Christian Karpfinger

Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten

Springer Spektrum

Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten

Christian Karpfinger

Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten

Springer Spektrum

Christian Karpfinger
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Garching, Deutschland

ISBN 978-3-642-41859-4 ISBN 978-3-642-41860-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-41860-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton
Zeichnungen: Thomas Epp
Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Die Lösungen dieses Buches sind auch in Form von pdf-Dateien auf der Internetseite zu dem Buch *Höhere Mathematik in Rezepten* des gleichen Autors unter

`http://www.springer-spektrum.de/`

erhältlich.
Wir stellen in diesem Text neben den Aufgaben des Rezeptebuches auch ausführliche Lösungsvorschläge zu allen Aufgaben zur Verfügung.
Damit kommen wir dem oft geäußerten Wunsch der Studierenden nach, zusätzliche Aufgaben zum Lösen typischer Problemstellungen bzw. zur Förderung des tieferen Verständnisses der Theorie zur Verfügung zu stellen.
Sämtliche Verweise im Text auf Rezepte, Boxen oder Kapitel beziehen sich auf das genannte Rezeptebuch.
Die Aufgaben haben sich im Laufe vieler Jahre in meinem Fundus angesammelt und stammen nicht allesamt aus meiner Feder. Viele Aufgaben, Lösungen oder MATLAB-Codes sind von Kollegen, denen ich hiermit herzlich dafür danke, dass sie mir diese überlassen haben. Gleichzeitig entschuldige ich mich bei allen Kollegen, deren Aufgaben oder Lösungen ich angebe, ohne es zu wissen.
Trotz sorgfältigem und mehrfachen Lesen des Skriptes sind sicherlich einige Fehler im Text verblieben. Hinweise darauf sind jederzeit herzlich willkommen.

München, im September 2013 — Christian Karpfinger

Inhaltsverzeichnis

Vorwort v

1 Sprechweisen, Symbole und Mengen 1

2 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen 5

3 Die reellen Zahlen 10

4 Maschinenzahlen 15

5 Polynome 18

6 Trigonometrische Funktionen 22

7 Komplexe Zahlen – Kartesische Koordinaten 25

8 Komplexe Zahlen – Polarkoordinaten 28

9 Lineare Gleichungssysteme 32

10 Rechnen mit Matrizen 37

11 $L\,R$-Zerlegung einer Matrix 44

12 Die Determinante 50

13 Vektorräume 54

14 Erzeugendensysteme und lineare (Un-)Abhängigkeit 56

15 Basen von Vektorräumen 60

16 Orthogonalität I 66

17 Orthogonalität II 69

18 Das lineare Ausgleichsproblem 77

19 Die $Q\,R$-Zerlegung einer Matrix 84

20 Folgen 87

21 Berechnung von Grenzwerten von Folgen 89

22 Reihen 93

23 Abbildungen 99

24 Potenzreihen 103

25 Grenzwerte und Stetigkeit 106

26 Differentiation 112

27 Anwendungen der Differentialrechnung I 117

28 Anwendungen der Differentialrechnung II 125

29 Polynom- und Splineinterpolation 131

30 Integration I 133

31 Integration II 142

32 Uneigentliche Integrale 149

33 Separierbare und lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung 152

34 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten 155

35 Einige besondere Typen von Differentialgleichungen 164

36 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I 172

37 Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen 177

38 Basistransformation 184

39 Diagonalisierung – Eigenwerte und Eigenvektoren 190

40 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren 205

41 Quadriken 207

42 Schurzerlegung und Singulärwertzerlegung 216

43 Die Jordan-Normalform I 227

44 Die Jordan-Normalform II 228

45 Definitheit und Matrixnormen 237

46 Funktionen mehrerer Veränderlicher 241

47 Partielle Differentiation – Gradient, Hessematrix, Jacobimatrix 243

48 Anwendungen der partiellen Ableitungen 250

49 Extremwertbestimmung 256

50 Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen 263

51 Totale Differentiation, Differentialoperatoren 271

52 Implizite Funktionen 276

53 Koordinatentransformationen 282

54 Kurven I 286

55 Kurven II 288

56 Kurvenintegrale 294

57 Gradientenfelder 297

58 Bereichsintegrale 301

59 Die Transformationsformel 303

60 Flächen und Flächenintegrale ... 309
61 Integralsätze I ... 312
62 Integralsätze II ... 314
63 Allgemeines zu Differentialgleichungen ... 320
64 Die exakte Differentialgleichung ... 323
65 Lineare Differentialgleichungssysteme I ... 328
66 Lineare Differentialgleichungssysteme II ... 332
67 Lineare Differentialgleichungssysteme III ... 337
68 Randwertprobleme ... 346
69 Grundbegriffe der Numerik ... 351
70 Fixpunktiteration ... 353
71 Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme ... 358
72 Optimierung ... 361
73 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen II ... 366
74 Fourierreihen – Berechnung der Fourierkoeffizienten ... 370
75 Fourierreihen – Hintergründe, Sätze und Anwendung ... 375
76 Fouriertransformation I ... 380
77 Fouriertransformation II ... 381
78 Diskrete Fouriertransformation ... 388
79 Die Laplacetransformation ... 395
80 Holomorphe Funktionen ... 401
81 Komplexe Integration ... 405
82 Laurentreihen ... 408
83 Der Residuenkalkül ... 412
84 Konforme Abbildungen ... 416
85 Harmonische Funktionen und das Dirichlet'sche Randwertproblem 421
86 Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung ... 425
87 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung – Allgemeines ... 427
88 Die Laplace- bzw. Poissongleichung ... 430
89 Die Wärmeleitungsgleichung ... 433
90 Die Wellengleichung ... 437

1 Sprechweisen, Symbole und Mengen

1.1 Aufgaben

1.1 Vertauschen Sie in den folgenden Aussagen jeweils die Reihenfolge der Quantoren $\forall$ und $\exists$ und überprüfen Sie Sinn und Richtigkeit der entstehenden Aussagen:

(a) $\forall\, n \notin \mathbb{P} \cup \{1\}\ \exists\, k \notin \{1, n\} : k \mid n$ ($\mathbb{P}$ bezeichnet dabei die Menge aller Primzahlen),

(b) $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N : \frac{1}{n} \leq 0.001$.

1.2 Schreiben Sie folgende Ausdrücke aus:

(a) $\displaystyle\prod_{n=1}^{j} \left(\sum_{k=1}^{j} n \cdot k \right)$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5} \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{\sum_{k=1}^{3} k^3}{5^i} \right)$.

1.3 Schreiben Sie folgende Ausdrücke in der Form $\sum\limits_{n=1}^{k} a_n$ bzw. $\prod\limits_{n=1}^{k} a_n$:

(a) $\frac{3}{1} + \frac{5}{4} + \frac{9}{9} + \frac{17}{16} + \ldots + \frac{1073741825}{900}$,

(b) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \frac{8}{81} + \ldots + \frac{18}{19683}$,

(c) $\frac{6}{1} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{12}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{300}{99}$,

(d) $1 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 13}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 25}$.

1.4 Gegeben seien die folgenden Teilmengen der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 5 > x > -2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 > x\}, \quad C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x \leq 1\}.$$

Bestimmen Sie folgende Mengen und skizzieren Sie diese auf der Zahlengeraden:

(a) $A \cap C$, (b) $B \setminus A$, (c) $(\mathbb{R} \setminus C) \cup B$.

1.5 Gegeben seien die folgenden Teilmengen der reellen Zahlen:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x < 5\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 \geq x\},$$
$$C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 4\}, \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 > 1\}.$$

Bestimmen Sie jeweils die folgenden Mengen und skizzieren Sie diese auf der Zahlengeraden:

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_1,

(a) $A \cap B$, (c) $B \setminus C$, (e) $C \cap (A \cup B)$,
(b) $A \cup D$, (d) $D \setminus (A \cap B)$, (f) $(\mathbb{R} \setminus (A \cap B)) \cup (C \cap D)$.

1.6 Es seien $A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{M \mid M \subseteq A\}$. Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind:

(a) $a \in B$, (d) $A \in B$, (g) $\emptyset \in B$,
(b) $\{b\} \in B$, (e) $A \subseteq B$, (h) $\emptyset \subseteq B$,
(c) $\{a\} \in A$, (f) $\{a\} \subseteq A$, (i) $\{\emptyset\} \subseteq B$.

1.7 Man begründe: Für beliebige Mengen A, B und C gilt:

(a) $\emptyset \subseteq B$,
(b) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
(c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ und $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ und $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.2 Lösungen

1.1 (a) Wir vertauschen die Quantoren und erhalten:

$$\exists\, n \notin \mathbb{P} \cup \{1\}\ \forall\, k \notin \{1, n\} : k \mid n\,.$$

Man liest diese Aussage als: *Es gibt eine Nichtprimzahl n ungleich 1, die von jeder Zahl k ungleich 1 und n geteilt wird.* Diese Aussage ist falsch: Für jede Nichtprimzahl $n \neq 1$ gilt, dass n nicht von $n + 1 \notin \{1, n\}$ geteilt wird.

(b) Wir erhalten nach Vertauschen der Quantoren:

$$\forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n \geq N : \frac{1}{n} \leq 0.001\,.$$

Gelesen wird diese Aussage als: *Zu jeder natürlichen Zahl N gibt es eine natürliche Zahl n, die größer oder gleich N ist, mit $\frac{1}{n} \leq 0.001$.* Diese Aussage ist nicht identisch zu der in der Aufgabenstellung, jedoch ebenso richtig.

1.2 (a)

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{j}\left(\sum_{k=1}^{j} n \cdot k\right) = \ & (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \ldots + 1 \cdot j) \\ & \cdot (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2 \cdot j) \\ & \cdot (3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \ldots + 3 \cdot j) \\ & \qquad \vdots \\ & \cdot (j \cdot 1 + j \cdot 2 + j \cdot 3 + \ldots + j \cdot j)\,.\end{aligned}$$

(b) $\sum_{n=1}^{5}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\sum_{k=1}^{3}k^3}{5^i}\right) = \frac{36}{5} + \left(\frac{36}{5}\cdot\frac{36}{5^2}\right) + \ldots + \left(\frac{36}{5}\cdot\frac{36}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{36}{5^5}\right).$

1.3 (a) $\frac{3}{1}+\frac{5}{4}+\frac{9}{9}+\frac{17}{16}+\ldots+\frac{1073741825}{900} = \sum_{n=1}^{30}\frac{2^n+1}{n^2}.$

(b) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots+\frac{18}{19683} = \sum_{n=1}^{9}\frac{2n}{3^n}.$

(c) $\frac{6}{1}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{12}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{300}{99} = \prod_{n=2}^{100}\frac{3n}{n-1} = \prod_{n=1}^{99}\frac{3(n+1)}{n}.$

(d) $1+\frac{1\cdot2}{1\cdot3}+\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot3\cdot5}+\ldots+\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot13}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25} = \sum_{n=1}^{13}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{i}{2i-1}\right).$

1.4 (a)

$$\begin{aligned} A\cap C &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in A \;\wedge\; x\in C\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,5>x>-2 \;\wedge\; -1<x\le 1\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,-2<x<5 \;\wedge\; -1<x\le 1\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,-1<x\le 1\} = C\,. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B\setminus A &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\in B \;\wedge\; x\notin A\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,1>x \;\wedge\; (x\le -2 \;\vee\; x\ge 5)\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x<1 \;\wedge\; (x\le -2 \;\vee\; x\ge 5)\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le -2\}\,. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}\setminus C)\cup B &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\notin C \;\vee\; x\in B\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le -1 \;\vee\; x>1 \;\vee\; 1>x\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1\}\,. \end{aligned}$$

1.5

(a)

$$A\cap B = \{x\in\mathbb{R}\,|\,-2<x<5 \;\wedge\; 1\ge x\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,-2<x\le 1\}\,.$$

(b)

$$\begin{aligned} A\cup D &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,-2<x<5 \;\vee\; x^2>1\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,-2<x<5 \;\vee\; x<-1 \;\vee\; x>1\} = \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} B\setminus C &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,1\ge x \;\wedge\; x^2>4\} = \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le 1 \;\wedge\; (x<-2 \;\vee\; x>2)\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x<-2\}\,. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} D\setminus(A\cap B) &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x^2>1 \;\wedge\; \neg(-2<x<5 \;\wedge\; 1\ge x)\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,(x<-1 \;\vee\; x>1) \;\wedge\; \neg(-2<x\le 1)\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,(x<-1 \;\vee\; x>1) \;\wedge\; (x\le -2 \;\vee\; x>1)\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,x\le -2 \;\vee\; x>1\}\,. \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} C \cap (A \cup B) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 \leq 4 \ \wedge \ (-2 < x < 5 \ \vee \ 1 \geq x)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 2 \ \wedge \ x < 5\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 2\}\,. \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} \big(\mathbb{R} \setminus (A \cap B)\big) \cup (C \cap D) &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, \neg(-2 < x < 5 \wedge 1 \geq x) \vee (x^2 \leq 4 \wedge x^2 > 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -2 \vee x > 1 \vee -2 \leq x < -1 \vee 1 < x \leq 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1 \vee x > 1\}\,. \end{aligned}$$

1.6

(a) Falsch. $a \in A$, aber $a \subsetneq A$. So ist die Aufgabe auch gemeint. Man kann die Aussage aber auch als wahr deuten: Ist z. B. $a = \emptyset$, so ist die Aussage wahr. Insofern ist die Aufgabenstellung nicht ganz eindeutig.

(b) Richtig. $b \in A \Rightarrow \{b\} \subseteq A \Rightarrow \{b\} \in B$, also ist die Aussage richtig.

(c) Falsch. $a \in A$. Wieder könnte man mit etwas Willen die Aussage als richtig interpretieren, falls nämlich $b = \{a\}$.

(d) Richtig, A ist Teilmenge von A und daher Element von B.

(e) $a \in A$, aber $a \notin B$, also ist die Aussage falsch.

(f) Richtig, da $a \in A$.

(g) Richtig, da $\emptyset \subseteq A$.

(h) Richtig, da $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M.

(i) Richtig, da aus $\emptyset \in B$ folgt $\{\emptyset\} \subseteq B$.

1.7 (a) Angenommen, es gibt eine Menge B mit $\emptyset \not\subseteq B$. Dann $\exists\, a \in \emptyset$ mit $a \notin B$. Widerspruch, denn $\nexists\, a \in \emptyset$.

(b) „$\subseteq$“: $a \in A \setminus (B \cup C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \notin B \cup C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \notin B \ \wedge \ a \notin C) \Rightarrow a \in A \setminus B \ \wedge \ a \in A \setminus C \Rightarrow a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

„$\supseteq$“: $a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Rightarrow a \in A \setminus B \ \wedge \ a \in A \setminus C \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \notin B \ \wedge \ a \notin C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \notin B \cup C) \Rightarrow a \in A \setminus (B \cup C)$.

(c) klar.

(d) „$\subseteq$“: $a \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \in B \cup C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \in B \ \vee \ a \in C) \Rightarrow (a \in A \ \wedge \ a \in B) \ \vee \ (a \in A \ \wedge \ a \in C) \Rightarrow (a \in A \cap B) \ \vee \ (a \in A \cap C) \Rightarrow a \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

„$\supseteq$“: $a \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow (a \in A \cap B) \ \vee \ (a \in A \cap C) \Rightarrow (a \in A \ \wedge \ a \in B) \ \vee \ (a \in A \ \wedge \ a \in C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \in B \ \vee \ a \in C) \Rightarrow a \in A \ \wedge \ (a \in B \cup C) \Rightarrow a \in A \cap (B \cup C)$.

Die zweite Gleichung beweist man analog.

2 Die natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen

2.1 Aufgaben

2.1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: n Elemente können auf $1 \cdot 2 \cdots n = n!$ verschiedene Arten angeordnet werden.

(b) Die Summe über die ersten n ungeraden Zahlen liefert für alle $n \in \mathbb{N}$ den Wert n^2.

(c) Die Bernoulli'sche Ungleichung $(1+x)^n \geq 1+nx$ gilt für alle reellen Zahlen $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar.

(e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n}(i^2 - 1) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$.

(f) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

(g) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

(h) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>4}$ gilt: $2^n > n^2$.

(i) Die Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, F_2, \ldots$ sind rekursiv definiert durch $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

2.2 Zeigen Sie, dass für die Binomialkoeffizienten die folgenden Rechenregeln gelten, dabei sind k, $n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, (b) $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n}{0}$, (c) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

2.3 Stellen Sie die folgenden Dezimalzahlen x in der Form $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ dar:

(a) $x = 10.1\overline{24}$, (b) $x = 0.0\overline{9}$, (c) $x = 0.\overline{142857}$.

2.4 In einem Neubaugebiet wurden innerhalb eines Zeitraumes von etwa 12 Jahren insgesamt 4380 Wohneinheiten fertiggestellt. Pro Tag wurde jeweils eine Wohnung bezugsfertig. Vom Bezugstag der ersten Wohnung bis einen Tag nach Übergabe der letzten Einheit wurden von den Bewohnern insgesamt $1.8709 \cdot 10^8$ kWh Strom verbraucht. Ermitteln Sie den durchschnittlichen Verbrauch pro Tag und Wohnung.

2.5 Ein Hypothekendarlehen über 100 000 Euro wird mit 7 % jährlich verzinst und mit gleichbleibender Rate A (Annuität) jeweils am Ende eines Jahres getilgt.

Wie groß muss A sein, wenn das Darlehen mit der 20. Tilgungsrate ganz zurückgezahlt sein soll?

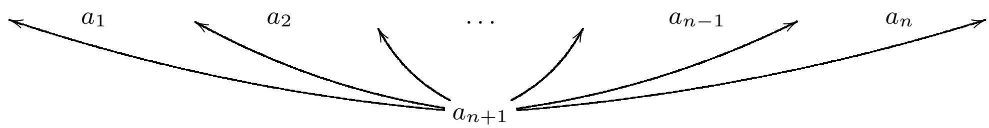
C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_2,

2.2 Lösungen

2.1 (a) *Ind.anfang*: $n = 1$: Ein Element kann auf eine Art angeordnet werden. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Die Aussage sei korrekt für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Wir haben $n + 1$ Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$.
Die ersten n Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ lassen sich nach Annahme auf $n!$ viele Arten ordnen.



Für jede der $n!$ Anordnungen gibt es $n+1$ Möglichkeiten das Element a_{n+1} einzufügen, folglich gibt es insgesamt $n!\,(n + 1) = (n + 1)!$ Anordnungen. ✓

(b) *Induktionsanfang*: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1}(2k - 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = n^2$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:
$\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) + 2(n + 1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. ✓

(c) *Induktionsanfang*: $n = 1$: $(1 + x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit für alle $x \geq -1$. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Es gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$.

Induktionsschritt:
$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + nx^2 + x + nx \geq 1 + (n + 1)x$. ✓

(d) *Induktionsanfang*: $n = 1$: $4^3 + 3^3 = 91 = 7 \cdot 13$. ✓

Induktionsvoraussetzung: $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ ist durch 13 teilbar für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} 4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} &= 4^{2+2n+1} + 3^{1+n+2} = 16 \cdot 4^{2n+1} + 3 \cdot 3^{n+2} \\ &= 16 \cdot (4^{2n+1} + 3^{n+2}) - 13 \cdot 3^{n+2} \,. \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist $4^{2n+1} + 3^{n+2}$ durch 13 teilbar, ebenso ist $13 \cdot 3^{n+2}$ durch 13 teilbar. Damit ist auch $4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2}$ durch 13 teilbar. ✓

(e) *Induktionsanfang*: $n = 1$. $\sum_{i=1}^{1}(i^2 - 1) = 1 - 1 = 0 = \frac{1}{6}(2 + 3 - 5)$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\sum_{i=1}^{n}(i^2 - 1) = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:

$$\sum_{i=1}^{n+1}(i^2 - 1) = \sum_{i=1}^{n}(i^2 - 1) + (n + 1)^2 - 1 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 5n) + n^2 + 2n$$
$$= \frac{1}{6}(2n^3 + 9n^2 + 7n) = \frac{1}{6}(2(n + 1)^3 + 3(n + 1)^2 - 5(n + 1)) . \checkmark$$

(f) *Induktionsanfang*: $n = 1$. $\sum_{k=1}^{1} k! \cdot k = 1! \cdot 1 = 1 = 2! - 1$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k! \cdot k = \sum_{k=1}^{n} k! \cdot k + (n + 1)! \cdot (n + 1) = (n + 1)! - 1 + (n + 1)! \cdot (n + 1)$$
$$= (n + 2) \cdot (n + 1)! - 1 = (n + 2)! - 1 . \checkmark$$

(g) *Induktionsanfang*: $n = 1$.
$\sum_{i=0}^{1} = 2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1 = 2^{1+1} - 1$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:
$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$. ✓

(h) *Induktionsanfang*: $n = 5$: $2^5 = 32 > 25 = 5^2$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $2^n > n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$.

Induktionsschritt:
$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 = n^2 + n^2 > n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$. ✓

Im obigen Beweis wird n^2 nach unten durch $2n + 1$ abgeschätzt, man nutzt also aus, dass für $n > 4$ stets die Ungleichung $n^2 > 2n+1$ gilt. Die Gültigkeit dieser Ungleichung lässt sich wiederum durch Induktion beweisen:

Induktionsanfang: $n = 5$: $5^2 = 25 > 11 = 2 \cdot 5 + 1$. ✓

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $n^2 > 2n + 1$ für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 4$.

Induktionsschritt:
$(n+1)^2 = n^2+2n+1 > 2n+1+2n+1 = 2n+2+2n = 2(n+1)+2n > 2(n+1)+1$. ✓

(i) *Induktionsanfang*: $n = 1$.
$\sum_{i=1}^{1}(F_i)^2 = F_1^2 = 1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot (1 + 0) = F_1 \cdot (F_0 + F_1) = F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot F_{1+1}$. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Es gilt $\sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 = F_n \cdot F_{n+1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt:
$\sum_{i=1}^{n+1}(F_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(F_i)^2 + (F_{n+1})^2 = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n+1} \cdot F_{n+1} = F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n+1}) = F_{n+1} \cdot F_{n+2}$. ✓

2.2 (a) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$,
(b) $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \binom{n}{0}$,
(c) Es gilt:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!} + \frac{n!k}{k!(n-k+1)!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.$$

2.3 (a) Es gilt:

$$1000 \cdot x - 10 \cdot x = 990 \cdot x = 10124.\overline{24} - 101.\overline{24} = 10023\,.$$

Nun folgt: $x = \frac{10023}{990} = \frac{3341}{330}$.
(b) Es sei $a = 10 \cdot 0.0\overline{9} = 0.\overline{9}$. Dann gilt

$$10 \cdot a - a = 9.\overline{9} - 0.\overline{9} = 9\,.$$

Nach a aufgelöst erhalten wir $a = 1$ und damit $x = 0.0\overline{9} = \frac{1}{10}$.
(c) Es gilt

$$10^6 \cdot x - x = 142857.\overline{142857} - 0.\overline{142857} = 142857\,.$$

Nach x aufgelöst erhalten wir:

$$x = \frac{142857}{10^6 - 1} = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}\,.$$

2.4 Wir nummerieren die Wohneinheiten in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung durch. Die k-te Wohnung hat $4380 - (k-1)$ Verbrauchstage, $k = 1, 2, \ldots, 4380$. Die Zahlen $4380 - (k-1)$ durchlaufen die Werte 4380, 4379, ..., 1. Die Anzahl N der *Wohnungsverbrauchstage* ist

$$N = \sum_{k=1}^{4380} k = \frac{4380 \cdot 4381}{2} = 9594390\,.$$

Damit ist der durchschnittliche Verbrauch pro Tag und Wohnung

$$\frac{1.8709 \cdot 10^8}{N} = 19.5 \text{ kWh}\,.$$

2.5 Wir bezeichnen die Schuld nach der k-ten Rate mit S_k. Der *Verzinsungsfaktor* ist $q = 1.07$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
S_0 &= 100\,000 \text{ Euro}\,, \\
S_1 &= S_0 \cdot q - A\,, \\
S_2 &= S_1 \cdot q - A = (S_0 \cdot q - A) \cdot q - A\,, \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
S_n &= (\cdots (S_0 \cdot q - A) \cdot q - A) \cdot q - A) \cdots) \cdot q - A \\
&= S_0 \cdot q^n - A \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\
&= S_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}\,.
\end{aligned}$$

Die Bedingung $S_{20} = 0$ liefert demnach

$$0 = S_0 \cdot q^{20} - A \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1}\,.$$

Aufgelöst nach A bedeutet das:

$$A = S_0 \cdot q^{20} \frac{q - 1}{q^{20} - 1} \approx 9439.29 \text{ Euro}\,.$$

3 Die reellen Zahlen

3.1 Aufgaben

3.1 Begründen Sie, warum $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Hinweis: Nehmen Sie an, es gilt $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, wobei $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt ist.

3.2 Bestimmen Sie in den folgenden Fällen jeweils die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, die den Ungleichungen genügen, und skizzieren Sie diese Mengen auf der Zahlengeraden:

(a) $\frac{x-1}{x+1} < 1$,

(b) $x^2 + x + 1 \geq 0$,

(c) $x^3 - x^2 < 2x - 2$,

(d) $|1 - x| \leq 1 + 2x$,

(e) $15x^2 \leq 7x + 2$,

(f) $|x + 1| + |5x - 2| = 6$,

(g) $\frac{x|x|}{2} = 8$,

(h) $x|x| = \frac{1}{2}x^3$,

(i) $|x - 4| > x^2$.

3.3 Gegeben seien rationale Zahlen p, q und irrationale Zahlen r, s. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $x = p + q$ ist eine rationale Zahl.

(b) $y = r + s$ ist eine irrationale Zahl.

(c) $z = p + r$ ist eine irrationale Zahl.

3.4 Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(a) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $|x - y| \leq |x| - |y|$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichung $|x - y| = ||x| - |y||$.

(c) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

3.5 Untersuchen Sie die Mengen

(a) $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = {}^{n}/_{(n+1)},\ n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $M = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = {}^{1}/_{(n+1)} + {}^{(1+(-1)^n)}/_{2n},\ n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $M = \left\{{}^{n^2}/_{2^n} \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\right\}$

auf Beschränktheit und bestimmen Sie ggf. Infimum, Supremum, Minimum und Maximum.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_3,

3.2 Lösungen

3.1 Angenommen, $\sqrt{2}$ ist rational. Dann wäre $\sqrt{2} = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ und durch Kürzen erhielten wir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, wobei p und q teilerfremd wären. Mit Quadrieren folgte dann:

$$(\sqrt{2})^2 = \frac{p^2}{q^2} \iff 2q^2 = p^2 .$$

Es müsste also die Zahl p^2 gerade sein, da sie 2 als Teiler hat. Damit wäre dann auch p gerade, also $p = 2r$ mit $r \in \mathbb{Z}$. Einsetzen lieferte dann:

$$2q^2 = p^2 \iff 2q^2 = 4r^2 \iff q^2 = 2r^2.$$

Damit wäre also auch q gerade. Dann hätten sowohl p als auch q den Teiler 2. Das steht im Widerspruch dazu, dass p und q teilerfremd sind. Es gibt demnach keine Darstellung von $\sqrt{2}$ als Bruch.

3.2 (a) Die erste Idee ist, diese Ungleichung mit $x + 1$ zu multiplizieren. Dazu ist eine Fallunterscheidung $x + 1 > 0$ und $x + 1 < 0$ nötig. Wir vermeiden diese Fallunterscheidung durch folgenden Trick, wobei das Glück uns beisteht und sich der entstehende Quotient derart vereinfacht, sodass keine Fallunterscheidung nötig wird:

$$\frac{x-1}{x+1} < 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1}{x+1} - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x-1-(x+1)}{x+1} < 0 \Leftrightarrow\; -\frac{2}{x+1} < 0$$
$$\Leftrightarrow\; x+1 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -1\,,$$

sodass $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > -1\}$.

(b) Die Mitternachtsformel zeigt, dass das Polynom $x^2 + x + 1$ keine reellen Nullstellen hat:

$$x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \;\text{ mit }\; \frac{1}{4} - 1 < 0\,.$$

Damit gibt es keinen Vorzeichenwechsel. Setzt man $x = 0$ ein, so stimmt die Ungleichung, damit ist die Ungleichung aber für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also $L = \mathbb{R}$.

(c) Es gilt:

$$x^3 - x^2 < 2x - 2 \;\Leftrightarrow\; (x-1)(x^2-2) < 0\,.$$

1. Fall: $x - 1 > 0$ und $x^2 < 2$. In diesem Fall gilt $L_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 < x < \sqrt{2}\}$.

2. Fall: $x - 1 < 0$ und $x^2 - 2 > 0$. In diesem Fall gilt $L_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -\sqrt{2}\}$.

Insgesamt erhalten wir $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -\sqrt{2} \;\vee\; 1 < x < \sqrt{2}\}$.

(d) Wir unterscheiden $1 - x \geq 0$ und $1 - x < 0$:

1. Fall: $1 - x \geq 0$. Dann erhalten wir:

$$1 - x \leq 1 + 2x \;\Leftrightarrow\; 3x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 0\,, \quad \text{also } L_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}\,.$$

2. Fall: $1 - x < 0$. Dann erhalten wir:

$$-(1-x) \le 1 + 2x \;\Leftrightarrow\; x - 1 \le 2x + 1 \;\Leftrightarrow\; x \ge -2\,, \quad \text{also} \quad L_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 1\}\,.$$

Insgesamt erhalten wir $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \ge 0\}$.

(e) Wir erhalten mit der Mitternachtsformel

$$15x^2 \le 7x + 2 \;\Leftrightarrow\; 15(x - {}^2\!/\!_3)(x + {}^1\!/\!_5) \le 0\,.$$

1.Fall: $x - {}^2\!/\!_3 > 0$ und $x + {}^1\!/\!_5 < 0$. Solche $x \in \mathbb{R}$ gibt es nicht, sodass $L_1 = \emptyset$.

2. Fall: $x - {}^2\!/\!_3 \le 0$ und $x + {}^1\!/\!_5 \ge 0$. In diesem Fall erhalten wir $L_2 = [-{}^1\!/\!_5, {}^2\!/\!_3]$.

Insgesamt haben wir also $L = [-{}^1\!/\!_5, {}^2\!/\!_3]$.

(f) Wir lösen die Beträge auf, indem wir eine Fallunterscheidung gemäß der Teilmengen $(-\infty, -1)$, $[-1, {}^5\!/\!_2)$ und $[{}^5\!/\!_2, \infty)$ betrachten:

1. Fall: $x \ge {}^5\!/\!_2$. Es gilt $x + 1 + 5x - 2 = 6 \;\Leftrightarrow\; 6x = 7 \;\Leftrightarrow\; x = {}^7\!/\!_6$. Hier erhalten wir $L_1 = \{{}^7\!/\!_6\}$.

2. Fall: $x < -1$. Es gilt $-x - 1 - 5x + 2 = 6 \;\Leftrightarrow\; 6x = -5 \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{5}{6}$. Hier erhalten wir $L_2 = \emptyset$.

3. Fall: $-1 \le x < {}^5\!/\!_2$. Es gilt $x + 1 - 5x + 2 = 6 \;\Leftrightarrow\; 4x = -3 \;\Leftrightarrow\; x = -{}^3\!/\!_4$. Hier erhalten wir $L_3 = \{-{}^3\!/\!_4\}$.

Insgesamt erhalten wir die Lösungsmenge $L = \{-{}^3\!/\!_4, {}^7\!/\!_6\}$.

(g) Wir werden den Betrag los, indem wir die Fälle $x \ge 0$ und $x < 0$ unterscheiden:

1. Fall: $x \ge 0$. Es gilt ${}^{x^2}\!/\!_2 = 8 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 16 \;\Leftrightarrow\; x = 4$. Hier erhalten wir $L_1 = \{4\}$.

2. Fall: $x < 0$. Es gilt $-{}^{x^2}\!/\!_2 = 8 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -16$. Solche x gibt es in $\mathbb{R}$ nicht, sodass $L_2 = \emptyset$.

Insgesamt erhalten wir $L = \{4\}$.

(h) Wir unterscheiden die Fälle $x \ge 0$ und $x < 0$.

1. Fall: $x \ge 0$. Es gilt $x^2 = \frac{1}{2}x^3 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = 2$. Hier erhalten wir $L_1 = \{0,\, 2\}$.

2. Fall: $x < 0$. Es gilt $-x^2 = \frac{1}{2}x^3 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 2x^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2(x+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -2$. Hier erhalten wir $L_2 = \{-2\}$.

Insgesamt erhalten wir $L = \{-2, 0, 2\}$.

(i) Wir machen eine Fallunterscheidung, um den Betrag loszuwerden.

1. Fall: $x - 4 \ge 0$. Es gilt:

$$x - 4 > x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x < -4 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x + {}^1\!/\!_4 < -{}^{15}\!/\!_4 \;\Leftrightarrow\; (x - {}^1\!/\!_2)^2 < -{}^{15}\!/\!_4\,,$$

solche gibt es in $\mathbb{R}$ nicht, sodass $L_1 = \emptyset$.

2. Fall: $x - 4 < 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} -x+4 > x^2 \;&\Leftrightarrow\; x^2 + x < 4 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x + 1/4 < 17/4 \;\Leftrightarrow\; (x + 1/2)^2 < 17/4 \\ &\Leftrightarrow\; -\sqrt{17}/2 < x + 1/2 < \sqrt{17}/2 \;\Leftrightarrow\; (-1-\sqrt{17})/2 < x < (-1+\sqrt{17})/2\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $L_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -(\sqrt{17}+1)/2 < x < (-1+\sqrt{17})/2\right\}$.

Insgesamt erhalten wir $L = L_2 = (-(\sqrt{17}+1)/2, (-1+\sqrt{17})/2)$.

3.3 (a) Es gelte $p = \frac{m_1}{n_1}$, $q = \frac{m_2}{n_2} \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $p+q = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + m_2 n_1}{n_1 n_2} \in \mathbb{Q}$, also stimmt die Behauptung.

(b) Diese Behauptung kann nicht stimmen: Es sind nämlich $r = \sqrt{2}$ und $s = -\sqrt{2}$ irrationale Zahlen, die Summe $r + s = 0$ hingegen rational.

(c) Angenommen, $z \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $r = z - p \in \mathbb{Q}$, das stimmt nicht. Damit kann z nicht rational sein, somit ist z irrational.

3.4 (a) Falsch, da z.B. $|0-1| = 1 \not\leq -1 = |0| - |1|$.

(b) Falsch, da z.B. $|1-(-1)| = 2 \neq 0 = ||1| - |-1||$.

(c) Richtig, da für alle x, $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} &|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y| \\ &|y| = |y-x+x| \leq |y-x| + |x| \Rightarrow |y| - |x| \leq |y-x| \Rightarrow -(|x|-|y|) \leq |x-y|\,. \end{aligned}$$

Damit gilt also $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

3.5 (a) Die *ersten* Elemente der Menge lauten $1/2$, $2/3$, $3/4$, $4/5, \ldots$. Man schöpft den Verdacht: $1/2 \leq x \leq 1$ für alle $x \in M$. Bleibt nur noch, den Verdacht zu begründen.

Wir beginnen mit der unteren Schranke:

$$x \geq 1/2 \;\;\forall\, x \in M \;\Leftrightarrow\; n/n+1 \geq \tfrac{1}{2} \;\;\forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; 2n \geq n+1 \;\;\forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; n \geq 1 \;\;\forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit ist gezeigt, dass $1/2$ eine untere Schranke von M ist, insbesondere M also nach unten beschränkt ist. Wegen $1/2 \in M$ ist gezeigt: $\inf(M) = 1/2$ und $\min(M) = 1/2$.

Nun zur oberen Schranke:

$$x \leq 1 \quad \forall\, x \in M \;\Leftrightarrow\; \tfrac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; n \leq n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; 0 \leq 1 \; n \in \mathbb{N}\,.$$

Damit ist gezeigt, dass 1 eine obere Schranke von M ist. Angenommen, es gibt eine weitere obere Schranke $b < 1$ von M, also $x \leq b$ für alle $x \in M$, dann folgt:

$$\begin{aligned} x \leq b < 1 \;\forall\, x \in M \;&\Leftrightarrow\; \tfrac{n}{n+1} \leq b \;\forall\, n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow n \leq bn + b \;\forall\, n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow\; (1-b)n \leq b \;\forall\, n \in N \;\Leftrightarrow\; n \leq \tfrac{b}{1-b} \;\forall\, n \in N \end{aligned}$$

(beachte, dass $1 - b > 0$), das ist nicht möglich, da $\mathbb{N}$ unbeschränkt ist. Damit gilt $\sup(M) = 1$. Da $1 \notin M$, hat die Menge M kein Maximum.

(b) Schreibt man die *ersten* Elemente von M auf, so erkennt man schnell, dass man am besten zwischen den geraden und ungeraden $n \in \mathbb{N}$ unterscheiden sollte: $M = M_g \cup M_u$ mit

$$M_g = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \tfrac{1}{2k+1} + \tfrac{1}{2k}\,,\ k \in \mathbb{N}\right\} \text{ und } M_u = \left\{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \tfrac{1}{2k}\,,\ k \in \mathbb{N}\right\}\,.$$

Damit haben wir also

$$M_g = \{5/6, 9/20, 13/42, \ldots\}\ ,\ M_u = \{1/2, 1/4, 1/6, \ldots\}\ .$$

Da offenbar $\max(M_g) = 5/6$ und $\max(M_u) = 1/2$ gilt, erhalten wir bereits:

$$\max(M) = \sup(M) = 5/6\,.$$

Offensichtlich ist 0 eine untere Schranke von M. Angenommen, 0 ist nicht das Infimum. Dann gibt es ein $c > 0$ mit $x \geq c$ für alle $x \in M$. Es folgt

$$\tfrac{1}{2k} \geq c \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ k \leq \tfrac{1}{2c} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\,.$$

Das kann nicht sein, da $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist. Es folgt damit $\inf(M) = 0$. Da $0 \notin M$, hat M kein Minimum.

(c) Wir berechnen zuerst ein paar Elemente der Menge:

$$M = \{1/2,\ 4/4,\ 9/8,\ 16/16,\ 25/32,\ 36/64,\ \ldots\}$$

Es liegt die Vermutung nahe, dass $n^2/2^n \leq 1$ für $n \geq 4$, d. h. $n^2 \leq 2^n \quad \forall n \geq 4$. Wir beweisen diese per Induktion nach n:

Induktionsanfang: Für $n = 4$ ist die Aussage erfüllt. ✓

Induktionsbehauptung: Es gelte $n^2 \leq 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen ist: $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. Es gilt:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + n = n^2 + 3n < n^2 + n \cdot n = 2 \cdot n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\,.$$

Damit gilt $n^2 \leq 2^n$ für $n \geq 4$ und folglich $n^2/2^n \leq 1$ für $n \geq 4$.

Es ist demnach $\sup(M) = \max(M) = 9/8$. Außerdem gilt wegen

$$\frac{(n+1)^2/2^{n+1}}{n^2/2^n} = \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1 \quad \forall\, n \geq 3,$$

dass $(n+1)^2/2^{n+1} < n^2/2^n$ ist, für alle $n \geq 3$. Man sagt: Die Folge $\left(n^2/2^n\right)$ fällt „schließlich streng monoton“. Wegen der Beschränktheit nach unten durch 0 gilt $\inf(M) = 0$; ein Minimum existiert nicht, es gibt in M nämlich kein kleinstes Element.

4 Maschinenzahlen

4.1 Aufgaben

4.1 Man stelle die Dezimalzahlen 2005 und 0.25 im Dualsystem dar.

4.2 (a) Man stelle die Dezimalzahlen 967 und 0.5 im Dualsystem dar.

(b) Man schreibe die Dualzahl 11001101 als Dezimalzahl.

(c) Man bestimme das Produkt folgender Dualzahlen $1111 \cdot 11$ als Dualzahl und mache die Probe im Dezimalsystem.

4.3 Stellen Sie die Zahl $1/11$ als Gleitpunktzahl im Binärsystem dar. Verwenden Sie dafür nur elementare MATLAB-Operationen und -Schleifen.

4.4 Schreiben Sie ein Programm, das zu einer natürlichen Zahl a die Binärdarstellung von a ausgibt.

4.5 Wie viele normalisierte Maschinenzahlen gibt es in $\mathbb{M}_{2,4,-3,3}$? Berechnen Sie eps, $x_{\min}$ und $x_{\max}$.

4.6 Warum liefert der MATLAB-Befehl `realmin/2` nicht `0` bzw. `realmax+realmax/2^60` nicht `Inf`?

4.7 Es bezeichne z_0 bzw. z_1 die kleinste Maschinenzahl, die gerade noch größer ist als 0 bzw. 1. Dabei sind die Maschinenzahlen entsprechend folgender Parameter gegeben: $b = 2$, $t = 24$, $e_{min} = -126$ und $e_{max} = 127$. Geben Sie z_0 und z_1 an. Welcher Abstand ist größer: der von z_0 und 0 oder der von z_1 und 1?

4.2 Lösungen

4.1 $2005 = 1024+512+256+128+64+16+4+1 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Damit gilt $(2005)_{10} = (11111010101)_2$.

Wegen $0.25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}$ gilt $(0.25)_{10} = (0.01)_2$.

4.2 (a) Es gilt $967 = 512 + 256 + 128 + 64 + 4 + 2 + 1 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Damit gilt $(967)_{10} = (1111000111)_2$.

Wegen $0.5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ gilt $(0.5)_{10} = (0.1)_2$.

(b) Wegen $1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 205$ gilt $(11001101)_2 = (205)_{10}$.

(c) Es gilt $1111 \cdot 11 = 11110 + 1111 = 101101$.

Die Probe liefert $(11)_2 = (3)_{10}$, $(1111)_2 = (1+2+2^2+2^3)_{10} = (15)_{10}$ und $(101101)_2 = (1 + 2^2 + 2^3 + 2^5)_{10} = (45)_{10}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_4,

4.3 Durch Eingabe von:

```
a=1/11;
for i=1:30
    if a>=1
        a = a-1; x(i) = 1;
    else x(i) = 0;
    end
    a = 2*a;
end
x
```

erhält man `x = 0 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0 1 0 0 0 1 0 1 1 1 0`.
Daraus kann man ablesen, dass $1/11$ binär geschrieben $0.\overline{0001011101}$ lautet.

4.4 Der folgende Code taugt:

```
function [ x ] = binaerganz( a )
k=1;
while a>=1
if mod(a,2) ~= 0
  x(k)=1; a=a-1; a=a/2; k=k+1;
else
  x(k)=0; a=a/2; k=k+1;
end
end
x=x(end:-1:1);
```

4.5 In $\mathbb{M}_{2,4,-3,3}$ gibt es $2 \cdot 2^3 \cdot 7 + 1 = 113$ Maschinenzahlen. Es gilt $\text{eps} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$.
Verfügbare Mantissen:

Mantisse	in der Basis 10
± 0000	$= \pm(0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}) = 0$
± 1000	$= \pm(1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}) = \pm\frac{1}{2}$
± 1001	$= \pm(1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}) = \pm\frac{9}{16}$
± 1010	$= \pm(1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}) = \pm\frac{5}{8}$
$\vdots$	$\vdots$
± 1111	$= \pm(1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}) = \pm\frac{15}{16}$

Verfügbare Exponenten:

Exponent	in der Basis 10
-11	$= -(1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = -3$
-10	$= -(1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) = -2$
-01	$= -(0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = -1$
± 00	$= \pm(0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) = 0$
$+01$	$= +(0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = 1$
$+10$	$= +(1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0) = 2$
$+11$	$= +(1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) = 3$

Damit erhalten wir

$$x_{\min} = +1000-11 = +(1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4}) \cdot 2^{-(1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)} = \tfrac{1}{2} \cdot 2^{-3} = \tfrac{1}{16}$$
$$x_{\max} = +1111+11 = +(1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4}) \cdot 2^{+(1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)} = \tfrac{15}{16} \cdot 2^3 = \tfrac{15}{2}.$$

4.6 MATLAB kann auch mit *nicht*normalisierten Maschinenzahlen arbeiten. Der Befehl `realmin` liefert die Zahl

$$0.1\underbrace{0\ldots0}_{52}{}_2 \cdot 2^{e_{min}}, \qquad e_{min} = -1022$$

Diese Zahl teilen wir durch 2^{52} und kriegen

$$0.0\ldots01_2 \cdot 2^{e_{min}}.$$

Erneutes Teilen durch 2 liefert (endlich) 0.
Der Befehl `realmax` gibt

$$0.1\ldots1_2 \cdot 2^{e_{max}}, \qquad e_{max} = 1023.$$

Aus der IEEE Arithmetik (grundlegende arithmetische Operationen sind rundungsgenau) wissen wir, dass, solange die gerundete Summe kleiner als $2^{e_{max}}$ ist, wir auf `realmax` was draufaddieren dürfen und dabei wieder `realmax` als Resultat bekommen.
Anmerkung: Aus dem gleichen Grund liefert `(1+eps/2)-1` Null!

4.7 Es ist $z_1 - 1$ die Maschinengenauigkeit, das ist durch die Länge der Mantisse bedingt. Weiter wissen wir: $z_1 = 1 + 2^{1-t} = 1 + 2^{-23}$. Die kleinste darstellbare positive Zahl z_0 hängt aber auch noch von dem Exponent ab, kann also *viel* kleiner werden. Diese Zahl ist gegeben durch $m = 1$ und $e = e_{min}$, also $2^{-24} \cdot 2^{-126} = 2^{-150}$.

5 Polynome

5.1 Aufgaben

5.1 Dividieren Sie das Polynom $p(x) = x^5 + x^4 - 4\,x^3 + x^2 - x - 2$ durch das Polynom

(a) $q(x) = x^2 - x - 1$,

(b) $q(x) = x^2 + x + 1$.

5.2 Faktorisieren Sie folgende Polynome:

(a) $p_1(x) = x^3 - 2x - 1$,

(b) $p_2(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$,

(c) $p_3(x) = x^4 - 6x^2 + 7$,

(d) $p_4(x) = 9x^4 + 30x^3 + 16x^2 - 30x - 25$,

(e) $p_5(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12$,

(f) $p_6(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$,

(g) $p_7(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3$,

(h) $p_8(x) = x^3 + 1$.

5.3 Führen Sie für folgende Ausdrücke eine Partialbruchzerlegung durch:

(a) $\frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2}$,

(b) $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}$,

(c) $\frac{x-4}{x^3+x}$,

(d) $\frac{x^2}{(x+1)(1-x^2)}$,

(e) $\frac{9x}{2x^3+3x+5}$,

(f) $\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

5.2 Lösungen

5.1 (a) Es gilt $p(x) = q(x)\,(x^3 + 2\,x^2 - x + 2)$.
(b) Es gilt $p(x) = q(x)\,(x^3 - 5x + 6) - 2x - 8$.

5.2 Auswerten der Polynome an Stellen wie 0, 1, -1 und/oder quadratische Ergänzung liefert Nullstellen. Durch Polynomdivision lassen sich die Polynome dann in Faktoren zerlegen.

(a) $p_1(x) = (x+1)(x^2 - x - 1) = (x-1)(x - \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))(x - \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))$.

(b) $p_2(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (x-1)^2(x^2 - x - 6) = (x-1)^2(x+2)(x-3)$.

(c) Mit der Substitution $u = x^2$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für u:

$$u^2 - 6u + 7 = (u-3)^2 - 2 = 0\,.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind durch $u = 3 \pm \sqrt{2}$ gegeben. Für die vier Nullstellen bzw. die Faktorisierung des Polynoms $p_3(x)$ folgt somit

$$p_3(x) = (x + \sqrt{3+\sqrt{2}})(x - \sqrt{3+\sqrt{2}})(x + \sqrt{3-\sqrt{2}})(x - \sqrt{3-\sqrt{2}})\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_5,

(d) $p_4(x) = 9x^4 + 30x^3 + 16x^2 - 30x - 25 = (x+1)(x-1)(3x+5)^2$.

(e) $p_5(x) = x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = (x+1)(x-2)(x-6)$.

(f) Wir finden keine Nullstelle, die wir wegdividieren können. Also machen wir den Ansatz

$$p_6(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d) = x^4+(a+c)x^3+(ac+d+b)x^2+(ad+bc)x+bd\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert ein Gleichungssystem

- $a+c=1$
- $ac+b+d=2$
- $ad+bc=1$
- $bd=1$

Aus der ersten Gleichung erhalten $c = 1-a$, dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert $a(1-a)+b+d=2$. Wegen der letzten Gleichung versuchen wir es mit $b = d = 1$ und erhalten nun $a = 0$ oder $a = 1$. Wir versuchen es mit $a = 0$ und erhalten $c = 1$. Offenbar erfüllen $a = 0$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$ alle Gleichungen. Damit haben wir die Zerlegung gefunden: $p_6(x) = x^4+x^3+2x^2+x+1 = \left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

(g) $p_7(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = (x+3)(x-1)(x+1)^2$.

(h) $p_8(x) = x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

5.3 (a) (1) Der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned}\frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{(A+C)x^5+(B+D)x^4+(2A+C+E)x^3+(2B+D+F)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

(2) Multiplikation mit dem Nenner $q(x)$ liefert:

$$x^4 - 4 = (A+C)x^5 + (B+D)x^4 + (2A+C+E)x^3 + (2B+D+F)x^2 + Ax + B\,.$$

(3) Wegen der Vielzahl der Unbekannten, versuchen wir nun gar nicht, manche durch Einsetzen spezieller Werte zu ermitteln.

(4) Wir formulieren den Koeffizientenvergleich als lineares Gleichungssystem mit den Methoden aus Kapitel 9 (Rezeptebuch): Der Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\0&2&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\\E\\F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-4\end{pmatrix}.$$

Man erhält (der Reihe nach): $A = 0$, $B = -4$, $C = 0$, $D = 5$, $E = 0$, $F = 3$.

(5) Damit erhalten wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2}\,.$$

(b) (1) Der Ansatz lautet:

$$\tfrac{x}{(1+x)(1+x^2)} = \tfrac{A}{1+x} + \tfrac{Bx+C}{1+x^2} = \tfrac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(1+x)(1+x^2)}\,.$$

(2) Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$x = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)\,.$$

(3) Wir bevorzugen den Koeffizientenvergleich.

(4) Man erhält direkt: $A = -1/2$, $B = C = 1/2$.

(5) Damit gilt

$$\tfrac{x}{(1+x)(1+x^2)} = \tfrac{1}{2}\tfrac{1+x}{1+x^2} - \tfrac{1}{1+x}\,.$$

(c) (1) Der Ansatz lautet:

$$\tfrac{x-4}{x(x^2+1)} = \tfrac{A}{x} + \tfrac{Bx+C}{x^2+1} = \tfrac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \tfrac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}\,.$$

(2) Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$x - 4 = (A+B)x^2 + Cx + A\,.$$

(3) Wir bevorzugen wieder den Koeffizientenvergleich.

(4) Der Koeffizientenvergleich liefert $A = -4$, $B = 4$, $C = 1$.

(5) Damit gilt:

$$\tfrac{x-4}{x^3+x} = -4\tfrac{1}{x} + \tfrac{4x+1}{x^2+1}\,.$$

(d) (1) Der Ansatz lautet:

$$\tfrac{x^2}{(x+1)(1-x^2)} = \tfrac{A}{1+x} + \tfrac{B}{(1+x)^2} + \tfrac{C}{1-x} = \tfrac{(C-A)x^2+(2C-B)x+(A+B+C)}{(1+x)(1-x^2)}\,.$$

(2) Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$x^2 = (C-A)x^2 + (2C-B)x + (A+B+C)\,.$$

(3) Wir verlassen uns auf den Koeffizientenvergleich in (4).

(4) Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right),$$

es folgt $C = 1/4$, $B = 1/2$, $A = -3/4$.

(5) Es gilt also

$$\frac{x^2}{(x+1)(1-x^2)} = -\frac{3}{4}\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-x}\,.$$

(e) (1) Der Ansatz lautet:

$$\frac{9x}{2x^3+3x+5} = \frac{1}{2}\frac{9x}{(x+1)(x^2-x+\frac{5}{2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+\frac{5}{2}}\right) = \frac{1}{2}\frac{(A+B)x^2+(B+C-A)x+(\frac{5}{2}A+C)}{(x+1)(x^2-x+\frac{5}{2})}\,.$$

(2) Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$9x = (A+B)x^2 + (B+C-A)x + (\tfrac{5}{2}A+C)\,.$$

(3) Wieder wollen wir die Koeffizienten vergleichen:

(4) Der Koeffizientenvergleich liefert $B=-A$ und somit $C=9+2A$ und somit $\frac{9}{2}A+9=0$. Also gilt $A=-2$, $B=2$ und $C=5$.

(5) Es gilt also

$$\frac{9x}{2x^3+3x+5} = \frac{1}{2}\frac{2x+5}{x^2-x+\frac{5}{2}} - \frac{1}{x+1}\,.$$

(f) (1) Der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+D)(x+1)^2(x^2+1)+(Ex+F)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ &= \frac{(A+C)x^5+(A+B+2C+D)x^4+(2A+2C+2D+E)x^3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ &\quad+\frac{(2A+2B+2C+2D+2E+F)x^2+(A+C+2D+E+2F)x+(A+B+D+F)}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\,.\end{aligned}$$

(2) Multiplikation mit dem Nenner liefert

$$4x^2 = (2A+2B+2C+2D+2E+F)x^2 + (A+C+2D+E+2F)x + (A+B+D+F)\,.$$

(3) Wir wollen die Koeffizienten vergleichen.

(4) Der Koeffizientenvergleich liefert ein etwas größeres Gleichungssystem, das wir mit den Methoden aus Kapitel 9 lösen:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&1&2&1&0&0\\2&0&2&2&1&0\\2&2&2&2&2&1\\1&0&1&2&1&2\\1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\\E\\F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\\0\\0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

(5) Aus obigem Gleichungssystem erhalten wir nun die Lösung:

$$\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1}\,.$$

6 Trigonometrische Funktionen

6.1 Aufgaben

6.1 Zeigen Sie:

(a) $\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$ für alle $x \in [-1,1]$.

(b) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

6.2 Folgern Sie aus den Additionstheoremen:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)\,.$$

6.3 Verifizieren Sie für $x \in (-\pi,\pi)$ die Identitäten

(a) $\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$,

(b) $\sin x = \frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$,

(c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

6.4 Lösen Sie die Ungleichung $\sin(2x) \leq \sqrt{3}\sin x$ in $\mathbb{R}$.

6.5 Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Gleichung $5\sin x - 2\cos^2 x = 1$?

6.6 Zeichen Sie die Graphen von $\sin(nx)$ für $x \in [0,2\pi]$ und $n \in \{1,\,2,\,3,\,4\}$ in ein gemeinsames Diagramm.

6.7 Begründen Sie: Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ und reelle Zahlen a und b

$$a\cos(x) + b\sin(x) = R\cos(x-\varphi)$$

mit $R = \sqrt{a^2+b^2}$ und $\varphi = \arctan(b/a)$.

6.2 Lösungen

6.1 (a) Es sei $x \in [-1,1]$. Da arcsin auf $[-1,1]$ definiert ist, gilt $\sin\big(\arcsin(x)\big) = x$. Außerdem besagt der Satz des Pythagoras $\sin^2\big(\arcsin(x)\big) + \cos^2\big(\arcsin(x)\big) = 1$, also

$$\cos^2\big(\arcsin(x)\big) = 1 - \sin^2\big(\arcsin(x)\big) = 1 - x^2\,.$$

Da $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\cos\big(\arcsin(x)\big) \geq 0$ und Wurzelziehen liefert:

$$\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}\,.$$

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $x = \tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_6,

Mit Pythagoras (siehe Teil (a)) erhalten wir

$$\sin(\arctan(x)) = x\sqrt{1-\sin^2(\arctan(x))}\,.$$

Auflösen nach $\sin(\arctan(x))$ liefert die Behauptung.

6.2 Mit den Additionstheoremen gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(x-y)+\sin(x+y) &= (\sin(x)\cos(y)-\cos(x)\sin(y))+(\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y))\\ &= 2\sin(x)\cos(y)\,.\end{aligned}$$

6.3 Unter Verwendung der bekannten Formeln zur Trigonometrie erhält man:

(a)
$$\begin{aligned}\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} &= \frac{1-\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}}{1+\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}\\ &= \cos^2(x/2)-\sin^2(x/2) = \frac{1+\cos(x)}{2}-\frac{1-\cos(x)}{2} = \cos(x)\,.\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}\frac{2\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} &= 2\cdot\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)\left(1+\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}\right)} = 2\cdot\frac{\sin(x/2)\cos(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)}\\ &= 2\sin(x/2)\cos(x/2) = \sin(x/2-x/2)+\sin(x/2+x/2) = \sin(x)\,.\end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned}\cos^4(x)-\sin^4(x) &= \left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\cdot\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right) = \cos^2(x)-\sin^2(x)\\ &= \frac{1+\cos(2x)}{2}-\frac{1-\cos(2x)}{2} = \cos(2x)\,.\end{aligned}$$

6.4 Wir formen die Ungleichung um, damit wir leichter eine Entscheidung treffen können:

$$\sin(2x)\le\sqrt{3}\sin(x) \;\Leftrightarrow\; 2\sin(x)\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)\le 0 \;\Leftrightarrow\; \sin(x)\big(2\cos(x)-\sqrt{3}\big)\le 0\,.$$

Nachdem ein Produkt zweier Zahlen nur dann negativ sein kann, wenn einer der Faktoren negativ und der andere positiv ist, erhalten wir nun zwei Fälle:

1. Fall: $\sin(x)\le 0 \;\wedge\; 2\cos(x)-\sqrt{3}\ge 0 \Leftrightarrow \cos(x)\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$: Es folgt:

$$\begin{aligned}L_1 &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,\pi+2m\pi\le x\le 2\pi+2m\pi \;\wedge\; -\tfrac{\pi}{6}+2n\pi\le x\le\tfrac{\pi}{6}+2n\pi,\quad m,n\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,-\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le 2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

2. Fall: $\sin(x)\ge 0 \;\wedge\; 2\cos(x)-\sqrt{3}\le 0 \Leftrightarrow \cos(x)\le\frac{\sqrt{3}}{2}$: Es folgt:

$$\begin{aligned}L_2 &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,2m\pi\le x\le\pi+2m\pi \;\wedge\; \tfrac{\pi}{6}+2n\pi\le x\le\tfrac{11\pi}{6}+2n\pi,\quad m,n\in\mathbb{Z}\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\,|\,\tfrac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

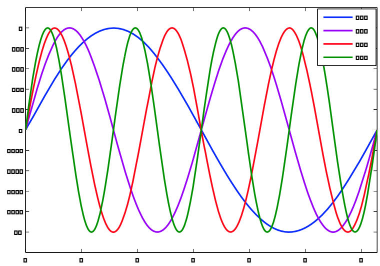
Insgesamt haben wir damit die Lösungsmenge $L=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-\frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le 2k\pi \vee \frac{\pi}{6}+2k\pi\le x\le\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\}$.

6.5 Wir formulieren die Gleichung um: Wir ersetzen $\cos^2$ durch $1-\sin^2$ und erhalten eine quadratische Gleichung in sin:

$$5\sin(x) - 2\cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow 5\sin(x) - 2\big(1-\sin^2(x)\big) = 1$$
$$\Leftrightarrow \sin^2(x) + \frac{5}{2}\sin(x) - \frac{3}{2} = 0\,.$$

Substitution mit $y = \sin(x)$ liefert die Gleichung $y^2 + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2} = 0$. Durch Lösen der Gleichung mit der Mitternachtsformel erhält man die beiden Nullstellen $y_1 = \frac{1}{2}$ und $y_2 = -3$. Es gilt nun noch die Gleichung $\sin(x) = y$ für $y \in \{-3, \frac{1}{2}\}$ zu lösen. Da $\sin(x) \in [-1,1]$, gibt es für $y = -3$ keine Lösung, für $y = \frac{1}{2}$ gilt $L = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.

6.6 (a) Im folgenden Bild sieht man die Graphen, die umso *schneller* schwingen, je größer n ist:



6.7 Durch Anwenden des Additionstheorems für den Kosinus erhalten wir:

$$\cos(x-\varphi) = \cos(x)\cos(\varphi) + \sin(x)\sin(\varphi)\,.$$

Die nachzuweisende Gleichung hat damit die Form

$$a\cos(x) + b\sin(x) = R\cos(x-\varphi) = (R\,\cos(\varphi))\,\cos(x) + (R\,\sin(\varphi))\,\sin(x)\,.$$

Diese Gleichung gilt genau dann, wenn

$$a = R\,\cos(\varphi) \quad\text{und}\quad b = R\,\sin(\varphi)\,.$$

Quadrieren und Addieren dieser Gleichungen liefert wegen $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$:

$$a^2 + b^2 = R^2\,.$$

Und Division der beiden Gleichungen liefert

$$\frac{b}{a} = \frac{R\,\sin(\varphi)}{R\,\cos(\varphi)} = \tan(\varphi)\,.$$

7 Komplexe Zahlen – Kartesische Koordinaten

7.1 Aufgaben

7.1 Begründen Sie: Ist $z \in \mathbb{C}$ Nullstelle eines reellen Polynoms $p = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, so auch $\overline{z} \in \mathbb{C}$.

7.2 Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie die Beträge von

(a) $(2 - \mathrm{i})(1 + 2\,\mathrm{i})$, (b) $\frac{50-25\,\mathrm{i}}{-2+11\,\mathrm{i}}$, (c) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^2$, (d) $\mathrm{i}^{99} + \mathrm{i}^{100} + 2\,\mathrm{i}^{101} - 2$.

7.3 Bestimmen Sie die Nullstellen von $p = z^3 + 4z^2 + 8z$.

7.4 Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen jeweils in der Form $a + b\,\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar:

(a) $(1 + 4\,\mathrm{i}) \cdot (2 - 3\,\mathrm{i})$, (b) $\frac{4}{2+\mathrm{i}}$, (c) $\sum_{n=0}^{2009} \mathrm{i}^n$.

7.5 Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen in $\mathbb{C}$:

(a) $\{z \mid |z + \mathrm{i}\,| \le 3\}$, (b) $\{z \mid \mathrm{Re}(\overline{z} - \mathrm{i}) = z\}$, (c) $\{z \mid |z - 3| = 2|z + 3|\}$.

7.6 Berechnen Sie alle komplexen Zahlen $z \in \mathbb{C}$, die folgende Gleichungen erfüllen:

(a) $z^2 - 4z + 5 = 0$, (b) $z^2 + (1 - \mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0$, (c) $z^2 + 4z + 8 = 0$.

7.2 Lösungen

7.1 Man beachte die Rechenregeln $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$ und $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$ für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Damit erhalten wir für $\overline{z}$:

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= a_n \overline{z}^n + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 = a_n \overline{z^n} + \ldots + a_1 \overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n z^n} + \ldots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} = \overline{a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0\,. \end{aligned}$$

Es ist also auch $\overline{z}$ eine Nullstelle von z.

7.2 (a) Ausmultiplizieren liefert:

$$z = (2 - \mathrm{i})(1 + 2\,\mathrm{i}) = 2 - \mathrm{i} + 4\,\mathrm{i} + 2 = 4 + 3\,\mathrm{i}\;.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_7,

Es ist demnach $\mathrm{Re}(z) = 4$, $\mathrm{Im}(z) = 3$ und $|z| = \sqrt{16+9} = 5$.

(b) Wir erweitern mit dem Komplexkonjugierten des Nenners und erhalten:

$$z = \frac{50 - 25\,\mathrm{i}}{-2 + 11\,\mathrm{i}} \cdot \frac{-2 - 11\,\mathrm{i}}{-2 - 11\,\mathrm{i}} = \frac{-100 + 50\,\mathrm{i} - 550\,\mathrm{i} - 275}{125} = -3 - 4\,\mathrm{i}\ .$$

Entsprechend ist $\mathrm{Re}(z) = -3$, $\mathrm{Im}(z) = -4$ und damit wiederum $|z| = 5$.

(c) Wir können die erste Binomische Formel verwenden:

$$z = (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^2 = 1 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i}^2 = 1 - 3 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i} = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}\ .$$

Wir können ablesen: $\mathrm{Re}(z) = -2$, $\mathrm{Im}(z) = 2\sqrt{3}$ und $|z| = \sqrt{4+12} = 4$.

(d) Zuerst betrachten wir Potenzen von i. Es gilt:

$$\mathrm{i}^2 = -1, \quad \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^4 = 1, \quad \mathrm{i}^5 = \mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^6 = -1, \quad \mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}, \quad \mathrm{i}^8 = 1, \ \ldots$$

Jeweils nach vier Schritten, wiederholt sich das Ganze, wir können also vereinfachen:

$$\begin{aligned} z &= \mathrm{i}^{96+3} + \mathrm{i}^{100} + 2\,\mathrm{i}^{100+1} - 2 = \mathrm{i}^{4\cdot 24} \cdot \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^{4\cdot 25} + 2 \cdot \mathrm{i}^{4\cdot 25} \cdot \mathrm{i} - 2 \\ &= 1 \cdot \mathrm{i}^3 + 1 + 2 \cdot \mathrm{i} - 2 = -\mathrm{i} + 1 + 2\,\mathrm{i} - 2 = -1 + \mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

Damit ergibt sich $\mathrm{Re}(z) = -1$, $\mathrm{Im}(z) = 1$ und $|z| = \sqrt{2}$.

7.3 Es ist offensichtlich, dass $z_1 = 0$ eine Nullstelle von p ist. Wir klammern diese aus und erhalten $p = z(z^2 + 4z + 8)$. Die Nullstellen des zweiten Faktors erhalten wir nun mit der Mitternachtsformel. Es gilt:

$$z_{2/3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{-4 \pm 4\,\mathrm{i}}{2} \iff z_2 = -2 + 2\,\mathrm{i} \ \wedge\ z_3 = -2 - 2\,\mathrm{i}\ .$$

7.4 (a) Hier führt Ausmultiplizieren bereits zum Ziel:

$$(1 + 4\,\mathrm{i}) \cdot (2 - 3\,\mathrm{i}) = (2 - 3\,\mathrm{i} + 8\,\mathrm{i} + 12) = 14 + 5\,\mathrm{i}\ .$$

(b) Hier führt Erweitern mit dem Komplexkonjugierten des Nenners zum Ziel:

$$\frac{4}{2 + \mathrm{i}} = \frac{4 \cdot (2 - \mathrm{i})}{(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})} = \frac{8 - 4\,\mathrm{i}}{4 + 1} = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}\,\mathrm{i}\ .$$

(c) Wir beachten die Tatsache, dass $\mathrm{i}^2 = -1$, $\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$, ...

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{2009} \mathrm{i}^n &= \underbrace{\mathrm{i}^0 + \mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3}_{=0} + \underbrace{\mathrm{i}^4 + \mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7}_{=\,0} + \ldots + \underbrace{\mathrm{i}^{2004} + \mathrm{i}^{2005} + \mathrm{i}^{2006} + \mathrm{i}^{2007}}_{=\,0} + \mathrm{i}^{2008} + \mathrm{i}^{2009} \\ &= 1 + \mathrm{i}\ . \end{aligned}$$

7.5 (a) $|z + \mathrm{i}\,| \leq 3$ liefert einen ausgefüllten Kreis um $-\,\mathrm{i}$ mit Radius 3.

(b) $\mathrm{Re}(\bar{z} - \mathrm{i}) = z$ impliziert $z \in \mathbb{R}$. Da alle $x \in \mathbb{R}$ diese Gleichung erfüllen, handelt es sich hier um die gesamte reelle Achse.

(c) Wir nennen die zu bestimmende Menge M. Aus

$$(z-3)(\overline{z}-3) = |z-3|^2 = 4|z+3|^2 = 4(z+3)(\overline{z}+3)$$

erhalten wir die Gleichung

$$|z|^2 - 3z - 3\overline{z} + 9 = 4|z|^2 + 12z + 12\overline{z} + 36 \quad \text{bzw.} \quad |z|^2 + 5z + 5\overline{z} + 9 = 0\,.$$

Somit gilt für Zahlen $z \in M$ die Beziehung

$$|z+5|^2 = 16\,.$$

Also folgt

$$z \in K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+5| = 4\}\,.$$

Andererseits ergibt sich durch dieselbe Rechnung, dass $z \in K$ auch $z \in M$ impliziert. Somit haben wir gezeigt, dass $M = K$ ist. Die Menge beschreibt den Kreis mit Radius 4 um den Mittelpunkt $-5 \in \mathbb{C}$.

7.6 Wir erhalten jeweils mit der Mitternachtsformel:

(a) $z^2 - 4z + 5 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 2 + \mathrm{i} \,\vee\, z = 2 - \mathrm{i}$.

(b) $z^2 + (1-\mathrm{i})z - \mathrm{i} = 0 \;\Leftrightarrow\; z_{1/2} = \frac{-(1-\mathrm{i}) \pm \sqrt{2\,\mathrm{i}}}{2} \;\Rightarrow\; z = \mathrm{i} \,\vee\, z = -1$.

(c) $z^2 + 4z + 8 = 0 \;\Leftrightarrow\; z = -2 + 2\,\mathrm{i} \,\vee\, z = -2 - 2\,\mathrm{i}$.

8 Komplexe Zahlen – Polarkoordinaten

8.1 Aufgaben

8.1 Begründen Sie, warum die Formeln zur Multiplikation, zum Potenzieren und zum Wurzelziehen auf Seite 59 (Rezeptebuch) gelten.

8.2 (a) Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polardarstellung an:

$$z_1 = -2\,\mathrm{i}, \qquad z_2 = \mathrm{i} - 1, \qquad z_3 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\ \mathrm{i}), \qquad z_4 = \tfrac{2}{1-\mathrm{i}}.$$

(b) Zu den komplexen Zahlen mit Polarkoordinaten

$$r_1 = 2,\ \varphi_1 = {}^{\pi}/_{2}, \quad r_2 = 1,\ \varphi_2 = {}^{3\pi}/_{4}, \quad r_3 = 3,\ \varphi_3 = {}^{5\pi}/_{4}, \quad r_4 = 4,\ \varphi_4 = {}^{2\pi}/_{3}$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

8.3 Geben Sie für $n \in \mathbb{N}$ alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$ in der Polardarstellung an.

8.4 Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $(\sqrt{3} + \mathrm{i})^{100}$.

8.5 Berechnen Sie die komplexen Wurzeln:

(a) $\sqrt{-2\,\mathrm{i}}$, (b) $\sqrt[3]{-8}$, (c) $\sqrt{8\,(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i})}$.

8.6 Zeichnen Sie mit MATLAB die komplexen Zahlen $z, z^2, \ldots, z^8$ für $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{i})$ in einen Zeigerplot.

8.7 Schreiben Sie mit MATLAB ein Programm, das bei Eingabe von $z = a + b\,\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ einen Zeigerplot mit den n-ten Wurzeln von z ausgibt.

8.2 Lösungen

8.1 Erste Formel: Wir multiplizieren $z_1 = r_1\big(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)\big) \neq 0$ mit $z_2 = r_2\big(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)\big) \neq 0$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\big(\cos(\varphi_1) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1)\big)\, r_2\big(\cos(\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_2)\big) \\ &= r_1 r_2\big((\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + \mathrm{i}(\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2))\big) \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)\,, \end{aligned}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_8,

wobei wir bei der letzten Gleichheit die Additionstheoreme von Seite 43 (Rezeptebuch) benutzt haben.

Zweite und dritte Formel: Diese Formeln ergeben sich sofort aus der ersten Formel. Vierte Formel: Die letzte Formel zu den Wurzeln begründet man wie folgt: Für jedes $k = 0, \ldots, n$ gilt wegen der ersten Formel für z_k:

$$\begin{aligned} z_k^n &= (\sqrt[n]{r})^n \left(\cos\left(n \, \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(n \, \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right) \\ &= r\big(\cos(\varphi + 2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + 2k\pi)\big) = r\big(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\big) = z\,. \end{aligned}$$

Damit ist jedes der n angegebenen z_k eine n-te Wurzel von z. Diese n Zahlen sind auch noch verschieden: Diese Zahlen $z_0, \ldots, z_{n-1}$ liegen nämlich in der Zahlenebene $\mathbb{C}$ auf einem Kreis um 0 mit Radius $\sqrt[n]{r}$ im Winkelabstand $\frac{2\pi}{n}$. Damit sind sie (paarweise) verschieden.

8.2 Wir wenden die bekannten Umrechnungsformeln an:

(a) Für $z_1 = -2\,\mathrm{i}$ gilt $r = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$ und $\varphi = -\arccos\left(\frac{0}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Damit erhalten wir $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Für $z_2 = \mathrm{i} - 1$ gilt $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{4}\pi$.

Damit erhalten wir $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)$.

Es gilt $z_3 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}) \;\Rightarrow\; r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{1+3} = 1,\; \varphi_1 = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\pi$.

Damit erhalten wir $z_3 = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)$.

Es gilt $z_4 = \frac{2}{1-\mathrm{i}} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i} \;\Rightarrow\; r_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2},\; \varphi_2 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Damit erhalten wir $z_4 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

(b) Für $r_1 = 2$ und $\varphi_1 = \frac{1}{2}\pi$ gilt $a = 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ und $b = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.

Damit erhalten wir $z = 2\,\mathrm{i}$.

Für $r_2 = 1$ und $\varphi_2 = \frac{3}{4}\pi$ gilt $a = 1\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ und $b = 1\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.

Damit erhalten wir $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + \mathrm{i})$.

Für $r_3 = 3$ und $\varphi_3 = {}^{5\pi}/_{4}$ gilt $a = 3\cos\left({}^{5\pi}/_{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$ und $b = 3\sin\left({}^{5\pi}/_{4}\pi\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.

Damit erhalten wir $z = -3\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Für $r_4 = 4$ und $\varphi_4 = \frac{2}{3}\pi$ gilt $a = 4\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{4}{2}$ und $b = 3\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{4\sqrt{3}}{2}$. Es sind a der Real- und b der Imaginärteil.

Damit erhalten wir $z = -2 + 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$.

8.3 Die Lösungen dieser Gleichung sind die n verschiedenen n-ten Wurzeln aus der 1, diese lauten

$$z_k = \cos\left(\tfrac{2\pi k}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2\pi k}{n}\right)\,,\ k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}\,.$$

8.4 Wir schreiben die komplexe Zahl $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ in Polarkoordinaten. Hier erhalten wir $r = \sqrt{3+1} = 2$ und $\varphi = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, also $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} z^{100} &= 2^{100}\left(\cos\left(100\cdot\tfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(100\cdot\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = 2^{100}\left(\cos\left(50\cdot\tfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(50\cdot\tfrac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 2^{100}\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi + 16\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi + 16\pi\right)\right) = 2^{100}\left(\cos\left(\tfrac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{2}{3}\pi\right)\right) \\ &= 2^{100}\left(-\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\,. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{Re}\left(z^{100}\right) = -2^{99}$ und $\mathrm{Im}\left(z^{100}\right) = \sqrt{3}\cdot 2^{99}$.

8.5 (a) Zuerst bestimmen wir die Polardarstellung:

$$z = -2\,\mathrm{i} = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\right)\right)\,.$$

Damit erhalten wir mit der Formel für die zwei zweiten Wurzeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \mathrm{i}\,, \\ a_1 &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1 + \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

(b) Zuerst bestimmen wir die Polardarstellung: $z = -8 = 8\left(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\right)$.

Damit erhalten wir mit der Formel für die drei dritten Wurzeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\,, \\ a_1 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos(\pi) + \mathrm{i}\sin(\pi)\right) = 2\left(-1 + \mathrm{i}\cdot 0\right) = -2\,, \\ a_2 &= \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\tfrac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\tfrac{5}{3}\pi\right)\right) = 2\left(\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

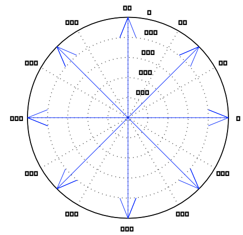
(c) Die Polardarstellung lautet: $z = 8\left(1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) = 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

Damit erhalten wir mit der Formel für die zwei zweiten Wurzeln:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{16}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2\,\mathrm{i}\,, \\ a_1 &= \sqrt{16}\left(\cos\left(-\tfrac{7}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\tfrac{7}{6}\pi\right)\right) = 4\left(-\tfrac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\tfrac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3} + 2\,\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

8.6 Die folgende Eingabe liefert den Plot:

```
z=1/sqrt(2)*(1+i);
compass(z)
hold on
for k=2:8
    compass(z^k)
end
```



8.7 Der folgende Code taugt:

```
function [ w ] = zeigerplot( z,n )
%zeichnet die n-ten Wurzeln von z in einen plot
a=real(z);
b=imag(z);
[phi,r] = cart2pol(a,b);
w=zeros(1,n);
for k=1:n
    w(k)=r^(1/n)*(cos((phi+2*(k-1)*pi)/n) + i*sin((phi+2*(k-1)*pi)/n));
end
compass(w(1));
hold on
for k=2:n
    compass(w(k));
end
hold off
```

9 Lineare Gleichungssysteme

9.1 Aufgaben

9.1 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & = & 2 \\ -9x_1 & + & 15x_2 & = & -6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -12 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 5x_4 & = & -21 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & + & 13x_3 & + & 10x_4 & = & -22 \end{array}$$

(d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & = & 6 \end{array}$$

(e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & & & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

9.2 Ermitteln Sie die Lösungsmenge des komplexen Gleichungssystems $(A \mid b)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ \frac{5}{2+\mathrm{i}} & \frac{(2+4\,\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} \\ 3+16\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

9.3 Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $(A \mid b)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \beta \\ 16 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von α und β besitzt dieses Gleichungssystem
(i) eine eindeutige Lösung, (ii) keine Lösung, (iii) unendlich viele Lösungen?

(b) Geben Sie eine Lösungsdarstellung für den Fall unendlich vieler Lösungen an.

9.4 Ermitteln Sie die Lösungsmenge des folgenden komplexen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & \mathrm{i}\,x_3 & = & \mathrm{i} \\ x_1 & - & 3x_2 & - & \mathrm{i}\,x_3 & = & 2\,\mathrm{i} \\ \mathrm{i}\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1+\mathrm{i} \end{array}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_9,

9.5 Begründen Sie die Aussagen in der Merkbox auf Seite 69 (Rezeptebuch).

9.2 Lösungen

9.1

(a)
$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 2 \\ -9 & 15 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit gilt $x_2 = s \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}s$, also $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

(b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 8 & 2 & -8 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 8 & 3 & -5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Damit gilt $x_1 = 1,\; x_2 = -1,\; x_3 = 1$, sodass $L = \{(1, -1, 1)\}$.

(c)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ -4 & 3 & 6 & -5 & -21 \\ 2 & -2 & -1 & 6 & 10 \\ -6 & 6 & 13 & 10 & -22 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 22 & 14 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 13 & 5 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 3 & -4 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Damit gilt $x_4 = 1 \;\Rightarrow\; x_3 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2 \;\Rightarrow\; x_2 = 3 - 3 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 6 - 2 - 3 = 1$, also $L = \{(1, 0, -2, 1)\}$.

(d)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & -4 \\ 5 & 5 & 11 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Damit gilt $0 = 1$, d. h., es gibt keine Lösung, $L = \emptyset$.

(e)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ -3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit ist x_3 frei wählbar, $x_3 = s$, $s \in \mathbb{R}$. Aus der zweiten Zeile folgt: $x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow x_2 + s = 1 \Leftrightarrow x_2 = 1 - s$.

Aus der ersten Zeile folgt: $3x_1 - 5x_2 + x_3 = -1 \Leftrightarrow 3x_1 - 5(1-s) + s = -1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{4}{3} - 2s$.

Somit gilt $x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also $L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - 2s \\ 1 - s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$.

9.2 Wir stellen die komplexen Zahlen als $a + b\,\mathrm{i}$ dar:

$$\frac{5}{2+\mathrm{i}} = \frac{5(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})} = \frac{5(2-\mathrm{i})}{5} = 2 - \mathrm{i}$$

und

$$\frac{(2+4\,\mathrm{i})^2}{1-\mathrm{i}} = \frac{4+16\,\mathrm{i}-16}{1-\mathrm{i}} = \frac{(-12+16\,\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})} = \frac{-12-12\,\mathrm{i}+16\,\mathrm{i}-16}{2} = -14 + 2\,\mathrm{i}\,.$$

Nun lösen wir das LGS:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} & 3+\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & -14+2\,\mathrm{i} & 3+16\,\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1+\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & -14+2\,\mathrm{i} & 3+16\,\mathrm{i} \end{array}\right) \tfrac{1}{1-\mathrm{i}}\mathrm{I}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1+\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \\ 0 & -13-\mathrm{i} & -1+13\,\mathrm{i} \end{array}\right) \text{II - } (2-\mathrm{i})\text{I} \quad \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1+\mathrm{i} & 1+2\,\mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \end{array}\right) \tfrac{1}{-13-\mathrm{i}}\mathrm{II}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & -\mathrm{i} \end{array}\right) \text{I - } (-1+\mathrm{i})\text{II}$$

Damit gilt $L = \{(\mathrm{i}, -\mathrm{i})\}$.

9.3 (a) Mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren erhält man:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & \beta \\ -1 & 0 & 1 & \alpha & 16 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & \beta - 2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 1 & 3(\beta + 2) \end{array}\right)$$

(i) Es gibt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\alpha - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 1$.

(ii) Es gibt genau dann keine Lösung, wenn $\alpha - 1 = 0 \wedge 3(\beta+2) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \wedge \beta \neq -2$.

(iii) Es gibt genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $\alpha - 1 = 0 \ \wedge\ 3(\beta+2) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \ \wedge\ \beta = -2$.

(b) Wir ermitteln die Lösungsmenge im Fall unendlich vieler Lösungen:

$$\alpha = 1 \ \wedge\ \beta = -2 \quad \rightsquigarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_4 = s \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow x_3 = -2 - s$
$\Rightarrow x_2 = 2 - 3s - 3(-2-s) = 8$
$\Rightarrow x_1 = s + (-2-s) - 2 \cdot 8 = -18$

$$\Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} -18 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \middle|\ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

9.4

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & -3 & -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 1 & 1+\mathrm{i} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ 2 & 0 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & 1 & 1+\mathrm{i} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ 0 & 6 & 3\,\mathrm{i} & -3\,\mathrm{i} \\ 0 & 1+3\,\mathrm{i} & 0 & 3+\mathrm{i} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \text{II - 2I} \\ \text{III - iI} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ 0 & 2 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 2+6\,\mathrm{i} & 0 & 6+2\,\mathrm{i} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{3}\text{II} \\ 2\text{III} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -\mathrm{i} & 2\,\mathrm{i} \\ 0 & 2 & \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 3-\mathrm{i} & 3+3\,\mathrm{i} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{III - }(1+3\,\mathrm{i})\text{II} \end{array}$$

Damit gilt

$$x_3 = \frac{3+3\,\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}} = \frac{(3+3\,\mathrm{i})(3+\mathrm{i})}{9+1} = \frac{6+12\,\mathrm{i}}{10} = \frac{3+6\,\mathrm{i}}{5}$$

und somit

$$x_2 = \frac{-\mathrm{i} - \mathrm{i}\,\frac{3+6\,\mathrm{i}}{5}}{2} = \frac{-5\,\mathrm{i} - 3\,\mathrm{i} + 6}{10} = \frac{3-4\,\mathrm{i}}{5},$$

also

$$x_1 = 2\,\mathrm{i} + \mathrm{i}\,\frac{3+6\,\mathrm{i}}{5} + 3\frac{3-4\,\mathrm{i}}{5} = \frac{10\,\mathrm{i} + 3\,\mathrm{i} - 6 + 9 - 12\,\mathrm{i}}{5} = \frac{3+\mathrm{i}}{5}.$$

Wir erhalten $L = \left\{\frac{1}{5}(3+\mathrm{i}, 3-4\,\mathrm{i}, 3+6\,\mathrm{i})\right\}$.

9.5 (a) Setzt man in das homogene LGS mit Koeffizienten (a_{ij}) für alle Variablen 0 ein, so gilt:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\cdot 0 & + & a_{12}\cdot 0 & + & \cdots & + & a_{1n}\cdot 0 & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{m1}\cdot 0 & + & a_{m2}\cdot 0 & + & \cdots & + & a_{mn}\cdot 0 & = & 0 \end{array}.$$

Demnach ist $(0, \dots, 0)$ eine Lösung.

(b) Sind $(k_1, \dots, k_n)$ und $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ zwei Lösungen, so gilt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_{i1}(k_1 + \ell_1) + \cdots + a_{in}(k_n + \ell_n) = \underbrace{a_{i1}k_1 + \cdots + a_{in}k_n}_{=0} + \underbrace{a_{i1}\ell_1 + \cdots + a_{in}\ell_n}_{=0} = 0\,.$$

Es sind also auch Summen von Lösungen wieder Lösungen. Betrachten wir nun das λ-Fache der Lösung $(\ell_1, \dots, \ell_n)$. Auch dieses ist wieder eine Lösung, denn es gilt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_{i1}(\lambda\,\ell_1) + \cdots + a_{in}(\lambda\,\ell_n) = \lambda(\underbrace{a_{i1}\ell_1 + \cdots + a_{1n}\ell_n}_{=0}) = 0\,.$$

(c) Wir beweisen die Gleichheit der Mengen $L = x + L_h$:

- $L \subseteq x + L_h$: Ist $z = (k_1, \dots, k_n) \in L$ eine Lösung von $(A\,|\,b)$, so gilt für alle $i \in \{1, \dots, m\}$:

$$a_{i1}k_1 + \cdots + a_{in}k_n = b_i.$$

Da $x = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in L$ eine weitere Lösung ist, gilt für die Differenz $z - x$:

$$a_{i1}(k_1 - \ell_1) + \cdots + a_{in}(k_n - \ell_n) = \underbrace{a_{i1}k_1 + \cdots + a_{in}k_n}_{=b_i} - (\underbrace{a_{i1}\ell_1 + \cdots + a_{in}\ell_n}_{=b_i}) = 0.$$

Demzufolge ist $z - x \in L_h$ eine Lösung von $(A\,|\,0)$ und damit erhalten wir

$$z = x + (\underbrace{z - x}_{\in L_h}) \in x + L_h.$$

- $\underline{L \supseteq x + L_h}$: Ist $x + y \in x + L_h$ mit $y = (k_1, \dots, k_n) \in L_h$, so gilt:

$$a_{i1}(\ell_1 + k_1) + \cdots + a_{in}(\ell_n + k_n) = \underbrace{a_{i1}\ell_1 + \cdots + a_{in}\ell_n}_{=b_i} + \underbrace{a_{i1}k_1 + \cdots + a_{in}k_n}_{=0} = b_i.$$

Es ist also $x + y$ auch eine Lösung von $(A\,|\,b)$, also $x + y \in L$.

10 Rechnen mit Matrizen

10.1 Aufgaben

10.1 Ermitteln Sie für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ den Ausdruck $A^0 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3$.

10.2 Berechnen Sie $\overline{B}^\top B$ und $\overline{B}^\top A\, B$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \mathrm{i} & 0 \\ -\mathrm{i} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und der Matrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & \mathrm{i}/\sqrt{2} & -\mathrm{i}/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10.3 Bilden Sie – sofern möglich – mit den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$x = (1, 0, -4)^\top, \; y = (8, -5)^\top \; \text{ und } \; z = (3, 2)^\top$$

die Ausdrücke

$$A + C, \; 2B, \; A(y + z), \; C(-4z), \; (A + C)y, \; AB, \; BC, \; AC^\top, \; x^\top A, \; y^\top z, \; yz^\top.$$

10.4 Zeigen Sie:

(a) Für jede Matrix A ist $A^\top A$ symmetrisch.

(b) Für jede quadratische Matrix A ist $A + A^\top$ symmetrisch und $A - A^\top$ schiefsymmetrisch.

(c) Das Produkt zweier symmetrischer Matrizen A und B ist genau dann symmetrisch, wenn $AB = BA$ gilt.

10.5 Ist das Produkt quadratischer oberer bzw. unterer Dreiecksmatrizen wieder eine obere bzw. untere Dreiecksmatrix ?

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_10,

10.6 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ und $(2A)^{-1}$.

(b) Ist $A + B$ invertierbar?

10.7 Gegeben sind ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Zeigen Sie durch Induktion nach $m \in \mathbb{N}$:

$$(E_n - A)(E_n + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}) = E_n - A^m .$$

(b) Folgern Sie aus dem Teil (a): Falls $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $E_n - A$ invertierbar.

10.8 Bestimmen Sie die Lösung $X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ der Matrizengleichung $AX = B$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

10.9 (a) Ist das Inverse einer invertierbaren symmetrischen Matrix wieder symmetrisch ?

(b) Folgt aus der Invertierbarkeit einer Matrix A stets die Invertierbarkeit von $A^\top$?

(c) Ist die Summe invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

(d) Ist das Produkt invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

10.10 Invertieren Sie die folgenden Matrizen, oder zeigen Sie, dass keine Inverse existiert. Geben Sie jeweils den Rang der Matrix an.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 5 \\ 5 & 19 & -8 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

(c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(d) $D = A + B$,

(e) $E = B + C$,

(f) $F = AB$,

(g) $G = A^\top$.

10.11 (a) Finden Sie eine 3×3-Matrix $A \neq E_3$ mit der Eigenschaft $A^2 = A$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A^2 = A$. Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A die Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist.

(c) Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $B \neq 0$ und $AB = 0$. Kann die Matrix A dann invertierbar sein?

10.2 Lösungen

10.1 Wegen

$$A^0 = E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 14 & 20 & 26 \\ 20 & 29 & 38 \\ 26 & 38 & 50 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 132 & 192 & 252 \\ 192 & 279 & 366 \\ 252 & 366 & 480 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$E_3 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 = \begin{pmatrix} 31 & 44 & 58 \\ 44 & 65 & 84 \\ 58 & 84 & 111 \end{pmatrix}.$$

10.2 Es gilt

$$\overline{B}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{B}^\top B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3, \quad \overline{B}^\top AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\overline{B}^\top B = E_3$ ist $\overline{B}^\top$ das Inverse von B. Eine solche Matrix B nennt man *unitär.*

10.3 Es gilt:

$$A + C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}, \; A(y+z) = Ay + Az = \begin{pmatrix} -31 \\ 41 \\ -26 \end{pmatrix}, \; C(-4z) = -4Cz = \begin{pmatrix} -44 \\ 16 \\ -76 \end{pmatrix},$$

$$(A+C)y = Ay + Cy = \begin{pmatrix} -43 \\ 37 \\ -34 \end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix} -3 & -21 \\ 13 & -7 \\ 3 & -35 \end{pmatrix}, \; BC \text{ nicht definiert},$$

$$AC^\top = \begin{pmatrix} 10 & -6 & 9 \\ 8 & -2 & 17 \\ 19 & -10 & 22 \end{pmatrix}, \; x^\top A = \begin{pmatrix} 2 & -17 \end{pmatrix}, \; y^\top z = 14, \; yz^\top = \begin{pmatrix} 24 & 16 \\ -15 & -10 \end{pmatrix}.$$

10.4 (a) Wir transponieren $A^\top A$ und beachten, dass sich beim Transponieren die Reihenfolge umdreht, dass also $(A\,B)^\top = B^\top A^\top$ gilt:

$$(A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A\,.$$

Das besagt, dass $A^\top A$ symmetrisch ist.

(b) Wieder rechnen wir einfach nach:

$$(A + A^\top)^\top = A^\top + (A^\top)^\top = A + A^\top\,,$$

also ist $(A + A^\top)$ symmetrisch. Weiter gilt

$$(A - A^\top)^\top = A^\top - (A^\top)^\top = A^\top - A = -(A - A^\top)\,,$$

also ist $(A - A^\top)$ schiefsymmetrisch.

(c) Ist AB symmetrisch, so gilt $AB = (AB)^\top = B^\top A^\top = BA$, da A und B symmetrisch sind, also folgt $AB = BA$. Setzen wir umgekehrt $AB = BA$ voraus, so folgt (wieder mit der Symmetrie von A und B) die Gleichung $AB = A^\top B^\top = (BA)^\top = (AB)^\top$, also ist AB symmetrisch.

10.5 Die Aussage stimmt. Wir betrachten zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Sind beide Matrizen obere Dreiecksmatrizen, so haben der i-te Zeilenvektor z_i von A und der j-te Spaltenvektor s_j von A die Gestalt

$$z_i = (0,\,\ldots,\,0,\,a_{ii},\,\ldots,\,a_{in}) \quad \text{und} \quad s_j = (b_{j1},\ldots,b_{jj},0,\ldots,0)^\top$$

Also gilt für $i > j$ die Gleichung $z_i s_j = 0$, und damit hat die Matrix AB unterhalb der Diagonalen, d.h. an den Stellen (i,j) mit $i > j$, nur Nullen als Komponenten, da an diesen Stellen die Produkte von z_i mit s_j stehen.

Für untere Dreiecksmatrizen schließt man analog.

10.6 Wir verwenden das Rezept zum Invertieren einer Matrix und erhalten:

(a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3/2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5/4 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3/4 & 1/2 \end{array}\right).$$

Somit gilt $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}$. Analog erhalten wir $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Wir können nun die Matrizen $A\,B$ und $2\,A$ mit derselben Methode invertieren, das sollte man zur Übung auch tun. Wir ersparen uns etwas Rechenarbeit, indem wir die Formeln $(A\,B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ bzw. $(\lambda\,A)^{-1} = \lambda^{-1}A^{-1}$ benutzen, so erhalten wir nämlich ganz einfach diese Inversen:

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5/4 & 1/2 \\ 3 & -7/4 & -1/2 \\ 2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}, \ (2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/8 & -1/4 \\ 1/2 & -1/4 & 0 \\ 1/2 & -3/8 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

(b) Es gilt $(A+B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Wie besprochen, überlegen wir nicht lange, ob die Matrix $A+B$ invertierbar ist, wir beginnen einfach mit dem Invertieren. Falls Sie es nicht sein sollte, so werden wir das schon merken:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6/5 & -7/5 & 1 \end{array}\right).$$

Nun gilt $\operatorname{rg}(A+B) = 2 \neq 3$. Folglich ist die Matrix $A+B$ nicht invertierbar.

10.7

(a) *Induktionsanfang*: $m = 1$
$(E_n - A)(E_n) = E_n - A = E_n - A^1$ ✓

Induktionsschritt: $m \to m+1$

$$\begin{aligned} &(E_n - A)\left(E_n + A + A^2 + \ldots + A^{(m+1)-1}\right) \\ &= (E_n - A)\left((E_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}) + A^m\right) \\ &= (E_n - A)\left(E_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}\right) + (E_n - A)A^m \\ &\overset{IV}{=} E_n - A^m + (E_n - A)A^m = E_n - A^m + A^m - A^{m+1} \\ &= E_n - A^{m+1} \ ✓ \end{aligned}$$

(b) Mit $A^m = 0$ folgt aus Teil (a): $(E_n - A)\left(E_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}\right) = E_n$.
Das bedeutet aber $\left(E_n + A + A^2 + \ldots + A^{m-1}\right) = (E_n - A)^{-1}$ und damit ist $E_n - A$ invertierbar.

10.8 Für die Lösung dieser Aufgaben bieten sich verschiedene Wege an: Die Matrix A ist invertierbar (das sieht man recht einfach: Dritte Zeile minus erste Zeile plus das Halbfache der zweiten Zeile ergibt eine obere Dreiecksmatrix vom Rang 3), also ist die gesuchte Lösung $X = A^{-1}B$. Wir erhalten X also durch Invertieren von A und anschließender Multiplikation mit B. Das ist aufwendig. Es geht auch einfacher: Bezeichnen wir die Spalten von B nacheinander mit s_1, s_2, s_3, so lautet die Matrizengleichung ausführlich

$$Ax = s_1\,,\ \ Ax = s_2\,,\ \ Ax = s_3\,,$$

das sind drei lineare Gleichungssysteme, die wir simultan lösen können:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1/2 & 1/2 \end{array}\right).$$

Damit erhalten wir $X = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 1 \\ -5 & 1/2 & 3/2 \\ -3 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

In MATLAB hätten wir die Lösung einfach mit `A\B` erhalten.

10.9 (a) Die Aussage ist wahr: Für jede invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erhält man aus der Symmetrie der Einheitsmatrix

$$\left(A^{-1}A\right)^{\top} = E_n^{\top} = E_n,$$

also $A^{\top}\left(A^{-1}\right)^{\top} = E_n$ und damit $\left(A^{\top}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\top}$ und wenn A symmetrisch ist

$$\left(A^{-1}\right)^{\top} = \left(A^{\top}\right)^{-1} = A^{-1}\,.$$

(b) Die Aussage ist wahr: A invertierbar $\Rightarrow AA^{-1} = E_n$, also $(A^{-1})^{\top}A^{\top} = E_n$, sodass $(A^{-1})^{\top}$ das Inverse von $A^{\top}$ ist.

(c) Die Aussage ist falsch: E_n und $-E_n$ sind invertierbar, ihre Summe $E_n - E_n = n \times n$-Nullmatrix aber nicht.

(d) Die Aussage ist wahr: $B^{-1}A^{-1} \cdot AB = E_n$, also $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

10.10 Die Matrizen A, B, C, D F, G sind invertierbar, jede dieser Matrizen hat den Rang 3. Einzig die Matrix E ist nicht invertierbar, ihr Rang ist 2. Bei den Matrizen F und G kann man sich etwas Rechenarbeit sparen, indem man $F^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und

$G^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$ ausnutzt, ansonsten benutze man das angegebene Rezept; man erhält:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -71 & 13 & 17 \\ 17 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 5/4 & -1/2 \\ 1 & -1/2 & 0 \\ 1 & -3/4 & 1/2 \end{pmatrix}, \; C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 7 \\ 6 & 17 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -104 & 25 & 35 \\ 47 & -10 & -14 \\ 35 & -4 & -11 \end{pmatrix},$$

$$F^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ -2 & -11 & 8 \\ 35 & 21 & 19 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 377/4 & -69/4 & -45/2 \\ -159/2 & 29/2 & 19 \\ -343/4 & 63/4 & 41/2 \end{pmatrix}$$

$$G^{-1} = (A^{-1})^\top = \begin{pmatrix} -71 & 17 & -4 \\ 13 & -3 & 1 \\ 17 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.11 (a) Ein einfaches Beispiel für eine solche Matrix ist etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^2 = A$.

„$\Rightarrow$“: A invertierbar $\quad\Rightarrow\quad A^2 = A \;\Rightarrow\; (A^2)A^{-1} = AA^{-1} \;\Rightarrow\; A = E_n$.

„$\Leftarrow$“: $A = E_n \quad\Rightarrow\quad \operatorname{rg}(A) = n \;\Rightarrow\; A$ invertierbar.

(c) Angenommen, es gibt Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit A invertierbar und $B \neq 0$, so dass $AB = 0$ gilt. Dann folgt:

$$B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1} \cdot 0 = 0,$$

ein Widerspruch. Also kann es kein invertierbares A mit der gewünschten Eigenschaft geben.

11 LR-Zerlegung einer Matrix

11.1 Aufgaben

11.1 (a) Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

(b) Lösen Sie mithilfe dieser LR-Zerlegung das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b = (12, 24, 3)^\top$.

11.2 Bestimmen Sie eine LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

11.3 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Bestimmen Sie den Rechenaufwand für die LR-Zerlegung von A (ohne Zeilenvertauschungen) sowie für die Lösung des resultierenden linearen Gleichungssystems $LRx = b$ durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen anhand der Anzahl der benötigten Gleitpunktoperationen.

Hinweis: Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ sowie $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$.

11.4 Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta = 10^{-15}.$$

(a) Geben Sie die exakte Lösung x (ohne Rechnung) an.

(b) Bestimmen Sie A^{-1} in Abhängigkeit von δ.

(c) Vergleichen Sie folgende Methoden zur Berechnung von x in MATLAB:

1. $A^{-1}b$ mit A^{-1} aus (b) berechnen
2. $A^{-1}b$ mit A^{-1} aus `inv(A)` berechnen
3. Gauß-Algorithmus (LR-Zerlegung von A, Vorwärts- und Rückwärtssubstitution). Dies erreicht man in MATLAB durch `x=A\b`.

(d) Vergleichen Sie die Ergebnisse von 1. und 2. aus (c).

(e) Erklären Sie die Ergebnisse von (c).

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_11,

11.5 Bestimmen Sie die $L\,R$-Zerlegung mit Pivotisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

und lösen Sie mit dieser $L\,R$-Zerlegung das LGS $Ax = b$ mit $b = (8, 8, 8)^\top$.

11.2 Lösungen

11.1

(a) Unser Algorithmus liefert:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ {\scriptstyle II \to II - 2I} \\ {\scriptstyle III \to III + I} \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{r|rr} -1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle III \to III - 2II} \end{matrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 3 \\ \cline{1-1} 2 & \multicolumn{1}{|r}{3} & -2 \\ \cline{2-2} -1 & 2 & 5 \end{array}\right)$$

Damit erhalten wir die $L\,R$-Zerlegung

$$A = LR \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir lösen $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad y = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Nun lösen wir $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{liefert} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

11.2 Es gilt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & -5 & -3 & -3 \\ -1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & -5 & -18 & -28 \\ -1 & -1 & -5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 4 & -5 & -18 & -28 \\ -1 & -1 & -5/18 & 43/9 \end{pmatrix}.$$

Somit besitzt A die $L\,R$-Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 5/18 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -18 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 43/9 \end{pmatrix}}_{=R}.$$

11.3 Zunächst schreiben wir den Algorithmus der $L\,R$-Zerlegung (ohne Zeilenvertauschung) formal auf:

Für $k = 1, ..., n-1$

  Für $i = k+1, ..., n$

    $a_{ik} \to \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$

    Für $j = k+1, ..., n$

      $a_{ij} \to a_{ij} - a_{ik}\,a_{kj}$

    Ende Schleife j

  Ende Schleife i

Ende Schleife k

Wir erhalten eine Matrix A, welche unterhalb der Diagonalen die Einträge von L (bis auf die Diagonale mit Einsen) und darüber R enthält. Dabei bedeutet der Pfeil "$\to$" jeweils "wird ersetzt durch".

Durch Abzählen der Gleitpunktoperationen erhalten wir für die Anzahl z_{LR} der Rechenschritte:

$$\begin{aligned}
z_{LR} &= \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 + \sum_{j=k+1}^{n} (1+1)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} (1 + 2(n-k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)(1+2(n-k)) = \sum_{k=1}^{n-1} \Big((2k^2 - (4n+1)k + (2n^2+n)\Big) \\
&= 2\tfrac{(n-1)(n-1/2)n}{3} - (4n+1)\tfrac{(n-1)n}{2} + (2n^2+n)(n-1) = \tfrac{2}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n\,.
\end{aligned}$$

Nun wenden wir uns der Lösung des Gleichungssystems $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen zu. Der Algorithmus lautet:

Für $i = 1, ..., n$
  Für $j = 1, ..., i-1$
    $b_i \to b_i - L_{ij}\, b_j$
  Ende Schleife j
Ende Schleife i

Hiernach enthält der Vektor b die Lösung y.

Für die Anzahl $z_{\text{Vorwärts}}$ der Rechenschritte gilt:

$$z_{\text{Vorwärts}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} (1+1) = \sum_{i=1}^{n} (2i-2) = 2\tfrac{n(n+1)}{2} - 2n = n^2 - n\,.$$

Für die Lösung des Gleichungssystems $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen lautet der Algorithmus:

Für $i = n, ..., 1$
  Für $j = i+1, ..., n$
    $y_i \to y_i - R_{ij}\, y_j$
  Ende Schleife j
  $y_i \to \frac{y_i}{R_{ii}}$
Ende Schleife i

Danach enthält der Vektor y den Lösungsvektor x.

Für die Anzahl $z_{\text{Rückwärts}}$ der Rechenschritte erhalten wir:

$$\begin{aligned}
z_{\text{Rückwärts}} &= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + \sum_{j=i+1}^{n} (1+1)\right) = \sum_{i=1}^{n} (1 + 2(n-i)) = \sum_{i=1}^{n} (-2i + (2n+1)) \\
&= -2\tfrac{n(n+1)}{2} + (2n+1)n = n^2\,.
\end{aligned}$$

Damit kostet die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ durch $L\,R$-Zerlegung mit anschließendem Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen insgesamt

$$z = (\tfrac{2}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{6}n) + (n^2 - n) + n^2 = \tfrac{2}{3}n^3 + \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{7}{6}n$$

Gleitpunktoperationen.

11.4 (a) $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist offensichtlich eine Lösung. Da A invertierbar ist, ist x auch *die* Lösung.

(b) Per Hand, mit Maple oder mit was auch immer:

$$A^{-1} = \frac{1}{\delta}\begin{pmatrix} 1+\delta & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Funktion, um die Inverse aufzustellen:

```
function AI=getAinverse (epsilon)
AI=[1+epsilon,-1;-1,1]./epsilon;
end
```

Man erhält für 1.: `getAinverse(1e-15)*[1;1] ans =1.1250 0`. Das sieht also nicht gut aus. Wenn man jedoch

```
AI=[1/epsilon+1,-1/epsilon;-1/epsilon,1/epsilon];
```

anstelle von

```
AI=[1+epsilon,-1;-1,1]./epsilon;
```

verwendet, erhält man das richtige Ergebnis.

Man erhält für 2.: `A=[1,1;1,1+1e-15]; inv(A)*[1;1] ans = 1 0`

Das ist die korrekte Lösung.

Man erhält für 3.: `A=[1,1;1,1+1e-15]; A\[1;1] ans = 1 0`

Auch hier bekommt man die korrekte Lösung.

(d) Auf den ersten Blick womöglich überraschend, liefern 1. und 2. unterschiedliche Lösungen.

(e) In der Rechnung bei 1. tritt Auslöschung auf. Bei der Matrix-Vektor-Multiplikation werden in der ersten Zeile Zahlen der Größenordnung 10^{15} addiert, die Summe ist aber nur 1. Daher kann es einen Fehler von der Größenordnung $10^{15}\varepsilon_{b,t} = 10^{15}2^{-52} \approx 1$ geben. Tatsächlich tritt ein solcher Fehler nur manchmal auf, hier nämlich bei 1., wenn man

`AI=[1+epsilon,-1;-1,1]./epsilon`,

nicht jedoch, wenn man

```
AI=[1/epsilon+1,-1/epsilon;-1/epsilon,1/epsilon]
```

verwendet. Auch bei 2. tritt er nicht auf. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten der beiden Varianten bei 1. ist, dass in Maschinenarithmetik nicht das Distributivgesetz (wie auch nicht das Assoziativgesetz) gilt, somit kann man nicht $(1+epsilon)/epsilon = 1/epsilon + 1$ erwarten. Bei 2. rundet MATLAB bereits die Matrix A auf eine Matrix $\mathrm{fl}(A)$, durch

```
inv(A)
```

erhält man dann eine Matrix $\mathrm{fl}((\mathrm{fl}(A))^{-1})$, die eine andere ist als $\mathrm{fl}(A^{-1})$ bei 1. Dass in zwei von drei Fällen hier das richtige Ergebnis herauskommt, ist eher zufälliger Natur, generell muss man in solchen Situationen mit falschen Ergebnissen aufgrund von Auslöschung rechnen.

Das Ergebnis zeigt: Auch wenn das Berechnen von A^{-1} *exakt* erfolgt, wird durch das Abspeichern von A^{-1} im Rechner ein unvermeidbarer Fehler gemacht, der bei der Multiplikation von A^{-1} mit b zu einem unvergleichlich größeren Fehler führt: Dies ist ein eindrucksvolles Beispiel dafür, dass das Hintereinanderausführen von stabilen Algorithmen keineswegs wieder zu einem stabilen Algorithmus führt. Zur Lösung wird empfohlen, die Berechnung von A^{-1} zu vermeiden.

11.5 Wir vertauschen die ersten beiden Zeilen und erhalten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1/4 & 1 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir die Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}}_{=R}$$

Die Lösung von $Ax = b$ erhält man nun aus

- $Ly = b$: $y = (8, 6, -2)^\top$,
- $Rx = y$: $x = (4/3, 4, 4/3)^\top$.

Hierbei haben wir benutzt, dass wegen $Pb = b$ für die Permutationsmatrix P, die die Zeilenvertauschung bewirkt, das LGS $Ax = b$ gleichwertig mit $LRx = b$ ist.

12 Die Determinante

12.1 Aufgaben

12.1 Begründen Sie das Invertierbarkeitskriterium für Matrizen von Seite 101 (Rezeptebuch).

12.2 Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

12.3 Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass für $A, B, C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ im Allgemeinen gilt

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C\,.$$

12.4 Bestimmen Sie die Determinante der folgenden *Tridiagonalmatrizen*

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} & 0 & \dots & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}\,.$$

12.5 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Determinante $\det(A)$ nach Entwicklung nach der ersten Spalte berechnet.

12.6 Lösen Sie mit der Cramer'schen Regel das Gleichungssystem $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

12.7 Begründen Sie die Cramer'sche Regel.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_12,

12.2 Lösungen

12.1 Wir bringen A mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, also

$$A \longrightarrow Z = \begin{pmatrix} z_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & z_{nn} \end{pmatrix}.$$

Bei diesen Zeilenumformungen ändert sich die Determinante höchstens um das Vorzeichen, d. h. $\det(Z) = \pm\det(A)$ (es kommt ein Minuszeichen rein, wenn zwei Zeilen vertauscht werden, andere elementare Zeilenumformungen ändern den Wert der Determinante nicht). Damit gilt also:

$$\det(A) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \det(Z) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; z_{11}, \dots, z_{nn} \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{rg}(A) = n \;\Leftrightarrow\; A \text{ invertierbar.}$$

12.2 Wir benennen die Matrizen der Reihe nach mit A, B, C, D:

- Zu A: Das Vorgehen ist nahe liegend: $\det(A) = -5 + 4 = -1$.
- Zu B: Wir wenden die Regel von Sarrus an: $\det(B) = 0 - 14 - 3 - 0 + 21 - 5 = -1$.
- Zu C: Mit der Eins links oben räumen wir die erste Spalte darunter leer und entwickeln dann nach dieser ersten Spalte (beachte unser Rezept zum Berechnen einer Determinante):

$$\begin{aligned}\det(C) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & -5 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -8 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & 14 & -12 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -5 & 5 & -5 \\ 14 & -12 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -5 \\ -12 & 5 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 14 & -12 \end{vmatrix} = (25 - 60) + 3 \cdot (60 - 70) \\ &= -35 - 30 = -65\,.\end{aligned}$$

- Zu D: Bei dieser Matrix D finden wir (mehrfach) eine Blockdiagonalgestalt (beachten Sie das Rezept zum Berechnen der Determinante: $\det(D) = (-1) \cdot 2 \cdot 1 = -2$.

12.3 Mit der Wahl $A = B = D = E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\neq\; 1 = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)\,.$$

12.4 Wir bezeichnen die Determinante der angegebenen $n \times n$-Matrix mit f_n. Durch Entwickeln nach der ersten Zeile ergibt sich

$$f_n = f_{n-1} - \mathrm{i} \begin{vmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} & \ddots & \vdots \\ 0 & \mathrm{i} & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ 0 & \dots & 0 & \mathrm{i} & 1 \end{vmatrix} = f_{n-1} - \mathrm{i}^2\, f_{n-2} = f_{n-1} + f_{n-2}$$

mit den Randbedingungen $f_0 = f_1 = 1$. Die Zahlen f_n sind die *Fibonacci-Zahlen*

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots ,$$

die Leonardo Pisano, genannt *Fibonacci*, in seinem Rechenbuch (*Liber abbaci*, 1202) einführte als Anzahl der Kaninchenpaare nach n Monaten, wenn man mit einem Kaninchenpaar startet und annimmt, dass jedes Paar ab dem zweiten Lebensmonat jeden Monat ein neues Paar in die Welt setzt.

12.5 Vorbemerkung: Es ist nicht sinnvoll, die Determinante nach der vorgeschlagenen Art zu berechnen (man teste das Programm mal mit etwas größeren Matrizen). Aber um das Programmieren etwas zu üben, ist die Aufgabe durchaus sinnvoll. MATLAB verwendet durch Aufruf von `det(A)` eine $L\,R$-Zerlegung der Matrix A, beachte den entsprechenden Kommentar im Rezeptebuch.

Das folgende (nicht sehr sinnvolle) Programm liefert die Determinante (bei kleinen Matrizen):

```
function d=laplace(A)
[n,n]=size(A);
if n==1
    d=A(1,1);
elseif n==2
    d=A(1,1)*A(2,2)-A(1,2)*A(2,1);
else
    vz=1;
    d=0;
    for i=1:n
        B=[A(1:i-1,2:n);A(i+1:n,2:n)];
        d=d+vz*A(i,1)*laplace(B);
        vz=-vz;
    end
end
```

12.6 Beachte das Rezept von Seite 103 (Rezeptebuch):

(1) Nach der Regel von Sarrus ist

$$\det(A) = 0 + 0 + 6 - 12 - 2 - 0 = -8$$

(2) Wir erhalten die Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Es gilt $\det(A_1) = -8$, $\det(A_2) = -8$, $\det(A_3) = -8$.

(4) Damit sind $x_1 = 1\, x_2 = 1$, $x_3 = 1$ die Komponenten des Lösungsvektors x.

12.7 Ist $v = (\ell_1, \ldots, \ell_n)^\top$ die eindeutig bestimmte Lösung von $Ax = b$ mit $A = (s_1, \ldots, s_n)$, so gilt:

$$Av = b \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix} = b \ \Leftrightarrow \ \sum_{j=1}^{n} \ell_j s_j = \ell_1 s_1 + \ldots + \ell_n s_n = b\,.$$

Setzen wir nun in der Berechnung von $\det(A_i)$ diesen Ausdruck für b ein, so erhalten wir wegen der Rechenregeln für die Determinante:

$$\begin{aligned} \det(A_i) &= \det\left(s_1, \ldots, s_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \ell_j s_j, s_{i+1}, \ldots, s_n\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \ell_j \underbrace{\det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_j, s_{i+1}, \ldots, s_n)}_{=0 \text{ für } j \neq i} \\ &= \ell_i \det(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n) = \ell_i \det(A)\,. \end{aligned}$$

Durch Umstellen folgt $\ell_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$.

13 Vektorräume

13.1 Aufgaben

13.1 Begründen Sie: Für alle Vektoren v eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V und alle Skalare $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $0\,v = 0$ und $\lambda\,0 = 0$.

(b) $\lambda\,v = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ oder $v = 0$.

13.2 Entscheiden Sie für die folgenden Mengen, ob es sich um Untervektorräume handelt. Falls die Menge kein Untervektorraum ist, geben Sie eine kurze Begründung an.

(a) $U_1 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b) $U_2 = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} \mid Ax = 0 \text{ besitzt unendlich viele Lösungen}\} \subseteq \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(c) $U_3 = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid |\det A| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{2\times 2}$.

(d) $U_4 = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}[X]_2 \mid 2a_2 = a_1\} \subseteq \mathbb{R}[X]_2$.

13.3 Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade** (bzw. **ungerade**), falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (bzw. $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$). Die Menge der geraden (bzw. ungeraden) Funktionen werde mit G (bzw. U) bezeichnet. Zeigen Sie: Es sind G und U Untervektorräume von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$, und es gilt $\mathbb{R}^\mathbb{R} = G + U$ und $G \cap U = \{0\}$.

Hinweis: Es gilt $f(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}\,(f(x) - f(-x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

13.2 Lösungen

13.1 (a) Wegen $0\,v = (0+0)\,v = 0\,v + 0\,v$ gilt nach Subtraktion von $0\,v$ beidseits $0\,v = 0$. Und wegen $\lambda\,0 = \lambda(0+0) = \lambda\,0 + \lambda\,0$ analog $\lambda\,0 = 0$.

(b) Gilt $\lambda\,v = 0$ und ist $\lambda \neq 0$, so folgt nach Multiplikation dieser Gleichung mit λ^{-1} nach dem ersten Teil (a) doch $v = \lambda^{-1}0 = 0$, sodass also $v = 0$ gilt.

13.2 (a) Da Summen von Quadraten reeller Zahlen nur dann null sein können, wenn die Summanden null sind, gilt $U_1 = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)^\top\}$. Damit ist U_1 ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

(b) Die Nullmatrix liegt in U_2. Und auch jede weitere Matrix, deren Rang echt kleiner als 4 ist, liegt in U_2. Man erkennt schnell, wenn man nur ein bisschen herumprobiert, dass die Summe zweier Matrizen, deren Rang jeweils echt kleiner als 4 ist, durchaus den Rang 4 haben kann. Hat aber A den Rang 4, so liegt A nicht in U_2, z. B. gilt für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in U_2 \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_2\,,$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_13,

dass $A + B = E_4 \notin U_2$. Somit ist U_2 kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{4\times 4}$.

(c) Ähnlich wie in (b) sieht man schnell (nach ein bisschen Probieren), dass die Summe von Matrizen mit Determinante 1 nicht die Determinante 1 haben muss. Es geht sogar noch einfacher: Die Nullmatrix 0 hat nämlich auch nicht die Determinante 1 und kann daher nicht in U_3 liegen. U_3 kann daher kein Untervektorraum sein.

(d) Vgl. das Rezept zum Nachweis für einen Untervektorraum: (1) Das Nullpolynom 0 liegt in U_4, da beim Nullpolynom alle Koeffizienten a_i gleich null sind.

(2) Sind nun f und g aus U_4, etwa

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \quad \text{mit } a_1 = 2a_2 \quad \text{und} \quad g = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 \quad \text{mit} \quad b_1 = 2b_2\,,$$

so gilt

$$f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 \in U_4\,, \quad \text{da} \quad (a_1 + b_1) = 2(a_2 + b_2)\,.$$

(3) Und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt auch

$$\lambda\, f = \lambda\, a_0 + \lambda\, a_1 X + \lambda\, a_2 X^2 \in U_4\,, \quad \text{da} \quad \lambda\, a_1 = 2\,\lambda\, a_2\,.$$

13.3 Wir verwenden unser Rezept zum Nachweis für Untervektorräume:

(1) Die Nullfunktion 0 erfüllt $0(x) = 0 = 0(-x)$, sodass $0 \in G$.

(2) und (3) Es seien $f, g \in G$, also $f(x) = f(-x)$ und $g(x) = g(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Es gilt dann:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x) \\ \text{und } (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) = \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x)\,. \end{aligned}$$

Es sind also $f + g, \lambda f \in G$.

Damit ist G ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Analog erhält man, dass auch U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ist.

Nun zeigen wir $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = G + U$:

- $G + U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: Da G und U Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sind, gilt diese Inklusion.
- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subseteq G + U$: Ist $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ eine beliebige Funktion, so gilt mit dem Hinweis:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(\underbrace{f(x) + f(-x)}_{=:\, g(x)}) + \tfrac{1}{2}(\underbrace{f(x) - f(-x)}_{=:\, u(x)})$$

mit $g \in G$ und $u \in U$. Es lässt sich also jede Funktion aus $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ als Summe von Funktionen aus G und U schreiben; demzufolge ist $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = G + U$.

Schließlich gilt auch $G \cap U = \{0\}$: Ist nämlich $f \in G \cap U$, so ist f zugleich gerade wie auch ungerade, d. h., es gilt $f(x) = f(-x)$ und $f(x) = -f(-x)$, also $f(x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit ist f die Nullfunktion. Es ist also $G \cap U = \{0\}$ begründet.

14 Erzeugendensysteme und lineare (Un-)Abhängigkeit

14.1 Aufgaben

14.1 Für welche $r \in \mathbb{R}$ sind die folgenden drei Spaltenvektoren aus $\mathbb{R}^4$ linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

14.2 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Wenn $Av_1, Av_2, \dots, Av_k$ linear unabhängig sind, dann gilt dies auch für $v_1, v_2, \dots, v_k$.

(b) Im Allgemeinen ist die Umkehrung der Aussage (a) falsch.

(c) Falls $m = n$ und A invertierbar ist, gilt auch die Umkehrung der Aussage (a).

14.3 Ist die Menge $\{\cos, \sin, \exp\} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ linear abhängig oder linear unabhängig?

14.4 Beweisen Sie folgende Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an, um sie zu widerlegen: *Gegeben seien die Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^4$. Die Vektoren x, y sowie x, z und y, z seien paarweise linear unabhängig. Dann sind auch x, y, z linear unabhängig.*

14.5 Sind die folgenden Mengen jeweils linear abhängig oder linear unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort. Finden Sie für die linear abhängigen Mengen jeweils eine möglichst große linear unabhängige Teilmenge. Geben Sie außerdem die lineare Hülle der Mengen an.

(a) $M_1 = \{(1, 2, 3)^\top, (3, 7, 0)^\top, (1, 3, -6)^\top\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

(b) $M_2 = \{\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}^2\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

(c) $M_3 = \{\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}^2\}$ im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}$.

(d) $M_4 = \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0 = a_1 - a_2\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]_2$.

(e) $M_5 = \{X^2 - 2, X + 1, X\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]_4$.

(f) $M_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

14.6 Begründen Sie, warum das Rezept auf Seite 116 (Rezeptebuch) das richtige Ergebnis liefert.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_14,

14.2 Lösungen

14.1 Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\r\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\3\\r\\0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\r\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

nur die Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ besitzt. Da es immer mindestens diese Lösung gibt, sind sie genau dann linear abhängig, wenn es mindestens zwei (und damit unendlich viele) Lösungen gibt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & r & 0 \\ 3 & r & 3 & 0 \\ r & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & r-2 & 0 \\ 0 & 0 & -(r-2)(r-3) & 0 \\ 0 & 0 & 2-r+r(r-2) & 0 \end{array}\right).$$

Es gibt genau dann unendlich viele Lösungen, wenn $-(r-2)(r-3) = 0$ und $2 - r + r(r-2) = 0$, also wenn $r \in \{2, 3\} \cap \{1, 2\}$, also $r = 2$ ist.

14.2 (a) Angenommen, die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sind linear abhängig. Dann gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, die nicht alle gleich null sind, mit

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 .$$

Multiplikation dieser letzten Gleichung mit A liefert

$$\lambda_1 A\, v_1 + \cdots + \lambda_k A\, v_k = A\, 0 = 0 ,$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit von $A\, v_1, A\, v_2, \ldots, A\, v_k$ ein Widerspruch ist. Somit sind $v_1, v_2, \ldots, v_k$ linear unabhängig.

(b) Mit der Wahl

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ und } A = \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

sind v_1 und v_2 sicherlich linear unabhängig, aber $Av_1 = (1, 1)^\top$ und $Av_2 = (2, 2)^\top$ aber nicht.

(c) Angenommen, die Vektoren $A\, v_1, \ldots, A\, v_k$ sind linear abhängig. Dann gäbe es $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, nicht alle gleich null, mit

$$\lambda_1 A\, v_1 + \cdots + \lambda_k A\, v_k = 0 .$$

Nach Multiplikation mit A^{-1} erhielte man aber

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0 .$$

Das ist ein Widerspruch. Nach Voraussetzung sind nämlich $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängig. Somit sind $A\, v_1, \ldots, A\, v_k$ linear unabhängig.

14.3 Angenommen, sin, cos, exp sind linear abhängig. Dann gibt es λ, μ, ν, nicht alle gleich null, mit

$$\lambda \sin + \mu \cos + \nu \exp = 0\,.$$

Der Fall $\nu = 0$ ist nicht möglich, da sin und cos linear unabhängig sind. Wir bringen $\nu \exp$ nach rechts und multiplizieren mit $-\nu^{-1}$ durch und erhalten

$$\tilde{\lambda} \sin + \tilde{\nu} \cos = \exp\,, \quad \text{d. h.} \quad \tilde{\lambda} \sin(x) + \tilde{\nu} \cos(x) = \exp(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Auf zweierlei Arten sind man nun leicht, dass eine solche Gleichung nicht möglich ist:

- Weil die Werte von sin und cos zwischen -1 und 1 liegen, sind die Werte auf der linken Seite beschränkt (durch $|\lambda| + |\nu|$), die Werte auf der rechten Seite werden jedoch beliebig groß (wenn x groß wird).
- Setzt man $x = 0$ ein, so erhält man $\tilde{\nu} = 1 > 0$. Und setzt man $x = \pi$ ein, so erhält man $\tilde{\nu} = -\,\mathrm{e}^{\pi} < 0$.

Jeder dieser Fälle belegt, dass cos, sin, exp linear unabhängig sind.

14.4 Die Aussage ist falsch: Ein einfaches Gegenbeispiel erhält man mit der Wahl

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist klar, dass die Vektoren paarweise linear unabhängig sind, aber es gilt $x+y-z = 0$, und daher sind x, y, z nicht linear unabhängig.

14.5 (a)

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit gibt es unendlich viele Lösungen $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, folglich sind die Vektoren linear abhängig.

Eine maximale Menge linear unabhängiger Vektoren hat also höchstens 2 Elemente. Da die Vektoren $(1,2,3)^\top$ und $(3,7,0)^\top$ linear unabhängig sind, bilden sie eine maximale linear unabhängige Teilmenge, und es gilt

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

(b) Man schreibt vereinfachend $\{\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}^2\} = \{\mathrm{i}, 2\}$.
$\lambda_1 \cdot \mathrm{i} + \lambda_2 \cdot 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; \{\mathrm{i}, 2\}$ linear unabhängig $\;\Rightarrow\; \langle \mathrm{i}, 2 \rangle = \mathbb{C}$.

(c) $\mathbb{C}$ ist als $\mathbb{C}$-Vektorraum 1-dimensional. Zwei Vektoren können nicht linear unabhängig sein und $\{1\}$ ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von M_3 und $\langle M_3\rangle = \mathbb{C}$.

(d) Die Menge M_4 ist linear abhängig, da das Nullpolynom in M_4 enthalten ist. Für jedes Polynom $f \in M_4$ gilt $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$ mit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ und $a_0 = a_1 - a_2$:

$$f = a_1(X+1) + a_2(X^2-1)\,.$$

Damit ist $M_4 = \langle X+1, X^2-1\rangle$ und in $\lambda_1(X+1)+\lambda_2(X^2-1) = \lambda_2X^2+\lambda_1X+(\lambda_1-\lambda_2) = 0$ liefert ein Koeffizientenvergleich die lineare Unabhängigkeit von $\{X+1, X^2-1\}$.

(e) Mit einem Koeffizientenvergleich folgt aus

$$\lambda_1(X^2-2) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3X = \lambda_1X^2 + (\lambda_2+\lambda_3)X + (-2\lambda_1+\lambda_2) = 0,$$

dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ sein müssen und damit sind die Polynome $X, X+1, X^2-2$ linear unabhängig und ihr Erzeugnis $\langle M_5\rangle = \mathbb{R}[X]_2$.

(f) Aus dem Ansatz

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 5\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix} + \lambda_4\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & -3\end{pmatrix} + \lambda_5\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

ergibt sich komponentenweise das lineare Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 4 & 2 & 3 & 2 & 0\\ 5 & 1 & -4 & -3 & -1 & 0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 3 & 0\\ 0 & -3 & 4 & -9 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 9 & -11 & -5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -85 & -64 & 0\end{array}\right).$$

Dieses Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Damit sind die fünf Matrizen linear abhängig. Wegen der Zeilenstufenform der Matrix sind die ersten vier Elemente von M_6 linear unabhängig und bilden ein maximales linear unabhängiges System. Es gilt $\langle M_6\rangle = \mathbb{R}^{2\times 2}$, da jede Matrix aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ Linearkombination dieser Matrizen ist.

14.6 Wir begründen: $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_nv_n = 0$ folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ gilt.

„$\Rightarrow$": Angenommen $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig. Wäre ein $\lambda_i \neq 0$ in

$$\lambda_1v_1 + \ldots + \lambda_nv_n = 0\,,$$

so könnte man durch dieses teilen, und es gälte:

$$v_i = -\frac{1}{\lambda_i}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_jv_j \in \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle \quad - \quad \text{Widerspruch.}$$

„$\Leftarrow$": Angenommen, $\sum\lambda_iv_i = 0$ impliziert $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. Wären nun $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig, so gäbe es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $j \in \{1, \ldots, n\}\setminus\{i\}$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_jv_j\,, \quad \text{und somit gälte} \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\lambda_jv_j + (-1)v_i = 0 \quad - \quad \text{Widerspruch.}$$

15 Basen von Vektorräumen

15.1 Aufgaben

15.1 Begründen Sie, warum für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$U = \left\{ u = (u_1, \ldots, u_n)^\top \in \mathbb{R}^n \mid u_1 + \cdots + u_n = 0 \right\}$$

einen Vektorraum bildet. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von U.

15.2 Bestimmen Sie die Dimension des Vektorraums

$$\langle f_1 : x \mapsto \sin(x),\ f_2 : x \mapsto \sin(2x),\ f_3 : x \mapsto \sin(3x) \rangle \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}} .$$

15.3 Es seien die Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $u = (1, -3, 2)^\top$ und $v = (2, -1, 1)^\top$ gegeben. Prüfen Sie, ob $p = (1, 7, -4)^\top$ bzw. $q = (2, -5, 4)^\top$ Linearkombinationen von u und v sind. Berechnen Sie ggf. die Darstellung von p und q bezüglich der Basis $\{u, v\}$ des von u und v aufgespannten Untervektorraums des $\mathbb{R}^3$.

15.4 Gegeben sei das folgende homogene lineare Gleichungssystem für $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \mathrm{i}\, x_1 & + & 4x_2 & - & (2+\mathrm{i})x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & 5x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} .$$

(a) Wie groß kann die Dimension des Lösungsraums eines Gleichungssystems von obigem Typ maximal sein? Wie groß muss sie mindestens sein?

(b) Berechnen Sie den Lösungsraum und geben Sie eine Basis für ihn an.

15.5 (a) Zeigen Sie, dass durch $B = \{1, 1-x, (1-x)^2, (1-x)^3\}$ eine Basis des Polynomraums $\mathbb{R}[x]_3$ gegeben ist.

(b) Geben Sie die Darstellung von $p = x^3 - 2x^2 + 7x + 5$ bezüglich der Basis B an.

15.6 Durch die folgenden vier Polynome wird ein Vektorraum $V \subseteq \mathbb{R}[x]_3$ erzeugt:

$$p = x^3 - 2x^2 + 4x + 1, \qquad r = x^3 + 6x - 5,$$
$$q = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 1, \qquad s = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 5.$$

Bestimmen Sie $\dim V$ und geben Sie eine Basis von V an.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_15,

15.7 Bestimmen Sie eine Basis des von der Menge

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

erzeugten Untervektorraums $U = \langle X \rangle$ des $\mathbb{R}^4$.

15.8 Berechnen Sie den Rang sowie je eine Basis von Kern, Spalten- und Zeilenraum der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

15.9 Begründen Sie: $S_A = \{Av \,|\, v \in \mathbb{R}^n\}$.

15.10 Begründen Sie die Aussagen in der Box auf Seite 126 (Rezeptebuch).

15.2 Lösungen

15.1 (1) Der Nullvektor liegt in U. (2) Mit je zwei Vektoren $(u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top$, $(u_1', u_2', \ldots, u_n')^\top \in U$ ist auch deren Summe $(u_1 + u_1', u_2 + u_2', \ldots, u_n + u_n')^\top$ wieder in U, da $(u_1 + u_1') + \cdots + (u_n + u_n') = 0$ gilt. (3) Analog folgt auch, dass jedes skalare Vielfache eines Elements aus U wieder in U liegt. Damit ist begründet, dass U ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist, also auch selbst ein Vektorraum ist.

Wir suchen eine Basis von U. Dazu brauchen wir Vektoren, die in U liegen und linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit sieht man immer schnell, wenn die Vektoren viele Nullen haben. Die Standardeinheitsvektoren liegen nicht in U, aber Vektoren der Bauart $(1, 0, \ldots, 0, -1)^\top$ liegen schon in U. Wir begründen nun, dass die folgenden Vektoren aus U eine Basis von U bilden:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ldots, v_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Menge $B = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ ist linear unabhängig, denn der Ansatz

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0$$

für $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{R}$ liefert ein Gleichungssystem, das wir unmittelbar lösen können, es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.

Außerdem ist B Erzeugendensystem von U, da für einen Vektor $(u_1, u_2, \ldots, u_n)^\top \in U$ gilt:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \ldots + u_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn $u_n = -u_1 - \ldots - u_{n-1}$. Damit gilt $U = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$.

Also ist B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von U und somit eine Basis von U. Die Dimension ist $n-1$.

15.2 Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ gelte $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$, d. h.

$$\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \sin(2x) + \lambda_3 \sin(3x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Für $x = \frac{\pi}{2}$ erhalten wir

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = \lambda_3\,.$$

Für $x = \frac{\pi}{4}$ erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\lambda_1 + \lambda_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,\lambda_3 = 0\,.$$

Für $x = \frac{\pi}{3}$ erhalten wir damit

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\lambda_1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,\lambda_2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = -\lambda_2\,.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt dann $\lambda_1 = 0$ und somit $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$. Die drei Funktionen f_1, f_2, f_3 sind folglich linear unabhängig; der von ihnen erzeugte Vektorraum hat also die Dimension 3.

15.3 Gesucht sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda u + \mu v = p$ bzw. $\lambda u + \mu v = q$. Wir lösen beide Gleichungssysteme simultan:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 7 & -5 \\ 2 & 1 & -4 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 8/5 \\ 0 & 1 & 2 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 3/5 \end{array}\right).$$

Das erste Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar mit $\lambda = -3$ und $\mu = 2$. Entsprechend gilt $p \in \langle u, v \rangle$ und

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das zweite Gleichungssystem dagegen hat keine Lösung, es folgt $q \notin \langle u, v \rangle$.

15.4 (a) In Matrixschreibweise hat das lineare Gleichungssystem die Form

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 4 & -(2+\mathrm{i}) & -1 \\ 1 & 0 & -5 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=:\,A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{=:\,x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\,0}.$$

Es handelt sich somit um ein homogenes lineares Gleichungssystem. A ist eine 3×4-Matrix, sodass $\mathrm{rg}(A) \leq 3$. Außerdem gilt $A \neq 0$, also $\mathrm{rg}(A) \geq 1$. Der Lösungsraum ist $\ker(A)$ und hat die Dimension $\dim(\ker(A)) = 4 - \mathrm{rg}(A)$, also

$$1 \leq \dim(\ker(A)) \leq 3\,.$$

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{i} & 4 & -(2+\mathrm{i}) & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} \mathrm{i} & 4 & -2-\mathrm{i} & -1 & 0 \\ 0 & 4\,\mathrm{i} & -4-2\,\mathrm{i} & -2-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Mit der Wahl $x_4 = s \in \mathbb{C}$ folgt $x_3 = -s$, und damit $x_2 = \left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{1}{4}\right) s$, folglich $x_1 = -3s$. Als Lösungsmenge L bzw. Basis B erhalten wir:

$$L = \left\{ s(-3, \tfrac{\mathrm{i}}{2} - \tfrac{1}{4}, -1, 1)^\top \;\middle|\; s \in \mathbb{C} \right\} \quad \text{bzw.} \quad B = \left\{ (12, 1-2\,\mathrm{i}, 4, -4)^\top \right\}.$$

15.5 (a) Wir zeigen zuerst, dass die Vektoren in B linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2(1-x) + \lambda_3(1-x)^2 + \lambda_4(1-x)^3 \\ = {} &(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (-\lambda_2 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4)x + (\lambda_3 + 3\lambda_4)x^2 - \lambda_4 x^3 = 0 \end{aligned}$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit dem Nullpolynom folgt:

$$\begin{aligned} -\lambda_4 = 0 \;&\Rightarrow \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \;&\Rightarrow \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda 3 - 3\lambda_4 = 0 \;&\Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \;&\Rightarrow \lambda_4 = 0 \end{aligned}$$

Da $\dim(\mathbb{R}[x]_3) = 4$, bilden die 4 linear unabhängigen Vektoren in B eine Basis von $\mathbb{R}[x]_3$. (b) Wir suchen Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + (-\lambda_2 - 2\lambda_3 - 3\lambda_4)x + (\lambda_3 + 3\lambda_4)x^2 - \lambda_4 x^3 = 5 + 7x - 2x^2 + x^3\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das folgende lineare Gleichungssystem, das wir gleich auf Zeilenstufenform bringen, um die Lösung zu erhalten:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Es folgt $p = 11 \cdot 1 + (-6) \cdot (1-x) + 1 \cdot (1-x)^2 + (-1) \cdot (1-x)^3$.

15.6 Wir machen den Ansatz

$$(*)\quad \lambda_1 p + \lambda_2 q + \lambda_3 r + \lambda_4 s = 0\,,$$

wobei rechts das Nullpolynom 0 steht. Ausgeschrieben lautet das wie folgt:

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4)\,x^3 \\ +\;&(-2\lambda_1 - 3\lambda_2 - 5\lambda_4)\,x^2 \\ +\;&(4\lambda_1 + 9\lambda_2 + 6\lambda_3 + 7\lambda_4)\,x \\ +\;&(\lambda_1 - \lambda_2 - 5\lambda_3 + 5\lambda_4) = 0\,. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich führt zu einem linearen Gleichungssystem, das wir gleich auf Zeilenstufenform bringen (die Nullspalte rechts lassen wir dabei gleich weg, an der tut sich beim Zeilenumformen eh nichts):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Polynome p, q, r, s sind damit linear abhängig. Genauer ist der Lösungsraum von $(*)$ sogar zweidimensional. Die Dimension von V ist somit 2, und je zwei linear unabhängige Polynome aus p, q, r, s bilden eine Basis von V. Wir wählen $B = \{p, q\}$.

15.7 Wir schreiben die Spalten als Zeilen in eine Matrix und wenden elementare Zeilenumformungen an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

An dieser Form erkennt man bereits, dass der Rang dieser Matrix 4 ist (beachte die ersten zwei und die letzten zwei Zeilen). Damit ist jede Basis des $\mathbb{R}^4$ eine Basis von $U = \mathbb{R}^4$. Wir wählen die einfachste, nämlich die kanonische Basis $\{e_1, \ldots, e_4\}$.

15.8 Wir bringen die Matrizen mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun lassen sich alle gesuchten Dinge direkt ablesen:

- $\mathrm{rg}(A) = 3$, $\ker(A) = \{(0,0,0)^\top\} = \langle\emptyset\rangle$, $Z_A = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$, $S_A = \langle e_1, e_2, e_3\rangle$.
- $\mathrm{rg}(B) = 2$, $\ker(B) = \langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$, $Z_B = \langle \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \rangle$, $S_B = \langle \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \rangle$.
- $\mathrm{rg}(C) = 2$, $\ker(C) = \langle\emptyset\rangle$, $Z_B = \langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \rangle$, $S_B = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\\3\end{pmatrix} \rangle$.

15.9 Das sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} S_A = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle &= \left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i s_i \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} s_1 & \ldots & s_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} \,|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\right\} \\ &= \left\{Av \,|\, v \in \mathbb{K}^n\right\}. \end{aligned}$$

15.10 Die erste Aussage wiederholt nur die Definition des Kerns.

Die zweite Aussage folgt aus der Tatsache, dass die Lösungsmenge eines linearen homogenen Gleichungssystem $(A\,|\,0)$ mit $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ein Untervektorraum des $\mathbb{K}^n$ ist.

Die dritte Aussage wiederholt die bekannte Formel

$$\text{Anzahl der frei wählbaren Parameter} = n - \mathrm{rg}(A),$$

Die vierte Aussage gilt ebenso, da bei einer quadratischen $n \times n$-Matrix, die in Zeilenstufenform vorliegt, die Anzahl der Nullzeilen gerade $n - r$ ist, wenn r die Anzahl der Nichtnullzeilen ist. Aber das ist ja gerade nach der dritten Aussage die Dimension des Kerns.

Die fünfte Aussage formuliert neu, was altbekannt ist: Wir wissen aus dem Kapitel zu den linearen Gleichungssystemen

$$Ax = b \text{ lösbar} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\,|\,b).$$

In einer anderen Sprechweise bedeutet das $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = \langle s_1, \ldots, s_n, b\rangle$.

16 Orthogonalität I

16.1 Aufgaben

16.1 Begründen Sie die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung: Ist $\langle\ ,\ \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$|\langle v\,, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\|\,.$$

16.2 Begründen Sie, warum orthogonale Vektoren ungleich 0 linear unabhängig sind.

16.3 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Zerlegung $p = p_a + p_{a^\perp}$ einer Polynomfunktion $p \in \mathbb{R}[x]$ längs $a \in \mathbb{R}[x]$ ausgibt. Dabei sei

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}\,,\ (p, q) \mapsto \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

das Skalarprodukt.

16.4 Es seien $v = (v_1, v_2)^\top, w = (w_1, w_2)^\top \in \mathbb{R}^2$. Überprüfen Sie, ob es sich bei

(a) $\langle v, w\rangle = 4v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_1w_2 + v_2w_1$,

(b) $\langle v, w\rangle = v_1^2w_1 + v_2w_2$

um Skalarprodukte in $\mathbb{R}^2$ handelt.

16.5 Berechnen Sie die Winkel zwischen den folgenden beiden Vektoren. Verwenden Sie dafür jeweils das angegebene Skalarprodukt.

(a) Im $\mathbb{R}^3$ mit $\langle v\,, w\rangle = v^\top w$

$$v = (1, -2, 0)^\top\,,\ w = (2, -1, 1)^\top\,.$$

(b) Im $\mathbb{R}[x]_2$ mit $\langle p\,, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$:

$$p(x) = x^2 - 2x + 2, \quad q(x) = 3x^2 + x - 3\,.$$

16.2 Lösungen

16.1 Für $w = 0$ ist die Aussage richtig, daher setzen wir im Folgenden $w \neq 0$ voraus. Aufgrund der positiven Definitheit ist $\langle w\,, w\rangle > 0$, wir setzen

$$\lambda = \frac{\langle v\,, w\rangle}{\langle w\,, w\rangle} \in \mathbb{R}\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_16,

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
0 \leq \|v - \lambda w\|^2 &= \langle v - \lambda w \,, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2 - 2\lambda \langle v \,, w \rangle \\
&= \|v\|^2 + \frac{\langle v \,, w \rangle^2}{\langle w \,, w \rangle^2} \langle w \,, w \rangle - 2 \frac{\langle v \,, w \rangle}{\langle w \,, w \rangle} \langle v \,, w \rangle \\
&= \|v\|^2 + \frac{\langle v \,, w \rangle^2}{\|w\|^2} - 2 \frac{\langle v \,, w \rangle^2}{\|w\|^2} = \|v\|^2 - \frac{\langle v \,, w \rangle^2}{\|w\|^2} \,.
\end{aligned}$$

Durch Umstellen und Wurzelziehen folgt:

$$0 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - \langle v \,, w \rangle^2 \;\Rightarrow\; |\langle v \,, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \,.$$

16.2 Wir zeigen die Aussage für zwei zueinander senkrechte Vektoren, die Behauptung lässt sich dann leicht verallgemeinern. Wir betrachten zwei orthogonale Vektoren v und w und machen wie immer den Ansatz

$$(*) \quad \lambda \, v + \mu \, w = 0 \,.$$

Zu zeigen ist, dass $\lambda = 0 = \mu$ gilt. Da $\langle v \,, 0 \rangle = 0$, gilt wegen der Linearität des Skalarprodukts:

$$0 = \langle v \,, \lambda v + \mu w \rangle = \lambda \langle v \,, v \rangle + \mu \underbrace{\langle v \,, w \rangle}_{=0} \,,$$

sodass wegen $v \neq 0$ notwendig $\lambda = 0$ gelten muss. Ist aber erst mal $\lambda = 0$ erkannt, so ist wegen $w \neq 0$ auch $\mu = 0$ (siehe obige Gleichung $(*)$).

16.3 Der folgende Code leistet das Gewünschte:

```
function [ pa, pap ] = orthzer( p,a )
%bestimmt die orthogonale zerlegung des polynoms p laengs a
syms x;
z=int(a*p,x,0,1);
n=int(a*a,x,0,1);
pa=z/n*a;
pap=p-pa;
end
```

16.4 Man beachte unser Rezept:

(a) *Linearität*:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda v + v' \,, w \rangle =& 4(\lambda v_1 + v_1')w_1 + 3(\lambda v_2 + v_2')w_2 + (\lambda v_1 + v_1')w_2 + (\lambda v_2 + v_2')w_1 \\
=& \lambda(4v_1w_1) + 4v_1'w_1 + \lambda(3v_2w_2) + 3v_2'w_2 + \lambda(v_1w_2) + v_1'w_2 + \lambda(v_2w_1) + v_2'w_1 \\
=& \lambda(4v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_1w_2 + v_2w_1) + (4v_1'w_1 + 3v_2'w_2 + v_1'w_2 + v_2'w_1) \\
=& \lambda\langle v \,, w \rangle + \langle v' \,, w \rangle \,. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Symmetrie:

$\langle v\,,w\rangle = 4v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_1w_2 + v_2w_1 = 4w_1v_1 + 3w_2v_2 + w_2v_1 + w_1v_2 = \langle w\,,v\rangle\,. \quad \checkmark$

Positive Definitheit:

$$\begin{aligned}\langle v\,,v\rangle &= 4v_1v_1 + 3v_2v_2 + v_1v_2 + v_2v_1 = 4v_1^2 + 2v_1v_2 + 3v_2^2\\ &= v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 + 3v_1^2 + 2v_2^2 = (v_1+v_2)^2 + 3v_1^2 + 2v_2^2\,. \quad \checkmark\end{aligned}$$

$\langle v\,,w\rangle = 2v_1w_1 + 3v_2w_2 + v_1w_2 + v_2w_1$ ist also ein Skalarprodukt . (b) Aufgrund des Quadrates schöpfen wir schnell den Verdacht, dass die Linearität nicht gegeben ist. Zuerst berechnen wir:

$$\begin{aligned}\langle \lambda v + v'\,,w\rangle &= (\lambda v_1 + v_1')^2 w_1 + (\lambda v_2 + v_2')w_2\\ &= (\lambda^2 v_1^2 + 2\lambda v_1 v_1' + {v_1'}^2)w_1 + \lambda v_2 w_2 + v_2' w_2 \quad \text{und}\\ \lambda\langle v\,,w\rangle + \langle v'\,,w\rangle &= \lambda v_1^2 w_1 + \lambda v_2 w_2 + {v_1'}^2 w_1 + v_2' w_2\,.\end{aligned}$$

Für $\lambda = v_1 = w_1 = v_1' = 1$ gilt

$$\langle \lambda v + v'\,,w\rangle \neq \lambda\langle v\,,w\rangle + \langle v'\,,w\rangle\,,$$

somit ist $\langle v\,,w\rangle = v_1^2 w_1 + v_2 w_2$ kein Skalarprodukt.

16.5 (a) Mit $\langle v\,,w\rangle = 4$, $||v|| = \sqrt{5}$ und $||w|| = \sqrt{6}$ gilt $\measuredangle(v,w) = \arccos(4/\sqrt{30}) \approx 0.75 \approx 0.24\pi$.

(b) Es gilt

$$\langle p\,,q\rangle = \int_0^1 3x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 6\,dx = \frac{3}{5}x^5 - \frac{5}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 6x\,\Big|_0^1 = -\frac{139}{60}\,.$$

$$||p||^2 = \int_0^1 x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4\,dx = \frac{28}{15}, \quad ||q||^2 = \int_0^1 9x^4 + 6x^3 - 17x^2 - 6x + 9\,dx = \frac{109}{30}\,.$$

Also $\measuredangle(p,q) = \arccos\left(\frac{139\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{30}}{60\cdot\sqrt{28}\cdot\sqrt{109}}\right) \approx 2.67 \approx 0.85\pi$.

17 Orthogonalität II

17.1 Aufgaben

17.1 Weisen Sie die Eigenschaften des Vektor- und Spatprodukts nach (siehe Box auf Seite 143 (Rezeptebuch)).

17.2 Gegeben sei der Polynomraum $\mathbb{R}[x]_2$ mit dem Skalarprodukt $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$ und der Untervektorraum $W = \langle 1 + x^2 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $W^\perp$.

(b) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtverfahren aus der Basis

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2$$

von $\mathbb{R}[x]_2$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$.

17.3 Gegeben sind die Vektoren

$$p = (3, 0, 4)^\top \quad \text{und} \quad q = (-1, 2, -2)^\top$$

und das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen p und q.

(b) Geben Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$ mit $\|n\|_2 = 1$ an, der auf p und q senkrecht steht.

(c) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass die Linearkombination $s = p + q + \lambda n$ die Länge $\|s\|_2 = \sqrt{13}$ besitzt.

(d) Bestimmen Sie die Fläche F des durch p und q in $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms.

(e) Bestimmen Sie das Volumen V des durch p, q und n aufgespannten Spates.

17.4 Gegeben seien die Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 1, 0)^\top, \quad v_2 = (1, 1, 1, 1)^\top, \quad v_3 = (1, 1, 2, 2)^\top \quad \text{und} \quad v_4 = (0, 1, -1, 0)^\top.$$

Es sei $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Dimension und eine Basis von W.

(b) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtverfahren eine Orthonormalbasis von W.

17.5 (a) Berechnen Sie das Volumen des Spates mit den Kanten

$$v_1 = (1, -2, 0)^\top, \quad v_2 = (2, 0, 3)^\top \quad \text{und} \quad v_3 = (3, 1, -1)^\top.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_17,

(b) Berechnen Sie das Volumen des Spates mit den Kanten

$$w_1 = (1,2,3)^\top, \quad w_2 = (-2,0,1)^\top \quad \text{und} \quad w_3 = (0,3,-1)^\top .$$

(c) Vergleichen Sie die Resultate von (a) und (b) und erklären Sie das Ergebnis des Vergleichs.

17.6 (a) Bestimmen Sie die Fläche F des durch die Vektoren

$$u = (1,3,6)^\top \quad \text{und} \quad v = (3,2,2)^\top$$

im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelogramms.

(b) Bestimmen Sie die Fläche D des Dreiecks im $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten $(1,0,-1)^\top$, $(2,3,5)^\top$ und $(4,2,1)^\top$.

(c) Bestimmen Sie das Volumen V des durch die Vektoren

$$u = (1,3,6)^\top, \quad v = (3,2,2)^\top \quad \text{und} \quad w = (-2,8,7)^\top$$

im $\mathbb{R}^3$ aufgespannten Spates.

17.7 Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^4$ von

$$U = \langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

17.8 Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}[x]_3 \subseteq \mathbb{R}[x]$ sei das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, \mathrm{d}x$$

für f, $g \in V$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$ von V.

(a) Man berechne in V den Abstand von $f = x + 1$ und $g = x^2 - 1$.

17.2 Lösungen

17.1 1. Für das Skalarprodukt und für alle $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\langle x\,, a \times b\rangle = x_1a_2b_3 - x_1b_2a_3 + x_2a_3b_1 - x_2b_3a_1 + x_3a_1b_2 - x_3b_1a_2\,.$$

Ebenso erhält man für die Determinante durch Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}\det(x, a, b) = \begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} &= x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1a_2b_3 - x_1b_2a_3 + x_2a_3b_1 - x_2b_3a_1 + x_3a_1b_2 - x_3b_1a_2\,.\end{aligned}$$

2. Da die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Spalten null ist, gilt:

$$\langle a\,, a \times b\rangle = \det(a, a, b) = 0 = \det(b, a, b) = \langle b\,, a \times b\rangle\,.$$

Da $\langle a\,, a \times b\rangle = \langle b\,, a \times b\rangle = 0$, steht $a \times b$ senkrecht auf a und b.

3. Diese Eigenschaft rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned}\|a \times b\|^2 &= (a_2b_3 - b_2a_3)^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2 \\ &= \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) - \left(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\right)^2 \\ &= \|a\|^2\,\|b\|^2 - \langle a\,, b\rangle^2 = \|a\|^2\,\|b\|^2 - \left(\|a\|\,\|b\|\,\cos\measuredangle(a, b)\right)^2 \\ &= \|a\|^2\,\|b\|^2\left(1 - \cos^2\measuredangle(a, b)\right) = \|a\|^2\,\|b\|^2\,\sin^2\measuredangle(a, b)\,.\end{aligned}$$

4. Die Behauptung folgt aus 10. und der Definition von $[a, b, c]$.

5. Das folgt aus 3.

6. Das folgt direkt aus der Definition.

7. Ohne Einschränkung gelte $a, b \neq 0$. Mit 3. gilt:

$$a \times b = 0 \;\Leftrightarrow\; \|a \times b\| = 0 \;\Leftrightarrow\; \sin\measuredangle(a, b) = 0 \;\Leftrightarrow\; a, b \text{ linear abhängig.}$$

8. Auch hier verwenden wir 3.:

$$\begin{aligned}\|a \times b\|^2 + |\langle a\,, b\rangle|^2 &= \|a\|^2\,\|b\|^2\,\sin^2\measuredangle(a, b) + \|a\|^2\,\|b\|^2\,\cos^2\measuredangle(a, b) \\ &= \|a\|^2\,\|b\|^2\left(\sin^2\measuredangle(a, b) + \cos^2\measuredangle(a, b)\right) = \|a\|^2\,\|b\|^2\,.\end{aligned}$$

9. Wir begründen die drei Identitäten:

- Die Grassmannidentität:

$$u \times (v \times w) = u \times \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2(v_1w_2 - v_2w_1) - u_3(v_3w_1 - v_1w_3) \\ u_3(v_2w_3 - v_3w_2) - u_1(v_1w_2 - v_2w_1) \\ u_1(v_3w_1 - v_1w_3) - u_2(v_2w_3 - v_3w_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_2w_2 + u_3w_3)v_1 - (u_2v_2 + u_3v_3)w_1 \\ (u_1w_1 + u_3w_3)v_2 - (u_1v_1 + u_3v_3)w_2 \\ (u_1w_1 + u_2w_2)v_3 - (u_1v_1 + u_2v_2)w_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (u_2w_2 + u_3w_3)v_1 - (u_2v_2 + u_3v_3)w_1 + ((u_1w_1)v_1 - (u_1v_1)w_1) \\ (u_1w_1 + u_3w_3)v_2 - (u_1v_1 + u_3v_3)w_2 + ((u_2w_2)v_2 - (u_2v_2)w_2) \\ (u_1w_1 + u_2w_2)v_3 - (u_1v_1 + u_2v_2)w_3 + ((u_3w_3)v_3 - (u_3v_3)w_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle u\,,w\rangle v_1 - \langle u\,,v\rangle w_1 \\ \langle u\,,w\rangle v_2 - \langle u\,,v\rangle w_2 \\ \langle u\,,w\rangle v_3 - \langle u\,,v\rangle w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u\,,w\rangle v_1 \\ \langle u\,,w\rangle v_2 \\ \langle u\,,w\rangle v_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \langle u\,,v\rangle w_1 \\ \langle u\,,v\rangle w_2 \\ \langle u\,,v\rangle w_3 \end{pmatrix}$$

$$= \langle u\,,w\rangle v - \langle u\,,v\rangle w\,.$$

- Die Jacobiidentität:

$$\begin{aligned} &(u \times (v \times w)) + (v \times (w \times u)) + (w \times (u \times v)) \\ =\ &(\langle u\,,w\rangle v - \langle u\,,v\rangle w) + (\langle v\,,u\rangle w - \langle v\,,w\rangle u) + (\langle w\,,v\rangle u - \langle w\,,u\rangle v) \quad \text{(s. o.)} \\ =\ &\underbrace{(\langle w\,,v\rangle - \langle v\,,w\rangle)}_{=\,0} u + \underbrace{(\langle u\,,w\rangle - \langle w\,,u\rangle)}_{=\,0} v + \underbrace{(\langle v\,,u\rangle - \langle u\,,v\rangle)}_{=\,0} w = 0\,. \end{aligned}$$

- Die Lagrangeidentität: Mit der Formel für das Spatprodukt gilt:

$$\langle a \times b\,, c\rangle = \langle a\,, b \times c\rangle$$

Nutzt man das, die Grassmann-Identität und die Linearität, so erhält man:

$$\begin{aligned} \langle u \times v\,, w \times x\rangle &= \langle u\,, v \times (w \times x)\rangle = \langle u\,, \langle v\,,x\rangle w - \langle v\,,w\rangle x\rangle \\ &= \langle u\,, \langle v\,,x\rangle w\rangle - \langle u\,, \langle v\,,w\rangle x\rangle = \langle v\,,x\rangle\langle u\,,w\rangle - \langle v\,,w\rangle\langle u\,,x\rangle\,. \end{aligned}$$

10. folgt direkt aus der Definition, da $\langle x\,, a \times b\rangle = \det(x, a, b)$ ist:

$$[a, b, c] = \langle a \times b\,, c\rangle = \langle c\,, a \times b\rangle = \det(c, a, b) = -\det(a, c, b) = \det(a, b, c)\,.$$

11. Zur Begründung beachte man die Abbildung von Seite 143. Es gilt:

$$|[a, b, c]| = |\langle a \times b\,, c\rangle| = \underbrace{\|a \times b\|}_{=F} \cdot \underbrace{\|c\| \, \cos\measuredangle(a \times b, c)}_{=h} = F \cdot h\,.$$

12. Unter Verwendung der Aussage in 1. erhalten wir:

$$\{a, b, c\} \text{ linear abhängig } \Leftrightarrow \det(a, b, c) = 0 \Leftrightarrow [a, b, c] = 0\,.$$

13. Nach Definition ist a, b, c Rechtssystem, wenn $\det(a, b, c) > 0$. Die Behauptung folgt mit 1.

17.2 (a) Der Vektorraum W ist eindimensional, der Vektorraum $\mathbb{R}[x]_2$ dreidimensional. Das orthogonale Komplement $W^{\perp}$ ist damit zweidimensional. Gesucht sind damit zwei linear unabhängige Vektoren aus $\mathbb{R}[x]_2$, die beide senkrecht auf $1+x^2$ stehen. Um solche Vektoren anzugeben, überlegen wir uns erst mal, welche Bedingungen das Senkrechtstehen eines allgemeinen Polynoms $p(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_2$ auf $1 + x^2$ liefert:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle p\,, 1+x^2\rangle = \langle ax^2+bx+c\,, 1+x^2\rangle \\
&= \int_0^1 (ax^2+bx+c)(1+x^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 ax^4+bx^3+(a+c)x^2+bx+c\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a}{5}x^5 + \frac{b}{4}x^4 + \frac{a+c}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx\Big|_0^1 = \frac{a}{5}+\frac{b}{4}+\frac{a+c}{3}+\frac{b}{2}+c \\
&= \frac{8}{15}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{3}c\,.
\end{aligned}$$

Das besagt: Für jede Wahl dreier Zahlen a, b, c mit $\frac{8}{15}a + \frac{3}{4}b + \frac{4}{3}c = 0$ gilt $p(x) = ax^2 + bx + c \perp 1 + x^2$. Wir wählen nun besonders günstige Zahlen, nämlich

$$a = 15\,,\ b = 0\,,\ c = -6 \ \text{ bzw. } \ a = 0\,,\ b = 16\,,\ c = -9\,.$$

Damit sind $p_1(x) = 15x^2 - 6$ und $p_2(x) = 16x - 9$ orthogonal zu $q = 1 + x^2$ und aus Gradgründen auch linear unabhängig, d. h. $W^{\perp} = \langle p_1(x), p_2(x)\rangle$.

(b) Wir wenden das Rezept zum Gram-Schmidt'schen Orthonormierungsverfahren an:

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{p_1}{||p_1||} = p_1, \text{ da } ||p_1||^2 = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1\,. \\
q_2' &= p_2 - \langle q_1\,, p_2\rangle q_1 = x - \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2} \text{ mit } ||q_2'|| = \sqrt{\int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{12}}\,. \\
q_2 &= \frac{q_2'}{||q_2'||} = \frac{1}{\sqrt{12}}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2x-1)\,. \\
q_3' &= x^2 - \langle 1\,, x^2\rangle \cdot 1 - \langle \sqrt{3}(2x-1)\,, x^2\rangle \cdot \sqrt{3}(2x-1) \\
&= x^2 - \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - (6x-3)\int_0^1 2x^3 - x^2\,\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{3} - (6x-3)\frac{1}{6} = x^2 - x + \frac{1}{6}\,. \\
q_3 &= \frac{q_3'}{||q_3'||} = \frac{1}{\sqrt{180}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\,.
\end{aligned}$$

Es ist also $\{1, \sqrt{3}(2x-1), \sqrt{5}(6x^2-6x+1)\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[x]_2$.

17.3 (a) Wir benötigen das Skalarprodukt von p mit q und die Längen von p und q:

$$\langle p\,, q\rangle = -11\,,\ \|p\| = 5\,,\ \|q\| = 3 \ \Rightarrow\ \measuredangle(p,q) = \arccos\left(\frac{-11}{15}\right)\,.$$

(b) Einen zu p und q senkrechten Vektor erhält man durch das Vektorprodukt

$$n' = p \times q = \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot(-2) & - & 4\cdot 2\\ 4\cdot(-1) & - & 3\cdot(-2)\\ 3\cdot 2 & - & 0\cdot(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\2\\6\end{pmatrix}.$$

Da $\|n'\| = \sqrt{(-8)^2+2^2+6^2} = \sqrt{104}$ ist, ist $n = \frac{n'}{\|n'\|} = \frac{1}{\sqrt{104}}\begin{pmatrix}-8\\2\\6\end{pmatrix}$ geeignet.

(c) Wir berechnen die Länge von s in Abhängigkeit von λ:

$$\begin{aligned}||s||_2^2 &= ||p+q+\lambda n||_2^2 = \langle p+q+\lambda n\,, p+q+\lambda n\rangle\\ &= \langle p\,,p\rangle + 2\langle p\,,q\rangle + 2\lambda\langle p\,,n\rangle + \langle q\,,q\rangle + 2\lambda\langle q\,,n\rangle + \lambda^2\langle n\,,n\rangle\\ &= ||p||_2^2 + 2\langle p\,,q\rangle + ||q||_2^2 + \lambda^2||n||_2^2 \text{ (da } n \text{ senkrecht auf } p \text{ und } q \text{ steht)}\\ &= 25 - 22 + 9 + \lambda^2 \text{ (nach Teil (a) und weil } n \text{ normiert ist)}\\ &= 12 + \lambda^2\,.\end{aligned}$$

Es gilt also $||s||_2 = \sqrt{13} \Leftrightarrow ||s||_2^2 = 13 \Leftrightarrow 12+\lambda^2 = 13 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$. Es taugt etwa $\lambda = 1$.

(d) Für die Fläche F des Parallelogramms gilt: $F = ||p\times q||_2 = ||n'||_2 = \sqrt{104}$.

(e) Es gilt: $V = |\langle p\times q\,, n\rangle| = |\langle n'\,, n\rangle| = \left|\langle \sqrt{104}\cdot n\,, n\rangle\right| = \sqrt{104}\cdot|\langle n\,,n\rangle| = \sqrt{104}$.

17.4 (a) Wir schreiben die Vektoren $v_1,\dots,v_4$ spaltenweise in eine Matrix A. W ist dann der Spaltenraum von A bzw. der Zeilenraum von $B = A^\top$. Um eine Basis davon zu bestimmen, bringen wir B mithilfe elementarer Zeilenoperationen auf Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\\1&1&2&2\\0&1&-1&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Es ist $\dim(W) = 3$ und die $\{(1,0,1,0)^\top, (0,1,0,1)^\top, (0,0,1,1)^\top\}$ eine Basis von W.

(b) Wir nummerieren nun die Basisvektoren, die wir in Teil (a) berechnet haben, mit b_1, b_2, b_3 durch und wenden das Gram-Schmidtverfahren auf diese Basis an:

$$w_1 = \frac{b_1}{||b_1||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad w_2' = b_2 - \langle w_1\,, b_2\rangle w_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_3' = b_3 - \langle w_1\,, b_3\rangle w_1 - \langle w_2\,, b_3\rangle w_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ mit } ||w_3'|| = 1 \Rightarrow w_3 = w_3'\,.$$

Es ist die Menge $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ eine Orthonormalbasis von W.

17.5 (a)

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(v_1, v_2, v_3) &= \left|\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}\right| = \left|1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right|\\ &= |-3 + 2\cdot(-11)| = 25\,.\end{aligned}$$

Alternativ: $\operatorname{vol}(v_1, v_2, v_3) = \langle v_1 \times v_2\,, v_3\rangle$.

(b)

$$\begin{aligned}\operatorname{vol}(w_1, w_2, w_3) &= \left|\det\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}\right| = \left|1\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{pmatrix}\right|\\ &= |-3 + 2\cdot(-11)| = 25\,.\end{aligned}$$

(c) Wie man sieht, sind die Volumen in den Aufgabenteilen (a) und (b) gleich. Das ist aber klar, denn die Matrix in (b) ist gerade die Transponierte der Matrix in (a) und bekanntlich gilt $\det(A) = \det(A^\top)$ für alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \in \mathbb{N}$.

17.6 (a) $F = ||u \times v|| = ||(-6, 16, -7)^\top|| = \sqrt{341} \approx 18,466$.

(b) Das Dreieck wird durch die Vektoren

$$u = (2, 3, 5)^\top - (1, 0, -1)^\top = (1, 3, 6)^\top \text{ und } v = (4, 2, 1)^\top - (1, 0, -1)^\top = (3, 2, 2)^\top$$

aufgespannt. Seine Fläche D berechnet sich also als $D = F/2 \approx 9,233$.

(c) $V = |\langle u \times v\,, w\rangle| = |(-6)\cdot(-2) + 16\cdot 8 + (-7)\cdot 7| = 91$.

17.7 Wir wenden unser Rezept zum Gram-Schmidt'schen Orthonormierungsverfahren an:

$$\left\|\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\|^2 = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; b_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_2' = \begin{pmatrix}-1\\3\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\8\\-4\\-4\end{pmatrix} \text{ mit } ||b_2'||^2 = \frac{28}{3} \;\Rightarrow\; b_2 = \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$b_3' = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\-2\end{pmatrix} \;\Rightarrow\; b_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}\cdot 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Es ist dann $\{b_1, b_2, b_3\}$ eine Orthonormalbasis von U.

17.8 (a) Wir wenden das Gram-Schmidtverfahren auf die Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ an:

$$||1||^2 = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}x = x \Big|_{-1}^{1} = 1 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \,.$$

$$\langle 1 \,, x \rangle = \int_{-1}^{1} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{1} = 0 \;\Rightarrow\; b_2' = x - \frac{1}{2}\langle 1 \,, x\rangle \cdot 1 = x \;\Rightarrow\; b_2 = \frac{x}{||x||} = \sqrt{\frac{3}{2}} x \,.$$

$$b_3' = x^2 - \frac{\langle 1 \,, x^2 \rangle}{2} 1 - \frac{2\langle x \,, x^2\rangle}{3} x = x^2 - \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; ||b_3'|| = \sqrt{\frac{8}{45}} \;\Rightarrow\; b_3 = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \,.$$

$$b_4' = x^3 - \frac{3}{5} x \text{ mit } ||b_4'|| = \sqrt{\frac{8}{175}} \;\Rightarrow\; b_4 = \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right) \,.$$

Es ist also $\left\{ \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right), \sqrt{\frac{175}{8}} \left(x^3 - \frac{3}{5} x \right) \right\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]_3$.

(b)

$$\begin{aligned} d(f,g)^2 &= ||f - g||^2 = \langle x + 1 - x^2 + 1 \,, x + 1 - x^2 + 1 \rangle = \langle x^2 - x - 2 \,, x^2 - x - 2 \rangle \\ &= \int_{-1}^{1} \left(x^2 - x - 2 \right)^2 \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 - x^3 + 2x^2 + 4x \Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - 1 + 2 + 4 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + 1 + 2 - 4 \right) = \frac{2}{5} - 2 + 8 = {}^{32}\!/_{5} \,. \end{aligned}$$

Der Abstand von f und g ist also $d(f,g) = \sqrt{32/5}$.

18 Das lineare Ausgleichsproblem

18.1 Aufgaben

18.1 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times r}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Begründen Sie, warum die Lösungsmengen der Minimierungsaufgabe $\|b - A\,x\| = \min$ und der Normalgleichung $A^\top Ax = A^\top b$ gleich sind. Zeigen Sie auch, dass die Lösungsmenge genau dann einelementig ist, wenn der Rang von A gleich r ist. Beachten Sie die Box auf Seite 150 (Rezeptebuch).

18.2 Im $\mathbb{R}^4$ sei der Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben als

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $v = (1, 2, -2, -1)^\top$ auf den Untervektorraum U. Geben Sie eine Zerlegung von $v = u + u^\perp$ mit $u \in U$ und $u \in U^\perp$ an und berechnen Sie den Abstand von v zu U.

18.3 Es sei $U = \langle b = (2, 1)^\top \rangle$ und $v = (6, 2)^\top$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion von v auf den Untervektorraum U. Bestimmen Sie daraus eine orthogonale Zerlegung $v = u + u^\perp$ mit $u \in U$ und $u^\perp \in U^\perp$. Bestätigen Sie, dass es sich hierbei um die orthogonale Zerlegung von v längs b handelt.

18.4 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der von den orthonormalen Vektoren

$$b_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)^\top\,,\ b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^\top$$

aufgespannte Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die orthogonale Projektion des Punktes $v = (-1, 2, -3)^\top$ auf U und bestimmen Sie den Abstand von v zu U.

18.5 Schreiben Sie ein Programm, das bei Eingabe von n Zeitpunkten $t = (t_1, \ldots, t_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ und n Messwerten $b = (y_1, \ldots, y_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ die Ausgleichsgerade $f(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$ und einen Plot mit der Punktwolke $(t_1, y_1), \ldots, (t_n, y_n)$ und dem Graphen der Ausgleichsgeraden f ausgibt.

Testen Sie Ihr Programm mit `t=(0:0.1:10)'; b=t+rand(101,1).*sign(randn(101,1));`

18.6 **Luftwiderstand:** Um den c_w**–Wert** eines Autos zu bestimmen, lässt man es mit einer Startgeschwindigkeit v im Leerlauf ausrollen und misst dabei die Verzögerung a zu einigen Geschwindigkeiten v. Bei einem Versuch haben sich folgende Werte ergeben:

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_18,

$v\,[\mathrm{m/s}]$	10	20	30
$a\,[\mathrm{m/s^2}]$	0.1225	0.1625	0.2225

.

Theoretisch erhält man die Verzögerung (negative Beschleunigung) gemäß

$$a(v) = r + \frac{\varrho A c_w}{2m} v^2,$$

wobei der Parameter r durch die geschwindigkeitsunabhängige Rollreibung und der hintere Term durch die Luftreibung entstehen: A ist die Angriffsfläche, ϱ die Dichte der Luft, m die Masse des Autos. Es gelte hier $A = 1\,\mathrm{m}^2$, $\varrho = 1.29\,\mathrm{kg/m}^3$ und $m = 1290\,\mathrm{kg}$. Schätzen Sie mit **linearer Ausgleichsrechnung** r und c_w.

18.7 (a) Zu den Messwerten

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	1	0	1	2

soll eine Gerade der Form $y(x) = \alpha + \beta x$ so gelegt werden, dass die Abweichung

$$\sum_{i=1}^{4} (y(x_i) - y_i)^2$$

minimal wird. Bestimmen Sie die optimalen Parameter α und β unter Verwendung der Normalgleichung.

(b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|b - Ax\| = \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.0001 \\ 1 & 1.0001 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0.0001 \\ 4.0001 \end{pmatrix}.$$

18.8 Gezeitenprognose: Messungen an einer Küste ergeben die Tabelle

t	0	2	4	6	8	10
h	1.0	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8

für den Wasserstand h (Meter) zur Tageszeit t (Stunden). Schätzen Sie unter der *natürlichen* Annahme, dass $h(t)$ durch eine harmonische Schwingung

$$h(t) = x_1 + x_2 \cos \frac{\pi}{6} t + x_3 \sin \frac{\pi}{6} t$$

beschrieben wird, mittels linearer Ausgleichsrechnung ab, wie groß $h_{\max}$ und $h_{\min}$ sind.

18.9 Man bestimme die Ausgleichsgerade zu den 5 Messpunkten:

t_i	1	2	3	4	5
y_i	5.0	6.5	9.5	11.5	12.5

Fertigen Sie eine Zeichnung an.

18.2 Lösungen

18.1 Es sei $V = \mathbb{R}^n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ und $U = \{A\,x \,|\, x \in \mathbb{R}^r\} = \langle b_1, \ldots, b_r\rangle \subseteq V$ mit den Spalten $b_1, \ldots, b_r$ von A.

Ein Element $A\,x \in \mathbb{R}^n$ mit $x \in \mathbb{R}^r$ ist genau dann eine Lösung von $\|v - A\,x\| = \min$, wenn $v - A\,x \perp U$, d. h., $A\,x$ ist die senkrechte Projektion von v auf U. Nun gilt:

$$\begin{aligned} v - A\,x \perp U \;&\Leftrightarrow\; v - A\,x \perp b_i \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, r \\ &\Leftrightarrow\; \langle b_i\,, v - A\,x\rangle = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, r \\ &\Leftrightarrow\; b_i^\top (v - A\,x) = 0 \qquad \text{für alle } i = 1, \ldots, r \\ &\Leftrightarrow\; A^\top (v - A\,x) = 0 \;\Leftrightarrow\; A^\top A\,x = A^\top v\,. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Lösungsmengen des linearen Ausgleichsproblem und der Normalgleichung übereinstimmen. Es bleibt zu zeigen, dass die Lösungsmenge genau dann einelementig ist, wenn A den Rang r hat. Das begründen wir, indem wir zeigen, dass $A^\top A$ genau dann invertierbar ist, wenn A den Rang r hat. Es gilt:

$$\begin{aligned} A^\top A \text{ ist invertierbar} \;&\Leftrightarrow\; A^\top A\,w = 0 \text{ nur für } w = 0 \\ &\Leftrightarrow\; w\,A^\top A\,w = 0 \text{ nur für } w = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \langle A\,w\,, A\,w\rangle = 0 \text{ nur für } w = 0 \\ &\Leftrightarrow\; A\,w = 0 \text{ nur für } w = 0 \\ &\Leftrightarrow\; A \text{ hat Rang } r. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

18.2 Da die drei angegeben Vektoren linear abhängig sind, bilden die ersten beiden eine Basis von U. Wir wenden unser Rezept an und überlassen die Rechenarbeit MATLAB:

```
>> format rat
>> A=[1 0;-1 2 ;0 -2 ; 2 1]; v=[1;2;-2;-1];
>> x=A'*A\A'*v
x =
```

```
      -1/2
       7/9
>> u=x(1)*A(:,1)+x(2)*A(:,2)
u =
      -1/2
      37/18
     -14/9
      -2/9
>> up=v-u
up =
       3/2
      -1/18
      -4/9
      -7/9
>> d=norm(up)
d =
     881/504
```

18.3 Da $\dim(U) = 1$ ist $\{b\}$ eine Basis von U. Wir setzen $A = (b) \in \mathbb{R}^{2\times 1}$. Die orthogonale Projektion u von v auf U ist demnach $u = \lambda b$ mit $A^\top A\lambda = A^\top v$. Wegen $A^\top A = 5$ und $A^\top v = 14$ erhalten wir $\lambda = 14/5$, d. h.

$$u = \tfrac{14}{5}\, b = \tfrac{14}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und damit} \quad u^\perp = v - u = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} - \tfrac{14}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die durchgeführten Rechnungen sind genau diejenigen, die zur orthogonalen Zerlegung von v längs b führen.

18.4 Wir bestimmen die Lösung mit MATLAB:

```
>> A=[1/sqrt(2) 1/sqrt(3) ; 1/sqrt(2) -1/sqrt(3) ; 0 1/sqrt(3) ]
A =
     985/1393        780/1351
     985/1393       -780/1351
       0             780/1351
>> v=[-1;2;-3]
v =
      -1
       2
      -3
>> x=A'*A\A'*v
x =
```

```
     985/1393
   -1351/390
>> u=x(1)*A(:,1)+x(2)*A(:,2)
u =
      -3/2
       5/2
      -2
>> up=v-u
up =
       1/2
      -1/2
      -1
>> norm(up)
ans =
    1079/881
```

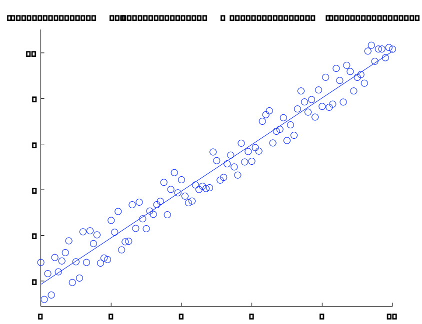
18.5 Der folgende Code erfüllt alle Wünsche:

```
function [ f ] = ausgleichsgerade( t,b )
syms x;
n=length(t); A=[ones(n,1), t]; y=A\b; f=y(1)+y(2)*x;
hold on
plot(t,b,'o'); h=ezplot(f, [min(t),max(t)]);
set(h, 'Color', 'm')
hold off
end
```

Wir erhalten mit der Eingabe `t=(0:0.1:10)';b=t+rand(101,1).* sign(randn(101,1));` die Funktion

$$f = (4601567270240301*x)/4503599627370496 - 2707783229339561/18014398509481984$$

und den Plot



18.6 Hier wollen wir speziell die Verzögerung $a(v) = r + \frac{\varrho A c_w}{2m} v^2 = x_1 + x_2 v^2$ anpassen, wobei wir aus der Datentabelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & v_1^2 \\ 1 & v_2^2 \\ 1 & v_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 100 \\ 1 & 400 \\ 1 & 900 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1225 \\ 0.1625 \\ 0.2225 \end{pmatrix}$$

ablesen; die zugehörige Normalgleichung ist daher

$$A^\top A x = \begin{pmatrix} 3 & 1400 \\ 1400 & 980000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5075 \\ 277.5 \end{pmatrix} = A^\top b\,.$$

Wegen $A^\top A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ können wir schnell das Inverse der Matrix berechnen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{980000} \begin{pmatrix} 980000 & -1400 \\ -1400 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5075 \\ 277.5 \end{pmatrix} = \ldots \approx \begin{pmatrix} 0.1110714 \\ 0.0001245 \end{pmatrix}.$$

Somit schätzen wir $r = x_1 \approx 0.111$ und $c_w = \frac{2m}{\varrho A} x_2 = 2000 x_2 \approx 0.249$ – beachten Sie, dass r die Einheit m/s^2 trägt, während c_w schlicht einheitsfrei ist.

18.7 (a) Wir verwenden unser Rezept:

(1) Setze $b = (1, 0, 1, 2)^\top$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(2) Wir lösen die Normalengleichung $A^\top A\, x = A^\top b$, wobei $A^\top A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$:

$$x = (A^\top A)^{-1} A^\top b = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}.$$

(3) Die gesuchte Ausgleichsgerage lautet damit $y = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}\, x$.

(b) Mit $\delta = 0.0001$ gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta \\ 1 & 1+\delta \end{pmatrix},\ b = (2, \delta, 4+\delta)^\top,\ A^\top A = \begin{pmatrix} 3 & 3+2\delta \\ 3+2\delta & 3+4\delta+2\delta^2 \end{pmatrix}.$$

Für die Lösung ergibt sich

$$\begin{aligned} x = (A^\top A)^{-1} A^\top b &= \begin{pmatrix} 3 & 3+2\delta \\ 3+2\delta & 3+4\delta+2\delta^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \\ 4+\delta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\delta^2} \begin{pmatrix} 3+4\delta+2\delta^2 & -3-2\delta \\ -3-2\delta & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\delta & 1+\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \\ 4+\delta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\delta^2} \begin{pmatrix} 2\delta+2\delta^2 & -\delta & -\delta \\ -2\delta & \delta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \delta \\ 4+\delta \end{pmatrix} = \frac{1}{2\delta^2} \begin{pmatrix} 2\delta^2 \\ 2\delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

18.8 Die *Modellschwingung* $h(t) = x_1 + x_2 \cos \frac{\pi}{6}t + x_3 \sin \frac{\pi}{6}t$ ist hier bestmöglich anzupassen. Dazu lesen wir zunächst $A \in \mathbb{R}^{6\times 3}$ und $b \in \mathbb{R}^6$ aus der Datentabelle ab:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.6 \\ 1.4 \\ 0.6 \\ 0.2 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

Erfreulicherweise reduziert sich hierbei die Normalgleichung auf

$$A^\top Ax = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.6 \\ 0.8 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = A^\top b,$$

woraus wir $x = \left(\frac{14}{15}, \frac{4}{15}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\right) \approx (0.933, 0.267, 0.577)$ gewinnen. Für die Amplitude A der Schwingung erhält man

$$A = \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \approx 0.63596\,.$$

Somit erhalten wir bei Flut $h_{\max} = x_1 + A \approx 1.569\,\text{m}$ sowie bei Ebbe $h_{\min} = x_1 - A \approx 0.297\,\text{m}$.

18.9 Wir setzen

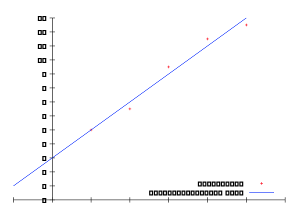
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad y = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 6.5 \\ 9.5 \\ 11.5 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

und lösen das lineare Gleichungssystem

$$A^\top Ax = A^\top y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5.0 \\ 6.5 \\ 9.5 \\ 11.5 \\ 12.5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 155 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Ausgleichsgerade hat damit die Gleichung $f(x) = 3 + 2x$.



19 Die $Q\,R$-Zerlegung einer Matrix

19.1 Aufgaben

19.1 Berechnen Sie eine QR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

19.2 Gegeben ist das lineare Ausgleichsproblem, das durch

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert wird.

(a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A.

(b) Geben Sie die Lösung x des Ausgleichproblems an. Wie groß ist die Norm des Residuums $\|b - Ax\|$?

19.3 Programmieren Sie die $Q\,R$-Zerlegung mittels Householdertransformationen. Testen Sie Ihr Progamm anhand der Matrix `A = U S V`, wobei `U = qr(rand(30)); V = qr(rand(30)); S= diag(2.^(-1:-1:-30));`

19.4 Begründen Sie, warum das Rezept zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems mit der $Q\,R$-Zerlegung auf Seite 167 funktioniert.

19.2 Lösungen

19.1 (1) Es gilt $s = (1, 2, 2)^\top \neq \lambda\, e_1$.

- Wir setzen $\alpha_1 = -\|s\| = -3$, da $s_1 \geq 0$.
- Wir setzen $a = s - \alpha_1\, e_1 = (4, 2, 2)^\top$.
- Mit der Householdertransformation

$$H_1 = E_3 - \frac{2}{a^\top a} a a^\top = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \text{ gilt } A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

(2) Es gilt $s = (0, -4, 3)^\top \neq \lambda\, e_2$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_19,

- Wir setzen $\alpha_2 = +\|s\| = 5$, da $s_2 < 0$.
- Wir setzen $a = s - \alpha_2\, e_2 = (0,\, -9,\, 3)^\top$.
- Mit der Householdertransformation

$$H_2 = E_3 - \frac{2}{a^\top a} a a^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \text{ gilt } A_2 = H_2 A_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -5 & 10 \\ 0 & 25 & -12 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir $A = Q\,R$ mit $Q = H_1 H_2$ und $R = A_2$, d. h.

$$Q = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -14 \\ -10 & -11 & 2 \\ -10 & 10 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -5 & 10 \\ 0 & 25 & -12 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}.$$

19.2 (a)

(1) Es gilt $s = (3,\, 4,\, 0,\, 0)^\top \neq \lambda\, e_1$.

- Wir setzen $\alpha_1 = -\|s\| = -5$, da $s_1 \geq 0$.
- Wir setzen $a = s - \alpha_1\, e_1 = (8,\, 4,\, 0,\, 0)^\top$.
- Mit der Householdertransformation

$$H_1 = E_4 - \frac{2}{a^\top a} a a^\top = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ gilt } A_1 = H_1 A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) Es gilt $s = (0,\, 0,\, 3,\, 4)^\top \neq \lambda\, e_2$.

- Wir setzen $\alpha_2 = -\|s\| = -5$, da $s_2 \geq 0$.
- Wir setzen $a = s - \alpha_2\, e_2 = (0,\, 5,\, 3,\, 4)^\top$.
- Mit der Householdertransformation

$$H_2 = E_4 - \frac{2}{a^\top a} a a^\top = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -20 \\ 0 & -15 & 16 & -12 \\ 0 & -20 & -12 & 9 \end{pmatrix} \text{ gilt } A_2 = H_2 A_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir $A = Q\,R$ mit $Q = H_1 H_2$ und $R = A_2$, d. h.

$$Q = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -15 & 0 & 12 & 16 \\ -20 & 0 & -9 & -12 \\ 0 & -15 & 16 & -12 \\ 0 & -20 & -12 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Lösung des Ausgleichsproblems ergibt sich aus:

$$R_1 x = d_1 \qquad \text{mit} \qquad R_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, d_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten hieraus $x_3 = \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}$, $x_2 = \frac{1-8/5}{-5} = \frac{3}{25}$, $x_1 = \frac{-3-16/5}{-5} = \frac{31}{25}$.
Für das Residuum erhalten wir die Norm des verbleibenden Eintrags $\|d_2\| = 2$.

19.3 In MATLAB lautet die Formulierung des Algorithmus z. B. wie folgt:

```
function [Q,R,V] = householder(A)
[m,n]=size(A);
if n>m
disp('Matrix A muss mehr Zeilen als Spalten haben')
return
end
%Ausgabe initialisieren
Q=eye(size(A));V=zeros(size(A));R=zeros(n);
for k=1:n
%Spiegelungsvektor v konstruieren
a=A(k:m,k);tmp = sign(a(1))*norm(a);v=a;v(1)=v(1)+tmp;v=v/norm(v);
%Spiegelung durchfuehren
A(k:end,k:end)=A(k:end,k:end)-2*v*(v'*A(k:end,k:end));
%Spiegelvektoren merken
V(k:end,k)=v;
end
%Die Matrix Q berechnen
for k=n:-1:1
v=V(k:end,k);Q(k:end,:)=Q(k:end,:)-2*v*(v'*Q(k:end,:));
end
%R ist der rechte obere Teil von A
R=triu(A);
end
```

19.4 Es gilt mit der orthogonalen Matrix Q und der Matrix $R = \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ der vollen QR-Zerlegung und $b = \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ c \end{pmatrix}$, $\tilde{b} = (b_1, \ldots, b_n)^\top \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \|b - Ax\|^2 &= \|Q^\top(b - Ax)\|^2 = \|Q^\top b - Q^\top Ax\|^2 = \|Q^\top b - Rx\|^2 = \left\|\begin{pmatrix} \tilde{b} - \tilde{R}x \\ c \end{pmatrix}\right\|^2 \\ &= \|\tilde{b} - \tilde{R}x\|^2 + \|c\|^2 \geq \|c\|^2 . \end{aligned}$$

Wegen $\operatorname{rg}(A) = n$ gilt auch $\operatorname{rg}(\tilde{R}) = n$, das Minimum wird für $x = \tilde{R}^{-1}\tilde{b}$ angenommen.

20 Folgen

20.1 Aufgaben

20.1 Gegeben sei eine konvergente Folge (a_n) mit Limes a und eine Folge (b_n) mit $\lim_{n\to\infty}|b_n - a_n| = 0$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a\,.$$

20.2 Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen, die gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \mathbb{N}$ und $B = \{b_1 \ldots, b_k\} \subseteq \mathbb{R}$. Wir definieren die Folge (a'_n) durch

$$a'_n = \begin{cases} b_j, & \text{falls } n \in I \text{ und } n = i_j; \\ a_n, & \text{falls } n \notin I \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (a'_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

20.3 Begründen Sie die Aussagen in der Box zur bestimmten Divergenz.

20.2 Lösungen

20.1 Die Idee ist: Wir wählen einen Index N, sodass einerseits die Folgenglieder b_n mit einem Index $n > N$ *ganz nahe* an a_n liegen und die a_n wiederum *ganz nahe* an a liegen. Es liegen die b_n dann auch *ganz nahe* an a. Präziser: Es sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, gibt es einen Index $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n > N_1\,.$$

Da außerdem $\lim\limits_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$, gibt es weiterhin einen Index $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$||b_n - a_n| - 0| = |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } n > N_2\,.$$

Wählt man nun $N_\varepsilon = \max\{N_1, N_2\}$, so gilt

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > N_\varepsilon\,.$$

Mit der Dreiecksungleichung gilt nun für alle $n > N_\varepsilon$:

$$|b_n - a| = |(b_n - a_n) + (a_n - a)| \le |b_n - a_n| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

und somit die Behauptung $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_20,

20.2 Die Folge (a'_n) unterscheidet sich von der Folge (a_n) nur durch endlich viele Folgenglieder. Natürlich vermutet man daher sofort, dass der Grenzwert derselbe sein wird.

Da $|I| = k < \infty$, gibt es einen Index $N \in \mathbb{N}$ (z.B. $N = \max(I)$), so dass $a'_n = a_n$ für alle $n > N$. Es sei nun ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, gibt es einen Index N_1, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n > N_1\,.$$

Mit $N_\varepsilon = \max\{N_1, N\}$ gilt dann entsprechend

$$|a'_n - a| = |a_n - a| < \varepsilon \text{ für alle } n > N_\varepsilon,$$

also konvergiert auch die Folge (a'_n) gegen den Grenzwert a.

20.3

- $a_n \to \infty \;\Rightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 :\; \exists\, N \in \mathbb{N} :$

$$a_n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall n \geq N \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N\,.$$

- $a_n \to -\infty \;\Rightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 :\; \exists\, N \in \mathbb{N} :$

$$a_n < -\frac{1}{\varepsilon} \quad \forall\, n \geq N \;\Rightarrow\; \frac{1}{a_n} > -\varepsilon \quad \forall\, n \geq N \;\Rightarrow\; \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N\,.$$

- $a_n \to 0,\; a_n > 0,\; K \in \mathbb{R}_{>0} \;\Rightarrow\; \exists\, \varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N} :\; \frac{1}{\varepsilon} > K$ und

$$a_n < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \;\Rightarrow\; \frac{1}{a_n} > \frac{1}{\varepsilon} > K \quad \forall\, n \geq N\,.$$

- $a_n \to 0,\; a_n < 0,\; K \in \mathbb{R}_{<0} \;\Rightarrow\; \exists\, \varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N} :\; -\frac{1}{\varepsilon} < K$ und

$$-a_n < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N \;\Rightarrow\; \frac{1}{a_n} < -\frac{1}{\varepsilon} < K \quad \forall\, n \geq N\,.$$

21 Berechnung von Grenzwerten von Folgen

21.1 Aufgaben

21.1 Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$. Geben Sie Beispiele mit

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty$$

an, für die obige Aussage falsch ist. Insbesondere sollte für ein $e \in \mathbb{R}$ gelten:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n + d_n) = +\infty$, (b) $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n + d_n) = -\infty$, (c) $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n + d_n) = e$.

21.2 Untersuchen Sie, ob nachstehende Folgen konvergieren und bestimmen Sie ggf. ihre Grenzwerte:

(a) $a_n = \frac{(2n+3)(n-1)}{n^2+n-4}$,

(b) $b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$,

(c) $c_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$,

(d) $d_n = \binom{2n}{n}2^{-n}$,

(e) $e_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}$,

(f) $f_n = \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4$,

(g) $g_n = \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1}$,

(h) $h_n = \sqrt{n(n+3)} - n$,

(i) $i_n = \frac{(4n+3)(n-2)}{n^2+n-2}$,

(j) $j_n = \sqrt{n+\sqrt{2n}} - \sqrt{n-\sqrt{2n}}$,

(k) $k_n = \frac{(4n^2+3n-2)(4n-2)}{(4n-2)(2n+1)(n-4)}$,

(l) $l_n = \sqrt{n^2+2n} - n$.

21.3 Untersuchen Sie folgende rekursiv definierte Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte:

(a) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 3)$ für $n \geq 1$,

(b) $b_1 = 0$, $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ für $n \geq 1$,

(c) $c_1 = 2$, $c_{n+1} = \frac{3}{4-c_n}$ für $n \geq 1$,

(d) $d_1 = 0$, $d_{n+1} = 3d_n + 2$ für $n \geq 1$.

21.4 Zeigen Sie mit Hilfe des Einschnürungskriteriums: Für jedes $\alpha > 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$.

Hinweis: Verwenden Sie $a_n = \sqrt[n]{\alpha} - 1$ und die Bernoulli'sche Ungleichung aus Aufgabe 2.1.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_21,

21.2 Lösungen

21.1 (a) Wähle $c_n = n^2 + 1$ und $d_n = -2n$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty\,, \quad \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} (n-1)^2 = +\infty\,.$$

(b) Wähle $c_n = 2n$ und $d_n = -n^2 - 1$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim\limits_{n\to\infty} -(n-1)^2 = -\infty$.

(c) Mit $c_n = n + e$, $d_n = -n$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty\,, \quad \lim_{n\to\infty} d_n = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (c_n + d_n) = \lim_{n\to\infty} e = e\,.$$

21.2 Wir wenden die Hilfsmittel an, die wir rezeptartig formuliert haben:

(a) $a_n = \frac{(2n+3)(n-1)}{n^2+n-4} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1} = 2$.

(b) $b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}} = \frac{(n+\sqrt{n})-(n-\sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{1+1} = 1$.

(c) $c_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdots\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n\cdot n} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$.

(d) $d_n = \binom{2n}{n}2^{-n} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}2^{-n} = \frac{(2n)!}{n!n!}2^{-n} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{n(n-1)!\,n\,(n-1)!}\,\frac{1}{2}\,2^{-(n-1)} = \frac{(2(n-1))!}{(n-1)!\,(n-1)!}\,2^{-(n-1)}\,\frac{2n\,(2n-1)}{n^2\,2} = \frac{2n-1}{n}\,d_{n-1} = \left(2-\frac{1}{n}\right)d_{n-1}$.

Damit gilt $d_n \ge \left(\frac{3}{2}\right)d_{n-1} \ge \left(\frac{3}{2}\right)^2 d_{n-2} \ge \ldots \ge \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} d_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Die Folge (d_n) ist daher nicht beschränkt und somit divergent.

(e) $e_n = \sqrt{n+4} - \sqrt{n+2} = \frac{n+4-(n+2)}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}} = \frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

(f) $f_n = \left(\frac{5n}{2n+1}\right)^4 = \left(\frac{5}{2+\frac{1}{n}}\right)^4 \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{625}{16}$.

(g) $g_n = \frac{n^2-1}{n+3} - \frac{n^3+1}{n^2+1} = \frac{-3n^3-3n-4}{(n+3)(n^2+1)} = \frac{-3-\frac{3}{n^2}-\frac{4}{n^3}}{\left(1+\frac{3}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{-3}{1\cdot 1} = -3$.

(h) $h_n = \sqrt{n(n+3)} - n = \frac{n(n+3)-n^2}{\sqrt{n(n+3)}+n} = \frac{3n}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n}(n+3)}+1\right)} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}$.

(i) $i_n = \frac{(4n+3)(n-2)}{n^2+n-2} = \frac{\left(4+\frac{3}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4\cdot 1}{1} = 4$.

(j) $j_n = \sqrt{n+\sqrt{2n}}-\sqrt{n-\sqrt{2n}} = \frac{n+\sqrt{2n}-(n-\sqrt{2n})}{\sqrt{n+\sqrt{2n}}+\sqrt{n-\sqrt{2n}}} = \frac{2\sqrt{2}\,\sqrt{n}}{\sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{2}{n}}}+\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{n}}}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2\sqrt{2}}{1+1} = \sqrt{2}$.

(k) $k_n = \frac{(4n^2+3n-2)(4n-2)}{(4n-2)(2n+1)(n-4)} = \frac{4n^2+3n-2}{2n^2-7n-4} = \frac{4+\frac{3}{n}-\frac{2}{n}}{2-\frac{7}{n}-\frac{4}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$.

(l) $l_n = \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

21.3 (a) Falls (a_n) konvergiert, so lautet die Fixpunktgleichung

$$a = \tfrac{1}{4}(a-3) \Leftrightarrow a - \tfrac{1}{4}a = -\tfrac{3}{4} \Leftrightarrow \tfrac{3}{4}a = -\tfrac{3}{4} \Leftrightarrow a = -1\,.$$

Der einzig mögliche Grenzwert der Folge (a_n) ist also -1. Per vollständiger Induktion zeigen wir, dass $-1 < a_n \le 0$ gilt.

Induktionsanfang: $-1 < a_0 = 0 \le 0\,.$ ✓

Induktionsvoraussetzung: $-1 < a_n \le 0 \;\Leftrightarrow\; 0 < a_n + 1 \le 1\,.$

Induktionsschritt: $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 3) = \frac{1}{4}(a_n + 1) - 1$, also mit Induktionsvoraussetzung $-1 < a_{n+1} \le 0$.

Die Folge (a_n) ist also beschränkt und weil

$$a_{n+1} - a_n = \tfrac{1}{4}(a_n - 3) - a_n = -\tfrac{3}{4}(a_n + 1) < 0 \;\Leftrightarrow\; a_{n+1} < a_n\,,$$

ist (a_n) streng monoton fallend und damit konvergent. Es gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

(b) Aus der Fixpunktgleichung

$$b = \sqrt{2+b} \;\Rightarrow\; b^2 = 2 + b \;\Leftrightarrow\; \left(b - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{9}{4} \;\Leftrightarrow\; b = 2 \;\vee\; b = -1$$

erhält man als einzigen möglichen Grenzwert 2, denn -1 ist keine gültige Lösung der Gleichung, da $b = \sqrt{2+b} \ge 0$ sein muss. Per vollständiger Induktion lässt sich

$$0 \le b_n < b_{n+1} < 2$$

zeigen. Damit gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.

(c) Aus der Fixpunktgleichung

$$c = \frac{3}{4-c} \;\Leftrightarrow\; c^2 - 4c = -3 \;\Leftrightarrow\; (c-2)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; c = 1 \;\vee\; c = 3$$

folgt, dass die Kandidaten 1 und 3 für den Grenzwert der Folge sind. Mit Induktion zeigt man

$$1 < c_{n+1} < c_n \le 2\,.$$

Damit konvergiert die Folge (c_n) gegen den Grenzwert 1.

(d) Aus der Fixpunktgleichung

$$d = 3d + 2 \;\Leftrightarrow\; 2d = -2 \;\Leftrightarrow\; d = -1$$

folgt, dass der einzig mögliche Grenzwert -1 ist. Man sieht aber sofort, dass $d_n \ge 0$, also divergiert die Folge (d_n).

21.4 Für $n \in \mathbb{N}$ und $x > -1$ gilt nach der Bernoulli'schen Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Definiert man $a_n = \sqrt[n]{\alpha} - 1$, so folgt mit der obigen Ungleichung

$$\alpha = (a_n + 1)^n \geq 1 + na_n \;\Leftrightarrow\; a_n \leq \frac{\alpha - 1}{n},$$

da $a_n > -1$ wegen $\alpha > 0$.

1. Fall. $\alpha > 1$: Dann ist $a_n \geq 0$ und da $\frac{\alpha-1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, folgt mit dem Einschnürungskriterium $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a_n + 1 = 0 + 1 = 1\,.$$

2. Fall. $0 < \alpha < 1$: Es gilt dann $0 < \sqrt[n]{\alpha} < 1$. Es ist also $\sqrt[n]{1/\alpha} > 1$ und nach Fall 1 gilt $\sqrt[n]{1/\alpha} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Das liefert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/\sqrt[n]{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1/\alpha}} = \frac{1}{1} = 1\,.$$

Zusammen also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$ für alle $\alpha > 0$.

22 Reihen

22.1 Aufgaben

22.1 Begründen Sie, warum die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} {}^{1}\!/_{k}$ divergiert.

22.2 Begründen Sie, warum die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$, $\alpha > 0$, für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert.

22.3 Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz, bestimmen Sie falls möglich den Wert der Reihe.

(a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+k+7}{(k+2)(k-7)}$,

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$,

(c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k+4}{k^2-3k+1}$,

(d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$,

(e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$,

(f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{3k^2+5}$,

(g) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{4k}{4k^2+8}$,

(h) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots$,

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$,

(j) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k!}$,

(k) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100k}$,

(l) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^{k-1}}{(-k)^k}$,

(m) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$,

(n) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} \frac{k+1}{k^2-k-2}$,

(o) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{4^k}$,

(p) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-9k-10}{10k}\right)^k$,

(q) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$,

(r) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

22.4 (a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^k}{k+1}$ alternierend ist und dass $\lim_{k\to\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^k}{k+1} = 0$ gilt. Warum ist das Leibnizkriterium nicht anwendbar?

(b) Warum konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+2} \cdot \frac{k+1}{k+3}$?

22.5 Berechnen Sie mit MATLAB die folgenden Reihenwerte:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)(4k+1)}$.

(b) $\sum_{k=0}^{\infty} ({}^{1}\!/_{2})^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} ({}^{1}\!/_{10})^k$, $\sum_{k=m}^{\infty} ({}^{1}\!/_{10})^k$.

(c) $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$.

22.6 Schreiben Sie ein Programm, das den Wert einer nach Leibniz konvergierenden alternierenden Reihe näherungsweise berechnet.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_22,

22.2 Lösungen

22.1 Es gilt für die n-te Partialsumme:

$$s_n = \overbrace{1 + \tfrac{1}{2} + \underbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8}} + \cdots + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2^k+1} + \ldots + \tfrac{1}{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}}}^{s_{2^{k+1}}} + \cdots + \tfrac{1}{n}$$

$$\geq 1 + \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + \cdots + 2^k \cdot \tfrac{1}{2^{k+1}} \geq \tfrac{3}{2} + k\,\tfrac{1}{2} = \tfrac{k+3}{2}\,.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt damit $s_{2^{k+1}} \geq \frac{k+3}{2} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

22.2 Die Divergenz für $\alpha \leq 1$ ist klar, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergente Minorante ist. Ist $\alpha > 1$, so gilt:

$$s_{2^k-1} = 1 + \left(\tfrac{1}{2^\alpha} + \tfrac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\tfrac{1}{4^\alpha} + \tfrac{1}{5^\alpha} + \tfrac{1}{6^\alpha} + \tfrac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{(2^{k-1})^\alpha} + \ldots + \tfrac{1}{(2^k-1)^\alpha}\right)$$

$$\leq 1 + \tfrac{2}{2^\alpha} + \tfrac{4}{4^\alpha} + \ldots + \tfrac{2^{k-1}}{(2^{k-1})^\alpha} = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\tfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n\,.$$

Da für $\alpha > 1$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ konvergiert, konvergiert auch die allgemeine harmonische Reihe für $\alpha > 1$.

22.3

(a) Für die Summanden gilt

$$\frac{2k^2 + k + 7}{(k+2)(k-7)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1} = 2\,.$$

Sie bilden also keine Nullfolge, und damit divergiert die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium.

(b) Wir zeigen mit vollständiger Induktion über k, dass $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{1}{k^2}$ für alle $k \geq 5$ gilt:
Induktionsanfang: $k = 5$: $\frac{5!}{5^5} = \frac{24}{625} \leq \frac{25}{625} = \frac{1}{25} = \frac{1}{5^2}$ ✓
Induktionsvoraussetzung: Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\frac{k!}{k^k} \leq \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow k! \leq \frac{k^k}{k^2} = k^{k-2}$.
Induktionsschritt: $\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \leq \frac{1}{(k+1)^2} \Leftrightarrow (k+1)! \leq (k+1)^{k-1}$.
Da die Reihe $\sum \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch die betrachtete Reihe nach dem Majorantenkriterium.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n(n+4) = n^2 + 4n \geq n^2 \geq n^2 - 3n + 1,$$

da $-3n + 1 \leq -2$. Für $n \geq 3$ ist der Ausdruck außerdem positiv. Es folgt also für alle $n \geq 3$:

$$\frac{n(n+4)}{n^2 - 3n + 1} \geq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1} \geq \frac{1}{n}\,.$$

Es folgt daher $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n} \leq \sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+4}{n^2-3n+1}$ und da die harmonische Reihe gegen ∞ divergiert, folgt mit dem Minorantenkriterium die Divergenz der gegebenen Reihe. Die ersten zwei Folgeglieder sind dabei für die Konvergenz unerheblich.

(d) Durch Umformen erhalten wir die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n}\,\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}.$$

Es bietet sich das Leibnizkriterium an, dazu sind die Voraussetzungen zu überprüfen. Zuerst formen wir um:

$$a_n = \frac{1}{n}\,\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n}\,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Mit etwas Mühe kann man zeigen, dass die Folge $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right)$ konvergiert (hierzu begründet man die Monotonie und Beschränktheit der Folge). Wir drücken uns vor dieser Arbeit und richten lieber an den Leser die Bitte, zahlreiche Folgenglieder mit MATLAB zu berechnen und diese mit e zu vergleichen). Mit dieser Konvergenz folgt nun

$$a_n = \frac{1}{n}\,\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Daher ist (a_n) eine Nullfolge. Wir zeigen nun, dass (a_n) monoton fallend ist. Dazu betrachten wir den Quotienten

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n\cdot n^n}{(n+1)^{n-1}\cdot(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n\cdot(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n < 1\,.$$

Die Folge ist also monoton. Nun können wir mit dem Leibnizkriterium die Konvergenz der Reihe folgern.

(e) Hier haben wir es (vom *fehlenden* ersten Summanden abgesehen) mit einer geometrischen Reihe zu tun. Daher können wir nicht nur über die Konvergenz entscheiden, wir können sogar den Reihenwert bestimmen, es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = -1+\left(\frac{1}{5}\right)^0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = -1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n = -1+\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{5-1}\,.$$

(f) Wir setzen $a_n = \frac{4n}{3n^2+5}$. Damit gilt

$$a_n = \frac{4n}{3n^2+5} \geq \frac{4n}{3n^2+5n^2} = \frac{4n}{8n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

weil $n \geq 1$ ist. Wir finden somit in der harmonischen Riehe eine divergente Minorante, die Reihe divergiert somit nach dem Minorantenkriterium:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{3n^2+5} = \sum_{n=1}^{\infty}a_n \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty\,.$$

(g) Wie in der vorherigen Aufgabe gilt

$$\frac{4n}{4n^2+8} \leq \frac{4n}{4n^2 n + 8n^2} = \frac{4n}{12n^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n},$$

also $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2+8} = \infty$ nach dem Minorantenkriterium.

(h) Schreibt man die gegebene Summe als Reihe, so erhält man

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\,.$$

Die Folge $\frac{n}{n+1}$ konvergiert dabei gegen 1, ist also insbesondere keine Nullfolge und somit divergiert die Reihe nach dem Nullfolgenkriterium.

(i) Wir haben es wieder (etwas *versteckt*) mit einer geometrischen Reihe zu tun, von der wir wieder mal den Reihenwert bestimmen können:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2\left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 2\left(-1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right) = 1\,.$$

(j) Unter Kenntnis der Exponentialreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n!} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = 2 \cdot \mathrm{e}^1 = 2\,\mathrm{e}\,.$$

Kennt man die Exponentialreihe nicht, lässt sich immerhin mit dem Quotienkriterium die Konvergenz zeigen:

$$\left|\frac{\frac{2(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{2n}{n!}}\right| = \left|\frac{(2n+2)n!}{2n(n+1)!}\right| = \left|\frac{2 \cdot (n+1) \cdot n!}{2 \cdot n \cdot (n+1) \cdot n!}\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < 1 \qquad \text{für } n \geq 2\,.$$

(k) Hier spielt die divergente harmonische Reihe wieder eine Schlüsselrolle:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{100n} = \frac{1}{100} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

(l) Uups! – Hier haben wir die Teilaufgabe (d) erneut gestellt.

(m) Da $1 - \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ keine Nullfolge ist, kann $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1 - \frac{1}{n}$ nicht konvergieren.

(n) Die Reihe divergiert, denn wir erhalten nach Umformung und Indexverschiebung die harmonische Reihe:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n-2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)(n-2)} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

(o) Mit dem Quotientenkriterium erhält man

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^3}{4^{n+1}}}{\frac{n^3}{4^n}}\right| = \left|\frac{(n+1)^3 \cdot 4^n}{n^3 \cdot 4^{n+1}}\right| = \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{4}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right)^3 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1\,.$$

Die Reihe ist also konvergent.

(p) Dieses Mal benutzen wir das Wurzelkriterium und erhalten

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{-9n-10}{10n}\right)^n\right|} = \frac{9n+10}{10n} = \frac{9+\frac{10}{n}}{10} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{10} < 1\,.$$

Auch diese Reihe ist demnach konvergent.

(q) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Wurzelkriterium, denn es gilt:

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^n}\right|} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1\,.$$

(r) Die Reihe konvergiert absolut nach dem Ouotientenkriterium, denn es gilt:

$$\left|\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}\right| = \left|\frac{n^2+2n+1}{2n^2}\right| = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1\,.$$

22.4 (a) Mit der Umformung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\cdot \overbrace{(-1)^{2n}}^{=1} + 3\cdot(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{(-1)^n\cdot 2+3}{n+1}}_{=:\,a_n>0}$$

gilt $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+3\cdot(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n > 0$. Die Reihe ist also alternierend. Damit nun das Leibnizkriterium anwendbar wäre, müsste die Folge (a_n) monoton gegen 0 konvergieren. (a_n) ist tatsächlich eine Nullfolge, denn:

$$a_n = \frac{(-1)^n\cdot 2+3}{n+1} = \frac{(-1)^n\cdot\frac{2}{n}+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0}{1+0} = 0\,.$$

Für die Monotonie müsste nun noch gelten:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \le a_n &\Leftrightarrow \frac{(-1)^{n+1}\cdot 2+3}{n+2} \le \frac{(-1)^n\cdot 2+3}{n+1}\\
&\Leftrightarrow \left((-1)^{n+1}\cdot 2+3\right)(n+1) \le \left((-1)^n\cdot 2+3\right)(n+2)\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n+1 \le 5(n+2) & n \text{ gerade}\\ 5(n+1) \le n+2 & n \text{ ungerade}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 4n+9 \ge 0 & n \text{ gerade} \quad \checkmark\\ -(4n+3) \ge 0 & n \text{ ungerade} \quad \text{ein Widerspruch.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Die Folge (a_n) ist also nicht monoton.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+3}$ ist eine alternierende Reihe über der Folge $a_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+3)}$. Diese Folge ist eine Nullfolge, denn

$$a_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0+0}{(1+0)(1+0)} = 0\,.$$

Außerdem ist (a_n) monoton fallend, denn es gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} \leq a_n \Leftrightarrow \frac{n+2}{(n+3)(n+4)} \leq \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} &\Leftrightarrow (n+2)(n+2) \leq (n+1)(n+4) \\ \Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 \leq n^2 + 5n + 4 \Leftrightarrow 0 \leq n\,. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Folge ist also nach dem Leibnizkriterium konvergent.

22.5 Wir erklären zuerst alle nötigen Symbole: `syms k m;`

(a) MATLAB berechnet den Wert exakt: `a=symsum(1/((4*k-1)*(4*k+1)), 1, Inf)` liefert `a = 1/2 - pi/8`.

(b) MATLAB berechnet den Wert einer geometrischen Reihe exakt:

`a=symsum(0.5^k, 0, Inf)` liefert `a = 2`.

`a=symsum(0.1^k, 0, Inf)` liefert `a = 10/9`.

`a=symsum(0.1^k, m, Inf)` liefert `a = (10*(1/10)^m)/9`.

(c) MATLAB berechnet den Wert der alternierenden Reihe exakt:

`a=symsum((-1)^k*1/(2*k+1), 0, Inf)` liefert `a = pi/4`.

22.6 Der folgende Code taugt:

```
function [ S ] = leibniz( f, ku, tol )
%berechnet den wert der alternierenden reihe ueber ak bis tol genau
S=0;
k=ku;
while abs(f(k+1))>=tol
    S=S+f(k);
    k=k+1;
end
```

Wir erhalten zum Beispiel mit

`f=@(k) (-1)^k*1/(2*k+1);`

`[ S ] = leibniz( f, 0, 1e-5 )`

das Ergebnis `S = 0.7854`.

23 Abbildungen

23.1 Aufgaben

23.1 Geben Sie jeweils zwei Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die

(a) injektiv, aber nicht surjektiv,
(b) surjektiv, aber nicht injektiv,
(c) injektiv und surjektiv sind.

23.2 Man untersuche die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ 3n+1 & \text{, sonst} \end{cases}$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 2x + 2$,
(d) $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \frac{1}{4}(1 - (-1)^n(2n+1))$.

23.3 Man untersuche, ob die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Man gebe außerdem das Bild und (falls existent) die Umkehrfunktion von f an.

(a) $f : [-3, 1] \to [-4, 0],\ f(x) = x - 1$,
(b) $f : [-2, 3] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$.

23.4 Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \begin{cases} (-1, 1) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{1-x^2} \end{cases}$$

bijektiv ist.

23.5 Welche der folgenden Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion? Geben Sie diese ggf. an.

(a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^2}$,
(b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_23,

23.2 Lösungen

23.1 (a) Die Funktionen $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^2$ und $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2\,n$ sind beide injektiv, aber nicht surjektiv. Die Injektivität:

$$f_1(n) = f_1(m) \;\Rightarrow\; n^2 = m^2 \;\Rightarrow\; n = m\,.$$

$$f_2(n) = f_2(m) \;\Rightarrow\; 2\,n = 2\,m \;\Rightarrow\; n = m\,.$$

Und wegen $3 \notin f_1(\mathbb{N}),\ f_2(\mathbb{N})$ sind beide Abbildungen nicht surjektiv.

(b) Die Funktionen $f_1,\ f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$f_1(n) = \begin{cases} 1\,, & \text{falls } n = 1\,, \\ n-1\,, & \text{sonst}\,. \end{cases} \quad \text{und} \quad f_2(n) = \begin{cases} 5-n\,, & \text{falls } n \in \{1,\,2,\,3,\,4\}\,, \\ n-4\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

sind surjektiv, aber nicht injektiv: $f_1(1) = 1$, und für jedes $n \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt $f_1(n+1) = n$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f_2(n+4) = n$. Also sind f_1 und f_2 surjektiv. Wegen $f_1(1) = f_1(2)$ und $f_2(4) = f_2(5)$ sind beide Abbildungen nicht injektiv.

(c) Die Funktionen

$$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ n \mapsto n \quad \text{und} \quad f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ n \mapsto \begin{cases} n+1\,, & \text{falls } n \text{ ungerade}\,, \\ n-1\,, & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

sind bijektiv. Bei der Abbildung f_1 ist dies klar. Nun zu f_2: Es sei $f_2(n_1) = f_2(n_2)$. Sind n_1 und n_2 beide gerade oder beide ungerade, so folgt hieraus $n_1 \pm 1 = n_2 \pm 1$. Folglich gilt $n_1 = n_2$.

Der Fall, dass n_1 gerade und n_2 ungerade bzw. n_1 ungerade und n_2 gerade sind, ist nicht möglich, da sonst $n_1 + 1 = n_2 - 1$ bzw. $n_1 - 1 = n_2 + 1$, d. h. $n_1 + 2 = n_2$ bzw. $n_1 = n_2 + 2$ gelten würde (n_1 und n_2 wären beide gerade oder ungerade).

Somit ist f_2 injektiv. Die Abbildung f_2 ist auch surjektiv: Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ist n gerade, so gilt $f_2(n+1) = n$, und ist n ungerade, so gilt $f_2(n-1) = n$.

23.2 (a) Die Abbildung f ist surjektiv, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f(2n) = \frac{2n}{2} = n$. Wegen $f(1) = 4 = f(8)$ ist f nicht injektiv und somit auch nicht bijektiv.

(b) Diese Abbildung f ist surjektiv, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f((x,0)) = x$. Wegen $f((0,0)) = 0 = f((0,1))$ ist f nicht injektiv und somit auch nicht bijektiv.

(c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1 \geq 1.$$

Also ist $0 \notin f(\mathbb{R})$ und somit f nicht surjektiv. Die Abbildung f ist auch nicht injektiv, da z. B. $f(0) = 2 = f(-2)$ gilt. Also ist f erst recht nicht bijektiv.

(d) Diese Abbildung f ist bijektiv. Wir erhalten für $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3), \ldots$:

$$0\,,\ 1\,,\ -1\,,\ 2\,,\ -2\,,\ 3\,,\ -3\,,\ 4\,,\ -4\,,\ 5\,,\ -5\,,\ \ldots$$

Scheinbar wird jede ganze Zahl von der Folge genau einmal getroffen. Das ist natürlich noch keine Begründung für die Bijektivität von f. Hier nun eine strenge Begründung:

Es gilt $f(0) = 0$. Für alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ gilt: $f(2n-1) = n$ und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ gilt: $f(-2n) = n$. Also ist f surjektiv. Die Abbildung f ist auch bijektiv, denn aus $f(n) = f(m)$ folgt zunächst $(-1)^n\,(2n+1) = (-1)^m\,(2m+1)$. Aus Vorzeichengründen folgt weiter, dass n und m beide gerade oder beide ungerade sind. Daraus wiederum folgt $2n+1 = 2m+1$ und somit $n = m$. Also ist f auch injektiv und damit bijektiv.

23.3 (a) Die Abbildung ist injektiv, surjektiv und damit bijektiv. Das Bild ist $[-4, 0]$ und die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : [-4, 0] \to [-3, 1],\ x \mapsto x + 1$ (beachte das Rezept).

(b) Die Abbildung ist injektiv, nicht surjektiv und damit nicht bijektiv. Das Bild ist $[-4, 11]$, eine Umkehrfunktion existiert nicht.

(c) Die Abbildung ist injektiv, surjektiv und damit bijektiv (der Graph ist eine Gerade). Das Bild ist $\mathbb{R}$ und die Umkehrfunktion ist $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x-2}{3}$ (beachte das Rezept).

23.4 Die Abbildung f ist injektiv: Aus $f(x) = f(y)$ mit $x, y \in (-1, 1)$ folgt:

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{y}{1-y^2} \ \Leftrightarrow\ yx^2 + (1-y^2)x - y = 0 \ \Leftrightarrow\ x = y \text{ oder } x = -\frac{1}{y}\,.$$

Wegen der Einschränkung $y \in (-1, 1)$ ist nur $x = y$ möglich. Damit ist gezeigt, dass f injektiv ist.

Die Abbildung f ist auch surjektiv: Es sei $a \in \mathbb{R}$. Im Fall $a = 0$ wähle $x = 0$. Daher dürfen wir $a \neq 0$ annehmen. Es gilt:

$$\frac{x}{1-x^2} = a \ \Leftrightarrow\ x = -\left(\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 1}\right) \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 1} - \frac{1}{2a}\,.$$

Im Fall $a > 0$ ist damit $x = \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 1} - \frac{1}{2a} \in (0, 1)$ ein Urbild von a.

Im Fall $a < 0$ ist $x = -\left(\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{1}{4a^2} + 1}\right) \in (-1, 0)$ ein Urbild von a.

23.5 (a) Es ist $f(-1) = 1 = f(1)$, also ist f nicht injektiv und besitzt daher keine Umkehrfunktion.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ gilt $x^3 < y^3$. Damit erhalten wir:

- Im Fall $x, y < 0$: $x < y \ \Rightarrow\ \frac{1}{x^3} > \frac{1}{y^3}$, sodass f auf $\mathbb{R}_{<0}$ streng monoton fallend ist.
- Im Fall $x, y > 0$: $x < y \ \Rightarrow\ \frac{1}{x^3} < \frac{1}{y^3}$, sodass f auf $\mathbb{R}_{>0}$ streng monoton steigend ist.

Da $f(x) < 0$ für $x < 0$ und $f(x) > 0$ für $x > 0$ gilt, ist die Funktion f damit injektiv. Nun sei $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig. Wähle $x = \sqrt[3]{1/y}$, es gilt dann

$$f(x) = \frac{1}{(\sqrt[3]{1/y})^3} = y\,,$$

sodass f auch surjektiv ist.

Damit ist gezeigt, dass f bijektiv ist. Die Umkehrabbildung haben wir zwar beim Nachweis der Surjektivität gleich mitbestimmt, wir leiten diese erneut her: Für $x \neq 0$ gilt:

$$y = \frac{1}{x^3} \;\Leftrightarrow\; x^3 = \frac{1}{y} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,.$$

Die Umkehrabbildung von f ist also

$$f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ mit } f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,.$$

24 Potenzreihen

24.1 Aufgaben

24.1 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{k=1}^{\infty}(k^4 - 4k^3)z^k$, (b) $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k z^{2k}$.

24.2 Bestimmen Sie den Konvergenzbereich $K(f)$ der folgenden Potenzreihen

(a) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}(x-1)^k$, (c) $f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} x^k$,

(b) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^4}{4^k} x^k$, (d) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k^2 + 2^k)x^k$.

24.3 Zeigen Sie die Identität

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

24.4 Zeigen Sie das Additionstheorem

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y\,.$$

24.2 Lösungen

24.1 (a) Mit dem Quotientenkriterium gilt:

$$\left|\frac{((n+1)^4 - 4(n+1)^3)z^{n+1}}{(n^4 - 4n^3)z^n}\right| = \left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 - \frac{4}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{1-\frac{4}{n}}\right| \cdot |z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot |z|$$

Die Reihe konvergiert also absolut, wenn $1 \cdot |z| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ ist, damit ist der Konvergenzradius 1.

(b) Wieder gilt mit dem Quotientenkriterium:

$$\left|\frac{2^{n+1} z^{2(n+1)}}{2^n z^{2n}}\right| = |2| \cdot |z^2| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 \cdot |z^2|$$

Die Reihe konvergiert also absolut, wenn $2 \cdot |z^2| < 1 \Leftrightarrow |z|^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist. Der Konvergenzradius ist also $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

24.2 Wir gehen nach dem entsprechenden Rezept vor:

(a) (1) Als Konvergenzradius erhalten wir:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{(k+1)2^{k+1}}{k2^k} = 2\frac{k+1}{k} \to R = 2\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_24,

(2) An den Randpunkten -1 und 3 gilt:

$$f(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \quad \text{Konvergenz wegen alternierender harmonischer Reihe.}$$

$$f(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{Divergenz wegen harmonischer Reihe.}$$

Damit haben wir den Konvergenzbereich $K(f) = [-1, 3)$.

(b) (1) Als Konvergenzradius erhalten wir:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{k^4 4^{k+1}}{4^k (k+1)^4} = 4\left(\frac{k}{k+1}\right)^4 \to R = 4\,.$$

(2) An den Randpunkten -4 und 4 gilt:

$$f(-4) = \sum_{k=1}^{\infty} k^4 (-1)^k \quad \text{Divergenz wegen Nullfolgenkriterium.}$$

$$f(3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^4 \quad \text{Divergenz wegen Nullfolgenkriterium.}$$

Damit haben wir den Konvergenzbereich $K(f) = (-4, 4)$.

(c) (1) Als Konvergenzradius erhalten wir:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \sqrt{\frac{(n+1)^2 - 1}{n^2 - 1}} \to R = 1\,.$$

(2) An den Randpunkten -1 und 1 gilt:

$$f(-1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} (-1)^k \quad \text{Konvergenz wegen Leibnizkriterium.}$$

$$f(1) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^2 - 1}} \quad \text{Divergenz wegen Majorantenkriterium (harmonische Reihe).}$$

Damit haben wir den Konvergenzbereich $K(f) = [-1, 1)$.

(d) (1) Als Konvergenzradius erhalten wir:

$$\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \frac{k^2 + 2^k}{(k+1)^2 + 2^{k+1}} = \frac{1 + {}^{k^2}\!/_{2^k}}{2 + {}^{(k+1)^2}\!/_{2^k}} \to R = 1/2\,.$$

(2) An den Randpunkten $-1/2$ und $1/2$ gilt:

$$f(-1/2) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(k^2/2^k + 1\right) \quad \text{Divergenz wegen Nullfolgenkriterium.}$$

$$f(1/2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(k^2/2^k + 1\right) \text{ Divergenz wegen Nullfolgenkriterium.}$$

Damit haben wir den Konvergenzbereich $K(f) = (-1/2, 1/2)$.

24.3 Es gilt:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2\right)\\ &= \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}) = 1\,.\end{aligned}$$

24.4 Es gilt:

$$\begin{aligned}&\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)\\ &= \frac{1}{4}\left((\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}) + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y})\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{x-y} + \mathrm{e}^{y-x} + \mathrm{e}^{-x-y} + \mathrm{e}^{x+y} - \mathrm{e}^{x-y} - \mathrm{e}^{y-x} + \mathrm{e}^{-x-y}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\,\mathrm{e}^{x+y} + 2\,\mathrm{e}^{-(x+y)}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{-(x+y)}\right) = \cosh(x+y)\,.\end{aligned}$$

25 Grenzwerte und Stetigkeit

25.1 Aufgaben

25.1 Begründen Sie, warum jedes Polynom von ungeradem Grad eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

25.2 Begründen Sie den Fixpunktsatz von Seite 220 (Rezeptebuch).

25.3 Berechnen Sie mit der Bisektionsmethode den Wert von $\sqrt{3}$ auf zwei Dezimalstellen genau.

25.4 Für $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|} .$$

(a) Begründen Sie, warum für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion g_n stetig ist.

(b) Begründen Sie, warum für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} g_n(x)$$

existiert, und untersuchen Sie, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

25.5 Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen definiert sind und wo sie stetig sind. Lassen sich die Funktionen stetig fortsetzen in Punkte $x \in \mathbb{R}$, die nicht zum Definitionsbereich gehören?

(a) $f(x) = \dfrac{\frac{x-2}{x^2+3x-10}}{1 - \frac{4}{x+3}}$,

(b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{3x-2} - \sqrt{11-5x}}$.

25.6 Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \beta$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0$$

eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < x < \beta$ besitzt.

25.7 Ermitteln Sie sämtliche Asymptoten der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \tfrac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 - 1} .$$

25.8 Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_25,

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x \cos x}{x \cos x - x^2 - 3x}$,

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^4-6x^3+9x^2+4x-12}$,

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x-1}$,

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$,

(e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$,

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}$ $(n, m \in \mathbb{N})$,

(g) $\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x} \sin \frac{1}{x}\right)$,

(h) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x+1}{x-1}$,

(i) $\lim_{x\to\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - x}$,

(j) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\tan^2 x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)$,

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

25.9 Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die das Bisektionsverfahren durchführt.

25.10 Bestimmen Sie jeweils auf mindestens acht korrekte Nachkommastellen genau alle reellen Nullstellen von

(a) $f(x) = \sin(x) + x^2 - 1$,

(b) $f(x) = \mathrm{e}^x - 3x^2$.

25.2 Lösungen

25.1 Ist p ein Polynom von ungeradem Grad, so gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} p(x) = \infty\,.$$

Es gibt daher $a, b \in \mathbb{R}$ mit $p(a) < 0$ und $p(b) > 0$, und weil Polynomfunktionen stetig sind, hat p nach dem Nullstellensatz eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

25.2 Wir betrachten statt f die Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - x$. Diese ist sicher stetig, und es gilt wegen $f([a, b]) \subseteq [a, b]$:

$$g(a) = f(a) - a \geq 0 \quad \text{und} \quad g(b) = f(b) - b \leq 0\,.$$

Ist $g(a) = 0$ oder $g(b) = 0$, so gilt $f(a) = a$ bzw. $f(b) = b$ und ein Fixpunkt ist gefunden. Falls nicht, so ist $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$, und nach dem Nullstellensatz existiert ein $x^* \in [a, b]$ mit $g(x^*) = 0$, d. h. $f(x^*) - x^* = 0$, also $f(x^*) = x^*$.

25.3 Wir wenden das Bisektionsverfahren auf die Funktion $p(x) = x^2 - 3$ mit dem Startintervall $[a, b] = [0, 3]$ an, da die positive Nullstellen dieses Polynoms gerade $\sqrt{3}$ ist:

a	b	m	p(m)
0.0000	3.0000	1.5000	-0.75
1.5000	3.0000	2.2500	+2.0625
1.5000	2.2500	1.8750	+0.515625
1.5000	1.8750	1.6875	-0.15234375
1.6875	1.8750	1.78125	+0.1728515625
1.6875	1.78125	1.734375	+0.008056640625
1.6875	1.734375	1.7109375	-0.07269287109375
1.7198375	1.734375	1.72265625	-0.0324554443359375
1.72265625	1.734375	1.728515625	-0.01223373412085937 5
1.728515625	1.734375	1.73144531250	-0.00209712982177734375

Also liegt die Nullstelle $\sqrt{3}$ im Intervall $[1.73144531250\ ,\ 1.734375]$. Auf zwei Nachkommastellen gerundet hat sie damit den Wert 1.73.

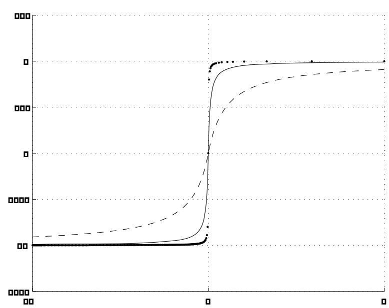
25.4 (a) Die Funktionen $x \mapsto nx$ und $x \mapsto 1 + |nx|$ sind als Verkettungen stetiger Funktionen stetig. Da $1+|nx| \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist auch $g(x)$ mit demselben Argument stetig.

(b) Für $x = 0$ gilt $g_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also gilt $g(0) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(0) = 0$. Für $x \neq 0$ gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1+|nx|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\frac{1}{n}+|x|} = \frac{x}{|x|},$$

also $g(x) = -1$ für $x < 0$ und $g(x) = 1$ für $x > 0$. Als konstante Funktion ist g stetig für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x = 0$ ist g offensichtlich nicht stetig, da $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ nicht existiert. Man versäume bei dieser Aufgabe nicht, die Funktion g_n für einige n zu plotten, mit MATLAB erhalten wir leicht die Graphen der Funktionen g_2, g_{20} und g_{200} wie folgt:

```
» hold on
» grid on
» fplot('2*x/(1+abs(2*x))', [-5,5],
'k-')
» fplot('20*x/(1+abs(20*x))', [-5,5],
'k-')
» fplot('200*x/(1+abs(200*x))', [-5,5],
'k.')
» ylim([-1.5,1.5])
```



25.5 (a) Wir formen die Funktion um

$$f(x) = \frac{\frac{x-2}{x^2+3x-10}}{1-\frac{4}{x+3}} = \frac{\frac{x-2}{(x-2)(x+5)}}{\frac{x-1}{x+3}}$$

und sehen, dass sie definiert ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5, -3, 1, 2\}$. Dort ist sie als Verkettung stetiger Funktionen auch stetig. Auflösen des Hauptnenners und Kürzen liefert

$$f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+5)}$$

mit den Definitionslücken $x = 1$ und $x = -5$. Die Funktion f ist also an den Stellen $x \in \{-3, 2\}$ stetig fortsetzbar (mit den Werten 0 bzw. $5/7$).

(b) Damit alle Wurzeln definiert sind, muss zuerst gelten $x \geq -2\ \wedge\ x \geq 1\ \wedge\ x \geq 2/3\ \wedge\ x \leq 11/5$. Außerdem muss der Nenner ungleich 0 sein, also

$$\sqrt{3x-2} - \sqrt{11-5x} \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{3x-2} \neq \sqrt{11-5x} \ \Leftrightarrow\ 3x-2 \neq 11-5x \ \Leftrightarrow\ x \neq \frac{13}{8}.$$

Insgesamt gilt also, dass $g(x)$ genau dann definiert ist, wenn $x \in [1, {}^{11}/_{5}] \setminus \{{}^{13}/_{8}\}$ ist. Die Funktion g lässt sich in ${}^{13}/_{8}$ nicht stetig fortsetzen, da ${}^{13}/_{8}$ keine Nullstelle des Zählers ist. Da die Wurzelfunktion stetig ist, ist auch die Funktion g überall dort stetig, wo sie definiert ist.

25.6 Es gilt

$$\frac{x^2+1}{x-\alpha} + \frac{x^6+1}{x-\beta} = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{(x-\beta)(x^2+1) + (x-\alpha)(x^6+1)}_{=:\,f(x)} = 0\,.$$

Das Polynom $f(x)$ ist dabei stetig. Einsetzen von α und β in f liefert nun:

- $f(\alpha) = \underbrace{(\alpha-\beta)}_{<\,0}\underbrace{(\alpha^2+1)}_{>\,0} < 0$
- $f(\beta) = \underbrace{(\beta-\alpha)}_{>\,0}\underbrace{(\beta^6+1)}_{>\,0} > 0$

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es also ein $\xi \in (\alpha, \beta)$, also $\alpha < \xi < \beta$ mit $f(\xi) = 0$.

25.7 Die Nullstellen des Nenners sind $x = 1$ und $x = -1$. Diese sind aber keine Nullstellen des Zählers. Wegen

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-1} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \tfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-1} = -\infty$$

gibt es keine horizontalen Asymptoten. Mit

$$\lim_{x\to 1^-} \tfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^+} \tfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-1} = \infty$$

erhält man eine Asymptote bei $x = 1$ und ebenso mit

$$\lim_{x\to -1^-} \tfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to -1^+} \tfrac{x^3-x^2+2x}{x^2-1} = \infty$$

eine Asymptote bei $x = -1$. Außerdem hat f wegen

$$\lim_{x\to\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \tfrac{x^2-x+2}{x^2-1} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} \tfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{x^2-x+2}{x^2-1} = 1,$$

sowie

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - 1\cdot x = \lim_{x\to\infty} \tfrac{x^3-x^2+2x-x^3+x}{x^2-1} = \tfrac{-x^2+3x}{x^2-1} = -1$$

die schräge Asymptote $y = x - 1$.

25.8 (a) Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(x)\cos(x)}{x\cos(x)-x^2-3x} = \left(\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \tfrac{\cos(x)}{\cos(x)-x-3}\right) = 1 \cdot \tfrac{1}{1+0-3} = -\tfrac{1}{2}\,.$$

(b) Die Zahl 2 ist eine Nullstelle des Zählers und des Nenners:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x - 12 &= (x-2)\,(x^3 - 7x + 6)\,, \\ x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12 &= (x-2)\,(x^3 - 4x^2 + x + 6). \end{aligned}$$

Also ist

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^4-2x^3-7x^2+20x-12}{x^4-6x^3+9x^2+4x-12} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2+x+6}\,.$$

Aber auch in dieser Darstellung ist 2 noch Nullstelle von Zähler und Nenner. Daher noch einmal:

$$x^3 - 7x + 6 = (x-2)(x^2 + 2x - 3)\,,$$
$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)(x^2 - 2x - 3)\,.$$

Damit folgt $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-7x+6}{x^3-4x^2+x+6} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x-3} = -\frac{5}{3}$.

(c) Es ist $2x - 3 = (x-1)\cdot 2 - 1$. Damit folgt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(2\frac{x-1}{x-1} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(2 - \frac{1}{x-1}\right) = 2\,.$$

(d) Es gilt: $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$.

Damit erhält man, da die Wurzelfunktion stetig ist:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\frac{1}{x}}+1}\right) = 0\cdot\frac{1}{2} = 0\,.$$

(e) Es gilt: $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2} = -\infty$, da der Nenner positiv ist und gegen null konvergiert, der Zähler aber gegen -1.

(f) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{x^n-1}{x^m-1} = \frac{(x-1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k}{(x-1)\sum_{k=0}^{m-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\sum_{k=0}^{m-1} x^k}.$$

Damit gilt für alle $m, n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x^m-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k}{\sum_{k=0}^{m-1} x^k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1^k}{\sum_{k=0}^{m-1} 1^k} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1}{\sum_{k=0}^{m-1} 1} = \frac{n\cdot 1}{m\cdot 1} = \frac{n}{m}\,.$$

(g) Weil $|\sin y| \le 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt, ist $-\sqrt{x} \le \sqrt{x}\sin\frac{1}{x} \le \sqrt{x}$. Da $\lim_{x\to 0}(-\sqrt{x}) = 0 = \lim_{x\to 0}\sqrt{x}$ gilt, ist somit

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x}\,\sin\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(h) $\frac{x^3-2x+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{x-1} = x^2 + x - 1 \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 1^2 + 1 - 1 = 1$.

(i) $2x - \sqrt{4x^2 - x} = \frac{4x^2-4x^2+x}{2x+\sqrt{4x^2-x}} = \frac{x}{x\left(2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}\right)} = \frac{1}{2+\sqrt{4-\frac{1}{x}}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$.

(j) $\tan^2(x) - \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)-1}{\cos^2(x)} = \frac{-\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = -1 \underset{x\to\pi/2}{\longrightarrow} -1$.

(k) $\frac{1-\sqrt{x+1}}{x} = \frac{1-(x+1)}{x(1+\sqrt{x+1})} = \frac{-1}{1+\sqrt{x+1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$.

25.9 Der folgende Code leistet das Gewünschte:

```
function [x, niter] = bisektion(f,a,b,tol)
f0=feval(f,a);
f1=feval(f,b);
niter=0;
if (f0==0), x=a; return; end
if (f1==0), x=b; return; end
if (f0*f1>0)
error('f hat bei a und b das gleiche Vorzeichen!');
end
while b-a > tol
    if f((a+b)/2)*f(a)<=0
        b=(a+b)/2;
    else
        a=(a+b)/2;
    end
niter=niter+1;
end
x=(a+b)/2;
```

25.10 Durch Plotten der Graphen überzeugt man sich, dass im Fall (a) genau zwei Nullstellen und im Fall (b) genau drei Nullstellen vorliegen. Auch die Grenzen a und b ersieht man aus dem Graph. Mit dem Programm aus Aufgabe 25.9 erhalten wir:

(a) Mit
`[x, niter] = bisektion(f,-2,0,1e-8)` bzw.
`[x, niter] = bisektion(f,0,1,1e-8)`
erhalten wir
`x = -1.409624006599188 ; niter =28` bzw.
`x = 0.636732649058104 ; niter = 27`.

(b) Mit
`[x, niter] = bisektion(f,-1,0,1e-8)` bzw.
`[x, niter] = bisektion(f,0,1,1e-8)` bzw.
`[x, niter] = bisektion(f,0,1,1e-8)`
erhalten wir
`x = -0.458962265402079; niter = 27` bzw.
`x = 0.910007569938898 ; niter = 27` bzw.
`x = 3.733079027384520; niter = 27`.

26 Differentiation

26.1 Aufgaben

26.1 Begründen Sie, warum eine in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig ist.

26.2 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x|x|$. Begründen Sie, warum f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar ist.

26.3 Berechnen Sie für $2 + \frac{1}{x} > 0$ die erste Ableitung von $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^x$.

26.4 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **gerade**, wenn $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. f heißt **ungerade**, wenn $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Überprüfen Sie, welche der folgenden Funktionen gerade oder ungerade sind. Geben Sie dies auch für die entsprechenden Ableitungen an:

(a) $f(x) = x^2 + \cos x$,

(b) $g(x) = x^2 \tan x$,

(c) $h(x) = x \sin x$,

(d) $k(x) = \mathrm{e}^x$.

Zeigen Sie allgemein, dass die Ableitung einer differenzierbaren geraden (ungeraden) Funktion ungerade (gerade) ist.

26.5 Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f_1(x) = 3 \arctan x + \frac{3x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}$,

(b) $f_2(x) = \ln \frac{x^2+1}{x^2-1}$,

(c) $f_3(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{\sqrt{4x+5}}$,

(d) $f_4(x) = \arccos \frac{1}{x}$,

(e) $f_5(x) = \ln(\sin x) - x \cot x$,

(f) $f_6(x) = -8(x + \frac{2}{x}) + 4 \ln(x + 3)$,

(g) $f_7(x) = \frac{\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{4x+2}}$,

(h) $f_8(x) = \ln(\sin x) - x \cos x$,

(i) $f_9(x) = x^2 \tan x$,

(j) $f_{10}(x) = \tan\left(\frac{\sin x^2 + \cos x}{\ln \frac{1}{x^2} + 2}\right)$,

(k) $f_{11}(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 7x + 1}{(2x^2-1)^2}$,

(l) $f_{12}(x) = 2x + \frac{1}{2x^2}$,

(m) $f_{13}(x) = x^2 \cos\left(2x^2 + \sin \frac{1}{x}\right)$,

(n) $f_{14}(x) = x^{\cos x}$.

26.6 Es sei $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt

$$f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right) f(x) = 0\,.$$

26.7 Schreiben Sie ein MATLAB-Skript, das die Werte in Beispiel 26.4 (Rezeptebuch) liefert.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_26,

26.2 Lösungen

26.1 Dazu müssen wir zeigen, dass $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ für $x_0 \in D$:

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)-f(x_0)\big) = \lim_{x\to x_0}\left((x-x_0)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$$
$$\overset{\substack{x-x_0=h\\ \downarrow}}{=} \lim_{h\to 0}\left(h\,\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right) = 0\cdot f'(x_0) = 0\,.$$

26.2 Wir zeigen zunächst die Differenzierbarkeit und schreiben die Funktion um als

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ,\ x \geq 0 \\ -x^2 & ,\ x < 0 \end{cases}.$$

Damit ist f offensichtlich auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$ stetig und differenzierbar, da $x \mapsto x^2$ bzw. $x \mapsto -x^2$ stetig und differenzierbar sind. Es bleibt also der Fall $x = 0$ zu untersuchen. Um die Differenzierbarkeit an der Stelle 0 zu beweisen, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

existiert. Es gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot|h|}{h} = \lim_{h\to 0}|h| = 0\,.$$

Also existiert der Grenzwert, er hat den Wert 0. Demnach ist f auch in 0 differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$. Da aus der Differenzierbarkeit die Stetigkeit folgt, ist f auch stetig in 0.

26.3 Mit der Exponentialfunktion und dem natürlichen Logarithmus gilt die Umformung

$$\left(2+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\ln\left(\left(2+\frac{1}{x}\right)^x\right)} = \mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}\,.$$

Damit lässt sich die Ableitung nach der Kettenregel bestimmen als

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}\right)' = \mathrm{e}^{x\cdot\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(1\cdot\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{2+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$= \left(2+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2x+1}\right)\,.$$

26.4

(a) f ist gerade, denn $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos(x) = f(x)$
f' ist ungerade, denn $f(-x) = 2(-x) - \sin(-x) = -2x - (-\sin(x)) = -(2x - \sin(x)) = -f(x)$.

(b) g ist ungerade denn $g(-x) = (-x)^2 \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = x^2 \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -x^2 \tan(x) = -g(x)$
g' ist gerade, denn $g(-x) = \frac{2(-x)\sin(-x)\cos(-x)+(-x)^2}{\cos^2(-x)} = \frac{2x\sin(x)\cos(x)+x^2}{\cos^2(x)} = g'(x)$.

(c) h ist gerade, denn $h(-x) = (-x)\sin(-x) = (-x)(-\sin(x)) = x\sin(x) = h(x)$
h' ist ungerade, denn $h'(-x) = \sin(-x) + (-x)\cos(-x) = -\sin(x) - x\cos(x) = -h(x)$.

(d) Wäre k gerade oder ungerade, so müsste gelten $k(-x) = k(x)$ bzw. $k(-x) = -k(x)$. Für $x = 1$ mit $k(x) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ gilt aber $k(-x) = k(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ und damit $k(-x) \neq \pm k(x)$, also ist k weder gerade noch ungerade. Da für die Ableitung gilt $k'(x) = \mathrm{e}^x$, gilt auch hier, dass k' weder gerade noch ungerade ist.

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und differenzierbar, so gilt mit der Kettenregel:

$$f(-x) = f(x) \;\Rightarrow\; (f(-x))' = f'(x) \;\Rightarrow\; f'(-x)\cdot(-1) = f'(x) \;\Rightarrow\; f'(-x) = -f'(x)\,;$$

f' ist also in diesem Fall eine ungerade Funktion. Analog beweist man die zweite Behauptung.

26.5 Wir wenden die bekannten Ableitungsregeln an, vor allem die Ketten-, Produkt- und Quotientenregel finden vielfach Anwendung:

(a)

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{3}{1+x^2} + \frac{3(x^2+1) - 3x(2x)}{(x^2+1)^2} + \frac{2(x^2+1)^2 - 2x(2(x^2+1)2x)}{(x^2+1)^4} \\
&= \frac{3(x^2+1)^2}{(x^2+1)^3} + \frac{(3x^2+3-6x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^3} + \frac{2x^2+2-8x}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{3x^4+6x^2+3+3x^4+3x^2+3x^2+3-6x^4-6x^2+2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3} \\
&= \frac{8}{(x^2+1)^3}\,.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{x^4-1} = \frac{2x(x^2-1-x^2-1)}{x^4-1} \\
&= -\frac{4x}{x^4-1} = \frac{4x}{1-x^4}\,.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
f_3'(x) &= \frac{\frac{2}{2\sqrt{2x+3}}\sqrt{4x+5} - \sqrt{2x+3}\frac{4}{2\sqrt{4x+5}}}{4x+5} = \frac{\frac{4x+5-2(2x+3)}{\sqrt{(2x+3)(4x+5)}}}{4x+5} \\
&= \frac{4x+5-4x-6}{\sqrt{(2x+3)(4x+5)^3}} = -\frac{1}{\sqrt{(2x+3)(4x+5)^3}}\,.
\end{aligned}$$

(d)

$$f_4'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(1/x))} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{\sin(\arccos(1/x))x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\cos^2(\arccos(1/x))}}$$
$$= \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,.$$

(e)

$$\begin{aligned} f_5'(x) &= \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) - \frac{(\cos(x) - x\sin(x))\sin(x) - x\cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{\cos(x)\sin(x) - \cos(x)\sin(x) + x\sin^2(x) + x\cos^2(x)}{\sin^2(x)} \\ &= \frac{x(\sin^2(x) + \cos^2(x))}{\sin^2(x)} = \frac{x}{\sin^2(x)}\,. \end{aligned}$$

(f)

$$f_6'(x) = -8 + \frac{16}{x^2} + \frac{4}{x+3} = -8 + \frac{16}{x^2} + \frac{4}{x+3}\,.$$

(g)

$$f_7'(x) = \frac{\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+3}} \cdot \sqrt{4x+2} - \frac{4}{2\sqrt{4x+2}} \cdot \sqrt{2x^2+3}}{4x+2} = \frac{4x^2+4x-6}{\sqrt{(2x^2+3)(4x+2)^3}}\,.$$

(h)

$$f_8'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - (\cos(x) - x\sin(x)) = \cot(x) - \cos(x) + x\sin(x)\,.$$

(i)

$$f_9'(x) = 2x\tan(x) + x^2\left(\frac{\cos^2(x) - (-(\sin^2(x)))}{\cos^2(x)}\right) = 2x\tan(x) + \left(\frac{x}{\cos(x)}\right)^2\,.$$

(j)

$$f_{10}'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\sin(x^2)+\cos(x)}{\ln(1/x^2)+2}\right)} \frac{\left(2x\cos(x^2) - \sin(x)\right)(\ln(1/x^2) + 2) + \frac{2}{x}(\sin(x^2) + \cos(x))}{(\ln(1/x^2) + 2)^2}\,.$$

(k)

$$\begin{aligned} f_{11}'(x) &= \frac{(6x^2 - 2x + 7)(2x^2-1)^2 - (2x^3 - x^2 + 7x + 1)(2 \cdot (2x^2-1) \cdot 4x}{(2x^2-1)^4} \\ &= \frac{12x^4 - 6x^2 - 4x^3 + 2x + 14x^2 - 7 - 16x^4 + 8x^3 - 56x^2 - 8x}{(2x^2-1)^3} \\ &= \frac{-4x^4 + 4x^3 - 48x^2 - 6x - 7}{(2x^2-1)^3}\,. \end{aligned}$$

(l)

$$f_{12}'(x) = 2 - \frac{1}{x^3}\,.$$

(m)

$$f_{13}'(x) = 2x\cos\left(2x^2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) - x^2\sin\left(2x^2 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(4x - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\right)\,.$$

(n)

$$f_{14}'(x) = \left(\mathrm{e}^{\cos(x)\ln(x)}\right)' = x^{\cos(x)}\cdot\left(-\sin(x)\ln(x) + \frac{\cos(x)}{x}\right)\,.$$

26.6 Wir berechnen die ersten beiden Ableitungen von f mit der Produktregel:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{\sqrt{x^3}} \qquad f''(x) = -\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\cos(x)}{\sqrt{x^3}} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin(x)}{\sqrt{x^5}}\,.$$

Damit ergibt sich:

$$\sqrt{x}f''(x) = -\sin(x) - \frac{\cos(x)}{x} + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sin(x)}{x^2} \qquad \frac{\sqrt{x}}{x}f'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$\sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)f(x) = \sin(x) - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin(x)}{x^2}\,.$$

Durch Addieren der Gleichungen erhält man:

$$\sqrt{x}\left(f''(x) + \frac{1}{x}f'(x) + \left(1 - \frac{1}{4x^2}\right)f(x)\right) = 0\,.$$

26.7 Das folgende Skript liefert die Zahlen:

```
f=@(x) exp(x.^2).*sin(x);
h=10.^(-1:-1:-8)';
x0=ones(8,1)-h./2;
x1=ones(8,1)+h./2;
y0=ones(8,1)-h;
y1=ones(8,1);
y2=ones(8,1)+h;
f1=(f(x1)-f(x0))./h
f2=(f(y2)-2*f(y1)+f(y0))./(h.^2)
```

27 Anwendungen der Differentialrechnung I

27.1 Aufgaben

27.1 Ein Getränkehersteller möchte bei der Produktion von Getränkedosen Kosten sparen. Eine Getränkedose soll immer ein Volumen von $V_0 = 0.4\,\mathrm{l}$ fassen und zylindrisch sein (wir nehmen in dieser Aufgabe an, dass es sich tatsächlich genau um einen Kreiszylinder handelt). Wie müssen Höhe und Radius des Zylinders gewählt werden, wenn möglichst wenig Material für die Produktion verbraucht werden soll?

27.2 Gegeben sei die Funktion $f : \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 2\,|x| + 1$.

Bestimmen Sie die Nullstellen dieser Funktion und ihr Symmetrieverhalten, berechnen Sie (wo möglich) die Ableitung, sämtliche Asymptoten, das Monotonieverhalten, lokale und globale Maxima und Minima und geben Sie an, wo die Funktion konvex bzw. konkav ist. Skizzieren Sie anschließend den Graphen der Funktion f und tragen Sie die Informationen im Graphen ein.

27.3 Zeigen Sie:

(a) $\ln(1 + x) \leq \arctan x$ für $x \in [0, 1]$,

(b) $\arctan y + \arctan(1/y) = \pi/2$ für $y > 0$.

27.4 Sie haben eine Coladose gekauft, die eine perfekte zylindrische Form besitzt. Die Masse M der Dose (ohne Inhalt) ist gleichmäßig über die ganze Dose verteilt, die Dose habe Höhe H und Volumen V. Sie möchten, dass die Dose möglichst stabil steht, der Schwerpunkt der Dose (inklusive Inhalt) soll also so tief wie möglich liegen. Wir unterstellen zur Vereinfachung, dass Cola die Dichte 1 besitzt. Wie viel Cola (Füllhöhe in Prozent der Dosenhöhe) müssen Sie trinken, damit der Schwerpunkt seinen tiefsten Stand erreicht?

27.5 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2\cos x - x$. Zeigen Sie, dass die Funktion f unendlich viele lokale Maxima und Minima besitzt, aber keine globalen Extrema.

27.6 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$,

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$,

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+3x) - 2\sin^2 x}{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$,

(d) $\lim_{x\to -1^+} (x + 1)\tan\frac{\pi x}{2}$,

(e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cosh x}{\mathrm{e}^x}$,

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$,

(g) $\lim_{x\to 1^-} \frac{\pi/2 - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}$,

(h) $\lim_{x\to 1} \sin(\pi x) \cdot \ln|1 - x|$,

(i) $\lim_{x\to 0} (1 + \arctan x)^{\frac{1}{x}}$,

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_27,

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x+\cos x}{x}$,

(k) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$,

(l) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\mathrm{e}^x-1} - \frac{1}{x}$,

(m) $\lim_{x\to 0} \cot(x)(\arcsin(x))$.

27.2 Lösungen

27.1 Wir führen die Rechnung zunächst allgemein mit einem Volumen V_0 durch. Eine zylindrische Dose mit Radius r und Höhe h hat ein Volumen von

$$V(r,h) = r^2\pi\, h,$$

bei $V_0 = V(r,h)$ muss also gelten

$$V_0 = r^2\pi h \implies h = \frac{V_0}{r^2\pi}.$$

Weiter hat die Dose eine Oberfläche, die sich aus Boden, Deckel und Mantelfläche des Zylinders zusammensetzt, insgesamt also

$$F(r,h) = 2r^2\pi + 2r\pi h.$$

Setzt man nun $h = \frac{V_0}{r^2\pi}$ in die Funktion ein, so ergibt sich

$$F(r) = 2r^2\pi + 2r\pi\frac{V_0}{r^2\pi} = 2r^2\pi + \frac{2V_0}{r}.$$

Diese Funktion gilt es nun zu minimieren. Dazu bilden wir die Ableitung

$$F'(r) = 4r\pi - \frac{2V_0}{r^2} \stackrel{!}{=} 0, \text{ mit der Nullstelle } r^* = \sqrt[3]{\frac{V_0}{2\pi}}.$$

Um zu überprüfen, ob es sich hier wirklich um ein Minimum handelt, brauchen wir die zweite Ableitung von F:

$$F''(r) = 4\pi + \frac{4V_0}{r^3}\,.$$

Damit erhalten wir $F''(r^*) = 4\pi + \frac{4V_0 2\pi}{V_0} > 0$, also ist r^* tatsächlich lokales Minimum der Funktion F. Als zugehörige Höhe ergibt sich

$$h^* = \frac{V_0}{(r^*)^2\pi} = \frac{V_0(2\pi)^{2/3}}{\pi V_0^{2/3}} = \sqrt[3]{\frac{4V_0}{\pi}}\,.$$

Optimal ist also ein Verhältnis von Höhe und Radius von $\frac{h^*}{r^*} = \sqrt[3]{8} = 2$. Für den Fall $V_0 = 0.4\,\mathrm{l} = 0.4\,\mathrm{dm}^3$ ergibt sich damit ein Radius von $r^* = \sqrt[3]{\frac{0.4}{2\pi}}\,\mathrm{dm} \approx 4\,\mathrm{cm}$ und eine Höhe von $h^* = \sqrt[3]{\frac{1.6}{\pi}}\,\mathrm{dm} \approx 8\mathrm{cm}$.

27.2 Man beachte die folgende Auflistung:

Symmetrieverhalten: Es gilt $f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = f(x)$, also ist die Funktion gerade. Der Graph ist damit achsensymmetrisch zur y-Achse.

Nullstellen: $f(x) = 0 \iff x^2 - 2|x| + 1 = 0$ Für $x > 0$ ergibt sich $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = 1$. Wegen der Symmetrie ist dann auch -1 eine Nullstelle von f. Beide liegen im Definitionsbereich, also sind ± 1 die beiden Nullstellen der Funktion.

Asymptoten: Es gibt offenbar keine senkrechten Asymptoten. Waagrechte oder schräge Asymptoten kommen wegen des eingeschränkten Definitionsbereichs nicht in Frage.

Ableitungen: Da die Betragsfunktion nicht differenzierbar ist, benötigen wir jetzt eine Fallunterscheidung. Es gilt:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & \text{für } x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Daher ist f auf $(-3/2, 0)$ und auf $(0, 3/2)$ differenzierbar (nicht jedoch in den Randpunkten und in 0!), und es gilt

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2, & \text{für } x > 0, \\ 2x + 2, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Entsprechend folgt für die zweite Ableitung:

$$f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{für } x > 0, \\ 2, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

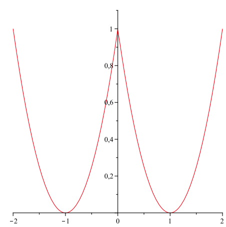
Monotonie und lokale Extrema: Wir betrachten zunächst die Intervalle, auf denen f differenzierbar ist. Für $x \in (-3/2, 0)$ gilt: $f'(x) = 2x + 2 = 0 \iff x = -1$. Die Ableitung besitzt also eine Nullstelle bei $x = -1$ im betrachteten Intervall, links davon ist sie negativ, rechts davon positiv. Aus Symmetriegründen gilt das ebenso im Intervall $(0, 3/2)$ mit der Nullstelle $x = 1$. Damit ergibt sich auch das Verhalten der Funktion an den Rändern des Definitionsbereichs und für den Punkt $x = 0$, in dem f nicht differenzierbar ist. Zusammenfassend gilt für das Monotonieverhalten und die lokalen Extrema von f:

$x = -3/2$	lokales Maximum mit Funktionswert $1/4$
$x \in (-3/2, -1)$	streng monoton fallend
$x = -1$	lokales Minimum mit Funktionswert 0
$x \in (-1, 0)$	streng monoton wachsend
$x = 0$	lokales Maximum mit Funktionswert 1
$x \in (0, 1)$	streng monoton fallend
$x = 1$	lokales Minimum mit Funktionswert 0
$x \in (1, 3/2)$	streng monoton wachsend
$x = 3/2$	lokales Maximum mit Funktionswert $1/4$

globale Extrema: Zunächst einmal stellen wir fest, dass f stetig und auf einem kompakten Intervall definiert ist, die Funktion muss also Maximum und Minimum annehmen. Aus den vorherigen Betrachtungen ergibt sich als globales Minimum die Stelle $x = -1$ und $x = 1$, jeweils mit Funktionswert 0, ein globales Maximum wird bei $x = 0$ mit Funktionswert 1 angenommen.

konkav / konvex: Da die Funktion auf den Intervallen $(-3/2, 0)$ und $(0, 3/2)$ jeweils eine konstante, positive zweite Ableitung besitzt, ist die Funktion auf jedem dieser Intervalle konvex.

Graph: Der Graph von f hat folgende Gestalt:



27.3 (a) Wir setzen $f(x) = \ln(1+x) - \arctan(x)$ für $x \in [0,1]$. Es gilt dann

$$f(0) = \ln(1) - \arctan(0) = 0 - 0 = 0$$

Wir zeigen nun, dass f monoton fällt, also $f'(x) \leq 0$ ist, denn damit folgte dann

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) - \arctan(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq \arctan(x).$$

Für die Ableitung erhalten wir

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x^2}$$

Da $x \in [0,1]$ ist $x^2 \leq x$ und damit $\frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{1+x}$, also $f'(x) \leq 0$. Das beweist die Behauptung.

(b) Wir setzen $f(y) = \arctan(y) + \arctan\left(^1/_y\right)$ für $y > 0$ und zeigen, dass f konstant ist, also $f'(y) = 0$. Es gilt:

$$f'(y) = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{y^2}} \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y^2+1} = 0$$

f ist also konstant und weil

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = 2\arctan(1) = {}^\pi/_2$$

gilt, ist die Behauptung bewiesen.

27.4 Wir bezeichnen den Füllstand der Dose mit $x \in [0, H]$. Wir können die Verteilung der Gesamtmasse der Dose dann eindimensional in Abhängigkeit von x modellieren. Der Schwerpunkt der leeren Dose liegt bei Höhe $^H/_2$, der Schwerpunkt der Cola liegt bei Höhe $^x/_2$. Die Höhe des Schwerpunkts s des Gesamtsystems ergibt sich dann als Mittel der Schwerpunkte dieser beiden Teilsysteme, gewichtet mit deren jeweiligem Anteil an der Gesamtmasse:

$$s(x) = \frac{M \cdot \frac{H}{2} + V\frac{x}{H} \cdot \frac{x}{2}}{M + V\frac{x}{H}} = \frac{MH + \frac{V}{H}x^2}{2M + 2\frac{V}{H}x} = \frac{MH^2 + Vx^2}{2(MH + Vx)} \,.$$

Um $s(x)$ zu minimieren, bilden wir zunächst die erste und zweite Ableitung:

$$\begin{aligned} s'(x) &= \frac{(2\frac{V}{H}x)(2M + 2\frac{V}{H}x) - (MH + \frac{V}{H}x^2)(2\frac{V}{H})}{4(M + \frac{V}{H}x)^2} = \frac{V(Vx^2 + 2MHx - MH^2)}{2(MH + Vx)^2} \\ s''(x) &= \frac{VH^2M(M+V)}{(MH+Vx)^3} \,. \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Nullstellen von $s'(x)$:

$$\begin{aligned} &s'(x) = 0 \\ &(2\frac{V}{H}x)(2M + 2\frac{V}{H}x) - (MH + \frac{V}{H}x^2)(2\frac{V}{H}) = 0 \\ &x(2M + 2\frac{V}{H}x) - (MH + \frac{V}{H}x^2) = 0 \\ &\frac{V}{H}x^2 + 2Mx - MH = 0 \\ &x_{1,2} = \frac{-2M \pm \sqrt{4M^2 + 4MV}}{2\frac{V}{H}} = \frac{H}{V}\left(-M \pm \sqrt{M^2 + MV}\right) \,. \end{aligned}$$

Die negative Lösung macht hier natürlich keinen Sinn, schließlich ist x die Füllhöhe, also muss im Optimum gelten

$$\tilde{x} = \frac{H}{V}\left(-M + \sqrt{M^2 + MV}\right) \,.$$

Da $s''(\tilde{x}) > 0$ ist (wegen $\tilde{x} > 0$) handelt es sich tatsächlich um ein Minimum, also die gesuchte Lösung. Um den optimalen Füllstand in Prozent zu bekommen, müssen wir diese Höhe noch durch H teilen,

$$x^* = \frac{\tilde{x}}{H} = \frac{1}{V}\left(-M + \sqrt{M^2 + MV}\right).$$

Für den optimalen Schwerpunkt $s^* = s(\tilde{x})$ bedeutet das

$$\begin{aligned} s^* =& \frac{MH + \frac{V}{H}\frac{H^2}{V^2}(M^2 + MV + M^2 - 2M\sqrt{M^2+MV})}{2M + 2\frac{V}{H}\cdot\frac{H}{V}\left(-M + \sqrt{M^2+MV}\right)} \\ =& \frac{MH + \frac{MH}{V}(2M + V - 2\sqrt{M^2+MV})}{2M - 2M + 2\sqrt{M^2+MV}} \\ =& \frac{2HM}{\sqrt{M^2+MV}}\left(1 + \frac{1}{V}\left(M - \sqrt{M^2+MV}\right)\right). \end{aligned}$$

27.5 Es gilt $f'(x) = -2\sin x - 1$ und $f''(x) = -2\cos x$. Wir bestimmen die Nullstellen der ersten Ableitung:

$$f'(x) = 0 \iff \sin x = -\frac{1}{2} \iff x \in \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Für $x \in M_1 := \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ gilt $f''(x) = \sqrt{3} > 0$, die Punkte in M_1 sind also lokale Minima von f. Für $x \in M_2 := \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ ist $f''(x) = -\sqrt{3} < 0$, die Punkte in M_2 sind also lokale Maxima der Funktion f. Damit besitzt f unendlich viele lokale Minima und Maxima.

Es gilt weiter

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

also besitzt f weder eine globales Maximum noch ein globales Minimum.

27.6 (a) Es liegt die Situation $\frac{0}{0}$ vor, wir können die Regel von L'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{1} = 1.$$

(b) Auch hier haben wir den Fall $\frac{0}{0}$, wir erhalten mit der Regel von L'Hospital:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{b\sin(bx)}{2\sqrt{\cos(bx)}} - \frac{a\sin(ax)}{2\sqrt{\cos(ax)}}\right)\frac{1}{2x} \\ &= \frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{b\sin(bx)}{x}}{\sqrt{\cos(bx)}} - \lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\sin(ax)}{x}}{\sqrt{\cos(ax)}}\right) = \frac{b^2 - a^2}{4}. \end{aligned}$$

(c) Unter Anwendung der Regel von L'Hospital gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+3x)-2\sin^2(x)}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} &= \lim_{x\to 0}\frac{6\frac{\ln(1+3x)}{1+3x}-4\sin(x)\cos(x)}{2x\,\mathrm{e}^{-x^2}}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}\cdot\frac{3}{(1+3x)\,\mathrm{e}^{-x^2}}-\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{2\cos(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}}\,.\end{aligned}$$

Wir berechnen nun die einzelnen Grenzwerte (teilweise wiederum mit L'Hospital) und erhalten:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{1+3x}=3\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{3}{(1+3x)\,\mathrm{e}^{-x^2}}=3\,,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\cos(x)=1\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(x)}{\mathrm{e}^{-x^2}}=2\,.$$

Es ist also

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2(1+3x)-2\sin^2(x)}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=3\cdot 3-1\cdot 2=7\,.$$

(d) Die Anwendung der Regel von L'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to -1^+}(x+1)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to -1^+}=\frac{x+1}{\cot\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to -1^+}-2\cdot\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\pi}=-\frac{2}{\pi}\,.$$

(e) Der Grenzwert ist vom Typ $\frac{\infty}{\infty}$. Wir versuchen es mit der Regel von L'Hospital und erhalten:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{\mathrm{e}^x}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{\mathrm{e}^x}\overset{l'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{\mathrm{e}^x}\,.$$

Die Regel hilft uns also in diesem Fall nicht weiter, wir müssen den Grenzwert anders bestimmen:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cosh x}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})}{\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\mathrm{e}^{-2x}}{1}=\frac{1}{2}\,.$$

(f) Der Grenzwert ist vom Typ $\frac{0}{0}$, wir versuchen es wieder mit der Regel von L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}-\sin(x)=0\,.$$

(g) Der Grenzwert hat die Form $\frac{0}{0}$. Die Regel von L'Hospital liefert:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\pi/2-\arcsin x}{\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{2}\,.$$

(h) Dieser Grenzwert ist vom Typ $0 \cdot (-\infty)$, die Regel von L'Hospital kann also nicht direkt angewandt werden. Hier hilft ein Trick weiter, bei dem man den Grenzwert so umschreibt, dass er zum Typ $\frac{\infty}{\infty}$ wird. Nach dem ersten Schritt entsteht ein Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$, auf den wiederum die Regel von L'Hospital angewandt werden kann:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \sin(\pi x)\cdot \ln|1-x| &= \lim_{x\to 1} \frac{\ln|1-x|}{\frac{1}{\sin(\pi x)}} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{\sin^2(\pi x)}\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin^2(\pi x)}{(1-x)\pi\cos(\pi x)} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi}{-\pi^2\sin(\pi x) - \pi[\cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x)]} = 0\,.\end{aligned}$$

(i) Wir schreiben zunächst den Ausdruck etwas um:

$$(1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\arctan x)\right)\,.$$

Weil die Exponentialfunktion stetig ist, genügt es, den Grenzwert für den Exponenten zu bestimmen, dabei ergibt sich ein Grenzwert vom Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1\,.$$

Damit gilt also für den gesuchten Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}\,.$$

(j) In diesem Fall haben wir einen Grenzwert vom Typ $\frac{1}{0}$, die Regel von L'Hospital darf natürlich *nicht* angewandt werden. Vielmehr gilt

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x + \cos x}{x} = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + \cos x}{x} = +\infty,$$

der Grenzwert existiert nicht. Wendet man hier ohne die Voraussetzungen zu prüfen die Regel von de L'Hopital an, so erhält man als Grenzwert 1, das wäre falsch!

(k) Der Grenzwert ist von der Form $\frac{\infty}{\infty}$ und mit L'Hospital erhalten wir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} = 0\,.$$

(l) Wir schreiben die Differenz als rationalen Ausdruck, der der auf einen unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$ führt, dann wenden wir zwei Mal die L'Hospitalsche Regel an:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \mathrm{e}^x + 1}{(\mathrm{e}^x - 1)x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1 + x\,\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{e}^x}{2\,\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x} = -\frac{1}{2}\,.$$

(m) Auch in diesem Fall hilft die L'Hospitalsche Regel, wenn wir schreiben

$$\lim_{x\to 0}(\cot(x)\arcsin(x)) = \lim_{x\to 0}(\cos x)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

28 Anwendungen der Differentialrechnung II

28.1 Aufgaben

28.1 Gegeben sei die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{2x} - 3\pi$. Man bestimme näherungsweise eine Nullstelle von f mit Hilfe des Newtonverfahrens. Man beginne mit dem Startwert $x_0 = 1.1$ und verwende das Abbruchkriterium $|f(x_k)| \leq 10^{-5}$.

28.2 Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x-1)^2 - 4$. Man bestimme näherungsweise eine Nullstelle von f mit Hilfe des Newtonverfahrens. Man verwende die Startwerte $x_0 = 1.1$ und $x_0 = 0.9$ sowie das Abbruchkriterium $|f(x_k)| \leq 10^{-5}$.

28.3 Bestimmen Sie alle Ableitungen der folgenden Funktionen an der Stelle 0 und geben Sie mittels der Taylorformel die Taylorpolynome T_n um den Entwicklungspunkt 0 an:

(a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,
(b) $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.

28.4 Berechnen Sie die Taylorreihen der folgenden Funktionen zum jeweiligen Entwicklungspunkt a:

(a) $f(x) = 2^x$, $a = 0$,

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3}, & \text{falls } x \neq 0 \\ -\frac{1}{6}, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$, $a = 0$,

(c) $f(x) = \frac{1}{2+3x}$, $a = 2$,

(d) $f(x) = -\frac{3}{(2+3x)^2}$, $a = 2$.

Bestimmen Sie außerdem die Konvergenzradien $R \geq 0$ und untersuchen Sie, für welche Punkte $x \in (a - R, a + R)$ die Taylorreihe mit der jeweiligen Funktion übereinstimmt.

28.5 Geben Sie das Taylorpolynom T_{10} von sin und cos um den Entwicklungspunkt $x = 0$ an. Benutzen Sie `taylortool`, um sich über die Approximation ein Bild zu machen.

28.6 Entwickeln Sie den Tangens im Punkt 0 bis zur fünften Ordnung, jeweils mit Hilfe

(a) der Taylorformel,

(b) der bekannten Reihenentwicklungen von sin und cos,

(c) seiner Umkehrfunktion, des $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \pm \cdots$ und eines Koeffizientenvergleichs.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_28,

28.7 Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Taylorpolynome $T_{m,f,a}$ für $m = 0, 1, 2$ und betrachten Sie die Graphen dieser *Schmiegpolynome*. Verwenden Sie dazu `taylortool` von MATLAB.

(a) $f(x) = x^2 - 4\,x + 4$ mit $a = 1$,

(b) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ mit $a = 0$,

(c) $f(x) = x\,\sin(x)$ mit $a = 0$.

28.8 Programmieren Sie das Newtonverfahren.

28.2 Lösungen

28.1 Es ist $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$. Die Schritte des Newtonverfahrens stellen sich dar wie folgt:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1.1	-0.399764	18.050027
1	1.122148	$8.994 \cdot 10^{-3}$	18.867544
2	1.121671	$-1.6 \cdot 10^{-6}$	

Die Nullstelle ist also bereits nach der zweiten Iteration mit der geforderten Genauigkeit bestimmt.

28.2 Wir wenden das Newtonverfahren mit der Ableitung $f'(x) = 2x - 2$ an und erhalten

k	x_k	$f'(x_k)$	$f(x_k)$	x_k	$f'(x_k)$	$f(x_k)$
0	1.1	0.2	-3.99	0.9	-0.2	-3.99
1	21.05	40.1	398.0025	-19.05	-40.1	398.0025
2	11.1248 ...	20.2495 ...	98.5106 ...	-9.1248 ...	-20.2495 ...	98.6106 ...
3	6.2599 ...	10.5198 ...	23.6667 ...	-4.2599 ...	-10.5198 ...	23.6667 ...
4	4.0102 ...	6.0204 ...	5.0612 ...	-2.0102 ...	-6.0204 ...	5.0612 ...
5	3.1695 ...	4.3390 ...	0.7068 ...	-1.1695 ...	-4.3390 ...	0.7068 ...
6	3.0066 ...	4.0132 ...	0.0265 ...	-1.0066 ...	-4.0132 ...	0.0265 ...
7	3.00001 ...	4.00002 ...	$4.37 \cdot 10^{-5}$	-1.00001 ...	-4.00002 ...	$4.37 \cdot 10^{-5}$
8	3	4	0	-1	4	0

Die Nullstellen von f liegen also bei $x = 3$ und $x = -1$.

28.3 (a) Wir berechnen zunächst die Ableitungen für $x \neq 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}, \quad \ldots$$

Man vermutet $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ und zeigt dies mit vollständiger Induktion:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \implies f^{(n+1)}(x) = n! \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}\,.$$

Somit ist $f^{(n)}(0) = n!$ und das zugehörige Taylorpolynom lautet

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

(b) Es gilt $g^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist

$$g^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = (n+1)!$$

und das zugehörige Taylorpolynom lautet

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (k+1) x^k = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n.$$

28.4 Man beachte unser Rezept zum Bestimmen von Taylorreihen: (a) Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = 2^x = \mathrm{e}^{x \ln 2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \ln 2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n\,.$$

Damit haben wir eine Potenzreihendarstellung von $f(x)$ mit Entwicklungspunkt 0 gefunden. Diese stimmt mit der Taylorreihe zum Entwicklungspunkt 0 überein, es ist also auch

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n}{n!} x^n\,.$$

(b) Bekanntlich gilt für die Potenzreihendarstellung des Sinus für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Damit folgt nun

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n+1)!} =: T(x)\,.$$

Da $T(0) = -\frac{1}{6}$, ist also $T(x)$ eine Potenzreihenentwicklung von $f(x)$ und somit auch gleich der Taylorreihe.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2+3x} = \frac{1}{2+3(x-2)+6} = \frac{1}{8+3(x-2)} \\ &= \frac{1}{8}\frac{1}{1+\frac{3}{8}(x-2)} \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{3}{8}\right)^n (x-2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{8^{n+1}} (x-2)^n\,,\ \text{falls } |x-2| < \frac{8}{3}\,, \end{aligned}$$

dabei wurde bei $(*)$ die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$ verwendet. Wiederum gilt, dass die Potenzreihenentwicklung gleich der Taylorreihe $T(x)$ ist.

(d) Es gilt:

$$f(x) = \frac{-3}{(2+3x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2+3x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{8^{n+1}}(x-2)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{8^{n+1}} n(x-2)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)3^{n+1}}{8^{n+2}}(x-2)^n\,, \text{ falls } |x-2| < \frac{8}{3}.$$

Wiederum gilt, dass die Potenzreihenentwicklung gleich der Taylorreihe $T(x)$ ist.

Da in allen Fällen Potenzreihenentwicklungen der jeweiligen Funktion $f(x)$ gefunden wurden, stimmen die Funktionen innerhalb des Konvergenzradius mit den Taylorreihen überein. Für die Konvergenzradien gilt im Einzelnen:

(a) $R = \infty$, (b) $R = \infty$, (c) $R = \frac{8}{3}$, (d) $R = \frac{8}{3}$.

28.5 Es gilt

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= \sin^{(4)}(0) = \sin^{(8)}(0) = 0\\
\sin'(0) &= \sin^{(5)}(0) = \sin^{(9)}(0) = \cos 0 = 1\\
\sin''(0) &= \sin^{(6)}(0) = \sin^{(10)}(0) = -\sin 0 = 0\\
\sin^{(3)}(0) &= \sin^{(7)}(0) = \sin^{(11)}(0) = -\cos 0 = -1
\end{aligned}$$

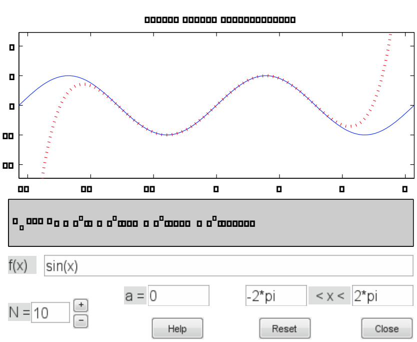
und $\cos^{(k)}(0) = \sin^{(k+1)}(0)$. Somit lautet das Polynom für den Sinus

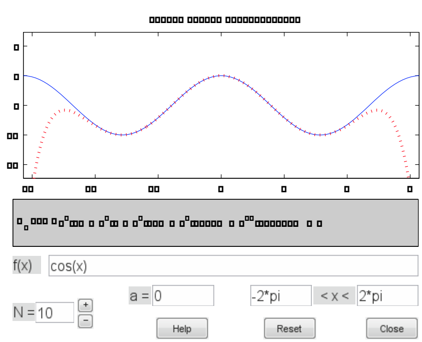
$$T_{10}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9$$

und für den Kosinus

$$T_{10}(x) = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \frac{1}{8!}x^8 - \frac{1}{10!}x^{10}\,.$$

Es folgen noch die Bilder, die man mit `taylortool` erhält:





28.6

(a) Durch sukzessives Ableiten erhalten wir:

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \ \tan'' x = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \ \tan''' x = \frac{2+4\sin^2 x}{\cos^4 x}$$
$$\tan^{(4)} x = \frac{16\sin x + 8\sin^3 x}{\cos^5 x}, \ \tan^{(5)} x = \frac{16+88\sin^2 x + 16\sin^4 x}{\cos^6 x}.$$

Da der Tangens eine ungerade Funktion ist, lautet das fünfte Taylorpolynom des Tangens

$$T_{5,\tan,0}(x) = \tan'(0)x + \frac{\tan'''(0)}{6}x^3 + \frac{\tan^{(5)}(0)}{120}x^5 = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 .$$

(b) Unter Weglassung höherer Ordnungen, die nicht benötigt werden, schreiben wir

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm \ldots}{1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 \pm \ldots\right)} .$$

Nun benutzen wir die geometrische Reihe für $\frac{1}{1-y}$ mit $y = 1 - \cos x$, welche konvergent ist, solange $|1 - \cos x| < 1$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \pm \ldots\right)\left(1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \pm \ldots\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} \pm \ldots\right)^2 + \ldots\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{4}x^4 + \ldots\right) \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \pm \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \ldots\right) \\
&= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + \ldots \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots .
\end{aligned}$$

(c) Für den Ansatz $\tan y = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a_4 y^4 + a_5 y^5 + \ldots$ kann man von vornherein schließen, dass $a_0 = 0$, $a_2 = 0$, $a_4 = 0, \ldots, a_{2n} = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, da $\tan(y)$ eine ungerade Funktion ist. Somit gilt

$$\begin{aligned}
x &= \tan(\arctan x) \\
&= a_1\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \pm \ldots\right) + a_3\left(x - \frac{x^3}{3} \pm \ldots\right)^3 + a_5\,(x \pm \ldots)^5 + \ldots \\
&= a_1 x + \left(-\frac{a_1}{3} + a_3\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{5} - a_3 + a_5\right)x^5 + \ldots .
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $a_1 = 1$, $a_3 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$, $a_5 = a_3 - \frac{a_1}{5} = \frac{2}{15}$. Also ist

$$\tan y = y + \frac{1}{3}y^3 + \frac{2}{15}y^5 + \cdots .$$

28.7 Mit `taylortool` erhält man alle Ergebnisse.

28.8 Der folgende Code taugt:

```
function [ x0,xvec,iter ] = newton22( f,x0,tol )
xvec=[]';
syms x;
df(x)=diff(f(x));
iter=0;
weiter=1;
while weiter
    delta=-f(x0)/df(x0);
    lS=f(x0+delta);
    x0=x0+delta;
    xvec=[xvec; double(x0)];
    weiter=abs(delta)>=tol & abs(lS)<=abs(x0-delta);
    iter=iter+1;
end
if abs(delta)<tol
    disp('Genauigkeit erreicht!')
else
    disp('Divergenz!')
end
```

29 Polynom- und Splineinterpolation

29.1 Aufgaben

29.1 Bestimmen Sie das Interpolationspolynom vom Grad 4 für die 5 Stützstellen

$$(-2,1)\,,(-1,1)\,,\ (0,2)\,,\ (1,1)\,,\ (2,1)\,.$$

29.2 Bestimmen Sie die kubische Splinefunktion s zu den Stützstellen

$$(x_0,y_0)=(0,1)\,,\ (x_1,y_1)=(1,0)\,,\ (x_2,y_2)=(3,0)\,,\ (x_3,y_3)=(6,0)\,.$$

29.2 Lösungen

29.1 Wir verwenden die Methode von Newton (vgl. das Rezept auf Seite 257 (Rezeptebuch)):

(1) Wir machen den Ansatz

$$f(x)=\lambda_0+\lambda_1(x+2)+\lambda_2(x+2)(x+1)+\lambda_3(x+2)(x+1)x+\lambda_4(x+2)(x+1)x(x-1)\,.$$

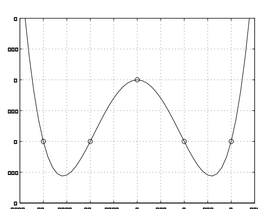
(2) Wir erhalten λ_i durch Auswerten von f an den Stellen x_i unter Beachtung von $f(x_i)=y_i$:

$$\begin{aligned}
&1=f(-2)=\lambda_0 \;\Rightarrow\; \lambda_0=1\\
&1=f(-1)=\lambda_0+\lambda_1 \;\Rightarrow\; \lambda_1=0\\
&2=f(0)=\lambda_0+\lambda_1\cdot 2+\lambda_2\cdot 2 \;\Rightarrow\; \lambda_2={}^1\!/\!_2\\
&1=f(1)=\lambda_0+\lambda_1\cdot 3+\lambda_2\cdot 6+\lambda_3\cdot 6 \;\Rightarrow\; \lambda_3=-{}^1\!/\!_2\\
&1=f(2)=\lambda_0+\lambda_1\cdot 4+\lambda_2\cdot 12+\lambda_3\cdot 24+\lambda_4\cdot 24 \;\Rightarrow\; \lambda_4={}^1\!/\!_4\,.
\end{aligned}$$

(3) Wir setzen nun die λ_i aus (2) in den Ansatz in (1) ein und erhalten:

$$f(x)=1+{}^1\!/\!_2(x+2)(x+1)-{}^1\!/\!_2(x+2)(x+1)x+{}^1\!/\!_4(x+2)(x+1)x(x-1)={}^1\!/\!_4x^4-{}^5\!/\!_4x^2+2\,.$$

In der nebenstehenden Abbildung haben wir den Graph der Polynomfunktion eingetragen.



C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_29,

29.2 Wir beachten unser Rezept:

(1) Es gilt

$$h_0 = x_1 - x_0 = 1\,,\ h_1 = x_2 - x_1 = 2\,,\ h_2 = x_3 - x_2 = 3\,.$$

Als nächstes ermitteln wir r_1 und r_2, es gilt:

$$r_1 = 3(0+1) = 3\,,\ r_2 = 3(0-0) = 0\,.$$

Damit stellen wir das LGS zum Bestimmen von c_1 und c_2 auf: Aus

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

erhalten wir mit $c_0 = 0 = c_3$:

$$c_0 = 0\,,\ c_1 = {}^{15}/_{28}\,,\ c_2 = {}^{-3}/_{28}\,,\ c_3 = 0\,.$$

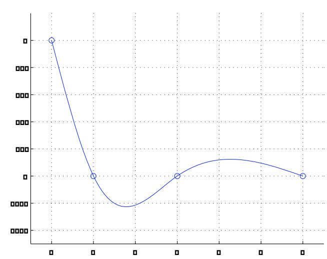
(2) Damit können wir nun a_i, b_i, c_i bestimmen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &a_0 = 1\,,\ a_1 = 0\,,\ a_2 = 0\,,\\ &b_0 = {}^{-33}/_{28}\,,\ b_1 = {}^{-9}/_{14}\,,\ b_2 = {}^{3}/_{14}\,,\\ &d_0 = {}^{5}/_{28}\,,\ d_1 = {}^{-3}/_{28}\,,\ d_2 = {}^{1}/_{84}\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also die Splinefunktion s durch die drei Polynome vom Grad 3, die jeweils auf den angegebenen Intervallen erklärt sind:

$$\begin{aligned} &s_0 : [0,1] \to \mathbb{R}\,,\ s_0(x) = 1 - {}^{33}/_{28}x + {}^{5}/_{28}x^3\,,\\ &s_1 : [1,3] \to \mathbb{R}\,,\ s_1(x) = {}^{-9}/_{14}(x-1) + {}^{15}/_{28}(x-1)^2 - {}^{3}/_{28}(x-1)^3\,,\\ &s_2 : [3,6] \to \mathbb{R}\,,\ s_2(x) = {}^{3}/_{14}(x-3) - {}^{3}/_{28}(x-3)^2 + {}^{1}/_{84}(x-3)^3\,. \end{aligned}$$

In der nebenstehenden Abbildung haben wir den Graph der Splinefunktion, also die Graphen der Polynomfunktionen s_0, s_1 und s_2 eingetragen.



30 Integration I

30.1 Aufgaben

30.1 Begründen Sie: Ist F eine Stammfunktion zu f, so ist $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller Stammfunktionen zu f.

30.2 Begründen Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechung von Seite 267 (Rezeptebuch).

30.3 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

(a) $\int\limits_0^{\pi/9} \sin(\pi/3 - 3x)\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int\limits_0^{\ln 2} \mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int\limits_0^1 2x(1 - \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int\limits_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (2x - \ln x)\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$,

(g) $\int\limits_0^1 r^2 \sqrt{1 - r}\,\mathrm{d}r$,

(h) $\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x$,

(i) $\int\limits_1^2 \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{x}\,\mathrm{d}x$,

(j) $\int\limits_0^{\pi} 1 - 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x$,

(k) $\int\limits_0^1 \frac{2x-2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(l) $\int\limits_0^1 2^{x+1}\,\mathrm{d}x$,

(m) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1 + \sin x}\,\mathrm{d}x$,

(n) $\int\limits_0^{\pi} \frac{x^2 + 2\sqrt{x} + \sin x}{\tan(\sqrt{x})}\,\mathrm{d}t$,

(o) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos x + \cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

(p) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x}\,\mathrm{d}x$,

(q) $\int\limits_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$.

30.4 Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int x \sin x\,\mathrm{d}x$,

(b) $\int \frac{x}{\cosh^2 x}\,\mathrm{d}x$,

(c) $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x$,

(d) $\int \frac{x}{a^2x^2 + c^2}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int x\sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x$,

(f) $\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$,

(g) $4\int (x^2 + 1)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$,

(h) $3\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$,

(i) $\int x^2 \cos x\,\mathrm{d}x$,

(j) $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2}\,\mathrm{d}x$,

(k) $26\int \mathrm{e}^{-x} \cos(5x)\,\mathrm{d}x$,

(l) $\int \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$,

(m) $\int x \sin(x^2) \cos^2(x^2)\,\mathrm{d}x$,

(n) $2\int x \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$,

(o) $\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$,

(p) $4\int \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$,

(q) $15\int \sqrt{x}(x - 1)\,\mathrm{d}x$,

(r) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$,

(s) $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$,

(t) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

30.5 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$. Die Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) = \int\limits_0^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_30,

Zeigen Sie, dass F auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist. Wie sieht die Ableitung $F'(x)$ aus?

30.6 Es seien $a, b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Ellipse, die erklärt ist durch $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

30.2 Lösungen

30.1 Alle Stammfunktionen von f unterscheiden sich höchstens um eine Konstante c: Denn ist F Stammfunktion von f, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}: \ (F+c)' = f + 0 = f$, damit ist also auch $F + c$ Stammfunktion von f.
Sind dagegen F und G Stammfunktionen von f, so gilt $(F-G)' = f - f = 0$ und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt $G - F = c \Rightarrow G = F + c$.
Ist also F eine Stammfunktion von f, so lässt sich die Menge aller Stammfunktionen von f angeben als $\{F + c \mid c \in \mathbb{R}\}$.

30.2 Es seien $x, x_0 \in [a, b]$. Es gilt:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\ \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)\ \mathrm{d}t = f(\xi)$$

mit einem ξ zwischen x und x_0 nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung. Da f nach Voraussetzung stetig ist, gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0) \\ \lim\limits_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0) \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x_0) = f(x_0) \quad \forall x_0 \in [a, b]\,.$$

Das beweist den ersten Teil des Hauptsatzes. Ist F eine Stammfunktion zu f, so gilt:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t + c$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt die zweite Aussage:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

30.3

(a) Wir verwenden die Substitutionsregel:

$$\int_0^{\pi/9} \sin\left(\pi/3 - 3x\right)\ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u & = \pi/3 - 3x \\ \mathrm{d}u & = -3\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = -\tfrac{1}{3}\int_{\sqrt{3}/2}^{0} \sin(u)\ \mathrm{d}u = \tfrac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}/2} \sin(u)\ \mathrm{d}u$$

$$= \tfrac{1}{3}\Big[-\cos(u)\Big]_0^{\sqrt{3}/2} = \tfrac{1}{3}\left(\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1\right)\,.$$

(b) Wiederum mit Substitution lässt sich das Integral berechnen als

$$\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^x \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u & = \mathrm{e}^x - 1 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} & = \mathrm{e}^x \end{array}\right] = \int_0^1 \sqrt{u}\, \mathrm{d}u = \left[\tfrac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\left(\sqrt{1^3} - \sqrt{0^3}\right) = \tfrac{2}{3}.$$

(c) Mit partieller Integration erhält man

$$\int_0^1 2x(1 - \mathrm{e}^x)\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = 2x & u' = 2 \\ v' = 1 - \mathrm{e}^x & v = x - \mathrm{e}^x \end{array}\right] = \left[2x^2 - 2x\,\mathrm{e}^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 x - \mathrm{e}^x\, \mathrm{d}x$$

$$= 2 - 2\,\mathrm{e} - 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^x\right]_0^1 = 2 - 2\,\mathrm{e} - 2\left(\frac{1}{2} - \mathrm{e} - (0-1)\right) = -1\,.$$

(d) Wiederum mit partieller Integration folgt

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} (2x - \ln(x))\, \mathrm{d}x = \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 2x\, \mathrm{d}x - \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \ln(x)\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}\right]$$

$$= \left[x^2\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} - \left[x\ln(x)\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} + \int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} 1\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^2 - 2\,\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + \left[x\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}$$

$$= \mathrm{e}^4 - 3\,\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} = \mathrm{e}^4 - 2\,\mathrm{e}^2\,.$$

(e) Mittels logarithmischer Integration erhalten wir

$$\int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}\, \mathrm{d}x = \left[\ln\left(|\arctan(x)|\right)\right]_{-\sqrt{3}}^{-1} = \ln\left(\pi/4\right) - \ln\left(\pi/3\right) = \ln\left(3/4\right)\,.$$

(f) Mit partieller Integration folgt

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} x \frac{1}{\sin^2(x)}\, \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\sin^2(x)} & v = -\cot(x) \end{array}\right] = \left[-x\cot(x)\right]_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot(x)\, \mathrm{d}x$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \left[\ln\left(|\sin(x)|\right)\right]_{\pi/2}^{\pi/6} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \ln 2\,.$$

(g) Mit doppelter partieller Integration erhalten wir die Lösung:

$$\int_0^1 r^2\sqrt{1-r}\,\mathrm{d}r = \left[\begin{array}{ll} u = r^2 & u' = 2r \\ v' = \sqrt{1-r} & v = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-r)^3} \end{array}\right]$$

$$= \left[-\frac{2r^2}{3}\sqrt{(1-r)^3}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\int_0^1 r\sqrt{(1-r)^3}\,\mathrm{d}r$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = r & u' = 1 \\ v' = \sqrt{(1-r)^3} & v = -\frac{2}{5}\sqrt{(1-r)^5} \end{array}\right]$$

$$= \frac{4}{3}\left(\left[-\frac{2r}{5}\sqrt{(1-r)^5}\right]_0^1 + \frac{2}{5}\int_0^1 \sqrt{(1-r)^5}\,\mathrm{d}r\right)$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)\left[\sqrt{(1-r)^7}\right]_0^1 = -\frac{4\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot(-1) = \frac{16}{105}\,.$$

(h) Wir substituieren $u = 1 + \mathrm{e}^x$ und erhalten:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = 1+\mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{array}\right] = \int_2^{1+\mathrm{e}} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u}\right]_2^{1+\mathrm{e}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+\mathrm{e}}\,.$$

(i) Wir können dieses Integral elementar lösen:

$$\int_1^2 \frac{2x^3-3x^2+4x-5}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 2x^2-3x+4-\frac{5}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x - 5\ln x\right]_1^2$$

$$= \frac{16}{3} - 6 + 8 - 5\ln 2 - \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 4 + 0 = \frac{25}{6} - 5\ln 2\,.$$

(j) Wegen $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (1-\sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x$ gilt:

$$\int_0^\pi 1 - 2\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right]_0^\pi = 0\,.$$

(k) Mit logarithmischer Integration gilt:

$$\int_0^1 \frac{2x-2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\ln(1+x^2) - 2\arctan x\right]_0^1 = \ln 2 - {}^{2\pi}/_4 - \ln 1 + 0 = \ln 2 - {}^{\pi}/_2\,.$$

(l) Mit der Identität $a^b = \mathrm{e}^{\ln(a^b)} = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$ erhalten wir

$$\int_0^1 2^{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{\ln(2^{x+1})}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{e}^{(x+1)\ln 2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\ln 2}\cdot\int_0^1 \mathrm{e}^{x\ln 2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\cdot\Big[\mathrm{e}^{x\ln 2}\,\tfrac{1}{\ln 2}\Big]_0^1 = 2\Big[\tfrac{1}{\ln 2}\,\mathrm{e}^{\ln 2} - \tfrac{1}{\ln 2}\,\mathrm{e}^0\Big] = \tfrac{2}{\ln 2}\,.$$

(m) Wir benutzen das Additionstheorem $\sin x = 2\sin(x/2)\,\cos(x/2)$:

$$\int_0^\pi \sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)+2\sin(x/2)\,\cos(x/2)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{(\sin(x/2)+\cos(x/2))^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^\pi \sin(x/2)+\cos(x/2)\,\mathrm{d}x = \Big[-2\cos(x/2)+2\sin(x/2)\Big]_0^\pi = 4\,.$$

(n) Da unsere Integrationsvariable t ist, können wir x einfach als Konstante betrachten:

$$\int_0^\pi \frac{x^2+2\sqrt{x}+\sin x}{\tan(\sqrt{x})}\,\mathrm{d}t = \frac{x^2+2\sqrt{x}+\sin x}{\tan(\sqrt{x})}\Big[t\Big]_0^\pi = \frac{x^2+2\sqrt{x}+\sin x}{\tan(\sqrt{x})}\,\pi\,.$$

(o) Wir verwenden hier zunächst eine Doppelwinkelformel um $\sin(2x)$ aufzulösen:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\cos x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x\cos x}{\cos x+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\,2\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = -2\Big[\ln(1+\cos x)\Big]_0^{\pi/2} = 2\ln 2\,,$$

wobei wir logarithmisch integriert haben.

(p) Wir substituieren $t = \sin x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos x$, und erhalten

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cos x(1-t^2)}{(1-t)\cos x}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 1+t\,\mathrm{d}t = \Big[t+\tfrac{t^2}{2}\Big]_0^1 = 1+1/2-0-0 = 3/2\,.$$

(q) Hier substituieren wir $t = \sqrt{1+x}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2t}$:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+1-1}{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{2}} 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= 2\Big[t - \ln(1+t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2}) - 2 + 2\ln 2\,.$$

30.4

(a) Mit partieller Integration erhalten wir

$$\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin(x) & v = -\cos(x) \end{array}\right] = -x\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -x\cos(x) + \sin(x) + C\,.$$

(b) Mit partieller Integration folgt

$$\int \frac{x}{\cosh^2(x)}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\cosh^2(x)} & v = \tanh(x) \end{array}\right] = x\tanh(x) - \int \tanh(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= x\tanh(x) - \int \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x = x\tanh(x) - \ln\left(\cosh(x)\right) + C\,.$$

(c) Wiederum mit partieller Integration erhalten wir

$$\int \frac{\ln(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{ll} u = \ln(x^2) & u' = \frac{2}{x} \\ v' = \frac{1}{x^2} & v = -\frac{1}{x} \end{array}\right] = -\frac{\ln(x^2)}{x} + 2\int \frac{1}{x^2} = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{2}{x} + C.$$

(d) Wir finden eine Stammfunktion durch Substitution

$$\int \frac{x}{a^2x^2+c^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = a^2x^2 + c^2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2a^2x \end{array}\right] = \int \frac{1}{2a^2}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\ln(|u|)}{2a^2} + C = \frac{\ln(2a^2x^2+c^2)}{2a^2} + C.$$

(e) Wir substituieren wieder

$$\int x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{l} u = 1+4x^2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 8x \end{array}\right] = \frac{1}{8}\int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{12}\sqrt{u^3} + C = \frac{1}{12}\sqrt{(1+4x^2)^3} + C.$$

(f) Dieses Integral können wir elementar lösen

$$\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2-1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x = 2\arctan(x) - x + C\,.$$

(g) Mit doppelter partieller Integration erhalten wir

$$4\int (x^2+1)\,\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x = 4\left((x^2+1)\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x} - \int x\,\mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x\right)$$
$$= 2\,\mathrm{e}^{2x}(x^2+1) - 4\left(\frac{1}{2}x\,\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\ \mathrm{d}x\right) = \left(2x^2-2x+3\right)\mathrm{e}^{2x} + C\,.$$

(h) Wir substituieren $u=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow x^2 = u^2-1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{u}{x}\ \mathrm{d}u$ und erhalten

$$3\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\ \mathrm{d}x = 3\int \frac{x^3}{u}\cdot\frac{u}{x}\ \mathrm{d}u = 3\int x^2\ \mathrm{d}u = 3\int u^2-1\ \mathrm{d}u = u^3-3u+C$$
$$= \sqrt{(x^2+1)^3} - 3\sqrt{x^2+1} + C = (x^2-2)\sqrt{x^2+1} + C\,.$$

(i) Hier hilft wiederum doppelte partielle Integration:

$$\int x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x) + C\,.$$

(j) Wir beginnen mit einer kleinen Umformung:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x+\sin^3 x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x(1+\tan^3 x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan^3 x)^2}\ \mathrm{d}x$$

Wir substituieren nun $u=\tan(x) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2(x)} \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos^2(x)\ \mathrm{d}u$ und erhalten

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x+\sin^3 x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan^3 x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\ \mathrm{d}u\,.$$

Wir substituieren jetzt ein zweites Mal $t=u^3 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2 \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{1}{3u^2}\ \mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x+\sin^3 x)^2}\ \mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\ \mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(1+t)^2}\ \mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t} + C$$
$$= -\frac{1}{3(1+u^3)} + C = -\frac{1}{3(1+\tan^3(x))} + C\,.$$

(k) Wir verwenden ein weiteres Mal doppelte partielle Integration:

$$26\int \mathrm{e}^{-x}\cos(5x)\ \mathrm{d}x = \frac{26}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\sin(5x) + \frac{26}{5}\int \mathrm{e}^{-x}\sin(5x)\ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{26}{5}\,\mathrm{e}^{-x}\sin(5x) - \frac{26}{25}\,\mathrm{e}^{-x}\cos(5x) - \frac{26}{25}\int \mathrm{e}^{-x}\cos(5x)\,\mathrm{d}x + C.$$

Es steht also (bis auf den Vorfaktor) rechts das gleiche Integral wie links, somit:

$$\left(26+\frac{26}{25}\right)\int \mathrm{e}^{-x}\cos(5x)\ \mathrm{d}x = \frac{26}{25}\,\mathrm{e}^{-x}(5\sin(5x)-\cos(5x)) + C\,.$$

Wir erhalten:

$$26\int \mathrm{e}^{-x}\cos(5x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-x}(5\sin(5x)-\cos(5x)) + C\,.$$

(l) Wir substituieren $u = \ln(x) \Rightarrow \mathrm{d}x = x\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^u\ \mathrm{d}u$:

$$\int \sin(\ln(x))\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^u \sin(u)\ \mathrm{d}u\,.$$

Dieses Integral können wir mit partieller Integration lösen und erhalten

$$\int \sin(\ln(x))\ \mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^u \sin(u)\ \mathrm{d}u = \frac{x}{2}\sin(\ln(x)) - \frac{x}{2}\cos(\ln(x)) + C\,.$$

(m) Wir substituieren $u = \cos(x^2) \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{1}{2x\sin(x^2)}\ \mathrm{d}u$:

$$\int x\sin(x^2)\cos^2(x^2)\ \mathrm{d}x = -\int \frac{1}{2}u^2\ \mathrm{d}u = -\frac{1}{6}u^3 + C = -\frac{1}{6}\cos^3(x^2) + C\,.$$

(n) Die Substitution $t = x^2$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$, führt auf

$$2\int x\sin(x^2)\ \mathrm{d}x = \int \sin(t)\ \mathrm{d}t = -\cos(t) + C = -\cos(x^2) + C\,.$$

(o) Wir führen partielle Integration durch, um x^2 im Integranden loszuwerden:

$$\begin{aligned}\int x^2\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x &= -x^2\,\mathrm{e}^{-x} + C + 2\int x\mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x\\ = -x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} + C + 2\int \mathrm{e}^{-x}\ \mathrm{d}x &= -x^2\,\mathrm{e}^{-x} - 2x\,\mathrm{e}^{-x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + C\,.\end{aligned}$$

(p) Wir beginnen mit der Substitution $t = x^2$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2x$:

$$4\int \frac{x\arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\ \mathrm{d}x = 2\int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t\,.$$

Als nächster Schritt bietet sich eine weitere Substitution an, nämlich $\sin u = t$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \cos u$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}2\int \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t &= 2\int \frac{\arcsin(\sin u)}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\ \mathrm{d}u = 2\int u\ \mathrm{d}u\\ &= u^2 + C = \arcsin^2 t + C = \arcsin^2(x^2) + C\,.\end{aligned}$$

(q) Dieses Integral lässt sich elementar berechnen:

$$15\int x^{3/2} - x^{1/2}\ \mathrm{d}x = 15\left(\frac{x^{5/2}}{5/2} - \frac{x^{3/2}}{3/2}\right) + C = 6\sqrt{x^5} + 10\sqrt{x^3} + C\,.$$

(r) Mit der Substitution $u = \ln(x)$ ergibt sich

$$\int \frac{\cos(\ln(x))}{x}\ \mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} u = \ln(x)\\ \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x\end{array}\right] = \int \cos(u)\ \mathrm{d}u = \sin(u) + C = \sin(\ln(x)) + C.$$

(s) Wiederum substituieren wir $u = \mathrm{e}^x$ und benutzen dann logarithmische Integration

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \mathrm{e}^x \\ \mathrm{d}u = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \int \frac{1}{u + \frac{1}{u}}\,\mathrm{d}u = \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2}\ln(|u^2+1|) + C = \ln(\sqrt{u^2+1}) + C = \ln(\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+1}) + C\,.$$

(t) Wir substituieren den Logarithmus

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u & = & \ln(x) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} & = & \frac{1}{x} \end{bmatrix} = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\ln^3(x) + C\,.$$

30.5 Wir definieren zunächst die Funktion

$$H(y) = \int_0^y f(t)\,\mathrm{d}t$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist $H(y)$ differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ und es gilt $H'(y) = f(y)$.

Da g ebenfalls auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, folgt mit der Kettenregel, dass auch die Funktion $F(x) = (H \circ g)(x) = H(g(x))$ differenzierbar ist. Für die Ableitung gilt dann

$$F'(x) = H'(g(x))\,g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)\,.$$

30.6 Wir beschränken uns auf die Viertel-Ellipse im rechten oberen Quadranten (also positive x- und y-Koordinaten). Dort können wir die Ellipsengleichung nach y auflösen: $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$.

Der Flächeninhalt dieser Viertel-Ellipse ist dann die Fläche unter dem durch diese Funktion beschriebenen Graphen, also

$$\int_0^a b\sqrt{1 - x^2/a^2}\,\mathrm{d}x.$$

Dieses Integral lösen wir durch die Substitution $x = a\sin t$ mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a\cos t$ und $t = \arcsin\frac{x}{a}$, damit ergibt sich

$$\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\arcsin 1} b\sqrt{1 - \frac{a^2\sin^2 t}{a^2}}\,a\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} ab\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{ab}{2}\int_0^{\pi/2} 1 + \cos(2t)\,\mathrm{d}t = \frac{ab}{2}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{ab}{2}\,(\pi/2 + 0 - 0 + 0) = \frac{\pi ab}{4}\,.$$

Damit ist die Fläche der gesamten Ellipse πab.

31 Integration II

31.1 Aufgaben

31.1 Man bestimme eine Stammfunktion von

(a) $\frac{1}{\sin x}$,
(b) $\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}$,
(c) $\frac{\tan x}{1+\tan x}$,
(d) $\frac{x-4}{x^3+x}$,
(e) $\frac{x^2}{(x+1)(1-x^2)}$,
(f) $\frac{9x}{2x^3+3x+5}$,
(g) $\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$,
(h) $\frac{\sin^2 x}{1+\sin x}$,
(i) $\frac{x^7-28x^3}{(x^2-8)(x^4+8x^2+16)}$,
(j) $\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}$,
(k) $\frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x+\sin^3 x)^2}$,
(l) $\frac{x^2+1}{x^3+1}$,
(m) $\frac{3\,\mathrm{e}^x+4\,\mathrm{e}^{-x}+2}{1-\mathrm{e}^{2x}}$.

31.2 Man bestimme die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$, (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$.

31.3 Man programmiere die Trapez- und die Simpsonregel.

31.2 Lösungen

31.1 Man beachte die Rezepte zur Integration rationaler Funktionen bzw. Integration rationaler Funktionen in Sinus und Kosinus:

(a) Mit $u=\tan(x/2)$ gilt $\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}$ und $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$:

$$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u=\ln(|u|)+C=\ln\left(|\tan(x/2)|\right)+C.$$

(b) Wir zerlegen den Integranden mittels Partialbruchzerlegung zu

$$\frac{x}{(1+x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{(A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)}{(1+x)(1+x^2)}$$

Koeffizientenvergleich liefert $A=-1/2$, $B=C=1/2$ und damit berechnet sich die gesuchte Stammfunktion als

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{1+x}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{4}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2}\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(|1+x|)+C\,.\end{aligned}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_31,

(c) Mit der Substitution $u = \tan(x)$ erhalten wir $x = \arctan(u)$ und $\mathrm{d}x = \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{u}{(1+u)(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{4}\ln(1+u^2) + \frac{1}{2}\arctan(u) - \frac{1}{2}\ln(|1+u|) + C\\ &= \frac{1}{4}\ln\left(1+\tan^2(x)\right) - \ln\left(|1+\tan(x)|\right) + \frac{x}{2} + C\,,\end{aligned}$$

wobei wir bei $(*)$ die Lösung von Aufgabe (b) benutzt haben.

(d) Mittels Partialbruchzerlegung formen wir um:

$$\frac{x-4}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = -4$, $B = 4$, $C = 1$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-4}{x^3+x}\,\mathrm{d}x &= -4\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{4x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= -4\ln(|x|) + 2\ln(x^2+1) + \arctan(x) + C\,.\end{aligned}$$

(e) Wiederum führen wir zuerst eine Partialbruchzerlegung durch:

$$\frac{x^2}{(x+1)(1-x^2)} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} + \frac{C}{1-x} = \frac{(C-A)x^2 + (2C-B)x + (A+B+C)}{(1+x)(1-x^2)}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert hier das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\\ C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 1\end{array}\right).$$

Wir erhalten somit $C = 1/4$, $B = 1/2$, $A = -3/4$. Eine Stammfunktion ist also

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(x+1)(1-x^2)}\,\mathrm{d}x &= -\frac{3}{4}\int \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{3}{4}\ln(|1+x|) - \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{4}\ln(|1-x|) + C\,.\end{aligned}$$

(f) Wir zerlegen den Integranden durch Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{9x}{2x^3+3x+5} &= \frac{1}{2}\,\frac{9x}{(x+1)(x^2-x+\frac{5}{2})} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+\frac{5}{2}}\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\frac{(A+B)x^2 + (B+C-A)x + (\frac{5}{2}A+C)}{(x+1)(x^2-x+\frac{5}{2})}\,.\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man $A=-2$, $B=2$ und $C=5$. Eine Stammfunktion berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\int \frac{9x}{2x^3+3x+5}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+5}{x^2-x+\frac{5}{2}}-\frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{2}\left(\ln\left(|x^2-x+\tfrac{5}{2}|\right)+6\tfrac{2}{3}\arctan\left(\tfrac{2x-1}{3}\right)-2\ln(|x+1|)\right)+C\\ &= \ln\left(\sqrt{\tfrac{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{4}}{(x+1)^2}}\right)+2\arctan\left(\tfrac{2x-1}{3}\right)+C\,.\end{aligned}$$

(g) Mit Partialbruchzerlegung des Integranden erhalten wir

$$\begin{aligned}&\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\\ &=\frac{A(x+1)(x^2+1)^2+B(x^2+1)^2+(Cx+D)(x+1)^2(x^2+1)+(Ex+F)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ &=\frac{(A+C)x^5+(A+B+2C+D)x^4+(2A+2C+2D+E)x^3}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\\ &+\frac{(2A+2B+2C+2D+2E+F)x^2+(A+C+2D+E+2F)x+(A+B+D+F)}{(x+1)^2(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir daher das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\1&1&2&1&0&0\\2&0&2&2&1&0\\2&2&2&2&2&1\\1&0&1&2&1&2\\1&1&0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\\E\\F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\4\\0\\0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&-1\\0&0&0&0&1&0&2\\0&0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

Wir können nun eine Stammfunktion berechnen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^2}{(x+1)^2(x^2+1)^2}&=\int\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{x+1}-\arctan(x)-\frac{1}{x^2+1}+C\,.\end{aligned}$$

(h) Wir substituieren $u=\tan(x/2)$, also $x=2\arctan(u)$ und $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$, $\sin(x)=\frac{2u}{1+u^2}$ und $\cos(u)=\frac{1-u^2}{1+u^2}$. Es gilt nun:

$$\int\frac{\sin^2(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u=2\int\frac{4u^2}{(1+u^2)^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Nach der Lösung zur Aufgabe (g) gilt damit:

$$\int \frac{\sin^2(x)}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{2}{u+1} - 2\arctan(u) - \frac{2}{u^2+1} + C = -\frac{2}{\tan(x/2)+1} - x - \frac{2}{\tan^2(x/2)+1} + C\,.$$

(i) Durch Ausmultiplizieren des Nenners des Integranden erhalten wir

$$(x^2-8)(x^4+8x^2+16) = x^6+8x^4+16x^2-8x^4-64x^2-128 = x^6-48x^2-128\,.$$

Polynomdivision des Zählers durch diesen Nenner liefert nun

$$(x^7-28x^3) : (x^6-48x^2-128) = x + \frac{20x^3+128x}{x^6-48x^2-128} = x + \frac{20x^3+128x}{(x^2-8)(x^2+4)^2}\,.$$

Den hinteren Term zerlegen wir mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{20x^3+128x}{(x^2-8)(x^2+4)^2} = \frac{A}{x-\sqrt{8}} + \frac{B}{x+\sqrt{8}} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2} =$$
$$\frac{A(x+\sqrt{8})(x^2+4)^2+B(x-\sqrt{8})(x^2+4)^2+(Cx+D)(x^2-8)(x^2+4)+(Ex+F)(x^2-8)}{(x^2-8)(x^2+4)^2}\,.$$

Durch Einsetzen von $x=\sqrt{8}$ in die Zähler erhalten wir

$$160\sqrt{8}+128\sqrt{8} = 2A\sqrt{8}\cdot 144 \;\Leftrightarrow\; 288 = 288A \;\Leftrightarrow\; A=1\,.$$

Einsetzen von $x=-\sqrt{8}$ liefert $B=1$. Wir setzen das ein, multiplizieren aus und erhalten durch Koeffizientenvergleich:

$$A=1,\qquad B=1,\qquad C=-2,\qquad D=0,\qquad E=-4,\qquad F=0\,.$$

Wir können das Integral nun berechnen als

$$\int \frac{x^7-28x^3}{(x^2-8)(x^4+8x^2+16)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-\sqrt{8}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+\sqrt{8}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{2x}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - 2\int \frac{2x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x^2 + \ln(|x-\sqrt{8}|) + \ln(|x+\sqrt{8}|) - \ln(|x^2+4|) + \frac{2}{x^2+4} + C\,.$$

(j) Wir verwenden wieder Partialbruchzerlegung um den Integranden aufzuteilen:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{A(x-1)^3+Bx(x-1)^2+Cx(x-1)+Dx}{x(x-1)^3}$$
$$= \frac{(A+B)x^3+(-3A-2B+C)x^2+(3A+B-C+D)x-A}{x(x-1)^3}\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$ und $D = 2$. Es gilt also:

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\ln(|x|) + 2\ln(|x-1|) - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C\,.$$

(k) Wir beginnen mit einer kleinen Umformung:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^6 x(1+\tan^3 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan^3 x)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Wir substituieren nun $u = \tan(x)$ und erhalten $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ und $\mathrm{d}x = \cos^2(x)\,\mathrm{d}u$, und damit:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{(1+\tan^3 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Wir substituieren jetzt ein zweites Mal $t = u^3$ und erhalten $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$ und $\mathrm{d}u = \frac{1}{3u^2}\,\mathrm{d}t$:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{(\cos^3 x + \sin^3 x)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u^2}{(1+u^3)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t} + C$$
$$= -\frac{1}{3(1+u^3)} + C = -\frac{1}{3(1+\tan^3(x))} + C\,.$$

(l) Wir zerlegen den Integranden mittels Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x^2+1}{x^3+1} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$
$$= \frac{A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)}\,.$$

Durch einen Koeffizientenvergleich errechnet man $A = 2/3$ und $B = C = 1/3$, also gilt:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{3}\int \frac{x+1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{2}{3}\ln\left(|x+1|\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\left|x^2-x+1\right|\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C\,.$$

(m) In diesem Fall wenden wir eine Partialbruchzerlegung an. Zunächst formen wir den Integranden zu einer rationalen Funktion um. Dazu verwenden wir die Substitution $t = \mathrm{e}^x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^x$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x} = \frac{\mathrm{d}t}{t}$:

$$\int \frac{3\,\mathrm{e}^x + 4\,\mathrm{e}^{-x} + 2}{1-\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3t + \frac{4}{t} + 2}{t(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{3t^2+2t+4}{t^2(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t\,.$$

Damit erhalten wir für die Partialbruchzerlegung den Ansatz

$$\frac{3t^2+2t+4}{t^2(1-t)(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{1-t} + \frac{D}{1+t}\,.$$

Wie üblich können wir nun mit dem Hauptnenner multiplizieren und dann mittels Einsetzen oder Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem für A, B, C, D gewinnen. Löst man dieses, so erhält man die Partialbruchzerlegung

$$\frac{3t^2+2t+4}{t^2(1-t)(1+t)} = \frac{2}{t} + \frac{4}{t^2} + \frac{9/2}{1-t} + \frac{5/2}{1+t}\,.$$

Diese Brüche können alle elementar integriert werden, als Ergebnis erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{3t^2+2t+4}{t^2(1-t)(1+t)}\,\mathrm{d}t &= 2\ln|t| - \frac{4}{t} - \frac{9}{2}\ln|1-t| + \frac{5}{2}\ln|1+t| + C\\ &= 2x - 4\,\mathrm{e}^{-x} - \frac{9}{2}\ln|1-\mathrm{e}^x| + \frac{5}{2}\ln|1+\mathrm{e}^x| + C\,.\end{aligned}$$

31.2

(a) Wir wenden die Partialbruchzerlegung an und erhalten

$$\begin{aligned}&\frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}\\ &= \frac{(A+C)x^5+(B+D)x^4+(2A+C+E)x^3+(2B+D+F)x^2+Ax+B}{x^2(x^2+1)^2}\,.\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0&0&0\\0&1&0&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\0&2&0&1&0&1\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\B\\C\\D\\E\\F\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\-4\end{pmatrix}$$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$\frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2} = -\frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^2+1} + \frac{3}{(x^2+1)^2}\,.$$

Es ist also

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^4-4}{x^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x &= -4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + 5\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + 3\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x\\ &= -4\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{\sqrt{3}} + 5\Big[\arctan(x)\Big]_1^{\sqrt{3}} + 3\Big[\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x)\Big]_1^{\sqrt{3}}\\ &= \Big[\frac{4}{x} + \frac{3x}{2(x^2+1)} + \frac{13}{2}\arctan(x)\Big]_1^{\sqrt{3}}\\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{13\pi}{6} - 4 - \frac{3}{4} - \frac{13\pi}{8} = \frac{41\sqrt{3}-114+13\pi}{24}\,.\end{aligned}$$

(b) Mit der Substitution $u = \tan(x/2)$ gilt $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \frac{2}{1+u^2}$ und damit:

$$\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1+u^2}{1-u^2}\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(1+u)(1-u)}\,\mathrm{d}u\,.$$

Wir wenden wieder Partialbruchzerlegung an: Der Ansatz

$$\frac{1}{(1+u)(1-u)} = \frac{A}{1+u} + \frac{B}{1-u} = \frac{A(1-u)+B(1+u)}{(1+u)(1-u)} = \frac{(B-A)u+(A+B)}{(1+u)(1-u)}$$

liefert das lineare Gleichungssystem und dessen Lösung

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}\,.$$

Für unser Integral gilt also

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x &= 2\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(1+u)(1-u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \Big[\ln(|1+u|) - \ln(|1-u|)\Big]_0^{1/\sqrt{3}} = \left[\ln\left(\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right)\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right).\end{aligned}$$

31.3

Die Trapezregel:

```
function [ I ] = trapezregel( a,b,n,f )
h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n+1);
fpm=feval(f,x);
fpm(2:end-1) = 2*fpm(2:end-1);
I=0.5*h*sum(fpm);
```

Die Simpsonregel:

```
function [I]=simpson(a,b,n,f)
h=(b-a)/n;
x=linspace(a,b,n+1);
fpm=feval(f,x);
fpm(2:end-1) = 2*fpm(2:end-1);
I=h*sum(fpm)/6;
x=linspace(a+h/2,b-h/2,n);
fpm=feval(f,x);
I = I+2*h*sum(fpm)/3;
```

32 Uneigentliche Integrale

32.1 Aufgaben

32.1 Zeigen Sie:

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \text{falls } \alpha < 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{falls } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

32.2 Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und geben Sie ggf. deren Wert an:

(a) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} |\ln x| \, \mathrm{d}x$,

(b) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1-x^2|}} \, \mathrm{d}x$,

(c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$,

(d) $\displaystyle\int_1^\infty x^x \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$,

(e) $\displaystyle\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$,

(f) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{4x}{x^2-4} \, \mathrm{d}x$,

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty |x| \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$,

(h) $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x$.

32.2 Lösungen

32.1 Im Fall $\alpha = 1$ divergieren beide Integrale, da

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + c\,, \; c \in \mathbb{R}\,.$$

Es sei nun $\alpha \neq 1$. Die Stammfunktion

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}},$$

ausgewertet an den Grenzen des ersten Integrals, lautet

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(1 - \lim_{b \to 0^+} \frac{1}{b^{\alpha-1}}\right).$$

Falls also $\alpha < 1$, konvergiert das Integral, andernfalls divergiert es. Ebenso erhalten wir für das zweite Integral,

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\lim_{b \to \infty} \frac{1}{b^{\alpha-1}} - 1\right).$$

Dieses Integral konvergiert also genau dann, falls $\alpha > 1$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_32,

32.2 (a) Um den Betrag auflösen zu können, teilen wir das Integral an der Stelle $x = 1$ auf (dort wechselt $\ln x$ das Vorzeichen):

$$\int_0^{\mathrm{e}} |\ln x| \, \mathrm{d}x = \int_0^1 -\ln x \, \mathrm{d}x + \int_1^{\mathrm{e}} \ln x \, \mathrm{d}x = -\lim_{M \to 0^+} \Big[x \ln x - x \Big]_M^1 + \Big[x \ln x - x \Big]_1^{\mathrm{e}}$$
$$= -\lim_{M \to 0^+} [-1 - M \ln M + M] + [\mathrm{e} - \mathrm{e} - 0 + 1] = 1 + 1 = 2\,.$$

(b) Auch für dieses Integral lösen wir den Betrag auf, indem wir an geeigneter Stelle (hier $x = 1$) das Integral aufteilen:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1 - x^2|}} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \, \mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x\,.$$

Das erste Integral lässt sich direkt lösen (Arcussinus), das zweite Integral lösen wir mit der Substitution

$$t = x + \sqrt{x^2 - 1}\,, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}\,, \quad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{t} \, \mathrm{d}t\,.$$

Hiermit erhalten wir:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \, \mathrm{d}x = \int_{1+\sqrt{1-1}}^{2+\sqrt{4-1}} \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \Big[\ln t \Big]_1^{2+\sqrt{3}} = \ln(2 + \sqrt{3})\,.$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|1 - x^2|}} \, \mathrm{d}x = \lim_{M \to 1^-} \Big[\arcsin x \Big]_0^M + \ln(2 + \sqrt{3})$$
$$= \frac{\pi}{2} - 0 + \ln(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + \ln(2 + \sqrt{3})\,.$$

(c) Wir benutzen die Ungleichung:

$$\ln x \leq x - 1 \quad \text{für alle} \quad x \geq 0\,.$$

Wir finden hiermit

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} \geq \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x - 1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{y} = \infty\,.$$

(d) Unter Anwendung der Definition und der Abschätzung im Aufgabenteil (c) erhalten wir

$$\int_1^{\infty} x^x \, \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{x \ln x - x^2} \, \mathrm{d}x \leq \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

(e) Partielle Integration liefert

$$\int_0^1 \ln(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \ln(x)\ \mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(x) & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \Big[x\ln(x)\Big]_a^1 - \lim_{a\to 0+} \int_a^1 1\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+} a\ln(a) - \Big[x\Big]_0^1 = -1\,.$$

(f) Mit logarithmischer Integration erhalten wir

$$\int_3^\infty \frac{4x}{x^2-4}\ \mathrm{d}x = 2\lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{2x}{x^2-4}\ \mathrm{d}x = 2\lim_{b\to\infty} \Big[\ln(|x^2-4|)\Big]_3^b$$
$$= 2\lim_{b\to\infty} \ln(b^2-4) - \ln(5) = \infty\,.$$

Dieses uneigentliche Integral existiert also nicht bzw. divergiert. (g) Wieder teilen wir das Integral auf, um den Betrag aufzulösen. In diesem Fall bei $x = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} -x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x + \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x\,.$$

Wir benutzen die Substitution $t = -x^2$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -2x$ und erhalten weiter:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} -x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x + \int_0^\infty x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x &= \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 -x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty}\int_0^b x\,\mathrm{e}^{-x^2}\ \mathrm{d}x \\ &= \lim_{b\to-\infty}\int_{-b^2}^0 \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t + \lim_{b\to\infty}\int_0^{-b^2} -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\lim_{b\to-\infty}\Big[\mathrm{e}^t\Big]_{-b^2}^0 - \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\Big[\mathrm{e}^t\Big]_0^{-b^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 1\,.\end{aligned}$$

(Hier hätte man sich das Leben übrigens etwas einfacher machen können, wenn man zu Beginn feststellt, dass der Integrand eine gerade Funktion ist.)

(h) In diesem Fall ist nur die untere Grenze problematisch, es gilt also:

$$\int_0^{\mathrm{e}} \ln x\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\int_a^{\mathrm{e}} \ln x\ \mathrm{d}x = \lim_{a\to 0}\Big[x\ln x - x\Big]_a^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - \mathrm{e} - \lim_{a\to 0} a\ln a + 0 = 0,$$

da mit der Regel von l'Hôspital gilt:

$$\lim_{a\to 0} a\ln a = \lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{1/a} = \lim_{a\to 0}\frac{1/a}{-1/a^2} = \lim_{a\to 0}\frac{-a^2}{a} = 0\,.$$

33 Separierbare und lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

33.1 Aufgaben

33.1 Geben Sie alle Lösungen der folgenden DGLen an:

(a) $\dot{x}\,t = 2\,x$,

(b) $\dot{x} = \frac{2t}{t^2+1}\,x$,

(c) $x\,(1-t)\,\dot{x} = 1 - x^2$,

(d) $\dot{x}\,(x+1)^2 + t^3 = 0$.

33.2 Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit separierbaren DGLen:

(a) $\dot{x} = -\frac{t}{x}\,,\ x(1) = 1$,

(b) $\dot{x} = \mathrm{e}^x \sin t,\ x(0) = 0$,

(c) $t^2 x = (1+t)\dot{t},\ x(0) = 1$.

33.3 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme. Benutzen Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung die Variation der Konstanten.

(a) $(1+t^2)\,\dot{x} - t\,x = \sqrt{1+t^2}\,,\ x(t_0) = x_0$,

(b) $\mathrm{e}^{-t}\,\dot{x} + 2\ \mathrm{e}^t\ x = \mathrm{e}^t\,,\ x(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}}$.

33.4 Begründen Sie: Ist x_p eine partikuläre Lösung einer linearen DGL 1. Ordnung und L_h die Lösungsmenge der zugehörigen homogenen DGL, so ist $L = x_p + L_h$ die Lösungsmenge der ursprünglichen DGL.

33.2 Lösungen

33.1 Wir wenden jeweils unser Rezept zum Lösen separierbarer DGLen an:

(a) (1) $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2\,\mathrm{d}t}{t}$. (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{t} + c$ ergibt $\ln|x| = 2\ln|t| + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. (3) $x(t) = \pm\,\mathrm{e}^c\,t^2$ mit $c \in \mathbb{R}$. (4) $x(t) = c\,t^2$ mit $c \in \mathbb{R}$.

(b) (1) $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$. (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} + c$ ergibt $\ln|x| = \ln(t^2+1) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. (3) Durch Auflösen nach x erhält man $x(t) = \pm\,\mathrm{e}^c(t^2+1)$ für $c \in \mathbb{R}$. (4) Die Nullfunktion ist auch eine Lösung. Zusammengefasst gilt:

$$x(t) = c(t^2+1) = ct^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c) (1) $\frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$. (2) $\int \frac{x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t + c$ liefert $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| - c = -\ln|1-t|$ mit $c \in \mathbb{R}$. (3) Man erhält: $\frac{(1-t)^2}{c} + x^2 = 1$ (d. h. Ellipsen für $c > 0$, Hyperbeln für $c < 0$.) (4) Die konstanten Funktionen $x = \pm 1$ sind auch Lösungen.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_33,

(d) (1) $(x+1)^2 \mathrm{d}x = (-t^3)\mathrm{d}t$. (2) $\int (x+1)^2 \mathrm{d}x = \int (-t^3)\mathrm{d}t + c$ ergibt $\frac{1}{3}(x+1)^3 = -\frac{1}{4}t^4 + c$. (3) Durch Auflösen nach x erhalten wir die Lösungen:

$$x(t) = \sqrt[3]{c - \tfrac{3}{4}t^4} - 1, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

33.2 (a) Die beidseitige Integration nach Trennung der Variablen liefert:

$$\int x \,\mathrm{d}x = \int -t \,\mathrm{d}t\,, \quad \text{also} \quad \tfrac{x^2}{2} = c - \tfrac{t^2}{2}\,.$$

Durch Auflösen erhält man $x(t) = \pm\sqrt{2c - t^2}$. $x(1) = 1$ liefert $c = 1$, und es ist das positive Zeichen der Wurzel zu wählen. Die eindeutig bestimmte Lösung lautet $x(t) = \sqrt{2 - t^2}$.

(b) Die beidseitige Integration nach Trennung der Variablen liefert:

$$\int \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = \int \sin t \,\mathrm{d}t\,, \quad \text{also} \quad -\mathrm{e}^{-x} = -\cos t + c\,.$$

Durch Auflösen erhält man $x(t) = -\ln(\cos t + c)$. Die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ liefert $c = 0$. Die eindeutig bestimmte Lösung lautet $x(t) = -\ln(\cos t)$.

(c) Die beidseitige Integration nach Trennung der Variablen liefert:

$$\int \tfrac{\mathrm{d}x}{x} = \int \tfrac{t^2}{t+1} \,\mathrm{d}t = \int (t-1) + \tfrac{1}{t+1} \,\mathrm{d}t\,, \quad \text{also} \quad \ln|x| = c + \tfrac{1}{2}t^2 - t + \ln|t+1|\,.$$

Durch Auflösen erhält man $x(t) = \mathrm{e}^c\,\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}t^2 - t)}(t+1)$. Die Anfangsbedingung $x(0) = 1$ liefert $c = 0$. Die eindeutig bestimmte Lösung lautet $x(t) = \mathrm{e}^{(\frac{1}{2}t^2 - t)}(t+1)$.

33.3 Wir wenden das Rezept zum Lösen einer linearen DGL 1. Ordnung an, wobei wir in einem Schritt (4) die Zahl c durch die jeweilige Anfangsbedingung festnageln:

(a) (1) Die zugehörige homogene DGL lautet $\dot{x} = \frac{t}{1+t^2}\,x$. Die Lösungsmenge ist

$$L_h = \{c\sqrt{1+t^2} \mid c \in \mathbb{R}\}\,.$$

(2) Mit dem Ansatz $x_p = c(t)\sqrt{1+t^2}$ bestimmt man die partikuläre Lösung:

$$\dot{x}_p = \dot{c}\sqrt{1+t^2} + c\tfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \tfrac{t}{1+t^2}\,c\sqrt{1+t^2} + \tfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

Damit gilt

$$\dot{c} = \tfrac{1}{1+t^2}\,, \text{ also } c = \arctan t \text{ und damit } x_p = \arctan(t)\sqrt{1+t^2}\,.$$

(3) Die allgemeine Lösung der DGL lautet damit

$$L = x_p + L_h = \{\arctan(t)\sqrt{1+t^2} + c\sqrt{1+t^2} \mid c \in \mathbb{R}\}\,.$$

(4) Die Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ legt das c fest:

$$x_0 = \sqrt{1+t_0^2}\,(c + \arctan t_0) \;\Rightarrow\; c = \frac{x_0}{\sqrt{1+t_0^2}} - \arctan t_0\,.$$

Es ist also $x(t) = \sqrt{1+t^2}\left(\frac{x_0}{\sqrt{1+t_0^2}} - \arctan t_0 + \arctan t\right)$ die eindeutig bestimmte Lösung.

(b) (1) Die zugehörige homogene DGL lautet $\dot{x} = -2\,\mathrm{e}^{2t}\,x$. Die Lösungsmenge ist

$$L_h = \{c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}} \mid c \in \mathbb{R}\}\,.$$

(2) Mit dem Ansatz $x_p = c(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}}$ bestimmt man die partikuläre Lösung:

$$\dot{x}_p = \dot{c}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}} + c(-2\,\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}}) = -2\,\mathrm{e}^{2t}\,c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}} + \mathrm{e}^{2t}\,.$$

Damit gilt

$$\dot{c} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2t}+2t}\,,\;\text{ also }\; c = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2t}} \;\text{ und damit }\; x_p = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{2t}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}} = \tfrac{1}{2}\,.$$

(3) Die allgemeine Lösung der DGL lautet damit

$$L = x_p + L_h = \{\tfrac{1}{2} + c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}} \mid c \in \mathbb{R}\}\,.$$

(4) Die Anfangsbedingung $x(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\mathrm{e}}$ legt das c fest:

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2} + c\,\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{0}} \;\Rightarrow\; c = 1\,.$$

Es ist also $x(t) = \frac{1}{2} + \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{2t}}$ die eindeutig bestimmte Lösung.

33.4 Wir beweisen die Gleichheit der Mengen $L = x_p + L_h$, indem wir beide Inklusionen zeigen:

(i) $L \subseteq x_p + L_h$: Es sei $x \in L$ eine Lösung von $\dot{x}(t) + a(t)\,x(t) = s(t)$. Da x_p auch eine Lösung dieser DGL ist, gilt für die Differenz $x - x_p$:

$$(\dot{x} - \dot{x}_p) + a(t)\,(x - x_p) = s(t) - s(t) = 0\,.$$

Demzufolge ist $x - x_p \in L_h$ eine Lösung der dazugehörigen homogenen DGL. Damit erhalten wir

$$x = x_p + (x - x_p) \in x_p + L_h\,,\quad \text{da }\; x - x_p \in L_h\,.$$

(ii) $L \supseteq x_p + L_h$: Ist $x_p + x_h \in x_p + L_h$ mit einer Lösung x_h der homogenen DGL, so gilt:

$$(\dot{x}_p + \dot{x}_h) + a(t)\,(x_p + x_h) = s(t) + 0 = s(t)\,.$$

Es ist also $x_p + x_h$ eine Lösung der inhomogenen DGL, also $x_p + x_h \in L$.

34 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

34.1 Aufgaben

34.1 Zeigen Sie, dass Summe und skalare Vielfache von Lösungen einer homogenen linearen DGL wieder Lösungen dieser linearen DGL sind.

34.2 Bestimmen Sie eine stetige Funktion $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die für alle $t \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$x(t) + \int_0^t x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 1\,.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Schreiben Sie zunächst die Integralgleichung in eine DGL mit Anfangsbedingung um.

(b) Wie lautet eine allgemeine Lösung x_h für die dazugehörige homogene DGL?

(c) Benutzen Sie zur Bestimmung einer partikulären Lösung $x_p(t)$ den Ansatz vom Typ der rechten Seite und geben Sie die allgemeine Lösung der DGL aus (a) an.

(d) Ermitteln Sie die Lösung des AWPs aus (a) und damit eine Lösung der Integralgleichung.

34.3 Lösen Sie die AWPe

(a) $x^{(4)} - x = t^3,\ x(0) = 2,\ \dot{x}(0) = 0,\ \ddot{x}(0) = 2,\ \dddot{x}(0) = -6.$

(b) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = \mathrm{e}^t + \sin t,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

(c) $\dddot{x} + \ddot{x} - 5\dot{x} + 3x = 6\sinh 2t,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \ddot{x}(0) = 4.$

(d) $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3x = \mathrm{e}^t + \sin t,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

(e) $\dddot{x} + \ddot{x} - 5\dot{x} + 3x = 6\sinh 2t,\ x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ \ddot{x}(0) = 4.$

34.4 Gegeben ist die DGL $\ddot{x} - 7\dot{x} + 6x = \sin t$.

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

(b) Für welche Anfangswerte $x(0),\ \dot{x}(0)$ ist die Lösung periodisch?

34.5 Bestimmen Sie jeweils ein reelles Fundamentalsystem für die folgenden linearen DGLen:

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_34,

(a) $\ddot{x} + 4\dot{x} - 77x = 0.$
(b) $\ddot{x} + 8\dot{x} + 16x = 0.$
(c) $\ddot{x} + 10\dot{x} + 29x = 0.$
(d) $\ddot{x} + 2\dot{x} = 0.$
(e) $\ddot{x} = 0.$

34.6 Untersuchen Sie mit Hilfe der Schwingungsgleichung

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

die Bewegung einer Masse von $m = 50$ kg, die mit einer elastischen Feder der Federkonstanten $c = 10200$ N/m verbunden ist, wenn das System den Dämpfungsfaktor $b = 2000$ kg/s besitzt. Dabei werde die Masse zu Beginn der Bewegung ($t = 0$) in der Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit $v_0 = 2.8$ m/s angestoßen ($x(0) = 0$ m, $\dot{x}(0) = 2.8$ m/s). Skizzieren Sie den Verlauf der Bewegung.

34.7 Man bestimme alle Funktionen $w(t)$, $t \geq 0$, mit

$$w^{(4)} + 4a^4 w = 1\,, \quad a > 0\,, \quad w(0) = w''(0) = 0\,, \quad \lim_{t\to\infty} |w(t)| < \infty\,.$$

(Biegelinie einer einseitig unendlich langen Schiene im Schotterbett mit freiem Auflager bei $t = 0$.)

34.2 Lösungen

34.1 Wir betrachten die folgenden homogene lineare DGL:

$$a_n(t)\, x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)\, \dot{x}(t) + a_0(t)x(t) = 0\,.$$

Es gilt für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ und je zwei Lösungen x_1 und x_2 dieser DGL

$$\begin{aligned} &a_n\,(\lambda\, x_1 + x_2)^{(n)} + a_{n-1}\,(\lambda\, x_1 + x_2)^{(n-1)} + \cdots + a_1\,(\lambda\, x_1 + x_2)' + a_0(\lambda\, x_1 + x_2) \\ &= \lambda(a_n\, x_1^{(n)} + a_{n-1}\, x_1^{(n-1)} + \cdots + a_1\, \dot{x}_1 + a_0\, x_1) \\ &\quad + a_n\, x_2^{(n)} + a_{n-1}\, x_2^{(n-1)} + \cdots + a_1\, \dot{x}_2 + a_0 x_2 = \lambda\, 0 + 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Folglich sind Summe und skalare Vielfache von Lösungen wieder Lösungen.

34.2 (a) Einsetzen von $t = 0$ in die Gleichung liefert die Anfangsbedingung $x(0) = 1$, während das Ableiten der Integralgleichung die folgende lineare DGL ergibt:

$$\dot{x} + x = t + 3\,.$$

(b) Die allgemeine Lösung der DGL $\dot{x} + x = 0$ lautet $x_h(t) = c\,\mathrm{e}^{-t}$, $c \in \mathbb{R}$.

(c) Mit dem Ansatz $x_p(t) = at + b$ erhalten wir $\dot{x}_p = a$ und somit durch Einsetzen in die DGL die Gleichung

$$a + at + b = t + 3$$

Dies wird für die Konstanten $a = 1, b = 2$ erfüllt und wir erhalten $x_p(t) = t + 2$. Die allgemeine Lösung der DGL aus (a) lautet damit

$$x_a(t) = x_p(t) + x_h(t) = t + 2 + c\,\mathrm{e}^{-t} \ .$$

(d) Durch Einsetzen der Anfangsbedingung bestimmen wir das c:

$$1 = x_a(0) = 2 + c \ \Rightarrow \ c = -1 \,.$$

Damit lautet die Lösung des AWPs aus (a) (und damit der Integralgleichung):

$$x(t) = -\,\mathrm{e}^{-t} + t + 2 \,.$$

34.3 Wir handeln nach unserem Rezpt: Wir bestimmen die allgemeine Lösung der homogenen DGL, dann eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL und damit die allgemeine Lösung der DGL; schließlich ermitteln wir durch Einsetzen der Anfangsbedingungen die Lösung des AWP:

(a) Das charakteristische Polynom $\lambda^4 - 1 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm 1$ und $\lambda_{3,4} = \pm\,\mathrm{i}$. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t \,.$$

Für die partikuläre Lösung wählen wir als Störgliedansatz

$$x_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D \,.$$

Eingesetzt in die inhomogene DGL erhalten wir

$$-At^3 - Bt^2 - Ct - D = t^3 \ \Rightarrow \ A = -1 \,, \ B = C = D = 0 \,,$$

also $x_p(t) = -t^3$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t - t^3 \,.$$

Aus den Randbedingungen erhalten wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ \dot{x}(0) &= c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ \ddot{x}(0) &= c_1 + c_2 - c_3 = 2 \\ \dddot{x}(0) &= c_1 - c_2 - c_4 - 6 = -6 \end{aligned}$$

Aus der 1. und 3. Gleichung folgt $c_3 = 0$, aus der 2. und 4. Gleichung folgt $c_4 = 0$. Damit folgt dann $c_1 = c_2 = 1$. Die Lösung des AWP ist somit

$$x(t) = \mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} - t^3 = 2 \cosh t - t^3 \,.$$

(b) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -3$. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$x_h(t) = c_1 \, \mathrm{e}^t + c_1 \, \mathrm{e}^{-3t} \; .$$

Nach dem Superpositionsprinzip erhalten wir für die Störfunktion $s(t) = \mathrm{e}^t + \sin t$ eine partikuläre Lösung x_p, indem wir x_p auch als Summe solcher Funktionen per Ansatz vom Typ der rechten Seite aufstellen. Da e^t Lösung der homogenen DGL ist, liegt Resonanz vor. Daher wählen wir als Ansatz für die partikuläre Lösung (mit den ersten und zweiten Ableitungen):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A\,t\,\mathrm{e}^t + B\cos t + C\sin t\,, \\ \dot{x}_p(t) &= A\,(1+t)\,\mathrm{e}^t - B\sin t + C\cos t\,, \\ \ddot{x}_p(t) &= A\,(2+t)\,\mathrm{e}^t - B\cos t - C\sin t\,. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies

$$\begin{aligned} A\,(2+t)\;\mathrm{e}^t - B\;\cos t - C\;\sin t + 2\,A\,(1+t)\;\mathrm{e}^t - 2\,B\;\sin t + \\ + 2\,C\;\cos t - 3\,A\,t\,\mathrm{e}^t - 3\,B\;\cos t - 3\,C\;\sin t = \mathrm{e}^t + \sin t\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf

$$4A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \tfrac{1}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} -4B + 2C = 0 \\ -2B - 4C = 1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad B = -\tfrac{1}{10}\,,\ C = -\tfrac{1}{5}$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist somit

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{1}{4} t\,\mathrm{e}^t - \tfrac{1}{10}(2\sin t + \cos t)\,.$$

Zur Ermittlung des AWP leiten wir unsere Lösung ab,

$$\dot{x}(t) = C_1\,\mathrm{e}^t - 3C_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{1}{4}(t+1)\,\mathrm{e}^t - \tfrac{1}{10}(2\cos t - \sin t)\,,$$

und setzen die Anfangsbedingungen ein

$$\left.\begin{aligned} x(0) = c_1 + c_2 - \tfrac{1}{10} = 0 \\ \dot{x}(0) = c_1 - 3c_2 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad c_1 = \tfrac{1}{16}\,,\ c_2 = \tfrac{3}{80}\,.$$

Die Lösung des AWP lautet folglich

$$x(t) = \tfrac{1}{16}(1+4t)\,\mathrm{e}^t + \tfrac{3}{80}\,\mathrm{e}^{-3t} - \tfrac{1}{10}(2\sin t + \cos t)\,.$$

(c) Das charakteristische Polynom $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = -3$. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL lautet damit:

$$x_h(t) = c_1 \,\mathrm{e}^t + c_2 t \,\mathrm{e}^t + c_3 \,\mathrm{e}^{-3t} \;.$$

Für das Störglied $s(t) = 6 \sinh t = 3(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})$ wählen wir nach dem Superpositionsprinzip mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite die partikuläre Lösung (mit den entsprechenden Ableitungen):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-2t} \,, \\ \dot{x}_p(t) &= 2A\,\mathrm{e}^{2t} - 2B\,\mathrm{e}^{-2t} \,, \\ \ddot{x}_p(t) &= 4A\,\mathrm{e}^{2t} + 4B\,\mathrm{e}^{-2t} \,, \\ \dddot{x}_p(t) &= 8A\,\mathrm{e}^{2t} - 8B\,\mathrm{e}^{-2t} \;. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL führt dies auf

$$5A\,\mathrm{e}^{2t} + 9B\,\mathrm{e}^{-2t} = 3\,\mathrm{e}^{2t} - 3\,\mathrm{e}^{-2t} \quad \text{und somit auf} \quad A = \tfrac{3}{5}\,, \; B = -\tfrac{1}{3}\,.$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2 t\,\mathrm{e}^t + c_3\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} \;.$$

Zur Lösung des AWP leiten wir diese Lösung zwei Mal ab,

$$\dot{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2(t+1)\,\mathrm{e}^t - 3c_3\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{6}{5}\,\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} \,,$$

$$\ddot{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2(t+2)\,\mathrm{e}^t + 9c_3\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{12}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} \,,$$

und setzen die Anfangsbedingungen ein:

$$x(0) = c_1 + C_3 + \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -\tfrac{4}{15} - c_3$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(0) &= c_1 + c_2 - 3c_3 + \tfrac{6}{5} + \tfrac{2}{3} = 0 \\ \ddot{x}(0) &= c_1 + 2c_2 + 9c_3 + \tfrac{12}{5} - \tfrac{4}{3} = 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= -\tfrac{24}{15} \\ 2c_2 + 8c_3 &= -\tfrac{48}{15} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_3 &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Hieraus folgt schließlich $c_1 = -\frac{2}{3}$. Die Lösung des AWP lautet somit

$$x(t) = -\tfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^t + \tfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t} \;.$$

(d) Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1\,, \quad \lambda_2 = -3$$

führt auf die allgemeine Lösung der homogenem DGL:

$$x_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} \;.$$

Das Störglied besteht aus den Funktionen e^{at} und $c_1 \cos bt + c_2 \sin bt$ mit $a = 1$ und $b = 1$. Da $1 + \mathrm{i}$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, liegt keine Resonanz vor. Der Ansatz vom Typ der rechten Seite lautet damit (mit den entsprechenden Ableitungen):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= c_1 t\,\mathrm{e}^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t\,, \\ \dot{x}_p(t) &= c_1(1+t)\,\mathrm{e}^t - c_2 \sin t + c_3 \cos t\,, \\ \ddot{x}_p(t) &= c_1(2+t)\,\mathrm{e}^t - c_2 \cos t - c_3 \sin t\,. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL ergibt dies

$$\begin{aligned} &c_1(2+t)\,\mathrm{e}^t - c_2 \cos t - c_3 \sin t + 2c_1(1+t)\,\mathrm{e}^t - 2c_2 \sin t + 2c_3 \cos t \\ &-3c_1 t\,\mathrm{e}^t - 3c_2 \cos t - 3c_3 \sin t = \mathrm{e}^t + \sin t\,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\left.\begin{aligned} 4c_1 &= 1 \\ -4c_2 + 2c_3 &= 0 \\ -2c_2 - 4c_3 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ c_1 = \tfrac{1}{4}\,, \quad c_2 = -\tfrac{1}{10}\,, \quad c_3 = -\tfrac{1}{5}$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{1}{4} t\,\mathrm{e}^t - \tfrac{1}{10}(2 \sin t + \cos t)\,.$$

Um eine Lösung des AWP zu erhalten, leiten wir die Lösung ab,

$$\dot{x}(t) = C_1\,\mathrm{e}^t - 3C_2\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{1}{4}(t+1)\,\mathrm{e}^t - \tfrac{1}{10}(2 \cos t - \sin t)\,,$$

und setzen die Anfangsbedingungen ein:

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 - \tfrac{1}{10} = 0 \\ \dot{x}(0) &= c_1 - 3c_2 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ c_2 = \tfrac{3}{80}\,, \quad c_1 = \tfrac{1}{16}\,.$$

Die Lösung des AWP lautet somit

$$x(t) = \tfrac{1}{16}(1+4t)\,\mathrm{e}^t + \tfrac{3}{80}\,\mathrm{e}^{-3t} - \tfrac{1}{10}(2 \sin t + \cos t)\,.$$

(e) Das charakteristische Polynom $\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = 0$ besitzt die Lösungen $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = -3$. Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$x_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2 t\,\mathrm{e}^t + c_3\,\mathrm{e}^{-3t}\,.$$

Für das Störglied $s(t) = 6\sinh t = 3(\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t})$ wählen wir den partikulären Lösungsansatz (mit den entsprechenden Ableitungen):

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A\,\mathrm{e}^{2t} + B\,\mathrm{e}^{-2t}\,, \\ \dot{x}_p(t) &= 2A\,\mathrm{e}^{2t} - 2B\,\mathrm{e}^{-2t}\,, \\ \ddot{x}_p(t) &= 4A\,\mathrm{e}^{2t} + 4B\,\mathrm{e}^{-2t}\,, \\ \dddot{x}_p(t) &= 8A\,\mathrm{e}^{2t} - 8B\,\mathrm{e}^{-2t}\,. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL führt dies auf

$$5A\,\mathrm{e}^{2t} + 9B\,\mathrm{e}^{-2t} = 3\,\mathrm{e}^{2t} - 3\,\mathrm{e}^{-2t} \;\Rightarrow\; A = \tfrac{3}{5}\,,\; B = -\tfrac{1}{3}\,.$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der DGL

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2 t\,\mathrm{e}^{t} + c_3\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

Um das AWP zu lösen, leiten wir ab,

$$\dot{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2(t+1)\,\mathrm{e}^{t} - 3c_3\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{6}{5}\,\mathrm{e}^{2t} + \tfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

$$\ddot{x}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2(t+2)\,\mathrm{e}^{t} + 9c_3\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{12}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{4}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}\,,$$

und setzen die Anfangsbedingungen ein:

$$x(0) = c_1 + c_3 + \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{3} = 0 \quad\Rightarrow\quad c_1 = -\tfrac{4}{15} - c_3$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(0) &= c_1 + c_2 - 3c_3 + \tfrac{6}{5} + \tfrac{2}{3} = 0 \\ \ddot{x}(0) &= c_1 + 2c_2 + 9c_3 + \tfrac{12}{5} - \tfrac{4}{3} = 4 \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \left.\begin{aligned} c_2 - 4c_3 &= -\tfrac{24}{15} \\ 2c_2 + 8c_3 &= -\tfrac{48}{15} \end{aligned}\right\} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} c_2 &= 0 \\ c_3 &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Hieraus folgt $c_1 = -\frac{2}{3}$. Die Lösung des AWP lautet somit:

$$x(t) = -\tfrac{2}{3}\,\mathrm{e}^{t} + \tfrac{2}{5}\,\mathrm{e}^{-3t} + \tfrac{3}{5}\,\mathrm{e}^{2t} - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

34.4 (a) Die charakteristische Gleichung $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 6$ führt auf die allgemeine Lösung der homogenen DGL

$$x_h = c_1\,\mathrm{e}^{t} + c_2\,\mathrm{e}^{6t}\,.$$

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL lässt sich durch den folgenden Störgliedansatz (mit den entsprechenden Ableitungen) ermitteln:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= A\cos t + B\sin t\,, \\ \dot{x}_p(t) &= -A\sin t + B\cos t\,, \\ \ddot{x}_p(t) &= -A\cos t - B\sin t\,. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in die DGL ergibt sich die Bedingung

$$(-A - 7B + 6A)\cos t + (-B + 7A + 6B)\sin t = \sin t\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich führt auf

$$\left.\begin{aligned} 5A - 7B &= 0 \\ 7A + 5B &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \tfrac{7}{74}\,,\ B = \tfrac{5}{74}\,.$$

Somit ist die allgemeine Lösung der DGL

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{6t} + \tfrac{7}{74}\cos t + \tfrac{5}{74}\sin t\,.$$

(b) Die Lösung ist offensichtlich genau dann periodisch, wenn $c_1 = c_2 = 0$ ist. Dafür müssen die Anfangswerte $x(0) = \frac{7}{74}$ und $\dot{x}(0) = \frac{5}{74}$ lauten.

34.5 Es sind jeweils die Nullstellen der dazugehörigen charakteristischen Polynome zu bestimmen, man beachte unser Rezept zum Lösen einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten:

(a) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 4\lambda - 77$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 7$ und $\lambda_2 = -11$. Ein reelles Fundamentalsystem ist somit $\{\mathrm{e}^{7t}, \mathrm{e}^{-11t}\}$.
(b) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 8\lambda + 16$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -4$. Ein reelles Fundamentalsystem ist somit $\{\mathrm{e}^{-4t}, t\,\mathrm{e}^{-4t}\}$.
(c) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 10\lambda + 29$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -5 \pm 2\,\mathrm{i}$. Ein reelles Fundamentalsystem ist somit $\{\mathrm{e}^{-5t}\cos 2t, \mathrm{e}^{-5t}\sin 2t\}$.
(d) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda$ hat die Nullstellen $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = -2$. Ein reelles Fundamentalsystem ist somit $\{1, \mathrm{e}^{-2t}\}$.
(e) Das charakteristische Polynom $\lambda^2 = 0$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 0$. Ein reelles Fundamentalsystem ist somit $\{1, t\}$.

34.6 Die charakteristische Gleichung lautet hier

$$m\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}\,.$$

Einsetzen der Zahlenwerte (MKS-System) liefert:

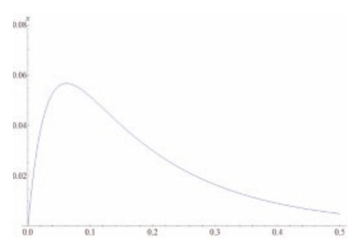
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2000 \pm \sqrt{2000^2 - 4\cdot 50\cdot 10200}}{2\cdot 50} = -20 \pm 14\ [s^{-1}] \ \Rightarrow\ \lambda_1 = -6\,, \quad \lambda_2 = -34\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-6t} + c_2\,\mathrm{e}^{-34t}\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt auf $c_1 = 0.1$, $c_2 = -0.1$. Die Lösung lautet also

$$x(t) = 0.1\,(\mathrm{e}^{-6t} - \mathrm{e}^{-34t})\,, \quad t > 0\,.$$



34.7 Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^4 + 4a^4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2,3,4} = \pm a(1 \pm \mathrm{i})$$

führt auf die homogene Lösung

$$w_h(t) = c_1\,\mathrm{e}^{at}\cos at + c_2\,\mathrm{e}^{at}\sin at + c_3\,\mathrm{e}^{-at}\cos at + c_4\,\mathrm{e}^{-at}\sin at\,.$$

Offensichtlich ist die konstante Funktion

$$w_p(t) = \frac{1}{4a^4}$$

eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL. Somit lautet die allgemeine Lösung

$$w(t) = \underbrace{\mathrm{e}^{at}}_{\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty}\underbrace{(c_1\cos at + c_2\sin at)}_{\in\left[-\sqrt{c_1^2+c_2^2},\sqrt{c_1^2+c_2^2}\right]} + \underbrace{\mathrm{e}^{-at}}_{\overset{t\to\infty}{\longrightarrow}0}\underbrace{(c_3\cos at + c_4\sin at)}_{\in\left[-\sqrt{c_3^2+c_4^2},\sqrt{c_3^2+c_4^2}\right]} + \frac{1}{4a^4}$$

$$\Rightarrow\; \lim_{t\to\infty}|w(t)| < \infty \;\Leftrightarrow\; c_1 = c_2 = 0$$

Die allgemeine Lösung (mit den entsprechenden Ableitungen) lautet also

$$\begin{aligned}
w(t) &= \mathrm{e}^{-at}(c_3\cos at + c_4\sin at) + \frac{1}{4a^4}\\
w'(t) &= -a\,\mathrm{e}^{-at}[(c_3 - c_4)\cos at + (c_3 + c_4)\sin at]\\
w''(t) &= 2a^2\,\mathrm{e}^{-at}(c_3\sin at - c_4\cos at)
\end{aligned}$$

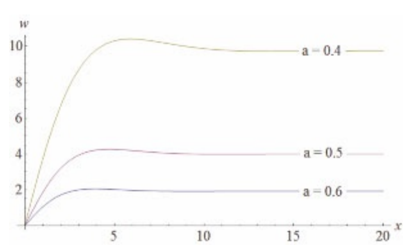
Aus den Anfangsbedingungen folgt dann

$$\begin{aligned}
w(0) &= C_3 + \frac{1}{4a^4} = 0 \;\Rightarrow\; c_3 = -\frac{1}{4a^4}\\
w''(0) &= -2a^2 c_4 = 0 \;\Rightarrow\; c_4 = 0
\end{aligned}$$

Somit lautet dann die spezielle Lösung des AWP

$$w(t) = \frac{1}{4a^4}(1 - \mathrm{e}^{-at}\cos at)$$

mit $\lim_{t\to\infty}|w(t)| = \frac{1}{4a^4}$.



35 Einige besondere Typen von Differentialgleichungen

35.1 Aufgaben

35.1 Lösen Sie die AWPe:

(a) $\dot{x}\,t - 2\,x - t = 0,\ t > 0,\ x(2) = 6,$

(b) $\dot{x} - \frac{1}{2}\cot t\,x + \cos t\,x^3 = 0,\ 0 < t < \pi,\ x(\pi/2) = 1.$

35.2 Lösen Sie die folgenden DGLen:

(a) $4x\dot{x} - x^2 + 1 + t^2 = 0,$

(b) $t(t-1)\dot{x} - (1+2t)x + x^2 + 2t = 0,$

(c) $t\dot{x} = x + \sqrt{x^2 - t^2},$

(d) $t^2\ddot{x} + t\dot{x} - x = 0,$

(e) $t^2 x^{(4)} + 3\dddot{x} - \frac{7}{t}\dot{x} + \frac{8}{t^2}x = 0,$

(f) $t^2\ddot{x} - t\dot{x} + 2x = 0.$

35.3 Gegeben ist das AWP $\dot{x} = tx + t\,,\quad x(0) = 0.$

(a) Stellen Sie die Lösung als Potenzreihe dar, ermitteln Sie die ersten fünf nicht verschwindenden Glieder und berechnen Sie damit eine Näherung von $x(2)$.

(b) Bestimmen Sie durch wiederholtes Differenzieren der DGL die Taylorentwicklung von $x(t)$ an der Stelle $t_0 = 0$.

(c) Ermitteln Sie die Lösung $x(t)$ explizit in geschlossener Form, leiten Sie daraus die Potenzreihenentwicklung bei $t_0 = 0$ ab und berechnen Sie $x(2)$.

35.4 Mittels Potenzreihenansatz löse man das AWP für $(1+t^2)\,\ddot{x} + t\dot{x} - x = 0$ mit den Anfangswerten $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ bzw. $x(0) = \dot{x}(0) = 1$.

35.5 Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden DGLen mittels eines Potenzreihenansatzes:

(a) $\ddot{x} - tx = 0.$ (b) $\dot{x} + tx = 0.$ (c) $\dot{x} - tx = 1 + t.$

35.2 Lösungen

35.1 (a) Wir haben es mit einer homogenen Differentialgleichung zu tun, die DGL lässt sich nämlich umformen in

$$\dot{x} = 2\,\frac{x}{t} + 1 = \varphi(x/t) \quad \text{mit} \quad \varphi(z) = 2\,z + 1\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_35,

Wir wenden unser Rezept an:

(1) Die Substitution: $z = {}^{x}/_{t}$ liefert die separierbare DGL

$$\dot{z} = \tfrac{1}{t}(\varphi(z) - z) = \tfrac{1}{t}(z+1)\,.$$

(2) Als Lösung der separierbaren DGL aus (1) erhalten wir $z(t) = ct - 1$, $c \in \mathbb{R}$.

(3) Durch Rücksubstitution erhalten wir die Lösung $x(t) = ct^2 - t$. Nun setzen wir die Anfangsbedingung ein:

$$6 = x(2) = c4 - 2 \;\Rightarrow\; c = 2\,.$$

Also ist

$$x(t) = 2t^2 - t$$

die Lösung des AWP.

(b) Dies ist eine Bernoulli'sche DGL $\dot{x} = a(t)x + b(t)x^{\alpha}$ mit $\alpha = 3$. Wir wenden unser Rezept an:

(1) Die Substitution $z(t) = x^{1-\alpha}$ führt hier auf $z = \frac{1}{x^2}$. Die DGL geht damit über in die lineare DGL

$$\dot{z} + \cot t\, z - 2\cos t = 0\,.$$

Wir lösen diese lineare DGL 1. Ordnung: Bestimmen der allgemeinen Lösung der homogenen DGL $\dot{z} + z\cot t = 0$ durch Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \ln|z| = -\ln|\sin t| + \tilde{C} \;\Rightarrow\; z_h = \frac{c}{\sin t}\,,\; c > 0\,,$$

da $z = x^{-2} > 0$.

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung variieren wir die Konstanten:

$$\frac{\dot{c}}{\sin t} - c\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \frac{c}{\sin t}\cot t - 2\cos t = 0$$

liefert

$$\dot{c}(t) = 2\sin t\cos t \;\text{ und damit }\; c(t) = \sin^2 t\,.$$

Die partikuläre Lösung ist damit $z_p(t) = \sin t$, und die allgemeine Lösung lautet

$$z(t) = \frac{c}{\sin t} + \sin t\,, \quad c > 0\,.$$

(2) Rücksubstitution liefert die Lösung

$$x^2 = \frac{1}{\frac{c}{\sin t} + \sin t}\,.$$

(3) Die Anfangsbedingung legt das c fest:

$$x^2(\tfrac{\pi}{2}) = \tfrac{1}{C+1} = 1 \;\Rightarrow\; c = 0$$

Somit ist die Lösung des AWP $x(t) = \frac{1}{\sqrt{\sin t}}$.

35.2 (a) Dies ist eine Bernoulli'sche DGL:

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^{\alpha} \quad \text{mit} \quad a(t) = \tfrac{1}{4}\,,\ b(t) = \tfrac{1}{4}\,(t^2+1)\,,\ \alpha = -1\,.$$

(1) Durch die Substitution $z(t) = x^{1-\alpha}$ erhalten wir die lineare DGL:

$$\dot{z} = \tfrac{1}{2}z - \tfrac{1}{2}(t^2+1)\,.$$

Die Lösung der homogenen DGL ist $z_h(t) = c\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$, $c \in \mathbb{R}$. Variation der Konstanten (Ansatz $z_p(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$) liefert:

$$\dot{c}\,\mathrm{e}^{t/2} + \tfrac{1}{2}c\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} - \tfrac{1}{2}c\,\mathrm{e}^{t/2} = -\tfrac{1}{2}(1+t^2) \;\Rightarrow\; \dot{c}(t) = -\tfrac{1+t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,.$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} c(t) &= \int -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t/2} - \tfrac{t^2}{2}\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-t/2} + t^2\,\mathrm{e}^{-t/2} - \int 2t\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t \\ &= (1+t^2)\,\mathrm{e}^{-t/2} - \left(-4t\,\mathrm{e}^{-t/2} + \int 4\,\mathrm{e}^{-t/2}\,\mathrm{d}t\right) = (t^2+4t+9)\,\mathrm{e}^{-t/2}\,. \end{aligned}$$

Es ist also $z_p(t) = t^2+4t+9$ eine partikuläre Lösung. Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$z(t) = c\,\mathrm{e}^{t/2} + t^2 + 4t + 9\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

(2) Durch Rücksubstitution erhalten wir die Lösung $x^2(t) = c\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + t^2 + 4t + 9$ und damit

$$x(t) = \pm\sqrt{c\,\mathrm{e}^{\frac{t}{2}} + t^2 + 4t + 9}\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

(b) Hier liegt eine Riccati'sche DGL vor:

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + r(t)\,.$$

Ist eine Lösung $x_p(t)$ bekannt, dann lässt sich die DGL auf eine Bernoulli'sche DGL zurückführen.

Durch Probieren mit einfachsten Funktionen $x_p(t)$ stellt man fest, dass $x_p(t) = 1$ eine Lösung der DGL ist. Wir beachten nun unser Rezept:

(1) Wir lösen die Bernoulli'sche DGL

$$\dot{z} + \frac{1-2t}{t(t-1)}z = -\frac{1}{t(t-1)}z^2\,.$$

Mit dem Ansatz $y(t) = z^{1-\alpha}$ geht die Bernoulli'sche DGL in eine lineare DGL über:

$$\dot{y} + \frac{2t-1}{t(t-1)}y = \frac{1}{t(t-1)}\,.$$

Die Lösung der homogenen DGL erhält man durch Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{2t-1}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t \;\Rightarrow\; \ln|y| = -\ln\left|t^2-t\right| + \tilde{c}\,,$$

also

$$y_h(t) = c\frac{1}{t^2-t}\,,\; c \in \mathbb{R}\,.$$

Variation der Konstanten und Einsetzen liefert:

$$\frac{\dot{c}}{t(t-1)} + c\frac{-2t+1}{t^2(t-1)^2} + \frac{2t-1}{t(t-1)}\frac{c}{t(t-1)} = \frac{1}{t(t-1)} \Rightarrow \dot{c}(t) = 1 \Rightarrow c(t) = t.$$

Damit ist eine partikuläre Lösung $y_p(t) = \frac{t}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1}$ gefunden. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$y(t) = \frac{c}{t(t-1)} + \frac{1}{t-1} = \frac{t+c}{t(t-1)}\,.$$

(2) Als Lösung der Riccati'schen DGL erhalten wir dann mit $z = \frac{1}{y} = \frac{t(t-1)}{t+c}$ und $x = 1 + z = 1 + \frac{t(t-1)}{t+c}$:

$$x(t) = \frac{t^2+c}{t+c}\,.$$

(c) Es sei zunächst $t > 0$, dann ist

$$\dot{x} = {}^x\!/_t + \sqrt{({}^x\!/_t)^2 - 1} = \varphi\left({}^x\!/_t\right) \quad \text{mit} \quad \varphi(z) = z + \sqrt{z^2-1}\,.$$

Die DGL ist also eine homogene DGL. Wir beachten unser Rezept:

(1) Erhalte die separierbare DGL:

$$\dot{z} = \frac{1}{t}\sqrt{z^2-1}\,.$$

(2) Löse die separierbare DGL aus (1):

$$\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

Sonderfall:

$$z^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z = \pm 1 \;\Rightarrow\; x = \pm t \quad \text{(triviale Lösung)}$$

Integration für $z^2 > 1$:

$$\ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| = \ln|t| + c \;\Rightarrow\; z + \sqrt{z^2-1} = ct\,.$$

Es folgt

$$z^2 - 1 = c^2t^2 - 2ctz + z^2 \Rightarrow z = \frac{c}{2}t + \frac{1}{2ct}\,.$$

(3) Nach Rücksubstitution

$$x(t) = \frac{c}{2}t^2 + \frac{1}{2c} \quad \text{mit} \quad c \neq 0\,.$$

(d) Wir haben hier eine homogene Euler'sche DGL.

(1) Wir erhalten die charakteristische Gleichung

$$0 = \alpha(\alpha-1) + \alpha - 1 = \alpha^2 - 1 = (\alpha-1)(\alpha+1)\,.$$

(2) Die Lösungen sind $\alpha_{1,2} = \pm 1$.

(3) Somit folgt

$$x(t) = c_1 t + \frac{c_2}{t}\,.$$

(e) Multipliziert man die DGL mit t^2, so erhalten wir wieder eine Euler'sche DGL.

(1) Die charakteristische Gleichung lautet

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3) + 3\alpha(\alpha-1) - 7\alpha + 8 \\ &= \alpha^4 - 6\alpha^3 + 14\alpha^2 - 16\alpha + 8 = (\alpha-2)^2\left(\alpha^2 - 2\alpha + 2\right)\,. \end{aligned}$$

(2) Die vier Lösungen sind $\alpha_{1,2} = 2$, $\alpha_{3,4} = 1 \pm \mathrm{i}$.

(3) Die allgemeine Lösung lautet:

$$x(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t + c_3 t \sin(\ln t) + c_4 t \cos(\ln t)\,.$$

(f) Schon wieder eine Euler'sche DGL:

(1) Die charakteristische Gleichung lautet:

$$0 = \alpha(\alpha-1) - \alpha + 2 = \alpha^2 - 2\alpha + 2\,.$$

(2) Die Lösungen sind $\alpha_{1,2} = 1 \pm \mathrm{i}$.

(3) Die allgemeine Lösung ist

$$x(t) = c_1 t \sin(\ln t) + c_2 t \cos(\ln t)\,.$$

35.3 (a) Potenzreihenansatz: $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots\,,\quad x(0) = 0 \;\Rightarrow\; a_0 = 0.$

Linke Seite der DGL: $\dot{x} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots.$

Rechte Seite der DGL: $tx + t = t + \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{k+1} = t + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} t^k.$

Die DGL ist erfüllt, falls:

$$a_1 + 2a_2 t + \sum_{k=2}^{\infty}(k+1)a_{k+1}t^k = t + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-1}t^k \Leftrightarrow a_1 = 0\,,\ a_2 = \frac{1}{2}\,,\ a_{k+1} = \frac{a_{k-1}}{k+1}\,,\ k \geq 2\,.$$

Daraus folgt sofort $a_k = 0$ für ungerades k. Für gerades k gilt:

$$a_4 = \frac{a_2}{4} = \frac{1}{4}\frac{1}{2}\,,\ a_6 = \frac{a_4}{6} = \frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{2}, \ldots, a_{2n} = \frac{1}{2n}\frac{1}{2(n-1)}\cdots\frac{1}{2} = \frac{1}{2^n n!}\,,$$

sodass

$$x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} t^{2k} = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6 + \frac{1}{384}t^8 + \ldots\,.$$

Es folgt

$$x(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} 2^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \approx 6.2667\,.$$

(b) Wiederholtes Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}
&x = x \ \Rightarrow\ x(0) = 0\,, \quad \dot{x} = tx + t \ \Rightarrow\ \dot{x}(0) = 0\,,\\
&\ddot{x} = x + t\dot{x} + 1 \ \Rightarrow\ \ddot{x}(0) = 1\,, \quad \dddot{x} = 2\dot{x} + t\ddot{x} \ \Rightarrow\ \dddot{x}(0) = 0\,,\\
&x^{(4)} = 3\ddot{x} + t\dddot{x} \ \Rightarrow\ x^{(4)} = 3\,, \ \ldots\,.
\end{aligned}$$

Allgemein (man kann das natürlich auch per Induktion nachweiten) gilt:

$$x^{(k)} = (k-1)x^{(k-2)} + tx^{(k-1)} \Rightarrow x^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \text{ ungerade} \\ 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1) & \text{für } k \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Taylorreihe für $x(t)$ mit Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ lautet damit:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k)}(0)}{k!} t^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(2n)}(0)}{(2n)!} t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n)!!} t^{2n}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)!2^n n!} t^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} t^{2n} \qquad \text{(vgl. (a))}\,.
\end{aligned}$$

(c) Durch Trennung der Variablen erhalten wir:

$$\dot{x} = t(x+1) \ \stackrel{x \neq -1}{\longrightarrow}\ \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = t\,\mathrm{d}t \ \Rightarrow\ \ln|x+1| = \frac{t^2}{2} + \tilde{c} \ \Rightarrow\ y = c\,\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 1\,,\ c \in \mathbb{R}$$

Die Berücksichtigung der Anfangsbedingung liefert:

$$x(0) = 0 \ \Rightarrow\ c = 1 \ \Rightarrow\ x(t) = \mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}} - 2\,, \quad x(2) = \mathrm{e}^2 - 1 \approx 6.3891\,.$$

Die Potenzreihenentwicklung bei $t = 0$ liefert exakt dasselbe Ergebnis, denn

$$x(t) = \mathrm{e}^{t^2/2} - 1 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(t^2/2\right)^k}{k!} \right) - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} t^{2k}\,.$$

35.4 Mit dem Ansatz

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k\,,\ \dot{x}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}ka_kt^{k-1}\,,\ \ddot{x}(t)=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kt^{k-2}$$

erhält man eingesetzt in die DGL

$$\begin{aligned}0 &= \sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kt^{k-2}+\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kt^k+\sum_{k=1}^{\infty}ka_kt^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}t^k+\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}ka_kt^k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kt^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}+k(k-1)a_k+ka_k-a_k\right]t^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\Big[(k+2)(k+1)a_{k+2}+(k^2-1)a_k\Big]t^k\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ (k+2)(k+1)a_{k+2}=-(k-1)(k+1)a_k\ \Rightarrow\ a_{k+2}=\frac{1-k}{2+k}a_k\,.$$

a_0 und a_1 sind frei wählbar. Für $k=1$ folgt $a_3=0\ \Rightarrow\ a_{2n+1}=0\ \forall n\in\mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}a_2 &= \frac{1}{2}a_0\\ a_{2n} &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{2n-3}{2n}\right)a_0=(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}a_0\,.\end{aligned}$$

Mit der Schreibweise $k!!=k(k-2)(k-4)\cdots$ erhalten wir

$$x(t)=a_1t+a_0\left(1+\frac{1}{2}t^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^{2n}\right)\,.$$

Aus den gegebenen Anfangswerten folgt

- $x(0)=0\ \Rightarrow\ a_0=0,\ \ \dot{x}(0)=1\ \Rightarrow\ a_1=1$.
  Somit gilt $x(t)=t$.
- $x(0)=1\ \Rightarrow\ a_0=1,\ \ \dot{x}(0)=1\ \Rightarrow\ a_1=1$. Somit gilt

$$x(t)=1+t+\frac{1}{2}t^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,.$$

35.5 (a) Der Potenzreihenansatz

$$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k\,,\ \dot{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1}t^k\,,\ \ddot{x}(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}t^k$$

ergibt eingesetzt in die DGL

$$0=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)c_{k+2}t^k-c_kt^k\cdot t=2c_2+\sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+1)(k+2)c_{k+2}-c_{k-1}\right]t^k\,.$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$$0=2c_2\,,\ 0=(k+1)(k+2)c_{k+2}-c_{k-1}\,,\ c_0 \text{ und } c_1 \text{ bleiben unbestimmt}\,.$$

Wegen $c_2=0$ erhält man $c_{3n-1}=0$ für $n\in\mathbb{N}$. Außerdem ergibt sich

$$\begin{aligned} c_{3n} &= \frac{c_0}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot 3^n\cdot n!}=\frac{c_0}{(3n-1)!!!3^n n!} \quad \text{für } n\in\mathbb{N}\\ c_{3n+1} &= \frac{c_1}{4\cdot 7\cdot 10\cdot\ldots\cdot(3n+1)\cdot 3^n\cdot n!}=\frac{c_1}{(3n+1)!!!3^n n!} \quad \text{für } n\in\mathbb{N}\,, \end{aligned}$$

wobei wir $k!!!=k(k-3)(k-6)\cdots$ setzen. Die allgemeine Lösung der DGL lautet also für $t\in\mathbb{R}$

$$x(t)=c_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n}}{(3n-1)!!!3^n n!}\right)+c_1\left(t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{3n+1}}{(3n+1)!!!3^n n!}\right)\,.$$

(b) Der Potenzreihenansatz eingesetzt in die DGL führt nach Koeffizientenvergleich auf

$$c_0 \text{ frei wählbar}\,,\ c_1=0\,,\ c_{k+1}=-\frac{c_{k-1}}{k+1}\,.$$

Aus $c_1=0$ folgt $c_{2k+1}=0$ $(k\in\mathbb{N})$ und

$$c_{2k}=-\frac{c_{2k-2}}{2k}=(-1)^k\frac{c_0}{2k\cdot(2k-2)\cdot\ldots\cdot 2}=(-1)^k\frac{c_0}{(2k)!!} \text{ für } k\in\mathbb{N}\,.$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t)=c_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!!}t^{2k}\right)=c_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!}=c_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

(c) Der Potenzreihenansatz eingesetzt in die DGL führt nach Koeffizientenvergleich auf

$$c_0 \text{ frei wählbar}\,,\ c_1=1\,,\ c_2=\frac{1+c_0}{2}\,,\ c_{k+1}=\frac{c_{k-1}}{k+1}\,.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c_{2k} &= \frac{1+c_0}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2k}=\frac{1+c_0}{(2k)!!} \text{ für } k=1,2,\ldots\\ c_{2k+1} &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2k+1}=\frac{1}{(2k+1)!!} \text{ für } k=1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet daher

$$x(t)=c_0+t+(1+c_0)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!!}=-1+\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!!}\,.$$

36 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen I

36.1 Aufgaben

36.1 Programmieren Sie das explizite und implizite Eulerverfahren wie auch die Mittelpunktsregel.

36.2 Wir betrachten das AWP

$$\dot{x} = 1 + (x - t)^2, \quad x(0) = 1/2 \,.$$

Wählen Sie als Schrittweite $h = 1/2$ und berechnen Sie den Wert $x(3/2)$ mittels des

(a) expliziten Eulerverfahrens,

(b) klassischen Runge-Kuttaverfahrens.

Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung $x(t) = t + \frac{1}{2-t}$.

36.3 Implementieren Sie das klassische Runge-Kuttaverfahren. Wählen Sie als Schrittweiten $h = 0.1; 0.01; 0.001$ und berechnen Sie damit den Wert $x(1.8)$ für das AWP aus Aufgabe 36.2. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit der exakten Lösung.

36.4 Lösen Sie das AWP aus Aufgabe 36.2 mittels des Verfahrens nach Adams-Moulton. Verwenden Sie im ersten Schritt $k = 1$, im zweiten $k = 2$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für den Wert $x(1)$ mit den Ergebnissen aus Aufgabe 36.2.

Hinweis: Verwenden Sie beim Lösen der quadratischen Gleichung für x_{j+1} jeweils denjenigen Wert, der am nächsten bei x_j liegt.

36.5 Bestimmen Sie für das zweistufige Runge-Kuttaverfahren die Koeffizienten von $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, b, c \in \mathbb{R}^2$ des Butcherschemas.

36.2 Lösungen

36.1 Die folgenden Codes taugen:

```
function [t,x]=expl_euler(f,t0,x0,h,N)
% N Schritte expliziter Euler mit konstante Schrittweite h fuer x'=f(t,x)
% Input:
%    f           rechte Seite; eine Funktion der Form
%                    dx = f(t,x)
```

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_36,

```
%    t0          Startzeitpunkt
%    x0          Startzustand
%    h           konstante Schrittweite
%    N           Anzahl der Schritte
% Ausgabe:   komplette Trajektorie: (t,x)
%    t           Zeilenvektor der Laenge N+1 mit Zeitpunkten
%    x           (length(x0),N+1) Matrix mit den Zustaenden in den Spalten

N=round(N);                          % sicherheitshalber
x=NaN*ones(length(x0),N+1);          % Speicher fuer Zustaende
t=NaN*ones(1,N+1);                   % Speicher fuer Zeitpunkte
t(:,1)=t0; x(:,1)=x0;                % Anfangswert
for k=1:N                            % N Schritte machen
    feval=f(t(k),x(:,k));            % f auswerten
    x(:,k+1)=x(:,k)+h*feval;         % Update Zustand
    t(k+1)=t(k)+h;                   % Update Zeit
end
end

function [t,x]=impl_euler(f,t0,x0,h,N)
% N Schritte impliziter Euler mit konstanter Schrittweite h fuer x'=f(t,x)
% Input:
%    f           rechte Seite; eine Funktion der Form
%                    dx = f(t,x)
%    t0          Startzeitpunkt
%    x0          Startzustand
%    h           konstante Schrittweite
%    N           Anzahl der Schritte
% Ausgabe:   komplette Trajektorie: (t,x)
%    t           Zeilenvektor der Laenge N+1 mit Zeitpunkten
%    x           (length(x0),N+1) Matrix mit den Zustaenden in den Spalten
options = optimset('Display','off');
N=round(N);                          % sicherheitshalber
x=NaN*ones(length(x0),N+1);          % Speicher fuer Zustaende
t=NaN*ones(1,N+1);                   % Speicher fuer Zeitpunkte
t(:,1)=t0; x(:,1)=x0;                % Anfangswert
for k=1:N                            % N Schritte machen
    t(k+1)=t(k)+h;                   % Update Zeit
    x(:,k+1) = fsolve(@(xx)(xx-x(:,k)-h*f(t(k+1),xx)),x(:,k),options);
end
end
```

```
function [t,x]=mid_point(f,t0,x0,h,N)
% N Schritte impliziter Euler mit konstanter Schrittweite h fuer x'=f(t,x)
% Input:
%    f          rechte Seite; eine Funktion der Form
%                   dx = f(t,x)
%    t0         Startzeitpunkt
%    x0         Startzustand
%    h          konstante Schrittweite
%    N          Anzahl der Schritte
% Ausgabe:   komplette Trajektorie: (t,x)
%    t          Zeilenvektor der Laenge N+1 mit Zeitpunkten
%    x          (length(x0),N+1) Matrix mit den Zustaenden in den Spalten
options = optimset('Display','off');
N=round(N);                            % sicherheitshalber
x=NaN*ones(length(x0),N+1);            % Speicher fuer Zustaende
t=NaN*ones(1,N+1);                     % Speicher fuer Zeitpunkte
t(:,1)=t0; x(:,1)=x0;                  % Anfangswert
for k=1:N                              % N Schritte machen
    t(k+1)=t(k)+h;                     % Update Zeit
    x(:,k+1) = fsolve(@(xx)(xx-x(:,k)-h*f((t(k)+t(k+1))/2,...
        (x(:,k)+xx)/2)),x(:,k),options);
end
end
```

36.2 Wir verwenden die Schrittweite $h = 1/2$ und die Stützstellen $t_0 = 0$, $t_1 = 1/2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 3/2$.

(a) Das explizite Euler-Verfahren lautet:

$$x_{k+1} = x_k + hf(t_k, x_k) = x_k + \tfrac{1}{2}(1 + (x_k - t_k)^2)\,.$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \tfrac{1}{2}\,,\\
x_1 &= x_0 + \tfrac{1}{2}(1 + (x_0 - t_0)^2) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}(1 + (\tfrac{1}{2} - 0)^2) = \tfrac{9}{8} = 1.125\,,\\
x_2 &= x_1 + \tfrac{1}{2}(1 + (x_1 - t_1)^2) = \tfrac{9}{8} + \tfrac{1}{2}(1 + (\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2})^2) = \tfrac{233}{128} \approx 1.820\,,\\
x_3 &= x_2 + \tfrac{1}{2}(1 + (x_2 - t_2)^2) = \tfrac{233}{128} + \tfrac{1}{2}(1 + (\tfrac{233}{128} - 1)^2) = \tfrac{87057}{32768} \approx 2.657\,.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem exakten Wert liefert:

$$|x_3 - x(3/2)| = \left|\frac{87057}{32768} - \frac{7}{2}\right| \approx 0.843\,.$$

(b) Beim klassischen Runge-Kutta-Verfahren berechnen wir:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, x_k)\,,\ k_2 = f(t_k + \tfrac{1}{4}, x_k + \tfrac{1}{4}k_1)\,, \\ k_3 &= f(t_k + \tfrac{1}{4}, x_k + \tfrac{1}{4}k_2)\,,\ k_4 = f(t_k + \tfrac{1}{2}, x_k + \tfrac{1}{2}k_3)\,, \\ x_{k+1} &= x_k + \tfrac{h}{6}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = x_k + \tfrac{1}{12}\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\ . \end{aligned}$$

Wir erhalten hiermit:

$$x_0 = 1/2\,,\ x_1 \approx 1.167\,,\ x_2 \approx 1.999\,,\ x_3 \approx 3.486\,.$$

Ein Vergleich mit dem exaktem Wert liefert:

$$|x_3 - x(3/2)| \approx |3.486 - 7/2| \approx 0.014\,.$$

36.3 Das Runge-Kuttaverfahren lässt sich etwa wie folgt implementieren:

```
function [t,x]=runge_kutta(f,t0,x0,h,N)
% N Schritte Runge Kutta mit konstante Schrittweite h fuer x'=f(t,x)
% Input:
%    f           rechte Seite; eine Funktion der Form
%                    dx = f(t,x)
%    t0          Startzeitpunkt
%    x0          Startzustand
%    h           konstante Schrittweite
%    N           Anzahl der Schritte
% Ausgabe:   komplette Trajektorie: (t,x)
%    t           Zeilenvektor der Laenge N+1 mit Zeitpunkten
%    x           (length(x0),N+1) Matrix mit den Zustaenden in den Spalten

N=round(N);                            % sicherheitshalber
x=NaN*ones(length(x0),N+1);            % Speicher fuer Zustaende
t=NaN*ones(1,N+1);                     % Speicher fuer Zeitpunkte
t(:,1)=t0; x(:,1)=x0;                  % Anfangswert
for k=1:N                              % N Schritte machen
    k1=f(t(k),x(:,k));
    k2=f(t(k)+(h/2),x(:,k)+(h/2)*k1);
    k3=f(t(k)+(h/2),x(:,k)+(h/2)*k2);
    k4=f(t(k)+h,x(:,k)+h*k3);
    x(:,k+1)=x(:,k)+(h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4); % Update Zustand
    t(k+1)=t(k)+h;                     % Update Zeit
end
end
```

Hiermit erhalten wir die folgenden Resultate:

Verfahren	h	# Fkt.ausw.	Lösung	Fehler
Exaktes Ergebnis		1	6.8	
Euler	0.1	18	4.56539955802118	2.23460044197882
	0.01	180	6.30862048114570	0.49137951885430
	0.001	1800	6.74342273829778	0.05657726170223
Runge-Kutta	0.1	72	6.79659830769129	0.00340169230871
	0.01	720	6.79999956805797	0.00000043194203
	0.001	7200	6.79999999995666	0.00000000004334

Hierbei bedeutet # Fkt.ausw die Anzahl der durchgeführten Funktionsauswertungen. Man beachte, dass das Runge-Kutta-Verfahren bei $h = 0.1$ bereits ein besseres Ergebnis bringt und weniger kostet.

36.4 Der Startwert ist $x_0 = 1/2$. Das Verfahren von Adams-Moulton lautet für $k = 1$:

$$x_1 = x_0 + h\left(\tfrac{1}{2}f(t_1, x_1) + \tfrac{1}{2}f(t_0, x_0)\right) = x_0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}(x_1 - t_1)^2 + \tfrac{1}{4}(x_0 - t_0)^2 .$$

Auflösen nach x_1 liefert die beiden Lösungen

$$x_1 = t_1 + 2 \pm \sqrt{4t_1 + 2 - 4x_0 - (x_0 - t_0)^2} = \tfrac{1}{2} + 2 \pm \sqrt{2 + 2 - 2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \tfrac{5\pm\sqrt{7}}{2} .$$

Von beiden Lösungen liegt $x_1 = \frac{5-\sqrt{7}}{2} \approx 1.177$ näher an $x_0 = 1/2$ und wird daher gewählt.

Den zweiten Schritt führen wir mit dem Verfahren von Adams-Moulton für $k = 2$ aus:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + h\left(\tfrac{5}{12}f(t_2, x_2) + \tfrac{8}{12}f(t_1, x_1) - \tfrac{1}{12}f(t_0, x_0)\right) \\ &= x_1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{24}(x_2 - t_2)^2 + \tfrac{8}{24}(x_1 - t_1)^2 - \tfrac{1}{24}(x_0 - t_0)^2 . \end{aligned}$$

Auflösen nach x_2 ergibt

$$x_2 = t_2 + \frac{12 \pm \sqrt{120t_2 + 84 - 120x_1 - 40(x_1 - t_1)^2 + 5(x_0 - t_0)^2}}{5} .$$

Hieraus erhalten wir durch passende Vorzeichenwahl $x_2 \approx 2.049$.

36.5 Das zweistufige Runge-Kutta-Verfahren lautet wie folgt:

$$x_{n+1} = x_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}f(t_n, x_n)\right)$$

Daraus liest man folgendes Butcher-Schema ab:

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b \end{array} = \begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

37 Lineare Abbildungen und Darstellungsmatrizen

37.1 Aufgaben

37.1 Begründen Sie die Eigenschaften linearer Abbildungen in der Box auf Seite 335 (Rezeptebuch).

37.2 Man verifiziere die Behauptungen in der Box auf Seite 337 (Rezeptebuch) (abgesehen von der Dimensionsformel).

37.3 Bestimmen Sie jeweils Kern und Bild der linearen Abbildungen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(v_1, v_2) \mapsto (v_2, v_1)$,

(b) $f : V \to W$, $v \mapsto 0$,

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(v_1, v_2, v_3) \mapsto (v_1 + v_2, v_2)$,

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$, $p \mapsto \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p)$.

37.4 Gegeben sei die lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto A\,v$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Bestimmen Sie das Bild und den Kern von f_A.

(b) Ist f_A injektiv, surjektiv, bijektiv?

37.5 Gibt es eine lineare Abbildung f vom $\mathbb{R}^2$ in den $\mathbb{R}^2$ mit $\ker f = \operatorname{Bild} f$?

37.6 Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Geben Sie jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an!

(a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $f_1(v) = (v + 1, 2v, v - 3)^\top$,

(b) $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_2(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3 + v_4)^\top$,

(c) $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_3(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1 v_2, v_3 v_4)^\top$,

(d) $f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ mit $f_4(v) = ((1, 0, 0, \ldots, 0)v) \cdot (1, 2)^\top$,

(e) $f_5 : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_4$ mit $f_5(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = (a_0 + a_1) + 2(a_1 + a_2)x + 3(a_2 + a_3)x^2 + 4(a_3 + a_0)x^3 + 5x^4$.

37.7 Es seien die linearen Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f_1(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z)^\top \quad \text{und} \quad f_2(x, y, z) = (x - y, 2x + z, 0)^\top .$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_37,

(a) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Bild}(f_i)$, $\mathrm{Bild}(f_1 \circ f_2), \ker(f_i)$, $\ker(f_1 \circ f_2)$, $i = 1, 2$.

(b) Sind die Abbildungen f_1 bzw. f_2 injektiv oder surjektiv?

37.8 Betrachten Sie für $n \geq 1$ die Abbildung $f\colon \mathbb{R}[x]_{n-1} \to \mathbb{R}[x]_n$, definiert durch

$$(f(p))(x) = \int_0^x p(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix A dieser linearen Abbildung bezüglich der Monombasen $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ von $\mathbb{R}[x]_{n-1}$ bzw. $(1, x, \ldots, x^n)$ von $\mathbb{R}[x]_n$.

(c) Ist die Abbildung f injektiv? Ist sie surjektiv?

37.9 Es sei $a = (a_1, a_2, a_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ mit $\|a\| = 1$ gegeben. Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = x - 2(x^\top a)\,a$ ist eine Spiegelung an der auf a senkrecht stehenden Ebene durch den Ursprung.

(a) Man veranschauliche sich anhand einer Skizze die Abbildung f.

(b) Berechnen Sie $f \circ f$.

(c) Wie lautet die Darstellungsmatrix A von f bezüglich der kanonischen Basis?

(d) Finden Sie eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit $f(b_1) = -b_1$, $f(b_2) = b_2$, $f(b_3) = b_3$. Geben Sie die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von f bezüglich B an.

37.2 Lösungen

37.1 Erste Eigenschaft: Da f linear ist, gilt

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)\,, \text{ also } f(0) = 0\,.$$

Zweite Eigenschaft: Sind v, $w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda\, v + w) &= g(f(\lambda\, v + w)) = g(\lambda\, f(v) + f(w)) = g(\lambda\, f(v) + g(f(w)) \\ &= \lambda\, g(f(v)) + g(f(w)) = \lambda\, g \circ f(v) + g \circ f(w)\,.\end{aligned}$$

Das begründet, dass $g \circ f$ linear ist.
Dritte Eigenschaft: Es sei f bijektiv. Dann existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$. Es ist zu zeigen, dass f^{-1} linear ist. Dazu wählen wir beliebige v', $w' \in W$ und ein $\lambda \in \mathbb{K}$. Zu v', w' existieren v, $w \in V$ mit $f(v) = v'$ und $f(w) = w'$, d. h., $v = f^{-1}(v')$ und $w = f^{-1}(w')$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}f^{-1}(\lambda\, v' + w') &= f^{-1}(\lambda\, f(v) + f(w)) = f^{-1}(f(\lambda\, v + w)) \\ &= \lambda\, v + w = \lambda\, f^{-1}(v') + f^{-1}(w')\,.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass f^{-1} linear ist.

37.2 Es gilt:

- Der Kern einer linearen Abbildung f ist ein UVR:
  - $0 \in \ker(f)$, da $f(0) = 0$.
  - $v, w \in \ker(f) \Rightarrow f(v+w) = f(v) + f(w) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow v + w \in \ker(f)$.
  - $v \in \ker(f), \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lambda v \in \ker(f)$.
- Das Bild einer linearen Abbildung f ist ein UVR:
  - $0 \in \mathrm{Bild}(f)$, da $f(0) = 0$.
  - $v, w \in \mathrm{Bild}(f) \Rightarrow \exists\, v', w' \in V: \; v = f(v'), w = f(w') \Rightarrow v + w = f(v') + f(w') = f(v' + w') \Rightarrow v + w \in \mathrm{Bild}(f)$.
  - $v \in \mathrm{Bild}(f), \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists\, v' \in V: \; v = f(v') \Rightarrow \lambda v = \lambda f(v') = f(\lambda v') \Rightarrow \lambda v \in \mathrm{Bild}(f)$.
- f injektiv $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$:
  - $\Rightarrow$: f injektiv $\Rightarrow f(v) \neq 0 \;\forall v \neq 0 \Rightarrow \ker(f) = \{0\}$.
  - $\Leftarrow$: $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v - w) = f(v) - f(w) = 0 \Rightarrow v - w \in \ker(f) = \{0\} \Rightarrow v - w = 0 \Rightarrow v = w \Rightarrow f$ injektiv.
- f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv: Mit der Dimensionsformel gilt nämlich:

  $$f \text{ surjektiv} \Leftrightarrow W = \mathrm{Bild}(f) \;\Leftrightarrow\; \dim(\ker(f)) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ker(f) = \{0\} \;\Leftrightarrow\; f \text{ injektiv}.$$

  Damit folgt sofort f surjektiv $\Leftrightarrow f$ bijektiv.

37.3 (a) f ist die Spiegelung an der Geraden $\lambda(e_1 + e_2)$, daher besteht der Kern nur aus dem Nullvektor oder ausführlich: $(v_2, v_1) = (0,0) \iff v_1 = 0 = v_2$, d.h. $\ker f = \{0\}$. Wegen des Dimensionssatzes gilt $\mathrm{Bild}\, f = \mathbb{R}^2$.

(b) Es gilt $\ker f = V$, da jeder Vektor aus V auf den Nullvektor abgebildet wird. Des weiteren gilt $\mathrm{Bild}\, f = \{0\}$.

(c) Der Kern besteht aus all jenen Vektoren (v_1, v_2, v_3) mit $v_3 \in \mathbb{R}$, $v_2 = 0$ und $v_1 + v_2 = 0$, also: $\ker f = \{(0, 0, v_3) \,|\, v_3 \in \mathbb{R}\}$. Nach dem Dimensionssatz ist f surjektiv, d. h. $\mathrm{Bild}\, f = \mathbb{R}^2$, oder ausführlich: Es sei $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt $f(v_1 - v_2, v_2, 0) = (v_1, v_2)$ und somit $\mathrm{Bild}\, f = \mathbb{R}^2$.

(d) Es gilt: $\ker \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \{p \in \mathbb{R}[x] \,|\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p = 0\}$. Polynome vom Grad 1 oder höher werden durch das Differenzieren nicht zum Nullpolynom. Hingegen wird jedes konstante Polynom $p = a_0$ durch das Differenzieren auf das Nullpolynom $p = 0$ abgebildet, also gilt $\ker \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{R}$. Die Abbildung ist surjektiv, da für jedes Polynom $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ das Polynom $P = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \ldots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} \in \mathbb{R}[x]$ offenbar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(P) = p$ erfüllt ist. Damit gilt $\mathrm{Bild}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \mathbb{R}[x]$.

37.4 (a) Multipliziert man A mit $v = (v_1, v_2)$ so erhält man das Bild $f_A(v)$:

$$f_A(v) = Av = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für das Bild von f_A:

$$\mathrm{Bild}\, f_A = \{f_A(v) \,|\, v \in \mathbb{R}^2\} = \{Av \,|\, v \in \mathbb{R}^2\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Das Bild ist somit das Erzeugnis der Spalten von A. Nun zum Kern von f_A: Wegen

$$\ker f_A = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, f_A(v) = 0\} = \{v \in \mathbb{R}^2 \,|\, Av = 0\}$$

ist der Kern von f_A die Lösungsmenge des LGS $(A \,|\, 0)$. Dieses LGS hat wegen $\mathrm{rg}(A) = 2$ nur die triviale Lösung $v = 0$, sodass $\ker f_A = \{0\}$. (Das hätten wir einfacher mit der Dimensionsformel haben können: Nach dieser gilt nämlich $2 = \dim(\ker(f_A)) + 2$, woraus folgt, dass $\ker f_A = \{0\}$.)

(b) f_A ist injektiv, da $\ker f_A = \{0\}$. f_A ist nicht surjektiv, da $\mathrm{rg}(f_A) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Da f_A nicht surjektiv ist, kann f_A auch nicht bijektiv sein.

37.5 Ja, man wähle z. B. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (v_1, v_2) \mapsto (v_1 - v_2, v_1 - v_2)$ oder die *lineare Fortsetzung* von σ mit $\sigma(e_1) = e_2$ und $\sigma(e_2) = 0$.

37.6 Man beachte das Rezept:

(a) f_1 ist nicht linear, denn $f_1(0) = (1, 2, -3)^\top \neq (0, 0, 0)^\top$.

(b) f_2 ist linear, denn

$$\begin{aligned} f_2(\lambda v + w) &= \begin{pmatrix} (\lambda v_1 + w_1) + (\lambda v_2 + w_2) \\ (\lambda v_1 + w_1) + (\lambda v_2 + w_2) + (\lambda v_3 + w_3) + (\lambda v_4 + w_4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda(v_1 + v_2) + (w_1 + w_2) \\ \lambda(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 + w_2 \\ w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \end{pmatrix} = \lambda f_2(v) + f_2(w). \end{aligned}$$

(c) f_3 ist nicht linear, denn für $v = (1, 0, 1, 0)^\top$, $w = (0, 1, 0, 1)^\top$ gilt $f_3(v) = (0, 0)^\top$, $f_3(w) = (0, 0)^\top$ und $f_3(v + w) = (1, 1)^\top \neq (0, 0)^\top = f_3(v) + f_3(w)$.

(d) f_4 ist linear. Hierzu beachte man, dass man die Abbildung einfacher schreiben kann als $f_4(v_1, \ldots, v_n) = v_1\,(1,2)^\top$. Es gilt:

$$f_4(\lambda v + w) = (\lambda v_1 + w_1)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \lambda v_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + w_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \lambda f_4(v) + f_4(w)\,.$$

(e) f_5 ist nicht linear, denn $f_5(0) = 5x^4 \neq 0$, wobei 0 jeweils das Nullpolynom ist.

37.7 Für $f_1 \circ f_2$ erhalten wir

$$(f_1 \circ f_2)(x,y,z) = f_1(f_2(x,y,z)) = f_1(x-y, 2x+z, 0) = \begin{pmatrix}3x-3y\\-x-y-z\\4x-2y+z\end{pmatrix}.$$

(a) Die Aufgabe kann auf viele verschiedene Arten gelöst werden, wir entscheiden uns für einen Lösungsweg mit Hilfe der Dimensionsformel:

- Basen der Kerne: Die Abbildung f_1 hat den nulldimensionalen Kern $\{0\}$, denn:

$$f_1(x,y,z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\begin{pmatrix}3&0&0\\1&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}}_{=:A_1}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

  Es ist damit $\emptyset$ eine Basis des Kerns. (Übrigens ist A_1 gerade die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung f_1 bzgl. der kanonischen Basen.)
  Die Abbildung f_2 hat den eindimensionalen Kern $\langle(1,1,-2)^\top\rangle$, denn:

$$f_2(x,y,z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\begin{pmatrix}1&-1&0\\2&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{=:A_2}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

  Es ist damit $\{(1,1,-2)^\top\}$ eine Basis des Kerns. (Wieder ist die angegebene Matrix A_2 gerade die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung f_2 bzgl. der kanonischen Basen.)
  Die Abbildung $f_1 \circ f_2$ hat den eindimensionalen Kern $\langle(1,1,-2)^\top\rangle$, denn:

$$f_1 \circ f_2(x,y,z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\begin{pmatrix}3&-3&0\\-1&-1&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}}_{=:A_3}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Es ist damit $\{(1, 1, -2)^\top\}$ eine Basis des Kerns. (Wieder ist die angegebene Matrix A_3 gerade die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f_1 \circ f_2$ bzgl. der kanonischen Basen.)

- Basen der Bilder: Nach der Dimensionsformel gilt

$$\dim(\mathrm{Bild}(f_1)) = 3\,,\ \dim(\mathrm{Bild}(f_2)) = 2\,,\ \dim(\mathrm{Bild}(f_1 \circ f_2)) = 2\,.$$

  Um Basen der Bilder zu finden, reicht es nun aus, jeweils so viele linear unabhängige Vektoren im Bild anzugeben, wie die Dimension des Bildes angibt.
  Als Basis B_1 des Bildes von f_1 können wir jede Basis des $\mathbb{R}^3$ wählen, wir entscheiden uns für $B_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$.
  Als Basis B_2 des Bildes von f_2 können wir die ersten beiden Spalten s_1, s_2 von A_2 wählen, $B_2 = \{s_1, s_2\}$; diese sind nämlich linear unabhängig und liegen im Bild von f_2, es gilt $f_2(e_1) = s_1$, $f_2(e_2) = s_2$.
  Als Basis B_3 des Bildes von $f_1 \circ f_2$ können wir die ersten beiden Spalten s_1, s_2 von A_3 wählen, $B_3 = \{s_1, s_2\}$; diese sind nämlich linear unabhängig und liegen im Bild von $f_1 \circ f_2$, es gilt $f_1 \circ f_2(e_1) = s_1$, $f_1 \circ f_2(e_2) = s_2$.

Da $\ker(f_1) = \{0\}$ ist f_1 injektiv und damit auch surjektiv (siehe die Box auf Seite 337 (Rezeptebuch)). Da $\ker(f_2) \neq \{0\}$ ist f_2 nicht injektiv und kann damit auch nicht surjektiv sein.

37.8 (a) Wir gehen nach unserem Rezept vor: (1) $f(0) = 0$ ist offensichtlich. (2) Es gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und p, $q \in \mathbb{R}[x]_{n-1}$:

$$\begin{aligned}(f(\lambda p + q))(x) &= \int_0^x (\lambda p + q)(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x (\lambda p(t) + q(t))\ \mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^x p(t)\ \mathrm{d}t + \int_0^x q(t)\ \mathrm{d}t = \lambda(f(p))(x) + (f(q))(x)\,.\end{aligned}$$

Somit ist f linear.

(b) In der i-ten Spalte der Darstellungsmatrix steht der Koordinatenvektor des Bildes des i-ten Basisvektors. Daher bilden wir im Folgenden nach und nach die Basisvektoren $p = 1, p = x, \ldots, p = x^{n-1}$ mit der Abbildung f ab und bestimmen die Darstellung der Bilder bzgl. der Basis $(1, x, \ldots, x^n)$ des $\mathbb{R}[x]_n$, damit erhalten wir die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren, also die Spalten von A:

$$\begin{aligned}
p=1: &\quad (f(p))(x)=\int_0^x 1\ \mathrm{d}t=x=0\cdot 1+1\cdot x+0\cdot x^2+\cdots+0\cdot x^n \\
p=x: &\quad (f(p))(x)=\int_0^x t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2=0\cdot 1+0\cdot x+\frac{1}{2}\cdot x^2+0\cdot x^3+\cdots+0\cdot x^n \\
\vdots &\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
p=x^{n-1}: &\quad (f(p))(x)=\int_0^x t^{n-1}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{n}x^n=0\cdot 1+0\cdot x+\cdots+0\cdot x^{n-1}+\frac{1}{n}\cdot x^n
\end{aligned}$$

Somit folgt für die Darstellungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}\,.$$

(c) Wir bestimmen den Kern von f: Für ein $p \in \mathbb{R}[x]_{n-1}$ gilt

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \ \Rightarrow\ (f(p))(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1}\,.$$

Somit folgt

$$(f(p))(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{3} = \ldots = \frac{a_{n-1}}{n} = 0 \ \Leftrightarrow\ p = 0\,.$$

Damit gilt $\ker(f) = \{0\}$. Folglich ist f injektiv (siehe die Box auf Seite 337 (Rezeptebuch)). Nach der Dimensionsformel kann f nicht surjektiv sein.

37.9 (a) Es ist $(x^\top a)\,a$ die Komponente von x, die in Richtung a zeigt, der Vektor $x - (x^\top a)\,a$ steht senkrecht auf a, d. h. in der Spiegelebene. Der Vektor $x - 2(x^\top a)\,a$ ist der an dieser Ebene gespiegelte Vektor (vgl. die Skizze auf Seite 139 (Rezeptebuch)).

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}(f\circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 2(x\cdot a)a) &= (x - 2(x\cdot a)a) - 2\big((x - 2(x\cdot a)a)\cdot a\big)a \\ &= x - 2(x\cdot a)a - 2(x\cdot a)a + 4(x\cdot a)(a\cdot a)a = x\,,\end{aligned}$$

also $f \circ f = \mathrm{id}$, d. h. $f \circ f$ ist die Identität.

(c) Wir berechnen

$$\begin{aligned} f(x) &= x - 2\,(x\cdot a)\,a = x - 2\,a\,(x\cdot a) = x - 2\,a\,(a\cdot x) \\ &= x - 2\,a\,(a^\top x) = x - 2\,(a\,a^\top)\,x = (E_3 - 2\,(a\,a^\top))\,x\,,\end{aligned}$$

man wähle also $A = E_3 - 2\,(a\,a^\top)$.

(d) Offenbar gilt $f(a) = a - 2(a^\top a)\,a = -a$. Wir setzen $b_1 = a$. Ein auf a senkrecht stehender Vektor liegt in der Spiegelebene und bleibt daher fest unter der Abbildung f. Wir wählen z. B. $b_2 = e_2 \times a$. Dann gilt

$$f(b_2) = b_2 - 2(b_2^\top a)\,a = b_2\,,$$

da $b_2^\top a = 0$. Wir wählen nun $b_3 = b_2 \times a$. Dann ist b_3 senkrecht zu a, also $f(b_3) = b_3$.

Die Darstellungsmatrix $\tilde{A} = {}_B M(f)_B$ ist $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

38 Basistransformation

38.1 Aufgaben

38.1 Gegeben sind zwei geordnete Basen A und B des $\mathbb{R}^3$,

$$A = \left(\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -16 \\ 7 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

und eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die bezüglich der Basis A die folgende Darstellungsmatrix hat

$${}_A M(f)_A = \begin{pmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B M(f)_B$ von f bezüglich der Basis B.

38.2 Gegeben ist eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Die Darstellungsmatrix von f bezüglich der geordneten Standardbasis $E_3 = (e_1,\, e_2,\, e_3)$ des $\mathbb{R}^3$ lautet:

$${}_{E_3} M(f)_{E_3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Begründen Sie: $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ ist eine geordnete Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_B M(f)_B$ und die Transformationsmatrix S mit ${}_B M(f)_B = S^{-1}\, {}_{E_3} M(f)_{E_3}\, S$.

38.3 Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ mit

$$f(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 2v_1 + v_2 \\ 2v_1 + v_2 \\ v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$$

lineare Abbildungen, $B = E_3$, $C = E_2$ und $D = E_4$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von f bzgl. B und C bzw. g bzgl. C und D bzw. von $g \circ f$ bzgl. B und D.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_38,

38.4 Gegeben sind die geordnete Standardbasis $E_2 = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ des $\mathbb{R}^2$, $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ des $\mathbb{R}^3$ und $C = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ des $\mathbb{R}^4$. Nun betrachten wir zwei lineare Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}v_1 - v_2\\0\\2\,v_1 - v_2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g\left(\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}v_1 + 2\,v_3\\v_2 - v_3\\v_1 + v_2\\2\,v_1 + 3\,v_3\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}_BM(f)_{E_2}$, ${}_CM(g)_B$ und ${}_CM(g \circ f)_{E_2}$.

38.5 Die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei festgelegt durch

$$f(e_1) = 3e_3, \quad f(e_2) = e_1 - e_2 - 9e_3 \;\text{ und }\; f(e_3) = 2e_2 + 7e_3.$$

Geben Sie die Darstellungsmatrizen von f bzgl. der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$ und bzgl. der folgenden Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$ an:

$$b_1 = (1, 1, 1)^\top, \quad b_2 = (1, 2, 3)^\top \;\text{ und }\; b_3 = (1, 3, 6)^\top.$$

38.6 Es sei die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(x, y) = (y, 2x - 2y, 3x)^\top.$$

(a) Geben Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen von $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Basen $B = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit

$$b_1 = (1, 1)^\top,\; b_2 = (5, 3)^\top \;\text{ und }\; c_1 = (1, 2, 2)^\top,\; c_2 = (1, 3, 4)^\top,\; c_3 = (2, 4, 5)^\top.$$

(c) Es sei $x = 2e_1 - 4e_2$. Welche Koordinaten besitzt $f(x)$ bzgl. der Basis (c_1, c_2, c_3)?

38.2 Lösungen

38.1 Es gilt

$${}_BM(f)_B = {}_BM(\mathrm{Id} \circ f \circ \mathrm{Id})_B = {}_BM(\mathrm{Id})_A\, {}_AM(f)_A\, {}_AM(\mathrm{Id})_B\,.$$

Um also ${}_BM(f)_B$ zu ermitteln, ist das Produkt der drei Matrizen ${}_BM(\mathrm{Id})_A$, ${}_AM(f)_A$ und ${}_AM(\mathrm{Id})_B$ zu bilden. Die Matrix ${}_AM(f)_A$ ist gegeben, die anderen beiden Matrizen müssen wir noch bestimmen. Wegen

$$ {}_BM(\mathrm{Id})_A\ {}_AM(\mathrm{Id})_B = {}_BM(\mathrm{Id})_B = E_3 $$

ist ${}_AM(\mathrm{Id})_B$ das Inverse zu ${}_BM(\mathrm{Id})_A$.

Wir bezeichnen die Elemente der geordneten Basis A der Reihe nach mit a_i, $i = 1, 2, 3$ und jene der Basis B mit b_i, $i = 1, 2, 3$ und ermitteln ${}_BM(\mathrm{Id})_A = ({}_Ba_1, {}_Ba_2, {}_Ba_3)$. Gesucht sind also $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, mit

$$ \sum_{j=1}^{3} \lambda_j b_j = a_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,. $$

Dies sind drei lineare Gleichungssysteme, die wir simultan lösen:

$$ \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 8 & -16 & 9 \\ -2 & -1 & 1 & -6 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 7 & -13 & 7 \end{array}\right) \to \dots \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right). $$

Damit lautet die Basistransformationsmatrix

$$ {}_BM(\mathrm{Id})_A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad {}_AM(\mathrm{Id})_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}, $$

wobei wir die Matrix ${}_AM(\mathrm{Id})_B$ durch Invertieren der Matrix ${}_BM(\mathrm{Id})_A$ erhalten.

Wir berechnen schließlich das Produkt

$$ {}_BM(f)_B = {}_BM(\mathrm{Id})_A\ {}_AM(f)_A\ {}_AM(\mathrm{Id})_B = \begin{pmatrix} 16 & 47 & -88 \\ 18 & 44 & -92 \\ 12 & 27 & -59 \end{pmatrix}. $$

38.2 (a) Wegen

$$ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} $$

sind die drei Vektoren $b_1 = (2, 2, 3)^\top$, $b_2 = (1, 1, 1)^\top$, $b_3 = (2, 1, 1)^\top$ linear unabhängig, also B eine geordnete Basis.

(b) Mit $A = {}_{E_3}M(f)_{E_3}$ erhalten wir

$$ A\, b_1 = 1\, b_1 + 0\, b_2 + 0\, b_3\,, \quad A\, b_2 = 0\, b_1 + 2\, b_2 + 0\, b_3\,, \quad A\, b_3 = 0\, b_1 + 0\, b_2 + 3\, b_3\,. $$

Also gilt

$$ {}_B M(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} , \quad \text{wobei} \quad S = {}_{E_3} M(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})_B = (b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

die Transformationsmatrix ist.

38.3 Die Darstellungsmatrizen lauten:

$$ {}_C M(f)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_D M(g)_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . $$

Wir können die Darstellungsmatrix ${}_D M(g \circ f)_B$ der Verkettung $g \circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ damit nun auf zwei Arten berechnen. Zum einen gilt:

$$ (g \circ f)(v) = g \begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4v_1 + 3v_2 + v_3 \\ 4v_1 + 3v_2 + v_3 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 \\ 3v_1 + 2v_2 + v_3 \end{pmatrix} , \text{ also } {}_D M(g \circ f)_B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . $$

Andererseits erhalten wir diese aber auch durch:

$$ {}_D M(g \circ f)_B = {}_D M(g)_C \cdot {}_C M(f)_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} . $$

38.4 Wir verwenden die Bezeichnungen

$$ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . $$

Wir erhalten ${}_B M(f)_{E_2}$, indem wir die Koordinaten v_{ij}, $i = 1, 2, 3$ von $f(e_j)$ für $j = 1, 2$ bezüglich der Basis B in die Spalten einer Matrix schreiben. Wir erhalten v_{ij}, $i = 1, 2, 3$ durch Lösen der durch

$$ \sum_{i=1}^{3} v_{ij} b_i = f(e_j) $$

für $j = 1, 2$ gegebenen linearen Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$ mit dem Gauß-Algorithmus. Man erhält:

$$ {}_B M(f)_{E_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . $$

Analog erhält man ${}_C M(g)_B$, indem man die Koordinaten v'_{ij}, $i = 1, 2, 3, 4$ von $g(b_j)$ für $j = 1, 2, 3$ bezüglich der Basis C in die Spalten einer Matrix schreibt. Dies liefert:

$$ {}_C M(g)_B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} . $$

Die Darstellungsmatrix ${}_C M(g \circ f)_{E_2}$ erhält man durch Matrixmultiplikation:

$$ {}_C M(g \circ f)_{E_2} = {}_C M(g)_B \, {}_B M(f)_{E_2} = \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -7 & 4 \\ -3 & 2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} . $$

38.5 Für die Darstellungsmatrix bzgl. der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$ erhält man

$$ A = {}_E M(f)_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} . $$

Die Darstellungsmatrix bzgl. der Basis B bestimmen wir mit der Basistransformationsformel, es gilt

$$ {}_B M(f)_B = B^{-1} A \, B \quad \text{mit} \quad B = {}_B M(\mathrm{Id})_E \, , $$

die Spalten der Matrix B sind also die Elemente der geordneten Basis B. Wegen

$$ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} $$

erhalten wir für die gesuchte Darstellungsmatrix von f bzgl. B:

$$ {}_B M(f)_B = B^{-1} A \, B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . $$

38.6 (a) Aus

$$f(e_1) = f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \; f(e_2) = f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ folgt } A = {}_{E_3}M(f)_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir lösen die Aufgabe über die Basistransformationsformel, diese besagt:

$${}_CM(f)_B = {}_CM(\mathrm{Id})_{E_3}\,{}_{E_3}M(f)_{E_2}\,{}_{E_2}M(\mathrm{Id})_B\,.$$

Wir verschaffen uns die Zutaten: Die Matrix ${}_{E_3}M(f)_{E_2}$ haben wir, das ist A. Die Matrix ${}_{E_2}M(\mathrm{Id})_B$ ist B, wobei die Spalten von B die Elemente b_1 und b_2 der Basis B sind. Und die Matrix ${}_CM(\mathrm{Id})_{E_3}$ ist das Inverse von $C = {}_{E_3}M(\mathrm{Id})_C$, wobei die Spalten der Matrix C durch die Elemente c_1, c_2, c_3 der Basis C gegeben sind. Es gilt

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir nun alle Zutaten, es gilt

$${}_CM(f)_B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -21 \\ -2 & -2 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir suchen ${}_Cf(x)$. Diesen Vektor erhalten wir als ${}_Cf(x) = {}_CM(f)_{E_2}\,{}_{E_2}f(x)$. Wir verschaffen un die Zutaten, es gilt

$${}_{E_2}f(x) = A\,x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad {}_CM(f)_{E_2} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$${}_Cf(x) = {}_CM(f)_{E_2}\,{}_{E_2}f(x) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 20 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

Das besagt: $f(x) = 28c_1 + 20c_2 + 26c_3$.

39 Diagonalisierung – Eigenwerte und Eigenvektoren

39.1 Aufgaben

39.1 Geben Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden komplexen Matrizen an:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

39.2 Begründen Sie, warum Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten linear unabhängig sind.

39.3 Diagonalisieren Sie, falls möglich, die folgenden reellen Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -3 & -5 & -6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, (e) $F = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, (f) $G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

39.4 Berechnen Sie alle Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, (d) $D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

39.5 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix und $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass $|\lambda| = 1$ gilt.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_39,

39.6 (a) Zeigen Sie folgende Aussage: Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und sind v_1 und v_2 zwei Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten λ_1 und λ_2, wobei $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gelte, dann sind v_1 und v_2 orthogonal zueinander.

(b) Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine Basis der Eigenräume an.

(c) Bestimmen Sie weiterhin eine orthogonale Matrix U, sodass $U^\top A U$ Diagonalform besitzt.

39.7 Es sei v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ einer Matrix A.

(a) Ist v auch Eigenvektor von A^2? Zu welchem Eigenwert?

(b) Wenn A zudem invertierbar ist, ist dann v auch ein Eigenvektor zu A^{-1}? Zu welchem Eigenwert?

39.8 Geben Sie zu den folgenden Matrizen jeweils eine Basis aus Eigenvektoren an.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ (c) $A = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 0 \\ -6 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

39.9 Es sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gegeben als $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1 = (1,1,0)^\top$ und $v_2 = (0,0,1)^\top$ Eigenvektoren von A sind. Bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Besitzt A weitere Eigenwerte? Berechnen Sie ggf. diese Eigenwerte sowie zugehörige Eigenvektoren.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ eine Basis B besitzt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f\colon x \mapsto Ax$ bezüglich der Basis B.

(d) Verwenden Sie die bisherigen Ergebnisse, um möglichst einfach die Matrix A^5 zu berechnen.

39.10 Die Fibonacci-Zahlen $F_0, F_1, F_2, \ldots$ sind rekursiv definiert durch die Vorschrift

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

(a) Bestimmen Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die die Gleichung $(F_n, F_{n-1})^\top = A\,(F_{n-1}, F_{n-2})^\top$ erfüllt.

(b) Wie muss $k \in \mathbb{N}$ gewählt werden, damit $(F_n, F_{n-1})^\top = A^k\,(F_1, F_0)^\top$ gilt?

(c) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

(d) Berechnen Sie eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D mit der Eigenschaft $D = T^{-1} A\, T$.

(e) Verwenden Sie die Darstellung von A aus Teilaufgabe (d), um A^k für das in Teilaufgabe (b) bestimmte k zu berechnen.

(f) Verwenden Sie die bisherigen Teilergebnisse, um eine explizite Darstellung für die Fibonacci-Zahlen F_n (ohne Rekursion) zu bestimmen.

39.11 Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Begründen Sie:

(a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so ist auch $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$ ein solcher.

(b) Ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A, so ist auch $\overline{v} \in \mathbb{C}^n$ ein solcher (dabei ist $\overline{v} = (\overline{v}_i)$ für $v = (v_i) \in \mathbb{C}^n$).

Geben Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ an.

39.2 Lösungen

39.1 (a) Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix A:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2\,.$$

Die einzige Nullstelle von χ_A ist 2, also ist 2 der einzige Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 2. Den Eigenraum $\mathrm{Eig}_A(2)$ zum Eigenwert 2 erhalten wir als $\ker(A - 2E)$:

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\,.$$

Damit ist jeder Vektor $(t, t)^\top$ mit $t \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert 2 von A.

(b) Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix B:

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(1-\lambda)\,.$$

Die beiden Nullstellen von χ_B sind ± 1, also gibt es zwei Eigenwerte mit der jeweiligen algebraischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume $\mathrm{Eig}_B(\pm 1)$ zu den beiden Eigenwerten ± 1 erhalten wir als $\ker(B \mp E)$:

$$\mathrm{Eig}_B(\pm 1) = \ker \begin{pmatrix} \mp 1 & 1 \\ 1 & \mp 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit ist jeder Vektor $(t, \pm t)^\top$ mit $t \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert ± 1 von B.

(c) Wir berechnen das charakteristische Polynom der Matrix C:

$$\chi_C(\lambda) = \det(C - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}) .$$

Die beiden Nullstellen von χ_C sind $\pm\,\mathrm{i}$, also gibt es zwei Eigenwerte mit der jeweiligen algebraischen Vielfachheit 1. Die Eigenräume $\mathrm{Eig}_C(\pm\,\mathrm{i})$ zu den beiden Eigenwerten $\pm\,\mathrm{i}$ erhalten wir als $\ker(C \mp \mathrm{i}\, E)$:

$$\mathrm{Eig}_C(\pm\,\mathrm{i}) = \ker \begin{pmatrix} \mp\,\mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mp\,\mathrm{i} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mp\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit ist jeder Vektor $(t, \mp\,\mathrm{i}\, t)^\top$ mit $t \neq 0$ Eigenvektor zum Eigenwert $\pm\,\mathrm{i}$ von C.

39.2 Es seien $v_1, \ldots, v_r$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

$$A\, v_1 = \lambda_1\, v_1 ,\ \ldots ,\ A\, v_r = \lambda_r\, v_r .$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion nach der natürlichen Zahl r, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind.

Induktionsanfang: Die Behauptung ist korrekt, da $v_1 \neq 0$ linear unabhängig ist.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für $r-1$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ korrekt.

Induktionsschritt: Es seien $v_1, \ldots, v_r$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Aus der Gleichung

$$\mu_1\, v_1 + \cdots + \mu_r\, v_r = 0 \tag{39.1}$$

mit $\mu_1, \ldots, \mu_r \in \mathbb{K}$ folgt durch

- Multiplikation der Gleichung (39.1) mit der Matrix A:

$$0 = A\,0 = A\,(\mu_1\, v_1 + \cdots + \mu_r\, v_r) = \mu_1 A\, v_1 + \cdots + \mu_r A\, v_r = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_r \lambda_r v_r$$

und durch

- Multiplikation der Gleichung (39.1) mit dem Eigenwert λ_r:

$$0 = \lambda_r\, 0 = \lambda_r\, (\mu_1\, v_1 + \cdots + \mu_r\, v_r) = \mu_1\, \lambda_r\, v_1 + \cdots + \mu_r\, \lambda_r\, v_r\,.$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\mu_1\, \lambda_1\, v_1 + \cdots + \mu_r\, \lambda_r\, v_r = \mu_1\, \lambda_r\, v_1 + \cdots + \mu_r\, \lambda_r\, v_r\,.$$

Es gilt somit:

$$(\lambda_r - \lambda_1)\, \mu_1\, v_1 + \cdots + (\lambda_r - \lambda_{r-1})\, \mu_{r-1}\, v_{r-1} = 0\,.$$

Nach Induktionsvoraussetzung sind die Vektoren $v_1,\, \ldots,\, v_{r-1}$ linear unabhängig, sodass wegen $\lambda_r - \lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1,\, \ldots,\, r-1$ die Koeffizienten $\mu_1,\, \ldots,\, \mu_{r-1}$ alle null sind, d. h. $\mu_1 = \cdots = \mu_{r-1} = 0$. Aus der Gleichung (39.1) folgt nun $\mu_r = 0$, da $v_r \neq 0$ gilt.

39.3 (a) Mit der Wahl $B = E_3$ gilt:

$$E_3^{-1} A E_3 = A\,.$$

Damit ist A diagonalisiert. Wir machen es noch einmal:

$$\chi_A(x) = \det(A - xE_n) = (1-x)(2-x)(3-x)\,.$$

A hat also die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ mit den Eigenräumen

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle,\ \mathrm{Eig}_A(2) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \text{ und } \mathrm{Eig}_A(3) = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Man erhält also wiederum

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_3 \quad \text{mit} \quad B^{-1} A B = A\,.$$

(b) Die Matrix B hat das charakteristische Polynom

$$\chi_B = (2-x)^2 (3-x)$$

und damit die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$ mit den algebraischen Vielfachheiten $\mathrm{alg}(2) = 2$ und $\mathrm{alg}(3) = 1$. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist

$$\mathrm{Eig}_B(2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle\,.$$

Demnach hat der Eigenwert 2 die geometrische Vielfachheit $\operatorname{geo}(2) = 1 < 2 = \operatorname{alg}(2)$ und damit ist B nicht diagonalisierbar.

(c) Die Matrix C hat das charakteristische Polynom $\chi_C(\lambda) = -(2+\lambda)^2(4-\lambda)$, also den zweifachen Eigenwert $\lambda_1 = -2$ und einfachen Eigenwert $\lambda_2 = 4$. Wir erhalten als Eigenräume

$$\operatorname{Eig}_C(-2) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \ \operatorname{Eig}_C(4) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit stimmen für jeden Eigenwert geometrische und algebraische Vielfachheit überein, sodass die Matrix C diagonalisierbar ist. Mit der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad B^{-1} C \, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(d) Das charakteristische Polynom von D lautet:

$$\chi_D = \det(D - xE_3) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 3 & -5-x & 3 \\ 6 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = \cdots = -(x+2)^2(x-4) .$$

Die Eigenwerte von D lauten somit $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$. Wir bestimmen die Eigenräume von D:

$$\operatorname{Eig}_D(-2) = \ker \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

$$\operatorname{Eig}_D(4) = \ker \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Die Matrix D ist damit diagonalisierbar, mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{gilt} \quad B^{-1} D \, B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

(e) Das charakteristische Polynom von F lautet:

$$\chi_F \quad = \quad \det(F - xE_3) = \begin{vmatrix} -3-x & 1 & -1 \\ -7 & 5-x & -1 \\ -6 & 6 & -2-x \end{vmatrix} = \cdots = -(x+2)^2(x-4) .$$

Die Eigenwerte von F sind also dieselben wie von D: $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$. Wir bestimmen die Eigenräume von F:

$$\mathrm{Eig}_F(-2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

$$\mathrm{Eig}_F(4) = \ker \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Die Matrix D ist nicht diagonalisierbar, da $\mathrm{geo}(-2) = 1 \neq 2 = \mathrm{alg}(-2)$.

(f) Wir starten mit dem charakteristischen Polynom und den Eigenwerten:

$$\begin{aligned} \chi_G(\lambda) &= \det(G - xE_3) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)(3-x)^2 + 0 + 0 - [-(3-x) + 0 + 0] \\ &= (3-x)(x^2 - 4x + 4) = (3-x)(x-2)^2 . \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von G sind also $\lambda_1 = 3$ (einfach) und $\lambda_2 = 2$ (doppelt). Um zu wissen, ob G diagonalisierbar ist, müssen wir also wieder wissen, welche geometrische Vielfachheit der doppelte Eigenwert $\lambda_2 = 2$ besitzt. Wir berechnen daher zunächst den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$:

$$\mathrm{Eig}_G(2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit ist die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 2 also 1, die algebraische ist 2. G ist daher nicht diagonalisierbar.

39.4 (a) Wir beginnen mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2(1-\lambda) + (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2+1) = (1-\lambda)(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}) . \end{aligned}$$

Die Matrix A besitzt also die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$ und ist damit diagonalisierbar. Wir berechnen der Reihe nach die Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ + \end{matrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Damit ist z. B. $v_1 = (1,2,1)^\top$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.

$$A - \lambda_{2,3} E = \begin{pmatrix} \mp\,\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & 1 \mp \mathrm{i} & 0 \\ 1 & 0 & \mp\,\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{matrix} \mp\,\mathrm{i} \\ \\ + \end{matrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} \mp\,\mathrm{i} & 1 & -1 \\ 0 & 1 \mp \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \mp\,\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ist z. B. $v_{2,3} = (\pm\,\mathrm{i}, 0, 1)^\top$ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$.

(b) Wir beginnen mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_B(\lambda) &= \det(B - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(-2-\lambda) = -(1-\lambda)^2(2+\lambda) . \end{aligned}$$

Die Matrix B besitzt die zwei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1$ (doppelt) und $\lambda_3 = -2$. Wir berechnen der Reihe nach Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = -2$:

$$B - \lambda_{1,2} E = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} .$$

Diese Matrix hat Rang 2, der Eigenraum ist eindimensional (und B nicht diagonalisierbar). Es ist z. B. $v_1 = (-3,0,1)^\top$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_{1,2} = 1$.

$$B - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \\ 3 \end{matrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 0 & 8 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Daraus erhalten wir z. B. den Eigenvektor $v_3 = (0,0,1)^\top$ zum Eigenwert $\lambda_3 = -2$.

(c) Wir bestimmen zunächst das charakteristische Polynom in Abhängigkeit von α:

$$\begin{aligned} \chi_C(\lambda) &= \det(C - \lambda E_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(\cos^2\alpha - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \sin^2\alpha) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1) . \end{aligned}$$

Ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist sofort zu sehen: $v_1 = (1, 0, 0)^\top$.
Um ein bisschen Schreibarbeit zu sparen, betrachten wir im Folgenden nur Winkel $\alpha \in [0, \pi]$, der Fall $\alpha \in [\pi, 2\pi]$ lässt sich analog behandeln. Zunächst betrachten wir den Sonderfall $\alpha = 0$, also $\cos\alpha = 1$. Dann ist

$$\chi_C(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (1 - \lambda)^3 ,$$

also ist $\lambda_{1,2,3} = 1$ dreifacher Eigenwert von C. Für die Eigenvektoren gilt

$$C(\alpha = 0) - \lambda_{1,2,3}E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also ist der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_{1,2,3} = 1$ der ganze $\mathbb{R}^3$ (es gibt drei linear unabhängige Eigenvektoren). Das ist auch nicht weiter überraschend, da $C(\alpha = 0) = E_3$, die Abbildung also einfach die Identität ist.

Als zweiten Sonderfall betrachten wir $\alpha = \frac{\pi}{2}$, also $\cos\alpha = 0$. Es ergibt sich

$$\chi_C(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 1) = (1 - \lambda)(\lambda + \mathrm{i})(\lambda - \mathrm{i}) .$$

Wir haben in diesem Fall also drei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$. Die Eigenvektoren bestimmen wir wie üblich. Der zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist ohnehin schon bekannt, also betrachten wir die Eigenwerte $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$:

$$C(\alpha = \tfrac{\pi}{2}) - \lambda_{2,3}E = \begin{pmatrix} 1 \mp \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \mp\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 1 & \mp\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mp\mathrm{i} \\ + \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \mp \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \mp\mathrm{i} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit ergeben sich zu den Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\,\mathrm{i}$ die Eigenvektoren $v_{2,3} = (0, \pm\,\mathrm{i}, 1)^\top$.

Der dritte Sonderfall ist $\alpha = \pi$, damit ist $\cos\alpha = -1$ und

$$\chi_C(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = (1 - \lambda)(\lambda + 1)^2 .$$

Wir haben also nach wie vor den Eigenwert $\lambda_1 = 1$, außerdem erhalten wir den doppelten Eigenwert $\lambda_{2,3} = -1$ (und damit einen reellen, geometrisch interpretierbaren Eigenwert!). Wir bestimmen die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{2,3} = -1$:

$$C(\alpha = \pi) - \lambda_{2,3}E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Das ergibt als Eigenvektoren $v_2 = (0, 1, 0)^\top$ und $v_3 = (0, 0, 1)^\top$. Der $\mathbb{R}^3$ zerfällt also in den Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ (die x_1-Achse) und den Eigenraum zu den Eigenwerten $\lambda_{2,3} = -1$ (die x_2-x_3-Ebene).

Ist $\alpha \in [0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$, so sind die Nullstellen von $\chi_C(\lambda)$ gegeben durch $\lambda_1 = 1$ und

$$\lambda_{2,3} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\,|\sin\alpha| = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\sin\alpha\,.$$

Für die zugehörigen Eigenvektoren gilt dann

$$\begin{aligned} C - \lambda_{2,3}E &= \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha \mp \mathrm{i}\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mp\mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \mp\mathrm{i}\sin\alpha \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mp\mathrm{i} \\ + \end{matrix} \\ &\to \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha \mp \mathrm{i}\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \mp\mathrm{i}\sin\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

als Eigenvektor ergibt sich also $v_{2,3} = (0, \pm\mathrm{i}, 1)$. Dieser allgemeine Fall sieht damit (fast) genauso aus wie der Fall $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Wir gehen noch kurz auf die geometrische Interpretation der Abbildung $x \mapsto Cx$ ein. Die rechte, untere Teilmatrix von C haben wir bereits als Drehmatrix kennengelernt, dieser Teil würde (als 2×2-Matrix) eine Drehung um den Winkel α in der Ebene beschreiben. Im $\mathbb{R}^3$ kommt eine weitere Dimension hinzu. Wir stellen fest, dass die x_1-Achse für jeden Winkel α ein Eigenvektor der Abbildung zum Eigenwert 1 ist, jeder Punkt auf dieser Achse bleibt also unverändert. Bei einem Winkel von 0 gilt das auch für die Punkte auf der x_2-x_3-Ebene. Bei einem Winkel von π werden diese Punkte an der x_1-Achse gespiegelt (Eigenraum zum Eigenwert -1!). Bei dazwischen liegenden Winkeln ergeben sich komplexe Eigenwerte, die keine sinnvolle geometrische Deutung im $\mathbb{R}^3$ mehr zulassen. Aus diesen Informationen lässt sich bereits eine Deutung der Abbildung erahnen: Es handelt sich um eine Drehung um den Winkel α um die x_1-Achse als Drehachse. Diese Behauptung ist durch die Eigenwerte und -vektoren allein natürlich noch nicht belegt, die führen uns lediglich auf die richtige Spur.

(d) Wir beginnen mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_D(\lambda) &= \det(D - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)^2(-2-\lambda) - 8 - 8 - [-4(2-\lambda) - 4(2-\lambda) + 4(-2-\lambda)] \\ &= (2-\lambda)[(2-\lambda)(-2-\lambda) + 8] - 16 - 4(-2-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 + 4) - 8 + 4\lambda = \lambda^2(2-\lambda)\,. \end{aligned}$$

Die Matrix besitzt also den doppelten Eigenwert $\lambda_{1,2} = 0$ und den (einfachen) Eigenwert $\lambda_3 = 2$. Wir berechnen der Reihe nach die Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 0$ und $\lambda_3 = 2$:

$$D - \lambda_{1,2}E = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix besitzt also Rang 1, damit gibt es tatsächlich zwei unabhängige Eigenvektoren, z.B. $v_1 = (-1, 0, 1)^\top$ und $v_2 = (1, 1, 0)^\top$.

$$D - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt als Eigenvektor $v_3 = (-1, 1, 1)^\top$. Damit ist die Matrix D übrigens diagonalisierbar.

39.5 Es gilt

$$(Ax, Ay) = (Ax)^\top Ay = x^\top \underbrace{A^\top A}_{=E} y = x^\top y = (x, y)\,,$$

wobei wir im dritten Schritt die Orthogonalität von A ausgenutzt haben. Somit folgt nun

$$\|Ax\| = \sqrt{(Ax, Ax)} = \sqrt{(x, x)} = \|x\|\,.$$

Für einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ gilt also

$$\|v\| = \|Av\| = \|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|\,.$$

Da $v \neq 0$, ist $\|v\| \neq 0$, also muss $|\lambda| = 1$.

Zusatz: Bestimmung von λ: $Av = \lambda v \;\Rightarrow\; v^\top Av = \lambda v^\top v = \lambda\|v\|^2 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{v^\top Av}{\|v\|^2}$.

39.6 (a) Laut Voraussetzung gilt $Av_{1,2} = \lambda_{1,2}v_{1,2}$. Somit gilt

$$\lambda_1 v_2^\top v_1 = v_2^\top (Av_1) = v_2^\top A^\top v_1 = (Av_2)^\top v_1 = \lambda_2 v_2^\top v_1\,.$$

Wir formen diese Gleichheit um und folgern die Behauptung:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v_2^\top v_1 = 0 \;\Rightarrow\; v_2^\top v_1 = 0\,.$$

(b) Wir beginnen mit dem charakteristischen Polynom:

$$\chi_A(\lambda) \;=\; \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(5+\lambda)(1-\lambda)^2\,.$$

Wir erhalten also den (einfachen) Eigenwert $\lambda_1 = -5$ und den (doppelten) Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Wir berechnen zuerst die Basis des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1 = -5$:

$$\mathrm{Eig}_A(-5) = \ker \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit ist $\{(1,1,2)^\top\}$ eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1 = -5$.

$$\mathrm{Eig}_A(-5) = \ker \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit ist $\{a_1 = (1,1,2)^\top\}$ eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1 = -5$.

Für den Eigenwert $\lambda_2 = 1$ erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Damit ist $\{a_2 = (-1,1,0)^\top,\ a_3 = (-2,0,1)^\top\}$ eine Basis des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_2 = 1$.

(c) Für das *orthogonale Diagonalisieren* benötigen wir eine ONB des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A. Da $a_1 \perp a_2$ und $a_1 \perp a_3$, müssen wir nur noch a_1 und a_2 normieren und anstelle von a_3 einen zu a_2 orthogonalen Eigenvektor von A zum Eigenwert 1 bestimmen (und dann normieren).

Wir wählen $\tilde{a}_3 = (-1,-1,1)^\top$ und erhalten nun die ONB $B = (b_1, b_2, b_3)$ mit

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir mit der Transformationsmatrix

$$U = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{die Diagonalmatrix} \quad U^\top A U = D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

39.7 (a) Ja. Aus $Av = \lambda v$ folgt $A^2 v = A(\lambda v) = \lambda^2 v$, so dass also v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^2 von A^2 ist.

(b) Ja. Aus $Av = \lambda v$ folgt $v = A^{-1}(Av) = A^{-1}(\lambda v) = \lambda(A^{-1}v)$, so dass also v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^{-1} von A^{-1} ist.

39.8 (a) Es gilt $\chi_A = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$. Man erhält für die Eigenräume $\mathrm{Eig}_A(3) = \langle (1,1)^\top \rangle$ und $\mathrm{Eig}_A(-1) = \langle (-1,1)^\top \rangle$. Damit bilden die Spalten von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

eine (Orthogonal-)basis des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A.

(b) Es gilt $\chi_A = (1 - \lambda)^2(\lambda + 1)(\lambda + 2)$. Man erhält für die Eigenräume $\mathrm{Eig}_A(1) = \langle (1,0,1,0)^\top, (1,1,1,0)^\top \rangle$, $\mathrm{Eig}_A(-1) = \langle (1,3,-1,1)^\top \rangle$ und $\mathrm{Eig}_A(-2) = \langle (1,1,0,1)^\top \rangle$. Damit bilden die Spalten von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Eigenvektoren von A.

(c) Es gilt $\chi_A = (\lambda - (1+\mathrm{i}))(\lambda - (1-\mathrm{i}))$. Man erhält für die Eigenräume) $\mathrm{Eig}_A(1+\mathrm{i}) = \langle (1, 3\,\mathrm{i})^\top \rangle$ und $\mathrm{Eig}_A(1-\mathrm{i}) = \langle (0,1)^\top \rangle$. Damit bilden die Spalten von

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3\,\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A.

39.9 (a) Es gilt

$$Av_1 = (5,5,0)^\top = 5v_1\,,\ \ Av_2 = (0,0,1)^\top = 1v_2\,,$$

sodass $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_1 = 1$ Eigenwerte von A sind.

(b) Wir betrachten das charakteristische Polynom:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda - 5)(\lambda + 1)\,.$$

Es gibt also noch einen dritten Eigenwert $\lambda_3 = -1$. (Das hätten wir einfacher haben können: Nachdem die Spur von A gleich 5 ist, und 5 somit die Summe der Eigenwerte ist, muss der dritte Eigenwert -1 sein, da $\lambda_1 + \lambda_2 = 3$ gilt.)

Als Eigenvektor zum Eigenwert -1 erhalten wir wegen

$$A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \mid \cdot \frac{1}{2} \\ + \\ \mid \cdot \frac{1}{2} \end{matrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

z. B. $v_3 = (-2, 1, 0)^\top$.

(c) $B = (v_1, v_2, v_3)$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$ wenn die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 paarweise verschieden sind. Da dies hier der Fall ist, sind die drei Eigenvektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig, und somit bildet B eine Basis des $\mathbb{R}^3$.
Die Darstellungsmatrix $\tilde{A}$ von $f\colon x \mapsto Ax$ bzgl. der Basis B lautet damit:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} A\, B\,.$$

(d) Es gilt $\tilde{A} = B^{-1} A\, B$, also auch $A = B\, \tilde{A}\, B^{-1}$. Somit folgt

$$A^2 = (B\,\tilde{A}\,B^{-1})^2 = B\,\tilde{A}\,\underbrace{B^{-1}B}_{=E_3}\tilde{A}B^{-1} = B\,\tilde{A}^2 B^{-1} \;\Rightarrow\; \cdots \;\Rightarrow\; A^5 = B\,\tilde{A}^5 B^{-1}\,.$$

Damit können wir nun *einfach* A^5 bestimmen:

$$A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5^5 & 0 & 0 \\ 0 & 1^5 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^5 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1041 & 2084 & 0 \\ 1042 & 2083 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

39.10 (a) Anhand der rekursiv definierten Vorschrift erkennt man

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}.$$

(b)

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^k \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} \implies k = n-1\,.$$

(c) Wir betrachten das charakteristische Polynom mit den Nullstellen $\lambda_{1,2}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1 \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right).$$

Als Eigenvektoren $v_{1,2}$ wählen wir

$$A - \lambda_{1,2} E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow v_{1,2} = (1 \pm \sqrt{5}, 2)^\top .$$

(d)

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(e) Wegen $D = T^{-1} A\, T$ gilt $A = T\, D\, T^{-1}$, also gilt für $k = n-1$:

$$A^k = A^{n-1} = T\, D^{n-1} T^{-1} \quad \text{mit} \quad T^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

(f) Mit (b) und (e) ergibt sich

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad F_n = (A^{n-1})_{11} = (T D^{n-1} T^{-1})_{11} .$$

Wir benötigen also den ersten Eintrag in der ersten Spalte von

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})^{n-1} & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{5})^{n-1} \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ -2 & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2^n \sqrt{5}} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \Rightarrow F_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} .$$

39.11 Das charakteristische Polynom χ_A der Matrix A mit reellen Komponenten hat nur reelle Koeffizienten, d. h. $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$, und ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von χ_A, d.h. $\chi_A(\lambda) = 0$, also ein Eigenwert von A, so ist auch das konjugiert Komplexe $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von χ_A, also auch ein Eigenwert von A, denn

$$0 = \overline{\chi_A(\lambda)} = \chi_A(\overline{\lambda}) .$$

Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bezeichne $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$. Hat eine komplexe Matrix A nur reelle Komponenten und ist $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist wegen

$$A\overline{v} = \overline{A}\overline{v} = \overline{A\, v} = \overline{\lambda\, v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

der komplexe Vektor $\overline{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.
Die Eigenwerte der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind die konjugiert komplexen Zahlen $\pm\,\mathrm{i}$, Eigenvektoren sind z. B. die *konjugiert komplexen* Vektoren $(1, \pm\,\mathrm{i})^\top$.

40 Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

40.1 Aufgaben

40.1 Beweisen Sie, dass die Gesamtheit der Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ in der Vereinigung der n Gerschgorin-Kreise dieser Matrix liegen.

40.2 Bestimmen Sie die Gerschgorin-Kreise zu folgenden Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0.5 \\ 0.2 & 5 & 0.7 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, (c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 7 & 1 \\ 0.1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

40.3 Programmieren Sie das $Q\,R$-Verfahren.

40.4 Programmieren Sie die Vektoriteration. Dabei soll die Iteration abbrechen, wenn der Abstand zweier aufeinanderfolgender Iterierter $\lambda^{(k+1)}$ und $\lambda^{(k)}$ unterhalb einer gegebenen Toleranz tol liegt. Testen Sie Ihr Programm an Beispielen.

40.2 Lösungen

40.1 Zu einem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von $A = (a_{ij})$ mit Eigenvektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ zum Eigenwert λ wählen wir ein $r \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|v_r| \geq |v_i|$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es gilt $v_r \neq 0$, da $v \neq 0$ gilt. Dann ist $v' = |v_r|^{-1} v$ auch ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, aber v' hat die Eigenschaft, dass jede Komponente von v' einen Betrag kleiner als 1 hat. Daher können wir nun gleich einen solchen Eigenvektor $v = (v_1, \ldots, v_n)^\top$ wählen mit der Eigenschaft $\max\limits_{i=1,\ldots,n} \{|v_i|\} = |v_r| = 1$ für ein $r \in \{1, \ldots, n\}$.

Weil v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist, gilt $(A - \lambda\, E_n)\, v = 0$.

Die r-te Zeile dieses Gleichungssystems lautet:

$$(a_{rr} - \lambda)\, v_r = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n} a_{ri}\, v_i .$$

Es folgt mit der Dreiecksungleichung in $\mathbb{C}$

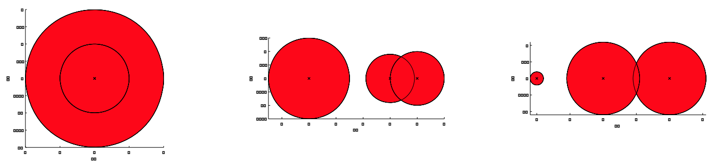
$$|a_{rr} - \lambda\,| = |(a_{rr} - \lambda)\, v_r| = |\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n} a_{ri}\, v_i| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n} |a_{ri}||v_i| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq r}}^{n} |a_{ri}| .$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_40,

Und damit gilt $\lambda \in K_r = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - a_{rr}| \leq \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{n} |a_{ri}|\}$.

Damit haben wir die Aussage bewiesen: Jeder Eigenwert der Matrix A liegt in der Vereinigung der Kreisscheiben $K_1, \ldots, K_n$.

40.2 Die folgenden drei Abbildungen zeigen die gesuchten Kreise:



40.3 Der folgende Code taugt:

```
function [ ew,ev ] = qrverfahren(A,iter)
[~,n]=size(A);
P=eye(n);
for k=1:iter
[Q,R]=qr(A);
A=R*Q;
P=P*Q;
end
ew=diag(A);
ev=P;
```

40.4 Der folgende Code taugt:

```
function [ lambda, v, iter ] = vektoriteration( A, tol, v0 )
v0=v0/norm(v0);
vor=A*v0;
lambda=v0'*vor;
v=vor/norm(vor);
iter=0;
err=inf;
while err>tol
    vor=A*v;
    lambdavor=v'*vor;
    err=abs(lambdavor-lambda);
    lambda=lambdavor;
    v=vor/norm(vor);
    iter=iter+1;
end
```

41 Quadriken

41.1 Aufgaben

41.1 Bestimmen Sie die Normalformen der folgenden Quadriken Q, die gegeben sind durch:

(a) $13x_1^2 - 32x_1x_2 + 37x_2^2 = 45$,

(b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 + 12x_2 + 8 = 0$,

(c) $7x_2^2 + 24x_1x_2 - 2x_2 + 24 = 0$,

(d) $-2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0$,

(e) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + \sqrt{2}x_2 = 1$,

(f) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 3 = 0$.

41.2 Für $c \geq 0$ sei Q die durch die Gleichung

$$c(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 6x_1x_2 - 8x_2x_3 + 8x_1 + 6x_3 = 0$$

gegebene Quadrik.

(a) Schreiben Sie Q in der Form $x^\top Ax + a^\top x + \alpha = 0$ mit $A^\top = A$ und bestätigen Sie, dass eine der Hauptachsenrichtungen von Q senkrecht auf der Ebene E : $4x_1 + 3x_3 - 5 = 0$ steht.

(b) Bestimmen Sie ein Hauptachsensystem (n_1, n_2, n_3). Wie lautet die Gleichung von Q in den auf Hauptachsen transformierten Koordinaten (Fallunterscheidung!)?

41.3 Sind $r_i = (x_i,\, y_i,\, z_i) \in \mathbb{R}^3$ $(i = 1, \ldots, n)$ Ortsvektoren von starr verbundenen Massenpunkten (die Verbindungen seien massenlos) mit den Massen m_i $(i = 1, \ldots, n)$, so ist der Trägheitstensor dieses starren Körpers

$$J = \sum_i m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_iy_i & -x_iz_i \\ -y_ix_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_iz_i \\ -z_ix_i & -z_iy_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Man stelle den Trägheitstensor J für den Einheitswürfel ($r_i = (\pm1,\, \pm1,\, \pm1)$, $i = 1, \ldots, 8$, Längeneinheit m) auf, bei dem in allen Ecken die Masse 1 kg sitzt und nur in $(-1,\, -1,\, -1)$ die Masse 2 kg.

(b) Man berechne die Hauptträgheitsmomente und -achsen des gegebenen Würfels (also die Eigenwerte und eine ONB aus Eigenvektoren).
Hinweis: Die Eigenwerte von J sind 19 und 16.

(c) Man bestimme alle $\omega \in \mathbb{R}^3$, für die $T_0 = \frac{1}{2}\,\omega^\top J\,\omega = 1.5\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}}$ ist.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_41,

41.2 Lösungen

41.1 (a) Wir bestimmen die Normalform der Quadrik Q, die gegeben ist durch

$$13x_1^2 - 32x_1x_2 + 37x_2^2 = 45\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$x^\top A\,x + c = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 37 \end{pmatrix}\,,\ c = -45\,.$$

(1) **Hauptachsentransformation:** Wir bestimmen eine ONB des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A:

$$\chi_A = (13-x)\,(37-x) - (-16)^2 = (x-5)\,(x-45)\,,\ \text{sodass} \quad \lambda_1 = 5\,,\ \lambda_2 = 45$$

die Eigenwerte von A sind. Wegen

$$\mathrm{Eig}_A(5) = \ker(A - 5E_2) = \ker \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ -16 & 32 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ und}$$

$$\mathrm{Eig}_A(45) = \ker(A - 45E_2) = \ker \begin{pmatrix} -32 & -16 \\ -16 & -8 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

erhalten wir nach Normieren der angegebenen Eigenvektoren die ONB bzw. orthogonale Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\,.$$

Wir erhalten mit $y = B^\top x$ die Gleichung

$$(*) \quad 5y_1^2 + 45y_2^2 = 45\,.$$

(2) **Translation zur Elimination des linearen Anteils:** Quadratische Ergänzung entfällt, wir setzen $z_1 = y_1$ und $z_2 = y_2$ und erhalten

$$(**) \quad 5z_1^2 + 45z_2^2 = 45\,.$$

(3) **Translation zur Elimination des konstanten Anteils:** Entfällt.

(4) **Normalform:** Durch Rückbenennung $x_k = z_k$ und Multiplikation der Gleichung mit $1/45$ erhalten wir die Normalform einer Ellipse mit den Halbachsen 3 und 1:

$$\left(\tfrac{x_1}{3}\right)^2 + x_2^2 = 1\,.$$

(b) Wir bestimmen die Normalform der Quadrik Q, die gegeben ist durch

$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 + 12x_2 + 8 = 0\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$x^\top A\,x + b^\top x + c = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\,,\ b = \begin{pmatrix} -6 \\ 12 \end{pmatrix}\,,\ c = 8\,.$$

(1) **Hauptachsentransformation:** Wir bestimmen eine ONB des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A:

$$\chi_A = (1-x)\,(4-x) - 4 = x\,(x-5)\,,\ \text{sodass}\ \ \lambda_1 = 5\,,\ \lambda_2 = 0$$

die Eigenwerte von A sind. Wegen

$$\mathrm{Eig}_A(5) = \ker(A - 5E_2) = \ker \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle \ \text{ und}$$

$$\mathrm{Eig}_A(0) = \ker(A) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

erhalten wir nach Normieren der angegebenen Eigenvektoren die ONB bzw. orthogonale Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}\,.$$

Wir erhalten mit $y = B^\top x$ die Gleichung

$$(*) \quad 5y_1^2 - \tfrac{30}{\sqrt{5}}y_1 + 8 = 0\,.$$

(2) **Translation zur Elimination des linearen Anteils:** Wir setzen $z_1 = y_1 - 3/\sqrt{5}$ und $z_2 = y_2$ und erhalten durch diese quadratische Ergänzung

$$(**) \quad 5z_1^2 = 1\,.$$

(3) **Translation zur Elimination des konstanten Anteils:** Entfällt.
(4) **Normalform:** Durch Rückbenennung $x_k = z_k$ erhalten wir die Gleichung eines Parallelenpaares:

$$\left(\tfrac{x_1}{1/\sqrt{5}}\right)^2 = 1\,.$$

(c) Wir bestimmen die Normalform der Quadrik Q, die gegeben ist durch

$$7x_2^2 + 24x_1x_2 - 2x_2 + 24 = 0\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$x^\top A\,x + b^\top x + c = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}\,,\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}\,,\ c = 24\,.$$

(1) **Hauptachsentransformation:** Wir bestimmen eine ONB des $\mathbb{R}^2$ aus Eigenvektoren von A:

$$\chi_A = -x\,(7-x) - 12^2 = (x+9)\,(x-16)\,,\ \text{sodass}\quad \lambda_1 = -9\,,\ \lambda_2 = 16$$

die Eigenwerte von A sind. Wegen

$$\mathrm{Eig}_A(-9) = \ker(A + 9E_2) = \ker \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle \ \text{und}$$

$$\mathrm{Eig}_A(16) = \ker(A - 16E_2) = \ker \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

erhalten wir nach Normieren der angegebenen Eigenvektoren die ONB bzw. orthogonale Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}\,.$$

Wir erhalten mit $y = B^\top x$ die Gleichung

$$(*) \qquad -9y_1^2 + 16y_2^2 - \tfrac{6}{5}y_1 - \tfrac{8}{5}y_2 + 24 = 0\,.$$

(2) **Translation zur Elimination des linearen Anteils:** Wir setzen $z_1 = y_1 + 1/15$ und $z_2 = y_2 - 1/20$ und erhalten durch diese quadratische Ergänzung

$$(**) \qquad -9z_1^2 + 16z_2^2 + 24 = 0\,.$$

(3) **Translation zur Elimination des konstanten Anteils:** Entfällt.
(4) **Normalform:** Durch Rückbenennung $x_k = z_k$ und Multiplikation der Gleichung mit $-1/24$ erhalten wir die Gleichung einer Hyperbel:

$$\left(\frac{x_1}{2/3\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1/2\sqrt{6}}\right)^2 = 1\,.$$

(d) Wir bestimmen die Normalform der Quadrik Q, die gegeben ist durch

$$-2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$x^\top A\,x = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) **Hauptachsentransformation:** Wir bestimmen eine ONB des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$\chi_A = x\,(x+3)^2\,, \text{ sodass } \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = -3$$

die Eigenwerte von A sind. Wegen

$$\mathrm{Eig}_A(0) = \ker(A) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ und}$$

$$\mathrm{Eig}_A(-3) = \ker(A + 3E_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$$

erhalten wir nach Normieren der angegebenen Eigenvektoren die ONB bzw. orthogonale Matrix

$$B = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten mit $y = B^\top x$ die Gleichung

$$(*) \quad -3y_2^2 - 3y_3^2 = 0\,.$$

(2) **Translation zur Elimination des linearen Anteils:** Entfällt.
(3) **Translation zur Elimination des konstanten Anteils:** Entfällt
(4) **Normalform:** Durch Rückbenennung $x_k = y_k$ und Multiplikation der Gleichung mit $-1/3$ erhalten wir die Gleichung:

$$x_2^2 + x_3^2 = 0\,.$$

Dies ist äquivalent zu

$$x_2 = x_3 = 0\,.$$

Bei dieser Quadrik handelt es sich also um die x_1-Achse.

(e) Wir bestimmen die Normalform der Quadrik Q, die gegeben ist durch

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + \sqrt{2}x_2 = 1\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$x^\top A\,x + b^\top x + c = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \; c = -1\,.$$

(1) **Hauptachsentransformation:** Wir bestimmen eine ONB des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A:

$$\chi_A = -x^3 + 3x^2 - 4 = (x+1)(-x^2 + 4x - 4) = -(x+1)(x-2)^2\,,$$

sodass $\lambda_1 = -1\,,\ \lambda_{2/3} = 1$ die Eigenwerte von A sind. Wegen

$$\mathrm{Eig}_A(-1) = \ker(A + E_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und}$$

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \ker(A - 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

erhalten wir nach Normieren der angegebenen Eigenvektoren die ONB bzw. orthogonale Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten mit $y = B^\top x$ die Gleichung

$$(*) \qquad -\,y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,y_1 + \tfrac{2}{\sqrt{3}}\,y_3 = 1\,.$$

(2) **Translation zur Elimination des linearen Anteils:** Wir setzen $z_1 = y_1 - 1/\sqrt{6}$, $z_2 = y_2$ und $z_3 = y_3 + 1/2\sqrt{3}$ und erhalten durch diese quadratische Ergänzung

$$(**) \qquad -\,z_1^2 + 2z_2^2 + 2z_3^2 = 1\,.$$

(3) **Translation zur Elimination des konstanten Anteils:** Entfällt.
(4) **Normalform:** Durch Rückbenennung $x_k = z_k$ und Umindizierung und Umschreiben erhalten wir die Gleichung eines einschaligen Hyperboloids:

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{1/2}}\right)^2 - x_3^2 = 1\,.$$

(f) Wir bestimmen die Normalform der Quadrik Q, die gegeben ist durch

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 8x_2 + x_3 + 3 = 0\,.$$

In Matrizenschreibweise lautet diese Gleichung

$$x^\top A\,x + b^\top x + c = 0 \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,\; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\; c = 3\,.$$

(1) **Hauptachsentransformation:** Da die Matrix A bereits eine Diagonalmatrix ist, entfällt dieser Schritt.
(2) **Translation zur Elimination des linearen Anteils:** Wir setzen $z_1 = x_1 + 1$, $z_2 = x_2 + 2$ und $z_3 = x_3$ und erhalten durch diese Quadratische Ergänzung

$$(**) \quad z_1^2 + 2z_2^2 + z_3 - 6 = 0\,.$$

(3) **Translation zur Elimination des konstanten Anteils:** Wegen $d_3 = 1 \neq 0$ setzen wir $\tilde{z}_3 = z_3 - 6$ und $\tilde{z}_1 = z_1$ sowie $\tilde{z}_2 = z_2$ und erhalten

$$(***) \quad \tilde{z}_1^2 + 2\tilde{z}_2^2 + \tilde{z}_3 = 0\,.$$

(4) **Normalform:** Durch Rückbenennung $x_k = z_k$, Vorzeichenänderung und Multiplikation mit 2 erhalten wir die Gleichung in Normalform:

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{1/2}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1/2}\right)^2 - 2x_3 = 0\,.$$

41.2 (a) Mit

$$A = \begin{pmatrix} c & 3 & 0 \\ 3 & c & -4 \\ 0 & -4 & c \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \alpha = 0$$

wird Q durch $x^\top Ax + a^\top x + \alpha = 0$ beschrieben. Die Ebene E hat den Normalenvektor $n = (4, 0, 3)^\top$, und es gilt

$$An = \begin{pmatrix} c & 3 & 0 \\ 3 & c & -4 \\ 0 & -4 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4c \\ 0 \\ 3c \end{pmatrix} = cn.$$

n ist also Eigenvektor von A zum Eigenwert c und somit Hauptachsenrichtung von Q.

(b) Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det(A - xE) = \det\begin{pmatrix} c-x & 3 & 0 \\ 3 & c-x & -4 \\ 0 & -4 & c-x \end{pmatrix} \\ &= (c-x)^3 - 25(c-x) = (c-x)[(c-x)^2 - 25] \\ &= (c-x)(c+5-x)(c-5-x)\,.\end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also c, $c-5$ und $c+5$.

- Der normierte Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = c$ ist nach (a) $n_1 = \frac{1}{5}n$.
- Eigenwert $\lambda_2 = c-5$:

$$A - (c-5)E = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 16 & -20 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Ein Eigenvektor ist also $(-3, 5, 4)^\top$, normiert $n_2 = \frac{1}{5\sqrt{2}}(-3, 5, 4)^\top$.
- Eigenwert $\lambda_2 = c+5$:

$$n_3 = n_1 \times n_2 = \frac{1}{25\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{25\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -15 \\ -25 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die orthogonale Transformationsmatrix für die Hauptachsentransformation $x = Ty$ lautet nun

$$T = \frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & -3 & -3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 3\sqrt{2} & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für die Gleichung von Q im Hauptachsensystem erhält man

$$0 = (Ty)^\top A(Ty) + a^\top (Ty) = cy_1^2 + (c-5)y_2^2 + (c+5)y_3^2 + 10y_1\,,$$

da

$$a^\top T = (T^\top a)^\top = \left(\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4\sqrt{2} & 0 & 3\sqrt{2} \\ -3 & 5 & 4 \\ -3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right)^\top = (10, 0, 0)\,.$$

- 1. Fall ($c = 0$): $5y_2^2 - 5y_3^2 - 10y_1 = 0$ bzw. $y_1 = \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$
Hyperbolisches Paraboloid

- 2. Fall ($0 < c < 5$): $c(y_1 + \frac{5}{c})^2 + \overbrace{(c-5)}^{<0} y_2^2 + (c+5)y_3^2 - \frac{25}{c} = 0$.
Die Transformation

$$z_1 = \left(y_1 + \tfrac{5}{c}\right)\,, \quad z_2 = y_2 \quad \text{und} \quad z_3 = y_3$$

bringt Q auf die Normalform eines einschaligen Hyperboloiden

$$c\,z_1^2 + (c+5)\,z_3^2 = (5-c)\,z_2^2 + \tfrac{25}{c}\,.$$

- 3. Fall ($c = 5$): $5(y_1 + 1)^2 + 10y_3^2 - 5 = 0$.
Elliptischer Zylinder dessen Achse parallel zur y_2-Achse liegt.

- 4. Fall ($c > 5$): $c(y_1 + \frac{5}{c})^2 + (c-5)y_2^2 + (c+5)y_3^2 - \frac{25}{c} = 0$.
Ellipsoid mit Mittelpunkt $(-\frac{5}{c}, 0, 0)$.

41.3 (a) Der Trägheitstensor lautet $J = \begin{pmatrix} 18 & -1 & -1 \\ -1 & 18 & -1 \\ -1 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

(b) Es hat J die Eigenwerte 19 und 16 (wie man etwa durch Berechnen des charakteristischen Polynoms findet). Das sind die Hauptträgheitsmomente. Die Hauptträgheitsachsen finden wir durch Bestimmen der Eigenräume:

$$\mathrm{Eig}_J(16) = \langle \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}_J(19) = \langle \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle\,,$$

wobei wir gleich orthonormale Vektoren gewählt haben.

Die drei angegeben Vektoren, wir bezeichnen sie der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3, bilden die Hauptträgheitsachsen. Setze $B = (b_1, b_2, b_3)$, dies ist eine orthogonale Matrix $B^\top B = E_3$, und es gilt $D = \mathrm{diag}(16, 19, 19) = B^\top J B$, d.h. $BDB^\top = J$.

(c) Wir setzen nun $\omega' = B^\top \omega$. Die Menge aller $\omega \in \mathbb{R}^3$ mit $T_0 = 1.5\,\frac{\mathrm{kg\ m}^2}{\mathrm{s}^2}$ ist gegeben durch:

$$\omega^\top J \omega = 3 \;\Leftrightarrow\; \omega^\top BDB^\top \omega = 3 \;\Leftrightarrow\; \omega'^\top D \omega' = 3$$
$$\Leftrightarrow\; 16\,\omega_1'^2 + 19\,\omega_2'^2 + 19\,\omega_3'^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; \frac{\omega_1'^2}{a^2} + \frac{\omega_2'^2}{b^2} + \frac{\omega_3'^2}{c^2} = 1$$

mit $a = \sqrt{3}/4$, $b = \sqrt{3/19} = c$, dabei bilden die $\omega' = (\omega_1', \omega_2', \omega_3')$ ein Ellipsoid.

42 Schurzerlegung und Singulärwertzerlegung

42.1 Aufgaben

42.1 Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass $v = (1,0,0)^\top$ ein Eigenvektor von A ist und geben Sie den zugehörigen Eigenwert λ an.

(b) Bestimmen Sie die Schurzerlegung $R = Q^\top AQ$ von A so, dass $(1,0,0)^\top$ die erste Spalte von Q ist.

42.2 Bestimmen Sie die Schurzerlegungen der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

42.3 Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegungen der Matrizen

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, (c) $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, (e) $C = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (d) $B^\top = (2,2,1)$, (f) $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

42.4 Ein einfarbiges Bild in einem 3×3-Gitter wird durch eine reelle 3×3-Matrix gespeichert, deren Einträge den Graustufenwerten am jeweiligen Pixel entsprechen. Das Bild eines Fadenkreuzes wird so durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ repräsentiert. Führen Sie die Singulärwertzerlegung durch, und komprimieren Sie die Daten, indem Sie den kleinsten Singulärwert durch 0 ersetzen. Welches Graustufenbild ergibt sich nach Datenkompression?

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_42,

42.2 Lösungen

42.1 Man beachte unser Rezept:

(a) Es gilt

$$A\,v = (3,0,0)^\top = 3\,v\,,$$

also ist v ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 3$.

(b) Der Vektor v ist bereits normiert. Ergänze nun v zu einer ONB des $\mathbb{R}^3$ z. B. mit $v_2 = (0,1,0)^\top$ und $v_3 = (0,0,1)^\top$. Damit folgt $B_1 = E_3$, und es gilt $B_1^\top A\,B_1 = A$. Wir setzen somit

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Setze nun $Q_1 = B_1$.

Aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi_{A_2}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2$$

ergibt sich der doppelte Eigenwert $\lambda = 3$. Weiterhin gilt

$$A_2 - 3E = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus sich als normierter Eigenvektor z. B. $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)^\top$ ablesen lässt. Ergänze diesen zu einer ONB des $\mathbb{R}^2$ z. B. mit $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^\top$. Damit folgt

$$B_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die Schurzerlegung

$$R = Q^\top A\,Q = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } Q = Q_2 = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

42.2 (a) (1) Die erste Spalte $s = (1,0,-1)^\top$ von $A_1 = A$ ist kein Vielfaches von e_1.

- Wir berechnen zunächst die Eigenwerte von $A_1 = A$:

$$\chi_{A_1} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ 0 & 3-x & 0 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)(3-x)^2 + (3-x)\,.$$

  Für den ersten Schritt genügt es, einen Eigenwert zu kennen, hier ist das $\lambda_1 = 3$. Wir berechnen dazu einen Eigenvektor:

$$A_1 - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid \cdot(-1) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Ein Eigenvektor ist etwa $v_1 = (0, 1, 1)^\top$.

  Ergänzung zu einer ONB: Wir ergänzen den Vektor v_1 zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (durch intelligentes Raten, man könnte hier auch Gram-Schmidt benutzen) und schreiben diese ONB in die Spalten einer orthogonalen Matrix B_1:

$$B_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Berechnung von A_2: Die neue Matrix A_2 ergibt sich als Teilmatrix von

$$B_1^\top A B_1 = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

  Durch Streichen der ersten Spalte und der ersten Zeile (die zum Eigenwert v_1 korrespondiert) erhalten wir die Matrix

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Die erste Spalte $s = (3, -\sqrt{2})^\top$ ist kein Vielfaches von e_1

- Nun beginnen wir mit der neuen Matrix A_2 wieder von vorne und bestimmen die Eigenwerte von A_2 (das müssten wir nicht mehr machen, wenn wir oben gleich alle Eigenwerte bestimmt hätten):

$$\chi_{A_2}(x) = \begin{vmatrix} 3-x & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1-x \end{vmatrix} = (x-2)^2\,.$$

Also ist $\lambda = 2$ doppelter Eigenwert von A_2. Für die Eigenvektoren von A_2 zum Eigenwert 2 erhält man

$$A_2 - 2E = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich der Eigenvektor $v = (-1, \sqrt{2})^\top$.

Ergänzung zu einer ONB des $\mathbb{R}^2$: Wir normieren v und ergänzen ihn zu einer ONB des $\mathbb{R}^2$, die wir in die Spalten einer Matrix B_2' schreiben:

$$B_2' = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus erhalten wir die Matrix B_2, indem wir eine Einheitsspalte in der ersten Spalte und Nullen im Rest der ersten Zeile ergänzen:

$$B_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Da wir mit einer 3×3-Matrix begonnen hatten, endet das Verfahren hier (für eine größere Matrix hätten wir die Schritte entsprechend öfter wiederholen müssen).

Wir setzen die erhaltenen Teilergebnisse zusammen. Es gilt

$$R = B_2^\top B_1^\top A B_1 B_2 = (B_1 B_2)^\top A (B_1 B_2) = B^\top A\, B$$

mit

$$B = B_1 B_2 = \tfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} \\ 0 & 2 & -\frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Wegen $\chi_A = (2-x)^4$ – man beachte die Blockdreiecksgestalt der Matrix – hat A den vierfachen Eigenwert 2.

(1) Die erste Spalte von A ist kein Vielfaches von e_1:

- Als Eigenraum erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wir wählen $v = (0,0,1,0)^\top$ und ergänzen v zu einer ONB $B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Es gilt
$$B_1^\top A\,B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Wir setzen $Q_1 = B_1$.

(2) Die erste Spalte von A_2 ist kein Vielfaches von e_1:

- Als Eigenraum erhalten wir
$$\mathrm{Eig}_{A_2}(2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$
Wir wählen $v = (0,0,1)^\top$ und ergänzen v zu einer ONB $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Es gilt
$$B_2^\top A_2\,B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Wir setzen $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) Die erste Spalte von A_3 ist kein Vielfaches von e_1:

- Als Eigenraum erhalten wir
$$\mathrm{Eig}_{A_3}(2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$
Wir wählen $v = (0,1)^\top$ und ergänzen v zu einer ONB $B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Es gilt
$$B_3^\top A_3\,B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
- Wir setzen $Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Für $Q = Q_3$ gilt $Q^{-1} = Q^\top$. Wir erhalten die Schur-Zerlegung:

$$Q^\top A\,Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

42.3 (a) Wir bestimmen die Eigenwerte und Eigenvektoren von $A^\top A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

Aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi_{A^\top A}(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 18-\lambda \end{vmatrix} = (18-\lambda)(\lambda-4)\lambda$$

erhält man die Eigenwerte $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 0$. Für die normierten Eigenvektoren erhält man $v_1 = (0,0,1)^\top$ und $v_{2,3} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,\pm 1,0)^\top$. Die Singulärwerte lauten $\sigma_1 = 3\sqrt{2}$ und $\sigma_2 = 2$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix V ist gegeben durch

$$V = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir noch U: Die Spalten von u bzw. U sind

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{\sigma_2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Singulärwertzerlegung von A ist nun gegeben durch $A = U\,\Sigma\,V^\top$.

(b) (1) Es gilt $B^\top B = (9)$ also ist $\lambda_1 = 9$ und der dazugehörige normierte Eigenvektor lautet $v_1 = (1)$. Die Matrix V ist gegeben durch $V = (v_1) = (1)$.

(2) Der Singulärwert ist $\sigma_1 = 3$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(3) Nun bestimmen wir noch $U = (u_1, u_2, u_3)$, wobei $u_1 = \frac{1}{\sigma_1} B v_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ergänze diesen Vektor u_1 zu einer ONB des $\mathbb{R}^3$ durch z. B. $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0, 1, -2)^\top$ und $u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-5, 4, 2)^\top$ und erhalte:

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 & -5 \\ 2\sqrt{5} & 3 & 4 \\ \sqrt{5} & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Für die Matrix $AA^\top = \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$ erhält man aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi = \begin{vmatrix} 11 - \lambda & -7 \\ -7 & 11 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 18)(\lambda - 4)$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 18$ und $\lambda_2 = 4$. Für die normierten Eigenvektoren ergibt sich $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mp 1)^\top$. Die Singulärwerte lauten nun $\sigma_1 = 3\sqrt{2}$ und $\sigma_2 = 2$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix V ist gegeben durch

$$V = (v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir noch U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} C v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; u_2 = \frac{1}{\sigma_2} C v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ ergänze } u_3 = u_1 \times u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalte

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Singulärwertzerlegung von $A^\top$ ist nun gegeben durch $A^\top = U \Sigma V^\top$, wobei gilt: $\Sigma_A^\top = \Sigma_{A^\top}$, $U_A = V_{A^\top}$ und $V_A = U_{A^\top}$.

(d) Für die Matrix

$$BB^\top = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man aus dem charakteristischen Polynom

$$\chi = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\lambda^2$$

die Eigenwerte $\lambda_1 = 9$ und $\lambda_{2,3} = 0$. Die zugehörigen normierten Eigenvektoren sind dann gegeben durch $v_1 = \frac{1}{3}(2,2,1)^\top$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,-2)^\top$ und $\frac{1}{3\sqrt{5}}(-5,4,2)^\top$. Der Singulärwert lautet $\sigma_1 = 3$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix V ist gegeben durch

$$V = (v_1, v_2, v_3) = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & 0 & -5 \\ 2\sqrt{5} & 3 & 4 \\ \sqrt{5} & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmen wir noch U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} D v_1 = (1) \;\Rightarrow\; U = (1).$$

Somit lautet die Singulärwertzerlegung $D = U\,\Sigma\,V^\top$.

Wie vorher auch gilt hier $\Sigma_B^\top = \Sigma_{B^\top}$, $U_B = V_{B^\top}$ und $V_B = U_{B^\top}$.

(e) Wir beginnen mit der Berechnung der Eigenwerte und der normierten Eigenvektoren der Matrix $C^\top C$:

$$C^\top C = \begin{pmatrix} 65 & -25 & 0 & 0 \\ -25 & 65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus dem charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} \chi_{C^\top C}(\lambda) &= \det(C^\top C - \lambda E) = \begin{vmatrix} 65-\lambda & -25 \\ -25 & 65-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \left[(65-\lambda)^2 - 25^2\right]\left[(1-\lambda^2) - 1^2\right] = (\lambda-90)(\lambda-40)(\lambda-2)\lambda \end{aligned}$$

ergeben sich die Eigenwerte $\lambda_1 = 90$, $\lambda_2 = 40$, $\lambda_3 = 2$ und $\lambda_4 = 0$. Für die Eigenvektoren erhält man $v_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mp 1, 0, 0)^\top$ und $v_{3,4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1, \mp 1)^\top$.

Die Anzahl der Singulärwerte ergibt sich aus $\min(m, n)$. Für die Matrix C erhält man also die drei Singulärwerte $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{90}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{40}$ und $\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{2}$ und es gilt

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{90} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{40} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} .$$

Die Matrix V ist gegeben durch

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

Nun bestimmen wir die Matrix U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} C v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; u_2 = \frac{1}{\sigma_2} C v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} , \; u_3 = \frac{1}{\sigma_3} C v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir:

$$U = (u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m} .$$

Die Matrix C ist nun gegeben durch $C = U \,\Sigma\, V^\top$.

(f) (1) Für die Singulärwerte der Matrix D berechnen wir die Eigenwerte von $D^\top D$ mit

$$D^\top D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} ,$$

ziehen daraus die Wurzeln und ordnen die Ergebnisse in absteigender Reihenfolge. Für das charakteristische Polynom ergibt sich

$$\chi_{D^\top D}(x) = \begin{vmatrix} 5 - x & 0 & 5 \\ 0 & 5 - x & 0 \\ 5 & 0 & 5 - x \end{vmatrix} = (5 - x)(-x)(10 - x) .$$

Die Eigenwerte sind (geordnet) 10, 5 und 0, also hat D die Singulärwerte $\sigma_1 = \sqrt{10}$ und $\sigma_2 = \sqrt{5}$ (da D zwei Zeilen und 3 Spalten hat, gibt es $\min\{2,3\} = 2$ Singulärwerte (der Eigenwert 0 muss damit noch einmal $(3-2=1)$ auftreten und sorgt später dafür, dass wir genügend Eigenvektoren für die Matrix V erhalten). Somit kennen wir bereits die Matrix (2)

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

In der Matrix V stehen die Eigenvektoren der Matrix $D^\top D$ (diese ist orthogonal diagonalisierbar, weil sie symmetrisch ist, es gibt also eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von $D^\top D$). Die normierten Eigenvektoren lauten $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^\top$, $v_2 = (0,1,0)^\top$ und $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^\top$.

Zu beachten ist, dass die Eigenvektoren eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ergeben müssen. Es ist also jeweils ein normierter Eigenvektor zu wählen, ggf. (bei mehrdimensionalen Eigenräumen) muss man auch darauf achten, dass die Eigenvektoren zu einem Eigenwert paarweise orthogonal sind (falls man das nicht direkt hinbekommt, wird eben ein Gram-Schmidt-Verfahren durchgeführt).

Damit erhalten wir Matrix V, in deren Spalten die Eigenvektoren stehen:

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) Wir bestimmen schließlich die Matrix U:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1} D v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sigma_2} D v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$U = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Als Singulärwertzerlegung ergibt sich schließlich

$$D = U\,\Sigma\,V^\top = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

42.4 Da die Matrix A bereits symmetrisch ist, können wir die Singulärwertzerlegung schneller über die Hauptachsentrafro erhalten: Zunächst ist 0 ein EW von A, da A nicht vollen Rang hat, und wir erhalten

$$\mathrm{Eig}_A(0) = \ker A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Durch Raten (oder Berechnung von χ_A) und Beachten von $\mathrm{Spur}\, A = 1$ findet man weiter EW 2 und -1 mit

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \text{ und } \mathrm{Eig}_A(-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Da diese Eigenräume automatisch paarweise orthogonal sind, erhalten wir durch Normieren der aufspannenden Vektoren die orthogonale Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mit $S^\top AS = \mathrm{diag}(2, -1, 0)$ oder

$$A = S\ \mathrm{diag}(2, -1, 0)S^\top = S\ \mathrm{diag}(2, 1, 0)\,(\mathrm{diag}(0, -1, 0)S^\top)\,.$$

Da die Matrix $\mathrm{diag}(0, -1, 0)\, S^\top$ ebenfalls orthogonal ist, haben wir so die Singulärwertzerlegung von A erhalten. Wir machen nun den kleinsten Singulärwert zu 0, und erhalten als komprimiertes Bild dann

$$S\ \mathrm{diag}(2, 0, 0)\,(\mathrm{diag}(0, -1, 0)S^\top) = S\ \mathrm{diag}(2, 0, 0)\, S^\top) =$$

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 4/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{pmatrix} .$$

Das Kreuz wird also etwas *verschmiert*.

43 Die Jordan-Normalform I

43.1 Aufgaben

43.1 Begründen Sie, warum für jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit dem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\ker(A - \lambda\, E_n)^i \subseteq \ker(A - \lambda\, E_n)^{i+1}\,.$$

43.2 Es sei $J = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & \\ & \lambda & 1 \\ & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ eine Jordannormalform zu A mit der Jordanbasis $B = (b_1,\, b_2,\, b_3)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & \\ & & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$ eine Jordannormalform zu A mit der Jordanbasis $\tilde{B} = (b_2,\, b_3,\, b_1)$ ist.

43.2 Lösungen

43.1 Wir setzen $N = A - \lambda\, E_n$. Ist nun $v \in \ker N^i$, so gilt $N^i v = 0$. Multiplikation dieser Gleichung mit N liefert $N^{i+1}v = N\, N^i v = N\, 0 = 0$. Das besagt, $v \in \ker N^{i+1}$. Wir erhalten hieraus die Behauptung.

43.2 Da J die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(v) = A\, v$ ist, gilt

$$A\, b_1 = \lambda\, b_1\,,\ A\, b_2 = \lambda\, b_2\,,\ A\, b_3 = 1\, b_2 + \lambda\, b_3\,.$$

Sortieren wir die Basiselemente also um wie es in der Aufgabenstellung gegeben ist, erhalten wir die Darstellungsmatrix $\tilde{J}$ bzgl. dieser neuen Basis $\tilde{B}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_43,

44 Die Jordan-Normalform II

44.1 Aufgaben

44.1 Begründen Sie: Ist $b \in \ker N^{i+1} \setminus \ker N^i$, so ist $N\,b \in \ker N^i \setminus \ker N^{i-1}$.

44.2 Bestimmen Sie Jordannormalformen und zugehörige Jordanbasen der folgenden Matrizen A, d. h. Jordanmatrizen J und Jordanbasen B mit $J = B^{-1}AB$:

(a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

(e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

44.3 Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_A(x) = (\lambda - x)^n$. Weiter sei $s = \dim \operatorname{Eig}_A(\lambda)$ die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ und r die kleinste natürliche Zahl mit $(A - \lambda E_n)^r = 0$. Bestimmen Sie die möglichen Jordannormalformen der Matrix A für die folgenden Tripel (n, s, r):

$$(5,3,1)\,,\ (5,3,2)\,,\ (5,3,3)\,,\ (5,1,4)\,,\ (6,2,3)\,,\ (6,1,2)\,.$$

Hinweis: Nicht jedes Tripel ist möglich!

44.4 Wir betrachten die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$g_0 = 0, \quad g_1 = 1, \quad g_{n+1} = -4g_{n-1} + 4g_n \quad \text{für } n \geq 1\,.$$

Bestimmen Sie das Folgenglied g_{20}. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Beschreiben Sie die Rekursion durch eine Matrix A.

(b) Bestimmen Sie eine Jordannormalform J von A und die Transformationsmatrix S mit $S^{-1}AS = J$.

(c) Schreiben Sie J als Summe $D + N$ mit einer Diagonalmatrix D und einer Matrix N mit $N^2 = 0$.

(d) Benutzen Sie die Binomialformel $(D+N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} D^{k-i} N^i$, um J^{19} zu berechnen.

(e) Ermitteln Sie nun A^{19}.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_44,

44.2 Lösungen

44.1 Nach Voraussetzung gilt $N^{i+1}b = 0$, folglich gilt auch $N^i N\, b = 0$, sodass $N\, b \in \ker N^i$. Wäre nun sogar $N\, b \in \ker N^{i-1}$, so gälte $N^{i-1} N\, b = 0$, also $N^i\, b = 0$. Das wäre aber ein Widerspruch, $b \notin \ker N^i$.

44.2 (a) Wir stellen die Jordannormalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ auf.

(1) **Eigenwerte:** Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A = (7-x)(3-x) + 4 = (x-5)^2\,,$$

d. h. die Matrix A besitzt den Eigenwerte $\lambda = 5$ mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(5) = 2$.

(2) **Verallgemeinerte Eigenräume:** Wir bestimmen die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker(N) \subsetneq \ker(N^2)\,,$$

wobei $N = A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ und $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Es gilt:

$$\ker(N) = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad \ker(N^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\,.$$

Die gesuchte Kette ergibt sich zu:

$$\{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\,.$$

(3) **Jordanbasis und Jordannormalform:** Da die geometrische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts $\lambda = 5$ eins ist, enthält die Jordannormalform nur ein Jordankästchen zu diesem Eigenwert, also

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

Die Spaltenvektoren b_1, b_2 der Matrix B erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen

$$b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(N^2) \setminus \ker(N) \text{ und setzen } b_1 = N b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \ker(N)\,.$$

Damit ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Jordanbasis, es gilt $J = B^{-1} A\, B$.

(b) Wir stellen die Jordannormalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ auf.

(1) **Eigenwerte:** Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A = (-1 - x)^3 \,,$$

d. h., die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = -1$ mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(-1) = 3$.

(2) **Verallgemeinerte Eigenräume:** Wir bestimmen die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker(N) \subsetneq \ker(N^2) \subsetneq \ker(N^3) \,,$$

wobei $N = A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Damit gilt:

$$\ker(N) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \,, \ \ker(N^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \,,$$

$$\ker(N^3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \,.$$

Die gesuchte Kette ergibt sich zu

$$\{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \,.$$

(3) **Jordanbasis und Jordannormalform:** Da die geometrische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts $\lambda = -1$ eins ist, enthält die Jordannormalform nur ein Jordankästchen zu diesem Eigenwert, also

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \,.$$

Die Spaltenvektoren b_1, b_2, b_3 der Matrix B erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(N^3) \setminus \ker(N^2) \text{ und setzen } b_2 = N b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ b_1 = N b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ eine Jordanbasis, es gilt $J = B^{-1} A\, B$.

(c) Wir stellen die Jordannormalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ auf.

(1) **Eigenwerte:** Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A = (2 - x)^2 (3 - x)\,,$$

d. h. die Matrix A besitzt die beiden Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(2) = 2$ und $\lambda_2 = 3$ mit $\mathrm{alg}(3) = 1$.

(2) **Verallgemeinerte Eigenräume:** Die Eigenräume der Eigenwerte ergeben sich zu

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, \ \mathrm{Eig}_A(3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Da $\mathrm{alg}(2) = 2 > 1 = \dim \mathrm{Eig}_A(2)$ bestimmen wir weiter den verallgemeinerten Eigenraum $\ker(N_1^2)$, wobei $N_1 = A - \lambda_1 E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$\ker(N_1^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Wir erhalten die beiden Ketten

$$\{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \qquad \text{sowie} \qquad \{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

(3) **Jordanbasis und Jordannormalform:** Da die geometrische Vielfachheit der beiden Eigenwerte je eins ist, enthält die Jordannormalform zu jedem dieser Eigenwerte ein Jordankästchen, also

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren b_1, b_2, b_3 der Matrix B erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(N_1^2) \setminus \ker(N_1), \text{ setzen } b_1 = N_1 b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und wählen } b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Eig}_A(3).$$

Es ist $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Jordanbasis, für die $J = B^{-1} A\, B$ gilt.

(d) Wir stellen die Jordannormalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ auf.

(1) **Eigenwerte:** Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A = (2 - x)^4,$$

d.h., die Matrix A hat den Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(2) = 4$.

(2) **Verallgemeinerte Eigenräume:** Wir bestimmen die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker(N) \subsetneq \ker(N^2) \subsetneq \ker(N^3) \subsetneq \ker(N^4), \quad \text{wobei } N = A - \lambda E_n, \text{ also}$$

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die gesuchten Kerne:

$$\operatorname{Eig}_A(2) = \ker(N) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle ,$$

$$\ker(N^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle ,$$

$$\ker(N^3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle ,$$

$$\ker(N^4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Die gesuchte Kette ergibt sich zu

$$\{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

(3) **Jordanbasis und Jordannormalform:** Da die geometrische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts $\lambda = 2$ eins ist, enthält die Jordannormalform nur ein Jordankästchen zu diesem Eigenwert, also

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Die Spaltenvektoren $b_1, \dots, b_4$ der Matrix B erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen $b_4 \in \ker(N^4) \setminus \ker(N^3)$ und bestimmen die restlichen Basisvektoren durch sukzessives Multiplizieren mit N:

$$b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = N b_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = N b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_1 = N b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ eine Jordanbasis, und es gilt $J = B^{-1} A \, B$.

(e) Wir stellen die Jordannormalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ auf.

(1) **Eigenwerte:** Wir bestimmen zunächst die Eigenwerte der Matrix A sowie deren algebraische Vielfachheiten. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A = ((3-x)(1-x)+1)((3-x)(1-x)+1) = (x^2 - 4x + 4)^2 = (x-2)^4 \,,$$

d. h. die Matrix A besitzt nur den Eigenwert $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit $\mathrm{alg}(2) = 4$.

(2) **Verallgemeinerte Eigenräume:** Wir bestimmen die Kette

$$\{0\} \subsetneq \ker(N) \subsetneq \ker(N^2) \subsetneq \ldots \subsetneq \ker(N^r) = \ker(N^{r+1}) \,,$$

wobei $N = A - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Wegen $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist $r = 2$.

Wir benötigen also die Kerne:

$$\mathrm{Eig}_A(2) = \ker(N) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \,,$$

$$\ker(N^2) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

Die gesuchte Kette ergibt sich zu

$$\{0\} \subsetneq \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix} \right\rangle \subsetneq \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

(3) **Jordanbasis und Jordannormalform:** Da die geometrische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts $\lambda = 2$ zwei ist, enthält die Jordannormalform zwei Jordankästchen zu diesem Eigenwert, also

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Spaltenvektoren $b_1, \ldots, b_4$ der Matrix B erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen die beiden linear unabhängigen Vektoren

$$b_4 = (0,0,1,1)^\top \in \ker(N^2) \setminus \ker(N) \quad \text{sowie} \quad b_2 = (1,1,0,0)^\top \in \ker(N^2) \setminus \ker(N)$$

und bestimmen die restlichen Basisvektoren durch sukzessives Multiplizieren mit N:

$$b_3 = N b_4 = (0,0,2,-2)^\top, \qquad b_1 = N b_2 = (2,-2,2,-2)^\top.$$

Damit ist $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ eine Jordanbasis, es gilt $J = B^{-1} A\, B$.

44.3 Abgesehen vom Vertauschen der Reihenfolge der Jordanblöcke sind nur die folgenden Jordannormalformen möglich:

- $(5,3,1)$: geht nicht.
- $(5,3,2)$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
- $(5,3,3)$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
- $(5,1,4)$: geht nicht.
- $(6,2,3)$: $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.
- $(6,1,2)$: geht nicht.

44.4 (a) Wir suchen erst eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mittels der sich die Rekursion für $n \geq 1$ als Matrizengleichung schreiben lässt. Offenbar gilt

$$\begin{pmatrix} g_n \\ g_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Nun bestimmen wir eine Jordanbasis zu A und eine zugehörige Jordannormalform J. Das charakteristische Polynom von A lautet $\chi_A(x) = (2-x)^2$, und $(1,2)^\top$ spannt den eindimensionalen Eigenraum zum Eigenwert 2 der algebraischen Vielfachheit 2 auf, denn für $N = A - 2E_2$ gilt

$$\ker N = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \quad \text{und} \quad \ker N^2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle.$$

Wir wählen den Vektor

$$b_2 = (1,0)^\top \in \ker N^2 \setminus \ker N \quad \text{und setzen} \quad b_1 = N b_2 = (-2,-4)^\top.$$

Damit ist $B = (b_1, b_2)$ eine Jordanbasis, und A hat die Jordannormalform $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Weiter erfüllt die Matrix $S = (b_1, b_2)$, deren Spalten gerade die Elemente der Jordanbasis sind, die Eigenschaft $J = S^{-1}AS$.

Damit und mit der angegeben Rekursion können wir nun g_{20} ermitteln, es gilt nämlich

$$\begin{pmatrix} g_{19} \\ g_{20} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} g_{18} \\ g_{19} \end{pmatrix} = A^{19} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = S J^{19} S^{-1} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir setzen nun

$$J = D + N = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad N^2 = 0.$$

(d) Mit der Binomialformel gilt

$$J^{19} = D^{19} + 19\, D^{18} N = \begin{pmatrix} 2^{19} & 19 \cdot 2^{18} \\ 0 & 2^{19} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad N^i = 0 \;\; \text{für} \;\; i \geq 2.$$

(e) Es ergibt sich damit

$$A^{19} = \begin{pmatrix} -9 \cdot 2^{20} & 19 \cdot 2^{18} \\ -19 \cdot 2^{20} & 5 \cdot 2^{21} \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile von $A^{19} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$ erhalten wir $g_{20} = 5 \cdot 2^{21}$.

45 Definitheit und Matrixnormen

45.1 Aufgaben

45.1 Eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt positiv semidefinit, falls $v^\top M v \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass eine positiv semidefinite Matrix nur nichtnegative Eigenwerte besitzt.

(b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a), dass für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Matrix $A^\top A$ nur nichtnegative Eigenwerte besitzt.

45.2 Berechnen Sie die Spektralnormen der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

45.3 Begründen Sie das Eigenwertkriterium zur Feststellung der Definitheit einer reellen symmetrischen Matrix.

45.4 Begründe, warum die Länge von Vektoren eines euklidischen Vektorraums eine Norm ist.

45.5 Begründen Sie die Aussagen in der Merkbox zu induzierten Matrixnormen auf Seite 423 (Rezeptebuch).

45.6 (a) Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm eine Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Frobeniusnorm mit der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ verträglich und submultiplikativ ist.

(c) Warum ist die Frobeniusnorm für $n > 1$ von keiner Vektornorm induziert?

45.7 Berechnen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

45.2 Lösungen

45.1 (a) Ist λ ein Eigenwert von M mit Eigenvektor v, so gilt:

$$0 \leq v^\top M\, v = v^\top \lambda\, v = \lambda v^\top v = \lambda\, \|v\|^2\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_45,

Da v ein Eigenvektor von M ist, gilt $v \neq 0$ und damit $\|v\| > 0$. Hieraus folgt $\lambda \geq 0$.

(b) Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$v^\top A^\top A\, v = (A\, v)^\top A\, v = \|A\, v\|^2 \geq 0\,.$$

Nach (a) besitzt dann $A^\top A$ nur nichtnegative Eigenwerte.

45.2 Die Spektralnorm einer symmetrischen Matrix ist der Betrag des betragsgrößten Eigenwerts der Matrix. Wir berechnen also zunächst die Eigenwerte von A:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^2(3+\lambda) + (-4) + (-4) - (-4\lambda - 4\lambda - 3 - \lambda)$$
$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 5 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda - 5)\,.$$

Damit erhalten wir als Eigenwerte 1 sowie -2 ± 3, also 1 und -5. Natürlich ist -5 damit der *betrags*größte Eigenwert der Matrix A, also ist die Spektralnorm

$$\|A\|_2 = |-5| = 5\,.$$

Für die Spektralnorm berechnen wir die Eigenwerte von B. Es gilt:

$$\chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(4-\lambda)\,.$$

Die Eigenwerte von B sind also 2 und 4, der betragsgrößte Eigenwert ist 4. Damit folgt $\|B\|_2 = 4$.

45.3 Wir begründen das Kriterium für die positive Definitheit. Die Beweise für die negative Definitheit und die Semidefinitheit ergeben sich analog.

Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert einer positiv definiten Matrix A und v ein zugehöriger Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt wegen $A\, v = \lambda\, v$ durch Skalarproduktbildung dieser Gleichung mit dem Vektor $v^\top$:

$$\underbrace{v^\top A\, v}_{>0} = v^\top \lambda\, v = \lambda\, \underbrace{v^\top v}_{>0}\,.$$

Somit muss λ positiv sein.

Interessanter ist, dass auch die Umkehrung gilt. Wir gehen von einer reellen symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus, deren n nicht notwendig verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positiv sind. Da zu A eine Orthonormalbasis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A existiert, können wir $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ als Linearkombination bezüglich dieser Basis B darstellen:

$$v = \mu_1\, v_1 + \cdots + \mu_n\, v_n\,,$$

wobei also $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ sind.

Wegen $v_i^\top v_j = 0$ für $i \neq j$ sowie $v_i^\top v_i = 1$ erhalten wir mit der Bilinearität des kanonischen Skalarprodukts:

$$v^\top (A\,v) = \left(\sum_{i=1}^n \overline{\mu}_i \overline{v}_i^\top\right) \left(\sum_{i=1}^n \mu_i\,\lambda_i\,v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i\,|\mu_i|^2\,\|v_i\|^2 > 0\,,$$

weil alle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ positiv sind.

Nur zur Indefinitheit: Hat die Matrix A einen positiven Eigenwert λ, so gilt für einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ wegen $A\,v = \lambda\,v$:

$$v^\top A\,v = \lambda\,v^\top v\,.$$

Da $v^\top v$ positiv ist, ist auch $v^\top A\,v$ positiv. Somit gibt es einen Vektor, nämlich v, mit $v^\top A\,v > 0$. Ist nun λ ein negativer Eigenwert von A, so zeigt die gleiche Überlegung, dass $v^\top A\,v$ negativ ist. Also gibt es auch einen Vektor v mit $v^\top A\,v < 0$.

Nun gebe es Vektoren v und w mit $v^\top A\,v > 0$ und $w^\top A\,w < 0$. Da A symmetrisch ist, hat A nicht notwendig verschiedene reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Wären alle Eigenwerte positiv bzw. negativ, so wäre A positiv bzw. negativ definit, ein Widerspruch. Somit muss A sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert haben.

45.4 Wir prüfen die drei Eigenschaften einer Norm nach:

(N1) klar, wegen der positiven Definitheit von $\langle\ ,\ \rangle$.

(N2) $\|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v\,, \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v\,, v\rangle} = |\lambda|\,\|v\|\,.$

(N3) Unter Verwendung der Chauchy-Schwarz'schen Ungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w\,, v+w\rangle^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v\,, w\rangle \le \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v\,, w\rangle| \\ &\le \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| = \big(\|v\| + \|w\|\big)^2\,.\end{aligned}$$

Wurzelziehen liefert nun die Dreiecksungleichung.

45.5 Verträglichkeit. Zu zeigen ist: $\forall A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ v \in \mathbb{R}^n : \quad \|Av\|_V \le \|A\| \cdot \|v\|_V$.
Für $v = 0$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt, denn:

$$\|Av\|_V = \|0\|_V = 0 \le 0 = \|A\| \cdot 0 = \|A\| \cdot \|v\|_V$$

Für $v \neq 0$ gilt nach Definition

$$\|Av\|_V \le \sup_{v\in\mathbb{R}^n,\ \|v\|_V=1} \|Av\|_V = \|A\|.$$

Multiplikation der Ungleichung mit $\|v\|_V > 0$ liefert die Behauptung.

Submultiplikativität. Zu zeigen ist: $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad \|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

$$\|AB\| = \sup_{\|v\|_V=1} \|ABv\|_V \le \sup_{\|v\|_V=1} \|A\| \cdot \|Bv\|_V \le \sup_{\|v\|_V=1} \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|v\|_V = \|A\|\|B\|\,.$$

45.6 (a) Identifiziere $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\tilde{a} \in \mathbb{R}^{n^2}$:

$$\tilde{a} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, a_{21}, \ldots, a_{2n}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nn})^\top .$$

Die euklidische Norm $\|\cdot\|$ des $\mathbb{R}^{n^2}$ ist eine Norm auf dem $\mathbb{R}^{n^2}$. Wegen $\|A\|_F = \|\tilde{a}\|_2$ ist daher auch $\|\cdot\|_F$ eine Norm.

(b) Verträglichkeit mit $\|\cdot\|_2$ bedeutet $\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2$. Wir berechnen daher

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2 &= \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \right) \le \sum_{j=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^2}_{\text{unabh. von } j} \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 = \|x\|_2^2 \|A\|_F^2 ,\end{aligned}$$

wobei die Cauchy-Schwarz'sche-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

verwendet wurde. Somit gilt also

$$\|Ax\|_2 \le \|A\|_F \|x\|_2 .$$

Submultiplikativität bedeutet $\|AB\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F$. Wir berechnen daher erneut mit der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung

$$\begin{aligned}\|AB\|_F^2 &= \sum_{k,l=1}^n (AB)_{kl} = \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}b_{il} \right)^2 \le \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ki}^2 \sum_{i=1}^n b_{il}^2 \right) \\ &= \sum_{k,i=1}^n a_{ki}^2 \sum_{l,i=1}^n b_{il}^2 = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 .\end{aligned}$$

Somit gilt also

$$\|AB\|_F \le \|A\|_F \|B\|_F .$$

(c) Eine natürliche Matrizennorm erfüllt $\|E_n\| = 1$, das ist aber bei der Frobeniusnorm für $n > 1$ nicht erfüllt, es gilt nämlich

$$\|E_n\|_F = \sqrt{n} \ne 1 .$$

Somit folgt, dass $\|\cdot\|_F$ keine natürliche Matrizennorm ist.

45.7

$$\|A\|_1 = 12 \quad (\text{max. Spaltensumme}), \ \|A\|_\infty = 11 \quad (\text{max. Zeilensumme}).$$

46 Funktionen mehrerer Veränderlicher

46.1 Aufgaben

46.1 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Mit $D^c = \mathbb{R}^n \setminus D$ bezeichnen wir das Komplement von D. Begründen Sie:

(a) Jeder Punkt von D ist entweder innerer Punkt von D oder Randpunkt von D.

(b) Ist D offen, so ist $D \cap \partial D = \emptyset$.

(c) Ist D offen, so ist D^c abgeschlossen.

(d) Ist D abgeschlossen, so ist D^c offen.

46.2 Untersuchen Sie die Teilmengen des $\mathbb{R}^2$, $M_1 =]-1,1[^2$, $M_2 =]-1,1]^2$, $M_3 = [-1,1]^2$, $\mathbb{R}^2$ und $\emptyset$ auf innere Punkte und Randpunkte. Welche der Mengen sind offen bzw. abgeschlossen?

46.2 Lösungen

46.1 (a) Wir müssen zwei Dinge zeigen:

(i) Ist $a \in D$ innerer Punkt von D, so ist a kein Randpunkt von D:
Nehmen wir zunächst an, dass $a \in D$ ein innerer Punkt von D ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, für das $U_\varepsilon(a)$ in D enthalten ist, also für das $U_\varepsilon(a) \cap D^c = \emptyset$ ist. Somit ist a kein Randpunkt von D.

(ii) Ist $a \in D$ kein innerer Punkt von D, so ist a Randpunkt von D:
Nehmen wir nun an, dass $a \in D$ kein innerer Punkt von D ist. Dann existiert kein $\varepsilon > 0$, für das $U_\varepsilon(a)$ in D enthalten ist. Mit anderen Worten: Für alle $\varepsilon > 0$ ist $U_\varepsilon(a) \cap D^c \neq \emptyset$. Außerdem ist für alle $\varepsilon > 0$ natürlich $a \in U_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset$. Somit ist a ein Randpunkt von D.

(b) Ist D offen, so ist jeder Punkt von D innerer Punkt von D, also nach (a) kein Randpunkt von D. Mit anderen Worten: $D \cap \partial D = \emptyset$.

(c) Zunächst ist aus der Definition von Randpunkten offensichtlich, dass der Rand von D auch der Rand von D^c ist, $\partial D = \partial(D^c)$. Ist D offen, so gilt für alle $a \in \partial D$, dass $a \notin D$ bzw. $a \in D^c$ ist. Mit anderen Worten: $\partial D = \partial(D^c) \subseteq D^c$, d. h. D^c ist abgeschlossen.

(d) Gegeben $a \in D^c$. Wäre a kein innerer Punkt von D^c, so wäre a nach (a) ein Randpunkt von D^c, d. h. $a \in \partial D^c = \partial D$. Widerspruch, weil $\partial D \subseteq D$. Somit ist D^c offen.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_46,

46.2 Es ist $M_1 =]-1,1[^2 =]-1,1[\times]-1,1[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x,y \in]-1,1[\}$, analog für M_2, M_3.
Die inneren Punkte von M_i, $i = 1,2,3$, sind alle Punkte von M_1. Die Randpunkte von M_i, $i = 1,2,3$, sind alle Punkte von $M_3 \setminus M_1$. Somit ist M_1 offen, M_3 abgeschlossen und M_2 weder offen noch abgeschlossen.
Jeder Punkt von $\mathbb{R}^2$ und $\emptyset$ ist innerer Punkt, also sind beide Mengen offen. Beide Mengen haben keine Randpunkte, also sind sie auch abgeschlossen.

47 Partielle Differentiation – Gradient, Hessematrix, Jacobimatrix

47.1 Aufgaben

47.1 Begründen Sie die Aussagen zum Gradient in der Merkbox auf Seite 441 (Rezeptebuch).

47.2 Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen, den Gradienten und die Richtungsableitung in Richtung $(1,-1)^\top$ der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 3xy + y$,

(b) $g(x, y) = xy^2 + y\,\mathrm{e}^{-xy}$,

(c) $h(x, y) = x \sin y$.

47.3 Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = xy + x\ln(y/x)$ für $x, y > 0$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$x\partial_x f + y\partial_y f = xy + f\,.$$

47.4 Berechnen Sie für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils den Gradienten:

(a) $f(x, y) = 2x + 3y$,

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$,

(c) $f(x, y) = \ln(1 + x^2y^4)$,

(d) $f(x, y) = 8 - 3x \sin y$.

47.5 Berechnen Sie für die Hintereinanderausführung folgender Funktionen mit Hilfe der Kettenregel den Gradienten bzw. die erste Ableitung. Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie die Komposition direkt ableiten:

(a) $f(x, y) = f_2(f_1(x, y))$ mit $f_1(x, y) = xy$ und $f_2(t) = \mathrm{e}^t$,

(b) $h(t) = h_2(h_1(t))$ mit $h_1(t) = (\cos t, \sin t)$ und $h_2(x, y) = x^2 + y^2$.

47.6 Begründen Sie, warum es keine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ geben kann, die $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = x^2y$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = x^3$ erfüllt.

47.7 Verifizieren Sie, dass für $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\,(0, 0)\,\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$ die Identität $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$ gilt.

47.8 Man berechne die Jacobimatrizen der Funktionen

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_47,

(a) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ x^2 z \end{pmatrix}$,

(b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} z+x^2 \\ xy \\ 2y \end{pmatrix}$,

(c) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{xy} + \cos^2 z \\ xyz - \mathrm{e}^{-z} \\ \sinh(xz) + y^2 \end{pmatrix}$,

(d) $f(x,y,z) = x^2 + yz + 2$.

47.9 Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) = (y + \exp z, z + \exp x, x + \exp y)^\top .$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Umkehrfunktion von f im Punkt $(1+\mathrm{e}, 2, \mathrm{e})^\top$.

47.10 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x,y) = (x + 2y^2, y - \sin x)^\top .$$

Bestimmen Sie die Jacobimatrix der Umkehrfunktion von f im Punkt $(2 + \frac{\pi}{2}, 0)^\top$.

47.11 Berechnen Sie für $g = g_2 \circ g_1$ mit Hilfe der Kettenregel die Jacobimatrix und überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie direkt ableiten. Dabei seien $g_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g_1(x,y,z) = (x+y, y+z)^\top \quad \text{und} \quad g_2(u,v) = (uv, u+v, \sin(u+v))^\top .$$

47.12 Es seien $\boldsymbol{v}_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{v}_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\boldsymbol{v}_1(x,y,z) = (x+y, y+z)^\top \quad \text{und} \quad \boldsymbol{v}_2(x,y) = (xy, x+y, \sin(x+y))^\top .$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix des Vektorfeldes $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 \circ \boldsymbol{v}_1$ an der Stelle $\boldsymbol{x} = (x,y,z)$.

47.13 Es sei $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$f_1(x_1,x_2) = (x_1 x_2, x_2^2, \sin^2 x_2^3, x_1)^\top$$

und $f_2\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f_2(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\arctan(x_1 x_2), 5\cos x_4, \ln(1 + x_1^2 + x_2^2))^\top .$$

Berechnen Sie die Jacobimatrix des Vektorfeldes $f = f_2 \circ f_1$ an der Stelle $(0,0)$.

47.2 Lösungen

47.1 Wegen der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $|\langle a\,,b\rangle| \leq \|a\|\,\|b\|$ gilt für jeden Vektor v mit $\|v\| = 1$:

$$|\frac{\partial f}{\partial v}(a)| = |\langle \nabla f(a)\,, v\rangle| \leq \|\nabla f(a)\|\,\|v\| = \|\nabla f(a)\|\,.$$

Es ist also $|\frac{\partial f}{\partial v}(a)| \leq \|\nabla f(x)\|$ für jede Richtung v. Im Fall $\nabla f(a) \neq 0$ gilt für die Richtung $v = \frac{1}{\|\nabla f(a)\|}\,\nabla f(a)$:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \|\nabla f(a)\| \text{ und } \frac{\partial f}{\partial(-v)}(a) = -\|\nabla f(a)\|\,.$$

Der Gradient zeigt also in die Richtung des steilsten Anstiegs, in die entgegengesetzte Richtung fällt die Funktion am stärksten.
Jede Höhenlinie N_c kann als das Bild einer Kurve $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ aufgefasst werden. Es gilt somit $f(\gamma(t)) = c$ für alle $\gamma(t) \in N_c$. Beidseitiges Ableiten liefert nach der Kettenregel

$$f(\gamma(t)) = c \;\Rightarrow\; \nabla f(\gamma(t))^\top\,\dot\gamma(t) = 0\,.$$

Da $\dot\gamma(t)$ tangential an N_c liegt, folgt die Behauptung.

47.2 Wir setzen $v = \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{-1}$. Dann ergibt sich:

(a)
- $f_x(x,x) = 4x + 3y$,
- $f_y(x,y) = 3x + 1$,
- $f_{xx}(x,y) = 4$,
- $f_{yy}(x,y) = 0$,
- $f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 3$,
- $\nabla f(x,y) = \big(4x + 3y,\; 3x + 1\big)$,
- $\partial_v f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + 3y - 1)$.

(b)
- $g_x(x,y) = y^2 - y^2 e^{-xy} = y^2(1 - \mathrm{e}^{-xy})$,
- $g_y(x,y) = 2xy + \mathrm{e}^{-xy} - xy\,\mathrm{e}^{-xy} = 2xy + (1 - xy)\,\mathrm{e}^{-xy}$,
- $g_{xx}(x,y) = y^3\,\mathrm{e}^{-xy}$,
- $g_{yy}(x,y) = 2x - x\,\mathrm{e}^{-xy} - (1 - xy)x\,\mathrm{e}^{-xy} = x[2 + (xy - 2)\,\mathrm{e}^{-xy}]$,
- $g_{xy}(x,y) = g_{yx}(x,y) = y[2 + (xy - 2)\,\mathrm{e}^{-xy}]$,
- $\nabla g(x,y) = \big(g_x(x,y),\; g_y(x,y)\big) = \big(y^2(1 - \mathrm{e}^{-xy}),\; 2xy + (1 - xy)\,\mathrm{e}^{-xy}\big)$,
- $\partial_v g(x,y) = \nabla g(x,y) \cdot v = \frac{1}{\sqrt{2}}\big[y^2 - 2xy + (xy - y^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-xy}\big]$.

(c)
- $h_x(x,y) = \sin y$,
- $h_y(x,y) = x\cos y$,
- $h_{xx}(x,y) = 0$,
- $h_{yy}(x,y) = -x\sin y$,
- $h_{xy}(x,y) = h_{yx}(x,y) = \cos y$,
- $\nabla h(x,y) = \big(\sin y,\; x\cos y\big)$,
- $\partial_v h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin y - x\cos y)$.

47.3 Um zu überprüfen, ob $f(x,y)$ die angegebene partielle Differentialgleichung erfüllt, berechnen wir zuerst die benötigten Ableitungen:

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y) &= y + \ln {}^y\!/\!_x + x\frac{1}{{}^y\!/\!_x}\left(-{}^y\!/\!_{x^2}\right) = y + \ln {}^y\!/\!_x - 1\,,\\ \partial_y f(x,y) &= x + x\frac{1}{{}^y\!/\!_x}\frac{1}{x} = x + {}^x\!/\!_y\,.\end{aligned}$$

Nun setzen wir diese Ableitungen in die linke Seite der partiellen Differentialgleichung ein und erhalten die Behauptung:

$$x\partial_x f + y\partial_y f = xy + x\ln {}^y\!/\!_x - x + xy + x = xy + f\,.$$

47.4

(a) $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.

(b) $\nabla f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

(c) $\nabla f(x,y) = \frac{1}{1+x^2y^4}\begin{pmatrix}2xy^4\\4x^2y^3\end{pmatrix}$.

(d) $\nabla f(x,y) = -3\begin{pmatrix}\sin y\\x\cos y\end{pmatrix}$.

47.5 (a) Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$\nabla f(x,y) = \nabla f_2(f_1(x,y)) = f_2'(f_1(x,y))\,\nabla f_1(x,y) = \mathrm{e}^{xy}\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}.$$

Durch direktes Ableiten ergibt sich ebenfalls $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{xy}\,y\\\mathrm{e}^{xy}\,x\end{pmatrix} = \mathrm{e}^{xy}\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}$.

(b) Durch Anwendung der Kettenregel ergibt sich

$$h'(t) = (h_2(h_1(t)))' = \nabla h_2(h_1(t))^\top h_1'(t) = (2\cos t,\ 2\sin t)\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\end{pmatrix} = 0\,.$$

Wegen $h_2(h_1(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ergibt sich durch direktes Ableiten $h'(t) = 0$.

47.6 Eine solche Funktion f hätte nach dem Satz von Schwarz gleiche gemischte partielle Ableitungen. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x,y) = x^2 \neq 3x^2 = \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x,y)$$

kann es aber eine solche Funktion nicht geben.

47.7 Für die ersten partiellen Ableitungen erhält man

$$\partial_x z(x,y) = \frac{1\left(x^2+y^2\right)-2x(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^2+y^2+2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$\partial_y z(x,y) = \frac{-1\left(x^2+y^2\right)-2y(x-y)}{\left(y^2+y^2\right)^2} = \frac{-x^2+y^2-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Für die gemischten zweiten partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned}
\partial_x\partial_y z(x,y) &= \frac{(2y+2x)\left(x^2+y^2\right)^2-4y\left(x^2+y^2\right)\left(-x^2+y^2+2xy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\\
&= \frac{2(x+y)\left(x^2+y^2\right)-4y\left(-x^2+y^2+2xy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\\
&= \frac{2x^3+6x^2y-6xy^2-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}\\
\partial_y\partial_x z(x,y) &= \frac{(-2x-2y)\left(x^2+y^2\right)^2-4x\left(x^2+y^2\right)\left(-x^2+y^2+2xy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^4}\\
&= \frac{-2(x+y)\left(x^2+y^2\right)-4x\left(-x^2+y^2+2xy\right)}{\left(x^2+y^2\right)^3}\\
&= \frac{2x^3+6x^2y-6xy^2-2y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}
\end{aligned}$$

Es gilt also $\partial_x\partial_y z(x,y) = \partial_y\partial_x z(x,y)$ (Satz von Schwarz).

47.8 Für die Jacobimatrizen erhält man

(a) $Df = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}.$

(b) $Df = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 1 \\ y & x & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

(c) $Df = \begin{pmatrix} y\,\mathrm{e}^{xy} & x\,\mathrm{e}^{xy} & -2\cos z\sin z \\ yz & xz & xy+\mathrm{e}^{-z} \\ z\cosh(xz) & 2y & x\cosh(xz) \end{pmatrix}.$

(d) $Df = (2x, z, y) = (\nabla f)^\top.$

47.9 Wenn f umkehrbar ist gilt $f^{-1}(f(x)) = x$. Mit der Kettenregel folgt

$$Df^{-1}(f(x))\,Df(x) = E_n \;\Rightarrow\; Df^{-1}(f(x)) = Df(x)^{-1}\,.$$

Um $Df^{-1}(1+\mathrm{e},2,\mathrm{e})$ zu bestimmen, benötigen wir zuerst x mit $f(x) = (1+\mathrm{e},2,\mathrm{e})^\top$. Durch Ausprobieren findet man $x = (0,1,1)^\top$. Somit folgt dann

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \exp x_3 \\ \exp x_1 & 0 & 1 \\ 1 & \exp x_2 & 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Df(0,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathrm{e} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & \mathrm{e} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; Df^{-1}(0,1,1)=\begin{pmatrix}-\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^2} & \frac{\mathrm{e}^2}{1+\mathrm{e}^2} & \frac{1}{1+\mathrm{e}^2}\\ \frac{1}{1+\mathrm{e}^2} & -\frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^2} & \frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^2}\\ \frac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^2} & \frac{1}{1+\mathrm{e}^2} & -\frac{1}{1+\mathrm{e}^2}\end{pmatrix}=Df^{-1}(1+\mathrm{e},2,\mathrm{e})\,.$$

47.10 Wenn f umkehrbar ist gilt $f^{-1}(f(x))=x$. Mit der Kettenregel folgt

$$Df^{-1}(f(x))\,Df(x)=E_n\;\Rightarrow\;Df^{-1}(f(x))=Df(x)^{-1}\,.$$

Um $Df^{-1}(2+\frac{\pi}{2},0)$ zu bestimmen, benötigen wir zuerst x mit $f(x)=(2+\frac{\pi}{2},0)^\top$. Durch Ausprobieren findet man $x=(\frac{\pi}{2},1)^\top$. Somit folgt dann

$$Df(x)=\begin{pmatrix}1 & 4x_2\\ -\cos x_1 & 1\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;Df(\tfrac{\pi}{2},1)=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;Df^{-1}(2+\tfrac{\pi}{2},0)=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,.$$

47.11 Die Jacobimatrix der Komposition berechnet sich gemäß Kettenregel durch

$$Dg(x)=Dg_2(g_1(x,y,z)))\,Dg_1(x,y,z)\,.$$

Für die einzelnen Jacobimatrizen erhält man

$$Dg_1(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad Dg_2(u,v)=\begin{pmatrix}v & u\\ 1 & 1\\ \cos(u+v) & \cos(u+v)\end{pmatrix}\,.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}Dg(x,y,z)&=\begin{pmatrix}y+z & x+y\\ 1 & 1\\ \cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}y+z & x+2y+z & x+y\\ 1 & 2 & 1\\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z)\end{pmatrix}\,.\end{aligned}$$

Leiten wir die Komposition $g(x,y,z)=\begin{pmatrix}xy+xz+yz+z^2\\ x+2y+z\\ \sin(x+2y+z)\end{pmatrix}$ direkt ab, so erhalten wir

$$Dg(x,y,z)=\begin{pmatrix}y+z & x+2y+z & x+y\\ 1 & 2 & 1\\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z)\end{pmatrix}\,.$$

47.12 Die Jacobimatrix der Komposition berechnet sich gemäß Kettenregel durch

$$D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = D\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}))\, D\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x})\,.$$

Für die einzelnen Jacobimatrizen erhält man

$$D\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \\ \cos(x+y) & \cos(x+y) \end{pmatrix}.$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} D\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) &= \begin{pmatrix} y+z & x+y \\ 1 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

47.13 Die Jacobimatrix der Funktion $f(x) = f_2(f_1(x))$ an der Stelle $(0,0)$ ergibt sich aus der Kettenregel

$$Df(0,0) = Df_2(f_1(0,0))\, Df_1(0,0)\,.$$

Für Df_1 und Df_2 erhält man allgemein

$$Df_1(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 2x_2 \\ 0 & 6x_2^2 \sin x_2^3 \cos x_2^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ Df_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{x_2}{1+x_1^2x_2^2} & \frac{x_1}{1+x_1^2x_2^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5\sin x_4 \\ \frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2} & \frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

An der Stelle $(0,0)$ ergibt sich nun

$$f_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, Df_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Df_2(f_1(0,0)) = Df_2(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit erhalten wir $Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

48 Anwendungen der partiellen Ableitungen

48.1 Aufgaben

48.1 Gesucht ist eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$10x - \cos y = 0\,,$$
$$-\cos x + 5y = 0\,.$$

Wir wählen den Startvektor $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)^\top$.

(*Hinweis:* Es ist $\cos 0.1 = 0.995,\ \cos 0.2 = 0.98$.)

(a) Berechnen Sie mit dem Newtonverfahren $\boldsymbol{x}_1$.

(b) Berechnen Sie mit dem vereinfachten Newtonverfahren $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$.

Anmerkung: Das vereinfachte Newtonverfahren berechnet nur in jedem k-ten Schritt, für ein festes $k \geq 2$, $Df(\boldsymbol{x}_n)$ neu, dazwischen wird jeweils die alte Ableitungsmatrix verwendet.

48.2 Es sei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ y - {}^1\!/_x \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix von f.

(b) Formulieren Sie das Newtonverfahren zum Lösen der Gleichung $f(x,y) = 0$.

(c) Berechnen Sie eine Iterierte zum Startwert $(x_0, y_0) = ({}^5\!/_4, {}^5\!/_4)$.

48.3 Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion

```
function[ x,xvec,deltax ] = newtonverf( f,Df,x,TOL ),
```

welche Funktionshandle `f` und `Df`, einen Startwert `x` und eine gewünschte Genauigkeit `TOL` als Eingabe erhält. Diese Funktion soll dann das Newtonverfahren bis auf die gewünschte Genauigkeit oder bis der natürliche Monotonietest verletzt ist berechnen. Als Rückgabe soll die Approximation `x` der Nullstelle, die Folge der Iterierten und die Genauigkeit bei der letzten Iteration zurückgegeben werden.

48.4 Geben Sie die Ausdrücke $f(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)f(\boldsymbol{a})$ und $f(\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)f(\boldsymbol{a})+\frac{1}{2!}(\boldsymbol{h}\cdot\nabla)^2 f(\boldsymbol{a})$ aus der Taylorformel für den Fall $n = 2$ explizit und vergleichen Sie dies mit den Taylorpolynomen T_1 und T_2.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_48,

48.5 Bestimmen Sie im Punkt $\boldsymbol{p} = (1, 0, f(1,0))^\top$ die Tangentialebene an den Graphen der Funktion $f(x,y) = x^2 - y - x\,\mathrm{e}^y$.

48.6 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = 2x^3 - 5x^2 + 3xy - 2y^2 + 9x - 9y - 9.$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f an der Stelle $\boldsymbol{a} = (1, -1)^\top$.

48.7 Man entwickle die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, um $\boldsymbol{a} = (1/\mathrm{e},\ -1)^\top$ in ein Taylorpolynom 2. Ordnung mit

$$f(x,y) = y \ln x + x\,\mathrm{e}^{y+2}\ .$$

48.8 Man entwickle $f(x,y) = x^y$ an der Stelle $\boldsymbol{a} = (1,\ 1)^\top$ in ein Taylorpolynom 2. Ordnung und berechne damit näherungsweise $\sqrt[10]{(1.05)^9}$.

48.9 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \exp(x^2 + y^3) + xy(x+y).$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades von f an der Stelle $\boldsymbol{a} = (0,0)^\top$.

48.2 Lösungen

48.1 Wir suchen Nullstellen der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \begin{pmatrix} 10x - \cos y \\ -\cos x + 5y \end{pmatrix}$.

(a) Die Newtoniteration lautet $x_{n+1} = x_n - (Df(x_n))^{-1} f(x_n)$ mit der Jacobimatrix

$$Df(x) = \begin{pmatrix} 10 & \sin y \\ \sin x & 5 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

(b) Die vereinfachte Newtoniteration lautet

$$x_{n+1} = x_n - (Df(x_0))^{-1} f(x_n) = x_n - \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} f(x_n)\,.$$

Wie im Newtonverfahren ist $x_1 = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/5 \end{pmatrix}$. Weiter ist

$$x_2 = \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/10 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos 0.2 \\ -\cos 0.1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0.2/10 \\ \cos 0.1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.098 \\ 0.199 \end{pmatrix}.$$

48.2 (a) $Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ \frac{1}{x^2} & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Das Newtonverfahren lautet:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - (Df(x_k, y_k))^{-1} f(x_k, y_k) = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_k & 2y_k \\ \frac{1}{x_k^2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 2 \\ y_k - \frac{1}{x_k} \end{pmatrix}.$$

(c) Mit dem Startvektor $(x_0, y_0) = (5/4, 5/4)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{1}{(\frac{5}{4})^2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\frac{5}{4})^2 + (\frac{5}{4})^2 - 2 \\ \frac{5}{4} - \frac{1}{\frac{5}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{16}{25} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{9}{20} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{10}{9} & -\frac{25}{9} \\ -\frac{32}{45} & \frac{25}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{9}{8} \\ \frac{9}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

48.3

```
function [ x, xvec, deltax ] = newtonverf( f,Df,x,TOL )
weiter=1;
xvec=[];
while weiter
    deltax=Df(x)\f(x);
    lS=Df(x)\f(x-deltax);
    x=x-deltax;
    xvec=[xvec x];
    weiter=norm(deltax) > TOL & norm(lS)< norm(deltax);
end
```

48.4 Ausführlich geschrieben erhalten wir:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} a_1 + h_1 \\ a_2 + h_2 \end{pmatrix}\right) &= f(a) + (h_1, h_2) \begin{pmatrix} f_{x_1}(a) \\ f_{x_2}(a) \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(h_1^2 f_{x_1x_1}(a) + 2h_1h_2 f_{x_1x_2}(a) + h_2^2 f_{x_2x_2}(a)\right) \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{3!}(h \cdot \nabla)^3 f(a + \vartheta h)}_{=: R_3} \\ &= f(a) + \nabla f(a)^\top h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + R_3, \end{aligned}$$

denn:

$$(h_1, h_2)\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_1x_2} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (h_1 f_{x_1x_1} + h_2 f_{x_1x_2}, h_1 f_{x_1x_2} + h_2 f_{x_2x_2})\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also unsere bekannten ausführlichen Formeln für T_0, T_1 und T_2.

48.5 Es gilt $z = f(1,0) = 0$, damit haben wir den Punkt $\boldsymbol{p} = (1,0,0)^\top$. Es gilt weiter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \mathrm{e}^y \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=1,\,y=0} = 1 \;\text{ und }\; \frac{\partial f}{\partial y} = -1 - x\,\mathrm{e}^y \;\Rightarrow\; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=1,\,y=0} = -2\,.$$

Als Gleichung für die Tangentialebene erhalten wir daher

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)|_{x_0,y_0} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = f(1,0) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} = x - 2y - 1\,.$$

In Normalform liest sich das als $x - 2y - z = 1$.

48.6 Wir berechnen alle benötigten Größen:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}) &= 2 - 5 - 3 - 2 + 9 + 9 - 9 = 1 \\
\partial_1 f(\boldsymbol{a}) &= \left[6x_1^2 - 10x_1 + 3x_2 + 9\right]_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = 6 - 10 - 3 + 9 = 2 \\
\partial_2 f(\boldsymbol{a}) &= [3x_1 - 4x_2 - 9]_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = 3 + 4 - 9 = -2 \\
\partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) &= [12x_1 - 10]_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = 12 - 10 = 2 \\
\partial_2^2 f(\boldsymbol{a}) &= -4 \\
\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a}) &= \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = 3 \\
\partial_1^3 f(\boldsymbol{a}) &= 12 \\
\partial_2^3 f(\boldsymbol{a}) &= \partial_1^2\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2^2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = \partial_1\partial_2^2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2\partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) \\
&= \partial_1\partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
T_{3,f,\boldsymbol{a}} \;=\; & 1 + 2(x_1 - 1) - 2(x_2 + 1) + \\
& + \frac{1}{2}\cdot 2(x_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3(x_1 - 1)(x_2 + 1) - \frac{1}{2}\cdot 4(x_2 + 1)^2 + \\
& + \frac{1}{6}\cdot 12(x_1 - 1)^3 = \ldots = f(x)\,.
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis ist nicht überraschend, denn gilt $f \in \mathbb{R}[x]_n$ so ist $T_{n,f,\boldsymbol{a}}(x) = f(x)$.

48.7 Für die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung erhält man allgemein bzw. speziell an $\boldsymbol{a} = (1/\mathrm{e}, -1)^\top$:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}) &= -\ln \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{e} = 2\\
\partial_x f(\boldsymbol{a}) &= \left[\frac{y}{x} + \mathrm{e}^{y+2}\right]_{(x,y)=(\mathrm{e}^{-1},-1)} = 0\\
\partial_y f(\boldsymbol{a}) &= \left[\ln x + x\,\mathrm{e}^{y+2}\right]_{(x,y)=(\mathrm{e}^{-1},-1)} = 0\\
\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) &= \left[-\frac{y}{x^2}\right]_{(x,y)=(\mathrm{e}^{-1},-1)} = \mathrm{e}^2\\
\partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) &= \left[x\,\mathrm{e}^{y+2}\right]_{(x,y)=(\mathrm{e}^{-1},-1)} = 1\\
\partial_x\partial_y f(\boldsymbol{a}) = \partial_y\partial_x f(\boldsymbol{a}) &= \left[\frac{1}{x} + \mathrm{e}^{y+2}\right]_{(x,y)=(\mathrm{e}^{-1},-1)} = 2\,\mathrm{e}\,.
\end{aligned}$$

Für das Taylorpolynom ergibt sich also

$$\begin{aligned}
T_{2,f,\boldsymbol{a}}(x,y) &= 2 + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{e}^2\left(x - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 1(y+1)^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\,\mathrm{e}\left(x-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)(y+1)\\
&= 2 + \frac{\mathrm{e}^2}{2}\left(x-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2 + \frac{1}{2}(y+1)^2 + 2\,\mathrm{e}\left(x-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)(y+1)\,.
\end{aligned}$$

48.8 Um die Ableitungen berechnen zu können, bringen wir die Funktion in die Form

$$f(x,y) = x^y = \mathrm{e}^{y\ln x}\,.$$

Für die partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung erhält man allgemein bzw. speziell an $\boldsymbol{a} = (1,1)^\top$:

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{a}) &= \mathrm{e}^{\ln 1} = 1\\
\partial_x f(\boldsymbol{a}) &= \left[y x^{y-1}\right]_{(x,y)=(1,1)} = 1\\
\partial_y f(\boldsymbol{a}) &= \left[x^y \ln x\right]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
\partial_x^2 f(\boldsymbol{a}) &= \left[y(y-1)x^{y-2}\right]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
\partial_y^2 f(\boldsymbol{a}) &= \left[x^y \ln^2 x\right]_{(x,y)=(1,1)} = 0\\
\partial_x\partial_y f(\boldsymbol{a}) = \partial_y\partial_x f(\boldsymbol{a}) &= \left[x^{y-1}(1+y\ln x)\right]_{(x,y)=(1,1)} = 1\,.
\end{aligned}$$

Für das Taylorpolynom ergibt sich also

$$T_{2,f,\boldsymbol{a}} = 1 + 1(x-1) + \frac{1}{2}\cdot 2(x-1)(y-1) = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1)\,.$$

Nun benutzen wir diesen Ausdruck als Näherung für kleine Abweichungen von der Entwicklungsmitte, also für $x = 1.05$, $y = 0.9$:

$$\sqrt[10]{(1.05)^9} = 1.05^{0,9} = (1 + 0.05)^{1-0.1} \approx 1 + 0.05 + 0.05 \cdot (-0.1) = 1.045\,.$$

Das exakte Ergebnis ist $1.05^{0,9} = 1.04488\ldots$.

48.9 Für die partiellen Ableitungen bis zur dritten Ordnung erhält man allgemein bzw. speziell an $\boldsymbol{a} = (0,0)^\top$:

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{a}) = \mathrm{e}^0 = 1\\
&\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = \Big[2x\exp(x^2+y^3) + y(x+y) + xy\Big]_{(x,x_2)=(0,0)} = 0\\
&\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = \Big[3x_2\exp(x^2+y^3) + x(x+y) + xy\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 0\\
&\partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) = \Big[2\exp(x^2+x_2^3)(2x^2+1) + 2y\Big]_{(x,x_2)=(0,0)} = 2\\
&\partial_2^2 f(\boldsymbol{a}) = \Big[3y\exp(x^2+x_2^3)(3x_2^3+2) + 2x\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 0\\
&\partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = \Big[6xx_2^2\exp(x^2+y^3) + 2(x+y)\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 0\\
&\partial_1^3 f(\boldsymbol{a}) = \Big[4x\exp(x^2+y^3)(2x^2+3)\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 0\\
&\partial_2^3 f(\boldsymbol{a}) = \Big[3\exp(x^2+y^3)(9y^6+18y^3+2)\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 6\\
&\partial_1^2\partial_2 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2\partial_1^2 f(\boldsymbol{a}) = \Big[6y^2\exp(x^2+y^3)(2x^2+1) + 2\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 2\\
&\partial_2^2\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = \partial_1\partial_2^2 f(\boldsymbol{a}) = \Big[6xy\exp(x^2+y^3)(3y^3+2) + 2\Big]_{(x,y)=(0,0)} = 2
\end{aligned}$$

Für das Taylorpolynom ergibt sich also

$$\begin{aligned}
T_{3,f,\boldsymbol{a}} &= 1 + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^2 + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot x^2y + \frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot xy^2 + \frac{1}{6}\cdot 6\cdot y^3\\
&= 1 + x^2 + x^2y + xy^2 + y^3\,.
\end{aligned}$$

49 Extremwertbestimmung

49.1 Aufgaben

49.1 Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f.

49.2 Gegeben sei die durch

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass f entlang jeder Geraden durch den Nullpunkt $(0,0)^\top$ ein lokales Minimum in $(0,0)^\top$ besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt $(0,0)^\top$ jedoch kein lokales Minimum in $\mathbb{R}^2$ besitzt.

49.3 Gegeben sei ein Quader mit den Seitenlängen $x, y, z > 0$. Die Summe der Seiten sei durch die Bedingung $x + y + z = 1$ festgelegt.

(a) Stellen Sie die Oberfläche als Funktion $f\colon (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}$ dar.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

(c) Geben Sie die maximale Oberfläche des Quaders an, und zeigen Sie, dass dies tatsächlich ein lokales Maximum ist.

49.4 Zeigen Sie, dass $(0,0,0)^\top$ ein stationärer Punkt der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = \cos^2 z - x^2 - y^2 - \exp(xy)$$

ist. Untersuchen Sie, ob f an dieser Stelle ein lokales Maximum oder Minimum besitzt.

49.5 Berechnen Sie alle stationären Punkte der folgenden Funktionen und klassifizieren Sie diese:

(a) $f(x, y) = xy + x - 2y - 2$,

(b) $f(x, y) = x^2y^2 + 4x^2y - 2xy^2 + 4x^2 - 8xy + y^2 - 8x + 4y + 4$,

(c) $f(x, y) = 4\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$,

(d) $f(x, y, z) = -\ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$.

49.6 Bestimmen Sie für die Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$

(a) lokale und globale Extremstellen und Sattelpunkte,

(b) Maximum und Minimum für $(x, y) \in [-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}] \times [-2, 2]$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_49,

49.2 Lösungen

49.1 (1) Wir bestimmen zunächst Gradient und Hessematrix der Abbildung f:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}, \qquad H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

(2) Wir ermitteln die kritischen Stellen, das sind die Nullstellen des Gradienten:

$$\nabla f(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} x^2 = y \\ x^4 - x = 0 \end{matrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} y = x^2 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$$

Kandidaten für lokale Extrema sind also die beiden Punkte $(0,0)^\top$ und $(1,1)^\top$.

(3), (4) Wir setzen beide in die Hessematrix ein, um die Art der Extrema zu prüfen:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Determinante negativ ist, ist diese Matrix indefinit, es ist $(0,0)^\top$ damit Stelle eines Sattelpunktes.

Für den zweiten stationären Punkt gilt

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Da Determinante und Spur dieser Matrix positiv sind, ist diese Matrix positiv definit. In $(1,1)^\top$ liegt damit ein lokales Minimum vor.

(5) Um festzustellen, ob es globale Extrema gibt betrachten wir z. B. $f(x,0) = x^3$ mit $\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty$. Somit ist f unbeschränkt und besitzt daher keine globalen Extrema.

(6) Wir haben genau ein lokales Minimum in $(1,1)^\top$ mit Wert $f(1,1) = -1$.

49.2 (a) Jede Gerade durch den Ursprung ist gegeben durch

$$k(t) = t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

Betrachte nun f entlang k:

$$g(t) = f(k(t)) = f(at, bt) = 2a^2t^2 - 3ab^2t^3 + b^4t^4.$$

Wir bestimmen nun die Extrema von f eingeschränkt auf diese Gerade, also die Extrema von g:

$$g'(t) = 4a^2t - 9ab^2t^2 + 4b^4t^3\,,$$
$$g''(t) = 4a^2 - 18ab^2t + 12b^4t^2\,.$$

Es gilt also $g'(0) = 0$ und $g''(0) = 4a^2$. Falls $a \neq 0$ gibt es ein lokales Minimum in $t = 0$. Falls $a = 0$ ist $g(t) = b^4t^4$ und für $b \neq 0$ gibt es ein lokales Minimum in $t = 0$. Somit hat f ein lokales Minimum in $(0,0)^\top$ entlang jeder Geraden durch $(0,0)^\top$.

(b) Wir berechnen Gradient und Hessematrix von f im Punkt $(0,0)^\top$:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x - 3y^2 \\ -6xy + 4y^3 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & -6y \\ -6y & -6x + 12y^2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $(0,0)^\top$ ein stationärer Punkt, an dem die Hesse-Matrix von f positiv semidefinit ist. Somit ist keine Aussage möglich.

Zur genaueren Untersuchung schreiben wir f anders, es gilt nämlich

$$f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4 = (2x - y^2)\,(x - y^2)\,.$$

Dieses Produkt ist negativ, falls $x > \frac{1}{2}y^2$ und $x < y^2$, da dann der erste Faktor positiv ist und der zweite Faktor negativ ist. Aber nun gibt es in jeder Umgebung des Nullpunktes solche Punkte, sodass in jeder Umgebung des Nullpunktes sowohl positive wie auch negative Werte liegen: Im Nullpunkt liegt somit ein Sattelpunkt vor.

49.3 (a) Die Oberfläche des Quaders ist gegeben durch

$$F(x,y,z) = 2(xy + yz + xz)\,.$$

Durch die Nebenbedingung $z = 1 - x - y$ ergibt sich

$$f(x,y) = F(x,y,1-x-y) = 2(x + y - xy - x^2 - y^2)\,.$$

(b) Für den Gradient erhält man

$$\nabla f(x,y) = 2\begin{pmatrix} 1 - y - 2x \\ 1 - x - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{matrix} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{matrix}\,.$$

(c) Die Hessematrix lautet

$$H_f(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

und ist negativ definit (Eigenwerte sind -1 und -3). Somit besitzt f in $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^\top$ ein lokales Maximum.

49.4 Für den Gradienten ergibt sich

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2x - y\exp(xy) \\ -2y - x\exp(xy) \\ -2\cos z \sin z \end{pmatrix} \Rightarrow \nabla f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um herauszufinden, ob f ein lokales Maximum oder Minimum an der Stelle $(0,0,0)^T$ besitzt, betrachten wir die Hessematrix $H_f(0,0,0)$. Es gilt

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 - y^2\exp(xy) & -(1+xy)\exp(xy) & 0 \\ -(1+xy)\exp(xy) & -2 - x^2\exp(xy) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\sin^2 z - \cos^2 z) \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$H_f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Eigenwerte von $H_f(0,0,0)$. Es gilt für das charakteristische Polynom

$$\chi_H(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3).$$

Die Hessematrix hat also die drei negativen Eigenwerte -1, -2 und -3, d. h. f hat an der Stelle $(0,0,0)^\top$ ein lokales Maximum.

49.5 (a) Es gilt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} y+1 \\ x-2 \end{pmatrix}.$$

Der einzige stationäre Punkt ist also $(2,-1)^\top$. Für die Hesse-Matrix gilt

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist negativ, H_f ist also indefinit und daher ist $(2,-1)^\top$ ein Sattelpunkt.

(b) Wir formen die Funktion zunächst um:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y^2 + 4x^2y - 2xy^2 + 4x^2 - 8xy + y^2 - 8x + 4y + 4 \\ &= x^2(y^2+4y+4) - 2x(y^2+4y+4) + y^2 + 4y + 4 \\ &= (x^2 - 2x + 1)(y^2 + 4y + 4) = (x-1)^2(y+2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x,y) = 2(x-1)(y+2)\begin{pmatrix} y+2 \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

Stationäre Punkte liegen vor für $x = 1$ und $y \in \mathbb{R}$ oder für $y = -2$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Hessematrix lautet

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2(y+2)^2 & 4(x-1)(y+2) \\ 4(x-1)(y+2) & 2(x-1)^2 \end{pmatrix}.$$

$H_f(1,y)$ und $H_f(x,-2)$ sind für $(x,y) \neq (1,-2)$ positiv semidefinit, daher ist keine Aussage mit diesem Kriterium möglich. Aber da $f(x,y) \geq 0$ und $f(1,y) = 0 = f(x,-2)$ gilt, handelt es sich bei allen stationären Punkten um nicht strikte globale Minima.

(c) Für den Gradienten gilt

$$\nabla f(x,y) = 2\left(4\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 1\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Der einzige stationäre Punkt ist also $(0,0)$. Für die Hessematrix gilt dort

$$H_f(x,y) = 2\begin{pmatrix} 4\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 1 + 8x^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} & 8xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} \\ 8xy\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} & 4\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} - 1 + 8y^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Daher erhalten wir

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

H_f ist also positiv definit, und somit handelt es sich bei $(0,0)^\top$ um ein striktes lokales Minimum. Sogar in ganz $\mathbb{R}^2$ gilt $f(x,y) > f(0,0) = 4$, d. h. $(0,0)^\top$ ist ein striktes globales Minimum.

(d) Der Gradient lautet

$$\nabla f(x,y,z) = -\frac{2}{x^2+y^2+z^2+1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Einziger stationärer Punkt ist also $(0,0,0)^\top$. Die Hessematrix lautet $H_f(x,y,z) =$

$$= \frac{-2}{(x^2+y^2+z^2+2)^2}\begin{pmatrix} -x^2+y^2+z^2+1 & -2xy & -2xz \\ -2xy & x^2-y^2+z^2+1 & -2yz \\ -2xz & -2yz & x^2+y^2-z^2+1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $H_f(0,0,0) = -2E_3$ ist negativ definit und somit ist $(0,0,0)^\top$ ein striktes lokales Maximum.

49.6 (a) (1),(2) Die stationären Punkte sind gegeben durch

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x^2-y^2) \\ 2y(2y^2-3x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste Gleichung ist gleichbedeutend mit $y = x$ oder $y = -x$. Die zweite Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $y = 0$ oder $x = \frac{2}{3}y^2$, wegen $x^2 = y^2$ also $1 = \frac{2}{3}x$ bzw. $x = \frac{3}{2}$. Die drei Lösungen (x, y) dieses nichtlinearen Gleichungssystems sind also $\boldsymbol{a}_1 = (0,0)$, $\boldsymbol{a}_2 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ und $\boldsymbol{a}_3 = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

(3) Die Hessematrix von f ist

$$H_f(x,y) = 6 \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & 2y^2 - x \end{pmatrix}.$$

In $\boldsymbol{a}_1$ ist die Hesse-Matrix die Nullmatrix, also ist keine Aussage über die Art des stationären Punktes möglich. Es gilt aber $f(x,0) = x^3$, somit ist $\boldsymbol{a}_1$ ein Sattelpunkt. In $\boldsymbol{a}_2$ gilt

$$H_f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}) = 9 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist positiv definit, da beide Eigenwerte $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ positiv sind. Bei $\boldsymbol{a}_2$ ist also ein lokales Minimum.

In $\boldsymbol{a}_3$ ist f symmetrisch bezüglich y, somit ist auch bei $\boldsymbol{a}_3$ ein lokales Minimum.

(4) $f(\boldsymbol{a}_2) = f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$ und $f(\boldsymbol{a}_3) = f(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{27}{16}$ sind lokale Minima, weitere lokale Extrema gibt es nicht.

(5) f besitzt keine globalen Extremwerte, da $f(x,0) = x^3$ offenbar nach oben und unten unbeschränkt ist.

(6) Es gibt keine globalen Extrema, für die lokalen Extrema beachte (4).

(b) (1)-(4) Die Funktion f ist als Polynom stetig. Also gibt es in dem abgeschlossenen Rechteck sowohl ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum. Für das Minimum gibt es im Inneren $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ als Kandidaten. Es gilt $f(\boldsymbol{a}_2) = f(\boldsymbol{a}_3) = -\frac{27}{16}$.

(5) Für den Rand betrachten wir zunächst die Werte an den Ecken, $f(-\frac{5}{2}, \pm 2) = \frac{243}{8}$ und $f(\frac{5}{2}, \pm 2) = \frac{13}{8}$.
Entlang der vier Kanten müssen wir die folgenden Funktionen auf Maxima und Minima untersuchen:

$$[-\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{2}] \ni x \mapsto f(x,2) = f(x,-2) = 16 - 12x + x^3.$$

$f_x = 0$ ergibt $x = \pm 2$. Offenbar ist bei $x = -2$ ein lokales Maximum und bei $x = 2$ ein lokales Minimum (obiger Funktion, nicht notwendigerweise von f). Es gilt $f(-2, 2) = 32$ und $f(2, 2) = 0$.
Für konstantes $x = -\frac{5}{2}$ haben wir

$$[-2, 2] \ni y \mapsto f(-\tfrac{5}{2}, y) = y^4 + \tfrac{15}{2} y^2 - \tfrac{125}{8}.$$

Aus $f_y = 0$ folgt $y = 0$ für reelle y. Wegen $f_{yy}(-\frac{5}{2}, y) = 12y^2 + 15$, gilt, dass bei $y = 0$ ein lokales Minimum ist, $f(-\frac{5}{2}, 0) = -\frac{125}{8}$.
Für konstantes $x = \frac{5}{2}$ haben wir

$$[-2, 2] \ni y \mapsto f(\tfrac{5}{2}, y) = y^4 - \tfrac{15}{2} y^2 + \tfrac{125}{8}.$$

Aus $f_y = 0$ folgt $y = 0$ oder $y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$. Wegen $f_{yy}(\frac{5}{2}, y) = 12y^2 - 15$ liegt bei $y = 0$ ein lokales Minimum und bei $\pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$ jeweils ein lokales Maximum vor, $f(\frac{5}{2}, 0) = \frac{125}{8}$ und $f(\frac{5}{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}) = \frac{25}{16}$.

(6) Das globale Maximum mit dem Wert 32 liegt bei $(-2, \pm 2)$, das absolute Minimum, $-\frac{125}{8}$ wird in $(-2.5, 0)$ angenommen.

50 Extremwertbestimmung unter Nebenbedingungen

50.1 Aufgaben

50.1 Es sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Bestimmen Sie die Extremalstellen und Extrema der Funktion

$$f : D \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x\,.$$

50.2 Bestimmen Sie die Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = y - x^2 + 3 = 0$.

50.3 Bestimmen Sie die Maxima und Minima des Polynoms

$$f(x, y) = 4x^2 - 3xy$$

auf der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$K = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie f im Inneren und auf dem Rand von K und verwenden Sie zur Untersuchung der Funktion auf dem Rand von K den Ansatz mit Lagrange-Multiplikatoren.

50.4 Bestimmen Sie mithilfe der Lagrange-Multiplikatorenregel diejenigen Punkte auf dem Kreisrand

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0,$$

die vom Punkt $(-1, 1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben und geben Sie die Abstände an.

50.5 Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : E \to \mathbb{R}\,,\ f(x, y) = x^2 - \tfrac{xy}{2} + \tfrac{y^2}{4} - x\,,\ \text{wobei}\ E = \left\{ (x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + \tfrac{y^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Untersuchung der Funktion auf dem Rand von E den Ansatz mit Lagrange-Multiplikatoren.

50.6 Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - x$ auf der Menge $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_50,

50.2 Lösungen

50.1 Wir ermitteln zunächst die lokalen Extrema im Inneren des Einheitskreises: Als Kandidaten für Extremstellen erhält man

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y-1 \\ 2y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Da dieser Kandidat im Inneren von D liegt, kann man die Hessematrix verwenden:

$$H_f(2/3,\ 1/3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit.}$$

Es gibt also ein lokales Minimum bei $(2/3,\ 1/3)$ mit Wert $f(2/3,\ 1/3) = -1/3$.

Nun betrachten wir den Rand von D, welcher aus dem Einheitskreis besteht. Zur Lösung des Extremwertproblems benutzen wir das Einsetzverfahren und wenden unser Rezept an:

(1) Wir teilen den Rand des Einheitskreises auf und setzen für den Teil oberhalb der x-Achse $y = \sqrt{1-x^2}$ und für den Teil unterhalb der x-Achse $y = -\sqrt{1-x^2}$.

(2) Das führt zu den zwei Funktionen

$$f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_1(x) = f(x, \sqrt{1-x^2}) = -x(1+\sqrt{1-x^2}) + 1$$
$$f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R},\ f_2(x) = f(x, -\sqrt{1-x^2}) = -x(1-\sqrt{1-x^2}) + 1.$$

(3) Wir bestimmen die Ableitungen dieser Funktionen und erhalten

$$f_1'(x) = -1 - \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \sqrt{3}/2 \text{ oder } x = -\sqrt{3}/2,$$

sowie analog $f_2'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, und erhalten für Extremstellen die Kandidaten:

$$(\sqrt{3}/2,\ 1/2),\ (-\sqrt{3}/2,\ 1/2),\ (0,\ -1),\ \underbrace{(1,\ 0),\ (-1,\ 0)}_{\substack{\text{Auf dem Rand; } f_1 \text{ und } f_2 \\ \text{hier nicht differenzierbar.}}}.$$

Für diese gilt:

$$f(\sqrt{3}/2,\ 1/2) \approx -0,29, \qquad f(-\sqrt{3}/2,\ 1/2) \approx 2,29, \qquad f(0,-1) = 1$$

und $f(1,0) = 0 = f(-1,0)$.

(4) Die Funktion besitzt also mit $-1/3$ ein globales Minimum bei $(2/3,\ 1/3)$ und ein globales Maximum in $(-\sqrt{3}/2,\ 1/2)$ mit Wert $\approx 2,29$.

50.2 Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2$$

unter der Nebenbedingung

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g(x,y) = y - x^2 + 3 = 0.$$

(1) Wir lösen die Nebenbedingung nach $y = x^2 - 3$ auf.

(2) Einsetzen von y liefert die Funktion:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 = x^2 + (x^2-3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9 = \widetilde{f}(x)\,.$$

(3) Wir können nun einfach die Extrema von $\widetilde{f}$ berechnen und suchen daher die Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\widetilde{f}'(x) = 4x^3 - 10x = 0 \ \Leftrightarrow\ x \in \left\{0,\ \sqrt{5/2},\ -\sqrt{5/2}\right\}.$$

Durch Einsetzen in die zweite Ableitung, erhalten wir

$$\widetilde{f}''(x) = 12x^2 - 10 \ \Rightarrow\ \begin{array}{ll} \widetilde{f}''(0) = -10 < 0 & \Rightarrow \widetilde{f} \text{ hat lok. Max. in } 0 \\ \widetilde{f}''(\pm\sqrt{5/2}) = 20 > 0 & \Rightarrow \widetilde{f} \text{ hat lok. Min. in } \pm\sqrt{5/2} \end{array}.$$

(4) Die Funktion f hat damit unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ an der Stelle $(0, -3)$ ein Maximum und an den Stellen $(\pm\sqrt{5/2},\ 1/2)$ Minima.

50.3 Da f stetig und K kompakt ist, nimmt f Extrema auf K an. Für Extrema im Inneren von K muss der Gradient verschwinden. Wir erhalten

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x - 3y \\ -3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ x = y = 0\,.$$

Die Hesse-Matrix an dieser kritischen Stelle ist gegeben durch

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

und ist indefinit (die Determinante ist negativ). Somit besitzt f in $(0,0)^\top$ einen Sattelpunkt im Inneren von K.

Wir untersuchen nun, ob es Extrema auf dem Rand von K gibt. Dazu benutzen wir das Rezept zur Extremwertbestimmung mit der Lagrange'schen Multiplikatorregel:

$$(x,y)^\top \in \partial K \ \Leftrightarrow\ x^2 + y^2 - 1 = 0\,.$$

(1) Wir erhalten somit die Lagrangefunktion

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2 - 3xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)\,.$$

(2) Wir berechnen die Nullstellen des Gradienten

$$\partial_x L(x, y, \lambda) = 8x - 3y + 2\lambda x = 0 \tag{50.1}$$
$$\partial_y L(x, y, \lambda) = -3x + 2\lambda y = 0 \tag{50.2}$$
$$\partial_\lambda L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{50.3}$$

Da $(x, y)^\top \in \partial K$ gilt $(x, y)^\top \neq (0, 0)^\top$. Aus (50.1) folgt $x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0$ und mit (50.2) $y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. Somit ist $x = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0$, also folgt hier $x \neq 0$ und $y \neq 0$.
(50.1) und (50.2) werden damit zu

$$8 - 3\tfrac{y}{x} + 2\lambda = 0 \tag{50.4}$$
$$-3\tfrac{x}{y} + 2\lambda = 0 \tag{50.5}$$

Aus (50.5) erhält man $2\lambda = 3\frac{x}{y}$ und eingesetzt in (50.4) ergibt sich

$$8 - 3\tfrac{y}{x} + 3\tfrac{x}{y} = 0\,.$$

Setze nun $a = \frac{y}{x}$:

$$8 - 3a + \tfrac{3}{a} = 0 \Leftrightarrow\; 8a - 3a^2 + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_{1,2} = \tfrac{1}{3}(4 \pm 5)$$
$$\Rightarrow\; \tfrac{y}{x} = 3 \;\vee\; \frac{y}{x} = -\tfrac{1}{3} \;\Rightarrow\; y = 3x \;\vee\; x = -3y\,.$$

Einsetzen in (50.3) erhält man

$$x^2 + (3x)^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{10}} \;\Rightarrow\; y = \pm\tfrac{3}{\sqrt{10}}\,,$$
$$(-3y)^2 + y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{10}} \;\Rightarrow\; x = \mp\tfrac{3}{\sqrt{10}}\,.$$

Die stationären Punkten sind also

$$\boldsymbol{a}_1 = (x_1, y_1)^\top = (\pm\tfrac{1}{\sqrt{10}}, \pm\tfrac{3}{\sqrt{10}})^\top \;\text{ und }\; \boldsymbol{a}_2 = (x_2, y_2)^\top = (\mp\tfrac{3}{\sqrt{10}}, \pm\tfrac{1}{\sqrt{10}})^\top$$

mit

$$f(x_1, y_1) = \tfrac{4}{10} - \tfrac{9}{10} = -\tfrac{1}{2} \;\text{ und }\; f(x_2, y_2) = \tfrac{36}{10} + \tfrac{9}{10} = \tfrac{9}{2}\,.$$

(3) Um herauszufinden, ob es weitere Kandidaten auf ∂K gibt, untersuchen wir $\nabla g(x, y)$ für $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$:

$$\nabla g(x, y) = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; x = y = 0\,.$$

Also ist $\nabla g(x,y) \neq 0$ für $(x,y)^\top \in \partial K$. Somit sind $(x_1,y_1)^\top$ und $(x_2,y_2)^\top$ die einzigen Kandidaten für Extrema von f auf ∂K.

(4) Bei $\boldsymbol{a}_1 = (x_1,y_1)^\top$ handelt es sich um die Stelle des globalen Minimums, bei $\boldsymbol{a}_2 = (x_2,y_2)^\top$ um die Stelle des globalen Maximums (beachte (2)).

50.4 Äquivalent zu Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandsquadrates:

$$f(x,y) = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 .$$

Die Nebenbedingung ist durch den Kreisrand gegeben:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y-1)^2 - 1 = 0 .$$

(1) Die Lagrange-Funktion lautet:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) .$$

(2) Die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wegen $\lambda \neq 1$ erhält man aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \;\Rightarrow\; x = \tfrac{\lambda-1}{\lambda+1} ,$$

$$y(2+2\lambda) = 2 - 2\lambda \;\Longrightarrow\; y = -\tfrac{\lambda-1}{\lambda+1} .$$

Also gilt $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt

$$x^2 - 2x + \frac{1}{2} = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = 1 \pm \tfrac{1}{\sqrt{2}} , \quad y_{1,2} = -1 \mp \tfrac{1}{\sqrt{2}} .$$

Damit sind $\boldsymbol{a}_{1,2} = (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}})^\top$ Kandidaten für Extrema.

(3) Da für alle Punkte (x,y) mit $g(x,y) = 0$ die Bedingung

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y+1) \end{pmatrix} \neq 0$$

erfüllt ist, gibt es keine weiteren Kandidaten.

(4) Da Maximum und Minimum auf der kompakten Menge $g(x,y) = 0$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(\boldsymbol{a}_{1,2})} = \pm 1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt $\boldsymbol{a}_1$ der maximale Abstand und im Punkt $\boldsymbol{a}_2$ der minimale Abstand angenommen.

50.5 Die Menge E beschreibt eine Ellipse, insbesondere ist E kompakt und $f(x,y)$ besitzt als stetige Funktion Maximum und Minimum auf E.
Stationäre Punkte ohne Nebenbedingung ergeben sich aus der Bedingung

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{y}{2} - 1 \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\boldsymbol{a}_0 = (2/3, 2/3)$ einziger stationärer Punkt. Er liegt zudem im Inneren von E. Da die Hesse-Matrix

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

auf ganz $\mathbb{R}^2$ positiv definit ist, ist $\boldsymbol{a}_0$ striktes lokales Minimum mit dem Funktionswert $f(\boldsymbol{a}_0) = -1/3$. Stationäre Punkte auf dem Rand $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ erhält man aus der Lagrange-Multiplikatoren-Regel.

(1) Die Lagrangefunktion lautet

$$F(x,y,\lambda) = x^2 - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4} - x + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right).$$

(2) Wir bestimmen die Nullstellen des Gradienten:

$$\nabla F(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{y}{2} - 1 + 2\lambda x \\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{\lambda y}{2} \\ x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Gleichungen führen mit $\mu = 2(1+\lambda)$ auf

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\mu}{4} \end{pmatrix}}_{=:A(\mu)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $\det A(\mu) = \frac{\mu^2-1}{4} = 0$, d.h. $\mu = \pm 1$, besitzt das Gleichungssystem keine Lösung. Ansonsten wird es gelöst durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu^2 - 1} \begin{pmatrix} \mu \\ 2 \end{pmatrix}.$$

In die dritte Gleichung eingesetzt ergibt sich

$$1 = x^2 + \frac{y^2}{4} = \frac{\mu^2 + 1}{(\mu^2 - 1)^2} \;\Rightarrow\; \mu = 0 \;\vee\; \mu = \pm\sqrt{3}.$$

Man erhält damit die drei stationären Punkte auf dem Rand

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Für die Nebenbedingung

$$g(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4} - 1$$

ergibt sich

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nur im Nullpunkt, welcher nicht auf dem Rand liegt. Daher gibt es keine weiteren Kandidaten.

(4) Mit den Funktionswerten

$$f(\boldsymbol{a}_0) = \frac{-1}{3}, \quad f(\boldsymbol{a}_1) = 1, \quad f(\boldsymbol{a}_2) = \frac{4+3\sqrt{3}}{4}, \quad f(\boldsymbol{a}_3) = \frac{4-3\sqrt{3}}{4}$$

ergibt sich, dass $\boldsymbol{a}_0$ globales Minimum und $\boldsymbol{a}_2$ globales Maximum ist.

50.6 Aus

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y - 1 \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

folgt wegen $x = 2y$, dass $y = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ der einzige Kandidat für einen Extremwert auf $\mathbb{R}^2$ ist. Die Hessematrix ist

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

also liegt in $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ein lokales Minimum vor, $f(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = -\frac{1}{3}$, das wegen $(\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9} < 1$ im Inneren von S liegt.

Um den Rand von S zu untersuchen, wenden wir die Methode des Lagrange-Multiplikators an. Die Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$ wird genau durch die Nullstellen der Funktion $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ erfüllt.

(1) Die Lagrangefunktion lautet:

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y).$$

(2) Wir bestimmen die Nullstellen des Gradienten:

$$\begin{aligned} 2x - y - 1 + 2\lambda x &= 0 \\ -x + 2y + 2\lambda y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned} \quad .$$

Die ersten beiden Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem für x und y, mit der von λ abhängigen Lösung

$$y = \frac{1}{4(1+\lambda)^2 - 1} \quad \text{und} \quad x = \frac{2(1+\lambda)}{4(1+\lambda)^2 - 1}\,.$$

Eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt sich mit $\mu = 1 + \lambda$

$$0 = x^2 + y^2 - 1 = \frac{4\mu^2 + 1 - (4\mu^2 - 1)^2}{(4\mu^2 - 1)^2} = \frac{-16\mu^4 + 12\mu^2}{(4\mu^2 - 1)^2}$$

mit den Lösungen $\mu = 0$ und $\mu = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$. Somit erhalten wir als Kandidaten für Extremstellen auf dem Rand

$$\begin{array}{lllll}
\lambda & = & -1 & : & (x,y) = (0,-1) \qquad f(x,y) = 1 \\
\lambda & = & -1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & : & (x,y) = (\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \qquad f(x,y) = -1 - \frac{3}{4}\sqrt{3} \\
\lambda & = & 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} & : & (x,y) = (-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}) \quad f(x,y) = 1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}
\end{array}$$

(3) Wegen

$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $(x,y) \in \partial S$ gibt es keine weiteren Kandidaten.

(4) Das absolute Minimum $-\frac{1}{3}$ liegt also im Inneren von S, bei $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, das absolute Maximum, $1 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$, liegt auf dem Rand von S, im Punkt $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$.

51 Totale Differentiation, Differentialoperatoren

51.1 Aufgaben

51.1 Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{v}\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt für alle $\boldsymbol{x} \in D$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) = 0.$$

(b) Für ein zweimal stetig differenzierbares Skalarfeld $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gilt für alle $\boldsymbol{x} \in D$

$$\operatorname{rot}(\nabla f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}\,.$$

(c) Für stetig differenzierbare Funktionen $g\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{v}\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt für alle $\boldsymbol{x} \in D$

$$\operatorname{div}(g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) = g(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})^\top \nabla g(\boldsymbol{x}).$$

51.2 Man zeige

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) = -\Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\,,$$

wobei die Komponenten von $\boldsymbol{v}$ zweimal stetig partiell differenzierbar sein sollen.

51.3 Gegeben seien die Funktionen

$$f = xy + yz + zx, \quad g = x^2 + y^2 + z^2, \quad h = x + y + z.$$

(a) Man berechne die totalen Differentiale der Funktionen.

(b) Zwischen den Funktionen f, g und h besteht ein funktionaler Zusammenhang der Form $f = U(g, h)$. Man bestimme die Funktion $U(g, h)$ mithilfe der totalen Differentialen.

51.4 Gegeben sei die Zustandsgleichung eines Gases in impliziter Form

$$f(P, V, T) = 0\,,$$

wobei P den Druck, V das Volumen und T die Temperatur des Gases bezeichnen. Man zeige, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial T}\big|_V$, $\frac{\partial T}{\partial V}\big|_P$ und $\frac{\partial P}{\partial V}\big|_T$, wobei ein Index die konstant gehaltene Variable anzeigt, folgende Gleichung erfüllen

$$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_P = -\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T .$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_51,

51.5 (a) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(x,y) = \cosh x \sin y - x^2$$

die zweidimensionale Poissongleichung $-\Delta u = 2$ löst.

(b) Zeigen Sie, dass die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung $u_t - k\Delta u = 0$ mit $k > 0$ von der Funktion

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} \sin({x}/{\sqrt{k}})$$

gelöst wird.

(c) Zeigen Sie, dass mit $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ und $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ die Funktion

$$u(r,t) = \frac{1}{r} \sin(r - ct)$$

die dreidimensionale Wellengleichung $u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$ löst.

51.2 Lösungen

51.1 (a) Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) &= \langle \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \partial_1\partial_2 v_3 - \partial_1\partial_3 v_2 + \partial_2\partial_3 v_1 - \partial_2\partial_1 v_3 + \partial_3\partial_1 v_2 - \partial_3\partial_2 v_1 = 0\,, \end{aligned}$$

da für $f \in C^2$ der Satz von Schwarz gilt: $\partial_i\partial_j f = \partial_j\partial_i f$ für $i,j = 1,2,3$.

(b) Es gilt

$$\operatorname{rot}(\nabla f(\boldsymbol{x})) = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_1 f(\boldsymbol{x}) \\ \partial_2 f(\boldsymbol{x}) \\ \partial_3 f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2\partial_3 f(\boldsymbol{x}) - \partial_3\partial_2 f(\boldsymbol{x}) \\ \partial_3\partial_1 f(\boldsymbol{x}) - \partial_1\partial_3 f(\boldsymbol{x}) \\ \partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{x}) - \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}\,,$$

da für $f \in C^2$ der Satz von Schwarz gilt: $\partial_i\partial_j f(\boldsymbol{x}) = \partial_j\partial_i f(\boldsymbol{x})$ für $i,j = 1,2,3$.

(c)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) &= \sum_{i=1}^{3} \partial_i (g(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))_i = \sum_{i=1}^{3} \partial_i (g(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{x})) \\ &= \sum_{i=1}^{3} (\partial_i g(\boldsymbol{x}) v_i(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \partial_i v_i(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})^\top \nabla g(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,. \end{aligned}$$

51.2 Für $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)^\top$ gilt laut Definition $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$ und somit

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{v}) &= \begin{pmatrix} \partial_2\big(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\big) - \partial_3\big(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\big) \\ \partial_3\big(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\big) - \partial_1\big(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\big) \\ \partial_1\big(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3\big) - \partial_2\big(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\partial_2^2 v_1 - \partial_3^2 v_1 + \partial_1\big(\partial_2 v_2 + \partial_3 v_3\big) \\ -\partial_3^2 v_2 - \partial_1^2 v_2 + \partial_2\big(\partial_3 v_3 + \partial_1 v_1\big) \\ -\partial_1^2 v_3 - \partial_2^2 v_3 + \partial_3\big(\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2\big) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\Delta v_1 + \partial_1\big(\operatorname{div} \boldsymbol{v}\big) \\ -\Delta v_2 + \partial_2\big(\operatorname{div} \boldsymbol{v}\big) \\ -\Delta v_3 + \partial_3\big(\operatorname{div} \boldsymbol{v}\big) \end{pmatrix} = -\Delta \boldsymbol{v} + \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\,.
\end{aligned}$$

51.3 (a) Die totalen Differentiale der Funktionen sind

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f &= (y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z\,, \\
\mathrm{d}g &= 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z\,, \\
\mathrm{d}h &= \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z\,.
\end{aligned}$$

(b) Aus dem funktionalen Zusammenhang ergibt sich das totale Differential

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial U}{\partial g}\,\mathrm{d}g + \frac{\partial U}{\partial h}\,\mathrm{d}h\,,$$

woraus sich nach dem Einsetzen der totalen Differentiale der Funktionen links und rechts folgende Beziehung ergibt

$$\begin{aligned}
&(y+z)\,\mathrm{d}x + (x+z)\,\mathrm{d}y + (x+y)\,\mathrm{d}z = \\
&\qquad = \left(\frac{\partial U}{\partial g}2x + \frac{\partial U}{\partial h}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial U}{\partial g}2y + \frac{\partial U}{\partial h}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{\partial U}{\partial g}2z + \frac{\partial U}{\partial h}\right)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Gleichungen

$$y+z = \frac{\partial U}{\partial g}2x + \frac{\partial U}{\partial h}\,,\ x+z = \frac{\partial U}{\partial g}2y + \frac{\partial U}{\partial h}\,,\ x+y = \frac{\partial U}{\partial g}2z + \frac{\partial U}{\partial h}\,.$$

Subtraktion von erster und zweiter Gleichung ergibt

$$y - x = 2(x-y)\frac{\partial U}{\partial g} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial g} = -\frac{1}{2}\,.$$

Addition aller drei Gleichungen liefert

$$2h = 2h\frac{\partial U}{\partial g} + 3\frac{\partial U}{\partial h} \quad \Longrightarrow \quad h = \frac{\partial U}{\partial h},$$

woraus folgt

$$U = -\frac{1}{2}g + f_1(h) \quad \text{bzw.} \quad U = \frac{1}{2}h^2 + f_2(g)\,.$$

Zusammen erhält man

$$U = \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}g\,,$$

da f und g homogene Polynome zweiter Ordnung bzw. h ein homogenes Polynom erster Ordnung ist.

51.4 Das totale Differential der Zustandsgleichung ist

$$0 = \frac{\partial f}{\partial P}\,\mathrm{d}P + \frac{\partial f}{\partial V}\,\mathrm{d}V + \frac{\partial f}{\partial T}\,\mathrm{d}T,$$

woraus sich folgende Beziehungen für die partiellen Ableitungen ergeben

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial f}{\partial P}\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V + \frac{\partial f}{\partial T} &&\Rightarrow &\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V &= -\frac{\partial f}{\partial T}\Big/\frac{\partial f}{\partial P}\\
0 &= \frac{\partial f}{\partial T}\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_P + \frac{\partial f}{\partial V} &&\Rightarrow &\left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_P &= -\frac{\partial f}{\partial V}\Big/\frac{\partial f}{\partial T}\\
0 &= \frac{\partial f}{\partial P}\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T + \frac{\partial f}{\partial V} &&\Rightarrow &\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T &= -\frac{\partial f}{\partial V}\Big/\frac{\partial f}{\partial P}.
\end{aligned}$$

Die zu zeigende Gleichung folgt nun durch Einsetzen

$$\left.\frac{\partial P}{\partial T}\right|_V \left.\frac{\partial T}{\partial V}\right|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\Big/\frac{\partial f}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial V}\Big/\frac{\partial f}{\partial T}\right) = \frac{\partial f}{\partial V}\Big/\frac{\partial f}{\partial P} = -\left.\frac{\partial P}{\partial V}\right|_T.$$

51.5 (a) Wir berechnen die einzelnen Ableitungen und damit den Laplaceoperator:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) &= \sinh x \sin y - 2x\\
\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) &= \cosh x \cos y\\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) &= \cosh x \sin y - 2\\
\frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) &= -\cosh x \sin y
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir

$$-\Delta u = -\cosh x \sin y + 2 + \cosh x \sin y = 2\,.$$

(b) Wir berechnen erneut die einzelnen Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) &= -\mathrm{e}^{-t} \sin\left({}^{x}\!/\!\sqrt{k}\right) \\
\frac{\partial}{\partial x} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{e}^{-t} \cos\left({}^{x}\!/\!\sqrt{k}\right) \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) &= -\frac{1}{k} \mathrm{e}^{-t} \sin\left({}^{x}\!/\!\sqrt{k}\right)
\end{aligned}
$$

Hiermit erhalten wir

$$
\Delta u(x,t) = -\frac{1}{k} \mathrm{e}^{-t} \sin\left({}^{x}\!/\!\sqrt{k}\right) .
$$

Weiter:

$$
u_t - k\Delta u = -\mathrm{e}^{-t} \sin\left({}^{x}\!/\!\sqrt{k}\right) + \mathrm{e}^{-t} \sin\left({}^{x}\!/\!\sqrt{k}\right) = 0 .
$$

(c) Zunächst leiten wir uns den Laplaceoperator für rotationssymmetrische Funktionen $u\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $u(r = \|x\|)$, her:

$$
\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} u = \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r} u \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r} ,
$$

$$
\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{x_i}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_i}{r}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} .
$$

Hiermit erhalten wir:

$$
\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{r^2 - x_i^2}{r^3}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\right) = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} .
$$

Für die einzelnen Ableitungen angewandt auf die Funktion $u(r,t)$ erhält man

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} u(r,t) &= -\frac{1}{r^2}\sin(r-ct) + \frac{1}{r}\cos(r-ct) \\
\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r,t) &= \frac{2}{r^3}\sin(r-ct) - \frac{2}{r^2}\cos(r-ct) - \frac{1}{r}\sin(r-ct) \\
\frac{\partial}{\partial t} u(r,t) &= -\frac{c}{r}\cos(r-ct) \\
\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(r,t) &= -\frac{c^2}{r}\sin(r-ct)
\end{aligned}
$$

Wir erhalten somit für die Wellengleichung

$$
\begin{aligned}
\Delta u_{tt} - c^2\Delta u &= u_{tt} - c^2\left(\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) \\
&= -\frac{c^2}{r}\sin(r-ct) + \frac{2c^2}{r}\frac{1}{r^2}\sin(r-ct) - \frac{2c^2}{r}\frac{1}{r}\cos(r-ct) - \\
&\quad -c^2\frac{2}{r^3}\sin(r-ct) + c^2\frac{2}{r^2}\cos(r-ct) + c^2\frac{1}{r}\sin(r-ct) \\
&= 0 .
\end{aligned}
$$

52 Implizite Funktionen

52.1 Aufgaben

52.1 Es sei $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D offen, eine C^1-Funktion. Die Niveaulinien $N_c = \{(x,y) \,|\, F(x,y) = c\} \neq \emptyset$ definieren (implizit) Kurven (evtl. zu einem Punkt entartet). Man begründe:

(a) Ist $F_x(x,y) = 0$ und $\nabla F(x,y) \neq 0$, so hat N_c dort eine horizontale Tangente.

(b) Ist $F_y(x,y) = 0$ und $\nabla F(x,y) \neq 0$, so hat N_c dort eine vertikale Tangente.

52.2 Es sei $F(x,y) = x^2 - xy + y^2$.

(a) Wo hat die durch $F(x,y) = 2$ implizit definierte Kurve horizontale und vertikale Tangenten?

(b) Wieso lässt sich die Kurve in einer Umgebung von $(\sqrt{2}, 0)$ als Graph einer C^1-Funktion $y = f(x)$ darstellen?

(c) Man berechne $f'(\sqrt{2})$.

52.3 Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $F(0,3,1) = 0$ gilt.

(b) Überprüfen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, ob sich die Gleichung $F(x,y,z) = 0$ im Punkt $(0,3,1)$ lokal nach x und y oder nach x und z oder nach y und z auflösen lässt und führen Sie ggf. diese Auflösung durch.

52.4 Man begründe, dass sich $F(x,y,z) = z^3 + 4z - x^2 + xy^2 + 8y - 7 = 0$ in der Umgebung jedes $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ als Graph einer Funktion $z = f(x,y)$ darstellen lässt. Man berechne dort den Gradienten von f.

52.5 Es sei $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Wo hat die durch $F(x,y) = 0$ implizit definierte Kurve horizontale und vertikale Tangenten, wo singuläre Punkte (das sind Punkte (x_0, y_0) mit $F_x(x_0,y_0) = 0 = F_y(x_0,y_0)$)? Wieso lässt sich in jeder Umgebung eines Punktes mit $x < 0$ die Kurve als Graph einer C^1-Funktion $y = f(x)$ darstellen? Man berechne dort $f'(x)$.

52.6 Untersuchen Sie, ob die nichtlinearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ \exp z - x - y^3 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x + y - \sin z &= 0 \\ \exp x - x^2 + y &= 1 \end{aligned}$$

in einer Umgebung von $(0,0,0)^\top$ nach (y,z) aufgelöst werden können.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_52,

52.7 Es sei $F(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 - 2xz - 2yz - 2xy - 1$ und $N_0 = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$.

(a) Man begründe: Zu jedem $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gibt es eine Umgebung U, in der sich N_0 als Graph einer Funktion $z = f(x, y)$ darstellen lässt.

(b) Man berechne deren Gradienten $\nabla f(x, y)$.

52.8 Gegeben sei die Funktion

$$F(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 16\,.$$

Man begründe: Für $x, y > 0$ lässt sich $F(x, y) = 0$ als Graph einer Funktion $y = f(x)$ darstellen. Man bestimme die lokalen Extrema von $f(x)$.

52.2 Lösungen

52.1 Es gilt

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix} \perp N_c\,.$$

Also ist $t = (F_y(x, y), -F_x(x, y))^\top$ Tangentenvektor an die Niveaulinie. Nun gilt:

(a) $F_x(x, y) \neq 0,\ F_y(x, y) = 0 \ \Rightarrow\ t = -F_x(x, y)\, e_y$ (vertikale Tangente in (x, y)).

(b) $F_x(x, y) = 0,\ F_y(x, y) \neq 0 \ \Rightarrow\ t = F_y(x, y)\, e_x$ (horizontale Tangente in (x, y)).

52.2 Es gilt

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}\,,$$

und weiter ist $N_2 = \{(x, y) : f(x, y) = 2\} \neq \emptyset$, da z. B. $(\sqrt{2}, 0) \in N_2$.

(a) Die horizontalen Tangenten erhalten wir gemäß Aufgabe 52.1, falls $f_x(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ y = 2x$ gilt. Eingesetzt in $f(x, y) = 2$ erhält man

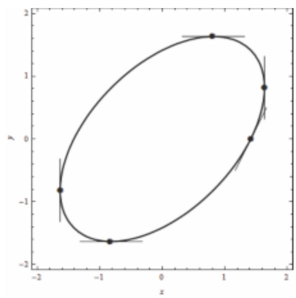
$$x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 3x^2 = 2 \ \Rightarrow\ x = \pm\sqrt{2/3},\ y = \pm 2\sqrt{2/3}\,.$$

Ferner gilt $f_y\left(\pm\sqrt{2/3}, \pm 2\sqrt{2/3}\right) \neq 0$. Somit gibt es horizontale Tangenten an N_2 in den Punkten $\left(\sqrt{2/3}, 2\sqrt{2/3}\right)$ und $\left(-\sqrt{2/3}, -2\sqrt{2/3}\right)$.
Die vertikalen Tangenten erhalten wir wenn $f_y(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 2y$ gilt. Eingesetzt in $f(x, y) = 2$ erhält man letztendlich die beiden Punkte $\left(\pm 2\sqrt{2/3}, \pm\sqrt{2/3}\right)$. Ferner gilt in diesen Punkten $f_x \neq 0$ und somit erhält man vertikale Tangenten an N_2 in den Punkten $\left(2\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$ und $\left(-2\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\right)$.

(b) Es gilt $f_y(\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2} \neq 0$. Daher gilt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass sich N_2 in einer Umgebung von $(\sqrt{2}, 0)$ als Graph einer C^1-Funktion $y = g(x)$ darstellen lässt.

(c) Es gilt

$$g'(\sqrt{2}) = -\frac{f_x(\sqrt{2}, 0)}{f_y(\sqrt{2}, 0)} = -\frac{2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = 2\,.$$



52.3 (a) Es gilt

$$F(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0+9+1-6\sqrt{0+9}+8 \\ 0+9+1-0-18+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrix

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x - \frac{6x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2y - \frac{6y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 2z \\ 2x-2 & 2y-6 & 2z \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir die folgenden drei Teilmatrizen

$$DF_{xy}(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \ DF_{xz}(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \ DF_{yz}(0,3,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Von diesen Matrizen ist nur DF_{xz} invertierbar. Für die Auflösbarkeit nach (x,y) und (y,z) ist also der Satz über implizite Funktionen nicht anwendbar. Jedoch ist F in einer Umgebung von $(0,3,1)$ nach (x,z) auflösbar: Wir sind also in der Situation $\boldsymbol{x} = y \in \mathbb{R}$ und $\boldsymbol{y} = (x,z)$, wobei $\boldsymbol{x}_0 = 3$, $\boldsymbol{y}_0 = (0,1)$.

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es offene Mengen $I = B_\varepsilon(3) \subseteq \mathbb{R}$ und $J = B_\delta(0,1)$ und eine Funktion

$$f : I \to J,\ y \mapsto (x,z) \ \text{ mit } \ (y, f(y)) = 0 \ \text{ für alle } \ y \in B_\varepsilon(3)\,.$$

Wir können diese implizite Funktion f auch explizit angeben, dazu sind einige Kunstgriffe nötig:

$$\begin{aligned}
F(x,y,z)=0 \quad &\Rightarrow \quad F_1(x,y,z)=F_2(x,y,z)=0\\
&\Rightarrow \quad F_1(x,y,z)-F_2(x,y,z)=0\\
&\Leftrightarrow \quad -6\sqrt{x^2+y^2}+2x+6y=0\\
&\Leftrightarrow \quad 3\sqrt{x^2+y^2}=x+3y\\
&\Rightarrow \quad 9(x^2+y^2)=(x+3y)^2\\
&\Leftrightarrow \quad 4x^2-3xy=0\\
&\Leftrightarrow \quad x(4x-3y)=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=0 \ \vee \ x=\frac{3}{4}y\,.
\end{aligned}$$

Da $x(3)=0$ sein muss, kommt nur $x(y)=0$ für alle y in Frage.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad F_2(0,y,z)=0\\
&\Leftrightarrow \quad y^2+z^2-6y+8=0\\
&\Leftrightarrow \quad z^2=-y^2+6y-8\\
&\Leftrightarrow \quad |z|=\sqrt{-y^2+6y-8}\\
&\Leftrightarrow \quad z=\sqrt{-y^2+6y-8} \ \vee \ z=-\sqrt{-y^2+6y-8}\,.
\end{aligned}$$

Da $z(3)=1$ sein muss, kommt nur $z(y)=\sqrt{-y^2+6y-8}$ für alle y in Frage.

52.4 Es gilt

$$F_z(x,y,z)=3z^2+4>0 \quad \forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\,,$$

also folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass es in einer Umgebung von (x,y) eine C^1-Funktion $z=f(x,y)$ mit $F(x,y,f(x,y))=0$ gibt. Für den Gradienten gilt dort

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} f_x(x,y)\\ f_y(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z}\\ -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\end{pmatrix}=-\frac{1}{3z^2+4}\begin{pmatrix} -2x+y^2\\ 2xy+8\end{pmatrix}\,.$$

52.5 Es gilt $F_x(x,y)=3x^2-3y=0 \ \Leftrightarrow \ x^2=y$:

$$F(x,x^2)=x^3+x^6-3x^3=x^3(x^3-2)=0 \ \Leftrightarrow \ x=0 \ \vee \ x=\sqrt[3]{2}$$

und $F_y(x,y)=3y^2-3x=0 \ \Leftrightarrow \ y^2=x$:

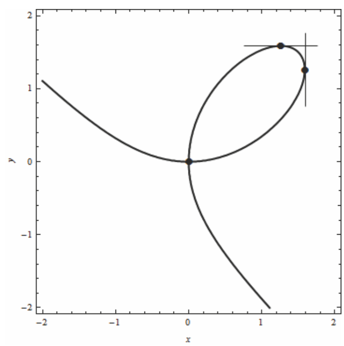
$$F(y^2,y)=y^6+y^3-3y^3=y^3(y^3-2)=0 \ \Leftrightarrow \ y=0 \ \vee \ y=\sqrt[3]{2}\,.$$

Somit folgt:

- In $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ ist $F(x,y) = 0$, $F_x(x,y) = 0$ und $F_y(x,y) \neq 0$. Also gibt es hier eine horizontale Tangente.
- In $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ ist $F(x,y) = 0$, $F_y(x,y) = 0$ und $F_x(x,y) \neq 0$. Also gibt es hier eine vertikale Tangente.
- In $(0,0)$ ist $F(x,y) = 0$ und $\nabla F(x,y) = 0$. Also gibt es hier einen singulären Punkt.

Für $x < 0$ gilt $F_y(x,y) = 3(y^2 - x) \neq 0$, also folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass sich in einer Umgebung von x die durch $F(x,y) = 0$ definierte Kurve als Graph einer C^1-Funktion $y = f(x)$ darstellen lässt. Es gilt dann

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{x^2 - y}{y^2 - x} = -\frac{x^2 - g(x)}{g(x)^2 - x}.$$



52.6 Wir betrachten die Funktionen

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y - \sin z \\ \exp z - x - y^3 - 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + y - \sin z \\ \exp x - x^2 + y - 1 \end{pmatrix}$$

und untersuchen, ob die Gleichungen $F(x,y,z) = 0$ und $G(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ nach (y,z) aufgelöst werden können. Dazu betrachten wir zunächst die Jacobimatrizen von F und G:

$$DF(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\cos z \\ -1 & -3y^2 & \exp z \end{pmatrix} \Rightarrow DF(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$DG(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\cos z \\ -2x + \exp x & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow DG(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen sind nun genau dann in einer Umgebung von $(0,0,0)$ nach (y,z) auflösbar, wenn jeweils die rechte 2×2-Teilmatrix von $DF(0)$ und $DG(0)$ invertierbar ist, also falls

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

invertierbar sind. Dies ist offensichtlich der Fall.

52.7 (a) Es gilt

$$F_z(x,y,z) = 2z - 2x - 2y = 2(z-x-y)\,,$$

also ist $F_z(x,y,z) = 0$ für $z = x+y$. Somit folgt

$$F(x,y,x+y) = (x+y)^2 - x^2 - y^2 - 2x(x+y) - 2y(x+y) - 2xy - 1 = -2(x+y)^2 - 1 < 0\,.$$

Für $z = x+y$ liegen also keine Punkte in N_0 und somit gilt $F_z(x,y,z) \neq 0$ für alle $(x,y,z) \in N_0$. Mit dem Satz über implizite Funktionen folgt also, dass es zu jedem $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ eine Umgebung U gibt, in der sich N_0 als Graph einer Funktion $z = f(x,y)$ darstellen lässt.

(b) Für den Gradienten erhält man

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \\ -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y+z}{z-x-y} \\ \frac{x+y+z}{z-x-y} \end{pmatrix} = \frac{x+y+f(x,y)}{f(x,y)-x-y} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

52.8 Es gilt

$$F_y(x,y) = -6xy < 0 \quad \text{für} \quad x,y > 0\,.$$

Somit folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass sich für $x,y > 0$ $F(x,y) = 0$ als Graph einer Funktion $y = f(x)$ darstellen lässt.
Für die Ableitung gilt

$$f'(x) = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = 0 \;\Leftrightarrow\; F_x(x,y) = 0$$

$$F_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; y = x \;(x,y > 0)$$

$$F(x,x) = 16 - 2x^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$$

$$-\frac{F_{xx}(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{6x}{-6xy} = \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad (x,y) = (2,2)\,.$$

Die Funktion f hat also ein lokales Minimum bei $x = 2$.

53 Koordinatentransformationen

53.1 Aufgaben

53.1 Man berechne $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ und $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ in kartesischen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten, wobei:

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} xz \\ yz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix} .$$

53.2 Gegeben sei das Skalarfeld $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2$.
Man berechne ∇f und Δf in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

53.3 Gegeben sei das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ auf $\mathbb{R}^3 \setminus z$-Achse mit

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} .$$

Stellen Sie das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ in Kugelkoordinaten dar und berechnen Sie $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ und $\operatorname{div} \boldsymbol{v}$ in kartesischen Koordinaten und in Kugelkoordinaten.

53.4 Gegeben sei das Skalarfeld $f(x,y,z) = x^2+y^3+z^2+xz$.
Man berechne ∇f und Δf in kartesischen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten.

53.5 Leiten Sie die Darstellung des Laplaceoperators in Zylinderkoordinaten her:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

53.2 Lösungen

53.1 In Zylinderkoordinaten lautet das Vektorfeld (beachte unser Rezept):

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{Zyl}}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\varphi\, z \\ r\sin\varphi\, z \\ r^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ r \end{pmatrix} .$$

Für Divergenz und Rotation erhält man in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{xyz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{xyz}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_53,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{y^2 z}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 z}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + 0 = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Für Divergenz und Rotation erhält man in Zylinderkoordinaten

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial v_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cdot 0 - 0 \\ 1-1 \\ \frac{1}{r}\cdot 0 - \frac{1}{r}\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r v_1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{z}{r} + \frac{1}{r}\cdot 0 + 0 = \frac{z}{r} .$$

53.2 In kartesischen Koordinaten ergibt sich für den Gradient und den Laplace-Operator

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = 4(x^2+y^2+z^2)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ und } \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 20(x^2+y^2+z^2).$$

In Kugelkoordinaten lautet die Funktion $f(r,\varphi,\vartheta) = r^4$. Für den Gradient und den Laplace-Operator erhält man

$$\nabla f(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} f_r \\ \frac{1}{r\sin\vartheta} f_\varphi \\ \frac{1}{r} f_\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4r^3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\Delta f(r,\varphi,\vartheta) = f_{rr} + \frac{2}{r} f_r + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta} f_{\varphi\varphi} + \frac{\cos\vartheta}{r^2\sin\vartheta} f_\vartheta + \frac{1}{r^2} f_{\vartheta\vartheta} = 12r^2 + \frac{2}{r}4r^3 = 20r^2 .$$

53.3 Mit unserem Rezept erhalten wir

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_{\text{Kug}}(r,\varphi,\vartheta) &= S_{\text{Kug}}^{-1}\, \boldsymbol{v}_{\text{kart}}(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta, r\cos\vartheta) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\cos\vartheta & -\sin\vartheta \end{pmatrix} \frac{1}{r\sin^2\vartheta} \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r\sin^2\vartheta} \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta \\ \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta\sin\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} \\ \frac{1}{\sin\vartheta} \\ -\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \cot^2\vartheta \\ \csc\vartheta \\ -\cot\vartheta \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für Divergenz und Rotation erhält man in kartesischen Koordinaten

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2yz}{(x^2+y^2)^2} - 0 \\ 0 + \frac{2xz}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \frac{2z}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(x,y,z) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Für Divergenz und Rotation erhält man in Kugelkoordinaten

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(r,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(v_2 \sin\vartheta)}{\partial\vartheta} - \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_3}{\partial\varphi} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_3)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_1}{\partial\vartheta} \\ \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_2)}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^3\vartheta} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v}(r,\varphi,\vartheta) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_1)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial v_2}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial(v_3\sin\vartheta)}{\partial\vartheta} = \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}.$$

53.4 In kartesischen Koordinaten ergibt sich für den Gradient und den Laplace-Operator

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z \\ 3y^2 \\ 2z+x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 4 + 6y.$$

In Zylinderkoordinaten lautet die Funktion $f(r,\varphi,z) = r^2\cos^2\varphi + r^3\sin^3\varphi + z^2 + rz\cos\varphi$. Für den Gradient und den Laplace-Operator erhält man

$$\nabla f = f_r e_r + \frac{1}{r} f_\varphi e_\varphi + f_z e_z = \begin{pmatrix} f_r \\ \frac{1}{r}f_\varphi \\ f_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos^2\varphi + 3r^2\sin^3\varphi + z\cos\varphi \\ -2r\cos\varphi\sin\varphi + 3r^2\sin^2\varphi\cos\varphi - z\sin\varphi \\ 2z + r\cos\varphi \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta f &= f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi} + f_{zz} \\ &= 2\cos^2\varphi + 6r\sin^3\varphi + 2\cos^2\varphi + 3r\sin^3\varphi + \frac{z}{r}\cos\varphi + \\ &\quad +2\sin^2\varphi - 2\cos^2\varphi + 6r\sin\varphi\cos^2\varphi - 3r\sin^3\varphi - \frac{z}{r}\cos\varphi + 2 \\ &= 6r\sin\varphi\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + 2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + 2 = 4 + 6r\sin\varphi. \end{aligned}$$

53.5 Gegeben sei eine Funktion $u(r,\varphi,z)$ in Zylinderkoordinaten. Wir suchen nun den Laplace-Operator

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial {x_3}^2}.$$

Es gilt nun

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Wir brauchen nun

$$\phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}\,,$$

um die benötigten partiellen Ableitungen zu berechnen. Wir stellen alle benötigten Ableitungen übersichtlich in einer Tabelle zusammen:

$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} = -\frac{r\sin\varphi}{r^2} = -\frac{1}{r}\sin\varphi$	$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0$
$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{r\sin\varphi}{r} = \sin\varphi$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} = \frac{r\cos\varphi}{r^2} = \frac{1}{r}\cos\varphi$	$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0$
$\frac{\partial r}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial x_3} = 1$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Daraus lassen sich die zweiten partiellen Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}\sin^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \\
&\quad - \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \\
\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \sin^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{r}\cos^2\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \\
&\quad + \frac{1}{r}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\cos^2\varphi\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \\
\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} &= \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.
\end{aligned}$$

Letztendlich erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta &= \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\
&= \frac{1}{r}\left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.
\end{aligned}$$

54 Kurven I

54.1 Aufgaben

54.1 Gegeben sei die Kurve $\gamma(t) = (t^2, t+2)^\top$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

(a) Man bestimme singuläre Punkte sowie horizontale und vertikale Tangenten.

(b) Man berechne die Bogenlängenfunktion.

54.2 Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurve:

$$\gamma\colon [0,a] \to \mathbb{R}^3 \text{ mit } \gamma(t) = t\,(\cos t, \sin t, 1)^\top .$$

54.2 Lösungen

54.1 (a) Wir bestimmen den Tangentenvektor und untersuchen dessen Komponentenfunktionen nach Nullstellen:

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot x(t) = 0 \ \Leftrightarrow \ t = 0 \\ \dot y(t) \neq 0 \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Somit gibt es eine vertikale Tangente bei $t = 0$, keine horizontalen Tangenten und keine singulären Punkte.

(b) Als Bogenlängenfunktion erhält man mit der Substitution $\tau = \frac{u}{2}$, $\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot\gamma(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \|(2\tau, 1)^\top\|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{4\tau^2+1}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\int_0^{2t} \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u .$$

Dieses Integral lässt sich durch die Substitution $u = \sinh z$, $\mathrm{d}u = \cosh z\,\mathrm{d}z$ und anschließende partielle Integration lösen, wobei $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= \int (\sqrt{\sinh^2 z + 1}) \cosh z\,\mathrm{d}z = \int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z \\
&= \sinh z \cosh z - \int \sinh^2 z\,\mathrm{d}z \\
&= \sinh z \cosh z - \int (\cosh^2 z - 1)\,\mathrm{d}z \\
&= \sinh z \cosh z + z - \int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_54,

Hiermit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{u^2+1}\,\mathrm{d}u &= \int \cosh^2 z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\sinh z\cosh z + z\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sinh z\sqrt{\sinh^2 z+1}+z\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2+1}+\operatorname{arsinh} u\right).\end{aligned}$$

Mit einer Rücksubstitution erhalten wir nun die Bogenlängenfunktion:

$$s(t) = \frac{1}{4}\left[u\sqrt{u^2+1}+\operatorname{arsinh} u\right]_0^{2t} = \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{(2t)^2+1}+\operatorname{arsinh} 2t\right).$$

54.2 Für die Ableitung erhält man mit Hilfe der Produktregel

$$\dot\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t - t\sin t\\ \sin t + t\cos t\\ 1\end{pmatrix}.$$

Die Kurve hat damit die Länge

$$\begin{aligned}L &= \int_0^a \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_0^a \|(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)^\top\|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a \sqrt{(1+t^2)(\sin^2 t + \cos^2 t)+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^a \sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{2}\int_0^a \sqrt{1+(t/\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}t\\ &\quad \text{Substitution: } t=\sqrt{2}\,x,\ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\\ &= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\operatorname{arsinh} x\right]_0^{a/\sqrt{2}}\\ &= \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(a/\sqrt{2})^2}+\operatorname{arsinh}(a/\sqrt{2}).\end{aligned}$$

55 Kurven II

55.1 Aufgaben

55.1 Begründen Sie, warum das Rezept zur Bestimmung der natürlichen Parametrisierung auf Seite 520 (Rezeptebuch) funktioniert, insbesondere, warum $\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1$ für alle t gilt.

55.2 Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = \left(\ln\sqrt{1+t^2}, \arctan t\right)^\top, \quad t \in [0,2]\,.$$

55.3 Es seien $a, b > 0$. Gegeben sei die Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))^\top$, $t \in [0, 2\pi]$ mit

$$x(t) = a\cos t \quad \text{und} \quad y(t) = b\sin t,$$

die eine Ellipse durchläuft.

(a) Bestimmen Sie die Punkte (x, y) der Kurve, an denen die Krümmung maximal ist.

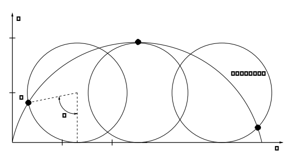
(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Leibniz'schen Sektorformel den Flächeninhalt der Ellipse.

55.4 Berechnen Sie mit Hilfe der Leibniz'schen Sektorformel den Flächeninhalt des von den beiden Kurven

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 2-t^2 \\ t \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in \mathbb{R}$$

eingeschlossenen Gebiets.

55.5 Ein Punkt P auf der Lauffläche eines rollenden Rades beschreibt eine periodische Kurve, welche als Zykloide bezeichnet wird (siehe Abbildung).



(a) Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Zykloide an. Verwenden Sie hierzu als Parameter den in der Abbildung eingezeichneten Winkel t.

(b) Berechnen Sie die Fläche unter einem Zykloidbogen mit Hilfe der Leibniz'schen Sektorformel.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_55,

(c) Berechnen Sie die Krümmung der Zykloide für $0 < t < 2\pi$.

55.6 Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Kurve und ihre Umparametrisierung nach der Bogenlänge:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (t, \cosh(t/2) - 1)^\top, \quad |t| \le 5\,.$$

55.7 Bestimmen Sie die Krümmung der Kurve γ gegeben durch

$$\gamma(t) = (t, 1 - \cos t)^\top, \quad t \in [0, 1].$$

55.8 Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve γ definiert durch

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{-2t}(\cos t, \sin t)^\top, \quad t \in [0, \infty)\,,$$

und bestimmen Sie die Umparametrisierung von γ nach der Bogenlänge.

55.2 Lösungen

55.1 Da die Funktion $s : [a, b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist, ist auch die Umkehrfunktion $s^{-1} : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Somit ist $\tilde{\gamma}$ eine Umparametrisierung von γ. Dass $\|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1$ für alle t gilt, rechnet man einfach nach:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \left(\gamma\big(s^{-1}(t)\big)\right)' = \dot{\gamma}\big(s^{-1}(t)\big)\,\big(s^{-1}(t)\big)' = \dot{\gamma}\big(s^{-1}(t)\big)\,\frac{1}{s'\big(s^{-1}(t)\big)} \\ &= \dot{\gamma}\big(s^{-1}(t)\big)\,\frac{1}{\|\dot{\gamma}\big(s^{-1}(t)\big)\|} \quad \Rightarrow \quad \|\dot{\tilde{\gamma}}(t)\| = 1\,.\end{aligned}$$

55.2 Wir gehen nach unserem Rezept vor:

(1) Wir bestimmen die Bogenlängenfunktion mittels der Substitution $\tau = \sinh u,\ \mathrm{d}\tau = \cosh u\ \mathrm{d}u$:

$$\begin{aligned}L &= \int_0^t \|(\dot{x}(\tau), \dot{y}(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \left\|\left(\tfrac{\tau}{1+\tau^2}, \tfrac{1}{1+\tau^2}\right)\right\|\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{\left(\tfrac{\tau}{1+\tau^2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{1+\tau^2}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \tfrac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = \int_0^{\operatorname{arsinh} t} \tfrac{\cosh u}{\sqrt{1+\sinh^2 u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{arsinh} t} \tfrac{\cosh u}{\cosh u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\operatorname{arsinh} t} \mathrm{d}u = u\Big|_0^{\operatorname{arsinh} t} = \operatorname{arsinh} t\,.\end{aligned}$$

Insbesondere gilt $L(\gamma) = \operatorname{arsinh} 2$.

(2) Wir bestimmen s^{-1}:

$$s(t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} = \operatorname{arsinh} t \;\Rightarrow\; s^{-1}(t) = \sinh t\,.$$

(3) Wir erhalten die Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$\tilde{\gamma} : [0, \operatorname{arsinh} 2] \to \mathbb{R}^2\,,\ \tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) = \begin{pmatrix} \ln\sqrt{1+\sinh^2 t} \\ \arctan \sinh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln\cosh t \\ \arctan \sinh t \end{pmatrix}.$$

55.3 (a) Für die Kurve und ihre Ableitungen gilt:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}, \quad \ddot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -b\sin t \end{pmatrix}.$$

Somit folgt für die Krümmung

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}{\left(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2\right)^{3/2}} = \frac{ab\sin^2 t + ab\cos^2 t}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}} = \frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t\right)^{3/2}}.$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle:

(i) $a = b$: Für die Krümmung gilt

$$\kappa(t) = \frac{a^2}{a^3} = \frac{1}{a} = \text{const.}$$

Die Krümmung ist also an allen Punkten der Kurve maximal.

(ii) $a < b$: Wir betrachten den Radikand im Nenner von $\kappa(t)$

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + \underbrace{a^2\cos^2 t - a^2\cos^2 t}_{=0} = a^2 + \underbrace{(b^2 - a^2)}_{>0}\underbrace{\cos^2 t}_{\in[0,1]}.$$

Der Nenner wird also minimal für $\cos^2 t = 0$, also für $t = \frac{\pi}{2} \ \wedge \ t = \frac{3\pi}{2}$. Die Krümmung wird somit maximal an den Punkten $(0, \pm b)$.

(iii) $a > b$: Wir betrachten erneut den Radikand im Nenner von $\kappa(t)$

$$a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t + \underbrace{a^2\cos^2 t - a^2\cos^2 t}_{=0} = a^2 + \underbrace{(b^2 - a^2)}_{<0}\underbrace{\cos^2 t}_{\in[0,1]}.$$

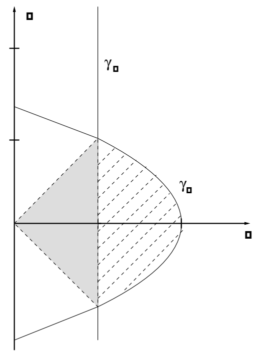
Der Nenner wird also minimal für $\cos^2 t = 1$, also für $t = 0 \wedge t = \pi$. Die Krümmung wird somit maximal an den Punkten $(\pm a, 0)$.

(b) Wendet man die Leibniz'sche Sektorformel an, so erhält man den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\Big(x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\Big)dt\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\Big(a\cos t\, b\cos t - (-a\sin t)b\sin t\Big)dt\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|ab\int_0^{2\pi} 1dt\right| = \pi\, a\, b\,. \end{aligned}$$

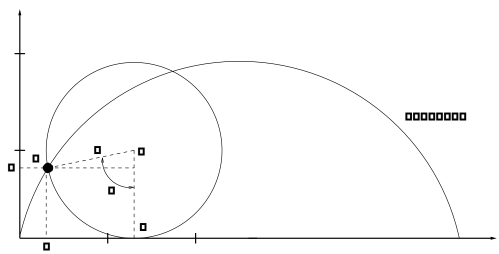
55.4 Das von den beiden Kurven eingeschlossene Gebiet ist in der Abbildung als schraffierte Fläche gekennzeichnet. Die beiden Kurven schneiden sich in den Punkten $(1,1)^\top$ und $(1,-1)^\top$. Wendet man die Leibniz'sche Sektorformel auf die Kurve $\gamma_1(t)$ für $t \in [-1,1]$ an, so besteht der vom Fahrstrahl überstrichene Flächeninhalt aus der Summe des schraffierten Gebiets und des in der Abbildung grau gekennzeichneten Dreiecks. Letzteres hat den Flächeninhalt $F_\Delta = 1$ welcher am Ende der Rechnung einfach abzuziehen ist. Die Leibniz'schen Sektorformel angewandt auf die Kurve $\gamma_1(t)$ ergibt

$$\begin{aligned} F_S &= \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} (2-t^2)\cdot 1 - (-2t)t\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{1} t^2 + 2\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\left.\frac{1}{3}t^3 + 2t\right|_{-1}^{1}\right| = \frac{7}{3}\,. \end{aligned}$$



Also ist der gesuchte Flächeninhalt des Gebiets $\frac{4}{3}$.

55.5 (a) Wir betrachten ein Rad mit Radius r und wählen den Koordinatenursprung als Startpunkt für P . Als Kurvenparameter t wählen wir den Winkel zwischen den Strecken $\overline{PM}$ und $\overline{MQ}$ (s. Abb.).



Anhand der Abbildung lässt sich nun die Parameterdarstellung leicht ablesen, wir erhalten

$$\gamma(t) = r\begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t < \infty\,.$$

Wie man leicht sieht, ist diese Kurve 2π-periodisch.

(b) Die Fläche unter dem Zykloidbogen $0 \leq t < 2\pi$ berechnet sich mit Hilfe der Leibniz'schen Sektorformel wie folgt

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi}\Big(x(t)\dot{y}(t)-\dot{x}(t)y(t)\Big)dt\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} r^2\Big((t-\sin t)\sin t\Big)-(1-\cos t)(1-\cos t)dt\right| \\ &= \tfrac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} r^2\Big(2\cos t + t\sin t - 2\Big)dt\right| \\ &= \tfrac{1}{2}r^2\left|3\sin t - t\cos t - 2t|_0^{2\pi}\right| = 3\pi r^2\,. \end{aligned}$$

(c) Für die Kurve und ihre Ableitungen gilt:

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix} r(t-\sin t)\\ r(1-\cos t)\end{pmatrix},\quad \dot{\gamma}(t)=\begin{pmatrix} r(1-\cos t)\\ r\sin t\end{pmatrix},\quad \ddot{\gamma}(t)=\begin{pmatrix} r\sin t\\ r\cos t\end{pmatrix}.$$

Somit folgt für die Krümmung

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|\dot{x}(t)\ddot{y}(t)-\dot{y}(t)\ddot{x}(t)|}{(\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2)^{3/2}} = \frac{|r(1-\cos t)r\cos t - r\sin t\, r\sin t|}{\left[r^2(1-\cos t)^2+r^2\sin^2 t\right]^{3/2}} \\ &= \frac{|\cos t-\cos^2 t-\sin^2 t|}{r\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)^{3/2}} = \frac{|\cos t - 1|}{r\,(2-2\cos t)^{3/2}} \\ &= \frac{(1-\cos t)}{2\sqrt{2}\,r(1-\cos t)^{3/2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}\,r\sqrt{1-\cos t}}\,. \end{aligned}$$

55.6 Die Kurve lässt sich als Funktion $y(t) = 2(\cosh(t/2) - 1)$ darstellen. Für die Länge ergibt sich

$$L=\int_{-5}^{5}\sqrt{1+\dot{y}(t)^2}\;\mathrm{d}t=\int_{-5}^{5}\sqrt{1+\sinh^2\tfrac{t}{2}}\;\mathrm{d}t = 2\int_0^5\cosh\tfrac{t}{2}\;\mathrm{d}t = 4\sinh\tfrac{t}{2}\Big|_0^5 = 4\sinh\tfrac{5}{2}\,.$$

Zur Parametrisierung nach Bogenlänge gehen wir nach Rezept vor:

(1) Die Bogenlängenfunktion lautet (siehe oben):

$$s(t)=\int_{-5}^{t}\cosh\tfrac{\tau}{2}\;\mathrm{d}\tau = 2\sinh\tfrac{t}{2}+2\sinh\tfrac{5}{2}\,.$$

(2) Als Umkehrfunktion zu s erhalten wir

$$s^{-1}(t) = 2\,\mathrm{arsinh}\left(\tfrac{t}{2}-\sinh\tfrac{5}{2}\right)\,.$$

(3) Die nach Bogenlänge umparametrisierte Kurve lautet damit

$$\tilde{\gamma}(t)=\gamma(s^{-1}(t)) = 2\begin{pmatrix}\mathrm{arsinh}\left(\tfrac{t}{2}-\sinh\tfrac{5}{2}\right)\\ \cosh\left[\mathrm{arsinh}\left(\tfrac{t}{2}-\sinh\tfrac{5}{2}\right)\right]-1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\mathrm{arsinh}\left(\tfrac{t}{2}-\sinh\tfrac{5}{2}\right)\\ \sqrt{\left(\tfrac{t}{2}-\sinh\tfrac{5}{2}\right)^2+1}-1\end{pmatrix}.$$

55.7 Die Kurve lässt sich als Funktion $y(t) = 1 - \cos t$ darstellen. Für die Krümmung ergibt sich

$$\kappa(t) = \frac{|\ddot{y}(t)|}{\left(1+\dot{y}(t)^2\right)^{3/2}} = \frac{|\cos t|}{\left(1+\sin^2 t\right)^{3/2}} = \frac{\cos t}{\left(1+\sin^2 t\right)^{3/2}}\,,$$

wobei wir benutzt haben, dass $\cos(t) > 0$ für $t \in [0,1]$ gilt.

55.8 Für die Ableitung erhält man mit Hilfe der Produktregel

$$\dot{\gamma}(t) = -2\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = -\,\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}2\cos t + \sin t\\ 2\sin t - \cos t\end{pmatrix}.$$

Die Kurve hat die Länge

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\infty \|\dot{\gamma}(t)\|\ \mathrm{d}t = \int_0^\infty \|-\mathrm{e}^{-2t}(2\cos t + \sin t, 2\sin t - \cos t)\|\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{(2\cos t + \sin t)^2 + (2\sin t - \cos t)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{5(\sin^2 t + \cos^2 t)}\ \mathrm{d}t = \sqrt{5}\lim_{a\to\infty}\int_0^a \mathrm{e}^{-2t}\ \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{5}\lim_{a\to\infty}\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^a = \sqrt{5}\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2a}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\,. \end{aligned}$$

Zur Bestimmung der Parametrisierung nach Bogenlänge gehen wir nach Rezept vor:

(1) Für die Bogenlängenfunktion erhalten wir nach obigem Vorgehen

$$s(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right).$$

(2) Um $s^{-1}(t)$ zu bestimmen, lösen wir $s(t)$ nach t auf:

$$\begin{aligned} s(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-2t}\right) \ &\Leftrightarrow\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\,s(t) + 1 = \mathrm{e}^{-2t} \ \Leftrightarrow\ \ln\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\,s(t) + 1\right) = -2t \\ &\Leftrightarrow\ -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,s(t)\right) = t\,. \end{aligned}$$

Damit lautet die gesuchte Umkehrfunktion s^{-1} wie folgt:

$$s^{-1}(t) = -\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right).$$

(3) Für die nach Bogenlänge umparametrisierte Kurve ergibt sich also

$$\tilde{\gamma}(t) = \gamma(s^{-1}(t)) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)\left(\cos\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)\right], \sin\left[-\frac{1}{2}\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)\right]\right)^\top.$$

56 Kurvenintegrale

56.1 Aufgaben

56.1 Bestimmen Sie die folgenden skalaren bzw. vektoriellen Kurvenintegrale:

(a) $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^\top$ und $f(x, y, z) = x^2 + y\,z$.

(b) γ ist die Verbindungsstrecke von $(0, 0)^\top$ nach $(1, 1)^\top$ und $\boldsymbol{v}(x, y) = (2y, \mathrm{e}^x)^\top$.

56.2 Eine Schraubenfeder ist durch die Kurve $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \frac{1}{2}t)^\top$ mit der Linienmassendichte $\rho(x, y, z) = z$ gegeben. Berechnen Sie die Masse und den Schwerpunkt der Schraubenfeder.

56.3 Gegeben seien die Vektorfelder $\boldsymbol{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\boldsymbol{w}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\boldsymbol{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + y^2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{w}(x, y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie sowohl für $\boldsymbol{v}$ als auch für $\boldsymbol{w}$ jeweils das Kurvenintegral von $A = (0, 1)^\top$ nach $B = (1, 2)^\top$

(a) längs der Verbindungsgeraden,

(b) längs des Streckenzugs bestehend aus den Strecken von A nach $(1, 1)^\top$ und von $(1, 1)^\top$ nach B,

(c) längs der Parabel $y = x^2 + 1$.

56.4 Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ das beschränkte Gebiet, das durch die beiden Graphen der Funktionen $x = 1 - \frac{1}{4}y^2$ und $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ begrenzt wird. Außerdem sei ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ definiert durch $\boldsymbol{v}(x, y) = (xy, y^2)^\top$.

(a) Parametrisieren Sie die G begrenzende Kurve.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\partial G} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$.

56.2 Lösungen

56.1 (a) Für diese Kurve erhalten wir

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^\top, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_56,

und damit für das Integral

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\sqrt{2} \, \mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t + t \sin t \, \mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\pi - t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \, \mathrm{d}t\right) = -\sqrt{2}\pi.$$

(b) Die direkte Verbindungsstrecke ist gegeben durch $\gamma(t) = (t,t)^\top$, $t \in [0,1]$. Das Kurvenintegral berechnet sich dann zu

$$\begin{aligned}\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s &= \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2t + \mathrm{e}^t) \, \mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}\,.\end{aligned}$$

56.2 Der Betrag des Geschwindigkeitsvektors ist

$$\|\dot\gamma(t)\| = \left\|\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \tfrac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,.$$

Die Masse berechnet sich dann als

$$M = \int_0^{4\pi} \rho(\gamma(t)) \, \|\dot\gamma(t)\| \, \mathrm{d}x = \int_0^{4\pi} \frac{t}{2}\frac{\sqrt{5}}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{5}}{4} 8\pi^2 = 2\sqrt{5}\,\pi^2\,.$$

Den Schwerpunkt $S = (s_1, s_2, s_3)$ berechnen wir in einem Aufwasch, d. h., wir berechnen drei Integrale gleichzeitig, indem wir einen Vektor komponentenweise integrieren:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{M}\int_0^{4\pi} \gamma(t)\rho(\gamma(t))\|\dot\gamma(t)\| \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{5}\pi^2}\int_0^{4\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix} \frac{t}{2}\frac{\sqrt{5}}{2} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{8\pi^2}\begin{pmatrix} \int_0^{4\pi} t\cos t \, \mathrm{d}t \\ \int_0^{4\pi} t \sin t \, \mathrm{d}t \\ \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} t^2 \, \mathrm{d}t \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi^2}\begin{pmatrix} \cos t + t\sin t\Big|_0^{4\pi} \\ \sin t - t\cos t\Big|_0^{4\pi} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{3}(4\pi)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2\pi} \\ \frac{4\pi}{3} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

56.3 Wir bezeichnen mit γ_1 die direkte Verbindungsstrecke von A und B, mit γ_2 den Streckenzug, bestehend aus $\gamma_{2,1}$ von A nach $(1,1)^\top$, gefolgt von $\gamma_{2,2}$ von $(1,1)^\top$ nach B und mit γ_3 die Verbindungskurve von A nach B entlang der Parabel $y = x^2 + 1$. Wir wählen die folgenden Parametrisierungen:

(a) $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, 1+t)^\top$
(b) $\gamma_{2,1} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{2,1}(t) = (t, 1)^\top$ und $\gamma_{2,2} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{2,2}(t) = (1, 1+t)^\top$
(c) $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (t, t^2+1)^\top$

Für das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_a^b \boldsymbol{v}(\gamma(t))^\top \dot{\gamma}(t) \ \mathrm{d}t$$

erhält man folglich:

(a) $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - t - 1 + t + (1+t)^2 \ \mathrm{d}t = \frac{5}{3}$.
(b) $\int_{\gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_{2,1}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\gamma_{2,2}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - 1 \ \mathrm{d}t + \int_0^1 1 + (1+t)^2 \ \mathrm{d}t = \frac{8}{3}$.
(c) $\int_{\gamma_3} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - (t^2+1) + 2t[t + (t^2+1)^2] \ \mathrm{d}t = 2$.

Entsprechend ergibt sich im Vektorfeld $\boldsymbol{w}$:

(a) $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - t - 1 + t + (1+t)^2 \ \mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.
(b) $\int_{\gamma_2} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_{2,1}} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\gamma_{2,2}} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - 1 \ \mathrm{d}t + \int_0^1 1 + (1+t)^2 \ \mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.
(c) $\int_{\gamma_3} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - (t^2+1) + 2t[t + (t^2+1)^2] \ \mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.

In der Tat hängt der Wert des Integrals $\int_\gamma \boldsymbol{w} \ \mathrm{d}s$ für eine beliebige Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und vom Endpunkt $\gamma(b)$ der Kurve ab, d. h. das Integral ist *wegunabhängig* im $\mathbb{R}^2$.

56.4 Das Gebiet G besteht aus zwei gedrehten Parabelbögen.

(a) Die zwei Kurven werden durch $\gamma_1(t) = (1 - \frac{1}{4}t^2, t)^\top$ und $\gamma_2(t) = (\frac{1}{2}(t^2-1), t)^\top$ parametrisiert ($t \in \mathbb{R}$). Für die Schnittpunkte dieser Kurven ergibt sich

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(t) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{2}(t^2-1) \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\sqrt{2}.$$

Der rechte Bogen von G ist daher $\gamma_1(t)$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$, der linke $\gamma_2(t)$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$. Um aus diesen zwei Kurven eine (aus zwei Stücken bestehende) zu machen, ist noch die Durchlaufrichtung von γ_2 mittels $t \mapsto (-t)$ anzupassen. G wird also parametrisiert durch $\gamma_1(t)$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$ und $\tilde{\gamma}_2(t) = (\frac{1}{2}(t^2-1), -t)^\top$, $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

(b)
$$\begin{aligned}
\oint_{\partial G} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s &= \int_{\gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\tilde{\gamma}_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1-\frac{1}{4}t^2)t \\ t^2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(t^2-1)(-t) \\ (-t)^2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} -\frac{3}{8}t^4 \ \mathrm{d}t = 2\Big[-\frac{3}{40}t^5\Big]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{3}{5}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

57 Gradientenfelder

57.1 Aufgaben

57.1 Bestimme den Wert des vektoriellen Kurvenintegrals $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$, wobei

$$\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x+2yz \\ y^2+2z \end{pmatrix} \text{ und} \gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin^2(t)+t \\ \cos(t)\sin(t)+\cos^2(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

57.2 Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y \\ y^2+x \end{pmatrix}.$$

(a) Gibt es zu $\boldsymbol{v}$ eine Stammfunktion $f(x,y)$?

(b) Man berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$ entlang

   (i) einer Geraden von $(0,1)$ nach $(1,2)$,

   (ii) der Parabel $y = x^2+1$ von $(0,1)$ nach $(1,2)$.

57.3 Gegeben sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz^3+6y \\ 6x-2yz \\ 3x^2z^2-y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$.

(b) Berechne das Kurvenintegral $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$ entlang der Spirale γ mit Parametrisierung $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)^\top$ für $t \in [0,2\pi]$.

57.4 Wir betrachten das folgende Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ und die Kurve γ:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} z^3+y^2\cos x \\ -4+2y\sin x \\ 2+3xz^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \tan t \\ \tan^2 t \\ \tan^3 t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}$ ein Gradientenfeld ist, und berechnen Sie eine Stammfunktion von $\boldsymbol{v}$ und damit das Kurvenintegral $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_57,

57.5 Gegeben sind das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ und die Kurve γ

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 3x^2y \\ x^3 + 2z^3 \\ 6yz^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi] .$$

Man berechne $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ und $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$.

57.2 Lösungen

57.1 Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend und $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ ist sowie

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} 2y - 2y \\ 0 - 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt, ist $\boldsymbol{v}$ ein Gradientenfeld. Das heißt, der Wert des Kurvenintegrals kann unabhängig vom Weg γ berechnet werden bzw. mittels einer Stammfunktion von f. Eine solche berechnen wir nun (beachte das Rezept):

$$f_x(x, y, z) = 2x + y \quad \Rightarrow \quad f(x, y, z) = x^2 + xy + g(y, z)$$

Weiter ist $f_y(x, y, z) = x + g_y(y, z) \overset{!}{=} x + 2yz$, also $g(y, z) = y^2 z + h(z)$ und damit

$$f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 z + h(z) .$$

Nun leiten wir nach z ab und erhalten $f_z(x, y, z) = y^2 + h_z(z) \overset{!}{=} y^2 + 2z$, also ist $h(z) = z^2 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ und

$$f(x, y, z) = x^2 + xy + y^2 z + z^2 + c .$$

Zum Rechnen wählen wir uns die Stammfunktion mit $c = 0$. Nun können wir das Integral auswerten, es gilt:

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = f\big(\gamma(2\pi)\big) - f\big(\gamma(0)\big) = f(2\pi, 1, 0) - f(0, 1, 0) = 4\pi^2 + 2\pi .$$

57.2 (a) Wir überprüfen, ob die Integrabilitätsbedingung für $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)^\top$ erfüllt ist, diese lautet

$$\frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial x} .$$

Diese ist aber offensichtlich nicht erfüllt, da $\frac{\partial v_1(x,y)}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial v_2(x,y)}{\partial x} = 1$.

Daher ist $\boldsymbol{v}$ kein Gradientenfeld, es existiert daher keine Stammfunktion f.

(b) Die Kurvenintegrale $\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$ berechnen sich wie folgt

(i) Die Parameterdarstellung der Geraden ist gegeben durch $x = t$, $y = 1 + t$. Die Endpunkte des Integrals $(0, 1)$ und $(1, 2)$ werden bei $t = 0$ bzw. $t = 1$ durchlaufen. Somit erhält man das Integral

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} x(t)^2 - y(t) \\ y(t)^2 + x(t) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 \left[t^2 - 1 - t + (1+t)^2 + t\right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 2(t^2 + t)\,\mathrm{d}t = \tfrac{2}{3}t^3 + t^2\Big|_0^1 = \tfrac{5}{3}\,.$$

(ii) Die Parameterdarstellung der Parabel ist gegeben durch $x = t$, $y = 1 + t^2$ wobei die Endpunkte bei $t = 0$ bzw. $t = 1$ durchlaufen werden. Durch Einsetzen der Parametrisierung ergibt sich das Integral

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} x(t)^2 - y(t) \\ y(t)^2 + x(t) \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^1 -1 + \big((1+t^2)^2 + t\big)2t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (2t^5 + 4t^3 + 2t^2 + 2t - 1)\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{3}t^6 + t^4 + \tfrac{2}{3}t^3 + t^2 - t\Big|_0^1 = 2\,.$$

57.3 (a) Für $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}$ erhält man

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -2y + 2y \\ -6xz^2 + 6xz^2 \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

(b) Zur Berechnung des Kurvenintegrals bieten sich zwei Möglichkeiten an.

Methode 1: Da $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$, ist das Integral zwischen dem Anfangspunkt $\gamma(0) = (1, 0, 0)^\top$ und dem Endpunkt $\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)^\top$ der Kurve wegunabhängig. Deshalb kann man einen einfacheren Weg, z. B. $\tilde{\gamma}$ mit Parametrisierung $(1, 0, t)^\top$ für $t \in [0, 2\pi]$, wählen. Für diesen Weg erhält man das Kurvenintegral

$$\int_{\tilde{\gamma}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2t^3 \\ 6 \\ 3t^2 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 3t^2\,\mathrm{d}t = (2\pi)^3\,.$$

Methode 2: Da $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0$, existiert eine Stammfunktion $f(x, y, z)$, so dass $\boldsymbol{v} = \nabla f$. Diese Stammfunktion berechnet man mit unserem Rezept, wir zeigen auch mal eine modifizierte Version: Es gilt

$$\partial_x f = 2xz^3 + 6y\,, \quad \partial_y f = 6x - 2yz\,, \quad \partial_z f = 3x^2z^2 - y^2\,,$$

woraus sich nach der Integration folgende Gleichungen ergeben

$$f = x^2 z^3 + 6xy + f_1(y,z), f = 6xy - y^2 z + f_2(x,z), f = x^2 z^3 - y^2 z + f_3(x,y).$$

Ein Vergleich liefert die Stammfunktion

$$f(x,y,z) = x^2 z^3 + 6xy - y^2 z$$

und somit das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) = (2\pi)^3 .$$

57.4 Das stetig differenzierbare Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ ist auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^3$ erklärt, außerdem gilt $\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, sodass eine Stammfunktion auf $\mathbb{R}^3$ existiert. Wir ermitteln eine Stammfunktion $f(\boldsymbol{x})$: Durch Integration der Komponentenfunktionen v_1, v_2, v_3 nach den entsprechenden Variablen x, y, z erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= xz^3 + y^2 \sin x + c(y,z) , \\ f(\boldsymbol{x}) &= -4y + y^2 \sin x + c(x,z) , \\ f(\boldsymbol{x}) &= 2z + xz^3 + c(x,y) . \end{aligned}$$

Fasst man alle drei Ergebnisse zusammen, so ergibt sich (mit der Integrationskonstanten $c = 0$)

$$f(\boldsymbol{x}) = xz^3 + y^2 \sin x - 4y + 2z$$

und somit

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = f(\gamma(\tfrac{\pi}{4})) - f(\gamma(0)) = f(1,1,1) - f(0,0,0) = \sin(1) - 1 .$$

57.5 Wir beginnen zunächst mit der Rotation:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 6z^2 - 6z^2 \\ 0 - 0 \\ 3x^2 - 3x^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0} .$$

Die Rotation verschwindet also auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{R}^3$, auf dem das stetig differenzierbare Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ erklärt ist. Somit besitzt $\boldsymbol{v}$ eine Stammfunktion f. Die Stammfunktion erhalten wir mit unserem Rezept als

$$f(x,y,z) = x^3 y + 2yz^3 .$$

Wegen $\gamma(0) = (0,-1,0)^\top$ und $\gamma(\pi) = (0,1,\pi)^\top$ gilt für das gesuchte Integral

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = f(0,1,\pi) - f(0,-1,0) = 2\pi^3 .$$

58 Bereichsintegrale

58.1 Aufgaben

58.1 Es bezeichne D den von $x = y^2$ und $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ eingeschlossenen Bereich im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie das Doppelintegral $\iint_B (x+y)\,\mathrm{d}F$ auf zwei Arten, indem Sie zum einen $\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ und zum anderen $\mathrm{d}F = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ benutzen.

58.2 Berechnen Sie das Integral der Funktion $f(x, y) = x^2 y$ über das Gebiet

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le \tfrac{1}{2}x,\ x \le y^2 + 1,\ x \le 2\}$$

für beide Integrationsreihenfolgen.

58.3 Bestimmen Sie den Flächeninhalt der durch die Kurven

$$y^2 + x - 1 = 0 \ \text{ und } \ y^2 - x - 1 = 0$$

eingeschlossenen Fläche.

58.2 Lösungen

58.1 Man überlegt sich zuerst, dass sich die Graphen $x = y^2$ und $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ in den Punkten $(1, -1)$ und $(9, 3)$ schneiden. Zu berechnen ist das Integral über eine *flügelartige* Fläche $B \subseteq \mathbb{R}^2$. Wir werten das Integral zunächst als Doppelintegral mit $\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ aus: Hier lässt sich B beschreiben durch $-1 \le y \le 3$ und $y^2 \le x \le 2y + 3$, womit wir

$$\begin{aligned}
\iint_B (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-1}^{3}\int_{y^2}^{2y+3} (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{3} \left[\tfrac{1}{2}x^2 + xy\right]_{y^2}^{2y+3} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{3} \left[-\tfrac{1}{2}y^4 - y^3 + 4y^2 + 9y + \tfrac{9}{2}\right] \mathrm{d}y \\
&= \left[-\tfrac{1}{10}y^5 - \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{4}{3}y^3 + \tfrac{9}{2}y^2 + \tfrac{9}{2}y\right]_{-1}^{3} = \tfrac{704}{15}
\end{aligned}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_58,

erhalten. Bei der Auswertung des Integrals als Doppelintegral mit $\mathrm{d}F = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ist eine Unterteilung von B in zwei Normalbereiche notwendig:

$$\begin{aligned}
\iint_B (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^9 \int_{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} (x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[xy + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x + \int_1^9 \left[xy + \tfrac{1}{2}y^2\right]_{\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 2x^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_1^9 \left[x^{\frac{3}{2}} + \tfrac{11}{4}x - \tfrac{5}{8}x^2 - \tfrac{9}{8}\right] \mathrm{d}x \\
&= \left[\tfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + \left[\tfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \tfrac{11}{8}x^2 - \tfrac{5}{24}x^3 - \tfrac{9}{8}x\right]_1^9 = \tfrac{704}{15}\,.
\end{aligned}$$

58.2 Das Gebiet wird in der y-Richtung begrenzt durch

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in [0,1], \\ \sqrt{x-1} & \text{für } x \in [1,2], \end{cases} \quad \text{und} \quad o(x) = \tfrac{1}{2}x\,,\ x \in [0,2]\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\iint_B x^2 y\,dF &= \int_0^2 \left(\int_{u(x)}^{o(x)} x^2 y\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\, \tfrac{1}{2}(o(x)^2 - u(x)^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 \tfrac{1}{8}x^4\,\mathrm{d}x - \int_1^2 x^2\, \tfrac{1}{2}(x-1)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{40}2^5 - \left[\tfrac{1}{8}x^4 - \tfrac{1}{6}x^3\right]_1^2 \\
&= \tfrac{4}{5} - 2 + \tfrac{8}{6} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{96-240+160+15-20}{120} = \tfrac{11}{120}\,.
\end{aligned}$$

Nun zur anderen Reihenfolge. Hier erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_B x^2 y\,\mathrm{d}F &= \int_0^1 \left(\int_{u(y)}^{o(y)} x^2 y\ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y \left(\tfrac{1}{3}o(y)^3 - \tfrac{1}{3}u(y)^3 \right)\ \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{3} \int_0^1 \left(y(y^2+1)^3 - 8y^4 \right) \mathrm{d}y = \tfrac{1}{3} \int_0^1 \left(y^7 + 3y^5 + 3y^3 + y - 8y^4 \right) \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{8}{15} = \tfrac{5+20+30+20-64}{120} = \tfrac{11}{120}\,.
\end{aligned}$$

58.3 Wir lösen die beiden Kurven nach x auf und erhalten die Funktionen $o(y) = 1-y^2$ und $u(y) = y^2-1$, die sich auf der y-Achse für $y = \pm 1$ kreuzen. Daher erhalten wir den Flächeninhalt F des betrachteten Bereichs durch Berechnen des folgenden Integrals

$$F = \int_{y=-1}^1 \int_{x=y^2-1}^{1-y^2} 1\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y=-1}^1 x\Big|_{x=y^2-1}^{1-y^2}\ \mathrm{d}y = \int_{y=-1}^1 2 - 2y^2\ \mathrm{d}y = \tfrac{8}{3}\,.$$

59 Die Transformationsformel

59.1 Aufgaben

59.1 Zu bestimmen ist das Bereichsintegral

$$\int_D \arctan \tfrac{x-y}{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\,, \quad \text{wobei} \quad D = \{(x,y)^\top \mid x^2 + y^2 \le 2\}\,.$$

(a) Führen Sie die Koordinatentransformation

$$x = s\,(\cos t + \sin t), \quad y = s\,(\cos t - \sin t) \quad \text{mit} \quad s \in [0, \infty[, \quad t \in [0, 2\pi[$$

im gegebenen Integral durch und geben Sie das Bereichsintegral in den neuen Koordinaten an.

(b) Berechnen Sie das Bereichsintegral.

59.2 Man berechne das Bereichsintegral

$$\int_D \mathrm{e}^{(x+y)/(x-y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

wobei D der trapezförmige Bereich mit den Eckpunkten $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ und $(0,-1)$ sei.
Hinweis: Man führe die Koordinatentransformation $s = x + y$, $t = x - y$ durch.

59.3 Das für viele Anwendungen wichtige Fehlerintegral

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$$

kann nicht über eine analytisch berechnete Stammfunktion bestimmt werden. Um dennoch seinen Wert exakt zu bestimmen, kann folgender Umweg über Bereichsintegrale genommen werden:

(a) Man berechne zuerst das Bereichsintegral

$$\mathcal{K}_R = \int_{D_R} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{e}^{-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

bezüglich des ersten Quadranten einer Kreisscheibe D_R vom Radius R, d.h. $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \le R,\ x, y \ge 0\}$.

(b) Wie man sich leicht überzeugt, gilt für das uneigentliche Integral

$$\mathcal{I}^2 = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x \int_0^A \mathrm{e}^{-y^2} \, \mathrm{d}y = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \int_0^A \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{e}^{-y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_59,

Man schätze das Integral

$$\mathcal{I}_A^2 = \int_0^A \int_0^A \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

von oben und unten durch Bereichsintegrale $\mathcal{K}_R$ ab und berechne hieraus das Fehlerintegral per $A \to \infty$.

59.4 Es seien R und α positiv. Die kreisförmige Platte $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq R^2\}$ eines Kondensators werde durch Elektronen aufgeladen, welche sich gemäß der Flächenladungsdichte $\varrho(x,y) = -\alpha(R^2 - x^2 - y^2)$ auf B verteilen.

(a) Berechnen Sie die Gesamtladung $Q = \iint_B \varrho\,\mathrm{d}F$ der Platte direkt.

(b) Benutzen Sie Polarkoordinaten, um die Rechnung zu vereinfachen.

59.5 Es sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 4 \geq x^2 + y^2 \geq 1, x \geq y \geq 0\}$. Berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten das Integral $\iint_D \frac{y}{x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

59.6 Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Nordhalbkugel $D = \{(x,y,z) \,|\, x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \text{ mit } z \geq 0\}$ mit der Dichte $\rho(x,y,z) = z$.

59.7 Man betrachte den Kegel K im $\mathbb{R}^3$ mit der Spitze $(0,0,3)^\top$ und der Grundfläche $x^2 + y^2 \leq 1$ in der Ebene $z = 0$. Die (inhomogene) Massendichte ρ von K sei gegeben durch $\rho(x,y,z) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$.

(a) Bestimmen Sie mithilfe von Zylinderkoordinaten das Volumen V und die Gesamtmasse M von K.

(b) Bestimmen Sie den Massenschwerpunkt des Kegels.

59.2 Lösungen

59.1 (a) Die Jacobimatrix der Koordinatentransformation lautet

$$J = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t & s\,(-\sin t + \cos t) \\ \cos t - \sin t & s\,(-\sin t - \cos t) \end{pmatrix}$$

und man erhält die Jacobideterminante $\det J = -2s$. Der Bereich D transformiert sich wie folgt

$$x^2 + y^2 = s^2\,(\cos t + \sin t)^2 + s^2\,(\cos t - \sin t)^2 \leq 2 \;\text{ liefert }\; 0 \leq s \leq 1\,,$$

woraus sich ein Normalgebiet $B = \{(s,t)^\top \,|\, 0 \leq s \leq 1,\, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ ergibt. Das Bereichsintegral in den neuen Koordinaten ist somit

$$\int_B \arctan \tfrac{2s\sin t}{2s\cos t}\, 2s\;\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \int_B 2st\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,.$$

(b) Das Bereichsintegral berechnet sich wie folgt

$$\int_B 2st \; \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 2st \; \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = 2\pi^2 .$$

59.2 Aufgelöst nach x, y erhält man die Rücktransformation

$$x = \tfrac{1}{2}(s+t), \qquad y = \tfrac{1}{2}(s-t)$$

aus der sich leicht die entsprechende Jacobideterminante berechnen lässt:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{2} .$$

Der ursprüngliche Integrationsbereich wird durch die Geraden

$$y = x - 1, \quad y = x - 2, \quad y = 0 \quad \text{sowie die } y\text{-Achse}$$

begrenzt. Diese Geraden transformieren sich in die Geraden

$$t = 1, \quad t = 2, \quad t = s, \quad t = -s,$$

woraus sich ein Normalbereich

$$B = \{(s,t) \,|\, 1 \le t \le 2, -t \le s \le t\}$$

ergibt. Somit erhält man folgende Integraltransformation

$$\int_D \mathrm{e}^{(x+y)/(x-y)} \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_B \mathrm{e}^{s/t} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} \right| \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \int_{t=1}^{2} \int_{s=-t}^{t} \mathrm{e}^{s/t} \; \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t .$$

Das transformierte Integral kann man schließlich leicht berechnen

$$\tfrac{1}{2} \int_{t=1}^{2} \int_{s=-t}^{t} \mathrm{e}^{s/t} \; \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2} \int_{t=1}^{2} t \, \mathrm{e}^{s/t} \Big|_{s=-t}^{t} \; \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}}{2} \int_1^2 t \; \mathrm{d}t = \tfrac{3}{4}(\mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^{-1}) .$$

59.3 (a) Da der Integrand sphärische Symmetrie besitzt, kann das Bereichsintegral einfach in Polarkoordinaten berechnet werden.

$$\begin{aligned} \int_{D_R} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{e}^{-y^2} \; \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^R \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r^2} \; r \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r = \frac{\pi}{2} \int_0^R \mathrm{e}^{-r^2} \; r \; \mathrm{d}r \\ &= -\frac{\pi}{4} \, \mathrm{e}^{-r^2} \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} \left(1 - \mathrm{e}^{-R^2} \right) . \end{aligned}$$

(b) Man wähle Kreissegmente D vom Radius A und $\sqrt{2}A$. Das erste liegt innerhalb des Integrationsbereiches von $\mathcal{I}_A^2$, während das zweite diesen Bereich komplett einschließt. Da der Integrand $\mathrm{e}^{-r^2} > 0$ ist, gilt die Abschätzung

$$\mathcal{K}_A \le \mathcal{I}_A^2 \le \mathcal{K}_{\sqrt{2}A} .$$

Nun kann man den Grenzübergang $A \to \infty$ durchführen:

$$\lim_{A\to\infty} \mathcal{K}_A \le \lim_{A\to\infty} \mathcal{I}_A^2 \le \lim_{A\to\infty} \mathcal{K}_{\sqrt{2}A}\,,$$

wobei sich für die untere und obere Schranke der gleiche Grenzwert ergibt:

$$\lim_{A\to\infty} \mathcal{K}_A = \lim_{A\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-A^2}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ und } \lim_{A\to\infty} \mathcal{K}_{\sqrt{2}A} = \lim_{A\to\infty} \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2A^2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Somit erhalten wir für das Fehlerintegral $\mathcal{I}$:

$$\lim_{A\to\infty} \mathcal{I}_A^2 = \frac{\pi}{4} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

59.4 (a) Die Gesamtladung der kreisförmigen Kondensatorplatte B lässt sich hier als Doppelintegral über die Flächenladungsdichte $\varrho(x,y) = -\alpha(R^2-x^2-y^2)$ für $(x,y) \in B$ ausrechnen: Kürzt man $\omega(x) = \sqrt{R^2-x^2}$ ab, so folgt

$$\begin{aligned}
\iint_B \varrho \,\mathrm{d}F &= -\alpha \int_{x=-R}^{R} \int_{y=-\omega(x)}^{\omega(x)} \left(R^2-x^2-y^2\right) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= -\alpha \int_{x=-R}^{R} 2\int_{y=0}^{\omega(x)} \left(R^2-x^2-y^2\right) \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= -\alpha \int_{x=-R}^{R} 2\left[\left(R^2-x^2\right)y - \frac{1}{3}y^3\right]_{y=0}^{\omega(x)} \mathrm{d}x \\
&= -\alpha \int_{x=-R}^{R} \frac{4}{3}\omega(x)^3 \,\mathrm{d}x \\
&= -\alpha \left[\frac{1}{3}\omega(x)^3 + \frac{1}{2}R^2 x\,\omega(x) + \frac{1}{2}R^4 \arcsin\frac{x}{R}\right]_{x=-R}^{R} \\
&= -\alpha R^4 \arcsin 1 = -\frac{1}{2}\alpha\pi R^4,
\end{aligned}$$

wobei wir eine Formelsammlung und diverse Symmetrien benutzt haben.

(b) Die Rechnung in (a) lässt sich mit Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ über $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ signifikant abkürzen:

$$\begin{aligned}
\iint_B \varrho \,\mathrm{d}F &= -\alpha \int_{r=0}^{R} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(R^2-r^2\right) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = -\alpha \int_{r=0}^{R} 2\pi\left(R^2-r^2\right) r\,\mathrm{d}r \\
&= -\alpha\pi \left[R^2 r^2 - \frac{1}{2}r^4\right]_{r=0}^{R} = -\frac{1}{2}\alpha\pi R^4\,.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis ist natürlich identisch zu (a), aber wir haben hier weder die Formelsammlung noch komplizierte Transformationen benötigt (oft ist es günstig, die natürliche Symmetrie eines Problems zu berücksichtigen).

59.5 Die Menge D beschreibt ein Kreissegment im rechten, oberen Quadranten $(x, y \geq 0)$ mit Außenradius 2 und Innenradius 1. Durch die Bedingung $x \geq y$ wird nur ein Achtel Kreissegment beschrieben.

Mit $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ lässt sich D schreiben als

$$B = \left\{(r, \varphi) \,|\, 1 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

und es gilt $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. Somit berechnet sich die Fläche von D wie folgt, wobei wir die Substitution $u = \cos(\varphi)$, $\mathrm{d}u = -\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$ benutzen:

$$\begin{aligned} F(D) &= \int_D \frac{y}{x^4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \left(\int_{r=1}^{2} \frac{r\sin(\varphi)}{r^4\cos^4(\varphi)} r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \frac{\sin(\varphi)}{\cos^4(\varphi)} \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=1}^{2} \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_{u=1}^{\sqrt{2}/2} -\frac{1}{u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{u^3}\right]_{u=1}^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2} - 1\right). \end{aligned}$$

59.6 Wir benutzen Kugelkoordinaten und erhalten für die Masse M der Kugel:

$$\begin{aligned} M &= \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r\,\cos\vartheta\, r^2 \sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \frac{R^4}{4} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \cos\vartheta \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \frac{\pi R^4}{2}\left[\frac{\sin^2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi R^4}{4}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir die Koordinaten s_1, s_2, s_3 des Schwerpunkts S. Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt von D auf der z-Achse. Damit haben wir schon $s_1 = s_2 = 0$. Und für die z-Komponente berechnen wir das Integral:

$$s_3 = \frac{1}{M}\int_{\vartheta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} r^2\cos^2\vartheta\, r^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{M}\frac{2\pi R^5}{5}\left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \frac{1}{M}\frac{2\pi R^5}{15}.$$

Setzen wir M ein, so erhalten wir $s_3 = {}^{8R}/_{15}$.

59.7 Zur Beschreibung des Kegels K bieten sich Zylinderkoordinaten an: Mit der Transformation $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = z$ erhält man K für $z \in [0, 3]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, 1 - \frac{z}{3}]$.

(a) Mit Hilfe der Transformation in Zylinderkoordinaten ergibt sich für das Volumen V von K:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_K \mathrm{d}V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{3}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-\frac{z}{3}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{2} - \frac{1}{3}z + \frac{1}{18}z^2\,\mathrm{d}z = 2\pi\left[\frac{1}{2}z - \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{54}z^3\right]_0^3 = \pi. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der angegebenen Massendichte $\rho(x,y,z) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ erhalten wir für die Gesamtmasse M von K:

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_K \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{3}} \rho\,(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{3}} (1-r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^{1-\frac{z}{3}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi \int_0^3 \frac{1}{6} - \frac{1}{18}z^2 + \frac{1}{81}z^3\,\mathrm{d}z = 2\pi\left[\frac{1}{6}z - \frac{1}{54}z^3 + \frac{1}{324}z^4\right]_0^3 = \frac{\pi}{2}\,.
\end{aligned}$$

(b) Nun berechnen wir noch die Komponenten s_1, s_2, s_3 des Massenschwerpunkts S von K:

$$\begin{aligned}
s_1 &= \frac{1}{M}\iiint_K x\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \frac{2}{\pi}\int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{3}} (1-r)\,r\,\cos\varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^3 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{1-\frac{z}{3}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^3 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{1-\frac{z}{3}} \Big[\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} \mathrm{d}z = 0,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt aus der Beziehung $[\sin\varphi]_0^{2\pi} = 0$ folgt. Entsprechend erhält man

$$s_2 = \frac{1}{M}\iiint_K y\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \frac{2}{\pi}\int_0^3 \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^{1-\frac{z}{3}} \Big[-\cos\varphi\Big]_0^{2\pi} \mathrm{d}z = 0.$$

Schließlich gilt

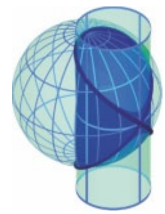
$$\begin{aligned}
s_3 &= \frac{1}{M}\iiint_K z\,\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \frac{2}{\pi}\int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-\frac{z}{3}} (1-r)\,z\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^3 \int_0^{2\pi} z\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right]_0^{1-\frac{z}{3}} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = 4\int_0^3 \frac{1}{6}z - \frac{1}{18}z^3 + \frac{1}{81}z^4\,\mathrm{d}z \\
&= 4\left[\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{72}z^4 + \frac{1}{405}z^5\right]_0^3 = \frac{9}{10}\,.
\end{aligned}$$

Man erhält als Massenschwerpunkt von K den Punkt $(s_1, s_2, s_3)^\top = (0, 0, \frac{9}{10})^\top$.

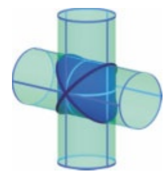
60 Flächen und Flächenintegrale

60.1 Aufgaben

60.1 Man berechne den Flächeninhalt des Gebiets der Oberfläche der Kugel $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$ welches durch den Zylinder $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ ausgeschnitten wird. Siehe nebenstehende Abbildung.



60.2 Man berechne den Flächeninhalt der Oberfläche des Schnitts der beiden Zylinder $x^2+z^2 \le a^2$ und $y^2+z^2 \le a^2$. Siehe nebenstehende Abbildung.



60.3 Man berechne den Flächeninhalt der Schraubenfläche

$$\phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \qquad r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi]\,.$$

60.4 Gegeben sei der Zylinder Z der Höhe $h>0$ über dem in der x-y-Ebene gelegenen Kreis mit Radius $R>0$ um den Ursprung.

(a) Beschreiben Sie den Zylindermantel von Z in geeigneten Koordinaten.

(b) Berechnen Sie den Fluss des Vektorfelds $\boldsymbol{v}$ durch die Mantelfläche von Z von innen nach außen, wobei

$$\boldsymbol{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y,z)^\top \mapsto (xz+y, yz-x, z)^\top\,.$$

60.2 Lösungen

60.1 Da die x-y-Ebene sowohl für die Kugel als auch für den Zylinder eine Spiegelebene ist, genügt es die obere Halbkugel zu betrachten. Die Oberfläche der Halbkugel lässt sich durch $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ darstellen. Wir bezeichnen das gesuchte Flächenstück mit ϕ und dessen Definitionsbereich mit B und erhalten damit

$$\iint_\phi \mathrm{d}F = \iint_B \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_60,

Aus Gründen der Symmetrie beschränkt man sich auf den ersten Quadranten der xy-Ebene und führt Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Die Zylindergleichung $x^2 + y^2 = ax$ ausgedrückt in Polarkoordinaten wird zu $r = a\cos\varphi$. Somit kann das Flächenintegral über B einfach in Polarkoordinaten formuliert werden, es gilt:

$$\begin{aligned}\iint_B \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{a\cos\varphi}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} -a\sqrt{a^2-r^2}\Big|_0^{a\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/2} a^2\big(1-\sin\varphi\big)\,\mathrm{d}\varphi = a^2\big(\tfrac{\pi}{2}-1\big).\end{aligned}$$

Die aus der Kugeloberfläche ausgeschnittene Gesamtfläche ist damit $a^2\big(2\pi - 4\big)$.

60.2 Aus Symmetriegründen kann man sich auf die Fläche über dem ersten Oktanten der x-y-Ebene ($0 \le z$) beschränken. Die Oberfläche ist hier gegeben durch $x^2 + z^2 = a^2$. Hieraus ergibt sich die Parametrisierung

$$\phi(u,v) = \begin{pmatrix} v \\ u \\ \sqrt{a^2-v^2}\end{pmatrix}, \qquad u \in [0,a],\ v \in [0,a],\ u \le v\,.$$

und somit

$$\phi_u(u,v) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \phi_v(u,v) = \begin{pmatrix}1\\0\\-\frac{t}{\sqrt{a^2-v^2}}\end{pmatrix} \ \text{ und }\ \phi_u(u,v)\times\phi_v(u,v) = \begin{pmatrix}-\frac{v}{\sqrt{a^2-v^2}}\\0\\-1\end{pmatrix}$$

mit

$$|\phi_u(u,v)\times\phi_v(u,v)| = \frac{a}{\sqrt{a^2-v^2}}\,.$$

Der Flächeninhalt des ersten Oktanten beträgt also

$$\iint_\phi \mathrm{d}F = \int_0^a\int_0^v \frac{a}{\sqrt{a^2-v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = a\int_0^a \frac{v}{\sqrt{a^2-v^2}}\,\mathrm{d}v = -a\sqrt{a^2-v^2}\Big|_0^a = a^2\,.$$

Somit ist der Flächeninhalt der gesamten Oberfläche des Schnitts $16\,a^2$.

60.3 Aus der gegebenen Parametrisierung folgt

$$\phi_r(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix},\ \phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix}-r\sin\varphi\\ r\cos\varphi\\ 1\end{pmatrix}\ \text{ und }\ \phi_r(r,\varphi)\times\phi_\varphi(r,\varphi) = \begin{pmatrix}\sin\varphi\\ -\cos\varphi\\ r\end{pmatrix}$$

und somit

$$|\phi_r(r,\varphi)\times\phi_\varphi(r,\varphi)| = \sqrt{1+r^2}\,.$$

Hieraus ergibt sich der Flächeninhalt

$$\iint_\phi \mathrm{d}F = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+r^2}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, \mathrm{d}r.$$

Zur Berechnung des verbliebenen Integrals führt man die Substitution $r = \sinh t$ durch. Da $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ und $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \cosh t$ gilt, erhält man

$$\int_0^1 \sqrt{1+r^2}\, \mathrm{d}r = \int_0^a \cosh^2 t\, \mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad a = \operatorname{arsinh} 1\,.$$

Partielle Integration ergibt unter Verwendung von $\sinh^2 t = -1 + \cosh^2 t$:

$$\int_0^a \cosh^2 t\, \mathrm{d}t = \sinh t\, \cosh t\Big|_0^a - \int_0^a \sinh^2 t\, \mathrm{d}t = \sqrt{2} + a - \int_0^a \cosh^2 t\, \mathrm{d}t\,,$$

woraus folgt

$$\int_0^a \cosh^2 t\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\big(\sqrt{2}+a\big) \quad \text{und damit} \quad \iint_\phi \mathrm{d}F = \pi\big(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1\big)\,.$$

60.4 (a) Es bezeichne M die Mantelfläche des Zylinders Z. Zur Beschreibung von M bietet sich die Abbildung

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, h] \to \mathbb{R}^3, \quad (u, v)^\top \mapsto (R\cos u, R\sin u, v)^\top$$

an. Wir schreiben also

$$M = \left\{(R\cos u, R\sin u, v)^\top \in \mathbb{R}^3 \,|\, (u, v)^\top \in D\right\}\,,$$

wobei $D = [0, 2\pi] \times [0, h]$.

(b) Der Fluss des Vektorfelds $\boldsymbol{v}$ durch die Mantelfläche M von Z von innen nach außen ist das vektorielle Flächenintegral von $\boldsymbol{v}$ über M, wobei $\phi_u \times \phi_v$ nach außen zeigt:

$$\iint_M \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \iint_D \boldsymbol{v}(\phi(u, v))^\top\, (\phi_u \times \phi_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,.$$

Wir berechnen

$$\phi_u = \begin{pmatrix} -R\sin u \\ R\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$$

und stellen fest, dass $\phi_u \times \phi_v$ nach außen zeigt (wäre das nun nicht der Fall, so würde man $\phi_v \times \phi_u$ wählen; hierbei wird die Orientierung umgedreht). Damit erhalten wir:

$$\iint_M \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^h \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} Rv\, \cos u + R\sin u \\ Rv\, \sin u - R\cos u \\ v \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} R\cos u \\ R\sin u \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = R^2 h^2 \pi\,.$$

61 Integralsätze I

61.1 Aufgaben

61.1 Man verifiziere für das Vektorfeld $\boldsymbol{v}(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)^\top$ und das Gebiet B, das durch $y = x^2$ und $y^2 = x$ begrenzt wird, den Satz von Green.

61.2 Man bestätige den Satz von Gauß in der Ebene für die Funktion $u(x,y) = (x^2 + y^2)^{5/2}$:

$$\iint_B \Delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \langle \nabla u, n \rangle \, \mathrm{d}s \,,$$

wobei B eine Kreisscheibe vom Radius R sei.

61.2 Lösungen

61.1 Die beiden Kurven $y = x^2$ und $y^2 = x$ schneiden sich in $(0,0)$ und $(1,1)$. Das Kurvenintegral entlang des Randes muss entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen werden. Entlang der Kurve $x = t$, $y = t^2$, $t \in [0,1]$, erhält man das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left[\big(2x(t)y(t) - x(t)^2\big)\dot{x}(t) + \big(x(t) + y(t)^2\big)\dot{y}(t)\right] \mathrm{d}t &= \int_0^1 \left[2t^3 - t^2 + (t + t^4)2t\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[2t^3 + t^2 + 2t^5\right] \mathrm{d}t = \tfrac{7}{6}\end{aligned}$$

und entlang der Kurve $x = (1-t)^2$, $y = 1 - t$ $(t \in [0,1])$ das Integral

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \left[\big((2x(t)y(t) - x(t)^2\big)\dot{x}(t) + \big(x(t) + y(t)^2\big)\dot{y}(t)\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[\big(2(1-t)^3 - (1-t)^4\big)(-2)(1-t) - 2(1-t)^2\right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left[2(1-t)^5 - 4(1-t)^4 - 2(1-t)^2\right] \mathrm{d}t \\ &= -\tfrac{1}{3}(1-t)^6 + \tfrac{4}{5}(1-t)^5 + \tfrac{2}{3}(1-t)^3 \Big|_0^1 = \tfrac{1}{3} - \tfrac{4}{5} - \tfrac{2}{3} = -\tfrac{17}{15}\,.\end{aligned}$$

Somit ergibt das gesamte Kurvenintegral $\frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}$.

Der Satz von Green behauptet nun die Identität dieses Kurvenintegrals mit dem Gebietsintegral

$$\int_B \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - x^2)\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_B (1 - 2x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \,.$$

Um dieses Integral zu berechnen, beschreiben wir B als Normalbereich:

$$B = \{(x,y) \,|\, 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_61,

Damit ergibt sich der Wert

$$\begin{aligned}\int_B (1-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(y-2xy\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(\sqrt{x}-2x^{3/2}-x^2+2x^3\right)\mathrm{d}x = \tfrac{2}{3}x^{3/2}-\tfrac{4}{5}x^{5/2}-\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x^4\Big|_0^1 = \tfrac{1}{30}\,,\end{aligned}$$

womit der Satz von Green bestätigt ist.

61.2 Zuerst berechne man die benötigten Ableitungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= 5x(x^2+y^2)^{3/2}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 5y(x^2+y^2)^{3/2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 15x^2(x^2+y^2)^{1/2}+5(x^2+y^2)^{3/2}\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 15y^2(x^2+y^2)^{1/2}+5(x^2+y^2)^{3/2}\end{aligned}$$

und somit ist

$$\Delta u = 15(x^2+y^2)(x^2+y^2)^{1/2}+10(x^2+y^2)^{3/2} = 25(x^2+y^2)^{3/2}\,.$$

Der nach außen deutende Normalenvektor von ∂B ist

$$n(x,y) = \begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix},$$

womit sich das folgende Skalarprodukt ergibt:

$$\langle \nabla u,\, n\rangle = \begin{pmatrix}5x(x^2+y^2)^{3/2}\\ 5y(x^2+y^2)^{3/2}\end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{pmatrix} = 5(x^2+y^2)^2\,.$$

Aufgrund der sphärischen Symmetrie von B bietet sich zur Berechnung der Integrale eine Transformation in Polarkoordinaten an. Für das Bereichsintegral erhält man

$$\iint_B \Delta u\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^R \int_0^{2\pi} 25r^3\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 50\pi \int_0^R r^4\,\mathrm{d}r = 10\pi R^5.$$

Der Rand von B lässt sich in Polarkoordinaten einfach parametrisieren. Für den Kreisbogen gilt $s = R\varphi$ und somit ergibt sich für das Randintegral

$$\oint_{\partial B} \langle \nabla u, n\rangle\ \mathrm{d}s = \oint_{\partial B} 5(x^2+y^2)^2\ \mathrm{d}s = 5\oint_{\partial B} r^4\ \mathrm{d}s = 5R^5 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 10\pi R^5.$$

Damit ist der Satz von Gauß für dieses Beispiel verifiziert.

62 Integralsätze II

62.1 Aufgaben

62.1 Leiten Sie mithilfe der Integralsätze aus der folgenden differentiellen Form der **Maxwell-Gleichungen** die integrale Darstellung her:

- $\operatorname{rot}(H) - \dot{D} = j$,
- $\operatorname{rot}(E) + \dot{B} = 0$,
- $\operatorname{div}(D) = \rho$,
- $\operatorname{div}(B) = 0$.

62.2 Zeigen Sie, dass der ebene Satz von Green ein Spezialfall des Satzes von Stokes ist.

62.3 Man bestätige den Satz von Stokes

$$\iint_\phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \oint_{\partial\phi} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3y \\ -xz \\ yz^2 \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Fläche des Paraboloids $2z = x^2 + y^2$ mit negativer z-Komponente des Flächennormalenvektors darstellt, welches durch die Ebene $z = 2$ mit dem Rand $\partial\phi$ begrenzt ist.

62.4 Gegeben sind das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ und die Fläche ϕ

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ xz \\ xy \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ \text{ und } \ \phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \ \varphi \in [0, 2\pi], \ \vartheta \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right].$$

Man berechne mit Hilfe des Satzes von Stokes das das Flächenintegral $\iint_\phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$.

62.5 Man berechne mit Hilfe des Divergenzsatzes von Gauß das Flächenintegral

$$\iint_\phi \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s \quad \text{für das Vektorfeld} \quad \boldsymbol{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z^2 - x \\ -xy \\ 3z \end{pmatrix},$$

wobei ϕ die Oberfläche des Gebietes B ist, welches durch die Fläche $z = 4 - y^2$ und die drei Ebenen $x = 0$, $x = 3$, $z = 0$ begrenzt ist.

62.6 Zu festem $R > 0$ werden mittels

$$T : [0, R] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi \\ \varrho\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_62,

Toruskoordinaten eingeführt. Bestimmen Sie

(a) die Punkte des $\mathbb{R}^3$, die sich dadurch darstellen lassen,

(b) den Flächeninhalt des Torus $T_R^r = T([0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$ mit $r \in [0, R]$,

(c) den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, durch die Oberfläche von T_R^r,

(d) den Fluss des Vektorfeldes $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, durch die Oberfläche von T_R^r mit Hilfe des Satzes von Gauß.

62.2 Lösungen

62.1 Es bezeichnen

- E das elektrische Feld,
- D die Verschiebungsdichte,
- B die Induktionsdichte,
- H das magnetische Feld,
- ρ die Ladungsdichte (Ladung pro Volumen),
- j die Stromdichte (Strom pro Fläche).

Es sei ϕ eine Fläche mit dem Rand $\partial\phi$. Integration der 1. Gleichung liefert:

$$\iint_\phi \operatorname{rot}(H)\, \mathrm{d}s - \iint_\phi \dot{D}\, \mathrm{d}s = \iint_\phi j\, \mathrm{d}s \;\Leftrightarrow\; \boxed{\int_{\partial\phi} H\, \mathrm{d}s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\phi D\, \mathrm{d}s = I}$$

Hierbei bezeichnet I den Strom. Analog für die 2. Gleichung:

$$\iint_\phi \operatorname{rot}(E)\, \mathrm{d}s + \iint_\phi \dot{B}\, \mathrm{d}s = \iint_\phi 0\, \mathrm{d}s \;\Leftrightarrow\; \boxed{\int_{\partial\phi} E\, \mathrm{d}s - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_\phi B\, \mathrm{d}s = 0}$$

Für die 3. und 4. Gleichung betrachten wir ein (beschränktes) Gebiet B mit der Oberfläche ∂B:

$$\iiint_B \operatorname{div}(D)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_B \rho\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \;\Leftrightarrow\; \boxed{\textstyle\iint_{\partial B} D\, \mathrm{d}s = Q}$$

Und schließlich:

$$\iiint_B \operatorname{div}(B)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \iiint_B 0\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \;\Leftrightarrow\; \boxed{\textstyle\iint_{\partial B} B\, \mathrm{d}s = 0}$$

62.2 Es sei dazu

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, 0)^\top \quad \text{und} \quad \phi \subseteq \{(x, y, 0)^\top \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}\,.$$

Es gilt dann $\phi_u \times \phi_v = (0,\ 0,\ 1)^\top$ (nach entsprechender Wahl von u und v). Nach dem Satz von Stokes gilt dann

$$\int_{\partial\phi} v \cdot \mathrm{d}s = \iint_\phi \operatorname{rot}(v) \cdot \mathrm{d}s = \iint_\phi \operatorname{rot}(v)^\top (\phi_u \times \phi_v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = \iint_\phi \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v\,.$$

62.3 **Das Kurvenintegral:** Der Rand γ von ϕ ist der Kreis $\{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = 4,\ z = 2\}$. Hierfür findet man die Parametrisierung

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -2\sin t \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei wir natürlich darauf geachtet haben, dass die Raumkurve bzgl. dem angegebenen Normalenvektor positiv orientiert ist. Somit erhält man das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -6\sin t \\ -4\cos t \\ -8\sin t \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -2\sin t \\ -2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left(12\sin^2 t + 8\cos^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \left(8 + 4\sin^2 t\right) \mathrm{d}t = 20\pi. \end{aligned}$$

Das Flächenintegral: Die Rotation des Vektorfelds $\boldsymbol{v}$ beträgt

$$\boldsymbol{w} = \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} z^2 + x \\ 0 \\ -z - 3 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion der Fläche ϕ und der Flächennormalenvektor $\phi_u \times \phi_v$ lauten

$$\phi(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_u \times \phi_v = \begin{pmatrix} -u \\ -v \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\phi_u \times \phi_v| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}\,,$$

wobei wir uns vor der Angabe des Definitionsbereichs D von ϕ noch drücken, da wir das entstehende Integral natürlich vorteilhaft in Polarkoordinaten auswerten werden; hierbei wird der Definitionsbereich zu einem *Rechteck* B. Übrigens müssen wir die Reihenfolge von u und v noch vertauschen, da der bisherige Flächennormalenvektor $\phi_u \times \phi_v$ eine positive z-Komponente hat. Mit $\phi_v \times \phi_u$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iint_\phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s &= \iint_\phi \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \iint_D \boldsymbol{w}(\phi(u,v))^\top (\phi_v \times \phi_u)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \iint_D \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(u^2+v^2)^2 + u \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(u^2+v^2) - 3 \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} u \\ v \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \iint_D \frac{1}{4} u \big(u^2+v^2\big)^2 + u^2 + \frac{1}{2}\big(u^2+v^2\big) + 3\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4} r^5 \cos\varphi + r^2 \cos^2\varphi + \tfrac{1}{2} r^2 + 3\, \mathrm{d}\varphi\, r\, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^2 \pi r^3 + \pi r^3 + 6\pi r\, \mathrm{d}r = \tfrac{\pi}{2} r^4 + 3\pi r^2 \Big|_0^2 = 20\pi\,.
\end{aligned}$$

Somit ist der Satz von Stokes in diesem Fall verifiziert.

62.4 Offensichtlich handelt es sich bei der parametrisierten Fläche um ein Segment der Oberfläche einer Kugel mit Radius 1, d. h., $\phi = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Vergleiche hierzu die Darstellung einer Sphäre in Polarkoordinaten. Der Rand der Fläche ϕ ist der Kreis γ mit Parameterdarstellung

$$\gamma(\varphi) = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Nun kann man den Satz von Stokes

$$\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \iint_\phi \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s$$

anwenden und das Kurvenintegral berechnen:

$$\begin{aligned}
\oint_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi + \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \cos^2\varphi \right) \mathrm{d}\varphi = \tfrac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \tfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass gemäß unserer Orientierung wir den Fluss *von innen nach außen* berechnet haben.

62.5 Das durch die Flächen definierte Gebiet B hat die Form eines Tunnels mit parabelförmigem Querschnitt, welcher sich entlang der x-Achse erstreckt. Die x-y-Ebene bildet den Boden des Tunnels der bei $x = 0$ anfängt und bei $x = 3$ endet. Präzise formuliert handelt es sich um das dreidimensionale Normalgebiet

$$B = \{(x, y, z) \,|\, 0 \leq x \leq 3,\ -2 \leq y \leq 2,\ 0 \leq z \leq 4 - y^2\}\,.$$

Wendet man den Divergenzsatz von Gauß auf das Oberflächenintegral an, d. h.

$$\iint_\phi \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \iiint_B \operatorname{div} \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}V\,,$$

so erhält man ein Volumenintegral welches sich bezüglich dieses Normalgebiets wie folgt berechnet

$$\begin{aligned}\iiint_\Gamma \operatorname{div} \boldsymbol{v}\ \mathrm{d}V &= \iiint_\Gamma (2-x)\ \mathrm{d}V = \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 \left(\int_0^{4-y^2} (2-x)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 \left(\int_{-2}^2 (2z - xz)\Big|_0^{4-y^2}\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^3 \left[\int_{-2}^2 (2-x)(4-y^2)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3 (2-x)\left(4y - \tfrac{1}{3}y^3\right)\Big|_{-2}^2\ \mathrm{d}x = \tfrac{32}{3}\int_0^3 (2-x)\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{32}{3}\left(2x - \tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^3 = 16\,.\end{aligned}$$

62.6 (a) Hält man $\varrho \in [0, R]$ und $\varphi = 0$ fest und lässt $\vartheta \in [0, 2\pi]$ laufen, so beschreibt T einen Kreis in der Ebene $y = 0$ mit Mittelpunkt $P = (R, 0, 0)^\top$ und Radius ϱ. Lässt man nun $\varphi \in [0, 2\pi]$ laufen, so wird dieser Kreis um die z-Achse herum rotiert, sodass die Oberfläche eines *Donuts* mit Hauptradius R (Abstand von P zur z-Achse) und Nebenradius ϱ (Radius des rotierten Kreises um P) entsteht. Mittels Variation $\varrho \in [0, R]$ erhält man alle derartigen Torusoberflächen, also insgesamt einen Torus mit Haupt- und Nebenradius R, der kein Loch mehr hat.

(b) Gemäß unseren Überlegungen aus Teil (a) wird die Oberfläche von T_R^r beschrieben durch die Parametrisierung

$$\phi : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(\varphi, \vartheta) = T(r, \varphi, \vartheta)\,.$$

Wir berechnen

$$\phi_\varphi = \begin{pmatrix} -(R + r\cos\vartheta)\sin\varphi \\ (R + r\cos\vartheta)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_\vartheta = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\cos\varphi \\ -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

und daraus

$$\phi_\varphi \times \phi_\vartheta = r(R + r\cos\vartheta)\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad |\phi_\varphi \times \phi_\vartheta| = r(R + r\cos\vartheta)\,.$$

Damit erhalten wir für den gesuchten Flächeninhalt $F(\phi)$ der Torusoberfläche ϕ:

$$F(\phi) = \iint_{\phi} 1 \,\mathrm{d}F = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r(R + r\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi r\big[R\vartheta + r\sin\vartheta\big]_0^{2\pi} = 4\,\pi^2 R\,r\,.$$

(c) Als Fluss des Vektorfelds $\boldsymbol{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$ durch die Oberfläche ϕ von T_R^r erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\iint_{\phi} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{v}(\phi(\varphi,\vartheta))^\top (\phi_\varphi \times \phi_\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} r\left(Rr + (R^2 + r^2)\cos\vartheta + Rr\cos^2\vartheta\right)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta \\
&= 2\pi r\left[Rr\vartheta + (R^2 + r^2)\sin\vartheta + Rr\left(\tfrac{\vartheta}{2} + \tfrac{\sin(2\vartheta)}{4}\right)\right]_0^{2\pi} = 6\,\pi^2 R\,r^2\,.
\end{aligned}$$

(d) Der Torus T_R^r wird beschrieben durch die Parametrisierung

$$\varPhi : [0,r] \times [0,2\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \varrho \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (R + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi \\ (R + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi \\ \varrho\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Jacobimatrix ist

$$D\varPhi(\varrho,\varphi,\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi & -(R + \varrho\cos\vartheta)\sin\varphi & -\varrho\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi & (R + \varrho\cos\vartheta)\cos\varphi & -\varrho\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta & 0 & \varrho\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit $|\det D\varPhi(\varrho,\varphi,\vartheta)| = \varrho\,(R + \varrho\cos\vartheta)$.

Für das Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ gilt $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 3$. Daher erhalten wir für den Fluss von v durch die Oberfläche ϕ des Torus T_R^r mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned}
\iint_{\phi} \boldsymbol{v}\,\mathrm{d}F &= \iiint_{T_R^r} \operatorname{div}\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 3 \cdot |\det D\varPhi(\varrho,\varphi,\vartheta)|\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho \\
&= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 3\varrho(R + \varrho\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho \\
&= 3\int_0^r \int_0^{2\pi} \varrho R\vartheta + \varrho^2\sin\vartheta\Big|_{\vartheta=0}^{2\pi}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\varrho \\
&= 12\pi^2 R\int_0^r \varrho\,\mathrm{d}\varrho = 6\,\pi^2 R\,r^2\,.
\end{aligned}$$

63 Allgemeines zu Differentialgleichungen

63.1 Aufgaben

63.1 Für die DGL $\dot{x} = \sqrt{1 - tx}$ skizziere man das Richtungsfeld und zeichne einige Lösungskurven ein.
Auf welchen Kurven liegen die Punkte, in denen die Lösungskurven $x = x(t)$ verschwindende bzw. extremale Steigung haben?

63.2 Gegeben sei die DGL $\dot{x} = |t + x|, \ \ (t, x) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Ermitteln Sie die Isoklinen $\dot{x} = c$ mit $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ und skizzieren Sie mit deren Hilfe das Richtungsfeld der DGL.

(b) Skizzieren Sie den ungefähren Verlauf der Lösungskurven durch die Punkte $(1, 0)^\top$ und $(-1, 0)^\top$.

63.3 Ist das AWP $\dot{x} = \mathrm{e}^x \, t$ mit $x(0) = x_0$ eindeutig lösbar? Bestimmen Sie gegebenenfalls die maximale Lösung.

63.4 Bestimmen Sie die maximale Lösung des AWP

(a) $\dot{x} = t\, x^2$, $x(0) = 1$.

(b) $\dot{x} = t\, x^2$, $x(0) = -1$.

63.5 Formulieren Sie die DGL $\ddot{x} = -x$ mit der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = x_1$ als DGL-System 1. Ordnung mit entsprechender Anfangsbedingung.

63.2 Lösungen

63.1 Die DGL ist nur im Bereich $tx \leq 1$ definiert. Isoklinen sind die Kurven mit $\dot{x} = c \geq 0$. Somit folgt

$$tx = 1 - c^2 : \begin{cases} \text{Hyperbeln für } c \neq 1 \\ \text{Koordinatenachsen für } c = 1 \end{cases}$$

Punkte von Lösungskurven mit horizontaler Tangente liegen auf der Kurve $x = \frac{1}{t}$.
Punkte von Lösungskurven mit extremaler Steigung (Wendepunkte) müssen $\ddot{x} = 0$ und $\dddot{x} \neq 0$ erfüllen:

$$\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{1 - tx} = \frac{-t\dot{x} - x}{2\sqrt{1 - tx}} = -\frac{t}{2} - \frac{x}{2\sqrt{1 - tx}} \stackrel{!}{=} 0 \ \Rightarrow \ -\frac{x}{t} = \sqrt{1 - tx} \geq 0\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_63,

D. h., diese Punkte können nur im 2. oder 4. Quadranten liegen. Nun rechnen wir weiter:

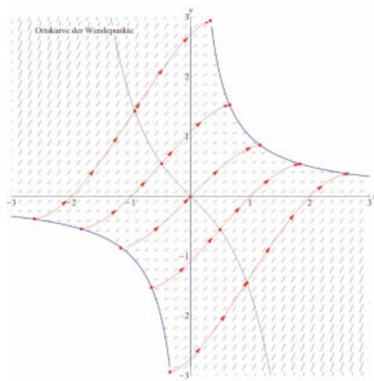
$$x^2 = t^2(1 - tx) \Leftrightarrow x^2 + t^3x - t^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\left(-t^3 \pm \sqrt{t^6 + 4t^2}\right).$$

Wir bestimmen nun die dritte Ableitung:

$$\dddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{1}{2}\left(t + \frac{x}{\dot{x}}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\dot{x}^2 - x\ddot{x}}{\dot{x}^2}\right) \Rightarrow \dddot{x}|_{\ddot{x}=0} = -1 \neq 0\,.$$

Die Wendepunkte der Integralkurven der DGL liegen also auf der Kurve

$$x = -\frac{1}{2}\left(t^3 + t\sqrt{t^4 + 4}\right).$$



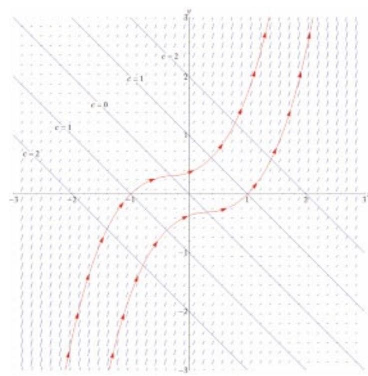
63.2 (a) Der geometrische Ort aller Punkte mit $\dot{x} = \text{const.}$ (Isoklinen) sind die Kurven mit $|t + x| = c$, $c \geq 0$:

$$|t + x| = c = \begin{cases} t + x = c & \text{falls } t + x \geq 0 \\ t + x = -c & \text{falls } t + x < 0 \end{cases} \Rightarrow x = -t \pm c\,.$$

Somit erhalten wir die gesuchten Isoklinen:

- $c = 0 \longrightarrow x = -t$,
- $c = 1 \longrightarrow x = -t \pm 1$,
- $c = 2 \longrightarrow x = -t \pm 2$,
- $c = 3 \longrightarrow x = -t \pm 3$.

Sie stellen parallele Geraden mit der Steigung -1 dar.



(b) Man beachte die Skizze.

63.3 Wir setzen $f(t,x) = \mathrm{e}^x\, t$. Es ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$ und nach x stetig partiell differenzierbar. Somit ist das AWP nach dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz eindeutig lösbar. Die Form der DGL ist $\dot{x} = f(t)\, g(x)$, also handelt es sich um eine separierbare DGL:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\,\mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\xi}\,\mathrm{d}\xi = \int_0^t \tau\,\mathrm{d}\tau \;\Leftrightarrow\; -\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x_0} = \frac{1}{2}t^2 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x_0} - \frac{1}{2}t^2\,.$$

In einem Intervall I um $t_0 = 0$ ist $\mathrm{e}^{-x_0} - \frac{1}{2}t^2 > 0$. Dort gilt:

$$x = x(t) = -\ln\left(\mathrm{e}^{-x_0} - \frac{1}{2}t^2\right)\,.$$

Für den Definitionsbereich muss gelten

$$\mathrm{e}^{-x_0} - \frac{1}{2}t^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; |t| < \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x_0}{2}}\,,$$

also $t \in [-\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x_0/2}, \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-x_0/2}]$.

63.4 (a) Als Lösung des AWP erhält man

$$x(t) = \frac{2}{2-t^2}\,.$$

Wegen der Anfangsbedingung lautet der maximale Definitionsbereich $D =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, d. h.

$$x_{\max} :]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[\to \mathbb{R}\,,\; x_{\max}(t) = \frac{2}{2-t^2}\,.$$

(b) Als Lösung des AWP erhält man

$$x(t) = \frac{2}{2+t^2}\,.$$

Der maximale Definitionsbereich lautet $D = \mathbb{R}$, d. h.

$$x_{\max} :\; \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\; x_{\max}(t) = \frac{2}{2+t^2}\,.$$

63.5 Das AWP lautet $\dot{\boldsymbol{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{z}$ mit $\boldsymbol{z}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$.

64 Die exakte Differentialgleichung

64.1 Aufgaben

64.1 Begründen Sie: Ist $x(t)$ die allgemeine Lösung der exakten DGL, die durch einen Euler'schen Multiplikator $\mu(t,x)$ aus einer nichtexakten $f + g\,\dot{x} = 0$ DGL entsteht, so ist $x(t)$ auch Lösung der ursprünglichen nichtexakten DGL.

64.2 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden DGLen, bestimmen Sie evtl. einen integrierenden Faktor:

(a) $t + x - (x - t)\,\dot{x} = 0$.

(b) $(1 + tx)\,\dot{x} + x^2 = 0$.

(c) $\frac{1-\cosh x\ \cos t}{(\cosh x - \cos t)^2}\,\dot{x} - \frac{\sinh x\ \sin t}{(\cosh x - \cos t)^2} = 0$.

64.3 Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme, bestimmen Sie evtl. einen integrierenden Faktor:

(a) $\dot{x} = \frac{x - t^2}{t}$ mit $x(1) = 2$.

(b) $2t + 3\cos(x) + (2t - 3t\sin(x))\dot{x} = 0$ mit $x(1) = 0$.

(c) $tx^2 - 1 + (t^2 x - 1)\dot{x} = 0$ mit $x(0) = 0$.

64.4 Lösen Sie die folgende DGL:

$$x - \left[(t^2 + x^2)^{3/2} + t\right]\dot{x} = 0\,.$$

Hinweis: Führen Sie Polarkoordinaten ein.

64.2 Lösungen

64.1 Das ist einfach zu begründen: Löst $x(t)$ die exakte DGL $\mu\, f + \mu\, g\,\dot{x} = 0$, so löst $x(t)$ auch die gekürzte (nichtexakte) DGL $f + g\,\dot{x} = 0$, beachte, dass $\mu \neq 0$.

64.2 Man beachte unser Rezept zur Lösung einer exakten DGL:

(a) Umgeschrieben lautet die DGL

$$\underbrace{(t + x)}_{:=f(t,x)}\,\mathrm{d}t + \underbrace{(t - x)}_{:=g(t,x)}\,\mathrm{d}x$$

Diese ist exakt, denn $f_x = 1 = g_t$. Es gibt also eine Stammfunktion $F(t,x)$ von $\boldsymbol{v} = (f,g)^\top$:

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_64,

(1) Es gilt

$$F(t,x) = \int f(t,x)\ \mathrm{d}t = \int t + x\ \mathrm{d}t = \tfrac{t^2}{2} + x\,t + G(x)\,.$$

Durch Ableiten von F erhalten wir $\dot{G}$ und damit G:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = t + \dot{G}(x) \stackrel{!}{=} -x + t \ \Rightarrow\ \dot{G}(x) = -x \ \Rightarrow\ G(x) = -\frac{x^2}{2}\,.$$

Wir erhalten F:

$$F(t,x) = \tfrac{1}{2}(t^2 - x^2) + x\,t\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Damit ist $F(t,x) = c,\ c \in \mathbb{R}$, eine Lösung der DGL in impliziter Form.

(2) Auf eine Auflösung verzichten wir.

(b) Die DGL lässt sich umschreiben:

$$\underbrace{x^2}_{:=f(t,x)}\ \mathrm{d}t + \underbrace{(1+tx)}_{=:g(t,x)}\mathrm{d}x = 0$$

Wegen $f_x - g_t = 2x - x = x \neq 0$ ist die DGL nicht exakt. Wegen $\frac{g_t - f_x}{f} = -\frac{1}{x}$ gibt es einen nur von x abhängigen Multiplikator $\mu(x)$. Dieser ist gegeben durch $\mu(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$. Wir erhalten nach Multiplikation der DGL mit $\mu = \frac{1}{x} \neq 0$ die folgende exakte DGL:

$$x\,\mathrm{d}t + \left(\tfrac{1}{x} + t\right)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Diese lösen wir wie gehabt nach unserem Rezept:

(1) Wir bestimmen eine Stammfunktion $F(t,x)$ von $\boldsymbol{v} = (f,g)^\top$ mit $f(t,x) = x$ und $g(t) = \frac{1}{x} + t$:

$$F_t = x \ \Rightarrow\ F = tx + G(x) \ \Rightarrow\ F_x = t + \dot{G}(x) = \tfrac{1}{x} + t$$
$$\Rightarrow\ \dot{G}(x) = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ G(x) = \ln|x| + c\,.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung in impliziter Form:

$$F(t,x) = tx + \ln|x| = c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Bemerkung: Man kann das auch umformen zu $x\,\mathrm{e}^{tx} = d\,,\quad d \in \mathbb{R}$.

(2) Auf eine Auflösung verzichten wir.

(c) Mit

$$f(t,x) = -\frac{\sinh x \sin t}{(\cosh x - \cos t)^2}\,, \qquad g(t,x) = \frac{1 - \cosh x \cos t}{(\cosh x - \cos t)^2}$$

gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sin t\left(\sinh^2 x - \cosh x \cos t - 1\right)}{(\cosh x - \cos t)^3} = \frac{\partial g}{\partial t}$$

und die DGL ist somit exakt. Wir bestimmen eine Stammfunktion $F(t,x)$ von $\boldsymbol{v} = (f,g)^\top$, wobei wir die Substitution $u = \cosh x - \cos t$, $\mathrm{d}u = \sin t\,\mathrm{d}t$ verwenden:

$$\begin{aligned} F(t,x) &= \int f(t,x)\ \mathrm{d}t + G(x) = -\int \frac{\sinh x \sin t}{(\cosh x - \cos t)^2}\ \mathrm{d}t + G(x) \\ &= -\int \frac{\sinh x}{u^2}\ \mathrm{d}u + G(x) = \frac{\sinh x}{u} + G(x) = \frac{\sinh x}{\cosh x - \cos t} + G(x)\,. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1 - \cos t \cosh x}{(\cosh x - \cos t)^2} + \dot{G}(x) \stackrel{!}{=} g(t,x) \ \Rightarrow\ \dot{G}(x) = 0 \ \Rightarrow\ G(x) = 0\,.$$

Damit lautet die implizite Lösung

$$F(t,x) = \frac{\sinh x}{\cosh x - \cos t} = c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Ausnahmepunkte sind die Nullstellen des Nenners $(t,x) = (2k\pi, 0)$.

64.3 (a) Die DGL ist linear und könnte als solche behandelt werden. Wir schreiben sie aber um:

$$\underbrace{(t^2 - x)}_{=:f(t,x)}\mathrm{d}t + \underbrace{t}_{=:g(t,x)}\ \mathrm{d}x = 0$$

Wegen $f_x = -1$ und $g_t = 1$ ist die DGL nicht exakt. Da aber $\frac{f_x - g_t}{g} = \frac{-2}{t}$ eine Funktion von t allein ist, existiert ein integrierender Faktor $\mu(t)$. Dieser ist

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{\int -2/t\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{t^2}\,.$$

Durch Multiplikation der ursprünglichen DGL mit $\mu(t)$ erhalten wir die DGL

$$\left(1 - \frac{x}{t^2}\right)\mathrm{d}t + \frac{1}{t}\,\mathrm{d}x = 0$$

die in einem Gebiet mit $t \neq 0$ (Halbebenen $t < 0$, $t > 0$) exakt ist.

Wir bestimmen eine Stammfunktion $F(t,x)$ von $\boldsymbol{v} = (f,g)^\top$:

$$\begin{aligned} F_t = 1 - \frac{x}{t^2} \ &\Rightarrow\ F = t + \frac{x}{t} + G(x) \ \Rightarrow\ F_x = \frac{1}{t} + \dot{G}(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{t} \\ &\Rightarrow\ \dot{G}(x) = 0 \ \Rightarrow\ G(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen lauten also in impliziter Form:

$$F(t,x) = t + \frac{x}{t} = c\,,\ c \in \mathbb{R}\,,\ t \neq 0\,.$$

Aus der Anfangsbedingung $x(1) = 2$ folgt $1 + 2 = 3 = c$: Wir erhalten also die Lösung

$$x(t) = 3t - t^2\,, \quad t > 0\,.$$

(b) Mit $f(t,x) = (2t + 3\cos(x))$ und $g(t,x) = (2x - 3t\sin(x))$ schreibt sich die DGL als $f(t,x) + g(t,x)\,\dot{x} = 0$. Da $\frac{\partial f}{\partial x} = -3\sin(x) = \frac{\partial g}{\partial t}$ ist die DGL exakt.

Wir bestimmen eine Stammfunktion $F(t,x)$ von $\boldsymbol{v} = (f,g)^\top$:

$$F(t,x) = \int (2t + 3\cos(x))\ \mathrm{d}t = t^2 + 3t\cos x + G(x)\,.$$

Durch Ableiten nach x erhalten wir $\dot{G}$ und damit G:

$$F_x(t,x) = -3t\sin x + \dot{G}(x) = g(t,x)\,,$$

also muss $\dot{G}(x) = 2x$ sein, woraus $G(x) = x^2$ folgt. Die allgemeine Lösung der DGL lautet somit

$$F(t,x) = t^2 + 3t\cos(x) + x^2 = c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Für die spezielle Lösung mit dem gegebenen Anfangswert muss gelten $x(1) = 0$, was eingesetzt die Bedingung $1 + 3 = c$ bzw. $c = 4$ liefert. Die Lösung des gegebenen AWP lautet damit

$$t^2 + 3t\cos(x) + x^2 = 4\,.$$

(c) Wir können die DGL umschreiben:

$$\underbrace{(tx^2 - 1)}_{:=f(t,x)}\mathrm{d}t + \underbrace{(t^2x - 1)}_{=:g(t,x)}\mathrm{d}x = 0$$

Dies ist eine exakte DGL, denn es gilt $f_x = 2tx = g_t$.

Wir bestimmen eine Stammfunktion $F(t,x)$:

$$\begin{aligned} F_t = tx^2 - 1 \ &\Rightarrow\ F(t,x) = \tfrac{1}{2}t^2x^2 - t + G(x) \ \Rightarrow\ U_x = t^2x + \dot{G}(x) \stackrel{!}{=} g = t^2x - 1 \\ &\Rightarrow\ \dot{G}(x) = -1 \ \Rightarrow\ G(x) = -x \\ &\Rightarrow\ F(t,x) = \tfrac{1}{2}t^2x^2 - t - x\ . \end{aligned}$$

Die Lösungen $x(t)$ der DGL sind implizit durch $F(t,x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gegeben.

Um die Anfangsbedingung $x(0) = 0$ zu erfüllen, muss die Konstante verschwinden. Die Lösung der Anfangswertaufgabe ist also implizit gegeben durch

$$t^2x^2 - 2t - 2x = 0\,.$$

Nach x aufgelöst erhält man

$$x(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 2t^3}}{t^2}\,,\ t \neq 0\,, \qquad x(t) = 0\,,\ t = 0\,.$$

64.4 Transformation in Polarkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
t &= r\cos\varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{d}t &= \cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\
x &= r\sin\varphi \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{d}x &= \sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in die DGL liefert das

$$
\begin{aligned}
0 &= r\sin\varphi(\cos\varphi\,\mathrm{d}r - r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi) - (r^3 + r\cos\varphi)(\sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi)\\
&= (r\sin\varphi\cos\varphi - r^3\sin\varphi - r\sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}r + (-r^2\sin^2\varphi - r^4\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\\
&= -r^3\sin\varphi\,\mathrm{d}r - (r^2 + r^4\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus erhalten wir:

$$\underbrace{(1 + r^2\cos\varphi)}_{=:f(r,\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi + \underbrace{r\sin\varphi}_{=:g(r,\varphi)}\,\mathrm{d}r = 0\,.$$

Diese DGL ist nicht exakt, denn $f_r - g_\varphi = 2r\cos\varphi - r\cos\varphi = r\cos\varphi \neq 0$. Es existiert aber ein integrierender Faktor $\mu(\varphi)$ denn $\frac{f_r - g_\varphi}{g} = \cot\varphi$. Für diesen gilt

$$\mu(\varphi) = \mathrm{e}^{\int \cot\varphi\,\mathrm{d}\varphi} = \sin\varphi\,.$$

Multiplikation der ursprünglichen DGL mit μ liefert die exakte DGL

$$\sin\varphi(1 + r^2\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + r\sin^2\varphi\,\mathrm{d}r = 0\,.$$

Wir ermitteln eine Stammfunktion $F(r,\varphi)$:

$$
\begin{aligned}
F_r = r\sin^2\varphi \;\Rightarrow\; F(r,\varphi) = \frac{r^2}{2}\sin^2\varphi + G(\varphi) \;\Rightarrow\; F_\varphi = r^2\cos\varphi\sin\varphi + \dot{G}(\varphi)\\
\Rightarrow\; \dot{G}(\varphi) = \sin\varphi \;\Rightarrow\; G(\varphi) = -\cos\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Damit lautet die Lösung in impliziter Form:

$$\frac{r^2}{2}\sin^2\varphi - \cos\varphi = \frac{1}{2}(r\sin\varphi)^2 - \frac{r\cos\varphi}{r} = c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Durch Rücktransformation erhalten wir die implizite Lösung in *kartesischen Koordinaten*:

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{t}{\sqrt{t^2 + x^2}} = c\,.$$

65 Lineare Differentialgleichungssysteme I

65.1 Aufgaben

65.1 Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B}$ nicht allgemein gilt.

65.2 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden AWPe bzw. DGL-Systeme:

(a) $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$,

(b) $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

65.3 Wir betrachten eine Population aus Wildschweinen (W) und Schnecken (S), deren Bestand durch reelle Funktionen $W, S : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ beschrieben wird. Diese sollen der folgenden DGL genügen:

$$\dot{W}(t) = -W(t) + S(t) - 2 \quad \text{und} \quad \dot{S}(t) = S(t) - 2W(t) \qquad (*).$$

(a) Finden Sie ein Paar $(w_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$, so dass $W(t) = w_0,\ \ S(t) = s_0$ für $t \in \mathbb{R}$ eine konstante Lösung von $(*)$ beschreibt.

(b) Finden Sie eine Lösung von $(*)$ mit $W(0) = 3,\ \ S(0) = 6$, indem Sie den Ansatz

$$W(t) = w(t) + w_0\,, \quad S(t) = s(t) + s_0 \quad (t \in \mathbb{R})$$

machen und die entstehende DGL für $w, s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lösen.

(c) Skizzieren Sie die Lösung $t \mapsto (W(t), S(t))$.

65.2 Lösungen

65.1 Beachte die nicht miteinander vertauschbaren Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Für diese Matrizen gilt:

$$\mathrm{e}^{A+B} = \exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{e}^{A}\,\mathrm{e}^{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \mathrm{e} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_65,

65.2 (a) (1) **Bestimmung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren:**

$$\chi_A = (5-x)\,(4-x)\,(5-x) - 16(4-x) = (4-x)\,(x-1)\,(x-9)\,,$$

sodass $\lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 4$ und $\lambda_3 = 9$ die Eigenwerte von A sind. Für die Eigenvektoren erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Eig}_A(4) = \ker(A - 4E_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

$$\mathrm{Eig}_A(9) = \ker(A - 9E_3) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Da alle Eigenwerte sowohl algebraische als auch geometrische Vielfachheit 1 haben, ist die Matrix A diagonalisierbar.

(2) **Aufstellen der allgemeinen komplexen Lösung des DGL-Systems:** Für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{x}_a(t)$ des DGL-Systems erhalten wir damit

$$\boldsymbol{x}_a(t) = c_1\,\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\,\mathrm{e}^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}\,.$$

(3) **Aufstellen der allgemeinen reellen Lösung:** Entfällt, da alle Eigenwerte der Matrix A reell sind.

(4) **Bestimmung der Koeffizienten:** Die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = (0,2,2)^\top$ liefert das folgende lineare Gleichungssystem:

$$c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ergibt sich zu $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ und $c_3 = 1$. Damit erhalten wir die gesuchte Lösung des AWP:

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{9t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) (1) **Bestimmung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren:**

$$\chi_A = (-1-x)^2 - (-1) = x^2 + 2x + 2\,, \text{ sodass } \lambda_1 = -1 + \mathrm{i} \text{ und } \lambda_2 = -1 - \mathrm{i}$$

die Eigenwerte von A sind. Für die Eigenvektoren erhalten wir

$$\begin{aligned}
\operatorname{Eig}_A(-1+\mathrm{i}) &= \ker(A - (-1+\mathrm{i})E_2) = \ker \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle \\
\operatorname{Eig}_A(-1-\mathrm{i}) &= \ker(A - (-1-\mathrm{i})E_2) = \ker \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \rangle\,.
\end{aligned}$$

Da alle Eigenwerte sowohl algebraische als auch geometrische Vielfachheit 1 haben, ist die Matrix A diagonalisierbar.

(2) **Aufstellen der allgemeinen komplexen Lösung des DGL-Systems:** Für die allgemeine Lösung $\boldsymbol{x}_a(t)$ des DGL-Systems erhalten wir damit

$$\boldsymbol{x}_a(t) = c_1\,\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} + c_2\,\mathrm{e}^{(-1-\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}\,.$$

(3) **Aufstellen der allgemeinen reellen Lösung:** Diese ergibt sich zu

$$\boldsymbol{x}_a(t) = c_1\,\mathrm{e}^{-t}(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + c_2\,\mathrm{e}^{-t}(\sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})\,,$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(4) **Bestimmung der Koeffizienten:** Die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = (1,1)^\top$ liefert das folgende lineare Gleichungssystem:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Die Lösung ergibt sich zu $c_1 = c_2 = 1$. Damit erhalten wir die Lösung des AWP:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \mathrm{e}^{-t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \mathrm{e}^{-t} \left(\sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{e}^{-t} \left(\cos(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \sin(t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)\,.
\end{aligned}$$

65.3 *Zur Interpretation: Wildschweine fressen Schnecken, so dass diese einen positiven Einfluss auf die Wildschweinzahl haben. Die Wildschweine sind rauflustig, so dass mehr Wildschweine einen negativen Einfluss auf das Populationswachstum haben. Eine konstante Zahl an Wildschweinen landet außerdem in den Kochtöpfen bekannter Gallier. Die Schnecken sind friedlich und vermehren sich ständig, wenn sie nicht von Wildschweinen gefressen werden. Die Zahlen sind skaliert, also ist etwa* $10\,W(t)$ *bzw.* $100\,S(t)$ *die tatsächliche Wildschwein- bzw. Schneckenzahl.*

(a) Der Ansatz $W(t) = w_0,\ S(t) = s_0$ liefert ein lineares Gleichungssystem mit Lösung $w_0 = 2,\ \ s_0 = 4$.

(b) Wir erhalten das Differentialgleichungssystem

$$\dot{w} = -w + s\,,\quad \dot{s} = -2w + s\,,\quad w(0) = 1\,,\quad s(0) = 2,$$

so dass mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Lösung durch

$$\begin{pmatrix} w(t) \\ s(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Mit

$$\chi_A(x) = x^2 + 1 = (x + \mathrm{i})(x - \mathrm{i})$$

erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(\mathrm{i}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}_A(-\mathrm{i}) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Mit

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

gilt $S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\mathrm{i}, -\mathrm{i})$. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} w(t) \\ s(t) \end{pmatrix} &= S\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}) S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} - \mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}) \\ 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + 2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Wir erhalten $W(t) = \cos(t) + \sin(t) + 2$ und $S(t) = 2\cos(t) + 4$.

66 Lineare Differentialgleichungssysteme II

66.1 Aufgaben

66.1 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden AWPs:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

66.2 Finden Sie Funktionen $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die dem DGL-System

$$\ddot{x}(t) = y(t), \quad \dot{y}(t) = -\dot{x}(t) + 2y(t) \quad (t \in \mathbb{R})$$

und $x(0) = \dot{x}(0) = 0,\ y(0) = 1$ genügen.

Hinweis: Setzen Sie $\boldsymbol{u}(t) = (x(t), \dot{x}(t), y(t))^\top$, und finden Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, sodass die Gleichung $\dot{\boldsymbol{u}} = A\boldsymbol{u}$ gilt. Lösen Sie dieses System mit Hilfe der Jordannormalform.

66.3 Finden Sie eine Lösung $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der DGL

$$\ddot{x}(t) = 2\dot{x}(t) - x(t)\,, \quad x(0) = 1\,,\ \dot{x}(0) = 2 \quad (t \in \mathbb{R})\,.$$

66.2 Lösungen

66.1 (1) **Bestimmung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren:**

$$\chi_A = (-3 - x)\,(-2 - x)\,(-1 - x) + (-2 - x) = -(2 + x)^3\,, \text{ sodass } \lambda = -2$$

der einzige Eigenwert von A ist. Der Eigenwert λ hat algebraische Vielfachheit drei. Für die Eigenvektoren erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(-2) = \ker(A + 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Der Eigenwert $\lambda = -2$ hat somit geometrische Vielfachheit zwei. D. h. algebraische und geometrische Vielfachheit des Eigenwertes sind verschieden und somit ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Wir müssen also das Rezept für nichtdiagonalisierbares A verwenden.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_66,

Bestimmung einer Jordanbasis S und der dazugehörigen Jordannormalform J von A: Gesucht ist eine Jordanmatrix J und eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1} A\, S = J$. Dazu bestimmen wir zunächst die verallgemeinerten Eigenräume. Mit $N = A - \lambda\, E_3$ erhalten wir

$$N^2 = 0 \qquad \text{und somit} \qquad \ker(N^2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Wir haben also die Kette

$$\{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

Da die geometrische Vielfachheit des einzigen Eigenwerts $\lambda = -2$ zwei ist, enthält die Jordannormalform zwei Jordankästchen zu diesem Eigenwert, also

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Die Spalten s_1, s_2, s_3 der Matrix S erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen

$$s_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(N^2) \setminus \ker(N), \text{ setzen } s_2 = N s_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und wählen } s_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchte Jordanbasis S, für die $J = S^{-1} A\, S$ gilt, und dessen Inverses ergibt sich zu

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

(2) **Berechnung von $\mathrm{e}^{tA} = S\, \mathrm{e}^{tJ}\, S^{-1}$:** Zur Berechnung von $\mathrm{e}^{tA} = S\, \mathrm{e}^{tJ}\, S^{-1}$ nutzen wir $J = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{e}^{tJ} = \mathrm{e}^{tD}\,\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & t\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Schließlich berechnen wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} = S\,\mathrm{e}^{tJ}\,S^{-1} &= \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1-t & 0 & t \\ -2t & 1 & 2t \\ -t & 0 & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(3) **Bestimmung der Lösung des AWP:** Die Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liefert uns die gesuchte Lösung des AWP als

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathrm{e}^{(t-0)A}\,\boldsymbol{x}(0) = \mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2-t \\ 1-2t \\ 1-t \end{pmatrix}.$$

66.2 Wir setzen $u_1 = x$, $u_2 = \dot{x}$ und $u_3 = y$. Dann erhalten wir $\dot{u}_1 = \dot{x} = u_2$ und $\dot{u}_2 = \ddot{x} = y = u_3$ und $\dot{u}_3 = \dot{y} = -\dot{x}(t) + 2y(t) = -u_2 + 2u_3$, sowie die Startwerte $u_1(0) = x(0) = 0$, $u_2(0) = \dot{x}(0) = 0$ und $u_3(0) = y(0) = 1$. Also erfüllt $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ das Differentialgleichungssystem

$$\dot{\boldsymbol{u}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=A} \boldsymbol{u}(t) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Ist $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)^\top$ eine Lösung von $(**)$, so ist $x := u_1$, $y := u_3$ eine Lösung von $(*)$. Daher lösen wir nun $(*)$. Die Lösung ist gegeben durch $\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{e}^{At}\,\boldsymbol{u}(0)$. Wir berechnen zunächst die Jordannormalform von A. Es ist

$$\chi_A(x) = -x(x^{-2} - 2x + 1) = -x(x-1)^2,$$

und

$$\mathrm{Eig}_A(0) = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1 := (1,0,0)^\top \rangle$$

sowie

$$\mathrm{Eig}_A(1) = \ker(A - E_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \boldsymbol{b}_2 = (1,1,1)^\top \rangle.$$

Den Basisvektor $\boldsymbol{b}_3$ erhalten wir aus der Bedingung $(A - E_3)\boldsymbol{b}_3 = \boldsymbol{b}_2$, also aus dem LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z.B. zu $b_3 = (-1,0,1)^\top$. Mit der Matrix

$$S = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

wird also

$$S^{-1}AS = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=J} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=N}.$$

Wir erhalten

$$\mathrm{e}^{At} = \mathrm{e}^{S(D+N)tS^{-1}} = S\,\mathrm{e}^{Dt}\,\mathrm{e}^{Nt}\,S^{-1} = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Wir rechnen dies nicht aus, sondern nur das Matrix-Vektor-Produkt

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{e}^{At}\,\boldsymbol{u}(0) = \mathrm{e}^{At}\,\boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{e}^t(t-1) \\ t\,\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t(t+1) \end{pmatrix}.$$

Die Lösung der DGL ist also $x(t) = 1 + \mathrm{e}^t(t-1)$, $y(t) = \mathrm{e}^t(t+1)$.

66.3 Wir wählen als Ansatz

$$u_1(t) = x(t)\,, \quad u_2(t) = \dot{x}(t) \quad \Longrightarrow \begin{cases} \dot{u}_1(t) = u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) = -u_1(t) + 2u_2(t)\,. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir

$$\dot{\boldsymbol{u}} = A\,\boldsymbol{u} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Wir ermitteln die Lösung

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathrm{e}^{At}\,\boldsymbol{u}(0)$$

dieses Systems: Das charakteristische Polynom der Matrix A lautet

$$\chi_A(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2\,.$$

Als Eigenraum zum doppelten Eigenwert $\lambda = 1$ erhalten wir:

$$\operatorname{Eig}_A(1) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle\,.$$

Die Matrix A ist somit nicht diagonalisierbar, es existiert jedoch eine Jordannormalform. Als Jordanbasis wählen wir $(\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2)$ mit

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b}_1 = (A - E_2)\,\boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und erhalten } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt:

$$S^{-1} A\, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N\,.$$

Wir setzen alles zusammen:

$$\begin{aligned} x(t) &= (1,0)^\top \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = (1,0)^\top\ \mathrm{e}^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (1,0)^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{Dt}\,\mathrm{e}^{Nt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{e}^t (1,0)^\top \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1+t)\ \mathrm{e}^t\,. \end{aligned}$$

67 Lineare Differentialgleichungssysteme III

67.1 Aufgaben

67.1 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden AWPe bzw. DGL-Systeme:

(a) $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{s}(t) = \cos(t) \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$.

(b) $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4e^{-2t} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Suchen Sie zunächst der Reihe nach drei Lösungen, bei denen die letzten drei, die letzten zwei und dann die letzte Koordinate verschwinden.

67.2 Untersuchen Sie die Gleichgewichtspunkte des DGL-Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s}$, wobei

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

67.3 Bestimmen Sie die Lösung des folgenden DGL-Systems:

(a) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2t+1}{t^2+t} & -\frac{t}{t+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$,

(b) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t(t^2+1)} & \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ -\frac{t^2}{t^2+1} & \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Es sind $\boldsymbol{x}_1 = (1, t)^\top$ und $\boldsymbol{x}_2 = (-1/t, t^2)^\top$ Lösungen des homogenen Systems.

67.4 Das mathematische Pendel wird durch die folgende DGL für den Auslenkungswinkel φ beschrieben

$$\ddot{\varphi}(t) = -\tfrac{g}{l} \sin \varphi(t),$$

worin die Erdbeschleunigung g und die Länge des Pendels l eingeht.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_67,

(a) Man wandle die DGL in ein DGL-System 1. Ordnung um und bestimme die stationären Lösungen.

(b) Man charakterisiere die stationären Lösungen in linearer Nährung.

67.2 Lösungen

67.1 (a) Das vorliegende System ist inhomogen und besitzt in $\boldsymbol{s}(t)$ nichtkonstante Koeffizienten.

(1) **Bestimmung von n verschiedenen Lösungen des homogenen Systems:** Das homogene System lautet $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, wobei $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Dies ist also eine homogene lineare DGL mit konstanten Koeffizienten. Die Lösung dieses Systems bestimmen wir nach dem entsprechenden Rezept.

Bestimmung der Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren: Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = -2$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = -3$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Für die Eigenvektoren erhalten wir

$$\mathrm{Eig}_A(-2) = \ker(A + 2E_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathrm{Eig}_A(-3) = \ker(A + 3E_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle .$$

Da der Eigenwert $\lambda_1 = -2$ algebraische Vielfachheit 2, aber geometrische Vielfachheit 1 hat, ist die Matrix A nicht diagonalisierbar. Wir müssen also das Rezept für nichtdiagonalisierbares A verwenden.

Bestimmung einer Jordanbasis S und der dazugehörigen Jordannormalform J von A: Gesucht ist also eine Jordanmatrix J und eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$. Dazu bestimmen wir zunächst die verallgemeinerten Eigenräume. Mit $N = A - \lambda_1 E_3$ erhalten wir

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und somit} \qquad \ker(N^2) = \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle .$$

Wir haben also die Kette

$$\{0\} \subsetneq \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \subsetneq \langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .\rangle$$

Da die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = -2$ eins ist, enthält die Jordannormalform ein Jordankästchen zu diesem Eigenwert, also

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

Die Spaltenvektoren $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$ der Matrix S erhalten wir folgendermaßen: Wir wählen

$$\boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(N^2) \setminus \ker(N)\,,\ \boldsymbol{s}_2 = N\boldsymbol{s}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}\ ,\ \boldsymbol{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die gesuchte Jordanbasis S, für die $J = S^{-1} A\, S$ gilt, und dessen Inverses ergibt sich zu

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Berechnung von $\mathrm{e}^{tA} = S\, \mathrm{e}^{tJ}\, S^{-1}$: Zur Berechnung von $\mathrm{e}^{tA} = S\,\mathrm{e}^{tJ}\, S^{-1}$ nutzen wir $J = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir

$$\mathrm{e}^{tJ} = \mathrm{e}^{tD}\,\mathrm{e}^{tN} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-2t} & t\,\mathrm{e}^{-2t} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} .$$

Schließlich berechnen wir:

$$\mathrm{e}^{tA} = S\,\mathrm{e}^{tJ}\,S^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-3t} - t\,\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t}(t-1) \\ \mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t}(2t+1) & -\mathrm{e}^{-3t} + 2\,\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t}(2t-1) \\ \mathrm{e}^{-3t} - \mathrm{e}^{-2t}(1+t) & -\mathrm{e}^{-3t} + \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} + t\,\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix} .$$

(2) **Test der Lösungen auf lineare Unabhängigkeit:** Entfällt, da das homogene System konstante Koeffizienten hat. Dafür ist die Unabhängigkeit der Lösungen, wie oben ermittelt, bekannt.

(3) **Bestimmung einer partikulären Lösung:** Die Variation der Konstanten ist hier mit erheblichem Rechenaufwand verbunden. Mit MATLAB sind die Rechnungen leicht durchzuführen, man probiere das unbedingt. Wir machen einen Ansatz analog zum Ansatz vom Typ der rechten Seite, den wir schon früher zum Finden von partikulären Lösungen einer inhomogenen linearen DGL benutzt haben: Aufgrund der Struktur der DGL wählen wir den Ansatz

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \cos(t)\,\boldsymbol{a} + \sin(t)\,\boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3\,, \\ \dot{x}_p(t) &= -\sin(t)\,\boldsymbol{a} + \cos(t)\,\boldsymbol{b}\,. \end{aligned}$$

Die Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ermitteln wir durch Einsetzen in die DGL und setzen $\boldsymbol{c} = (10, 10, 10)^\top$:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}_p(t) = A\boldsymbol{x}_p(t) + \boldsymbol{s}(t) \;&\Leftrightarrow\; -\sin(t)\,\boldsymbol{a} + \cos(t)\,\boldsymbol{b} = \cos(t)\,A\,\boldsymbol{a} + \sin(t)\,A\,\boldsymbol{b} + \cos(t)\,\boldsymbol{c} \\ &\Leftrightarrow\; \sin(t)\,(-\boldsymbol{a} - A\,\boldsymbol{b}) + \cos(t)\,(\boldsymbol{b} - A\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) = 0\,. \end{aligned}$$

Es müssen also die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

$$\boldsymbol{a} = -A\,\boldsymbol{b} \;\text{ und }\; \boldsymbol{b} = A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}\,.$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert

$$\boldsymbol{b} = -A^2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \quad \Leftrightarrow \quad (A^2 + E_3)\,\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\,.$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems liefert

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und schließlich } \; \boldsymbol{a} = -A\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\,.$$

(4) **Bestimmung der allgemeinen Lösung:** Die allgemeine Lösung ergibt sich zu

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p(t) + \mathrm{e}^{tA}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\,, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\,.$$

(5) **Bestimmung der Lösung des AWP:** Wir bestimmen die Koeffizienten c_1, c_2 und c_3 aus der Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = (0, 0, 0)^\top$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\,.$$

Die Lösung dieses Gleichungssystem ist $c_1 = c_2 = c_3 = -3$. Damit ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems zu

$$\boldsymbol{x}(t) = \cos(t)\begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} + \sin(t)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\,\mathrm{e}^{-3t}\\-3\,\mathrm{e}^{-3t}\\-3\,\mathrm{e}^{-3t}\end{pmatrix} = \Big(3(\cos(t) - \mathrm{e}^{-3t}) + \sin(t)\Big)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) Das vorliegende System ist homogen und besitzt in eine nichtkonstante Koeffizientenmatrix.

(1) **Bestimmung von n verschiedenen Lösungen des homogenen Systems:** Auf Grund der speziellen Gestalt der Matrix (Dreiecksform), können wir, wie im Hinweis beschrieben, Lösungen finden, bei denen die letzten Koordinaten verschwinden.

- Wir bestimmen $\boldsymbol{x}_1(t)$ als Lösung mit $\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{pmatrix}x_{1,1}(t)\\0\\0\\0\end{pmatrix}$: Einsetzen in die DGL liefert

$$\dot{x}_{1,1}(t) = x_{1,1}(t) \;\Rightarrow\; x_{1,1}(t) = \mathrm{e}^t\,.$$

- Wir bestimmen $\boldsymbol{x}_2(t)$ als Lösung mit $\boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix}x_{2,1}(t)\\x_{2,2}(t)\\0\\0\end{pmatrix}$: Einsetzen in die DGL liefert

$$\dot{x}_{2,1} = x_{2,1} - x_{2,2} \quad \text{und} \quad \dot{x}_{2,2} = 2x_{2,2}\,.$$

  Daraus ergibt sich $x_{2,2} = \mathrm{e}^{2t}$ und somit $\dot{x}_{2,1} = x_{2,1} - \mathrm{e}^{2t}$. Der Ansatz $x_{2,1} = a\,\mathrm{e}^{2t}$ liefert $x_{2,1} = -\,\mathrm{e}^{2t}$.

- Wir bestimmen $\boldsymbol{x}_3(t)$ als Lösung mit $\boldsymbol{x}_3(t) = \begin{pmatrix}x_{3,1}(t)\\x_{3,2}(t)\\x_{3,3}(t)\\0\end{pmatrix}$: Einsetzen in die DGL liefert

$$\dot{x}_{3,1} = x_{3,1} - x_{3,2} + 2x_{3,3} \quad \text{und} \quad \dot{x}_{3,2} = 2x_{3,2} + x_{3,3} \quad \text{und} \quad \dot{x}_{3,3} = 2x_{3,3}\,.$$

  Daraus ergibt sich $x_{3,3} = \mathrm{e}^{2t}$ und somit $\dot{x}_{3,2} = 2x_{3,2} + \mathrm{e}^{2t}$. Der Ansatz $x_{3,2} = at\,\mathrm{e}^{2t}$ liefert $x_{3,2} = t\,\mathrm{e}^{2t}$. Also muss $\dot{x}_{3,1} = x_{3,1} + (2-t)\,\mathrm{e}^{2t}$ gelten. Der Ansatz $x_{3,1} = (a+bt)\,\mathrm{e}^{2t}$ liefert $x_{3,1} = (-t+3)\,\mathrm{e}^{2t}$.

- Es bleibt noch $\boldsymbol{x}_4(t)$ als Lösung mit $\boldsymbol{x}_4(t) = \begin{pmatrix} x_{4,1}(t) \\ x_{4,2}(t) \\ x_{4,3}(t) \\ x_{4,4}(t) \end{pmatrix}$ zu bestimmen: Einsetzen in die DGL liefert

$$\dot{x}_{4,1} = x_{4,1} - x_{4,2} + 2x_{4,3} - x_{4,4} \quad \text{und} \quad \dot{x}_{4,2} = 2x_{4,2} + x_{4,3} - x_{4,4}\,,$$
$$\dot{x}_{4,3} = 2x_{4,3} + 4\,\mathrm{e}^{-2t}\,x_{4,4} \quad \text{und} \quad \dot{x}_{4,4} = 2x_{4,4}\,.$$

Daraus ergibt sich $x_{4,4} = \mathrm{e}^{2t}$ und somit muss $\dot{x}_{4,3} = 2x_{4,3} + 4e^{-2t}\,\mathrm{e}^{2t} = 2x_{4,3} + 4$ gelten. Dies ist für $x_{4,3} = -2$ erfüllt. Damit wird die zweite Gleichung zu $\dot{x}_{4,2} = 2x_{4,2} - 2 - \mathrm{e}^{2t}$. Der Ansatz $x_{4,2} = at\,\mathrm{e}^{2t} + b$ liefert $x_{4,2} = 1 - t\,\mathrm{e}^{2t}$. Also muss $\dot{x}_{4,1} = x_{4,1} - 5 + (t-1)d^{2t}$ gelten. Der Ansatz $x_{4,1} = (a+bt)\,\mathrm{e}^{2t} + c$ liefert $x_{4,1} = 5 + (t-2)\,\mathrm{e}^{2t}$.

Wir haben also die folgenden vier Lösungen des homogenen Systems gefunden:

$$\boldsymbol{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_3(t) = \begin{pmatrix} (-t+3)\,\mathrm{e}^{2t} \\ t\,\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x}_4(t) = \begin{pmatrix} 5 + (t-2)\,\mathrm{e}^{2t} \\ 1 - t\,\mathrm{e}^{2t} \\ -2 \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}.$$

(2) **Test der Lösungen auf lineare Unabhängigkeit:** Wir bestimmen die Wronskideterminante der gefundenen Lösungen in $t = 0$, um die gefundenen Lösungen auf Unabhängigkeit zu testen.

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{0} & -\mathrm{e}^{2\cdot 0} & (-0+3)\,\mathrm{e}^{2\cdot 0} & 5 + (0-2)\,\mathrm{e}^{2\cdot 0} \\ 0 & \mathrm{e}^{2\cdot 0} & 0\cdot \mathrm{e}^{2\cdot 0} & 1 - 0\cdot \mathrm{e}^{2\cdot 0} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\cdot 0} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^{2\cdot 0} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

D. h., die vier gefundenen Lösungen sind wie gewünscht linear unabhängig.

(3) **Bestimmung einer partikulären Lösung:** Entfällt, da das gegebene System homogen ist.

(4) **Bestimmung der allgemeinen Lösung:** Die allgemeine Lösung ergibt sich zu

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\boldsymbol{x}_1(t) + c_2\boldsymbol{x}_2(t) + c_3\boldsymbol{x}_3(t) + c_4\boldsymbol{x}_4(t)\,, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}\,.$$

(5) **Bestimmung der Lösung des AWP:** Wir bestimmen die Koeffizienten c_1, c_2, c_3 und c_4 aus der Anfangsbedingung $\boldsymbol{x}(0) = (7, 3, -1, 1)^\top$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c_1 = 3,\ c_2 = 2,\ c_3 = c_4 = 1\,.$$

Damit ergibt sich die Lösung des Anfangswertproblems zu $\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} 3\,\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{2t} + 5 \\ 2\,\mathrm{e}^{2t} + 1 \\ -2 + \mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$.

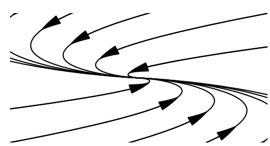
67.2 (a) Wir bestimmen die Eigenwerte von A:

$$\chi_A = (1 - x)\,(-5 - x) - 3(-3) = (x + 2)^2\,, \text{ sodass } \lambda = -2$$

der einzige Eigenwert von A ist. Dieser Eigenwert hat die algebraische Vielfachheit zwei.

Da $\mathrm{Re}(\lambda) = -2 < 0$, und λ der einzige Eigenwert des Systems ist, ist der Gleichgewichtspunkt dieses linearen Systems asymptotisch stabil.

Wir bestimmen auch noch den Typ des Gleichgewichtspunktes: Da die geometrische Vielfachheit von $\lambda = -2$ offenbar 1 ist, haben wir einen *Strudel* vorliegen, siehe das nebenstehende Bild.



(b) $\boldsymbol{a}$ ist ein Gleichgewichtspunkt des gegebenen Systems genau dann, wenn

$$A\boldsymbol{a} + \boldsymbol{s} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad A\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{s}\,.$$

Lösen dieses linearen Gleichungssystems liefert $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1)^\top$.

67.3 Wir gehen nach unserem Rezept vor:

(a) (1) Wir betrachten die zwei Lösungen

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

des homogenen Systems, die man durch Probieren findet.

(2) Wir testen die zwei Lösungen mit der Wronskideterminante auf lineare Unabhängigkeit; es gilt

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = t^2 + t \neq 0$$

für alle $t > 0$. Somit haben wir ein Fundamentalsystem; wir setzen

$$X(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems

$$\boldsymbol{x}_h(t) = X(t)\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 \quad \text{mit } \boldsymbol{c} = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2 .$$

(3) Eine partikuläre Lösung finden wir durch Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz $\boldsymbol{x}_p = X(t)\,\boldsymbol{c}(t)$ und gehen damit in das inhomogene DGL-System ein; wir erhalten wegen

$$X^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^2+t} & -\frac{1}{t+1} \\ \frac{1}{t^2+t} & \frac{t}{t+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Bestimmungsgleichung für $\boldsymbol{c}(t)$:

$$\boldsymbol{c}(t) = \int X^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$\boldsymbol{x}_p(t) = X(t)\,\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} .$$

(4) Schließlich erhalten wir die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p + L_h = \boldsymbol{x}_p + c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} t^2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) (1) Verschiedene Lösungen $\boldsymbol{x}_1 = (1, t)^\top$ und $\boldsymbol{x}_2 = (-1/t, t^2)^\top$ haben wir bereits.

(2) Wir testen die zwei Lösungen mit der Wronskideterminante auf lineare Unabhängigkeit; es gilt für $t > 0$

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{pmatrix} = t^2 + 1 \neq 0\,, \quad \text{sodass } X(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem ist. Die allgemeine Lösung des homogenen DGL-Systems lautet

$$\boldsymbol{x}_h(t) = X(t)\,\boldsymbol{c} = c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2)^\top \in \mathbb{R}^2 .$$

Eine partikuläre Lösung finden wir durch Variation der Konstanten, d. h., wir machen den Ansatz $\boldsymbol{x}_p = X(t)\,\boldsymbol{c}(t)$. Wir erhalten:

$$\boldsymbol{c}(t) = \int X^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t)\,\mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} \frac{t^2}{t^2+1} & \frac{1}{t(t^2+1)} \\ -\frac{t}{t^2+1} & \frac{1}{t^2+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Damit erhalten wir die partikuläre Lösung

$$\boldsymbol{x}_p(t) = X(t)\,\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{t} \\ t & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t\,\ln(t) \end{pmatrix} .$$

Schließlich können wir die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems angeben:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_p + L_h = \boldsymbol{x}_p + c_1\boldsymbol{x}_1 + c_2\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} \ln(t) \\ t\,\ln(t) \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{t} \\ t^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R} .$$

67.4 (a) Man setze $x = \phi$ und $y = \dot{\phi}$, woraus sich das DGL-System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -\frac{g}{l}\sin x \end{pmatrix}$$

ergibt. Dessen stationäre Lösungen sind $x = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, $y = 0$.

(b) Die zu den stationären Lösungen gehörigen linearen DGL-Systeme sind

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{k+1}\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - k\pi \\ y \end{pmatrix} .$$

Für geradzahlige k erhält man die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\,\mathrm{i}\sqrt{g/l}$ und für ungeradzahlige k die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{g/l}$. Die stationären Lösungen für ungeradzahlige k sind somit instabil. Im Fall geradzahliger k Werte ist aus der Linearisierung keine Aussage möglich, da $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

68 Randwertprobleme

68.1 Aufgaben

68.1 Ermitteln Sie jeweils die Lösungsmenge des RWP $\ddot{x} + x = 0,\ x(0) = 1,\ x(b) = d$ für

(a) $b = d = 1$, (b) $b = \pi,\ d = -1$, (c) $b = \pi,\ d = -2$.

68.2 Gegeben ist das inhomogene RWP

$$\ddot{x} + x = 1 + t + \cos t, \quad x(0) = 1, \quad x(b) = 1 + \pi\,.$$

Für welches $b \in \mathbb{R}$ ist das RWP unlösbar, für welche ist es eindeutig lösbar? Bestimmen Sie eine Lösung für $b = \pi/2$.

68.3 Wir betrachten das Randwertproblem

$$\ddot{x} + Cx = g, \quad x(0) = x(1) = 0 \ \text{ mit } \ C \in \mathbb{R}\,.$$

Diese Gleichung wird *diskretisiert*, indem man die Funktionen nur auf den Stützstellen $I_h = \{t_\nu \in [0,1] \,|\, t_\nu = \nu h, h = 1/n, 0 \le \nu \le n\}$ betrachtet und die Ableitung $\ddot{x}$ durch $\frac{1}{h^2}(x(t_{\nu+1}) - 2x(t_\nu) + x(t_{\nu-1}))$ approximiert. Auf welches lineare Gleichungssystem führt dies?

Schreiben Sie in MATLAB eine Funktion, die zu $C = -1$, $n = 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ und der Funktion $g(t) = t^3$ einen Plot mit den erhaltenen Näherungslösungen ausgibt.

68.2 Lösungen

68.1 Die allgemeine Lösung der DGL ist

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t\,.$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen folgt:

$$x(0) = 1 \ \Rightarrow\ C_1 = 1\,,$$
$$x(b) = d \ \Rightarrow\ \cos b + C_2 \sin b = d \ \Rightarrow\ C_2 = \frac{d - \cos b}{\sin b}\,, \quad \text{falls} \quad \sin b \neq 0\,.$$

Nun betrachten wir die verschiedenen Situationen:

(a) $b = d = 1$: Das RWP ist eindeutig lösbar, und die Lösung lautet

$$x(t) = \cos t + \frac{1 - \cos 1}{\sin 1} \sin t\,.$$

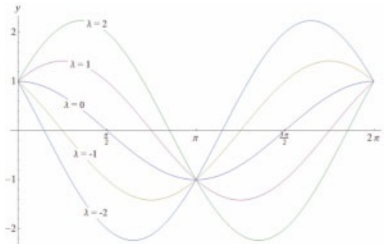
C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_68,

(b) $b = \pi,\ \ d = -1$: Das RWP besitzt unendlich viele Lösungen, genauer:

Die Randbedingungen werden durch $C_1 = 1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ erfüllt. Somit folgt

$$x(t) = \cos t + \lambda \sin t\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Man sagt: Das RWP besitzt eine einparametrige Lösungsschar.



(c) $b = \pi,\ \ d = -2$: Das RWP ist nicht lösbar, aus der 2. Randbedingung folgt nämlich $-C_1 = -2$ im Widerspruch zur ersten Bedingung $C_1 = 1$.

68.2 Ein reelles Fundamentalsystem der homogenen DGL ist bekanntlich $\{\cos, \sin\}$.

1.Weg: Wir ermitteln eine partikuläre Lösung durch den Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} x_p &= A + Bt + Ct\cos t + Dt\sin t \\ \dot{x}_p &= B + C\cos t - Ct\sin t + D\sin t + Dt\cos t \\ \ddot{x}_p &= -2C\sin t - Ct\cos t + 2D\cos t - Dt\sin t \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$A + Bt - 2C\sin t + 2D\cos t = 1 + t + \cos t\,.$$

Die Funktionen 1, t, $\cos t$, $\sin t$ sind linear unabhängig, der Koeffizientenvergleich liefert $A = B = 1,\ C = 0,\ D = 1/2$. Die allgemeine Lösung der DGL ist somit

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + t + 1 + \tfrac{1}{2}t\sin t\,.$$

Wir bestimmen C_1 und C_2 durch Berücksichtigung der Randbedingungen:

$$\begin{aligned} &x(0) = 1 \ \Rightarrow\ C_1 + 1 = 1 \ \Rightarrow\ C_1 = 0 \\ &x(b) = 1 + \pi \ \Rightarrow\ C_2\sin b + b + 1 + \tfrac{1}{2}b\sin b = 1 + \pi \ \Rightarrow\ C_2 = \frac{\pi - b}{\sin} - \frac{b}{2}\,,\ \ b \neq k\pi\,. \end{aligned}$$

Für $b = \frac{\pi}{2}$ ist $C_2 = \frac{\pi}{4}$, und

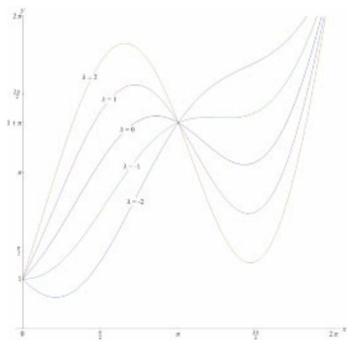
$$x(t) = 1 + t + \left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{t}{2}\right)\sin t$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung des RWP.

Für $b = \pi$ ist $C_2 \in \mathbb{R}$ beliebig, und wir erhalten eine einparametrige Lösungsschar des RWP

$$x(t) = 1 + t + \left(\lambda + \tfrac{t}{2}\right) \sin t\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

Für $b = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$ sind die Randbedingungen widersprüchlich und das RWP ist somit nicht lösbar.



2.Weg: Lösung mit der Green'schen Funktion (dieser Weg ist vor allem dann zu wählen, wenn der Störgliedansatz nicht möglich ist oder Variation der Konstanten zu schwierig ist).

Wir beachten, dass $\{\cos, \sin\}$ ein Fundamentalsystem von $\ddot{x} + x = 0$ ist, und setzen

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir für D die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos b & \sin b \\ -\sin b & \cos b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos b & \sin b \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det(D) = \sin b$ ist das RWP eindeutig lösbar, falls $b \neq k\,\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Es sei nun $b = \pi/2$. Das RWP ist eindeutig lösbar. Wir bestimmen die Lösung mit der Green'schen Funktion anhand unseres Rezepts, wobei wir vorab eine Lösung des halbhomogenen RWP

$$\ddot{x} + x = 1 + t + \cos t\,,\ x(0) = 0\,,\ x(\pi/2) = 0\,.$$

(1) Es ist $(\cos, \sin)$ ein Fundamentalsystem der homogenen DGL. Wir machen den Ansatz

$$g(t,\tau) = \begin{cases} (a_1(\tau) + b_1(\tau))\cos(t) + (a_2(\tau) + b_2(\tau))\sin(t) & ,\ \tau \leq t \\ (a_1(\tau) - b_1(\tau))\cos(t) + (a_2(\tau) - b_2(\tau))\sin(t) & ,\ \tau \geq t \end{cases}.$$

(2) Das zu lösende Gleichungssystem lautet

$$b_1(t)\cos(t) + b_2(t)\sin(t) = 0\,,\ -b_1(t)\sin(t) + b_2(t)\cos(t) = 1/2\,.$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist offenbar $b_1(t) = -\frac{1}{2}\sin(t)$ und $b_2(t) = \frac{1}{2}\cos(t)$.

(3) Nun ermitteln wir $a_1(\tau)$ und $a_2(\tau)$ aus dem Gleichungssystem

$$g(0,\tau) = a_1(\tau) + b_1(\tau) = 0 \ \text{ und } \ g(\pi/2,\tau) = a_2(\tau) - b_2(\tau) = 0\,.$$

Offenbar ist $a_1 = {}^1\!/_2 = a_2$ die eindeutig bestimmte Lösung.

Wir erhalten also die Green'sche Funktion

$$g(t,\tau) = \begin{cases} -\cos t\,\sin\tau & , \ \tau \le t \\ -\sin t\,\cos\tau & , \ \tau \ge t \end{cases} .$$

Damit lautet die Lösung des RWPs

$$\begin{aligned}
x_{\mathrm{I}}(t) &= \int_0^{\pi/2} g(t,\tau)s(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= -\int_0^t \cos t \sin\tau\,(1+\tau+\cos\tau)\ \mathrm{d}\tau - \int_t^{\pi/2} \sin t\cos\tau\,(1+\tau+\cos\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= -\cos t\int_0^t \sin\tau + \tau\sin\tau + \sin\tau\cos\tau\ \mathrm{d}\tau - \sin t\int_t^{\pi/2} \cos\tau + \tau\cos\tau + \cos^2\tau\ \mathrm{d}\tau \\
&= -\cos t\left[-\cos\tau + \sin\tau - \tau\,\cos\tau + \frac{1}{2}\sin^2\tau\right]_0^t \\
&\quad -\sin t\left[\sin\tau + \cos\tau + \tau\,\sin\tau + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{4}\sin 2\tau\right]_t^{\pi/2} \\
&= -\cos t\left(-\cos t + \sin t - t\,\cos t + \frac{1}{2}\sin^2 t + 1\right) \\
&\quad -\sin t\left(1 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \sin t - \cos t - t\,\sin t - \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin 2t\right) \\
&= 1 + t - \cos t - \left(1 + \frac{3\pi}{4} + \frac{t}{2}\right)\sin t\,.
\end{aligned}$$

Mit dieser Lösung finden wir nun ganz einfach eine Lösung des ursprünglichen RWP. Dazu bestimmen wir noch schnell eine Lösung für das halbhomogene RWP

$$\ddot{x} + x = 0\,,\ x(0) = 1\,,\ x(\pi/2) = 1 + \pi\,;$$

eine solche lautet

$$x_{\mathrm{II}}(t) = C_1\cos t + C_2\sin t\,,$$

wobei sich C_1 und C_2 aus den Randbedingungen ergeben:

$$x(0) = 1 \ \Rightarrow\ C_1 = 1 \quad \text{und} \quad x(\pi/2) = 1 + \pi \ \Rightarrow\ C_2 = 1 + \pi\,.$$

Somit gilt

$$x_{\mathrm{II}}(t) = \cos t + (1 + \pi)\sin t\,.$$

Das (ursprüngliche) inhomogene RWP hat somit die Lösung

$$x(t) = x_{\mathrm{I}}(t) + x_{\mathrm{II}}(t) = 1 + t + \left(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{t}{2}\right)\sin t\,.$$

68.3 Aus der Differentialgleichung wird in der Diskretisierung

$$\frac{1}{h^2}(x(t_{\nu+1}) - 2x(t_\nu) + x(t_{\nu-1})) + Cx(t_\nu) = g(t_\nu), x(t_0) = x(t_n) = 0\,.$$

Als lineares Gleichungssystem ergibt dies

$$\begin{pmatrix} (-2+h^2C) & 1 & & & \\ 1 & (-2+h^2C) & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & (-2+h^2C) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} g(t_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ g(t_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix ist *tridiagonal*. Den gewünschten Plot erhält man mit folgendem Skript:

```
clear all;
clf;
g = @(x)x.^3;
% Die Matrixdimensionen 8,16,32,64 werden durchlaufen.
hold on
for N = 3:6
    n = 2^N;
    h = 1/n;
    L = [zeros(1,n-1); eye(n-2), zeros(n-2,1)];
    R = [zeros(n-2,1), eye(n-2); zeros(1,n-1)];
    D = (-2-h^2) * eye(n-1);
    A = L + D + R ;
    b = h^2 * g(h:h:1-h)';
    y=A\b;
    x=h:h:1-h;
    plot(x,y);
end
```

Die exakte Lösung des RWP lautet

$$x(t) = -t^3 - 6t - \frac{7(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^t)}{\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}}\,.$$

Einen Plot dieser Lösung erhält man mit MATLAB wie nebenstehend angegeben.

```
h=1/2^6;
x=h:h:1-h;
a=-7/(exp(1)-exp(-1));
f = @(x) -x.^3-6*x+a*(exp(-x)-exp(x));
plot(x,f(x))
```

69 Grundbegriffe der Numerik

69.1 Aufgaben

69.1 Bestimmen Sie die absolute und relative Kondition der Probleme $f(x) = x^3$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

69.2 Gegeben ist eine DGL $\dot{x} = v(x)$, $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit Anfangswert $x(0) = x_0$. Die Abhängigkeit der Lösung $x(t)$ vom Anfangswert wird mit der Schreibweise $x(t) = x(t; x_0)$ deutlich gemacht. Berechnen Sie die *Sensitivität* der Lösung für ein festes $t > 0$ bezüglich des Anfangswertes z, also die absolute und relative Kondition des Problems $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \mapsto x(t, x_0)$ für ein festes $t > 0$ für

(a) $v(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

(b) $v(x) = x^2$.

69.3 Überprüfen Sie, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind:

(a) $\sin(x) = O(1)$ für $x \to \infty$.

(b) $\sin(x) = O(1)$ für $x \to 0$.

(c) $\mathrm{fl}(\pi) - \pi = O(\varepsilon_{b,t})$ für $\varepsilon_{b,t} \to 0$.

(d) $x^3 + x^4 = O(x^4)$ für $x \to 0$.

(e) $A = O(V^{2/3})$ für $V \to \infty$, wobei A und V die Fläche und das Volumen einer Kugel sind, gemessen in Quadratmillimeter bzw. Kubikkilometer.

69.2 Lösungen

69.1 Für f erhält man

$$\kappa_{\mathrm{abs}}(x) = |f'(x)| = 3x^2 \quad \text{und} \quad \kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|/|x|} = \frac{3x^2}{|x^3|/|x|} = 3\,.$$

Das Problem ist also gut konditioniert.

Für g gilt

$$\kappa_{\mathrm{abs}}(x) = |g'(x)| = \left|\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right| = \left|\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right| \quad \text{und}$$
$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \left|\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,\frac{x}{\sin x/x}\right| = \left|\frac{x\cos x - \sin x}{\sin x}\right|.$$

Es gilt $\lim_{x\to 0} \kappa_{\mathrm{rel}}(x) = 0$, wie sich durch Anwendung der L'Hopital'schen Regel zeigt. Nahe 0 ist das Problem daher gut konditioniert. In der Nähe von π ist $\kappa_{\mathrm{rel}}(x)$ hingegen groß, was auch nicht überraschen sollte, da dort eine Nullstelle von g ist.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_69,

69.2 Wie man leicht nachrechnet, sind die Lösungen zu den AWPen jeweils gegeben durch $x(t;x_0) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,x_0$ und $x(t;x_0) = (1/x_0 - t)^{-1}$. Beide Lösungen sind differenzierbare Funktionen (die erste für $t \in [0,\infty)$, die zweite für $t \in [0, 1/x_0)$).

Somit sind die Konditionszahlen nach den Regeln für differenzierbare Funktionen:

$$\kappa_{\mathrm{abs}}(x_0) = \mathrm{e}^{\lambda t}\,,\ \kappa_{\mathrm{rel}}(x_0) = 1 \quad \text{bzw.} \quad \kappa_{\mathrm{abs}}(x_0) = (1 - t x_0)^{-2}\,,\ \kappa_{\mathrm{rel}}(x_0) = (1 - t x_0)^{-1}\,.$$

Beachte, dass das erste Problem für alle Zeiten *relativ* gut konditioniert bleibt, aber die *absolute* Kondition sich für $t \to \infty$ verschlechtert. Das *blow-up* macht das zweite Problem für $t \to 1/x_0$ natürlich schlecht konditioniert.

69.3

(a) Richtig, da $|\sin(x)| \le 1$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Richtig, da $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$ gilt.

(c) Richtig, denn das ist gerade die Forderung an die Rundungsfunktion.

(d) Falsch, da $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} + 1 = \pm\infty$, also insbesondere nicht beschränkt ist.

(e) Richtig, da $A = 4\pi r^2$ und $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ bei Standardeinheiten gilt. Die Veränderung der Einheiten hat nur den Effekt, dass sich die Konstanten ändern, was für die Größenordnung keine Rolle spielt.

70 Fixpunktiteration

70.1 Aufgaben

70.1 Zeigen Sie, dass das System

$$6x = \cos x + 2y,$$
$$8y = xy^2 + \sin x$$

auf $E = [0,1] \times [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Wir wollen die Lösung mit Hilfe des globalen Konvergenzsatzes bis auf eine Genauigkeit von 10^{-3} in der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ bestimmen. Wie viele Iterationsschritte reichen dazu, wenn wir im Punkt $(0,0)$ beginnen?

70.2 Zur Bestimmung einer Nullstelle von $f(x) = \mathrm{e}^x - \sin x$ betrachten wir die Fixpunktgleichung $\phi(x) = x$ mit

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) &= \mathrm{e}^x - \sin x + x\,,\\
\phi_2(x) &= \sin x - \mathrm{e}^x + x\,,\\
\phi_3(x) &= \arcsin(\mathrm{e}^x) \quad \text{für } x < 0,\\
\phi_4(x) &= \ln(\sin x) \quad \text{für } x \in \left]-2\pi, -\pi\right[\,.
\end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie jeweils die Ableitung von ϕ_i und skizzieren Sie ϕ_i und ϕ_i'.

(b) Kennzeichnen Sie die Bereiche, wo die Fixpunktiteration mit Sicherheit konvergiert.

70.3 Mittels trigonometrischer Identitäten kann man zeigen, dass die Funktion

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin x_1 + \cos x_2 \\ \sin x_2 - \cos x_1 \end{pmatrix}$$

eine globale Lipschitzbedingung erfüllt: $\|\phi(\boldsymbol{x}) - \phi(\boldsymbol{y})\| \le \theta\, \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ für $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$, wobei $\theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Wählen Sie speziell $\boldsymbol{x}_0 = (0,0)$ und schätzen Sie nur mithilfe der ersten Iteration ab, wie viele Schritte k der Fixpunktiteration mit ϕ erforderlich sind, um eine Genauigkeit von 10^{-6} der k-ten Iterierten garantieren zu können.

70.4 Erörtern Sie, welche Voraussetzungen des globalen Konvergenzsatzes bei den folgenden Funktionen erfüllt bzw. verletzt sind:

(a) $f_1 :]0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2,$

(b) $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(x+1),$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_70,

(c) $f_3 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\big(x_1^2 + x_2^2\big),$

(d) $f_4 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x_2^2, 1 - x_1),$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x).$

Welche Funktionen haben einen eindeutigen Fixpunkt im Definitionsbereich?

70.2 Lösungen

70.1 Die Aufgabe kann man als Fixpunktproblem formulieren $(x, y)^\top = \phi(x, y)$, mit

$$\phi(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{3} y \\ \frac{1}{8} x y^2 + \frac{1}{8}\sin x \end{pmatrix}.$$

Für $x \in [0,1]$ gilt $0 \leq \cos x \leq 1$ und $0 \leq \sin x \leq 1$ und daher $\phi\colon E \to E$. Ferner gilt

$$\phi'(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}\sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{8}\cos x & \frac{1}{4} x y \end{pmatrix}.$$

Für die Norm $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ ergibt sich

$$\|\phi'(x,y)\|_Z = \max\left\{\tfrac{1}{6}\,|\sin x| + \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{8}\left(|y^2 + \cos x| + 2|xy|\right)\right\} \leq \max\left\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\} = \tfrac{1}{2}\,.$$

Hier ist $\|\cdot\|_Z$ die zugehörige Matrixnorm, d. h. die *maximale Zeilensumme* (vgl. Kapitel 45 (Rezeptebuch)). Damit existiert also genau eine Lösung in E.

Nun wollen wir die benötigte Anzahl an Iterationen bestimmen: Es soll für den Fixpunkt z^* und $z_k = (x_k,\, y_k)$ gelten:

$$\|z^* - z_k\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|z_1 - z_0\| \leq 10^{-3}.$$

Da $(x_0, y_0) = (0, 0)$, gilt $(x_1, y_1) = (\frac{1}{6}, 0)$, d.,h. nach der A-priori-Fehlerabschätzung genügen

$$k \geq {}^{\ln\left(\frac{0.5\cdot 10^{-3}}{1/6}\right)}/_{\ln 1/2} > 8$$

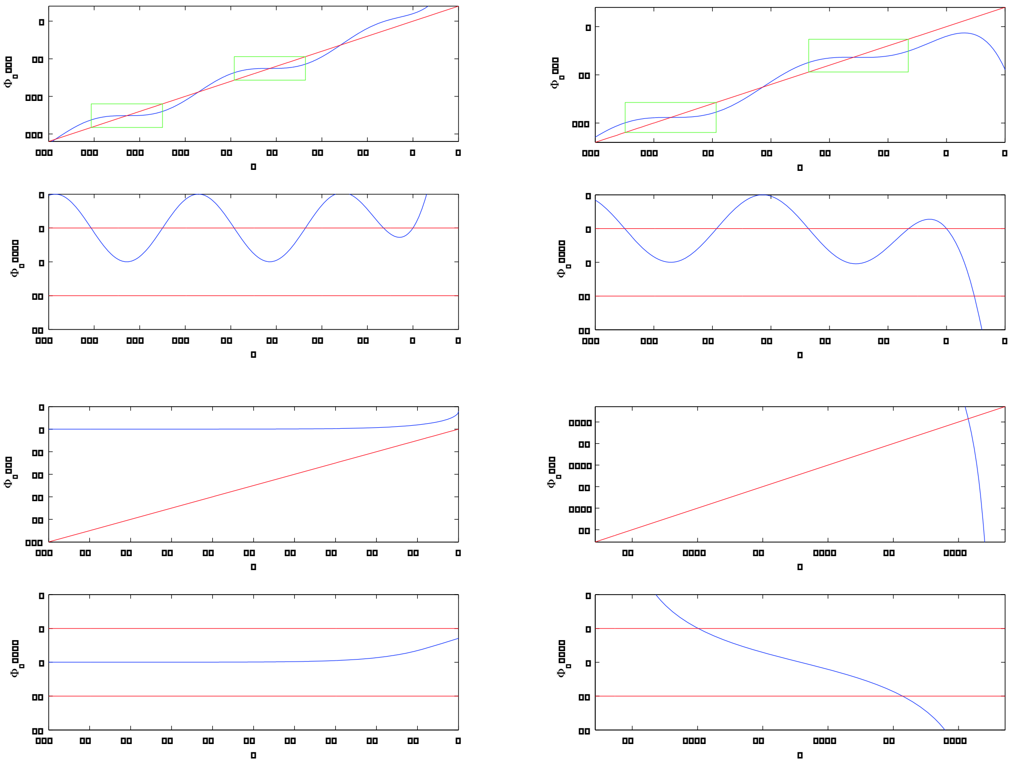
Iterationen.

70.2 Um zu überprüfen, ob eine Abbildung eine Kontraktion ist, ist in dem Fall, dass die Abbildung stetig differenzierbar ist, in der Regel das im Rezeptebuch angegebene Kriterium für Kontraktion hilfreich, das wir im Folgenden anwenden.

(a) Ableitungen:

$$\phi_1'(x) = \mathrm{e}^x - \cos x + 1\,, \ \phi_2'(x) = \cos x - \mathrm{e}^x + 1\,, \ \phi_3'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,, \ \phi_4'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}\,.$$

Funktionsplots:



(b) Die Fixpunktiteration konvergiert nach dem globalen Konvergenzsatz dann sicher, wenn wir ein Intervall $[a, b]$ finden mit $\phi([a, b]) \subseteq [a, b]$ und $|\phi'(x)| < 1$ für alle $x \in [a, b]$.
In den Plots von ϕ_i' sind jeweils die Linien ± 1 eingezeichnet. Nur wenn ϕ_i' zwischen diesen Linien liegt, ist die zweite Bedingung erfüllt. Dies liefert Kandidaten für das Intervall $[a, b]$. Für ϕ_1 und ϕ_2 können wir tatsächlich Intervalle finden, für welche die erste Bedingung ebenso erfüllt ist. Zum Vergleich wurde jeweils die Winkelhalbierende $x \mapsto x$ eingezeichnet.

70.3 Vermöge $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}^*\| = \|\phi(\boldsymbol{x}_{n-1}) - \phi(\boldsymbol{x}^*)\| \leq \theta\, \|\boldsymbol{x}_{n-1} - \boldsymbol{x}^*\|$ für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Fixpunktiteration $\boldsymbol{x}_n = \phi(\boldsymbol{x}_{n-1})$ gegen den Fixpunkt $\boldsymbol{x}^* = \phi(\boldsymbol{x}^*)$. Mit der A-priori-Fehlerabschätzung wissen wir

$$\left\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}^*\right\| \leq \frac{\theta^n}{1-\theta}\left\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\right\| \leq 10^{-6}.$$

Hier ist $\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{2}(1,-1)$, also $\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \theta$, woraus sich die Bedingung

$$\frac{\theta^{n+1}}{1-\theta} \le 10^{-6} \quad \Leftrightarrow \quad n \ge \frac{\ln 10^{-6} + \ln(1-\theta)}{\ln\theta} - 1 \approx 42.41$$

ergibt. Dies lässt sich mit Hilfe von $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ auch ohne Rechner grob schätzen:

$$\frac{\ln 10^{-6} + \ln(1-\theta)}{\ln\theta} - 1 \approx \frac{\ln 10^{-6}}{\ln\theta} = \frac{\ln 10^{-6}}{\ln\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\ln 10^{6}}{\ln\sqrt{2}} \approx \frac{\ln 2^{20}}{\ln 2^{1/2}} = 40\,.$$

Wir erreichen demnach spätestens nach 43 Iterationen der Funktion f die gewünschte Genauigkeit — für praktische Zwecke offenbar viel zu viel!

70.4 Die Voraussetzungen des globalen Konvergenzsatzes für $f: D \to \mathbb{R}^n$ sind:

- $D \subseteq \mathbb{R}^n$ (Abgeschlossenheit),
- $f(D) \subseteq D$ (Invarianz),
- $\|f(x) - f(y)\| \le \theta\,\|x - y\|$ für $x, y \in D$ mit $\theta \in\,]0,1[$ (Kontraktion).

In der Folge werden die Eigenschaften jeweils geprüft – anschließend entscheiden wir, ob ein eindeutiger Fixpunkt vorliegt.

(a) $f_1 :]0,1[\, \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$?

- $D =]0,1[\, \subseteq \mathbb{R}$ ist nicht abgeschlossen.
- $f_1(D) =]0,1[\, \subseteq D$ ist erfüllt.
- Die minimale Lipschitzkonstante ist $\theta = 2$.

Der Fixpunktsatz gilt nicht, f_1 hat gar keinen Fixpunkt – auf dem Abschluss $\overline{D} = [0,1]$ würde f_1 zwei Fixpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ besitzen.

(b) $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}(x+1)$?

- $D = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ist abgeschlossen.
- $f_2(D) = [\frac{1}{2}, 1] \subseteq D$ ist erfüllt.
- Hier ist sogar $|f_2(x) - f_2(y)| = \theta\,|x - y|$ mit $\theta = \frac{1}{2}$.

Der Fixpunktsatz ist erfüllt: f_2 hat den eindeutigen Fixpunkt $x_* = 1$.

(c) $f_3 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{2}\big(x_1^2 + x_2^2\big)$?

- $D = [0,1]^2$ ist abgeschlossen.
- Aus Dimensionsgründen gilt nicht $f_3(D) \subseteq D$.
- Die minimale Lipschitzkonstante bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist $\theta = \sqrt{2}$.

Der Fixpunktsatz kann nicht erfüllt sein: f_3 kann keine Fixpunkte besitzen, zumal hier Vektoren $x \in \mathbb{R}^2$ auf reelle Zahlen abgebildet werden.

(d) $f_4 : [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (x_2^2, 1 - x_1)$?

- $D = [0,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist abgeschlossen.
- $f_4(D) \subseteq [0,1]^2 = D$ ist erfüllt.
- Die minimale Lipschitzkonstante bzgl. der euklidischen Vektornorm $\|\cdot\|_2$ ist $\theta = 2$:
  Dazu bestimmen wir die Jacobimatrix
  $$Df_4(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
  Die zur euklidischen Norm zugehörige Matrixnorm ist die Spektralnorm (vgl. Kapitel 45). Da $x_2 \in [0,1]$, können wir die Spektralnorm durch 2 nach oben abschätzen. Eine Möglichkeit dazu ist
  $$\|Df_4(x)\|_2 = \sup \frac{\|Df_4(x)v\|}{\|v\|} = \frac{\sqrt{(2x_2v_2)^2 + (-v_1)^2}}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \leq 2,$$
  also
  $$\|Df_4(x)\|_2 \leq 2, \quad x \in [0,1]^2.$$
  Durch eine weitere Überlegung kann man zeigen, dass 2 auch minimale Lipschitzkonstante ist.

Der Fixpunktsatz gilt nicht – f_4 besitzt trotzdem den eindeutigen Fixpunkt $x^* = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, den man gemäß $f_4(x^*) = x^*$ herausfinden kann. Wir dürfen allerdings nicht für alle Startwerte $x^0 \in D$ Konvergenz der Fixpunktiteration $x^n = f(x^{n-1})$ gegen den Punkt $x^* \in D$ erwarten; in der Tat hat $f_4(x) = x$ hier eine weitere Lösung außerhalb des Definitionsbereichs D.

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(1 + \mathrm{e}^x)$?

- $D = \mathbb{R}$ ist natürlich abgeschlossen.
- $f_5(\mathbb{R}) =]0, \infty[\subseteq \mathbb{R}$ ist freilich erfüllt.
- Für die Funktion ist zwar nach dem Mittelwertsatz stets $|f_5(x) - f_5(y)| < |x - y|$ erfüllt, aber die minimale Lipschitzkonstante ist trotzdem $\theta = 1$.

Die entscheidende Voraussetzung des Fixpunktsatzes ist minimal verletzt – tatsächlich besitzt die Funktion wegen $f_5(x) > x$ keinen Fixpunkt.

71 Iterative Verfahren für lineare Gleichungssysteme

71.1 Aufgaben

71.1 Begründen Sie die Konvergenzaussage zum Jacobiverfahren auf Seite 646 (Rezeptebuch).

71.2 (a) Berechnen Sie mit dem Jacobiverfahren die ersten drei Iterierten $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcr} 15x_1 & + & 2x_2 & = & -1 \\ x_1 & - & 4x_2 & = & -9 \end{array} ,$$

wobei $\boldsymbol{x}_0$ der Nullvektor ist.

(b) Begründen Sie, dass die Folge $(\boldsymbol{x}_k)$ konvergiert.

71.3 Wiederholen Sie die vorhergehende Aufgabe mit dem Gauß-Seidelverfahren.

71.4 Bestimmen Sie mit dem Jacobi- und dem Gauß-Seidelverfahren die ersten beiden Iterierten $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ des folgenden linearen Gleichungssystems mit $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$

$$\begin{array}{rcrcrr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 = & 1 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 = & 4 \end{array} .$$

71.5 Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das den Jacobi- bzw. Gauß-Seidel-Algorithmus implementiert. Testen Sie dieses an Matrizen, die jeweils strikt diagonaldominant sind.

71.2 Lösungen

71.1 Wir erhalten für den Spektralradius einer strikt diagonaldominanten Matrix $A = D - (L + R)$ mit $M = D$ und $N = L + R$:

$$\rho(M^{-1}N) = \rho(D^{-1}(L+R) \leq \|D^{-1}(L+R)\|_\infty = \max_i \sum_{j \neq i} {}^{|a_{ij}|}/_{|a_{ii}|} < 1 .$$

Beachte man die Box zum Fixpunktproblem auf Seite 645 (Rezeptebuch).

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_71,

71.2 (a) Wir setzen $A = \begin{pmatrix} 15 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Das Jacobiverfahren lautet mit $A = D - (L + R)$

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)} = D^{-1}b + D^{-1}(L+R)\,\boldsymbol{x}^{(m)}\,,$$

wobei hier

$$D = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L + R = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir die Iterationsvorschrift

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(m)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_0 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{15} \\ \frac{9}{4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.0667 \\ 2.25 \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{x}_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{11}{30} \\ \frac{134}{60} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.367 \\ 2.23 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{82}{225} \\ \frac{259}{120} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.364 \\ 2.16 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Wir bestimmen den Spektralradius der Matrix

$$D^{-1}(L+R) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{15} \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Als Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ dieser Matrix ermitteln wir

$$\det(D^{-1}(L+R) - \lambda E) = \lambda^2 + \frac{2}{30} \;\Rightarrow\; \lambda_{1,2} = \pm\,\mathrm{i}\,\sqrt{2/30}\,.$$

Da beide Eigenwerte betragsmäßig kleiner als 1 sind, gilt $\rho(D^{-1}(L+R)) < 1$, und die Folge $(\boldsymbol{x}_n)$ konvergiert gegen die Lösung.

71.3 (a) Wir verwenden die Bezeichnungen A, $\boldsymbol{b}$, D, L und R aus der letzten Aufgabe. Das Gauß-Seidel-Verfahren lautet damit

$$\boldsymbol{x}^{(m+1)} = (D-L)^{-1}\boldsymbol{b} + (D-L)^{-1}R\,\boldsymbol{x}^{(m)} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{15} \\ \frac{67}{30} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2}{15} \\ 0 & \frac{-1}{30} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(m)}.$$

Damit erhalten wir nun sukzessive $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -0.0667 \\ 2.23 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.364 \\ 2.16 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -0.354 \\ 2.16 \end{pmatrix}$.

(b) Da die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 15 & 2 \\ 1 & -4 \end{smallmatrix}\right)$ strikt diagonaldominant ist, führt das Gauß-Seidel-Verfahren auf die Lösung des LGS.

71.4 Wir gehen analog vor wie in der vorherigen Aufgabe und erhalten:

Jacobiverfahren: $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.333 \\ 0.000 \\ 0.571 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.143 \\ -0.357 \\ 0.429 \end{pmatrix}$.

Gauß-Seidelverfahren: $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.333 \\ -0.167 \\ 0.500 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.111 \\ -0.222 \\ 0.619 \end{pmatrix}$.

71.5 Die Programme könnten wie folgt aussehen:

Jacobiverfahren:

```
function [ x,relerr,niter ] = jacobi( A,b,x0,tol,maxiter )
relerr=inf;
niter=1;

M=diag( diag(A) );
N=M-A;

while relerr >= tol & niter < maxiter
    x=M\(b+N*x0);
    relerr=norm(x-x0, inf)./norm(x,inf);
    x0=x;
    niter = niter+1;
end
```

Gauß-Seidelverfahren:

```
function [ x,relerr,niter ] = gausseidel( A,b,x0,tol,maxiter )
relerr=inf;
niter=1;
M=tril(A);
N=M-A;

while relerr >= tol & niter < maxiter
    x=M\(b+N*x0);
    relerr=norm(x-x0, inf)./norm(x,inf);
    x0=x;
    niter = niter+1;
end
```

72 Optimierung

72.1 Aufgaben

72.1 Wir betrachten im Folgenden das Verhalten des Gradientenverfahrens mit der Minimierungsregel, d. h., die Schrittweite h_k bestimmt sich durch

$$f(\boldsymbol{x}_k + h_k \boldsymbol{v}_k) = \min_{h \geq 0} f(\boldsymbol{x}_k + h\, \boldsymbol{v}_k)\,. \tag{M}$$

Es sei

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^\top C\, \boldsymbol{x}$$

mit $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit. Ferner sei

$$\varphi(h) = f(\boldsymbol{x}_k + h\, \boldsymbol{v}_k).$$

(a) Berechnen Sie φ' und φ'' und folgern Sie, dass $\varphi''(h) > 0$.

(b) Durch welche Gleichung wird die Lösung von (M) eindeutig bestimmt? Bestimmen Sie aus dieser Gleichung die Schrittweite h_k.

(c) Es sei ab jetzt

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \boldsymbol{x} = (x_1,\, x_2) \mapsto x_1^2 + 3x_2^2$$

mit $\boldsymbol{x}_0 = (3, 1)^\top$. Berechnen Sie die Iterierten $\boldsymbol{x}_k$ und die Schrittweiten h_k.

(d) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{v}_k$ und $\boldsymbol{v}_{k+1}$ senkrecht aufeinanderstehen.

(e) Was können Sie aufgrund von (d) über das Verhalten des Gradientenverfahrens sagen?

(f) Bestimmen Sie das globale Minimum $\boldsymbol{x}^*$ von f.

(g) Die Konvergenzrate γ des Verfahrens ist definiert durch

$$\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}^*\| \leq \gamma\, \|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*\|\,, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Bestimmen Sie γ.

72.2 Betrachten Sie $G(x) = {}^1\!/\!_x - a$ speziell für $a = 2$ und den Startwert $x_0 = 2$. Da $x_0 > {}^2\!/\!_a$ divergiert das *normale* Newtonverfahren für diesen Startwert. Um auch hier Konvergenz zu erzielen, wollen wir das Newtonverfahren auf geeignete Weise globalisieren.

(a) Zur Bestimmung einer Nullstelle einer stetig differenzierbaren Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lautet die Newtongleichung

$$DF(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{v}_k = -F(\boldsymbol{x}_k). \tag{72.1}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_72,

Wir wollen nun Lösungen von

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \text{ , wobei } f(\boldsymbol{x}) = \tfrac{1}{2}\|F(\boldsymbol{x})\|_2^2$$

bestimmen. Rechnen Sie nach, dass

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top \boldsymbol{v}_k < 0$$

gilt (mit $\boldsymbol{v}_k$ aus (72.1), falls $DF(\boldsymbol{x}_k)$ regulär ist).

(b) Formulieren Sie die Armijobedingung für die Abstiegsrichtung $\boldsymbol{v}_k$ aus (a) und rechnen Sie nach, dass sie äquivalent ist zu:
es sei $\gamma \in (0,1)$, und wähle das größte $h_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ mit

$$\|F(\boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{v}_k)\|_2^2 \leq (1 - 2h_k\gamma)\|F(\boldsymbol{x}_k)\|_2^2 \,. \tag{72.2}$$

Verwenden Sie dazu die Newtongleichung (72.1).

(c) Wir wollen das bisher Gesagte auf die Funktion G von oben mit $a = 2$ anwenden. Wie lautet die anfängliche Richtung, d. h. der anfängliche Newtonschritt v_0 hier?

(d) Welche Schrittweite $h_0 \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$ liefert die Bedingung (72.2) für $\gamma \in]0, \frac{1}{2}[$?

(e) Was fällt Ihnen nun bei der Iterierten $x_1 = x_0 + h_0 v_0$ auf?

72.3 Implementieren Sie das Gradientenverfahren und das Newtonverfahren für Optimierungsprobleme in MATLAB. Vergleichen Sie die Verfahren an den Minimierungsproblemen $f_1(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{2}y^2 + 1$ und $f_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 + 1$.

72.2 Lösungen

72.1 (a) Für die Funktion $\varphi(h)$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi'(h) &= \nabla f(\boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{v}_k)^\top \boldsymbol{v}_k = (\boldsymbol{c} + C\,(\boldsymbol{x}_k + h\,\boldsymbol{v}_k))^\top \boldsymbol{v}_k,\\ \varphi''(h) &= \boldsymbol{v}_k^\top \nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k + h\boldsymbol{v}_k)\,\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}_k^\top C\,\boldsymbol{v}_k > 0\,,\end{aligned}$$

da C positiv definit.

(b) Da $\varphi''(h) > 0$, ist h_k charakterisiert durch

$$\varphi'(h_k) = (\boldsymbol{c} + C\,(\boldsymbol{x}_k + h_k\,\boldsymbol{v}_k))^\top \boldsymbol{v}_k = 0\,.$$

Daraus folgt

$$h_k = -\frac{(\boldsymbol{c} + C\,\boldsymbol{x}_k)^\top \boldsymbol{v}_k}{\boldsymbol{v}_k^\top C\,\boldsymbol{v}_k} = -\frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top \boldsymbol{v}_k}{\boldsymbol{v}_k^\top C\,\boldsymbol{v}_k} = \frac{\|\nabla f(\boldsymbol{x}_k)\|^2}{\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top C\,\nabla f(\boldsymbol{x}_k)} = \frac{\|\boldsymbol{v}_k\|^2}{\boldsymbol{v}_k^\top C\,\boldsymbol{v}_k}.$$

(c) Gegeben ist nun $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 3x_2^2$. Dann gilt $c = 0$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ferner ist $\boldsymbol{x}_0 = (3,1)^\top$. Dann ergibt sich mit dem Gradientenverfahren und der Minimierungsregel (Details siehe unten):

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} \ (k \text{ gerade}),$$

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \ (k \text{ ungerade})$$

und $h_k = \frac{1}{4}$ für alle k. Im Punkt $\boldsymbol{x}_0 = (3,1)^\top$ haben wir

$$\boldsymbol{v}_0 = -\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = -\begin{pmatrix} 2x_{0,1} \\ 6x_{0,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}, \ h_0 = \frac{\|\boldsymbol{v}_0\|^2}{\boldsymbol{v}_0^\top C\, \boldsymbol{v}_0} = \frac{1}{4}\,.$$

Damit erhalten wir $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, und mit

$$\boldsymbol{v}_1 = -\nabla f(\boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \frac{\|\boldsymbol{v}_1\|^2}{\boldsymbol{v}_1^\top C\, \boldsymbol{v}_1} = \frac{1}{4}$$

erhalten wir

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_1 + h_1\boldsymbol{v}_1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \boldsymbol{x}_0\,.$$

Induktiv ergibt sich:

$$\boldsymbol{x}_k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ gerade}), \quad \boldsymbol{x}_k = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (k \text{ ungerade})\,.$$

(d) Für das Skalarprodukt von $\boldsymbol{v}_k$ und $\boldsymbol{v}_{k+1}$ gilt:

$$\boldsymbol{v}_k^\top \boldsymbol{v}_{k+1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}^\top \left(\tfrac{1}{2}\right)^{k+1} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0\,.$$

(e) Der durch das Verfahren erzeugte Polygonzug ist eine Zickzacklinie mit rechten Winkeln. Dies kann negative Auswirkungen auf die Konvergenzgeschwindigkeiten haben.

(f) Es ist $\nabla f(0,0) = 0$ und $\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, d. h., $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{0}$ ist das globale Minimum.

(g) Wegen $\|\boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{x}^*\| = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}^*\|$ gilt $\gamma = \frac{1}{2}$.

72.2 (a) Es gilt $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} F_i(\boldsymbol{x})^2$ und

$$\begin{aligned}\nabla f(\boldsymbol{x}) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right)_{1\le j\le n} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) F_i(\boldsymbol{x})\right)_{1\le j\le n}\\ &= \left(\sum_{i=1}^n (DF(\boldsymbol{x}))_{ij} F_i(\boldsymbol{x})\right)_{1\le j\le n} = \left(\sum_{i=1}^n (DF(x))_{ji}^\top F_i(\boldsymbol{x})\right)_{1\le j\le n}\end{aligned}$$

und daher

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = DF(x)^\top F(\boldsymbol{x})\,.$$

Die Newtongleichung besagt $\boldsymbol{v}_k = -DF(\boldsymbol{x}_k)^{-1} F(\boldsymbol{x}_k)$. Daher erhalten wir

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top \boldsymbol{v}_k = -(DF(\boldsymbol{x}_k)^\top F(\boldsymbol{x}_k))^\top DF(\boldsymbol{x}_k)^{-1} F(\boldsymbol{x}_k) = -F(\boldsymbol{x}_k)^\top F(\boldsymbol{x}_k) < 0\,.$$

(b) Die Armijobedingung lautet: Wähle das größte $h_k \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\}$ mit

$$f(\boldsymbol{x}_k + h_k \boldsymbol{v}_k) - f(\boldsymbol{x}_k) \le \gamma h_k \nabla f(\boldsymbol{x}_k)^\top \boldsymbol{v}_k\,.$$

Unter Verwendung der Definition von f erhalten wir

$$\tfrac{1}{2}\left(\|F(\boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{v}_k)\|_2^2 - \|F(\boldsymbol{x}_k)\|_2^2\right) \le -\gamma\, h_k F(\boldsymbol{x}_k)^\top F(\boldsymbol{x}_k)$$

und somit

$$\|F(\boldsymbol{x}_k + h_k\boldsymbol{v}_k)\|_2^2 \le (1 - 2\gamma h_k)\|F(\boldsymbol{x}_k)\|_2^2\,.$$

(c) Der anfängliche Newtonschritt ist $v_0 = -\frac{G(x_0)}{DG(x_0)} = x_0(1-2x_0) = -6$.

(d) Um ein konvergentes Verfahren zu haben, setzt man $x_1 = x_0 + h_0 v_0$ mit der größten *Schrittweite* $h_0 \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, die die Bedingung

$$\left|G(x_0 + h_0 v_0)\right|^2 \le (1 - 2\gamma h_0)\left|G(x_0)\right|^2$$

erfüllt. Versuchen wir es also sukzessive mit Zweierpotenzen:

- $h_0 = 1: \quad \left|G(2-6)\right|^2 = \frac{81}{16} > (1-2\gamma)\frac{9}{4} = (1-2\gamma h_0)\left|G(2)\right|^2$
- $h_0 = \frac{1}{2}: \quad \left|G(2-3)\right|^2 = 9 > (1-\gamma)\frac{9}{4} = (1-2\gamma h_0)\left|G(2)\right|^2$
- $h_0 = \frac{1}{4}: \quad \left|G\left(2-\frac{3}{2}\right)\right|^2 = 0 \le \left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{9}{4} = (1-2\gamma h_0)\left|G(2)\right|^2$

Die Wahl $h_0 = \frac{1}{4}$ ist hier unabhängig vom *Sicherheitsfaktor* $\gamma \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

(e) Man erhält diesmal mit $x_1 = x_0 + h_0 v_0 = \frac{1}{2}$ bereits die exakte Lösung der Gleichung $G(x) = 0$ — das ist ein netter Zufall. Sicher ist das nicht die Regel, aber das auf diese Art globalisierte Newtonverfahren mit Armijoregel konvergiert in der Tat unter recht allgemeinen Voraussetzungen.

72.3

```
%gradientenverf.m
function [x,xvec]=gradientenverf(f,Df,x,gamma,TOL)
weiter = 1;
xvec=[x];
while weiter
   fx=f(x);
   Dfx=Df(x);
   h=1;
   while (f(x-h*Dfx) > fx-gamma*h*Dfx'*Dfx)
      h=h/2;
   end
   x=x-h*Dfx;
   xvec=[xvec x];
   weiter = norm(h*Dfx) > TOL;
end
%newtonoptverf.m
function [x,xvec]=newtonoptverf(f,Df,Hf,x,TOL)
weiter = 1;
xvec=[x];
while weiter
    deltax= Hf(x)\Df(x);
    x=x-deltax;
    xvec=[xvec x];
    weiter = norm(deltax) > TOL;
end
%optimierungstest.m
f1=@(x) 1/2 * x(1)^2 + 9/2 * x(2)^2 + 1;
f2=@(x) 1/2 * x(1)^2 +       x(2)^2 + 1;
Df1=@(x)[x(1); 9* x(2)];
Df2=@(x)[x(1); 2* x(2)];
Hf1=@(x)[1 0 ; 0 9];
Hf2=@(x)[1 0 ; 0 2];
TOL=0.1;
x0=[10;20];
gamma = 0.5;
[x,xvec]=gradientenverf(f1,Df1,x0,gamma,TOL)
[x,xvec]=gradientenverf(f2,Df2,x0,gamma,TOL)
[x,xvec]=newtonoptverf(f1,Df1,Hf1,x0,TOL)
[x,xvec]=newtonoptverf(f2,Df2,Hf2,x0,TOL)
```

73 Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen II

73.1 Aufgaben

73.1 *Martiniglaseffekt:* Wir betrachten das lineare DGL-System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Lösung $\boldsymbol{x}(t, x_0)$ des AWP zum Anfangswert $\boldsymbol{x}_0$ gilt: $\|\boldsymbol{x}(t, x_0)\| = \|\boldsymbol{x}(t_0, x_0)\|$. Was heißt das geometrisch?

(b) Betrachten Sie nun eine numerische Approximation $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ an das AWP, wobei einmal die Approximation mittels explizitem Eulerverfahren und einmal mittels implizitem Eulerverfahren, jeweils mit konstanter Schrittweite h, berechnet wird. Bleibt auch hier $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t, x_0)\|$ für alle $t \geq t_0$ konstant? Woher kommt der Name *Martiniglaseffekt*?

(c) Was passiert, wenn Sie die Schrittweite h gegen 0 gehen lassen? Lässt sich damit der eben beobachtete Effekt vermeiden?

73.2 Eine Katze jagt in der x-y-Ebene eine Maus und läuft dabei stets mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit $v_K = 2$ direkt auf die Maus zu. Die Maus ihrerseits möchte auf direktem Wege mit Geschwindigkeitsbetrag $v_M = 1$ in ihr Loch im Punkt $(0, 1)$ fliehen. Die Maus befinde sich zur Zeit $t = 0$ am Punkt $(0, 0)$ und die Katze am Punkt $(1, 0)$.

(a) Stellen Sie die DGLen auf, welche die Bahn der Katze bzw. die Bahn der Maus beschreiben.

(b) Berechnen Sie mithilfe von MATLAB, wann und wo sich die Katze bis auf 10^{-3} und wann und wo bis auf 10^{-6} der Maus genähert hat. Benutzen Sie hierfür auch unterschiedliche Schrittweiten.

73.3 Wir betrachten den gedämpften harmonischen Oszillator

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} + x = 0$$

mit Parameter $\mu > 0, \mu \neq 2$.

(a) Schreiben Sie die DGL um in ein System 1. Ordnung.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit des Parameters μ die Eigenwerte des linearen Systems.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_73,

(c) Für welche Werte von μ ist das System als *steif* anzusehen?

(d) Es sei nun $\mu = 256 + \frac{1}{256}$. Wie klein muss dann die Schrittweite des expliziten Eulerverfahrens gewählt werden, damit die numerisch approximierte Lösung beschränkt ist?

(e) Wir wenden nun das implizite Eulerverfahren zur Berechnung einer approximierten Lösung an. Der Parameter μ sei gewählt wie in (d). Für welche Schrittweiten ist nun eine beschränkte numerische Lösung garantiert?

73.2 Lösungen

73.1 (a) Wir setzen $y(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|^2 = x_1(t)^2 + x_2(t)^2$. Damit gilt $\dot{y} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$. Einsetzen der DGL ergibt damit $\dot{y} = 2x_1x_2 - 2x_2x_1 = 0$. Damit ist $y(t) = \|\boldsymbol{x}(t)\|^2$ bzw. $\|\boldsymbol{x}(t)\|$für alle Zeiten $t \geq 0$ konstant, unabhängig vom Anfangswert $\boldsymbol{x}_0$.

(b) Rechnet man $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)\|$ explizit mit konstanter Schrittweite aus, so ergibt sich einmal $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_{k+1})\|^2 = (1 + \tau^2)\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)\|^2$ (expliziter Euler) bzw. einmal $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_{k+1})\| = \frac{1}{(1+\tau^2)}\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)\|$ (impliziter Euler). Insbesondere wächst bzw. fällt für ein festes $h > 0$ die Norm von $\|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_k)\|$ in jedem Schritt. Die approximierte Lösung wird also sicher nicht mehr periodisch sein sondern spiralförmig gegen ∞ (expliziter Euler) bzw. gegen 0 (impliziter Euler) konvergieren.

(c) Lässt man h gegen 0 gehen, so nähert sich die approximierte Lösung zwar stets der echten Lösung an, da $(1 + h^2)$ bzw. $\frac{1}{1+h^2}$ gegen 1 gehen. Dennoch wird man, für beliebig kleine $h > 0$ immer den vorherigen Effekt sehen, da pro Eulerschritt sich die Norm um einen *konstanten* Faktor vergrößert bzw. verkleinert.

73.2 (a) Die DGL der Maus lautet

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_M \\ \dot{y}_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_M \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_M(0) \\ y_M(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und kann leicht gelöst werden: $x_M(t) = 0$, $y_M(t) = tv_M$. Die Richtung in die die Katze läuft ist gegeben durch

$$r := \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_K \\ y_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_K \\ tv_M - y_K \end{pmatrix}.$$

Damit lauten die Gleichungen für die Katze

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_K \\ \dot{y}_K \end{pmatrix} = v_K \begin{pmatrix} -x_K \\ tv_M - y_K \end{pmatrix} \Big/ \left\| \begin{pmatrix} -x_K \\ tv_M - y_K \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

(b) Wir benutzen die folgende Version des expliziten Eulerverfahrens:

```
function x = expl_eu(f, x0, h, steps)

x = zeros(size(x0,1),steps);
x(:,1) = x0;
for k = 1:steps,
  x(:,k+1) = x(:,k) + h*f(x(:,k));
end
```

Außerdem benutzen wir das Programm:

```
function[t,x] = katzundmaus_ee(range, h)
f = @(x) [ -x(1)/sqrt((x(1)^2+(1-x(2))^2)); ...
(1-x(2))/sqrt((x(1)^2+(1-x(2))^2));...
2*(x(1)-x(3))/sqrt(((x(1)-x(3))^2+(x(2)-x(4))^2));...
2*(x(2)-x(4))/sqrt(((x(1)-x(3))^2+(x(2)-x(4))^2)) ];
x = [0;0;1;0];
n = 0;
while true
    n = n + 1;
    x_new = expl_eu(f, x(:,n), h, 1);
    x(:,n+1) = x_new(:,end);
    if (abs(x(1:2,n+1)-x(3:4,n+1)) < range)
        t=n*h;
        break;
    end
end
```

Man beachte den folgenden Code:

```
% Fangzeit mit dem ExplEuler zu verschiedenen Schrittweiten
[t_e1,x_e1] = katzundmaus_ee(10e-3,0.1)
[t_e2,x_e2] = katzundmaus_ee(10e-3,0.01)
[t_e3,x_e3] = katzundmaus_ee(10e-3,0.001)

plot(x_e3(1,:),x_e3(2,:));
hold on;
plot(x_e3(3,:),x_e3(4,:),'r');
```

73.3 (a) Das DGL-System 1. Ordnung lautet mit $y = \dot{x}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} .$$

(b) Wir ermitteln die Eigenwerte von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\det(A - \lambda E_2) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda + \mu) + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda_{1/2} = \tfrac{1}{2}(-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4})\,.$$

Mit $\mu \neq 2$ erhält man in jedem Fall 2 verschiedene Eigenwerte. Wir unterscheiden 2 Fälle. Entweder ist $\mu^2 - 4 < 0$, dann erhalten wir komplex konjugierte Eigenwerte mit Realteil $-\frac{\mu}{2} < 0$ (da $\mu > 0$). Oder aber es ist $\mu^2 - 4 > 0$, dann erhalten wir 2 reelle Eigenwerte, die in jedem Falle beide (da $\mu > \sqrt{\mu^2 - 4}$) negativ sind.

(c) Das System ist dann als steif anzusehen, wenn die Linearisierung, also sprich die Matrix A, einen Eigenwert mit verhältnismäßig großem negativen Realteil besitzt. Dies ist der Fall für $\mu^2 - 4 > 0$, da man dann einen Eigenwert ($\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}$) nahe bei 0 erhält, der andere ($\lambda_2 = \frac{1}{2}(-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4})$) aber fast bei $-\mu$ liegt.

(d) Mit $\mu = 2^8 + 2^{-8}$ erhält man gerade $\lambda_1 = -2^{-8}$ (also sehr nahe bei 0) und $\lambda_2 = -2^8$ (also stark negativ).

Mit dem expliziten Eulerverfahren erhalten wir $\boldsymbol{x}_k = \tilde{A}_h^k \boldsymbol{x}_0$ mit der Matrix $\tilde{A}_h = (E_2 + h\,A)$.

Damit die numerische Lösung beschränkt bleibt, müssen die Eigenwerte von $\tilde{A}_h$ vom Betrag her kleiner als 1 sein (andernfalls *explodiert* $\tilde{A}_h^k$). Die Eigenwerte von $E_2 + hA$ sind gerade $1 + h\,\lambda_{1/2}$. Setzen wir die beiden Eigenwerte ein, so stellen wir fest, dass der kleine Eigenwert λ_1 kein Problem darstellt. Vielmehr müssen wir auf λ_2 achten. Aus $-1 < 1 + h\,\lambda_2 < 1$ und $h > 0$ folgt schließlich, dass $h < \frac{2}{\lambda_2}$ gelten muss. Also ist $\frac{2}{2^8} = \frac{1}{128}$ die maximale Schrittweite für das explizite Eulerverfahren, wenn die numerische Lösung noch konstant bleiben soll.

(e) Mit dem impliziten Eulerverfahren erhalten wir $\boldsymbol{x}_k = \tilde{B}_h^k \boldsymbol{x}_0$ mit der Matrix $\tilde{B}_h = (E_2 - h\,A)^{-1}$.

Die Eigenwerte davon sind $\frac{1}{1 - h\,\lambda_{1/2}}$. Insbesondere ist aber für $\lambda_{1/2} < 0$ dieser Ausdruck immer betragsmäßig kleiner 1. Damit ist die numerische Lösung bei Verwendung jeglicher Schrittweite $h > 0$ beschränkt.

Bemerkung: Für eine möglichst *gute* Lösung, sollte man die Schrittweite natürlich dennoch nicht zu groß wählen. Jedoch liefert die Verwendung von impliziten Verfahren für obiges Problem nicht von vornherein eine von der Approximationsgenauigkeit unabhängige Schrittweitenbeschränkung.

74 Fourierreihen – Berechnung der Fourierkoeffizienten

74.1 Aufgaben

74.1 Bestimmen Sie die cos-sin-Darstellungen der Fourierreihen der folgenden 2π-periodischen Funktionen:

(a) $f(x) = \left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}$ für $x \in [-\pi, \pi)$,

(b) $f(x) = (x - \pi)^2$ für $x \in [0, 2\pi)$,

(c) $f(x) = |\sin x|$ für $x \in [-\pi, \pi)$,

(d) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$.

74.2 Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \pi - |x| \qquad \text{für} \qquad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

(a) Man berechne die Koeffizienten der zugehörigen cos-sin-Darstellung $F(x)$.

(b) Man bestimme mit Hilfe von Teilaufgabe (a) den Wert der unendlichen Reihe

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$$

74.3 Begründen Sie die Rechenregeln in der Box auf Seite 674 (Rezeptebuch).

74.4 Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten a_k, b_k und c_k der 2π-periodischen Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \\ \cos(x)\,, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0\,, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi) \end{cases}\,.$$

74.2 Lösungen

74.1 (a) Da die Funktion f ungerade ist, erhalten wir für die Koeffizienten $a_n = 0$ und für b_n gilt:

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_74,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\left(\frac{x}{\pi}\right)^3 - \frac{x}{\pi}\right]\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^4}\int_0^{\pi} x^3\sin(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi^4}\left[\frac{-1}{n}x^3\cos(nx)\right]_0^{\pi} + \frac{6}{n\pi^4}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sin(nx) - nx\cos(nx)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\frac{-2x^3}{n\pi^4}\cos(nx) - \frac{2}{n^2\pi^2}\sin(nx) + \frac{2x}{n\pi^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&\quad + \frac{6}{n\pi^4}\left[\frac{1}{n^3}\left(-2\sin(nx) + 2nx\cos(nx) + n^2x^2\sin(nx)\right)\right]_0^{\pi} \\
&= \left[\left(\frac{-2x^3}{n\pi^4} + \frac{2x}{n\pi^2} + \frac{12x}{n^3\pi^4}\right)\cos(nx) + \left(\frac{-2}{n^2\pi^2} - \frac{12}{n^4\pi^4} + \frac{6x^2}{n^2\pi^4}\right)\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= (-1)^n\left(\frac{-2\pi^3}{n\pi^4} + \frac{2\pi}{n\pi^2} + \frac{12\pi}{n^3\pi^4}\right) = (-1)^n\frac{12}{n^3\pi^3}\,.
\end{aligned}$$

Dabei benutzten wir $\sin(k\pi) = 0$ und $\cos(k\pi) = (-1)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Nun erhalten wir als Fourierreihe F zu f

$$F(x) = \frac{12}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(nx)}{n^3}\,.$$

(b) Zur Abwechslung bestimmen wir die exp-Darstellung und ermitteln hieraus mit den Umrechnungsformeln die cos-sin-Darstellung: Für $k = 0$ erhalten wir für $f(x) = (x-\pi)^2$ mittels Substitution und aus Symmetriegründen

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,\mathrm{e}^0\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}2\int_0^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}\,.$$

Für alle $k \neq 0$ ermitteln wir eine Stammfunktion für den Integranden aus der Formelsammlung und erhalten aus Symmetriegründen

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\left(k^2(\pi-x)^2 + 2\,\mathrm{i}\,k\,(\pi-x) - 2\right)}{2\pi k^3}\right]_{x=0}^{2\pi} \\
&= \left[\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,2\,\mathrm{i}\,k\,(\pi-x)}{2\pi k^3}\right]_{x=0}^{2\pi} = -\frac{(\pi-2\pi)-\pi}{\pi k^2} = \frac{2}{k^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit lautet die exp-Darstellung F von f:

$$F(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}}{k^2}\,.$$

Für die cos-sin-Darstellung F beachten wir $c_{-k} = c_k$ und erhalten:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k\in\mathbb{N}} 2\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}}{2k^2}$$
$$= \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\cos(kx)}{k^2}\,.$$

(c) Da f eine gerade Funktion ist folgt $b_n = 0$. Für die Koeffizienten a_n gilt

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\cos nx\;\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos nx\;\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\cos x\cos nx\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\;\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^n + 1 - n\left(\sin x\sin nx\Big|_0^{\pi} - n\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\;\mathrm{d}x\right)\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left((-1)^n + 1\right) + n^2 a_n\,.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir

$$a_n = \frac{2}{\pi}\frac{((-1)^n + 1)}{1 - n^2} = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Damit lautet die Fourierreihe F von f:

$$F(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos 2kx}{\pi[1-(2k)^2]} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)}\,.$$

(d) Wir ermitteln die Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\;\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\underbrace{\sin x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos x\sin nx\;\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n}\left[-\cos x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\;\mathrm{d}x\right] \\
&= -\frac{1}{\pi n^2}(\cos n\pi + 1) + \frac{1}{n^2}\,a_n = \frac{(-1)^n + 1}{\pi n^2} + \frac{1}{n^2}\,a_n\,.
\end{aligned}$$

Damit haben wir die a_n bestimmt:

$$a_n = -\frac{(-1)^n + 1}{\pi(n^2 - 1)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -\frac{2}{\pi(n^2-1)} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin x \sin nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[-\sin x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \cos x \cos nx \,\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{1}{\pi n}\left[\cos x \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi \sin x \sin nx \,\mathrm{d}x\right] = \frac{1}{n^2}\, b_n\,.
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir $b_n = 0$ für alle $n > 1$. Schließlich gilt:

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\,.$$

Damit lautet die Fourierreihe F von f:

$$F(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{2}\sin x\,.$$

74.2 (a) Da f eine gerade Funktion ist, gilt für die Koeffizienten $b_n = 0$ und

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \pi - x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi = \pi \\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (\pi - x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\sin nx - \frac{\cos nx}{n^2} - \frac{x\sin nx}{n}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] = \begin{cases} \frac{4}{\pi n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.}\end{cases}
\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Fourierreihe F zu f:

$$F(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}\,.$$

(b) Da f stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, gilt $F(x) = f(x)$ für alle x. Damit gilt insbesondere

$$\pi = f(0) = F(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)\,.$$

Hiermit erhalten wir $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

74.3 Wir wählen $T = 2\pi$, weil die Schreibweise einfacher ist. Den allgemeinen Fall zeigt man analog.

Im Fall, dass eine Funktion f ungerade ist, erhalten wir, da die Kosinusfunktion gerade ist,

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x)\cos(-kx)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(-x)+f(x))\cos(-kx)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{für} \quad k = 0,1,2,3,\dots \end{aligned}$$

Und da die Sinusfunktion ungerade ist, ist $f(x)\sin(x)$ eine gerade Funktion, sodass:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x \quad \text{für} \quad k = 1,2,3,\dots$$

Für eine ungerade Funktion f folgt die Behauptung analog.

74.4 Da $f(x)$ eine gerade Funktion ist gilt für die reellen Koeffizienten $b_k = 0$ und für a_k:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\sin x\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\cos kx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left[\cos((k-1)x)+\cos((k+1)x)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \left[\cos((k-1)x)+\cos((k+1)x)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((k-1)x)}{k-1}+\frac{\sin((k+1)x)}{k+1}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{\pi(k^2-1)}\left[(k+1)\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right)+(k-1)\sin\left((k+1)\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi(k^2-1)}\left[(k+1)\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right)+(k-1)\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}+\pi\right)\right] \\ &= \frac{2}{\pi(k^2-1)}\sin\left((k-1)\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi(k^2-1)}\cdot\begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade} \\ -(-1)^{k/2} & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Die komplexen Koeffizienten c_k sind dann gegeben durch

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}\,b_k)\,, & \text{falls } k > 0 \\ \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}\,b_k)\,, & \text{falls } k < 0 \end{cases}.$$

75 Fourierreihen – Hintergründe, Sätze und Anwendung

75.1 Aufgaben

75.1 Durch $f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}}{k^5}$ wird eine 2π–periodische C^2–Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert. Man bestimme für die beiden Funktionen

(a) $g(x) = f(2x-3)$, (b) $h(x) = g''(x) + f(4x)$.

jeweils die Periode T, die Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und die Fourierkoeffizienten c_k.

75.2 Bestätigen Sie für das Faltungsprodukt $*$ die Formeln

$$(a) \qquad \Big(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx\Big) * \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx\Big) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\beta_k \cos kx\,.$$

$$(b) \qquad \Big(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx\Big) * \Big(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx\Big) = \frac{a_0\alpha_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\alpha_k \cos kx\,.$$

75.3 Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$\Big(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\Big)^3 x(t) = s(t)$$

mit $\alpha = RC > 0$ und 2π-periodischer Eingangsspannung $s(t)$ beschrieben wird. Dabei bezeichne

$$\Big(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\Big)^3 x(t) = \alpha^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}x(t) + 3\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + 3\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + x(t)\,.$$

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der *Antwort* $x(t)$, wenn $s(t) = t$ für $t \in [0, 2\pi)$ gilt.

75.4 Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 2x(t) = s(t)$$

mit 2π-periodischem Eingang $s(t) = \frac{\pi - t}{2}$ für $t \in [0, 2\pi)$. Bestimmen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Antwort $x(t)$.

75.5 Es sei s mit $s(x) = \frac{\pi - x}{2}$ für $x \in [0, 2\pi)$ eine 2π-periodische Sägezahnfunktion.

(a) Zeigen Sie, dass die Faltung $(s * s)(x)$ wieder eine 2π-periodische Funktion ergibt.

(b) Berechnen Sie die periodische Faltung $(s * s)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in \mathbb{R}$ direkt.

(c) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten c_k der Funktion $s * s$ durch direkte Rechnung.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_75,

75.2 Lösungen

75.1 (a) Die Ausgangsfunktion f besitzt die Periode $T = 2\pi$, die Kreisfrequenz $\omega = 1$ und die Fourier-Koeffizienten $c_0 = 0$ und $c_k = \frac{1}{k^5}$ für $k \neq 0$.

Die Funktion $g : x \mapsto f(2x-3)$ besitzt aufgrund der Streckung $x \mapsto 2x$ im Vergleich zu f die halbe Periode $\hat{T} = \pi$ bzw. die doppelte Kreisfrequenz $\hat{\omega} = 2$.

Ferner beinhaltet g mit $y \mapsto y - 3$ eine Verschiebung, welche einen zusätzlichen Faktor e^{-3ik} in den Fourierkoeffizienten erzeugt. Demnach erhalten wir für g die Fourierkoeffizienten $\hat{c}_0 = 0$ und $\hat{c}_k = \frac{1}{k^5}\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,k}$ für $k \neq 0$. Die Darstellung von g als Fourierreihe ist

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,k}}{k^5}\,.$$

(b) Die Funktion $g''(x)$ ist (ebenso wie g) π–periodisch, $f(4x)$ sogar $\frac{\pi}{2}$–periodisch. Damit besitzt die Funktion h die Periode $\tilde{T} = \pi$ und die Kreisfrequenz $\tilde{\omega} = 2$. Um die zugehörigen Fourierkoeffizienten $\tilde{c}_k$ von h bestimmen zu können, benötigen wir die Fourierkoeffizienten d_k und e_k in den zu $\tilde{\omega} = 2$ gehörigen Fourierreihendarstellungen von $g''(x)$ und $f(4x)$:

$$g''(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_k\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,kx}, \quad f(4x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,kx}\,.$$

Gemäß Teilaufgabe (a) besitzt g (bei der Kreisfrequenz $\hat{\omega} = 2$) die Fourierkoeffizienten $\hat{c}_0 = 0$ und $\hat{c}_k = \frac{1}{k^5}\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,k}$ für $k \neq 0$, zweimaliges Anwenden der Ableitungsregel ergibt folglich $d_0 = 0$ und $d_k = (2\,\mathrm{i}\,k)^2\hat{c}_k = -\frac{4}{k^3}\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,k}$ für $k \neq 0$.

Um die Fourierreihe $f(4x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{4\,\mathrm{i}\,jx}}{j^5}$ in der Form $\sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,kx}$ darzustellen, muss $e_0 = 0$, $e_k = \frac{1}{j^5} = \frac{32}{k^5}$ für gerades $k = 2j \neq 0$ sowie $e_k = 0$ für ungerades k gelten.

Insgesamt erhalten wir die Fourierkoeffizienten

$$\tilde{c}_k = d_k + e_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k = 0 \\ -\frac{4\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,k}}{k^3} + \frac{32}{k^5} & \text{für gerades } k \neq 0 \\ -\frac{4\,\mathrm{e}^{-3\,\mathrm{i}\,k}}{k^3} & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

der kombinierten Fourierreihe $h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \tilde{c}_k\,\mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,kx}$.

75.2 (a) Übersetzen der in cos-sin-Darstellung gegebenen Fourierreihen $F_b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$ und $F_\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin kx$ in die komplexe Darstellung ergibt

$$F_b(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}, \quad F_\beta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$$

mit $c_0 = 0$, $c_k = -\frac{\mathrm{i}}{2} b_k$, $c_{-k} = \frac{\mathrm{i}}{2} b_k$ und $\gamma_0 = 0$, $\gamma_k = -\frac{\mathrm{i}}{2}\beta_k$, $\gamma_{-k} = \frac{\mathrm{i}}{2}\beta_k$ $(k = 1, 2, 3 \dots)$. Die Faltungsregel liefert dann

$$F_b(x) * F_\beta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\gamma_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \sum_{k=-\infty}^{-1} -\tfrac{1}{4}\, b_{-k}\,\beta_{-k}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} + \sum_{k=1}^{\infty} -\tfrac{1}{4}\, b_k\,\beta_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$$
$$= -\tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\beta_k\,\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right) = -\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\beta_k\,\cos kx\,.$$

(b) Hier bestehen für $F_a(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$ und $F_\alpha(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx$ die komplexen Darstellungen

$$F_a(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\,, \quad F_\alpha(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$$

mit $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_k = c_{-k} = \frac{1}{2} a_k$ und $\gamma_0 = \frac{\alpha_0}{2}$, $\gamma_k = \gamma_{-k} = \frac{1}{2}\alpha_k$ $(k = 1, 2, 3 \dots)$. Mit der Faltungsregel erhalten wir

$$F_a(x) * F_\alpha(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,\gamma_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \tfrac{1}{4}\, a_{-k}\,\alpha_{-k}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx} + \tfrac{1}{4}\, a_0\,\alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{4}\, a_k\,\alpha_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}$$
$$= \frac{a_0\,\alpha_0}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\alpha_k\,\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right) = \frac{a_0\,\alpha_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\,\alpha_k\ \cos kx\,.$$

75.3 Wir gehen zur Lösung nach unserem Rezept vor:

(1) Entwicklung von $s(t)$ in eine Fourierreihe:

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt} = \pi - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}}{\mathrm{i}\,k}$$

(2) Wir gehen mit dem Ansatz

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\alpha\,\mathrm{i}\,k + 1)^3 d_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}\,.$$

(3) Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$d_k = \frac{c_k}{(\alpha\,\mathrm{i}\,k + 1)^3}\,.$$

(4) Die Lösung lautet somit:

$$x(t) = \pi - \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}}{\mathrm{i}\,k\,(\alpha\,\mathrm{i}\,k+1)^3} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

75.4 Wir gehen zur Lösung nach unserem Rezept vor:

(1) Entwicklung von $s(t)$ in eine Fourierreihe:

$$s(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}}{2\,\mathrm{i}\,k}\,.$$

(2) Wir gehen mit dem Ansatz

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} d_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}$$

in die Differentialgleichung ein und erhalten:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-k^2+2\,\mathrm{i}\,k+2)\,d_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}\,.$$

(3) Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$d_k = \frac{c_k}{-k^2+2\,\mathrm{i}\,k+2}\,.$$

(4) Die Lösung lautet somit:

$$x(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt}}{2\,\mathrm{i}\,k\,(-k^2+2\,\mathrm{i}\,k+2)} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}\,.$$

75.5 (a) Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Funktionen mit der Periode T. Dann ist die periodische Faltung von f und g wegen der Periodizität von f ebenfalls T-periodisch, denn:

$$(f*g)(x+T) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x+T-t)g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t = (f*g)(x)\,.$$

Daher ist die Faltung also wiederum periodisch.

(b) Da die betrachtete Sägezahnfunktion 2π-periodisch ist, genügt es deshalb, die Faltung für $x \in [0, 2\pi)$ zu berechnen. Für $x \in [-2\pi, 0)$ gilt $s(x) = -\frac{x+\pi}{2}$, so dass sich auf $[0, 2\pi)$ folgendes ergibt:

$$\begin{aligned}
(s*s)(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^x s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{2\pi} s(x-t)s(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{8\pi}\left(\int_0^x (t-x+\pi)(\pi-t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{2\pi} (t-x-\pi)(\pi-t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{8\pi}\left[2\pi^2 x - \pi x^2 - \frac{2}{3}\pi^3\right] = \frac{6\pi x - 3x^2 - 2\pi^2}{24} = \frac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{24}\,.
\end{aligned}$$

Die periodische Faltung $s * s$ ist dann die 2π-periodische Fortsetzung dieser Funktion.

(c) Für $k = 0$ ergibt sich der zugehörige Fourierkoeffizient als

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi^2 - 3(x-\pi)^2}{24} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - 3u^2\right) \, \mathrm{d}u = 0,$$

wobei die Substitution $u = x - \pi$ verwendet wurde.
Für $k \neq 0$ gilt unter Verwendung derselben Substitution:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{48\pi} \int_0^{2\pi} \left(\pi^2 - 3(x-\pi)^2\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} \, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{i}^{-\mathrm{i}\,k\pi}}{48\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\pi^2 - 3u^2\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ku} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\pi}}{48\pi} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,ku} \left(\frac{3u^2}{\mathrm{i}\,k} - \frac{6u}{k^2} - \frac{6}{\mathrm{i}\,k^3} - \frac{\pi^2}{\mathrm{i}\,k}\right)\right]_{-\pi}^{\pi} . \end{aligned}$$

Bestimmt man unter Verwendung von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\pi}$ den Wert in der eckigen Klammer, so ergibt sich schließlich für die Fourierkoeffizienten:

$$c_k = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\pi}}{48\pi} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\pi} \left(-\frac{12\pi}{k^2}\right)\right] = -\frac{1}{4k^2} .$$

Für die Fourierreihe von $s * s$ erhalten wir damit:

$$F_{s*s}(x) = -\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}}{k^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad F_{s*s}(x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} .$$

76 Fouriertransformation I

76.1 Aufgaben

76.1 Bestimmen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-|t|) & , \quad |t| \le 1 \\ 0 & , \quad |t| > 1 \end{cases}$$

und bestätigen Sie mithilfe der Rücktransformation $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi$.

76.2 Lösungen

76.1 Wir erhalten die Fouriertransformierte F von f durch Bestimmen des folgenden Integrals

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\frac{1}{2}(1-|t|)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}(1+t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}(1-t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\,\omega} + \frac{t}{-\mathrm{i}\,\omega} - \frac{1}{(-\mathrm{i}\,\omega)^2}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\left(\frac{1}{-\mathrm{i}\,\omega} - \frac{t}{-\mathrm{i}\,\omega} + \frac{1}{(-\mathrm{i}\,\omega)^2}\right)\Bigg|_{0}^{1} \\ &= \frac{1}{\omega^2}\left(1 - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega}\right)\right) = \frac{1-\cos\omega}{\omega^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^2 , \end{aligned}$$

wobei wir zuerst $\omega = 0$ wegen der Division durch ω ausschließen müssen und schließlich $\omega = 0$ wieder gewinnen, indem wir F in null durch $F(0) = \frac{1}{2}$ stetig fortsetzen.

Die inverse Fouriertransformation besagt schließlich, dass für alle t gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}\,F(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,.$$

Wir setzen $t = 0$ und führen die Substitution $x = \omega/2$ bei dem entstehenden Integral durch:

$$\frac{1}{2} = f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\omega/2)}{(\omega/2)}\right)^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x\,.$$

Hieraus erhalten wir schließlich die interessante Aussage:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_76,

77 Fouriertransformation II

77.1 Aufgaben

77.1 Es sei $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$.

(a) Man berechne die Faltung $(f * f)(t)$. *(Tipp: Fallunterscheidung* $t \geq 0$ *und* $t < 0$.*)*

(b) Man berechne die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(f(t))(\omega)$.

(c) Unter Zuhilfenahme der Faltung bestimme man $\mathcal{F}(|t|\,\mathrm{e}^{-|t|})(\omega)$.

77.2 Gegeben sei ein dreifacher Tiefpass, der durch die Differentialgleichung

$$\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)^3 x(t) = s(t)$$

mit $\alpha = RC > 0$ und fouriertransformierbarer rechter Seite s (dem *Eingang*) beschrieben wird. Dabei bezeichne

$$\left(\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + 1\right)^3 x(t) = \alpha^3\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}x(t) + 3\alpha^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + 3\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) + x(t)\,.$$

Nun seien mit $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X(\omega)$ sowie $s(t) \circ\!\!-\!\!\bullet S(\omega)$ die jeweiligen Fouriertransformierten gegeben.

(a) Formulieren Sie die im Zeitbereich gegebene Differentialgleichung im Bildbereich.

(b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion H sowie die Impulsantwort h.

(c) Berechnen Sie die *Antwort* x für allgemeines s.

(d) Berechnen Sie x für den Rechteckimpuls $s(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 1/2, & |t| = 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$.

77.3 Es bezeichne $F_n(\omega)$ die Fouriertransformierte von $f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}$ für $n = 1, 2, \ldots$

(a) Mit Hilfe des Ähnlichkeitssatzes stelle man die Fouriertransformierte von $\frac{1}{(a^2+t^2)^n}$ für $a > 0$ durch F_n dar.

(b) Welche Funktion $g(t)$ hat als Fouriertransformierte $G(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega F_n(\omega))$?

(c) Man bestätige für F_n die Rekursionsformel

$$F_{n+1}(\omega) = F_n(\omega) - \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega F_n(\omega))$$

und berechne $F_2(\omega)$ aus $F_1(\omega) = \pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_77,

77.4 Es sei $\widetilde{u}(t) = u(t)$ für $t \neq 0$ mit $\widetilde{u}(0) = 1/2$, wobei u die Heaviside-Funktion ist. Man kann zeigen, dass dann für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Zusammenhang

$$t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\widetilde{u}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{n!}{(1+\mathrm{i}\,\omega)^{n+1}}$$

zwischen Zeit- und Frequenzbereich gilt. Bestimmen Sie mittels Fouriertransformation jeweils eine Lösung der folgenden LTI-Systeme:

(a) $\dot{x}(t) + x(t) = t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\tilde{u}(t)$,

(b) $\ddot{x}(t) - 2\,\dot{x}(t) + x(t) = s(t)$ mit stetigem und fouriertransformierbarem $s : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

77.5 Wie lauten für $a \neq 0$ die Fouriertransformierten der folgenden Funktionen

$$\frac{1}{1+t^2}\,, \quad \frac{t}{a^2+t^2}\,, \quad \frac{t}{(a^2+t^2)^2}\,, \quad \frac{t^2}{(a^2+t^2)^2}\,, \quad \frac{1}{(a^2+t^2)^2}\ ?$$

77.6 Für $\lambda > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ sei $f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ 1/2 & , \quad t = 0 \\ \exp((-\lambda + \mathrm{i}\,a)t) & , \quad t > 0 \end{cases}$.

(a) Man berechne die Fouriertransformierte von $f(t)$.

(b) Wie lauten die Fouriertransformierten der *gedämpften Schwingungen*

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\cos Nt \quad \text{und} \quad y(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\sin Nt\,,\ N \in \mathbb{N}\,,\ t > 0?$$

77.2 Lösungen

77.1 (a) Um die Faltung $f * f$ mit $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ zu erhalten, ist das folgende Integral zu bestimmen:

$$(f * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-\tau|}\,\mathrm{e}^{-|\tau|}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Wir lösen die Beträge durch eine Fallunterscheidung auf:

(i) Fall $t \geq 0$. In diesem Fall gilt $t - \tau \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_t^{\infty} \mathrm{e}^{t-2\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{-t+2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^t\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\tau}\right]_t^{\infty} + t\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\tau}\right]_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} + t\,\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(1+t)\,.\end{aligned}$$

(ii) Fall $t < 0$. In diesem Fall gilt $t - \tau \geq 0 \Leftrightarrow 0 > t \geq \tau$:

$$\begin{aligned}(f * f)(t) &= \int_0^\infty \mathrm{e}^{t-2\tau}\,\mathrm{d}\tau + \int_t^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^t \mathrm{e}^{-t+2\tau}\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^t\left[-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-2\tau}\right]_0^\infty + 0 - t\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2\tau}\right]_{-\infty}^t \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t - t\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t(1-t)\,.\end{aligned}$$

Wir können (i) und (ii) zusammenfassen und erhalten für die Faltung:

$$(f * f)(t) = (1 + |t|)\,\mathrm{e}^{-|t|}\,.$$

(b) Um die Fouriertransformierte von $f(t) = \mathrm{e}^{-|t|}$ zu bestimmen, lösen wir den Betrag im zu berechnenden Integral auf:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t))(\omega) &= \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|t|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{t(1-\mathrm{i}\,\omega)}\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \mathrm{e}^{t(-1-\mathrm{i}\,\omega)}\,\mathrm{d}t \\ &= (1-\mathrm{i}\,\omega)^{-1} + (1+\mathrm{i}\,\omega)^{-1} = \frac{2}{1+\omega^2}\,.\end{aligned}$$

(c) Um nun die Fouriertransformierte von $g(t) = |t|\,\mathrm{e}^{-|t|}$ zu bestimmen, nutzen wir (a) und (b) aus, es gilt nämlich

$$g(t) = |t|\,\mathrm{e}^{-|t|} = (1+|t|)\,\mathrm{e}^{-|t|} - \mathrm{e}^{-|t|} = (f * f)(t) - f(t)\,.$$

Wegen der Linearität der Fouriertransformation erhalten wir hieraus:

$$\mathcal{F}(|t|\,\mathrm{e}^{-|t|})(\omega) = \mathcal{F}\left((f * f)(t) - f(t)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left((f * f)(t)\right)(\omega) - \mathcal{F}\left(f(t)\right)(\omega)\,.$$

Mithilfe des Faltungssatzes $(f * g)(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(\omega)\,G(\omega)$ erhalten wir nun

$$\mathcal{F}\left((f * f)(t)\right)(\omega) = \left(\mathcal{F}(f(t))(\omega)\right)^2 = \frac{4}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Schließlich erhalten wir ganz einfach die gesuchte Fourierkorrespondenz:

$$g(t) = |t|\,\mathrm{e}^{-|t|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{4}{(1+\omega^2)^2} - \frac{2}{1+\omega^2} = \frac{2(1-\omega^2)}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

77.2 (a) Mit $x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega)$, $s(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; S(\omega)$ führt die Anwendung der Fouriertransformation auf beiden Seiten der Gleichung auf die Darstellung

$$(\alpha\,\mathrm{i}\,\omega + 1)^3 X(\omega) = S(\omega)\,. \tag{$*$}$$

(b) Auflösen von ($*$) nach $X(\omega)$ führt auf die Übertragungsfunktion $H(\omega) = \frac{1}{(\alpha\,\mathrm{i}\,\omega+1)^3}$. Deren inverse Fourier-Transformierte liefert die Impulsantwort h. Ein Blick in unsere Tabelle mit den Fouriertransformierten liefert

$$\frac{1}{2}t^2\,\mathrm{e}^{-at}\,\widetilde{u}(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{(\mathrm{i}\,\omega + a)^3},$$

mit der modifizierten Heaviside-Funktion $\widetilde{u}$. Die Übertragungsfunktion H kann man umformen zu $H(t) = \frac{1}{\alpha^3(\mathrm{i}\,\omega + 1/\alpha)^3}$. Damit ist

$$h(t) = \frac{1}{2\alpha^3} t^2\,\mathrm{e}^{-t/\alpha}\,\widetilde{u}(t)\,.$$

(c) Die Faltung der Übertragungsfunktion h mit dem Eingang s liefert eine Lösung der Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} x(t) = h(t) * s(t) = s(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)\,\frac{1}{2\alpha^3}\,\tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}\,\widetilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\alpha^3}\int_0^{\infty} s(t-\tau)\,\tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}$$

(d) Es sei nun konkret s der oben angegebene Rechteckimpuls. Der Integrand enthält also den *wandernden* Rechteckimpuls

$$s(t-\tau) = \begin{cases} 1, & |t-\tau| < 1 \\ 1/2, & |t-\tau| = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1, & t-1 < \tau < t+1 \\ 1/2, & t-1 = \tau = t+1\,. \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit gilt für das Integral

$$x(t) = \frac{1}{2\alpha^3}\int_{t-1}^{t+1} \tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}\,\widetilde{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Wegen der (modifizierten) Heaviside-Funktion $\widetilde{u}$ ist jetzt eine Fallunterscheidung nötig, abhängig davon, wo $1-t$ bzw. $1+t$ bzgl. der Null liegen:

- Falls $t+1 < 0$: $x(t) = 0$.
- Falls $t-1 < 0 < t+1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\alpha^3}\int_0^{t+1} \tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2\alpha^2}\left[\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}(2\alpha^2 + 2\alpha\tau + \tau^2)\right]_0^{t+1} \\ &= 1 - \frac{\mathrm{e}^{-(t+1)/\alpha}}{2\alpha^2}(2\alpha^2 + 2\alpha(t+1) + (t+1)^2)\,. \end{aligned}$$

- Falls $0 < t-1$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\alpha^3}\int_{t-1}^{t+1} \tau^2\,\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2\alpha^2}\left[\mathrm{e}^{-\tau/\alpha}(2\alpha^2 + 2\alpha\tau + \tau^2)\right]_{t-1}^{t+1} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-t/\alpha}}{\alpha^2}\left(-2(\alpha+t)\cosh\left(1/\alpha\right) + (1 + 2\alpha^2 + 2\alpha t + t^2)\sinh\left(1/\alpha\right)\right)\,. \end{aligned}$$

77.3 (a) Wir klammern aus und wenden den Ähnlichkeitssatz an:

$$\frac{1}{(a^2+t^2)^n} = \frac{1}{a^{2n}} \frac{1}{(1+(t/a)^2)^n} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a^{2n}}\,|a|\,F_n(a\omega) \overset{a\geq 0}{=} \frac{1}{a^{2n-1}} F_n(a\omega)\,.$$

(b) Wir benötigen die folgende Korrespondenz und auch die Ableitung von f:

$$\omega F_n(\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{\mathrm{i}} f_n'(t) \quad \text{und} \quad f_n'(t) = -n\frac{2t}{(1+t^2)^{n+1}}\,.$$

Hiermit erhalten wir nun:

$$G(\omega) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega F_n(\omega)) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{1}{\mathrm{i}}\, t \left(\frac{1}{\mathrm{i}} f_n'(t)\right) = -t\, f_n'(t) = \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,.$$

Daher wähle man $g(t) = \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}}$.

(c) Mit (b) erhalten wir die Fouriertransformierte von $F_n(\omega) - \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega F_n(\omega))$, es gilt:

$$F_n(\omega) - \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega F_n(\omega)) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \left(\frac{1}{1+t^2}\right)^n - \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\,.$$

Die rechte Seite ist gerade $f_{n+1}(t)$, deren Fouriertransformierte $F_{n+1}(\omega)$ ist. Hieraus folgt die Rekursionsformel.

Laut Aufgabenstellung gilt die Korrespondenz

$$f_1(t) = \frac{1}{1+t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F_1(\omega) = \pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|}\,.$$

Mit der Rekursionsformel erhalten wir hieraus nun die Funktion F_2, es gilt:

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= F_1(\omega) - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega F_1(\omega)) = \pi\,\mathrm{e}^{-|\omega|} - \frac{1}{2}\pi(1-\omega\,\mathrm{sgn}(\omega))\,\mathrm{e}^{-|\omega|} \\ &= \frac{\pi}{2}(1+\omega\,\mathrm{sgn}(\omega))\,\mathrm{e}^{-|\omega|} = \frac{\pi}{2}(1+|\omega|)\,\mathrm{e}^{-|\omega|}\,. \end{aligned}$$

77.4 Man beachte unser Rezept zur Lösung einer DGL mit Fouriertransformation:
(a) (1) Es sei $X(\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$. Die Fouriertransformierte der Störfunktion ist in der Aufgabenstellung gegeben.

(2) Fouriertransformation der DGL führt auf die Gleichung $(\mathrm{i}\,\omega+1)X(\omega) = \frac{n!}{(\mathrm{i}\,\omega+1)^{n+1}}$.

(3) Wir lösen nach $X(\omega)$ auf: $X(\omega) = \frac{1}{(\mathrm{i}\,\omega+1)}\frac{n!}{(\mathrm{i}\,\omega+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(\mathrm{i}\,\omega+1)^{n+2}}$.

(4), (5) Hier bietet sich an, direkt die Rücktransformierte von $X(\omega)$ zu bestimmen, es ist nämlich der zweite Faktor der rechten Seite nach der angegebenen Korrespondenz die Fouriertransformierte von $t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\tilde{u}(t)$. Deshalb gilt wegen der Linearität der Fouriertransformation

$$x(t) = \frac{1}{n+1} t^{n+1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\tilde{u}(t)$$

die inverse Fouriertransformierte von $X(\omega)$ und damit die gesuchte Lösung des LTI-Systems.

(b) (1) Es sei wieder $X(\omega)$ die Fouriertransformierte von $x(t)$, und $S(\omega)$ bezeichne die Fouriertransformierte von $s(t)$.

(2) Die Fouriertransformation der DGL liefert die Gleichung $(1 - \mathrm{i}\,\omega)^2 X(\omega) = S(\omega)$.

(3) Wir lösen nach X auf: $X(\omega) = \frac{1}{(1-\mathrm{i}\,\omega)^2}\, S(\omega)$.

(4) Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 - \mathrm{i}\,\omega)^2} = \frac{1}{\big(1 + \mathrm{i}(-\omega)\big)^2}.$$

Deren inverse Fouriertransformierte ist die *Impulsantwort* und lautet nach der angegebenen Korrespondenz und wegen $S(-\omega) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad s(-t)$:

$$h(t) = -t\ \mathrm{e}^t\, \tilde{u}(-t) = \begin{cases} -t\ \mathrm{e}^t, & t < 0 \\ 0, & t \geq 0 \end{cases}.$$

(5) Eine Lösung des LTI-System ergibt sich nun aus der Faltung von h mit der rechten Seite s:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, s(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau = -\int_{-\infty}^{0} \tau\ \mathrm{e}^{\tau}\ s(t - \tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

77.5 Wir benutzen den Umkehrsatz, d. h. die Korrespondenz $F(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\pi\, f(-\omega)$, wobei $f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad F(\omega)$. Mittels der folgenden bekannten Korrespondenz

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda|t|} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\lambda}{\lambda^2 + \omega^2}$$

erhalten wir nun mit $\lambda = 1$:

$$\frac{1}{1 + t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\,\pi\,\frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{-|-\omega|} = \pi\ \mathrm{e}^{-|\omega|}\,.$$

Mithilfe des Ähnlichkeitssatzes gewinnen wir nun:

$$\frac{1}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a^2}\,\frac{1}{1 + \left({}^{t}/_{a}\right)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a^2}\,|a|\,\pi\ \mathrm{e}^{-|a\omega|} = \frac{1}{|a|}\,\pi\ \mathrm{e}^{-|a\omega|}\,.$$

Mit der Differentiation im Frequenzbereich, also mit der Korrespondenz $t\,f(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\ F'(\omega)$, erhalten wir nun

$$t\,\frac{1}{a^2 + t^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\,\frac{\pi}{|a|}\big(-|a|\ \mathrm{sgn}(\omega)\big)\ \mathrm{e}^{-|a\omega|} = -\,\mathrm{i}\,\pi\,\mathrm{sgn}(\omega)\ \mathrm{e}^{-|a\omega|}\,.$$

Die nächste gesuchte Korrespondenz gewinnen wir mit der Differentiation im Zeitbereich $f'(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\,\omega F(\omega)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{t^2+a^2} = \frac{-2t}{(t^2+a^2)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\,\omega\frac{1}{|a|}\,\pi\,\mathrm{e}^{-|a\omega|}\,.$$

Hieraus folgt nun

$$\frac{t}{(t^2+a^2)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}\,\omega\pi}{|a|}\,\mathrm{e}^{-|a\omega|}$$

und schließlich

$$t\cdot\frac{t}{(t^2+a^2)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{i}\,\pi}{|a|}\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\omega\,\mathrm{e}^{-|a\omega|}\right) = \frac{\pi}{2|a|}(1-|a\omega|)\,\mathrm{e}^{-|a\omega|}\,.$$

Für die letzte zu bestimmende Korrespondenz benutzen wir einen Trick, es gilt:

$$\frac{1}{(a^2+t^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2+t^2-t^2}{(a^2+t^2)^2}\right) = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2+t^2} - \frac{t^2}{(a^2+t^2)^2}\right)\,.$$

Mit dieser Umformung ist es nun ein Leichtes, die gesuchte Korrespondenz aufzustellen:

$$\frac{1}{(a^2+t^2)^2} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{|a|}\pi\,\mathrm{e}^{-|a\omega|} - \frac{\pi}{2|a|}\,(1-|a\omega|)\,\mathrm{e}^{-|a\omega|}\right) = \frac{\pi}{2|a|^3}\,(1+|a\omega|)\,\mathrm{e}^{-|a\omega|}\,.$$

77.6 (a) Die Fouriertransformation F von f erhalten wir durch Berechnen des folgenden Integrals:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}\,a)t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{(-\lambda+\mathrm{i}(a-\omega))t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{-\lambda+\mathrm{i}(a-\omega)}\,\mathrm{e}^{-(\lambda-\mathrm{i}(a-\omega))t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda+\mathrm{i}(\omega-a)}\,. \end{aligned}$$

(b) Wir nutzen die folgenden bekannten Formeln für den Kosinus und Sinus:

$$\cos(Nt) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,Nt}\right) \quad \text{und} \quad \sin(Nt) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Nt}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,Nt}\right)\,.$$

Wegen $t>0$ und dem Teil (a) erhalten wir nun als Fouriertransformierte $X(\omega)$ für $x(t)$:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,Nt}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda+\mathrm{i}(\omega-N)}+\frac{1}{\lambda+\mathrm{i}(\omega+N)}\right) = \frac{\lambda+\mathrm{i}\,\omega}{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)^2+N^2} \end{aligned}$$

und analog als Fouriertransformierte $Y(\omega)$ für $y(t)$:

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,Nt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,Nt}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\lambda+\mathrm{i}(\omega-N)}-\frac{1}{\lambda+\mathrm{i}(\omega+N)}\right) = \frac{N}{(\lambda+\mathrm{i}\,\omega)^2+N^2}\,. \end{aligned}$$

Für $\lambda\to 0^+$ wird $X(\omega), Y(\omega)$ immer *schmalbandiger* ($\to$ geringe Dämpfung). Im Grenzfall $\lambda=0$ haben $X(\omega)$ und $Y(\omega)$ zwei Pole bei $\pm N$.

78 Diskrete Fouriertransformation

78.1 Aufgaben

78.1 Weisen Sie die Approximation der Fourierkoeffizienten im Kasten auf Seite 707 (Rezeptebuch) nach.

78.2 Programmieren Sie die diskrete Fouriertransformation in MATLAB.

78.3 Die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = 3\sin(4x) + \tfrac{1}{2}\cos(7x) - 2\cos(3x)$$

wird an N Stellen $x_k = k\frac{2\pi}{N}$, $k = 0, \ldots, N-1$ abgetastet.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der diskreten Fouriertransformation für $N = 4$ und $N = 5$.

(b) Bestimmen Sie außerdem das trigonometrische Interpolationspolynom für $N = 4$ und $N = 5$ in der Sinus-Kosinus-Form.

(c) Bestimmen Sie mit MATLAB das Interpolationspolynom für 10 und 15 Stützstellen.

78.4 Die 2π-periodische Rechteckschwingung

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

wird an den 8 Stellen $x_k = k\frac{2\pi}{8}$, $k = 0, \ldots, 7$ abgetastet. Bestimmen Sie die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_7$ der diskreten Fouriertransformation.

Bestimmen Sie außerdem das trigonometrische Interpolationspolynom in der Sinus-Kosinus-Form.

78.5 Die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = |\sin(x)|$$

wird an den 4 Stellen $x_k = k\frac{2\pi}{4}$, $k = 0, \ldots, 3$ abgetastet. Bestimmen Sie die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$ der diskreten Fouriertransformation und vergleichen Sie diese Werte mit den exakten Fourierkoeffizienten.

78.6 Bestimmen Sie das trigonometrische Interpolationspolynom vom Grad 5 zu den Stützstellen

$$(0,0), ({}^{2\pi}/_{5}, \sin({}^{2\pi}/_{5})), ({}^{4\pi}/_{5}, \sin({}^{4\pi}/_{5})), ({}^{6\pi}/_{5}, \sin({}^{4\pi}/_{5})), ({}^{8\pi}/_{5}, \sin({}^{2\pi}/_{5})).$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_78,

78.7 Die 2π-periodischen Funktionen

(a) $f(x) = (x-\pi)^2$,

(b) $g(x) = ((x-\pi)/\pi)^3 - (x-\pi)/\pi$

werden an den 4 Stellen $x_k = k\frac{2\pi}{4}$, $k = 0, \ldots, 3$ abgetastet. Bestimmen Sie jeweils die Koeffizienten $c_0, \ldots, c_3$ der diskreten Fouriertransformation.

Bestimmen Sie außerdem das trigonometrische Interpolationspolynom in der Sinus-Kosinus-Form.

78.2 Lösungen

78.1 Gegeben seien die äquidistanten Stützstellen $x_\ell = \ell\frac{2\pi}{N}$ für $\ell = 0, \ldots, N-1$ mit den zugehörigen Funktionswerten $f(x_\ell)$:

$$(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_{N-1}, f(x_{N-1}))\,.$$

Wir setzen $v_\ell = f(\ell\frac{2\pi}{N})$ und $\zeta = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}/N}$. Mit diesen Bezeichnungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2\pi}\,\frac{2\pi}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} f(\ell\frac{2\pi}{N})\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,k(\ell\frac{2\pi}{N})} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} v_l\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{N}}\right)^{k\ell} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} v_l\,\zeta^{k\ell}\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir bei der Näherung $\approx$ das Integral durch N Rechtecke der *Höhe* $f(\ell\frac{2\pi}{N})\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,k(\ell\frac{2\pi}{N})}$ und Breite $\frac{2\pi}{N}$ approximiert, diese Approximation ist ähnlich der Trapezregel von Seite 281 (Rezeptebuch).

78.2 Der folgende Code taugt

```
function [ c ] = diskretfourier( v )
N=length(v);
zeta=exp((-2*pi*i)/N);
[x,y]=meshgrid(1:N-1);
Fvor=x.*y;
Fnach=[zeros(1,N); zeros(N-1,1) Fvor];
F=zeta.^Fnach;
c=(1/N)*(F*v);
end
```

78.3 (a) Es gilt $c_k = \frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1} v_l q^{kl}$ mit $k = 0, \ldots, N-1$, $q = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}/N}$ und $v_l = f(x_l) = f(\frac{2\pi l}{N})$.

Für $N = 4$ gilt:

$$v_0 = -\tfrac{3}{2}\,,\ v_1 = 0\,,\ v_2 = \tfrac{3}{2}\,,\ v_3 = 0\,.$$

Für die Fourierkoeffizienten erhält man damit $c_k = \frac{1}{4}\sum_{l=0}^{3} v_l\,\mathrm{e}^{-\frac{\pi\,\mathrm{i}\,kl}{2}}$ bzw.

$$c = \frac{1}{4}F_4 v = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Für $N = 5$ erhält man nach dem gleichen Schema:

$$c = \frac{1}{5}F_5 v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(0) \\ f(\frac{2\pi}{5}) \\ f(\frac{4\pi}{5}) \\ f(-\frac{4\pi}{5}) \\ f(-\frac{2\pi}{5}) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1,5 - 3(\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5})) \\ -1.5 + 6\,\mathrm{i}(\sin^2(\frac{2\pi}{5}) + \sin^2(\frac{4\pi}{5})) - 6\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) \\ -1.5 - 3(\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + \cos^2(\frac{4\pi}{5})) \\ -1,5 - 3(\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + \cos^2(\frac{4\pi}{5})) \\ -1,5 - 6\,\mathrm{i}(\sin^2(\frac{2\pi}{5}) + \sin^2(\frac{4\pi}{5})) - 6\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{2}\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

(b) Mit $N = 4$ haben wir eine geradzahlige Anzahl von Stützstellen. Für die reellen Fourierkoeffizienten gilt daher mit $N = 2n$, also $n = \frac{N}{2}$, für $k = 1, \ldots, n-1$:

$$a_0 = 2c_0\,,\ a_k = c_k + c_{N-k}\,,\ b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{N-k})\,,\ a_n = 2c_n\,.$$

Somit ergibt sich

$$a_0 = 2c_0 = 0\,,\ a_1 = c_1 + c_3 = -\tfrac{3}{2}\,,\ a_2 = 2c_2 = 0\,,\ b_1 = \mathrm{i}(c_1 - c_3) = 0\,.$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet somit

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_k\cos kx + b_k\sin kx) + \frac{a_n}{2} \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \frac{a_2}{2}\cos 2x = -\frac{3}{2}\cos x\,. \end{aligned}$$

Mit $N = 5$ haben wir eine ungeradzahlige Anzahl von Stützstellen. Für die reellen Fourierkoeffizienten gilt daher mit $N = 2n+1$, also $n = \frac{N-1}{2}$, für $k = 1, \ldots, n$:

$$a_2 = -\tfrac{3}{2}\,,\ b_1 = -3\,,\ a_0 = a_1 = b_2 = 0\,.$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet somit

$$p(x) = -\frac{3}{2}\cos 2x - 3\sin x\,.$$

(c) Mit folgendem Programmierbeispiel lässt sich die Aufgabe in MATLAB lösen:

```
function [a,b] = InterpolationsKoeffizienten(N)
% N: Anzahl der Stuetzstellen
% Stuetzstellen
x = (0:N-1)*2*pi/N; % Zeilenvektor
% Funktionsauswertung
v = 3*sin(4*x) + 1/2*cos(7*x) - 2*cos(3*x); % Zeilenvektor
[k,l] = meshgrid((0:floor(N/2)),(0:N-1));
% Berechne a (Vektor mit a_k als Eintraege, also floor(N/2) Eintraege)
a = sum( 2/N*cos( (2*pi*k.*l)/N ).*repmat(v(:), 1, floor(N/2)+1) );
% Berechne b (Vektor mit b_k als Eintraege, also floor(N/2) Eintraege)
b = sum( 2/N*sin( (2*pi*k.*l)/N ).*repmat(v(:), 1, floor(N/2)+1) );
if mod(N,2) == 0 % wenn N gerade
    b(end) = [];
end
```

Für $N = 10$ erhält man

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0\,,\ a_3 = -\tfrac{3}{2}\,,\ b_1 = b_2 = b_3 = 0\,,\ b_4 = 3\,.$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet somit

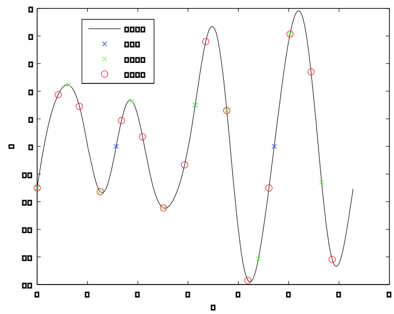
$$p(x) = -\frac{3}{2}\cos 3x + 3\sin 4x$$

Für $N = 15$ erhält man

$$\begin{aligned} &a_0 = a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a_6 = b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = b_6 = b_7 = 0\,,\\ &a_3 = -2\,,\ a_7 = \tfrac{1}{2}\,,\ b_4 = 3\,. \end{aligned}$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet somit

$$p(x) = 3\sin 4x + \tfrac{1}{2}\cos 7x - 2\cos 3x = f(x)$$



78.4 Es gilt

$$c_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{7} v_j q^{kj}\,, \quad \text{wobei} \quad v_j = f(x_j) \quad \text{und} \quad q = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,/n}\ .$$

Mit $q = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,/8} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i})$ und dem *Datenvektor* $v = (1,1,1,1,0,0,0,0)^\top$ $(v_i = f(x_i))$ erhalten wir die Koeffizienten c_j als Einträge im Vektor $\frac{1}{8}\,(q^{kl})_{k,l=0,\dots,7}\,v$. Wegen der besonderen Form von v benötigen wir nur die ersten vier Spalten von $(q^{kl})_{k,l=0,\dots,7}$. Mit $(q^{kl})_{k,l=0,\dots,7} = F_8$. Es gilt

$$\frac{1}{8}\,F_8\,v = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \star \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i}) & -\mathrm{i} & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i}) & \star \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} & \star \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-\mathrm{i}) & \mathrm{i} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\mathrm{i}) & \star \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \star \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i}) & -\mathrm{i} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) & \star \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} & \star \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i}) & \mathrm{i} & \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i}) & \star \end{pmatrix} v = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 \\ 1-(\sqrt{2}+1)\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 1-(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 1+(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 1+(\sqrt{2}+1)\,\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Für das trigonometrische Polynom $p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{3} a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx) + a_4\cos(4x)$ berechnen sich die Koeffizienten a_k und b_k wie folgt:

$$a_0 = 2c_0\,,\ \ a_k = 2\,\mathrm{Re}\{c_k\} \ \text{ und } \ b_k = -2\,\mathrm{Im}\{c_k\} \ \text{ für } k = 1,\dots,3\,,\ a_4 = 2c_4\,.$$

Somit ist

$$p(x) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cos(x) + \tfrac{1}{4}\cos(3x) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{2}+1)\sin(x) + \tfrac{1}{4}(\sqrt{2}-1)\sin(3x)\,.$$

78.5 Es gilt:

$$c = \frac{1}{4}F_4 v = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

$$a_0 = 1\,,\ a_1 = 0\,,\ a_2 = -1\,,\ b_1 = 0\,.$$

Die exakten Fourierkoeffizienten lauten:

$$\hat{a}_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{für } n \text{ gerade} \\ 0 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \hat{b}_n = 0\,.$$

Somit gilt $\hat{a}_0 = \frac{4}{\pi} \approx 1.273$, $\hat{a}_1 = 0$, $\hat{a}_2 = -\frac{4}{3\pi} \approx -0.424$ und $\hat{b}_1 = 0$.

78.6 Es gilt:

$$c = \frac{1}{5}F_5 v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi\,\mathrm{i}}{5}} & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(\frac{2\pi}{5}) \\ \sin(\frac{4\pi}{5}) \\ \sin(\frac{4\pi}{5}) \\ \sin(\frac{2\pi}{5}) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{5}\begin{pmatrix} \sin(\frac{2\pi}{5}) + \sin(\frac{4\pi}{5}) \\ \sin(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5}) + \sin(\frac{4\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) \\ \sin(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{4\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5}) \\ \sin(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) + \sin(\frac{4\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5}) \\ \sin(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5}) + \sin(\frac{4\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5}) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,6155 \\ -0,0727 \\ -0,2351 \\ -0,2351 \\ -0,0727 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

$$a_0 = 1.2311\,,\ a_1 = -0.1453\,,\ a_2 = -0.4702\,,\ b_1 = 0\,,\ b_2 = 0\,.$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet somit:

$$p(x) = 0.6155 - 0.1453\cos(x) - 0.4702\cos(2x)\,.$$

78.7 (a) Es gilt:

$$c=\frac{1}{4}F_4v=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i}\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi^2\\ \frac{\pi^2}{4}\\ 0\\ \frac{\pi^2}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3\pi^2}{8}\\ \frac{\pi^2}{4}\\ \frac{\pi^2}{8}\\ \frac{\pi^2}{4}\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

$$a_0=\tfrac{3\pi^2}{4}\,,\ a_1=\tfrac{\pi^2}{2}\,,\ a_2=\tfrac{\pi^2}{4}\,,\ b_1=0\,.$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet: $p(x)=\frac{3\pi^2}{8}+\frac{\pi^2}{2}\cos x+\frac{\pi^2}{8}\cos 2x$.

(b) Es gilt:

$$c=\frac{1}{4}F_4v=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i}\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{3}{8}\\ 0\\ -\frac{3}{8}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{16}\,\mathrm{i}\\ 0\\ \frac{3}{16}\,\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich:

$$a_0=a_1=a_2=0\,,\ b_1=\tfrac{3}{8}\,.$$

Das trigonometrische Interpolationspolynom lautet: $p(x)=\frac{3}{8}\sin x$.

79 Die Laplacetransformation

79.1 Aufgaben

79.1 Man bestimme die Laplacetransformierten von

(a) $\int_0^t \sin(a\tau)\,\mathrm{d}\tau$,

(b) $\sin^2(t)$,

(c) $\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t}$,

(d) $\mathrm{e}^{2t}\cos(at)$,

(e) $\cos(at) - \cos(bt)$,

(f) $\int_0^t (\cos(a\tau) - \cos(b\tau))\,\mathrm{d}\tau$.

79.2 Es sei $F(s)$ die Laplacetransformierte von $f(t)$. Man ermittle die Rücktransformierten $f(t)$, wenn $F(s)$ gegeben ist durch:

(a) $\dfrac{s}{(s+a)(s+b)}$,

(b) $\dfrac{1}{(s+a)^3(s+b)}$,

(c) $\dfrac{1}{s^3(s^2+a^2)}$,

(d) $\dfrac{1}{(s+1)^3((s+1)^2+a^2)}$,

(e) $\dfrac{s^2+s+2}{(s-1)^2(s^2-2s+2)}$.

79.3 Man berechne mittels Laplacetransformation die Lösung der AWPe

(a) $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6X = t\,\mathrm{e}^{-2t}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1$,

(b) $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(0) = 0.$

79.4 Man löse mit Hilfe der Laplacetransformation das AWP

$$\ddot{x} + 2x = r(t)\,, \quad x(0) = 0\,, \quad \dot{x}(0) = 0\,, \quad \text{wobei} \;\; r(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{falls} \quad 1 \le t \end{cases}\,.$$

Hinweis: Man stelle $r(t)$ mit Hilfe der Heavisidefunktion dar.

79.5 Bestimmen Sie mittels Laplacetransformation die Lösungen der Integralgleichungen:

(a) $x(t) + \int_0^t x(t-\tau)\,\mathrm{e}^{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \sin t \quad$ für $\quad t \ge 0$,

(b) $x(t) + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 1 \quad$ für $\quad t \ge 0$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_79,

79.2 Lösungen

79.1 (a) Wir könnten das Integral berechnen und dann die Laplacetransformation durchführen. Das tun wir nicht. Wir wenden die Formel für die Integration der Originalfunktion an und erhalten aus der Korrespondenz

$$f(t) = \sin at \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{a}{s^2 + a^2} = F(s)$$

sogleich die Korrespondenz

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}F(s) = \frac{a}{s(s^2 + a^2)}\,.$$

(b) Wir suchen in unseren Formeln zu den trigonometrischen Funktionen eine einfache Darstellung für $\sin^2$ und benutzen die Linearität der Laplacetransformation:

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right).$$

(c) Bei dieser Transformation kommen wir mit einem Blick in unsere Tabelle und Nutzen der Linearität aus:

$$\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^{-2t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} = \frac{4}{(s-2)(s+2)}\,.$$

(d) Auch hier reicht unsere Tabelle:

$$\mathrm{e}^{2t}\cos(at) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s-2}{(s-2)^2 + a^2}\,.$$

(e) Die Linearität und unsere Tabelle liefern:

$$\cos(at) - \cos(bt) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{s}{s^2 + b^2}\,.$$

(f) Wir vermeiden das Integrieren und benutzen unseren Satz zur Fouriertransformierten des Integrals einer Originalfunktion:

$$\int_0^t (\cos(a\tau) - \cos(b\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s}\left(\frac{s}{s^2 + a^2} - \frac{s}{s^2 + b^2}\right) = \frac{1}{s^2 + a^2} - \frac{1}{s^2 + b^2}\,.$$

79.2 Bei allen Funktionen suche man zuerst in der Tabelle nach ähnlichen Funktionen und denke an die Regeln und Sätze zur Laplacetransformation, mit denen man oftmals kleine Ungleichheiten glattbügeln kann:

(a) Wir schreiben zunächst die Funktion um, es gilt:

$$F(s)=\frac{s}{(s+a)(s+b)}=s\,G(s)\quad\text{mit}\quad G(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}\,.$$

Aus unserer Tabelle erhalten wir die Rücktransformierte von G:

$$G(s)=\frac{1}{(s+a)(s+b)}\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{b-a}=g(t)\,.$$

Für die Rücktransformierte von F beachten wir nun die Regel zur Ableitung der Originalfunktion, wobei wir $g(0)=0$ beachten:

$$F(s)=s\,G(s)\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g'(t)=\frac{1}{b-a}\left(-a\,\mathrm{e}^{-at}+b\,\mathrm{e}^{-bt}\right)=f(t)\,.$$

(b) Wieder formen wir die Funktion um, sodass wir eine Ähnlichkeit zu einer Funktion in unsere Tabelle finden. Dazu machen wir den ersten Schritt:

$$F(s)=\frac{1}{(s+a)^3(s+b)}=\frac{1}{(s+a)^3(s+a+b-a)}=G(s+a)$$

mit $G(s)=\frac{1}{s^3(s+c)}$, wobei $c=b-a$.
Nun benutzen wir den Verschiebungssatz, es gilt:

$$G(s)\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad g(t)\ \Rightarrow\ G(s+a)\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{-at}\,g(t)\,.$$

Nun erhalten wir sukzessive, ausgehend von unserer Tabelle, mit der Regel zum Integral der Originalfunktion:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s+c}\quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{-ct}\\
\frac{1}{s(s+c)}\quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-c\tau}\,\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{c}\left(\mathrm{e}^{-ct}-1\right)\\
\frac{1}{s^2(s+c)}\quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \int\limits_0^t -\frac{1}{c}\left(\mathrm{e}^{-c\tau}-1\right)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{c^2}\left(\mathrm{e}^{-ct}-1\right)+\frac{t}{c}\\
\frac{1}{s^3(s+c)}\quad &\bullet\!\!-\!\!\circ \quad \int\limits_0^t \frac{1}{c^2}\left(\mathrm{e}^{-c\tau}-1\right)+\frac{t}{c}\,\mathrm{d}\tau=-\frac{1}{c^3}\left(\mathrm{e}^{-ct}-1\right)-\frac{t}{c^2}+\frac{t^2}{2c}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir $g(t)=-\frac{1}{c^3}\left(\mathrm{e}^{-ct}-1\right)-\frac{t}{c^2}+\frac{t^2}{2c}$, die gesuchte Rücktransformierte $f(t)$ erhalten wir nun ganz einfach:

$$F(s)\quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad f(t)=\mathrm{e}^{-at}\,g(t)=\mathrm{e}^{-at}\left[-\frac{1}{c^3}\left(\mathrm{e}^{-ct}-1\right)-\frac{t}{c^2}+\frac{t^2}{2c}\right]\,.$$

(c) Aus unsere Tabelle erhalten wir die Korrespondenz:

$$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{at-\sin at}{a^3}\,.$$

Mit der Regel zum Integral der Originalfunktion erhalten wir hieraus:

$$\frac{1}{s^3(s^2+a^2)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \int\limits_0^t \frac{a\tau-\sin a\tau}{a^3}\,\mathrm{d}\tau = \frac{t^2}{2a^2}+\frac{1}{a^4}\,(\cos at-1)\,.$$

(d) Hier hilft uns die Lösung von (b) auf die Sprünge, wir verwenden noch die Regel zur Verschiebung:

$$\frac{1}{(s+1)^3\,[(s+1)^2+a^2]} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{-t}\left[\frac{t^2}{2a^2}+\frac{1}{a^4}(\cos at-1)\right].$$

(e) Hier ist eine Partialbruchzerlegung angesagt:

$$\frac{s^2+s+2}{(s-1)^2(s^2-2s+2)} = \frac{3}{s-1}+\frac{4}{(s-1)^2}-\frac{3(s-1)+3}{(s-1)^2+1}\,.$$

Nun reicht ein Blick in unsere Tabelle:

$$\frac{s^2+s+2}{(s-1)^2(s^2-2s+2)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^t(3+4t-3\sin t-3\cos t)\,.$$

79.3 Wir gehen nach unseren Rezepten vor:

(a) (1) Es sei $X(s)$ die Laplacetransformierte der gesuchten Funktion $x(t)$.

(2) Transformation des AWP liefert:

$$s^2X(s)-sx_0-x_1+5sX(s)-5x_0+6X(s)=\frac{1}{(s+2)^2}\,.$$

(3) Wir lösen nach $X(s)$ auf:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{\frac{1}{(s+2)^2}}{(s^2+5s+6)}+\frac{sx_0+5x_0+x_1}{s^2+5s+6}\\ &= \frac{1}{(s+2)^3(s+3)}+\frac{(s+2)x_0}{(s+2)(s+3)}+\frac{3x_0+x_1}{(s+2)(s+3)}\,. \end{aligned}$$

(4) Eine Partialbruchzerlegung liefert

$$X(s)=\frac{1}{(s+2)^3(s+3)}+\frac{x_0}{s+3}+\frac{3x_0+x_1}{(s+2)(s+3)}\,.$$

(5) Es gelten laut der Tabelle auf Seite 729 (Rezeptebuch), den Rechenregeln und der Lösung zu Aufgabe 79.2 die folgenden Korrespondenzen für die Summanden:

$$\frac{1}{(s+2)^3(s+3)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad \mathrm{e}^{-2t}[-(\mathrm{e}^{-t}-1)-t+{}^{t^2}\!/2]\,,$$
$$\frac{x_0}{s+3} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad x_0\,\mathrm{e}^{-3t}\,,$$
$$\frac{3x_0+x_1}{(s+2)(s+3)} \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad (3x_0+x_1)(\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-3t})\,.$$

(6) Damit erhalten wir als Lösung

$$x(t) = -(1+2x_0+x_1)\,\mathrm{e}^{-3t} + \left(1-t+\frac{1}{2}t^2+3x_0+x_1\right)\mathrm{e}^{-2t}\,.$$

(b) Mit $X(s)$ bzw. $Y(s)$ bezeichnen wir die Laplacetransformierte von $x(t)$ bzw. $y(t)$. Wir beginnen gleich mit Schritt (3) unseres Rezepts:

(3) Wir erhalten das Gleichungssystem mit der dazugehörigen Lösung:

$$\begin{pmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{(s+1)^3} \\ \frac{2}{(s+1)^3} \end{pmatrix}.$$

(4) entfällt.

(5) Ein Blick auf unsere Beispiele bzw. auf die Tabelle auf Seite 729 (Rezeptebuch) liefert die Rücktransformierten:

$$\frac{2}{(s+1)^3} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2\frac{t^2\,\mathrm{e}^{-t}}{2} = t^2\,\mathrm{e}^{-t}$$

und

$$\frac{s-1}{(s+1)^3} = \frac{s+1-2}{(s+1)^3} = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{(s+1)^3} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad t\,\mathrm{e}^{-t} - t^2\,\mathrm{e}^{-t}\,.$$

(6) Die Lösung ist

$$\boldsymbol{x}(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}.$$

79.4 Wir stellen zuerst die Störfunktion mit der Heavisidefunktion u dar und bestimmen gleich die Laplacetransformierte der Störfunktion:

$$r(t) = 1-u(t-1) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{s} - \frac{\mathrm{e}-s}{s} = \frac{1-\mathrm{e}-s}{s}\,.$$

Zur Lösung des AWP benutzen wir unser Rezept:

(1) Wir bezeichnen mit $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$.

(2) Transformation der DGL liefert die Gleichung

$$s^2 X(s) + 2X(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s}\,.$$

(3) Wir lösen nach $X(s)$ auf:

$$X(s) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s(s^2+2)}\,.$$

(4) entfällt.

(5) Rücktransformation liefert:

$$\frac{1 - \mathrm{e}^{-s}}{s(s^2+2)} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1-\cos(\sqrt{2}t)}{2} - \frac{1-\cos(\sqrt{2}(t-1))}{2} u(t-1)\,.$$

(6) Damit erhalten wir die Lösung

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos(\sqrt{2}t)) & \text{für } 0 \le t < 1 \\ \frac{1}{2}(\cos(\sqrt{2}(t-1)) - \cos(\sqrt{2}t)) & \text{für } t \ge 1 \end{cases}\,.$$

79.5 Wir benutzen unser Rezept:

(a) (1) Wir bezeichnen mit $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$.

(2) Es gilt

$$k(t) = \mathrm{e}^t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad K(s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{und} \quad s(t) = \sin t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(s) = \frac{1}{s^2+1}\,.$$

(3) Wir erhalten

$$X(s) = \frac{s-1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s(s^2+1)}\,.$$

(4) Eine Rücktransformation liefert die Lösung:

$$x(t) = \sin t + \cos t - 1\,.$$

(b) (1) Wir bezeichnen mit $X(s)$ die Laplacetransformierte von $x(t)$.

(2) Es gilt

$$k(t) = \sin t \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad K(s) = \frac{1}{s^2+1} \quad \text{und} \quad s(t) = 1 \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad S(s) = \frac{1}{s}\,.$$

(3) Wir erhalten

$$X(s) = \frac{s^2+1}{s(s^2+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s(s^2+2)}\,.$$

(4) Eine Rücktransformation liefert die Lösung:

$$x(t) = 1 - \frac{1-\cos\sqrt{2}\,t}{2} = \frac{1+\cos\sqrt{2}\,t}{2}\,.$$

80 Holomorphe Funktionen

80.1 Aufgaben

80.1 Bestimmen Sie die Punktmengen in $\mathbb{C}$, die durch jeweils eine der folgenden Bedingungen definiert sind:

(a) $|z+1-2\,\mathrm{i}|=3$, (c) $|z-2|=|z+\mathrm{i}|$, (e) $|z-3|+|z+3|=10$,

(b) $1<|z+2\,\mathrm{i}|<2$, (d) $\operatorname{Re}(1/z)=1$, (f) $\operatorname{Im}\left((z+1)/(z-1)\right)\le 0$.

80.2 Bestimmen Sie die Reellifizierungen der folgenden Funktionen $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\quad z\mapsto f(z)$ mit:

(a) $f(z)=z^3$, (b) $f(z)=\frac{1}{1-z}$, (c) $f(z)=\mathrm{e}^{3z}$.

80.3 Stellen Sie fest, in welchen Gebieten $G\subseteq\mathbb{C}$ die folgenden Funktionen holomorph sind:

(a) $f(z)=z^3$, (b) $f(z)=z\operatorname{Re}z$, (c) $f(z)=|z|^2$, (d) $f(z)=\bar{z}/|z|^2$.

80.4 Man berechne:

(a) $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\,\pi/6}$, (b) $\cosh(\mathrm{i}\,t),\ t\in\mathbb{R}$, (c) $\cos(1+2\,\mathrm{i})$.

80.5 Bestimmen und skizzieren Sie die Bilder der Gebiete

(a) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,0<\operatorname{Re}z<1\,,\ 0<\operatorname{Im}z<1\right\}$ unter $w=\mathrm{e}^z$,

(b) $\left\{z\in\mathbb{C}\,\middle|\,0<\operatorname{Re}z<\pi/2\,,\ 0<\operatorname{Im}z<2\right\}$ unter $w=\sin z$.

80.2 Lösungen

80.1 (a) $|z+1-2\,\mathrm{i}|=|z-(-1+2\,\mathrm{i})|=3$ liefert einen Kreis um $-1+2\,\mathrm{i}$ mit Radius 3.

(b) $|z-2|=|z+\mathrm{i}|$ liefert die Mittelsenkrechte der Strecke $[2,-\mathrm{i}]$:

$$\begin{aligned}
|z-2|=|z+\mathrm{i}|\quad &\Leftrightarrow\quad |z-2|^2=|z+\mathrm{i}|^2 \ \Leftrightarrow\ (z-2)(\bar{z}-2)=(z+1)(\bar{z}-\mathrm{i})\\
&\Leftrightarrow\quad z\bar{z}-2(z+\bar{z})+4=z\bar{z}-\mathrm{i}(z-\bar{z})+1\ \Leftrightarrow\ -4x+4=2y+1\\
&\Leftrightarrow\quad y=-2x+\tfrac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_80,

(c) $|z-3|+|z+3|=10$ liefert eine Ellipse mit den Halbachsen $a=5$ und $b=4$:

$$\begin{aligned}|z-3|+|z+3|=10 \quad &\Rightarrow \quad |x-3+\mathrm{i}\,y|+|x+3+\mathrm{i}\,y|=10\\ &\Rightarrow \quad \sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}\\ &\Rightarrow \quad (x-3)^2+y^2=100-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}+(x+3)^2+y^2\\ &\Rightarrow \quad 25+3x=5\sqrt{(x+3)^2+y^2}\\ &\Rightarrow \quad 625+150x+9x^2=25x^2+150x+225+25y^2\\ &\Rightarrow \quad \tfrac{x^2}{25}+\tfrac{y^2}{16}=1.\end{aligned}$$

(d) $1<|z+2\,\mathrm{i}|<2$ liefert ein Kreisringgebiet mit Mittelpunkt $-2\,\mathrm{i}$, innerem Radius 1 und äußerem Radius 2.

(e) $\mathrm{Re}\,(1/z)=1$ liefert einen Kreis mit Mittelpunkt $1/2$ und Radius $1/2$ (ohne $z=0$). Zur Berechnung gehe man wie folgt vor:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{\bar z}{z\bar z}\right)=1 \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Re}\left(\frac{x-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}\right)=1\\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{x^2+y^2}=1 \;\Leftrightarrow\; x^2+y^2-x=0 \;\Leftrightarrow\; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}\,.\end{aligned}$$

(f) $\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\le 0$ liefert die obere Halbebene. Die Berechnung lautet:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\le 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{x+1+\mathrm{i}\,y}{x-1+\mathrm{i}\,y}\cdot\frac{x-1-\mathrm{i}\,y}{x-1-\mathrm{i}\,y}\right)\le 0\\ &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}\left(\frac{x^2-1+y^2-2\,\mathrm{i}\,y}{(x-1)^2+y^2}\right)\le 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}\le 0\\ &\Leftrightarrow \quad -2y\le 0 \;\Leftrightarrow\; y\ge 0\,.\end{aligned}$$

80.2 Wir setzen jeweils $z=x+\mathrm{i}\,y$ in die Abbildungsvorschrift ein und ermitteln den Real- und Imaginärteil $u(x,y)$ und $v(x,y)$ der Funktion:

(a) Wir berechnen:

$$f(z)=z^3=(x+\mathrm{i}\,y)^3=x^3+3x^2\,\mathrm{i}\,y+3x(\mathrm{i}\,y)^2+(\mathrm{i}\,y)^3=x^3-3xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)\,.$$

Also gilt $u(x,y)=x^3-3xy^2$ und $v(x,y)=3x^2y-y^3$.

(b) Wir berechnen

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-x-\mathrm{i}\,y}\cdot\frac{1-x+\mathrm{i}\,y}{1-x+\mathrm{i}\,y}=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}+\mathrm{i}\,\frac{y}{(1-x)^2+y^2}\,.$$

Also gilt $u(x,y)=\frac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$ und $v(x,y)=\frac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

(c) Wir berechnen

$$e^{3z} = e^{3(x+\mathrm{i}\,y)} = e^{3x}\,e^{\mathrm{i}\,3y} = e^{3x}\cos 3y + \mathrm{i}\,e^{3x}\sin 3y\,.$$

Also gilt $u(x,y) = e^{3x}\cos 3y$ und $v(x,y) = e^{3x}\sin 3y$.

80.3 $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ ist in einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ genau dann holomorph, wenn u und v in G stetig partiell differenzierbar nach x und y sind und die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten.

(a) Es gilt

$$f(z) = z^3 = (x+\mathrm{i}\,y)^3 = x^3 - 3xy^2 + \mathrm{i}\,(3x^2y - y^3)\,,$$

also $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$ und $v(x,y) = 3x^2y - y^3$. u und v sind in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -6xy = -v_x$$

sind erfüllt. Somit ist $f(z)$ in $\mathbb{C}$ holomorph.

(b) Es gilt

$$z\ \mathrm{Re}\,z = (x+\mathrm{i}\,y)x = x^2 + \mathrm{i}\ xy\,,$$

also $u(x,y) = x^2$ und $v(x,y) = xy$. u und v sind in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar. Weiter gilt

$$\begin{array}{llcll} u_x = 2x, & v_y = x & \Rightarrow & u_x = v_y & \text{nur für } x = 0, \\ u_y = 0, & v_x = y & \Rightarrow & u_y = -v_x & \text{nur für } y = 0, \end{array}$$

$f(z)$ ist also nirgends holomorph.

(c) Für $f(z)$ gilt

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x,y)\,, \qquad v(x,y) = 0\,.$$

Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{array}{llcll} u_x = 2x, & v_y = 0 & \Rightarrow & u_x = v_y & \text{nur für } x = 0, \\ u_y = 2y, & v_x = 0 & \Rightarrow & u_y = -v_x & \text{nur für } y = 0. \end{array}$$

Die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen gelten also nur für $x = y = 0$, und somit gibt es kein Gebiet, in dem $f(z)$ holomorph ist.

(d) Für $f(z)$ gilt

$$f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}\,y} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}\,,$$

also $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $v(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$. Für die partiellen Ableitungen erhält man

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_y = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad u_x = v_y \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\
u_y &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad u_y = -v_x \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0).
\end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemann'schen DGLen sind erfüllt und $f(z)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

80.4 (a) Es gilt $\mathrm{e}^{2+\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{e}^2 + \mathrm{i}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 \simeq 6.399 + 3.659\,\mathrm{i}$.

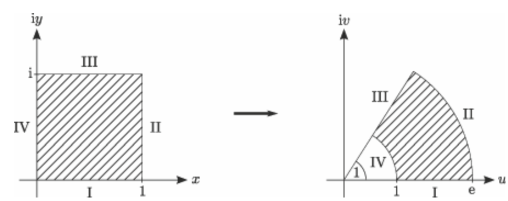
(b) Es gilt $\cosh(\mathrm{i}\,t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right) = \cos t$ und $\sinh(\mathrm{i}\,t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right) = \mathrm{i}\sin t$.

(c) Die Additionstheoreme der sin- und cos-Funktionen gelten auch für komplexe Argumente. Somit gilt

$$\cos(1+2\,\mathrm{i}) = \cos 1 \cos 2\,\mathrm{i} - \sin 1 \sin 2\,\mathrm{i} = \cos 1 \cosh 2 - \mathrm{i}\sin 1 \sinh 2 \simeq 2.032 - 3.052\,\mathrm{i}\ .$$

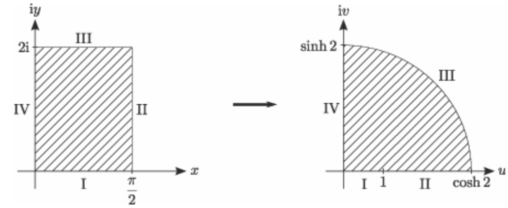
80.5 (a) Mit $z = x + \mathrm{i}\,y$ erhalten wir wegen $w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x \sin y$:

$$\begin{aligned}
&\text{I:} && y = 0\,,\ 0 < x < 1 && \Rightarrow && 1 < w = \mathrm{e}^x < \mathrm{e}\,, \\
&\text{II:} && x = 1\,,\ 0 < y < 1 && \Rightarrow && w = \mathrm{e}(\cos y + \mathrm{i}\sin y)\,,\ 0 < y < 1\,, \\
&\text{III:} && y = 1\,,\ 0 < x < 1 && \Rightarrow && w = \mathrm{e}^x(\cos 1 + \mathrm{i}\sin 1)\,,\ 0 < x < 1\,, \\
&\text{IV:} && x = 0\,,\ 0 < y < 1 && \Rightarrow && w = \cos y + \mathrm{i}\sin y\,,\ 0 < y < 1\,.
\end{aligned}$$



(b) Mit $z = x + \mathrm{i}\,y$ erhalten wir wegen $w = \sin z = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y$:

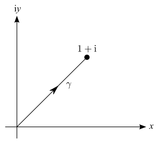
$$\begin{aligned}
&\text{I:} && y = 0\,,\ 0 < x < \tfrac{\pi}{2} && \Rightarrow && 0 < w = \sin x < 1\,, \\
&\text{II:} && x = \tfrac{\pi}{2}\,,\ 0 < y < 2 && \Rightarrow && 1 < w = \cosh y < \cosh 2\,, \\
&\text{III:} && y = 2\,,\ 0 < x < \tfrac{\pi}{2} && \Rightarrow && w = \cosh 2 \sin x + \mathrm{i}\sinh 2 \cos x \ \text{(Ellipsenbogen)}\,, \\
&\text{IV:} && x = 0\,,\ 0 < y < 2 && \Rightarrow && w = \mathrm{i}\sinh y\,.
\end{aligned}$$

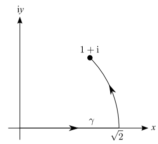


81 Komplexe Integration

81.1 Aufgaben

81.1 Man berechne $\int_\gamma \operatorname{Re} z \, \mathrm{d}z$ längs der beiden skizzierten Wege γ:





81.2 Man berechne $\oint_\gamma \frac{1}{z^2+1} \, \mathrm{d}z$ für die 4 Kreise

$$\gamma: \ |z| = \frac{1}{2}, \quad |z| = 2, \quad |z - \mathrm{i}| = 1, \quad |z + \mathrm{i}| = 1.$$

81.3 Man berechne

(a) $\oint_{|z-1|=1} \frac{z\,\mathrm{e}^z}{(z-a)^3} \, \mathrm{d}z, \ |a| < 1,$

(b) $\oint_\gamma \frac{5z^2 - 3z + 2}{(z-1)^3} \, \mathrm{d}z$, wobei γ eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die den Punkt $z = 1$ im Inneren enthält, ist.

81.4 Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Hinweis: Integrieren Sie $\frac{1}{z}$ längs der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ bzw. längs $|z| = 1$.

81.5 Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ der Funktion

$$f(z) = \frac{1 + z^3}{2 - z}, \ z \in \mathbb{C} \setminus \{2\}.$$

81.2 Lösungen

81.1 • γ: Strecke von $z_1 = 0$ nach $z_2 = 1 + \mathrm{i}$:

$$z(t) = t(1 + \mathrm{i}), \ 0 \le t \le 1 \ \Rightarrow \ \mathrm{d}z = (1 + \mathrm{i}) \, \mathrm{d}t, \ f(z(t)) = \operatorname{Re} z(t) = t.$$

Für das Integral ergibt sich $\int\limits_\gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int\limits_0^1 t \cdot (1 + \mathrm{i}) \, \mathrm{d}t = (1 + \mathrm{i}) \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i})$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_81,

- $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit:

γ_1: Strecke von $z_1 = 0$ nach $z_2 = \sqrt{2}$:

$$z(t) = \sqrt{2}t\,,\ 0 \le t \le 1\ \Rightarrow\ \mathrm{d}z = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t\,,\ f(z(t)) = \sqrt{2}t\,.$$

γ_2: Kreisbogen von $z_2 = \sqrt{2}$ nach $z_3 = 1 + \mathrm{i}$:

$$z(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{4}\ \Rightarrow\ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\,,\ f(z(t)) = \sqrt{2}\cos t\,.$$

Für das Integral ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z &= \int_{\gamma_1} f(z)\ \mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\ \mathrm{d}z = \int_0^1 2t\ \mathrm{d}t + \int_0^{\pi/4} 2\cos t\ \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}\ \mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^1 t\ \mathrm{d}t + 2\,\mathrm{i}\int_0^{\pi/4} \cos^2 t\ \mathrm{d}t - 2\int_0^{\pi/4} \cos t \sin t\ \mathrm{d}t \\ &= 1 + 2\,\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}) + \mathrm{i}\,\frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

Das Kurvenintegral von $f(z) = \operatorname{Re} z$ ist auf der Achtelkreisscheibe $0 \le r \le \sqrt{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$ nicht wegunabhängig. Daher ist $f(z)$ dort nicht holomorph.

81.2 Der Ansatz zur Partialbruchzerlegung

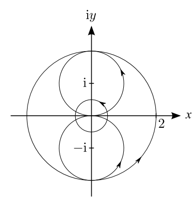
$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z-\mathrm{i}} + \frac{B}{z+\mathrm{i}} = \frac{(A+B)z + (A-B)\,\mathrm{i}}{z^2+1}$$

liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z+\mathrm{i}}\right)\,.$$

Die Funktion $f(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm\,\mathrm{i}\}$.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die vier Kreise entlang denen wir integrieren.



- $|z| = \frac{1}{2}$: $f(z)$ ist innerhalb von γ holomorph. Somit ist nach dem Cauchyintegralsatz

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = 0\,.$$

- $|z-\mathrm{i}| = 1$: Nach Cauchyintegralsatz

$$\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\Bigg(\underbrace{\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}}_{=2\pi\,\mathrm{i}} - \underbrace{\oint_{|z-\mathrm{i}|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}}}_{=0}\Bigg) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}2\pi\,\mathrm{i} = \pi\,.$$

- $|z+\mathrm{i}|=1$: Analog zu eben ergibt sich

$$\oint_{|z+\mathrm{i}|=1} f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\Bigg(\underbrace{\oint_{|z+\mathrm{i}|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}}}_{=0}+\underbrace{\oint_{|z+\mathrm{i}|=1}\frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}}}_{=2\pi\,\mathrm{i}}\Bigg) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(-2\pi\,\mathrm{i}) = -\pi\,.$$

- $|z|=2$:

$$\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z^2+1} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z-\mathrm{i}} - \oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{d}z}{z+\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\,(2\pi\,\mathrm{i}-2\pi\,\mathrm{i}) = 0\,.$$

81.3 (a) Die Funktion $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$ ist holomorph in $\mathbb{C}$. Mit der Cauchyintegralformel für $k=2$ gilt (a liegt im Innengebiet von $|z-a|=1$!)

$$\oint_{|z-a|=1}\frac{z\,\mathrm{e}^z}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}(z\,\mathrm{e}^z)\bigg|_{z=a} = \pi\,\mathrm{i}\cdot(2+z)\,\mathrm{e}^z\,|_{z=a} = \pi\,\mathrm{i}(2+a)\,\mathrm{e}^a\,.$$

(b) Die Funktion $f(z) = 5z^2-3z+2$ ist in $\mathbb{C}$ holomorph und $f''(1) = 10$. Somit gilt nach der Cauchyintegralformel für $k=2$:

$$\oint_{|z-a|=1}\frac{5z^2-3z+2}{(z-a)^3}\,\mathrm{d}z = 10\cdot\frac{2\pi\,\mathrm{i}}{2!} = 10\pi\,\mathrm{i}\,.$$

81.4 Eine Parameterdarstellung der Ellipse E: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ mit $x=\operatorname{Re} z$, $y=\operatorname{Im} z$ lautet:

$$z(t) = a\cos t + \mathrm{i}\,b\sin t\,,\quad 0\le t\le 2\pi\,.$$

$$\begin{aligned}\oint_E\frac{\mathrm{d}z}{z} &= \int_0^{2\pi}\frac{-a\sin t+\mathrm{i}\,b\cos t}{a\cos t+\mathrm{i}\,b\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\frac{(-a\sin t+\mathrm{i}\,b\cos t)(a\cos t-\mathrm{i}\,b\sin t)}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{(b^2-a^2)\sin t\cos t+\mathrm{i}\,ab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Nun folgt bzw. gilt andererseits:

$$\operatorname{Im}\oint_E\frac{\mathrm{d}z}{z} = ab\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\quad\text{bzw.}\quad\oint_E\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\pi\,\mathrm{i}\,.$$

Hieraus erhalten wir

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}\,.$$

81.5 Aufgrund der geometrischen Reihe $\frac{1}{1-z/2} = \sum_{n=0}^\infty (z/2)^n$ gilt für $|z|<2$:

$$2f(z) = (1+z^3)\sum_{n=0}^\infty (z/2)^n = \sum_{n=0}^\infty (z/2)^n + \sum_{n=0}^\infty z^{n+3}/2^n = \sum_{n=0}^\infty (z/2)^n + 8\sum_{n=3}^\infty z^n/2^n\,.$$

Es folgt

$$f(z) = 1/2 + z/4 + z^2/8 + 9/2\sum_{n=3}^\infty (z/2)^n\,.$$

82 Laurentreihen

82.1 Aufgaben

82.1 Wo konvergieren die Reihen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{2n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$ für $a_n = n$ bzw. $a_n = \frac{1}{(2n)!}$?

82.2 Man gebe für $f(z) = \frac{1}{z^2 - \mathrm{i}\, z}$ alle möglichen Entwicklungen nach Potenzen von $z+\mathrm{i}$ an. Welche Darstellung konvergiert für $z = 1/2$?

82.3 Man berechne die Laurentreihen von

(a) $\cosh \frac{1}{z^2}$ um $z = 0$,

(b) $\frac{1}{1-\cos z}$ für $0 < |z| < 2\pi$ um $z = 0$ (es reichen die ersten Summanden ungleich 0),

(c) $\frac{\mathrm{e}^z}{z-1}$ um $z = 0$.

82.4 Bestimmen Sie jeweils die Laurentreihen von $f(z)$ mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und geben Sie die Konvergenzgebiete an:

(a) $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$,

(b) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$.

82.2 Lösungen

82.1 Der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n w^n$ lautet (falls existent) $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Für $a_n = n$ gilt $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$.

Für $a_n = \dfrac{1}{(2n)!}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{[2(n+1)]!}{(2n)!} = \lim\limits_{n\to\infty} [(2n+1)(2n+2)] = \infty$.

Damit ergeben sich folgende Konvergenzgebiete:

- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n (z^2)^n$: $\left|z^2\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z| < 1$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!} z^{2n}$: $\left|z^2\right| < \infty \;\Leftrightarrow\; |z| < \infty$ (das Konvergenzgebiet ist ganz $\mathbb{C}$),
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^{-n}$: $\left|z^{-1}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z| > 1$,
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)!} z^{-n}$: $\left|z^{-1}\right| < \infty \;\Leftrightarrow\; |z| > 0$ (das Konvergenzgebiet ist $\mathbb{C} \setminus \{0\}$).

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_82,

82.2 Der Integrand

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - \mathrm{i}\, z} = \frac{1}{z(z-\mathrm{i})} = -\mathrm{i}\left(\frac{1}{z-\mathrm{i}} - \frac{1}{z}\right)$$

ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0, \mathrm{i}\}$. Die beiden Pole 0 und i bestimmen um den Entwicklungspunkt $z_0 = -\mathrm{i}$ drei Kreisringgebiete, in denen $f(z)$ holomorph ist:

$$|z+\mathrm{i}| < 1\,, \quad 1 < |z+\mathrm{i}| < 2\,, \quad |z+\mathrm{i}| > 2\,.$$

Das sind die Konvergenzgebiete einer Laurententwicklung von $f(z)$ mit Entwicklungspunkt $z_0 = -\mathrm{i}$.

• $|z+\mathrm{i}| < 1$: Für beide Stammbrüche *Taylor*:

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}} = -\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{z+\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}}} = -\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}}\right)^n, \quad \left|\frac{z+\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z+\mathrm{i}| < 2,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+\mathrm{i}-\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}} = -\frac{1}{\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^n, \quad \left|\frac{z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z+\mathrm{i}| < 1.$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklung für f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\right)^n - \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n\right](z+\mathrm{i})^n, \quad |z+\mathrm{i}| < 1\,.$$

• $1 < |z+\mathrm{i}| < 2$: Für $\frac{1}{z-\mathrm{i}}$ *Taylor*, für $\frac{1}{z}$ *Laurent*:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+\mathrm{i}-\mathrm{i}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^n, \quad \left|\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z+\mathrm{i}| > 1,$$

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = -\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}}\right)^n \quad \text{(siehe Rechnung für } |z+\mathrm{i}| < 1)\,.$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklung für f:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2\,\mathrm{i}}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^{n+1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z+\mathrm{i})^n, \quad 1 < |z+\mathrm{i}| < 2\,.$$

mit $a_n = \left(\frac{1}{\mathrm{i}}\right)^n$ für $n \leq -1$ und $a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\right)^n$ für $n \geq 0$. • $|z+\mathrm{i}| > 2$: Für beide Stammbrüche *Laurent*:

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}-2\,\mathrm{i}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}}\frac{1}{1-\frac{2\,\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}} = \frac{1}{z+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\,\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^n, \quad \left|\frac{2\,\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| < 1 \;\Leftrightarrow\; |z+\mathrm{i}| > 2,$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+\mathrm{i}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^n \quad \text{(siehe Rechnung für } 1 < |z+\mathrm{i}| < 2)\,.$$

Damit erhalten wir die folgende Entwicklung für f:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n \, \mathrm{i}^{n-1} - \mathrm{i}^{n-1}\right) \frac{1}{(z+\mathrm{i})^{n+1}}, \quad |z+\mathrm{i}| > 2\,.$$

Da $z = \frac{1}{2}$ in $1 < |z+\mathrm{i}| < 2$ liegt, konvergiert für $z = \frac{1}{2}$ die für diesen Bereich angegebene Entwicklung.

82.3 (a) Unter Verwendung der bekannten cosh-Reihe

$$\cosh w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} w^{2n}, \quad w \in \mathbb{C},$$

erhält man mit $w = {}^1/_{z^2}$:

$$\cosh \frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \frac{1}{z^{4n}}\,.$$

Diese Reihe konvergiert für $|z| > 0$.

(b) Wir benutzen die bekannte Entwicklung des Kosinus:

$$1 - \cos z = \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - + \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}\,.$$

Somit ist $z = 0$ zweifache Nullstelle von $1 - \cos z$, daher zweifacher Pol von $f(z)$. Da $f(z)$ eine gerade Funktion ist, kann man folgenden Ansatz machen:

$$f(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots$$

Somit ist

$$\begin{aligned} 1 = f(z)\,(1-\cos z) &= \left(\frac{c_{-2}}{z^2} + c_0 + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots\right)\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + - \ldots\right) \\ &= \frac{c_{-2}}{2} + z^2\left(\frac{c_0}{2} - \frac{c_{-2}}{24} c_{-2}\right) + z^4\left(\frac{c_2}{2} - \frac{c_0}{24} + \frac{c_{-2}}{720}\right) + z^6\left(\frac{c_4}{2} - \frac{c_2}{24} + \frac{c_0}{720} - \frac{c_{-2}}{8!}\right) + \cdots \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert nun $c_{-2} = 2$, $c_0 = \frac{1}{6}$, $c_2 = \frac{1}{120}$, $c_4 = \frac{1}{3024}$. Damit erhalten wir:

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} + \frac{z^4}{3024} + \ldots, \quad 0 < |z| < 2\pi\,.$$

(c) Mit der bekannten Entwicklung der Exponentialfunktion gilt:

$$\frac{\mathrm{e}^z}{z-1} = \mathrm{e} \cdot \frac{\mathrm{e}^{z-1}}{z-1} = \frac{\mathrm{e}}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{n!} = \sum_{m=-1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}}{(m+1)!} (z-1)^m\,.$$

82.4 (a) Die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

hat einfache Pole in $z_1 = 2,\ \ z_2 = 1$ und ist somit um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ holomorph in den Kreisringgebieten

$$|z| < 1\,, \quad 1 < |z| < 2\,, \quad |z| > 2\,.$$

- $|z| < 1$: Für beide Brüche *Taylor*:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n\,.$$

- $1 < |z| < 2$: Für $\frac{1}{z-2}$ *Taylor*, für $\frac{1}{z-1}$ *Laurent*:

$$f(z) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\,.$$

- $|z| > 2$: Für beide Brüche *Laurent*:

$$f(z) = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)\frac{1}{z^{n+1}}\,.$$

(b) Die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \ldots\right) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + - \ldots$$

hat das Konvergenzgebiet $0 < |z| < \infty$, da die Sinusreihe in $\mathbb{C}$ konvergiert. Aus dem Hauptteil der Laurententwicklung ist abzulesen, dass $z = 0$ ein Pol 2. Ordnung ist.

83 Der Residuenkalkül

83.1 Aufgaben

83.1 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f(z)$ Lage und Art der isolierten Singularitäten sowie die zugehörigen Residuen:

(a) $f(z) = \frac{z^2}{z^4-16}$,

(b) $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^n}$,

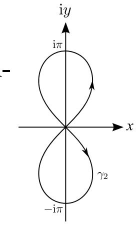
(c) $f(z) = \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z}$,

(d) $f(z) = \frac{1}{\cos {}^1\!/z}$,

(e) $f(z) = \frac{z^4+18z^2+9}{4z(z^2+9)}$,

(f) $f(z) = \frac{z}{\sin z}$.

83.2 Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die Integrale



(a) $\displaystyle\oint_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{\sin z}$, wobei γ_1 das Rechteck mit den Ecken $\pm 4 \pm \mathrm{i}$ positiv orientiert durchläuft,

(b) $\displaystyle\oint_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z}$, wobei γ_2 die skizzierte Schlinge ist.

83.3 Man berechne die folgenden Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6}$,

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+3\sin t}$,

(c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$.

83.4 Man bestimme für die Funktion $f(z) = \dfrac{z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}-1} - 1}{z-1}$

(a) Lage und Art der Singularitäten in $\mathbb{C}$,

(b) den Wert von $\displaystyle\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z$.

83.2 Lösungen

83.1 Man beachte unser Rezept zum Bestimmen des Residuums einer Funktion f.

(a) Die Nullstellen des Nenners von $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z^2}{z^4-16} = \frac{g(z)}{h(z)}$ sind

$$z_{1,2} = \pm 2 \quad \text{und} \quad z_{3,4} = \pm 2\,\mathrm{i}\,.$$

Wegen $g(z_k) \neq 0$ und $h'(z_k) \neq 0$ sind die z_k einfache Pole von $f(z)$, als Residuum erhalten wir daher in diesen vier Stellen:

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{z_k^2}{4z_k^3} = \frac{1}{4z_k} = \begin{cases} \pm\frac{1}{8}\,, & k = 1,2 \\ \mp\frac{1}{8}\,\mathrm{i}\,, & k = 3,4 \end{cases} \quad .$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_83,

(b) Wir bestimmen die Laurentreihenentwicklung von $f(z) = \frac{1-\cos z}{z^n}$ und lesen daran das Residuum ab:

$$f(z) = \frac{1}{z^n}\left(1 - 1 + \frac{1}{2!}z^2 - \frac{1}{4!}z^4 + - \dots\right) = \frac{1}{2!}z^{2-n} - \frac{1}{4!}z^{4-n} + \frac{1}{6!}z^{6-n} - + \dots .$$

Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $n = 1, 2$: Die Laurentreihe hat keine Glieder mit negativen Exponenten von z. Somit ist $z = 0$ hebbare Singularität und $\operatorname{Res}_0 f(z) = 0$.
- $n = 3$: Aus der Laurentreihe liest man ab: f hat bei $z = 0$ einen Pol 1. Ordnung und $\operatorname{Res}_0 f(z) = 1/2$.
- $n = 4$: Aus der Laurentreihe liest man ab: f hat bei $z = 0$ einen Pol 2. Ordnung und $\operatorname{Res}_0 f(z) = 0$.

(c) Wieder bestimmen wir die Laurentreihe und entscheiden dann:

$$f(z) = \frac{1}{z}\cos\frac{1}{z} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^4} \mp \cdots\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^7} \mp \cdots .$$

Es ist damit $z = 0$ eine wesentliche Singularität, da der Hauptteil der Laurentreihe unendlich viele Glieder $\neq 0$ enthält, und es gilt $\operatorname{Res}_0 f(z) = 1$.

(d) Die Funktion $f(z) = \frac{1}{\cos 1/z}$ hat bei $z_k = \frac{1}{\pi/2 + k\pi}$ einfache Pole, die sich gegen $z = 0$ häufen. Somit ist $z = 0$ eine nicht isolierte Singularität und somit $\operatorname{Res}_0 f$ nicht erklärt, weiter erhalten wir:

$$\operatorname{Res}_{z_k} = \frac{1}{-\sin\frac{1}{z_k}\left(-\frac{1}{z_k^2}\right)} = \frac{z_k^2}{(-1)^k} = (-1)^k \frac{1}{\pi^2\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} .$$

(e) Die Nullstellen des Nenners h der Funktion $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z^4+18z^2+9}{4z(z^2+9)}$ sind $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm 3\,\mathrm{i}$ je einfach. Wegen $g(z_k) \neq 0$ sind z_k einfache Pole, wir erhalten:

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Res}_{z_1} f(z) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \\ \operatorname{Res}_{z_{2,3}} f(z) = \frac{81-18\cdot 9+9}{-12\cdot 9+36} = 1 \end{cases} .$$

(f) Wir betrachten die Nullstellen des Nenners h der Funktion $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{z}{\sin z}$:

- $z = 0$ ist hebbare Singularität, da $\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin z} = 1$, daher gilt:

$$\operatorname{Res}_0 f(z) = 0 .$$

- $z_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: Wegen $h'(z_k) = \cos k\pi \neq 0$ und $g(z_k) = k\pi \neq 0$ sind z_k Pole 1. Ordnung, wir erhalten:

$$\operatorname{Res}_{z_k} f(z) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)} = \frac{k\pi}{\cos k\pi} = (-1)^k\, k\,\pi , \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} .$$

83.2 (a) Die Singularitäten von $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ sind die Zahlen $z_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Wegen $\cos z_k \neq 0$ gilt:

$$\mathrm{Res}_{k\pi} f = \frac{1}{\cos k\pi} = (-1)^k .$$

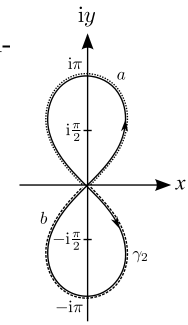
Da γ_1 nur die Pole bei $0, \pm\pi$ umläuft gilt nach dem Residuensatz:

$$\oint_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{\sin z} = 2\pi\,\mathrm{i}\,(\mathrm{Res}_0\, f + \mathrm{Res}_\pi\, f + \mathrm{Res}_{-\pi}\, f) = 2\pi\,\mathrm{i}(1-1-1) = -2\pi\,\mathrm{i}\ .$$

(b) Die Singularitäten von $f(z) = \frac{1}{\cosh z}$ sind die Zahlen $z_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}\,\mathrm{i}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.Wegen $(\cosh z_k)' = \sinh z_k \neq 0$ gilt

$$\mathrm{Res}_{\pi\,\mathrm{i}/2}\, f = \frac{1}{\sinh \mathrm{i}\,\pi/2} = \frac{1}{\sin \pi/2} = -\,\mathrm{i} = -\,\mathrm{Res}_{-\pi\,\mathrm{i}/2}\, f\ .$$

Mit dem Residuensatz folgt nun unter Beachtung der Orientierung (siehe Skizze):



$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} &= \oint_a \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} + \oint_b \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z}\\
&= \oint_a \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z} - \oint_{-b} \frac{\mathrm{d}z}{\cosh z}\\
&= 2\pi\,\mathrm{i}(-\,\mathrm{i} - \mathrm{i}) = 4\pi\,.
\end{aligned}$$

83.3 (a) (1) Die Singularitäten von $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ sind einfache Pole bei $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)}$ für $k = 0, 1, \ldots, 5$. In der oberen Halbebene befinden sich $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}},\ \ z_1 = \mathrm{i},\ \ z_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}}$.

(2) Als Residuen erhalten wir:

$$\mathrm{Res}_{z_k}\, f(z) = \frac{1}{6z_k^5} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \mathrm{Res}_{z_0}\, f(z) = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}} \\ \mathrm{Res}_{z_1}\, f(z) = -\frac{\mathrm{i}}{6} \\ \mathrm{Res}_{z_2}\, f(z) = \frac{1}{6}\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{25\pi}{6}} \end{cases} .$$

(3) Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^6} &= 2\pi\,\mathrm{i}\sum_{k=0}^{2} \mathrm{Res}_{z_k}\, f(z) = \frac{2\pi\,\mathrm{i}}{6}\left(\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{5\pi}{6}} - \mathrm{i} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}\right)\\
&= \mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6} - \mathrm{i} + \cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{i}\,\frac{\pi}{3}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2} - \mathrm{i} - \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

(b) (1) Wir substituieren $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi},\ \ \mathrm{d}z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = \mathrm{i}\,z\,\mathrm{d}\varphi,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5 + 3\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)}\,\frac{1}{\mathrm{i}\,z}\,\mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} \frac{2}{3z^2 + 10\,\mathrm{i}\,z - 3}\,\mathrm{d}z\,.$$

(2) Die Singularitäten von $f(z) = \frac{2}{3z^2+10\,\mathrm{i}\,z-3}$ sind die Nullstellen des Nenners:

$$z^2 + \frac{10}{3}\,\mathrm{i}\,z - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2} = -\frac{5}{3}\,\mathrm{i} \pm \frac{4}{3}\,\mathrm{i} = \begin{cases} -\frac{1}{3}\,\mathrm{i} \\ -3\,\mathrm{i} \end{cases} .$$

Nur $z_0 = -\,\mathrm{i}/3$ liegt innerhalb des Einheitskreises.

(3) Das Residuum ermitteln wir mittels einer Partialbruchzerlegung, es gilt

$$\frac{2}{3z^2+10\,\mathrm{i}\,z-3} = \frac{2}{3\left(z+\frac{\mathrm{i}}{3}\right)(z+3\,\mathrm{i})} = \frac{1}{4\,\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z+\frac{\mathrm{i}}{3}} - \frac{1}{z+3\,\mathrm{i}}\right).$$

Damit erhalten wir $\mathrm{Res}_{z_0} = \frac{1}{4\,\mathrm{i}}$.

(4) Es gilt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{5+3\sin t} = \frac{1}{4\,\mathrm{i}}\,2\pi\,\mathrm{i} = \frac{\pi}{2}\,.$$

(c) Aus Aufgabe 83.1 kennen wir die Singularitäten und auch die Residuen. Daher erhalten wir:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\pi\,\mathrm{i}\,\mathrm{Res}_{2\,\mathrm{i}}\,f(z) = 2\pi\,\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}}{8}\right) = \frac{\pi}{4}\,.$$

83.4 (a) $f(z)$ besitzt folgende Singularitäten:

- $z = 1$ ist Nullstelle von Zähler und Nenner (einfach), somit hebbare Singularität.
- $z = 0$ ist wesentliche Singularität.

(b) $\mathrm{Res}_1\,f(z) = 0$. Zur Ermittlung von $\mathrm{Res}_0\,f(z)$ werde f um $z = 0$ in eine Laurent-Reihe entwickelt, dazu beachte man:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}\,,\quad z\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}-1} - 1 = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-1}} - 1 \quad \text{und}$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n\,,\qquad |z| < 1\,.$$

Damit erhalten wir:

$$f(z) = -\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^{n-1}} - 1\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right),\qquad 0 < |z| < 1\,.$$

Der Koeffizient von z^{-1} ist $-\frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = -\frac{1}{\mathrm{e}}(\mathrm{e}-2) = \mathrm{Res}_0\,f(z)$.
Daher folgt

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\,\mathrm{i}\,(\mathrm{Res}_0\,f(z) + \mathrm{Res}_1\,f(z)) = 2\pi\,\mathrm{i}\left(\tfrac{2}{\mathrm{e}} - 1\right)\,.$$

84 Konforme Abbildungen

84.1 Aufgaben

84.1 Bestimmen Sie eine Möbiustransformation $f(z) = \frac{az+b}{cd+d}$ mit der Eigenschaft $f(0) = 1,\ \ f(1) = -\mathrm{i},\ \ f(\mathrm{i}) = \infty$.

84.2 Welche winkeltreue Abbildung $w = f(z)$ bildet das Innere der rechten Hälfte des Einheitskreises auf das Innere des Einheitskreises mit $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i},\ \ f(1) = 1$ und $f(-\mathrm{i}) = -\mathrm{i}$ ab?
Hinweis: Man beachte die Winkel in den Randpunkten i und $-\mathrm{i}$.

84.3 Es sei $f(z) = \frac{\mathrm{i}(z-1)}{z+\mathrm{i}}$ und $w = h(z)$ diejenige Möbiustransformation, für die $h(0) = \mathrm{i}$, $h(\mathrm{i}) = \infty$ und $h(\infty) = 1$ ist.

(a) Bestimme $h(z)$.

(b) Bestimme die Darstellung und die Fixpunkte von $g(z) = h(f(z))$.

(c) Skizziere die Bilder der 4 Quadranten unter $w = f(z)$.

(d) Welche Geraden werden durch f wieder auf Geraden abgebildet?

(e) Wie lautet das Urbild der Halbkreisscheibe $\left\{w \in \mathbb{C} \,\middle|\, |w| \le 1,\ \operatorname{Re} w \ge 0\right\}$, unter der Abbildung $w = f(z)$?

84.4 Gegeben ist die Möbiustransformation $w = \frac{z}{z-\mathrm{i}}$.

(a) Bestimmen Sie die Fixpunkte, die Umkehrabbildung und die Bilder bzw. Urbilder der Punkte $0,\ 1,\ \infty$.

(b) Skizzieren Sie die Bilder der rechten Halbebene $\operatorname{Re} z \ge 0$, der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z \ge 0$ und der Einheitskreisscheibe $|z| \le 1$.

(c) Welche Kurven der z-Ebene werden auf Geraden der w-Ebene abgebildet und welche davon auf Geraden durch $w = 0$?

84.2 Lösungen

84.1 Es sind 3 Original- und Bildpunkte gegeben:

z	0	1	i
w	1	$-\mathrm{i}$	∞

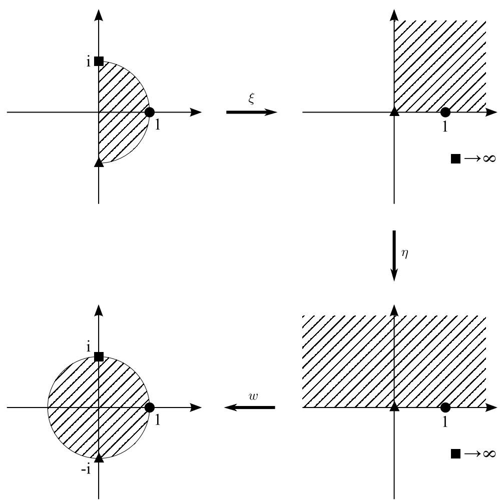
Mit der 6-Punkte-Formel erhalten wir:

$$\frac{z-1}{z-\mathrm{i}} : \frac{-1}{-\mathrm{i}} = \frac{w+\mathrm{i}}{w-\infty} : \frac{1+\mathrm{i}}{1-\infty} \;\Leftrightarrow\; \frac{z-1}{z-\mathrm{i}} \cdot \mathrm{i} = \frac{w+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} \;\Leftrightarrow\; w = \frac{z-1}{z-\mathrm{i}}(\mathrm{i}-1) - \mathrm{i} = -\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\,.$$

Die gesuchte Möbiustransformation lautet somit $f(z) = -\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_84,

84.2 Der Versuch $w = z^2$ erweist sich als falsch, da der geradlinige Rand des Halbkreises auf die Strecke $[-1, 0]$ innerhalb der Einheitskreisscheibe abgebildet werden würde. Das Bild wäre also nur die von -1 nach 0 geschlitzte Einheitskreisscheibe.
Wir überlegen: Der Rand des Bildbereiches hat keine Ecken. Daher müssten die $\pi/2$-Winkel auf den Rand des Halbkreisbereiches in $z = \mathrm{i}$ und $z = -\mathrm{i}$ auf π gestreckt werden.
Lösung: i und $-\mathrm{i}$ durch eine gebrochen lineare Transformation nach 0 und ∞ bringen, Quadratabbildung ausführen und den neuen Rand durch eine gebrochen lineare Abbildung auf den Einheitskreis abbilden:



1. Zunächst gilt

z	1	$-\mathrm{i}$	i
ξ	1	0	∞

   Mit der 6-Punkte-Formel erhalten wir:

$$\frac{\xi - 0}{\xi - \infty} : \frac{1 - 0}{1 - \infty} = \frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}} : \frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} \;\Rightarrow\; \xi = -\mathrm{i}\,\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\,.$$

   Die Halbkreisscheibe der z-Ebene geht in den 1. Quadranten der ξ-Ebene über.

2. $\eta = \xi^2$: Der rechte Winkel in ▲ und ■ wird auf π *aufgebogen*. Mit der ersten Transformation erhält man

$$\eta = -\left(\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}\right)^2\,.$$

   Der 1. Quadrant der ξ-Ebene geht in die obere Halbebene der η-Ebene über.

3. Nun benötigen wir eine gebrochen lineare Abbildung, gegeben durch:

η	0	1	∞
w	$-\mathrm{i}$	1	i

Mit der 6-Punkte-Formel erhalten wir:

$$\Rightarrow\ \frac{\eta-1}{\eta-\infty}:\frac{-1}{-\infty}=\frac{w-1}{w-\mathrm{i}}:\frac{-\mathrm{i}-1}{-2\,\mathrm{i}}\ \Rightarrow\ \frac{w-1}{w-\mathrm{i}}=-\frac{\mathrm{i}+1}{2\,\mathrm{i}}\,(\eta-1)$$

$$\Rightarrow\ \frac{w-1}{w-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}-1}{2}(\eta-1)\ \Rightarrow\ w-1=\frac{\mathrm{i}-1}{2}(\eta-1)w+\frac{1+\mathrm{i}}{2}(\eta-1)$$

$$\Rightarrow\ w\left[1+\frac{1-\mathrm{i}}{2}(\eta-1)\right]=1+\frac{1+\mathrm{i}}{2}(\eta-1)$$

$$\Rightarrow\ w\,[(1-\mathrm{i})\eta+1+\mathrm{i}]=(1+\mathrm{i})\eta+1-\mathrm{i}$$

$$\Rightarrow\ w=\frac{(1+\mathrm{i})\eta+1-\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})\eta+1+\mathrm{i}}=\frac{\eta-1}{-\mathrm{i}\,\eta+1}=\frac{\mathrm{i}-\eta}{\mathrm{i}\,\eta-1}\,.$$

Nun setzen wir alles zusammen:

$$\frac{\mathrm{i}-\eta}{\mathrm{i}\,\eta-1}=\frac{\mathrm{i}+\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2}{-\mathrm{i}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)^2-1}=\frac{\mathrm{i}\,z^2+2z-\mathrm{i}+z^2+2z\,\mathrm{i}-1}{-\mathrm{i}\,z^2+2z+\mathrm{i}-z^2+2z\,\mathrm{i}+1}=\frac{z^2+2z-1}{-z^2+2z+1}\,.$$

Daher taugt die Funktion

$$f(z)=\frac{z^2+2z-1}{-z^2+2z+1}\,.$$

84.3 (a) Wir bestimmen h mit der 6-Punkte-Formel anhand der Tabelle

z	0	i	∞
w	i	∞	1

.

Es gilt

$$\frac{w-\infty}{w-1}:\frac{\mathrm{i}-\infty}{\mathrm{i}-1}=\frac{z-\mathrm{i}}{z-\infty}:\frac{-\mathrm{i}}{-\infty}\ \Rightarrow\ w-1=\frac{1+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\ \Rightarrow\ w=h(z)=\frac{z+1}{z-\mathrm{i}}\,.$$

(b) Wir ermitteln erst einmal g:

$$g(z)=h(f(z))=\frac{\frac{\mathrm{i}(z-1)}{z+\mathrm{i}}+1}{\frac{\mathrm{i}(z-1)}{z+\mathrm{i}}-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}\,z-\mathrm{i}+z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}\,z-\mathrm{i}-\mathrm{i}\,z+1}=\frac{(\mathrm{i}+1)z}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}\,z\,.$$

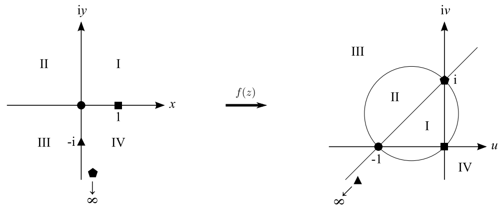
Für die Fixpunkte gilt $g(z)=z=\mathrm{i}\,z\ \Leftrightarrow\ z_1=0\ \vee z_2=\infty$.

(c) Um die Bilder der 4 Quadranten zu ermitteln bilden wir erst einmal die Koordinatenachsen mit f ab:

$f(\mathbb{R})$: Abbilden von $0,\ 1,\ \infty$ liefert den Kreis durch $-1,\ 0,\ \mathrm{i}$.

$f(\mathrm{i}\,\mathbb{R})$: Abbilden von $0,\ -\mathrm{i},\ \infty$ liefert die Gerade durch $-1,\ \infty,\ \mathrm{i}$.

Als Bilder der vier Quadranten erhalten wir somit:



(d) Da Geraden durch ∞ gehen, erhalten wir:

- $f^{-1}(\infty) = -\mathrm{i}$: Nur die Geraden und Kreise durch $-\mathrm{i}$ gehen bei f in Geraden über.
- $f(\infty) = \mathrm{i}$: Die Bildgeraden der Geraden durch $z = -\mathrm{i}$ sind die Geraden durch $w = \mathrm{i}$.

(e) Wir ermitteln die Umkehrabbildung von f:

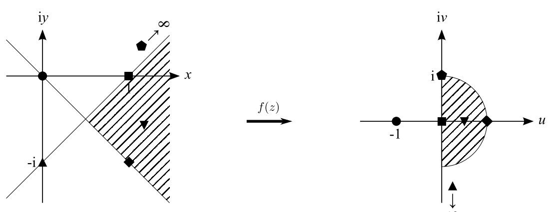
$$w = f(z) = \frac{\mathrm{i}\,z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}} \;\Leftrightarrow\; z = -\mathrm{i}\,\frac{w+1}{w-\mathrm{i}}\,.$$

Nun betrachten wir die Tabellen:

w	1	i	-1
z	$1-\mathrm{i}$	∞	0

w	0	i	∞
z	1	∞	$-\mathrm{i}$

Somit ist das Urbild des Kreises $|w| = 1$ die Gerade durch 0 und $-\mathrm{i}$ und das Urbild von $\operatorname{Re} w = 0$ die Gerade durch 1 und $-\mathrm{i}$.



84.4 (a) Die Punkte z mit $w(z) = z$ erhalten wir aus

$$z = \frac{z}{z-\mathrm{i}} \;\Leftrightarrow\; z^2 - (1+\mathrm{i})z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0 \;\vee\; z = 1 + \mathrm{i}\,.$$

Die Abbildung besitzt also 2 Fixpunkte. Die Umkehrabbildung erhalten wir aus:

$$w = \frac{z}{z-\mathrm{i}} \;\Leftrightarrow\; (w-1)z - w\,\mathrm{i} = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\mathrm{i}\,w}{w-1} = f^{-1}(w)\,.$$

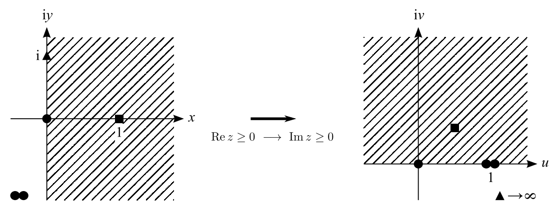
Für die Bilder und Urbilder von 0, 1 und ∞ erhält man:

z	0	1	∞
w	0	$\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$	1

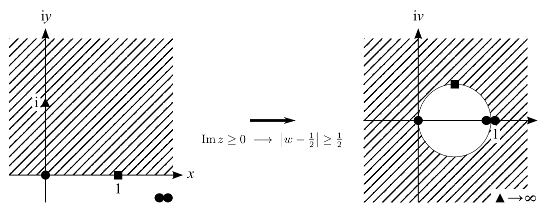
w	0	1	∞
z	0	∞	i

(b) Da $f(z)$ eine kreistreue Bijektion $\tilde{\mathbb{C}} \to \tilde{\mathbb{C}}$ ist, gehen von Kreisen (einschließlich Geraden) begrenzte Bereiche in eben solche über.

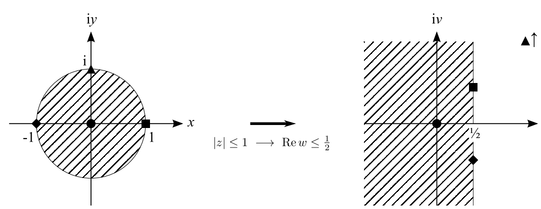
(i) Rechte Halbebene: $\operatorname{Re} z \geq 0$. Randkurve: $\operatorname{Re} z = 0 \;\Rightarrow\; z = \mathrm{i}\,y$. Das ist ein Kreis durch die Punkte 0, i, ∞, die durch $w = f(z)$ abgebildet werden auf 0, ∞, 1, d.h. der Bildkreis ist die reelle w-Achse. $z = 1$ (Punkt der rechten Halbebene) wird auf $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$ ($\operatorname{Im} w > 0$) abgebildet. Somit ist der Bildbereich die obere Halbebene $\operatorname{Im} w \geq 0$.



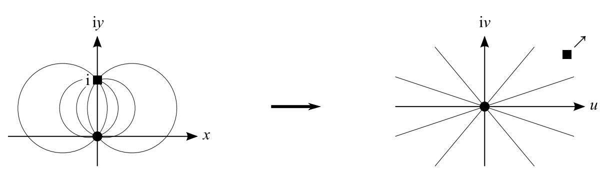
(ii) Obere Halbebene: $\operatorname{Im} z \geq 0$. Randkurve: $\operatorname{Im} z = 0 \;\Rightarrow\; z = x$. Das ist ein Kreis durch die Punkte 0, 1, ∞ mit den entsprechenden Bildpunkten 0, $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$, 1. Der Punkt i aus dem Inneren der oberen Halbebene hat den Bildpunkt $w = \infty$, der im Inneren des Bildbereichs liegen muss.



(iii) Kreisscheibe: $|z| \leq 1$. Randkurve: $|z| = 1$. Die Randkurve geht durch 1, i, -1 mit den Bildpunkten $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$, ∞, $\frac{1}{2}(1-\mathrm{i})$. Der innere Punkt $z = 0$ wird auf den inneren Punkt $w = 0$ abgebildet.



(c) Die Geraden der w-Ebene sind *Kreise* durch $w = \infty$. Sie sind die Bilder aller Kreise durch $z = \mathrm{i}$. Die Geraden durch $w = 0$ sind die Bilder der Kreise durch $z = 0$ und $z = \mathrm{i}$.



85 Harmonische Funktionen und das Dirichlet'sche Randwertproblem

85.1 Aufgaben

85.1 Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x, y) = x^3 + a\,x\,y^2$ harmonisch? Bestimmen Sie in diesem Fall eine zu u harmonisch konjugierte Funktion.

85.2 In welchen Gebieten $G \subseteq \mathbb{R}^2$ sind die folgenden Funktionen harmonisch?

(a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x + 5,$ (b) $u(x, y) = x + \frac{x}{x^2+y^2}.$

Man berechne jeweils die harmonisch konjugierte Funktion $v(x, y)$ sowie die zugehörige holomorphe Funktion $f(z)$.

85.3 Welche holomorphen Funktionen $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\,v(x, y)$ besitzen den Imaginärteil $v(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x \sin y$?

85.4 Gegeben ist das ebene Randwertproblem

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \;\text{ für }\; x^2 + y^2 < 1 \;\text{ und }\; u(\cos\varphi, \sin\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ 2 & \text{für } \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \\ 0 & \text{für } \pi < \varphi < 2\pi \end{cases}.$$

Mithilfe einer konformen Transformation und der Poisson'schen Integralformel für die obere Halbebene bestimme man die Lösung.

85.2 Lösungen

85.1 Der $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend, außerdem folgt aus

$$\Delta u(x, y) = 6x + 2ax = 0 \;\text{ für alle }\; x,\, y \in \mathbb{R}$$

sogleich $a = -3$. Damit ist u genau dann harmonisch, wenn $a = -3$.

Wir bestimmen eine zu u harmonisch konjugierte Funktion v nach unserem Rezept:

(1) Es gilt

$$v(x, y) = 3\,x^2 y - y^3 + h(x)\,.$$

(2) Es liefert

$$v_x = 6xy + h'(x) = 6xy$$

die Funktion $h'(x) = 0$. (3) Mit $h(x) = 0$ erhalten wir:

$$v(x, y) = 3\,x^2 y - y^3\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_85,

85.2 (a) Für $u = x^3 - 3xy^2 + 2x + 5$ gilt

$$u_x = 3x^2 - 3y^2 + 2\,,\ u_{xx} = 6x\,,\ u_y = -6xy\,,\ u_{yy} = -6x\,.$$

Somit ist $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, also u in $\mathbb{R}^2$ harmonisch.

Bestimmung der konjugiert harmonischen Funktion $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} v_y = u_x \quad &\Rightarrow \quad v = \int u_x \,\mathrm{d}y = 3x^2y - y^3 + 2y + g(x) \\ &\Rightarrow \quad v_x = 6xy + g'(x) \overset{!}{=} -u_y = 6xy \\ &\Rightarrow \quad g'(x) = 0 \ \Rightarrow\ g(x) = c \\ &\Rightarrow \quad v(x, y) = 3x^2y - y^3 + 2y + c\,, \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Die zugehörige holomorphe Funktion ist somit

$$f(z) = u + \mathrm{i}\,v = x^3 - 3xy^2 + 2x + 5 + \mathrm{i}(3x^2y - y^3 + 2y + c) = z^3 + 2z + 5 + \mathrm{i}\,c\,,\ c \in \mathbb{R}\,.$$

Für $u = x + \frac{x}{x^2+y^2}$ gilt

$$\begin{aligned} u_x &= 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\,,\ u_{xx} = \frac{-2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}\,, \\ u_y &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}\,,\ u_{yy} = \frac{-2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Somit ist $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, also u in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ harmonisch.
Bestimmung der konjugiert harmonischen Funktion $v(x, y)$:

$$\begin{aligned} v_y = u_x \quad &\Rightarrow \quad v = \int u_x \,\mathrm{d}y = y - \frac{y}{x^2 + y^2} + g(x) \\ &\Rightarrow \quad v_x = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + g'(x) \overset{!}{=} -u_y = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\Rightarrow \quad g'(x) = 0 \ \Rightarrow\ g(x) = c \\ &\Rightarrow \quad v(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} + c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Die zugehörige holomorphe Funktion ist somit

$$f(z) = u + \mathrm{i}\,v = x + \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\left(y - \frac{y}{x^2 + y^2} + c\right) = z + \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} + \mathrm{i}\,c = z + \frac{1}{z} + \mathrm{i}\,c\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

85.3 Die Funktion $v(x, y) = x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x \sin y$ ist eine in $\mathbb{R}^2$ harmonische Funktion, denn:

$$v_{xx} = 2 + \mathrm{e}^x \sin y\,, \qquad v_{yy} = -2 - \mathrm{e}^x \sin y\,,$$

sodass

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0\,.$$

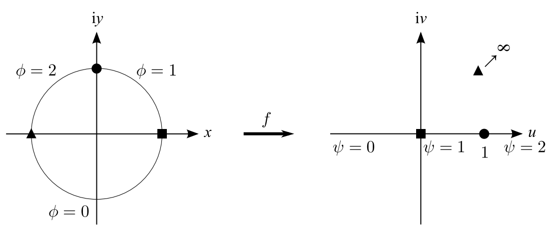
Berechnung der konjugiert harmonischen Funktion:

$$\begin{aligned}
u_x = v_y \quad &\Rightarrow \quad u = \int v_y \,\mathrm{d}x = \int -2y + \mathrm{e}^x \cos y \;\mathrm{d}x = -2xy + \mathrm{e}^x \cos y + g(y) \\
&\Rightarrow \quad u_y = -2x - \mathrm{e}^x \sin y + g'(y) \stackrel{!}{=} -v_x = -2x - \mathrm{e}^x \sin y \\
&\Rightarrow \quad g'(y) = 0 \;\Rightarrow\; g(y) = c \\
&\Rightarrow \quad u(x,y) = -2xy + \mathrm{e}^x \cos y + c\,,\;\; c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Die zugehörige holomorphe Funktion ist somit

$$\begin{aligned}
f(z) &= -2xy + \mathrm{e}^x \cos y + c + \mathrm{i}\left(x^2 - y^2 + \mathrm{e}^x \sin y\right) \\
&= \mathrm{i}\, z^2 + \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y) + c \\
&= \mathrm{i}\, z^2 + \mathrm{e}^z + c\,,\;\; c \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

85.4 • Schritt 1: Konforme Verpflanzung des Randwertproblems in die obere Halbebene:



Wir beachten die folgende Tabelle:

z	1	i	-1
w	0	1	∞

Mit der 6-Punkte-Formel erhalten wir:

$$\frac{z-\mathrm{i}}{z+1} : \frac{1-\mathrm{i}}{1+1} = \frac{w-1}{w-\infty} : \frac{0-1}{0-\infty} \;\Rightarrow\; w = -(1+\mathrm{i})\frac{z-\mathrm{i}}{z+1} + 1 = \mathrm{i}\,\frac{1-z}{1+z}\,.$$

Die Möbiustransformation lautet damit:

$$f(z) = \mathrm{i}\,\frac{1-z}{1+z}\,.$$

• Schritt 2: Lösen des Randwertproblems in der oberen w-Halbebene:
Das Poisson-Integral (für die obere Halbebene) lautet:

$$\begin{aligned}
\psi(u,v) &= \frac{v}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(t,0)}{(u-t)^2+v^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{v}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} \frac{0\cdot \mathrm{d}t}{(u-t)^2+v^2} + \int_0^1 \frac{1\cdot \mathrm{d}t}{(u-t)^2+v^2} + \int_1^\infty \frac{2\cdot \mathrm{d}t}{(u-t)^2+v^2}\right)
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\int\limits_a^b \frac{v}{(u-t)^2+v^2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \arctan\dfrac{v}{u-b} - \arctan\dfrac{v}{u-a} & \text{für } u \notin [a,b] \\ \pi + \arctan\dfrac{v}{u-b} - \arctan\dfrac{v}{u-a} & \text{für } u \in [a,b] \end{cases}$$

und

$$\arg(w-u_0) = \left\{\begin{matrix} \arctan\dfrac{v}{u-u_0} & \text{für } u > u_0 \\ \pi + \arctan\dfrac{v}{u-u_0} & \text{für } u < u_0 \end{matrix}\right\} = \arccos\frac{u-u_0}{\sqrt{(u-u_0)^2+v^2}}\ .$$

Wir setzen dies alles zusammen und erhalten die Lösung

$$\psi(u,v) = 2 - \frac{1}{\pi}\left(\arccos\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} + \arccos\frac{u-1}{\sqrt{(u-1)^2+v^2}}\right)\ .$$

• Schritt 3: Rücktransformation

$$w = f(z) = \mathrm{i}\,\frac{1-z}{1+z} = \frac{2y}{(1+x)^2+y^2} + \mathrm{i}\,\frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2} =: u + \mathrm{i}\,v$$

liefert

$$\phi(x,y) = 2 - \frac{1}{\pi}\left(\arccos\frac{u(x,y)}{\sqrt{[u(x,y)]^2+[v(x,y)]^2}} + \arccos\frac{u(x,y)-1}{\sqrt{[u(x,y)-1]^2+[v(x,y)]^2}}\right)$$

mit

$$u(x,y) = \frac{2y}{(1+x)^2+y^2}\,, \qquad v(x,y) = \frac{1-x^2-y^2}{(1+x)^2+y^2}\,.$$

86 Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

86.1 Aufgaben

86.1 Begründen Sie, warum das Rezept zur Lösung linearer pDGLen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten auf Seite 788 (Rezeptebuch) funktioniert.

86.2 Löse die folgenden pDGLen:

(a) $2u_x + 3u_t = \mathrm{e}^{x+t}$,

(b) $yu_x - xu_y = 0$,

(c) $(x+u)u_x + (y+u)u_y = -u$,

(d) $xu_x + yu_y = xu$.

86.2 Lösungen

86.1 Wegen der angegebenen Transformation erhalten wir mit der Kettenregel

$$F(r,s) = au_x + bu_y = a(U_r r_x + U_s s_x) + b(U_r r_y + U_s s_y = 2abU_r\,.$$

86.2 (a) Mit der Variablensubstitution $r = 3x + 2y$, $s = 3x - 2y$, $U(r,s) = u(x,y)$ entsteht auf der linken Seite:

$$\begin{aligned} 2u_x + 3u_y &= 2(U_r\, r_x + U_s\, s_x) + 3(U_r\, r_y + U_s\, s_y) \\ &= 2(U_r \cdot 3 + U_s \cdot 3) + 3(U_r \cdot 2 + U_s \cdot (-2)) = 12U_r. \end{aligned}$$

Durch Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$3x + 2y = r \quad \text{und} \quad 3x - 2y = s$$

nach x und y erhält man $x = \frac{1}{6}(r+s)$, $y = \frac{1}{4}(r-s)$, also wird die rechte Seite der Differentialgleichung zu

$$\exp(x+y) = \exp\big(\tfrac{2}{12}r + \tfrac{2}{12}s + \tfrac{3}{12}r - \tfrac{3}{12}s\big) = \exp\big(\tfrac{5}{12}r - \tfrac{1}{12}s\big)\,.$$

Wir erhalten also als Differentialgleichung für U

$$12U_r = \exp\big(\tfrac{5}{12}r - \tfrac{1}{12}s\big)\,.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$U(r,s) = \tfrac{1}{12}\int \exp\big(\tfrac{5}{12}r - \tfrac{1}{12}s\big)\,\mathrm{d}r + g(\eta) = \tfrac{1}{5}\exp\big(\tfrac{5}{12}r - \tfrac{1}{12}s\big) + g(s)$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_86,

mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $g(s)$. Durch Rücksubstitution erhalten wir daraus

$$u(x,y) = \tfrac{1}{5}\,\mathrm{e}^{x+y} + g(3x-2y)\,.$$

(b) (1) Wir erhalten die gewöhnliche DGL $y' = -\frac{x}{y}$.

(2) Als Lösung der separierbaren DGL aus (1) ermitteln wir $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$.

(3) Aufgelöst nach c: $c = \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)$.

(4) Für jedes stetig differenzierbare f ist

$$u(x,y) = f(x^2+y^2)$$

eine Lösung.

(c) Wir lösen diese quasilineare pDGL nach unserem Rezept:

(1) Wir betrachten die lineare pDGL in drei Variablen

$$(x+u)F_x + (y+u)F_y - uF_u = 0\,.$$

(2) Um die homogene pDGL in (1) zu lösen, verwenden wir unser Rezept zur Lösung einer homogenen pDGL:

(1) Wir erhalten das System

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = -\frac{x+u}{u}\,,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = -\frac{y+u}{u}\,.$$

(2) Als Lösung von (1) erhalten wir

$$u^2 + 2xu = c_1\,,\ u^2 + 2yu = c_2\,.$$

(3) siehe (2).

(4) Für jedes stetig differenzierbare f ist $F(x,y,u) = f(u^2+2xu, u^2+2yu)$ eine Lösung.

(3) Für jedes stetig differenzierbare f ist durch $f(u^2+2xu, u^2+2yu) = 0$ implizit eine Lösung u gegeben.

(d) (1) Wir gehen über zu der pDGL

$$x\,F_x + y\,F_y + x\,u\,F_u = 0\,.$$

(2) Mit unseren Methoden erhalten wir

$$c_1 = c_1(x,y,u) = \frac{y}{x} \quad\text{und}\quad c_2 = c_2(x,y,u) = u\,\mathrm{e}^{-x}\,,$$

also die Lösung

$$F(x,y,u) = f\left(\frac{y}{u},\, u\,\mathrm{e}^{-x}\right)$$

für beliebiges differenzierbares f.

(3) Durch

$$f\left(\frac{y}{u},\, u\,\mathrm{e}^{-x}\right) = 0$$

ist implizit eine Lösung $u = u(x,y)$ gegeben.

87 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung – Allgemeines

87.1 Aufgaben

87.1 Man bestimme die Typen der pDGLen und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

(a) $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_x + 4u_y = 2u$,

(b) $x^3 u_{xx} + 2u_{xy} + y^3 u_{yy} + u_x - yu_y = \mathrm{e}^x$,

(c) $yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = y^2 + \ln(1 + x^2)$.

87.2 Finden Sie mit Hilfe des Separationsansatzes Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

(a) $x^2\, u_x + \frac{1}{y}\, u_y = u$,

(b) $x^2\, u_{xy} + 3y^2\, u = 0$.

87.2 Lösungen

87.1 Zu einer pDGL 2. Ordnung gehört eine symmetrische Matrix A, die sich aus dem Hauptteil der pDGL ergibt.

(a) Als Matrix A erhalten wir:

$$2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_x + 4u_y = 2u \;\Leftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det A = 0$ ist die pDGL in ganz $\mathbb{R}^2$ vom parabolischem Typ.

(b) Als Matrix A erhalten wir:

$$x^3 u_{xx} + 2u_{xy} + y^3 u_{yy} + u_x - yu_y = \mathrm{e}^x \;\Leftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} x^3 & 1 \\ 1 & y^3 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt:

$$\det A = (xy)^3 - 1 \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch) für} & x > 0 \Rightarrow y > \frac{1}{x},\, x < 0 \Rightarrow y < \frac{1}{x} \\ = 0 & \text{(parabolisch) für} & y = \frac{1}{x} \\ < 0 & \text{(hyperbolisch) für} & x > 0 \Rightarrow y < \frac{1}{x},\, x < 0 \Rightarrow y > \frac{1}{x} \\ & & x = 0, y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_87,

(c) Als Matrix A erhalten wir:

$$yu_{xx} + 2xu_{xy} + yu_{yy} = y^2 + \ln(1+x^2) \;\Leftrightarrow\; A = \begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}.$$

$$\det A = y^2 - x^2 = (y+x)(y-x) \begin{cases} > 0 & \text{für} \quad (y < -x \wedge y < x) \vee (y > -x \wedge y > x) \\ = 0 & \text{für} \quad y = x \vee y = -x \\ < 0 & \text{für} \quad (y > -x \wedge y < x) \vee (y < -x \wedge y > x) \end{cases}$$

Hierdurch sind entsprechend die Bereiche erklärt, in denen die pDGL elliptisch, parabolisch bzw. hyperbolisch ist.

87.2 Gesucht werden jeweils Lösungen in der Form $u(x,y) = p(x)\,q(y)$.

(a) Ableiten des Ansatzes ergibt

$$u_x(x,y) = p'(x)\,q(y) \qquad \text{und} \qquad u_y(x,y) = p(x)\,q'(y);$$

durch Einsetzen in die Gleichung erhält man

$$x^2\,p'(x)\,q(y) + \frac{1}{y}\,p(x)\,q'(y) = p(x)\,q(y).$$

Nun schaffen wir alle Terme, die von x abhängen, nach links und alle anderen nach rechts

$$x^2\,\frac{p'(x)}{p(x)} = 1 - \frac{1}{y}\,\frac{q'(y)}{q(y)}.$$

Diese Gleichung kann nur dann für alle (x,y) gelten, wenn jede Seite für sich genommen gleich einer Konstanten ist, also

$$x^2\,\frac{p'(x)}{p(x)} = \alpha \qquad \text{und} \qquad 1 - \frac{1}{y}\frac{q'(y)}{q(y)} = \alpha$$

für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Zur Bestimmung von p und q sind also die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$p'(x) = \frac{\alpha}{x^2}\,p(x) \qquad \text{und} \qquad q'(y) = (1-\alpha)\,y\,q(y)$$

zu lösen.

Das geht beispielsweise mit dem bekannten Verfahren der Trennung der Variablen. Bei der Gleichung für p ist

$$\int \frac{1}{p}\,\mathrm{d}p = \int \frac{\alpha}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

also

$$\ln(p) = -\frac{\alpha}{x} + c \qquad \text{bzw.} \qquad p(x) = \tilde{c}\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{x}},$$

mit beliebigen Konstanten $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$.

Als Endergebnis der Rechnung erhalten wir das Produkt von p und q, also

$$u(x,y) = p(x)\, q(y) = \gamma\, \exp\Big(-\tfrac{\alpha}{x} + \tfrac{(1-\alpha)}{2}\, y^2\Big)$$

mit beliebigen Konstanten $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

(b) Ableiten des Ansatzes ergibt $u_{xy}(x,y) = p'(x)q'(y)$; durch Einsetzen in die Gleichung erhält man

$$x^2\, p'(x)q'(y) + 3y^2\, p(x)q(y) = 0. \tag{$\times$}$$

Das Sortieren der Terme nach x und y führt auf

$$x^2\, \frac{p'(x)}{p(x)} = -3y^2\, \frac{q(y)}{q'(y)},$$

und das kann wieder nur dann für alle (x,y) gelten, wenn jede Seite für sich genommen gleich einer Konstanten ist. Zu lösen sind also die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$x^2\, \frac{p'(x)}{p(x)} = \alpha \qquad \text{und} \qquad -\,3y^2\, \frac{q(y)}{q'(y)} = \alpha$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$. Umformen ergibt (für $\alpha \neq 0$)

$$p'(x) = \frac{\alpha}{x^2}\, p(x) \qquad \text{und} \qquad q'(y) = -\frac{3y^2}{\alpha}\, q(y).$$

Die erste Gleichung haben wir gerade in (a) gelöst und dabei $p(x) = c\, \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{x}}$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ erhalten. Die Lösung zur zweiten Gleichung ist

$$q(y) = C\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{\alpha}\, y^3};$$

wenn man das nicht sofort sieht, sollte man es mit Trennung der Variablen nachrechnen. Damit finden wir als Lösungen der Gleichung

$$u(x,y) = \gamma\, \exp\left(-\frac{y^3}{\alpha} - \frac{\alpha}{x}\right)$$

mit Konstanten $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. (Für $\alpha = 0$ erhält man aus $x^2 \frac{p'(x)}{p(x)} = 0$, dass $p(x) =$const. und damit aus $(\times)$ die Nulllösung, die im obigen Ausdruck durch $\gamma = 0$ enthalten ist.)

88 Die Laplace- bzw. Poissongleichung

88.1 Aufgaben

88.1 Lösen Sie das Dirichlet'sche Randwertproblem (Innenraumproblem):

$$-\Delta u(x,y) = 0 \;\text{ für }\; x^2+y^2<4 \;\text{ und }\; u(x,y)=u_0(\varphi)=\sin^3(\varphi) \;\text{ für }\; x^2+y^2=4\,.$$

88.2 Lösen Sie das Dirichlet'sche Randwertproblem (Außenraumproblem):

$$-\Delta u(x,y) = 0 \;\text{ für }\; x^2+y^2>R^2 \;\text{ und }\; u(x,y)=u_0(\varphi)=\sin^3(\varphi) \;\text{ für }\; x^2+y^2=R^2$$
$$\text{und }\; u(x,y) \;\text{ beschränkt für }\; x^2+y^2\to\infty\,.$$

88.3 Schreiben Sie ein Programm, das das Dirichlet'sche Randwertproblem aus Beispiel 88.1 (Rezeptebuch) löst.

88.2 Lösungen

88.1 Wir benutzen unser Rezept zum Lösen des Dirichlet'schen Randwertproblems für einen Kreis: (1) Die (endliche) Fourierreihenentwicklung der 2π-periodischen Funktion $u_0(\varphi)=\sin^3(\varphi)$ lautet

$$u_0(\varphi)=\sin^3(\varphi)=\frac{3}{4}\sin(\varphi)-\frac{1}{4}\sin(3\varphi)\,.$$

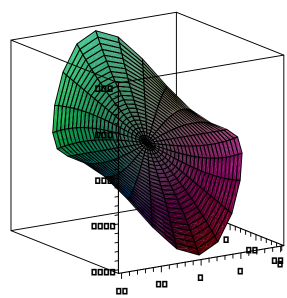
Damit haben wir $a_k=0$ für alle $k\in\mathbb{N}_0$ und $b_1=\frac{3}{4}$, $b_3=\frac{1}{4}$ und $b_k=0$ sonst.

(2) Damit erhalten wir die Lösung:

$$u(r,\varphi)=\frac{3}{4}\sin(\varphi)\frac{r}{2}-\frac{1}{4}\sin(3\varphi)\frac{r^3}{8}\,.$$

Eine Transformation auf kartesische Koordinaten liefert

$$u(x,y)=\frac{3}{8}y-\frac{3}{32}x^2y+\frac{1}{32}y^3\,.$$



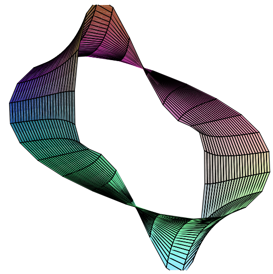
88.2 Die (endliche) Fourierreihenentwicklung der 2π-periodischen Funktion $u_0(\varphi)=\sin^3(\varphi)$ lautet nach wie vor (siehe vorherige Aufgabe)

$$u_0(\varphi)=\sin^3(\varphi)=\frac{3}{4}\sin(\varphi)-\frac{1}{4}\sin(3\varphi)\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_88,

Damit haben wir $a_k = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $b_1 = \frac{3}{4}$, $b_3 = \frac{1}{4}$ und $b_k = 0$ sonst. Das setzen wir mit den vertauschten Rollen von r und R in die Formel des Rezepts ein. Dann erhalten wir die Lösung:

$$u(r, \varphi) = \frac{3}{4}\sin(\varphi)\frac{2}{r} - \frac{1}{4}\sin(3\varphi)\frac{8}{r^3} \,.$$



Eine Transformation auf kartesische Koordinaten liefert

$$u(x, y) = \frac{3}{2}\frac{y}{x^2 + y^2} - 6\frac{y}{(x^2 + y^2)^2} + 8\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^3} \,.$$

88.3 Das folgende Programm taugt:

```
function [A,b]=laplExample (n)
% Laplace-Gleichung auf dem Einheitsquadrat [0,1]^2 mit
% Fünf-Punkte-Stern diskretisieren und für die rechte Seite
% f = 2*pi^2*sin(pi*x)*sin(pi*y)
% lösen.
% Hinweis: f ist so gewählt, dass
% u(x,y)= sin(pi*x)*sin(pi*y)
% die exakte Lösung ist.
%
% Input
%       n      n^2 ist die Anzahl der INNEREN Punkte (Freiheitsgrade)

if nargin<1, n=2^6-1;end

f = @(x,y) 2.*pi^2.*sin(pi*x).*sin(pi*y);

%% exakte Lösung als Funktion (zum Vergleich)

uExakt = @(x,y) sin(pi*x).*sin(pi*y);

%% Matrix aufstellen
mo=-ones(n,1);I=speye(n);                              % Hilfsgrößen

D=spdiags([ 4*ones(n,1), mo, mo ],[0,-1,1],n,n);    % A_n Block
C=spdiags([ mo,mo ],[-1,1],n,n);                       % Position der Nebend.
A=(kron(I,D)+kron(C,I))*((n+1).^2);                    % Kronecker

%% rechte Seite auftellen
[X,Y]=meshgrid((1:n)./(n+1));                          % innere Punkte
```

```
b=f(X,Y);b=b(:);

%% sparse LGS lösen
u=A\b;

%% Visualisierung: näherungslösung
[X,Y]=meshgrid(linspace(0,1,n+2));                  % Mesh MIT Rand
Z=zeros(size(X));
Z(2:end-1,2:end-1)=reshape(u,n,n);                 % u im Inneren
figure(1);
surf(X,Y,Z);
title(['n=',num2str(n)]);
%% Fehler
uRight=uExakt(X,Y);

fprintf('maximale Abweichung von exakter Lösung: %1.15e\n',...
    max(max(abs(Z-uRight))));

%% Visualisierung: exakte Lösung
[Xe,Ye]=meshgrid(linspace(0,1,1e3));
Ze=uExakt(Xe,Ye);
figure(2);
surf(Xe,Ye,Ze,'EdgeColor','none','FaceColor',0.8*ones(1,3));
camlight;
title('exakte Lösung')

end
```

89 Die Wärmeleitungsgleichung

89.1 Aufgaben

89.1 Lösen Sie das Nullrandproblem mit

$$u_t = u_{xx} \text{ für } x \in (0,1),\; t \geq 0 \text{ und } u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 3\sin(2\pi x)\,.$$

89.2 Lösen Sie (allgemein) das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t - c^2 u_{xx} = 0 \quad \text{mit} \quad u(x,0) = g(x) \quad \text{und} \quad u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$$

für einen Stab der Länge l, wobei an den Rändern kein *Wärmetransport* stattfindet, $u_x = 0$.

89.3 Schreiben Sie ein Programm, das das Nullrandproblem aus Beispiel 89.2 (Rezeptebuch) löst.

89.2 Lösungen

89.1 Wir gehen nach unserem Rezept vor:

(1) Die Funktion $u(x,0)$ ist bereit als Fourierreihe gegeben.

(2) Wir erhalten die Lösung $u = u(x,t)$:

$$u(x,t) = 2\,\mathrm{e}^{-9\pi^2/t} \sin(3\pi x) + 3\,\mathrm{e}^{-4\pi^2/t} \sin(2\pi x)\;.$$

89.2 Wir gehen vor wie bei der Lösung des Nullrandproblems:

1. Schritt. *Ermitteln von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung:* Diese kennen wir bereits:

$$u = u(x,t) = \mathrm{e}^{-c^2k^2t}\;(a\,\cos(k\,x) + \;b\,\sin(k\,x))\;\;,\quad a,\,b,\,k \in \mathbb{R}\,.$$

2. Schritt. *Die Randbedingungen legen Konstanten fest, wir erhalten eine allgemeine Lösung:* Wir ermitteln unter den Lösungen aus Schritt 1 jene, die auch die Randbedingungen $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0$ erfüllen. Dabei gilt

$$u_x(x,t) = \mathrm{e}^{-c^2k^2t}\;(-a\,k\,\sin(k\,x) + \;b\,k\,\cos(k\,x))\;.$$

- Aus $u_x(0,t) = 0$ für alle t folgt $b = 0$.
- Aus $b = 0$ und $u_x(l,t) = 0$ für alle t folgt $a\sin(k\,l) = 0$ für alle k. Damit:

$$\sin(k\,l) = 0 \;\Leftrightarrow\; k\,l = n\,\pi \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} \;\Leftrightarrow\; k = \frac{n\,\pi}{l} \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_89,

Damit ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$u_n(x,t) = a_n \, \mathrm{e}^{-c^2 (n\pi/l)^2 t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right)$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, die auch die Randbedingung erfüllt.

Durch Superposition dieser Lösungen erhalten wir eine allgemeine Lösung, die die Wärmeleitungsgleichung und die Randbedingung erfüllt:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-c^2 (n\pi/l)^2 t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right) .$$

3. Schritt: *Festnageln der Koeffizienten a_n der allgemeinen Lösung durch die Anfangsbedingungen:* Wir ermitteln nun mittels der allgemeinen Lösung aus Schritt 2 eine Lösung, die auch die Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ erfüllt. Dazu setzen wir die Anfangsbedingung ein:

Die Anfangsgsverteilung $u(x,0) = g(x)$ liefert:

$$g(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(n\frac{2\pi}{T} x\right) \quad \text{mit} \quad T = 2\,l\,.$$

Diese Darstellungen von g kennen wir aus dem Kapitel zur Fourierreihenentwicklung (siehe Abschnitt 74.3 (Rezeptebuch)): Die Koeffizienten a_n sind die Fourierkoeffizienten der Funktion g, falls g eine gerade Funktion auf dem Intervall $[-l, l)$ der Länge $T = 2l$ ist.

Wir setzen g entsprechend fort und erhalten die Lösung $u = u(x,t)$ wie folgt:

Rezept: Lösen eines (modifizierten) Nullrandproblems für einen Stab

Die Lösung $u = u(x,t)$ des Nullrandproblems

$$u_t = c^2 u_{xx} \text{ für } x \in (0,l),\ t \geq 0 \text{ und } u(x,0) = g(x) \text{ und } u_x(0,t) = 0 = u_x(l,t)$$

erhält man wie folgt:

(1) Bestimme die Koeffizienten a_n durch:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \cos\left(n\frac{\pi}{l} x\right) \mathrm{d}x \quad \text{für} \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ldots .$$

(2) Erhalte die Lösung $u = u(x,t)$ als Reihendarstellung:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-c^2 (n\pi/l)^2 t} \cos\left(\frac{n\,\pi}{l} x\right) .$$

89.3 Das folgende Programm taugt:

```
function [u,A,b]=WaermeGlLoes (T,c,u0,ul,ur,m,n)
% Loesung der 1D-Waermeleitungsgleichung: u_t - c*u_xx = 0
% auf dem Gebiet (x,t) in [0,1] \times [0,T]. Ort und Zeit werden
% diskretisiert und das komplette Gleichungssystem geloest.
% Dabei wird das Zeitintervall [0,T] mit linspace(T,0,m)
%       und das Ortsintervall [0,1] mit linspace(0,1,n) diskretisiert
% Input:
%      T     Endzeitpunkt
%      c     Konstante c in Gleichung
%     u0     Funktion u0(x) fuer Anfangswerte u(x,0)
%     ul     Funktion ul(t) fuer linke Randwerte u(0,t)
%     ur     Funktion ur(t) fuer rechte Randwerte u(1,t)
%      m     linspace(T,0,m) fuer t-Diskretisierung
%      n     linspace(0,1,n) fuer x-Diskretisierung
% Output:
%      u     (m,n) Matrix mit u Werten
%            u(1,:) sind die Werte bei x=linspace(0,1,n) und t=T
%      A     sparse Matrix fuer LGS
%      b     rechte Seite fuer LGS
u=NaN*ones(m,n);
uSize=size(u);
h=1/(n-1); tau=T/(m-1);
N=m*n;
A=spalloc(N,N,4*N); b=zeros(N,1);
glNo=0;
stencil=[2*c/(h^2)+1/tau, -1*c/(h^2), -1*c/(h^2) , -1/tau];
tdisk=linspace(T,0,m);
xdisk=linspace(0,1,n);
% Innere
for z=1:m-1
    for s=2:n-1
        n_self=sub2ind(uSize,z,s);
        n_right=n_self+m;n_left=n_self-m;
        n_down=n_self+1;
        glNo=glNo+1;
        A(glNo,[n_self,n_left,n_right,n_down]) = stencil;
    end
end
% linker Rand
```

```
value=ul(tdisk);
for z=1:m-1
    n_self=sub2ind(uSize,z,1);
    glNo=glNo+1;
    A(glNo,n_self)=1; b(glNo)=value(z);
end
% rechter Rand
value=ur(tdisk);
for z=1:m-1
    n_self=sub2ind(uSize,z,n);
    glNo=glNo+1;
    A(glNo,n_self)=1; b(glNo)=value(z);
end
% unterer Rand
value=u0(xdisk);
for s=1:n
    n_self=sub2ind(uSize,m,s);
    glNo=glNo+1;
    A(glNo,n_self)=1; b(glNo)=value(s);
end
assert(glNo==N); assert(size(b,1)==N);
assert(size(A,1)==N); assert(size(A,2)==N);
u=reshape(A\b,size(u));
end
```

Der Aufruf erfolgt per

```
function WaermeTest(m,n)
ul = @(t) zeros(size(t));    % linker Randwert = 0
ur = @(t) zeros(size(t));    % rechter Randwert = 0
u0 = @(x) sin(x*pi);         % Startwert bei t=0
T  = 0.25;                   % Endzeitpunkt
c  = 1;                      % Konstante in u_t - c*u_xx = 0
if nargin<1, m=10; end       % Zeitunterteilung
if nargin<2, n=10; end       % Ortsunterteilung
u=WaermeGlLoes(T,c,u0,ul,ur,m,n);
[X,Y]=meshgrid(linspace(0,1,n),linspace(T,0,m));
surf(X,Y,u,'EdgeColor','none','FaceColor','interp');
colormap(cool(128));
end
```

90 Die Wellengleichung

90.1 Aufgaben

90.1 Man ermittle eine Lösung für das folgende Anfangs-Randwertproblem für eine schwingende Saite der Länge $l = \pi$, wobei

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ mit } u(x,0) = \tfrac{\pi}{2} - |x - \tfrac{\pi}{2}|\,,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = u(l,t) = 0\,.$$

90.2 Man ermittle eine Lösung für das folgende Anfangs-Randwertproblem für eine schwingende Saite der Länge l, wobei

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \text{ mit } u(x,0) = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) + \sin^3\left(\tfrac{\pi}{2}x\right)\,,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = u(l,t) = 0\,.$$

90.2 Lösungen

90.1

(1) Die Fourierreihenentwicklung der Funktion $g(x) = \frac{\pi}{2} - |x - \frac{\pi}{2}|$ lautet

$$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \sin((2n-1)x)\,.$$

(2) Daher ist

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{(2n-1)^2\pi} \cos((2n-1)t) \sin((2n-1)x)$$

eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems.

90.2

(1) Die Fourierreihenentwicklung der Funktion $g = g(x)$ lautet

$$g(x) \sim \tfrac{7}{4} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) - \tfrac{1}{4} \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}x\right)\,.$$

(2) Daher ist

$$u(t,x) = \tfrac{7}{4} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right) - \tfrac{1}{4} \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}x\right) \cos\left(\tfrac{\pi}{2}t\right)$$

eine Lösung des Anfangs-Randwertproblems.

C. Karpfinger, *Arbeitsbuch Höhere Mathematik in Rezepten*, DOI 10.1007/978-3-642-41860-0_90,