yk}, \boldsymbol{e}_{zk}$ eines zu definierenden Koordinatensystems $\mathcal{K}_k$ gemäß Abb. 7.7

$$\boldsymbol{J}_{ji} = \boldsymbol{B}_{ji}\,\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\widetilde{\boldsymbol{r}}_{ji} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{xk} & \boldsymbol{e}_{yk} & \boldsymbol{e}_{zk} \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_{xk}\,\boldsymbol{d}_{ii} & \widetilde{\boldsymbol{e}}_{yk}\,\boldsymbol{d}_{ii} & \widetilde{\boldsymbol{e}}_{zk}\,\boldsymbol{d}_{ii} \end{bmatrix} \tag{7.43}$$

und mit dem Vektor $\boldsymbol{d}_{ji} = \boldsymbol{d}_{ii} + \boldsymbol{r}_{ji}$ vom Gelenkpunkt zum Körper $\mathcal{K}_j$

$$\boldsymbol{J}_{ji} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_{xk} & \boldsymbol{e}_{yk} & \boldsymbol{e}_{zk} \\ \widetilde{\boldsymbol{e}}_{xk}\,\boldsymbol{d}_{ji} & \widetilde{\boldsymbol{e}}_{yk}\,\boldsymbol{d}_{ji} & \widetilde{\boldsymbol{e}}_{zk}\,\boldsymbol{d}_{ji} \end{bmatrix}. \tag{7.44}$$

Die Matrix $\dot{\boldsymbol{J}}_{ji}$ ergibt sich daraus zu

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{ji} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{e}}_{xk} & \dot{\boldsymbol{e}}_{yk} & \dot{\boldsymbol{e}}_{zk} \\ \dot{\widetilde{\boldsymbol{e}}}_{xk}\,\boldsymbol{d}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{e}}_{xk}\,\dot{\boldsymbol{d}}_{ji} & \dot{\widetilde{\boldsymbol{e}}}_{yk}\,\boldsymbol{d}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{e}}_{yk}\,\dot{\boldsymbol{d}}_{ji} & \dot{\widetilde{\boldsymbol{e}}}_{zk}\,\boldsymbol{d}_{ji} + \widetilde{\boldsymbol{e}}_{zk}\,\dot{\boldsymbol{d}}_{ji} \end{bmatrix} \tag{7.45}$$

mit $\dot{\boldsymbol{e}}_{xk} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k\,\boldsymbol{e}_{xk}$, $\dot{\boldsymbol{e}}_{yk} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k\,\boldsymbol{e}_{yk}$, $\dot{\boldsymbol{e}}_{zk} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_k\,\boldsymbol{e}_{zk}$ und $\dot{\boldsymbol{d}}_{ij}$ aus (7.40). Hierbei ist $\boldsymbol{\omega}_k$ die Winkelgeschwindigkeit des Systems $\mathcal{K}_k$.

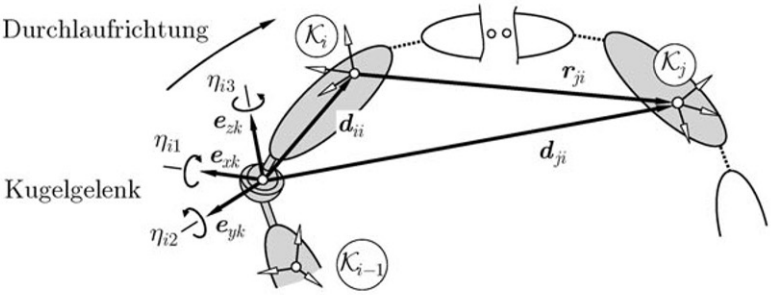


Abb. 7.7 Zur Berechnung der expliziten Bindungen bei einem Kugelgelenk

Beispiel Für die kinematische Kette mit zwei Drehgelenken und einem Schubgelenk in Abb. 7.8 lauten die expliziten Körperbindungen auf Geschwindigkeitsebene (7.26)

$$\begin{array}{cccc} & \hat{\boldsymbol{v}} & = & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{31} & \boldsymbol{J}_{32} & \boldsymbol{J}_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}. \end{array} \tag{7.46}$$

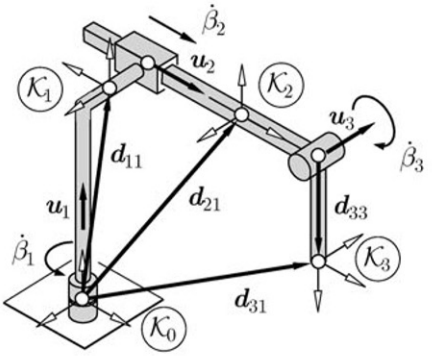


Abb. 7.8 Kinematische Kette mit Dreh- und Schubgelenken

Die JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}$ enthält die zum Drehgelenk 1 gehörenden Teilmatrizen

$$\boldsymbol{J}_{11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{11} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_{21} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{21} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_{31} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{31} \end{bmatrix} \tag{7.47}$$

und die zum Schubgelenk 2 und zum Drehgelenk 3 gehörenden Teilmatrizen

$$\boldsymbol{J}_{22} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_{32} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{J}_{33} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_3 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\, \boldsymbol{d}_{33} \end{bmatrix}. \tag{7.48}$$

Die JACOBI-Matrizen $\boldsymbol{J}_i$ der drei Körper bestehen aus den JACOBI-Matrizen der Rotation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}$ und den JACOBI-Matrizen der Translation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}$,

$$\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}1} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{7.49}$$

$$\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}2} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{21} & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{7.50}$$

$$\boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{31} & \boldsymbol{J}_{32} & \boldsymbol{J}_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}3} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{u}_3 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{31} & \boldsymbol{u}_2 & \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\, \boldsymbol{d}_{33} \end{bmatrix}. \tag{7.51}$$

Die nicht von den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden Beschleunigungsanteile $\bar{\bar{\boldsymbol{a}}}_i$ lauten gemäß (7.37)

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\bar{\boldsymbol{a}}} & = & \dot{\boldsymbol{J}} & & \boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{a}}}_1 \\ \bar{\bar{\boldsymbol{a}}}_2 \\ \bar{\bar{\boldsymbol{a}}}_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{J}}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{21} & \dot{\boldsymbol{J}}_{22} & \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{31} & \dot{\boldsymbol{J}}_{32} & \dot{\boldsymbol{J}}_{33} \end{bmatrix} & & \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} \end{array} \tag{7.52}$$

mit den zum Drehgelenk 1 gehörenden Teilmatrizen gemäß (7.39)

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{11} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{11} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{11} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}1} \, \boldsymbol{\eta} = \dot{\beta}_1 \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \boldsymbol{d}_{11} \, , \tag{7.53}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{21} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{21} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{21} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}2} \, \boldsymbol{\eta} = \dot{\beta}_1 \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \boldsymbol{d}_{21} + \dot{\beta}_2 \, \boldsymbol{u}_2 \, , \tag{7.54}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{31} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{31} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{31} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}3} \, \boldsymbol{\eta} = \dot{\beta}_1 \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \boldsymbol{d}_{31} + \dot{\beta}_2 \, \boldsymbol{u}_2 + \dot{\beta}_3 \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33}, \tag{7.55}$$

und den zum Schubgelenk 2 und zum Drehgelenk 3 gehörenden Teilmatrizen

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{22} = \dot{\boldsymbol{J}}_{32} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{u}}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \, \boldsymbol{u}_2 \, , \tag{7.56}$$

$$\dot{\boldsymbol{J}}_{33} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_3 \\ \dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33} + \widetilde{\boldsymbol{u}}_3 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{33} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{u}}_3 = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \, \boldsymbol{u}_3 \, , \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{33} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33} \, . \tag{7.57}$$

7.2.4 Explizite Bindungen einer Baumstruktur

Das in den beiden vorangehenden Abschnitten beschriebene Verfahren zur Aufstellung der expliziten Bindungen für Systeme mit Kettenstruktur kann auf Systeme mit Baumstruktur erweitert werden, indem die Topologie gemäß Abschnitt 7.1 berücksichtigt wird. Die Vorgehensweise wird am Beispiel des in Abb. 7.9 dargestellten baumstrukturierten Systems mit $n = 6$ Körpern gezeigt, das bereits in Abb. 7.1 a betrachtet worden ist.

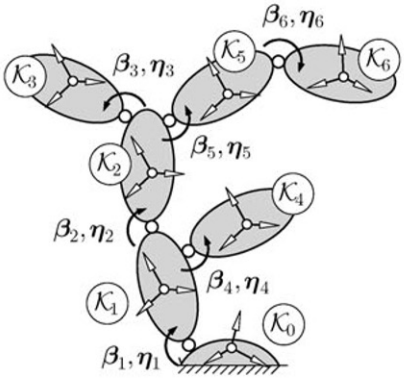


Abb. 7.9 Zur Berechnung der expliziten Bindungen eines baumstrukturierten Mehrkörpersystems

Werden die expliziten Gelenkbindungen (7.19) in Anlehnung an (7.20) zu einer Matrizengleichung zusammengefasst, so gilt

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_{32} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B}_{41} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_{52} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_{65} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_4 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_5 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_6 \end{bmatrix} = \\
\rightarrow\ & \qquad \boldsymbol{B} \qquad\qquad \hat{\boldsymbol{v}} \quad = \\
&= \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_4 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_5 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \\ \boldsymbol{\eta}_3 \\ \boldsymbol{\eta}_4 \\ \boldsymbol{\eta}_5 \\ \boldsymbol{\eta}_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_2^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_3^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_4^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_5^{\mathrm{rel}} \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_6^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} \\
&= \qquad \boldsymbol{C} \qquad\qquad \boldsymbol{\eta} \quad + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}} \quad .
\end{aligned}
\tag{7.58}
$$

Der Aufbau der globalen Versatzmatrix $\boldsymbol{B}$ ergibt sich aus der Inzidenzmatix $\boldsymbol{S}$ des Beispiels aus (7.2), indem die mit 1 belegten Hauptdiagonalelemente S_{ii} durch (6,6)-Einheitsmatrizen $\boldsymbol{E}$ und die mit -1 belegten Nebendiagonalelemente S_{ji} durch die (6,6)-Matrizen $-\boldsymbol{B}_{ji}$ ersetzt werden.

Die Inverse von $\boldsymbol{B}$ folgt aus der Wegematrix $\boldsymbol{T}$ aus (7.5), indem die mit 1 belegten Hauptdiagonalelemente von T_{ii} durch (6,6)-Einheitsmatrizen und die mit 1 belegten Nebendiagonalelemente T_{ji} durch die (6,6)-Matrizen $\boldsymbol{B}_{ji}$ ersetzt werden,

$$
\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{31} & \boldsymbol{B}_{32} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{41} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{51} & \boldsymbol{B}_{52} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{61} & \boldsymbol{B}_{62} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{65} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} . \tag{7.59}
$$

Gemäß (7.23) gilt wieder $\boldsymbol{B}_{ki} = \boldsymbol{B}_{kj}\,\boldsymbol{B}_{ji}$. Damit lauten die expliziten Körperbindungen (7.26)

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}\ \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{B}^{-1}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}} \\
\rightarrow\ \hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J}\ \boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}
\end{aligned}
\tag{7.60}
$$

mit der globalen JACOBI-Matrix aller Körper

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J} &= \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \boldsymbol{J}_2 \\ \boldsymbol{J}_3 \\ \boldsymbol{J}_4 \\ \boldsymbol{J}_5 \\ \boldsymbol{J}_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{31} & \boldsymbol{J}_{32} & \boldsymbol{J}_{33} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{41} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{44} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{51} & \boldsymbol{J}_{52} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{55} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{61} & \boldsymbol{J}_{62} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{65} & \boldsymbol{J}_{66} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.61}
$$

und den Teilmatrizen aus (7.30), $\boldsymbol{J}_{ji} = \boldsymbol{B}_{ji}\,\boldsymbol{C}_i$ für $j > i$ und $\boldsymbol{J}_{jj} = \boldsymbol{C}_j$.

7.3 Dynamik offener Mehrkörpersysteme

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten werden neben den expliziten Bindungen aus Abschnitt 7.2 die impliziten Reaktionsbedingungen und die Impuls- und Drallsätze der Körper benötigt.

7.3.1 Implizite Reaktionsbedingungen für offene MKS

Die expliziten Bindungen offener Mehrkörpersysteme definieren implizite Reaktionsbedingungen, die zunächst für Systeme mit Kettenstruktur aufgestellt und anschließend auf Systeme mit Baumstruktur erweitert werden.

Implizite Reaktionsbedingungen für eine Kettenstruktur Für die Reaktionskraftwinder an einem Gelenk zwischen den Körpern $\mathcal{K}_{i-1}$ und $\mathcal{K}_i$ gelten die impliziten Reaktionsbedingungen (6.100) und (6.101). Werden die Gelenk-Reaktionskraftwinder auf Körper $\mathcal{K}_i$ mit $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ und auf den Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{i-1}$ als $\hat{\boldsymbol{f}}_{i-1,i}^{\mathrm{p}}$ bezeichnet[1] (Abb. 7.10 a), so lauten sie

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{f}}_{i-1,i}^{\mathrm{p}} \quad + \quad \boldsymbol{B}_{i,i-1}^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}} \quad &= \quad \boldsymbol{0} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{i-1,i}^{\mathrm{p}} \\ \boldsymbol{f}_{i-1,i}^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \widetilde{\boldsymbol{r}}_{i,i-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{p}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.62}
$$

und

$$
\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}\,. \tag{7.63}
$$

[1] Das hochgestellte Symbol p verweist auf die Bezeichnung *primäre* Gelenke für die Gelenke einer Baumstruktur, die bei geschlossenen MKS in Kapitel 8 verwendet wird.

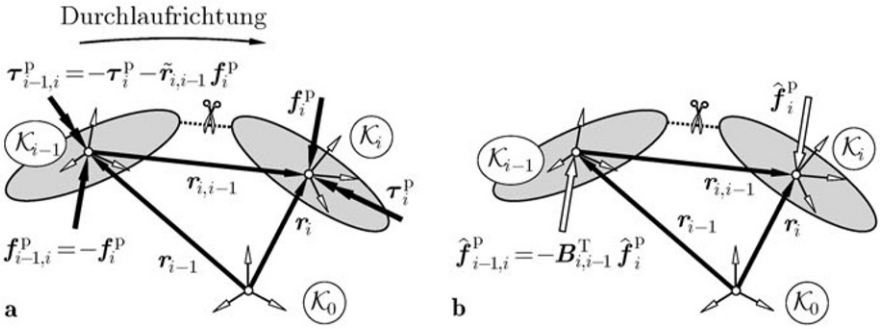


Abb. 7.10 Gelenk-Reaktionskraftwinder. **a** Reaktionskräfte und -momente an einem Gelenk. **b** Schematische Darstellung der Gelenk-Reaktionskraftwinder

In den nachfolgenden Betrachtungen werden die Gelenk-Reaktionskraftwinder entsprechend Abb. 7.10 b schematisch durch einen Doppelpfeil gekennzeichnet.

In der kinematischen Kette setzt sich der auf den Körper $\mathcal{K}_i$ wirkende resultierende Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_i$ aus dem vom Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{i-1}$ auf $\mathcal{K}_i$ wirkenden Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_i$ und dem vom Nachfolgekörper $\mathcal{K}_{i+1}$ auf $\mathcal{K}_i$ wirkenden Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{i,i+1}$ zusammen,[2] siehe Abb. 7.11,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_i = \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_i + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{i,i+1} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{i,i+1} = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{i+1,i}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{i+1}\,. \tag{7.64}$$

Die Gleichungen (7.64) können unter Berücksichtigung von (7.62) für alle Körper der Kette angeschrieben werden, also

$$\left.\begin{array}{lllllll}
\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_1 & = & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_1 & + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{12} & \text{mit} & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{12} & = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{21}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_2\,, \\
\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_2 & = & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_2 & + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{23} & \text{mit} & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{23} & = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{32}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_3\,, \\
 & \vdots & & & & & \vdots \\
\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_{n-1} & = & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{n-1} & + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{n-1,n} & \text{mit} & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{n-1,n} & = -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{n,n-1}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_n\,, \\
\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_n & = & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_n\,. & & & &
\end{array}\right\} \tag{7.65}$$

Wird (7.65) als eine Matrizengleichung geschrieben, so wird der Zusammenhang zwischen den Körper-Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_i$ und den Gelenk-Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_i$ durch die transponierte $(6n,6n)$-Versatzmatrix $\boldsymbol{B}$ aus (7.20) hergestellt,

[2] Da in einem offenen System jeder Körper einen eindeutigen Vorgängerkörper besitzt, ist der Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_i$ auf $\mathcal{K}_i$ durch den einfachen Index i eindeutig gekennzeichnet.

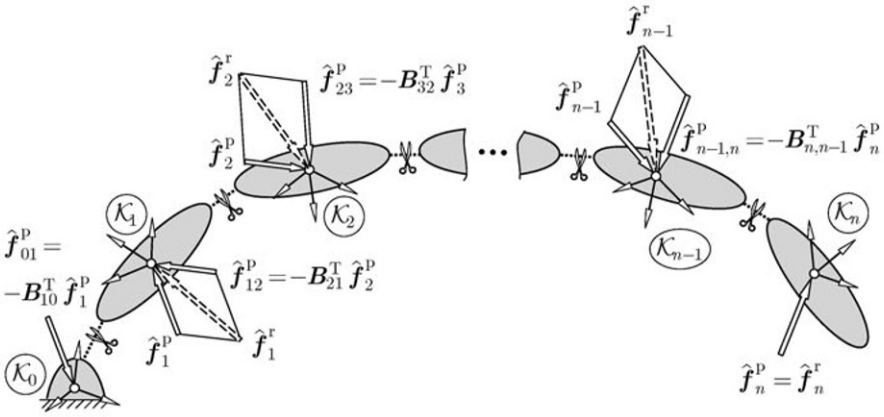


Abb. 7.11 Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_j$ und Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_j$ an den freigeschnittenen Körpern einer offenen Kette

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_{n-1} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{21} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{32} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}_{n,n-1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{n-1} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_n \end{bmatrix} \tag{7.66}$$

$$\rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \quad = \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} \quad .$$

Hierbei wurden die Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}_i$ zum $6n$-Vektor $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ und die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_i$ zum $6n$-Vektor $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ zusammengefasst.

Werden die weiteren impliziten Reaktionsbedingungen (7.63) für alle Körper der Kettenstruktur angeschrieben,

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}_1\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_1 &= \boldsymbol{0}\,, \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}_2\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_2 &= \boldsymbol{0}\,, \\ &\vdots \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}_{n-1}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_{n-1} &= \boldsymbol{0}\,, \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}_n\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_n &= \boldsymbol{0}\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.67}$$

so können die impliziten Bedingungen für die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}_i$ mit Hilfe der $(6n,f)$-JACOBI-Matrix der Gelenke $\boldsymbol{C}$ aus (7.20) formuliert werden,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boldsymbol{C}_{n-1}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \boldsymbol{C}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_{n-1}^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{7.68}$$

$$\rightarrow \qquad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \qquad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \mathbf{0} \; .$$

Für die Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ können ebenfalls implizite Bedingungen formuliert werden. Hierzu werden die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ mit Hilfe von (7.66) durch $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ ausgedrückt,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{T}} \, , \tag{7.69}$$

und in (7.68) eingesetzt,

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \mathbf{0} \, . \tag{7.70}$$

Mit der globalen $(6n,f)$-Jacobi-Matrix der Körper $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}^{-1} \, \boldsymbol{C}$ aus (7.27) ist $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}$, womit aus (7.70) die impliziten Reaktionsbedingungen für die Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ erhalten werden,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \qquad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} &= \mathbf{0} \\ \rightarrow \; \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} & \dots & \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \, . \end{aligned} \tag{7.71}$$

Mit den $(3,f)$-Jacobi-Matrizen der Rotation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}$ und Translation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}$ aus (7.28) und den Reaktionsmomenten $\boldsymbol{\tau}_i$ und -kräften $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$ lautet (7.71)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}1}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}1}^{\mathrm{T}} & \dots & \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}n}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}n}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\tau}_n^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \rightarrow \qquad \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \qquad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} &= \mathbf{0} \, . \end{aligned} \tag{7.72}$$

Implizite Reaktionsbedingungen für eine Baumstruktur Die im vorangehenden Abschnitt beschriebenen Reaktionsbedingungen gelten auch für Systeme mit Baumstruktur. Die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_{i,p}^{\mathrm{r}}$ wirken vom jeweiligen Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{p(i)}$ auf den Körper $\mathcal{K}_i$. Die Körper-Reak-

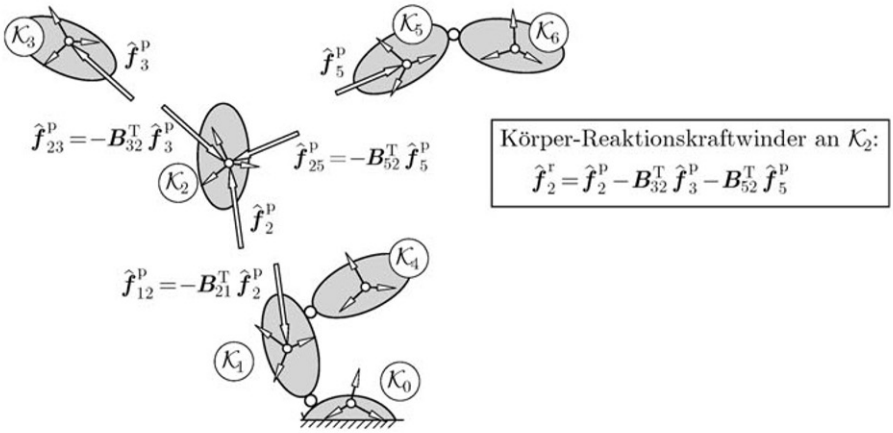


Abb. 7.12 Berechnung des Körper-Reaktionskraftwinders $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{r}}$ am Verzweigungskörper $\mathcal{K}_2$ aus den Gelenk-Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}_5^{\mathrm{p}}$

tionskraftwinder ergeben sich daraus gemäß (7.66). Im Beispiel aus Abb. 7.9 gilt mit $\boldsymbol{B}$ aus (7.58)

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_4^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_5^{\mathrm{r}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_6^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}_{21}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_{41}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{B}_{52}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}_{65}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_4^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_5^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_6^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} \tag{7.73}$$

$$\rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} \quad .$$

Zur Interpretation wird exemplarisch der freigeschnittene Verzweigungskörper $\mathcal{K}_2$ betrachtet (Abb. 7.12). Der Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{r}}$ ist die Summe des von $\mathcal{K}_1$ auf $\mathcal{K}_2$ wirkenden Gelenk-Reaktionskraftwinders $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}}$, des von $\mathcal{K}_3$ auf $\mathcal{K}_2$ wirkenden Gelenk-Reaktionskraftwinders $-\boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ und des von $\mathcal{K}_5$ auf $\mathcal{K}_2$ wirkenden Gelenk-Reaktionskraftwinders $-\boldsymbol{B}_{52}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_5^{\mathrm{p}}$.

Für die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{p}}$ gelten die impliziten Reaktionsbedingungen (7.68). Im Beispiel aus Abb. 7.9 lauten sie mit $\boldsymbol{C}$ aus (7.58)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_4^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_5^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_6^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_4^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_5^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_6^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{7.74}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0} \quad .$$

7.3.2 Impuls- und Drallsätze

Die Impuls- und Drallsätze werden für den i-ten Körper bezüglich des Ursprungspunkts O_i des körperfesten Koordinatensystems $\mathcal{K}_i$, der i. Allg. nicht mit dem Massenmittelpunkt S_i zusammenfällt, formuliert (Abb. 7.13).

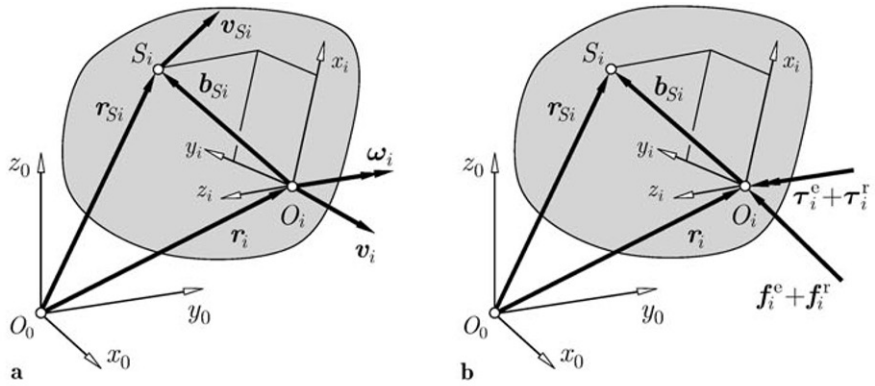


Abb. 7.13 Freigeschnittener Körper $\mathcal{K}_i$. **a** Kinematische Größen. **b** Kräfte und Momente

Der *Impulssatz* (4.58) für den freigeschnittenen i-ten Körper lautet mit den Resultierenden der eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}$ und der Reaktionskräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}$

$$m_i\,\boldsymbol{a}_{Si} = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}}\,. \tag{7.75}$$

Die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_{Si}$ des Massenmittelpunkts S_i wird mit Hilfe der kinematischen Starrkörpergleichung (3.19) durch die Beschleunigung $\boldsymbol{a}_i = \dot{\boldsymbol{v}}_i$ von O_i und die Winkelbeschleunigung $\alpha_i = \dot{\boldsymbol{\omega}}_i$ von $\mathcal{K}_i$ ausgedrückt,

$$\boldsymbol{a}_{Si} = \boldsymbol{a}_i + \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si} + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si}\,. \tag{7.76}$$

Einsetzen von (7.76) in den Impulssatz (7.75) liefert unter Berücksichtigung von $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si} = -\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}\,\boldsymbol{\alpha}_i = \widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\alpha}_i$

$$m_i\,\boldsymbol{a}_i + m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} - m_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si}\,. \tag{7.77}$$

Der *Drallsatz* für den freigeschnittenen Körper lautet bezüglich des Körperpunktes O_i mit den Resultierenden der eingeprägten Momente $\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}}$ und der Reaktionsmomente $\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}}$ bezüglich O_i sowie dem Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_i$ bezüglich O_i gemäß (4.63)

$$m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}\,\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\alpha}_i + \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}}\,. \tag{7.78}$$

Die kinetischen Gleichungen (7.77) und (7.78) können zusammengefasst werden zu der Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_i & m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si} \\ m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}^{\mathrm{T}} & m_i\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i \\ -m_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{7.79}$$

$$\rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_i \quad \hat{\boldsymbol{a}}_i \quad = \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{c}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \quad .$$

Hierbei sind

$\widehat{\boldsymbol{M}}_i \in \mathbb{R}^{6,6}$ – Massenmatrix des i-ten Körpers,
$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} \in \mathbb{R}^6$ – eingeprägter Kraftwinder bzgl. O_i,
$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \in \mathbb{R}^6$ – Reaktionskraftwinder bzgl. O_i,
$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{c}} \in \mathbb{R}^6$ – Kreiselmoment und Zentrifugalkraft nach D'ALEMBERT.

Fällt der Bezugspunkt O_i mit dem Massenmittelpunkt S_i zusammen, so ist $\boldsymbol{b}_{Si} = \boldsymbol{0}$, und die kinetischen Gleichungen (7.79) vereinfachen sich zu

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_i & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_i\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{7.80}$$

$$\rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_i \quad \hat{\boldsymbol{a}}_i \quad = \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{c}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} \quad .$$

Die kinetischen Gleichungen (7.79) bzw. (7.80) aller n Körper werden zusammengefasst zu der Matrizengleichung

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \widehat{\boldsymbol{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{c}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{e}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{7.81}$$

$$\rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{M}} \quad \hat{\boldsymbol{a}} \quad = \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \quad .$$

Dies sind die $6n$ NEWTON-EULER-Gleichungen des Mehrkörpersystems.

7.3.3 Eingeprägte Kräfte und Momente

Die eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}$ und Momente $\boldsymbol{\tau}_{Si}^{\mathrm{e}}$ im Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}$ werden durch physikalische Gesetze definiert. Die eingeprägten Kräfte können nach SCHIEHLEN und EBERHARD [92] unterteilt werden in die idealen eingeprägten Kräfte, die nicht von den Reaktionskräften abhängen, und in die nichtidealen Reibungskräfte. Alle Aussagen gelten sinngemäß auch für die Momente. Die idealen Kräfte können durch algebraische oder durch differentielle Kraftgesetze beschrieben werden.

Ideale Kräfte mit algebraischen Kraftgesetzen Die Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}$ werden algebraisch in Abhängigkeit von der Lage $\hat{\boldsymbol{r}}$, der Geschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}$ und von der Zeit t ausgedrückt,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} = \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, t)\,. \tag{7.82}$$

Mit algebraischen Kraftgesetzen werden z.B. Federkräfte, geschwindigkeitsabhängige Dämpferkräfte, Gravitationskräfte und eingeprägte Kräfte mit bekannten zeitlichen Verläufen beschrieben.

Ein Beispiel ist das in Abb. 7.14 gezeigte Kelvin[3]-Voigt[4]-Kraftelement zwischen zwei Körpern $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$. Es besteht aus einer Feder mit linearer Kennlinie (Federkonstante c) und einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer (Dämpfungskonstante d). Die Feder ist beim Abstand l_0 der Ankopplungspunkte P_i und P_j entspannt. Die gesamte Kraft beträgt

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} = -\big(\, c(l - l_0) + d\,\dot{l}\,\big)\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}}\,. \tag{7.83}$$

Der Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}}$ und die Länge l des Kraftelements werden durch die Lagegrößen der Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$ ausgedrückt,

$$\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}} = \frac{\boldsymbol{l}}{l} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_j + \boldsymbol{c}_j - \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{c}_i \qquad \text{und} \qquad l = |\boldsymbol{l}| = \sqrt{\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}}\,. \tag{7.84}$$

Die zeitliche Längenänderung $\dot{l}$ ergibt sich durch die zeitliche Ableitung des Quadrats der Länge $(l^2)^{\cdot} = (\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l})^{\cdot}$ und damit $2\,l\,\dot{l} = 2\,\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{l}}$ und der zeitlichen Änderung des Vektors $\boldsymbol{l}$ entsprechend (6.32) zu

$$\dot{l} = \boldsymbol{e}_{\mathrm{F}}^{\mathrm{T}}\,\dot{\boldsymbol{l}} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{l}} = \boldsymbol{v}_j - \widetilde{\boldsymbol{c}}_j\,\boldsymbol{\omega}_j - \boldsymbol{v}_i + \widetilde{\boldsymbol{c}}_i\,\boldsymbol{\omega}_i\,. \tag{7.85}$$

Die Kraft $\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}}$ aus (7.83) ergibt die eingeprägten Kraftwinder bezüglich der Körper-Bezugssysteme $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_i\,\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} \\ -\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_j^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{f}_j^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_j\,\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} \\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} \end{bmatrix}. \tag{7.86}$$

Ideale Kräfte mit integralen Kraftgesetzen Gegenüber (7.82) gehen zusätzlich die Zustandsgrößen $\boldsymbol{z}$ von i.Allg. nichtlinearen Differentialgleichungen der Form $\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\Psi}_z(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{z}, t)$ in die Kraftgesetze ein,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} = \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{z}, t) \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\Psi}_z(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \boldsymbol{z}, t)\,. \tag{7.87}$$

Ein Beispiel ist das durch Reihenschaltung einer Feder (Federsteifigkeit c, ungespannte Länge l_{F0}) und eines Dämpfers (Dämpfungskonstante d) ent-

[3] William Thomson Kelvin, *1824 in Belfast, †1907 in Largs

[4] Woldemar Voigt, *1850 in Leipzig, †1919 in Göttingen

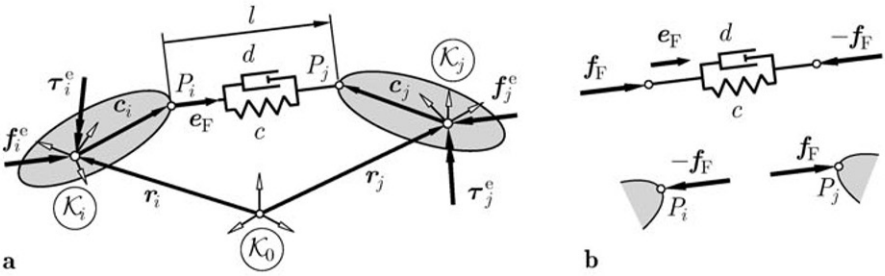


Abb. 7.14 Voigt-Kelvin-Kraftelement. **a** Anordnung. **b** Freischnittbild

stehende Maxwell[5]-Kraftelement in Abb. 7.15. Die Kräfte in der Feder (Länge l_{F}) und im Dämpfer (Länge l_{D}) lauten

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} = -c\,(l_{\mathrm{F}} - l_{\mathrm{F0}})\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}}\,, \qquad \boldsymbol{f}_{\mathrm{D}} = -d\,\dot{l}_{\mathrm{D}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}} \tag{7.88}$$

mit dem Einheitsvektor $\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}}$ aus (7.84). Die Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte im Punkt Q verlangt, dass $\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}}$ und $\boldsymbol{f}_{\mathrm{D}}$ übereinstimmen,

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{D}} \quad \rightarrow \quad c\,(l_{\mathrm{F}} - l_{\mathrm{F0}}) = d\,\dot{l}_{\mathrm{D}}\,. \tag{7.89}$$

Wird z.B. die Dämpferlänge l_{D} als Zustandsgröße des Kraftelements definiert, $z = l_{\mathrm{D}}$, so ergibt sich aus (7.89) unter Berücksichtigung der Längenbedingung $l_{\mathrm{F}} = l - z$ das proportional-integrale Kraftgesetz für die Kraft $\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{D}}$ des Maxwell-Kraftelements

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}} = -c\,(l - z - l_{\mathrm{F0}})\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{F}} \quad \text{mit} \quad \dot{z} = \frac{c}{d}(l - z - l_{\mathrm{F0}})\,, \quad l \text{ aus (7.84)}\,. \tag{7.90}$$

Einsetzen von $\boldsymbol{f}_{\mathrm{F}}$ in (7.86) ergibt die Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}_j^{\mathrm{e}}$ bezüglich der Körper $\mathcal{K}_i$ und $\mathcal{K}_j$.

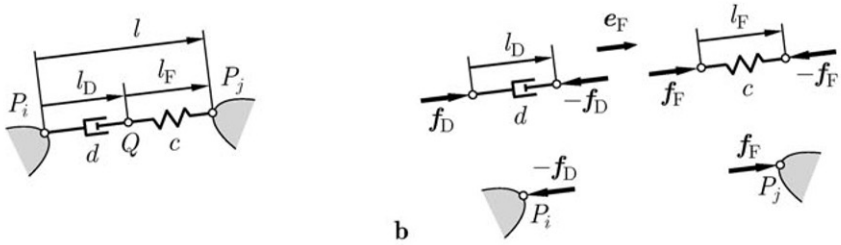


Abb. 7.15 Maxwell-Kraftelement. **a** Anordnung. **b** Freischnittbild

Weitere Beispiele integraler Kraftgesetze sind Stellglieder mit Eigendynamik, wie z.B. elektrische Motoren mit Berücksichtigung der elektrischen und magnetischen Kreise oder hydraulische Antriebe.

[5] James Clerk Maxwell, *1831 Edinburgh, †1879 Cambridge (England)

Nichtideale Reibungskräfte Liegt an einer Bindung COULOMBsche Reibung vor, so entstehen in den freien Raumrichtungen der Bindung eingeprägte Reibungskräfte, die entsprechend dem COULOMBschen Reibungsgesetz von den Reaktionskräften abhängen. Wegen dieser Abhängigkeit werden die Reibungskräfte als nichtideal bezeichnet. Im Kraftgesetz treten damit gegenüber (7.82) zusätzlich die Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ auf,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} = \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}, t)\,. \tag{7.91}$$

Ein Beispiel ist das in Abb. 7.16 gezeigte Pendel mit COULOMBscher Reibung im Drehgelenk. Auf Grund der Reibung entsteht das Reibmoment $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}}$, das proportional (Proportionalitätsfaktor μ) zum Betrag f_{N} der Normalkraft ist. Es wirkt entgegen der durch das Vorzeichen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\beta}$ gekennzeichneten Drehrichtung des Pendels,

$$\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{R}} = -\mu\, f_{\mathrm{N}}\, \mathrm{sign}(\dot{\beta}) \qquad \text{mit} \qquad f_{\mathrm{N}} = \sqrt{f_x^{\mathrm{r}\,2} + f_y^{\mathrm{r}\,2}}\,. \tag{7.92}$$

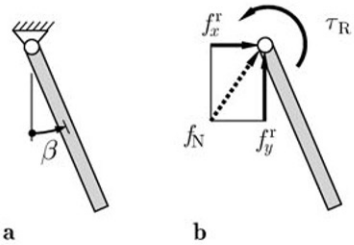


Abb. 7.16 Pendel mit COULOMBscher Lagerreibung. **a** Anordnung. **b** Freischnittbild

Durch die Kopplung von eingeprägten Kräften und Reaktionskräften sind in diesem Fall die Bestimmungsgleichungen (5.65) bzw. (5.76) nicht mehr linear in den Reaktionskräften, sondern es liegt ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem vor. Die Auflösung nach den unbekannten Beschleunigungen und Reaktionskräften muss dann iterativ erfolgen.

Haftkräfte Ist bei COULOMBscher Reibung die Relativgeschwindigkeit an der Reibstelle null, so kann Haften auftreten. So lange der Zustand des Haftens besteht, liegen an der Haftstelle zusätzliche Bindungen vor, welche das Gleiten verhindern. Die Haftkräfte sind damit keine eingeprägten Kräfte, sondern Reaktionskräfte. Erst wenn die maximal mögliche Haftkraft überschritten wird, geht der Kontakt wieder vom Haft- in den Gleitzustand über. Beim Übergang vom Haften zum Gleiten und umgekehrt ändert sich damit die Anzahl der Bindungen und damit der Systemfreiheitsgrad: Es liegt ein strukturvariables System vor. Solche Systeme werden im vorliegenden Buch nicht behandelt. Ausführliche Darstellungen geben PFEIFFER und GLOCKER [80] sowie PFEIFFER [79].

7.3.4 Bestimmungsgleichungen offener MKS

Um die Bewegungsgleichungen offener Mehrkörpersysteme in den Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ aufzustellen, wird von den in Tabelle 7.1 zusammengefassten Bestimmungsgleichungen ausgegangen.

Tabelle 7.1 Bestimmungsgleichungen für die Bewegungsgleichungen offener Mehrkörpersysteme in Gelenkkoordinaten und Gelenkgeschwindigkeiten

Kinematische Bewegungsgleichungen (Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$, Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$):

(7.15) : $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta}$

Nebenbedingungen bei EULER-Parametern:

(7.13) : $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}$

Kinetische Differentialgleichungen:

(7.81) : $\widehat{\boldsymbol{M}}\,\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$

Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ und Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$:

(7.66) : $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$

Explizite Gelenkbindungen:

(7.16) : $\hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i(\hat{\boldsymbol{r}}_{p(i)}, \boldsymbol{\beta}_i, t)\,,\ i = 1, \ldots, n$

(7.20) : $\boldsymbol{B}\,\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}}$

(7.33) : $\boldsymbol{B}\,\dot{\hat{\boldsymbol{v}}} = \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}}$

(Index $p(i)$ des Vorgängerkörpers zu $\mathcal{K}_i$)

Explizite Körperbindungen:

(7.18) : $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\beta}, t)$

(7.26) : $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}$

(7.35) : $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}$

mit (7.27) : $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}$

Implizite Reaktionsbedingungen für die Gelenk-Reaktionskraftwinder:

(7.68) : $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}$

für die Körper-Reaktionskraftwinder:

(7.71) : $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{0}$

Die kinetischen Differentialgleichungen (7.81) zusammen mit den Körper-Reaktionskraftwindern aus (7.66), die expliziten Gelenkbindungen (7.33) und die impliziten Reaktionsbedingungen für die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ bilden in Analogie zu (5.76) ein System von $6n + 6n + f$ linearen Gleichungen für die $6n$ Koordinaten der Körperbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{v}}$, die $6n$ Koordinaten der Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ und die f Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$,

$$\begin{array}{l} (7.81), (7.66) : \\ (7.33) : \\ (7.68) : \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 6n \text{ Gln.} \\ 6n \text{ Gln.} \\ f \text{ Gln.} \end{array} \tag{7.93}$$

mit der Zusammenfassung der Kräfte $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} = \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}}$.

Ein entsprechendes Gleichungssystem kann für die $6n$ Koordinaten der Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ aufgestellt werden, indem die expliziten Körperbindungen (7.35) und die impliziten Reaktionsbedingungen für die Körper-Reaktionskraftwinder (7.71) verwendet werden,

$$\begin{array}{l} (7.81): \\ (7.35): \\ (7.71): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 6n \text{ Gln.} \\ 6n \text{ Gln.} \\ f \text{ Gln.} \end{array} \tag{7.94}$$

Werden die Minimalkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und die Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ als die Zustandsgrößen $\boldsymbol{x}$ definiert,

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Lage} \\ \text{Geschwindigkeit}\,, \end{array} \tag{7.95}$$

so werden die Bewegungsgleichungen in Zustandsform als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten, vgl. (5.85). Sie bestehen aus den kinematischen Bewegungsgleichungen (7.15) und den als Lösungen der Gleichungssysteme (7.93) oder (7.94) erhaltenen Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$,

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}(t_0) \\ \boldsymbol{\eta}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_0 \\ \boldsymbol{\eta}_0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t) \qquad\qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \;. \end{array} \tag{7.96}$$

Den Ablauf der Berechnung der zeitlichen Änderungen der Zustandsgleichungen $\dot{\boldsymbol{x}}$, der Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ und der Absolutbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$ zeigt Abb. 7.17. Weiterhin wird das Residuum $\boldsymbol{\phi}$ der Nebenbedingungen evt. als Gelenkkoordinaten verwendeter EULER-Parameter berechnet.

Die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ werden aus den linearen Gleichungssystemen (7.93) oder (7.94) durch Elimination der Absolutbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$ und der Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ berechnet. Hierzu kann ein allgemeines Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme eingesetzt werden. Günstiger ist jedoch die Lösung mit Hilfe von so genannten *Mehrkörperformalismen*, welche die spezielle Struktur der Gleichungssysteme (7.93) bzw. (7.94) ausnutzen. Die Mehrkörperformalismen lassen sich in zwei Hauptgruppen einteilen:

- Bei den *nichtrekursiven Formalismem* wird gemäß Abschnitt 5.3.6 zuerst ein System mit f Differentialgleichungen in $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\eta}$ der Form

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},t)\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) \tag{7.97}$$

  mit der symmetrischen, positiv definiten (f,f)-Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ und dem f-Vektor verallgemeinerter Kräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}$ sowie CORIOLIS-Kräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}$ aufgestellt. Um die Bewegungsgleichungen in Zustandsform (7.96) zu erhalten, muss das Gleichungssystem (7.97) anschließend noch nach $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ aufge-

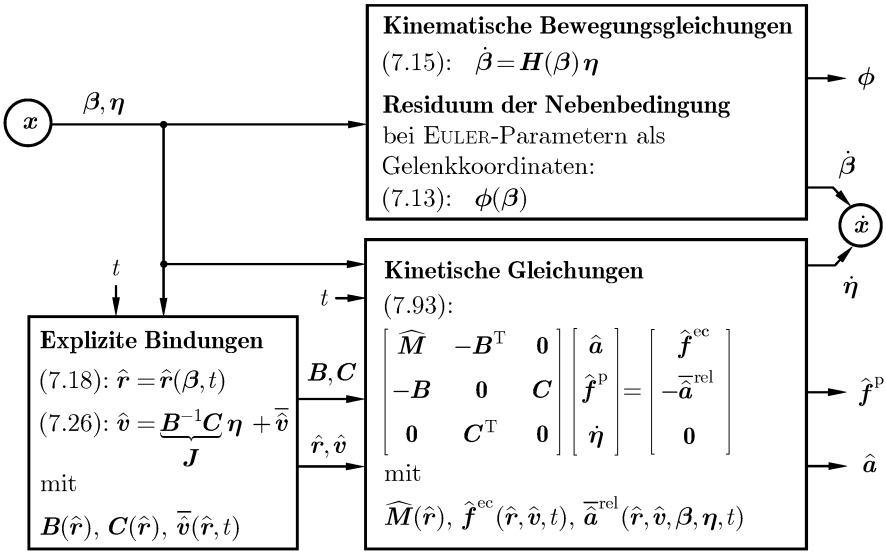


Abb. 7.17 Berechnung von $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}, t)$, $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}(\boldsymbol{x}, t)$ und $\hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}, t)$ für offene MKS

löst werden. Hierzu kann wegen der symmetrischen Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ z.B. das CHOLESKY-Verfahren eingesetzt werden. Die Anzahl der hierfür benötigten Rechenoperationen und damit die Rechenzeit steigen dabei mit der Anzahl der Gleichungen von (7.97), welche dem Freiheitsgrad des Systems f entspricht, kubisch an. Da der Geschwindigkeits-Freiheitsgrad eines Gelenks mindestens eins beträgt und auf sechs begrenzt ist, gilt die kubische Zunahme der Rechenzeit auch über der Anzahl der Körper n eines offenen Mehrkörpersystems. Es ist in der Literatur üblich, diesen Sachverhalt durch die Angabe der Ordnung $\mathcal{O}(n^3)$ auszudrücken.

- Bei den *rekursiven Formalismen* werden die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ direkt, also ohne vorherige Aufstellung der Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ aus (7.97), berechnet, indem die topologische Baumstruktur des Mehrkörpersystems für die Elimination ausgenutzt wird. Es lässt sich zeigen, dass hierbei die Anzahl der Rechenoperationen und damit die Rechenzeit nur linear mit der Anzahl der Körper n zunimmt. Die rekursiven Formalismen werden daher oft auch als $\mathcal{O}(n)$-Verfahren bezeichnet.

In den beiden folgenden Abschnitten wird jeweils eine typische Formulierung der beiden Methoden beschrieben.

7.4 Nichtrekursiver Formalismus für offene MKS

Die Systeme der Bestimmungsgleichungen (7.93) oder (7.94) werden durch Elimination der Absolutbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$ und der Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ in das Gleichungssystem (7.97) überführt.

Nichtrekursive Lösung des linearen Gleichungssystems Das lineare Gleichungssystem (7.93) wird gelöst, indem die kinetischen Differentialgleichungen (7.81) nach den Körper-Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ umgestellt und in die nach den Gelenk-Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ aufgelöste Gleichung (7.66) eingesetzt werden,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}} \left(\widehat{\boldsymbol{M}}\, \hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \right) . \tag{7.98}$$

Einsetzen vom (7.98) in die impliziten Reaktionsbedingungen (7.68) liefert die Projektionsgleichung

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}} \left(\widehat{\boldsymbol{M}}\, \hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \right) = \boldsymbol{0} . \tag{7.99}$$

Mit der Jacobi-Matrix der Körper $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}^{-1}\, \boldsymbol{C}$ gemäß (7.27) und damit $\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}$ hat die Projektionsgleichung die aus (5.77) bekannte Form,

$$\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} \left(\widehat{\boldsymbol{M}}\, \hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \right) = \boldsymbol{0} \tag{7.100}$$

bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}} \left(\widehat{\boldsymbol{M}}_i\, \hat{\boldsymbol{a}}_i - \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{c}} - \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} \right) = \boldsymbol{0} . \tag{7.101}$$

Aus dem linearen Gleichungssystem (7.94) wird die Projektionsgleichung (7.100) direkt erhalten, indem die nach den Körper-Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ umgestellten kinetischen Differentialgleichungen (7.81) in die impliziten Reaktionsbedingungen (7.71) eingesetzt werden.

Schließlich werden die expliziten Körperbindungen (7.18), (7.26) und (7.35) in die Projektionsgleichung (7.100) eingesetzt. Nach dem Ordnen der Terme werden die kinetischen Bewegungsgleichungen der Form (7.97) erhalten,

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta}, t)\, \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}, t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}, t) . \tag{7.102}$$

Das Differentialgleichungssystem (7.102) enthält die symmetrische, positiv definite (f,f)-*Massenmatrix*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\, \widehat{\boldsymbol{M}}\, \boldsymbol{J} , \\
\rightarrow\ \boldsymbol{M} &= \left[\, \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \ \ldots\ \boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}} \,\right] \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \widehat{\boldsymbol{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} , \\
\rightarrow\ \boldsymbol{M} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_i\, \boldsymbol{J}_i , \\
\rightarrow\ \boldsymbol{M} &= \sum_{i=1}^{n} \left[\, \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}} \ \ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}} \,\right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_i & m_i\, \widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si} \\ m_i\, \widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}^{\mathrm{T}} & m_i\, \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i} \end{bmatrix} ,
\end{aligned} \tag{7.103}$$

den f-Vektor der *verallgemeinerten* CORIOLIS-*Kräfte*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\left(\widehat{\boldsymbol{M}}\,\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}}\right), \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\left[\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\;\ldots\;\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\,\right]\left(\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{M}}_1 & & \boldsymbol{0}\\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \widehat{\boldsymbol{M}}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_1\\ \vdots\\ \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{c}}\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{c}}\end{bmatrix}\right), \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\left(\widehat{\boldsymbol{M}}_i\,\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_i - \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{c}}\right), \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\sum_{i=1}^{n}\left[\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\;\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\right]\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_i & m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}\\ m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}^{\mathrm{T}} & m_i\,\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i\\ \bar{\boldsymbol{a}}_i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i\\ m_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si}\end{bmatrix}\right),
\end{aligned}
\tag{7.104}
$$

und den f-Vektor der *verallgemeinerten eingeprägten Kräfte*

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} &= \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}}, \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} &= \left[\,\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}}\;\ldots\;\boldsymbol{J}_n^{\mathrm{T}}\,\right]\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{e}}\\ \vdots\\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{e}}\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{J}_i^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}}, \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\;\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}}\\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}\end{bmatrix}, \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{f}_i^{e} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\tau}_i^{e}\right).
\end{aligned}
\tag{7.105}
$$

Werden die kinetischen Gleichungen gemäß (7.80) mit den Massenmittelpunkten $O_i \equiv S_i$ als Bezugspunkt geschrieben, also $\boldsymbol{b}_{Si} = \boldsymbol{0}$, so lauten die (f,f)-Massenmatrix

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\;\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_i & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & m_i\,\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}\\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}\end{bmatrix}, \\
\rightarrow \boldsymbol{M} &= \sum_{i=1}^{n}\left(m_i\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}\right)
\end{aligned}
\tag{7.106}
$$

und der f-Vektor der verallgemeinerten CORIOLIS-Kräfte

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\sum_{i=1}^{n}\left[\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\;\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\right]\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_i & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & m_i\,\boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i\\ \bar{\boldsymbol{a}}_i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\right), \\
\rightarrow \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,\bar{\boldsymbol{a}}_i + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i\right).
\end{aligned}
\tag{7.107}
$$

Walker und Orin [107] beschreiben weitere Varianten zur effizienten Berechnung der Terme der Bewegungsgleichungen (7.102), siehe auch Featherstone [107].

Zustandsgleichungen Die Zustandsgleichungen (7.96) bestehen aus den kinematischen Bewegungsgleichungen (7.15) und den kinetischen Bewegungsgleichungen (7.102),

$$\begin{array}{rcl} (7.15): \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\beta},t)\;\left(\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t)+\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t)\right) \end{bmatrix} \\ (7.102): & & \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t)\,. \end{array} \tag{7.108}$$

Reaktionskraftwinder Mit den Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ aus (7.102) können die Körper-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ mit Hilfe der Impulssätze (7.81) unter Berücksichtigung der expliziten Körperbindungen (7.35) berechnet werden,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \widehat{\boldsymbol{M}}\,\hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}\,. \tag{7.109}$$

Die Reaktionskraftwinder am i-ten Körper lauten

$$\begin{array}{rcl} \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{r}} & = & \widehat{\boldsymbol{M}}_i \quad \hat{\boldsymbol{a}}_i \;-\; \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{c}} \;-\; \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{e}} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{r}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_i & m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si} \\ m_i\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_{Si}^{\mathrm{T}} & m_i\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_i \\ \boldsymbol{a}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{\Theta}_i\,\boldsymbol{\omega}_i \\ -m_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,\boldsymbol{b}_{Si} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}} \\ \boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{7.110}$$

Die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ werden daraus mit (7.98) berechnet,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}\,. \tag{7.111}$$

Positive Definitheit der Massenmatrix Die Massenmatrix $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\widehat{\boldsymbol{M}}\,\boldsymbol{J}$ in (7.103) ist positiv definit und damit auch regulär, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind, vgl. Abschnitt 5.3.6:

1. Die globale $(6n,6n)$-Matrix $\widehat{\boldsymbol{M}}$ in (7.81) ist positiv definit. Dies ist der Fall, wenn alle Massen und Massenträgheitsmomente ungleich null sind.
2. Die globale $(6n,f)$-Jacobi-Matrix der Körper $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}$ aus (7.27) besitzt den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{J}) = f$. Da die Versatzmatrix $\boldsymbol{B}$ stets regulär ist, muss dazu die $(6n,f)$-Jacobi-Matrix der Gelenke $\boldsymbol{C}$ aus (7.20) den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{C}) = f$ besitzen. Hierzu müssen die $(6,f_i)$-Matrizen $\boldsymbol{C}_i$ der Gelenke jeweils den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{C}_i) = f_i$ haben. Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ der Gelenke definitionsgemäß voneinander unabhängig sind.

Die Bedingung 1 ist hinreichend, aber nicht notwendig für die positive Definitheit vom $\boldsymbol{M}$. Verschwinden einzelne Massen bzw. Trägheitsmomente der Körper, so ist $\widehat{\boldsymbol{M}}$ nur positiv semidefinit. Die Reduktion von $\widehat{\boldsymbol{M}}$ mit Hilfe von (7.106) kann dennoch eine positiv definite Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ ergeben.

7.5 Rekursiver Formalismus für offene MKS

Für die Formulierung des rekursiven Formalismus wird günstig vom System der Bestimmungsgleichungen (7.93) ausgegangen, da hier die im Berechnungsablauf als Zwischengrößen verwendeten Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ direkt auftreten. Diese Vorgehensweise wurde von WEHAGE [108] angegeben und wird auch von REIN [84] beschrieben.

7.5.1 Rekursive Lösung der Bestimmungsgleichungen

Das Prinzip der rekursiven Lösung des linearen Gleichungssystems (7.93) wird am Beispiel der in Abb. 7.18 dargestellten Kette mit drei Körpern gezeigt. Die drei Blockmatrizengleichungen in (7.93) lauten hier:

- Impuls- und Drallsätze (7.81) mit $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ aus (7.66):

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{\boldsymbol{M}} & \hat{\boldsymbol{a}} & - & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} & = & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{M}}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{a}}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}_{21}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} & -\boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} \end{bmatrix} . \quad \begin{matrix} (7.112\mathrm{a}) \\ (7.112\mathrm{b}) \\ (7.112\mathrm{c}) \end{matrix}$$

- Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene (7.33):

$$\begin{array}{ccccccc} -\boldsymbol{B} & \hat{\boldsymbol{a}} & + & \boldsymbol{C} & \dot{\boldsymbol{\eta}} & = & -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_{21} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{32} & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{a}}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2^{\mathrm{rel}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \end{bmatrix} . \quad \begin{matrix} (7.113\mathrm{a}) \\ (7.113\mathrm{b}) \\ (7.113\mathrm{c}) \end{matrix}$$

- Implizite Reaktionsbedingungen (7.68) für die Reaktionskraftwinder an den Gelenken:

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} & = & \boldsymbol{0} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} . \quad \begin{matrix} (7.114\mathrm{a}) \\ (7.114\mathrm{b}) \\ (7.114\mathrm{c}) \end{matrix}$$

Für die Berechnung der Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}_i$, der Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$ und der Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ wird nun aus dem System der Gleichungen (7.112) bis (7.114) für jeden Körper ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus dem entsprechenden Impuls- und Drallsatz, den

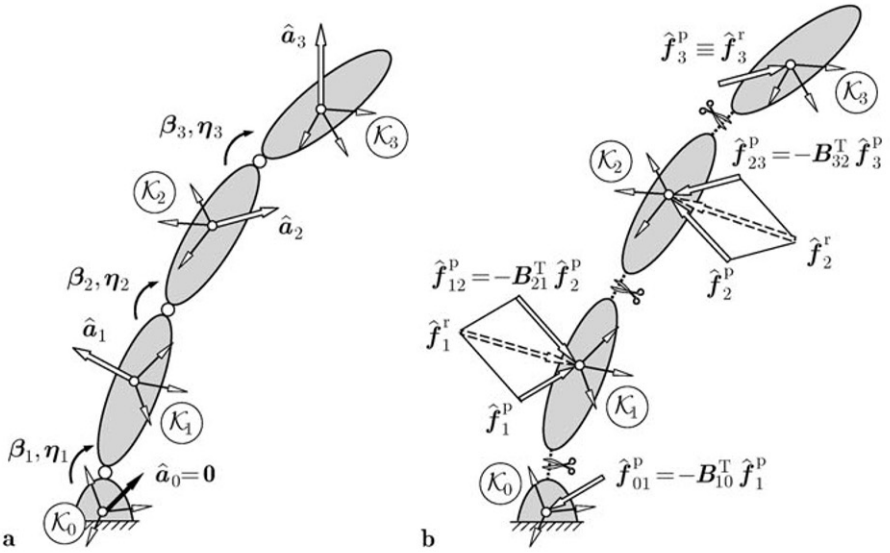


Abb. 7.18 Zur rekursiven Aufstellung der Bewegungsgleichungen.
a Kinematik. **b** Gelenk-Reaktionskraftwinder

expliziten Bindungen des Gelenks zum Vorgängerkörper und den impliziten Reaktionsbedingungen dieses Gelenks zusammengestellt. Für den Blattkörper $\mathcal{K}_3$ lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} (7.112\mathrm{c}): \\ (7.113\mathrm{c}): \\ (7.114\mathrm{c}): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_3 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} \\ -\boldsymbol{B}_{32}\, \hat{\boldsymbol{a}}_2 - \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{r} (7.115\mathrm{a}) \\ (7.115\mathrm{b}) \\ (7.115\mathrm{c}) \end{array}$$

Das Gleichungssystem (7.115) ist über die Beschleunigung $\hat{\boldsymbol{a}}_2$ und den Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ mit dem entsprechenden Gleichungssystem des Vorgängerkörpers $\mathcal{K}_2$ gekoppelt,

$$\begin{array}{l} (7.112\mathrm{b}): \\ (7.113\mathrm{b}): \\ (7.114\mathrm{b}): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_2 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}} - \boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} \\ -\boldsymbol{B}_{21}\, \hat{\boldsymbol{a}}_1 - \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{r} (7.116\mathrm{a}) \\ (7.116\mathrm{b}) \\ (7.116\mathrm{c}) \end{array}$$

Das Gleichungssystem (7.116) ist wiederum über die Beschleunigung $\hat{\boldsymbol{a}}_1$ und den Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}}$ mit dem entsprechenden Gleichungssystem des Vorgängerkörpers $\mathcal{K}_1$ gekoppelt,

$$\begin{array}{l} (7.112\mathrm{a}): \\ (7.113\mathrm{a}): \\ (7.114\mathrm{a}): \end{array} \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1 & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}} - \boldsymbol{B}_{21}^{\mathrm{T}}\, \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \quad \begin{array}{r} (7.117\mathrm{a}) \\ (7.117\mathrm{b}) \\ (7.117\mathrm{c}) \end{array}$$

Die Auflösung der linearen Gleichungssysteme (7.115) bis (7.117) nach den Unbekannten $\hat{\boldsymbol{a}}_i$, $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$ beginnt beim Blattkörper $\mathcal{K}_3$. Durch Auflösen des Gleichungssystems (7.115) wird der Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ in Abhängigkeit von der Beschleunigung $\hat{\boldsymbol{a}}_2$ des Vorgängerkörpers $\mathcal{K}_2$ ausgedrückt und anschließend in die kinetische Gleichung (7.116a) von $\mathcal{K}_2$ eingesetzt.

Hierzu wird zuerst (7.115a) nach $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ umgestellt und in (7.115c) eingesetzt,

$$\boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \left(\widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \hat{\boldsymbol{a}}_3 - \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} \right) = \boldsymbol{0} \, . \tag{7.118}$$

Einsetzen von $\hat{\boldsymbol{a}}_3$ aus (7.115b) in (7.118) ergibt ein lineares Gleichungssystem für die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_3$ in Abhängigkeit von $\hat{\boldsymbol{a}}_2$, das nach $\dot{\boldsymbol{\eta}}_3$ aufgelöst wird,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_3 = -\boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \boldsymbol{B}_{32} \, \hat{\boldsymbol{a}}_2 + \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \left(\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \right) \, , \tag{7.119}$$

mit der symmetrischen Matrix $\boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \boldsymbol{C}_3$. Einsetzen von $\dot{\boldsymbol{\eta}}_3$ aus (7.119) in (7.115b) ergibt die Beschleunigung $\hat{\boldsymbol{a}}_3$ in Abhängigkeit von $\hat{\boldsymbol{a}}_2$,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{a}}_3 = \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{C}_3 \, \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \right) \boldsymbol{B}_{32} \, \hat{\boldsymbol{a}}_2 \, + \\ + \, \boldsymbol{C}_3 \, \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \left(\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \right) + \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \, . \end{aligned} \tag{7.120}$$

Einsetzen von $\hat{\boldsymbol{a}}_3$ aus (7.120) in die nach $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ umgestellte Gleichung (7.115a) ergibt schließlich den Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ in Abhängigkeit von $\hat{\boldsymbol{a}}_2$,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{C}_3 \, \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \right) \boldsymbol{B}_{32} \, \hat{\boldsymbol{a}}_2 \, + \\ - \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \boldsymbol{C}_3 \, \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \right) \left(\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \right) . \end{aligned} \tag{7.121}$$

Der Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ aus (7.121) wird nun in die kinetische Gleichung (7.116a) des Vorgängerkörpers $\mathcal{K}_2$

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_2 \, \hat{\boldsymbol{a}}_2 = \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}} - \boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}} + \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \tag{7.122}$$

eingesetzt. Die entstehende Gleichung hat dann die Form der kinetischen Gleichung (7.115a) des Blattkörpers $\mathcal{K}_3$,

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_2^{*} \, \hat{\boldsymbol{a}}_2 = \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} + \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*} \tag{7.123}$$

mit den neuen Termen

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_2^{*} = \widehat{\boldsymbol{M}}_2 + \boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \boldsymbol{C}_3 \, \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \right) \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \boldsymbol{B}_{32} \, , \tag{7.124}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*} = \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}} + \boldsymbol{B}_{32}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \boldsymbol{C}_3 \, \boldsymbol{N}_3^{-1} \, \boldsymbol{C}_3^{\mathrm{T}} \right) \left(\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}} - \widehat{\boldsymbol{M}}_3 \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3^{\mathrm{rel}} \right) . \tag{7.125}$$

Dieses Ergebnis lässt sich so interpretieren, dass die Massenmatrix $\widehat{\boldsymbol{M}}_3$ und der Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{ec}}$ des Blattkörpers $\mathcal{K}_3$ unter Berücksichtigung der Bindungen des Gelenks auf den Vorgängerkörper $\mathcal{K}_2$ projiziert werden.

Wird in dem Gleichungssystem (7.116) des Körpers $\mathcal{K}_2$ die kinetische Gleichung (7.116a) durch (7.123) ersetzt, so hat es die Struktur des Gleichungssystems (7.115) des Blattkörpers $\mathcal{K}_3$ ohne den primären Reaktionskraftwinder vom Nachfolgekörper,

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_2^* & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*} \\ -\boldsymbol{B}_{21}\,\hat{\boldsymbol{a}}_1 - \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} . \tag{7.126}$$

Damit liegt eine um den Körper $\mathcal{K}_3$ reduzierte Kette mit $\mathcal{K}_2$ als neuem Blattkörper vor.

Nach demselben Prinzip werden im nächsten Schritt die Unbekannten $\hat{\boldsymbol{a}}_2$, $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}}$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}_2$ von Körper $\mathcal{K}_2$ eliminiert, indem die Massenmatrix $\widehat{\boldsymbol{M}}_2^*$ und der Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*}$ in Analogie zu (7.124) und (7.125) auf den Körper $\mathcal{K}_1$ projiziert werden,

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_1^* = \widehat{\boldsymbol{M}}_1 + \boldsymbol{B}_{21}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_2^* \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{N}_2^{-1} \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} \right) \widehat{\boldsymbol{M}}_2^* \boldsymbol{B}_{21} \tag{7.127}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} \widehat{\boldsymbol{M}}_2^* \boldsymbol{C}_2 ,$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} = \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}} + \boldsymbol{B}_{21}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_2^* \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{N}_2^{-1} \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}} \right) \left(\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_2^* \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2^{\mathrm{rel}} \right) . \tag{7.128}$$

An die Stelle des Gleichungssystems (7.117) von Körper $\mathcal{K}_1$ tritt damit das reduzierte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} . \tag{7.129}$$

Die in (7.129) verbleibenden Unbekannten sind die Gelenkbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1$, die Absolutbeschleunigung $\hat{\boldsymbol{a}}_1$ und der Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}}$ von Körper $\mathcal{K}_1$. Auf der rechten Seite des Gleichungssystems stehen dagegen keine Unbekannten mehr, weil der Vorgängerkörper $\mathcal{K}_0$ das raumfeste System ist.

Das Gleichungssystem (7.129) kann daher in Analogie zu (7.119) bis (7.121) nach $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1$, $\hat{\boldsymbol{a}}_1$ und $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}}$ aufgelöst werden,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \boldsymbol{N}_1^{-1} \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} \left(\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \right) \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* \boldsymbol{C}_1 , \tag{7.130}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_1 = \boldsymbol{C}_1 \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \qquad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \text{ aus (7.130)} , \tag{7.131}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* \hat{\boldsymbol{a}}_1 - \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} \qquad \text{mit} \quad \hat{\boldsymbol{a}}_1 \text{ aus (7.131)} . \tag{7.132}$$

Die eliminierten Unbekannten können nun durch eine Vorwärtsrekursion vom Körper $\mathcal{K}_1$ zum Blattkörper $\mathcal{K}_3$ berechnet werden. Hierzu wird das Gleichungssystem (7.126) mit der nun aus (7.131) bekannten Beschleunigung $\hat{\boldsymbol{a}}_1$ nach den Unbekannten von Körper $\mathcal{K}_2$ aufgelöst,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 = \boldsymbol{N}_2^{-1}\,\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_2^{*}\left(\boldsymbol{B}_{21}\,\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2^{\mathrm{rel}}\right)\right)\,, \tag{7.133}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_2 = \boldsymbol{B}_{21}\,\hat{\boldsymbol{a}}_1 + \boldsymbol{C}_2\,\dot{\boldsymbol{\eta}}_2 + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2^{\mathrm{rel}} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}_2 \text{ aus (7.133)}\,, \tag{7.134}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{p}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_2^{*}\,\hat{\boldsymbol{a}}_2 - \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{ec}*} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\boldsymbol{a}}_2 \text{ aus (7.134)}\,. \tag{7.135}$$

Mit $\hat{\boldsymbol{a}}_2$ aus (7.134) wird schließlich das Gleichungssystem (7.115) in der gleichen Weise nach den Größen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_3$, $\hat{\boldsymbol{a}}_3$, $\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{p}}$ des Blattkörpers $\mathcal{K}_3$ aufgelöst.

7.5.2 Ablauf der rekursiven Berechnung

Das Lösungsschema aus Abschnitt 7.5.1 kann auf ein baumstrukturiertes Mehrkörpersystem mit $n(= n_{\mathrm{K}})$ Körpern verallgemeinert werden.

Zu einem Zeitpunkt t mit gegebenen Zustandsgrößen $\boldsymbol{\beta}$ und $\boldsymbol{\eta}$ werden die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$, die Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}_i$ und die Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ in den folgenden Schritten berechnet:

1. Kinematische Vorwärtsrechnung auf Lage- und Geschwindigkeitsebene mit Hilfe der expliziten Gelenkbindungen (7.16) und (7.19),

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i(\hat{\boldsymbol{r}}_p, \boldsymbol{\beta}_i, t)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{7.136}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{B}_{ip}\,\hat{\boldsymbol{v}}_p + \boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{\eta}_i + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_i^{\mathrm{rel}}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{7.137}$$

   Der Index p kennzeichnet den jeweiligen Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{p(i)}$ des Körpers $\mathcal{K}_i$. Für das raumfeste System $\mathcal{K}_0$ gilt $\hat{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{0}$ und $\hat{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{0}$.

2. Rückprojektion der Körper-Massenmatrizen sowie der eingeprägten Kraftwinder auf die jeweiligen Vorgängerkörper gemäß (7.124) und (7.125), beginnend mit den Blattkörpern:

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_p^{*} = \widehat{\boldsymbol{M}}_p + \boldsymbol{B}_{ip}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^{*}\,\boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\right)\widehat{\boldsymbol{M}}_i^{*}\,\boldsymbol{B}_{ip} \tag{7.138}$$

$$\text{mit} \qquad \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_i^{*}\,\boldsymbol{C}_i\,,$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_p^{\mathrm{ec}*} = \hat{\boldsymbol{f}}_p^{\mathrm{ec}} + \boldsymbol{B}_{ip}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^{*}\,\boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\right)\left(\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^{*}\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}}\right)\,. \tag{7.139}$$

   Der Index i läuft von n bis 2. Auf einem Verzweigungskörper werden die Massen und eingeprägten Kraftwinder aller seiner Nachfolgekörper projiziert.

3. Lösen des linearen Gleichungssystems (7.129) für Körper $\mathcal{K}_1$,

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{7.140}$$

mit dem Ergebnis

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1 = \boldsymbol{N}_1^{-1}\, \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} \left(\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \right) \qquad \text{mit } \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* \, \boldsymbol{C}_1 \,, \tag{7.141}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_1 = \boldsymbol{C}_1\, \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \qquad \text{mit } \dot{\boldsymbol{\eta}}_1 \text{ aus (7.141)}\,, \tag{7.142}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* \, \hat{\boldsymbol{a}}_1 - \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} \qquad \text{mit } \hat{\boldsymbol{a}}_1 \text{ aus (7.142)}\,. \tag{7.143}$$

4. Berechnen der eliminierten Variablen, beginnend am Körper $\mathcal{K}_2$. Der Index i läuft von 2 bis n. Es gilt

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \boldsymbol{N}_i^{-1}\, \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}} \left(\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^* \big(\boldsymbol{B}_{ip}\, \hat{\boldsymbol{a}}_p + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}} \big) \right) \tag{7.144}$$

$$\text{mit } \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\, \widehat{\boldsymbol{M}}_i^* \, \boldsymbol{C}_i \,,$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i = \boldsymbol{B}_{ip}\, \hat{\boldsymbol{a}}_p + \boldsymbol{C}_i\, \dot{\boldsymbol{\eta}}_i + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}} \qquad \text{mit } \dot{\boldsymbol{\eta}}_i \text{ aus (7.144)}\,, \tag{7.145}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_i^* \, \hat{\boldsymbol{a}}_i - \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*} \qquad \text{mit } \hat{\boldsymbol{a}}_i \text{ aus (7.145)}\,. \tag{7.146}$$

Werden die Gelenk-Reaktionskraftwinder nicht benötigt, so können die Berechnungsschritte (7.143) und (7.146) entfallen.

Zur Effizienz rekursiver Mehrkörperformalismen liegen zahlreichen Arbeiten vor, u.A. von Stelzle et al. [100], Valášek und Stejskal [102], Rein [84] und Featherstone [22]. Optimierungsmöglichkeiten ergeben sich vor allem durch die Wahl der Bezugspunkte für die Kraftwinder und der Koordinatensysteme für die Darstellung der Vektoren. Bei offenen Mehrkörpersystemen mit Kettenstruktur benötigen rekursive Formalismen ab einer Anzahl von etwa 6 bis 10 Körpern weniger Fließkommaoperationen als nichtrekursive Formalismen.

7.6 Beispiele offener Mehrkörpersysteme

7.6.1 Vertikaler Knickarm-Roboter

Für den in Abb. 7.19 gezeigten vertikalen Knickarm-Roboter mit drei Drehgelenken werden die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Das Mehrkörpermodell hat $n = 3$ Körper mit den Massenmittelpunkten S_i und den Trägheitstensoren ${}^i\boldsymbol{\Theta}_i = \mathrm{diag}(A_i \;\; B_i \;\; C_i)$ bezüglich S_i (jeweils $i = 1, 2, 3$). Neben den Ge-

wichtskräften wirken an den Gelenken die Antriebsmomente τ_i zwischen den jeweiligen Armsegmenten.

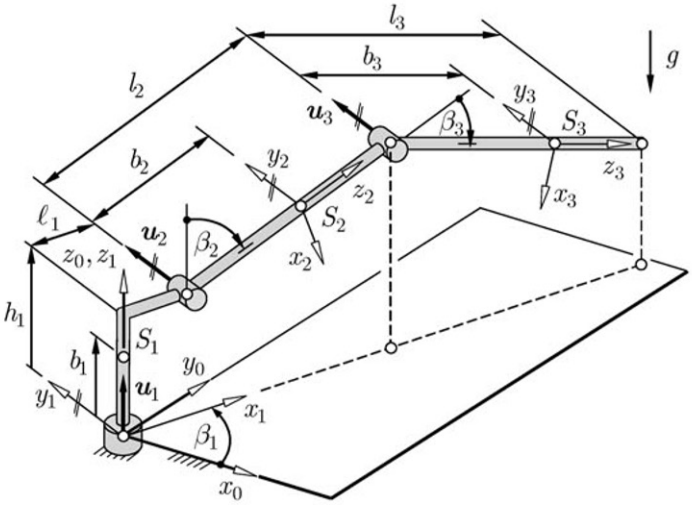


Abb. 7.19 Knickarm-Roboter mit drei Drehgelenken

Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten Als die $f = 3$ Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten werden die drei Gelenkwinkel $\boldsymbol{\beta}$ und deren Zeitableitungen definiert,

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\, \beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3 \,\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \left[\, \dot{\beta}_1 \;\; \dot{\beta}_2 \;\; \dot{\beta}_3 \,\right]^{\mathrm{T}} . \tag{7.147}$$

Die kinematischen Bewegungsgleichungen (7.15) haben dann mit $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$ die einfache Form

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\eta} \,. \tag{7.148}$$

Explizite Bindungen Zur Aufstellung der expliziten Bindungen der körperfesten Koordinatensysteme $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ und $\mathcal{K}_3$ werden die expliziten Bindungen für Systeme mit Kettenstruktur und Drehgelenken aus den Abschnitten 7.2.2 und Abschnitt 7.2.3 verwendet.

Explizite Bindungen auf Lageebene Die Drehmatrizen und die Ortsvektoren zu den Körper-Bezungspunkten lauten für Körper $\mathcal{K}_1$

$$^{01}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1 & -\mathrm{s}\beta_1 & 0 \\ \mathrm{s}\beta_1 & \mathrm{c}\beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad {}^{0}\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \end{bmatrix}, \tag{7.149}$$

für Körper $\mathcal{K}_2$

$$
{}^{02}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{c}\beta_2 & -\mathrm{s}\beta_1 & \mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 \\ \mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{c}\beta_2 & \mathrm{c}\beta_1 & \mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 \\ -\mathrm{s}\beta_2 & 0 & \mathrm{c}\beta_2 \end{bmatrix}, \tag{7.150}
$$

$$
{}^{0}\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\ (\,l_1 + b_2\,\mathrm{s}\beta_2\,) \\ \mathrm{s}\beta_1\ (\,l_1 + b_2\,\mathrm{s}\beta_2\,) \\ h_1 + b_2\,\mathrm{c}\beta_2 \end{bmatrix} \tag{7.151}
$$

und für Körper $\mathcal{K}_3$ mit $\beta_{23} = \beta_2 + \beta_3$

$$
{}^{03}\boldsymbol{T} = {}^{01}\boldsymbol{T}\,{}^{12}\boldsymbol{T}\,{}^{23}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{c}\beta_{23} & -\mathrm{s}\beta_1 & \mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_{23} \\ \mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{c}\beta_{23} & \mathrm{c}\beta_1 & \mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_{23} \\ -\mathrm{s}\beta_{23} & 0 & \mathrm{c}\beta_{23} \end{bmatrix}, \tag{7.152}
$$

$$
{}^{0}\boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\ (\,l_1 + l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + b_3\,\mathrm{s}\beta_{23}\,) \\ \mathrm{s}\beta_1\ (\,l_1 + l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + b_3\,\mathrm{s}\beta_{23}\,) \\ h_1 + l_2\,\mathrm{c}\beta_2 + b_3\,\mathrm{c}\beta_{23} \end{bmatrix}. \tag{7.153}
$$

Explizite Bindungen auf Geschwindigkeitsebene Die expliziten Bindungen auf Geschwindigkeitsebene haben die Form (7.31) mit der globalen Jacobi-Matrix der Körper $\boldsymbol{J}$,

$$
\begin{array}{cccc} & \hat{\boldsymbol{v}} & = & \boldsymbol{J} \qquad\qquad \boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{31} & \boldsymbol{J}_{32} & \boldsymbol{J}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}. \end{array} \tag{7.154}
$$

Die Teilmatrizen haben für Drehgelenke den Aufbau (7.38),

$$
\boldsymbol{J}_{ji} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}ji} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_i\,\boldsymbol{d}_{ji} \end{bmatrix}, \qquad i,j = 1,2,3, \quad j \geq i\,, \tag{7.155}
$$

mit den Vektoren $\boldsymbol{d}_{ji}$ von den Gelenkachsen $\boldsymbol{u}_i$ zu den Körper-Koordinatensystemen $\mathcal{K}_j$ entsprechend Abb. 7.20.

Die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{J}_1$ von Körper $\mathcal{K}_1$ enthält die Jacobi-Matrizen der Rotation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}1}$ und der Translation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}1}$,

$$
\boldsymbol{J}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R}1} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T}1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{d}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{7.156}
$$

Für die Koordinatendarstellung wird das System $\mathcal{K}_1$ gewählt. Mit

$$
{}^{1}\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad {}^{1}\boldsymbol{d}_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{7.157}
$$

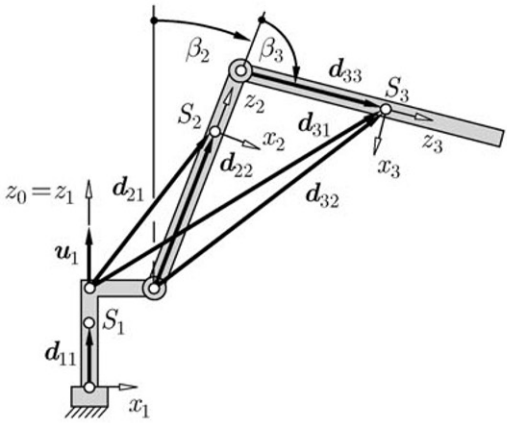


Abb. 7.20 Zur Berechnung der JACOBI-Matrix

lauten die rotatorischen und translatorischen JACOBI-Matrizen von $\mathcal{K}_1$

$$
{}^1\boldsymbol{J}_{\mathrm{R1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^1\boldsymbol{J}_{\mathrm{T1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.158}
$$

Die JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}_2$ von Körper $\mathcal{K}_2$ hat den Aufbau

$$
\boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R2}} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{21} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\, \boldsymbol{d}_{22} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \tag{7.159}
$$

Mit den in $\mathcal{K}_2$ dargestellten Vektoren

$$
{}^2\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_2 \\ 0 \\ \mathrm{c}\beta_2 \end{bmatrix}, \qquad {}^2\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.160}
$$

$$
{}^2\boldsymbol{d}_{21} = \begin{bmatrix} l_1\, \mathrm{c}\beta_2 \\ 0 \\ b_2 + l_1\, \mathrm{s}\beta_2 \end{bmatrix}, \qquad {}^2\boldsymbol{d}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{7.161}
$$

lauten die rotatorischen und translatorischen JACOBI-Matrizen von $\mathcal{K}_2$

$$
{}^2\boldsymbol{J}_{\mathrm{R2}} = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{c}\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad {}^2\boldsymbol{J}_{\mathrm{T2}} = \begin{bmatrix} 0 & b_2 & 0 \\ l_1 + b_2\, \mathrm{s}\beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.162}
$$

Die JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}_3$ von Körper $\mathcal{K}_3$ lautet schließlich

$$
\boldsymbol{J}_3 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{31} & \boldsymbol{J}_{32} & \boldsymbol{J}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{\mathrm{R3}} \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{T3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\, \boldsymbol{d}_{31} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\, \boldsymbol{d}_{32} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\, \boldsymbol{d}_{33} \end{bmatrix}. \tag{7.163}
$$

Mit den in $\mathcal{K}_3$ dargestellten Vektoren

$$
{}^3\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_{23} \\ 0 \\ \mathrm{c}\beta_{23} \end{bmatrix}, \qquad {}^3\boldsymbol{u}_2 = {}^3\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.164}
$$

$$
{}^3\boldsymbol{d}_{31} = \begin{bmatrix} l_1\,\mathrm{c}\beta_{23} - l_2\,\mathrm{s}\beta_3 \\ 0 \\ b_3 + l_1\,\mathrm{s}\beta_{23} + l_2\,\mathrm{c}\beta_3 \end{bmatrix}, \tag{7.165}
$$

$$
{}^3\boldsymbol{d}_{32} = \begin{bmatrix} -l_2\,\mathrm{s}\beta_3 \\ 0 \\ b_3 + l_2\,\mathrm{c}\beta_3 \end{bmatrix}, \qquad {}^3\boldsymbol{d}_{33} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{7.166}
$$

ergeben sich die rotatorischen und translatorischen JACOBI-Matrizen von $\mathcal{K}_3$

$$
{}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}3} = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \mathrm{c}\beta_{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{7.167}
$$

$$
{}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}3} = \begin{bmatrix} 0 & b_3 + l_2\,\mathrm{c}\beta_3 & b_3 \\ l_1 + l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + b_3\,\mathrm{s}\beta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & l_2\,\mathrm{s}\beta_3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.168}
$$

Explizite Bindungen auf Beschleunigungsebene Die nicht von den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden Vektoren $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_i$ lauten gemäß (7.37)

$$
\begin{array}{cccc}
\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}} & = & \dot{\boldsymbol{J}} & \boldsymbol{\eta} \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_1 \\ \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_2 \\ \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{J}}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{21} & \dot{\boldsymbol{J}}_{22} & \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{31} & \dot{\boldsymbol{J}}_{32} & \dot{\boldsymbol{J}}_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix}
\end{array} \tag{7.169}
$$

mit den Teilmatrizen gemäß (7.39)

$$
\dot{\boldsymbol{J}}_{ji} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{R}ji} \\ \dot{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{T}ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_i \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_i\,\boldsymbol{d}_{ji} + \tilde{\boldsymbol{u}}_i\,\dot{\boldsymbol{d}}_{ji} \end{bmatrix}, \quad i,j = 1,2,3\,, \quad j \geq i\,. \tag{7.170}
$$

Der Beschleunigungsterm $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_1$ für Körper $\mathcal{K}_1$ ergibt sich aus (7.169) mit $\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{0}$ und $\dot{\boldsymbol{d}}_{11} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1\,\boldsymbol{d}_{11} = \dot{\beta}_1\,\tilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{d}_{11} = \boldsymbol{0}$ zu

$$
\begin{array}{cccccc}
\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_1 & = & \dot{\boldsymbol{J}}_{11} & \dot{\beta}_1 & & \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_1 \\ \bar{\boldsymbol{a}}_1 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_1 \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_1\,\boldsymbol{d}_{11} + \tilde{\boldsymbol{u}}_1\,\dot{\boldsymbol{d}}_{11} \end{bmatrix} & \dot{\beta}_1 & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}.
\end{array} \tag{7.171}
$$

Der Beschleunigungsterm $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_2$ für Körper $\mathcal{K}_2$ lautet gemäß (7.169) mit $\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_2 &= \dot{\boldsymbol{J}}_{21} \quad \dot{\beta}_1 + \quad \dot{\boldsymbol{J}}_{22} \quad \dot{\beta}_2 \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 \\ \bar{\boldsymbol{a}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{21} \end{bmatrix} \dot{\beta}_1 + \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_2 \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_2 \, \boldsymbol{d}_{22} + \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{22} \end{bmatrix} \dot{\beta}_2 . \end{aligned} \tag{7.172}$$

Mit den Vektoren

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{u}}_2 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \, \boldsymbol{u}_2 \, , \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{21} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \, \boldsymbol{d}_{21} + \dot{\beta}_2 \, \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \, \boldsymbol{d}_{22} \, , \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{22} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 \, \boldsymbol{d}_{22} \\ &\text{mit} \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\beta}_1 \, \boldsymbol{u}_1 \, , \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\beta}_1 \, \boldsymbol{u}_1 + \dot{\beta}_2 \, \boldsymbol{u}_2 \end{aligned} \tag{7.173}$$

lauten die nicht von $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden Beschleunigungsanteile von $\mathcal{K}_2$ unter Verwendung der Vektorkoordinaten aus (7.161)

$$ {}^2\bar{\boldsymbol{\alpha}}_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{c}\beta_2 \\ 0 \\ -\mathrm{s}\beta_2 \end{bmatrix} \dot{\beta}_1 \, \dot{\beta}_2 \, , \quad {}^2\bar{\boldsymbol{a}}_2 = \begin{bmatrix} -\left(l_1 + b_2 \, \mathrm{s}\beta_2 \right) \mathrm{c}\beta_2 \, \dot{\beta}_1^2 \\ 2 \, b_2 \, \mathrm{c}\beta_2 \, \dot{\beta}_1 \, \dot{\beta}_2 \\ -l_1 \, \mathrm{s}\beta_2 \, \dot{\beta}_1^2 - b_2 \left(\mathrm{s}^2\beta_2 \, \dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2 \right) \end{bmatrix} . \tag{7.174}$$

Der Beschleunigungsterm $\bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_3$ für Körper $\mathcal{K}_3$ lautet gemäß (7.169) mit $\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \bar{\tilde{\boldsymbol{a}}}_3 &= \dot{\boldsymbol{J}}_{31} \quad \dot{\beta}_1 + \quad \dot{\boldsymbol{J}}_{32} \quad \dot{\beta}_2 + \quad \dot{\boldsymbol{J}}_{33} \quad \dot{\beta}_3 \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 \\ \bar{\boldsymbol{a}}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \tilde{\boldsymbol{u}}_1 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{31} \end{bmatrix} \dot{\beta}_1 + \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_2 \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_2 \, \boldsymbol{d}_{32} + \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{32} \end{bmatrix} \dot{\beta}_2 + \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_3 \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{u}}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33} + \tilde{\boldsymbol{u}}_3 \, \dot{\boldsymbol{d}}_{33} \end{bmatrix} \dot{\beta}_3 . \end{aligned} \tag{7.175}$$

Mit $\dot{\boldsymbol{u}}_2$ aus (7.173) und den Vektoren

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{u}}_3 = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 \, \boldsymbol{u}_3 \, , \qquad \dot{\boldsymbol{d}}_{31} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \, \boldsymbol{d}_{31} + \dot{\beta}_2 \, \tilde{\boldsymbol{u}}_2 \, \boldsymbol{d}_{32} + \dot{\beta}_3 \, \tilde{\boldsymbol{u}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33} \, , \\ &\dot{\boldsymbol{d}}_{32} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 \, \boldsymbol{d}_{32} + \dot{\beta}_3 \, \tilde{\boldsymbol{u}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33} \, , \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{33} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_3 \, \boldsymbol{d}_{33} \\ &\text{mit } \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\beta}_1 \, \boldsymbol{u}_1 + \dot{\beta}_2 \, \boldsymbol{u}_2 \, , \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_2 + \dot{\beta}_3 \, \boldsymbol{u}_3 \end{aligned} \tag{7.176}$$

ergeben sich unter Verwendung der Vektorkoordinaten aus (7.164) und (7.166) die nicht von $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden Beschleunigungsanteile von $\mathcal{K}_3$

$$ {}^3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \begin{bmatrix} -\mathrm{c}\beta_{23} \\ 0 \\ -\mathrm{s}\beta_{23} \end{bmatrix} \left(\dot{\beta}_2 + \dot{\beta}_3 \right) \dot{\beta}_1 \, , \tag{7.177}$$

$$ {}^3\bar{\boldsymbol{a}}_3 = \begin{bmatrix} l_2 \, \mathrm{s}\beta_3 \, \dot{\beta}_2^2 - \left(l_1 + l_2 \, \mathrm{s}\beta_2 + b_3 \, \mathrm{s}\beta_{23} \right) \mathrm{c}\beta_{23} \, \dot{\beta}_1^2 \\ 2 \left(l_2 \, \mathrm{c}\beta_2 \, \dot{\beta}_2 + b_3 \, \mathrm{c}\beta_{23} \, \dot{\beta}_2 + b_3 \, \mathrm{c}\beta_{23} \, \dot{\beta}_3 \right) \dot{\beta}_1 \\ -\left(l_1 + l_2 \, \mathrm{s}\beta_2 + b_3 \, \mathrm{s}\beta_{23} \right) \mathrm{s}\beta_{23} \, \dot{\beta}_1^2 + \\ \quad -\left(b_3 + l_2 \, \mathrm{c}\beta_3 \right) \dot{\beta}_2^2 - 2 \, b_3 \, \dot{\beta}_2 \, \dot{\beta}_3 - b_3 \, \dot{\beta}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3\bar{a}_{3x} \\ {}^3\bar{a}_{3y} \\ {}^3\bar{a}_{3z} \end{bmatrix} . \tag{7.178}$$

Eingeprägte Kräfte und Momente Die eingeprägte Kräfte und Momente auf $\mathcal{K}_1$ mit Darstellung in $\mathcal{K}_1$ lauten (Abb. 7.21)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} &= -m_1\, g\, \boldsymbol{e}_{z0} \\ \boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{e}} &= \tau_1\, \boldsymbol{u}_1 - \tau_2\, \boldsymbol{u}_2 \end{aligned}\right\} \rightarrow\ {}^1\boldsymbol{f}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_1\, g \end{bmatrix}, \quad {}^1\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ -\tau_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{7.179}$$

die eingeprägte Kräfte und Momente auf $\mathcal{K}_2$ mit Darstellung in $\mathcal{K}_2$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} &= -m_2\, g\, \boldsymbol{e}_{z0} \\ \boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{e}} &= \tau_2\, \boldsymbol{u}_2 - \tau_3\, {}^2\boldsymbol{u}_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow\ {}^2\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{e}} = m_2\, g \begin{bmatrix} \mathrm{s}\beta_2 \\ 0 \\ -\mathrm{c}\beta_2 \end{bmatrix}, \quad {}^2\boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_2 - \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.180}$$

und die eingeprägte Kräfte und Momente auf $\mathcal{K}_3$ mit Darstellung in $\mathcal{K}_3$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{f}_3^{\mathrm{e}} &= -m_3\, g\, \boldsymbol{e}_{z0} \\ \boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{e}} &= \tau_3\, \boldsymbol{u}_3 \end{aligned}\right\} \rightarrow\ {}^3\boldsymbol{f}_3^{\mathrm{e}} = m_3\, g \begin{bmatrix} \mathrm{s}\beta_{23} \\ 0 \\ -\mathrm{c}\beta_{23} \end{bmatrix}, \quad {}^3\boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{7.181}$$

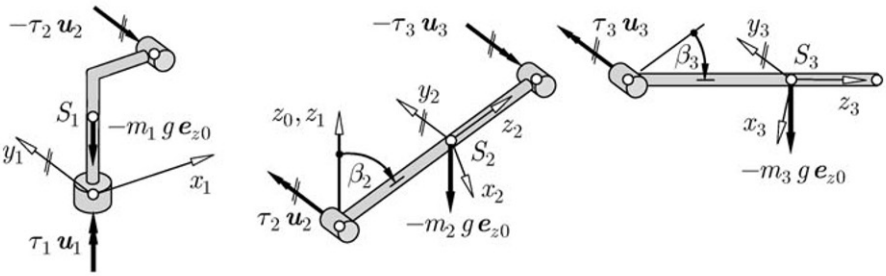


Abb. 7.21 Eingeprägte Kräfte und Momente
(Reaktionskräfte und -momente nicht dargestellt)

Kinetische Bewegungsgleichungen in Minimalform Die kinetischen Bewegungsgleichungen haben die Form (7.102),

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta})\, \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta})\,. \tag{7.182}$$

Die Massenmatrix wird gemäß (7.106) berechnet, wobei die Auswertung der Summanden in unterschiedlichen Koordinatensystemen erfolgen kann,

$$\boldsymbol{M} = \sum_{i=1}^{3} \left({}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\, {}^i\boldsymbol{\Theta}_i\, {}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i} + m_i\, {}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\, {}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i} \right)$$

$$\rightarrow\ \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{23} & M_{33} \end{bmatrix} \tag{7.183}$$

mit

$$
\begin{aligned}
M_{11} &= C_1 + A_2\,\mathrm{s}^2\beta_2 + C_2\,\mathrm{c}^2\beta_2 + m_2\,\left(l_1^2 + b_2^2\,\mathrm{s}^2\beta_2 + 2\,b_2\,l_1\,\mathrm{s}\beta_2\right) \\
&\quad + A_3\,\mathrm{s}^2\beta_{23} + C_3\,\mathrm{c}^2\beta_{23} + m_3\,(l_1 + l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + b_3\,\mathrm{s}\beta_{23})^2\,, \\
M_{22} &= B_2 + m_2\,b_2^2 + B_3 + m_3\,\left({b_3}^2 + 2\,b_3\,l_2\,\mathrm{c}\beta_3 + {l_2}^2\right)\,, \\
M_{23} &= B_3 + m_3\,b_3\,(b_3 + l_2\,\mathrm{c}\beta_3) = M_{32}\,, \\
M_{33} &= m_3\,{b_3}^2 + B_3\,.
\end{aligned}
$$

Die verallgemeinerten CORIOLIS-Kräfte lauten gemäß (7.107)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= -\sum_{i=1}^{3}\left({}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,{}^i\boldsymbol{\Theta}_i\,{}^i\bar{\boldsymbol{\alpha}}_i + {}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,{}^i\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_i\,{}^i\boldsymbol{\Theta}_i\,{}^i\boldsymbol{\omega}_i + m_i\,{}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,{}^i\bar{\boldsymbol{a}}_i\right) \\
\rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} &= \begin{bmatrix} k_1^{\mathrm{c}} \\ k_2^{\mathrm{c}} \\ k_3^{\mathrm{c}} \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.184}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
k_1^{\mathrm{c}} &= -\left(2\,m_2\,\mathrm{s}\beta_2\,b_2^2 + 2\,l_1\,m_2\,b_2 + A_2\,\mathrm{s}\beta_2 - C_2\,\mathrm{s}\beta_2\right)\,\mathrm{c}\beta_2\,\dot{\beta}_1\,\dot{\beta}_2 + \\
&\quad - m_3\,{}^3\bar{a}_{3y}\,(l_1 + b_3\,\mathrm{s}\beta_{23} + l_2\,\mathrm{s}\beta_2) - 2\,(A_3 - C_3)\,\mathrm{s}\beta_{23}\,\mathrm{c}\beta_{23}\,\dot{\beta}_1\,\dot{\beta}_{23}\,, \\
k_2^{\mathrm{c}} &= b_2\,m_2\,(l_1 + b_2\,\mathrm{s}\beta_2)\,\mathrm{c}\beta_2\,\dot{\beta}_1^2 - m_3\,{}^3\bar{a}_{3x}\,(b_3 + l_2\,\mathrm{c}\beta_3) - m_3\,{}^3\bar{a}_{3z}\,l_2\,\mathrm{s}\beta_3 + \\
&\quad + (A_3 - C_3)\,\mathrm{s}\beta_{23}\,\mathrm{c}\beta_{23}\,\dot{\beta}_1^2\,, \\
k_3^{\mathrm{c}} &= -m_3\,{}^3\bar{a}_{3x}\,b_3 + (A_3 - C_3)\,\mathrm{s}\beta_{23}\,\mathrm{c}\beta_{23}\,\dot{\beta}_1^2\,.
\end{aligned}
$$

Die verallgemeinerten eingeprägten Kräfte lauten gemäß (7.105)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} &= \sum_{i=1}^{3}\left({}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}i}^{\mathrm{T}}\,{}^i\boldsymbol{\tau}_i^{\mathrm{e}} + {}^i\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}i}^{\mathrm{T}}\,{}^i\boldsymbol{f}_i^{\mathrm{e}}\right) \\
\rightarrow\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ m_2\,g\,b_2\,\mathrm{s}\beta_2 + m_3\,g\,(\,l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + b_3\,\mathrm{s}\beta_{23}\,) \\ m_3\,g\,b_3\,\mathrm{s}\beta_{23} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{k}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\tau}}\,.
\end{aligned}
\tag{7.185}
$$

Die verallgemeinerten eingeprägten Kräfte sind hier aufgeteilt in die auf die Gewichtskräfte zurückgehenden Anteile $\boldsymbol{k}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}$ und die Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}$.

Mit (7.147) und (7.182) liegen die Bewegungsgleichungen als ein Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung in den Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ vor

$$
\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta})\,\ddot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}}) + \boldsymbol{k}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\tau}(t)\,. \tag{7.186}
$$

Mit den Bewegungsgleichungen (7.186) können vor allem die beiden folgenden Aufgabenstellungen gelöst werden.

Direkte Dynamik Für gegebene Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}(t)$ und Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\beta}(t_0) = \boldsymbol{\beta}_0$ und $\boldsymbol{\eta}(t_0) = \dot{\boldsymbol{\beta}}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0$ wird die sich ergebende Bewegung $\boldsymbol{\beta}(t)$ berechnet. Hierzu werden die Zustandsgleichungen

$$\begin{array}{rcl} (7.147): \\ (7.182): \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{\beta})\big(\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{k}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\tau}(t)\big) \\ \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t)\,. \end{bmatrix} \tag{7.187}$$

mit einem Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen numerisch integriert, siehe Abschnitt 5.7.1.

In der Robotertechnik wird die Lösung der direkten Dynamik wird z.B. für die Simulation des Roboters als Regelstrecke in einem Regelkreis benötigt. Die Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}(t)$ werden mit Hilfe eines Reglers aus gemessenen Lage- und Geschwindigkeitsgrößen des Systems und gegebenenfalls weiterer Regler-Zustandsgrößen so berechnet, dass der Roboter eine gewünschte Bewegung ausführt.

Inverse Dynamik Bei der inversen Dynamik werden die Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}(t)$ berechnet, die zur Realisierung einer gegebenen Bewegung $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t)$, $\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{s}}(t) = \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{s}}(t)$, $\dot{\boldsymbol{\eta}}_{\mathrm{s}}(t) = \ddot{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{s}}(t)$ erforderlich sind. Die vorgegebene Bewegung wird hierzu durch die rheonomen Bindungen

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta},t) \equiv \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t) = \boldsymbol{0} \tag{7.188}$$

aufgeprägt, vgl. (6.5). Wie bereits in Abschnitt 6.1.4 beschrieben, entspricht dieses Modell ideal lagegeregelten Antrieben. Die zu der vorgegebenen Bewegung gehörenden Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}$ sind nun keine eingeprägten Momente mehr, sondern die zu diesen Bindungen gehörenden Reaktionsmomente.

Formal ergeben sich die Antriebsmomente mit Hilfe der durch die zeitliche Ableitung der Bindung (7.188), also $\dot{\boldsymbol{g}} \equiv \boldsymbol{E}\,\dot{\boldsymbol{\beta}} - \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{s}}(t) = \boldsymbol{0}$, definierten (3,3)-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{E}$ zu $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}$ bzw. $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\lambda}$. Da die Bindungsmatrix hier die Einheitsmatrix ist, sind die Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}$ direkt die physikalischen Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}$.

Zur Berechnung der Antriebsmomente $\boldsymbol{\tau}$ wird damit die Bewegungsgleichung (7.186) nach $\boldsymbol{\tau}$ umgestellt und die Sollbewegung $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t)$ eingesetzt,

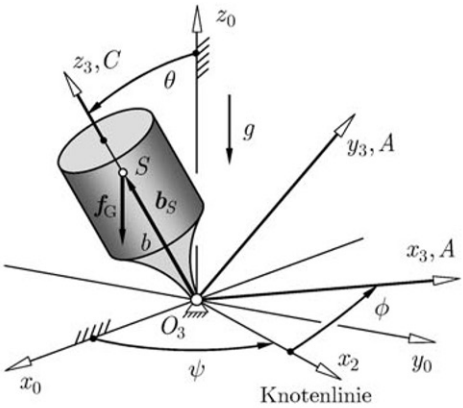
$$\boldsymbol{\tau}(t) = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t))\,\ddot{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{s}}(t) - \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t),\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{s}}(t)) - \boldsymbol{k}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t))\,. \tag{7.189}$$

Die berechneten Stellmomente $\boldsymbol{\tau}(t)$ können als eine Vorsteuerung verwendet werden, um den Roboter entlang einer gegebenen Trajektorie $\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{s}}(t)$ zu führen (*computed torque control*). Ein zusätzlicher Bahnfolgeregler muss dann nur noch die im inversen Modell (7.189) nicht berücksichtigten Systemeigenschaften sowie Störungen kompensieren.

7.6.2 Schwerer Kreisel mit Fixpunktlagerung

Im Beispiel aus dem vorangehenden Abschnitt wurden die Minimalgeschwindigkeiten als die Zeitableitungen der Minimalkoordinaten definiert, $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}}$. Bei Mehrkörpersystemen mit Dreh- und Schubgelenken ist dies die natürliche und zweckmäßige Definition. Die allgemeinere Definition in der kinematischen Bewegungsgleichungen (7.15) mit der Matrix $\boldsymbol{H} \neq \boldsymbol{E}$ wurde bereits bei den expliziten Bindungen des Kugelgelenks in Abschnitt 6.5.4 ausgenutzt.

Am klassischen Beispiel des bereits in Abschnitt 4.8.2 betrachteten schweren Kreisels mit Fixpunktlagerung in Abb. 7.22 werden in diesem Abschnitt die LAGRANGE- und EULER-Formulierungen der Bewegungsgleichungen gegenübergestellt, die unterschiedliche Minimalgeschwindigkeiten verwenden.



- $n = 1$ Körper, skleronom
- Freiheitsgrad $f = 3$
- Inertialsystem $\mathcal{K}_0$
- körperfestes System $\mathcal{K}_3$
- Fixpunkt O_3 (Kugelgelenk)
- zxz-EULER-Winkel ψ, θ, ϕ
- Masse m, Massenmittelpunkt S
- Trägheitstensor bzgl. O_3, dargestellt in $\mathcal{K}_3$

$$^3\boldsymbol{\Theta}_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Abb. 7.22 Schwerer Kreisel mit Fixpunktlagerung

Entsprechend dem Systemfreiheitsgrad $f = 3$ werden als Minimalkoordinaten die in der Kreiseldynamik gebräuchlichen zxz-EULER-Winkel gemäß Abschnitt 3.6.1 definiert,

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \psi & \theta & \phi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} . \tag{7.190}$$

Um die Benennungen in der Übersichtstabelle 3.11 (Seite 79) für die zxz-EULER-Winkel verwenden zu können, hat der Kreisel den Körperindex 3.

LAGRANGE-Formulierung der Bewegungsgleichungen

Minimalgeschwindigkeiten Die LAGRANGE-Formulierung verwendet als Minimalgeschwindigkeiten die Zeitableitungen der Minimalkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} & \dot{\theta} & \dot{\phi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} . \tag{7.191}$$

In den kinematischen Bewegungsgleichungen (7.15) ist damit $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$.

Explizite Bindungen Die expliziten Bindungen werden für das kreiselfeste Koordinatensystem $\mathcal{K}_1$ mit dem ruhenden Ursprung O_1 aufgestellt.

Die Transformationsmatrix ${}^{03}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta})$ vom körperfesten System $\mathcal{K}_3$ in das raumfeste System $\mathcal{K}_0$ ist in Tabelle 3.11 angegeben. Der Ortsvektor von O_3 verschwindet, $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$.

In den expliziten Körperbindungen auf Geschwindigkeitsebene (7.28) ist die JACOBI-Matrix der Translation $\boldsymbol{J}_{\mathrm{T}3}$ wegen des festen Punktes O_3 Null. Bei Darstellung im System $\mathcal{K}_3$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \\ {}^3\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}3} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \boldsymbol{J}_3 \quad \boldsymbol{\eta}\,. \end{aligned} \tag{7.192}$$

Die Winkelgeschwindigkeit von $\mathcal{K}_3$ setzt sich aus den Winkelgeschwindigkeiten um die Drehachsen der EULER-Winkel zusammen, vgl. Tabelle 3.11,

$${}^3\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{e}_{z0} & {}^3\boldsymbol{e}_{x2} & {}^3\boldsymbol{e}_{z3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}. \tag{7.193}$$

Die JACOBI-Matrix der Rotation ${}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}3}$ ist durch (3.164) gegeben

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^3\omega_{3x} \\ {}^3\omega_{3y} \\ {}^3\omega_{3z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{s}\theta\,\mathrm{s}\phi & \mathrm{c}\phi & 0 \\ \mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\phi & -\mathrm{s}\phi & 0 \\ \mathrm{c}\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad {}^3\boldsymbol{\omega}_3 &= {}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}3}(\boldsymbol{\beta}) \quad \boldsymbol{\eta}\,. \end{aligned} \tag{7.194}$$

Auch in den expliziten Bindungen auf Beschleunigungsebene (7.35) verschwindet der translatorische Anteil,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{\alpha}_3 \\ {}^3\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} {}^3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}}_3 &= \boldsymbol{J}_3 \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3\,. \end{aligned} \tag{7.195}$$

Der Term ${}^3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3(\boldsymbol{\beta}, \dot{\boldsymbol{\beta}})$ ergibt sich unter Berücksichtigung von

$${}^3\boldsymbol{\alpha}_3 = \frac{\mathrm{d}\,{}^3\boldsymbol{\omega}_3}{\mathrm{d}t} \equiv {}^3[{}_3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3] = {}^3[{}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_3] \quad \text{wegen} \quad {}_0\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = {}_3\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 + \underbrace{\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_3\,\boldsymbol{\omega}_3}_{\boldsymbol{0}} \tag{7.196}$$

zu

$${}^3\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 = \frac{\mathrm{d}\,{}^3\boldsymbol{J}_{\mathrm{R}3}}{\mathrm{d}t}\,\dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} (\,\mathrm{c}\theta\,\mathrm{s}\phi\;\dot{\theta} + \mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\phi\;\dot{\phi}\,)\,\dot{\psi} - \mathrm{s}\phi\;\dot{\theta}\;\dot{\phi} \\ (\,\mathrm{c}\theta\,\mathrm{c}\phi\;\dot{\theta} - \mathrm{s}\theta\,\mathrm{s}\phi\;\dot{\phi}\,)\,\dot{\psi} - \mathrm{c}\phi\;\dot{\theta}\;\dot{\phi} \\ -\mathrm{s}\theta\;\dot{\psi}\;\dot{\theta} \end{bmatrix}. \tag{7.197}$$

Eingeprägte Kräfte und Momente Als eingeprägte Kraft wirkt die Gewichtskraft $\boldsymbol{f}_{\mathrm{G}}$. Der Kraftwinder bezüglich O_3 lautet bei Darstellung in $\mathcal{K}_3$

$$\begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{e}} \\ {}^3\boldsymbol{f}_3^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3\widetilde{\boldsymbol{b}}_S \, {}^3\boldsymbol{f}_{\mathrm{G}} \\ {}^3\boldsymbol{f}_{\mathrm{G}} \end{bmatrix} \tag{7.198}$$

mit

$${}^3\boldsymbol{f}_{\mathrm{G}} = {}^{30}\boldsymbol{T} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -m\,g \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathrm{s}\theta\,\mathrm{s}\phi \\ \mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\phi \\ \mathrm{c}\theta \end{bmatrix} m\,g\,, \quad {}^3\boldsymbol{b}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Gemäß (7.102) lauten sie

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta})\,, \tag{7.199}$$

mit der (3,3)-Massenmatrix gemäß (7.106)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_3^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_3\,\boldsymbol{J}_3 = {}^3\big(\boldsymbol{J}_{\mathrm{R3}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_3\,\boldsymbol{J}_{\mathrm{R3}}\big) \\ \rightarrow\ &\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} A\,\mathrm{s}^2\theta + C\mathrm{c}^2\theta & 0 & C\,\mathrm{c}\theta \\ 0 & A & 0 \\ C\,\mathrm{c}\theta & 0 & C \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{7.200}$$

dem 3-Vektor der verallgemeinerten Kreiselkräfte gemäß (7.107)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} = -\boldsymbol{J}_3^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_3\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3 = -\,{}^3\big(\boldsymbol{J}_{\mathrm{R3}}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\Theta}_3\,\bar{\boldsymbol{\alpha}}_3 + \boldsymbol{J}_{\mathrm{R3}}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_3\,\boldsymbol{\Theta}_3\,\boldsymbol{\omega}_3\big) \\ \rightarrow\ &\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} -2\,(A-C)\,\mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\theta\,\dot{\psi}\,\dot{\theta} + C\,\mathrm{s}\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi} \\ (A-C)\,\mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\theta\,\dot{\psi}^2 - C\,\mathrm{s}\theta\,\dot{\psi}\,\dot{\phi} \\ C\,\mathrm{s}\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.201}$$

und dem 3-Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte gemäß (7.105)

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} = {}^3(\boldsymbol{J}_3^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{e}}) = {}^3\Big(\boldsymbol{J}_{\mathrm{R3}}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{b}}_S\,\boldsymbol{f}_{\mathrm{G}}\Big) \\ \rightarrow\ &\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} 0 \\ m\,g\,b\,\mathrm{s}\theta \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7.202}$$

Die Zustandsgleichungen werden entsprechend (7.108) aus den kinematischen und kinetischen Bewegungsgleichungen (7.191) und (7.199) aufgebaut.

EULER-Formulierung der Bewegungsgleichungen

Minimalgeschwindigkeiten Bei der EULER-Formulierung der Bewegungsgleichungen werden als Minimalgeschwindigkeiten die Koordinaten des Vektors der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_3$ im körperfesten System $\mathcal{K}_3$ verwendet,

$$\boldsymbol{\eta} = {}^3\boldsymbol{\omega}_3 = \left[\, {}^3\omega_{3x} \;\; {}^3\omega_{3y} \;\; {}^3\omega_{3z} \,\right]^{\mathrm{T}} . \tag{7.203}$$

Für die zxz-EULER-Winkel gilt die kinematische Bewegungsgleichung für die körperfesten Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit aus Tabelle 3.11,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot\psi \\ \dot\theta \\ \dot\phi \end{bmatrix} &= \frac{1}{\mathrm{s}\theta} \begin{bmatrix} \mathrm{s}\phi & \mathrm{c}\phi & 0 \\ \mathrm{s}\theta\,\mathrm{c}\phi & -\mathrm{s}\theta\,\mathrm{s}\phi & 0 \\ -\mathrm{c}\theta\,\mathrm{s}\phi & -\mathrm{c}\theta\,\mathrm{c}\phi & \mathrm{s}\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\omega_{3x} \\ {}^3\omega_{3y} \\ {}^3\omega_{3z} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \qquad \boldsymbol{\eta} \quad . \end{aligned} \tag{7.204}$$

Explizite Bindungen Die expliziten Bindungen auf Lageebene lauten weiterhin ${}^{03}\boldsymbol{T} = {}^{03}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta})$ und $\boldsymbol{r}_3 = \boldsymbol{0}$. Die expliziten Bindungen auf Geschwindigkeitsebene vereinfachen sich gegenüber (7.192) zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{\omega}_3 \\ {}^3\boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \boldsymbol{J}_3 \quad \boldsymbol{\eta} \, . \end{aligned} \tag{7.205}$$

Dementsprechend lauten die Bindungen auf Beschleunigungsebene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^3\boldsymbol{\alpha}_3 \\ {}^3\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}}_3 &= \boldsymbol{J}_3 \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_3 \, . \end{aligned} \tag{7.206}$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Unter Berücksichtigung von (7.206) liegen die kinetischen Bewegungsgleichungen (7.102) mit dem Drallsatz bezüglich des Fixpunkts O_3 bereits vor, vgl. (4.66)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^3\dot\omega_{3x} \\ {}^3\dot\omega_{3y} \\ {}^3\dot\omega_{3z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (A-C)\,{}^3\omega_{3y}\,{}^3\omega_{3z} \\ (C-A)\,{}^3\omega_{3z}\,{}^3\omega_{3x} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^3\tau_{3x} \\ {}^3\tau_{3y} \\ {}^3\tau_{3z} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{M} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} \quad + \quad \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \quad . \end{aligned} \tag{7.207}$$

Die Zustandsgleichungen werden entsprechend (7.108) aus den kinematischen und kinetischen Bewegungsgleichungen (7.204) und (7.207) aufgebaut.

Die Bewegungsgleichungen der EULER-Formulierung sind damit gegenüber der LAGRANGE-Formulierung (7.199) einfacher aufgebaut. Es können auch analytische Lösungen ermittelt werden, siehe MAGNUS [58].

Kapitel 8
Geschlossene Mehrkörpersysteme

Bei geschlossenen Mehrkörpersystemen sind die Gelenkkoordinaten durch die Schließbedingungen der kinematischen Schleifen voneinander abhängig und damit keine Minimalkoordinaten mehr. Die Schließbedingungen werden durch einen Schnitt der Schleifen an den hier so genannten sekundären Gelenken als implizite Bindungen in den primären Gelenkkoordinaten des aufspannenden Baumes aufgestellt. Mit Hilfe expliziter Schließbedingungen können die primären Gelenkkoordinaten durch geeignet zu definierende Minimalkoordinaten ausgedrückt werden, was i. Allg. jedoch nur numerisch möglich ist.

Diese Zusammenhänge werden in Abschnitt 8.1 zunächst für eine einzelne Mehrkörperschleife und in Abschnitt 8.2 für Systeme mit mehreren Schleifen entwickelt. In Abschnitt 8.3 werden die sekundären Reaktionskraftwinder durch minimale Reaktionskoordinaten ausgedrückt. Mit Hilfe der impliziten Schließbedingungen werden in Abschnitt 8.4 die Bewegungsgleichungen als differential-algebraische Gleichungen in den primären Gelenkkoordinaten formuliert. Hierzu wird ein System von linearen Bestimmungsgleichungen für die absoluten Beschleunigungen der Körper, die relativen primären Gelenkbeschleunigungen, die primären Gelenk-Reaktionskraftwinder und die Koordinaten der sekundären Reaktionskraftwinder aufgestellt. Wie bei offenen Systemen kann es nichtrekursiv oder rekursiv gelöst werden. Mit Hilfe der expliziten Schließbedingungen werden in Abschnitt 8.5 die Bewegungsgleichungen als gewöhnliche Differentialgleichungen in den Minimalkoordinaten aufgestellt. Beispiele folgen in den Abschnitten 8.6 bis 8.9.

8.1 Kinematik einer einzelnen Mehrkörperschleife

Für eine einzelne Mehrkörperschleife werden die impliziten und die expliziten Schließbedingungen formuliert.

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4_8, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

8.1.1 Implizite Schließbedingungen

Eine Mehrkörperschleife wird durch einen Schnitt an einem Gelenk in einen aufspannenden Baum überführt (Abb. 8.1). Die Gelenke der Schleife werden dadurch aufgeteilt in die *primären Gelenke* des aufspannenden Baumes und das geschnittene *sekundäre Gelenk*, siehe auch Brandl et al. [10] sowie Roberson und Schwertassek [86].

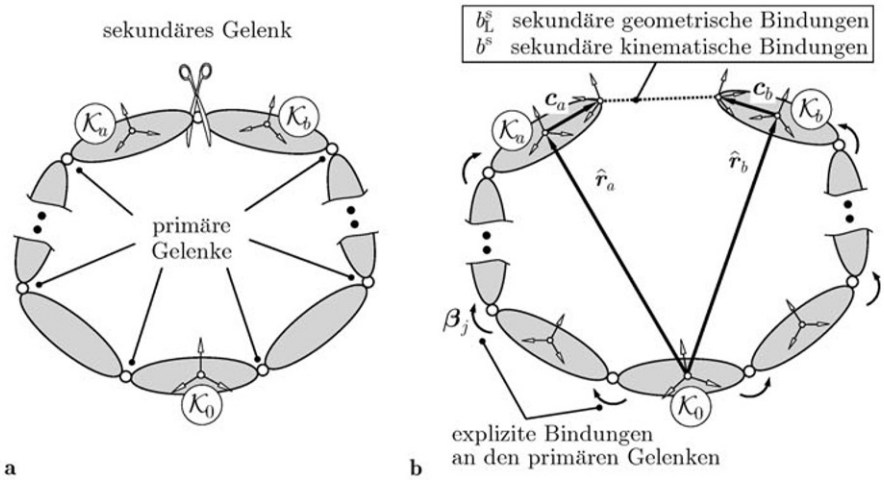


Abb. 8.1 Mehrkörperschleife. **a** Primäre und sekundäre Gelenke. **b** Bindungen

Die primären Gelenke besitzen f_L^o *primäre Gelenkkoordinaten*

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\ \beta_1\ \ldots\ \beta_{f_L^o}\ \right]^T \tag{8.1}$$

und $f^o \leq f_L^o$ *primäre Gelenkgeschwindigkeiten*

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\ \eta_1\ \ldots\ \eta_{f^o}\ \right]^T . \tag{8.2}$$

Hierbei sind f_L^o der Lage-Freiheitsgrad und f^o der Freiheitsgrad des aufspannenden Baumes ohne die Bindungen des sekundären Gelenks. Bei holonomen primären Gelenken ist $f^o = f_L^o$.

Für die primären Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten gelten kinematische Bewegungsgleichungen der Form (6.62)

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta} \tag{8.3}$$

mit der (f_L^o, f^o)-Matrix $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})$. Bei primären Dreh- und Schubgelenken wird wieder $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}}$ definiert, und es ist $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$.

Die primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ unterliegen den im Folgenden formulierten *Schließbedingungen*.

Implizite Schließbedingungen auf Lageebene Das sekundäre Gelenk besitzt $1 \leq b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} \leq 6$ sekundäre implizite geometrische Bindungen der Form (6.23), welche die relative Lage der Endkörper $\mathcal{K}_a$ und $\mathcal{K}_b$ beschränken,

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b, t) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.4}$$

Der Grenzfall $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = 6$ bedeutet den Schnitt an einem Körper oder an einem sekundären Gelenk mit ausschließlich rheonomen Gelenkbindungen. Mit den vier Typen elementarer impliziter Gelenkbindungen aus Abschnitt 6.4.3, die in Tabelle 8.1 zusammengefasst sind, können die sekundären Bindungen an holonomen Standardgelenken entsprechend Tabelle 8.2 aufgestellt werden.

Die Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_a$ und $\hat{\boldsymbol{r}}_b$ der Körper $\mathcal{K}_a$ und $\mathcal{K}_b$ können mit Hilfe der expliziten Bindungen des aufspannenden Baumes gemäß (7.17) in Abhängigkeit von den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ ausgedrückt werden,

$$\hat{\boldsymbol{r}}_a = \hat{\boldsymbol{r}}_a(\boldsymbol{\beta}, t)\,, \qquad \hat{\boldsymbol{r}}_b = \hat{\boldsymbol{r}}_b(\boldsymbol{\beta}, t)\,. \tag{8.5}$$

Einsetzen von (8.5) in (8.4) ergibt die $1 \leq b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} \leq 6$ impliziten Schließbedingungen in den $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$ primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$,

$$\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.6}$$

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Das sekundäre Gelenk hat $b^{\mathrm{s}} \geq b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ (holonomes Gelenk: $b^{\mathrm{s}} = b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$) sekundäre implizite kinematische Bindungen der Form (6.25)

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}} \equiv \boldsymbol{G}_a^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{v}}_a + \boldsymbol{G}_b^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{v}}_b + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ab}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{G}_a^{\mathrm{s}} \in \mathbb{R}^{b^{\mathrm{s}},6}, \quad \boldsymbol{G}_b^{\mathrm{s}} \in \mathbb{R}^{b^{\mathrm{s}},6}. \tag{8.7}$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}$ den Vektor des Residuums der kinematischen Bindungen.

Einsetzen der expliziten Bindungen der Körper $\mathcal{K}_a$ und $\mathcal{K}_b$ auf Lageebene (8.5) und auf Geschwindigkeitsebene gemäß (7.26),

$$\hat{\boldsymbol{v}}_a = \boldsymbol{J}_a\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_a\,, \quad \hat{\boldsymbol{v}}_b = \boldsymbol{J}_b\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_b \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{J}_a \in \mathbb{R}^{6,f^{\mathrm{o}}}, \quad \boldsymbol{J}_b \in \mathbb{R}^{6,f^{\mathrm{o}}}\,, \tag{8.8}$$

in (8.7) liefert die b^{s} impliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$,

$$\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t)\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{0} \tag{8.9}$$

mit der $(b^{\mathrm{s}},f^{\mathrm{o}})$-Bindungsmatrix der Schließbedingungen

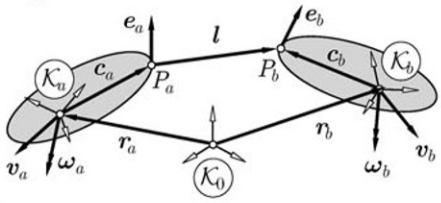
$$\boldsymbol{G}^{\ell} = \boldsymbol{G}_a^{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{J}_a + \boldsymbol{G}_b^{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{J}_b \tag{8.10}$$

und dem nur bei rheonomen Gelenken auftretenden b^{s}-Vektor

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{G}_a^{\mathrm{s}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_a + \boldsymbol{G}_b^{\mathrm{s}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_b + \bar{\boldsymbol{\gamma}}_{ab}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.11}$$

Tabelle 8.1 Elementare sekundäre implizite Gelenkbindungen (Herleitungen in Abschnitt 6.4.3): Lageebene (L), Geschwindigkeitsebene (G), Beschleunigungsebene (B)

Allgemein

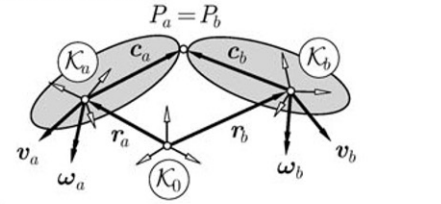


L: $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{ab}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = \boldsymbol{0}$

G: $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_a \\ \boldsymbol{v}_a \end{bmatrix} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_b \\ \boldsymbol{v}_b \end{bmatrix} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{0}$

B: $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_a \\ \dot{\boldsymbol{v}}_a \end{bmatrix} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_b \\ \dot{\boldsymbol{v}}_b \end{bmatrix} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{0}$

Bindungstyp I



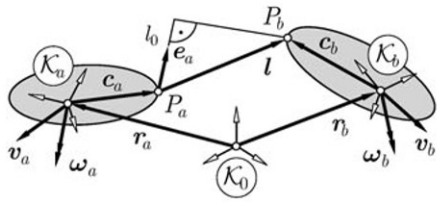
L: $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{r}_b + \boldsymbol{c}_b - \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{c}_a$

G: $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a = [\ \tilde{\boldsymbol{c}}_a \quad -\boldsymbol{E}\ ]$

$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b = [\ -\tilde{\boldsymbol{c}}_b \quad \boldsymbol{E}\ ]$

B: $\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b\, \boldsymbol{c}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a\, \boldsymbol{c}_a$

Bindungstyp II



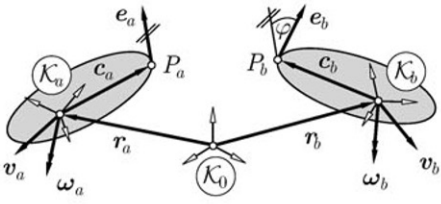
L: $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{l} - l_0$

G: $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a = \left[\ \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, (\tilde{\boldsymbol{c}}_a + \tilde{\boldsymbol{l}}) \quad -\boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\ \right]$

$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b = [\ -\boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, \tilde{\boldsymbol{c}}_b \quad \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\ ]$

B: $\bar{\bar{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, (\dot{\tilde{\boldsymbol{c}}}_a\, \boldsymbol{\omega}_a - \dot{\tilde{\boldsymbol{c}}}_b\, \boldsymbol{\omega}_b)$
$+ \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a\, \dot{\boldsymbol{e}}_a + 2\, \dot{\boldsymbol{e}}_a^{\mathrm{T}}\, \dot{\boldsymbol{l}}$

Bindungstyp III



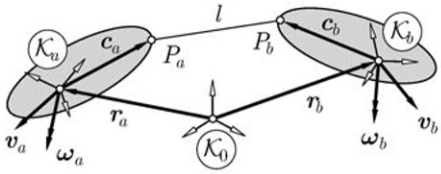
L: $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{e}_b - \cos\varphi$

G: $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a = [\ \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_b \quad \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\ ]$

$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b = [\ -\boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_b \quad \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}\ ]$

B: $\bar{\bar{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{e}_a^{\mathrm{T}}\, (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_a\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b$
$- 2\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a\, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_b)\boldsymbol{e}_b$

Bindungstyp IV



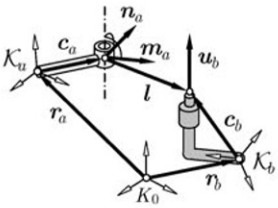
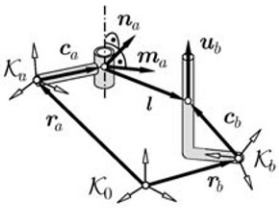
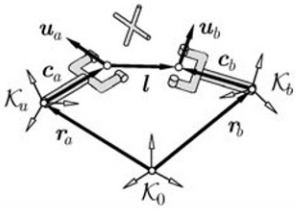
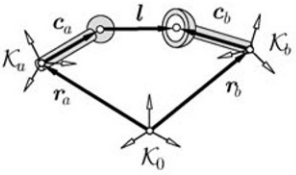
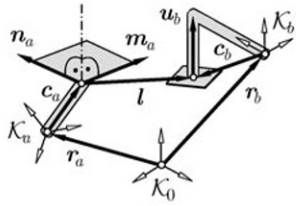
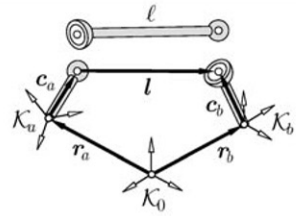
L: $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{ab} = \frac{1}{2}\, (\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\, \boldsymbol{l} - l^2)$

G: $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a = [\ \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{c}}_a \quad -\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\ ]$

$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b = [\ -\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{c}}_b \quad \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\ ]$

B: $\bar{\bar{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\, (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_b\, \dot{\boldsymbol{c}}_b - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_a\, \dot{\boldsymbol{c}}_a)$
$+ \dot{\boldsymbol{l}}^{\mathrm{T}}\, \dot{\boldsymbol{l}}$

Tabelle 8.2 Implizite Bindungen von holonomen sekundären Gelenken ($b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = b^{\mathrm{s}}$)

Drehgelenk $b^{\mathrm{s}} = 5$ Bindungen		$\begin{array}{ll} \text{I:} & \\ \text{III:} & \\ \text{III:} & \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{m}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \\ \boldsymbol{n}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\rightarrow \quad \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = \mathbf{0} \quad$ 5 Gln.
Drehschubgelenk $b^{\mathrm{s}} = 4$ Bindungen		$\begin{array}{ll} \text{II:} & \\ \text{II:} & \\ \text{III:} & \\ \text{III:} & \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{n}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{n}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \\ \boldsymbol{m}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = \mathbf{0} \quad$ 4 Gln.
Kardangelenk $b^{\mathrm{s}} = 4$ Bindungen		$\begin{array}{ll} \text{I:} & \\ \text{III:} & \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{u}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 3 \\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = \mathbf{0} \quad$ 4 Gln.
Kugelgelenk $b^{\mathrm{s}} = 3$ Bindungen		$\text{I:} \quad \boldsymbol{l} = \mathbf{0} \quad$ 3 $\rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = \mathbf{0} \quad$ 3 Gln.
Ebenes Gelenk $b^{\mathrm{s}} = 3$ Bindungen		$\begin{array}{ll} \text{I:} & \\ \text{III:} & \\ \text{III:} & \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \\ \boldsymbol{m}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \\ \boldsymbol{n}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline \end{array}$ $\rightarrow \quad \boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = \mathbf{0} \quad$ 3 Gln.
Pendelstütze $b^{\mathrm{s}} = 1$ Bindung		$\text{IV:} \quad \frac{1}{2}(\boldsymbol{l}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l} - \ell^2) = 0 \quad$ 1 $\rightarrow \quad g^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) = 0 \quad$ 1 Gl.

Implizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung der sekundären kinematischen Bindungen (8.7) lautet

$$\dot{\gamma}^{\mathrm{s}} \equiv \boldsymbol{G}_a^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{a}}_a + \boldsymbol{G}_b^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{a}}_b + \bar{\bar{\gamma}}_{ab}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.12}$$

Mit den expliziten Bindungen der Körper $\mathcal{K}_a$ und $\mathcal{K}_b$ auf Lageebene (8.5), auf Geschwindigkeitsebene (8.8) und auf Beschleunigungsebene gemäß (7.35),

$$\hat{\boldsymbol{a}}_a = \boldsymbol{J}_a\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_a\,, \quad \hat{\boldsymbol{a}}_b = \boldsymbol{J}_b\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_b\,, \tag{8.13}$$

ergeben sich die impliziten Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$, Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ und Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$,

$$\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t)\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\gamma}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) = \boldsymbol{0}\,, \tag{8.14}$$

mit dem nicht von $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden b^{s}-Vektor

$$\bar{\bar{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{G}_a^{\mathrm{s}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_a + \boldsymbol{G}_b^{\mathrm{s}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_b + \bar{\bar{\gamma}}_{ab}\,. \tag{8.15}$$

Der Vergleich der zeitlichen Ableitung von (8.9) mit (8.14) ergibt für den Term $\bar{\bar{\gamma}}^{\ell}$ auch den Zusammenhang

$$\bar{\bar{\gamma}}^{\ell} = \dot{\boldsymbol{G}}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} + \dot{\bar{\gamma}}^{\ell}\,. \tag{8.16}$$

Überbestimmtheit Hat die $(b^{\mathrm{s}},f^{\mathrm{o}})$-Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ aus (8.10) den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) = b^{\mathrm{s}}$, so sind die Schließbedingungen voneinander unabhängig. Der Freiheitsgrad des Systems ergibt sich aus dem Grübler-Kutzbach-Kriterium (6.14).

Weist die $(b^{\mathrm{s}},f^{\mathrm{o}})$-Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ dagegen einen Rangabfall auf, also $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) < b^{\mathrm{s}}$, so liegen entsprechend (6.11)

$$b^{\mathrm{sr}} = b^{\mathrm{s}} - \mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) \tag{8.17}$$

redundante Schließbedingungen vor. Die Zeilenvektoren von $\boldsymbol{G}^{\ell}$, welche die Bindungsnormalen im Raum der primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ repräsentieren, vgl. Abb. 5.4, sind dann nicht mehr linear unabhängig. Ausgehend vom Grübler-Kutzbach-Kriterium (6.14) beträgt der Freiheitsgrad

$$f = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{G}}} f_i - 6\,n_{\mathrm{S}} + b^{\mathrm{sr}}\,. \tag{8.18}$$

Tritt der Rangabfall von $\boldsymbol{G}^{\ell}$ *global* in allen Lagen des Systems auf, so wird das System als *überbestimmt* bezeichnet. Es ist beweglich mit dem Freiheitsgrad f gemäß (8.18). Auf Grund der b^{sr} redundanten Schließbedingungen ist das System b^{sr}-fach statisch unbestimmt. Beispiele statisch unbestimmter (überbestimmter) Systeme wurden in Tabelle 6.9 und in Abb. 6.7 gezeigt.

Singularität der impliziten Schließbedingungen Tritt der Rangabfall der Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ nur *lokal* in bestimmten Lagen des Systems auf, so liegt in diesen Lagen eine *Singulärität der impliziten Schließbedingungen* vor. Der vergrößerte Freiheitsgrad gemäß (8.18) gilt nur in diesen Lagen. Überbestimmte Systeme und singuläre Lagen werden von MÜLLER [65] ausführlich untersucht.

8.1.2 Explizite Schließbedingungen

Durch die Definition von Minimalkoordinaten und -geschwindigkeiten können explizite Schließbedingungen formuliert werden.

Explizite Schließbedingungen auf Lageebene Mit Hilfe der $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ impliziten Schließbedingungen (8.6) können $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ primäre Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}$ in Abhängigkeit von den übrigen primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ ausgedrückt werden. Die $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$ primären Gelenkkoordinaten können dann im Vektor $\boldsymbol{\beta}$ so angeordnet werden, dass $\boldsymbol{\beta}$ aufgeteilt wird in

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} f_{\mathrm{L}} = f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} - b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} & \text{unabhängige Gelenkkoordinaten} \\ b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} & \text{abhängige Gelenkkoordinaten.} \end{array} \tag{8.19}$$

Die Anzahl f_{L} der unabhängigen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ ist der Lage-Freiheitsgrad der Schleife. Damit sind die Minimalkoordinaten der Schleife

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}} \,. \tag{8.20}$$

Die $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ impliziten Schließbedingungen (8.6) mit den gemäß (8.19) aufgeteilten primären Gelenkkoordinaten,

$$\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}, \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}, t) = \mathbf{0} \,, \tag{8.21}$$

definieren dann die expliziten Schließbedingungen auf Lageebene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}, t) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Definition (8.20).} \\ \text{nach } \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}} \text{ aufgelöstes Gleichungssystem (8.21)} \end{array} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}, t) \quad . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Die expliziten Schließbedingungen (8.22) erfüllen für beliebige Werte der Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ die impliziten Schließbedingungen (8.6).

Um die Abhängigkeit $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{q}, t)$ in (8.22) zu erhalten, müssen die $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ abhängigen primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}$ aus dem nichtlinearen Gleichungssystem der $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ impliziten Schließbedingungen (8.21) berechnet werden. Die Anzahl der Unbekannten $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}}$ kann dabei durch die Auswahl eines sekundären Gelenks mit möglichst wenigen Gelenkbindungen klein gehalten werden. Dies erleich-

tert die algebraische Umformung in explizite Schließbedingungen. Beispiele werden in den Abschnitten 8.1.3, 8.6, 8.7 und (8.9) gezeigt.

Die Anzahl der abhängigen Gelenkkoordinaten in den impliziten Schließbedingungen wird weiter minimiert, indem die Schleife an zwei, i.Allg. nicht benachbarten, Gelenken (*charakteristisches Gelenkpaar*) geschnitten wird, siehe WOERNLE [110]. Hierdurch werden in vielen Fällen analytische Formulierungen der expliziten Schließbedingungen unmittelbar erhalten. Ein Verfahren zur automatischen Aufstellung expliziter Schließbedingungen in symbolischer Form wird von KECSKEMÉTHY und HILLER [48] beschrieben.

Im Allgemeinen können die expliziten Schließbedingungen jedoch nicht analytisch dargestellt werden. Die abhängigen primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}$ werden dann numerisch aus dem Gleichungssystem (8.21) mit Hilfe des in Abschnitt 5.7.3 beschriebenen NEWTON-RAPHSON-Verfahrens berechnet.

Explizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Die f^{o} primären Gelenkgeschwindigkeiten werden in abhängige und unabhängige Geschwindigkeiten aufgeteilt,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f = f^{\mathrm{o}} - b^{\mathrm{s}} & \text{unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten} \\ b^{\mathrm{s}} & \text{abhängige Gelenkgeschwindigkeiten.} \end{matrix} \tag{8.23}$$

Die Anzahl f der unabhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$ ist der Freiheitsgrad der Schleife. Bei Schleifen mit holonomen Gelenken ist $f = f_{\mathrm{L}}$. Damit sind die Minimalgeschwindigkeiten der Schleife

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \,. \tag{8.24}$$

Die expliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene werden erhalten, indem in den impliziten Schließbedingungen (8.9) die Gelenkgeschwindigkeiten gemäß (8.23) aufgeteilt werden,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}^{\ell} \qquad \boldsymbol{\eta} \quad &+ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} & \boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} &+ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{0} \,, \end{aligned} \tag{8.25}$$

mit der $(b^{\mathrm{s}}, f^{\mathrm{o}} - b^{\mathrm{s}})$-Matrix $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}}$ und der $(b^{\mathrm{s}}, b^{\mathrm{s}})$-Matrix $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$. Durch Auflösen von (8.25) nach den abhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}}$ werden unter Berücksichtigung von (8.20) und (8.24) die expliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene erhalten. Mit der (f^{o}, f)-JACOBI-Matrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{J}^{\ell}$ und dem nicht von $\boldsymbol{s}$ abhängenden f^{o}-Vektor $\bar{\boldsymbol{\eta}}$, der nur bei rheonomen Gelenkbindungen auftritt, lauten sie

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\, \boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \end{bmatrix} \boldsymbol{s} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\, \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} \quad &= \quad \boldsymbol{J}^{\ell}(\boldsymbol{q}, t) \quad \boldsymbol{s} + \quad \bar{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q}, t) \quad . \end{aligned} \tag{8.26}$$

Die expliziten Schließbedingungen (8.26) erfüllen für beliebige Werte der Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s}$ die impliziten Schließbedingungen (8.25). Damit gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\boldsymbol{G}^{\ell}\,\boldsymbol{J}^{\ell} = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.27}$$

Singularität der expliziten Schließbedingungen Die Auflösung der impliziten Schließbedingungen (8.25) nach den abhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}}$ ist nur möglich, wenn die $(b^{\mathrm{s}},b^{\mathrm{s}})$-Matrix $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$ regulär ist. Falls die $(b^{\mathrm{s}},f^{\mathrm{o}})$-Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ in (8.9) den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) = b^{\mathrm{s}}$ besitzt, können stets unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$ so definiert werden, dass dies der Fall ist.

Wird die Matrix $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$ während der Integration der Bewegungsgleichungen singulär, so muss auf neue unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s}$ übergegangen werden, für welche $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$ regulär ist. Ein Beispiel wird in Abb. 8.5 (Seite 305) gezeigt. Im Allgemeinen ist es nicht möglich, mit einer Definition unabhängiger Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten die gesamte Bewegung eines geschlossenen Mehrkörpersystems zu beschreiben.

Kinematische Bewegungsgleichungen Mit der Aufteilung der primären Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten gemäß (8.19) und (8.23) lauten die kinematischen Bewegungsgleichungen (8.3) mit der entsprechend aufgeteilten Matrix $\boldsymbol{H}$

$$\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{\beta}} & = & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \qquad \boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}^{\mathrm{uu}} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{ua}} \\ \boldsymbol{H}^{\mathrm{au}} & \boldsymbol{H}^{\mathrm{aa}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{8.28}$$

Mit den expliziten Bindungen (8.26) ergeben sich daraus die kinematischen Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ aus (8.20) und den Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$ aus (8.24)

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q},t)\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{q},t) \tag{8.29}$$

mit der (f_{L},f)-Matrix

$$\overline{\boldsymbol{H}} = \left[\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{uu}} \;\; \boldsymbol{H}^{\mathrm{ua}} \,\right] \boldsymbol{J}^{\ell} = \boldsymbol{H}^{\mathrm{uu}} - \boldsymbol{H}^{\mathrm{ua}}\,(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \tag{8.30}$$

und dem nur bei rheonomen Gelenkbindungen auftretenden f_{L}-Vektor

$$\bar{\boldsymbol{h}} = \left[\, \boldsymbol{H}^{\mathrm{uu}} \;\; \boldsymbol{H}^{\mathrm{ua}} \,\right] \bar{\boldsymbol{\eta}} = -\boldsymbol{H}^{\mathrm{ua}}\,(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}\,. \tag{8.31}$$

Im Standardfall einer Schleife mit skleronomen Dreh- und Schubgelenken haben die kinematischen Bewegungsgleichungen (8.29) die einfache Form $\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{s}$. Ein Beispiel der allgemeineren Form (8.29) wird in Abschnitt 8.9 gezeigt.

Explizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die expliziten Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene werden erhalten, indem in den impliziten Schließbedingungen (8.14) die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ entsprechend (8.23) aufgeteilt werden in die unabhängigen Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{u}}$ und in die abhängigen Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{a}}$,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{G}^{\ell} \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow &\left[\, \boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \quad \boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}} \,\right] \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{0}\,. \end{aligned} \tag{8.32}$$

Auflösen von (8.32) nach $\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{a}}$ liefert zusammen mit $\dot{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{u}}$ aus (8.24) die expliziten Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{s}} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{J}^{\ell}(\boldsymbol{q},t) \qquad \dot{\boldsymbol{s}} + \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t) \quad . \end{aligned} \tag{8.33}$$

Der Vergleich der zeitlichen Ableitung von (8.26) mit (8.33) ergibt für den Term $\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}$ auch den Zusammenhang

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} = \dot{\boldsymbol{J}}^{\ell}\,\boldsymbol{s} + \dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}}\,. \tag{8.34}$$

Die expliziten Schließbedingungen (8.33) erfüllen für beliebige Werte der minimalen Beschleunigungen $\dot{\boldsymbol{s}}$ die impliziten Schließbedingungen (8.14).

Zusammenstellung der Bindungen Die Bindungen in einer einzelnen Mehrkörperschleife sind in Tabelle 8.3 zusammengefasst.

Tabelle 8.3 Bindungen in einer einzelnen Mehrkörperschleife, Lageebene (L), Geschwindigkeitsebene (G), Beschleunigungsebene (B)

	Implizite sekundäre Bindungen	Explizite primäre Bindungen	Implizite Schließbedingungen	Explizite Schließbedingungen
L	(8.4): $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b, t) = \boldsymbol{0}$	(8.5): $\hat{\boldsymbol{r}}_a = \hat{\boldsymbol{r}}_a(\boldsymbol{\beta}, t)$ $\hat{\boldsymbol{r}}_b = \hat{\boldsymbol{r}}_b(\boldsymbol{\beta}, t)$	(8.6): $\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{0}$	(8.22): $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}, t)$
G	(8.7): $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a\,\hat{\boldsymbol{v}}_a + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b\,\hat{\boldsymbol{v}}_b + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{0}$	(8.8): $\hat{\boldsymbol{v}}_a = \boldsymbol{J}_a\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_a$ $\hat{\boldsymbol{v}}_b = \boldsymbol{J}_b\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_b$	(8.9): $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{0}$	(8.26): $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}^{\ell}\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{\eta}}$
B	(8.12): $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_a\,\hat{\boldsymbol{a}}_a + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_b\,\hat{\boldsymbol{a}}_b + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}}_{ab} = \boldsymbol{0}$	(8.13): $\hat{\boldsymbol{a}}_a = \boldsymbol{J}_a\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_a$ $\hat{\boldsymbol{a}}_b = \boldsymbol{J}_b\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_b$	(8.14): $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{0}$	(8.33): $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}^{\ell}\,\dot{\boldsymbol{s}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}$
			Orthogonalität (8.27): $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\boldsymbol{J}^{\ell} = \boldsymbol{0}$	

8.1.3 Kinematik eines ebenen Gelenkvierecks

Das in Abb. 8.2 a gezeigte ebene Gelenkviereck besteht aus dem Gestell 0, dem Eingangshebel 1, dem Ausgangshebel 2 und der Koppel 3. Mit den vier rotatorischen Gelenkfreiheitsgraden hat das System gemäß dem GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium für ebene Systeme (6.16) den Freiheitsgrad $f = f_{\mathrm{L}} = 1$.

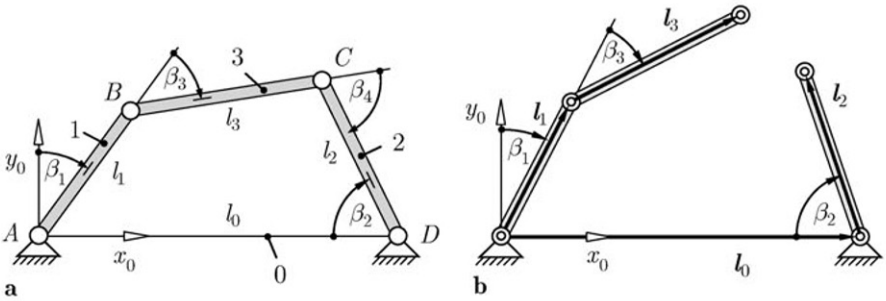


Abb. 8.2 Ebenes Gelenkviereck. **a** Geometrie. **b** Aufspannender Baum

Implizite Schließbedingungen

Primäre Gelenkkoordinaten Wird die Schleife z.B. im Gelenk C geschnitten, so entsteht der in Abb. 8.2 b gezeigte aufspannende Baum mit den $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = f^{\mathrm{o}} = 3$ primären Gelenkkoordinaten und Gelenkgeschwindigkeiten, vgl. (8.1) bis (8.3),

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\, \beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3 \,\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta} \equiv \dot{\boldsymbol{\beta}} = \left[\, \dot{\beta}_1 \;\; \dot{\beta}_2 \;\; \dot{\beta}_3 \,\right]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}\,. \tag{8.35}$$

Implizite Schließbedingungen auf Lageebene Für den Schnitt im Gelenk C gilt eine implizite sekundäre Bindung (8.4) des Typs I aus Tabelle 8.1,

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_a, \hat{\boldsymbol{r}}_b) \equiv \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_3 - \boldsymbol{l}_0 - \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.36}$$

Einsetzen der Vektorkoordinaten in $\mathcal{K}_0$,

$$\boldsymbol{l}_0 = \begin{bmatrix} l_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_1 = \begin{bmatrix} l_1\,\mathrm{s}\beta_1 \\ l_1\,\mathrm{c}\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2 = \begin{bmatrix} -l_2\,\mathrm{c}\beta_2 \\ l_2\,\mathrm{s}\beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_3 = \begin{bmatrix} l_3\,\mathrm{s}\beta_{13} \\ l_3\,\mathrm{c}\beta_{13} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{8.37}$$

mit dem Summenwinkel $\beta_{13} = \beta_1 + \beta_3$ in (8.36) liefert die drei impliziten Schließbedingungen in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ gemäß (8.6),

$$g_1^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \equiv\; l_1\,\mathrm{s}\beta_1 + l_3\,\mathrm{s}\beta_{13} + l_2\,\mathrm{c}\beta_2 - l_0 = 0\,, \tag{8.38}$$

$$g_2^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \equiv\; l_1\,\mathrm{c}\beta_1 + l_3\,\mathrm{c}\beta_{13} - l_2\,\mathrm{s}\beta_2 = 0\,, \tag{8.39}$$

$$g_3^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \equiv\; 0 = 0\,. \tag{8.40}$$

Die zur z-Richtung gehörende Bindung (8.40) ist wegen der parallelen Gelenkachsen für beliebige Gelenkwinkel β_1, β_2 und β_3 erfüllt und damit redundant. Es verbleiben zwei Gleichungen für die drei Winkel β_1, β_2 und β_3, entsprechend dem Freiheitsgrad $f = 1$.

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Die Zeitableitung der sekundären Bindungen (8.36)

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}} \equiv \dot{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{s}} \equiv \dot{\boldsymbol{l}}_1 + \dot{\boldsymbol{l}}_3 - \dot{\boldsymbol{l}}_0 - \dot{\boldsymbol{l}}_2 = \boldsymbol{0}$$

ergibt unter Berücksichtigung der zeitlichen Änderungen der Vektoren

$$\dot{\boldsymbol{l}}_0 = \boldsymbol{0}\,, \quad \dot{\boldsymbol{l}}_1 = \dot{\beta}_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{l}_1\,, \quad \dot{\boldsymbol{l}}_2 = \dot{\beta}_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2\,, \quad \dot{\boldsymbol{l}}_3 = (\dot{\beta}_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \dot{\beta}_3\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3)\,\boldsymbol{l}_3 \tag{8.41}$$

mit den parallelen Drehachsvektoren $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3 = -\boldsymbol{e}_{z0}$ die impliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene entsprechend (8.9)

$$\begin{array}{ccc} & \left[\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_3) \quad -\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2 \quad \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3\ \right] \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} & = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow & \boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\eta} & = \boldsymbol{0}\,. \end{array} \tag{8.42}$$

Die Auswertung von (8.42) mit den Vektorkoordinaten aus (8.37) liefert

$$\begin{array}{ccc} & \begin{bmatrix} l_1\,\mathrm{c}\beta_1 + l_3\,\mathrm{c}\beta_{13} & -l_2\,\mathrm{s}\beta_2 & l_3\,\mathrm{c}\beta_{13} \\ -l_1\,\mathrm{s}\beta_1 - l_3\,\mathrm{s}\beta_{13} & -l_2\,\mathrm{c}\beta_2 & -l_3\,\mathrm{s}\beta_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \qquad\qquad\qquad \boldsymbol{\eta} & = \boldsymbol{0}\,. \end{array} \tag{8.43}$$

Der Rangabfall der (3,3)-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}^{\ell}$ beträgt für alle Lagen des Gelenkvierecks $b^{\mathrm{sr}} = 1$. Aus (8.18) folgt der Freiheitsgrad $f = 1$.

Die Schließbedingungen (8.43) werden auch durch die zeitliche Ableitung der Koordinatengleichungen (8.38) bis (8.40) erhalten.

Implizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung von (8.43) führt auf die impliziten Schließbedingungen in den primären Gelenkkoordinaten auf Beschleunigungsebene entsprechend (8.14)

$$\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{0} \tag{8.44}$$

mit dem nicht von $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden Term gemäß (8.16)

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \dot{\boldsymbol{G}}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} = \left[\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\dot{\boldsymbol{l}}_1 + \dot{\boldsymbol{l}}_3) \quad -\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\dot{\boldsymbol{l}}_2 \quad \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\dot{\boldsymbol{l}}_3\ \right] \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \end{bmatrix} \tag{8.45}$$

bzw. in Koordinaten unter Verwendung von (8.37) und (8.41)

$$\bar{\bar{\gamma}}^{\ell} = \begin{bmatrix} -l_1\,(\mathrm{s}\beta_1 + l_3\,\mathrm{s}\beta_{13})\,\dot{\beta}_1^2 - l_2\,\mathrm{c}\beta_2\,\dot{\beta}_2^2 - l_3\,\mathrm{s}\beta_{13}\,(2\,\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_3)\,\dot{\beta}_3 \\ -l_1\,(\mathrm{c}\beta_1 + l_3\,\mathrm{c}\beta_{13})\,\dot{\beta}_1^2 + l_2\,\mathrm{s}\beta_2\,\dot{\beta}_2^2 - l_3\,\mathrm{c}\beta_{13}\,(2\,\dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_3)\,\dot{\beta}_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.46)$$

Ebenes Gelenkviereck als überbestimmtes räumliches System Wird das Gelenkviereck als ebenes System betrachtet, so können in den Schließbedingungen (8.38) bis (8.40), (8.43) und (8.44) die jeweils dritten, redundanten Gleichungen weggelassen werden.

Bei räumlicher Betrachtung ist das ebene Gelenkviereck jedoch überbestimmt. Es ist nur auf Grund der parallelen Drehachsen beweglich. Die sekundäre Bindung (8.36) beschreibt gemäß Tabelle 8.2 den Schnitt an einem Kugelgelenk (S). Sie gilt damit für die in Abb. 8.3 a gezeigte RRSR-Schleife mit i.Allg. nicht parallelen Achsen der Drehgelenke (R). Exemplarisch ist hier die Drehachse $\boldsymbol{u}_2$ gegenüber den weiterhin parallelen Drehachsen $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_3$ um den Winkel ψ in der x_0, y_0-Ebene gedreht. Das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium für räumliche Systeme (6.14) liefert für dieses System den korrekten Freiheitsgrad $f = 0$. Die Schließbedingungen (8.38) bis (8.40) bilden ein System von drei voneinander unabhängigen nichtlinearen Gleichungen für die drei Winkel β_1, β_2 und β_3, dessen Lösungen mögliche Zusammenbau-Konfigurationen der — unbeweglichen — RRSR-Schleife repräsentieren.

Der Freiheitsgrad $f = 0$ ergibt sich formal aus dem Rang der Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ in (8.42). Bei nicht parallelen Achsen der Drehgelenke beträgt der Rang i.Allg. $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) = 3$, weil die Spaltenvektoren $\tilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_3)$, $-\tilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2$ und $\tilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3$ von $\boldsymbol{G}^{\ell}$ linear unabhängig sind, siehe Abbildung 8.3 b. Der bereits in (8.43) ersichtliche Rangabfall $b^{\mathrm{sr}} = 1$ bei parallelen Gelenkachsen lässt sich durch die dann in der x_0, y_0-Ebene liegenden und damit linear abhängigen Spaltenvektoren geometrisch interpretieren.

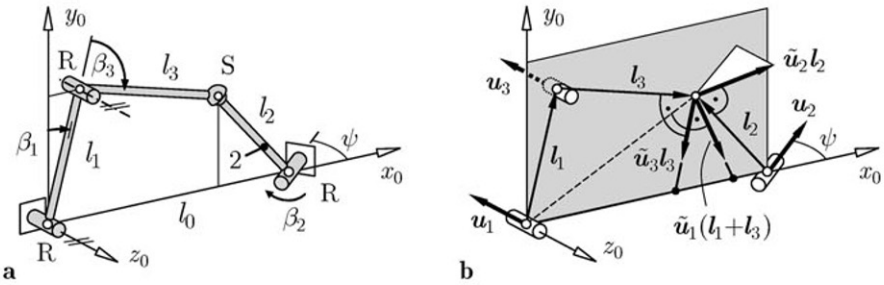


Abb. 8.3 Räumliche RRSR-Schleife mit dem Freiheitsgrad $f = 0$. **a** Geometrie. **b** Zur Rangermittlung der Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$

Redundante Bindungen sollten in Mehrkörpermodellen grundsätzlich vermieden werden, weil solche Systeme statisch unbestimmt sind. Die Reakti-

onskräfte und -momente können in einem statisch unbestimmten Starrkörpermodell nicht eindeutig berechnet werden. Physikalisch hängen sie von den hier nicht abgebildeten Bauteilsteifigkeiten ab. Im vorliegenden Beispiel kann die redundante Bindung entfernt werden, indem z.B. entsprechend dem ebenen Gelenkviereck in Tabelle 6.9 (Seite 206) das dort mit $*$ gekennzeichnete Drehgelenk hinzugefügt wird.

Explizite Schließbedingungen

Minimalkoordinaten Als die $f = f_{\mathrm{L}} = 1$ Minimalkoordinate und -geschwindigkeit werden der Gelenkwinkel β_1 und seine Zeitableitung definiert,

$$q = \beta_1 \,, \qquad s = \dot{\beta}_1 \,. \tag{8.47}$$

Die kinematische Bewegungsgleichung gemäß (8.29) hat damit die einfache Form mit $\overline{\boldsymbol{H}} = 1$,

$$\dot{q} = s \,. \tag{8.48}$$

Explizite Schließbedingungen auf Lageebene Die impliziten Schließbedingungen (8.38) und (8.39) können hier algebraisch nach den abhängigen primären Gelenkkoordinaten β_2 und β_3 aufgelöst werden. Der Winkel β_3 wird eliminiert, indem die Summanden mit β_3 auf die rechte Seite umgestellt und die beiden Seiten der Gleichungen jeweils quadriert werden,

$$\begin{aligned} (l_1\,\mathrm{s}\beta_1 + l_2\,\mathrm{c}\beta_2 - l_0)^2 &= (-l_3\,\mathrm{s}\beta_{13})^2 \,, \\ (l_1\,\mathrm{c}\beta_1 - l_2\,\mathrm{s}\beta_2)^2 &= (-l_3\,\mathrm{c}\beta_{13})^2 \,. \end{aligned} \tag{8.49}$$

Die Addition der beiden Gleichungen liefert eine implizite Bestimmungsgleichung für den Winkel β_2 bei einem gegebenen Winkel $q = \beta_1$,

$$A(\beta_1)\,\cos\beta_2 + B(\beta_1)\,\sin\beta_2 + C(\beta_1) = 0 \tag{8.50}$$

mit

$$\begin{aligned} &A(\beta_1) = 2\,l_2\,(l_1\,\sin\beta_1 - l_0)\,, \qquad B(\beta_1) = -2\,l_1\,l_2\,\cos\beta_1\,, \\ &C(\beta_1) = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 - 2\,l_0\,l_1\,\sin\beta_1\,. \end{aligned} \tag{8.51}$$

Diese Gleichung kann in eine quadratische Bestimmungsgleichung für $\cos\beta_2$ umgeformt werden

$$\begin{aligned} A\,\cos\beta_2 + C &= -B\,\sin\beta_2 \\ \rightarrow\ (A\,\cos\beta_2 + C)^2 &= (-B\,\sin\beta_2)^2 \\ \rightarrow\ (A\,\cos\beta_2 + C)^2 &= B^2\,(1 - \cos^2\beta_2) \\ \rightarrow\ (A^2 + B^2)\,\cos^2\beta_2 + 2\,A\,C\,\cos\beta_2 + C^2 - B^2 &= 0\ . \end{aligned}$$

Die beiden Lösungen für $\cos\beta_2$,

$$\cos\beta_2^{(k)} = \frac{-A\,C - (-1)^k\,B\,\sqrt{D}}{A^2 + B^2}\,, \quad k = 1, 2\,, \tag{8.52}$$

mit der Diskriminante

$$D = A^2 + B^2 - C^2 \tag{8.53}$$

würden insgesamt vier Lösungen für β_2 liefern, von denen jedoch nur zwei die Ausgangsgleichung (8.50) erfüllen, während zwei weitere Lösungen durch das Quadrieren hinzugekommen sind. Zur Berechnung der Lösungen von (8.50) wird daher (8.52) in (8.50) eingesetzt und nach $\sin\beta_2^{(k)}$ aufgelöst,

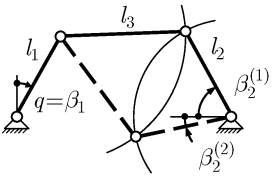
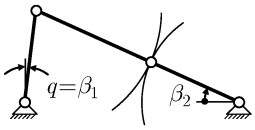
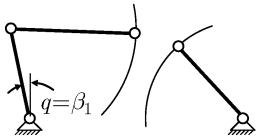
$$\sin\beta_2^{(k)} = \frac{-B\,C + (-1)^k\,A\,\sqrt{D}}{A^2 + B^2}\,, \qquad k = 1, 2\,. \tag{8.54}$$

Aus (8.52) und (8.54) können zwei Lösungen $\beta_2^{(1)}$, $\beta_2^{(2)}$ im Intervall $-\pi < \beta \leq \pi$ mit Hilfe der in vielen Programmiersprachen verfügbaren atan2-Funktion berechnet werden,

$$\beta_2^{(1,2)} = \operatorname{atan2}\left(\sin\beta_2^{(1,2)}, \cos\beta_2^{(1,2)}\right)\,. \tag{8.55}$$

Das Lösungsverhalten der Gleichung (8.55) hängt von der Diskriminante D aus (8.53) ab. Im Fall $D > 0$ gibt es zwei Lösungen $\beta_2^{(1)}$, $\beta_2^{(2)}$, die den beiden in Tabelle 8.4 gezeigten Konfigurationen des Gelenkvierecks bei einem gegebenem Winkel β_1 entsprechen. Im Fall $D = 0$ fallen die beiden Lösungen zusammen. Hier ist die explizite Schließbedingung $\beta_2(\beta_1)$ singulär, was bei den expliziten Bindungen auf Geschwindigkeitsebene noch näher betrachtet wird. Im Fall $D < 0$ besitzt (8.55) keine reelle Lösung. Die kinematische Schleife kann nicht geschlossen werden.

Tabelle 8.4 Lösungen der impliziten Schließbedingungen des ebenen Gelenkvierecks

Fall $D > 0$: zwei Lösungen	Fall $D = 0$: eine Lösung	Fall $D < 0$: keine Lösung
		

Für jede Lösung des Winkels $\beta_2^{(k)}$ aus (8.55) wird der dazu gehörende primäre Gelenkwinkel $\beta_3^{(k)}$ erhalten, indem aus den beiden Schließbedingungen

(8.38) und (8.39) zunächst der Summenwinkel $\beta_{13}^{(k)} = \beta_1 + \beta_3^{(k)}$ unter Verwendung der atan2-Funktion berechnet wird,

$$\sin\beta_{13}^{(k)} = \frac{1}{l_3}\left(l_0 - l_1\,\sin\beta_1 - l_2\,\cos\beta_2^{(k)}\right)\,, \tag{8.56}$$

$$\cos\beta_{13}^{(k)} = \frac{1}{l_3}\left(-l_1\,\cos\beta_1 + l_2\,\sin\beta_2^{(k)}\right)\,. \tag{8.57}$$

Der Winkel $\beta_3^{(k)}$ ist dann

$$\beta_3^{(k)}(\beta_1) = \beta_{13}^{(k)} - \beta_1\,, \qquad k = 1, 2\,. \tag{8.58}$$

Damit ergibt sich für die Berechnung der Gelenkwinkel β_2 und β_3 in Abhängigkeit von $q = \beta_1$ der in Abb. 8.4 gezeigte Ablauf. Sollen für einen gegebenen Verlauf des Winkels $\beta_1(t)$ ausgehend von einem Anfangswert $\beta_1(t_0) = \beta_{10}$ mit einer gegebenen Anfangskonfiguration des Gelenkvierecks die dazugehörigen Werte der Winkel $\beta_2(t)$ und $\beta_3(t)$ berechnet werden, so wird der zur Anfangskonfiguration gehörende Wert des Auswahlparameters k beibehalten.

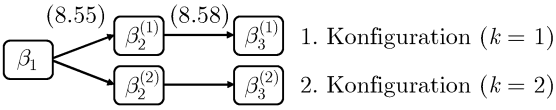


Abb. 8.4 Berechnungsablauf für die expliziten Schließbedingungen

Mit den Winkeln β_2 aus (8.55) und β_3 aus (8.58) sind die expliziten Schließbedingungen auf Lageebene (8.22) definiert,

$$\begin{array}{cccl} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} q \\ \beta_2(q) \\ \beta_3(q) \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Definition (8.47)} \\ \text{Übertragungsfunktion (8.55)} \\ \text{Übertragungsfunktion (8.58)} \end{array} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta} & = & \boldsymbol{\beta}(q)\,. & \end{array} \tag{8.59}$$

Explizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Für die Aufstellung der expliziten Schließbedingungen (8.25) werden die impliziten Schließbedingungen (8.42) entsprechend (8.25) aufgeteilt und nach den abhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\dot\beta_2$ und $\dot\beta_3$ umgestellt,

$$\begin{array}{ccccc} \left[\,-\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2 \quad \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3\,\right] & \begin{bmatrix} \dot\beta_2 \\ \dot\beta_3 \end{bmatrix} & = & -\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_3) & \dot\beta_1 \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}} & \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} & = & -\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} & \eta^{\mathrm{u}}\,. \end{array} \tag{8.60}$$

Diese Gleichung kann mit Hilfe der Vektorkoordinaten aus (8.37) ausgewertet werden. Für die geometrische Interpretation des Ergebnisses ist jedoch die vektorielle Lösungsdarstellung günstiger. Multiplikation von (8.60) mit

den Vektoren $\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}$ und $\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}$ von links ergibt

$$-\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2\,\dot{\beta}_2 + \overbrace{\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3}^{0}\,\dot{\beta}_3 = -\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_3)\,\dot{\beta}_1\,, \tag{8.61}$$

$$-\underbrace{\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2}_{0}\,\dot{\beta}_2 + \boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3\dot{\beta}_3 = -\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_3)\,\dot{\beta}_1\,. \tag{8.62}$$

Unter Berücksichtigung der antizyklischen Vertauschung im Spatprodukt $\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3 = -\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_2$ in (8.62) sowie von $\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{l}_3 = 0$ ergeben sich daraus die abhängigen Gelenkgeschwindigkeiten

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}_2\\ \dot{\beta}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu_{21}(\beta_1)\\ \mu_{31}(\beta_1)\end{bmatrix}\dot{\beta}_1 \tag{8.63}$$

mit den lageabhängigen kinematischen Übersetzungen von $\dot{\beta}_1$ nach $\dot{\beta}_2$ bzw. $\dot{\beta}_3$

$$\mu_{21}(\beta_1) = \frac{\dot{\beta}_2}{\dot{\beta}_1} = \frac{\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{l}_1}{\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2} = \frac{l_1\,\sin\beta_3}{l_2\,\cos(\beta_1+\beta_3-\beta_2)}\,, \tag{8.64}$$

$$\mu_{31}(\beta_1) = \frac{\dot{\beta}_3}{\dot{\beta}_1} = \frac{\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1+\boldsymbol{l}_3)}{\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2} = -\frac{l_1\,\cos(\beta_2-\beta_1)}{l_3\,\cos(\beta_1+\beta_3-\beta_2)} - 1\,. \tag{8.65}$$

Zusammen mit $\dot{\beta} = s$ lauten die expliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene gemäß (8.26)

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{\beta}_1\\ \dot{\beta}_2\\ \dot{\beta}_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1\\ \mu_{21}(q)\\ \mu_{31}(q)\end{bmatrix} s\\ \rightarrow\quad \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{J}^{\ell}(q)\quad s\,.\end{aligned} \tag{8.66}$$

Explizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Gemäß (8.33) gilt

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\ddot{\beta}_1\\ \ddot{\beta}_2\\ \ddot{\beta}_3\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1\\ \mu_{21}(q)\\ \mu_{31}(q)\end{bmatrix}\dot{s} + \begin{bmatrix}0\\ \dot{\mu}_{21}(q,s)\\ \dot{\mu}_{31}(q,s)\end{bmatrix}\\ \rightarrow\quad \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{J}^{\ell}(q)\quad \dot{s} + \quad \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}(q,s)\end{aligned} \tag{8.67}$$

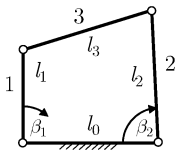
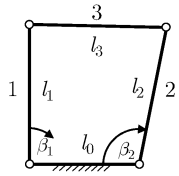
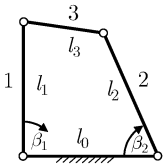
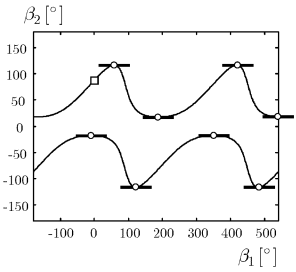
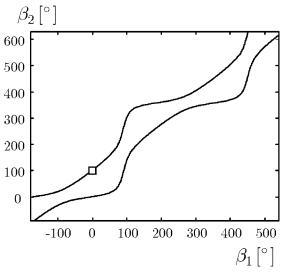
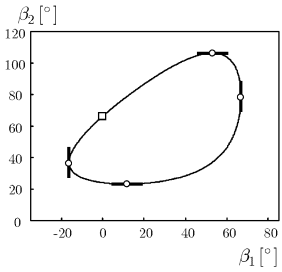
mit dem Term

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} = \begin{bmatrix}0\\ \hline \dot{\mu}_{21}\\ \dot{\mu}_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \hline -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}\end{bmatrix} \tag{8.68}$$

gemäß (8.33) mit $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$ aus (8.60) und $\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}$ aus (8.45) bzw. (8.46).

Lösungen der expliziten Schließbedingungen Exemplarisch zeigt Tabelle 8.5 das Übertragungsverhalten $\beta_2(\beta_1)$ für drei Ausführungen des Gelenkvierecks als Kurbelschwinge, als Doppelkurbel und als Doppelschwinge. Die Abhängigkeit der Lösungen von den normierten Abmessungen $\frac{l_1}{l_0}$, $\frac{l_2}{l_0}$, und $\frac{l_3}{l_0}$ wird in der Getriebelehre analysiert, siehe z.B. Luck und Modler [57].

Tabelle 8.5 Beispiele für das Übertragungsverhalten des ebenen Gelenkvierecks

Kurbelschwinge	Doppelkurbel	Doppelschwinge
		
$\frac{l_1}{l_0}=0.7,\ \frac{l_2}{l_0}=\frac{l_3}{l_0}=1$	$\frac{l_1}{l_0}=\frac{l_2}{l_0}=\frac{l_3}{l_0}=1.2$	$\frac{l_1}{l_0}=\frac{l_2}{l_0}=1,\quad \frac{l_3}{l_0}=0.6$
Hebel 1 läuft um Hebel 2 oszilliert	Hebel 1 läuft um Hebel 2 läuft um	Hebel 1 oszilliert Hebel 2 oszilliert
		

Symbole: □ Ausgangslage —o— $\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1}=0$ $\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1}=\infty$

Singularität der expliziten Schließbedingungen Die expliziten Schließbedingungen (8.59) $\beta_2(\beta_1)$ und $\beta_3(\beta_1)$ für die gewählte Minimalkoordinate $q=\beta_1$ sind singulär, wenn die (2,2)-Matrix $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$ in (8.60) singulär ist. Dieser Fall liegt vor, wenn die beiden Spaltenvektoren $-\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2$ und $\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3$ von $\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}}$ parallel sind. Die Vektoren $\boldsymbol{l}_2$ und $\boldsymbol{l}_3$, also der Hebel 2 und die Koppel 3, liegen dann auf einer Geraden. Die expliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene (8.64) und (8.65) liefern in diesen Lagen

$$\frac{\dot\beta_2}{\dot\beta_1}=\frac{\mathrm{d}\beta_2}{\mathrm{d}\beta_1}=\infty \qquad \text{und} \qquad \frac{\dot\beta_3}{\dot\beta_1}=\frac{\mathrm{d}\beta_3}{\mathrm{d}\beta_1}=\infty\,. \tag{8.69}$$

Dieser Fall tritt bei der Kurbelschwinge und bei der Doppelkurbel aus Tabelle 8.5 nicht auf, jedoch bei der Doppelschwinge, deren Lösung in Abb. 8.5 ausführlicher dargestellt ist. Die explizite Schließbedingung $\beta_2(\beta_1)$ weist Sin-

gularitäten in den Lagen $\beta_1 = -16,26°$ und $\beta_1 = 66,92°$ auf, gekennzeichnet durch die senkrechten Tangenten der Funktion $\beta_2(\beta_1)$. Die Minimalkoordinate $q = \beta_1$ kann für die Beschreibung der Bewegung über diese Lagen hinweg nicht verwendet werden. Hierzu kann dann auf die Minimalkoordinate $q = \beta_2$ übergegangen werden. Die dazu gehörende explizite Bindung $\beta_1(\beta_2)$ ist aber wiederum in den Lagen $\beta_2 = 23,08°$ und $\beta_2 = 106,26°$ singulär, gekennzeichnet durch die horizontalen Tangenten der Funktion $\beta_2(\beta_1)$. Die Bewegung des Gelenkvierecks kann daher nicht im gesamten Bewegungsbereich durch eine Minimalkoordinate beschrieben werden, sondern es muss bei Annäherung an eine Singulärität der Übertragungsfunktion auf die jeweils andere Minimalkoordinate umgeschaltet werden.

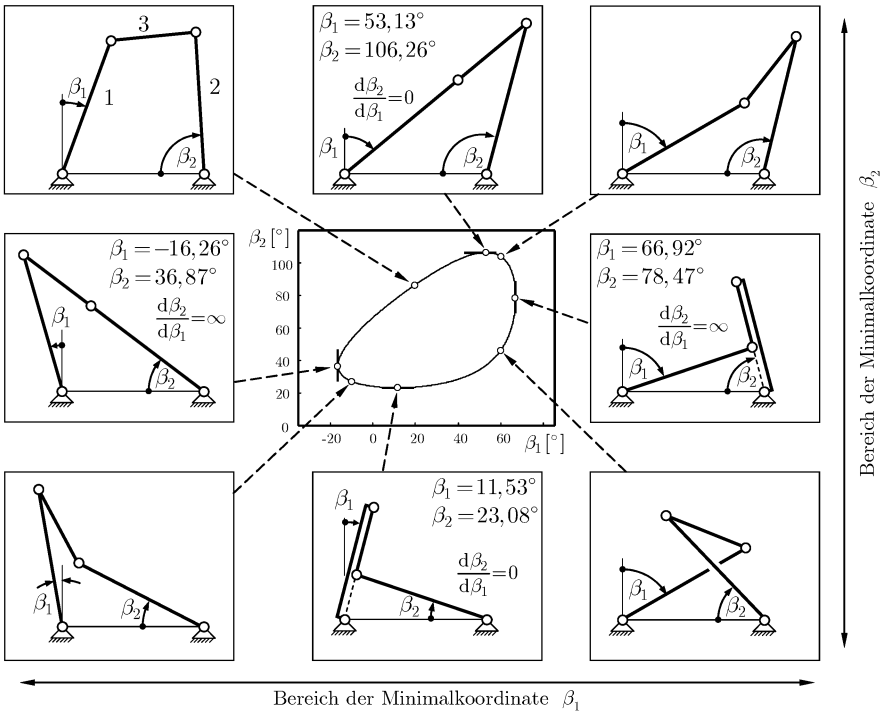


Abb. 8.5 Lösung der Schließbedingung für die Doppelschwinge aus Tabelle 8.5. Singularität der expliziten Bindung $\beta_2(\beta_1)$ in den Lagen mit $\frac{d\beta_2}{d\beta_1} = \infty$, Singularität der expliziten Bindung $\beta_1(\beta_2)$ in den Lagen mit $\frac{d\beta_1}{d\beta_2} = \infty$

Singularität der impliziten Schließbedingungen Singularitäten der impliziten Schließbedingungen sind durch einen lokalen Rangabfall der Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^\ell$ gekennzeichnet. Das System hat in diesen Lagen einen vergrößerten Freiheitsgrad. Im Fall des ebenen Gelenk-

vierecks tritt dieser Fall auf, wenn der Rang von $\boldsymbol{G}^\ell$ in (8.42) bzw. (8.43) kleiner als zwei ist.

Für die drei Beispiele in Tabelle 8.5 besitzt die Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^\ell$ jeweils im gesamten Bewegungsbereich den Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^\ell) = 2$, weil niemals alle Spaltenvektoren $\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_3)$, $-\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2$ und $\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3$ in (8.42) parallel sind. Ein Rangabfall um eins tritt aber im Fall der in Abb. 8.6 gezeigten Parallelkurbel, gekennzeichnet durch die Abmessungen $l_1 = l_2$ und $l_0 = l_3$, lokal in den Lagen $\beta_1 = 90°$, $\beta_2 = 180°$ sowie $\beta_1 = -90°$, $\beta_2 = 0°$ auf.

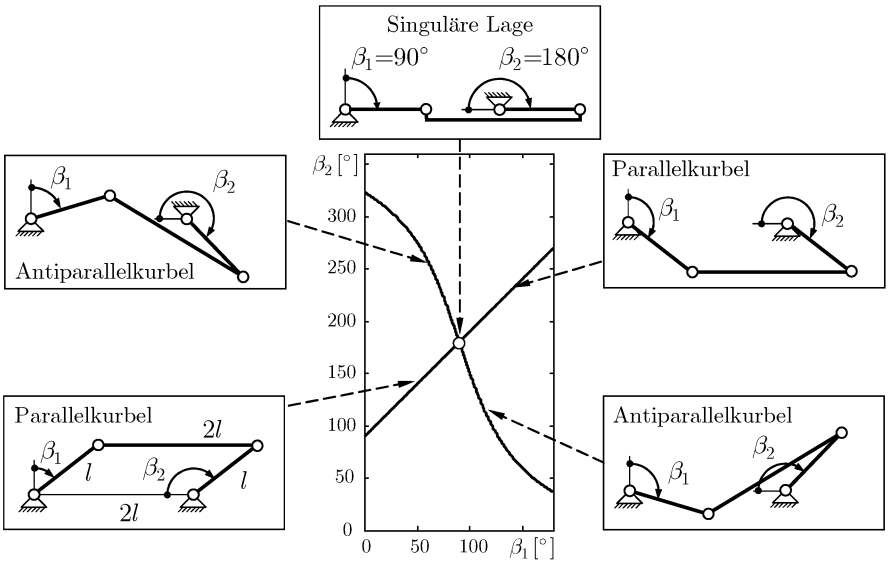


Abb. 8.6 Ebenes Gelenkviereck als Parallelkurbel ($l_1 = l_2 = l$, $l_0 = l_3 = 2\,l$). Singularität der impliziten Schließbedingungen in der Lage $\beta_1 = 90°$, $\beta_2 = 180°$

In den Lagen $\beta_1 = 90°$, $\beta_2 = 180°$ und $\beta_1 = -90°$, $\beta_2 = 0°$ sind die drei Spaltenvektoren $\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_3)$, $-\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_2$ und $\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3$ der Bindungsmatrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^\ell$ aus (8.42) parallel. Damit ist dort $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^\ell) = 1$. Die impliziten Schließbedingungen sind in diesen Lagen singulär. Das Verhalten in der Umgebung der Lage $\beta_1 = 90°$, $\beta_2 = 180°$ ist in Abb. 8.6 dargestellt. In der singulären Lage hat das Gelenkviereck den Freiheitsgrad $f = 2$. Dies kommt dadurch zum Ausdruck, dass es sich aus der singulären Lage entweder weiter als Parallelkurbel oder aber als Antiparallelkurbel herausbewegen kann.

In der Getriebelehre werden solche singulären Lagen auch als Verzweigungslagen bezeichnet, siehe Luck und Modler [57]. Technisch können sie durch Hilfsverzahnungen überwunden werden, welche in der Umgebung der singulären Lagen zusätzliche Bindungen einbringen.

8.2 Kinematik mehrschleifiger Systeme

Die Vorgehensweise für die kinematische Beschreibung einer einzelnen Mehrkörperschleife wird nun auf mehrschleifige Systeme erweitert.

8.2.1 Primäre Gelenkkoordinaten

Ein Mehrkörpersystem mit $n(= n_{\mathrm{K}})$ Körpern, n_{G} Gelenken und gemäß (6.7)

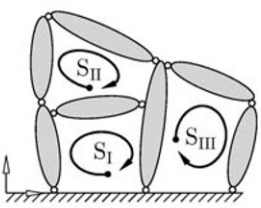
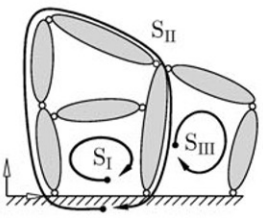
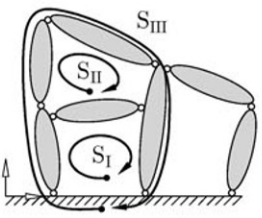
$$n_{\mathrm{S}} = n_{\mathrm{G}} - n \tag{8.70}$$

unabhängigen kinematischen Schleifen kann durch Schnitte an n_{S} sekundären Gelenken in einen aufspannenden Baum überführt werden.

Während die Anzahl voneinander unabhängiger Schleifen n_{S} durch (8.70) eindeutig festliegt, ist die Definition der unabhängigen Scheifen nicht eindeutig. Anschaulich sind n_{S} ausgewählte Schleifen dann voneinander unabhängig, wenn das System durch je einen Schnitt in jeder dieser Schleifen in einen aufspannenden Baum überführt werden kann. Für die automatische Ermittlung unabhängiger Schleifen existieren hier nicht behandelte Algorithmen, die auf Methoden der Graphentheorie zurückgehen, siehe auch WITTENBURG [109]. Oft ist aber auch aus dem Verständnis der technischen Funktion des Mehrkörpersystems relativ rasch erkennbar, ob die ausgewählten Schleifen voneinander unabhängig sind.

Für ein System mit $n = 7$ Körpern und $n_{\mathrm{G}} = 10$ Gelenken zeigt Tabelle 8.6 zwei zulässige und eine unzulässige Festlegung der $n_{\mathrm{S}} = 3$ unabhängigen Schleifen. Im Folgenden werden die unabhängigen Schleifen jeweils mit römischen Ziffern durchnummeriert.

Tabelle 8.6 Zur Definition unabhängiger kinematischer Schleifen

$S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}$ unabhängig		$S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}$ abhängig
		

Dieses System besitzt z. B. den in Abb. 8.7 gezeigten aufspannenden Baum. In Abschnitt 8.2.3 werden einige Überlegungen zur günstigen Auswahl der unabhängigen Schleifen angegeben.

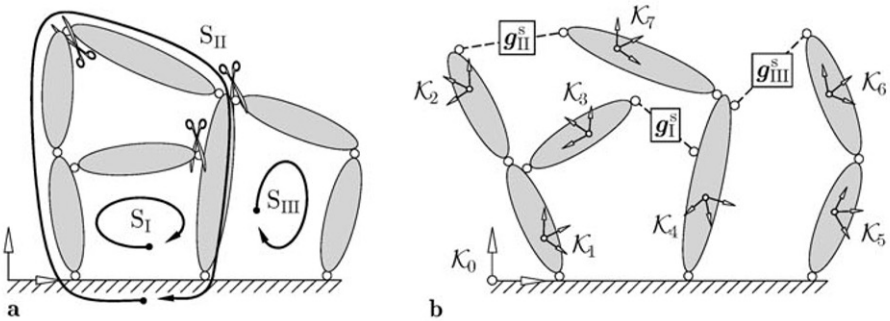


Abb. 8.7 System mit $n_\mathrm{S} = 3$ Schleifen aus Tabelle 8.6. **a** Schleifen und sekundäre Gelenke. **b** Aufspannender Baum mit sekundären Bindungen $\boldsymbol{g}_j^\mathrm{s} = \mathbf{0},\ j = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$

Die Lage des aufspannenden Baumes wird durch f_L^o primäre Gelenkkoordinaten

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\ \beta_1\ \ldots\ \beta_{f_\mathrm{L}^\mathrm{o}}\ \right]^\mathrm{T} \tag{8.71}$$

und seine Geschwindigkeit durch $f^\mathrm{o} \leq f_\mathrm{L}^\mathrm{o}$ primäre Gelenkgeschwindigkeiten

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\ \eta_1\ \ldots\ \eta_{f^\mathrm{o}}\ \right]^\mathrm{T} \tag{8.72}$$

beschrieben. Hierbei sind f_L^o der Lage-Freiheitsgrad und f^o der Freiheitsgrad des aufspannenden Baumes ohne die sekundären Bindungen. Bei holonomen primären Gelenken ist $f^\mathrm{o} = f_\mathrm{L}^\mathrm{o}$.

Die kinematischen Bewegungsgleichungen für die primären Gelenkkoordinaten lauten i.Allg.

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{f_\mathrm{L}^\mathrm{o}, f^\mathrm{o}}\,. \tag{8.73}$$

Im Fall holonomer Standardgelenke ist $\boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}}$ und $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}$.

Bei EULER-Parametern als primären Gelenkkoordinaten gelten entsprechend (7.13) Nebenbedingungen

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}\,. \tag{8.74}$$

Der Vektor $\boldsymbol{\beta}$ aus (8.71) hat dann die Dimension $f_\mathrm{L}^\mathrm{o} + \dim(\boldsymbol{\phi})$.

8.2.2 Implizite Schließbedingungen

Durch das Schließen der n_S unabhängigen Schleifen unterliegen die primären Gelenkkoordinaten den impliziten Schließbedingungen.

Implizite Schließbedingungen auf Lageebene Hat das sekundäre Gelenk der j-ten Schleife $b^{\mathrm{s}}_{\mathrm{L}j}$ Lagebindungen, so ist die Gesamtanzahl der sekundären Bindungen und damit der Schließbedingungen auf Lageebene

$$b^{\mathrm{s}}_{\mathrm{L}} = \sum_{j=\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{S}}} b^{\mathrm{s}}_{\mathrm{L}j} \,. \tag{8.75}$$

Die impliziten sekundären Bindungen der n_{S} Schleifen lauten in den Lagegrößen $\hat{\boldsymbol{r}}_{a,j}$ und $\hat{\boldsymbol{r}}_{b,j}$ der Koordinatensysteme $\mathcal{K}_{a,j}$ und $\mathcal{K}_{b,j}$, vgl. (8.4),

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{I}}(\hat{\boldsymbol{r}}_{a,\mathrm{I}}, \hat{\boldsymbol{r}}_{b,\mathrm{I}}, t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{n_{\mathrm{S}}}(\hat{\boldsymbol{r}}_{a,n_{\mathrm{S}}}, \hat{\boldsymbol{r}}_{b,n_{\mathrm{S}}}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad &\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}, t) = \boldsymbol{0} \,. \end{aligned} \tag{8.76}$$

Die Lagen der Koordinatensysteme $\mathcal{K}_{a,j}$ und $\mathcal{K}_{b,j}$ können mit Hilfe der expliziten Bindungen des aufspannenden Baumes (7.18) in Abhängigkeit von den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ dargestellt werden,

$$\left.\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{r}}_{a,j} &= \hat{\boldsymbol{r}}_{a,j}(\boldsymbol{\beta}, t) \\ \hat{\boldsymbol{r}}_{b,j} &= \hat{\boldsymbol{r}}_{b,j}(\boldsymbol{\beta}, t) \end{aligned}\right\} , \quad j = \mathrm{I}, \ldots, n_{\mathrm{S}} \,, \qquad \text{bzw.} \qquad \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\beta}, t) \,. \tag{8.77}$$

Einsetzen von (8.77) in (8.76) liefert die $b^{\mathrm{s}}_{\mathrm{L}}$ impliziten Schließbedingungen der Schleifen in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}^{\ell}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\beta}, t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{g}^{\ell}_{n_{\mathrm{S}}}(\boldsymbol{\beta}, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad &\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{0} \,. \end{aligned} \tag{8.78}$$

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Hat das Schnittgelenk der j-ten Schleife b^{s}_{j} kinematische Bindungen, so ist die Gesamtanzahl der sekundären kinematischen Bindungen und damit die Gesamtanzahl der Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene

$$b^{\mathrm{s}} = \sum_{j=\mathrm{I}}^{n_{\mathrm{S}}} b^{\mathrm{s}}_{j} \,. \tag{8.79}$$

Bei Schleifen mit holonomen sekundären Gelenken ist $b^{\mathrm{s}} = b^{\mathrm{s}}_{\mathrm{L}}$.

Die Bindungen für die Geschwindigkeiten der Koordinatensysteme $\mathcal{K}_{a,j}$ und $\mathcal{K}_{b,j}$ am sekundären Gelenk der j-ten Schleife lauten, vgl. (8.7),

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}_{j} \equiv \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{a,j}\, \hat{\boldsymbol{v}}_{a,j} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{b,j}\, \hat{\boldsymbol{v}}_{b,j} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab,j} = \boldsymbol{0} \,, \qquad j = \mathrm{I}, \ldots, n_{\mathrm{S}} \,. \tag{8.80}$$

Für die Formulierung der Bewegungsgleichungen mehrschleifiger Systeme ist es zweckmäßig, die impliziten Bindungen (8.80) unter Berücksichtigung der Topologie des Systems in einer Matrizengleichung der Form

$$\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}} \equiv \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}},t) = \boldsymbol{0} \tag{8.81}$$

mit der $(b^{\mathrm{s}},6n)$-Matrix der sekundären Bindungen $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}$ anzuordnen. Ein Beispiel wird in (8.86) gezeigt.

Die Geschwindigkeiten $\hat{\boldsymbol{v}}$ können mit Hilfe der expliziten Geschwindigkeitsbindungen (7.26) des aufspannenden Baumes durch die primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ ausgedrückt werden,

$$\begin{array}{cccccc} & \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{v}}_n \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} & \boldsymbol{\eta} + & \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_n \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \hat{\boldsymbol{v}} & = & \boldsymbol{J} & \boldsymbol{\eta} + & \bar{\hat{\boldsymbol{v}}} \quad . \end{array} \tag{8.82}$$

Einsetzen der expliziten primären Bindungen (8.77) und (8.82) in die impliziten sekundären Bindungen (8.81) führt auf die impliziten Schließbedingungen in den primären Gelenkkoordinaten auf Geschwindigkeitsebene

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\ell}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\beta},t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}^{\ell}_{n_{\mathrm{S}}}(\boldsymbol{\beta},t) \end{bmatrix} & \boldsymbol{\eta} + & \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{\beta},t) \\ \vdots \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}_{n_{\mathrm{S}}}(\boldsymbol{\beta},t) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t) & \boldsymbol{\eta} + & \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t) & = & \boldsymbol{0} \end{array} \tag{8.83}$$

mit der $(b^{\mathrm{s}},f^{\mathrm{o}})$-Matrix der Schließbedingungen

$$\boldsymbol{G}^{\ell} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{J} \tag{8.84}$$

und dem nur bei rheonomen Gelenkbindungen auftretenden b^{s}-Vektor

$$\bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.85}$$

Beispiel Für das System aus Abb. 8.7 haben die impliziten sekundären Bindungen (8.81) die Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} & \equiv & \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{3,\mathrm{I}} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{4,\mathrm{I}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{2,\mathrm{II}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{7,\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{4,\mathrm{III}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{6,\mathrm{III}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_4 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_5 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_6 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_7 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{34,\mathrm{I}} \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{27,\mathrm{II}} \\ \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{46,\mathrm{III}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}} & \equiv & & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}} & & & & \hat{\boldsymbol{v}} & + & \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}} & = & \boldsymbol{0} \quad . \end{array} \tag{8.86}$$

Werden die expliziten Bindungen des aufspannenden Baumes (8.82)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_4 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_5 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_6 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \boldsymbol{J}_2 \\ \boldsymbol{J}_3 \\ \boldsymbol{J}_4 \\ \boldsymbol{J}_5 \\ \boldsymbol{J}_6 \\ \boldsymbol{J}_7 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_2 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_3 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_4 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_5 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_6 \\ \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_7 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J} \quad \boldsymbol{\eta} + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{v}}} \end{aligned} \tag{8.87}$$

in die sekundären Bindungen (8.86) eingesetzt, so werden die impliziten Schließbedingungen in den primären Gelenkkoordinaten (8.83) erhalten,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{3,\mathrm{I}}\,\boldsymbol{J}_3 + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{4,\mathrm{I}}\,\boldsymbol{J}_4 \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{2,\mathrm{II}}\,\boldsymbol{J}_2 + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{7,\mathrm{II}}\,\boldsymbol{J}_7 \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{4,\mathrm{III}}\,\boldsymbol{J}_4 + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{6,\mathrm{III}}\,\boldsymbol{J}_6 \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta} + \begin{bmatrix} \bar{\gamma}^{\ell}_{\mathrm{I}} \\ \bar{\gamma}^{\ell}_{\mathrm{II}} \\ \bar{\gamma}^{\ell}_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}^{\ell} \quad \boldsymbol{\eta} + \quad \bar{\gamma}^{\ell} &= \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{8.88}$$

mit dem nur bei rheonomen Gelenkbindungen auftretenden Term

$$\bar{\gamma}^{\ell} = \begin{bmatrix} \bar{\gamma}^{\ell}_{\mathrm{I}} \\ \bar{\gamma}^{\ell}_{\mathrm{II}} \\ \bar{\gamma}^{\ell}_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{3,\mathrm{I}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_3 + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{4,\mathrm{I}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_4 + \bar{\gamma}^{\mathrm{s}}_{34,\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{2,\mathrm{II}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_2 + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{7,\mathrm{II}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_7 + \bar{\gamma}^{\mathrm{s}}_{27,\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{4,\mathrm{III}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_4 + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{6,\mathrm{III}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_6 + \bar{\gamma}^{\mathrm{s}}_{46,\mathrm{III}} \end{bmatrix} . \tag{8.89}$$

Implizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die sekundären Bindungen für die Beschleunigungen der Koordinatensysteme $\mathcal{K}_{a,j}$ und $\mathcal{K}_{b,j}$ am sekundären Gelenk der j-ten Schleife lauten, vgl. (8.12),

$$\dot{\gamma}^{\mathrm{s}}_j \equiv \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{a,j}\,\hat{\boldsymbol{a}}_{a,j} + \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{b,j}\,\hat{\boldsymbol{a}}_{b,j} + \bar{\bar{\gamma}}^{\mathrm{s}}_{ab,j} = \boldsymbol{0}\,, \quad j = \mathrm{I}, \ldots, n_{\mathrm{S}}\,. \tag{8.90}$$

Die sekundären Bindungen (8.90) können entsprechend (8.81) angeordnet werden,

$$\dot{\gamma}^{\mathrm{s}} \equiv \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}})\,\hat{\boldsymbol{a}} + \bar{\bar{\gamma}}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{v}}, t) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.91}$$

Einsetzen der expliziten primären Beschleunigungsbindungen (7.35)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{J}_n \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1 \\ \vdots \\ \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_n \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{a}} &= \boldsymbol{J} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{a}}} \end{aligned} \tag{8.92}$$

zusammen mit den primären Lage- und Geschwindigkeitsbindungen (8.77) und (8.82) in die sekundären Bindungen (8.91) führt auf die impliziten Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{G}_{n_{\mathrm{S}}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \begin{bmatrix} \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{\mathrm{I}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) \\ \vdots \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}_{n_{\mathrm{S}}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad &\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t) \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} + \quad \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) \quad = \quad \mathbf{0} \end{aligned} \tag{8.93}$$

mit dem nicht von den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ abhängenden b^{s}-Vektor

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.94}$$

Der Vergleich der zeitlichen Ableitung von (8.83) mit (8.93) ergibt für den Term $\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}$ den weiteren Zusammenhang

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \dot{\boldsymbol{G}}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} + \dot{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}\,. \tag{8.95}$$

8.2.3 Zur Definition unabhängiger Schleifen

Die Definition der unabhängigen Schleifen hat einen wesentlichen Einfluß auf die Struktur der Schließbedingungen (8.78) und damit auf die Effizienz des daraus abgeleiteten Simulationsmodells. Für die Definition günstiger unabhängiger Schleifen können die folgenden Regeln formuliert werden:

- *Kleine Anzahl von Schließbedingungen:* Dieses Ziel wird erreicht, indem die Schleifen an einem Gelenk mit möglichst vielen Gelenkfreiheitsgraden geschnitten werden. Günstig sind Schnitte an einem Kugelgelenk, einem ebenen Gelenk oder an einer Pendelstütze, vgl. Tabelle 8.2.
- *Keine Schleifenkopplung über sekundäre Gelenke:* Dies bedeutet, dass die Schließbedingungen nur über die primären Gelenkkoordinaten miteinander verkoppelt sind. Die Gelenkkoordinaten der sekundären Gelenke werden zur Berechnung der Bewegungsgrößen der Körper nicht benötigt.

Beispiel Der in Abb. 8.8 a gezeigte Mechanismus hat die Aufgabe, den nicht umlaufenden Teil der Taumelscheibe eines Hubschraubers in Höhe und Neigung zu positionieren, siehe Hiller et al. [40]. Die Taumelscheibe ist durch eine kinematische Kette mit einem Schubgelenk (P) und einem Kardangelenk (U) geführt und wird zusätzlich durch Steuerstangen an zwei Steuerhebeln abgestützt. Zur Vermeidung identischer Freiheitsgrade haben die Steuerstangen je ein Kugelgelenk (S) und ein Kardangelenk (U), vgl. Abschnitt 6.3.2. Der Mechanismus besitzt $n = 7$ Körper, $n_{\mathrm{G}} = 9$ Gelenke und damit $n_{\mathrm{S}} = 2$ unabhängige Schleifen $\mathrm{S_I}$, $\mathrm{S_{II}}$. Das Grübler-Kutzbach-Kriterium (6.14) ergibt den Freiheitsgrad $f = 3$. Die drei Verstellbewegun-

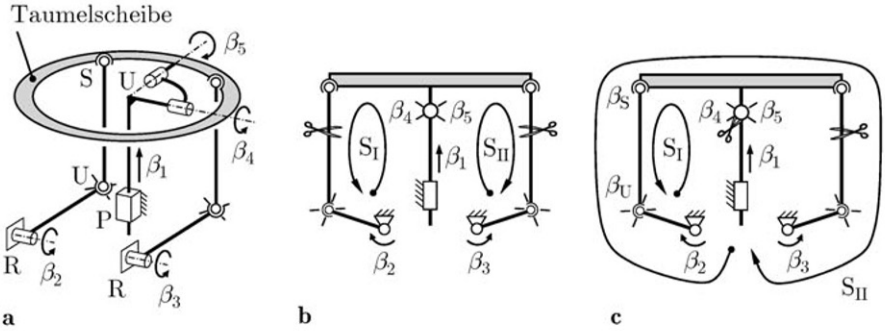


Abb. 8.8 Taumelscheibe eines Hubschraubers. **a** Kinematisches Modell. **b** Günstige Definition der Schleifen. **c** Ungünstige Definition der Schleifen

gen zur Positionierung der Taumelscheibe werden am gestellfesten Schubgelenk (Verschiebung β_1) und an den beiden gestellfesten Drehgelenken (Winkel β_2, β_3) eingeleitet.

Günstige Definition der unabhängigen Schleifen Werden die unabhängigen Schleifen S_I und S_{II} gemäß Abb. 8.8 b gewählt, so können die Steuerstangen als Pendelstützen angesehen werden, die als sekundäre Gelenke definiert werden. Es ergeben sich die $f_L^o = 5$ primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta} = [\,\beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3 \;\; \beta_4 \;\; \beta_5\,]^T$. Für die beiden Pendelstützen gelten gemäß Tabelle 8.2 insgesamt $b^s = 2$ Schließbedingungen, die über die Gelenkkoordinaten β_1, β_4, β_5 miteinander verkoppelt sind,

$$g_I^\ell(\,\beta_1, \beta_2, \quad \beta_4, \beta_5) \;=\; 0 \qquad (1 \text{ Bindung})\,, \tag{8.96}$$

$$g_{II}^\ell(\beta_1, \quad \beta_3, \beta_4, \beta_5) \;=\; 0 \qquad (1 \text{ Bindung})\,. \tag{8.97}$$

Ungünstige Definition der unabhängigen Schleifen Werden dagegen die unabhängigen Schleifen S_I und S_{II} gemäß Abb. 8.8 c gewählt, so kann ein aufspannender Baum festgelegt werden, indem die Schleife S_I am zentralen Kardangelenk und die Schleife S_{II} an der Pendelstütze geschnitten werden. Es ergeben sich die $f_L^o = 8$ primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta} = [\,\beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3 \;\; \boldsymbol{\beta}_U^T \;\; \boldsymbol{\beta}_S^T\,]^T$ mit den zwei Gelenkwinkeln $\boldsymbol{\beta}_U$ des Kardangelenks und den drei Gelenkwinkeln (z.B. KARDAN-Winkel) $\boldsymbol{\beta}_S$ des Kugelgelenks. Gemäß Tabelle 8.2 gelten insgesamt $b^s = 5$ Schließbedingungen, die über die Gelenkwinkel β_2, $\boldsymbol{\beta}_U$ und $\boldsymbol{\beta}_S$ gekoppelt sind,

$$\boldsymbol{g}_I^\ell(\,\beta_1, \beta_2, \quad \boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}_S) \;=\; \mathbf{0} \quad (4 \text{ Bindungen am Kardangelenk})\,, \tag{8.98}$$

$$g_{II}^\ell(\quad \beta_2, \beta_3, \boldsymbol{\beta}_U, \boldsymbol{\beta}_S) \;=\; 0 \quad (1 \text{ Bindung an der Pendelstütze})\,. \tag{8.99}$$

8.2.4 Zusätzliche kinematische Ketten

Bei der Modellerstellung kann es sinnvoll sein, gedachte zusätzliche kinematische Ketten so einzuführen, dass interessierende Koordinaten direkt als Unbekannte der Schließbedingungen auftreten. Hierdurch kann insbesondere auch die Formulierung der Bewegungsgleichungen in absoluten Körperkoordinaten als ein Sonderfall geschlossener Mehrkörpersysteme behandelt werden.

Beispiel Für die Radführung mit fünf Stablenkern aus Abb. 6.6 a mit $n = 6$ Körpern (ohne Rad), $n_{\mathrm{G}} = 10$ Gelenken und damit $n_{\mathrm{S}} = 4$ unabhängigen Schleifen werden zwei kinematische Modelle mit unterschiedlichen Defnitionen der Schleifen und der primären Gelenkkoordinaten gegenübergestellt.

Relative Gelenkkoordinaten als primäre Gelenkkoordinaten Werden die vier Schleifen an den wie Pendelstützen wirkenden Lenkern geschnitten und wird am verbleibenden Lenker ein Kugelgelenk durch ein Kardangelenk ersetzt, so entsteht der in Abb. 8.9 gezeigte aufspannende Baum mit den $f^{\mathrm{o}} = 5$ primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta} = [\,\beta_1, \ldots, \beta_5\,]^{\mathrm{T}}$. Mit den Pendelstützen als sekundären Gelenken gemäß Tabelle 8.2 haben die Schließbedingungen der vier Schleifen die Form

$$g_i^{\ell}(\beta_1, \ldots, \beta_5) = 0\,, \qquad i = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{IV}\,. \tag{8.100}$$

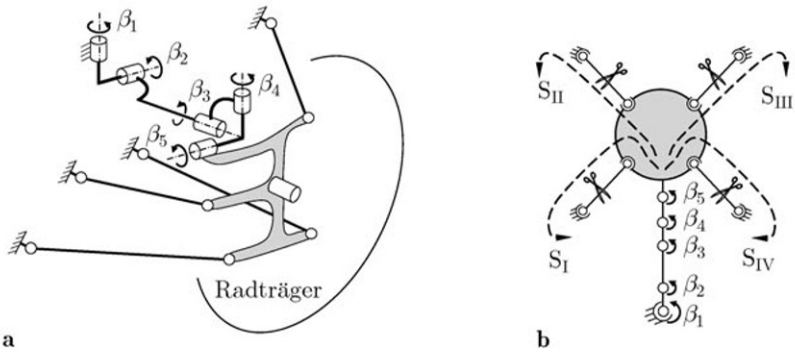


Abb. 8.9 Radführung mit fünf Stablenkern.
a Kinematisches Modell mit $n_{\mathrm{S}} = 4$ Schleifen. **b** Topologie

Dieses kinematische Modell ist hier allerdings weniger günstig, da zur Berechnung der Lage des Radträgers fünf hintereinandergeschaltete Drehungen um räumlich angeordnete Achsen auszuwerten sind. Außerdem müssen die interessierenden sechs Lagekoordinaten des Radträgers (z.B. Ortsvektorkoordinaten r_x, r_y, r_z, KARDAN-Winkel α, β, γ) durch Auswertung der Vorwärtskinematik im aufspannenden Baum aus $\boldsymbol{\beta}$ berechnet werden.

Absolute Körperkoordinaten als primäre Gelenkkoordinaten Die interessierenden sechs absoluten Lagekoordinaten des Radträgers können unmittelbar als primäre Gelenkkoordinaten und damit als Unbekannte der Schließbedingungen definiert werden, indem gemäß Abb. 8.10 ein gedachtes Gelenk mit dem Freiheitsgrad sechs, bestehend aus drei Schubgelenken und einem Kugelgelenk (hier aufgebaut aus drei Drehgelenken), so eingeführt wird, dass dessen Gelenkkoordinaten gerade die Lagekoordinaten des Radträgers sind. Das Mehrkörpersystem besitzt dann $n = 6$ Körper (ohne Rad), $n_{\mathrm{G}} = 11$ Gelenke und damit $n_{\mathrm{S}} = 5$ Schleifen. Mit den fünf Lenkern als den sekundären Gelenken (Pendelstützen) ergeben sich insgesamt fünf Schließbedingungen in den sechs primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta} = [\, r_x \quad r_y \quad r_z \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \,]^{\mathrm{T}}$,

$$g_i^{\ell}(r_x, r_y, r_z, \alpha, \beta, \gamma) = 0\,, \qquad i = \mathrm{I}, \ldots, \mathrm{V}\,. \tag{8.101}$$

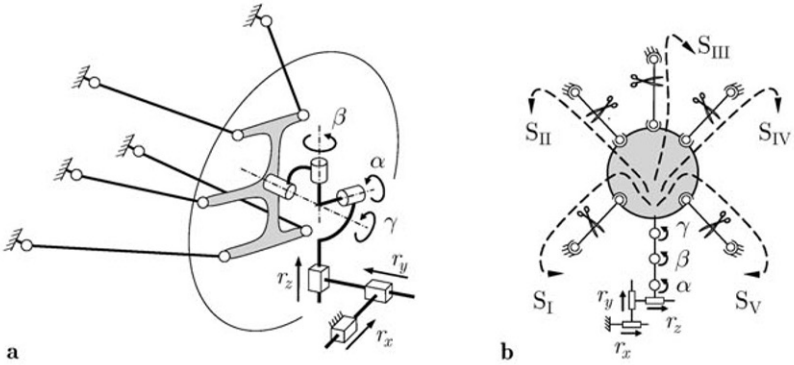


Abb. 8.10 Radführung mit fünf Stablenkern.
a Kinematisches Modell mit $n_{\mathrm{S}} = 5$ Schleifen. **b** Topologie

8.2.5 Explizite Schließbedingungen

Die expliziten Schließbedingungen liefern die Gelenkkoordinaten des Mehrkörpersystems in Abhängigkeit von den Minimalkoordinaten, vgl. (8.22). Sie werden durch Auflösen der impliziten Schließbedingungen nach den abhängigen Gelenkkoordinaten erhalten. Wie bereits bei der Einzelschleife ist eine analytische Lösung nur in Sonderfällen möglich, während i. Allg. nur die numerische Lösung bleibt. In Anlehnung an die Vorgehensweise bei der Einzelschleife in Abschnitt 8.1.2 werden die $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}}$ primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ aufgeteilt in

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} f_{\mathrm{L}} = f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} - b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} \\ b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{unabhängige Gelenkkoordinaten} \\ \text{abhängige Gelenkkoordinaten.} \end{matrix} \tag{8.102}$$

Die Anzahl f_{L} der unabhängigen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ entspricht dem Lage-Freiheitsgrad des Systems. Die unabhängigen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ sind die Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$.

Die f^{o} primären Gelenkgeschwindigkeiten werden in abhängige und unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten aufgeteilt,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{ll} f = f^{\mathrm{o}} - b^{\mathrm{s}} & \text{unabhängige Gelenkgeschwindigkeiten} \\ b^{\mathrm{s}} & \text{abhängige Gelenkgeschwindigkeiten.} \end{array} \tag{8.103}$$

Die Anzahl f der unabhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$ entspricht dem Freiheitsgrad des Systems. Die unabhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$ sind die Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$. Bei holonomen Systemen ist wieder $f = f_{\mathrm{L}}$.

Die expliziten Schließbedingungen haben die Formen (8.22), (8.26) und (8.33),

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}, t) \,, \tag{8.104}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}^{\ell}(\boldsymbol{q}, t)\, \boldsymbol{s} \;+\; \bar{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q}, t) \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{J}^{\ell} \in \mathbb{R}^{f^{\mathrm{o}}, f} \,, \tag{8.105}$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}^{\ell}(\boldsymbol{q}, t)\, \dot{\boldsymbol{s}} \;+\; \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}, t) \qquad \text{mit} \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} = \dot{\boldsymbol{J}}^{\ell}\, \boldsymbol{s} + \dot{\bar{\boldsymbol{\eta}}} \,. \tag{8.106}$$

Sie erfüllen für beliebige Werte der Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ und Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s}$ und deren Ableitungen $\dot{\boldsymbol{s}}$ die impliziten Schließbedingungen (8.78), (8.83) und (8.93). Damit gilt die Orthogonalitätsbeziehung

$$\boldsymbol{G}^{\ell}\, \boldsymbol{J}^{\ell} = \boldsymbol{0} \,. \tag{8.107}$$

Der Zusammenhang zwischen $\boldsymbol{q}$ und $\boldsymbol{s}$ wird durch kinematische Bewegungsgleichungen der Form (8.29) beschrieben,

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q}, t)\, \boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{q}, t) \,. \tag{8.108}$$

Die (f_{L}, f)-Matrix $\overline{\boldsymbol{H}}$ und der f_{L}-Vektor $\bar{\boldsymbol{h}}$ werden entsprechend (8.30) und (8.31) aus der Matrix $\boldsymbol{H}$ der kinematischen Bewegungsgleichungen (8.73) und der Terme $\boldsymbol{J}^{\ell}$ und $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ der expliziten Schließbedingungen (8.105) berechnet.

Häufig kann ein *Auflösungsfluß* für die Berechnung der abhängigen primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{a}}$ ermittelt werden. Der Auflösungsfluß hängt nicht nur von der Festlegung der unabhängigen Schleifen (Abschnitt 8.2.3), sondern auch von der Definition der Minimalkoordinaten ab.

Beispiel Für den Mechanismus zur Positionierung der Taumelscheibe eines Hubschraubers aus Abb. 8.8 (Seite 313) lauteten die impliziten Schließbedingungen (8.96) und (8.97)

$$g_{\mathrm{I}}^{\ell}(\,\beta_1, \beta_2, \quad \beta_4, \beta_5) \;=\; 0 \qquad (1 \text{ Bindung}) \,, \tag{8.109}$$

$$g_{\mathrm{II}}^{\ell}(\beta_1, \quad \beta_3, \beta_4, \beta_5) \;=\; 0 \qquad (1 \text{ Bindung}) \,. \tag{8.110}$$

Der Aufwand für die Auflösung nach den abhängigen Gelenkkoordinaten hängt von der Definition der Minimalkoordinaten ab:

- Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q} = [\,\beta_1 \quad \beta_4 \quad \beta_5\,]^{\mathrm{T}}$:
  Die Schließbedingungen (8.109) und (8.110) können analytisch nach den abhängigen Winkeln β_2 bzw. β_3 aufgelöst werden, indem die Gleichungen jeweils auf die Form (8.50) gebracht werden. Wird die Anordnung in Abb. 8.8 als parallelkinematischer Roboter mit den angetriebenen Roboterkoordinaten β_1, β_2 und β_3 und der Taumelscheibe als der zu führenden Plattform mit den Lagekoordinaten β_1, β_4 und β_5 angesehen, so entspricht diese Berechnung der kinematischen Rückwärtstransformation.
- Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q} = [\,\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\,]^{\mathrm{T}}$:
  Die Schließbedingungen (8.109) und (8.110) bilden ein nichtlineares Gleichungssystem für die abhängigen Winkel β_4 und β_5, das numerisch mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens aufgelöst werden kann, siehe Abschnitt 5.7.3. Diese Berechnung entspricht der kinematischen Vorwärtstransformation eines parallelkinematischen Roboters.

Die Bewegungsgleichungen werden damit günstiger in den Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q} = [\,\beta_1 \quad \beta_4 \quad \beta_5\,]^{\mathrm{T}}$ aufgestellt, da dann keine iterative Lösung der Schließbedingungen erforderlich ist.

Aufbauend auf dem Verfahren von Kecskeméthy und Hiller [48] für die Aufstellung der expliziten Schließbedingungen einer einzelnen Schleife beschreibt Krupp [53] die automatisierte symbolische Erzeugung der expliziten Bindungen mehrschleifiger Systeme auf der Grundlage einer graphentheoretischen Analyse des Schleifensystems.

Zusammenstellung der Bindungen Die Bindungen in einem geschlossenen Mehrkörpersystem sind in Tabelle 8.3 zusammengefasst.

Tabelle 8.7 Bindungen in einem geschlossenen Mehrkörpersystem, Lageebene (L), Geschwindigkeitsebene (G), Beschleunigungsebene (B)

	Implizite sekundäre Bindungen	Explizite primäre Bindungen (Baum)	Implizite Schließbedingungen	Explizite Schließbedingungen
L	(8.76): $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}, t) = \boldsymbol{0}$	(7.18)/(8.77): $\hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{\beta}, t)$	(8.78): $\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{0}$	(8.104): $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}, t)$
G	(8.81): $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$	(7.26)/(8.82): $\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{J}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}$	(8.83): $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{0}$	(8.105): $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}^{\ell}\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{\eta}}$
B	(8.91): $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$	(7.35)/(8.92): $\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}$	(8.93): $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{0}$	(8.106): $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}^{\ell}\,\dot{\boldsymbol{s}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}$
			Orthogonalität (8.107): $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\boldsymbol{J}^{\ell} = \boldsymbol{0}$	

8.3 Dynamik geschlossener Mehrkörpersysteme

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen werden in den Impuls- und Drallsätzen der freigeschnittenen Körper die Reaktionskraftwinder an den sekundären Gelenken berücksichtigt.

8.3.1 Sekundäre Reaktionskraftwinder

Am sekundären Gelenk der j-ten Schleife wirken in den Bindungs-Koordinatensystemen $\mathcal{K}_{a,j}$ und $\mathcal{K}_{b,j}$ die *sekundären Reaktionskraftwinder* $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_{a,j}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_{b,j}$. Sie können mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingungen gemäß (6.98) unter Verwendung der Bindungsmatrizen $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{a,j}$ und $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}_{b,j}$ der sekundären Bindungen (8.80) und der b^{s}_j minimalen Koordinaten der sekundären Reaktionskraftwinder $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}_j$ ausgedrückt werden,

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_{a,j} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_{b,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{a,j} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{b,j} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}_j \,, \qquad j = \mathrm{I}, \ldots, n_{\mathrm{S}} \,. \tag{8.111}$$

In einem System mit mehreren Schleifen werden die expliziten Reaktionsbedingungen (8.111) unter Verwendung der (b^{s},$6n$)-Matrix der sekundären Bindungen $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}$ aus (8.81) zu den expliziten Reaktionsbedingungen des Gesamtsystems

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \tag{8.112}$$

zusammengefasst. Die expliziten Reaktionsbedingungen liefern die resultierenden sekundären Reaktionskraftwinder an allen Körpern des Systems in Abhängigkeit von den b^{s} sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$.

Für das bereits in Abschnitt 8.2.2 betrachtete Beispiel in Abb. 8.11 mit $n = 7$ Körpern und $n_{\mathrm{S}} = 3$ Schleifen lauten die expliziten Reaktionsbedingungen (8.112) mit der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}$ aus (8.86)

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_4 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_6 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_6 \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{2,\mathrm{II}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{3,\mathrm{I}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{4,\mathrm{I}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{4,\mathrm{III}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{6,\mathrm{III}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}_{7,\mathrm{II}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{I}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{III}} \end{bmatrix} \tag{8.113}$$

$$\rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}} \quad = \quad \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}} \quad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \quad .$$

An den Körpern $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_5$ wirken keine sekundären Reaktionskraftwinder, weil sich an diesen Körpern keine sekundären Gelenke befinden. Der sekundäre Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_4^{\mathrm{s}}$ am Körper $\mathcal{K}_4$ setzt sich aus den sekundären Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}_{4,\mathrm{I}}^{\mathrm{s}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}_{4,\mathrm{III}}^{\mathrm{s}}$ der Schleifen S_{I} und S_{III} zusammen,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_4^{\mathrm{s}} = \underbrace{\boldsymbol{G}_{4,\mathrm{I}}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{s}}}_{\hat{\boldsymbol{f}}_{4,\mathrm{I}}} + \underbrace{\boldsymbol{G}_{4,\mathrm{III}}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{s}}}_{\hat{\boldsymbol{f}}_{4,\mathrm{III}}} \,. \tag{8.114}$$

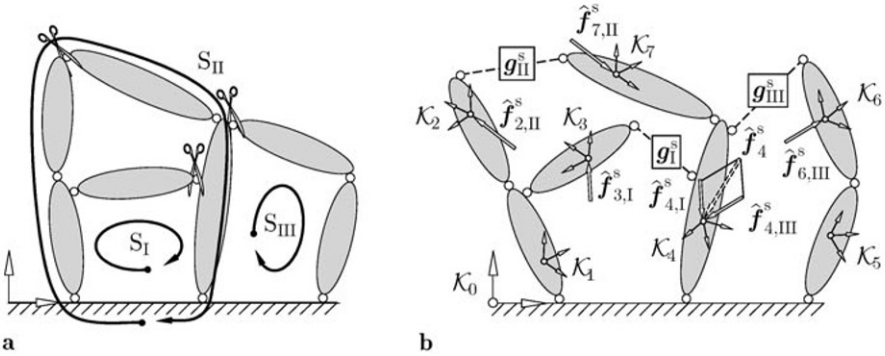


Abb. 8.11 System mit $n_{\mathrm{S}} = 3$ Schleifen aus Abb. 8.7. **a** Schleifen und sekundäre Gelenke. **b** Aufspannender Baum mit sekundären Reaktionskraftwindern

8.3.2 Impuls- und Drallsätze

Die in Matrizenform zusammengefassten Impuls- und Drallsätze bzw. NEWTON-EULER-Gleichungen der freigeschnittenen Körper (7.81) lauten

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1 & \dots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \dots & \widehat{\boldsymbol{M}}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{a}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{c}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{e}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{r}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{f}}_n^{\mathrm{r}} \end{bmatrix} \tag{8.115}$$

$$\rightarrow \qquad \widehat{\boldsymbol{M}} \qquad \hat{\boldsymbol{a}} \quad = \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} \quad .$$

Die Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ an den Körpern gehen bei offenen Systemen auf die Reaktionskraftwinder an den primären Gelenken $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ zurück, die jetzt als die *primären Reaktionskraftwinder* bezeichnet werden. Gemäß (7.66) galt $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$. Bei geschlossenen Systemen kommen die Reaktionskraftwinder der sekundären Gelenke $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}$ aus (8.112) hinzu,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \,. \tag{8.116}$$

8.4 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten

Für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen geschlossener Mehrkörpersysteme in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ werden ausgehend von den vorliegenden Bestimmungsgleichungen die nichtrekursive und die rekursive Auflösung nach den unbekannten Gelenkbeschleunigungen und Reaktionskoordinaten beschrieben.

8.4.1 Bestimmungsgleichungen geschlossener MKS

Die in den Abschnitten 8.2 und 8.3 hergeleiteten Bestimmungsgleichungen sind in Tabelle 8.8 zusammengefasst.

Tabelle 8.8 Bestimmungsgleichungen für die Bewegungsgleichungen geschlossener Mehrkörpersysteme in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$

Kinematische Bewegungsgleichungen:

(8.73) : $\dot{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta}$

Nebenbedingungen bei EULER-Parametern als primären Gelenkkoordinaten:

(8.74) : $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}$

Kinetische Differentialgleichungen:

(8.115) : $\widehat{\boldsymbol{M}}\,\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$

Körper-Reaktionskraftwinder und primäre und sekundäre Gelenk-Reaktionskraftwinder:

(8.116) : $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}$

Explizite primäre Gelenkbindungen (Vorgängerkörper $\mathcal{K}_{p(i)}$ zum Körper $\mathcal{K}_i$):

(7.16) : $\hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i(\hat{\boldsymbol{r}}_{p(i)}, \boldsymbol{\beta}_i, t)\,, \quad i = 1, \ldots, n$

(7.20) : $\boldsymbol{B}\,\hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{rel}}\,,$

(7.33) : $\boldsymbol{B}\,\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{C}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}}$

Implizite Reaktionsbedingungen für die primären Gelenk-Reaktionskraftwinder:

(7.68) : $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\,\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{0}$

Implizite sekundäre Bindungen:

(8.76) : $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}, t) = \boldsymbol{0}$

(8.81) : $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{v}} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$

(8.91) : $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{a}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$

Implizite Schließbedingungen:

(8.78) : $\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, t) = \boldsymbol{0}$

(8.83) : $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell} = \boldsymbol{0}$

(8.93) : $\boldsymbol{G}^{\ell}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \boldsymbol{0}$

Explizite Reaktionsbedingungen für die sekundären Gelenk-Reaktionskraftwinder: (minimale sekundäre Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$):

(8.112) : $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$

Für offene Mehrkörpersysteme wurde das lineare Gleichungssystem (7.93) für die Berechnung der absoluten Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$, der primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und der primären Reaktionskraftwinder $\boldsymbol{f}^{\mathrm{p}}$ aufgestellt. Für geschlossene Systeme wird dieses Gleichungssystem erweitert, indem in den kinetischen Gleichungen (8.115) die sekundären Reaktionskraftwinder durch (8.116) berücksichtigt und die impliziten sekundären Bindungen auf Beschleunigungsebene (8.91) hinzugefügt werden:

$$\begin{array}{l} (8.115),\ (8.116): \\ (7.33): \\ (7.68): \\ (8.91): \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hline -\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \hline \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \\ \hline \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}} \end{array}\right] \begin{array}{l} 6n \text{ Gln.} \\ 6n \text{ Gln.} \\ f^{\mathrm{o}} \text{ Gln.} \\ b^{\mathrm{s}} \text{ Gln.} \end{array} \tag{8.117}$$

Hierbei ist wieder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} = \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{e}} + \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{c}}$. Zu einem Zeitpunkt t mit bekannter Lage $\boldsymbol{\beta}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}$ können aus (8.117) die $6n$ Koordinaten der Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$, die $6n$ Koordinaten der primären Körper-Reaktionskraftwinder $\boldsymbol{f}^{\mathrm{r}}$, die f^{o} Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und die b^{s} sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ berechnet werden. Wie bei offenen Systemen kann das Gleichungssystem (8.117) nichtrekursiv oder rekursiv gelöst werden. Diese Lösungswege werden in den Abschnitten 8.4.2 und 8.4.3 beschrieben.

Werden die primären Gelenkkordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und -geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ zum Zustandsvektor $\boldsymbol{x}$ zusammengefasst, so liegt mit den kinematischen Bewegungsgleichungen (8.73) und den aus dem linearen Gleichungssystem (8.117) zu berechnenden primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ das folgende System von Differentialgleichungen erster Ordnung in $\boldsymbol{x}$ vor, vgl. (5.71),

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta})\,\boldsymbol{\eta} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t) \quad . \end{array} \tag{8.118}$$

Für die Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und -geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ gelten die Schließbedingungen auf Lageebene (8.78) und auf Geschwindigkeitsebene (8.83), Die Differentialgleichungen (8.118) und die algebraischen Gleichungen (8.78) und (8.83) bilden damit ein System differential-algebraischer Bewegungsgleichungen. Die mit den Schließbedingungen (8.78) und (8.83) konsistenten Anfangsbedingungen für die primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und -geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ lauten (Anfangszeitpunkt t_0)

$$\boldsymbol{\beta}(t_0) = \boldsymbol{\beta}_0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}_0, t_0) = \boldsymbol{0}\ , \tag{8.119}$$

$$\boldsymbol{\eta}(t_0) = \boldsymbol{\eta}_0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}_0, t_0)\,\boldsymbol{\eta}_0 + \bar{\boldsymbol{\gamma}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}_0, t_0) = \boldsymbol{0}\ . \tag{8.120}$$

Den Ablauf der Berechnung der rechten Seite $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t)$ der Zustandsgleichungen (8.118) zeigt Abb. 8.12.

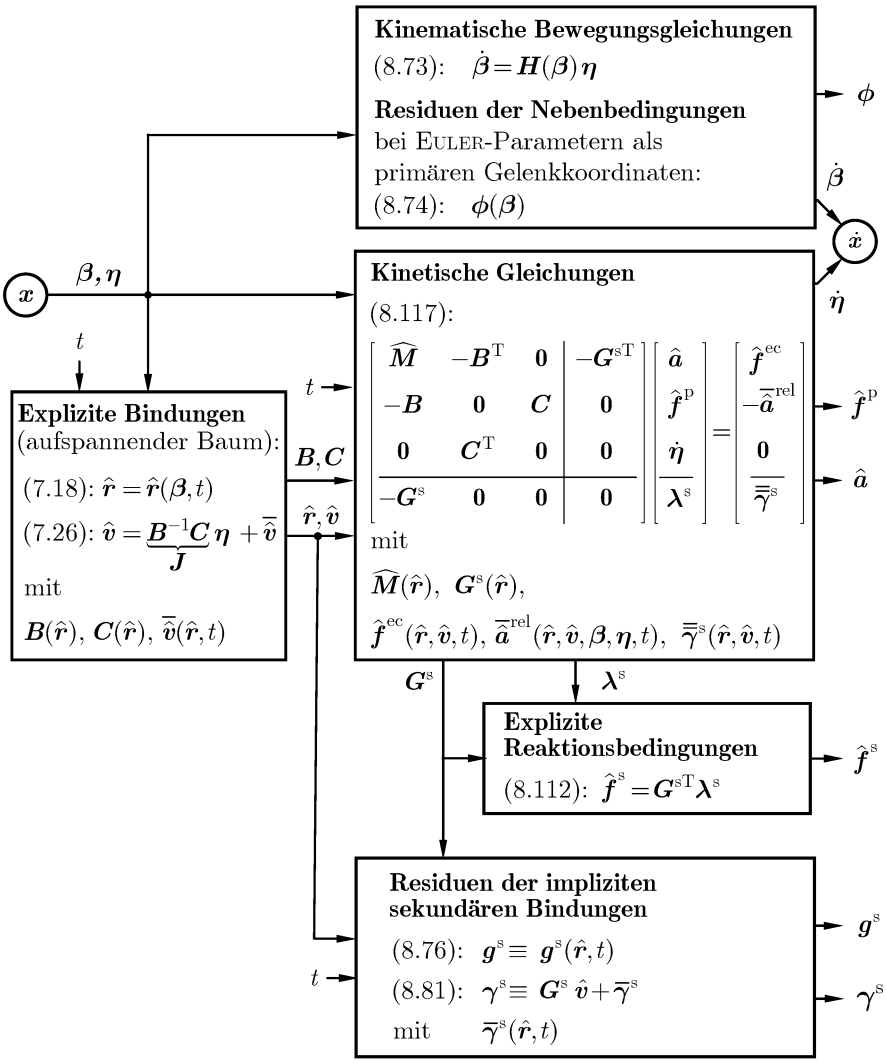


Abb. 8.12 Berechnung der Zustandsgleichungen (8.118)

Neben den zeitlichen Änderungen der primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und -geschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ werden die eliminierten Absolutbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$ und die primären und sekundären Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}$ berechnet. Weiterhin werden die Residuen $\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}$ und $\boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}}$ der sekundären Bindungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene (8.76) und (8.81) sowie das Residuum $\boldsymbol{\phi}$ der Nebenbedingungen (8.74) evt. verwendeter EULER-Parameter als primäre Gelenkkoordinaten berechnet, die für die in Abschnitt 5.7.2 beschriebene numerische Stabilisierung der Bindungen verwendet werden können.

8.4.2 Nichtrekursiver Formalismus für geschlossene MKS

Bei der nichtrekursiven Auflösung des linearen Gleichungssystems (8.117) können die Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$ und die primären Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ in der gleichen Weise wie bei offenen Systemen in Abschnitt 7.4 elimimiert werden. Hierzu werden die kinetischen Gleichungen (8.115) nach den primären Reaktionskraftwindern $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ umgestellt und in die impliziten Reaktionsbedingungen (7.68) eingesetzt,

$$\underbrace{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}}\left(\widehat{\boldsymbol{M}}\,\hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} - \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}\right) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.121}$$

Hierbei tritt die JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}$ des aufspannenden Baumes aus (7.27) auf. Einsetzen der expliziten Beschleunigungsbindungen aus (7.35)

$$\hat{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{J}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{C}\,, \quad \bar{\hat{\boldsymbol{a}}} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \tag{8.122}$$

in (8.121) ergibt die kinetischen Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{\eta}}$

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},t)\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.123}$$

In (8.123) stehen die (f^{o},f^{o})-Massenmatrix $\boldsymbol{M}$ gemäß (7.103), der f^{o}-Vektor der verallgemeinerten Zentrifugal- und Kreiselkräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}$ gemäß (7.104) und der f^{o}-Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}$ gemäß (7.105).

Die auf die Gelenkgeschwindigkeiten des aufspannenden Baums bezogenen, verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ werden mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingungen

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta},t)\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} = (\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{J})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \tag{8.124}$$

durch die Matrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ gemäß (8.84) und die minimalen Koordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ der sekundären Reaktionskraftwinder ausgedrückt.

Einsetzen der expliziten Beschleunigungsbindungen des aufspannenden Baumes (8.122) in die impliziten sekundären Bindungen (8.91) liefert die impliziten Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene aus (8.93)

$$\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},t)\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.125}$$

Zu einem Zeitpunkt t mit bekannter Lage $\boldsymbol{\beta}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}$ können damit die f^{o} primären Gelenkbeschleunigung $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und die b^{s} Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus (8.123) und (8.125) berechnet werden, indem das folgende System von $f^{\mathrm{o}} + b^{\mathrm{s}}$ linearen Gleichungen gelöst wird, vgl. (5.65):

$$\begin{array}{l} (8.123): \\ (8.125): \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & -\boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G}^{\ell} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} \end{bmatrix} \begin{array}{l} f^{\mathrm{o}}\ \text{Gln.} \\ b^{\mathrm{s}}\ \text{Gln.} \end{array} \tag{8.126}$$

Gemäß (5.67) ist das lineare Gleichungssystem (8.126) eindeutig nach $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ auflösbar, wenn $\boldsymbol{M}$ positiv definit ist und die $(b^{\mathrm{s}},f^{\mathrm{o}})$-Matrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ den vollen Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) = b^{\mathrm{s}}$ besitzt.

Mit $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus (8.126) werden die sekundären Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}$ mit Hilfe von (8.112) bestimmt. Die primären Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ werden aus (8.116) mit $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}}$ aus (8.115) berechnet,

$$\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{s}}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{r}} = \widehat{\boldsymbol{M}}\,\hat{\boldsymbol{a}} - \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \text{ und } \hat{\boldsymbol{a}} \text{ aus (8.122)}\,. \tag{8.127}$$

Bei überbestimmten Systemen weist die Matrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^{\ell}$ in einem großen Bewegungsbereich einen konstanten Rangabfall auf, also $\mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell}) < b^{\mathrm{s}}$, vgl. Abschnitt 8.1.1. Die sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ können dann aus dem linearen Gleichungssystem (8.126) nicht eindeutig berechnet werden. Entsprechend der Anzahl der redundanten Bindungen $b^{\mathrm{sr}} = b^{\mathrm{s}} - \mathrm{r}(\boldsymbol{G}^{\ell})$ ist das System b^{sr}-fach statisch unbestimmt. Rein [83] zeigt, dass das lineare Gleichungssystem (8.126) in diesem Fall dennoch eine eindeutige Lösung für die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ besitzt.

8.4.3 Rekursiver Formalismus für geschlossene MKS

Das in Abschnitt 7.5 beschriebene Verfahren zur rekursiven Berechnung der primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$, der Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}_i$ und der Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ eines offenen Mehrkörpersystems kann auf die Lösung des Systems der linearen Bestimmungsgleichungen geschlossener Mehrkörpersysteme (8.117) erweitert werden. Dieser Lösungsweg wurde von Wehage [108] angegeben, wobei dort für jede Schleife sechs sekundäre Bindungen, entsprechend dem Schnitt an einem Körper, verwendet werden. Das im Folgenden beschriebene modifizierte Verfahren für die im Gleichungssystem (8.117) berücksichtigten allgemeinen sekundären Gelenke wurde von Rein [84] entwickelt.

Lösungsschritte Das lineare Gleichungssystem (8.117) wird in drei Schritten nach den Unbekannten $\hat{\boldsymbol{a}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$, $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aufgelöst.

Schritt 1 Die drei oberen Blockmatrizengleichungen von (8.117) werden zu dem linearen Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \tag{8.128}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{D}$ angeordnet. Aus (8.128) können die Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}}$, die primären Gelenk-Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}}$ und die

primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ in Abhängigkeit von den noch unbekannten sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ berechnet werden,

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{p}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{po}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{L} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \tag{8.129}$$

mit

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{po}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{L} \end{bmatrix} = \boldsymbol{D}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} . \tag{8.130}$$

Die Vektoren $\hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{po}}$ und $\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}}$ sind die Körperbeschleunigungen, primären Gelenk-Reaktionskräfte und primären Gelenkbeschleunigungen, die sich ohne sekundäre Gelenk-Reaktionskräfte, also für $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$, ergeben würden.

Der jeweils i-te Spaltenvektor der Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{L}$ ist der Beitrag des gedachten Wertes der sekundären Reaktionskoordinate $\lambda_i^{\mathrm{s}} = 1$ zu den Körperbeschleunigungen, primären Gelenk-Reaktionskräften und primären Gelenkbeschleunigungen.

Schritt 2 Die Körperbeschleunigungen $\hat{\boldsymbol{a}} = \hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus der oberen Gleichung von (8.129) werden in die impliziten sekundären Bindungen (8.91),

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{a}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}\,, \tag{8.131}$$

eingesetzt. Es ergibt sich ein System von b^{s} linearen Gleichungen für die b^{s} sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$,

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} = -\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} - \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.132}$$

Schritt 3 Mit $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus (8.132) werden die Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ aus der dritten Gleichung von (8.129) berechnet,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.133}$$

Rekursive Berechnung der Lösungsterme (8.130) Um die Vektoren $\hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}}$, $\hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{po}}$, $\dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}}$ sowie die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{L}$ aus (8.130) zu berechnen, ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $1 + b^{\mathrm{s}}$ rechten Seiten zu lösen:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}} & -\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} & \boldsymbol{A} \\ \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{po}} & \boldsymbol{F} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}^{\mathrm{o}} & \boldsymbol{L} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{ec}} & \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}^{\mathrm{rel}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right] . \tag{8.134}$$

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (8.134) stimmt mit derjenigen des Gleichungssystem (7.93) offener Mehrkörpersysteme, hier des

aufspannenden Baumes, überein. Damit kann das rekursive Verfahren aus Abschnitt (7.5.1) unmittelbar für die Lösung von (8.134) angewandt werden.

Für die Verteilung der Gleichungen auf die einzelnen Körper entsprechend der Vorgehensweise in (7.115) bis (7.117) werden die Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{F}$ und $\boldsymbol{L}$ und die transponierte $(6n,b^{\mathrm{s}})$-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}$ jeweils in Teilmatrizen aufgeteilt, die den n Körpern zugeordnet sind,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}]_1 \\ \vdots \\ [\boldsymbol{A}]_n \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{F}]_1 \\ \vdots \\ [\boldsymbol{F}]_n \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{L}]_1 \\ \vdots \\ [\boldsymbol{L}]_n \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1 \\ \vdots \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_n \end{bmatrix}. \tag{8.135}$$

Die Matrizen $[\boldsymbol{A}]_i$, $[\boldsymbol{F}]_i$ und $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i$ haben jeweils die Dimension $(6, b^{\mathrm{s}})$. Die Matrizen $[\boldsymbol{L}]_i$ haben die Dimension $(f_i^{\mathrm{o}}, b^{\mathrm{s}})$ mit dem Gelenkfreiheitsgrad f_i^{o} des i-ten primären Gelenks.

Für das Beispiel in Abb. 8.11 (Seite 319) mit $n = 7$ Körpern lautet die Aufteilung der Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}$ aus (8.113)

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{2,\mathrm{II}}^{\mathrm{s\,T}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}_{3,\mathrm{I}}^{\mathrm{s\,T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}_{4,\mathrm{I}}^{\mathrm{s\,T}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{4,\mathrm{III}}^{\mathrm{s\,T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{6,\mathrm{III}}^{\mathrm{s\,T}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{II}}^{\mathrm{s\,T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1 = [\; \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \;] \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_2 = [\; \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{G}_{2,\mathrm{II}}^{\mathrm{s\,T}} \quad \boldsymbol{0} \;] \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_3 = [\; \boldsymbol{G}_{3,\mathrm{I}}^{\mathrm{s\,T}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \;] \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_4 = [\; \boldsymbol{G}_{4,\mathrm{I}}^{\mathrm{s\,T}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{G}_{4,\mathrm{III}}^{\mathrm{s\,T}} \;] \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_5 = [\; \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \;] \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_6 = [\; \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{G}_{6,\mathrm{III}}^{\mathrm{s\,T}} \;] \\ [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_7 = [\; \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{II}}^{\mathrm{s\,T}} \quad \boldsymbol{0} \;]. \end{cases} \tag{8.136}$$

Bei der rekursiven Lösung werden die Matrizen $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i$, beginnend mit den Blattkörpern des aufspannenden Baumes, in der gleichen Weise auf die jeweiligen Vorgängerkörper $\mathcal{K}_p$ zurückprojiziert wie die Kraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}}$ in der Rekursionsgleichung (7.139). Hierzu werden in (7.139) die Kräfte $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}}$ jeweils durch $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i$ ersetzt, während der Term mit $\bar{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{rel}}$ entfällt:

$$[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_p^* = [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_p + \boldsymbol{B}_{ip}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^* \, \boldsymbol{C}_i \, \boldsymbol{N}_i^{-1} \, \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}} \right) [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i^* \,. \tag{8.137}$$

Ablauf der rekursiven Berechnung Betrachtet wird ein geschlossenes Mehrkörpersystem mit n Körpern und n_{S} kinematischen Schleifen. Durch Schnitte an n_{S} sekundären Gelenken wird ein aufspannender Baum definiert. Die n Körper des aufspannenden Baumes werden so nummeriert, dass entlang aller Wege vom raumfesten System zu den Blattkörpern aufsteigende Nummernfolgen vorliegen, wobei die Ziffern von 1 bis n verwendet werden.

Zu einem Zeitpunkt t sind die primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und die primären Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ bekannt. Sie müssen mit den Schließbedingungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene (8.78) und (8.83) konsi-

stent sein. Die primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$, die primären Gelenk-Reaktionskräfte $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}}$ und die sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{s}}$ werden in den folgenden Schritten rekursiv berechnet:

1. Berechnen der Lage- und Geschwindigkeitsgrößen im aufspannenden Baum mit Hilfe der expliziten Gelenkbindungen (7.16) und (7.19),

$$\hat{\boldsymbol{r}}_i = \hat{\boldsymbol{r}}_i(\hat{\boldsymbol{r}}_p, \boldsymbol{\beta}_i, t)\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{8.138}$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{B}_{ip}\,\hat{\boldsymbol{v}}_p + \boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{\eta}_i + \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_i^{\mathrm{rel}}\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,. \tag{8.139}$$

Der Index p kennzeichnet den jeweiligen Vorgängerkörper $\mathcal{K}_p$ des Körpers $\mathcal{K}_i$. Es gilt $\hat{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{0}$ und $\hat{\boldsymbol{v}}_0 = \boldsymbol{0}$.

2. Rückprojektion der Körper-Massenmatrizen sowie der eingeprägten Kraftwinder auf die jeweiligen Vorgängerkörper, beginnend mit den Blattkörpern des aufspannenden Baumes entsprechend (7.138) und (7.139),

$$\widehat{\boldsymbol{M}}_p^* = \widehat{\boldsymbol{M}}_p + \boldsymbol{B}_{ip}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}} \right) \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{B}_{ip} \tag{8.140}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{C}_i\,,$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_p^{\mathrm{ec}*} = \hat{\boldsymbol{f}}_p^{\mathrm{ec}} + \boldsymbol{B}_{ip}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}} \right) \left(\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}} \right). \tag{8.141}$$

Zusätzlich werden die Bindungsmatrizen der sekundären Gelenkbindungen $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i$ entspechend (8.137) zurückprojiziert,

$$[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_p^* = [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_p + \boldsymbol{B}_{ip}^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{E} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{C}_i\,\boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}} \right) [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i^*\,. \tag{8.142}$$

Der Index i in (8.140) bis (8.142) läuft von n bis 2. Auf einem Verzweigungskörper werden die Massen, eingeprägten Kräfte und Bindungsmatrizen aller Nachfolgekörper zurückprojiziert und summiert.

3. Lösen des gegenüber (7.129) erweiterten Gleichungssystems für Körper $\mathcal{K}_1$ mit der auf $\mathcal{K}_1$ zurückprojizierten Bindungsmatrix $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1^*$

$$\begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{M}}_1^* & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c} \hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}} & [\boldsymbol{A}]_1 \\ \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{po}} & [\boldsymbol{F}]_1 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{o}} & [\boldsymbol{L}]_1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} & [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1^* \\ -\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{array}\right]. \tag{8.143}$$

Die Vektoren $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{o}}$, $\hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}}$ und $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{po}}$ werden daraus entsprechend (7.141), (7.142) und (7.143) berechnet,

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{N}_1^{-1}\,\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\,\left(\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_1^*\,\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \right) \qquad \text{mit} \quad \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_1^*\,\boldsymbol{C}_1\,, \tag{8.144}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{C}_1\,\dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{o}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} \qquad \text{mit} \quad \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{o}} \text{ aus (8.144)}\,, \tag{8.145}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{po}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_1^*\,\hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}} - \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*} \qquad \text{mit} \quad \hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}} \text{ aus (8.145)}\,. \tag{8.146}$$

Die Lösungen für die Matrizen $[\boldsymbol{A}]_1$, $[\boldsymbol{F}]_1$ und $[\boldsymbol{L}]_1$ haben die Form der Lösungen für die Vektoren $\dot{\boldsymbol{\eta}}_1^{\mathrm{o}}$, $\hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{po}}$ aus (8.144) bis (8.146), wenn $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{ec}*}$ durch $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1^*$ ersetzt und $\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1^{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{0}$ gesetzt wird,

$$[\boldsymbol{L}]_1 = \boldsymbol{N}_1^{-1}\,\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\,[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1^* \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{C}_1^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_1^*\,\boldsymbol{C}_1\,, \tag{8.147}$$

$$[\boldsymbol{A}]_1 = \boldsymbol{C}_1\,[\boldsymbol{L}]_1 \qquad \text{mit} \qquad [\boldsymbol{L}]_1 \text{ aus (8.147)}\,, \tag{8.148}$$

$$[\boldsymbol{F}]_1 = \widehat{\boldsymbol{M}}_1^*\,[\boldsymbol{A}]_1 - [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_1^* \qquad \text{mit} \qquad [\boldsymbol{A}]_1 \text{ aus (8.148)}\,. \tag{8.149}$$

4. Berechnen der eliminierten Größen, beginnend am Körper $\mathcal{K}_2$. Der Index i läuft von 2 bis n. Die Größen des aufspannenden Baumes ohne die Beiträge der sekundären Reaktionskraftwinder lauten

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\left(\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*} - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\left(\boldsymbol{B}_{ip}\,\hat{\boldsymbol{a}}_p^{\mathrm{o}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}}\right)\right) \qquad \text{mit } \boldsymbol{N}_i = \boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\,\widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{C}_i\,, \tag{8.150}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{o}} = \boldsymbol{B}_{ip}\,\hat{\boldsymbol{a}}_p^{\mathrm{o}} + \boldsymbol{C}_i\,\dot{\boldsymbol{\eta}}_i^{\mathrm{o}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}} \qquad \text{mit} \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^{\mathrm{o}} \text{ aus (8.150)}\,, \tag{8.151}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{po}} = \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\hat{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{o}} - \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*} \qquad \text{mit} \qquad \hat{\boldsymbol{a}}_i^{\mathrm{o}} \text{ aus (8.151)}\,. \tag{8.152}$$

Die Einflussmatrizen der sekundären Reaktionskoordinaten werden aus (8.150) bis (8.152) erhalten, indem jeweils $\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{ec}*}$ durch $[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i^*$ ersetzt und $\bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_i^{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{0}$ gesetzt wird,

$$[\boldsymbol{L}]_i = \boldsymbol{N}_i^{-1}\,\boldsymbol{C}_i^{\mathrm{T}}\left([\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i^* - \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,\boldsymbol{B}_{ip}\,[\boldsymbol{A}]_p\right)\,, \tag{8.153}$$

$$[\boldsymbol{A}]_i = \boldsymbol{B}_{ip}\,[\boldsymbol{A}]_p + \boldsymbol{C}_i\,[\boldsymbol{L}]_i \qquad \text{mit} \qquad [\boldsymbol{L}]_i \text{ aus (8.153)}\,, \tag{8.154}$$

$$[\boldsymbol{F}]_i = \widehat{\boldsymbol{M}}_i^*\,[\boldsymbol{A}]_i - [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s\,T}}]_i^* \qquad \text{mit} \qquad [\boldsymbol{A}]_i \text{ aus (8.154)}\,. \tag{8.155}$$

5. Auflösen des linearen Gleichungssystems (8.132)

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} = -\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} - \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\mathrm{s}} \tag{8.156}$$

mit der $(b^{\mathrm{s}},b^{\mathrm{s}})$-Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}\,\boldsymbol{A}$ nach den b^{s} sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ unter Verwendung von

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}} = \left[\;[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}]_1\;\;\ldots\;\;[\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}}]_n\;\right] \text{ aus (8.135)}\,,$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{A}]_1 \\ \vdots \\ [\boldsymbol{A}]_n \end{bmatrix} \text{ aus (8.154)}\,, \qquad \hat{\boldsymbol{a}}^{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{a}}_1^{\mathrm{o}} \\ \vdots \\ \hat{\boldsymbol{a}}_n^{\mathrm{o}} \end{bmatrix} \text{ aus (8.151)}\,. \tag{8.157}$$

6. Berechnen der Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ gemäß (8.133),

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^{\mathrm{o}} + [\boldsymbol{L}]_i \, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,. \tag{8.158}$$

7. Berechnen der sekundären Gelenk-Reaktionskraftwinder

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{s}} = [\boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}]_i \, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,, \tag{8.159}$$

sowie der primären Gelenk-Reaktionskraftwinder

$$\hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{p}} = \hat{\boldsymbol{f}}_i^{\mathrm{po}} + [\boldsymbol{F}]_i \, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,. \tag{8.160}$$

gemäß (8.129). Werden die Reaktionskraftwinder nicht benötigt, so entfallen (8.152), (8.155) (8.159) und (8.160).

8.5 Bewegungsgleichungen in den Minimalkoordinaten

Mit Hilfe der expliziten Schließbedingungen werden die Bewegungsgleichungen geschlossener Mehrkörpersysteme als gewöhnliche Differentialgleichungen in den Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten aufgestellt.

8.5.1 Zustandsgleichungen

Als Minimalkoordinaten werden die unabhängigen Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ aus (8.102) und als Minimalgeschwindigkeiten die unabhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$ aus (8.103) definiert. Mit den kinematischen Bewegungsgleichungen (8.108) lauten dann die Zustandsgleichungen, vgl. (5.85),

$$\begin{array}{rcl} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q},t)\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{q},t) \\ \dot{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}(t_0) \\ \boldsymbol{s}(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_0 \\ \boldsymbol{s}_0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t) \qquad\qquad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \,. \end{array} \tag{8.161}$$

Zu einem Zeitpunkt t mit bekannter Lage $\boldsymbol{q}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{s}$ können die zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen $\dot{\boldsymbol{q}}$ und $\dot{\boldsymbol{s}}$ berechnet werden, indem dem in Abb. 8.12 dargestellten Berechnungsablauf die expliziten Schließbedingungen auf Lage- und Geschwindigkeitsebene (8.104) und (8.105) gemäß Abb. 8.13 vorgeschaltet werden. Die zeitlichen Änderungen der Zustandsgrößen $\dot{\boldsymbol{q}}$ und $\dot{\boldsymbol{s}}$ sind in den Vektoren der berechneten zeitlichen Änderungen der primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ enthalten.

Das lineare Gleichungssystem (8.117) kann nichtrekursiv oder rekursiv gelöst werden. Gegenüber der Formulierung der Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten ist die Einhaltung der Schließbedingungen auf

Lage- und Geschwindigkeitsebene durch die expliziten Schließbedingungen (8.104) und (8.105) sichergestellt, so dass die Berechnung der entsprechenden Residuen entfällt. Die Zustandsgleichungen (8.161) können daher mit einem Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen numerisch integriert werden.

Die Formulierung der Bewegungsgleichungen in Minimalkoordinaten ist insbesondere dann günstig, wenn die expliziten Schließbedingungen auf Lageebene (8.104) analytisch aufgestellt werden können. Ist dies nicht der Fall, so sind die abhängigen primären Gelenkkoordinaten innerhalb der Auswertung der rechten Seite von (8.161) numerisch mit Hilfe des NEWTON-RAPHSON-Verfahrens zu berechnen, vgl. Abschnitt 5.7.3.

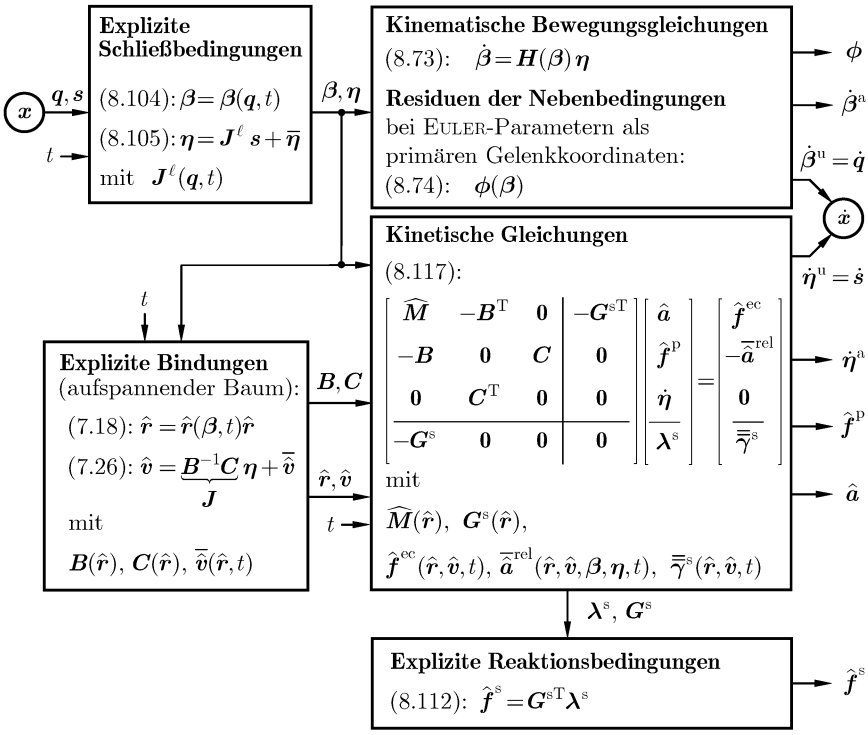


Abb. 8.13 Berechnung der Zustandsgleichungen (8.161)

8.5.2 Minimalform der Bewegungsgleichungen

Für die Berechnung der Zeitableitungen der Minimalgeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{s}}$ in den Zustandsgleichungen (8.161) können die kinetischen Bewegungsgleichun-

gen in die Minimalform

$$\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q},t)\,\dot{\boldsymbol{s}} = \bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t) + \bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t) \tag{8.162}$$

gebracht werden. Die Bewegungsgleichung (8.162) enthält die (f,f)-Massenmatrix $\overline{\boldsymbol{M}}$ sowie die f-Vektoren der verallgemeinerten CORIOLIS-Kräfte $\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}}$ und der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte $\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}$.

Für die Aufstellung von (8.162) wird von den in Tabelle 8.9 zusammengestellten Bestimmungsgleichungen ausgegangen.

Tabelle 8.9 Bestimmungsgleichungen für die Bewegungsgleichungen geschlossener Mehrkörpersysteme in den Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten

Kinematische Bewegungsgleichungen (minimale Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{u}}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}}$):	
(8.108) :	$\dot{\boldsymbol{q}} = \overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q},t)\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{q},t)$
Kinetische Differentialgleichungen: (primäre Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$):	
(8.123) :	$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta},t)\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta},t) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$
Explizite Schließbedingungen:	
(8.104) :	$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q},t)$
(8.105) :	$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}^{\ell}(\boldsymbol{q},t)\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{q},t)$
(8.106) :	$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}^{\ell}(\boldsymbol{q},t)\,\dot{\boldsymbol{s}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t)$
Implizite Reaktionsbedingungen für die verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte:	
(8.163) :	$\boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}$

Für die verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ in (8.123) gelten implizite Reaktionsbedingungen. Sie werden erhalten, indem die expliziten Reaktionsbedingungen (8.124), $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ von links mit $\boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}$, multipliziert werden. Unter Berücksichtigung der Orthogonalitätsbeziehung für die Schließbedingungen (8.107) lauten sie

$$\boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \underbrace{\boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}}}_{\boldsymbol{0}}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \qquad \rightarrow \qquad \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.163}$$

In Anlehnung an (5.76) und an (7.94) kann ein System von $f^{\mathrm{o}} + f^{\mathrm{o}} + f$ linearen Gleichungen für die f^{o} primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$, die f^{o} verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ und die f Zeitableitungen der Minimalgeschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{s}}$ zusammengestellt werden,

$$\begin{array}{l} (8.123): \\ (8.106): \\ (8.163): \end{array} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{\ell} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} \\ \dot{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \\ -\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{array}{l} f^{\mathrm{o}}\ \text{Gln.} \\ f^{\mathrm{o}}\ \text{Gln.} \\ f\ \text{Gln.} \end{array} \tag{8.164}$$

Das lineare Gleichungssystem (8.164) wird gelöst, indem die kinetischen Gleichungen (8.123) nach $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ umgestellt und in die impliziten Reaktionsbedingungen (8.163) eingesetzt werden. Erhalten wird die Projektionsgleichung

$$\boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{M}\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}\,. \tag{8.165}$$

Werden weiterhin die expliziten Schließbedingungen (8.104), (8.105) und (8.106) in (8.165) eingesetzt, so werden die kinetischen Bewegungsgleichungen in den Minimalgeschwindigkeiten (8.162) erhalten mit der symmetrischen, positiv definiten (f,f)-Massenmatrix

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}^{\ell}\,, \tag{8.166}$$

dem f-Vektor der verallgemeinerten CORIOLIS-Kräfte

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}} = -\boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{M}\,\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} + \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} \tag{8.167}$$

und dem f-Vektor der verallgemeinerten eingeprägten Kräfte

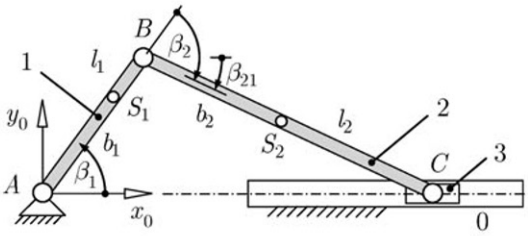
$$\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}\,. \tag{8.168}$$

Mit den kinematischen Bewegungsgleichungen (8.108) und den kinetischen Bewegungsgleichungen (8.162) lauten die Zustandsgleichungen (8.161)

$$\begin{array}{lcl} (8.108): & \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} \\ \dot{\boldsymbol{s}} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{q},t)\,\boldsymbol{s} + \bar{\boldsymbol{h}}(\boldsymbol{q},t) \\ \overline{\boldsymbol{M}}^{-1}(\boldsymbol{q},t)\,\big(\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t) + \bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{s},t)\big) \end{bmatrix} \\ (8.162): & & \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{x}} = & \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x},t)\,. \end{array} \tag{8.169}$$

8.6 Dynamik eines ebenen Schubkurbelgetriebes

Als ein erstes Beispiel zur Dynamik geschlossener Mehrkörpersysteme wird die in Abb. 8.14 gezeigte ebene Schubkurbel betrachtet.



Kurbel 1, Koppel 2 mit $(i = 1, 2)$:
- Längen l_i $(l_2 > l_1)$
- Massenmittelpunkte S_i mit Abständen b_i
- Massen m_i
- Trägheitsmomente θ_i bzgl. S_i

Abb. 8.14 Ebene Schubkurbel

Der Mechanismus besteht aus dem Gestell 0, der Kurbel 1 und der Koppel 2. In den Punkten A und B sind Drehgelenke. Das Gelenk im Punkt C ist aus einem Schubgelenk und einem Drehgelenk zusammengesetzt und hat damit den Freiheitsgrad zwei. Der Gleitstein 3 wird als masseloser Zwischenkörper dieses Gelenks angesehen. Mit $n = 2$ Körpern und insgesamt vier Gelenkfreiheitsgraden in der Bewegungsebene hat der ebene Mechanismus gemäß (6.16) den Freiheitsgrad $f = f_{\mathrm{L}} = 1$.

8.6.1 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten

Primäre Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten Wird die Schleife z.B. im Gelenk C geschnitten, so entsteht der in Abb. 8.15 gezeigte aufspannende Baum mit den $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = f^{\mathrm{o}} = 2$ primären Gelenkkoordinaten und Gelenkgeschwindigkeiten, vgl. (8.1) bis (8.3),

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.170}$$

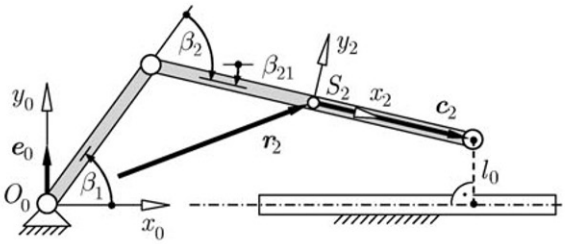


Abb. 8.15 Aufspannender Baum der Schubkurbel

Implizite Schließbedingung auf Lageebene Mit den Schnitt-Koordinatensystemen und $\mathcal{K}_a \mathrel{\hat{=}} \mathcal{K}_0$ im Gestell und $\mathcal{K}_b \mathrel{\hat{=}} \mathcal{K}_2$ im Massenmittelpunkt S_2 der Koppel gilt die $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = b^{\mathrm{s}} = 1$ sekundäre geometrische Bindung (8.76) des Typs II aus Tabelle 8.1. Sie verlangt, dass die Projektion l_0 des Vektors $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{c}_2$ auf den Vektor $\boldsymbol{e}_0$ verschwindet,

$$g^{\mathrm{s}} \equiv \boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} \left(\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{c}_2 \right) = 0 \,. \tag{8.171}$$

Mit dieser Formulierung werden redundante Bindungen vermieden. Einsetzen der expliziten Bindungen für $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_2$ gemäß (8.77)

$$\boldsymbol{e}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \, \mathrm{c}\beta_1 + l_2 \, \mathrm{c}\beta_{21} \\ l_1 \, \mathrm{s}\beta_1 - l_2 \, \mathrm{s}\beta_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.172}$$

mit dem Differenzwinkel $\beta_{21} = \beta_2 - \beta_1$ in (8.171) liefert $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = 1$ implizite Schließbedingung der Form (8.78)

$$g^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \;\equiv\; l_1\,\mathrm{s}\beta_1 - l_2\,\mathrm{s}\beta_{21} = 0\,. \tag{8.173}$$

Implizite Schließbedingung auf Geschwindigkeitsebene Die $b^{\mathrm{s}} = 1$ sekundäre kinematische Bindung in den Geschwindigkeiten der Koordinatensysteme $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_2$ lautet entsprechend (8.80) bzw. für den Bindungstyp II aus Tabelle 8.1 mit den Indizes $a \mathrel{\hat{=}} 0$ und $b \mathrel{\hat{=}} 2$ sowie $\boldsymbol{c}_0 = \boldsymbol{0}$

$$\begin{aligned} \gamma^{\mathrm{s}} &\equiv \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\,(\widetilde{\boldsymbol{r}}_2 + \widetilde{\boldsymbol{c}}_2) & -\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_0 \\ \boldsymbol{v}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_2 & \boldsymbol{e}_0^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \gamma^{\mathrm{s}} &\equiv \qquad \boldsymbol{G}_0^{\mathrm{s}} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_0 \quad + \qquad \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{s}} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_2 \quad = 0 \end{aligned} \tag{8.174}$$

mit den (1,6)-Matrizen $\boldsymbol{G}_0^{\mathrm{s}}$ und $\boldsymbol{G}_2^{\mathrm{s}}$. Einsetzen der expliziten Bindungen des aufspannenden Baumes entsprechend (8.82) mit den verschwindenden Geschwindigkeitsgrößen des ruhenden Systems $\mathcal{K}_0$, also ${}^0\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$ und ${}^0\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{0}$, und den Geschwindigkeitsgrößen von $\mathcal{K}_2$

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{\omega}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow {}^0\boldsymbol{\omega}_2 &= \quad {}^0\boldsymbol{J}_{\mathrm{R2}} \qquad \boldsymbol{\eta} \quad , \end{aligned} \tag{8.175}$$

und

$$\begin{aligned} {}^0\boldsymbol{v}_2 &= \begin{bmatrix} -l_1\,\mathrm{s}\beta_1 + b_2\,\mathrm{s}\beta_{21} & -b_2\,\mathrm{s}\beta_{21} \\ l_1\,\mathrm{c}\beta_1 + b_2\,\mathrm{c}\beta_{21} & -b_2\,\mathrm{c}\beta_{21} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow {}^0\boldsymbol{v}_2 &= \qquad {}^0\boldsymbol{J}_{\mathrm{T2}} \qquad \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \tag{8.176}$$

in (8.174) liefert die $b^{\mathrm{s}} = b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = 1$ implizite Schließbedingung auf Geschwindigkeitsebene, vgl. (8.83),

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_1\,\mathrm{c}\beta_1 + l_2\,\mathrm{c}\beta_{21} & -l_2\,\mathrm{c}\beta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \qquad &\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) \qquad \boldsymbol{\eta} \quad = 0\,. \end{aligned} \tag{8.177}$$

Die Schließbedingung (8.177) ist die zeitliche Ableitung von (8.173).

Implizite Schließbedingung auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung von (8.177) führt auf die implizite Schließbedingung auf Beschleunigungsebene, vgl. (8.93),

$$\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\gamma}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\eta}) = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{\bar{\gamma}}^{\ell} \;=\; -l_1\,\mathrm{s}\beta_1\,\dot{\beta}_1^2 + l_2\,\mathrm{s}\beta_{21}\,\dot{\beta}_{21}^2\,. \tag{8.178}$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Die kinetischen Bewegungsgleichungen des aufspannenden Baumes in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ haben die Form (8.123) mit den verallgemeinerten sekundären Reaktionskräften gemäß (8.124) und der $b^{\mathrm{s}} = 1$ sekundären Reaktionskoordinate λ^{s},

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\lambda^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.179}$$

Die Terme der Bewegungsgleichung lauten

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \theta_1 + m_1\,b_1^2 + \theta_2 + m_2\,(l_1^2 + b_2^2 + 2\,l_1\,b_2\,\mathrm{c}\beta_2) & -\theta_2 - m_2\,l_1\,b_2\,\mathrm{c}\beta_2 \\ -\theta_2 - m_2\,l_1\,b_2\,\mathrm{c}\beta_2 & \theta_2 + m_2\,b_2^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} = \begin{bmatrix} m_2\,l_1\,b_2\,\mathrm{s}\beta_2\,(2\,\dot{\beta}_1 - \dot{\beta}_2)\,\dot{\beta}_2 \\ -m_2\,l_1\,b_2\,\mathrm{s}\beta_2\,\dot{\beta}_1^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} -(m_1\,b_1 + m_2\,l_1)\,g\,\mathrm{c}\beta_1 - m_2\,g\,b_2\,\mathrm{c}\beta_{21} \\ m_2\,g\,b_2\,\mathrm{c}\beta_{21} \end{bmatrix}.$$

Hierbei wurden Gewichtskräfte in der negativen y_0-Richtung berücksichtigt.

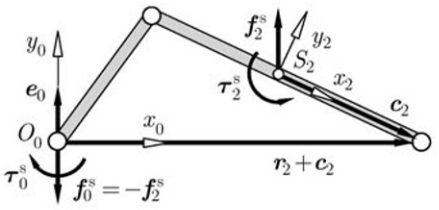
Nichtrekursive Auflösung der Bewegungsgleichungen Zu einem Zeitpunkt t mit bekannter Lage $\boldsymbol{\beta}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}$ können die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und die sekundäre Reaktionskoordinate λ^{s} aus dem folgenden linearen Gleichungssystem berechnet werden, vgl. (8.126):

$$\begin{matrix} (8.179): \\ (8.178): \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & -\boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G}^{\ell} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \lambda^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\gamma}}^{\ell} \end{bmatrix}. \tag{8.180}$$

Sekundäre Reaktionskraftwinder Mit der Reaktionskoordinate λ^{s} aus (8.180) werden die Reaktionskraftwinder zu den sekundären Bindungen (8.174) bezüglich der Punkte O_0 und S_2 gemäß (8.111) berechnet, siehe Abb. 8.16,

$$\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}\,\lambda^{\mathrm{s}} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{c}}_2\,\boldsymbol{e}_0 \\ \boldsymbol{e}_0 \end{bmatrix} \lambda^{\mathrm{s}}, \tag{8.181}$$

$$\hat{\boldsymbol{f}}_0^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}_0^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}}\,\lambda^{\mathrm{s}} \qquad \rightarrow \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_0^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_0^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\tilde{\boldsymbol{r}}_2 + \tilde{\boldsymbol{c}}_2)\,\boldsymbol{e}_0 \\ -\boldsymbol{e}_0 \end{bmatrix} \lambda^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.182}$$



$$\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{e}_0\,\lambda^{\mathrm{s}}$$
$$\boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{s}} = \tilde{\boldsymbol{c}}_2\,\boldsymbol{e}_0\,\lambda^{\mathrm{s}} = \tilde{\boldsymbol{c}}_2\,\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{s}}$$

$$\boldsymbol{f}_0^{\mathrm{s}} = -\boldsymbol{f}_2^{\mathrm{s}} = -\boldsymbol{e}_0\,\lambda^{\mathrm{s}}$$
$$\boldsymbol{\tau}_0^{\mathrm{s}} = -(\tilde{\boldsymbol{r}}_2 + \tilde{\boldsymbol{c}}_2)\,\boldsymbol{e}_0\,\lambda^{\mathrm{s}} = (\tilde{\boldsymbol{r}}_2 + \tilde{\boldsymbol{c}}_2)\,\boldsymbol{f}_0^{\mathrm{s}}$$

Abb. 8.16 Sekundäre Reaktionskraftwinder in $\mathcal{K}_0$ und $\mathcal{K}_2$

8.6.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform

Minimalkoordinate, kinematische Bewegungsgleichung Entsprechend dem Freiheitsgrad $f_{\mathrm{L}} = f = 1$ werden die Minimalkoordinate $q = \beta_1$ und die Minimalgeschwindigkeit $s = \dot{\beta}_1$ definiert. Damit hat die kinematische Bewegungsgleichung (8.29) bzw. (8.108) die einfache Form

$$\dot{q} = s \qquad \text{also} \qquad \overline{\boldsymbol{H}} = 1\,, \quad \bar{\boldsymbol{h}} = 0\,. \tag{8.183}$$

Explizite Schließbedingungen Die Auflösung der impliziten Schließbedingung (8.173) nach β_2 liefert die beiden Lösungen

$$\beta_{21}^{(1)} = \beta_2^{(1)} - \beta_1 = \arcsin\left(\tfrac{l_1}{l_2}\,\sin\beta_1\right)\,, \tag{8.184}$$

$$\beta_{21}^{(2)} = \beta_2^{(2)} - \beta_1 = \pi - \arcsin\left(\tfrac{l_1}{l_2}\,\sin\beta_1\right)\,, \tag{8.185}$$

die den beiden Konfigurationen der Schubkurbel in Abb. 8.17 entsprechen.

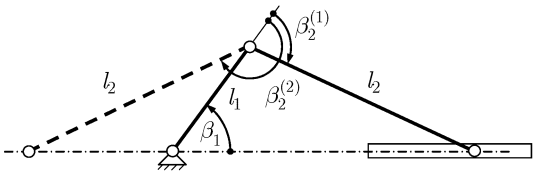


Abb. 8.17 Konfigurationen der Schubkurbel

Da für $l_2 > l_1$ die Konfigurationen nicht ineinander überführt werden können, reicht es aus, die Lösung $\beta_2^{(1)}$ zu betrachten. Die expliziten Schließbedingungen auf Lageebene lauten damit entsprechend (8.104),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q \\ q + \arcsin\left(\frac{l_1}{l_2}\,\sin q\right) \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}(q)\,, \end{aligned} \tag{8.186}$$

auf Geschwindigkeitsebene entsprechend (8.105),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l_1\,\cos\beta_1 + l_2\,\cos\beta_{21}}{l_2\,\cos\beta_2} \end{bmatrix} s \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{J}^{\ell}(q) \qquad s\,, \end{aligned} \tag{8.187}$$

und auf Beschleunigungsebene entsprechend (8.106),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l_1\,\cos\beta_1 + l_2\,\cos\beta_{21}}{l_2\,\cos\beta_2} \end{bmatrix} \dot{s} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-l_1\,\sin\beta_1\,\dot{\beta}_1^2 + l_2\,\sin\beta_{21}\,\dot{\beta}_{21}^2}{l_2\,\cos\beta_2} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{J}^{\ell}(q) \qquad \dot{s} + \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}(q, s)\,. \end{aligned} \tag{8.188}$$

Kinetische Bewegungsgleichung Die $f = 1$ kinetische Bewegungsgleichung lautet entsprechend (8.162),

$$\overline{M}(q)\,\dot{s} = \bar{k}^{\mathrm{c}}(q,s) + \bar{k}^{\mathrm{e}}(q,s)\,, \tag{8.189}$$

mit der verallgemeinerten Masse

$$\overline{M} = \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}^{\ell}\,, \tag{8.190}$$

der verallgemeinerten CORIOLIS-Kraft

$$\bar{k}^{\mathrm{c}} = -\boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{M}\,\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} + \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} \tag{8.191}$$

und der verallgemeinerten eingeprägten Kraft

$$\bar{k}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}\,. \tag{8.192}$$

8.7 Dynamik eines räumlichen Koppelgetriebes

Das in Abb. 8.18 gezeigte räumliche Koppelgetriebe (RRRSR-Mechanismus) entsteht aus der kinematischen Kette des Roboters aus Abb. 7.19, indem der Endpunkt in einem Kugelgelenk durch einen umlaufenden rotierenden Antriebshebel geführt wird [39].

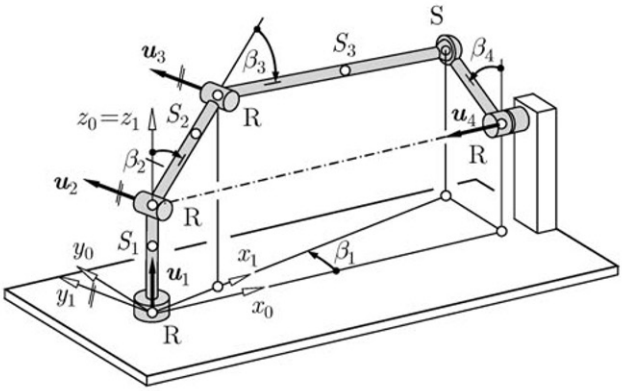


Abb. 8.18 Räumliches Koppelgetriebe (RRRSR-Mechanismus)

Mit $n = n_{\mathrm{K}} = 4$ Körpern und $n_{\mathrm{G}} = 5$ Gelenken besitzt der räumliche Mechanismus $n_{\mathrm{S}} = 1$ kinematische Schleife und nach dem GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium (6.14) den Freiheitsgrad $f = 1$. Die Bewegungsgleichungen werden in den primären Gelenkkoordinaten und in einer Minimalkoordinate aufgestellt.

8.7.1 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten

Primäre Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten Wird die Schleife am Kugelgelenk geschnitten, so entsteht der in Abb. 8.19 gezeigte aufspannende Baum mit den $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = f^{\mathrm{o}} = 4$ primären Gelenkkoordinaten und Gelenkgeschwindigkeiten, vgl. (8.1) bis (8.3),

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\ \beta_1 \ \ \beta_2 \ \ \beta_3 \ \ \beta_4\ \right]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \dot{\boldsymbol{\beta}}\,, \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{E}\,. \tag{8.193}$$

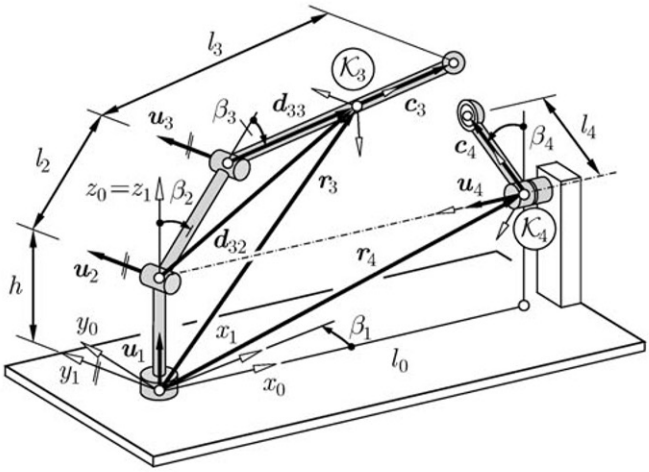


Abb. 8.19 Aufspannender Baum des RRRSR-Mechanismus

Implizite Schließbedingungen auf Lageebene Mit den Schnitt-Koordinatensystemen $\mathcal{K}_3$ im Massenmittelpunkt $O_3 = S_3$ der Koppel und $\mathcal{K}_4$ im umlaufenden Hebel gelten die $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = 3$ impliziten sekundären Bindungen des Typs I aus Tabelle 8.1

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}(\hat{\boldsymbol{r}}_3, \hat{\boldsymbol{r}}_4) \equiv (\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{c}_3) - (\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{c}_4) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.194}$$

Der Vektor $\boldsymbol{r}_3 + \boldsymbol{c}_3$ zum Kugelgelenk ergibt sich aus (7.153) mit der Länge l_3 an Stelle von b_3 sowie $l_1 = 0$. Der Vektor $\boldsymbol{r}_4 + \boldsymbol{c}_4$ wird mit Hilfe der Abmessungen l_0 und l_4 sowie des Drehwinkels β_4 des Antriebshebels ausgedrückt. Die impliziten Schließbedingungen gemäß (8.78) lauten damit

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \mathrm{c}\beta_1\,(l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + l_3\,\mathrm{s}\beta_{23}) - l_0 \\ \mathrm{s}\beta_1\,(l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + l_3\,\mathrm{s}\beta_{23}) - l_4\mathrm{s}\beta_4 \\ \quad\ (l_2\,\mathrm{c}\beta_2 + l_3\,\mathrm{c}\beta_{23}) - l_4\mathrm{c}\beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \qquad &\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}\ . \end{aligned} \tag{8.195}$$

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Die $b^{\mathrm{s}} = 3$ impliziten sekundären Bindungen des Typs I aus Tabelle 8.1 lauten

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_4 & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_3 & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}_4^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_4 + \boldsymbol{G}_3^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_3 = \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{8.196}$$

Die räumliche Geschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}_3$ von Körper $\mathcal{K}_3$ wird mit Hilfe der primären Gelenkgeschwindigkeiten aus (8.193) unter Verwendung der Submatrizen der JACOBI-Matrix $\boldsymbol{J}_3$ aus (7.163) ausgedrückt,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_3 \\ \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 & \boldsymbol{u}_2 & \boldsymbol{u}_3 & \mathbf{0} \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{d}_{31} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{d}_{32} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{d}_{33} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \ \hat{\boldsymbol{v}}_3 &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{31} & \boldsymbol{J}_{32} & \boldsymbol{J}_{33} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}\,, \end{aligned} \tag{8.197}$$

mit $\boldsymbol{d}_{31} = \boldsymbol{d}_{32}$ wegen der hier sich schneidenden Achsen $\boldsymbol{u}_1$ und $\boldsymbol{u}_2$. Die räumliche Geschwindigkeit $\hat{\boldsymbol{v}}_4$ des rotierenden Hebels $\mathcal{K}_4$ lautet in Abhängigkeit von den primären Gelenkgeschwindigkeiten

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{u}_4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \ \hat{\boldsymbol{v}}_4 &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{J}_{44} \end{bmatrix} \boldsymbol{\eta}\,. \end{aligned} \tag{8.198}$$

Einsetzen von (8.197) und (8.198) in (8.196) führt auf die impliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene entsprechend (8.83),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{l}_{32} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_{32} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3 & -\widetilde{\boldsymbol{u}}_4\,\boldsymbol{c}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \\ \dot{\beta}_2 \\ \dot{\beta}_3 \\ \dot{\beta}_4 \end{bmatrix} &= \mathbf{0} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}^{\ell} \quad \boldsymbol{\eta} &= \mathbf{0}\,. \end{aligned} \tag{8.199}$$

mit den Vektoren $\boldsymbol{l}_{32} = \boldsymbol{d}_{32} + \boldsymbol{c}_3$ und $\boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{d}_{33} + \boldsymbol{c}_3$. Die Auswertung von (8.199) in Koordinaten von $\mathcal{K}_0$ ergibt mit den Termen $l_A = l_2\,\mathrm{s}\beta_2 + l_3\,\mathrm{s}\beta_{23}$ und $l_B = l_2\,\mathrm{c}\beta_2 + l_3\,\mathrm{c}\beta_{23}$

$$\begin{bmatrix} -l_A\,\mathrm{s}\beta_1 & l_B\,\mathrm{c}\beta_1 & l_3\,\mathrm{c}\beta_{23}\,\mathrm{c}\beta_1 & 0 \\ l_A\,\mathrm{c}\beta_1 & l_B\,\mathrm{s}\beta_1 & l_3\,\mathrm{c}\beta_{23}\,\mathrm{s}\beta_1 & -l_4\,\mathrm{c}\beta_4 \\ 0 & -l_A & -l_3\,\mathrm{s}\beta_{23} & l_4\,\mathrm{s}\beta_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\beta_1 \\ \dot\beta_2 \\ \dot\beta_3 \\ \dot\beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8.200}$$

$$\rightarrow \qquad \boldsymbol{G}^\ell(\boldsymbol{\beta}) \qquad \boldsymbol{\eta} \quad = \quad \mathbf{0} \ .$$

Diese Gleichung ist auch durch die Zeitableitung von (8.195) zu ermitteln.

Implizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung von (8.199) führt auf die impliziten Schließbedingungen

$$\boldsymbol{G}^\ell(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^\ell(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}\ . \tag{8.201}$$

Der nicht von den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \ddot{\boldsymbol{\beta}}$ abhängende Term lautet

$$\begin{aligned} &\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^\ell = \dot{\boldsymbol{G}}^\ell\,\boldsymbol{\eta} \\ \rightarrow\ &\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^\ell = \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\dot{\boldsymbol{l}}_{32}\,\dot\beta_1 + \big(\dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_2\,\boldsymbol{l}_{32} + \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\dot{\boldsymbol{l}}_{32}\big)\,\dot\beta_2 + \big(\dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_3\,\boldsymbol{l}_3 + \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\dot{\boldsymbol{l}}_{33}\big)\,\dot\beta_3 - \widetilde{\boldsymbol{u}}_4\,\dot{\boldsymbol{c}}_4\,\dot\beta_4 \end{aligned} \tag{8.202}$$

mit den Vektoren

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{u}}_2 = \dot{\boldsymbol{u}}_3 = \dot\beta_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{u}_2\ , && \dot{\boldsymbol{c}}_4 = \dot\beta_4\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_4\,\boldsymbol{c}_4\ , \\ &\dot{\boldsymbol{l}}_{32} = \big(\,\dot\beta_1\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 + \dot\beta_2\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\big)\,\boldsymbol{l}_{32} + \dot\beta_3\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3\ , && \dot{\boldsymbol{l}}_3 = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_3\,\boldsymbol{l}_3\ . \end{aligned} \tag{8.203}$$

Explizite Reaktionsbedingungen Für die verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ gelten die expliziten Reaktionsbedingungen (8.124) mit der Matrix der Schließbedingungen $\boldsymbol{G}^\ell$ aus (8.199) bzw. (8.200) und den $b^{\mathrm{s}} = 3$ minimalen sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$,

$$\begin{bmatrix} k_1^{\mathrm{s}} \\ k_2^{\mathrm{s}} \\ k_3^{\mathrm{s}} \\ k_4^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{l}_{32}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \\ -\boldsymbol{l}_{32}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 \\ -\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3 \\ \boldsymbol{c}_4^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{\mathrm{s}} \\ \lambda_2^{\mathrm{s}} \\ \lambda_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \tag{8.204}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} \quad = \quad \boldsymbol{G}^{\ell^{\mathrm{T}}} \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}\ .$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Die kinetischen Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ und Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ lauten entsprechend (8.123) mit $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ aus (8.204),

$$\left[\begin{array}{ccc|c} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{32} & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & M_{44} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \ddot\beta_1 \\ \ddot\beta_2 \\ \ddot\beta_3 \\ \hline \ddot\beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^{\mathrm{c}} \\ k_2^{\mathrm{c}} \\ k_3^{\mathrm{c}} \\ \hline 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^{\mathrm{e}} \\ k_2^{\mathrm{e}} \\ k_3^{\mathrm{e}} \\ \hline k_4^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\boldsymbol{l}_{32}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \\ -\boldsymbol{l}_{32}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 \\ -\boldsymbol{l}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3 \\ \hline \boldsymbol{c}_4^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{\mathrm{s}} \\ \lambda_2^{\mathrm{s}} \\ \lambda_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \tag{8.205}$$

$$\rightarrow \qquad \boldsymbol{M} \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad = \quad \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} \quad + \quad \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \quad + \quad \boldsymbol{G}^{\ell^{\mathrm{T}}} \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}\ .$$

Die Terme $\boldsymbol{M}_{ij}$, $\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{c}}$ und $\boldsymbol{k}_i^{\mathrm{e}}$ in den drei oberen Bewegungsgleichungen sind die entsprechenden Größen der Bewegungsgleichung der offenen Kette (7.182). Die vierte Bewegungsgleichung beschreibt die Bewegung des Antriebshebels um die raumfeste Drehachse $\boldsymbol{u}_4$ mit dem Massenträgheitsmoment des Hebels bezüglich der Drehachse M_{44}, dem Moment der Gewichtskraft bezüglich der Drehachse k_4^{e} und den verschwindenden verallgemeinerten CORIOLIS-Kräfte $k_4^{\mathrm{c}} = 0$. Die Bewegungsgleichungen der beiden Teilketten des aufspannenden Baumes sind durch die sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ verkoppelt.

Nichtrekursive Auflösung der Bewegungsgleichungen Zu einem Zeitpunkt t mit bekannter Lage $\boldsymbol{\beta}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}$ können die Beschleunigung $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und die Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus dem linearen Gleichungssystem gemäß (8.126) berechnet werden,

$$\begin{array}{l}(8.205):\\(8.201):\end{array}\quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & -\boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G}^{\ell} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} \end{bmatrix}. \tag{8.206}$$

Zusammen mit den kinematischen Bewegungsgleichungen aus (8.193) liegen damit die Bewegungsgleichungen (8.118) vor. Entsprechend (8.119) und (8.120) müssen die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\beta}(0)$ und $\boldsymbol{\eta}(0)$ die Schließbedingungen auf Lageebene (8.195) und auf Geschwindigkeitsebene (8.200) erfüllen.

Sekundäre Reaktionskraftwinder Mit den Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus (8.206) werden die Reaktionskraftwinder zu den sekundären Bindungen (8.196) bezüglich der Koordinatensysteme $\mathcal{K}_4$ und $\mathcal{K}_3$ gemäß (8.111) berechnet, siehe Abb. 8.20,

$$\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{f}}_4^{\mathrm{s}} \\ \hat{\boldsymbol{f}}_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_4^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{G}_3^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_4^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_4^{\mathrm{s}} \\ \hline \boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{c}}_4 \\ -\boldsymbol{E} \\ \hline \tilde{\boldsymbol{c}}_3 \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}. \tag{8.207}$$

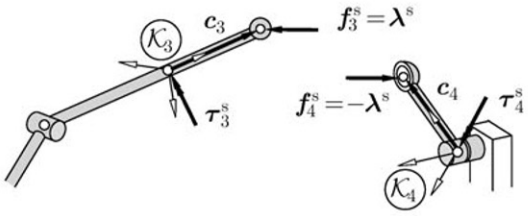


Abb. 8.20 Sekundäre Reaktionskraftwinder in $\mathcal{K}_3$ und $\mathcal{K}_4$

8.7.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform

Minimalkoordinate, kinematische Bewegungsgleichung Entsprechend dem Freiheitsgrad $f_\mathrm{L} = f = 1$ werden die Minimalkoordinate $q = \beta_4$ und die Minimalgeschwindigkeit $s = \dot{\beta}_4$ definiert. Damit lautet die kinematische Bewegungsgleichung (8.29) bzw. (8.108)

$$\dot{q} = s \qquad \text{also} \qquad \overline{\boldsymbol{H}} = 1\,, \quad \bar{\boldsymbol{h}} = 0\,. \tag{8.208}$$

Explizite Schließbedingungen auf Lageebene Mit Hilfe der expliziten Schließbedingungen auf Lageebene werden die primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ durch die Minimalkoordinate q ausgedrückt. Hierzu wird das System der impliziten Schließbedingungen (8.195) analytisch nach den abhängigen primären Gelenkkoordinaten β_1, β_2 und β_3 aufgelöst, wobei zwei Vorgehensweisen angewandt werden.

Algebraische Lösung Die Schließbedingungen (8.195), also

$$l_2\,\mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 + l_3\,\mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_{23} - l_0 = 0\,, \tag{8.209}$$

$$l_2\,\mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 + l_3\,\mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_{23} - l_4\,\mathrm{s}\beta_4 = 0\,, \tag{8.210}$$

$$l_2\,\mathrm{c}\beta_2 + l_3\,\mathrm{c}\beta_{23} - l_4\,\mathrm{c}\beta_4 = 0\,, \tag{8.211}$$

werden nach den abhängigen Gelenkkoordinaten β_1, β_2 und β_3 aufgelöst.

Der Winkel β_1 wird aus (8.209) und (8.210) berechnet, indem (8.209) mit $-\mathrm{s}\beta_1$ und (8.210) mit $\mathrm{c}\beta_1$ multipliziert und anschließend beide Gleichungen addiert werden. Erhalten werden zwei Lösungen $\beta_1^{(1)}$, $\beta_1^{(2)}$,

$$\tan\beta_1 = \frac{l_4\,\sin\beta_4}{l_0} \qquad \rightarrow \qquad \begin{cases} \beta_1^{(1)} &= \arctan\frac{l_4\,\sin\beta_4}{l_0} \\ \beta_1^{(2)} &= \beta_1^{(1)} + \pi\,. \end{cases} \tag{8.212}$$

Die beiden Lösungen entsprechen zwei möglichen Konfigurationen des Mechanismus, die durch die entgegengesetzten Richtungen der Achsvektoren $\boldsymbol{u}_2$ und $\boldsymbol{u}_3$ gekennzeichnet sind, siehe Abb. 8.22.

Der Winkel β_2 wird berechnet, indem (8.209) und (8.210) jeweils nach dem zweiten Summanden umgestellt, quadriert und anschließend addiert werden. Unter Berücksichtigung von $\sin^2\beta_i + \cos^2\beta_i = 1$ kann das Ergebnis in die bereits aus (8.50) bekannte Form gebracht werden,

$$A(\beta_4)\,\cos\beta_2 + B(\beta_4,\beta_1)\,\sin\beta_2 + C = 0 \tag{8.213}$$

mit

$$A = 2\,l_2\,l_4\,\mathrm{c}\beta_4\,, \quad B = 2\,l_2\,(l_4\,\mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_4 + l_0\,\mathrm{c}\beta_1)\,, \quad C = l_0^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2\,.$$

Für jede der Lösungen $\beta_1^{(1)}$ und $\beta_1^{(2)}$ aus (8.212) liefert (8.213) gemäß (8.52) zwei Lösungen für β_2.

Der Winkel β_3 wird über den Summenwinkel β_{23} berechnet. Hierzu werden die Gleichungen (8.209) und (8.210) addiert und die Summengleichung nach $\mathrm{s}\beta_{23}$ aufgelöst. Aus (8.211) wird $\mathrm{c}\beta_{23}$ erhalten. Die Ergebnisse lauten

$$\mathrm{s}\beta_{23} = \frac{l_0 + l_4\,\mathrm{s}\beta_4}{l_3\,(\mathrm{s}\beta_1 + \mathrm{c}\beta_1)} - \frac{l_2\,\mathrm{s}\beta_2}{l_3}\,, \qquad \mathrm{c}\beta_{23} = \frac{1}{l_3}(l_4\,\mathrm{c}\beta_4 - l_2\,\mathrm{c}\beta_2)\,. \tag{8.214}$$

Der Winkel β_3 ergibt sich daraus zu

$$\beta_3 = \mathrm{atan2}\left(\mathrm{s}\beta_{23}, \mathrm{c}\beta_{23}\right) - \beta_2\,. \tag{8.215}$$

Der Ablauf der Berechnung der abhängigen primären Gelenkkoordinaten β_1, β_2 und β_3 für einen gegebenen Winkel $q = \beta_4$ ist in Abb. 8.21 gezeigt.

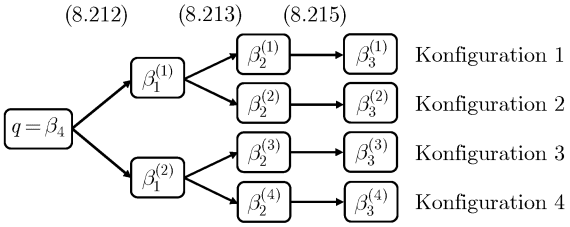


Abb. 8.21 Berechnungsablauf für die expliziten Schließbedingungen

Die Lösungen beschreiben die in Abb. 8.22 gezeigten vier Konfigurationen des Koppelgetriebes.

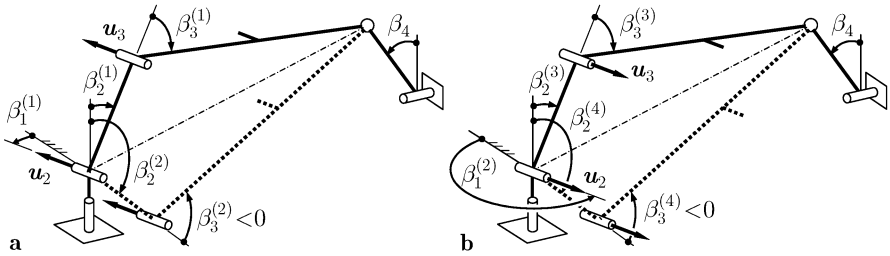


Abb. 8.22 Konfigurationen des Koppelgetriebes.
a Konfigurationen 1 und 2. **b** Konfigurationen 3 und 4

Geometrische Lösung Der Grundgedanke des geometrischen Ansatzes besteht darin, eine Reihe von skalaren Schließbedingungen so zu formulieren, dass die gesuchten abhängigen Gelenkkoordinaten nacheinander berechnet werden können. Eine gewisse Systematisierung dieser Methodik lässt sich durch die Betrachtung eines so genannten *charakteristischen Gelenkpaares* erreichen (Woernle [110]). Im günstigsten Fall kann unmittelbar eine skalare Schließbedingung in einer abhängigen Gelenkkoordinate aufgestellt werden.

Im vorliegenden Beispiel kann die Bedingung ausgenutzt werden, dass der Punkt P_2 des Kugelgelenks wegen der beiden parallelen Drehgelenke in einer Ebene liegt, die durch den Punkt P_1 und den Normalenvektor $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_3$ definiert ist, siehe Abb. 8.23. Der Vektor $\boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_4$ von P_1 nach P_2 steht daher stets senkrecht auf $\boldsymbol{u}_2$. Bei Darstellung der Vektoren in $\mathcal{K}_0$ ergibt sich

$$\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\,(\boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_4) = 0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}\beta_1 \\ \mathrm{c}\beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_4 = \begin{bmatrix} l_0 \\ l_4\,\mathrm{s}\beta_4 \\ l_4\,\mathrm{c}\beta_4 \end{bmatrix}. \tag{8.216}$$

Die Auswertung von (8.216) liefert die Bestimmungsgleichung (8.212) für β_1.

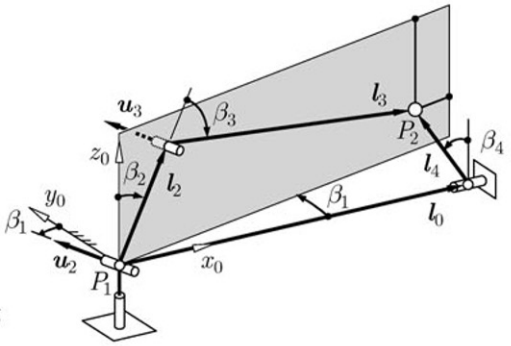


Abb. 8.23 Zur geometrischen Lösung der Schließbedingungen

Eine Bedingung für den Winkel β_2 wird erhalten, indem das Quadrat der Länge des Vektors l_3 mit Hilfe der Vektoren $\boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_4$ aus (8.216) und dem von β_1 und β_2 abhängenden Vektor $\boldsymbol{l}_2$ ausgedrückt wird,

$$(\boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_4 - \boldsymbol{l}_2)^2 - l_3^2 = 0 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{l}_2(\beta_1, \beta_2) = \begin{bmatrix} l_2\,\mathrm{c}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 \\ l_2\,\mathrm{s}\beta_1\,\mathrm{s}\beta_2 \\ l_2\,\mathrm{c}\beta_2 \end{bmatrix}. \tag{8.217}$$

Die Auswertung von (8.217) ergibt (8.213).

Der Winkel β_3 um die Achse $\boldsymbol{u}_3$ kann aus der nun bekannten relativen Lage von $\boldsymbol{l}_2$ und $\boldsymbol{l}_3$ für jede Lösung von β_1 und β_2 eindeutig berechnet werden. Mit den Vektoren $\boldsymbol{l}_2$ aus (8.217) und $\boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{l}_0 + \boldsymbol{l}_4 - \boldsymbol{l}_2$ gilt

$$\cos\beta_3 = \frac{\boldsymbol{l}_2^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{l}_3}{l_2\,l_3}, \quad \sin\beta_3 = \frac{\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{l}}_2\,\boldsymbol{l}_3}{l_2\,l_3} \quad \rightarrow \quad \beta_3 = \operatorname{atan2}\left(\mathrm{s}\beta_3, \mathrm{c}\beta_3\right). \tag{8.218}$$

Anmerkung Das betrachtete Koppelgetriebe ist ein Sonderfall einer kinematischen Schleife mit sieben rotatorischen Gelenkfreiheitsgraden und damit dem Freiheitsgrad $f = 1$. Die analytische Darstellung der expliziten Bindungen ist auf Grund der speziellen Geometrie mit parallelen Drehachsen $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ und drei sich in einem Punkt schneidenden Drehachsen des Kugelgelenks möglich.

In einer Schleife mit sieben Drehgelenken und allgemeiner Geometrie können die expliziten Schließbedingungen dagegen nicht mehr analytisch formuliert werden. Sollen auch hier alle Konfigurationen ermittelt werden, kann ein Polynomgleichung 16. Grades in $\tan\frac{\beta_i}{2}$ eines Gelenkwinkels β_i aufgestellt und numerisch gelöst werden. Dies wurde erstmals von Li [56] beschrieben.

Explizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Für die Aufstellung der expliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene entsprechend (8.25) werden die impliziten Schließbedingungen (8.199) nach den abhängigen Gelenkgeschwindigkeiten $\dot\beta_1$, $\dot\beta_2$ und $\dot\beta_3$ umgestellt,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{l}_{32} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{l}_{32} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\boldsymbol{l}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\beta_1 \\ \dot\beta_2 \\ \dot\beta_3 \end{bmatrix} = \widetilde{\boldsymbol{u}}_4\,\boldsymbol{c}_4 \;\; \dot\beta_4 \\ \rightarrow \quad &\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}} \qquad\qquad \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} = -\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \;\; \eta^{\mathrm{u}}\,. \end{aligned} \tag{8.219}$$

Mit der Minimalgeschwindigkeit $s = \eta^{\mathrm{u}} = \dot\beta_4$ werden daraus die expliziten Schließbedingungen gemäß (8.26) erhalten,

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{u}} \\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \end{bmatrix} s \\ \rightarrow \quad &\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}^{\ell} \qquad s\,. \end{aligned} \tag{8.220}$$

Explizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Aus der impliziten Schließbedingungen (8.201) ergeben sich mit der Aufteilung der primären Gelenkbeschleunigungen entsprechend (8.219) die expliziten Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene gemäß (8.33)

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\beta}}^{\mathrm{a}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{u}} \end{bmatrix} \dot s + \begin{bmatrix} 0 \\ -(\boldsymbol{G}^{\ell\mathrm{a}})^{-1}\,\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad &\dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{J}^{\ell} \qquad \dot s + \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}}\,. \end{aligned} \tag{8.221}$$

Kinetische Bewegungsgleichung in Minimalform Entsprechend (8.162) lautet sie

$$\overline{M}(q)\,\dot s = \bar k^{\mathrm{c}}(q,s) + \bar k^{\mathrm{e}}(q,s) \tag{8.222}$$

mit den Termen gemäß (8.166) bis (8.168)

$$\overline{M} = \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{J}^{\ell}\,, \tag{8.223}$$

$$\bar k^{\mathrm{c}} = -\boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{M}\,\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} + \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}\,, \tag{8.224}$$

$$\bar k^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\,\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \tag{8.225}$$

und $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}$ und $\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}$ aus (8.205).

8.8 Dynamik eines Parallelroboters

Bei Parallelrobotern ist der Endeffektor durch mindestens zwei kinematische Ketten mit dem Gestell verbunden. Hierdurch entsteht mindestens eine kinematische Schleife. Zwei Beispiele zeigt Abb. 8.24, siehe auch ANGELES [3].

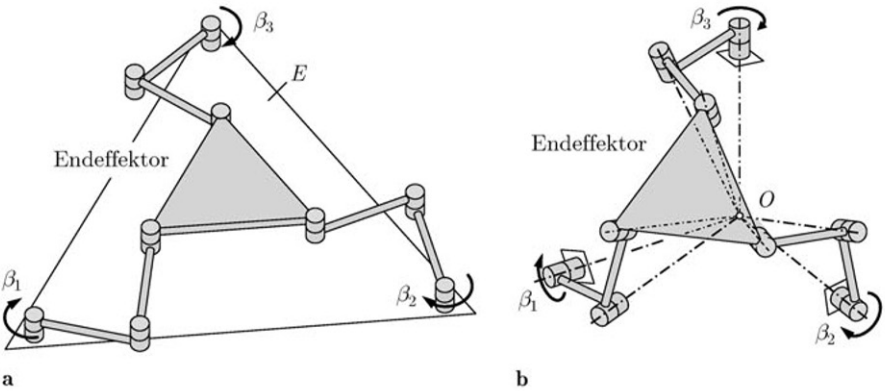


Abb. 8.24 Parallelroboter mit neun Drehgelenken und dem Freiheitsgad $f = 3$. **a** Ebene Ausführung. **b** Sphärische Ausführung

Der Endeffektor des ebenen Parallelroboters in Abb. 8.24 a wird durch drei kinematische Ketten mit drei Drehgelenken (R) geführt. Alle Gelenkachsen sind zueinander parallel. Mit $n(= n_K) = 7$ Körpern und $n_G = 9$ Gelenken hat das System gemäß (6.7) $n_S = n_G - n = 2$ unabhängige kinematische Schleifen. Das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium für ebene Mehrkörpersysteme (6.16) liefert den Freiheitsgrad $f = 3$. Der Endeffektor kann parallel zu der Ebene E positioniert werden, indem die drei gestellseitigen Gelenke (Drehwinkel β_1, β_2, β_3) durch jeweils einen Motor bewegt werden.

Werden die Drehgelenke so angeordnet, dass sich alle Achsen in einem gemeinsamen Punkt O schneiden, so entsteht der sphärische Parallelroboter in Abb. 8.24 b. Alle Körper führen hier nur Drehungen um den Fixpunkt O aus. Eine Anwendung ist das von GOSSELIN und ST-PIERRE [29] entwickelte Bewegungssystem zur hochdynamischen Ausrichtung einer Kamera.

Gegenüber seriellen Robotern entsprechend Abb. 1.5 haben Parallelroboter den Vorteil kleiner bewegter Massen und damit großer erzielbarer Beschleunigungen des Endeffektors, weil die schweren Antriebe fest im Gestell gelagert werden können. Zusätzlich können die Armsegmente der kinematischen Führungsketten leicht gebaut werden, weil sie je nach Bauart keinen oder nur kleinen Biegebeanspruchungen unterliegen. Nachteilig ist jedoch der kleinere Arbeitsraum des Endeffektors, insbesondere in Bezug auf die Orientierung. Grundlagen und Anwendungen von Bewegungssystemen mit paralleler Kinematik werden von MERLET [63] und NEUGEBAUER [68] beschrieben.

8.8.1 Statisch bestimmte Mehrkörpermodelle

Das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium (6.14) für räumliche Mehrkörpersysteme ergibt für die beiden Parallelroboter aus Abb. 8.24 jeweils den Freiheitsgrad $f = -3$. Die tatsächliche Beweglichkeit mit $f = 3$ begründet sich in den parallelen bzw. sich in einem Punkt schneidenden Gelenkachsen. In Abb. 8.25 sind die Größen der kinematischen und statischen Bestimmtheit der beiden Parallelroboter in der Form von Abb. 6.2 dargestellt. Mit $b^{\mathrm{r}} = 6$ redundanten Bindungen sind die Systeme jeweils sechsfach statisch unbestimmt.

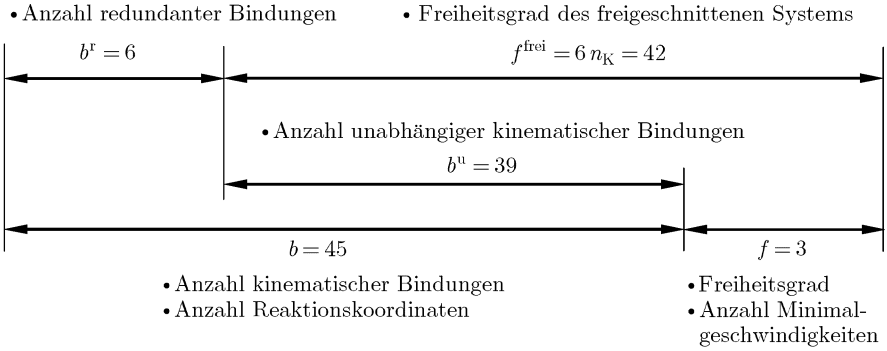


Abb. 8.25 Zur kinematischen und statischen Bestimmtheit der ebenen bzw. sphärischen Parallelroboter aus Abb. 8.24 mit jeweils $n(= n_{\mathrm{K}}) = 7$ Körpern und $n_{\mathrm{G}} = 9$ Gelenken

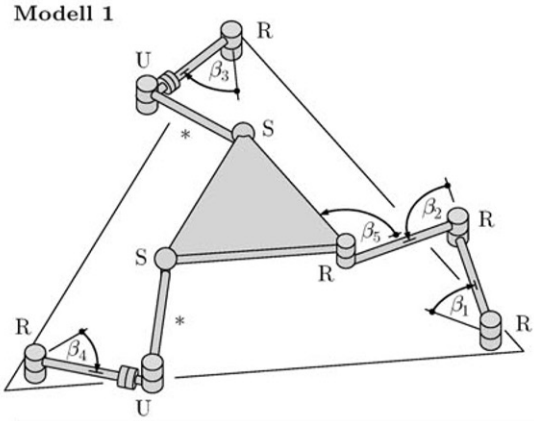
Um ein kinematisch äquivalentes, statisch bestimmtes Mehrkörpermodell zu erhalten, müssen damit sechs Gelenkbindungen entfernt werden. Tabelle 8.10 zeigt drei kinematisch äquivalente Modelle des ebenen Parallelroboters, für die das GRÜBLER-KUTZBACH-Kriterium (6.14) jeweils den Freiheitsgrad $f = 3$ ergibt.

Im Modell 1 wird die ebene Bewegung des Endeffektors mit Hilfe der drei parallelen Drehgelenke (R) einer kinematischen Führungskette erreicht, die einem ebenen Gelenk entsprechen, vgl. Tabelle 6.2 (Seite 193). Zur Vermeidung redundanter Bindungen sind an den beiden anderen Führungsketten jeweils das endeffektorseitige und das mittlere Drehgelenk durch ein Kugelgelenk (S) und ein Kardangelenk (U) ersetzt, wodurch die Armsegmente $*$ als Pendelstützen wirken. Topologisch entspricht dieses Modell dem Taumelscheiben-Mechanismus aus Abb. 8.8 b mit $n_{\mathrm{S}} = 2$ unabhängigen kinematischen Schleifen. Dieses Ersatzmodell kann auch auf den sphärischen Roboter in Abb. 8.24 b übertragen werden.

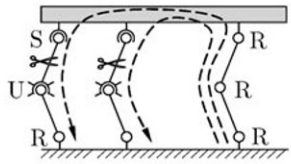
Im Modell 2 wird die ebene Bewegung des Endeffektors durch ein gedachtes ebenes Gelenk (E) erzwungen, das entsprechend Tabelle 6.2 aus zwei Schubgelenken und einem Drehgelenk (PPR) aufgebaut ist. Zur Vermeidung redundanter Bindungen sind in den drei kinematischen Führungsketten je-

Tabelle 8.10 Statisch bestimmte Mehrkörpermodelle des Parallelroboters aus Abb. 8.24a

Modell 1



Topologie: $n_S = 2$ Schleifen



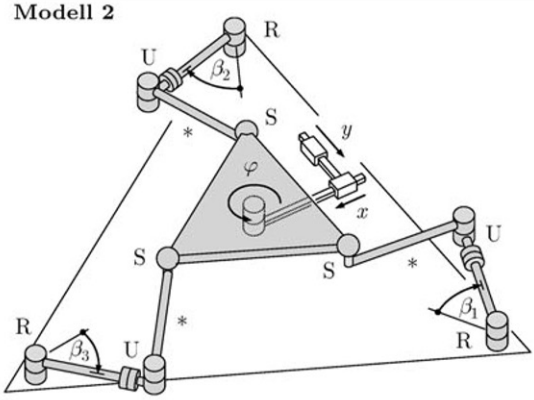
Sekundäre Gelenke: Pendelstützen

$b^s = 2$ Schließbedingungen

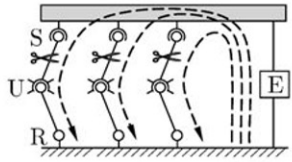
$f^\circ = 5$ primäre Gelenkkoordinaten

$\boldsymbol{\beta} = [\ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4\ \ \beta_5\ ]^T$

Modell 2



Topologie: $n_S = 3$ Schleifen



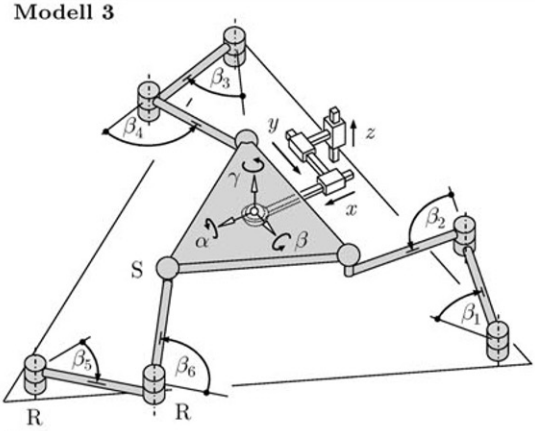
Sekundäre Gelenke: Pendelstützen

$b^s = 3$ Schließbedingungen

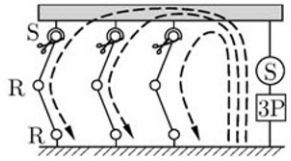
$f^\circ = 6$ primäre Gelenkkoordinaten

$\boldsymbol{\beta} = [\ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ x\ \ y\ \ \varphi\ ]^T$

Modell 3



Topologie: $n_S = 3$ Schleifen



Sekundäre Gelenke: Kugelgelenke

$b^s = 9$ Schließbedingungen

$f^\circ = 12$ primäre Gelenkkoordinaten

$\boldsymbol{\beta} = [\ \beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3\ \ \beta_4\ \ \beta_5\ \ \beta_6$
$\alpha\ \ \beta\ \ \gamma\ \ x\ \ y\ \ z\ ]^T$

weils das zweite und das dritte Drehgelenk durch ein Kardangelenk (U) und ein Kugelgelenk (S) ersetzt. Auch das sphärische System in Abb. 8.24 b kann in dieser Art modelliert werden, indem der Endeffektor in einem Kugelgelenk im Punkt O gelagert wird.

Im Modell 3 wird von der räumlichen Bewegung des Endeffektors, beschrieben durch die sechs Lagekoordinaten einer gedachten kinematischen Hilfskette mit sechs Freiheitsgraden (3P-3R) ausgegangen. Die Beschränkung der Bewegung erfolgt durch die Führungsketten, in denen jeweils das endeffektorseitige Drehgelenk durch ein Kugelgelenk (S) ersetzt ist. Das sphärische System in Abb. 8.24 b wird auf diese Weise modelliert, wenn sich die Achsen der sechs Drehgelenke im Punkt O schneiden.

Die Modelle 2 und 3 sind durch die kinematische Hilfskette topologisch symmetrisch. Gegenüber Modell 1 entsteht aber eine zusätzliche Schleife, vgl. Abschnitt 8.2.4. Kinematisch sind die drei Modelle äquivalent. Wesentliche Unterschiede bestehen aber in der Abstützung von Kräften, die senkrecht zur Bewegungsebene auf den Endeffektor wirken. Hier liegt das Modell 3 am nächsten zum Ausgangssystem in Abb. 8.24 a, weil solche Kräfte durch alle drei Führungsketten abgestützt werden. Bei Modell 1 werden diese Kräfte dagegen alleine in der RRR-Führungskette und bei Modell 2 durch das ebene Gelenk abgestützt.

Im Folgenden werden für das Modell 3 die Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten aufgestellt.

8.8.2 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten

Primäre Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten Die insgesamt $f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = 12$ primären Gelenkkordinaten $\boldsymbol{\beta}$ sind die sechs Winkel der Drehgelenke $\beta_1, \ldots \beta_6$ sowie die sechs Lagekoordinaten des Endeffektors $\mathcal{K}_7$, bestehend aus den kartesischen Koordinaten des Punktes O_7 im System $\mathcal{K}_0$, also ${}^0\boldsymbol{r}_7 = [\,x \;\; y \;\; z\,]^{\mathrm{T}}$, und den hier zur Beschreibung der Drehung gewählten xyz-Kardan-Winkeln $\boldsymbol{\beta}_7 = [\,\alpha \;\; \beta \;\; \gamma\,]^{\mathrm{T}}$ gemäß Tabelle 3.9 (Seite 77),

$$\boldsymbol{\beta} = \left[\, \beta_1 \;\; \beta_2 \;\; \beta_3 \;\; \beta_4 \;\; \beta_5 \;\; \beta_6 \;\; \boldsymbol{\beta}_7^{\mathrm{T}} \;\; {}^0\boldsymbol{r}_7^{\mathrm{T}} \,\right]^{\mathrm{T}} . \tag{8.226}$$

Als die $f^{\mathrm{o}} = f_{\mathrm{L}}^{\mathrm{o}} = 12$ primären Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ werden die Winkelgeschwindigkeiten der Drehgelenke $\eta_i = \dot{\beta}_i,\; i = 1, \ldots, 6$, sowie die räumliche Geschwindigkeit des Endeffektors, bestehend aus den Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit des Endeffektors im System $\mathcal{K}_7$, also ${}^7\boldsymbol{\omega}_7$, und den Zeitableitungen der translatorischen Koordinaten ${}^0\boldsymbol{v}_7 = [\,\dot{x} \;\; \dot{y} \;\; \dot{z}\,]^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\eta} = \left[\, \eta_1 \;\; \eta_2 \;\; \eta_3 \;\; \eta_4 \;\; \eta_5 \;\; \eta_6 \;\; {}^7\boldsymbol{\omega}_7^{\mathrm{T}} \;\; {}^0\boldsymbol{v}_7^{\mathrm{T}} \,\right]^{\mathrm{T}} . \tag{8.227}$$

Mit der Matrix $\boldsymbol{H}_7(\boldsymbol{\beta}_7)$ der xyz-KARDAN-Winkel aus (3.165) lauten die kinematischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot\beta_1 \\ \vdots \\ \dot\beta_6 \\ \hline \dot{\boldsymbol{\beta}}_7 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \boldsymbol{H}_7 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{E} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_6 \\ \hline {}^7\boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} \tag{8.228}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} \quad = \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \quad \boldsymbol{\eta} \quad .$$

Bei den im System $\mathcal{K}_0$ zerlegten Vektoren wird hier, wie auch im Folgenden, der Koordinatenindex links oben weggelassen.

Implizite Schließbedingungen auf Lageebene Werden als die sekundären Gelenke der Schleifen I, II und III jeweils die Kugelgelenke gewählt, so gelten entsprechend Abb. 8.26 jeweils $b^{\mathrm{s}}_{\mathrm{L}j} = 3$ (skleronome) sekundäre Bindungen des Typs I aus Tabelle 8.1

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{I}} \equiv (\boldsymbol{c}_{0,\mathrm{I}} + \boldsymbol{d}_{21}) \quad - (\boldsymbol{r}_7 + \boldsymbol{c}_{7,\mathrm{I}}) \quad = \mathbf{0}\,, \tag{8.229}$$

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{II}} \equiv (\boldsymbol{c}_{0,\mathrm{II}} + \boldsymbol{d}_{43}) \quad - (\boldsymbol{r}_7 + \boldsymbol{c}_{7,\mathrm{II}}) \quad = \mathbf{0}\,, \tag{8.230}$$

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{s}}_{\mathrm{III}} \equiv (\boldsymbol{c}_{0,\mathrm{III}} + \boldsymbol{d}_{65}) - (\boldsymbol{r}_7 + \boldsymbol{c}_{7,\mathrm{III}}) = \mathbf{0} \tag{8.231}$$

mit den Vektoren $\boldsymbol{d}_{21} = \boldsymbol{d}_{11} + \boldsymbol{d}_{22}$, $\boldsymbol{d}_{43} = \boldsymbol{d}_{33} + \boldsymbol{d}_{44}$ und $\boldsymbol{d}_{65} = \boldsymbol{d}_{55} + \boldsymbol{d}_{66}$.

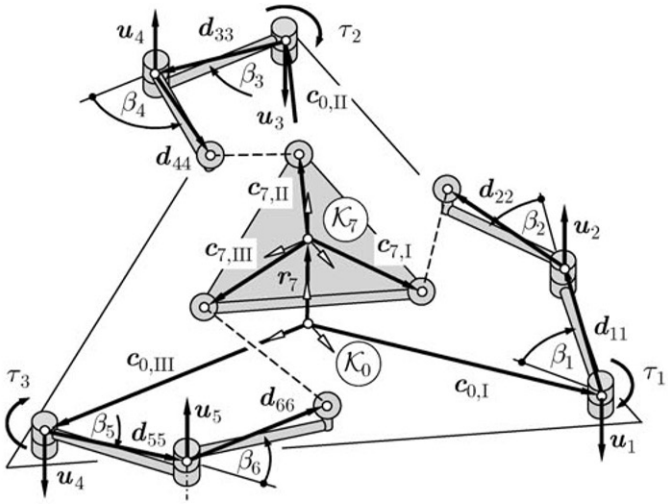


Abb. 8.26 Aufspannender Baum zum kinematischen Modell 3 aus Tabelle 8.10

Werden in die sekundären Bindungen (8.229) bis (8.229) der Ortsvektor des Endeffektors $\boldsymbol{r}_7$, die endeffektorfesten Vektoren

$$\boldsymbol{c}_{7,i} = {}^{07}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta}_7)\,{}^{7}\boldsymbol{c}_{7,i}\,, \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\,, \tag{8.232}$$

mit der Transformationsmatrix ${}^{07}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\beta}_7)$ von $\mathcal{K}_7$ nach $\mathcal{K}_0$ entsprechend (3.155) sowie die Vektoren der Führungsketten $\boldsymbol{d}_{21}(\beta_1, \beta_2)$, $\boldsymbol{d}_{43}(\beta_3, \beta_4)$, $\boldsymbol{d}_{65}(\beta_5, \beta_6)$ eingesetzt, so gehen daraus die insgesamt $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = 9$ impliziten Schließbedingungen in den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ aus (8.226) hervor,

$$\boldsymbol{g}^{\ell}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{0}\,. \tag{8.233}$$

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Für die drei geschnittenen Kugelgelenke lauten die jeweils $b_j^{\mathrm{s}} = 3$ sekundären Bindungen auf Geschwindigkeitsebene des Typs I aus Tabelle 8.1

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{I}} & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\
&\rightarrow \quad \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_7 + \boldsymbol{G}_{2,\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{0}\,, \\
\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{II}} & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_4 \\ \boldsymbol{v}_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\
&\rightarrow \quad \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_7 + \boldsymbol{G}_{4,\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_4 = \boldsymbol{0}\,, \\
\boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{s}} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{III}} & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_6 \\ \boldsymbol{v}_6 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\
&\rightarrow \quad \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{III}}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_7 + \boldsymbol{G}_{6,\mathrm{III}}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}}_6 = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{8.234}$$

oder in der Blockmatrizendarstellung entsprechend (8.86)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{cccccc|c} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{2,\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{4,\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{G}_{6,\mathrm{III}}^{\mathrm{s}} & \boldsymbol{G}_{7,\mathrm{III}}^{\mathrm{s}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_4 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_5 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_6 \\ \hline \hat{\boldsymbol{v}}_7 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{8.235}$$

$$\rightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}^{\mathrm{s}} \equiv \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}} \quad \hat{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{0}\,.$$

Die räumlichen Geschwindigkeiten der Körper $\hat{\boldsymbol{v}}_i$ werden mit Hilfe der expliziten Bindungen des aufspannenden Baumes durch die Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ ausgedrückt. Für die beiden Führungslenker in Schleife I gilt

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{d}_{11} \end{bmatrix} \dot{\beta}_1 \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\boldsymbol{d}_{21} \end{bmatrix} \dot{\beta}_1 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_2 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\boldsymbol{d}_{22} \end{bmatrix} \dot{\beta}_2 \tag{8.236}$$

$$\rightarrow \hat{\boldsymbol{v}}_1 = \boldsymbol{J}_{11} \quad \eta_1\,, \qquad \rightarrow \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{J}_{21} \quad \eta_1 + \boldsymbol{J}_{22} \quad \eta_2\,.$$

Die Bindungen der beiden anderen Führungsketten sind gleich aufgebaut.

Die räumliche Geschwindigkeit des Endeffektors wird unter Berücksichtigung der Transformationsmatrix ${}^{07}\boldsymbol{T}$ durch die Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ ausgedrückt,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^{07}\boldsymbol{T} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{7}\boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}}_7 &= \boldsymbol{J}_{77} \qquad \boldsymbol{\eta}_7 \quad . \end{aligned} \tag{8.237}$$

Mit (8.236) und (8.237) liegen die expliziten Geschwindigkeitsbindungen des aufspannenden Baumes in der Darstellung von (8.87) vor,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{v}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_3 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_4 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_5 \\ \hat{\boldsymbol{v}}_6 \\ \hline \hat{\boldsymbol{v}}_7 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cccccc|c} \boldsymbol{J}_{11} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{J}_{21} & \boldsymbol{J}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{33} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{43} & \boldsymbol{J}_{44} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{55} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{65} & \boldsymbol{J}_{66} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{J}_{77} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \hline \boldsymbol{\eta}_7 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{v}} &= \boldsymbol{J} \qquad \boldsymbol{\eta} \quad . \end{aligned} \tag{8.238}$$

Einsetzen von (8.238) in (8.235) ergibt die impliziten Schließbedingungen in den primären Gelenkkoordinaten in der Form von (8.83),

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccccc|cc} \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\boldsymbol{d}_{21} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\boldsymbol{d}_{22} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{I}}\,{}^{07}\boldsymbol{T} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\boldsymbol{d}_{43} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_4\boldsymbol{d}_{44} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{II}}\,{}^{07}\boldsymbol{T} & -\boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_5\boldsymbol{d}_{65} & \widetilde{\boldsymbol{u}}_6\boldsymbol{d}_{66} & \widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{III}}\,{}^{07}\boldsymbol{T} & -\boldsymbol{E} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \hline {}^{7}\boldsymbol{\omega}_7 \\ \boldsymbol{v}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}^{\ell} \qquad \boldsymbol{\eta} \quad = \boldsymbol{0} \quad . \end{aligned} \tag{8.239}$$

Implizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung von (8.199) liefert die impliziten Schließbedingungen in der Form (8.93)

$$\boldsymbol{G}^{\ell}(\boldsymbol{\beta})\,\dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell}(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{0} \qquad \text{mit} \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \dot{\boldsymbol{G}}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta}\,. \tag{8.240}$$

Der von den Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ unabhängige Term lautet

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} = \dot{\boldsymbol{G}}^{\ell}\,\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{u}}_1\,\dot{\boldsymbol{d}}_{21}\,\eta_1 + \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\,\dot{\boldsymbol{d}}_{22}\,\eta_2 + \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_{7,\mathrm{I}}\,\boldsymbol{\omega}_7 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\,\dot{\boldsymbol{d}}_{43}\,\eta_3 + \widetilde{\boldsymbol{u}}_4\,\dot{\boldsymbol{d}}_{44}\,\eta_4 + \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_{7,\mathrm{II}}\,\boldsymbol{\omega}_7 \\ \widetilde{\boldsymbol{u}}_5\,\dot{\boldsymbol{d}}_{65}\,\eta_5 + \widetilde{\boldsymbol{u}}_6\,\dot{\boldsymbol{d}}_{66}\,\eta_6 + \dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_{7,\mathrm{III}}\,\boldsymbol{\omega}_7 \end{bmatrix} \tag{8.241}$$

mit den Vektoren

$$\begin{aligned} &\dot{\boldsymbol{c}}_{7,i} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_7\,\boldsymbol{c}_{7,i}\,, \quad i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}\,, \\ &\dot{\boldsymbol{d}}_{21} = \boldsymbol{v}_2\,, \qquad \dot{\boldsymbol{d}}_{43} = \boldsymbol{v}_4\,, \qquad \dot{\boldsymbol{d}}_{65} = \boldsymbol{v}_6\,, \\ &\dot{\boldsymbol{d}}_{22} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2\,\boldsymbol{d}_{22}\,, \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{44} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_4\,\boldsymbol{d}_{44}\,, \quad \dot{\boldsymbol{d}}_{66} = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_6\,\boldsymbol{d}_{66}\,. \end{aligned} \tag{8.242}$$

Explizite Reaktionsbedingungen Die auf die Gelenkkoordinaten des aufspannenden Baumes bezogenen verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ werden mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingungen (8.124) in Abhängigkeit von den zu den Bindungen (8.88) gehörenden, insgesamt $b^{\mathrm{s}} = 9$ sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ ausgedrückt,

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}}\,\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}\,. \tag{8.243}$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Die kinetischen Bewegungsgleichungen setzen sich aus den drei Bewegungsgleichungen der kinematischen Führungsketten und den Bewegungsgleichungen des Endeffektors zusammen.

Die Bewegungsgleichung der Führungskette in Schleife I hat den Aufbau

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1^{\mathrm{c}} \\ k_2^{\mathrm{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1^{\mathrm{s}} \\ k_2^{\mathrm{s}} \end{bmatrix}. \tag{8.244}$$

Die Elemente der Massenmatrix M_{ij} und des Vektors der verallgemeinerten Coriolis-Kräfte k_i^{c} können aus den Bewegungsgleichungen der Schubkurbel (8.179) übernommen werden. Als verallgemeinerte eingeprägte Kraft wird das Antriebsmoment τ_1 am gestellseitigen Drehgelenk berücksichtigt. Die verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte k_j^{s} werden mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingungen (8.243) in Abhängigkeit von den sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ ausgedrückt, siehe (8.246). Die Bewegungsgleichungen der beiden anderen Führungsketten haben den gleichen Aufbau.

Für den Endeffektor gelten die kinetischen Bewegungsgleichungen eines starren Körpers im Raum mit dem in $\mathcal{K}_7$ konstanten Trägheitstensor ${}^7\boldsymbol{\Theta}_7$,

$$\begin{bmatrix} {}^7\boldsymbol{\Theta}_7 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_7\,\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^7\dot{\boldsymbol{\omega}}_7 \\ \dot{\boldsymbol{v}}_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^7(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_7\,\boldsymbol{\Theta}_7\,\boldsymbol{\omega}_7) \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -m_7\,g\,\boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^7\boldsymbol{\tau}_7^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_7^{\mathrm{s}} \end{bmatrix}. \tag{8.245}$$

Da die Beschleunigungen ${}^7\dot{\boldsymbol{\omega}}_7$ und $\dot{\boldsymbol{v}}_7$ zugleich Gelenkbeschleunigungen des aufspannenden Baumes sind, ist der sekundäre Reaktionskraftwinder $({}^7\boldsymbol{\tau}_7^{\mathrm{s}},\ \boldsymbol{f}_7^{\mathrm{s}})$ im Vektor der verallgemeinerten Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ aus (8.243) enthalten.

Die kinetischen Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems werden aus den kinetischen Gleichungen der drei Führungsketten entsprechend (8.244) und den kinetischen Gleichungen der Plattform (8.245) unter Berücksichtigung der verallgemeinerten sekundären Reaktionskräfte $\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}}$ aus (8.243) aufgebaut,

$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{cccccc|cc}
M_{11} & M_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
M_{21} & M_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
0 & 0 & M_{33} & M_{43} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
0 & 0 & M_{43} & M_{44} & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & M_{55} & M_{65} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
0 & 0 & 0 & 0 & M_{65} & M_{66} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^{7}\boldsymbol{\Theta}_7 & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & m_7\,\boldsymbol{E}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \\ \dot{\eta}_3 \\ \dot{\eta}_4 \\ \dot{\eta}_5 \\ \dot{\eta}_6 \\ \hline {}^{7}\dot{\boldsymbol{\omega}}_7 \\ \dot{\boldsymbol{v}}_7
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
k_1^{\mathrm{c}} \\ k_2^{\mathrm{c}} \\ k_3^{\mathrm{c}} \\ k_4^{\mathrm{c}} \\ k_5^{\mathrm{c}} \\ k_6^{\mathrm{c}} \\ \hline -{}^{7}(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_7\,\boldsymbol{\Theta}_7\,\boldsymbol{\omega}_7) \\ \mathbf{0}
\end{array}\right]
+ \\
\rightarrow \quad \boldsymbol{M} \qquad\qquad \dot{\boldsymbol{\eta}} \quad = \quad \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} \quad +
\end{array}
$$

$$
+
\left[\begin{array}{c}
\tau_1 \\ 0 \\ \tau_2 \\ 0 \\ \tau_3 \\ 0 \\ \hline 0 \\ -m_7\,\boldsymbol{e}_z
\end{array}\right]
+
\left[\begin{array}{ccc}
-\boldsymbol{d}_{21}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-\boldsymbol{d}_{22}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & -\boldsymbol{d}_{43}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_3 & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & -\boldsymbol{d}_{44}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_4 & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{d}_{65}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_5 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{d}_{66}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{u}}_6 \\
\hline
-{}^{07}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{I}} & -{}^{07}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{II}} & -{}^{07}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_{7,\mathrm{III}} \\
-\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathrm{III}}^{\mathrm{s}}
\end{array}\right]
\tag{8.246}
$$

$$
+ \quad \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \quad + \qquad \boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} \qquad \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \ .
$$

Nichtrekursive Auflösung der Gleichungen Zu einem Zeitpunkt t mit bekannter Lage $\boldsymbol{\beta}$ und Geschwindigkeit $\boldsymbol{\eta}$ können die primären Gelenkbeschleunigungen $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ und die Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ aus dem folgenden linearen Gleichungssystem berechnet werden, vgl. (8.126):

$$
\begin{array}{l}
(8.246): \\
(8.240):
\end{array}
\quad
\left[\begin{array}{cc}
\boldsymbol{M} & -\boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} \\
-\boldsymbol{G}^{\ell} & \mathbf{0}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
\dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\gamma}}^{\ell}
\end{array}\right].
\tag{8.247}
$$

Zusammen mit den kinematischen Bewegungsgleichungen (8.228) liegen damit die Zustandsgleichungen (8.118) vor. Entsprechend (8.119) und (8.120) müssen die Anfangsbedingungen $\boldsymbol{\beta}(0)$ und $\boldsymbol{\eta}(0)$ mit den Schließbedingungen auf Lageebene (8.233) und auf Geschwindigkeitsebene (8.239) konsistent sein.

8.9 Auf einer rotierenden Ebene rollende Kugel

Ein klassisches Beispiel eines nichtholonomen Systems ist eine homogene Kugel, die entsprechend Abb. 8.27 auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden ebenen Unterlage schlupffrei abrollt, siehe z.B. auch NEĬMARK und FUFAEV [67] und HILLER [38]. Für die Bewegung des Kugelmittelpunktes O_2 wird eine analytische Lösung erhalten. Hierzu ist es günstig, die Bewegungsgleichungen in den absoluten Körperkoordinaten der Kugel aufzustellen. Mit einer gedachten Gelenkkette mit drei Schubgelenken und einem Kugelgelenk hat das Modell dann die in Abb. 8.27 b gezeigte Topologie mit einer gedachten kinematischen Schleife.

Die Abrollbewegung der Kugel auf der Ebene besitzt entsprechend Abschnitt 6.7.1 den Lage-Freiheitsgrad $f_{\mathrm{L}} = 5$ und den Freiheitsgrad $f = 3$. Die Drehung der Unterlage ist wegen des rheonom geführten Drehwinkels Ωt kein Freiheitsgrad.

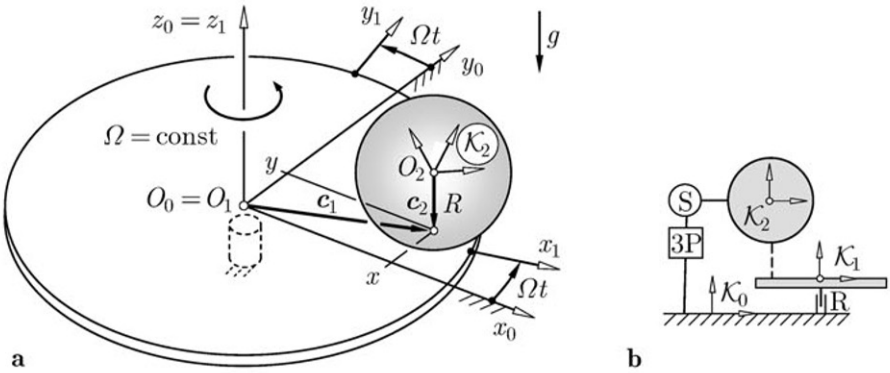


Abb. 8.27 Auf einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω rotierenden Ebene abrollende Kugel. **a** Mehrkörpermodell. **b** Topologie

8.9.1 Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkkoordinaten

Primäre Gelenkkoordinaten und -geschwindigkeiten Die primären Gelenkkoordinaten des aufspannenden Baumes sind die absoluten Lagekoordinaten der Kugel $\mathcal{K}_2$ relativ zum raumfesten System $\mathcal{K}_0$, bestehend aus den EULER-Parametern $\underline{\boldsymbol{p}}_2$ und den Vektorkoordinaten $\boldsymbol{r}_2$ (alle Vektoren im System $\mathcal{K}_0$ dargestellt)

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_2 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \underline{\boldsymbol{p}}_2 = \begin{bmatrix} p_{\mathrm{s}} \\ \hline p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{8.248}$$

Bei den skalaren Lagekoordinaten der Kugel wird der Körperindex 2 zur Vereinfachung der Schreibweise weggelassen. Der rheonom geführte Drehwinkel der Unterlage ist keine primäre Gelenkkoordinate.

Als die primären Gelenkgeschwindigkeiten werden die Koordinaten der Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}_2$ und der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_2$ von $\mathcal{K}_2$ relativ zu $\mathcal{K}_0$ (Darstellungen im System $\mathcal{K}_0$) definiert,

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}. \tag{8.249}$$

Die kinematischen Bewegungsgleichungen entsprechend (8.73) lauten mit der kinematischen Matrix der EULER-Parameter $\boldsymbol{H}_2$ aus (6.91)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\boldsymbol{p}}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{r}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_2(\underline{\boldsymbol{p}}_2) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} &= \boldsymbol{H}(\boldsymbol{\beta}) \qquad \boldsymbol{\eta} \ . \end{aligned} \tag{8.250}$$

Implizite Schließbedingungen auf Lageebene Die $b_{\mathrm{L}}^{\mathrm{s}} = 1$ sekundäre geometrische Bindung (6.110) für die auf einer Ebene abrollende Kugel (Radius R) lautet mit der z-Koordinate des Vektors $\boldsymbol{r}_2$

$$g^{\mathrm{s}} \equiv z - R = 0\,. \tag{8.251}$$

Da z entsprechend (8.248) zu den primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ gehört, repräsentiert die sekundäre Bindung (8.251) zugleich die implizite Schließbedingung $g^{\ell} \equiv z - R = 0$.

Implizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Die $b^{\mathrm{s}} = 3$ sekundären kinematischen Bindungen (6.114) lauten

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &\equiv \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_1 & -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_2 & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}_1^{\mathrm{s}} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_1 \quad + \quad \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{s}} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}_2 \quad = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{8.252}$$

mit den Vektorkoordinaten in $\mathcal{K}_0$

$$\boldsymbol{c}_1 = \begin{bmatrix} x & y & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{8.253}$$

Einsetzen der expliziten Geschwindigkeitsbindungen des Bezugssystems $\mathcal{K}_1$ der rheonom geführten Unterlage und des kugelfesten Bezugssystems $\mathcal{K}_2$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{v}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega\, \boldsymbol{e}_{z0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \ \hat{\boldsymbol{v}}_1 &= \boldsymbol{J}_1 \quad \boldsymbol{\eta} \quad + \quad \bar{\hat{\boldsymbol{v}}}_1 \quad , \qquad \rightarrow \ \hat{\boldsymbol{v}}_2 = \boldsymbol{J}_2 \quad \boldsymbol{\eta} \end{aligned} \tag{8.254}$$

in die sekundären Bindungen (8.252) liefert die impliziten Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene gemäß (8.83)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_2 & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} + \Omega\, \widetilde{\boldsymbol{c}}_1\, \boldsymbol{e}_{z0} &= \boldsymbol{0} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{G}^\ell \quad \boldsymbol{\eta} \quad + \quad \bar{\boldsymbol{\gamma}}^\ell &= \boldsymbol{0}\,. \end{aligned} \tag{8.255}$$

Der Term $\bar{\boldsymbol{\gamma}}^\ell$ geht auf die rheonom geführte Drehung der Unterlage zurück. Im System $\mathcal{K}_0$ gilt

$$\boldsymbol{G}^\ell = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -R & 0 & 1 & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \qquad \bar{\boldsymbol{\gamma}}^\ell = \begin{bmatrix} \Omega\, y \\ -\Omega\, x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.256}$$

Implizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung der Schließbedingungen (8.255) liefert unter Berücksichtigung von $\dot{\Omega} = 0$ die impliziten Schließbedingungen

$$\boldsymbol{G}^\ell\, \dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^\ell = \boldsymbol{0} \qquad \text{mit} \qquad \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^\ell = \dot{\boldsymbol{G}}^\ell\, \boldsymbol{\eta} + \dot{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^\ell = \begin{bmatrix} \Omega\, \dot{y} \\ -\Omega\, \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.257}$$

Impuls- und Drallsätze Für die freigeschnittene rotierende Unterlage (Masse m_1, Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_1$ bzgl. O_1) lauten die Impuls- und Drallsätze

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_1\, \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{v}}_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1\, \boldsymbol{\Theta}_1\, \boldsymbol{\omega}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -m_1\, g\, \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{p}} \\ \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{p}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{a}}_1 \quad &= \quad \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{c}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{s}}\,. \end{aligned} \tag{8.258}$$

Der primäre Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{p}}$ enthält die Lagerreaktionen des Drehgelenks sowie das Antriebsmoment als Reaktionsmoment zur Realisierung der rheonomen Bindung $\Omega = \text{const}$. Als eingeprägte Kraft wird die Gewichtskraft berücksichtigt. Das Kreiselmoment $-\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_1\, \boldsymbol{\Theta}_1\, \boldsymbol{\omega}_1$ verschwindet, wenn der Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_1$ bezüglich der Drehachse zylindersymmetrisch ist.

Die Impuls- und Drallsätze für die homogene Kugel (Masse m_1, Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}_2 = m_2\, \kappa^2\, \boldsymbol{E}$ bezüglich $O_2 \equiv S_2$, Trägheitsradius κ mit $\kappa^2 = \frac{2}{5}\, R^2$) lauten

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_2\, \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \\ \dot{\boldsymbol{v}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2\, \boldsymbol{\Theta}_2\, \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -m_2\, g\, \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \widehat{\boldsymbol{M}}_2 \quad \hat{\boldsymbol{a}}_2 \quad &= \quad \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{c}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{e}} \quad + \quad \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{s}}\,. \end{aligned} \tag{8.259}$$

Wegen des kugelsymmetrischen Trägheitstensors ist $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_2\, \boldsymbol{\Theta}_2\, \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{0}$.

Explizite Reaktionsbedingungen Die sekundären Reaktionskraftwinder $\hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{s}}$ in (8.258) und $\hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{s}}$ in (8.259) werden mit Hilfe der expliziten Reaktionsbedingungen durch die $b^{\mathrm{s}} = 3$ sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}$ ausgedrückt,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{S1}^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_1^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\widetilde{\boldsymbol{c}}_1 \\ -\boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} & \qquad \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{s}} \\ \boldsymbol{f}_2^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{c}}_2 \\ \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \\ \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{s}} &= \boldsymbol{G}_1^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \; \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}}, & \rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{s}} &= \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \; \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} . \end{aligned} \tag{8.260}$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Mit den aus (8.254) folgenden expliziten primären Gelenkbindungen auf Beschleunigungsebene

$$\hat{\boldsymbol{a}}_1 = \boldsymbol{J}_1 \, \dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{J}_1 = \boldsymbol{0} \, , \qquad \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1 = \boldsymbol{0} \, , \tag{8.261}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_2 = \boldsymbol{J}_2 \, \dot{\boldsymbol{\eta}} + \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2 \qquad \text{mit} \qquad \boldsymbol{J}_2 = \boldsymbol{E} \, , \qquad \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2 = \boldsymbol{0} \tag{8.262}$$

lauten die kinetische Bewegungsgleichungen in den primären Gelenkgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\eta}$ entsprechend (8.123)

$$\boldsymbol{M} \, \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} \tag{8.263}$$

mit den Termen gemäß (7.103), (7.104) und (7.105)

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \, \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_2 \, \boldsymbol{J}_2 = \begin{bmatrix} m_2 \, \kappa^2 \, \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_2 \, \boldsymbol{E} \end{bmatrix} , \tag{8.264}$$

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}} = -\boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_1 \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_1 + \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{c}} - \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \, \widehat{\boldsymbol{M}}_2 \, \bar{\hat{\boldsymbol{a}}}_2 + \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{c}} = \boldsymbol{0} \, , \tag{8.265}$$

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{e}} + \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{e}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -m_2 \, g \, \boldsymbol{e}_z \end{bmatrix} . \tag{8.266}$$

Die verallgemeinerten Reaktionskräfte werden entsprechend (8.124) ausgedrückt,

$$\boldsymbol{k}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{J}_1^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_1^{\mathrm{s}} + \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \, \hat{\boldsymbol{f}}_2^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{J}_2^{\mathrm{T}} \, \boldsymbol{G}_2^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{s}\,\mathrm{T}} \, \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} . \tag{8.267}$$

Das lineare Gleichungssystem (8.126) lautet damit

$$\begin{matrix} (8.263): \\ (8.257): \end{matrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & -\boldsymbol{G}^{\ell\,\mathrm{T}} \\ -\boldsymbol{G}^{\ell} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} \\ \bar{\bar{\boldsymbol{\gamma}}}^{\ell} \end{bmatrix} \tag{8.268}$$

oder ausgeschrieben

$$\left[\begin{array}{cccccc|ccc} m_2\kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R & 0 \\ 0 & m_2\kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2\kappa^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & R & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \dot\omega_x \\ \dot\omega_y \\ \dot\omega_z \\ \dot v_x \\ \dot v_y \\ \dot v_z \\ \hline \lambda_1^{\mathrm{s}} \\ \lambda_2^{\mathrm{s}} \\ \lambda_3^{\mathrm{s}} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -m_2\, g \\ \hline \Omega\, \dot y \\ -\Omega\, \dot x \\ 0 \end{array}\right]. \tag{8.269}$$

Mit $\dot{\boldsymbol\beta}$ aus (8.250) und $\dot{\boldsymbol\eta}$ aus (8.268) liegen die Zustandsgleichungen gemäß (8.118) vor. Entsprechend (8.119) und (8.120) müssen die Anfangsbedingungen $\boldsymbol\beta(0)$ und $\boldsymbol\eta(0)$ mit den Schließbedingungen auf Lageebene (8.251) und auf Geschwindigkeitsebene (8.255) konsistent sein.

Analytische Teillösung der Bewegungsgleichungen Die Bewegung des Kugelmittelpunkts O_2 kann analytisch berechnet werden. Hierzu wird das lineare Gleichungssystem (8.268) bzw. (8.269) entsprechend (5.67) nach den sekundären Reaktionskoordinaten $\boldsymbol\lambda^{\mathrm{s}}$ aufgelöst, indem die sechs oberen Gleichungen von (8.269) nach den Beschleunigungen $\dot\omega_x$, $\dot\omega_y$, $\dot\omega_z$, $\dot v_x$, $\dot v_y$, $\dot v_z$ aufgelöst und in die drei unteren Gleichungen von (8.269) eingesetzt werden,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{\mathrm{s}} \\ \lambda_2^{\mathrm{s}} \\ \lambda_3^{\mathrm{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_2\, \nu\, R\, \dot y \\ m_2\, \nu\, R\, \dot x \\ m_2\, g \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \nu = \frac{\kappa^2\, \Omega}{R^2 + \kappa^2}\,. \tag{8.270}$$

Einsetzen von (8.270) in die vierte und fünfte Gleichung von (8.269) ergibt unter Berücksichtigung von $\dot v_x = \ddot x$ und $\dot v_y = \ddot y$ zwei gekoppelte Differentialgleichungen für die Bewegung $x(t)$, $y(t)$ des Kugelmittelpunkts O_2, die ein homogenes lineares zeitinvariantes System bilden

$$\left.\begin{aligned} \ddot x &= -\nu\, \dot y\,, \\ \ddot y &= \nu\, \dot x \end{aligned}\right\} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot x \\ \ddot y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \nu \\ -\nu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot x \\ \dot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.271}$$

Der Lösungsansatz

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar x \\ \bar y \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mu t} \qquad \text{mit} \qquad \bar x,\ \bar y,\ \mu \ \text{ konstant} \tag{8.272}$$

führt auf das Eigenwertproblem

$$\begin{bmatrix} \mu^2 & \nu\, \mu \\ -\nu\, \mu & \mu^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar x \\ \bar y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8.273}$$

Das lineare Gleichungssystem (8.273) hat Lösungen $\bar{x} \neq 0$, $\bar{y} \neq 0$, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Die sich daraus ergebende charakteristische Gleichung $\mu^2\,(\mu^2 + \nu^2) = 0$ liefert die vier Eigenwerte

$$\mu_{1,2} = \pm \mathrm{i}\,\nu\,, \qquad \mu_{3,4} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{i}^2 = -1\,. \tag{8.274}$$

Das Eigenwertproblem (8.273) ergibt die zu den Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren mit vier freien Konstanten k_1 bis k_4,

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_3 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}. \tag{8.275}$$

Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\nu t} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\nu t} + \begin{bmatrix} k_3 \\ k_4 \end{bmatrix}. \tag{8.276}$$

Nach der Umformung $\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\nu t} = \cos \nu t \pm \mathrm{i} \sin \nu t$ werden mit den Konstanten $k_{1,2} = \frac{1}{2}(c_1 \mp \mathrm{i}\, c_2)$ und $k_{3,4} = c_{3,4}$ ($c_1, \ldots, c_4$ reell) reelle Lösungen erhalten,

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t \\ -c_2 \sin \nu t + c_1 \cos \nu t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \tag{8.277}$$

Dies ist die Parameterdarstellung eines raumfesten Kreises mit dem Mittelpunkt (c_3, c_4) und dem Radius $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Die Konstanten c_1 bis c_4 ergeben sich aus den Anfangsbedingungen $x(0)$, $y(0)$, $\dot{x}(0)$, $\dot{y}(0)$.

Die Kugel durchläuft den Kreis mit der Kreisfrequenz ν. Sie hängt nicht von den Anfangsbedingungen ab und steht in einem festen Verhältnis zur Winkelgeschwindigkeit Ω der Unterlage. Bei einer homogenen Kugel mit dem Trägheitsradius $\kappa^2 = \frac{2}{5}\,R^2$ beträgt sie $\nu = \frac{2}{7}\,\Omega$.

Die parameterfreie Kreisgleichung wird erhalten, indem in (8.277) c_3 und c_4 auf die linke Seite gebracht und die beiden Gleichungen quadriert und addiert werden, $(x - c_3)^2 + (y - c_4)^2 = c_1^2 + c_2^2$.

8.9.2 Bewegungsgleichungen in Minimalform

Minimalkoordinaten Entsprechend dem Lage-Freiheitsgrad $f_\mathrm{L} = 5$ und dem Freiheitsgrad $f = 3$ werden die folgenden Minimalkoordinaten und Minimalgeschwindigkeiten definiert,

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_2 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \tag{8.278}$$

Explizite Schließbedingungen auf Lageebene Mit Hilfe der expliziten Schließbedingungen werden die primären Gelenkkoordinaten $\boldsymbol{\beta}$ aus (8.248) durch die Minimalkoordinaten $\boldsymbol{q}$ ausgedrückt,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_2 \\ \boldsymbol{r}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{p}}_2 \\ x\,\boldsymbol{e}_{x0} + y\,\boldsymbol{e}_{y0} + R\,\boldsymbol{e}_{z0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{q}) \quad . \end{aligned} \tag{8.279}$$

Explizite Schließbedingungen auf Geschwindigkeitsebene Mit der Definition (8.278) und den nach $\boldsymbol{v}_2$ umgestellten impliziten Schließbedingungen (8.255) lauten die expliziten Schließbedingungen

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 \\ \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_2 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\Omega\,\widetilde{\boldsymbol{c}}_1\,\boldsymbol{e}_{z0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{J}^{\ell} \quad \boldsymbol{s} + \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned} \tag{8.280}$$

oder ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \hline \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & R & 0 \\ -R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\Omega\,y \\ \Omega\,x \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \boldsymbol{\eta} &= \boldsymbol{J}^{\ell} \quad \boldsymbol{s} + \quad \bar{\boldsymbol{\eta}} \quad . \end{aligned} \tag{8.281}$$

Explizite Schließbedingungen auf Beschleunigungsebene Die zeitliche Ableitung von (8.280) lautet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \widetilde{\boldsymbol{c}}_2 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\Omega\,\dot{\widetilde{\boldsymbol{c}}}_1\,\boldsymbol{e}_{z0} \end{bmatrix} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} &= \boldsymbol{J}^{\ell} \quad \dot{\boldsymbol{s}} + \quad \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} \end{aligned} \tag{8.282}$$

mit $\dot{\boldsymbol{c}}_1 = \dot{x}\,\boldsymbol{e}_{x0} + \dot{y}\,\boldsymbol{e}_{y0}$ und $\boldsymbol{c}_2 = -R\,\boldsymbol{e}_{z0}$ aus (8.253). Mit $\dot{x} = R\,\omega_y - \Omega\,y$ sowie $\dot{y} = -R\,\omega_x + \Omega\,x$ aus (8.281) ergibt sich

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\Omega\,\dot{y} \\ \Omega\,\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline \Omega\,(R\,\omega_x - \Omega\,x) \\ \Omega\,(R\,\omega_y - \Omega\,y) \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{8.283}$$

Kinematische Bewegungsgleichungen Der kinematische Zusammenhang zwischen den Zeitableitungen der Minimalkoordinaten $\dot{\boldsymbol{q}}$ und den Minimalgeschwindigkeiten $\boldsymbol{s}$ ist durch die rotatorische Gleichung aus (8.250) und die vierte und fünfte Gleichung aus (8.281) definiert, vgl. (8.29) bzw. (8.108)

$$\begin{array}{ccccccc} & \begin{bmatrix} \dot{p}_{\mathrm{s}} \\ \hline \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \hline \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} & = \frac{1}{2} & \begin{bmatrix} -p_x & -p_y & -p_z \\ \hline p_{\mathrm{s}} & p_z & -p_y \\ -p_z & p_{\mathrm{s}} & p_x \\ p_y & -p_x & p_{\mathrm{s}} \\ \hline 0 & 2R & 0 \\ -2R & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline -\Omega\, y \\ \Omega\, x \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{q}} & = & \overline{\boldsymbol{H}} & \boldsymbol{s} & + & \bar{\boldsymbol{h}} \quad . \end{array} \tag{8.284}$$

Kinetische Bewegungsgleichungen Die kinetische Bewegungsgleichung hat die Form (8.162),

$$\overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{q})\, \dot{\boldsymbol{s}} = \bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}) + \bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{s}) \,, \tag{8.285}$$

mit den Termen gemäß (8.166) bis (8.168)

$$\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\, \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{J}^{\ell} = \begin{bmatrix} m_2\,(\kappa^2 + R^2) & 0 & 0 \\ 0 & m_2\,(\kappa^2 + R^2) & 0 \\ 0 & 0 & m_2\,\kappa^2 \end{bmatrix} , \tag{8.286}$$

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}} = -\boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\, \boldsymbol{M}\, \bar{\bar{\boldsymbol{\eta}}} + \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}} \underbrace{\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}}_{\mathbf{0}} = m_2\, R\, \Omega \begin{bmatrix} R\,\omega_y - \Omega\, y \\ -R\,\omega_x + \Omega\, x \\ 0 \end{bmatrix} , \tag{8.287}$$

$$\bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{e}} = \boldsymbol{J}^{\ell^{\mathrm{T}}}\, \boldsymbol{k}^{\mathrm{e}} = \mathbf{0}$$

und $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{k}^{\mathrm{c}}$ und $\boldsymbol{k}^{\mathrm{e}}$ aus (8.264) bis (8.266). Die Auflösung von (8.285) nach $\dot{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ liefert die Zustandsgleichungen

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} \Phi\,(R\,\omega_y - \Omega\, y) \\ -\Phi\,(R\,\omega_x - \Omega\, x) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{mit} & \Phi = \dfrac{R\,\Omega}{R^2 + \kappa^2} \\ \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{s}} & = & \overline{\boldsymbol{M}}^{-1}\, \bar{\boldsymbol{k}}^{\mathrm{c}} \,. & & \end{array} \tag{8.288}$$

Die Zustandsgleichungen (8.284) und (8.288) bilden das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen entsprechend (8.169).

Anhang A
Mathematische Grundlagen

Die kinematischen und kinetischen Gleichungen der Mehrkörperdynamik können mit Hilfe der Matrizenrechnung in kompakter Form dargestellt werden. Die benötigten Grundlagen der Matrizenrechnung und die verwendeten Schreibweisen werden in diesem Abschnitt beschrieben. Ausführliche Darstellungen der Matrizenrechnung geben z.B. Zurmühl und Falk [112] und die VDI-Richtlinie 2739 [104].

A.1 Matrizen

Allgemeine Matrix Die rechteckige (m,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ wird durch das Schema ihrer Elemente a_{ik} gebildet:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} . \tag{A.1}$$

Eine (m,n)-Matrix, deren Elemente sämtlich null sind, heißt Nullmatrix $\mathbf{0}$.

Quadratische Matrix, Diagonalmatrix, Einheitsmatrix Ist die Zeilenanzahl m gleich der Spaltenanzahl n, so wird die (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ als n-reihige quadratische Matrix bezeichnet.

Eine quadratische Matrix heißt Diagonalmatrix, wenn alle Elemente, die nicht auf der Hauptdiagonalen stehen, den Wert 0 haben und mindestens ein Hauptdiagonalelement ungleich null ist:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) . \tag{A.2}$$

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Eine Diagonalmatrix, deren Hauptdiagonalelemente alle gleich 1 sind, heißt Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}. \tag{A.3}$$

Eine n-reihige Einheitsmatrix wird auch durch $\boldsymbol{E}_n$ gekennzeichnet.

Determinante einer Matrix, reguläre und singuläre Matrix Jeder quadratischen (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich eindeutig eine Determinante n-ter Ordnung zuordnen:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{A.4}$$

Eine Determinante wird durch Entwicklung nach einer beliebigen Zeile oder Spalte berechnet. Beispielsweise lautet die Entwicklung einer Determinate 3. Ordnung nach der ersten Zeile

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} = {} & a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{32}\,a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{31}\,a_{23}) \\ & + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22})\ . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Eine quadratische Matrix, deren Determinante von 0 verschieden ist, heißt reguläre Matrix; andernfalls wird sie singulär genannt.

Rang einer Matrix Eine Matrix $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ hat den Rang $r = \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ genau dann, wenn $\boldsymbol{A}$ eine reguläre r-reihige Untermatrix besitzt und alle höherreihigen Untermatrizen von $\boldsymbol{A}$ singulär sind. Ist $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, so ist $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = 0$.

Eine n-reihige Matrix $\boldsymbol{A}$ ist regulär, wenn sie den Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$ besitzt und singulär, wenn ihr Rang $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) < n$ ist.

Transponierte einer Matrix Aus der (m,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ entsteht durch Vertauschen von Spalten und Zeilen die transponierte (n,m)-Matrix $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{A.6}$$

Summe zweier Matrizen Zwei (m,n)-Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden elementweise addiert,

$$\begin{array}{ccccccc} & \boldsymbol{A} & + & \boldsymbol{B} & = & \boldsymbol{C} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \tag{A.7}$$

mit

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \qquad \text{für} \qquad i = 1, \dots, m\,; \quad k = 1, \dots, n\,. \tag{A.8}$$

Produkt zweier Matrizen Die Multiplikation einer (m,p)-Matrix $\boldsymbol{A}$ und einer (p,n)-Matrix $\boldsymbol{B}$ ergibt eine (m,n)-Matrix $\boldsymbol{C}$,

$$\begin{array}{ccccccc} & \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B} & = & \boldsymbol{C} \\ \rightarrow & \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{pn} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mn} \end{bmatrix}. \end{array} \tag{A.9}$$

Zur Berechnung der Elemente c_{ik} werden alle positionsgleichen Elemente der i-ten Zeile von $\boldsymbol{A}$ mit denen der k-ten Spalte von $\boldsymbol{B}$ multipliziert und anschließend sämtliche Produkte addiert,

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}\,, \qquad i = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n\,. \tag{A.10}$$

Es gelten die Beziehungen

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}\,, \tag{A.11}$$

$$\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}\,, \tag{A.12}$$

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}\,, \tag{A.13}$$

$$\det(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) = \det \boldsymbol{A}\, \det \boldsymbol{B} \qquad (\boldsymbol{A}\,,\, \boldsymbol{B} \text{ quadratisch}) \tag{A.14}$$

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,. \tag{A.15}$$

Im Allgemeinen ist $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$.

Inverse einer Matrix Zu jeder regulären (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert genau eine inverse Matrix (Kehrmatrix) $\boldsymbol{A}^{-1}$ mit der Eigenschaft

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}\,. \tag{A.16}$$

Es gelten die Beziehungen

$$(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}\,, \tag{A.17}$$

$$\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\,, \tag{A.18}$$

$$\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\,. \tag{A.19}$$

Orthogonale Matrix Eine quadratische reguläre Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, wenn ihre Transponierte mit ihrer Inversen übereinstimmt:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{-1}\,. \tag{A.20}$$

Damit besteht die Beziehung $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, aus der $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$ folgt. Für $\det \boldsymbol{A} = +1$ heißt die Matrix $\boldsymbol{A}$ eigentlich orthogonal.

Bei jeder orthogonalen Matrix bilden die Zeilen- und Spaltenvektoren je ein System orthogonaler Einheitsvektoren. Die Inverse und Transponierte einer orthogonalen Matrix sind ebenfalls orthogonal. Die Produkte $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ zweier orthogonaler (n,n)-Matrizen sind ebenfalls orthogonal, wobei i. Allg. $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ ist.

Symmetrische und schiefsymmetrische Matrix Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt symmetrisch, wenn sie mit ihrer Transponierten übereinstimmt, also $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ bzw. $a_{ik} = a_{ki}$.

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt schiefsymmetrisch (antisymmetrisch), wenn sie mit ihrer negativen Transponierten übereinstimmt, also $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ bzw. $a_{ik} = -a_{ki}$ und $a_{ii} = 0$.

Jede quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich in eine Summe aus einer symmetrischen Matrix $\boldsymbol{A}_s = \boldsymbol{A}_s^{\mathrm{T}}$ und einer schiefsymmetrischen (antisymmetrischen) Matrix $\boldsymbol{A}_a = -\boldsymbol{A}_a^{\mathrm{T}}$ zerlegen:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_s + \boldsymbol{A}_a \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{A}_s = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right), \quad \boldsymbol{A}_a = \tfrac{1}{2}\left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right). \tag{A.21}$$

Quadratische Form Eine quadratische Form ist ein skalarer Ausdruck der Gestalt

$$\begin{aligned} y(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \\ \rightarrow\; y(\boldsymbol{x}) &= [x_1 \ldots x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_i\,x_k\,. \end{aligned} \tag{A.22}$$

Die Matrix $\boldsymbol{A}$ ist symmetrisch, also $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ bzw. $a_{ij} = a_{ji}$.

Wird die quadratische Form $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$ mit einer allgemeinen (n,n)-Matrix $\boldsymbol{C}$ gebildet, so liefert nur der symmetrische Anteil $\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{C}_s^{\mathrm{T}}$ einen Beitrag zu y , nicht aber der schiefsymmetrische Anteil $\boldsymbol{C}_a = -\boldsymbol{C}_a^{\mathrm{T}}$, also

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}_s\,\boldsymbol{x} + \underbrace{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{C}_a\,\boldsymbol{x}}_{0}\,.$$

Definite quadratische Formen und Matrizen Die quadratische Form $y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ bzw. die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ heißt

- *positiv (negativ) semidefinit*, wenn für beliebige reelle Vektoren $\boldsymbol{x}$ gilt

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \geq 0 \quad (\leq 0)\,, \tag{A.23}$$

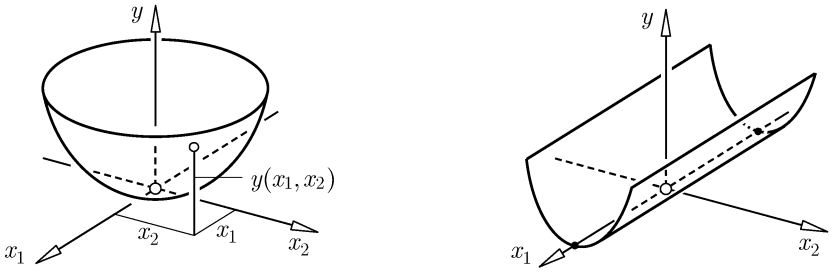
- *positiv (negativ) definit*, wenn für beliebige reelle Vektoren $\boldsymbol{x}$ außer $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ gilt

$$y(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} > 0 \quad (< 0)\,. \tag{A.24}$$

Es gelten folgende Aussagen:

- Eine symmetrische Matrix ist positiv (negativ) definit, wenn alle ihre Eigenwerte größer (kleiner) Null sind. Sie ist positiv (negativ) semidefinit, wenn sie keine negativen (positiven) Eigenwerte besitzt.
- Eine positiv (negativ) definite Matrix ist regulär, während eine positiv (negativ) semidefinite Matrix singulär ist.

Beispiele definiter quadratischer Formen zeigt Abb. A.1 für den Fall $n = 2$.



$$y(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

a

$$y(x_1,x_2) = x_2^2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

b

Abb. A.1 Definite quadratische Formen ($n = 2$). **a** Positiv definite Form. **b** Positiv semidefinite Form

Die positive Definitheit einer Matrix kann auch mit Hilfe des Satzes von Sylvester[1] überprüft werden. Die symmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$ ist dann und nur dann positiv definit, wenn sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten H_i, $i = 1, \ldots, n$, größer null sind, also

$$H_1 = a_{11} > 0\,, \quad H_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0\,, \ \ldots\,, H_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0\,.$$

[1] James Joseph Sylvester, *1814 in London, †1897 in Oxford

A.2 Quaternionen

Die Quaternionen wurden um 1840 von HAMILTON eingeführt [33]. Wesentliche Beiträge sind aber bereits bei EULER und RODRIGUES [88] zu finden.

Eine Quaternion $\hat{\boldsymbol{a}}$ ist eine viergliedrige, komplexe Zahl, bestehend aus einen Realteil a_s mit der reellen Einheit 1 und drei Imaginärteilen a_x, a_y, a_z mit den imaginären Einheiten i, j und k:

$$\underline{\boldsymbol{a}} = a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z \,. \tag{A.25}$$

Für die Produkte der Imaginäreinheiten gelten die Rechenregeln

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1 \,, \tag{A.26}$$

$$\mathrm{i}\,\mathrm{j} = \mathrm{k}\,, \quad \mathrm{j}\,\mathrm{k} = \mathrm{i}\,, \quad \mathrm{k}\,\mathrm{i} = \mathrm{j}\,, \tag{A.27}$$

$$\mathrm{i}\,\mathrm{j} = -\mathrm{j}\,\mathrm{i}\,, \quad \mathrm{j}\,\mathrm{k} = -\mathrm{k}\,\mathrm{j}\,, \quad \mathrm{k}\,\mathrm{i} = -\mathrm{i}\,\mathrm{k}\,. \tag{A.28}$$

Der Zusammenhang zur Vektorrechnung wird erhalten, indem der Realteil a_s als der *Skalarteil* und die Imaginärteile a_x, a_y, a_z als der *Vektorteil* $\boldsymbol{a}$ der Quaternion definiert werden. Im folgenden wird die Spaltenschreibweise als 4-Vektor[2]

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \hline a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{Skalarteil} \\ \text{Vektorteil} \end{matrix} \tag{A.29}$$

verwendet. Aus (A.26) bis (A.28) folgen die Rechenregeln für Quaternionen.

Summe zweier Quaternionen Zwei Quaternionen

$$\underline{\boldsymbol{a}} = a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z \,, \qquad \underline{\boldsymbol{b}} = b_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, b_x + \mathrm{j}\, b_y + \mathrm{k}\, b_z \tag{A.30}$$

werden addiert, indem ihre Anteile addiert werden,

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{c}} &= \underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} \\ \rightarrow \underline{\boldsymbol{c}} &= (a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z) + (b_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, b_x + \mathrm{j}\, b_y + \mathrm{k}\, b_z) \\ \rightarrow \underline{\boldsymbol{c}} &= \underbrace{(a_\mathrm{s} + b_\mathrm{s})}_{c_\mathrm{s}} + \mathrm{i}\underbrace{(a_x + b_x)}_{c_x} + \mathrm{j}\underbrace{(a_y + b_y)}_{c_y} + \mathrm{k}\underbrace{(a_z + b_z)}_{c_z} . \end{aligned} \tag{A.31}$$

In Spaltenschreibweise lautet die Summe zweier Quaternionen

$$\begin{bmatrix} c_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} + b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \end{bmatrix} . \tag{A.32}$$

Die Summe zweier Quaternionen ist kommutativ, $\underline{\boldsymbol{a}} + \underline{\boldsymbol{b}} = \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{a}}$.

---

[2] Andere Schreibweisen für Quaternionen sind $\underline{\boldsymbol{a}} = (a_\mathrm{s}, \boldsymbol{a})$ oder $\underline{\boldsymbol{a}} = a_\mathrm{s} + \boldsymbol{a}$.

Produkt zweier Quaternionen Das Produkt der Quaternionen $\underline{\boldsymbol{a}}$ und $\underline{\boldsymbol{b}}$ aus (A.30) wird hier durch den Multiplikationsoperator $\circ$ gekennzeichnet. Unter Berücksichtigung der Multiplikationsregeln der Imaginäreinheiten (A.26) bis (A.28) gilt

$$\begin{aligned}
&\underline{\boldsymbol{c}} = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} \\
\rightarrow\ &\underline{\boldsymbol{c}} = (a_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, a_x + \mathrm{j}\, a_y + \mathrm{k}\, a_z)(b_\mathrm{s} + \mathrm{i}\, b_x + \mathrm{j}\, b_y + \mathrm{k}\, b_z) \\
\rightarrow\ &\underline{\boldsymbol{c}} = \underbrace{(a_\mathrm{s} b_\mathrm{s} - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z)}_{c_\mathrm{s}} + \mathrm{i}\underbrace{(a_\mathrm{s} b_x + a_x b_\mathrm{s} + a_y b_z - a_z b_y)}_{c_x} + \\
&\quad + \mathrm{j}\underbrace{(a_\mathrm{s} b_y + a_y b_\mathrm{s} + a_z b_x - a_x b_z)}_{c_y} + \mathrm{k}\underbrace{(a_\mathrm{s} b_z + a_z b_\mathrm{s} + a_x b_y - a_y b_x)}_{c_z}.
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Das Produkt zweier Quaternionen ist damit wieder eine Quaternion. Unter Verwendung des Skalar- und Vektorprodukts der Vektorteile lautet dieses Ergebnis in Spaltenschreibweise

$$\begin{aligned}
&\underline{\boldsymbol{c}} \quad = \quad \underline{\boldsymbol{a}} \quad \circ \quad \underline{\boldsymbol{b}} \\
\rightarrow\ &\begin{bmatrix} c_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s}\, b_\mathrm{s} - \boldsymbol{a}^\mathrm{T}\, \boldsymbol{b} \\ a_\mathrm{s}\, \boldsymbol{b} + b_\mathrm{s}\, \boldsymbol{a} + \widetilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Wegen der Einheitenverknüpfungen (A.28) bzw. der Nichtkommutativität des Vektorprodukts, $\widetilde{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = -\widetilde{\boldsymbol{b}}\, \boldsymbol{a}$, ist das Produkt zweier Quaternionen nicht kommutativ, $\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} \neq \underline{\boldsymbol{b}} \circ \underline{\boldsymbol{a}}$. Es gelten die weiteren Rechenregeln

$$\underline{\boldsymbol{a}} \circ (\underline{\boldsymbol{b}} \circ \underline{\boldsymbol{c}}) = (\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}}) \circ \underline{\boldsymbol{c}} = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} \circ \underline{\boldsymbol{c}} \qquad \text{(Assoziativgesetz)}, \tag{A.35}$$

$$\underline{\boldsymbol{a}} \circ (\underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{c}}) = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{c}} \qquad \text{(Distributivgesetz)}. \tag{A.36}$$

Konjugierte Quaternion In Analogie zu den gewöhnlichen komplexen Zahlen wird die zu einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ konjugierte Quaternion $\overline{\underline{\boldsymbol{a}}}$ so definiert, dass die drei Imaginärteile, also der Vektorteil $\boldsymbol{a}$, das umgekehrte Vorzeichen haben,

$$\underline{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \overline{\underline{\boldsymbol{a}}} = \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ -\boldsymbol{a} \end{bmatrix}. \tag{A.37}$$

Die konjugierte Quaternion des Produkts $\underline{\boldsymbol{c}} = \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}}$ lautet unter Berücksichtigung von (A.34)

$$\overline{\underline{\boldsymbol{c}}} = \overline{\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}}} = \overline{\underline{\boldsymbol{b}}} \circ \overline{\underline{\boldsymbol{a}}}\,. \tag{A.38}$$

Quaternionenprodukt als Matrizenprodukt Das Produkt zweier Quaternionen $\underline{\boldsymbol{a}}$ und $\underline{\boldsymbol{b}}$ kann auch durch das Produkt einer (4,4)-Matrix mit einem 4-Vektor dargestellt werden, indem entweder der erste Faktor $\underline{\boldsymbol{a}}$ oder der zweite Faktor $\underline{\boldsymbol{b}}$ aus dem Produkt (A.34) als 4-Vektor nach rechts herausgelöst

wird. Herauslösen des zweiten Faktors $\underline{\boldsymbol{b}}$ ergibt

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} & -\boldsymbol{a}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{a} & a_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} + \widetilde{\boldsymbol{a}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \\ \rightarrow\ \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \qquad \underline{\boldsymbol{A}}(\underline{\boldsymbol{a}}) \qquad\quad \underline{\boldsymbol{b}} \quad . \end{aligned} \tag{A.39}$$

Herauslösen des ersten Faktors $\underline{\boldsymbol{a}}$ liefert dagegen

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \begin{bmatrix} b_\mathrm{s} & -\boldsymbol{b}^\mathrm{T} \\ \boldsymbol{b} & b_\mathrm{s}\,\boldsymbol{E} - \widetilde{\boldsymbol{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_\mathrm{s} \\ \boldsymbol{a} \end{bmatrix} \\ \rightarrow\ \underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{b}} &= \qquad \overline{\underline{\boldsymbol{B}}}(\underline{\boldsymbol{b}}) \qquad\quad \underline{\boldsymbol{a}} \quad . \end{aligned} \tag{A.40}$$

Betrag (Norm) einer Quaternion Der Betrag oder die Norm $|\underline{\boldsymbol{a}}|$ einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ ist eine reelle Zahl (Skalar) und lautet

$$|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{a_\mathrm{s}^2 + \boldsymbol{a}^\mathrm{T}\,\boldsymbol{a}} = \sqrt{a_\mathrm{s}^2 + a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{A.41}$$

Mit (A.34) und (A.37) ist $|\underline{\boldsymbol{a}}| = \sqrt{\underline{\boldsymbol{a}} \circ \overline{\underline{\boldsymbol{a}}}}$.

Einsquaternion Das neutrale Element der Multiplikation von Quaternionen ist die Einsquaternion mit dem Nullvektor als Vektorteil,

$$\underline{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{A.42}$$

Es gilt $\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\mathbf{1}} = \underline{\mathbf{1}} \circ \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{a}}$.

Inverse Quaternion Die Inverse $\underline{\boldsymbol{a}}^{-1}$ einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ wird so definiert, dass das Produkt $\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{a}}^{-1}$ die Einsquaternion ergibt,

$$\underline{\boldsymbol{a}} \circ \underline{\boldsymbol{a}}^{-1} = \underline{\boldsymbol{a}}^{-1} \circ \underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\mathbf{1}}\,. \tag{A.43}$$

Die Inverse einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ lautet

$$\underline{\boldsymbol{a}}^{-1} = \frac{\overline{\underline{\boldsymbol{a}}}}{|\underline{\boldsymbol{a}}|^2}\,. \tag{A.44}$$

Einheitsquaternion Eine Quaternion, deren Betrag gleich 1 ist, wird Einheitsquaternion genannt. Die Einheitsquaternion $\underline{\boldsymbol{e}}$ einer Quaternion $\underline{\boldsymbol{a}}$ ist

$$\underline{\boldsymbol{e}} = \frac{\underline{\boldsymbol{a}}}{|\underline{\boldsymbol{a}}|}\,. \tag{A.45}$$

Mit (A.44) und $|\underline{\boldsymbol{e}}| = 1$ stimmen die inverse und die konjugierte Einheitsquaternion überein,

$$\underline{\boldsymbol{e}}^{-1} = \overline{\underline{\boldsymbol{e}}}\,. \tag{A.46}$$

Wegen (A.43) ist $\underline{\boldsymbol{e}} \circ \overline{\underline{\boldsymbol{e}}} = \overline{\underline{\boldsymbol{e}}} \circ \underline{\boldsymbol{e}} = \underline{\mathbf{1}}$.

Anhang B
Zur Integrierbarkeit kinematischer Bindungen

Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Integrierbarkeit von Systemen kinematischer Bindungen liefert der *Satz von* FROBENIUS.[1] Er liegt in zwei gleichwertigen, zueinander komplementären Formulierungen vor:

- Ausgehend von *impliziten* kinematischen Bindungen werden die *kotangentialen* Vektorfelder analysiert, wobei der Kalkül der *Differentialformen* verwendet wird (GROCHE et al. [30], MÜLLER [65]).
- Ausgehend von *expliziten* kinematischen Bindungen werden die *tangentialen* Vektorfelder analysiert, wobei die Rechenoperation der LIE-*Klammer*[2] angewandt wird. Auf Grund ihrer Anschaulichkeit wird hier diese Formulierung gewählt, siehe z.B. MURRAY et al. [66] und DE LUCA und ORIOLO [17]. Die Vorgehensweise wird zunächst für den zweirädrigen Wagen aus Abschnitt 5.4 eingeführt und anschließend auf Systeme kinematischer Bindungen verallgemeinert und durch weitere Beispiele veranschaulicht.

B.1 Wagen mit zwei Rädern (Kufe)

Für den zweirädrigen Wagen bzw. die Kufe aus Abb. B.1 a lautet die implizite kinematische Bindung (5.117) mit dem jetzt mit $\boldsymbol{x}$ bezeichneten Lagevektor

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = 0 \\ \rightarrow \quad &\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \qquad\qquad \dot{\boldsymbol{x}} = 0 \ . \end{aligned} \tag{B.1}$$

Die Bindung (B.1) ist integrierbar, falls eine geometrische Bindung bzw. Mannigfaltigkeit $g(\boldsymbol{x}) = 0$ existiert. Bedingungen hierfür können durch die Analyse der expliziten kinematischen Bindung (5.123)

[1] FERDINAND GEORG FROBENIUS, *1849 in Berlin, †1917 in Charlottenburg (heute Berlin)

[2] MARIUS SOPHUS LIE, *1842 in Nordfjordeid, †1899 in Kristiania (heute Oslo)

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

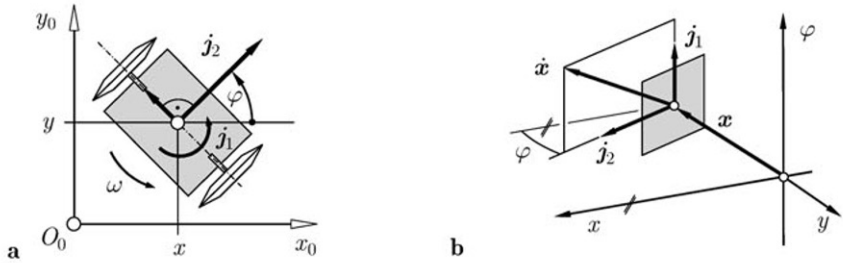


Abb. B.1 Wagen mit zwei Rädern. **a** Kinematisches Modell. **b** Zulässige Geschwindigkeit

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\varphi \\ 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ v \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{j}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{j}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \tag{B.2}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} \quad = \quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{\eta}$$

mit den beiden unabhängigen Geschwindigkeiten $\eta_1 = \omega$ und $\eta_2 = v$ formuliert werden. Die Spaltenvektoren $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ der Matrix $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ unterliegen der Orthogonalitätsbedingung (5.124), also $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{j}_1 = 0$ und $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{j}_2 = 0$. Sie ordnen einer Lage $\boldsymbol{x}$ des Systems einen Vektor $\boldsymbol{j}_1$ bzw. $\boldsymbol{j}_2$ zu und definieren auf diese Weise jeweils ein *Vektorfeld*. In einer Lage $\boldsymbol{x}$ liegen alle von den Bindungen her zulässigen Geschwindigkeiten $\dot{\boldsymbol{x}}$ in dem von $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ aufgespannten zweidimensionalen Vektorraum, der in der Differentialgeometrie auch als *Distribution* $\Delta(\boldsymbol{x})$ bezeichnet wird (Abb. B.1 b),

$$\Delta(\boldsymbol{x}) = \operatorname{span}\{\, \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}) \,\}\,. \tag{B.3}$$

Die Dimension $\dim(\Delta)$ der Distribution $\Delta(\boldsymbol{x})$ ist als der Rang der zugehörigen Matrix $\boldsymbol{J} = [\,\boldsymbol{j}_1\ \ \boldsymbol{j}_2\,]$ definiert. Im Beispiel ist $\dim(\Delta) = 2$. Eine Distribution $\Delta(\boldsymbol{x})$ ist regulär, falls $\dim(\Delta(\boldsymbol{x}))$ in jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ gleich der Anzahl der Vektorfelder in $\Delta(\boldsymbol{x})$ ist. Im vorliegenden Beispiel ist dies der Fall.

Die Anschauung zeigt bereits, dass der Wagen trotz seiner auf zwei Richtungen $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ beschränkten lokalen Beweglichkeit durch geeignete Steuerfunktionen $\eta_1(t)$ und $\eta_2(t)$ in jede beliebige Lage $\boldsymbol{x}$ gebracht werden kann. Offenbar existiert damit keine geometrische Bindung. Dies bedeutet, dass die kinematische Bindung (B.1) nichtholonom ist.

Mathematisch begründet sich dieser Sachverhalt darin, dass hintereinander ausgeführte Bewegungen in jeweils einer der beiden Richtungen $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ nicht kommutativ sind. Dies lässt sich zeigen, indem in einer beliebigen Lage $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$ in vier aufeinander folgenden Zeitintervallen ϵ die in Tabelle B.1 und in Abb. B.2 a gezeigten, abschnittsweise konstanten Steuerfunktionen $\eta_1(t)$ und $\eta_2(t)$ angewandt werden. Die sich daraus ergebenden Bewegungen von der Ausgangslage $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ über die Zwischenlagen $\boldsymbol{x}_\epsilon = \boldsymbol{x}(\epsilon)$, $\boldsymbol{x}_{2\epsilon} = \boldsymbol{x}(2\epsilon)$ und $\boldsymbol{x}_{3\epsilon} = \boldsymbol{x}(3\epsilon)$ in die Endlage $\boldsymbol{x}_{4\epsilon} = \boldsymbol{x}(4\epsilon)$ sind in Abb. B.2 b qualitativ dargestellt.

Tabelle B.1 Steuerfolge der LIE-Klammer

Zeitintervall	Steuerfunktionen		Bewegung	in Richtung von
$0 \le t < \epsilon$	$\eta_1(t) = +1$	$\eta_2(t) = 0$	$\boldsymbol{x}_0 \to \boldsymbol{x}_\epsilon$	$\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}_0)$
$\epsilon \le t < 2\,\epsilon$	$\eta_1(t) = 0$	$\eta_2(t) = +1$	$\boldsymbol{x}_\epsilon \to \boldsymbol{x}_{2\epsilon}$	$\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}_\epsilon)$
$2\,\epsilon \le t < 3\,\epsilon$	$\eta_1(t) = -1$	$\eta_2(t) = 0$	$\boldsymbol{x}_{2\epsilon} \to \boldsymbol{x}_{3\epsilon}$	$-\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}_{2\epsilon})$
$3\,\epsilon \le t < 4\,\epsilon$	$\eta_1(t) = 0$	$\eta_2(t) = -1$	$\boldsymbol{x}_{3\epsilon} \to \boldsymbol{x}_{4\epsilon}$	$-\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}_{3\epsilon})$

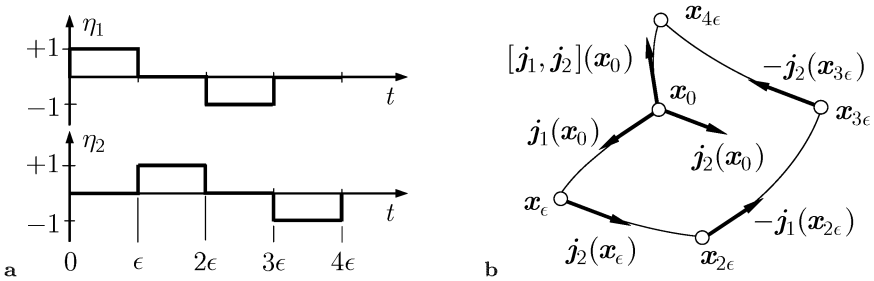


Abb. B.2 Steuerfolge zur LIE-Klammer. **a** Steuerfunktionen $\eta_1(t)$ und $\eta_2(t)$. **b** Qualitative Darstellung der Teilbewegungen

Rechnerisch kann die Lösung $\boldsymbol{x}(t)$ zu dieser Steuerung durch eine TAYLOR-reihe bis zu Termen zweiter Ordnung in ϵ dargestellt werden. Nach einiger Rechnung ergibt sich das Ergebnis, siehe MURRAY et al. [66],

$$\boldsymbol{x}_{4\epsilon} = \boldsymbol{x}_0 + \underbrace{\left[\frac{\partial \boldsymbol{j}_2}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{j}_1 - \frac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{j}_2\right]_{\boldsymbol{x}_0}}_{[\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,](\boldsymbol{x}_0)}\,\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)\,. \tag{B.4}$$

Hierbei ist die LIE-Klammer der Vektorfelder $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ in einem Punkt $\boldsymbol{x}$ definiert durch die Berechnungsvorschrift

$$[\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,](\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})\,. \tag{B.5}$$

Die in Abb. B.2 b qualitativ dargestellten Abweichungen von den jeweiligen Bewegungsrichtungen begründen sich in den Termen $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ in (B.4).

Die LIE-Klammer besitzt u.A. die Eigenschaften

$$[\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_1\,] = \boldsymbol{0}\,, \tag{B.6}$$

$$[\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,] = -[\,\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_1\,] \qquad \text{(Schiefsymmetrie)}, \tag{B.7}$$

$$[a\,\boldsymbol{j}_1, b\,\boldsymbol{j}_2\,] = a\,b\,[\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,]\,, \quad a,\, b \text{ skalar} \qquad \text{(Bilinearität)}, \tag{B.8}$$

$$\big[\,\boldsymbol{j}_1, [\,\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_3\,]\big] + \big[\,\boldsymbol{j}_2, [\,\boldsymbol{j}_3, \boldsymbol{j}_1\,]\big] + \big[\,\boldsymbol{j}_3, [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,]\big] = \boldsymbol{0} \quad \text{(JACOBI-Identität)}. \tag{B.9}$$

Die LIE-Klammer der Vektorfelder $\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})$ aus (B.2) lautet

$$
\begin{aligned}
[\,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2\,] &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{j}_2}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \boldsymbol{j}_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \boldsymbol{j}_2}{\partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{j}_1 - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \boldsymbol{j}_1}{\partial y} \end{bmatrix} \boldsymbol{j}_2 \\
\rightarrow [\,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2\,] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{s}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{c}\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{c}\varphi \\ \mathrm{s}\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}\varphi \\ \mathrm{c}\varphi \end{bmatrix} .
\end{aligned}
\tag{B.10}
$$

Mit der Steuerung aus Tabelle B.1 ergibt sich gemäß (B.4) die Endlage

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{4\epsilon} &= \boldsymbol{x}_0 + [\,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2\,](\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) \\
\rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_{4\epsilon} \\ x_{4\epsilon} \\ y_{4\epsilon} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}\varphi_0 \\ \mathrm{c}\varphi_0 \end{bmatrix} \epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3) .
\end{aligned}
\tag{B.11}
$$

Die Abfolge der Bewegungen des Wagens ist in Abb. B.3 dargestellt, wobei ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Ausgangslage $\varphi_0 = 0$ und $x_0 = y_0 = 0$ gewählt wurde. Aus (B.11) ergibt sich — ohne die Anteile der Größenordnung $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ — die Endlage $\varphi_{4\epsilon} = 0$, $x_{4\epsilon} = 0$, $y_{4\epsilon} = \epsilon^2$. Der Unterschied der translatorischen Verfahrwege im zweiten und vierten Zeitintervall in Abb. B.3 liegt in der Größenordnung $\mathcal{O}(\epsilon^3)$.

Wird die Reihenfolge der Verfahrbewegungen und der Drehungen um die Hochachse vertauscht, also $\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon \rightarrow \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}_\epsilon)\,\epsilon \rightarrow -\boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}_{2\epsilon})\,\epsilon \rightarrow -\boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}_{3\epsilon})\,\epsilon$, so ergibt sich eine Verschiebung des Wagens in entgegengesetzter Richtung mit der Endlage $\varphi_{4\epsilon} = 0$, $x_{4\epsilon} = 0$, $y_{4\epsilon} = -\epsilon^2$. Dies veranschaulicht die Schiefsymmetrie der LIE-Klammer $[\boldsymbol{j}_2,\boldsymbol{j}_1](\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon^2 = -[\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2](\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon^2$ gemäß (B.7).

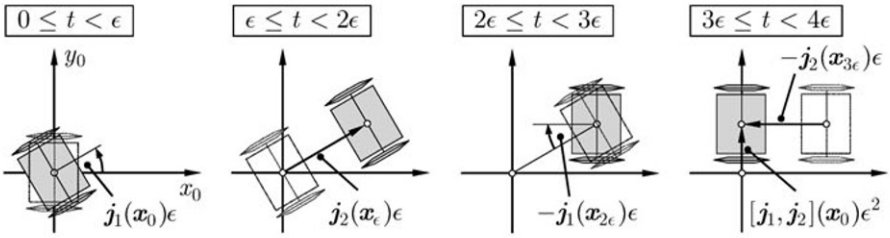


Abb. B.3 Abfolge der Teilbewegungen zur Steuerung aus Tabelle B.1 von der Ausgangslage $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}^{\mathrm{T}}$ in die Endlage $\boldsymbol{x}_{4\epsilon} = [\,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2\,](\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon^2 = [\,\varphi_{4\epsilon}\;\; x_{4\epsilon}\;\; y_{4\epsilon}\,]^{\mathrm{T}} = [\,0\;\; 0\;\; \epsilon^2\,]^{\mathrm{T}}$

Die LIE-Klammer $[\,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2\,]$ bildet ein Vektorfeld, das linear unabhängig von den Vektorfeldern $\boldsymbol{j}_1$ und $\boldsymbol{j}_2$ aus (B.2) ist und daher nicht in der Distribution $\Delta(\boldsymbol{x})$ aus (B.3) liegt. Die ursprünglichen Bewegungsrichtungen $\boldsymbol{j}_1$ und $\boldsymbol{j}_2$ werden durch $[\,\boldsymbol{j}_1,\boldsymbol{j}_2\,]$ um eine weitere Bewegungsrichtung ergänzt. Hierdurch kann der Wagen duch geeignete Steuerfunktionen $\eta_1(t)$ und $\eta_2(t)$ von $\boldsymbol{x}_0$ in jede beliebige Lage $\boldsymbol{x} = [\,\varphi\;\; x\;\; y\,]^{\mathrm{T}}$ überführt werden. Es existiert daher keine geometrische Bindung. Die kinematische Bindung (B.1) ist nicht integrierbar.

B.2 Integrierbarkeitsbedingungen

Als Verallgemeinerung der vorangehenden Betrachtungen werden Bedingungen für die Integrierbarkeit der b impliziten kinematischen Bindungen

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})\,\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \tag{B.12}$$

mit der (b,n)-Bindungsmatrix $\boldsymbol{G}$ und dem n-Lagevektor $\boldsymbol{x}$ formuliert $(b < n)$. Das System hat den Freiheitsgrad $f = n - b$. Mit den unabhängigen Geschwindigkeiten $\eta_1 \ldots \eta_f$ lauten die expliziten kinematischen Bindungen

$$\begin{array}{ccccc} & \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} & = & \left[\, \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}) \;\; \ldots \;\; \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}) \,\right] & \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_f \end{bmatrix} \\ \rightarrow & \dot{\boldsymbol{x}} & = & \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) & \boldsymbol{\eta} \end{array} \tag{B.13}$$

mit der Orthogonalität $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$ bzw. $\boldsymbol{G}\,\boldsymbol{j}_i = \boldsymbol{0}\,,\; i = 1, \ldots, f\,.$

Satz von Frobenius Die kinematischen Bindungen (B.12) sind dann und nur dann vollständig integrierbar und damit holonom, falls die durch (B.13) definierten f-dimensionale Distribution

$$\Delta_0(\boldsymbol{x}) = \operatorname{span}\{\, \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}) \,\} \tag{B.14}$$

der expliziten Bindungen (B.13) *involutiv* ist. Dies bedeutet, dass die Lie-Klammern der Vektorfelder in $\Delta_0(\boldsymbol{x})$ keine von $\Delta_0(\boldsymbol{x})$ linear unabhängigen Vektorfelder bzw. Bewegungsrichtungen erzeugen. Die Distribution $\Delta_0(\boldsymbol{x})$ ist involutiv, falls die folgenden Rangbedingungen erfüllt sind:

$$\mathrm{r}\left\{\, \boldsymbol{J} \;\; [\,\boldsymbol{j}_i, \boldsymbol{j}_k\,] \,\right\} = \mathrm{r}(\boldsymbol{J}) \qquad \text{für alle } i, k \in \{1, \ldots, f\}\,. \tag{B.15}$$

Involutive Abschließung Ist die Bedingung (B.15) nicht erfüllt, so sind die kinematischen Bindungen (B.12) nicht oder nur teilweise integrierbar. Die Anzahl der geometrischen Bindungen wird mit Hilfe der *involutiven Abschließung* oder *involutiven Hülle* der Distribution $\Delta_0(\boldsymbol{x})$ aus (B.14) ermittelt. Dies ist die größte Menge der linear unabhängigen Vektorfelder bzw. Bewegungsrichtungen, welche die Distribution $\Delta_0(\boldsymbol{x})$ mit Hilfe der Lie-Klammer-Operation erzeugen kann. Die involutive Abschließung von $\Delta_0(\boldsymbol{x})$ wird durch eine *Filtration* genannte Berechnungsfolge ermittelt:

1. Für die Lie-Klammern aller Paare $\boldsymbol{j}_i$ und $\boldsymbol{j}_k$ der Distribution Δ_0 wird durch die Rangbetrachtung (B.15) geprüft, ob sie in Δ_0 liegen. Die Distribution der nicht in der Ausgangsdistribution Δ_0 liegenden Lie-Klammern $[\,\boldsymbol{j}_i, \boldsymbol{j}_k\,]$ definiert neue Bewegungsrichtungen und erweitert die Ausgangsdistribution Δ_0 zur Distribution Δ_1,

$$\Delta_1 = \Delta_0 + \operatorname{span}\{\, [\,\boldsymbol{j}_i, \boldsymbol{j}_k\,] \mid \boldsymbol{j}_i \in \Delta_0,\; \boldsymbol{j}_k \in \Delta_0 \,\}\,. \tag{B.16}$$

2. Es wird geprüft, ob die LIE-Klammern der in Schritt 1 hinzugekommenen Vektorfelder mit den Vektorfeldern der Ausgangsdistribution Δ_0 wiederum neue Richtungen definieren. Werden solche Richtungen gefunden, so wird die Distribution Δ_1 um diese erweitert,

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \operatorname{span}\{\, [\boldsymbol{j}_i, \boldsymbol{j}_k\,] \mid \boldsymbol{j}_i \in \Delta_0,\ \boldsymbol{j}_k \in \Delta_1 \} \,. \tag{B.17}$$

Das Verfahren wird bis zu dem Schritt fortgesetzt, in dem keine neuen Bewegungsrichtungen gefunden werden.

Werden auf diese Weise b^* weitere Vektorfelder bzw. Bewegungsrichtungen $\boldsymbol{j}_1^*(\boldsymbol{x}) \ldots, \boldsymbol{j}_{b^*}^*(\boldsymbol{x})$ gefunden, so erweitern diese die f-dimensionale Ausgangsdistribution Δ_0 zu der $(f + b^*)$-dimensionalen involutiven Abschließung

$$\bar{\Delta}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{span}\{\, \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}) \ldots \boldsymbol{j}_f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{j}_1^*(\boldsymbol{x}) \ldots \boldsymbol{j}_{b^*}^*(\boldsymbol{x})\,] \,\} \,. \tag{B.18}$$

Die involutive Abschließung wird nach maximal b Schritten erhalten, weil die Anzahl der linear unabhängigen Vektorfelder nicht größer sein kann als die Dimension n des Raums der Lagekoordinaten $\boldsymbol{x}$. Bei dem Beispiel des Wagens aus Abschnitt B.1 ist diese Situation bereits nach einem Schritt erreicht worden. Die involutive Abschließung hat hier die Dimension $m = 3$,

$$\bar{\Delta}(\boldsymbol{x}) = \operatorname{span}\{\, \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x}),\ \ \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}),\ \ [\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2](\boldsymbol{x}) \,\} \,. \tag{B.19}$$

Die Dimension $m = \dim(\bar{\Delta})$ der involutiven Abschließung ist der Lage-Freiheitsgrad des Systems

$$f_{\mathrm{L}} \equiv m = f + b^* \,. \tag{B.20}$$

Entsprechend Abb. B.4 kann nun die Integrierbarkeit eines Systems mit b kinematischen Bindungen für n Lagegrößen $(b < n)$ spezifiziert werden:

$m = n - b$:	vollständig integrierbar:	$b_{\mathrm{L}} = b$ holonome Bindungen,
$m = n$:	nicht integrierbar:	b nichtholonome Bindungen,
$b < m < n$:	teilweise integrierbar:	$b_{\mathrm{L}} = n - m$ holonome Bindungen $b^* = b - b_{\mathrm{L}}$ nichtholonome Bind.

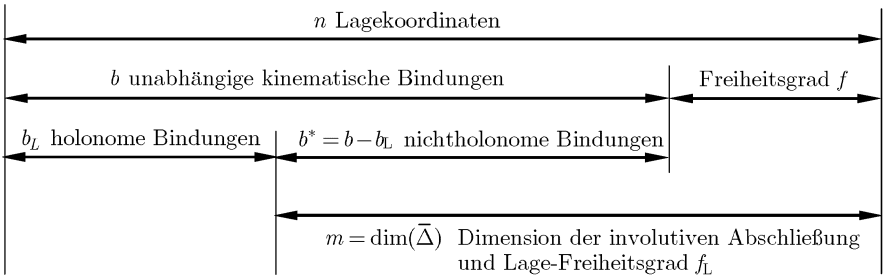


Abb. B.4 Zur Integrierbarkeit kinematischer Bindungen

Bestimmung der geometrischen Bindungen Werden gemäß Abb. B.4 $b_{\mathrm{L}} = n - m$ holonome Bindungen identifiziert, so können diese als b_{L} implizite geometrische Bindungen

$$g_i(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, b_{\mathrm{L}}\,, \tag{B.21}$$

formuliert werden, deren Bindungsnormalen

$$\frac{\mathrm{d}g_i}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial g_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{B.22}$$

senkrecht auf den durch die involutive Abschließung $\bar{\Delta}(\boldsymbol{x})$ aus (B.18) definierten $f_{\mathrm{L}} = m = f + b^*$ Bewegungsrichtungen stehen,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{j}_1^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{j}_f^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \\ \hline \boldsymbol{j}_1^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \boldsymbol{j}_{b^*}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial g_i}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{B.23}$$

Dies ist ein System partieller Differentialgleichungen für die Funktionen $g_i(\boldsymbol{x})$. Lösungen von (B.23) gelingen jedoch nur in einfachen Fällen.

B.3 Beispiele

B.3.1 Wagen mit nicht zusammenfallenden Radachsen

Betrachtet wird ein Wagen mit zwei schlupffrei abrollenden Rädern mit zueinander parallelen Achsen im Abstand d, siehe Abb. B.5 a. Ein Kippen des Wagens sei z.B. durch frei um eine vertikale Achse schwenkbare Stützräder verhindert. Die $n = 3$ Lagekoordinaten sind $\boldsymbol{x} = [\,\varphi \;\; x \;\; y\,]^{\mathrm{T}}$.

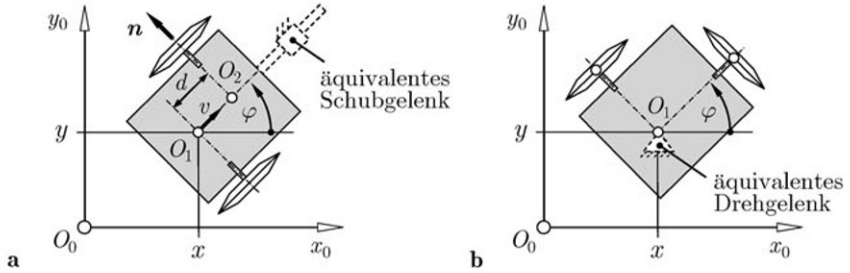


Abb. B.5 Wagen mit zwei Rädern. **a** Parallele Radachsen. **b** Sich schneidende Radachsen

Kinematische Bindungen Die kinematischen Bindungen ergeben sich aus den Bedingung, dass die Punkte O_1 und O_2 keine Geschwindigkeitskomponenten in die Richtung der Radachsen $\boldsymbol{n}$ haben. Mit dem Vektor $\boldsymbol{r}_{21}$ von O_1 nach O_2 lauten die Geschwindigkeiten von O_1 und O_2

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \dot{\varphi}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_z\,\boldsymbol{r}_{21} = \begin{bmatrix} \dot{x} - d\,\dot{\varphi}\,\sin\varphi \\ \dot{y} + d\,\dot{\varphi}\,\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{B.24}$$

Mit dem Richtungsvektor $\boldsymbol{n} = [\,-\sin\varphi \;\; \cos\varphi \;\; 0\,]^{\mathrm{T}}$ ergeben die Orthogonalitätsbedingungen $\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_i = 0$, $i = 1, 2$, die $b = 2$ impliziten Bindungen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_1 \overset{!}{=} 0 \;: \quad & \begin{bmatrix} 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \\ d & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{v}_2 \overset{!}{=} 0 \;: \quad & \\ \rightarrow \quad & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{0} \;. \end{aligned} \tag{B.25}$$

Der Freiheitsgrad ist gemäß Abb. B.4 $f = n - b = 1$. Bei Wahl der unabhängigen Geschwindigkeit $\eta = v$ lautet die explizite Bindung

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} v \\ \rightarrow \quad & \dot{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) \quad \eta \;. \end{aligned} \tag{B.26}$$

Integrierbarkeit Die eindimensionale Distribution $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ in (B.26) erzeugt wegen der LIE-Klammer $[\,\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}\,] = \boldsymbol{0}$ keine weitere Bewegungsrichtung ($m = 1$) und ist daher involutiv. Damit sind die Bindungen (B.25) holonom ($b_{\mathrm{L}} = 2$). Das Beispiel zeigt zwei allgemeine Eigenschaften kinematischer Bindungen:

- Das System der kinematischen Bindungen (B.25) ist holonom, obwohl die einzelnen Bindungen in (B.25) nichtholonom sind. Die Analyse der Integrierbarkeit erfordert die Betrachtung des gesamten Bindungssystems.
- Ein System mit $b = n - 1$ unabhängigen kinematischen Bindungen und damit dem Freiheitsgrad $f = 1$ ist stets holonom, weil die Distribution der dazu gehörenden expliziten Bindung eindimensional ist und entsprechend (B.6) keine weitere Bewegungsrichtung erzeugen kann.

Geometrische Bindungen Die — sich hier auch aus der Anschauung ergebenden — geometrischen Bindungen können formal mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung (B.23) ermittelt werden,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{j}^{\mathrm{T}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = 0 \,. \tag{B.27}$$

Dieses Gleichungssystem hat zwei linear unabhängige Lösungsvektoren

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(\varphi, x, y) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \end{matrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial g_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_2(\varphi, x, y) \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(iv)} \\ \text{(v)} \\ \text{(vi)} \end{matrix} \tag{B.28}$$

mit zunächst allgemeinen Funktionen $\mu_1(\varphi, x, y)$ und $\mu_2(\varphi, x, y)$. Die Lösung für die Funktion $g_1(\varphi, x, y)$ ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x} &\overset{\text{(ii)}}{=} 0 && \rightarrow \quad g_1 = C_1(\varphi, y)\,, \\ \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial C_1}{\partial y} &\overset{\text{(iii)}}{=} 0 && \rightarrow \quad g_1 = C_1(\varphi)\,. \end{aligned} \tag{B.29}$$

Hieraus folgt die geometrische Bindung (Konstante k_1)

$$g_1 \equiv C_1(\varphi) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \varphi = k_1\,. \tag{B.30}$$

Der konstante Winkel $\varphi = k_1$ ist die Nullstelle der nicht weiter spezifizierten Funktion $C_1(\varphi)$. Die Lösung für die Funktion $g_2(\varphi, x, y)$ ergibt sich gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_2}{\partial x} &\overset{\text{(v)}}{=} -\sin\varphi && \rightarrow \quad g_2 = -x\sin\varphi + C_2(y, \varphi)\,, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y} = \frac{\partial C_2}{\partial y} &\overset{\text{(vi)}}{=} \cos\varphi && \rightarrow \quad C_2 = y\cos\varphi + C_3(\varphi) \\ & && \rightarrow \quad g_2 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi + C_3(\varphi) \end{aligned} \tag{B.31}$$

mit der nicht weiter spezifizierten Funktion $C_3(\varphi)$. Mit $\varphi = k_1$ aus (B.30) folgt daraus mit $k_2 = C_3(k_1) = \text{const}$ die geometrische Bindung

$$g_2 \equiv -x\sin\varphi + y\cos\varphi + k_2 = 0\,. \tag{B.32}$$

Die holonomen Bindungen (B.30) und (B.32) entsprechen denjenigen des in Abb. B.5 a dargestellten, kinematisch äquivalenten Schubgelenks.

Redundante Bindungen im Fall $d = 0$ Bei zusammenfallenden Radachsen, $d = 0$, sind die beiden impliziten Bindungen (B.25) voneinander abhängig. Das System ist statisch unbestimmt: Die beiden Seitenkräfte der Räder können nicht einzeln berechnet werden. Das Modell liefert lediglich ihre Summe. Es verbleibt die unabhängige implizite Bindung (B.1).

Wagen mit sich in einem Punkt schneidenden Radachsen In der gleichen Weise ergibt sich die Integrierbarkeit der Bindungen eines Wagens mit sich schneidenden Radachsen gemäß Abb. B.5 b. Die beiden holonomen Bindungen entsprechen hier denjenigen eines Drehgelenks im Schnittpunkt der Radachsen.

B.3.2 Zweirädriger Wagen mit Raddrehungen

In dem Modell des Wagens mit zwei Rädern werden nun die Drehungen der beiden schlupffrei abrollenden Räder berücksichtigt, siehe Abb. B.6.

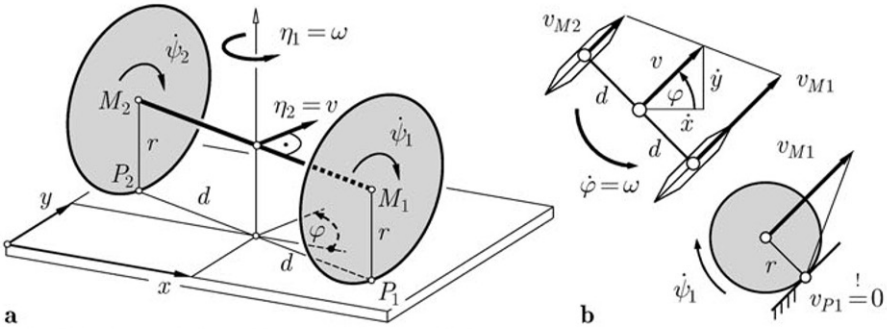


Abb. B.6 Zweirädriger Wagen mit Berücksichtigung der Raddrehungen (Wagenkörper nicht dargestellt). **a** Kinematisches Modell. **b** Abrollbedingungen

Kinematische Bindungen Das System besitzt die $n = 5$ Lagekoordinaten $\boldsymbol{x} = [\,\varphi\ x\ y\ \psi_1\ \psi_2\,]^{\mathrm{T}}$. Neben der Bindung (B.1) gelten die Rollbedingungen

$$v_{P1} \equiv v_{M1} - r\,\dot\psi_1 \overset{!}{=} 0 \qquad \text{mit} \qquad v_{M1} = v + d\,\dot\varphi\,, \tag{B.33}$$

$$v_{P2} \equiv v_{M2} - r\,\dot\psi_2 \overset{!}{=} 0 \qquad \text{mit} \qquad v_{M2} = v - d\,\dot\varphi \tag{B.34}$$

und $v = \dot x\,\mathrm{c}\varphi + \dot y\,\mathrm{s}\varphi$. Damit gelten $b = 3$ unabhängige implizite Bindungen

$$\begin{array}{l} \text{(B.1)}: \\ v_{P1} \overset{!}{=} 0: \\ v_{P2} \overset{!}{=} 0: \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi & 0 & 0 \\ d & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi & -r & 0 \\ -d & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot x \\ \dot y \\ \dot\psi_1 \\ \dot\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.35}$$

$$\rightarrow \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{0}\,.$$

Das System hat gemäß Abb. B.4 den Freiheitsgrad $f = n - b = 2$. Mit den unabhängigen Geschwindigkeiten $\eta_1 = \omega$ und $\eta_2 = v$ lauten die expliziten Bindungen

$$\begin{bmatrix} \dot\varphi \\ \dot x \\ \dot y \\ \dot\psi_1 \\ \dot\psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d}{r} \\ -\frac{d}{r} \end{bmatrix} \omega + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{c}\varphi \\ \mathrm{s}\varphi \\ \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} \end{bmatrix} v \tag{B.36}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} \;=\; \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})\ \eta_1 + \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x})\ \eta_2\,.$$

Integrierbarkeit Die Filtration der Distribution $\Delta_0 = \mathrm{span}\{\, \boldsymbol{j}_1,\, \boldsymbol{j}_2 \,\}$ liefert in zwei Schritten zwei weitere linear unabhängige Vektorfelder

$$\boldsymbol{j}^{(1)} = [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{s}\varphi \\ \mathrm{c}\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{j}^{(2)} = [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}^{(1)}\,] = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{c}\varphi \\ -\mathrm{s}\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{B.37}$$

Die involutive Abschließung $\bar{\Delta}$ hat damit die Dimension $m = 4$,

$$\bar{\Delta} = \mathrm{span}\{\, \boldsymbol{j}_1,\, \boldsymbol{j}_2,\, \boldsymbol{j}^{(1)},\, \boldsymbol{j}^{(2)} \,\}\,. \tag{B.38}$$

Gemäß Abb. B.4 hat das System $b_{\mathrm{L}} = n - m = 1$ geometrische bzw. holonome Bindung und ist damit teilweise integrierbar.

Geometrische Bindung Die $b_{\mathrm{L}} = 1$ geometrische Bindung kann hier durch die Integration der Differenz der dritten und vierten impliziten Bindung in (B.35) einfach gefunden werden. Dennoch soll der Weg über die Lösung der partiellen Differentialgleichungen (B.23) gezeigt werden. Diese lauten

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{j}_1^{\mathrm{T}} \rightarrow \\ \boldsymbol{j}_2^{\mathrm{T}} \rightarrow \\ \boldsymbol{j}^{(1)\mathrm{T}} \rightarrow \\ \boldsymbol{j}^{(2)\mathrm{T}} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{d}{r} & -\frac{d}{r} \\ 0 & \mathrm{c}\varphi & \mathrm{s}\varphi & \frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{c}\varphi & -\mathrm{s}\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \psi_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \psi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial \psi_1} \\ \frac{\partial g}{\partial \psi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,d \\ 0 \\ 0 \\ -r \\ r \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(i)} \\ \text{(ii)} \\ \text{(iii)} \\ \text{(iv)} \\ \text{(v)}\,. \end{array}$$

Die Lösung ergibt sich in den folgenden Schritten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \varphi} &\overset{\text{(i)}}{=} 2\,d && \rightarrow\ g = 2\,d\,\varphi + C_1(x, y, \psi_1, \psi_2)\,, \\
\frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial C_1}{\partial x} \overset{\text{(ii)}}{=} 0 && \rightarrow\ C_1 = C_1(y, \psi_1, \psi_2) \quad \rightarrow\ g = 2\,d\,\varphi + C_1(y, \psi_1, \psi_2)\,, \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{\partial C_1}{\partial y} \overset{\text{(iii)}}{=} 0 && \rightarrow\ C_1 = C_1(\psi_1, \psi_2) \quad \rightarrow\ g = 2\,d\,\varphi + C_1(\psi_1, \psi_2)\,, \\
\frac{\partial g}{\partial \psi_1} &= \frac{\partial C_1}{\partial \psi_1} \overset{\text{(iv)}}{=} -r && \rightarrow\ C_1 = -r\,\psi_1 + C_2(\psi_2) \quad \rightarrow\ g = 2\,d\,\varphi - r\,\psi_1 + C_2(\psi_2)\,, \\
\frac{\partial g}{\partial \psi_2} &= \frac{\partial C_2}{\partial \psi_2} \overset{\text{(v)}}{=} r && \rightarrow\ C_2(\psi_2) = r\,\psi_2 + C_3\,.
\end{aligned}$$

Die $b_{\mathrm{L}} = 1$ geometrische Bindung lautet damit

$$g \equiv 2\,d\,\varphi + r\,(\psi_2 - \psi_1) + C_3 = 0\,. \tag{B.39}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können die Lagegrößen φ, ψ_1, ψ_2 zum Anfangszeitpunkt t_0 so gewählt werden, dass die Integrationskonstante C_3

Null ist. Die Differenz der Raddrehwinkel $\psi_1 - \psi_2$ ist dann proportional zum Drehwinkel des Wagens φ,

$$\psi_1 - \psi_2 = \frac{2\,d}{r}\,\varphi\,. \tag{B.40}$$

Kompasswagen (Südzeigerwagen) Die holonome Bindung (B.40) wird in dem in Abb. B.7 dargestellten *Kompasswagen* oder *Südzeigerwagen* ausgenutzt, der in China um das Jahr 260 v. Chr. als Navigationshilfe erfunden worden ist (Duditza und Diaconescu [19]). Die Drehungen der Räder wirken über ein in der Art eines Kegelrad-Differentials ausgeführtes Subtraktionsgetriebe auf einen Zeiger, der dadurch — bei schlupffreiem Abrollen der Räder auf einem ebenen Untergrund — stets in dieselbe Himmelsrichtung zeigt, unabhängig davon, in welche Richtung der Wagen gedreht wird.

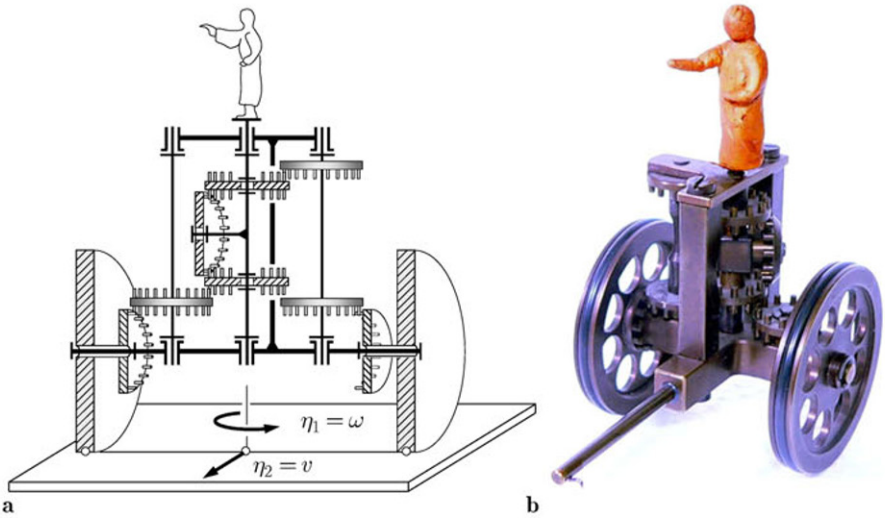


Abb. B.7 Kompasswagen (Südzeigerwagen). **a** Getriebeschema nach [19]. **b** Modell, angefertigt von H. Kneisel

B.3.3 Wagen mit Lenkung

Das Modell des zweirädrigen Wagens aus Abb. B.1 a wird gemäß Abb. B.8 um ein lenkbares drittes Rad (Lenkwinkel ψ) erweitert.

Implizite Bindungen Mit den Geschwindigkeiten der Punkte O_1 und O_2

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \dot{\varphi}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_z\,\boldsymbol{r}_{21} = \begin{bmatrix} \dot{x} + d\,\dot{\varphi}\,\mathrm{s}\varphi \\ \dot{y} - d\,\dot{\varphi}\,\mathrm{c}\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.41}$$

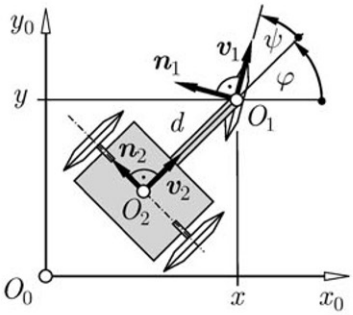


Abb. B.8 Wagen mit lenkbarem Rad

und den Richtungsvektoren der Radachsen

$$\boldsymbol{n}_1 = [\,-\mathrm{s}(\varphi+\psi) \quad \mathrm{c}(\varphi+\psi) \quad 0\,]^{\mathrm{T}}\,, \qquad \boldsymbol{n}_2 = [\,-\mathrm{s}\varphi \quad \mathrm{c}\varphi \quad 0\,]^{\mathrm{T}}$$

ergeben sich $b = 2$ unabhängige kinematische Bindungen

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{n}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_1 \stackrel{!}{=} 0 : & \\ \boldsymbol{n}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2 \stackrel{!}{=} 0 : & \end{array} \begin{bmatrix} -\mathrm{s}(\varphi+\psi) & \mathrm{c}(\varphi+\psi) & 0 & 0 \\ -\mathrm{s}\varphi & \mathrm{c}\varphi & -d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.42}$$

$$\rightarrow \qquad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) \qquad \dot{\boldsymbol{x}} \quad = \quad \boldsymbol{0}\ .$$

Mit $n = 4$ Lagegrößen $\boldsymbol{x}$ hat das System gemäß Abb. B.4 den Freiheitsgrad $f = n - b = 2$. Bei Wahl der unabhängigen Geschwindigkeiten $\eta_1 = \dot{\psi}$ und $\eta_2 = v = |\boldsymbol{v}_1|$ lauten die expliziten Bindungen

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} \mathrm{c}(\varphi+\psi) \\ \mathrm{s}(\varphi+\psi) \\ \frac{1}{d}\,\mathrm{s}\psi \\ 0 \end{bmatrix} v \tag{B.43}$$

$$\rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{x}} \quad = \boldsymbol{j}_1(\boldsymbol{x})\,\eta_1 + \qquad \boldsymbol{j}_2(\boldsymbol{x}) \qquad \eta_2\ .$$

Integrierbarkeit Die Filtration der Distribution $\Delta_0 = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{j}_1,\,\boldsymbol{j}_2\,\}$ liefert in zwei Schritten zwei weitere linear unabhängige Vektorfelder

$$\boldsymbol{j}^{(1)} = [\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2] = \begin{bmatrix} -\mathrm{s}(\varphi+\psi) \\ \mathrm{c}(\varphi+\psi) \\ \frac{1}{d}\,\mathrm{c}\psi \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{j}^{(2)} = [\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}^{(1)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{d}\,\mathrm{s}\varphi \\ -\frac{1}{d}\,\mathrm{c}\varphi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{B.44}$$

Die involutive Abschließung $\bar{\Delta}$ hat damit die Dimension $m = 4$,

$$\bar{\Delta} = \mathrm{span}\{\,\boldsymbol{j}_1,\,\boldsymbol{j}_2,\,\boldsymbol{j}^{(1)},\,\boldsymbol{j}^{(2)}\,\}\,. \tag{B.45}$$

Gemäß Abb. B.4 hat das System $b_{\mathrm{L}} = n - m = 0$ geometrische bzw. holonome Bindungen und ist damit nicht integrierbar. Anschaulich kommt dies dadurch zum Ausdruck, dass der Wagen durch geeignete Steuerfunktionen $\eta_1(t)$ und $\eta_2(t)$ in jede gewünschte Lage $\boldsymbol{x}$ gebracht werden kann.

Die Vektorfelder bzw. Bewegungsrichtungen $\boldsymbol{j}^{(1)}$ und $\boldsymbol{j}^{(2)}$ lassen sich anschaulich interpretieren. Die LIE-Klammer $\boldsymbol{j}^{(1)} = [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,]$ entsteht durch Anwendung der Steuerfolge aus Tabelle B.1 auf das System (B.43). Die Abfolge der Bewegungen des Wagens ist in Abb. B.9 für die ohne Beschränkung der Allgemeinheit gewählte Ausgangslage $x_0 = y_0 = 0$ und $\varphi_0 = \psi_0 = 0$ dargestellt. Die Bewegungsabfolge erzeugt eine Drehung des Wagens um die Hochachse mit der Endlage $x_{4\epsilon} = 0$, $y_{4\epsilon} = 0$, $\varphi_{4\epsilon} = \frac{1}{d}\,\epsilon^2$, $\psi_{4\epsilon} = 0$.

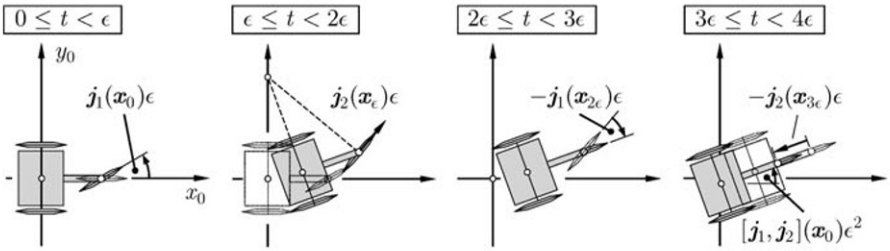


Abb. B.9 Bewegungsabfolge der LIE-Klammer $\boldsymbol{j}^{(1)} = [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,]$ von der Ausgangslage $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ in die Endlage $\boldsymbol{x}_{4\epsilon} = [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,](\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon^2 = [x_{4\epsilon}\;\; y_{4\epsilon}\;\; \varphi_{4\epsilon}\;\; \psi_{4\epsilon}]^{\mathrm{T}} = [\,0\;\; 0\;\; \frac{1}{d}\epsilon^2\;\; 0\,]^{\mathrm{T}}$

Die LIE-Klammer $\boldsymbol{j}^{(2)} = [\,\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}^{(1)}\,]$ erzeugt als weitere Bewegungsrichtung die Parallelverschiebung des Wagens in die negative y-Richtung mit der Endlage $x_{4\epsilon} = 0$, $y_{4\epsilon} = -\frac{1}{d}\,\epsilon^2$, $\varphi_{4\epsilon} = 0$, $\psi_{4\epsilon} = 0$ (Abb. B.10). Die Drehung um die Hochachse im zweiten Zeitintervall wird dabei mit Hilfe der Bewegungsabfolge aus Abb. B.9 entsprechend der LIE-Klammer $\boldsymbol{j}^{(1)} = [\,\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2\,]$ realisiert. Für die entgegengesetzte Drehung im vierten Zeitintervall wird die Reihenfolge der Teilbewegungen aus Abb. B.9 vertauscht, entsprechend der Schiefsymmetrie der LIE-Klammer $-\boldsymbol{j}^{(1)} = [\,\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}_1\,]$. Die Bewegungsabfolge in Abb. B.10 kann als das Einparken des Wagens in eine Parklücke interpretiert werden.

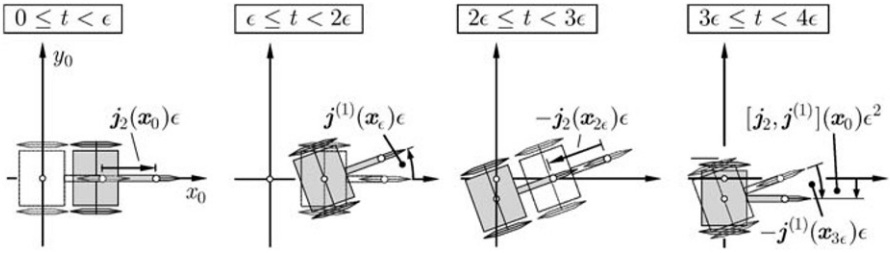


Abb. B.10 Bewegungsabfolge der LIE-Klammer $\boldsymbol{j}^{(2)} = [\,\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}^{(1)}\,]$ von der Ausgangslage $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ in die Endlage $\boldsymbol{x}_{4\epsilon} = [\,\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{j}^{(1)}\,](\boldsymbol{x}_0)\,\epsilon^2 = [x_{4\epsilon}\;\; y_{4\epsilon}\;\; \varphi_{4\epsilon}\;\; \psi_{4\epsilon}]^{\mathrm{T}} = [\,0\;\; -\frac{1}{d}\epsilon^2\;\; 0\;\; 0\,]^{\mathrm{T}}$

Literaturverzeichnis

[1] Altmann SL (1986) Rotations, Quaternions, and Double Groups. Clarendon Press, Oxford

[2] Amirouche F (2006) Fundamentals of Multibody Dynamics. Theory and Applications. Birkhäuser, Boston

[3] Angeles J (2003) Fundamentals of Robotic Mechanical Systems. Theory, Methods, and Algorithms, 2nd edn. Springer, New York

[4] Angeles J, Kecskeméthy A (eds) (1995) Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems. Springer, Wien

[5] Bae DS, Haug EJ (1988) A recursive formulation for constraint mechanical system dynamics. Part I: Open-Loop Systems. Mechanics of Structures and Machines 15:359–382

[6] Bae DS, Haug EJ (1988) A recursive formulation for constraint mechanical system dynamics. Part II: Closed-Loop Systems. Mechanics of Structures and Machines 15:481–506

[7] Baumgarte J (1972) Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 1:490–501

[8] Bottema O, Roth B (1979) Theoretical Kinematics. North-Holland Publishing Company, Amsterdam

[9] Brandl H, Johanni R, Otter M (1986) A Very Efficient Algorithm for the Simulation of Robots and Similar Multibody Systems without Inversion of the Mass Matrix. In: Proc. IFAC/IFIP/IMACS Int. Symposium on Theory of Robots, Wien, pp 365–370

[10] Brandl H, Johanni R, Otter M (1987) An algorithm for the simulation of multibody systems with kinematical loops. In: Bautista E (ed) Proc.7th IFToMM World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms, Pergamon Press, Oxford, pp 407–411

[11] Bremer H (1988) Dynamik und Regelung mechanischer Systeme. Teubner, Stuttgart

[12] Bremer H (1993) Das Jourdainsche Prinzip. ZAMM 73:184–187

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

[13] Bremer H (2008) Elastic Multibody Dynamics. A Direct Ritz Approach. Springer, Berlin
[14] Bremer H, Pfeiffer F (1992) Elastische Mehrkörpersysteme. Teubner, Stuttgart
[15] Craig JJ (2004) Introduction to Robotics: Mechanics and Control, 3rd edn. Prentice Hall, Upper Saddle River (NJ)
[16] d'Alembert J (1743) Traité de Dynamique. David, Paris
[17] de Luca A, Oriolo G (1995) Modeling and control of nonholonomic mechanical systems. In: Angeles J, Kecskeméthy A (eds) Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems, Springer, Wien, pp 277–342
[18] Dresig H, Holzweissig F (2007) Maschinendynamik. Springer, Berlin
[19] Duditza F, Diaconescu D (1987) Ein sinnreiches Zahnräderdifferential aus dem antiken China. Maschinenbautechnik 36:268–271
[20] Eich-Söllner E, Führer C (1998) Numerical Methods in Multibody Dynamics. Teubner, Stuttgart
[21] Euler L (1776) Nova methodus motum corporum rigidorum determinandi. Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 20:208–238
[22] Featherstone R (2008) Rigid Body Dynamics Algorithms, 2nd edn. Springer, New York
[23] Fischer O (1905) Über die Bewegungsgleichungen räumlicher Gelenksysteme. B.G.Teubner, Leipzig
[24] Fischer U, Stephan W (1972) Prinzipien und Methoden der Dynamik. Fachbuchverlag, Leipzig
[25] Garcia de Jalón J, Bayo E (1994) Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. Springer, New York
[26] Gauss CF (1829) Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Journal für die reine und angewandte Mathematik 4:232–235
[27] Géradin M, Cardona A (2001) Flexible Multibody Dynamics, A Finite Element Approach. John Wiley, New York
[28] Gipser M (1999) Systemdynamik und Simulation. Teubner, Stuttgart
[29] Gosselin C, St-Pierre É (1997) Development and experimentation of a fast 3-dof camera-orienting device. The International Journal of Robotics Research 16:619–630
[30] Groche G, Ziegler V, Ziegler D, Zeidler E (eds) (1995) Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil II. Teubner, Stuttgart
[31] Hairer E, Wanner G (1996) Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential Algebraic Problems. Springer, Berlin
[32] Hamel G (1949) Theoretische Mechanik. Springer, Berlin
[33] Hamilton WR (1853) Lectures on Quaternions. Hodges and Smith, Dublin
[34] Haug EJ (1989) Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems. Vol. I: Basic Methods. Allyn and Bacon, Boston
[35] Heimann B, Gerth W, Popp K (2001) Mechatronik — Komponenten, Methoden und Beispiele, 2. Aufl. Fachbuchverlag, Leipzig

[36] Heyden T (2006) Bahnregelung eines seilgeführten Handhabungssystems mit kinematisch unbestimmter Lastführung. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Band 1100, VDI-Verlag, Düsseldorf

[37] Hiller M (1981) Analytisch-numerische Verfahren zur Behandlung räumlicher Übertragungsmechanismen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 1, Band 76, VDI-Verlag, Düsseldorf

[38] Hiller M (1983) Mechanische Systeme. Springer, Berlin

[39] Hiller M (1995) Multiloop kinematic chains and dynamics of multiloop systems. In: Angeles J, Kecskeméthy A (eds) Kinematics and Dynamics of Multi-Body Systems, Springer, Wien, pp 75–215

[40] Hiller M, Kecskeméthy A, Woernle C (1986) A loop-based kinematical analysis of complex mechanisms. Proc. 19th Biennial ASME Mechanisms Conf., Columbus, ASME-Paper-86–DET-184

[41] Hooker W, Margulies G (1965) The dynamical attitude equations for an n-body satellite. J Astronaut Sci 12:123–128

[42] Huston RL (1990) Multibody Dynamics. Butterworth-Heinemann, Boston

[43] Husty M, Karger A, Sachs H, Steinhilper W (1997) Kinematik und Robotik. Springer, Berlin

[44] Jourdain PEB (1909) Note on an analogue of Gauss' Principle of Least Constraints. The Quarterly Journal of Pure and Appl Math XL:153–197

[45] Kähler M, Rachholz R, Herrmann S, Zierath J, Souffrant R, Kluess D, Bader R, Woernle C (2010) Development of a biomechanical multibody model for the hardware-in-the-loop simulation of total hip endoprostheses. In: Mikkola A (ed) Proc. 1st Joint Int. Conf. on Multibody System Dynamics, Lappeenranta, Finland

[46] Kane TR, Levinson DA (1985) Dynamics, Theory and Applications. McGraw-Hill, New York

[47] Kecskeméthy A (1993) Objektorientierte Modellierung von Mehrkörpersystemen mit Hilfe von Übertragungselementen. Fortschrittberichte VDI, Reihe 20, Band 88, VDI-Verlag, Düsseldorf

[48] Kecskeméthy A, Hiller M (1992) Automatic closed-form kinematics-solutions for recursive single-loop chains. In: DE-Vol. 47, Flexible Mechanisms, Dynamics, and Analysis, Proc. 22nd Biennial ASME Mechanisms Conf., Scottsdale, pp 387–393

[49] Kim S, Vanderploeg MJ (1986) A general and efficient method for dyamic analysis of mechanical systems using velocity transformation. ASME Journal of Mechanisms, Transmissiona, and Automation in Design 128:176–182

[50] Kortüm W, Lugner P (1994) Systemdynamik und Regelung von Fahrzeugen. Springer, Berlin

[51] Kreuzer E (1979) Symbolische Berechnung der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen. Fortschrittberichte VDI, Band 32, Reihe 11, VDI-Verlag, Düsseldorf

[52] Kreuzer E, Lugtenburg JB, Meissner HG, Truckenbrodt A (1994) Industrieroboter. Technik, Berechnung und anwendungsorientierte Auslegung. Springer, Berlin
[53] Krupp T (1999) Symbolische Gleichungen für Mehrkörpersysteme mit kinematischen Schleifen. Shaker Verlag, Aachen
[54] Lagrange JL (1811) Mécanique Analytique. L'Académie Royale des Sciences, Paris
[55] Levinson DA (1977) Equations of motion for multiple-rigid-body systems via symbolic manipulation. AIAA Journal of Spacecraft and Rockets 14:479–487
[56] Li H (1990) Ein Verfahren zur vollständigen Lösung der Rückwärtstransformaton für Roboter mit allgemeiner Geometrie. Dissertation, Universität Duisburg
[57] Luck K, Modler KH (1999) Getriebelehre. Springer, Berlin
[58] Magnus K (1971) Kreisel, Theorie und Anwendungen. Springer, Berlin
[59] Magnus K, Müller-Slany HH (2005) Grundlagen der Technischen Mechanik, 7. Aufl. Teubner, Stuttgart
[60] Maier T (2004) Bahnsteuerung eines seilgeführten Handhabungssystems — Modellbildung, Simulation und Experiment. Fortschrittberichte VDI, Reihe 8, Band 1047, VDI-Verlag, Düsseldorf
[61] Maisser P (1988) Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. ZAMM 68:463–481
[62] Matschinsky W (2007) Radführungen der Straßenfahrzeuge: Kinematik, Elasto-Kinematik und Konstruktion, 3. Aufl. Springer, Berlin
[63] Merlet JP (2006) Parallel Robots, 2nd edn. Springer, Berlin
[64] MSC.Software (2010) Adams. http://www.msc.software.com
[65] Müller A (2005) Singuläre Phänomene in der Kinematik von Starrkörpermechanismen. Shaker Verlag, Aachen
[66] Murray RM, Li Z, Sastry S (1994) A Mathematical Introduction to Robot Manipulation. CRC Press, Boca Raton
[67] Neĭmark JI, Fufaev NA (1972) Dynamics of Nonholonomic Systems. American Mathematical Society, Providence (RI)
[68] Neugebauer R (ed) (2006) Parallelkinematische Maschinen: Entwurf, Konstruktion, Anwendung. Springer, Berlin
[69] Newton I (1687) Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. Royal Society, London
[70] Nikravesh PE (1988) Computer-Aided Analysis of Mechanical Systems. Prentice Hall, Englewood Cliffs
[71] Nikravesh PE (2004) An overview of several formulations for multibody dynamics. In: Talabă D, Roche T (eds) Product Engineering, Springer, pp 189–226
[72] Nikravesh PE (2007) Planar Multibody Dynamics: Formulation, Programming and Applications. CRC Press, New York
[73] Nikravesh PE, Affifi H (1994) Construction of the equations of motion for multibody dynamics using point and joint coordinates. In:

Pereira M, Ambrósio J (eds) Computer-Aided Analysis of Rigid and Flexible Mechanical Systems, Kluwer Academic Publishers, Boston, pp 32–60

[74] Nikravesh PE, Gim G (1993) Systematic construction of the equations of motion for multibody systems containing closed kinematic loops. Journal of Mechanical Design 115(1):143–149

[75] Orlandea N, Chace M, Calahan D (1977) A sparsity-oriented approach to the dynamic analysis and design of mechanical systems — Parts I and II. Journal of Engineering for Industry 99:773–784

[76] Papastavridis JG (2002) Analytical Mechanics. Oxford University Press, Oxford

[77] Pars L (1968) A Treatise on Analytical Dynamics. Heinemann, London

[78] Pfeiffer F (1989) Einführung in die Dynamik. Teubner, Stuttgart

[79] Pfeiffer F (2006) Mechanical System Dynamics. Springer, Berlin

[80] Pfeiffer F, Glocker C (1996) Multibody Dynamics with Unilateral Constraints. John Wiley, New York

[81] Pietruszka WD (2006) MATLAB in der Ingenieurpraxis, 2. Aufl. Teubner, Stuttgart

[82] Popp K, Schiehlen W (1993) Fahrzeugdynamik. Teubner, Stuttgart

[83] Rein U (1994) Recursive dynamics of overconstrained mechanisms. In: DE-Vol. 71, Machine Elements and Machine Dynamics, Proc. 23rd Biennial ASME Mechanisms Conf., Minneapolis, pp 375–381

[84] Rein U (1997) Effiziente objektorientierte Simulation mit dem rekursiven Formalismus. Dissertation, Universität Stuttgart

[85] Rill G, Schaeffer T (2010) Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden

[86] Roberson R, Schwertassek R (1998) Dynamics of Multibody Systems. Springer, Berlin

[87] Roberson R, Wittenburg J (1966) A dynamical formalism for an arbitrary number of interconnected rigid bodies with reference to the problem of satellite attitude control. In: Proc. 3rd IFAC Congress, London, IFAC, pp 46D.2–46D.9

[88] Rodrigues O (1840) Des lois géometriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considerés indépendamment des causes qui peuvent les produire. Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 5:380–440

[89] Samin JC, Fisette P (2003) Symbolic Modeling of Multibody Systems. Kluwer, Dordrecht

[90] Schatz P (1998) Die Welt ist umstülpbar: Rhythmusforschung und Technik, 3. Aufl. Niggli Verlag, Sulgen

[91] Schiehlen W (1990) Multibody Systems Handbook. Springer, Berlin

[92] Schiehlen W, Eberhard P (2004) Technische Dynamik, 2. Aufl. Teubner, Stuttgart

[93] Schramm D, Hiller M, Bardini R (2010) Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen. Springer, Berlin
[94] von Schwerin R (1999) Multibody System Simulation. Numerical Methods, Algorithms, and Software. Springer, Berlin
[95] Schwertassek R, Wallrapp O (1999) Dynamik flexibler Mehrkörpersysteme. Vieweg-Verlag, Braunschweig
[96] Shabana A (2005) Dynamics of Multibody Systems, 3rd edn. Cambridge University Press, Cambridge
[97] Shampine L, Gordon M (1984) Computer-Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Vieweg-Verlag, Braunschweig
[98] Shepperd SW (1978) Quaternion from rotation matrix. AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics 1:223–224
[99] Simpack AG (2010) SIMPACK. http://www.simpack.com
[100] Stelzle W, Kecskeméthy A, Hiller M (1995) A comparative study of recursive methods. Archive of Applied Mechanics 66:9–19
[101] Szabó I (1987) Geschichte der mechanischen Prinzipien, 3. Aufl. Birkhäuser, Basel
[102] Valášek M, Stejskal V (1996) Kinematics and Dynamics of Machinery. Dekker, New York
[103] VDI-Richtlinie 2120 (2003) Vektorrechnung, Grundlagen für die praktische Anwendung. Beuth-Verlag, Berlin
[104] VDI-Richtlinie 2739 Blatt 1 (1991) Matrizenrechnung, Grundlagen für die praktische Anwendung. Beuth-Verlag, Berlin
[105] VDI-Richtlinie 2739 Blatt 2 (1996) Matrizenrechnung, Anwendungen in der Kinematik und bei Eigenwertproblemen. Beuth-Verlag, Berlin
[106] Vereshchagin AF (1974) Computer simulation of the dynamics of complicated mechanisms of robot-manipulators. Engineering and Cybernetics 6:65–70
[107] Walker M, Orin D (1982) Efficient dynamic computer simulation of robotic mechanisms. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control 104:205–211
[108] Wehage RA (1988) Application of matrix partitioning and recursive projection to order n solution of constrained equations of motion. In: Proc. 20th Biennial ASME Mechanisms Conf., Orlando, pp 221–230
[109] Wittenburg J (2008) Dynamics of Multibody Systems, 2nd edn. Springer, Berlin
[110] Woernle C (1988) Ein systematisches Verfahren zur Aufstellung der geometrischen Schließbedingungen in kinematischen Schleifen mit Anwendung bei der Rückwärtstransformation für Industrieroboter. Fortschrittberichte VDI, Reihe 18, Band 59, VDI-Verlag, Düsseldorf
[111] Zierath J, Woernle C, Heyden T (2009) Elastic multibody models of transport aircraft high-lift mechanisms. AIAA Journal of Aircraft 46:1513–1524
[112] Zurmühl R, Falk S (1997) Matrizen 1, Grundlagen. Springer, Berlin

Sachverzeichnis

Ableitung vektorieller Funktionen, xv
absolute Körperkoordinaten, 8, 234
absolute Punktkoordinaten, 236
analytische Methode, 5
Anfangswertproblem, 183
Appell, 5
aufspannender Baum, 288, 307

Baumstruktur, 8, 197, 251
Baumwurzel, 237
Bernoulli, J., 3
Beschleunigung, 37
  Coriolis-, 48, 125
  Euler-, 48
Bestimmtheit
  kinematisch, 200
  statisch, 200
Bewegungsgleichungen gebundener Systeme
  in abhängigen Koordinaten, 148
    Doppelpendel, 156
  in Minimalkoordinaten, 151
    Bestimmungsgleichungen, 150
    Doppelpendel, 158
  Verladekran, 154
Bewegungsgleichungen geschlossener MKS
  in absoluten Körperkoordinaten, 234
  in absoluten Punktkoordinaten, 236
  in Minimalkoordinaten, 331
    Berechnungsablauf, 330
    Bestimmungsgleichungen, 331
    Koppelgetriebe (RRRSR), 345
    Kugel auf rotierender Ebene, 362
    Schubkurbelgetriebe, 337
  in primären Gelenkkoordinaten, 323
    Berechnungsablauf, 322
    Bestimmungsgleichungen, 320
    Koppelgetriebe (RRRSR), 341
    Kugel auf rotierender Ebene, 358
    Parallelroboter, 354
    Schubkurbelgetriebe, 335
  Übersichtstabelle, 235
Bewegungsgleichungen offener MKS, 266
  Berechnungsablauf, 265
  Bestimmungsgleichungen, 263
  Knickarm-Roboter, 280
  schwerer Kreisel, 286
Bewegungswinder, 36
Bindungen, 127
  einseitig, 131
  explizit
    Baumstruktur, 251
    Drehgelenk, 220
    holonom, 137
    holonomes Gelenk, 216
    Kettenstruktur, 241
    Kugelgelenk, 222
    nichtholonom, 163
    nichtholonomes Gelenk, 230
    Schubgelenk, 221
  Gegenüberstellung implizit – explizit
    Gelenkbindungen, 219
    holonome Bindungen, 154
    nichtholonome Bindungen, 165
    Schließbedingungen, 296, 317
  geometrisch, 141
  holonom, 129
  implizit
    Bindungstypen, 290
    Drehgelenk, 215, 291
    Drehschubgelenk, 291
    Ebenes Gelenk, 291
    holonom, 134
    holonomes Gelenk, 209
    Kardangelenk, 291

C. Woernle, *Mehrkörpersysteme,*
DOI 10.1007/978-3-642-15982-4, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Kugelgelenk, 291
nichtholonom, 160
nichtholonomes Gelenk, 229
Pendelstütze, 291
sekundäres Gelenk (Tabelle), 291
kinematisch, 141
Integrierbarkeit, 371
Körper-, 242
nichtholonom, 160
rheonom, 129
skleronom, 129
zweiseitig, 131
Bindungsmatrix
impliziter Gelenkbindungen, 210
impliziter Bindungen, 135, 161
impliziter Schließbedingungen, 289, 310
Blattkörper, 238
Bohnenberger, 6
Bricard, 205
Bryan, 72

Cardano, 72
Coriolis, 48
Coulomb , 144
Coulombsche Reibungskrafte, 262

d'Alembert, 3
DAE, *siehe* differential-algebraische Gleichungen
definit, 367
Deskriptorgleichungen, 148
Deskriptorvariable, 148
Deviationsmoment, 106, 109
differential-algebraische Gleichungen, 143, 148
direkte Dynamik, 282
Distribution, 372
Doppelpendel, 154
Drall, 98
absoluter, 98
relativer, 99
starrer Körper, 104
Drallsatz, 101
starrer Körper, 112
Drehgelenk, 192
Reaktionsbedingungen, 227
explizite Bindungen, 220
implizite Bindungen, 215, 291
Drehimpuls, *siehe* Drall
Drehmatrix, 34
Drehschubgelenk, 192
implizite Bindungen, 291
Drehtensor, 56
als Transformationsmatrix, 58
Übergang zur Winkelgeschwindigkeit, 70
Drehung (Drehbewegung), 40, 55
aktive Betrachtung, 58
infinitesimal, 68
mehrfache, 62–68
Nichtkommutativität, 62
um Ausgangsachsen, 63
um mitgedrehte Achsen, 65
passive Betrachtung, 58
Drehzeiger, 55
Aufbau des Drehtensors, 56
Übergang zur Winkelgeschwindigkeit, 68
Dreiecksungleichung, 106

Ebene Bewegung, 40
Ebenes Gelenk, 192
implizite Bindungen, 291
Elementardrehung, 60
Elementenpaar, 192
Entwicklungssatz, 25
Euler, 3
Euler-Parameter, 80–88
als Quaternionen, 83
Aufbau des Drehtensors, 80
mehrfache Drehungen, 84
Übersichtstabelle, 89
zeitliche Ableitung, 86
Euler-Winkel (zxz)
Übersichtstabelle, 79

Fischer, O., 7
Foucault, 6
Freiheitsgrad
Geschwindigkeits-, 162
Grübler-Kutzbach-Kriterium, 202, 207, 292
holonome Systeme, 132
Lage-, 162
nichtholonome Systeme, 162
Frobenius, 371

Gauss, 175
Gelenk, 191
holonom, 192
Modelle, 195
nichtholonom, 194
primäres/sekundäres, 288
rheonom, 194
skleronom, 192
Gelenkgeschwindigkeiten, 217
primäre, 288
Gelenkkoordinaten, 9, 192, 217
primäre, 288
Gelenkviereck

überbestimmt, 206
eben, 200
überbestimmt, 299
Schließbedingungen, 297
räumlich, 200, 203
sphärisch, 200
Geschwindigkeit, 36
gewöhnliche Differentialgleichungen, 144, 149, 151
Gibbs, 5
Gibbs-Vektor, 90
Gleichungen von Gibbs und Appell, 182
Grassmann, 25
Grübler, 202
Grübler-Kutzbach-Kriterium
ebenes bzw. sphärisches System, 207
räumliches System, 202
räumliches überbestimmtes System, 292

Hamel, 5
Hamilton, 171
Hauptachsensystem, 109
Hauptträgheitsmoment, 110
Hertz, 5
Heusinger, 6
holonom, 129
Hooke, 192
Huygens, 108

Impuls, 98
starrer Körper, 104
Impulssatz, 100
starrer Körper, 112
Index eines DAE-Systems
holonomes System, 149
nichtholonomes System, 167
Integrierbarkeit kinematischer Bindungen, 371
inverse Dynamik, 282
involutive Abschließung, 375
Inzidenzmatrix, 238

Jacobi, 135
Jacobi-Matrix
allgemein, xv
expliziter Körperbindungen
Baumstruktur, 253
der Rotation, 245
der Translation, 245
Kettenstruktur, 245
expliziter Bindungen, 138, 163
expliziter Gelenkbindungen, 218
der Rotation, 218
der Translation, 218
expliziter Schließbedingungen, 294
Jourdain, 174

kanonische Gleichungen von Hamilton, 182
Kardan-Winkel (xyz)
Aufbau der Drehmatrix, 72
Übersichtstabelle, 77
zeitliche Ableitung, 75
Kardan-Winkel (zyx)
Übersichtstabelle, 78
Kardangelenk, 192
implizite Bindungen, 291
Kelvin, 260
Kettenstruktur, 197, 241
kinematische Bewegungsgleichungen
Euler-Parameter, 87
Euler-Winkel (zxz), 79
geschlossenes Mehrkörpersystem
Minimalkoordinaten, 295
primäre Gelenkkkoordinaten, 288, 308
Kardan-Winkel (xyz), 75, 77
Kardan-Winkel (zyx), 78
Massenpunktsystem, 152
nichtholonomes System, 168
offenes Mehrkörpersystem
Minimalkoordinaten, 241
Rodrigues-Parameter, 90, 91
kinematische Schleife, 199, 287
kinetische Energie
als quadratische Form, 145, 152
eines Massenpunktsystems, 179
eines starren Körpers, 115
Körperbindungen, 242
Kompasswagen, 382
Koppelgetriebe (RRRSR), 337
Kotangentialraum, 139
Kraft
äußere, 100
Coriolis-, 125, 151, 169
eingeprägte, 259
algebraisches Kraftgesetz, 259
ideale, 259
integrales Kraftgesetz, 260
nichtideale, 262
Reibungs-, 262
innere, 100
konservative, 179
Reaktions-, 144
Kraftelement
Kelvin-Voigt, 260
Maxwell, 261
Kraftwinder, 101, 225
Kreisel, 6, 119

Bewegungsgleichungen, 283
momentenfrei, 119
Stabilität der Drehungen, 120
Kreiselmoment, 114, 117, 118, 125
Kufe, *siehe* Wagen mit zwei Rädern
Kugel
auf Ebene rollend, 229
auf rotierender Ebene rollend, 355
Kugelgelenk, 192
explizite Bindungen, 222
implizite Bindungen, 291
Kutta, 184
Kutzbach, 202

Lage
eines starren Körpers, 35
Lage-Freiheitsgrad, 162
Lagrange, 3
Lagrange-Funktion, 181
Lagrange-Gleichungen
erster Art, 148
zweiter Art, 4, 177
Lagrange-Multiplikator, 145, 176
Lie, 371
Lie-Klammer, 373

Maggi, 5
Mannigfaltigkeit, 134
Masse, 103
Massenmatrix
geschlossenes Mehrkörpersystem
Absolutgeschwindigkeiten, 319
Minimalgeschwindigkeiten, 331
primäre Gelenkgeschwindigkeiten, 323
Massenpunktsystem
Absolutgeschwindigkeiten, 144
Minimalgeschwindigkeiten, 151
offenes Mehrkörpersystem
Absolutgeschwindigkeiten, 259
Minimalgeschwindigkeiten, 266
Massenmittelpunkt, 103
Massenpunktsystem, 128
Massenträgheitsmoment, 106
Matrix
Addition, 365
Einheitsmatrix, 364
invers, 365
Multiplikation, 365
orthogonal, 366
positiv (negativ) definit, 367
positiv (negativ) semidefinit, 367
Rang, 364
regulär, singulär, 364
symmetrisch, schiefsymmetrisch, 366
transponiert, 364
Maxwell, 261
Mechanismus
6R, 205
7H, 202
eben, 206, 207
Radführung, 204
räumlich, 206
RRRSR, 337
RSSR, 204
RUSR, 203
Schubkurbelgetriebe, 332
sphärisch, 206, 207
Taumelscheibe, 312
Mehrkörperformalismus
nichtrekursiv
geschlossenes Mehrkörpersystem, 323
offenes Mehrkörpersystem, 265
rekursiv
geschlossenes Mehrkörpersystem, 324
offenes Mehrkörpersystem, 269
Übersicht, 8
Mehrkörpersystem (MKS), 191
eben, 199
geschlossen, 199, 287
kinematisch zusammenhängend, 197
Klassifizierung
kinematisch, 199
topologisch, 197
offen, 197, 237
räumlich, 199
sphärisch, 199
statisch bestimmt, 201
statisch unbestimmt, 201, 205, 292
teilweise geschlossen, 199
überbestimmt, 201, 205, 292
vollständig geschlossen, 199
Minimalgeschwindigkeiten
geschlossenes Mehrkörpersystem
einzelne Schleife, 294
mehrschleifiges System, 316
holonomes System, 152
nichtholonomes System, 163
offenes Mehrkörpersystem, 240
Minimalkoordinaten, 3
geschlossenes Mehrkörpersystem
einzelne Schleife, 293
mehrschleifiges System, 316
holonomes System, 133
nichtholonomes System, 163
offenes Mehrkörpersystem, 240
momentane Drehachse, 70
Momentensatz, *siehe* Drallsatz

Nachfolgekörper, 237
Newton, 3
Newton-Euler-Gleichungen
  Mehrkörpersystem, 4, 259, 319
  starrer Körper, 112
Newton-Raphson-Verfahren, 189
nichtholonom, 160
numerische Drift, 186
numerische Integration, 183
numerische Stabilisierung, 187
Nutation, 120

ODE, *siehe* gewöhnliche Differentialgleichungen
Offene Mehrkörpersysteme, 237
Orthogonalitätsbeziehung
  bei Gelenkbindungen, 218
  bei holonomen Bindungen, 139
  bei nichtholonomen Bindungen, 163
  bei Schließbedingungen, 295, 316

Parallelroboter, 346
Pendelstütze
  implizite Bindungen, 288, 291
Poisson, 37
Poisson-Gleichung, 37, 71
potentielle Energie, 179
Präzession, 123
Prinzip von
  d'Alembert-Lagrange, 5, 145, 172
  d'Alembert, 114
  Gauss, 175
  Jourdain, 174
Projektionsgleichung, 151

quadratische Form, 366
Quasikoordinate, 164, 175
Quaternion
  Betrag (Norm), 370
  Einheitsquaternion, 370
  Einsquaternion, 370
  Euler-Parameter, 83
  inverse, 370
  konjugierte, 369
  Produkt, 369
  Skalarteil, 368
  Summe, 368
  Vektorteil, 368

Radführung, 204
Raphson, 189
Reaktionsbedingungen
  explizit
    Drehgelenk, 227
    geschlossenes MKS, 318
    holonome Bindung, 145
    holonomes Gelenk, 226
    nichtholonome Bindung, 167
    nichtholonomes Gelenk, 233
    sekundäres Gelenk, 318
  implizit
    Baumstruktur, 256
    Drehgelenk, 228
    holonome Bindung, 146
    holonomes Gelenk, 226
    Kettenstruktur, 253
    nichtholonome Bindung, 168
    nichtholonomes Gelenk, 233
    offenes MKS, 253
Reaktionsgleichung, 153
Reaktionskoordinaten, 145
  an einem Gelenk, 226
  an einem sekundären Gelenk, 318
Reaktionskraft, 144
Reaktionskraftwinder
  Gelenk-, 253
  Körper-, 254
  primäre, 319
  sekundäre, 318
Relativbewegung, 40
  relative Zeitableitung von Vektoren, 40
  umgekehrte Relativbewegung, 52
  Zusammensetzung von Bewegungen, 45
relative Koordinaten, *siehe* Gelenkkoordinaten
Reuleaux, 192
rheonom, 129
Richtungscosinus, 28
Roboter
  parallele Kinematik, 12, 346
  serielle Kinematik, 11, 274
Rodrigues, 6
Rodrigues-Gleichung, 57
Rodrigues-Parameter, 90
Rotor, 116
Runge, 184
räumlicher 6-Vektor, xiv

Satz von
  Euler für die
    Fixpunktdrehung, 55
    Starrkörperbeschleunigung, 37
    Starrkörperbewegung, 34
    Starrkörpergeschwindigkeit, 36
  Frobenius, 375
  Huygens-Steiner, 106
  Sylvester, 367
Schatz, 205

Schließbedingungen
  explizit
    einzelne Schleife, 293
    mehrschleifiges System, 315
    Singularität, 295, 304
  implizit
    einzelne Schleife, 288
    mehrschleifiges System, 308
    Singularität, 292, 305
    Überbestimmtheit, 292
  Übersichtstabelle
    einzelne Schleife, 296
    mehrschleifiges System, 317
Schraubgelenk, 192
Schubgelenk, 192
  explizite Bindungen, 221
Schubkurbelgetriebe, 332
Schwerer Kreisel
  Bewegungsgleichungen, 283
    Euler-Formulierung, 286
    Lagrange-Formulierung, 283
Schwerpunkt, 103
Schwerpunktsatz, 100
skleronom, 129
Steiner, 108
Sylvester, 367
synthetische Methode, 5
System
  frei, 128
  gebunden, 128
  holonom, 129
  nichtholonom, 159
  strukturvariabel, 132

Tait, 72
Tangentialraum, 136
Tensor zweiter Stufe, 30
  dyadisches (tensorielles) Produkt, 31
  Koordinatentransformation, 32
  Tensorkoordinaten, 30
Topologie
  geschlossenes Mehrkörpersystem, 310
  offenes Mehrkörpersystem, 237
  Übersichtstabelle, 198
Trägheitskrafte, 114
Trägheitstensor, 104
  Drehung des Bezugssystems, 108
  homogener Kreiszylinder, 110
Transformationsmatrix, 26
  als Drehtensor, 58
Translationsbewegung, 39

Unwucht, 118

Vektor
  Addition, 21
  Einheitsvektor, 19
  Entwicklungssatz, 25
  Koordinatentransformation, 26
  Lagrange-Identität, 26
  Multiplikation mit Skalar, 21
  relative Zeitableitung, 40
  Skalarprodukt, 22
  Spatprodukt, 25
  Vektorkoordinaten, 19
  Vektorprodukt, 23
Verladekran, 130
  Bewegungsgleichungen, 154
  Bindungen, 141
  Reaktionsbedingungen, 146
Versatzmatrix
  Baumstruktur, 252
  Gelenk, 218
  Kettenstruktur, 243
Verzweigungskörper, 238
Verzweigungslage, 306
virtuelle
  Arbeit, 172
  Beschleunigung, 176
  Geschwindigkeit, 174
  Leistung, 174
  Verschiebung
    holonome Bindungen, 136, 140
    nichtholonome Bindungen, 161, 163
Voigt, 260
Vorgängerkörper, 216, 237

Wagen mit Lenkung, 382
Wagen mit zwei Rädern
  Bewegung auf schiefer Ebene, 169
  Bewegungsgleichungen
    in abhängigen Koordinaten, 166
    in Minimalkoordinaten, 168
  kinematische Bindungen
    explizit, 163
    implizit, 160
    Integrierbarkeitsbedingungen, 371
  mit Radrehungen, 380
  nicht zusammenfallende Radachsen, 377
Wegematrix, 238
Winkelbeschleunigung, 37, 43, 47
Winkelgeschwindigkeit, 36, 46

Zentripetalbeschleunigung, 48
Zustandsgleichungen
  geschlossenes Mehrkörpersystem, 332
  holonomes Massenpunktsystem, 152
  nichtholonomes System, 169
  offenes Mehrkörpersystem, 268
Zwang, 175
Zwangsbedingung, *siehe* Bindung
Zwangskraft, *siehe* Reaktionskraft