Claus Wilhelm Turtur

# Prüfungstrainer Mathematik

## Klausur- und Übungsaufgaben mit vollständigen Musterlösungen

Teubner

Claus Wilhelm Turtur

# Prüfungstrainer Mathematik – mit vollständigen Musterlösungen

Claus Wilhelm Turtur

# Prüfungstrainer Mathematik – mit vollständigen Musterlösungen

## Klausur- und Übungsaufgaben

Teubner

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

**Prof. Dr. rer. nat. Claus Wilhelm Turtur**
Geboren 1961 in Bonn, Nordrhein-Westfalen. Studium der Mathematik und Physik an der Universität Bonn, Diplomarbeit bei Prof. Dr. T. Mayer-Kuckuk. Promotion an der Universität Regensburg bei Prof. Dr. H. Hoffmann. Praktische Industrietätigkeit bei einem Zulieferer der Automobilindustrie. Seit 1998 Professor an der Fachhochschule Braunschweig-Wolfenbüttel.

1. Auflage März 2006



Lektorat: Ulrich Sandten / Kerstin Hoffmann

Der B.G. Teubner Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.
www.teubner.de



Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de
Druck und buchbinderische Verarbeitung: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.
Printed in Germany

ISBN 3-8351-0023-8

# Vorwort

„Rechnen lernt man durch Rechnen“ – diesen plakativen Satz gab uns als Studenten einer unserer Professoren mit auf den Weg. Der Satz geleitete mich durch mein Studium und blieb mir bis heute in Erinnerung, denn er bringt den Kern des Lernerfolgs auf den Punkt: Zuerst hören die Studierenden in der Vorlesung die fachlichen Inhalte, danach erst kommt der Hauptteil des Lernens, das eigene Üben.

Aus diesem Grunde stelle ich seit Anbeginn meiner Lehrtätigkeit meinen Studierenden eine umfangreiche Übungsaufgabensammlung mit vollständig ausgearbeiteten Musterlösungen zur Verfügung, anhand derer sie den Vorlesungsstoff zuhause aufbereiten können. Viele Studierende haben mir bestätigt, dass diese Aufgabensammlung einen wichtigen Beitrag zur Senkung der Durchfallquoten bei den Klausuren leistet. Die große Beliebtheit dieser Aufgabensammlung bei den eigenen Studierenden brachte mich auf die Idee, die Aufgabensammlung als Buch auch Studierenden anderer Hochschulen zur Verfügung zu stellen.

**Das didaktische Konzept des Buches ist so einfach wie sein Ziel:**

**Es soll den Studierenden zu genau den Fähigkeiten und Rechentechniken verhelfen, die sie brauchen, um gute Klausuren im Fach Mathematik schreiben zu können**. Dass sie damit das nötige Grundwissen erwerben, um später die Mathematik in ihren eigentlichen Hauptfächern sinnvoll einzusetzen, ist ein durchaus erwünschter Nebeneffekt.

Im Übrigen ist das Buch nicht als Lehrbuch, sondern als Übungsbuch gedacht. Sinnvollerweise werden die Studierenden den Lehrstoff in den Vorlesungen hören, um das zu Erlernende dann mit Hilfe des vorliegenden Buches vorlesungsbegleitend umfangreich zu üben.


## Mein besonderer Dank gilt

- meiner Ehefrau für die Idee, meine Übungsaufgabensammlung in Form eines Buches den Studierenden vieler Hochschulen zugänglich zu machen, und die mich unermüdlich durch ihre praktische Hilfe unterstützt hat,
- Herrn Sandten, Frau Domnick und Herrn Kühn von Burgsdorff sowie den anderen Mitarbeitern des Teubner Verlages für die ausgezeichnete Unterstützung bei der Ausarbeitung dieses Buches. Besonders hervorheben möchte ich das immerfort besonders freundliche kreative Miteinander, das wesentlich zum Erfolg dieses Buchs beigetragen hat.
- Schließlich seien an dieser Stelle auch noch diejenigen Kollegen an verschiedenen Hochschulen erwähnt, die mir über den Teubner Verlag Klausuren aus ihrem Original-Prüfungsprogramm zur Verfügung gestellt haben.

# Zum richtigen Gebrauch dieses Buches

**Achtung:**

**Der richtige Umgang mit dem Buch entscheidet über den Lernerfolg !**

„Rechnen lernt man durch Rechnen“ – das Motto zur Entstehung dieser Aufgabensammlung beschreibt auch den richtigen Umgang mit ihr. Nur wer die Aufgaben selbst durchrechnet, erlernt die Lösungstechniken. Wer nur die Lösungswege liest und nachvollzieht, verschenkt den eigentlichen Wert des Buches. Damit ist der richtige Umgang klar (siehe Bild 0-1):

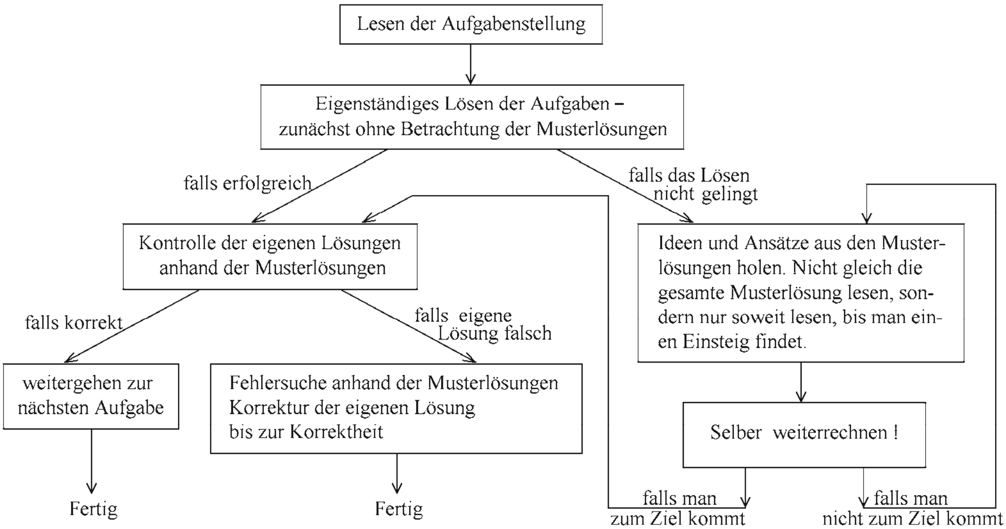



**Bild 0-1** Empfohlene Vorgehensweise zur Benutzung der Aufgaben und der Musterlösungen

Bei vielen Aufgaben existieren mehrere Teilaufgaben des gleichen Typs. Dahinter steckt ein doppelter Sinn: Einerseits soll dadurch die Übung vertieft werden, andererseits soll all denjenigen Übenden, die nicht ohne Musterlösung mit dem Aufgabentyp zurechtkommen, die Möglichkeit gegeben werden, sich anhand der ersten Teilaufgabe durch Betrachten der Musterlösung mit dem Aufgabentyp vertraut zu machen, und darauf basierend dann die weiteren ähnlichen Teilaufgaben selbstständig zu lösen. Dieser Aspekt ist sehr wichtig: Wer eine Aufgabe nicht aus eigener Kraft lösen kann, der betrachte noch nicht gleich die gesamte Musterlösung, sondern nur deren Anfang bzw. deren ersten Teil !

## Vorlesungsbegleitendes Üben der Rechentechniken

Um die Vorgehensweise des eigenen Übens (siehe Bild 0-1) zu unterstützen, sind zu Beginn jeder einzelnen Aufgabenstellung und ebenso zu Beginn jeder zugehörigen Musterlösung dicke schwarze „Balken“ angebracht. Diese dienen dazu, den Leser sofort erkennen zu lassen, an welcher Stelle die Musterlösung beginnt, noch bevor er den Text oder die Formeln gelesen hat. Damit wird bezweckt, dass niemand aus Versehen die Musterlösungen zu früh betrachtet. Man braucht also nur die Musterlösungen mit einem Blatt Papier abzudecken, und beim Lesen der Aufgabenstellungen dieses nicht über den nächsten schwarzen Balken hinaus zu schieben.

Darüber hinaus existieren zusätzliche Erläuterungen wie „Arbeitshinweise“ oder „Stolperfallen“, die grau unterlegt sind. Graue Unterlegungen werden auch zum Markieren von Erläuterungen benutzt, die man sich im Hinblick auf Prüfungssituationen besonders merken sollte.

**Sogenannte Arbeitshinweise**

erklären bei komplizierten Lösungswegen die prinzipielle Vorgehensweise und strukturieren die Arbeitsgänge.

**Sogenannte Stolperfallen**

weisen auf typische Stellen hin, die bei Anfängern häufig zu Fehlern führen. Hier sehen Studierende, worauf sie aufpassen sollen, um im Falle einer Prüfung einen unnötigen Verlust von Pluspunkten zu vermeiden.

## Konkrete Klausurvorbereitung: Zusammenstellen eigener Übungs- und Trainings-Klausuren

Studierende, die einen gewissen Übungsstand erreicht haben, möchten oftmals gerne kontrollieren, ob sie schon „fit für die Klausur“ sind. Dazu können sie sich eigene Testklausuren zusammenstellen, indem sie eine Reihe geeigneter Übungsaufgaben auswählen.

Die Eignung der auszuwählenden Übungsaufgaben für solche Testklausuren ergibt sich natürlich einerseits aus dem thematischen Inhalt der zu erwartenden eigenen Klausuren. Andererseits achte man aber sinnvollerweise auch darauf, nicht nur all zu einfache Aufgaben auszuwählen. Den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe erkennt man an der Anzahl der Gewichtheber im Kopf der Aufgabe (siehe Bild 0-2)

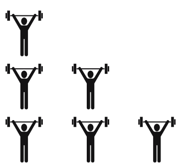


**Bild 0-2** Piktogramme für Schwierigkeitsgrade

Zur Interpretation der Skala:
Grad 1: Einstiegsniveau – kommt in Klausuren nicht allzu oft vor
Grad 2: Übungsniveau – durchschnittliche Klausuraufgaben
Grad 3: Leistungsniveau – jede Klausur sollte einige solche Aufgaben enthalten

Wichtig beim Zusammenstellen eigener Übungs- und Trainings-Klausuren ist auch die Zeitplanung. Man weiß, wie lange die eigene Klausur zu erwarten ist – auf eine entsprechende Zeit sollte man auch die eigenen Übungs- und Trainings-Klausuren einrichten. Hilfsmittel dazu bietet das Buch in Form von Zeitangaben an, die neben dem Piktogramm einer Uhr im Kopf jeder einzelnen Aufgabe zu sehen sind (siehe Bild 0-3).

X min

**Bild 0-3** Piktogramm für die Bearbeitungszeit:
Neben der Uhr ist die typische Bearbeitungsdauer der einzelnen Aufgaben in Minuten angegeben (hier „X" Minuten). Anhand dieser Angabe lässt sich die Aufgabenmenge für eigene Musterklausuren abschätzen.

## Selbstkontrolle durch Bewertung der eigenen Lösungen

x P

Nachdem man die solchermaßen zusammengestellte eigene Testklausur in der gegebenen Zeit bearbeitet hat, korrigiert man die eigene Lösung und bewertet sie anhand der in den Musterlösungen des Buches am Papierrand aufgeführten Punktezahlen. Zu jedem Rechenschritt ist dort eine zugehörige Punkteangabe vorhanden, die man sich im Falle der korrekten Bearbeitung zuerkennen kann. Als Beispiel hierfür betrachte man die Angabe „x P" neben dem vorliegenden Absatz. Dies bedeutet, dass man sich für die korrekte Bearbeitung eines solchen Absatzes „x Punkte" zuerkennen kann.

Zählt man am Schluss der Selbstkontrolle alle erreichten Punkte zusammen, so erkennt man nicht nur den eigenen Leistungsstand (die Aufgaben sind so ausgelegt, dass man etwa 50 % der Punkte zur Note 4.0 und knapp 100 % der Punkte zur Note 1.0 benötigt), sondern auch eigene Stärken und Schwächen, die ggf. einen entsprechenden Übungsbedarf aufzeigen.

## Ein Sonderzeichen dieses Buches

Soweit möglich und sinnvoll werden Ergebnisse und Zwischenschritte exakt angegeben. So wird z.B. ein Ausdruck wie „$\sqrt{\pi}$" normalerweise nicht mit dem Taschenrechner ausgerechnet um Rundungsfehler zu vermeiden, die entstehen, weil der Taschenrechner reelle Zahlen auf nahegelegene rationale Zahlen abbildet.

Es gibt aber manchmal Situationen, in denen solch ein ungefähres Ausrechnen numerischer Werte mit dem Taschenrechner unvermeidbar ist, z.B. weil man sie für den weiteren Fortgang der Aufgabe benötigt. In solchen Fällen ist das Rechenzeichen „$=$" nicht wirklich richtig, angebracht wäre eher ein „$\approx$". Um den Grund für den Gebrauch des letztgenannten Zeichens nicht aus den Augen zu verlieren, sind diejenigen Stellen, bei denen Rundungsfehler aufgrund des Gebrauchs eines Taschenrechners (kurz „TR") auftreten, mit einem „$\overset{TR}{\approx}$" markiert. Wenn man sich solchermaßen bewusst macht, an welchen Stellen Rundungsfehler auftreten, dann ist es auch weitgehend unwichtig, wie viele Nachkommastellen man angibt.

## Hinweis: Kürzen und Vereinfachen von Ausdrücken

Mitunter findet man Terme, die sich sehr bequem kürzen oder vereinfachen lassen, manchmal aber auch Erweiterungen in Brüchen sind. Oftmals sind diese in grau gedruckt (anstatt in schwarz), um den Lesern das Erkennen der jeweiligen Umformungsschritte zu erleichtern.

## Noch eine Bitte an alle Leserinnen und Leser

Für Anregungen und Verbesserungsvorschläge ist der Autor immer dankbar. Schon bei der Entstehung dieses Buches wurden mannigfaltige Anregungen seitens der Studierenden berücksichtigt. So wurden zum Beispiel Erläuterungen gerade an den Stellen angebracht, an denen die Studierenden erfahrungsgemäß Verständnisschwierigkeiten haben. Hier können Leserhinweise helfen, spätere Auflagen dieses Buches zu optimieren. Auch Hinweise auf Tippfehler werden dankbar aufgenommen um spätere Auflagen zu verbessern.

## Hinweis: Nicht aller Leser verstehen alle Aufgaben

Vorlesungsinhalte unterscheiden sich von Hochschule zu Hochschule, von Fachbereich zu Fachbereich und natürlich auch von Semester zu Semester. (Im ersten Semester wird ein anderer Stoff behandelt als im dritten.) Empfohlen wird daher, nur solche Aufgaben zu bearbeiten, deren Thema man aus der eigenen Vorlesung kennt oder kennen sollte. Ggf. kann der eigene Dozent auf Fragen der Studenten hin Hinweise geben. Das Buch ist nicht als Lehrbuch zum „Neu-erlernen“ des Stoffes konzipiert, sondern als Begleitwerk zu Vorlesungen. Deshalb wird auch vorausgesetzt, dass grundlegende Kenntnisse aus den entsprechenden Vorlesungen vorhanden sind.

In diesem Sinne wurde bei der Auswahl der Aufgaben bewusst **nicht** versucht, einen vollständigen Überblick über alle Themengebiete der Mathematik zu erarbeiten. Vielmehr wurden die Aufgaben thematisch derart ausgewählt, dass möglichst viele Studenten an möglichst vielen Hochschulen maximalen Nutzen für ihre persönlich Klausur-Vorbereitung daraus ziehen können.

# Inhalt

# 1 Mengenlehre

## Aufgabe 1.1 Verknüpfung von Mengen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | | je ¼ min | | Punkte je 1 P |
| | (b.) | mit 2 und 3 Indizes | je ½ min | | je 1 P |
| | (b.) | mehr als 3 Indizes | je 1 min | | je 2 P |

Gegeben seien drei nicht disjunkte Mengen (d.h. ihre Schnittmenge ist nicht leer) $\mathbb{A}$ , $\mathbb{B}$ und $\mathbb{C}$ entsprechend dem Euler-Venn-Diagramm in Bild 1-1.

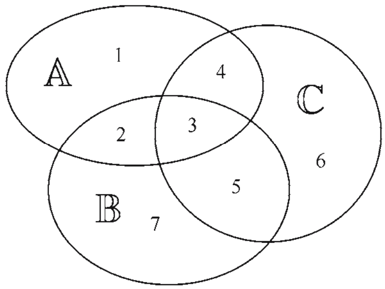



**Bild 1-1**
Euler-Venn-Diagramm dreier nicht disjunkter Mengen. Die Nummerierung einzelner Felder mit Ziffern dient der Namensgebung, sodass jedes Feld anhand seiner Ziffer eindeutig bezeichnet werden kann.

(a.) Beschreiben Sie zu jedem einzelnen Feld, in dem eine Ziffer steht, die zugehörige Menge, die sich aus $\mathbb{A}$ , $\mathbb{B}$ und/oder $\mathbb{C}$ oder Teilen davon zusammensetzt.

(b.) Beschreiben Sie diejenigen Mengen, die durch Zusammenfassen der Bereiche mit folgenden Ziffern entstehen. (Die Ziffern sind als Indizes an $\mathbb{L}$ angegeben.)

- $\mathbb{L}_{1,2}$
- $\mathbb{L}_{1,3}$
- $\mathbb{L}_{1,4,6}$
- $\mathbb{L}_{1,3,5}$
- $\mathbb{L}_{2,5,7}$
- $\mathbb{L}_{3,5,7}$
- $\mathbb{L}_{4,5,6}$
- $\mathbb{L}_{2,3,5}$
- $\mathbb{L}_{3,4,5}$
- $\mathbb{L}_{2,3,5,6}$
- $\mathbb{L}_{1,4,5,7}$
- $\mathbb{L}_{1,2,3,5,7}$
- $\mathbb{L}_{1,4,5,6,7}$
- $\mathbb{L}_{1,3,6,7}$
- $\mathbb{L}_{2,3,4,5,6,7}$
- $\mathbb{L}_{1,2,3,5,6,7}$
- $\mathbb{L}_{1,2,3,4,5,6,7}$

## Lösung zu 1.1

(a.)Es gilt: $\mathbb{L}_1 = \left(\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}\right) \setminus \mathbb{C}$ $\quad$ $\mathbb{L}_2 = \left(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}\right) \setminus \mathbb{C}$ $\quad$ je 1P↓

$\mathbb{L}_3 = \left(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}\right) \cap \mathbb{C}$ $\quad$ $\mathbb{L}_4 = \left(\mathbb{A} \cap \mathbb{C}\right) \setminus \mathbb{B}$

$\mathbb{L}_5 = \left(\mathbb{B} \cap \mathbb{C}\right) \setminus \mathbb{A}$ $\quad$ $\mathbb{L}_6 = \left(\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}\right) \setminus \mathbb{B}$ $\quad$ $\mathbb{L}_7 = \left(\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}\right) \setminus \mathbb{C}$

Hinweis zu den Aufgabenteilen (a.) und (b.):

Die gezeigten Beschreibungen der Lösungsmengen sind mögliche Formulierungen aber nicht die einzig denkbar möglichen. Die gefragten Teilmengen lassen sich auch auf andere Weisen beschreiben. Zum Beispiel könnte man auch sagen $\mathbb{L}_6 = \mathbb{C} \setminus (\mathbb{A} \cup \mathbb{B})$.

Man beachte diesen Hinweis, damit man nicht leichtfertig korrekte Alternativ-Formulierungen als falsch einstuft.

(b.) Bei den nachfolgenden Lösungen ist mit geschweiften Klammern markiert, welche Mengen welchen Bereichen (nach Ziffern in Bild 1-1) entsprechen.

je 1P↓

- $\mathbb{L}_{1,2} = \underbrace{\mathbb{A}}_{1,2,3,4} \setminus \underbrace{\mathbb{C}}_{3,4(,5,6)}$
- $\mathbb{L}_{1,3} = \underbrace{\left(\mathbb{A} \setminus (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})\right)}_{1,2,3,4 \setminus 2,3,4=1} \cup \underbrace{\left(\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})\right)}_{3}$
- $\mathbb{L}_{1,4,6} = \underbrace{(\mathbb{A} \cup \mathbb{C})}_{1,2,3,4,5,6} \setminus \underbrace{\mathbb{B}}_{2,3,5(,7)}$
- $\mathbb{L}_{1,3,5} = \underbrace{\left((\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \setminus \mathbb{C}\right)}_{1} \cup \underbrace{(\mathbb{B} \cap \mathbb{C})}_{3,5}$
- $\mathbb{L}_{2,5,7} = \underbrace{\mathbb{B}}_{2,3,5,7} \setminus \underbrace{\left(\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})\right)}_{3}$
- $\mathbb{L}_{3,5,7} = \underbrace{(\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})}_{5,7} \cup \underbrace{\left(\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})\right)}_{3}$
- $\mathbb{L}_{4,5,6} = \underbrace{\mathbb{C}}_{3,4,5,6} \setminus \underbrace{\left(\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})\right)}_{3}$
- $\mathbb{L}_{2,3,5} = \underbrace{(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}_{2,3} \cup \underbrace{(\mathbb{B} \cap \mathbb{C})}_{3,5}$
- $\mathbb{L}_{3,4,5} = \underbrace{(\mathbb{A} \cap \mathbb{C})}_{3,4} \cup \underbrace{(\mathbb{B} \cap \mathbb{C})}_{3,5}$

je 2P↓

- $\mathbb{L}_{2,3,5,6} = \underbrace{(\mathbb{C} \setminus \mathbb{A})}_{5,6} \cup \underbrace{(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}_{2,3}$
- $\mathbb{L}_{1,4,5,7} = \underbrace{(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})}_{1,2,3,4,5,7} \setminus \underbrace{(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})}_{2,3}$
- $\mathbb{L}_{1,2,3,5,7} = \underbrace{(\mathbb{A} \setminus \mathbb{C})}_{1,2} \cup \underbrace{B}_{2,3,5,7}$
- $\mathbb{L}_{1,4,5,6,7} = \underbrace{\left(\underbrace{(\mathbb{A} \setminus \mathbb{B})}_{1,4} \cup \underbrace{(\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})}_{5,7}\right)}_{1,4,5,7} \cup \underbrace{\left(\underbrace{\mathbb{C}}_{3,4,5,6} \setminus \underbrace{(\mathbb{A} \cup \mathbb{B})}_{1,2,3,4,5,7}\right)}_{6}$
- $\mathbb{L}_{1,3,6,7} = \left(\left(\underbrace{\mathbb{A} \setminus (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})}_{1}\right) \cup \underbrace{\left(\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cap \mathbb{C})\right)}_{3}\right) \cup \left(\underbrace{\left(\mathbb{B} \setminus (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})\right)}_{7} \cup \underbrace{\left(\mathbb{C} \setminus (\mathbb{A} \cup \mathbb{B})\right)}_{6}\right)$
- $\mathbb{L}_{2,3,4,5,6,7} = \underbrace{\mathbb{B}}_{2,3,5,7} \cup \underbrace{\mathbb{C}}_{3,4,5,6}$
- $\mathbb{L}_{1,2,3,5,6,7} = \underbrace{\left(\underbrace{\mathbb{B}}_{2,3,5,7} \cup \underbrace{(\mathbb{A} \setminus \mathbb{C})}_{1,2}\right)}_{1,2,3,5,7} \cup \underbrace{(\mathbb{C} \setminus \mathbb{A})}_{5,6}$
- $\mathbb{L}_{1,2,3,4,5,6,7} = \underbrace{\mathbb{A}}_{1,2,3,4} \cup \underbrace{(\mathbb{B} \cup \mathbb{C})}_{2,3,4,5,6,7}$

## Aufgabe 1.2 Verknüpfung von Mengen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | je ½ min | (a.) | | Punkte<br>(a.) je 1 P |
| | (b.) | je ½ min | (b.) | | (b.) je 1 P |
| | (c.) | je 1 min | (c.) | | (c.) je 2 P |
| | (d.) | 1 min | (d.) | | (d.) 1 P |

Sei $\mathbb{G}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ eine Grundmenge und $\mathbb{A}\subset\mathbb{G}$ die Menge aller Quadratzahlen, die in $\mathbb{G}$ sind, sowie $\mathbb{B}\subset\mathbb{G}$ die Menge aller geraden Zahlen aus $\mathbb{G}$.

(a.) Geben Sie $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ durch explizite Aufzählung an.

(b.) Bestimmen Sie $\overline{\mathbb{A}}$, $\overline{\mathbb{B}}$, $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$, $\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$, $\overline{\mathbb{A}}\cap\overline{\mathbb{B}}$, $\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$, $\overline{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}}$, $\mathbb{B}\setminus\mathbb{A}$, $(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{B}\setminus\mathbb{A})$.

(c.) Überprüfen Sie die Regeln von deMorgan anhand dieses Beispiels. Da muss gelten:

(i.) $\overline{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}}=\overline{\mathbb{A}}\cap\overline{\mathbb{B}}$ und (ii.) $\overline{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}}=\overline{\mathbb{A}}\cup\overline{\mathbb{B}}$

(d.) Zeichnen Sie die Mengen $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ und $\mathbb{G}$ in einem Euler-Venn-Diagramm.

## ▾ Lösung zu 1.2

(a.) Die explizite Aufzählung lautet: $\mathbb{A}=\{1,4,9\}$ und $\mathbb{B}=\{2,4,6,8,10\}$ je 1P

(b.) Die gefragten Mengen lauten: ↓ je 1P

$\overline{\mathbb{A}}=\{2,3,5,6,7,8,10,11\}$ ; $\overline{\mathbb{B}}=\{1,3,5,7,9,11\}$ ; $\mathbb{A}\cup\mathbb{B}=\{1,2,4,6,8,9,10\}$

$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\{4\}$ ; $\overline{\mathbb{A}}\cap\overline{\mathbb{B}}=\{3,5,7,11\}$ ; $\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}=\{1,9\}$

$\overline{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}}=\{3,5,7,11\}$ $\mathbb{B}\setminus\mathbb{A}=\{2,6,8,10\}$

$$(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{B}\setminus\mathbb{A})=\{1,9\}\cup\{2,6,8,10\}=\{1,2,6,8,9,10\}$$

(c.) Regel (i.) sieht man bereits in Aufgabenteil (b.): $\overline{\mathbb{A}\cup\mathbb{B}}=\{3,5,7,11\}=\overline{\mathbb{A}}\cap\overline{\mathbb{B}}$ je 2P

Für Regel (ii.) bestimmen wir jetzt die beiden zu vergleichenden Mengen, nämlich

$$\overline{\mathbb{A}\cap\mathbb{B}}=\mathbb{G}\setminus(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})=\mathbb{G}\setminus\{4\}=\{1,2,3,5,6,7,8,9,10,11\}=\overline{\mathbb{A}}\cup\overline{\mathbb{B}}$$

Also sind am Bsp. unserer Aufgabe die deMorgan'schen Regel verifiziert.

(d.) Das Euler-Venn-Diagramm sieht man in Diagramm in Bild 1-2.

1P

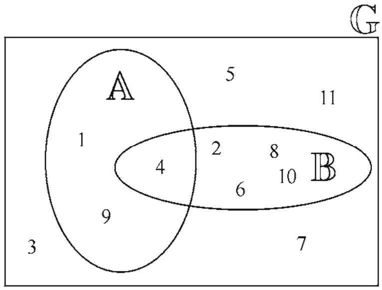



**Bild 1-2**
Euler-Venn-Diagramm der Mengen aus Aufgabe 2.2

## Aufgabe 1.3 Bestimmung einer Zahlenmenge

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 min | | Punkte<br>8 P |

Seien die Mengen $\mathbb{S}=\left\{ n\in \,\middle|\, n \text{ hat keinen quadratischen Teiler} \right\}$

$\mathbb{P}=\left\{ n\in \,\middle|\, n \text{ lässt sich in genau drei Primfaktoren zerlegen} \right\}$

$\mathbb{Q}=\left\{ n\in \,\middle|\, n\le 100 \right\}$ Anmerkung: 1 ist kein Primfaktor

Geben Sie die Schnittmenge $\mathbb{S}\cap\mathbb{P}\cap\mathbb{Q}$ an.

## Lösung zu 1.3

Bequem kommt man zum Ziel, wenn man zuerst aus der Primfaktorzerlegung die Menge $\mathbb{P}\cap\mathbb{Q}$ aufbaut. Dies sind alle natürlichen Zahlen kleiner oder gleich 100, die aus drei Primfaktoren bestehen. In Tabelle 1.3 werden systematisch alle Möglichkeiten dreier Primfaktoren ($F_1$, $F_2$ und $F_3$) durchgegangen. Dabei beginnen wir mit den kleinsten Primfaktoren und zählen hoch, wobei die Reihenfolge der Faktoren keine Rolle spielt. (Im Sinne der Kombinatorik sind dies die Kombinationen mit Wiederholung.)

8 P Ist die Menge $\mathbb{P}\cap\mathbb{Q}$ in der Tabelle aufgelistet (in der vierten Spalte), so markiert man alle diejenigen Elemente, die keine quadratischen Teiler enthalten, sprich die nicht zwei gleiche Primfaktoren enthalten, in der fünften Spalte mit einem „ja“ unter der Bedingung $n\in\mathbb{S}$. Alle Zahlen hingegen, die zwei gleiche Primfaktoren enthalten, werden dort mit einem „nein“ markiert, denn sie sind nicht Elemente der Menge $\mathbb{S}$.

Logischerweise umfasst die Lösungsmenge $\mathbb{S}$ dann alle diejenigen Zahlen, die mit einem „ja“ gekennzeichnet sind.

**Tabelle 1.3** Primfaktorzerlegung aller natürlicher Zahlen kleiner oder gleich 100. Jede Zeile steht für eine solche Zahl.

| $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $n = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3$ | $n \in \mathbb{S}$ ? |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | 8 | nein |
| 2 | 2 | 3 | 12 | nein |
| 2 | 2 | 5 | 20 | nein |
| 2 | 2 | 7 | 28 | nein |
| 2 | 2 | 11 | 44 | nein |
| 2 | 2 | 13 | 52 | nein |
| 2 | 2 | 17 | 68 | nein |
| 2 | 2 | 19 | 76 | nein |
| 2 | 2 | 23 | 92 | nein |
| 2 | 3 | 3 | 18 | nein |
| 2 | 3 | 5 | 30 | ja |
| 2 | 3 | 7 | 42 | ja |
| 2 | 3 | 11 | 66 | ja |
| 2 | 3 | 13 | 78 | ja |
| 2 | 5 | 5 | 50 | nein |
| 2 | 5 | 7 | 70 | ja |
| 2 | 7 | 7 | 98 | nein |
| 3 | 3 | 3 | 27 | nein |
| 3 | 3 | 5 | 45 | nein |
| 3 | 3 | 7 | 63 | nein |
| 3 | 3 | 11 | 99 | nein |
| 3 | 5 | 5 | 75 | nein |
| Dies sind die drei Primfaktoren | | | Alle Elemente aus $\mathbb{P} \cap \mathbb{Q}$ | Die gesuchte Lösungsmenge ist also $\mathbb{L} = \{30, 42, 66, 70, 78\}$ |

Die gesuchte Lösungsmenge im rechten unteren Feld von Tabelle 1.3 wurde durch Zusammenfassen aller derjenigen Zeilen erhalten, bei denen $n \in \mathbb{S}$ ist.

## Aufgabe 1.4 Bekannte Zahlen-Grundmengen

| | | |
|---|---|---|
| je ½ min | | Punkte je 1 P |

Geben Sie bitte die nachfolgend beschriebenen Mengen durch explizites Aufzählen ihrer Elemente an. (Die Abkürzungen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ für die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen seien als bekannt vorausgesetzt.)

- $\mathbb{L}_1 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 = 9) \right\}$
- $\mathbb{L}_2 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 = 9) \right\}$
- $\mathbb{L}_3 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{Q}) \wedge (x^2 = 8) \right\}$
- $\mathbb{L}_4 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = 8) \right\}$
- $\mathbb{L}_5 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{R}) \wedge (x^2 = -9) \right\}$
- $\mathbb{L}_6 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{C}) \wedge (x^2 = -9) \right\}$
- $\mathbb{L}_7 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{C}) \wedge (x^2 = 9) \right\}$
- $\mathbb{L}_8 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{N}) \wedge (x^2 \le 8) \right\}$
- $\mathbb{L}_9 = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 \le 8) \right\}$
- $\mathbb{L}_{10} = \left\{ x \middle| (x \in \mathbb{Z}) \wedge (x^2 > 8) \right\}$
- $\mathbb{L}_{11} = \left\{ x \middle| ((x \in \mathbb{L}_1) \vee (x \in \mathbb{L}_9)) \wedge (x \in \mathbb{N}_0) \right\}$

Anmerkung: Es gilt die Abkürzung $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

## Lösung zu 1.4

Die gefragten Zahlenmengen lauten:

je 1P

- $\mathbb{L}_1 = \{3\}$
- $\mathbb{L}_2 = \{-3; +3\}$
- $\mathbb{L}_3 = \varnothing$
- $\mathbb{L}_4 = \{+\sqrt{8}; -\sqrt{8}\}$
- $\mathbb{L}_5 = \varnothing$
- $\mathbb{L}_6 = \{-3i; +3i$, mit der komplexen Einheit $i = \sqrt{-1}\}$
- $\mathbb{L}_7 = \{+3; -3\}$
- $\mathbb{L}_8 = \{1; 2\}$
- $\mathbb{L}_9 = \{-2; -1; 0; +1; +2\}$
- $\mathbb{L}_{10} = \{...; -5; -4; -3; +3; +4; +5; ...\} = \mathbb{Z} \setminus \{-2; -1; 0; +1; +2\}$
- $\mathbb{L}_{11} = \{0; 1; 2; 3\}$

## Aufgabe 1.5 Mengen-Operationssymbole

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a,b,g.) | je 2 min | (a,b,g.) | | Punkte je 2 P |
| (c,d,e,f.) | je 1 min | (c,d,e,f.) | | je 1 P |

Welche der nachfolgenden Aussagen sind zutreffend und welche nicht?

Geben Sie bitte zu jeder Ihrer Antworten eine Begründung an.

(a.) $(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{A} \subset \mathbb{C})$ (b.) $(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{A}$

(c.) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\, x^2 = 2$ (d.) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\overset{!}{\exists}}\, x^2 = 2$ (e.) $\underset{x\in\mathbb{R}}{\overset{!}{\exists}}\, x^3 = 2$

(f.) $\underset{x\in\mathbb{N}}{\forall}\, \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ (g.) $\underset{x\in\mathbb{A}}{\forall}\, (x \notin \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing)$

Die Aufgabenteile (a.), (b.) und (g.) begründe man bitte anhand von Euler-Venn-Diagrammen. Bei allen anderen Aufgabenteilen genügt eine Erklärung in Worten.

## Lösung zu 1.5

(a.) Die Aussage $(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{A} \subset \mathbb{C})$ ist zutreffend, denn das zu überprüfende aussagelogische Symbol ist die Implikation. Eine mögliche Situation findet man zur Veranschaulichung im Euler-Venn-Diagramm von Bild 1-5a.

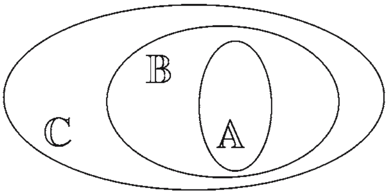



**Bild 1-5a**
Euler-Venn-Diagramm zur Veranschaulichung der Aussage $(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{B} \subseteq \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{A} \subset \mathbb{C})$. 2 P

Wie man sieht, sind alle Elemente von $\mathbb{A}$ auch in $\mathbb{B}$. Dabei ist es egal, ob $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$ oder $\mathbb{B} = \mathbb{C}$.

(b.) Die ebenfalls zutreffende Aussage $(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{A}$ ist in Bild 1-5b veranschaulicht. Zu überprüfen war wieder die Implikation.

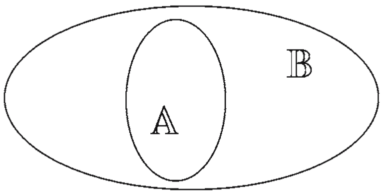



**Bild 1-5b**
Euler-Venn-Diagramm zur Veranschaulichung der Aussage $(\mathbb{A} \subset \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = \mathbb{A}$.

Wenn alle $\mathbb{A}$ eine echte Teilmenge von $\mathbb{B}$ ist, dann ist die Schnittmenge der beiden wieder $\mathbb{A}$. 2 P

(c.) Die Aussage $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\, x^2 = 2$ lautet in Worten: Es gibt ein reelles $x$, dessen Quadrat $2$ ist.

Das ist zutreffend, es gibt sogar zwei passende reelle $x$ – Werte, nämlich $x = +\sqrt{2}$ und $x = -\sqrt{2}$. 1 P

**Stolperfalle:**

Man darf die Bedeutung von „es gibt ein" ($\exists$) nicht verwechseln mit „es gibt genau ein" ($\overset{!}{\exists}$). (→ siehe nachfolgenden Aufgabenteil d.)

(d.) Die Aussage $\overset{!}{\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}} x^2 = 2$ lautet in Worten: Es gibt genau ein reelles $x$, dessen Quadrat $2$ ist.

1 P Diese Aussage ist natürlich nicht zutreffend, denn es gibt ja nicht genau ein solches reelles $x$, sondern derer zwei.

(e.) $\overset{!}{\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}} x^3 = 2$ lautet in Worten: Es gibt genau ein reelles $x$, dessen dritte Potenz $2$ ist.

1 P Diese Aussage trifft wieder zu, denn hier ist das Vorzeichen eindeutig bestimmt: $\sqrt[3]{2} = +2^{\frac{1}{3}}$.

(f.) $\underset{x\in\mathbb{N}}{\forall} \sqrt{x} \in \mathbb{R}$ lautet in Worten: Für alle natürlichzahligen $x$ ist $\sqrt{x}$ eine reelle Zahl.

1 P Die Aussage trifft zu, denn natürliche Zahlen sind positiv und Wurzeln aus positiven Zahlen sind reell (nicht komplex).

(g.) Die Aussage $\underset{x\in\mathbb{A}}{\forall} \left(x \notin \mathbb{B}\right) \Leftrightarrow \left(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing\right)$ lautet in Worten: Für alle $x \in \mathbb{A}$ gilt „$x$ ist nicht in $\mathbb{B}$ genau dann, wenn die Schnittmenge von $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ leer ist“. Man sieht dies im Euler-Venn- Diagramm von Bild 1-5c, wodurch die Aussage als zutreffend klassifiziert wird.

2 P

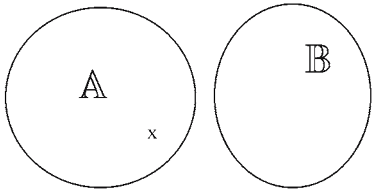



**Bild 1-5c**
Euler- Venn- Diagramm zur Veranschaulichung der Aussage $\underset{x\in\mathbb{A}}{\forall} \left(x \notin \mathbb{B}\right) \Leftrightarrow \left(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing\right)$.

Wären irgendwelche Elemente $x$ aus $\mathbb{A}$ auch in $\mathbb{B}$ enthalten, so wäre die Schnittmenge nicht leer.

# 2 Elementarmathematik

## Aufgabe 2.1 Periodische Dezimalbrüche

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 2 min | (a,b.) | | (a.) 1 P (b.) 1 P |
| | (c,d.) | je 3 min | (c,d.) | | (c.) 1 P (d.) 1 P |
| | (e,f.) | je 4 min | (e,f.) | | (e.) 2 P (f.) 2 P |

Wandeln Sie die nachfolgend gegebenen periodischen Dezimalbrüche in Brüche mit ganzzahligen Zählern und natürlichzahligen Nennern um (ggf. auch in gemischte Brüche):

(a.) $3.\overline{4}$ (b.) $3.\overline{47}$ (c.) $0.2\overline{7}$ (d.) $0.1\overline{47}$ (e.) $8.1\overline{246}$ (f.) $8.135\overline{246}$

## Lösung zu 2.1

**Arbeitshinweis:**

Periodische Dezimalbrüche wandelt man in Brüche mit Bruchstrich um, indem man Vielfache der Dezimalbrüche genau derart voneinander abzieht, dass sich die Periodizität beim Subtrahieren mit sich selbst aufhebt.

Geeignete Vielfache, wie man sie für diese Subtraktion benötigt, sehen so aus, dass die Periode einmal genau hinter dem Komma beginnt (beim kleineren Faktor – siehe untere Zeile der Subtraktion) und das andere Mal genau eine einzige Periode vor das Komma geschoben wird (beim größeren Faktor – siehe obere Zeile der Subtraktion).

Betrachtet man die nachfolgenden Beispiele, so leuchtet dieser Arbeitshinweis leicht ein.

(a.) Es gilt 1 P

$$\left.\begin{array}{rl} 10 & \cdot 3.\overline{4} = 34.\overline{4} \\ 1 & \cdot 3.\overline{4} = \phantom{3}3.\overline{4} \end{array}\right| -$$

$$(10-1)\cdot 3.\overline{4} = 31.0 \quad \Rightarrow \quad 3.\overline{4} = \frac{31}{10-1} = \frac{31}{9} = 3\frac{4}{9}$$

(b.) Es gilt 1 P

$$\left.\begin{array}{rl} 100 & \cdot 3.\overline{47} = 347.\overline{47} \\ 1 & \cdot 3.\overline{47} = \phantom{34}3.\overline{47} \end{array}\right| -$$

$$(100-1)\cdot 3.\overline{47} = 344.00 \quad \Rightarrow \quad 3.\overline{47} = \frac{344}{100-1} = \frac{344}{99} = 3\frac{47}{99}$$

(c.) Es gilt

1 P
$$\left.\begin{array}{rl} 100 & \cdot 0.2\overline{7} = 27.\overline{7} \\ 10 & \cdot 0.2\overline{7} = \phantom{2}2.\overline{7} \end{array}\right| -$$

$$(100-10)\cdot 0.2\overline{7} = 25.0 \quad \Rightarrow \quad 0.2\overline{7} = \frac{25}{100-10} = \frac{25}{90}$$

(d.) Es gilt

1 P
$$\left.\begin{array}{rl} 1000 & \cdot 0.1\overline{47} = 147.\overline{47} \\ 10 & \cdot 0.1\overline{47} = \phantom{14}1.\overline{47} \end{array}\right| -$$

$$(1000-10)\cdot 0.1\overline{47} = 146.00 \quad \Rightarrow \quad 0.1\overline{47} = \frac{146}{1000-10} = \frac{146}{990}$$

(e.) Es gilt

2 P
$$\left.\begin{array}{rl} 10000 & \cdot 8.1\overline{246} = 81246.\overline{246} \\ 10 & \cdot 8.1\overline{246} = \phantom{812}81.\overline{246} \end{array}\right| -$$

$$(10000-10)\cdot 8.1\overline{246} = 81165.000 \quad \Rightarrow \quad 8.1\overline{246} = \frac{81165}{10000-10} = \frac{81165}{9990} = 8\frac{1245}{9990}$$

(f.) Es gilt

2 P
$$\left.\begin{array}{rl} 1000000 & \cdot 8.135\overline{246} = 8135246.\overline{246} \\ 1000 & \cdot 8.135\overline{246} = \phantom{8135}8135.\overline{246} \end{array}\right| -$$

$$(1000000-1000)\cdot 8.135\overline{246} = 8127111.000 \quad \Rightarrow \quad 8.135\overline{246} = \frac{8127111}{1000000-1000} = \frac{8127111}{999000} = 8\frac{135111}{999000}$$

## Aufgabe 2.2 Gauß'sche Summenformel

| | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 5 min | (a.) | (a.) 2 P | |
| | (b,c.) | je 5 min | (b,c.) | (b.) 3 P | (c.) 3 P |
| | (d.) | 10 min | (d.) | (d.) 5 P | |

Gegeben seien $a_{ij} = 3i + 4j + 2$ und $b_{ij} = 2 \cdot i \cdot j$. Berechnen Sie bitte die Summen.

(a.) $\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{100} a_{ij}$ (b.) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$ (c.) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij}$ (d.) $\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{80} a_{ij}^2$

(mit $n,m \in \mathbb{N}$ als Konstanten und $i,j \in \mathbb{N}$ als Laufindizes)

## Lösung zu 2.2

**Arbeitshinweis:**

Durch geeignetes Umformen lassen sich die in den Aufgabenstellung (a…c) gegebenen Summen in die Form der Gauß'schen Summenformel bringen, die man dann elementar lösen kann.

In manchen Fällen muss die Gauß'sche Summenformel auch mehrmals und ineinander geschachtelt angewandt werden.

(a.) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{100} a_{ij} = \sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{100} 3i+4j+2 = \sum_{i=1}^{50}\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{100}(3i+2)}_{=100\cdot(3i+2)} + \underbrace{4\cdot\sum_{j=1}^{100} j}_{=4\cdot\frac{100\cdot101}{2}}\right] = \sum_{i=1}^{50}\left((300i+200)+20200\right)$$

2 P

$$= 300\cdot\sum_{i=1}^{50} i + \sum_{i=1}^{50} 20400 = 300\cdot\frac{50\cdot 51}{2} + 50\cdot 20400 = 1402500$$

(b.) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\left[\underbrace{\sum_{j=1}^{m}(3i+2)}_{=m\cdot(3i+2)} + \underbrace{4\cdot\sum_{j=1}^{m} j}_{=4\cdot\frac{m\cdot(m+1)}{2}}\right] = \sum_{i=1}^{50}\left((3m\cdot i+2m)+\left(2m^2+2m\right)\right)$$

3 P

$$= 3m\cdot\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\left(2m^2+4m\right) = 3m\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} + 2nm^2 + 4nm$$

(c.) Es gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(2ij) = \sum_{i=1}^{n}\left(2i\cdot\sum_{j=1}^{m} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(2i\cdot\frac{m\cdot(m+1)}{2}\right) = m\cdot(m+1)\cdot\sum_{i=1}^{n} i = m\cdot(m+1)\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$ 3 P

(d.) Bei diesem Aufgabenteil genügt die Gauß'sche Summenformel nicht. Man braucht zwei Summenformeln, nämlich $\sum_{j=1}^{n} i = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n+1)$ und $\sum_{j=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)$ und erhält:

$$\sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{80} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{80}(3i+4j+2)^2 = \sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{80}\left(9i^2+12ij+6i+12ji+16j^2+8j+6i+8j+4\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{50}\sum_{j=1}^{80}\left(9i^2+16j^2+24ij+12i+16j+4\right) = \sum_{i=1}^{50}\left[\sum_{j=1}^{80} 9i^2 + \sum_{j=1}^{80} 16j^2 + \sum_{j=1}^{80} 24ij + \sum_{j=1}^{80} 12i + \sum_{j=1}^{80} 16j + \sum_{j=1}^{80} 4\right]$$ 1 P

Hier werden die beiden obengenannten Summenformeln eingesetzt.

1 P $$= \sum_{i=1}^{50}\left[\underbrace{80\cdot\left(9i^2\right)}_{=720i^2}+\underbrace{\frac{16}{6}\cdot 80\cdot 81\cdot 161}_{=2782080}+\underbrace{24i\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 80\cdot 81\right)}_{=77760i}+\underbrace{80\cdot 12i}_{=960i}+\underbrace{16\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot 80\cdot 81\right)+80\cdot 4}_{=52160}\right]$$

2 P $$= 720\cdot\sum_{i=1}^{50} i^2 + 78720\cdot\sum_{i=1}^{50} i + 2834240\cdot\sum_{i=1}^{50} 1$$

1 P $$= \frac{720}{6}\cdot 50\cdot 51\cdot 101 + \frac{78720}{2}\cdot 50\cdot 51 + 2834240\cdot 50 = 272986000$$

## Aufgabe 2.3 Betragsgleichungen mit Fallunterscheidungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) je 12 min | | Punkte<br>(a,b,c.) je 9 P |
| | (d.) 2 min | | (d.) 2 P |

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Betragsgleichungen

(a.) $|3x-12|-|x+7|=25$

(b.) $|2x-3|+|3x+2|=+21$

(c.) $|x+2|-(x+2)=|x-2|-(x-2)$

(d.) $|2x-3|+|3x+2|=-18$

## Lösung zu 2.3

Da das Auflösen von Beträgen vom Wert des Arguments des Betrags abhängt, erfordert das Lösen der zu untersuchenden Betragsgleichungen eine Fallunterscheidung – und zwar in Abhängigkeit von der im Argument des Betrages auftretenden Variablen $x$.

Weil Fallunterscheidungen Anfängern immer wieder unerwartet viele Schwierigkeiten bereiten, sei dieses Thema hier ausführlich kommentiert. Wer keine Probleme mit diesem Aufgabentyp hat, braucht nicht unnötig lange bei Aufgabe 2.3 zu verweilen.

**Erster Arbeitshinweis:**

Immer dann, wenn Rechenoperationen nicht allgemeingültig ausgeführt werden können, sondern in Abhängigkeit vom Wert des Operanden durchgeführt werden müssen, ist bei variablem Operanden eine Fallunterscheidung nötig. Das Auflösen von Beträgen ist nur ein Beispiel für eine solche Rechenoperation, die Fallunterscheidungen erfordert.

**Zweiter Arbeitshinweis:**

Um möglichst effektiv zu arbeiten, minimiere man die Zahl der zu untersuchenden Fälle. Zeitraubend wäre es beispielsweise, jedes Mal beim Auflösen eines Betrages in zwei Fälle zu unterscheiden. Viel effektiver ist es, zu Beginn der Überlegungen für jeden Betrag eine Fallgrenze festzulegen. Dies sei anhand von Aufgabenteil (a.) demonstriert.

(a.) Immer dort, wo das Argument eines Betrages zu Null wird, liegt eine Fallgrenze, also

- eine Fallgrenze bei $3x-12=0 \quad \Rightarrow \quad x=4$
- und eine andere Fallgrenze bei $x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x=-7$

2 Grenzen führen zu 3 Fällen (siehe Bild 2-3), mehr Fälle werden nicht benötigt. 2 P

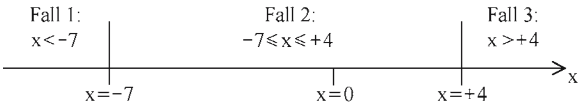



**Bild 2-3a**
Fallgruppeneinteilung
für Aufgabe 2.3, Teil (a.)

**Stolperfalle:**

Man achte darauf, dass alle reellen Zahlen $(x)$ für die alle Terme in der Gleichung definiert sind, genau einmal auftreten. Das Vergessen von Fallgrenzen kann unter Umständen zu Fehlern führen, ebenso ein mehrfaches Bearbeiten von Fallgrenzen.

Wir lösen nun die Aufgabe mit den Beträgen auf:

Fall 1: $x<-7$ → Die Argumente beider Beträge sind negativ, sodass sich beim Auflösen der Betragsstriche Minuszeichen ergeben:

$$|3x-12|-|x+7|=25 \quad \Rightarrow \quad -(3x-12)+(x+7)=25 \quad \Rightarrow \quad -2x=6 \quad \Rightarrow \quad x_1=-3$$

Begründung: Falls $x<-7$ ist, gilt $|3x-12|=-(3x-12)$ und $|x+7|=-(x+7)$ 1 P

Fall 2: $-7 \le x \le 4$ → Hier müssen zum Auflösen nur bei einem der beiden Beträge die Betragsstriche durch ein negatives Vorzeichen ersetzt werden, sodass sich das Auflösen der Betragsstriche wie folgt ergibt:

$$|3x-12|-|x+7|=25 \quad \Rightarrow \quad -(3x-12)-(x+7)=25 \quad \Rightarrow \quad -4x=20 \quad \Rightarrow \quad x_2=-5$$

Begründung: Falls $-7 \le x \le 4$ ist, gilt $|3x-12|=-(3x-12)$ und $|x+7|=+(x+7)$ 1 P

Fall 3: $x>+4$ → Die Argumente beider Beträge sind positiv, sodass die Betragsstriche in beiden Ausdrücken ersatzlos weggelassen werden können.

$$|3x-12|-|x+7|=25 \quad \Rightarrow \quad (3x-12)-(x+7)=25 \quad \Rightarrow \quad 2x=44 \quad \Rightarrow \quad x_3=22$$

Begründung: Falls $x>+4$ ist, gilt $|3x-12|=+(3x-12)$ und $|x+7|=+(x+7)$ 1 P

**Arbeitshinweis:**

Wer Abstraktionsschwierigkeiten hat, sich die genannten Begründungen in den einzelnen Fällen vorzustellen, der setze für jeden einzelnen der Fälle jeweils einen willkürlichen Wert innerhalb der jeweiligen Fallgrenzen exemplarisch für den entsprechenden Fall ein.

Wenden wir diesen Arbeitshinweis an, so verstehen wir seine Umsetzung:

z.B. bei Fall 1: Wir wählen exemplarisch $x=-10$ (dies liegt innerhalb Fall 1) und untersuchen damit das Verhalten der beiden Beträge beim Auflösen:

$|3x-12|=|3\cdot(-10)-12|=|-42|=+42$ Der Betrag kehrt also das Vorzeichen um.

$|x+7|=|(-10)+7|=|-3|=+3$ Wieder kehrt der Betrag das Vorzeichen um.

z.B. bei Fall 2: Wir wählen exemplarisch $x = 0$ (dies liegt innerhalb Fall 2) und lösen auf

$|3x-12| = |3\cdot(0)-12| = |-12| = +12$ Der Betrag kehrt also das Vorzeichen um.

$|x+7| = |(0)+7| = |+7| = +7$ Hier kehrt der Betrag das Vorzeichen nicht um.

z.B. bei Fall 3: Wir wählen exemplarisch $x=+10$ (dies liegt innerhalb Fall 3) und lösen auf

$|3x-12| = |3\cdot(10)-12| = |+18| = +18$ Ohne Umkehr des Vorzeichens.

$|x+7| = |10+7| = |+17| = +17$ Und nochmals ohne Umkehr des Vorzeichens.

**Stolperfalle:** (Dieser Punkt wird oft von Anfängern übersehen)
Die obengenannten Werte $x_1$, $x_2$ und $x_3$ sind noch nicht die Lösungen der Aufgabe. Die durch das Auflösen der jeweiligen Fälle erhaltenen Lösungen sind nur dann auch Lösungen der Aufgabe, wenn sie gleichzeitig innerhalb der Fallgrenzen „ihres“ Falles liegen. Dies müssen wir beachten, wenn wir nun die Anteile der einzelnen Fälle zur Lösung bestimmen wollen:

Der Anteil von Fall 1 an der Lösungsmenge, heiße $\mathbb{L}_1$:
1 P Dies sind alle $x < -7$ für die gilt $x = -3$. Solche $x$ gibt es nicht, also ist $\mathbb{L}_1 = \varnothing$ .

Der Anteil von Fall 2 an der Lösungsmenge, heiße $\mathbb{L}_2$:
Dies sind alle $x$ mit $-7 \le x \le 4$ für die gilt $x = -5$. Da $-5$ in dem beschriebenen Bereich
1 P liegt, ist $\mathbb{L}_2 = \{-5\}$ .

Der Anteil von Fall 3 an der Lösungsmenge, heiße $\mathbb{L}_3$:
Dies sind alle $x > +4$ für die gilt $x = 22$. Auch hier liegt $x$ im beschriebenen Bereich, also ist
1 P $\mathbb{L}_3 = \{22\}$ .

Die Gesamt-Lösungsmenge erhält man nun durch Vereinigung aller Teil-Lösungsmengen zu
1 P allen einzelnen Fällen: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{-5\,;22\}$

(b.) Nach den gezeigten Erklärungen sollte das Lösen der nächsten Aufgabe kein Problem mehr sein. Sie lautet $|2x-3| + |3x+2| = +21$.

Hier benötigen wir wieder zwei Fallgrenzen: - die eine bei $2x-3=0 \Rightarrow x = +\frac{3}{2}$

- die andere bei $3x+2=0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

Damit ergibt sich die in Bild 2-3b dargestellte Fallunterscheidung.

2 P

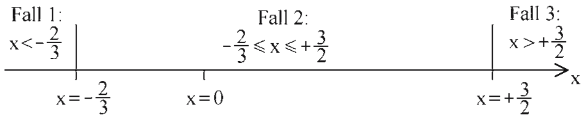



**Bild 2-3b**
Fallgruppeneinteilung
für Aufgabe 2.3, Teil (b.)

Wir lösen nun die einzelnen Fälle:

Fall 1: $x < -\frac{2}{3} \Rightarrow$ Die Gleichung wird zu $-(2x-3)-(3x+2)=+21 \Rightarrow x=-4$

Da dieses $x$ innerhalb der Fallgrenzen liegt, ist $\mathbb{L}_1 = \left\{ x \,|\, \left( x < -\frac{2}{3} \right) \wedge (x=-4) \right\} = \{-4\}$ . 2 P

Fall 2: $-\frac{2}{3} \le x \le +\frac{3}{2} \Rightarrow$ Die Gleichung wird zu $-(2x-3)+(3x+2)=+21 \Rightarrow x=16$

Da dieses $x$ außerhalb der Fallgrenzen liegt, ist $\mathbb{L}_2 = \varnothing$ . 2 P

Fall 3: $x > +\frac{3}{2} \Rightarrow$ Die Gleichung wird zu $+(2x-3)+(3x+2)=+21 \Rightarrow x=\frac{22}{5}$

Da dieses $x$ innerhalb der Fallgrenzen liegt, ist $\mathbb{L}_3 = \left\{ \frac{22}{5} \right\}$ . 2 P

Somit erhalten wir als Gesamt-Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{ -4; \frac{22}{5} \right\}$ 1 P

(c.) Die Aufgabe $|x+2|-(x+2)=|x-2|-(x-2)$ enthält wieder zwei Beträge, also sind ebensoviele Fallgrenzen notwendig: - die eine bei $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

- die andere bei $x-2=0 \Rightarrow x=+2$

Somit ergibt sich die Notwendigkeit zu der in Bild 2-3c dargestellten Fallunterscheidung.

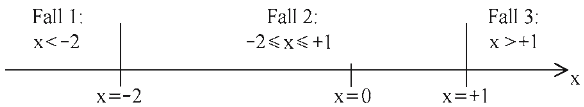



**Bild 2-3c**
Fallgruppeneinteilung
für Aufgabe 2.3, Teil (c.) 2 P

Die sich ergebenden drei Fälle lösen wir wie folgt:

Fall 1: $x < -2 \Rightarrow$ Die Gleichung wird zu $-(x+2)-(x+2)=-(x-2)-(x-2) \Rightarrow -4=+4$

Da es keine $x$ gibt, die diese Gleichung erfüllen, ist $\mathbb{L}_1 = \varnothing$ . 2 P

Fall 2: $-2 \le x \le +2 \Rightarrow$ Die Gleichung wird zu $(x+2)-(x+2)=-(x-2)-(x-2) \Rightarrow x=2$

Da dieses $x$ innerhalb der Fallgrenzen für Fall 2 liegt, ist $\mathbb{L}_2 = \{2\}$ . 2 P

Fall 3: $x > +\frac{3}{2} \Rightarrow$ Die Gleichung wird zu $(x+2)-(x+2)=(x-2)-(x-2) \Rightarrow 0=0$

Da alle $x \in \mathbb{R}$ diese Gleichung erfüllen, sind alle $x$ aus Fall 3 Lösungen der Gleichung, also ist $\mathbb{L}_3 = \{x \,|\, x > 2\}$ . 2 P

Die Gesamt-Lösungsmenge als Vereinigung der Teil-Lösungsmengen lautet dann:

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{x \,|\, (x=2) \vee (x>2)\} = \{x \,|\, x \ge 2\}$ 1 P

(d.) $|2x-3|+|3x+2|=-18$

Hier sieht man ohne explizite Berechnung, dass die Lösungsmenge leer ist.
Begründung: Links des Gleichheitszeichens stehen zwei Beträge, die addiert werden, also eine Summe, die immer größer oder gleich Null ist. Auf der rechten Seite steht eine negative Zahl. Dass es keine $x$ gibt, die dabei eine Gleichheit herstellen, liegt auf der Hand. 2 P

## Aufgabe 2.4 pq-Formel in den reellen und komplexen Zahlen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…d.) je ½ min | (a…d.) | Punkte<br>(a…c.) je 1 P (d.) 2 P |
| | (e…g.) je 1 min | (e…g.) | (e…g.) je 2 P |

Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit Hilfe der pq-Formel auf, nötigenfalls in den komplexen Zahlen:

(a.) $x^2+4x-5=0$ (b.) $x^2+4x+5=0$ (c.) $x^2+4i\,x-5=0$ (d.) $2x^2+12x+10=0$

Die folgenden Ungleichungen machen natürlich nur in den reellen Zahlen Sinn, weil in den komplexen Zahlen keine größer- / kleiner- Relation existiert:

(e.) $x^2-8x+7>0$ (f.) $-3x^2+6x-9\geq -6$ (g.) $-3x^2+6x\geq -9$

## Lösung zu 2.4

Die Anwendung der pq-Formel sollte eigentlich ohne Probleme funktionieren:

1 P (a.) $x^2+4x-5=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=-2\pm\sqrt{4+5}=-2\pm 3 \;\Rightarrow\; x_1=1$ und $x_2=-5$

1 P (b.) $x^2+4x+5=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=-2\pm\sqrt{4-5}=-2\pm i \;\Rightarrow\; x_1=-2+i$ und $x_2=-2-i$

1 P (c.) $x^2+4i\,x-5=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=-2i\pm\sqrt{-4+5}=-2i\pm 1 \;\Rightarrow\; x_1=1-2i$ und $x_2=-1-2i$

(d.) Vor der Anwendung der pq-Formel dividieren wir die Gleichung durch 2:

2 P $2x^2+12x+10=0 \;\Rightarrow\; x^2+6x+5=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=-3\pm\sqrt{9-5}=-3\pm 2 \;\Rightarrow\; x_1=-5$ und $x_2=-1$

**Stolperfalle:**

Die pq-Formel funktioniert nur in der Normalform der quadratischen Gleichung, d.h. wenn der Faktor vor dem $x^2$ eine Eins ist.

(zu e, f und g)

**Arbeitshinweis:**

Die pq-Formel funktioniert nur zur Suche der Nullstellen quadratischer Polynome. Um sie auf Ungleichungen anzuwenden, sucht man die beiden Nullstellen der Parabel und überlegt zusätzlich, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist. Nach oben geöffnete Parabeln sind zwischen den Nullstellen negativ, außerhalb hingegen positiv. Nach unten geöffnete Parabeln verhalten sich umgekehrt.

Dies setzen wir nun um:

(e.)

1 P Nullstellen der Parabel → $x^2-8x+7=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm 3 \;\Rightarrow\; x_1=1$ und $x_2=7$

Da das $x^2$ mit positivem Faktor auftritt, ist die Parabel nach oben geöffnet. Sie ist also außerhalb der beiden Nullstellen positiv. Da die Gleichheit mit Null laut Aufgabenstellung ausgeschlossen ist, ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{x \mid (x<1) \vee (x>7)\}$ 1 P

(f.) Wir bringen die Ungleichung in die Normalform der pq-Formel und bestimmen dann die Nullstellen der Parabel: $-3x^2+6x-9=-6 \;\Rightarrow\; x^2-2x+1=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=1\pm\sqrt{1-1}=1\pm 0$ 1 P

Die beiden Nullstellen fallen zusammen, also ist die Gleichheit genau für einen einzigen Punkt gegeben. Ein „größer“ ist unmöglich, weil die Parabel nach unten geöffnet ist: $\mathbb{L}=\{1\}$ 1 P

(g.) Die Nullstellen der Parabel liegen bei

$$-3x^2+6x=-9 \;\Rightarrow\; x^2-2x-3=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2 \;\Rightarrow\; x_1=-1 \text{ und } x_2=3$$ 1 P

Da der Faktor vor dem $x^2$ negativ ist, ist die Parabel nach unten geöffnet. Die Punkte zwischen den beiden Nullstellen sind also größer oder gleich Null $\Rightarrow\; \mathbb{L}=[-1;3]$

(Angabe der Lösungsmenge in der Schreibweise eines Intervalls) 1 P

Unterstützende Anmerkung: Wer die Lösungen der Ungleichungen (bei den Aufgabenteilen (f.) und (g.)) nicht nachvollziehen kann, der stelle die Parabeln graphisch dar. Nach einer Betrachtung der Kurven sieht man die hier erläuterten Gedankengänge sofort ein.

## Aufgabe 2.5 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | (a.) 8 min.<br>(b.) 12 min. | (a,b) | | Punkte<br>(a.) 6 P | <br>(b.) 7 P |
| | (c.) | 25 min | (c.) | | (c.) 14 P | |

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

(a.) $\dfrac{1}{2x+5}\ge -4$ (b.) $\dfrac{1}{x+6}\ge\dfrac{1}{6x-3}$ (c.) $\left|\dfrac{x}{3}-\dfrac{1}{5}\right|\le\dfrac{1}{x+4}$

## Lösung zu 2.5

Da sich die Relationszeichen ($<,\le,>,\ge$) in Abhängigkeit von der Rechenoperation und von den Werten der Operanden drehen können, sind oftmals beim Umformen von Ungleichungen Fallunterscheidungen nötig.

(a.) Zum Lösen multiplizieren wir die Ungleichung mit $2x+5$, denn dadurch entsteht eine Ungleichung, die bis auf das Relationszeichen einer Geradengleichung entspricht. Allerdings ist zu beachten, dass sich bei dieser Multiplikation das Relationszeichen abhängig vom Vorzeichen des Multiplikators dreht. Also liegt die Fallgrenze beim Nulldurchgang des Multiplikators, d.h. bei $2x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{5}{2}$ .

Damit wird eine Fallgrenze nötig, zur Trennung zweier Fälle: Fall 1: $x<-\frac{5}{2}$

1 P und Fall 2: $x>-\frac{5}{2}$

An der Fallgrenze $x=-\frac{5}{2}$ selbst ist der Nenner auf der linken Seite der Ungleichung Null, d.h. die Ungleichung ist dort nicht definiert, der Wert kann also nicht Lösung sein. Damit lösen wir wie folgt auf:

Fall 1: Für $x<-\frac{5}{2}$ gilt $\frac{1}{2x+5} \geq -4 \quad \left| \cdot (2x+5) \right.$ mit Drehung des Relationszeichens

$\Rightarrow \quad 1 \leq -4 \cdot (2x+5) = -8x-20 \quad \left| +8x-1 \right.$

$\Rightarrow \quad 8x \leq -21 \quad \left| \cdot \frac{1}{8} \right.$

1 P $\Rightarrow \quad x \leq -\frac{21}{8}$

1 P Alle $x \leq -\frac{21}{8}$ sind in Fall 1 enthalten, also ist der Beitrag zur Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 = \left]-\infty; -\frac{21}{8}\right]$.

Anmerkung zur Schreibweise von Intervallen: Ist die Grenze im Intervall enthalten, so zeigt die eckige Klammer zum Intervall hin; bei Grenzen hingegen, die nicht im Intervall enthalten sind, zeigt die eckige Klammer vom Intervall weg.

Fall 2: Für $x>-\frac{5}{2}$ gilt $\frac{1}{2x+5} \geq -4 \quad \left| \cdot (2x+5) \right.$ Relationszeichen dreht nicht

$\Rightarrow \quad 1 \geq -4 \cdot (2x+5) = -8x-20 \quad \left| +8x-1 \right.$

$\Rightarrow \quad 8x \geq -21 \quad \left| \cdot \frac{1}{8} \right.$

1 P $\Rightarrow \quad x \geq -\frac{21}{8}$

1 P Damit sind alle $x$ aus Fall 2 Bestandteil der Lösungsmenge, also ist $\mathbb{L}_2 = \left]-\frac{5}{2}; +\infty\right[$

1 P Die Gesamt-Lösungsmenge lautet also $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left]-\infty; -\frac{21}{8}\right] \cup \left]-\frac{5}{2}; +\infty\right[ = \mathbb{R} \setminus \left]-\frac{21}{8}; -\frac{5}{2}\right]$

**Arbeitshinweis:**

Um Übersicht bei der Bestimmung der richtigen Teil- und Gesamt-Lösungsmengen zu gewinnen, gibt es eine graphische Hilfsdarstellung, basierend auf einem Zahlenstrahl, die in Bild 2-5a dargestellt und im Anschluss daran kommentiert ist. Diese Art der Darstellung lässt sich bei allen Fallunterscheidungen nutzbringend einsetzen.

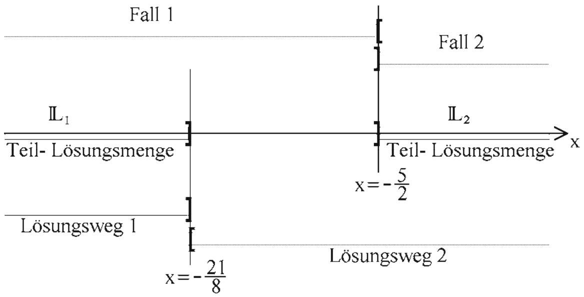



**Bild 2-5a**
Konstruktion zur übersichtlichen Bestimmung der Lösungsmenge nach erfolgter Fallunterscheidung.

Zuerst zeichnet man in der Mitte einen Zahlenstrahl mit der Markierung der Fallgrenzen und aller weiteren markanten Punkte, die sich im Laufe des Lösungsweges ergeben. Dann trägt man oberhalb des Zahlenstrahls die $x$-Werte der einzelnen Fälle mit den zugehörigen Intervallgrenzen ein, wobei die Grenzen durch eckige Klammern gekennzeichnet werden, mit denen man zwischen offenen, halboffenen und geschlossenen Intervallen unterscheiden kann. Schließlich trägt man unterhalb des Zahlenstrahls das Ergebnis des Auflösens der Ungleichung für jeden einzelnen Fall ein. Die Teillösungsmenge jedes einzelnen Falles besteht dann aus genau denjenigen $x$-Werten, für die sich die Markierungen oberhalb und unterhalb des Zahlenstrahles überlappen. Die Teil-Lösungsmengen trägt man zu guter Letzt direkt am Zahlstrahl ein. Deren Vereinigung ergibt die Gesamt-Lösungsmenge, wobei natürlich die Richtung der geöffneten und geschlossenen Intervallgrenzen zu berücksichtigen ist.

Anmerkung: Das Antragen des Nullpunktes am Zahlenstrahl ist nicht zwangsweise notwendig. Je nach Situation kann es hilfreich sein oder auch stören.

**Arbeitshinweis:**

Übrigens kann man die hier vorgestellte Konstruktion auch begleitend während des Lösens der Aufgabe anfertigen, wobei man jeden einzelnen Schritt genau in dem Moment einträgt, in dem er berechnet wird. Genau dies ist die Vorgehensweise, die Anfängern hilft, Aufgaben mit Fallunterscheidungen sicher zu bewerkstelligen.

(b.) Das in Aufgabenteil (a.) beschriebene Lösungsschema gelangt jetzt mit knappem Kommentar zur Anwendung.

Da zweierlei Nenner zu verarbeiten sind, wird mit beiden multipliziert, also mit $(x+6)\cdot(6x-3)$. Die geringste Zahl von Fällen erhält man, wenn man unterscheidet zwischen $(x+6)\cdot(6x-3)>0$ und $(x+6)\cdot(6x-3)<0$. Da man dabei aber zwei Fallgrenzen braucht, nehmen wir einen Fall mehr auf und nehmen drei Fälle in Kauf, was für die Übersichtlichkeit der Lösungswege förderlich ist: Fallgrenze 1 bei $(x+6)=0 \;\Rightarrow\; x=-6$

und Fallgrenze 2 bei $(6x-3)=0 \;\Rightarrow\; x=+\frac{1}{2}$ 1 P

Die entsprechenden Fälle sind unter anderem in Bild 2-5b eingetragen. Eine Maßstäblichkeit der Darstellung der x-Achse ist nicht notwendig und hier auch nicht erfüllt. Die beiden Fallgrenzen selbst werden keinem der Fälle zugeschlagen, da dort die Nenner zu Null werden. Diese Werte können also ohnehin nicht in der Lösungsmenge enthalten sein.

Nebenbemerkung:

Wollte man, wie eingangs erwähnt, mit nur zwei Fällen arbeiten, so würde man die Fälle Nr. 1 und Nr. 3 zu einem Fall zusammenfassen, und schreiben

$(x+6)\cdot(6x-3)>0$ → Fall Nr. 1 und Fall Nr. 3

$(x+6)\cdot(6x-3)<0$ → Fall Nr. 2

Tatsächlich werden wir bei unserem (vereinfachten) Lösungsweg feststellen, dass sich die Fälle Nr. 1 und Nr. 3 in analoger Weise lösen.

2 P

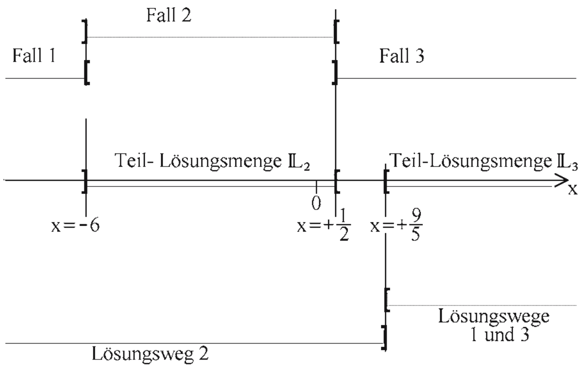



**Bild 2-5b**
Konstruktion zur übersichtlichen Bestimmung der Lösung. Den Lesern wird angeraten, diese Konstruktion begleitend beim Lösen der Aufgabe Schritt für Schritt anzufertigen.

Die einzelnen (drei) Fälle lösen wir nun wie folgt auf:

Fall 1: Für $x<-6$ ist $(x+6)<0$ und $(6x-3)<0$, somit also $(x+6)\cdot(6x-3)>0$

Deshalb lässt die Multiplikation mit $(x+6)\cdot(6x-3)$ das Vorzeichen unverändert stehen. Wir lösen also wie folgt auf:

$$\frac{1}{x+6}\geq\frac{1}{6x-3} \qquad \left|\cdot(x+6)\cdot(6x-3)\right. \quad \text{ohne Drehung des Relationszeichens}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6)\cdot(6x-3)}{x+6} \geq \frac{(x+6)\cdot(6x-3)}{6x-3} \Rightarrow 6x-3\geq x+6 \qquad \left|-x+3\right.$$

$$\Rightarrow 5x\geq 9 \qquad \left|\cdot\tfrac{1}{5}\right.$$

1 P $\Rightarrow x\geq\frac{9}{5}$

Da im Fall 1 keiner dieser $x$ – Werte enthalten ist, ist der Beitrag zur Lösungsmenge $\mathbb{L}_1=\varnothing$.

Fall 2: Für $-6<x<+\frac{1}{2}$ ist $(x+6)>0$ und $(6x-3)<0$, somit also $(x+6)\cdot(6x-3)<0$

Deshalb dreht die Multiplikation mit $(x+6)\cdot(6x-3)$ das Vorzeichen um, d.h. die Auflösung der Ungleichung verläuft wie folgt:

$$\frac{1}{x+6} \geq \frac{1}{6x-3} \qquad \Big|\cdot(x+6)\cdot(6x-3) \quad \text{mit Drehung des Relationszeichens}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6)\cdot(6x-3)}{x+6} \leq \frac{(x+6)\cdot(6x-3)}{6x-3} \Rightarrow 6x-3 \leq x+6 \qquad \Big|-x+3$$

$$\Rightarrow 5x \leq 9 \qquad \Rightarrow x \leq \tfrac{9}{5}$$ 1 P

Da alle $x$ – Werten von Fall 2 kleiner oder gleich $\frac{9}{5}$ sind, ist der Beitrag dieses Falls zur Lösungsmenge: $\mathbb{L}_2 = \left]-6;+\tfrac{1}{2}\right[$ .

Fall 3: Für $x > +\frac{1}{2}$ ist $(x+6) > 0$ und $(6x-3) > 0$ , somit also $(x+6)\cdot(6x-3) > 0$

Deshalb lässt die Multiplikation mit $(x+6)\cdot(6x-3)$ das Vorzeichen unverändert stehen, sodass die Auflösung der Ungleichung dem Weg von Fall 1 sehr ähnelt:

$$\frac{1}{x+6} \geq \frac{1}{6x-3} \qquad \Big|\cdot(x+6)\cdot(6x-3) \quad \text{ohne Drehung des Relationszeichens}$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6)\cdot(6x-3)}{x+6} \geq \frac{(x+6)\cdot(6x-3)}{6x-3} \Rightarrow 6x-3 \geq x+6 \Rightarrow 5x \geq 9 \Rightarrow x \geq \tfrac{9}{5}$$ 1 P

Da mit Fall 3 alle $x > +\frac{1}{2}$ betrachtet wurden, sind alle $x \geq \frac{9}{5}$ auch Lösung der Ungleichung. Der Beitrag von Fall 3 zur Lösungsmenge lautet also $\mathbb{L}_3 = \left[\tfrac{9}{5};+\infty\right[$ .

Die Gesamt-Lösungsmenge als Vereinigung der Teil-Lösungsmengen lautet dann:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left]-6;+\tfrac{1}{2}\right[ \cup \left[\tfrac{9}{5};+\infty\right[$$ 1 P

(c.) Bei diesem Beispiel werden zwei Rechenoperationen nötig, die Fallunterscheidungen erfordern:

- Das Auflösen des Betrages bringt eine Fallgrenze bei $\frac{x}{3}-\frac{1}{5}=0 \Rightarrow x=\frac{3}{5}$
- Die Multiplikation mit dem Nenner bringt eine Fallgrenze bei $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ 1 P

Damit ergeben sich die drei in Bild 2-5c markierten Fälle. Man beachte, dass die Grenze bei $x=\frac{3}{5}$ der Vollständigkeit halber in einem der Fälle enthalten sein muss, da dort keine Definitionslücke der Ungleichung besteht. Die Grenze bei $x=-4$ hingegen ist in keinem der Fälle enthalten, denn dort ist die Ungleichung nicht definiert, weil ein Nenner zu Null wird.

3 P

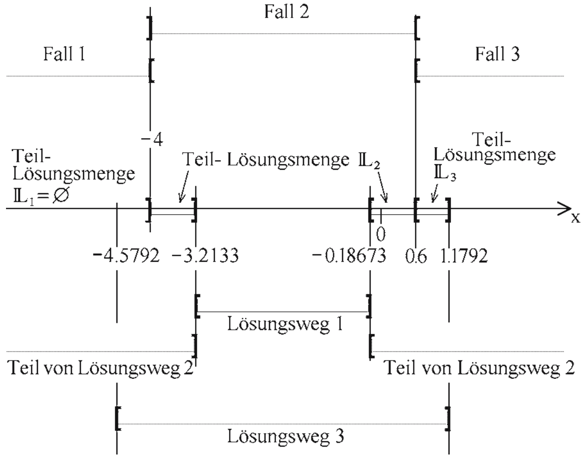



**Bild 2-5c**
Fallunterscheidung und Lösung von Aufgabe 2.5, Teil (c.).

Wir untersuchen nun die drei Fälle.

Fall 1: Für $x < -4$ gilt

$$\left|\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right| \le \frac{1}{x+4} \qquad \Big| \text{Ersetzen des Betrages durch ein Minuszeichen}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right) \le \frac{1}{x+4} \qquad \Big| \text{Multiplikation mit dem Nenner dreht das Relationszeichen}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot(x+4) \ge 1 \qquad \Big| \text{Es folgt das Ausmultiplizieren und Sortieren}$$

1 P $$\Rightarrow \quad -\frac{x^2}{3}+\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)\cdot x+\frac{4}{5} \ge 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{17}{5}x+\frac{3}{5} \le 0$$

Die Parabel hat zwei reelle Nullstellen bei

1 P $$x_{1/2} = -\frac{17}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{10}\right)^2+\frac{3}{5}} = -1.7 \pm \sqrt{2.29} \quad \Rightarrow \quad x_1 \overset{TR}{\approx} -0.18673 \text{ und } x_2 \overset{TR}{\approx} -3.2133$$

Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist die Forderung „kleiner oder gleich Null" erfüllt für $x \in [-3.5682; -0.16815]$. Diese $x$ liegen allesamt außerhalb des untersuchten Bereichs von
1 P Fall 1, also ist die Teil-Lösungsmenge $\mathbb{L}_1 = \varnothing$ (vgl. auch Bild 2-5c).

Fall 2: Für $-4 < x < \frac{3}{5}$ gilt

$$\left|\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right| \le \frac{1}{x+4} \qquad \Big| \text{Ersetzen des Betrages durch ein Minuszeichen}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right) \le \frac{1}{x+4} \qquad \Big| \text{Bei Multiplikation mit dem Nenner bleibt das Relationszeichen}$$

$$\Rightarrow \quad -\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot(x+4)\le 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{x^2}{3}+\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{3}\right)\cdot x+\frac{4}{5}\le 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{17}{5}x+\frac{3}{5}\ge 0$$ 1 P

Die Nullstellen der Parabel kennen wir bereits aus Fall 1: $x_1 \overset{TR}{\approx} -0.18673$ und $x_2 \overset{TR}{\approx} -3.2133$ 1 P

Da aber die Forderung der Ungleichung „größer oder gleich Null" lautet, und die Parabel nach oben geöffnet ist, suchen wird in Fall 2 nach den Punkten außerhalb der beiden Nullstellen. Dies sind alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left]-3.2133;-0.18673\right[$ . Prüft man nun, welche dieser $x$ -Werte in Fall 2 untersucht wurden, so erhält man einen unzusammenhängenden Bereich, bestehend aus zwei Teilintervallen, deren Ausmaß man am leichtesten am Zahlenstrahl von Bild 2-5c erkennt: $\mathbb{L}_2 = \{x \mid (-4 < x \le -3.2133) \vee (-0.18673 \le x < 0.6)\}$ 1 P

Fall 3: Für $x \ge \frac{3}{5}$ gilt

$$\left|\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right| \le \frac{1}{x+4}$$ |Der Betrag kann ersatzlos weggelasen werden

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{3}-\frac{1}{5} \le \frac{1}{x+4}$$ |Bei Multiplikation mit dem Nenner bleibt das Relationsszeichen

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot(x+4)\le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{3}+\left(-\frac{1}{5}+\frac{4}{3}\right)\cdot x-\frac{4}{5}\le 1 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{17}{5}x-\frac{27}{5}\le 0$$ 1 P

Die beiden reellen Nullstellen der Parabel liegen bei

$$x_{1/2} = -\frac{17}{10} \pm \sqrt{\left(\frac{17}{10}\right)^2+\frac{27}{5}} = -1.7 \pm \sqrt{8.29} \quad \Rightarrow \quad x_1 \overset{TR}{\approx} -4.5792 \text{ und } x_2 \overset{TR}{\approx} +1.1792$$ 1 P

Da die Parabel nach oben geöffnet ist, ist die Bedingung „kleiner oder gleich Null" zwischen den beiden Nullstellen erfüllt, also für $x \in [-4.5792;+1.1792]$ . Die sich daraus ergebende Teil-Lösungsmenge sieht man am leichtesten wieder in Bild 1-5c: $\mathbb{L}_3 = [+0.6;+1.1792]$ 1 P

Damit ergibt sich die Gesamt-Lösungsmenge der Ungleichung $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$ als

$$\mathbb{L} = \left]-4;-3.2133\right] \cup \left[-0.18673;+0.6\right[ \cup \left[+0.6;+1.1792\right] = \left]-4;-3.2133\right] \cup \left[-0.18673;+1.1792\right]$$

Anmerkung: Ein ganzer Teil der Rechenwege ist mit der Ungenauigkeit der Rundungen eines Taschenrechners formuliert. Dieser Nachteil wurde hier aus didaktischen Gründen in Kauf genommen, da man bei der exakten Formulierung mit Wurzeln die Kleiner-Größer-Relationen zwischen den Zahlen nur sehr mühsam erkennt. Natürlich kann man das Endergebnis auch exakt schreiben als $\mathbb{L} = \left](-4);\left(-1.7-\sqrt{2.29}\right)\right] \cup \left[\left(-1.7+\sqrt{2.29}\right);\left(-1.7+\sqrt{8.29}\right)\right]$ . 1 P

## Aufgabe 2.6 Wurzelgleichungen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | Punkte | |
| (a,d.) | je 7 min | (a,d.) | | (a.) 4 P | (d.) 4 P |
| (b) | 1 min | (b) | | (b.) 2 P | |
| (c,e.) | je 4 min | (c,e.) | | (c.) 3 P | (e.) 3 P |

Bestimmen Sie diejenigen reellen $x$, die die nachfolgenden Wurzelgleichungen lösen:

(a.) $\sqrt{-6x+8}-\sqrt{36+4x}=\sqrt{4x+46}$ (b.) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}+4=0$

(c.) $\sqrt{x+\sqrt{2x+5}}=\sqrt{3x-1}$ (d.) $\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=\dfrac{10}{\sqrt{x+2}}$ (e.) $\sqrt[3]{x^3-4x^2+8x-14}=x-2$

## Lösung zu 2.6

**Stolperfalle:**

Wurzelgleichungen führt man durch Quadrieren auf die pq-Formel zurück. Aber der Rechenschritt des Quadrierens ist keine Äquivalenzumformung! Die quadratische Gleichung, die durch das Quadrieren entsteht, hat möglicherweise mehr Lösungen als die Wurzelgleichung vor dem Quadrieren. Deshalb muss man die aus der pq-Formel erhaltenen Lösungen noch in die Wurzelgleichung einsetzen und überprüfen, welche davon wirklich die Wurzelgleichung lösen.

**Arbeitshinweis:**

Beim Quadrieren von Summen oder Differenzen sind die binomischen Formeln zu beachten. Das Entscheidende dabei ist: Quadriert man eine Summe die Wurzeln enthält, so entsteht im Mittelglied wieder eine Wurzel. Aus diesem Grunde soll man immer darauf achten, dass man soweit irgend möglich, Wurzel-haltige Summanden und Wurzel-freie Summanden <u>vor</u> dem Quadrieren auf die unterschiedlichen Seiten des Gleichheitszeichens sortiert.

(a.) Gelöst wird durch folgende Umformungen:

$$\sqrt{-6x+8}-\sqrt{36+4x}=\sqrt{4x+46} \qquad \text{|Gleichung quadrieren}$$

$$\Rightarrow (-6x+8)-2\cdot\sqrt{-6x+8}\cdot\sqrt{36+4x}+(36+4x)=4x+46 \qquad \text{|sortieren, alle Wurzeln auf eine Seite}$$

1 P $$\Rightarrow -6x-2=2\cdot\sqrt{-6x+8}\cdot\sqrt{36+4x} \qquad \text{|nochmals quadrieren}$$

$$\Rightarrow (6x+2)^2=4\cdot(-6x+8)\cdot(36+4x) \qquad \text{|ausmultiplizieren}$$

$$\Rightarrow 36x^2+24x+4=-864x+1152-96x^2+128x \qquad \text{|wieder sortieren, dann auf Normalform}$$

$\Rightarrow 132x^2+760x-1148=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{190}{33}x-\frac{287}{33}=0$ $\quad$ |pq-Formel 1 P

$\Rightarrow x_{1/2}=-\frac{95}{33}\pm\sqrt{\left(\frac{95}{33}\right)^2+\frac{287\cdot 33}{33\cdot 33}}=-\frac{95}{33}\pm\sqrt{\frac{18496}{(33)^2}}=-\frac{95}{33}\pm\frac{136}{33}\Rightarrow x_1=\frac{-95+136}{33}=\frac{41}{33}$ und $x_2=\frac{-95-136}{33}=-7$ 1 P

Da im Verlauf des Lösungsweges der nicht-äquivalente Umformungsschritt des Quadrierens aufgetaucht ist (hier sogar mehrfach), müssen wir die Lösungen durch Einsetzen in die Wurzelgleichung überprüfen:

für $x_1$: $\sqrt{-3\cdot\frac{41}{33}+4}-\sqrt{18+2\cdot\frac{41}{33}}\stackrel{?}{=}\sqrt{2\cdot\frac{41}{33}+23} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{3}{11}}-\sqrt{\frac{676}{33}}\neq+\sqrt{\frac{841}{33}} \quad \Rightarrow x_1$ ist keine Lösung

für $x_2$: $\sqrt{-3\cdot(-7)+4}-\sqrt{18+2(-7)}\stackrel{?}{=}\sqrt{2\cdot(-7)+23}\Leftrightarrow\sqrt{25}-\sqrt{4}=\sqrt{9} \quad \Rightarrow x_2$ ist Lösung

Die Lösungsmenge von Aufgabenteil (a.) besteht also nur aus $x_2$: $\mathbb{L}_a=\{-7\}$ 1 P

(b.) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}+4=0$ Hier braucht man nichts rechnen. Man sieht sofort, dass auf der linken Seite des Gleichheitszeichens nur Wurzeln und positive Zahlen stehen, die linke Seite ist also immer $\geq 4$, sie erreicht somit nie den Wert der rechten Seite, die Null. Folglich hat die Gleichung keine Lösungen. Diese Aussage könnte man durch analytisches Auflösen der Gleichung verifizieren. Es gilt also: $\mathbb{L}_b=\emptyset$ 2 P

(c.) Die Lösung dieses Aufgabenteils versteht man ohne viele Erklärungen:

$\sqrt{x+\sqrt{2x+5}}=\sqrt{3x-1}$ $\quad$ |Gleichung quadrieren

$\Rightarrow \quad x+\sqrt{2x+5}=3x-1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x+5}=2x-1$ $\quad$ |nochmals quadrieren

$\Rightarrow \quad 2x+5=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$ $\quad$ |sortieren 1 P

$\Rightarrow \quad 4x^2-6x-4=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{3}{2}x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{16}{16}}=\frac{3}{4}\pm\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad x_1=2$ und $x_2=-\frac{1}{2}$ 1 P

Einsetzen und überprüfen lässt erkennen:

für $x_1$: $\sqrt{2+\sqrt{2\cdot 2+5}}\stackrel{?}{=}\sqrt{3\cdot 2-1} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2+3}=\sqrt{6-1} \quad \Rightarrow x_1$ ist tatsächlich eine Lösung

für $x_2$: $\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5}}\stackrel{?}{=}\sqrt{3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-1} \;\Leftrightarrow\; \sqrt{-\frac{1}{2}+4}=\sqrt{-\frac{3}{2}-1} \quad \Rightarrow x_2$ ist keine Lösung

Damit wissen wir: $\mathbb{L}_c=\{+2\}$ 1 P

(d.) Auch diese Musterlösung ist selbsterklärend:

$\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=\frac{10}{\sqrt{x+2}}$ $\quad$ $|\cdot(x+2)$

$\Rightarrow \; (x+2)+\sqrt{(x+2)\cdot(4x+1)}=10$ $\quad$ | zuerst $-(x+2)$, danach quadrieren

1 P $\Rightarrow (x+2)\cdot(4x+1)=(10-(x+2))^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2+9x+2=(8-x)^2$ |auf Normalform bringen

1 P $\Rightarrow \quad 4x^2+9x+2=64-16x+x^2 \quad \Rightarrow \quad 3x^2+25x-62=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+\frac{25}{3}x-\frac{62}{3}=0$ |pq-Formel

$\Rightarrow x^2+\frac{25}{3}x-\frac{62}{3}=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=-\frac{25}{6}\pm\sqrt{\left(\frac{25}{6}\right)^2+\frac{62}{3}\cdot\frac{12}{12}}=-\frac{25}{6}\pm\sqrt{\frac{625+744}{36}}=-\frac{25}{6}\pm\frac{37}{6}$

1 P $\Rightarrow x_1=\frac{-25+37}{6}=2$ und $x_2=\frac{-25-37}{6}=-\frac{62}{6}$

Probe durch Einsetzen:

für $x_1$: $\sqrt{2+2}+\sqrt{4\cdot 2+1}\overset{?}{=}\frac{10}{\sqrt{2+2}} \Leftrightarrow \sqrt{4}+\sqrt{9}\overset{?}{=}\frac{10}{\sqrt{4}} \Leftrightarrow 2+3=\frac{10}{2} \Rightarrow x_1$ ist tatsächlich Lösung

für $x_2$: $\sqrt{\left(-\frac{62}{6}\right)+2}+\sqrt{4\cdot\left(-\frac{62}{6}\right)+1}\overset{?}{=}\frac{10}{\sqrt{\left(-\frac{62}{6}\right)+2}} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{-25}{3}}+\sqrt{\frac{121}{3}}\neq\frac{10}{\sqrt{\frac{-25}{3}}}$

Für $x_2$ besteht auch in $\mathbb{C}$ keine Gleichheit, also ist $x_2$ keine Lösung.

1 P Also lautet die Lösungsmenge von Aufgabenteil (d.): $\mathbb{L}_d=\{+2\}$

(e.) $\sqrt[3]{x^3-4x^2+8x-14}=x-2$ |Gleichung hoch 3

$\Rightarrow \quad x^3-4x^2+8x-14=(x-2)^3$ |ausmultiplizieren und sortieren

1 P $\Rightarrow \quad x^3-4x^2+8x-14=x^3-6x^2+12x-8 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-4x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-2x-3=0$ |pq-Formel

1 P $\Rightarrow \quad x_{1/2}=1\pm\sqrt{1+3}=1\pm 2 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1$ und $x_2=3$

Probe durch Einsetzen:

für $x_1$: $\sqrt[3]{(-1)^3-4\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)-14}\overset{?}{=}-1-2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{-1-4-8-14}=-3 \Rightarrow x_1=-1$ ist Lösung

für $x_2$: $\sqrt[3]{3^3-4\cdot 3^2+8\cdot 3-14}\overset{?}{=}3-2 \Leftrightarrow \sqrt[3]{27-36+24-14}=+1 \Rightarrow x_2=+3$ ist auch Lösung

1 P Anmerkung: Im Gegensatz zum Quadrieren, erhält die Potenzierung hoch 3 das Vorzeichen. Deshalb wäre hier eigentlich keine Überprüfung der einzelnen Lösungen nötig, denn die Umformungen kreieren keine zusätzlichen „Schein-Lösungen“: $\mathbb{L}_e=\{-1,+3\}$

## Aufgabe 2.7 Rechnen mit Logarithmen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,g,h,i,j,k.) je ¼ min | | Punkte<br>(a…g) je 1 P |
| | (b,c,d,e,f,n,s.) je ½ min | | (h…k) je 1 P |
| | (l,m,o,p,q,r) je 1 min | | (l…p) je 1 P |

Gegeben seien die Zehnerlogarithmen $\lg(2)\overset{TR}{\approx}0.3010$ und $\lg(3)\overset{TR}{\approx}0.4771$ und $\lg(e)\overset{TR}{\approx}0.4343$

Berechnen Sie aufgrund dieser Kenntnis ohne Benutzung der Logarithmus-Funktion eines Taschenrechners die nachfolgenden Logarithmen:

(a.) $\lg(1)\overset{TR}{\approx}?$ (b.) $\lg(4)\overset{TR}{\approx}?$ (c.) $\lg(5)\overset{TR}{\approx}?$ (d.) $\lg(6)\overset{TR}{\approx}?$ (e.) $\lg(8)\overset{TR}{\approx}?$

(f.) $\lg(9)\overset{TR}{\approx}?$ (g.) $\lg(10)\overset{TR}{\approx}?$ (h.) $\ln(2)\overset{TR}{\approx}?$ (i.) $\ln(4)\overset{TR}{\approx}?$ (j.) $\ln(5)\overset{TR}{\approx}?$

(k.) $\ln(10)\overset{TR}{\approx}?$ (l.) $\ln(1.2)\overset{TR}{\approx}?$ (m.) $\ln(27)\overset{TR}{\approx}?$ (n.) $\mathrm{ld}(5)\overset{TR}{\approx}?$ (o.) $\log_3(1024)\overset{TR}{\approx}?$

(p.) $\mathrm{ld}(0.04)\overset{TR}{\approx}?$ (q.) $\ln\left(\sqrt{15}\right)\overset{TR}{\approx}?$ (r.) $\lg\left(\sqrt{0.015}\right)\overset{TR}{\approx}?$ (s.) $\log_7(343)\overset{TR}{\approx}?$

Anmerkung: Obwohl zum Lösen der Aufgabe kein Taschenrechner verwendet werden soll, hat das Symbol „$\overset{TR}{\approx}$" seine Berechtigung, weil nämlich die Vorgaben $\lg(2)$, $\lg(3)$ und $\lg(e)$ die Rundungsfehler eines Taschenrechners enthalten.

## ▾ Lösung zu 2.7

Aufgrund der Rechenregeln für Logarithmen gilt:

(a.) $\lg(1)=0$ (Der Logarithmus von 1 ist zu jeder Basis 0.) 1 P

(b.) $\lg(4)=\lg(2\cdot 2)=\lg(2)+\lg(2)\overset{TR}{\approx}0.3010+0.3010=0.6020$ 1 P

(c.) $\lg(5)=\lg\left(\frac{10}{2}\right)=\lg(10)-\lg(2)\overset{TR}{\approx}1-0.3010=0.6990$ 1 P

(d.) $\lg(6)=\lg(2\cdot 3)=\lg(2)+\lg(3)\overset{TR}{\approx}0.3010+0.4771=0.7781$ 1 P

(e.) $\lg(8)=\lg\left(2^3\right)=3\cdot\lg(2)\overset{TR}{\approx}3\cdot 0.3010=0.9030$ 1 P

(f.) $\lg(9)=\lg\left(3^2\right)=3\cdot\lg(3)\overset{TR}{\approx}2\cdot 0.4771=0.9542$ 1 P

(g.) $\lg(10)=\log_{10}(10)=1$ (ohne Rechenungenauigkeit) 1 P

1 P (h.) $\ln(2)=\frac{\lg(2)}{\lg(e)}\overset{TR}{\approx}\frac{0.3010}{0.4343}\overset{TR}{\approx}0.6931$

1 P (i.) $\ln(4)=\frac{\lg(4)}{\lg(e)}\overset{TR}{\approx}\frac{0.6020}{0.4343}\overset{TR}{\approx}1.386$ (mit Bezug auf Aufgabenteil (b.))

1 P (j.) $\ln(5)=\frac{\lg(5)}{\lg(e)}\overset{TR}{\approx}\frac{0.6990}{0.4343}\overset{TR}{\approx}1.6095$ (mit Bezug auf Aufgabenteil (c.))

1 P (k.) $\ln(10)=\frac{\lg(10)}{\lg(e)}=\frac{1}{0.4343}\overset{TR}{\approx}2.3026$

1 P (l.) $\ln(1.2)=\frac{\lg(1.2)}{\lg(e)}=\frac{\lg\left(2\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{1}{10}\right)}{\lg(e)}=\frac{\lg(2)+\lg(2)+\lg(3)-\lg(10)}{\lg(e)}\overset{TR}{\approx}\frac{0.3010+0.3010+0.4771-1}{0.4343}\overset{TR}{\approx}0.1821$

1 P (m.) $\ln(27)=\frac{\lg\left(3^3\right)}{\lg(e)}=\frac{3\cdot\lg(3)}{\lg(e)}\overset{TR}{\approx}\frac{3\cdot 0.4771}{0.4343}\overset{TR}{\approx}3.296$

1 P (n.) $\mathrm{ld}(5)=\frac{\lg(5)}{\lg(2)}\overset{TR}{\approx}\frac{0.6990}{0.3010}\overset{TR}{\approx}2.322$ (mit Bezug auf Aufgabenteil (c.))

1 P (o.) $\log_3(1024)=\frac{\lg\left(2^{10}\right)}{\lg(3)}=\frac{10\cdot\lg(2)}{\lg(3)}=\frac{3.010}{0.4771}\overset{TR}{\approx}6.309$

1 P (p.) $\mathrm{ld}(0.04)=\mathrm{ld}\left(\frac{4}{100}\right)=\underbrace{\mathrm{ld}\left(2^2\right)}_{=2}-\mathrm{ld}\left(10^2\right)=2-2\cdot\mathrm{ld}(10)=2-2\cdot\frac{\lg(10)}{\lg(2)}\overset{TR}{\approx}2-2\cdot\frac{1}{0.3010}\overset{TR}{\approx}-4.644$

(q.) $\ln\left(\sqrt{15}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln(15)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{3\cdot 10}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\ln(3)+\ln(10)-\ln(2)\right)$

1 P $=\frac{1}{2}\cdot\frac{\lg(3)+\lg(10)-\lg(2)}{\lg(e)}\overset{TR}{\approx}\frac{1}{2}\cdot\frac{0.4771+1-0.3010}{0.4343}\overset{TR}{\approx}1.354$

(r.) $\lg\left(\sqrt{0.015}\right)=\frac{1}{2}\cdot\lg(0.015)=\frac{1}{2}\cdot\lg\left(\frac{3\cdot 5}{1000}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lg(3)+\lg(5)-\lg(1000)\right)$

1 P $\overset{TR}{\approx}\frac{1}{2}\cdot(0.4771+0.6990-3)=0.91195$

1 P (s.) $\log_7(343)=\log_7\left(7^3\right)=3$

**Arbeitshinweis:**

Die meisten Studierenden haben die Rechenregeln für Logarithmen (von der Schule her) im Kopf. Die einzige Regel, die immer wieder in Vergessenheit gerät ist die:

$\log_b(a)=\frac{\lg(a)}{\lg(b)}=\frac{\ln(a)}{\ln(b)}=\frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$ (mit einem beliebigen $c\in\mathbb{R}$, $c>0$ und $c\neq 1$)

# Aufgabe 2.8 Gleichungen mit Logarithmen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a,e,f,g.) | je 5 min | (a,e,f,g.) | | Punkte (a,e,f,g.) je 3 P |
| (b,c,d.) | je 2 min | (b,c,d.) | | (b,c,d.) je 1 P |

Lösen Sie bitte die nachfolgenden Gleichungen (wo „ lg “ für den Zehnerlogarithmus steht):

(a.) $\lg\left(x^3\right)+2\cdot\lg\left(\sqrt{20}\right)+\lg\left(x^2\right)=\lg\left(x^5\right)-\lg(x)$

(b.) $3^{x+1}+3^{x-1}=30$

(c.) $\log_3\left(x^2+2\right)=3$

(d.) $\sqrt{a^{13x+46}}=a^{2x+5}$ (mit $a>1$)

(e.) $\log_5(x)+2\cdot\ln(x)=2+2\cdot\ln(25)$

(f.) $4^{\ln(x)}=3\cdot 5^{\ln(x)}$

(g.) $\left(\sqrt{x}\right)^{\ln(x)}=5$

## Lösung zu 2.8

Die nachfolgenden Lösungswege sind selbsterklärend.

(a.) $\lg\left(x^3\right)+2\cdot\lg\left(\sqrt{20}\right)+\lg\left(x^2\right)=\lg\left(x^5\right)-\lg(x)$ | umformen mit $\lg\left(a^b\right)=b\cdot\lg(a)$

$\Rightarrow\ 3\cdot\lg(x)+2\cdot\frac{1}{2}\cdot\lg(20)+2\cdot\lg(x)=5\cdot\lg(x)-\lg(x)$ | separieren von Termen mit $x$ 1 P

$\Rightarrow\ 3\cdot\lg(x)+2\cdot\lg(x)-5\cdot\lg(x)+\lg(x)=-\lg(20)$ | zusammenfassen

$\Rightarrow\ (3+2-5+1)\cdot\lg(x)=-\lg(20)=\lg\left(\frac{1}{20}\right)$ | $10^{\text{Gleichung}}$ 1 P

$\Rightarrow\ x=\frac{1}{20}$ 1 P

(b.) $3^{x+1}+3^{x-1}=30 \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 3^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x=30 \quad\Rightarrow\quad \left(3+\frac{1}{3}\right)\cdot 3^x=30 \quad\Rightarrow\quad \frac{10}{3}\cdot 3^x=30$

$\Rightarrow\ 3^x=\frac{90}{10}=9=3^2$ logarithmieren zur Basis 3 liefert $\Rightarrow\ x=2$ 1 P

(c.) $\log_3\left(x^2+2\right)=3$ | $3^{\text{Gleichung}}$

$\Rightarrow\ x^2+2=3^3 \quad\Rightarrow\quad x^2=27-2=25 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\pm 5$ 1 P

(d.) $\sqrt{a^{13x+46}}=a^{2x+5} \quad\Rightarrow\quad a^{\frac{13x+46}{2}}=a^{2x+5}$ | logarithmieren zur Basis $a$

$\Rightarrow\ \frac{13x+46}{2}=2x+5 \quad\Rightarrow\quad 13x+46=4x+10 \quad\Rightarrow\quad 9x=-36 \quad\Rightarrow\quad x=-4$ 1 P

(e.) $\log_5(x)+2\cdot\ln(x)=2+2\cdot\ln(25)$ | Logarithmen auf gemeinsame Basis $e$ bringen

$\Rightarrow\ \frac{\ln(x)}{\ln(5)}+2\cdot\ln(x)=2+2\cdot\ln(25)=2+4\cdot\ln(5)$ 1 P

$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\ln(5)}+2\right)\cdot\ln(x)=2+4\cdot\ln(5) \qquad \Big|\cdot\ln(5)$

1 P $\Rightarrow \quad \left(1+2\cdot\ln(5)\right)\cdot\ln(x)=2\cdot\ln(5)+4\cdot\ln(5)\cdot\ln(5) \qquad \Big|\cdot\frac{1}{1+2\cdot\ln(5)}$

$\Rightarrow \quad \ln(x)=\frac{2\cdot\ln(5)+4\cdot\ln(5)\cdot\ln(5)}{1+2\cdot\ln(5)}=\frac{2\cdot\ln(5)\cdot(1+2\cdot\ln(5))}{1+2\cdot\ln(5)}=2\cdot\ln(5)=\ln(25) \qquad \Big|e^{\text{Gleichung}}$

1 P $\Rightarrow \quad x=25$

(f.) $4^{\ln(x)}=3\cdot5^{\ln(x)}$ $\qquad$ |logarithmieren zur Basis $e$

1 P $\Rightarrow \quad \ln\left(4^{\ln(x)}\right)=\ln(3)+\ln\left(5^{\ln(x)}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln(x)\cdot\ln(4)=\ln(3)+\ln(x)\cdot\ln(5)$ $\qquad$ |sortieren nach $x$

1 P $\Rightarrow \quad \ln(x)\cdot\left(\ln(4)-\ln(5)\right)=\ln(3) \quad \Rightarrow \quad \ln(x)=\frac{\ln(3)}{\ln(4)-\ln(5)}=\frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)} \qquad \Big|e^{\text{Gleichung}}$

1 P $\Rightarrow \quad x=e^{\left(\frac{\ln(3)}{\ln\left(\frac{4}{5}\right)}\right)}\overset{TR}{\approx}7.27477\cdot10^{-3}$

(g.) $\left(\sqrt{x}\right)^{\ln(x)}=5$ $\qquad$ |logarithmieren zur Basis $e$

1 P $\Rightarrow \quad \ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^{\ln(x)}\right)=\ln(5) \quad \Rightarrow \quad \ln(x)\cdot\ln\left(\sqrt{x}\right)=\ln(5) \quad \Rightarrow \quad \ln(x)\cdot\frac{1}{2}\ln(x)=\ln(5) \qquad \Big|\cdot2$

$\Rightarrow \quad \left(\ln(x)\right)^2=2\cdot\ln(5)$ $\qquad$ |quadratische Gleichung lösen

1 P $\Rightarrow \quad \ln(x)=\pm\sqrt{2\cdot\ln(5)} \qquad \Big|e^{\text{Gleichung}}$

1 P $\Rightarrow \quad x=e^{\pm\sqrt{2\cdot\ln(5)}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1\overset{TR}{\approx}6.01419542 \\ x_2\overset{TR}{\approx}0.16627328 \end{cases}$

## Aufgabe 2.9 Anwendungsbeispiel zu Logarithmen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | Punkte 3 P |

In einer elektrischen Schaltung sei ein Kondensator eingebaut, dessen Aufladeprozess zeitlich einer Exponentialfunktion folge, und zwar derart, dass der Verlauf der Spannung als Funktion der Zeit durch die Funktion $\mathrm{U}(t)=U_0\cdot\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ beschrieben werde.

Betrachten Sie diese Schaltung mit der Spannung $\mathrm{U}_0=50V$, der Kapazität $C=10\,\mu F$ und dem ohm’schen Widerstand $\mathrm{R}=100\Omega$. Zu welchem Zeitpunkt $\mathrm{t_x}$ hat die Spannung $\mathrm{U}(\mathrm{t_x})$ den Wert $\mathrm{U}(\mathrm{t_x})=45V$ erreicht?

## Lösung zu 2.9

Wie man an dem in der Aufgabenstellung gegebenen Gesetz für $\mathrm{U}(t)$ sieht, ist $\mathrm{U}(0)=0V$.

Zum Zeitpunkt $t_x$ ist $\mathrm{U}(t_x)=U_0\cdot\left(1-e^{-\frac{t_x}{RC}}\right)=45V$

Wegen $\mathrm{U}_0=50V$ folgt $1-e^{-\frac{t_x}{RC}}=\frac{45\,V}{50\,V} \quad\Rightarrow\quad e^{-\frac{t_x}{RC}}=1-\frac{45}{50}=\frac{1}{10}$ 1 P

Logarithmieren liefert $-\frac{t_x}{RC}=\ln\left(\frac{1}{10}\right) \quad\Rightarrow\quad t_x=-RC\cdot\ln\left(\frac{1}{10}\right)=RC\cdot\ln(10)$ 1 P

Durch Einsetzen der Werte erhalten wir $t_x=RC\cdot\ln(10)=100\,\Omega\cdot10^{-5}F\cdot\ln(10)\overset{TR}{\approx}2.30\,\mathrm{milli\,sec}$. 1 P

Zur Beachtung: Man achte auf die korrekte Verarbeitung der physikalischen Einheiten. So gilt z.B. $\Omega\cdot F=\mathrm{sec}$. Der Exponent einer Exponentialfunktion ist frei von Einheiten, ebenso der Wert der Exponentialfunktion, d.h. die „Volt“ im Zähler und im Nenner heben sich dort auf.

## Aufgabe 2.10 Zahlensysteme verschiedener Basen

| | | |
|---|---|---|
| S=2..10: 1 Min. pro Eintrag<br>S=16: ½ Min. pro Eintrag | | Punkte<br>1 P je Eintrag |

Sei $a_{(S)}$ eine Zahl in einem System mit der Basis $S$. Wir verwenden dafür die Nomenklatur $a_{(S)}$ (mit $a\in\mathbb{R}$ sowie einer Basis $S\in\mathbb{N}$) für eine Zahl in ebendiesem S-System. Die einzelnen Ziffern im Zahlensystem mit der Basis $S$ laufen von $0$ bis $S-1$. Für Dualzahlen ist $S=2$, für Dezimalzahlen ist $S=10$ und für Zahlen im 7er-System ist $S=7$.

Vervollständigen Sie bitte die nachfolgende Tabelle, bei der jede Zahl in jeweils einem System gegeben ist und in alle anderen dort genannten Systeme übertragen werden soll. Die Tabelle ist zeilenweise zu verstehen (und nicht spaltenweise), d.h. alle Zahlen innerhalb einer Zeile beschreiben den gleichen Wert in den verschiedenen Systemen.

**Tabelle 2.10.a** Aufgabenstellung zur Umwandlung von Zahlen in verschiedene Zahlensysteme

| $S=2$ Dualsystem | $S=3$ Triadisches System | $S=6$ Hexadisches System | $S=10$ Dezimalsystem | $S=16$ Hexadezimalsystem |
|---|---|---|---|---|
| 11101011 | | | | |
| | 12021 | | | |
| | | 12345 | | |
| | | | 7777 | |
| | | | | C15 |

## Lösung zu 2.10

**Erster Arbeitshinweis:**
Natürlich könnte man jede Stelle einzeln umwandeln und anschließend alle Stellen mit ihren Stellenwerten zusammenfassen. Um aber im Hinblick auf die Klausurensituation zeitsparend zu arbeiten, wenden wir das Horner-Schema an.

**Zweiter Arbeitshinweis:**
Da wir im Zehnersystem zu denken und zu arbeiten gewohnt sind, übertragen wir erst alle Zahlen ins Zehnersystem und danach von dort in alle anderen Systeme.

Wir beginnen also mit der Anwendung des Horner-Schemas zur Umwandlung von Zahlen ins Zehnersystem hinein. Für jede Umwandlung verwenden wir das Horner-Schema genau einmal (im Anschluss an den nachfolgenden Arbeitshinweis) und tragen anschließend das Ergebnis in die Spalte $S=10$ der Tabelle 2.10.a ein.

**Dritter Arbeitshinweis – zur Arbeitsweise des Horner-Schemas.**
Bei jeder einzelnen Anwendung des Horner-Schemas mit Arbeitsrichtung ins Zehnersystem hinein schreibt man in die oberste Zeile die umzuwandelnde Zahl. Darunter lässt man eine Zeile frei und macht darunter einen waagerechten Strich. In der allerersten Stelle schreibt man einfach die oberst-linke Zahl als aktuelle Zahl unter den Strich. Danach folgt das Verfahren wie ein Kochrezept, nach dem auch Computer programmiert werden:
$(* = \text{Anfang der Programmierschleife})$ → Man multipliziert die aktuelle Stelle mit dem „$S$“ des Systems und schreibt sie in die nächst folgende Stelle der mittleren Zeile. Dazu addiert man die Zahl der selben Stelle in der obersten Zeile und schreibt die Summe ebenfalls in die selbe Stelle als aktuelle Stelle unter den Strich. Jetzt beginnt man wieder an der Position $(*)$ (also GOTO $(*)$), und zwar so oft, bis man am äußerst rechten unteren Ende des Horner-Schemas angelangt ist, wo man die gesuchte Zahl im Dezimalsystem erhält.

Vergleicht man die nachfolgenden vier Anwendungsbeispiele des Horner-Schemas mit dem obigen dritten Arbeitshinweis, so versteht man die Vorgehensweise sofort:

1 P Dual $S=2$ → Dezimal:
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \downarrow & 2 & 6 & 14 & 28 & 58 & 116 & 234 \\ \hline 1 & 3 & 7 & 14 & 29 & 58 & 117 & 235 \end{array}$$

1 P Triadisch $S=3$ → Dezimal:
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ \downarrow & 3 & 15 & 45 & 141 \\ \hline 1 & 5 & 15 & 47 & 142 \end{array}$$

1 P Hexadisch $S=6$ → Dezimal:
$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & 6 & 48 & 306 & 1860 \\ \hline 1 & 8 & 51 & 310 & 1865 \end{array}$$

1 P Hexadezimalsystem $S=16$ → Dezimal:
$$\begin{array}{ccc} C & 1 & 5 \\ \downarrow & 192 & 3088 \\ \hline 12 & 193 & 3093 \end{array}$$

Nachdem nun in der Tabelle die Spalte $S=10$ (Dezimalsystem) vollständig ausgefüllt ist, beginnt die Umwandlung dieser Zahlen in alle anderen Systeme. Dafür verwenden wir wieder das Horner-Schema, aber in umgekehrter Richtung.

**Vierter Arbeitshinweis – zur Arbeitsweise des Horner-Schemas bei der Arbeitsrichtung aus dem Zehnersystem in andere Systeme:**

Man arbeitet in Kolumnen. Dabei beginnt man links oben mit der Anfangszahl im Zehnersystem und dividiert sie durch das „$S$“ in der Menge der natürlichen Zahlen mit Divisionsrest. Das Ergebnis dieser Division bildet den Anfang der nächsten Zeile. Die Division setzt man Zeile für Zeile so lange fort, bis man beim Ergebnis Null angelangt ist. Die Divisionsreste – von unten nach oben hintereinander als Zahl geschrieben – ergeben den Wert der umgewandelten Zahl im Zielsystem „$S$“.

Die Anwendung dieses vierten Arbeitshinweises versteht man aus den nachfolgenden Beispielen:

Dezimal → Triadisch

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $235:3=78$ Rest 1 | $1865:3=621$ Rest 2 | $7777:3=2592$ Rest 1 | $3093:3=1031$ Rest 0 | 4×1 P |
| $78:3=26$ Rest 0 | $621:3=207$ Rest 0 | $2592:3=864$ Rest 0 | $1031:3=343$ Rest 2 | |
| $26:3=8$ Rest 2 | $207:3=69$ Rest 0 | $864:3=288$ Rest 0 | $343:3=114$ Rest 1 | |
| $8:3=2$ Rest 2 | $69:3=23$ Rest 0 | $288:3=96$ Rest 0 | $114:3=38$ Rest 0 | |
| $2:3=0$ Rest 2 | $23:3=7$ Rest 2 | $96:3=32$ Rest 0 | $38:3=12$ Rest 2 | |
| | $7:3=2$ Rest 1 | $32:3=10$ Rest 2 | $12:3=4$ Rest 0 | |
| | $2:3=0$ Rest 2 | $10:3=3$ Rest 1 | $4:3=1$ Rest 1 | |
| | | $3:3=1$ Rest 0 | $1:3=0$ Rest 1 | |
| | | $1:3=0$ Rest 1 | | |

Dezimal → Hexadisch

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $235:6=39$ Rest 1 | $142:6=23$ Rest 4 | $7777:6=1296$ Rest 1 | $3093:6=515$ Rest 3 | 4×1 P |
| $39:6=6$ Rest 3 | $23:6=3$ Rest 5 | $1296:6=216$ Rest 0 | $515:6=85$ Rest 5 | |
| $6:6=1$ Rest 0 | $3:6=0$ Rest 3 | $216:6=36$ Rest 0 | $85:6=14$ Rest 1 | |
| $1:6=0$ Rest 1 | | $36:6=6$ Rest 0 | $14:6=2$ Rest 2 | |
| | | $6:6=1$ Rest 0 | $2:6=0$ Rest 2 | |
| | | $1:6=0$ Rest 1 | | |

Dezimal → Dual

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $142:2=71$ Rest 0 | $1865:2=932$ Rest 1 | $7777:2=3888$ Rest 1 | $3093:2=1546$ Rest 1 | 4×1 P |
| $71:2=35$ Rest 1 | $932:2=466$ Rest 0 | $3888:2=1944$ Rest 0 | $1546:2=773$ Rest 0 | |
| $35:2=17$ Rest 1 | $466:2=233$ Rest 0 | $1944:2=972$ Rest 0 | $773:2=386$ Rest 1 | |
| $17:2=8$ Rest 1 | $233:2=116$ Rest 1 | $972:2=486$ Rest 0 | $386:2=193$ Rest 0 | |
| $8:2=4$ Rest 0 | $116:2=58$ Rest 0 | $486:2=243$ Rest 0 | $193:2=96$ Rest 1 | |
| $4:2=2$ Rest 0 | $58:2=29$ Rest 0 | $243:2=121$ Rest 1 | $96:2=48$ Rest 0 | |
| $2:2=1$ Rest 0 | $29:2=14$ Rest 1 | $121:2=60$ Rest 1 | $48:2=24$ Rest 0 | |
| $1:2=0$ Rest 1 | $14:2=7$ Rest 0 | $60:2=30$ Rest 0 | $24:2=12$ Rest 0 | |
| | $7:2=3$ Rest 1 | $30:2=15$ Rest 0 | $12:2=6$ Rest 0 | |
| | $3:2=1$ Rest 1 | $15:2=7$ Rest 1 | $6:2=3$ Rest 0 | |
| | $1:2=0$ Rest 1 | $7:2=3$ Rest 1 | $3:2=1$ Rest 1 | |
| | | $3:2=1$ Rest 1 | $1:2=0$ Rest 1 | |
| | | $1:2=0$ Rest 1 | | |

**Arbeitstrick → zum Weg ins Hexadezimalsystem:**

Theoretisch kann man hierhin natürlich auch mit dem Horner-Schema aus dem Dezimalsystem gelangen. Schneller geht es aber, wenn man die Zahlen im Dualsystem in Vierergruppen zusammenfasst, denn das Hexadezimalsystem wurde zu diesem Zweck eingeführt.

In Tabelle 2.10.b sind im Dualsystem die Vierergruppen von hinten nach vorne bereits gebildet (und durch Leerstellen getrennt), sodass man nur noch die übliche Zuordnung der Vierergruppen in HEX-Zahlen durchzuführen braucht:

4×1 P

| *Dual* | 0000 | 0001 | 0010 | 0011 | 0100 | 0101 | 0110 | 0111 | 1000 | 1001 | 1010 | 1011 | 1100 | 1101 | 1110 | 1111 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ |
| *HEX* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* |
| $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ |
| *Dez.* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |

Damit sind alle Umwandlungen berechnet; das Ergebnis steht in Tabelle 2.10.b.

**Tabelle 2.10.b** Ergebnisse der Umwandlung von Zahlen in verschiedene Zahlensysteme

| $S=2$ Dualsystem | $S=3$ Triadisches System | $S=6$ Hexadisches System | $S=10$ Dezimalsystem | $S=16$ Hexadezimalsystem |
|---:|---:|---:|---:|---:|
| 1110 1011 | 22201 | 1031 | 235 | EB |
| 1000 1110 | 12021 | 354 | 142 | 8E |
| 111 0100 1001 | 2120002 | 12345 | 1865 | 749 |
| 1 1110 0110 0001 | 101200001 | 100001 | 7777 | 1E61 |
| 1100 0001 0101 | 11020120 | 22153 | 3093 | C15 |

## Aufgabe 2.11 Bruchrechnung in S-adischen Systemen

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| (a,b.) | je 1 min | (a,b.) | (a,b.) je 1 P |
| (c,d.) | je 2 min | (c,d.) | (c,d.) je 2 P |
| (e,f.) | je 3 min | (e,f.) | (e,f.) je 3 P |
| (g…k.) | je 1 min | (g…k.) | (g…k.) je 1 P |
| (l…o.) | je 2 min | (l…o.) | (l…o.) je 2 P |

Sei $a_{(S)} \in \mathbb{R}$ eine Zahl im S-adischen-System (d.h. mit der Basis $S \in \mathbb{N}$). Wird $(S)$ nicht angegeben (default value), so ist $(S)=(10)$. Wandeln Sie die nachfolgend genannten Zahlen mit Nachkomma-Anteil zwischen den bezeichneten Systemen um (ggf. als Bruch oder als Dezimalbruch):

(a.) $8.75_{(10)} = ?_{(2)}$ (b.) $87.648_{(10)} = ?_{(5)}$ (c.) $0.9_{(10)} = ?_{(2)}$ (d.) $12.7_{(10)} = ?_{(2)}$

(e.) $1.\overline{7}_{(10)} = ?_{(2)}$ (f.) $1.8\overline{3}_{(10)} = ?_{(2)}$ (g.) $10101010.0101_{(2)} = ?_{(10)}$

(h.) $1234.4321_{(5)} = ?_{(10)}$ (i.) $1234.4321_{(7)} = ?_{(10)}$ (j.) $22.22_{(3)} = ?_{(10)}$ (k.) $24.68_{(9)} = ?_{(10)}$

(l.) $11.\overline{01}_{(2)} = ?_{(10)}$ (m.) $1.\overline{101}_{(2)} = ?_{(10)}$ (n.) $10.0\overline{101}_{(2)} = ?_{(10)}$ (o.) $0.10\overline{1}_{(2)} = ?_{(10)}$

## ▾ Lösung zu 2.11

Auch wenn die Aufgabenstellungen einander ähneln, so sind die Lösungswege doch recht verschiedenartig. Das liegt auch daran, dass man durch geschickte Vorgehensweise Zeit sparen kann – worauf in Klausuren durchaus zu achten ist.

(a.) Es gilt $35:4=8.75$ Deshalb wandeln wir die 35 um und dividieren dann durch 4.

Umwandlung der 35 → $35_{(10)} = 100011_{(2)}$ (ist simpel, wird nicht extra vorgeführt)

Division durch 4 ist ein Verschieben des Kommas → $8.75_{(10)} = 100011_{(2)} : 100_{(2)} = 1000.11_{(2)}$ 1 P

**Arbeitshinweis:**

Diese Form der Umwandlung basiert darauf, daß man damit beginnt, die umzuwandelnde Zahl so oft mit der Zielbasis zu multiplizieren, bis nur noch eine natürliche Zahl umgewandelt werden muss. Die fortgesetzte Multiplikation mit der Zielbasis wird zuletzt im Zielsystem durch ein simples Verschieben des Kommas (als Division) wieder aufgehoben.

Anmerkung: Diese Vorgehensweise funktioniert nur dann, wenn die Zahl sowohl im Startsystem als auch im Zielsystem keine periodischen Nachkomma-Anteile aufweist. Dies ist der Fall wenn die fortgesetzte Multiplikation im Startsystem zu einer natürlichen Zahl führt.

(b.) Wir arbeiten mit dem selben Verfahren wie bei Aufgabeteil (a.)

Multiplikation im Startsystem (dezimal) → $87.648 \overset{\cdot 5}{\mapsto} 438.24 \overset{\cdot 5}{\mapsto} 2191.2 \overset{\cdot 5}{\mapsto} 10956$

Umwandlung in das Zielsystem $(S)=(5)$ → $10956_{(10)} = 322311_{(5)}$ (ohne Vorführung)

Dreimal wurde mit der 5 multipliziert, also muss wieder dreimal durch 5 dividiert werden:

$10956 : 5^3 = 87.648 \quad \Leftrightarrow \quad 322311_{(5)} : 1000_{(5)} = 322.311_{(5)}$ 1 P

(c. und d.)

**Arbeitshinweis:**

Führt die fortgesetzte Multiplikation im Startsystem nicht zu einer natürlichen Zahl, so ist der Nachkommateil im Zielsystem periodisch. Die Umwandlung gelingt dann am leichtesten mit

Hilfe der Bruchrechnung: Man formuliert die Zahl im Startsystem als Bruch und wandelt dann Zähler und Nenner als natürliche Zahlen um. Der Nachteil dabei ist, dass im Zielsystem der Zähler durch den Nenner dividiert werden muss (mit entsprechendem Arbeitsaufwand).

(c.) Umwandlung als Bruch:

$$0.9_{(10)} = \frac{9}{10}_{(10)} = \frac{1001}{1010}_{(2)}$$

Division im Zielsystem:

je 2P

$$\begin{array}{l}
-\underline{\begin{array}{r}1001\\0\end{array}} \;:1010 = 0.1\overline{1100}_{(S=2)}\\
-\underline{\begin{array}{r}10010\\1010\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}10000\\1010\end{array}}\;(*)\\
-\underline{\begin{array}{r}01100\\1010\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}00100\\0000\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}1000\\0000\end{array}}\\
\quad 10000 \rightarrow \text{Periodizität zur Stelle } (*)
\end{array}$$

(d.) Umwandlung als Bruch:

$$12.7_{(10)} = \frac{127}{10}_{(10)} = \frac{1111111}{1010}_{(2)}$$

Division im Zielsystem:

$$\begin{array}{l}
-\underline{\begin{array}{r}1111111\\1010\end{array}} \;:1010 = 1100.1\overline{0110}_{(S=2)}\\
-\underline{\begin{array}{r}1011\\1010\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}0011\\0000\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}0111\\0000\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}1110\\1010\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}1000\\0000\end{array}}\;(*)\\
-\underline{\begin{array}{r}10000\\1010\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}1100\\1010\end{array}}\\
-\underline{\begin{array}{r}0100\\0000\end{array}}\\
\quad 1000 \rightarrow \text{Periodizität zur Stelle } (*)
\end{array}$$

Anmerkung: Das hier benutzte Umwandlungsverfahren, bei dem eine Division im Zielsystem nötig wird, hat den Vorteil, auch beliebige Periodizitäten im Startsystem und im Zielsystem verarbeiten zu können. Bei den nächsten beiden Aufgabenteilen (e. und f.) arbeiten wir mit Periodizitäten im Startsystem.

(e.) Umwandlung als Bruch

je 1P $1.\overline{7}_{(10)} = \frac{16}{9}_{(10)} = \frac{10000}{1001}_{(2)}$

(f.) Umwandlung als Bruch

$1.8\overline{3}_{(10)} = \frac{165}{90}_{(10)} = \frac{10100101}{1011010}_{(2)}$

Division im Zielsystem:

$$10000 : 1001 = 1.\overline{110001}_{(S=2)}$$

$$\begin{array}{l}
-\ 10000 \\
\quad 1001 \\
\hline
-\ 1110 \quad (*) \\
\quad 1001 \\
\hline
-\ 1010 \\
\quad 1001 \\
\hline
-\ 0010 \\
\quad 0000 \\
\hline
-\ 0100 \\
\quad 0000 \\
\hline
-\ 1000 \\
\quad 0000 \\
\hline
-\ 10000 \\
\quad 1001 \\
\hline
\quad 1110 \rightarrow \text{Periodizität} \\
\qquad \text{zur Stelle } (*)
\end{array}$$

Division im Zielsystem:

$$1010\,0101 : 1011010 = 1.1\overline{10}_{(S=2)}$$

$$\begin{array}{l}
-\ 10100101 \\
\quad 1011010 \\
\hline
-\ 10010110 \\
\quad 1011010 \\
\hline
-\ 1111000 \quad (*) \\
\quad 1011010 \\
\hline
-\ 111100 \\
\quad 00000 \\
\hline
\quad 1111000 \rightarrow \text{Periodizität} \\
\qquad \text{zur Stelle } (*)
\end{array}$$

je 2P

(g.)

**Arbeitshinweis:**

Die Zahlenumwandlung aus beliebigen Systemen ins Dezimalsystem hinein gelingt, sofern im Startsystem keine Periodizitäten vorhanden sind, recht einfach mit der Formel

$$\left(a_m \ldots a_0, a_{-1} \ldots a_{-n}\right)_{(S)} = \left(\sum_{i=-n}^{+m} a_i \cdot S^i\right)_{(10)}$$ , mit $a_i$ = Stellen der Zahl im System mit der Basis $S$ .

Periodizitäten im Zielsystem (=Dezimalsystem) stören dabei nicht.

Wir wenden dies nun an:

$$10101010.0101_{(2)}$$
$$=\left(1\cdot 2^7+0\cdot 2^6+1\cdot 2^5+0\cdot 2^4+1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2^1+0\cdot 2^0+0\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4}\right)_{(10)}$$ 1 P
$$=170.3125_{(10)}$$

(h.) $1234.4321_{(5)} = \left(1\cdot 5^3+2\cdot 5^2+3\cdot 5^1+4\cdot 5^0+4\cdot 5^{-1}+3\cdot 5^{-2}+2\cdot 5^{-3}+1\cdot 5^{-4}\right)_{(10)} = 194.9376_{(10)}$ 1 P

(i.) Ist das Ergebnis im Zehnersystem periodisch, so führt der Umweg über die Bruchrechnung zum Ziel:

1 P $1234.4321_{(7)} = \left.\frac{12344321}{10^4}\right._{(7)} = \left.\frac{1120400}{7^4}\right._{(10)} = \left.\frac{1120400}{2401}\right._{(10)}$

Die einfache Bruchrechnung im Dezimalsystem sei dem Leser ohne Vorführung überlassen.

1 P (j.) $22.22_{(3)} = \left.\frac{2222}{10^2}\right._{(3)} = \left.\frac{80}{3^2}\right._{(10)} = \left.\frac{80}{9}\right._{(10)} = 8.\overline{8}_{(10)}$

1 P (k.) $24.68_{(9)} = \left.\frac{2468}{9^2}\right._{(9)} = \left.\frac{1844}{81}\right._{(10)}$

(l.)

**Arbeitshinweis:**

Existiert im nicht-dezimalen Startsystem ein periodischer Nachkommaanteil, so verwendet man den selben Trick zur Verrechnung der periodischen Nachkommaanteile mittels Subtraktion der periodischen Teile, den wir bereits in Aufgabe 2.1 kennengelernt haben. Man muss ihn allerdings im (nicht dezimalen) Startsystem anwenden.

Für unsere Aufgabe sieht dies wie folgt aus.

2 P
$$-\left|\begin{array}{l} 4_{(10)} \cdot 11.\overline{01}_{(2)} = 1101.\overline{01}_{(2)} \\ 1_{(10)} \cdot 11.\overline{01}_{(2)} = \quad 11.\overline{01}_{(2)} \end{array}\right.$$

$$3_{(10)} \cdot 11.\overline{01}_{(2)} = 1010.00_{(2)} \quad \Rightarrow \quad 11.\overline{01}_{(2)} = \frac{1010.00_{(2)}}{3_{(10)}} = \left(\frac{10}{3}\right)_{(10)} = 3.\overline{3}_{(10)}$$

(m.) Zu berechnen ist $1.\overline{101}_{(2)} = ?_{(10)}$

2 P
$$-\left|\begin{array}{l} 8_{(10)} \cdot 1.\overline{101}_{(2)} = 1101.\overline{101}_{(2)} \\ 1_{(10)} \cdot 1.\overline{101}_{(2)} = \quad 1.\overline{101}_{(2)} \end{array}\right.$$

$$7_{(10)} \cdot 1.\overline{101}_{(2)} = 1100.00_{(2)} \quad \Rightarrow \quad 1.\overline{101}_{(2)} = \frac{1100.00_{(2)}}{7_{(10)}} = \left(\frac{12}{7}\right)_{(10)} = 1.\overline{714285}_{(10)}$$

(n.) Zu berechnen ist $10.0\overline{101}_{(2)} = ?_{(10)}$

2 P
$$-\left|\begin{array}{l} 16_{(10)} \cdot 10.0\overline{101}_{(2)} = 100101.\overline{101}_{(2)} \\ 2_{(10)} \cdot 10.0\overline{101}_{(2)} = \quad 100.\overline{101}_{(2)} \end{array}\right.$$

$$14_{(10)} \cdot 10.0\overline{101}_{(2)} = 100001.000_{(2)} \quad \Rightarrow \quad 1.\overline{101}_{(2)} = \frac{100001_{(2)}}{14_{(10)}} = \left(\frac{33}{14}\right)_{(10)} = 2.3\overline{571428}_{(10)}$$

(o.) Zu berechnen ist $0.10\overline{1}_{(2)} = ?_{(10)}$

$$
\begin{array}{rl}
 & 8_{(10)} \cdot 0.10\overline{1}_{(2)} = 101.\overline{1}_{(2)} \\
- & 4_{(10)} \cdot 0.10\overline{1}_{(2)} = \phantom{1}10.\overline{1}_{(2)} \\
\hline
 & 4_{(10)} \cdot 0.10\overline{1}_{(2)} = \phantom{1}11.0_{(2)}
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad 0.10\overline{1}_{(2)} = \frac{11_{(2)}}{4_{(10)}} = \left(\frac{3}{4}\right)_{(10)} = 0.75
$$

2 P

**Anmerkung:**

Nicht immer muss eine im System $(S)$ periodische Zahl auch im Dezimalsystem periodisch sein. Periodizitäten können beim Wechsel des Systems geschaffen oder erhalten werden.

Übrigens zeigt Aufgabenteil (o.), dass im Dualsystem gilt $0.10\overline{1}_{(2)} = 0.11$. Man sollte sich davon nicht überraschen lassen, denn im Dezimalsystem gilt in analoger Weise $0.0\overline{9} = 0.1$.
(Wie man sieht, gilt: Die höchste Ziffer eines jeden Systems, periodisch wiederholt, lässt sich auch ohne Periodizität schreiben.)

## Aufgabe 2.12 Rechnen im Dualsystem

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a…f.) | je ¾ min | (a…f) | | (a…f.) je 1 P |
| | (g,h,i.) | 2 / 3 / 4 min | (g,h,i) | | (g,h.) je 2 P<br>(i.) 3 P |
| | (j.)<br>(k,l,m.) | 4 min<br>3 min | (j.)<br>(k,l,m.) | | (j.) 4 P<br>(k,l,m.) 3 P |

Alle Teile von Aufgabe 2.12 sind im Dualsystem gestellt und sollen direkt dort auch gelöst werden, also ohne Umwandlung in das Zehnersystem. Führen Sie die nachfolgenden Berechnungen aus:

(a.) $1110 + 1011$ (b.) $11011010 + 10101010$ (c.) $1010011010 + 1111011100$

(d.) $1110 - 1011$ (e.) $11011010 - 10101010$ (f.) $11010011010 - 1111011100$

(g.) $1110 \cdot 1011$ (h.) $11011010 \cdot 11110$ (i.) $11011011011 \cdot 1010011$

(j.) $0.\overline{10} \cdot 0.\overline{01}$ (k.) $0.0\overline{11} \cdot 1.1\overline{101}$ (l.) $0.\overline{10} : 0.\overline{01}$ (m.) $0.0\overline{11} : 1.1\overline{101}$

## Lösung zu 2.12

**Arbeitshinweis:**

Alle vier Grundrechenarten werden im Prinzip in weitreichender Analogie zur Arbeitsweise im Zehnersystem ausgeführt. Dazu erinnere man sich an das Rechnen mit Papier und Bleistift, wie man es in der Schule übt. Der wesentliche Unterschied zur Arbeitsweise im Zehnersytem liegt in der Verknüpfung der einzelnen Stellen. So ist z.B. dezimal 1+1=2, aber dual gilt 1+1=10. Behält man dies im Kopf, so versteht man die Musterlösungen ohne Probleme.

Vorbemerkung zum Verständnis der Musterlösungen: Überträge sind als kleine tiefgestellte Zahlen markiert.

(a.)

je 1 P

$$\begin{array}{ccccc|l} & 1 & 1 & 1 & 0 & + \\ {}_1 & 1_1 & 0_1 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

(b.)

$$\begin{array}{ccccccccc|l} & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & + \\ {}_1 & 1_1 & 0_1 & 1_1 & 0_1 & 1 & 0_1 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

(c.)

je 1 P

$$\begin{array}{ccccccccccc|l} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & + \\ {}_1 & 1_1 & 1_1 & 1 & 1 & 0_1 & 1_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

(d.)

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 1 & 1 & 0 & - \\ 1 & 0_1 & 1_1 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

(e.)

je 1 P

$$\begin{array}{cccccccc|l} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - \\ 1 & 0_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

(f.)

$$\begin{array}{ccccccccccc|l} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

(g.)

2 / 3 P

$$\begin{array}{ccccccccl} \multicolumn{9}{l}{1\ 1\ 1\ 0\ \cdot\ 1\ 0\ 1\ 1} \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \leftarrow \text{Überträge} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

(h.)

$$\begin{array}{cccccccccccccl} \multicolumn{14}{l}{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ \cdot\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0} \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 1} & & & & & & \leftarrow \text{Überträge} \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

(i.)

4 P

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccl} \multicolumn{19}{l}{1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ \cdot\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1} \\ \hline & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \\ {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 11} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & \leftarrow \text{Überträge} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

(j) bis (m.) Bei diesen Aufgabenteilen müssen zuerst die Periodizitäten aufgelöst werden, indem man Brüche bildet, die dann nach den Regeln der Bruchrechnung miteinander verarbeitet werden können.

(j.) Zu berechnen ist $0.\overline{10} \cdot 0.\overline{01}$ . Dabei lautet die Umwandlung in Brüche:

$$-\left|\begin{array}{r} 100 \cdot 0.\overline{10} = 10.\overline{10} \\ 1 \cdot 0.\overline{10} = 10.\overline{10} \end{array}\right. \qquad \text{sowie} \qquad -\left|\begin{array}{r} 100 \cdot 0.\overline{01} = 1.\overline{01} \\ 1 \cdot 0.\overline{01} = 0.\overline{01} \end{array}\right.$$

2 P

$$11 \cdot 0.\overline{10} = 10.00 \quad \Rightarrow \quad 0.\overline{10} = \frac{10}{11} \qquad\qquad 11 \cdot 0.\overline{01} = 1.00 \quad \Rightarrow \quad 0.\overline{01} = \frac{1}{11}$$

Damit formuliert sich die Multiplikationsaufgabe in der Bruchrechnung als

$$0.\overline{10} \cdot 0.\overline{01} = \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{11} = \frac{10}{11 \cdot 11} = \frac{10}{1001}$$

Die Rück-Umwandlung in einen periodischen Dezimalbruch sei aus Platzgründen nur noch bei Aufgabenteil (j.) vorgeführt. Bei (k.), (l.) und (m.) begnügen wir uns mit einem Bruch (mit Zähler und Nenner) als Ergebnis.

$$\begin{array}{l}
-\left|\begin{array}{l} 1\,0 \quad : 1\,0\,0\,1 = 0.\overline{001110} \\ 0\,0 \end{array}\right. \\
-\left|\begin{array}{l} 1\,0\,0 \quad (*) \\ 0\,0\,0 \end{array}\right. \\
-\left|\begin{array}{l} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \end{array}\right. \\
-\left|\begin{array}{r} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1 \end{array}\right. \\
\quad -\left|\begin{array}{l} 1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1 \end{array}\right. \\
\qquad -\left|\begin{array}{l} 1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,0\,1 \end{array}\right. \\
\qquad\quad -\left|\begin{array}{r} 1\,0 \\ 0\,0\,0 \end{array}\right. \\
\qquad\qquad\quad 1\,0\,0 \rightarrow \text{Periodizität zur Stelle } (*)
\end{array}$$

2 P

(k.) Zur Umwandlung in die Bruchrechnung gilt

$$-\left|\begin{array}{r} 1000 \cdot 0.0\overline{11} = 11.\overline{11} \\ 10 \cdot 0.0\overline{11} = 0.\overline{11} \end{array}\right. \qquad \text{und} \qquad -\left|\begin{array}{r} 10000 \cdot 1.1\overline{101} = 11101.\overline{101} \\ 10 \cdot 1.1\overline{101} = 11.\overline{101} \end{array}\right.$$

1+1 P

$$110 \cdot 0.0\overline{11} = 11.00 \quad \Rightarrow \quad 0.0\overline{11} = \frac{11}{110} \qquad\qquad 1110 \cdot 1.1\overline{101} = 11010.000 \quad \Rightarrow \quad 1.1\overline{101} = \frac{11010}{1110}$$

Als Bruchrechnungsaufgabe löst man dann die Multiplikation wie folgt.

1 P $$0.0\overline{11} \cdot 1.1\overline{101} = \underbrace{\frac{11}{110}}_{=\frac{1}{10}} \cdot \underbrace{\frac{11010}{1110}}_{=\frac{1101}{111}} = \frac{1\cdot 1101}{10\cdot 111} = \frac{1101}{1110}$$ Zeitiges Kürzen macht das Rechnen bequem.

2 P (l.) Die benötigten Brüche kennen wir aus Aufgabenteil (j.) → $0.\overline{10} = \frac{10}{11}$ und $0.\overline{01} = \frac{1}{11}$ .

1 P Die Ausführung der Division wird somit zu $0.\overline{10} : 0.\overline{01} = \frac{10}{11} : \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \cdot \frac{11}{1} = 10$ .

2 P (m.) Hier tauchen die Brüche aus Teil (k.) wieder auf: $0.0\overline{11} = \frac{11}{110}$ und $1.1\overline{101} = \frac{11010}{1110}$

Damit wird die Divisionsaufgabe zu

1 P $$0.0\overline{11} : 1.1\overline{101} = \frac{11}{110} : \frac{11010}{1110} = \underbrace{\frac{11}{110} \cdot \frac{1110}{11010} = \frac{1}{10} \cdot \frac{111}{1101}}_{\text{Beide Brüche kann man kürzen.}} = \frac{111}{11010}$$

## Aufgabe 2.13 B- Komplement- Darstellung

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| (a) | 5 min | (a.) | | (a) 4 P |
| (b) | 8 min | (b.) | | (b) 6 P |

Die nachfolgend genannten Dezimalzahlen wandeln Sie bitte in die binäre Darstellung des B-Komplements um, in der Sie die Addition bzw. die Subtraktion der Aufgabenstellungen ausführen. Das Ergebnis wandeln Sie dann zurück in Dezimalzahlen.

(a.) In B-Komplement-Zahlen der Länge 5 Bit: $x = 5 + 8$ und $y = 5 - 8$

(b.) $u = 83 + 125$ , $v = 83 - 125$ und $w = 125 - 83$ in B-Komplement-Zahlen deren Länge Sie geeignet festlegen.

## Lösung zu 2.13

(a.) Übertragen der Zahlen in die B-Komplement-Darstellung

Der Wertebereich bei der Länge 5 Bit geht von -15…+16. Damit werden Zahlen von 0…16 ohne besondere Vorkehrungen ins Dualsystem übertragen:

$5_{(Dez.)} = 00101_{(Dual)} = 00101_{(B-Kompl.)}$ und $8_{(Dez.)} = 01000_{(Dual)} = 01000_{(B-Kompl.)}$

Bei negativen Zahlen „N“ wird die duale „N-1“ bitweise invertiert: 1 P

$N = 8_{(Dez.)} \;\Rightarrow\; (N-1)_{(Dez.)} = 7_{(Dez.)} = 00111_{(Dual)}$ , Inversion $\Rightarrow\; -8_{(Dez.)} = 11000_{(B-Kompl.)}$

Damit sind wir in der Lage, die geforderten Berechnungen ausführen zu können:

$$x = 5_{(Dez.)} + 8_{(Dez.)} : \quad \begin{array}{ccccc|l} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & + \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & _{(B-Kompl.)} = 13_{(Dez.)} \end{array}$$

Begründung: Das Vorzeichenbit ist bei allen beteiligten Zahlen Null (also positiv). 1 P

Damit ist die Additionsaufgabe gelöst.

Die Subtraktionsaufgabe verläuft wie folgt.

$$y = 5_{(Dez.)} - 8_{(Dez.)} : \quad \begin{array}{ccccc|l} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & + \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & _{(B-Kompl.)} \end{array}$$ 1 P

Das Ergebnis von $y$ ist negativ (Vorzeichenbit = 1), also wird die B-Komplement-Zahl bitweise invertiert, wodurch der Wert $-y-1$ entsteht: $y = 11101_{(B-Kompl.)}$

Inversion $\Rightarrow\; -y-1 = 00010_{(Dual)} \overset{\text{Glg.}+1}{\Rightarrow} -y = 00011_{(Dual)} = 3_{(Dez.)} \overset{\text{Glg.}\cdot(-1)}{\Rightarrow} y = -3_{(Dez.)}$ 1 P

**Begründung:** Das Besondere der B-Komplement-Darstellung ist es ja gerade, dass die Subtraktion auf eine Addition zurückgeführt wird, denn die zu subtrahierende Zahl kann als negative Zahl dargestellt und addiert werden.

(b.) Festlegung der Länge der B-Komplement-Zahlen:

Da alle beteiligten Zahlen dem Betrage nach kleiner als $2^7$ sind, werden für deren Beträge 7 Bits benötigt. Beim Addieren kann ein Bit mehr entstehen, dazu kommt ein Vorzeichenbit. Also muss die Länge auf mindestens 9 Bits festgelegt werden. (Eine größere Länge wäre kein Problem, ist aber für den gegebenen Zahlenbereich nicht notwendig.)

→ Wir arbeiten also mit einer B-Komplement-Darstellung der Länge 9 Bit:

Die Übersetzung der positiven Zahlen lautet dann:

$83_{(Dez.)} = 001010011_{(Dual)} = 001010011_{(B-Kompl.)}$

$125_{(Dez.)} = 001111101_{(Dual)} = 001111101_{(B-Kompl.)}$ 1 P

Die negativen Zahlen erzeugen wir wieder durch Inversion von „N-1“:

$N = 83_{(Dez.)} \;\Rightarrow\; (N-1)_{(Dez.)} = 82_{(Dez.)} = 001010010_{(Dual)}$

Inversion $\Rightarrow\; -83_{(Dez.)} = 110101101_{(B-Kompl.)}$ 1 P

$N = 125_{(Dez.)} \;\Rightarrow\; (N-1)_{(Dez.)} = 124_{(Dez.)} = 001111100_{(Dual)}$

Inversion $\Rightarrow\; -125_{(Dez.)} = 110000011_{(B-Kompl.)}$ 1 P

Damit führen wir die geforderten Berechnungen wie folgt aus:

- Die erste Addition

1 P
$$u = 83 + 125: \quad \begin{array}{ccccccccc|l} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & + \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0_{(B-Kompl.)} & = 208_{(Dez.)} = u \end{array}$$

Keine Inversion, da das Ergebnis positiv ist.

- Die zweite Addition

$$v = 83 - 125: \quad \begin{array}{ccccccccc|l} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & + \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0_{(B-Kompl.)} & \end{array}$$

Inversion $\rightarrow 000101001_{(Dual)}$

Addition von $1 \rightarrow 000101010_{(Dual)} = -v$

1 P Umwandlung der Dualzahl liefert: $000101010_{(Dual)} = 42_{(Dez.)} = -v \quad \Rightarrow \quad +v = -42_{(Dez.)}$

- Die Subtraktion

1 P
$$w = 125 - 83: \quad \begin{array}{cccccccccc|l} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & + \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ \hline (1) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0_{(B-Kompl.)} & = 42_{(Dez.)} = w \end{array}$$

Bei $w$ wird der eingeklammerte Überlauf einfach ignoriert (wie immer in B-Komplement-Darstellung). Da das Vorzeichenbit von $w$ positiv ist, findet eine Inversion nicht statt.

## Aufgabe 2.14 Ungleichungen mit Fallunterscheidungen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 7 min | (a.) | | Punkte<br>(a.) 5 P |
| | (b.) | 5 min | (b.) | | (b.) 3 P |
| | (c.) | 12 min | (c.) | | (c.) 7 P |

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen:

(a.) $x^2 - 36 > x + 6$ (b.) $\left(x + \sqrt{3}\right)^4 \cdot \left(x - \sqrt{5}\right) \geq 0$ (c.) $\frac{1}{4x-5} > \frac{1}{x-2}$

## Lösung zu 2.14

(a.) Es gilt $x^2 - 36 > x + 6 \quad \Leftrightarrow \quad (x-6) \cdot (x+6) > (x+6)$

Da das Kürzen durch $(x+6)$ eine Multiplikation enthält, ist es nur nach Fallunterscheidung zulässig, die wir wie folgt einteilen:

Fall 1 → $x<-6$ Hier dreht sich beim Kürzen das Relationszeichen um.

Fall 2 → $x=-6$ Hier ist wegen $(x+6)=0$ das Kürzen verboten.

Fall 3 → $x>-6$ Hier bleibt beim Kürzen das Relationszeichen ungedreht stehen. 1 P

Das Lösen der drei Fälle sieht so aus:

<u>Fall 1</u> → $(x-6)\cdot(x+6)>(x+6) \overset{\text{Kürzen}}{\Rightarrow} (x-6)<1 \overset{+6}{\Rightarrow} x<7$ 1 P

Dies sind alle $x$ aus Fall 1, also ist der Beitrag von Fall 1 zur Lösungsmenge $\mathbb{L}_1=\left]-\infty;-6\right[$ .

<u>Fall 2</u> → Der Fall behandelt nur einen einzelnen Wert, nämlich $x=-6$. Am einfachsten ist es, wenn man diesen einen Wert in die Ungleichung einsetzt, denn dann braucht man keine Umformungen durchzuführen: 1 P

$x^2-36\overset{?}{>}x+6 \Leftrightarrow (-6)^2-36\overset{?}{>}(-6)+6 \Leftrightarrow 0\overset{?}{>}0$ Die Bedingung ist nicht erfüllt. $\Rightarrow \mathbb{L}_2=\varnothing$

<u>Fall 3</u> → $(x-6)\cdot(x+6)>(x+6) \overset{\text{Kürzen}}{\Rightarrow} (x-6)>1 \overset{+6}{\Rightarrow} x>7$

Diese $x$ liegen alle in Fall 3, also ist der Beitrag zur Lösungsmenge $\mathbb{L}_3=\left]+7;+\infty\right[$ . 1 P

Die gesamte Lösungsmenge erhalten wir durch Zusammenfassen aller Teil-Lösungsmengen: 1 P
$\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2\cup\mathbb{L}_3=\left]-\infty;-6\right[\cup\left]+7;+\infty\right[$

(b.) $\left(x+\sqrt{3}\right)^4\cdot\left(x-\sqrt{5}\right)\geq 0$

Wir untersuchen zwei Teile der Ungleichung, indem wir die Bedingung „größer“ und die Bedingung „gleich“ getrennt betrachten.

- Die Bedingung „gleich Null“ ist erfüllt, wenn einer der beiden Faktoren verschwindet, also bei $x_1=-\sqrt{3}$ und bei $x_2=+\sqrt{5}$ 1 P

- Die Bedingung „größer Null“ ist erfüllt, wenn $\left(x-\sqrt{5}\right)>0$ ist, denn der andere Faktor, der die vierte Potenz enthält (also der Faktor $\left(x+\sqrt{3}\right)^4$), kann prinzipiell nie negativ werden. Aus $\left(x-\sqrt{5}\right)>0$ folgt $x>+\sqrt{5}$ . 1 P

Die Lösungsmenge der Aufgabe erhält man wie gewohnt aus der Vereinigung der beiden Teil-Lösungsmengen: $\mathbb{L}=\left\{x\,|\,\left(x=-\sqrt{3}\right)\vee\left(x\geq+\sqrt{5}\right)\right\}$ 1 P (c.) Eine Fallunterscheidung erfordert die Multiplikation mit $(4x-5)\cdot(x-2)$. Dafür benötigt man zwei Fallgrenzen: - eine Grenze bei $(4x-5)=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{4}$,

1 P - die andere Grenze bei $(x-2)=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$

Aus Gründen der Arbeitseffizienz wollen wir aber trotz der zwei Fallgrenzen nicht drei sondern nur zwei Fälle behandeln:

<u>Fall 1</u> → Beide Klammern von $(4x-5)\cdot(x-2)$ haben das gleiche Vorzeichen. Dies ist gegeben für $\left\{x \mid \left(x<\frac{5}{4}\right)\vee(x>2)\right\}$. In diesem Fall ist das Produkt der beiden Klammern positiv und das Relationszeichen bleibt bei der besagten Multiplikation unverändert stehen.

1 P <u>Fall 2</u> → Beide Klammern haben unterschiedliche Vorzeichen. Dies ist gegeben für $\left\{x \mid \frac{5}{4}<x<2\right\}$. In diesem Fall ist das Produkt der beiden Klammern negativ und das Relationszeichen dreht sich bei der besagten Multiplikation um.

Lösen wir nun die Ungleichung für diese beiden Fälle auf:

<u>Fall 1</u> → Beide Klammern haben gleiche Vorzeichen, also $\left\{x \mid \left(x<\frac{5}{4}\right)\vee(x>2)\right\}$. Hier lösen wir die Ungleichung wie folgt auf:

$$\frac{1}{4x-5}>\frac{1}{x-2} \quad\Rightarrow\quad \frac{(4x-5)\cdot(x-2)}{4x-5}>\frac{(4x-5)\cdot(x-2)}{x-2} \quad\Rightarrow\quad x-2>4x-5 \quad\Rightarrow\quad +3>3x \quad\Rightarrow\quad x<+1$$

Da alle diese $x$-Werte in dem Bereich des Fall 1 enthalten sind, ist der Beitrag zur Lö-
2 P sungsmenge: $\mathbb{L}_1=\left]-\infty;+1\right]$

<u>Fall 2</u> → Beide Klammern haben unterschiedliche Vorzeichen, also $\left\{x \mid \frac{5}{4}<x<2\right\}$. Hier lösen wir die Ungleichung wie folgt auf:

$$\frac{1}{4x-5}>\frac{1}{x-2} \quad\Rightarrow\quad \frac{(4x-5)\cdot(x-2)}{4x-5}<\frac{(4x-5)\cdot(x-2)}{x-2} \quad\Rightarrow\quad x-2<4x-5 \quad\Rightarrow\quad +3<3x \quad\Rightarrow\quad x>+1$$

2 P Diese Bedingung ist für das gesamte Intervall von Fall 2 erfüllt, sodass dieses letztgenannte Intervall die Teil-Lösungsmenge bestimmt: $\mathbb{L}_2=\left]\frac{5}{4};2\right[$

Die Gleichheit $x=\frac{5}{4}$ und $x=2$ wird bewusst nicht betrachtet, denn dort werden die Nenner zu Null, weshalb die beiden Punkte ohnehin nicht Lösungen sein können.

1 P Die Gesamt-Lösungsmenge lautet also: $\mathbb{L}=\mathbb{L}_1\cup\mathbb{L}_2=\left]-\infty;+1\right]\cup\left]+\frac{5}{4};+2\right[$

**Arbeitshinweis:**

Wer ohne Plotter auskommen muss, kann die einzelnen Intervalle auf dem Zahlenstrahl antragen, so wie wir es bei Aufgabe 1.5 expliziert haben. Bei manchen Klausuren hingegen sind eigene Taschenrechner zugelassen, die auch die Möglichkeit bieten können, Funktionen graphisch darzustellen. Wer davon Gebrauch machen darf, findet gerade bei Ungleichungen eine besonders wertvolle Hilfe, die Rechenfehlern ideal vorbeugt: Man plottet die beiden Seiten der Ungleichung und vergleicht graphisch, welche Seite größer ist und welche kleiner.

Vorgeführt ist dies in Bild 2-14.

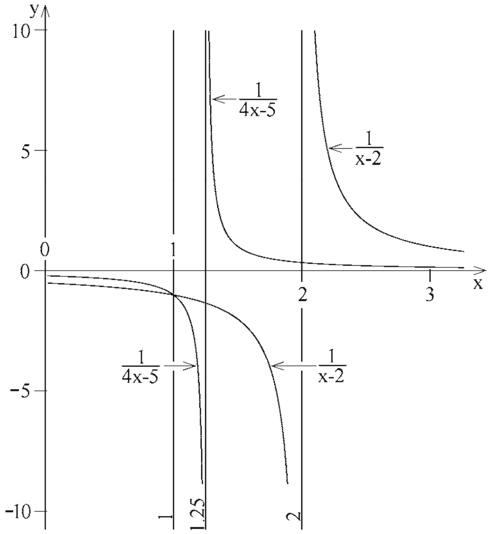



**Bild 2-14**
Graphische Kontrolle zur Lösung der Ungleichung $\frac{1}{4x-5} > \frac{1}{x-2}$.

Zeichnet man beide Funktionen auf, so braucht man bloß zu schauen, wo die Funktion $\frac{1}{4x-5}$ die größere von beiden ist. Dies ist der Fall für $x<1$ und für $\frac{5}{4}<x<2$.

Die exakten Werte der Schnittpunkte berechnet man natürlich auf analytischem Wege, aber deren Korrektheit kann graphisch mit hoher Fehlersicherheit überprüft werden, da bei der Bedienung von Plot-Programmen Tippfehler nicht sonderlich häufig passieren.

## Aufgabe 2.15 Binomialkoeffizienten

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) | je ½ min | (a,b,c.) | (a,b,c.) je 1 P |
| | (d.) | 1 min | (d.) | (d.) 1P |
| | (e.) | je 2 min | (e.) | (e.) 1 P |

Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten ohne Benutzung eines Taschenrechners:

(a.) $\binom{5}{2}$ (b.) $\binom{12}{12}$ (c.) $\binom{1/3}{0}$ (d.) $\binom{2/3}{2}$ (e.) $\binom{2/3}{5}$

## Lösung zu 2.15

**Arbeitshinweis:** Für $n,k\in\mathbb{N}$ und $k<n$ gilt die einfache Definition $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Für $k\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{R}$ gilt die erweiterte Definition $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

In beiden Fällen gilt die Zusatzdefinition $\binom{n}{0}=1$

Zur Berechnung von (a.) und (b.) genügt die einfache Definition, zur Berechnung von (d.) und (e.) hingegen wird die erweiterte benötigt:

je 1 P (a.) $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\cdot(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = \frac{20}{2} = 10$ (b.) $\binom{12}{12} = \frac{12!}{12!\cdot(12-12)!} = \frac{1}{0!} = 1$

je 1 P (c.) $\binom{1/3}{0} = 1$ (gemäß Zusatzdefinition) (d.) $\binom{2/3}{2} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{2} = -\frac{1}{9}$

1 P (e.) $\binom{2/3}{5} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-3\right)\cdot\left(\frac{2}{3}-4\right)}{5!} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)\cdot\left(\frac{-7}{3}\right)\cdot\left(\frac{-10}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{14}{3^6} = \frac{14}{729}$

## Aufgabe 2.16 Binomialkoeffizienten

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 5 min | (a.) | | (a.) 6 P |
| | (b.) | 10 min | (b.) | | (b.) 10 P |

Beweisen Sie die beiden folgenden Behauptungen:

(a.) $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\binom{n}{k}$ (b.) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ , beide für $n,k \in \mathbb{N}$ und $n > k$

## Lösung zu 2.16

Die Beweise gelingen, indem man die jeweils linke Seite der Gleichungen in die jeweils rechte überführt.

(a.) Es gilt

2 P $\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\left(n-(k+1)\right)!} = \frac{n!}{\left((k+1)\cdot k!\right)\cdot\left((n-k-1)!\right)} = \frac{n!}{k!\cdot(k+1)\cdot\frac{(n-k-1)!\cdot(n-k)}{(n-k)}}$

1 P $= \frac{n!}{k!\cdot(k+1)\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)}} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{n-k}{k+1} = \binom{n}{k}\cdot\frac{n-k}{k+1}$ q.e.d.

**Arbeitshinweis:**

Wem die abkürzende Schreibweise der Fakultät die Umformungen unübersichtlich werden lässt, dem sei empfohlen, alle Faktoren explizit auszuschreiben. Bei der nachfolgenden Lösung zu Aufgabenteil (b.) wird dies vorgeführt, auch wenn der Schreibaufwand dadurch größer wird als bei Verwendung des Rechenzeichens für die Fakultät.

(b.)

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!}$$ Definition der Binomialkoeffizienten eingesetzt

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k))}+\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1))\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k-1))}$$ Hier wurden Fakultäten als Faktoren ausgeschrieben.

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(k+1)}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)\cdot(k+1)\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k))}+\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n-k)}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1))\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k-1)\cdot(n-k))}$$ Hauptnenner gefunden

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(k+1)+1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot(n-k)}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1))\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k-1)\cdot(n-k))}$$ Mit gemeinsamem Hauptnenner wurden die Brüche addiert.

$$=\frac{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n\cdot\overbrace{((k+1)+(n-k))}^{=(n+1)}}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1))\cdot(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-k-1)\cdot(n-k))}$$ zusammengefasst

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot((n+1)-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}$$ Faktoren sind wieder als Fakultäten geschrieben und als Binomialkoeffizienten abgekürzt. q.e.d. 6 P

## Aufgabe 2.17 Der binomische Lehrsatz

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 3 min<br>2 min | (a.)<br>(b.) | | Punkte<br>(a.) 2 P | (b.) 1 P |
| | (c.) | 5 min | (c.) | | (c.) 3 P | |

Berechnen Sie mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes

(a.) den Ausdruck $(x+2y)^5$ ,

(b.) den Ausdruck $(1+a)^6$ ,

(c.) die ersten drei Summanden aus $(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$. (Das sind diejenigen Summanden mit den höchsten Potenzen von $\varepsilon$.)

Schreiben Sie die Ausdrücke so einfach wie möglich.

## Lösung zu 2.17

Es gilt:

(a.)

$$(x+2y)^5=\binom{5}{0}\cdot x^5\cdot(2y)^0+\binom{5}{1}\cdot x^4\cdot(2y)^1+\binom{5}{2}\cdot x^3\cdot(2y)^2+\binom{5}{3}\cdot x^2\cdot(2y)^3+\binom{5}{4}\cdot x^1\cdot(2y)^4+\binom{5}{5}\cdot x^0\cdot(2y)^5$$

$$=1\cdot x^5+\frac{5!}{4!\cdot 1!}x^4\cdot(2y)^1+\frac{5!}{3!\cdot 2!}x^3\cdot(2y)^2+\frac{5!}{2!\cdot 3!}x^2\cdot(2y)^3+\frac{5!}{1!\cdot 4!}x^1\cdot(2y)^4+\frac{5!}{0!\cdot 5!}\cdot(2y)^5$$

$$=1\cdot x^5+10\cdot x^4y+40\cdot x^3y^2+80x^2y^3+80xy^4+32y^5$$ 2 P

(b.) $\left(1+a\right)^6=\binom{6}{0}\cdot a^6+\binom{6}{1}\cdot a^5+\binom{6}{2}\cdot a^4+\binom{6}{3}\cdot a^3+\binom{6}{4}\cdot a^2+\binom{6}{5}\cdot a+\binom{6}{6}\cdot 1$

1 P $\Rightarrow\quad \left(1+a\right)^6=a^6+6a^5+15a^4+20a^3+15a^2+6a+1$

(c.) Die ersten drei Summanden lauten

$$\sum_{k=0}^{2}\binom{3/2}{k}\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-k\right)}\cdot\varepsilon^k=\binom{3/2}{0}\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-0\right)}\cdot\varepsilon^0+\binom{3/2}{1}\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}\cdot\varepsilon^1+\binom{3/2}{2}\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-2\right)}\cdot\varepsilon^2$$

3 P
$$=1\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-0\right)}\cdot\varepsilon^0+\frac{\frac{3}{2}}{1!}\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-1\right)}\cdot\varepsilon^1+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}{2!}\cdot 1^{\left(\frac{3}{2}-2\right)}\cdot\varepsilon^2=1+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2$$

Anmerkung: Die unter (c.) vorgestellte Entwicklung ist ein Beispiel für eine Näherungsformel, wie man sie mitunter zu Anwendungszwecken einsetzt. Im Allgemeinen kann man natürlich solche Formeln auch für andere Exponenten als $3/2$ entwickeln und ebenso die Zahl der Summanden je nach Bedarf wählen. Die Entwicklung konvergiert nur für $\varepsilon<1$, und ist um so besser, je kleiner $|\varepsilon|$ ist. Die typische Schreibweise für eine solche Näherungsformel wäre:

$$\left(1+\varepsilon\right)^{\frac{3}{2}}\approx 1+\frac{3}{2}\varepsilon+\frac{3}{8}\varepsilon^2 \quad \text{für kleine } \varepsilon\,.$$

## Aufgabe 2.18 Winkelfunktionen, Additionstheoreme

| | | | | Punkte | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 3 min | | (a) 1 P | (b) 4 P | (c) 3 P |
| | (b,c,d,e.) | je 5 min | | (d) 3 P | (e) 3 P | (f) 2 P |
| | (f,g,h,i.) | je 3 min | | (g) 2 P | (h) 2 P | (i) 3 P |

Zeiten und Punkte sind so bemessen, dass man jede Teilaufgabe für sich alleine lösen kann, ohne auf vorangehende Teilaufgaben zurückgreifen zu müssen.

Sie kennen die Werte des Sinus und des Cosinus von $0°, 30°, 45°, 60°$ und $90°$. (Diese Werte sollte man auswendig im Kopf haben. Eine Hilfe kann dabei die Eselsbrücke aus Tabelle 2.19 sein.)

Berechnen Sie daraus mit Hilfe von Additionstheoremen die Werte der nachfolgend genannten Winkelfunktionen (selbstverständlich ohne Taschenrechner):

(a.) $\sin(15°)$ (b.) $\sin(22.5°)$ (c.) $\cos(67.5°)$ (d.) $\sin(67.5°)$ (e.) $\cos(7.5°)$

(f.) $\tan(15°)$ (g.) $\cos(75°)$ (h.) $\sin(75°)$ (i.) $\tan(75°)$

## Lösung zu 2.18

**Arbeitshinweis:**

Die Werte der Winkelfunktionen bei den in der Aufgabenstellung als allgemein bekannt vorausgesetzten Winkeln merkt man sich am leichtesten nach dem in Tabelle 2.18 gezeigten Schema: Zählt man die Spalten von 0 bis 4 durch (siehe Laufindex „n“), dann sind Sinus und Cosinus in der jeweiligen Spalte gegeben durch $\sin(\text{Spalte } n) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{n}$ und $\cos(\text{Spalte } n) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-n}$ , d.h. der Radikand wird von „0“ bis „n“ heraufgezählt bzw. von „n“ bis „0“ herunter.

Für den Tangens ist keine gesonderte Merkregel nötig, da $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ gilt. Der Tangens von 90° ist nicht definiert.

**Tabelle 2.18** Eselsbrücke zum Merken der Winkelfunktionen bei einigen Winkeln.

| | $\alpha = 0°$ (n = 0) | $\alpha = 30°$ (n = 1) | $\alpha = 45°$ (n = 2) | $\alpha = 60°$ (n = 3) | $\alpha = 90°$ (n = 4) |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$ |
| $\cos(\alpha)$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1}$ | $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{0}$ |
| $\tan(\alpha)$ | $\sqrt{\frac{0}{4}}$ | $\sqrt{\frac{1}{3}}$ | $\sqrt{\frac{2}{2}}$ | $\sqrt{\frac{3}{1}}$ | "$\sqrt{\frac{4}{0}}$" |

Die einzelnen Aufgaben lösen wir, indem wir diese Werte mit verschiedenen Additionstheoremen verarbeiten. Wie aufwändig die einzelnen Aufgaben sind, hängt davon ab, wie umfangreich die bei der Lösung zur Verfügung stehende Sammlung an Additionstheoremen ist. Damit ist auch klar, dass die anzuwendende Punkteskala zur Bewertung dieser Aufgabe von der Art der zur Verfügung gestellten Formelsammlung abhängt.

(a.) Es gibt das Additionstheoremen $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

Mit $\alpha = 45°$ und $\beta = 30°$ folgt daraus: $\sin(45° - 30°) = \sin(45°)\cdot\cos(30°) - \cos(45°)\cdot\sin(30°)$

Werte einsetzen führt zu: $\sin(15°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 1 P

(b.) Wir verwenden zwei Additionstheoreme: $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \quad (*1)$

und $\cos(x)\cdot\cos(y) = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right] \quad (*2)$ 1 P

Diese setzen wir wie folgt ineinander ein:

Für $x = y = \frac{\alpha}{2}$ ergibt $(*2)$:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right] \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left[\cos(0) + \cos(\alpha)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\alpha)$$ 1 P

Für $z = \frac{\alpha}{2}$ ergibt $(*1)$: $\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad (*3) \qquad \uparrow (*4)$ 1 P

Einsetzen von $(*4)$ in $(*3)$ liefert: $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\alpha)\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(\alpha)}$

1 P Für $\alpha=45°$ erhalten wir: $\sin(22.5°)=\sin\left(\frac{45°}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(45°)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}$

(c.) Aus der Symmetrie der Winkelfunktionen wissen wir, dass gilt: $\cos(\alpha)=\sin(90-\alpha)$

3 P Für $\alpha=67.5°$ erhalten wir nach (b.): $\cos(67.5°)=\sin(90°-67.5°)=\sin(22.5°)=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}$

(d.) Aus $\sin(\alpha)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$ folgt mit $\alpha=67.5°$:

3 P $\sin(67.5°)=\sqrt{1-\cos^2(67.5°)}=\sqrt{1-\sin^2(22.5°)}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}$

(e.) In einem zu Aufgabenteil (b.) analogen Rechenweg lässt sich ein Additionstheorem finden, das in manchen Formelsammlungen auch explizit aufgeführt ist. Es lautet

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\alpha)}$

Setzt man dieses Additionstheorem mit $\alpha=\frac{x}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4}=\frac{\alpha}{2}$ in sich selbst ein, so erhält man

$\cos\left(\frac{x}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(x)}}$ Daraus ergibt sich für $x=30°$:

3 P $\cos(7.5°)=\cos\left(\frac{30°}{4}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(30°)}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}}}$

(f.) Es gilt

$$\left.\begin{array}{r}\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\ \sin^2(x)+\cos^2(x)=1\end{array}\right\}\Rightarrow\quad \tan(x)=\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$$

Aus Aufgabeteil (a.) setzen wir $\sin(15°)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ein und erhalten für $x=15°$:

2 P $\tan(15°)=\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}=\frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2}}$

(g.) Aus dem Additionstheorem $\cos(\alpha)=\sin(90-\alpha)$ folgt für $\alpha=75°$ mit Aufgabenteil (a.):

2 P $\cos(75°)=\sin(90°-75°)=\sin(15°)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(h.) Aus dem Additionstheoremen $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

folgt mit $\alpha=45°$ und $\beta=30°$: $\sin(45°+30°)=\sin(45°)\cdot\cos(30°)+\cos(45°)\cdot\sin(30°)$

2 P Werte einsetzen führt zu: $\sin(75°)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{1}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

3 P (i.) Mit $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ erhält man für $x=75°$: $\tan(75°)=\frac{\sin(75°)}{\cos(75°)}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

## Aufgabe 2.19 Polynomdivision

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 4 min | | Punkte (a.) 2 P | (b.) 2 P |

Führen Sie die nachfolgend genannten Polynomdivisionen aus:

(a.) $\left(x^4-2x^3-13x^2+14x+24\right):\left(x^2-x-2\right)$

(b.) $\left(2x^5+4x^4+4x^3+3x^2-1\right):\left(x^2+2x+1\right)$

## Lösung zu 2.19

Die Polynomdivision gehört zum elementaren Standard-Repertoire aller Studierenden in Mathe-Vorlesungen. Die Ausführung erinnert an das Dividieren von Zahlen mit Papier und Bleistift, nur dass statt der einzelnen Stellen die Potenzen von $x$ zu verarbeiten sind.

(a.) Es gilt

$$\left(x^4-2x^3-13x^2+14x+24\right):\left(x^2-x-2\right)=x^2-x-12$$
$$\frac{-\left(x^4-x^3-2x^2\right)}{-x^3-11x^2+14x}$$
$$\frac{-\left(-x^3+x^2+2x\right)}{-12x^2+12x+24}$$
$$\frac{-\left(-12x^2+12x+24\right)}{0}$$

2 P

(b.) Es gilt

$$\left(2x^5+4x^4+4x^3+3x^2-1\right):\left(x^2+2x+1\right)=2x^3+2x-1$$
$$\frac{-\left(2x^5+4x^4+2x^3\right)}{2x^3+3x^2-1}$$
$$\frac{-\left(2x^3+4x^2+2x\right)}{-x^2-2x-1}$$
$$\frac{-\left(-x^2-2x-1\right)}{0}$$

2 P

## Aufgabe 2.20 Faktorisierung von Polynomen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | je 2 min | | Punkte | |
| | (b.) | je 5 min | | (a.) 1 P | (b.) 3 P |

Faktorisieren Sie die folgenden Polynome, soweit möglich mit reellen Faktoren, falls nötig mit komplexen Faktoren:

(a.) $p_a(x) = x^3 - x^2 - 12x$

(b.) $p_b(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12$ Hinweis: $x_1 = 2i$ ist Nullstelle von $p_b$

## Lösung zu 2.20

**Arbeitshinweis:**

Zum Faktorisieren eines Polynoms sucht man dessen Nullstellen und spaltet diese anschließend durch Polynomdivision ab.
Ein Polynom $n$-ten Grades hat genau $n$ Nullstellen, von denen einige komplex sein können.
Das Faktorisieren entspricht der Umformung $\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$.

(a.) Da das Polynom $p_a(x)$ keinen Summanden mit $x^0$ enthält, wird $x$ ausgeklammert: $p_a(x) = \left(x^2 - x - 12\right) \cdot x$

Die anderen beiden Nullstellen von $p_a(x)$ findet man mit der pq-Formel:

$$x^2 - x - 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4} + 12} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3 \text{ und } x_2 = 4$$

1 P Somit lautet die Faktorisierung: $p_a(x) = x^3 - x^2 - 12x = (x - 0) \cdot (x + 3) \cdot (x - 4)$

(b.)

**Arbeitshinweis:**

Komplexe Nullstellen treten immer paarweise auf, und zwar gemeinsam mit ihrem komplex Konjugierten.

Der Hinweis aus der Aufgabenstellung enthält also die Information über zwei Nullstellen: $x_1 = 2i$ und $x_2 = -2i$ Fasst man beide Nullstellen zu einem reellen Faktor zusammen, so erhält man $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 2i) \cdot (x + 2i) = x^2 - (2i)^2 = x^2 + 4$

Polynomdivision erlaubt das Abspalten dieser beiden Nullstellen von $p_b(x)$:

2 P

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 + 2x^3 + x^2 + 8x - 12\right) : \left(x^2 + 4\right) = x^2 + 2x - 3 \\
-\left(x^4 + 4x^2\right) \\
\hline
\quad 2x^3 - 3x^2 + 8x \\
\quad -\left(2x^3 + 8x\right) \\
\hline
\qquad -3x^2 - 12 \\
\qquad -\left(-3x^2 - 12\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Damit wird der Weg zu den anderen beiden Nullstellen des Polynoms eröffnet, die wir als Nullstellen von $x^2+2x-3$ finden, und zwar wie üblich mit der pq-Formel:

$x^2+2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_{3/4}=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2 \quad \Rightarrow \quad x_3-3$ und $x_4=+1$

Somit können wir die gezeigte Polynomdivision auch umformen und schreiben:

$\left(x^4+2x^3+x^2+8x-12\right):\left((x-2i)\cdot(x+2i)\right)=(x+3)\cdot(x-1)$

$\Rightarrow \quad \left(x^4+2x^3+x^2+8x-12\right)=(x+3)\cdot(x-1)\cdot(x-2i)\cdot(x+2i)$ für die gesuchte Faktorisierung 1 P

## Aufgabe 2.21 Polynomdivision mittels Horner-Schema

| | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b) | je 2 min | | (a.) 1 P | (b.) 1 P |

Die nachfolgend genannten Polynomdivisionen dienen der Abspaltung von Linearfaktoren. Vollziehen sie diese Abspaltung bitte mit dem Horner-Schema:

(a.) $3x^5+14x^4+3x^3-24x^2-14x+8$, abzuspalten ist der Faktor $(x+4)$

(b.) $3x^7-13x^6+12x^5+2x^4-7x^3+3x^2+7x-21$, abzuspalten ist der Faktor $(x-3)$

## Lösung zu 2.21

**Arbeitshinweis:**

Wenn ein Faktor $(x-x_1)$ abgespalten werden kann, dann liegt eine Nullstelle bei $x_1$. Diese ist wie ein Stellenwert zu betrachten, mit dem das Ergebnis einer Spalte in die Summation der nächsten Spalte zu multiplizieren ist.

(a.) Abzuspalten ist der Linearfaktor $(x+4)$, also liegt die bewusste Nullstelle bei $x=-4$. Damit wird der Spalteneintrag der dritten Zeile in den Eintrag der nächsten Spalte der zweiten Zeile multipliziert:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 14 | 3 | −24 | −14 | 8 |
| ↓ | −12 | −8 | +20 | +16 | −8 |
| 3 | 2 | −5 | −4 | 2 | 0 |

1 P

Dies bedeutet: $\left(3x^5+14x^4+3x^3-24x^2-14x+8\right):(x+4)=3x^4+2x^3-5x^2-4x+2$

(b.) Der abzuspaltende Linearfaktor $(x-3)$ setzt eine Nullstelle bei $x=+3$ voraus. Dieser Wert gibt den zu multiplizierenden Faktor für das Horner-Schema an:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | −13 | +12 | +2 | −7 | +3 | +7 | −21 |
| ↓ | 9 | −12 | 0 | 6 | −3 | 0 | +21 |
| 3 | −4 | 0 | 2 | −1 | 0 | 7 | 0 |

1 P

Dies bedeutet: $\left(3x^7-13x^6+12x^5+2x^4-7x^3+3x^2+7x-21\right):(x-3)=3x^6-4x^5+2x^3-x^2+7$

Die prinzipielle Kenntnis des Horner-Schemas wird bei dieser Aufgabe als bekannt vorausgesetzt. Wem hierzu die Übung fehlt, der betrachte Aufgabe 2.10.

## Aufgabe 2.22 Nullstellen von Polynomen

| | | |
|---|---|---|
| (a..c) | je 3 min | Punkte je 2 P |

Bestimmen Sie jeweils alle vier Nullstellen der nachfolgenden Polynome:

(a.) $p_a(x)=x^4-7x^2+12$

(b.) $p_b(x)=x^4-10x^2+9$

(c.) $p_c(x)=x^4-x^2-20$

(d.) $p_d(x)=5x^4+65x^2+180$

## Lösung zu 2.22

**Arbeitshinweis:**

Obwohl hier Polynome vierten Grades gegeben sind, ist die Bestimmung der Nullstellen nach einem allgemeingültigen Verfahren mit Hilfe der pq-Formel möglich. Der Grund liegt darin, dass keine ungeraden Potenzen von $x$ auftauchen.

Der Lösungsweg beginnt in solchen Fällen mit der Substitution $z:=x^2$ und verläuft danach wie hier vorgeführt:

(a.) Substitution: $z:=x^2 \quad \Rightarrow \quad p_a(x)=z^2-7z+12$

1 P Das $z$ bestimmen wir mit der pq-Formel: $z_{1/2}:=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-\frac{48}{4}}=\frac{7}{2}\pm\frac{1}{2} \Rightarrow z_1=3$ und $z_2=4$

Nun muss resubstituiert werden.

**Stolperfalle:**

Zur Resubstitution darf man nicht vergessen, dass jede Lösung für $z$ zwei Lösungen für $x$ repräsentiert: $z:=x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{a/b}=\pm\sqrt{z}$ .

Dadurch erhalten wir vier Lösungen:

1 P $x_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}=\pm\sqrt{3}$ und $x_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

(b.) Substitution : $z:=x^2 \quad \Rightarrow \quad p_b(x)=z^2-10z+9$

1 P pq-Formel: $\Rightarrow \quad z_{1/2}:=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm 4 \Rightarrow z_1=1$ und $z_2=9$

1 P Resubstitution $\Rightarrow \quad x_{1/2}=\pm\sqrt{z_1}=\pm\sqrt{1}=\pm 1$ und $x_{3/4}=\pm\sqrt{z_2}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

(c.) Substitution : $z := x^2 \quad \Rightarrow \quad p_b(x) = z^2 - z - 20$

pq-Formel: $\Rightarrow \quad z_{1/2} := \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{80}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{9}{2} \Rightarrow z_1 = -4$ und $z_2 = 5$ 1 P

Resubstitution $\Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm\sqrt{5}$ 1 P

(d.)

**Stolperfalle:**

Zur Anwendung der pq-Formel muss das Polynom zuerst in die Normalform gebracht werden, d.h. der Faktor vor dem $z^2$ muss $1$ sein:

$$p_d(x) = 5x^4 + 65x^2 + 180 = 5 \cdot \left(x^4 + 13x^2 + 36\right)$$

Die Nullstellen suchen wir nun für den Ausdruck $x^4 + 13x^2 + 36 = z^2 + 13z + 36 = 0$

$\Rightarrow \quad z_{1/2} := -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{144}{4}} = -\frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{13}{2} \pm \frac{5}{2} \Rightarrow z_1 = -9$ und $z_2 = -4$ 1 P

Resubstitution $\Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{z_2} = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$ 1 P

## Aufgabe 2.23 Symmetrie von Funktionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a…g) | je ½ min | (a…g) | | Punkte je 1 P |

Prüfen Sie, ob die nachfolgend genannten Funktionen gerade oder ungerade Symmetrie aufweisen.

(a.) $f_a(x) = 3x^6 + 5x^2 - 4$ (b.) $f_b(x) = x^7 - \frac{4}{x}$ (c.) $f_c(x) = \sin\left(x^2\right)$

(d.) $f_d(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (e.) $f_e(x) = 5x \cdot \sin(x)$ (f.) $f_f(x) = e^{-3x}$ (g.) $f_e(x) = e^{5-3x^2}$

## Lösung zu 2.23

Im Prinzip kann man die geforderte Überprüfung der Funktionen immer auf die Definitionen der geraden ( $f(x) = f(-x)$ ) und ungeraden ( $f(x) = -f(-x)$ ) Symmetrie zurückführen. Da aber nur gerade und ungerade Symmetrie zu untersuchen sind, genügen oftmals weniger arbeitsintensive Überlegungen.

(a.) $f_a(x) = 3x^6 + 5x^2 - 4x^0$ → gerade Symmetrie.

Begründung: Polynome, deren Summanden nur geradzahlige Exponenten der freien Variablen aufweisen, haben gerade Symmetrie.

Formaler Nachweis: $f_a(-x) = 3(-x)^6 + 5(-x)^2 - 4(-x)^0 = 3x^6 + 5x^2 - 4x^0 = f_a(+x)$ → gerade 1 P

(b.) $f_b(x) = x^7 - \frac{4}{x}$ → ungerade Symmetrie, es treten nur ungerade Potenzen von $x$ auf.

Formaler Nachweis: $f_b(-x) = (-x)^7 - \frac{4}{(-x)} = -x^7 + 4 = -f_b(+x)$ → ungerade 1 P (c.) $f_c(x) = \sin\left(x^2\right)$ → gerade.

Begründung: Ist das Argument einer beliebigen Funktion gerade, so ist die gesamte Funktion ebenfalls gerade

1 P Formaler Nachweis: $f_c(-x) = \sin\left((-x)^2\right) = \sin\left(x^2\right) = f_c(+x)$ → gerade

(d.) $f_d(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ → gerade.

Begründung: Ist die Funktion gerade, so ändert ein ungerades Argument auch nichts an dieser Symmetrie.

1 P Formaler Nachweis: $f_d(-x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{1}{(-x)}\right) = 3 \cdot \cos\left(-\frac{1}{x}\right) = 3 \cdot \cos(x) = f_d(x)$

(e.) $f_e(x) = 5x \cdot \sin(x)$ → gerade.

Begründung: Das Produkt „ungerade • ungerade" führt zu einer geraden Symmetrie.

1 P Formaler Nachweis: $f_e(-x) = 5(-x) \cdot \sin(-x) = -5x \cdot \left(-\sin(x)\right) = 5x \cdot \sin(x) = f_e(x)$

(f.) $f_f(x) = e^{-3x}$ → weder gerade noch ungerade.

Begründung: Die Exponentialfuktion weist keine dieser beiden Symmetrien auf.

1 P Formaler Nachweis: $f_f(-x) = e^{-3(-x)} = e^{3x} \begin{cases} \neq f(+x) \\ \neq -f(-x) \end{cases}$

(g.) $f_e(x) = e^{5-3x^2}$ → gerade.

Begründung: Das Argument der e-Funktion ist gerade.

1 P Formaler Nachweis: $f_e(-x) = e^{5-3(-x)^2} = e^{5-3x^2} = f_e(+x)$

## Aufgabe 2.24 Bildung von Umkehrfunktionen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | je 1 min | (a.) | | Punkte (a.) 1 P |
| (b,c.) | je 1 min | (b,c.) | | (b.) 1 P (c.) 1 P |

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen der nachfolgend genannten Funktionen:

(a.) $y(x) = 3x^3 - 7$ (b.) $y(x) = e^{x^2-2}$ (c.) $y(x) = \sin(3x-5)$

## Lösung zu 2.24

**Arbeitshinweis:**

Formal tauscht man $x$ und $y$ gegeneinander aus, benennt $y$ in $y^{-1}$ um und löst dann nach dem neuen $y^{-1}$ auf.

**Stolperfalle:**
Man muss immer darauf achten, dass die Umkehrbarkeit der Funktion gegeben ist; ggf. ist der Definitionsbereich der Umkehrfunktion gegenüber dem Wertebereich der nicht umgekehrten Funktion einzuschränken.

(a.) Formales Vertauschen von $x$ und $y$ $\Rightarrow$ $x = 3\left(y^{-1}\right)^3 - 7$ (mit Umbenennung $y \mapsto y^{-1}$)

Auflösen nach $y^{-1}$ $\Rightarrow$ $3\left(y^{-1}\right)^3 = x + 7$ $\Rightarrow$ $y^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x+7}{3}}$

Die Auflösung ist ohne Einschränkung des Definitionsbereichs möglich. 1 P

(b.) Vertauschen von $x$ und $y$ : $x = e^{\left(y^{-1}\right)^2 - 2}$

Auflösen nach $y^{-1}$ $\Rightarrow$ $\ln(x) = \left(y^{-1}\right)^2 - 2$ $\Rightarrow$ $\underbrace{2 + \ln(x) = \left(y^{-1}\right)^2 \Rightarrow y^{-1}(x) = \sqrt{2 + \ln(x)}}_{\text{Arbeitsschritt Wurzelziehen}}$

Der Arbeitsschritt „Wurzelziehen" schränkt den Definitionsbereich ein, sodass die Umkehrfunktion nur definiert ist für $2 + \ln(x) \geq 0$ $\Rightarrow$ $\ln(x) \geq -2$ $\Rightarrow$ $x \geq e^{-2}$, also ist $\mathbb{D} = \left[e^{-2}; +\infty\right[$. 1 P

Derartige Einschränkungen des Definitions- und / oder Wertebereiches sind nichts Ungewöhnliches. Auch wenn man eine Normalparabel zur Wurzelfunktion umkehrt, passiert so etwas.

(c.) Vertauschen von $x$ und $y$ und nach $y^{-1}$ auflösen:

$x = \sin(3y^{-1} - 5)$ $\Rightarrow$ $\arcsin(x) = 3y^{-1} - 5$ $\Rightarrow$ $y^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(5 + \arcsin(x)\right)$

Der Wertebereich des Sinus ist $[-1;+1]$ und somit auch der Definitionsbereich des Arcussinus: $\mathbb{D}\left(y^{-1}\right) = [-1;+1]$. 1 P

## Aufgabe 2.25 Funktionsdarstellung in Polarkoordinaten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a…c.) je 8 min | (a...c.) | | Punkte je 5 P |

Skizzieren Sie die Graphen einiger Funktionen in Polarkoordinaten:

(a.) $r(\varphi) = \sin(\varphi)$ für $\varphi = 0 ... \pi$

(b.) $r(\varphi) = \tan(\varphi)$ für $\varphi = -\frac{\pi}{3} ... + \frac{\pi}{3}$

(c.) $r(\varphi) = \varphi^2$ für $\varphi = -\frac{13}{12}\pi ... + \frac{13}{12}\pi$

## Lösung zu 2.25

Das Beispiel der Darstellung in Polarkoordinaten dient als Beispiel für nicht-kartesische Darstellungen. Will man die Funktionen plotten, so fertigt man eine Wertetabelle an und trägt dann die Werte auf. Anfängern wird empfohlen, die Plots wirklich selbst von Hand anzufertigen und nicht von einem Computer anfertigen zu lassen. Erst dadurch entwickelt sich wirkliches Verständnis für das Aussehen von Plots in nicht-kartesischen Koordinaten.
Wertetabellen sieht man in den Tabellen 2.25.a,b und c; die graphischen Darstellungen der Funktionen werden in den Bildern 2-25a, b und c gezeigt.

**Tabelle 2.25.a** Wertetabelle zur Funktion $r(\varphi) = \sin(\varphi)$

| $\varphi$ | 0 | $\frac{1}{12}\pi$ | $\frac{2}{12}\pi$ | $\frac{3}{12}\pi$ | $\frac{4}{12}\pi$ | $\frac{5}{12}\pi$ | $\frac{6}{12}\pi$ | $\frac{7}{12}\pi$ | $\frac{8}{12}\pi$ | $\frac{9}{12}\pi$ | $\frac{10}{12}\pi$ | $\frac{11}{12}\pi$ | $\frac{12}{12}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(\varphi)$ | 0.000 | 0.258 | 0.500 | 0.707 | 0.866 | 0.966 | 1.000 | 0.966 | 0.866 | 0.707 | 0.500 | 0.258 | 0.000 |

5 P

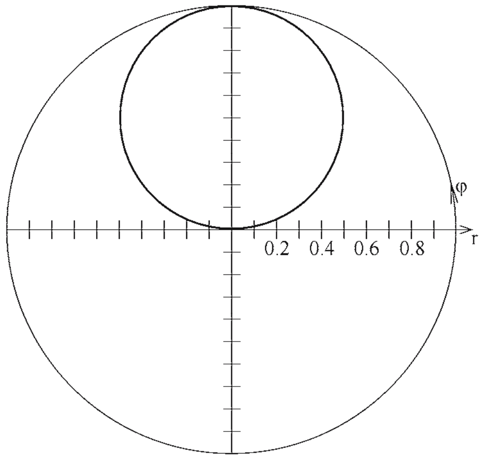



**Bild 2-25a**
Graphische Darstellung der Funktion $r(\varphi) = \sin(\varphi)$ in Polarkoordinaten.

**Tabelle 2.25.b** Wertetabelle zur Funktion $r(\varphi) = \tan(\varphi)$

| $\varphi$ | $\frac{-6}{18}\pi$ | $\frac{-5}{18}\pi$ | $\frac{-4}{18}\pi$ | $\frac{-3}{18}\pi$ | $\frac{-2}{18}\pi$ | $\frac{-1}{18}\pi$ | 0 | $\frac{+1}{18}\pi$ | $\frac{+2}{18}\pi$ | $\frac{+3}{18}\pi$ | $\frac{+4}{18}\pi$ | $\frac{+5}{18}\pi$ | $\frac{+6}{18}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(\varphi)$ | -1.732 | -1.192 | -0.839 | -0.577 | -0.364 | -0.176 | 0 | 0.176 | 0.364 | 0.577 | 0.839 | 1.192 | 1.732 |

5 P

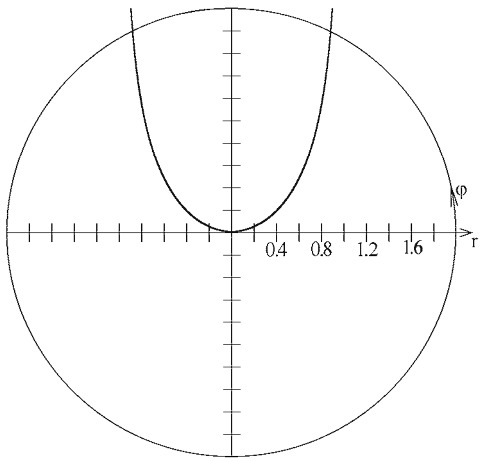



**Bild 2-25b**
Graphische Darstellung der Funktion $r(\varphi) = \tan(\varphi)$ in Polarkoordinaten.

**Tabelle 2.25.c** Wertetabelle zur Funktion $r(\varphi)=\varphi^2$

| $\varphi$ | $-\frac{13}{12}\pi$ | $-\frac{10}{12}\pi$ | $-\frac{7}{12}\pi$ | $-\frac{4}{12}\pi$ | $-\frac{1}{12}\pi$ | 0 | $\frac{1}{12}\pi$ | $\frac{4}{12}\pi$ | $\frac{7}{12}\pi$ | $\frac{10}{12}\pi$ | $\frac{13}{12}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(\varphi)$ | 11.583 | 6.854 | 3.358 | 1.097 | 0.0685 | 0 | 0.0685 | 1.097 | 3.358 | 6.854 | 11.583 |

5 P

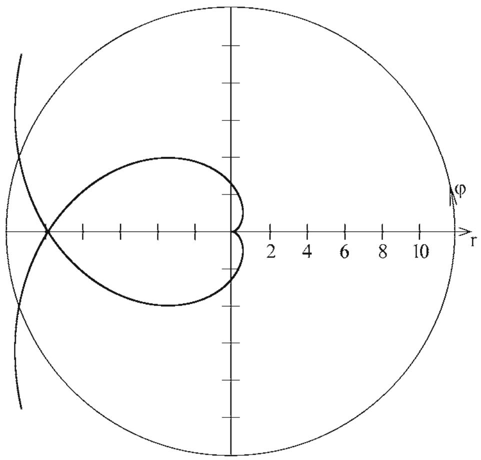



**Bild 2-25c**
Graphische Darstellung der Funktion $r(\varphi)=\varphi^2$ in Polarkoordinaten.

## Aufgabe 2.26 Geradengleichung

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 3 min | (a,b.) | (a.) 2 P (b.) 2 P |

Gegeben sind bei jeder Teilaufgabe zwei Punkte $P_1$ und $P_2$, in der Schreibweise in $xy$ – Koordinaten, also $P_i=(x_i;y_i)$. Es soll eine Gerade durch diese beiden Punkte gelegt werden. Bestimmen Sie jeweils die Geradengleichung in der Form $y=ax+b$.

(a.) $P_1=(-2;4)$ und $P_2=(3;8)$ sowie (b.) $P_1=(3;7)$ und $P_2=(5;-8)$

## Lösung zu 2.26

Steigung $a$ und Achsenabschnitt $b$ lauten $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ und $y_i=ax_i+b \;\Rightarrow\; b=y_i-ax_i$

Setzt man die $x$ – und $y$ – Werte ein, so erhält man:

(a.) $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{8-4}{3-(-2)}=\frac{4}{5}$ und $b=y_1-ax_1=4-\frac{4}{5}\cdot(-2)=\frac{28}{5}$ oder $b=y_2-ax_2=8-\frac{4}{5}\cdot 3=\frac{28}{5}$ 2 P

Die Gerade lautet also $y=\frac{4}{5}x+\frac{28}{5}$.

(b.) $a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-8-7}{5-3}=\frac{-15}{2}$ und $b=y_1-ax_1=7+\frac{15}{2}\cdot 3=\frac{59}{2}$ oder $b=y_2-ax_2=-8+\frac{15}{2}\cdot 5=\frac{59}{2}$

Die Gerade lautet also $y=-\frac{15}{2}x+\frac{59}{2}$. 2 P

## Aufgabe 2.27 Logarithmische Funktionsdarstellung

| | | Punkte |
|---|---|---|
| (a…c.) je 5 min | | (a) 3 P (b) 3 P (c) 3 P |

Gegeben seien die beiden Punkte $P_1=(2;4)$ und $P_2=(30;80)$. Auf Logarithmenpapier ergeben folgende Kurven durch diese beiden Punkte Geraden:

(a.) $y=c\cdot e^{ax}$ bei linearer x-Achse und logarithmischer y-Achse.

(b.) $y=c\cdot\ln(x)+a$ bei logarithmischer x-Achse und linearer y-Achse.

(c.) $y=c\cdot x^a$ bei doppeltlogarithmischer Darstellung (logarithmische x- und y-Achse).

Bestimmen Sie jeweils $a$ und $c$ derart, dass die Kurven durch $P_1$ und $P_2$ verlaufen.

Hinweis: Wer den Weg zur Lösung nicht sieht, verwende logarithmisches Papier und zeichne sowohl die Punkte als auch die Geraden auf.

## Lösung zu 2.27

(a.) Die Funktion lässt sich durch Logarithmieren auf eine Geradengleichung zurückführen:
$y=c\cdot e^{ax} \quad\Rightarrow\quad \ln(y)=\ln(c)+ax$ .

Diese Gerade hat die Steigung $a$ und den Achsenabschnitt $\ln(c)$.

Also ist $$a=\frac{\ln(y_2)-\ln(y_1)}{x_2-x_1}=\frac{\ln(80)-\ln(4)}{30-2}=\frac{\ln(20)}{28}\overset{TR}{\approx}0.10699$$

3 P und $$\ln(c)=\ln(y_1)-ax_1=\ln(4)-\frac{\ln(20)}{28}\cdot 2\overset{TR}{\approx}1.172313 \quad\Rightarrow\quad c\overset{TR}{\approx}3.229455$$

Anmerkung: Der Parameter $a$ ist auch bei nichtlogarthmischer Darstellung der Schnittpunkt der Kurve mit der y-Achse.

(b.) Logarithmiert man $x$, so hat die Funktion bereits die Form einer Geradengleichung, wobei die Steigung $c$ lautet und der Achsenabschnitt $a$.

Also ist $$c=\frac{y_2-y_1}{\ln(x_2)-\ln(x_1)}=\frac{80-4}{\ln(30)-\ln(2)}=\frac{76}{\ln(15)}\overset{TR}{\approx}28.06447$$

3 P Und $$a=y_1-c\cdot\ln(x_1)=4-\frac{76}{\ln(15)}\cdot\ln(2)\overset{TR}{\approx}-15.45281$$

Anmerkung: Eine Interpretation der Parameter hängt ggf. von einem Anwendungsfall ab.

(c.) Die Funktion lässt sich durch Logarithmieren auf eine Geradengleichung zurückführen:
$y=c\cdot x^a \quad\Rightarrow\quad \ln(y)=\ln(c)+a\cdot\ln(x)$ . Trägt man jetzt sowohl $x$ als auch $y$ logarithmisch auf, so lautet die Steigung $a$ und der Achsenabschnitt $\ln(c)$.

Also ist $$a=\frac{\ln(y_2)-\ln(y_1)}{\ln(x_2)-\ln(x_1)}=\frac{\ln(80)-\ln(4)}{\ln(30)-\ln(2)}=\frac{\ln(20)}{\ln(15)}\overset{TR}{\approx}1.106232$$

und $\ln(c)=\ln(y_1)-a\cdot\ln(x_1)=\ln(4)-\frac{\ln(20)}{\ln(15)}\cdot\ln(2)\overset{TR}{\approx}0.61951 \Rightarrow c\overset{TR}{\approx}1.858022$ 3 P

Hier ist $a$ interpretierbar als Exponent: $y\sim x^a$, also $y\overset{TR}{\sim}x^{1.106232}$ (Proportionalität)

## Aufgabe 2.28 Bestimmung einer Parabel

| | | |
|---|---|---|
| 7 min | | Punkte 4 P |

Eine quadratische Parabel $y=ax^2+bx+c$ verlaufe durch die drei Punkte $P_1=(1;1)$, $P_2=(-1;-9)$ und $P_3=(2;15)$. Bestimmen Sie die Koeffizienten $a$, $b$ und $c$.

## Lösung zu 2.28

Setzt man die drei Punkte in die Parabelgleichung ein, so ergeben sich drei Gleichungen mit drei Unbekannten: Gleichung (i) → $a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=1 \Rightarrow a+b+c=1$

Gleichung (ii) → $a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=-9 \Rightarrow a-b+c=-9$

Gleichung (iii) → $a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=15 \Rightarrow 4a+2b+c=15$ 2 P

Wir lösen nach $a$, $b$ und $c$ auf:

- Subtraktion (i) - (ii) $\Rightarrow (a+b+c)-(a-b+c)=1-(-9) \Rightarrow 2b=10 \Rightarrow b=5$
- Subtraktion (iii) - (ii) $\Rightarrow (4a+2b+c)-(a-b+c)=15-(-9)\Rightarrow 3a+3b=24\Rightarrow a=8-b=8-5=3$
- $a$ und $b$ in (i) $\Rightarrow a+b+c=1 \Rightarrow c=1-a-b=1-3-5=-7$ 2 P

Die quadratische Parabel heißt also $y=ax^2+bx+c=3x^2+5x-7$ .

Anmerkung: Ein Polynom vom Grade $n$ wird durch $n+1$ Punkte eindeutig festgelegt. Zur Bestimmung der $n+1$ Parameter bekommt man dann ein Gleichungssystem aus $n+1$ Gleichungen.

## Aufgabe 2.29 Textbeispiel – Exponentialfunktion

| | | | |
|---|---|---|---|
| 10 min | | Punkte 3P + 1P + 1P | = 5 P |

Im Jahre 1900 lebten ca. 1 Milliarde Menschen, im Jahre 2000 ca. 6 Milliarden auf der Erde. Würde man exponentielles Wachstum der Bevölkerungszahl voraussetzen, so kann man fragen:

(a.) Wieviele Menschen werden im Jahr 2020 auf dieser Erde leben?

(b.) In welchem Jahr werden ca. 20 Milliarden Menschen auf dieser Erde leben?

## Lösung zu 2.29

Laut Aufgabenstellung ist an die Daten eine Exponentialfunktion anzupassen (siehe exponentielles Wachstum), also $B(t) = B_0 \cdot e^{\alpha t} \qquad (*)$ ,

1 P wo $t =$ Zeit; $B =$ Bevölkerungszahl; $B_0 =$ Bevölkerungszahl zu einem Referenzzeitpunkt $t_0$ .

Bevor wir die beiden Fragen der Aufgabenstellung beantworten können, müssen wir die beiden Parameter $\alpha$ und $B_0$ bestimmen, und zwar wie folgt:

Den Referenzzeitpunkt $t_0$ können wir willkürlich festlegen, was den Verlauf der Funktion

1 P $B(t)$ nicht beeinflusst, sondern nur den Wert des Parameters $B_0$ . Legen wir praktischerweise $t_0 = 1900$ Jahre fest (Einheit „Jahre“ nicht vergessen), so ist $B_0 = 1.0$ MM (Einheit MM = Milliarde Menschen).

Damit ist einer der beiden Parameter bestimmt (nämlich $B_0$ ). Der andere (noch zu bestimmende) Parameter (nämlich $\alpha$ ) folgt durch Auswerten des anderen in der Aufgabenstellung gegebenen Punktes:

Zur Zeit $t = 100\,\text{Jahre}$ (also im Jahre $t_0 + 100\,\text{Jahre} = 2000\,\text{Jahre}$ ) ist $B(t) = 6.0\,\text{MM}$

1 P $$\Rightarrow e^{\alpha t} = \frac{B(t)}{B_0} \;\Rightarrow\; \alpha t = \ln\left(\frac{B(t)}{B_0}\right) \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{B(t)}{B_0}\right) = \frac{1}{100\,\text{Jahre}} \cdot \ln\left(\frac{6.0\,\text{MM}}{1.0\,\text{MM}}\right) \overset{TR}{\approx} 0.0179176\,\text{Jahre}^{-1}$$

Damit kennen wir alle Parameter der Funktion $(*)$ und können nun die Fragen der Aufgabenstellung beantworten:

(a.) Das Jahr 2020 ist $t_0 + 120$ Jahre . Zu diesem Zeitpunkt wären dann

1 P $$B(120\,\text{Jahre}) = 1.0\,\text{MM} \cdot e^{\frac{\ln(6)}{100\,\text{Jahre}} \cdot 120\,\text{Jahre}} \overset{TR}{\approx} 8.586\,\text{MM}$$ (Zahl der Menschen im Jahre 2020)

**Stolperfalle:**

Man muss die Einheiten korrekt verarbeiten (was Anfänger mitunter vergessen). Dabei ist unter anderem auch darauf zu achten, dass die Logarithmusfunktion ebenso wie die Exponentialfunktion keine Einheiten im Argument haben können. (Gleiches gilt bei anderen Aufgaben auch für die Winkelfunktionen, Hyperbelfunktionen und Areafunktionen.) Wie man in der Musterlösung sieht, kürzen sich die Einheiten in den Argumenten dieser Funktionen immer weg.

(b.) Hierfür muss man die Gleichung auflösen nach $t$ :

1 P $$B(t) = B_0 \cdot e^{\alpha t} \;\Rightarrow\; e^{\alpha t} = \frac{B(t)}{B_0} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{\alpha} \ln\left(\frac{B(t)}{B_0}\right) = \frac{100\,\text{Jahre}}{\ln(6)} \cdot \ln\left(\frac{40.0\,\text{MM}}{1.0\,\text{MM}}\right) \overset{TR}{\approx} 167.2\,\text{Jahre}$$

$t_0 + t = 1900\,\text{n.Chr.} + \text{ Jahre} = 2067\,\text{n.Chr.}$ (Dann leben 20 Mrd. Menschen auf der Erde.)

# Aufgabe 2.30 Textbeispiel – Cosinus Hyperbolicus

| | | |
|---|---|---|
| 10 min | | Punkte 6 P |

Hochspannungsleitungen zwischen zwei Masten folgen der Kettenlinie, die mit Hilfe des Cosinus Hyperbolicus beschrieben wird. Betrachten Sie die Anordnung in Bild 2-30 und beschreiben Sie den Verlauf des Kabels durch eine mathematische Funktion. Die Lage des zu verwendenden $xy$ – Koordinatensystems ist in Bild 2-30 eingezeichnet.

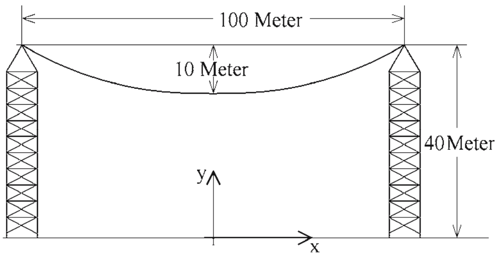



**Bild 2-30**
Darstellung eines Kabels zwischen zwei Masten einer Überlandleitung. Der Verlauf des Kabels soll mit Hilfe eines Cosinus Hyperbolicus beschrieben werden.

## Lösung zu 2.30

Um in dem zu verwendenden $xy$ – Koordinatensystem den Cosinus Hyperbolicus an die in der Aufgabenstellung vorgegebenen Abmessungen anzupassen, müssen $x$ – und $y$ – Achse entsprechend skaliert werden. Dies geschieht durch die Wahl eines geeigneten Ansatzes, zum Beispiel gemäß $y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{b}\right)$. 2 P

Die Funktion enthält zwei Parameter $a$ und $b$, die aus folgenden beiden in Bild 2-30 gegebenen Punkten bestimmt werden müssen: $y(0) = 30m$ und $y(50m) = 40m$ 1 P

Dies führt zu zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, die wir durch Einsetzen der beiden Punkte in die Funktion aufstellen und lösen können. Auf diese Weise erhalten wir $a$ und $b$:

Der erste Punkt lautet: $y(0) = a \cdot \cosh\left(\frac{0m}{b}\right) = a \cdot \underbrace{\cosh(0)}_{\cosh(0)=1} = a = 30m$ 1 P

Der zweite Punkt lautet: $y(50m) = a \cdot \cosh\left(\frac{50m}{b}\right) = 40m \quad \Rightarrow \quad \cosh\left(\frac{50m}{b}\right) = \frac{40m}{a} = \frac{40m}{30m} = \frac{4}{3}$ 1 P

$$\Rightarrow \quad \frac{50m}{b} = \operatorname{arcosh}\left(\frac{4}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad b = \frac{50m}{\operatorname{arcosh}\left(\frac{4}{3}\right)} \overset{TR}{\approx} 62.864m$$

Die gesuchte Funktion lautet also $y(x) \overset{TR}{\approx} 30m \cdot \cosh\left(\frac{x}{62.864m}\right)$ 1 P

## Aufgabe 2.31 Goniometrische Gleichungen

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 12 min | | (a) 7 P (b) 7 P |
| | (c.)<br>(d.) | 2 min<br>8 min | | (c) 1 P (d) 4 P |

Goniometrische Gleichungen sind Gleichungen, bei denen die zu bestimmende Unbekannte im Argument von Winkelfunktionen auftritt. Geben Sie bitte für folgende goniometrische Gleichungen die Lösungsmengen an:

(a.) $2 \cdot \sin(x) + \cos(x) = 1.5$ (b.) $\sin(2x) = \cos(x)$

(c.) $\tan\big(\arcsin(x)\big) = 1$ (d.) $\tan(x) = \cos(x)$

## Lösung zu 2.31

**Arbeitshinweis:**

Bei goniometrischen Gleichungen überträgt sich oftmals die Periodizität der Winkelfunktionen auf die Lösungsmenge, d.h. es gibt zwar pro Periode eine endliche Anzahl von Lösungen, aber in $\mathbb{R}$ unendlich viele Perioden und somit unendlich viele Lösungen.

Bei der Findung der Lösung genügt es daher gegebenenfalls, die Gleichung für eine Periode zu lösen und die Lösung auf die alle weiteren Perioden zu übertragen.

(a.) In den Mathe-Vorlesungen vieler Hochschulen existiert das Thema „Superposition gleichfrequenter Schwingungen“. Dies kann man benutzen, um den Sinusausdruck und den Cosinusausdruck der vorliegenden Aufgabe zusammenzufassen, was z.B. wie folgt geschehen kann:

Zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \cos(\omega x + \varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \cos(\omega x + \varphi_2)$ lassen sich addieren gemäß

$$y_0 = A_0 \cdot \cos(\omega x + \varphi_0) \begin{cases} \text{mit} \quad A_0 = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2} \\ \text{und} \quad \tan(\varphi_0) = \dfrac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)} \end{cases}$$

2 P Schreibt man den Sinusausdruck als $\sin(x) = \cos(x - 90°)$, so ist

$y_1 = 2 \cdot \sin(x) = A_1 \cdot \cos(\omega x + \varphi_1)$ mit $A_1 = 2$, $\omega = 1$, $\varphi_1 = -90°$ sowie

$y_2 = \cos(x) = A_2 \cdot \cos(\omega x + \varphi_2)$ mit $A_2 = 1$, $\omega = 1$, $\varphi_2 = 0°$ .

Die Summe aus beiden Ausdrücken erhält man durch die Superposition

1 P $A_0 = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + A_2^2} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos(90°) + 1^2} = \sqrt{5}$

1 P $\tan(\varphi_0) = \dfrac{A_1 \cdot \sin(\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\varphi_2)}{A_1 \cdot \cos(\varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\varphi_2)} = \dfrac{2 \cdot \sin(-90°) + 1 \cdot \sin(0°)}{2 \cdot \cos(-90°) + 1 \cdot \cos(0°)} = -2 \Rightarrow \varphi_0 = \arctan(-2) \overset{TR}{\approx} -63.43495°$ ,

sodass sich die Gleichung der Aufgabenstellung formulieren lässt als

$$2\cdot\sin(x)+\cos(x)=\underbrace{\sqrt{5}\cdot\cos\left(x+\arctan(-2)\right)}_{\text{laut Superosition}}=\underbrace{1.5}_{\text{nach Aufgabenstellung}}.$$

Dies kann man nun leicht auflösen, nämlich wie folgt:

$$\Rightarrow\quad \cos\left(x+\arctan(-2)\right)=\frac{1.5}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{9}{20}}\quad\Rightarrow\quad x+\underbrace{\arctan(-2)}_{\overset{TR}{\approx}-63.43495^\circ}=\underbrace{\pm\arccos\left(\sqrt{\frac{9}{20}}\right)}_{\overset{TR}{\approx}\pm 47.86959^\circ+n\cdot 2\pi}$$ 2 P

$$\Rightarrow\quad x=-\arctan(-2)\pm\arccos\left(\sqrt{\frac{9}{20}}\right)\overset{TR}{\approx}63.43495^\circ\pm 47.86959^\circ+n\cdot 2\pi=\begin{cases}+111.3045^\circ+n\cdot 2\pi\\+15.5653^\circ+n\cdot 2\pi\end{cases}$$

Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L}=\left\{x\,|\left(x\overset{TR}{\approx}15.5653^\circ+n\cdot 2\pi\right)\vee\left(x\overset{TR}{\approx}+111.3045^\circ+n\cdot 2\pi\right)\right\}$ mit $n\in\mathbb{N}$. 1 P

Anmerkung: Die Addition der $n\cdot 2\pi$ trägt der Periodizität der Lösungen Rechnung.

Allen, die einen Taschenrechner mit Plot-Fähigkeit zur Verfügung haben, wird besonders bei goniometrischen Gleichungen eine graphische Überprüfung des Ergebnisses empfohlen, wie man dies z.B. in Bild 2-31a sieht. Es genügt der Plot einer Periode.

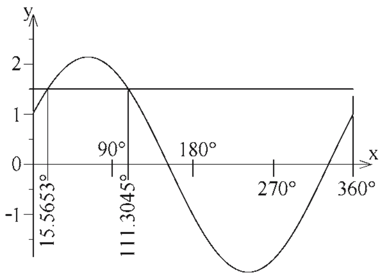



**Bild 2-31a**
Graphische Überprüfung der Lösungen der goniometrischen Gleichung $2\cdot\sin(x)+\cos(x)=1.5$

Man plotte die linke Seite des Gleichheitszeichens und die rechte Seite des Gleichheitszeichens. Überall dort, wo die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen, hat die goniometrische Gleichung ihre Lösungen.

(b.) Da die Winkelfunktionen Argumente mit unterschiedlichen Frequenzen tragen, bringen wir sie zuerst mit einem Additionstheorem auf gleiche Frequenz.
Es gilt $\sin(2x)=2\cdot\sin(x)\cos(x)$

Damit wird die Aufgabenstellung umgeformt in $2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)=\cos(x)$ 1 P

Wir möchten die Gleichung gerne durch $\cos(x)$ dividieren, was nur erlaubt ist, wenn $\cos(x)\neq 0$ ist. Aus diesem Grunde führen wir eine Fallunterscheidung ein:

Fall 1 → $\cos(x)=0$ und Fall 2 → $\cos(x)\neq 0$ 2 P

Wir beginnen mit Fall 1: Für $\cos(x)=0$ lautet die Gleichung $0=0$, das ist immer erfüllt.
Folglich sind alle $x$ die im Fall 1 behandelt werden (dies sind alle Nullstellen des Cosinus) auch Lösungen der Gleichung $\Rightarrow\quad x_1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$ 1 P

Der Anteil von Fall 1 an der Lösungsmenge lautet also $\mathbb{L}_1=\left\{x\,|\left(x=\left(n+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi\right)\right\}$ mit $n\in\mathbb{N}$.

Es folgt Fall 2: Wegen $\cos(x) \neq 0$ können wir unsere goniometrische Gleichung durch $\cos(x)$ kürzen und erhalten

2 P $2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \sin(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{2,a} = 30° + 2k \cdot \pi \\ x_{2,b} = 150° + 2k \cdot \pi \end{cases}$

Der Anteil von Fall 2 an der Lösungsmenge ist somit
$\mathbb{L}_2 = \left\{ x \mid (x = 30° + k \cdot 2\pi) \vee (x = +150° + k \cdot 2\pi) \right\}$ mit $k \in \mathbb{N}$ .

Die gesamte Lösungsmenge erhalten wir durch Vereinigung der beiden Teil-Lösungsmengen:
$\mathbb{L}_{\text{ges.}} = \left\{ x \mid \left( x = \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \pi \right) \vee (x = 30° + k \cdot 2\pi) \vee (x = +150° + k \cdot 2\pi) \right\}$ mit $n, k \in \mathbb{N}$ .

1 P Die graphische Kontrolle findet man in Bild 2-31b.

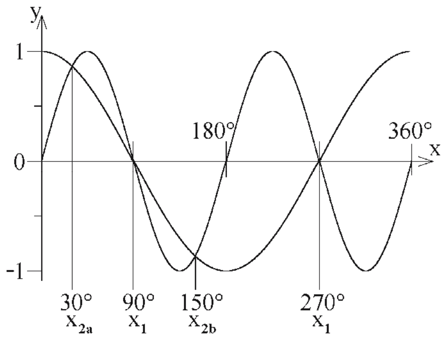



**Bild 2-31b**
Graphische Überprüfung der Lösungen der goniometrischen Gleichung $\sin(2x) = \cos(x)$

Man plotte die linke Seite des Gleichheitszeichens und die rechte Seite des Gleichheitszeichens. Überall dort, wo die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen, hat die goniometrische Gleichung ihre Lösungen.

(c.) Hier sind die Umformungen relativ einfach:

$\tan(\arcsin(x)) = 1 \quad \Rightarrow \quad \arcsin(x) = \arctan(1) = 45° \quad \Rightarrow \quad x = \sin(45°) = \sqrt{\frac{1}{2}}$

1 P Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L} = \left\{ \sqrt{\frac{1}{2}} \right\}$

Die graphische Kontrolle zeigt Bild 2-31c. An diesem Beispiel sieht man, dass der Plot der beiden Seiten des Gleichheitszeichens nicht immer „stur" von $0°$ bis $360°$ anzufertigen ist.

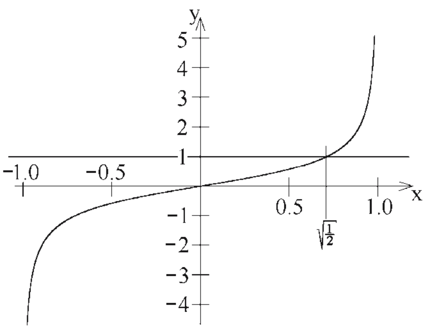



**Bild 2-31c**
Graphische Überprüfung der Lösungen der gomiometrischen Gleichung $\tan(\arcsin(x)) = 1$

Man plotte die linke Seite des Gleichheitszeichens und die rechte Seite des Gleichheitszeichens. Überall dort, wo die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen, hat die goniometrische Gleichung ihre Lösungen.

(d.) Wir formen um:

$$\tan(x)=\cos(x) \;\Rightarrow\; \underbrace{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\cos(x) \;\Rightarrow\; \sin(x)=\cos^2(x)}_{\substack{\text{hier sind die Nullstellen des Cosinus}\\ \text{alsLösungen ausgeschlossen (Nenner}\neq 0)}} \;\underbrace{\Rightarrow\; \sin(x)=1-\sin^2(x)}_{\text{nach Additionstheorem }\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}$$ 1 P

$$\Rightarrow \quad \sin^2(x)+\sin(x)-1=0$$

Wir sehen vor uns eine quadratische Gleichung, also wird substituiert $z:=\sin(x)$.

$\Rightarrow \quad z^2+z-1=0$ Mit der pq-Formel folgt $z_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{2}+1}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{5}{4}}$

Da der Wert von $\sin(x)$ immer zwischen $-1$ und $+1$ liegen muss, ist nur die positive Wurzel möglich $\Rightarrow \quad z=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\overset{TR}{\approx}0.618034$ 1 P

Resubstitution liefert

$$\sin(x)=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\overset{TR}{\approx}0.618034 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=\arcsin\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)+n\cdot 2\pi \overset{TR}{\approx} 38.1727°+n\cdot 2\pi \\ x_2=180°-\arcsin\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}\right)+n\cdot 2\pi \overset{TR}{\approx} 141.8273°+n\cdot 2\pi \end{cases}$$

Die Lösungsmenge lautet $\mathbb{L}=\left\{x\,|\left(x\overset{TR}{\approx}38.1727°+n\cdot 2\pi\right)\vee\left(x\overset{TR}{\approx}+141.8273°+n\cdot 2\pi\right)\right\}$ mit $n\in\mathbb{N}$. 2 P

Die graphische Kontrolle findet man in Bild 2-31d.

**Stolperfalle:**

Beim Auflösen einer Winkelfunktion (hier im Bsp. eines Sinus) zur Bestimmung des Arguments genügt es nicht, die zugehörige Arcusfunktion hinzuschreiben, denn diese hat einen begrenzten Definitionsbereich und reproduziert daher nicht eine gesamte Periode des Arguments. Am sichersten erhält man die volle Menge aller Lösungen, indem man sich die Winkelfunktion vorstellt und prüft, welche Argumente zum gesuchten Wert der Winkelfunktion führen.

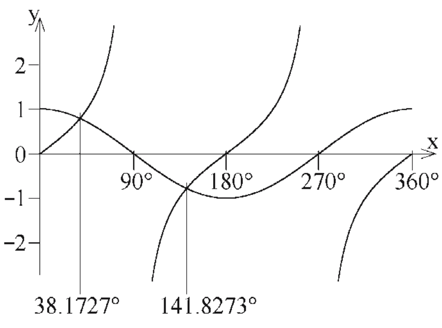



**Bild 2-31d**
Graphische Überprüfung der Lösungen der goniometrischen Gleichung $\tan(x)=\cos(x)$

Man plotte die linke Seite des Gleichheitszeichens und die rechte Seite des Gleichheitszeichens. Überall dort, wo die Schnittpunkte der beiden Kurven liegen, hat die goniometrische Gleichung ihre Lösungen.

## Aufgabe 2.32 Vollständige Induktion

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b,c.) | 10 min<br>8 min | (a.)<br>(b,c.) | | Punkte<br>(a.) 5 P (b.) je 4 P |
| | (d.) | 15 min | (d.) | | (d.) 8 P |

Beweisen Sie die nachfolgenden Behauptungen durch vollständige Induktion:

(a.) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$ (b.) $\sum_{i=1}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

(c.) Die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner als $10n$, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar sind, beträgt $20n^2$.

(d.) $2^n > n^2$ gilt nicht für alle natürlichen Zahlen $n$, sondern nur für fast alle, d.h. für alle bis auf endlich viele. Prüfen Sie, für welche $n$ die Aussage gilt und beweisen Sie die Aussage für ebendiese $n$ unter Zuhilfenahme der Methode der vollständigen Induktion.

## Lösung zu 2.32

1 P (a.) Der Anker ist möglich bereits für $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1) = 1$, stimmt.

Der Schluss von $n$ auf $n+1$ verläuft wie folgt.
Das Zurückführen der Summe für $n+1$ auf die Summe für $n$ lautet

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \left( \sum_{i=1}^{n} i^2 \right) + \underbrace{(n+1)^2}_{\text{Dies ist der } n+1\text{te Summand}} = \underbrace{\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}_{\text{Beim Schluß von } n \text{ auf } n+1 \text{ wird das } n\text{-te Glied als bekannt vorausgesetzt.}} + (n+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot \left(2n^2+3n+1\right) + \left(n^2+2n+1\right)$$

2 P

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(2n^3+3n^2+n\right) + \frac{1}{6} \cdot \left(6n^2+12n+6\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(2n^3+9n^2+13n+6\right)$$

Setzt man hingegen direkt $n+1$ in die Formel ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot ((n+1)+1) \cdot (2(n+1)+1) = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (2n+3) = \frac{1}{6}(n+1) \cdot \left(2n^2+7n+6\right)$$

2 P

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(2n^3+7n^2+6n+2n^2+7n+6\right) = \frac{1}{6} \cdot \left(2n^3+9n^2+13n+6\right)$$

Da man mit der Formel für $n+1$ zum selben Ergebnis gelangt, wie durch Benutzung der Formel für $n$, gilt der Schluss von $n$ auf $n+1$ als bewiesen.
Da auch der Anker klar ist, ist der gesamte Beweis mit vollständiger Induktion erbracht.

(b.) Anker für $n=0$: $\sum\limits_{i=1}^{0} x^i = \frac{1-x^{0+1}}{1-x} = \frac{1-x}{1-x} = 1$ 1 P

Schluss von $n$ auf $n+1$:
Führt man die Summe für $n+1$ auf die Summe für $n$ zurück, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^i = \sum_{i=1}^{n} x^i + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{1-x}{1-x} \cdot x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + \frac{x^{n+1}-x^{n+2}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$ 2 P

Setzt man hingegen direkt in die Formel für $n+1$ ein, so erhält man

$$\sum_{i=1}^{n+1} x^i = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$ 1 P

Wieder führen beide Rechenwege zum selben Ergebnis, daher ist der Induktionsschluss von $n$ auf $n+1$ erbracht und somit auch der Beweis der vollständigen Induktion.

(c.) Anker für $n=1$:
Die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner als $10 \cdot 1$, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar sind, lautet $1+3+7+9=20=20\cdot 1^2$. Damit ist der Anker für $n=1$ gesichert. 2 P

Induktionsschluss von $n$ auf $n+1$:
Die Summe aller natürlichen Zahlen kleiner als $10\cdot(n+1)$, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar sind, lässt sich auf deren Summe kleiner als $10 \cdot n$ zurückführen, und zwar wie folgt.

$$\sum_{\text{bis } (n+1)} \ldots = \sum_{\text{bis } n} \ldots \underbrace{+(10n+1)+(10n+3)+(10n+7)+(10n+9)}_{\text{Diese Zahlen kommen durch } (n+1) \text{ hinzu}} = \underbrace{\sum_{\text{bis } n} \ldots}_{=20n^2} + (40n+20) = 20n^2 + 40n + 20$$

$$= 20 \cdot \left(n^2 + 2n + 1\right) = 20 \cdot (n+1)^2$$ 2 P

Damit ist die Summe für $n+1$ auf die Summe für $n$ zurückgeführt, somit ist der Induktionsschluss bewiesen, also auch die gesamte vollständige Induktion.

(d.) Da die Exponentialfunktion stärker steigt als die Potenz, ist klar, dass die Behauptung für große $n$ zutreffen muss. Die in der Aufgabenstellung geforderte Prüfung, für welche $n$ die Aussage gilt, muss sich also auf die kleinen $n$ beziehen. Für diese prüfen wir die Behauptung (wie gefordert) einzeln nach:

- für $n=1 \Rightarrow 2^n = 2 > n^2 = 1$
- für $n=2 \Rightarrow 2^n = 4 \cancel{>} n^2 = 4$
- für $n=3 \Rightarrow 2^n = 8 \cancel{>} n^2 = 9$
- für $n=4 \Rightarrow 2^n = 16 \cancel{>} n^2 = 16$
- für $n=5 \Rightarrow 2^n = 32 > n^2 = 25$

Also liegt der Verdacht nahe, dass die Behauptung für $n \geq 5$ gelten sollte. Dass es sich dabei nicht nur um einen Verdacht handelt, können wir mit vollständiger Induktion beweisen: 3 P

Die Zeile für $n=5$ ist als Anker der Induktion zu betrachten.

Es folgt der Induktionsschluss von $n$ auf $n+1$:
Wir setzen $n+1$ in die Behauptung ein und formen diese mit Hilfe der Aussage für $n$ derart um, dass wir die Richtigkeit der Aussage für $n+1$ sehen. (Anmerkung: Um dem Leser die Übersicht zu erhalten, steht das Zeichen „$\overset{?}{>}$“ für eine noch zu zeigende „Größer-Relation“.)

Die Behauptung für $n+1$, die gezeigt werden soll, lautet $2^{n+1} \overset{?}{>} (n+1)^2$

Die Aussage für $n$, multipliziert mit $2$, lautet $\qquad 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n^2 \qquad (G\lg.*)$

Wenn wir also zeigen können, dass $2n^2 \overset{?}{>} (n+1)^2$ ist, dann gilt wegen $(G\lg.*)$ erst recht $2^{n+1} \overset{?}{>} (n+1)^2$, was den geforderten Beweis erbringt.

Und tatsächlich lässt sich die Aussage $2n^2 \overset{?}{>} (n+1)^2$ wie folgt beweisen:

$2n^2 \overset{?}{>} (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overbrace{\quad\Leftrightarrow\quad}^{\cdot\frac{1}{n}} 2n \overset{?}{>} n + 2 + \frac{1}{n} \overbrace{\quad\Leftrightarrow\quad}^{-n-2} n - 2 \overset{?}{>} \frac{1}{n}$, was man für $n \geq 3$ sofort sieht.

5 P Damit ist der Induktionsschluss bewiesen für $n \geq 3$. Da die Verankerung ohnehin erst bei $n = 5$ beginnt, gilt der Induktionsbeweis für alle $n \geq 5$ als erbracht.

Folgerung: Die Behauptung gilt und wurde bewiesen für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{2;3;4\}$.

# 3 Aussagelogik

## Vorbemerkung zur Nomenklatur

Mit Großbuchstaben $A$, $B$, $C$, … seien Aussagen gekennzeichnet. Diese können wahr sein (Symbol „1“) oder falsch (Symbol „0“).

Da in der Literatur sehr unterschiedliche Symbole für die Operationssymbole zur Verknüpfung von Aussagen üblich sind, sei in Tabelle 3.1 die hier verwendete Bezeichnungsweise einiger wichtiger Operationssymbole angegeben.

**Tabelle 3.1** Aufzählung einiger wichtiger Operationssymbole der Aussagelogik

| Symbol | möglicher Name | Wahrheitstafel | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $A$ | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | | $B$ | 0 | 1 | 0 | 1 |
| $\wedge$ | Konjunktion („und“) | $A \wedge B$ | 0 | 0 | 0 | 1 |
| $\vee$ | Disjunktion („oder“) | $A \vee B$ | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $\neg$ ; $\overline{x}$ | Negation („nicht“) | $\neg A$ ; $\overline{A}$ | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $\rightarrow$ | Implikation („daraus folgt“) | $A \rightarrow B$ | 1 | 1 | 0 | 1 |
| $\leftrightarrow$ | Äquivalenz („genau dann, wenn“) | $A \leftrightarrow B$ | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\oplus$ | Antivalenz („exklusives oder“, „XOR“) | $A \oplus B$ | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $\otimes$ | NAND („nicht und“) | $A \otimes B$ | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $\odot$ | NOR („nicht oder“) | $A \odot B$ | 1 | 0 | 0 | 0 |

**Zwei Stolperfallen:**

Mitunter sind Anfänger vom Wahrheitswert der Implikation überrascht.

Manchen fällt es auch schwer, die Unterschiede zwischen dem inklusiven (dem mathematischen) „oder“ (also dem „ $\vee$ “) und dem exklusiven (dem umgangssprachlichen) „oder“ (also dem „ $\oplus$ “) zu akzeptieren.

**Abhilfe:**

Derartige Verständnisschwierigkeiten gehen auf Interpretationsversuche im Bezug auf Anwendungen zurück. Diese kann man bei der reinen Aussagelogik außer Acht lassen, dann entfallen die beschriebenen Schwierigkeiten.

## Aufgabe 3.1 Erstellen von Wahrheitstafeln

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) je 4 min | | | Punkte | |
| | (c.) 5 min | (a,b,c.) | | (a,b.) je 2 P | (c.) 3 P |
| | (d,e.) je 10 min | (d,e.) | | (d) 5 P | (e) 5 P |

Geben Sie die Wahrheitstafeln für folgende logische Funktionen an:

(a.) $D := (A \otimes B) \wedge (A \vee B)$ (b.) $E := (A \to B) \leftrightarrow \overline{(A \odot B)}$ (c.) $F := \left(\bar{A} \wedge (A \oplus B)\right) \vee (A \wedge B)$

(d.) $G := \left((A \vee B \vee C) \to (B \oplus C)\right) \wedge (A \otimes C)$ (e.) $H := H := \left(\overline{(\bar{A} \vee B)} \otimes (B \to \bar{C})\right) \wedge C$

( $A, B, C$ sind Eingangsvariablen, $D, E, F, G, H$ sind Funktionen dieser Variablen.)

## Lösung zu 3.1

**Arbeitshinweis:**

Wenn man den Wahrheitswert einer Funktion nicht in einem einzigen Schritt sieht (was bei den hier gegebenen Funktionen sicherlich der Fall sein wird), so empfiehlt es sich, die Berechnung der Funktion in einzelne Schritte zu untergliedern, wobei die Zwischenergebnisse der einzelnen Spalten als Input für die nachfolgenden Spalten verwendet werden.

In diesem Sinne sind die Lösungen zu Aufgabe 3.1 erarbeitet, und zwar für Aufgabe 3.1a in Tabelle 3.2, für Aufgabe 3.1b in Tabelle 3.3, und für Aufgabe 3.1c in Tabelle 3.4, die als waagerechte Wahrheitstafeln angelegt sind. Die Aufgabenteile (d.) und (e.) mit drei Eingangsvariablen sind in den Tabellen 3.5 und 3.6 gelöst.

Anmerkung: Bei der Erstellung der Wahrheitstafeln ist stets darauf zu achten, dass sämtliche möglichen Kombinationen aller Eingangszustände enthalten sind. Das sind bei $n$ Eingangsvariablen genau $2^n$ Konfigurationen.

**Tabelle 3.2** Wahrheitstafel zu Aufgabe 3.1a: $D := (A \otimes B) \wedge (A \vee B)$

| $A$ | $B$ | $A \otimes B$ | $A \vee B$ | $D = (*1) \wedge (*2)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| Kommentar: | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $= D$ (Lösung) |

2 P

**Tabelle 3.3** Wahrheitstafel zu Aufgabe 3.1b: $E := (A \rightarrow B) \wedge \overline{(A \odot B)}$

| $A$ | $B$ | $(A \rightarrow B)$ | $\overline{(A \odot B)}$ | $F = (*1) \leftrightarrow (*2)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| Kommentar: | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $= E$ (Lösung) | 2 P |

**Tabelle 3.4** Wahrheitstafel zu Aufgabe 3.1c: $F := \left(\overline{A} \wedge (A \oplus B)\right) \vee (A \wedge B)$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $(A \oplus B)$ | $(*1) \wedge (*2)$ | $(A \wedge B)$ | $(*3) \vee (*4)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| Kommentar: | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $=: (*3)$ | $=: (*4)$ | $= F$ (Lösung) | 3 P |

**Tabelle 3.5** Wahrheitstafel zu Aufgabe 3.1d:

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \vee B \vee C$ | $B \oplus C$ | $(*1) \rightarrow (*2)$ | $A \otimes C$ | $(*3) \wedge (*4)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| Kommentar: | | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $=: (*3)$ | $=: (*4)$ | $= G$ (Lösung) | 5 P |

**Tabelle 3.6** Wahrheitstafel zu Aufgabe 3.1e:

| $A$ | $B$ | $C$ | $\overline{A} \vee B$ | $\overline{(*1)}$ | $B \rightarrow \overline{C}$ | $(*2) \otimes (*3)$ | $(*4) \wedge C$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | |
| Kommentar: | | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $=: (*3)$ | $=: (*4)$ | $= H$ (Lösung) | 5 P |

## Aufgabe 3.2 Konjunktive und disjunktive Normalform

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (D,E) je 1 min<br>(F,G,H) je 2 min | (D,E)<br>(F,G,H) | | (D,E) 1 P<br>(F,G,H) 2 P | Konjunktive Normalformen |
| (D,E) je 2 min<br>(F,G,H) je 3 min | (D,E)<br>(F,G,H) | | (D,E) 2 P<br>(F,G,H) 3 P | Disjunktive Normalformen |

In Tabelle 3.7 sind Wahrheitstafeln verschiedener aussagelogischer Funktionen gegeben, zu denen Sie bitte jeweils die konjunktive Normalform und die disjunktive Normalform aufstellen. ( $A, B, C$ sind Eingangsvariablen. $D$ und $E$ sind Funktionen der Variablen $B$ und $C$, $F, G, H$ sind Funktionen der Variablen $A, B$ und $C$ .)

**Tabelle 3.7** Wahrheitstafel verschiedener aussagelogischer Funktionen als Aufgabenstellung 3.2

| | *A* | *B* | *C* | *D* | *E* | *F* | *G* | *H* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zeile 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| Zeile 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| Zeile 3 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Zeile 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| Zeile 5 | 1 | 0 | 0 | | | 0 | 1 | 1 |
| Zeile 6 | 1 | 0 | 1 | | | 0 | 0 | 1 |
| Zeile 7 | 1 | 1 | 0 | | | 1 | 0 | 0 |
| Zeile 8 | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 0 | 1 |

Anmerkung: Durchgestrichene Felder werden nicht benötigt und sollen daher außer Acht gelassen werden.

## Lösung zu 3.2

**Zwei Arbeitshinweise:**

Die disjunktive Normalform erhält man, indem man alle Zustände (Zeile für Zeile) mit dem Funktionswert „1“ heraussucht. Die zugehörigen Eingangsvariablen werden durch „UND“ verknüpft (allerdings sind sie zu negieren, falls ihr Wahrheitswert in der jeweiligen Zeile „0“ ist). Die so erhaltenen Ausdrücke werden durch Disjunktionen („ODER“) verknüpft – daher rührt der Name „disjunktive Normalform“.

Die konjunktive Normalform erhält man, indem man alle Zustände (Zeile für Zeile) mit dem Funktionswert „0“ heraussucht. Die zugehörigen Eingangsvariablen werden durch „ODER“-Verknüpfungen verbunden (allerdings sind sie zu negieren, falls ihr Wahrheitswert in der jeweiligen Zeile „1“ ist). Anschließend werden die so erhaltenen Ausdrücke durch Konjunktionen („UND“) verknüpft – daher rührt der Name „konjunktive Normalform“.

Geben wir zuerst die disjunktiven Normalformen an:

$D = \underbrace{\left(\overline{B} \wedge C\right)}_{\text{Zeile 2}} \vee \underbrace{\left(B \wedge \overline{C}\right)}_{\text{Zeile 4}}$ und $E = \underbrace{\left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right)}_{\text{Zeile 1}} \vee \underbrace{\left(B \wedge \overline{C}\right)}_{\text{Zeile 3}} \vee \underbrace{\left(B \wedge C\right)}_{\text{Zeile 4}}$ dazu noch je 1 P

$F = \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge C\right) \vee \left(A \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge B \wedge C\right)$ 2 P

$G = \left(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge C\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(\overline{A} \wedge B \wedge C\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}\right)$ 2 P

$H = \left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge C\right) \vee \left(A \wedge B \wedge C\right)$ 2 P

Nun folgen die konjunktiven Normalformen:

$D = \underbrace{\left(B \vee C\right)}_{\substack{\text{alles außer}\\ \text{Zeile 1}}} \wedge \underbrace{\left(\overline{B} \vee \overline{C}\right)}_{\substack{\text{alles außer}\\ \text{Zeile 4}}}$ und $E = \underbrace{\left(B \vee \overline{C}\right)}_{\substack{\text{alles außer}\\ \text{Zeile 2}}}$ dazu noch je 2 P

$F = \left(A \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right)$ 3 P

$G = \left(A \vee B \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right)$ 3 P

$H = \left(A \vee B \vee C\right) \wedge \left(A \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right)$ 3 P

Anmerkung: Zu Erläuterung wurden bei $D$ und $E$ die zu verknüpfenden Zustände (Zeile für Zeile) markiert. Damit ist das System klar, und die Leser mögen die restlichen Musterlösungen auch ohne zeilenweise Erläuterung verstehen.

Natürlich lassen sich die Boole'schen Ausdrücke noch vereinfachen. Dieses Thema wollen wir jedoch erst bei nachfolgenden Aufgaben üben.

## Aufgabe 3.3 Vereinfachen Boole'scher Ausdrücke

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 3 min<br>10 min | | Punkte<br>(a.) 2 P (b.) 5 P |
| | (c.)<br>(d.) | 8 min<br>6 min | | (c.) 4 P (d.) 3 P |

Vereinfachen Sie die nachfolgenden Boole'schen Ausdrücke:

(a.) $\left(\overline{B} \wedge C\right) \vee \left(\overline{B} \wedge \overline{C}\right)$ (b.) $\left(\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}\right) \vee \left(A \wedge \overline{B} \wedge C\right) \vee \left(A \wedge B \wedge C\right)$

(c.) $\left(A \vee B \vee C\right) \wedge \left(A \vee B \vee \overline{C}\right) \wedge \left(A \vee \overline{B} \vee \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{B} \vee C\right)$ (d.) $\left(\left(A \wedge B\right) \vee \left(A \vee B\right)\right) \wedge \left(A \leftrightarrow B\right)$

Unter einer Vereinfachung versteht man eine Verringerung der Zahl der Operationssymbole.

## Lösung zu 3.3

In Lehrbüchern und Vorlesungen finden sich einige Axiome und Sätze der Boole'schen Algebra, auf denen derartige Vereinfachungen basieren. Deren Anwendungen sind bei den nachfolgenden Umformungen mit geschweiften Klammern kenntlich gemacht. Die meisten sieht man ohne weitere Erklärung aufgrund der Logik ein; diejenigen Umformungen die die Leser nicht sofort logisch erkennen, können anhand von Wahrheitstafeln beweisen werden.

Wir vereinfachen wie folgt:

2 P (a.) $\underbrace{(\bar{B} \wedge C) \vee (\bar{B} \wedge \bar{C})}_{\bar{B}\text{ wird ausgeklammert.}} = B \wedge \underbrace{(C \vee \bar{C})}_{=1} = \bar{B} \wedge 1 = \bar{B}$

(b.)

5 P $(\bar{A}\wedge B\wedge\bar{C})\vee\underbrace{(A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C})\vee(A\wedge\bar{B}\wedge C)}_{=(A\wedge\bar{B})\wedge(C\vee\bar{C})=(A\wedge\bar{B})}\vee(A\wedge B\wedge C)=(A\wedge\bar{B})\vee\underbrace{(\bar{A}\wedge B\wedge\bar{C})\vee(A\wedge B\wedge C)}_{=B\wedge\underbrace{((\bar{A}\wedge\bar{C})\vee(A\wedge C))}_{A\leftrightarrow C}}=(A\wedge\bar{B})\vee(B\wedge(A\leftrightarrow C))$

4 P (c.) $\underbrace{(A\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge\bar{C})}_{\underbrace{(A\wedge B)\wedge(C\vee\bar{C})}_{=A\wedge B\wedge 1}}\vee\underbrace{(A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C})\vee(\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge C)}_{\bar{B}\wedge\underbrace{((A\wedge\bar{C})\vee(\bar{A}\wedge C))}_{A\oplus C}\text{ ausgeklammert}} = (A\wedge B)\vee(\bar{B}\wedge(A\oplus C))$

3 P (d.) $\underbrace{((A\wedge B)\vee(A\vee B))}_{=A\vee B}\wedge(A\leftrightarrow B) = \underbrace{(A\vee B)\wedge(A\leftrightarrow B)}_{A\wedge B} = A\wedge B$

## Aufgabe 3.4 Karnaugh-Veitch-Diagramme

(E…I) je 8 min — Punkte je 5 P → Nach Zahl der Operationen

Zur Zahl der Punkte: 5 P – wenn die Lösung genau so viele Operationen hat wie im Buch.
Plus: 1 Extrapunkt für jede Operation weniger als in der Musterlösung des Buches.
Minus: ½ Punkt Abzug für jede Operation weniger als in der Musterlösung des Buches.

In Tabelle 3.8 sind Wahrheitstafeln gegeben (in waagerechter Anordnung), zu denen Sie bitte jeweils die aussagelogischen Funktionen mit Hilfe von Karnaugh-Veitch-Diagrammen aufstellen.

Die Eingangsvariablen sind $A, B, C, D$, die Boole'schen Funktionen heißen $E, F, G, H, I$.

Die Übung hat zwei Ziele:

Erstens → Die gefundenen Boole'schen Funktionen müssen korrekt sein.

Zweitens → Wir beschränken uns auf drei logische Verknüpfungen, nämlich „UND", „ODER" und „NICHT" und wollen für jede der Funktionen so wenige Operationssymbole wie möglich verbrauchen. (Im Falle einer Klausur erhöht sich die Zahl der erreichten Punkte mit jedem eingesparten Operationssymbol.)

**Tabelle 3.8** Wahrheitstafel verschiedener aussagelogischer Funktionen als Aufgabenstellung 3.4

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Eingangs-variablen | *A* | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | *B* | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | *C* | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | *D* | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| Boole'sche Funktionen | *E* | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | *F* | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| | *G* | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| | *H* | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| | *I* | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

## Lösung zu 3.4

Das übliche rechteckige Schema der Karnaugh-Veitch-Diagramme findet man in den Bildern 3-4 a…e, wo auch mögliche Darstellungen der einzelnen Funktionen genannt sind.

**Arbeitshinweise:**

Die Werte der Eingangsvariablen kann man wahlweise an den Rändern oder in den Feldern markieren. Die Musterlösungen enthalten beides: In den Feldern sind die Werte in der Reihenfolge „$ABCD$“ aufgezählt, zusätzlich sind an den Rändern des Rechtecks mit geschweiften Klammern diejenigen Bereiche markiert, in denen die einzelnen Variablen den Wert „1“ annehmen.

Die Markierung der Felder, in denen die Funktion den Wert „1“ hat, ist in grau vorgenommen.

Zum Nachvollziehen der Musterlösungen markiere man die einzelnen Ausdrücke und suche die Flächen in den Karnaugh-Veitch-Diagrammen. In den Musterlösungen wird dies mit den Bezeichnungen $(*1), (*2), (*3)$, etc... vorgeführt.

Es sollte ein Anreiz an die Geschicklichkeit der Leser sein, möglichst großflächige zusammenhängende Bereiche zu erkennen, die gemeinsam mit möglichst wenigen Operationssymbolen beschrieben werden können (wobei Felder mit Wahrheitswert „1“ auch mehreren Bereichen angehören können). Beim Zählen der Operationssymbole ist jedes „UND“, jedes „ODER“ und jedes „NICHT“ einzeln zu erfassen. Vielleicht gelingt es einigen Lesern oder Leserinnen, die Zahl der Operatoren in der Musterlösung zu unterbieten?

5±
…P

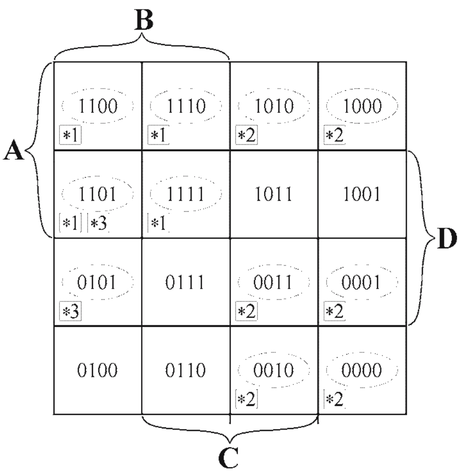



**Bild 3-4a**
Karnaugh-Veitch-Diagramm zum Aufstellen der Boole'schen Funktion $E$. Eine mögliche Lösung lautet:

$$E = \underbrace{(A \wedge B)}_{(*1)} \vee \underbrace{\left(\overline{B} \wedge \left(\overline{A} \vee \overline{D}\right)\right)}_{(*2)} \vee \underbrace{\left(B \wedge D \wedge \overline{C}\right)}_{(*3)}$$

Sie benötigt 11 Operatoren.

Besser ist die Lösung

$$E = \left(\overline{B} \wedge \overline{(A \wedge D)}\right) \vee (A \wedge B) \vee \left(B \wedge D \wedge \overline{C}\right)$$

Sie hat nur 10 Operatoren.

5±
…P

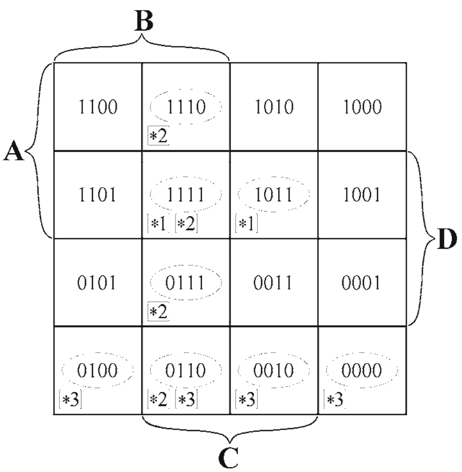



**Bild 3-4b**
Karnaugh-Veitch-Diagramm zum Aufstellen der Boole'schen Funktion $F$. Eine mögliche Lösung lautet:

$$F = \underbrace{(A \wedge D \wedge C)}_{(*1)} \vee \underbrace{(B \wedge C)}_{(*2)} \vee \underbrace{\left(\overline{A} \wedge \overline{D}\right)}_{(*3)}$$

Diese Musterlösung benötigt 8 Operatoren.

5±
…P

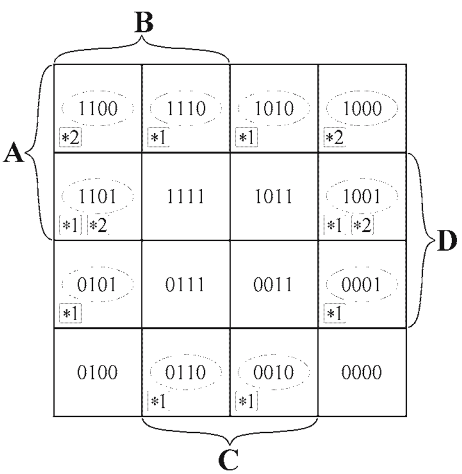



**Bild 3-4c**
Karnaugh-Veitch-Diagramm zum Aufstellen der Boole'schen Funktion $G$. Eine mögliche Lösung lautet:

$$G = \underbrace{\left((C \vee D) \wedge \overline{(C \wedge D)}\right)}_{(*1)} \vee \underbrace{\left(A \wedge \overline{C}\right)}_{(*2)}$$

Diese Musterlösung benötigt 7 Operatoren.

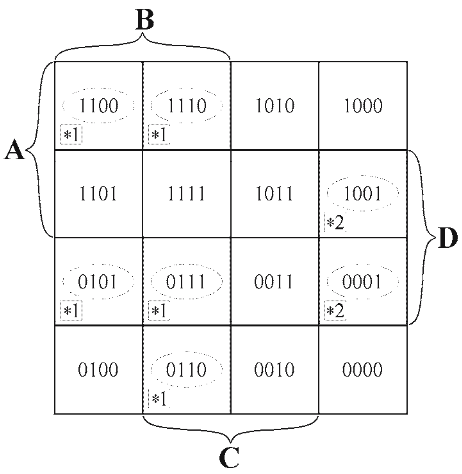



**Bild 3-4d**
Karnaugh-Veitch-Diagramm zum Aufstellen der Boole'schen Funktion $H$. Eine mögliche Lösung lautet: 5± …P

$$H = \underbrace{\left(B \wedge \overline{(A \wedge D)} \wedge (A \vee D \vee C)\right)}_{(*1)} \vee \underbrace{\left(D \wedge \overline{(B \vee C)}\right)}_{(*2)}$$

Diese Musterlösung benötigt 10 Operatoren.

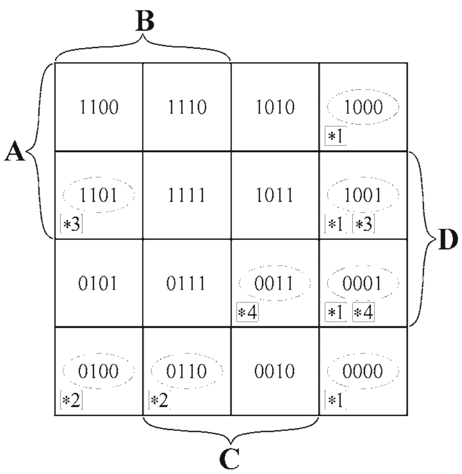



**Bild 3-4e**
Karnaugh-Veitch-Diagramm zum Aufstellen der Boole'schen Funktion $I$. Eine mögliche Lösung lautet: 5± …P

$$I = \underbrace{\overline{(B \vee C)}}_{(*1)} \vee \underbrace{\left(\overline{(A \vee D)} \wedge B\right)}_{(*2)} \vee \underbrace{\left(A \wedge D \wedge \overline{C}\right)}_{(*3)} \vee \underbrace{\left(\overline{B} \wedge D \wedge \overline{A}\right)}_{(*4)}$$

Diese Musterlösung benötigt 14 Operatoren.

## Aufgabe 3.5 Beweise in Boole'scher Algebra

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a.) | 8 min | Punkte | |
| (b,c,d.) | je 10 min | (a.) 4 P | (b,c,d.) je 5 P |

Beweisen Sie die folgenden Gleichungen der Boole'schen Algebra:

(a.) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = (A \oplus B)$

(b.) $\left((A \otimes B) \otimes (\overline{A} \otimes B)\right) \otimes (A \otimes \overline{B}) = A \vee B$

(c.) $A \wedge B = \overline{\left((A \odot B) \vee (\overline{A} \odot B)\right) \vee (A \odot \overline{B})}$

(d.) $(A \vee B) \wedge \overline{A} = \overline{(A \leftrightarrow B)} \wedge \overline{(B \rightarrow A)}$

## Lösung zu 3.5

Am einfachsten gelingen die Beweise anhand von Wahrheitstafeln, durch Auswertung der beiden Seiten des Gleichheitszeichens. Führen beide Seiten zum gleichen Ergebnis, so ist der Beweis erbracht.

(a.) Beweis: Siehe Tabelle 3.9.

**Tabelle 3.9** Wahrheitstafel zum Beweis von $(A \to B) \wedge (B \to A) = \overline{(A \oplus B)}$

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $B \to A$ | $(*1) \wedge (*2)$ | $A \oplus B$ | $\overline{(*3)} = \overline{A \oplus B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| Kommentar: | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | linke Seite | $=: (*3)$ | rechte Seite |

4 P

(b.) Beweis: Siehe Tabelle 3.10

**Tabelle 3.10** Wahrheitstafel zum Beweis von $\overline{\left((A \otimes B) \otimes (A \otimes \overline{B})\right)} \otimes (\overline{A} \otimes B) = A \vee B$

| $A$ | $B$ | $A \otimes B$ | $A \otimes \overline{B}$ | $\overline{A} \otimes B$ | $(*1) \otimes (*2)$ | $\overline{(*4)}$ | $\overline{(*4)} \otimes (*3)$ | $A \vee B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| Kommentar: | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $=: (*3)$ | $=: (*4)$ | | linke Seite | rechte Seite |

5 P

(c.) Beweis: Siehe Tabelle 3.11.

**Tabelle 3.11** Wahrheitstafel zum Beweis von $A \wedge B = \overline{\left((A \odot B) \vee (\overline{A} \odot B)\right) \vee (A \odot \overline{B})}$

| $A$ | $B$ | $A \odot B$ | $\overline{A} \odot B$ | $A \odot \overline{B}$ | $(*1) \vee (*2)$ | $(*4) \vee (*3)$ | $\overline{(*5)}$ | $A \wedge B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| Kommentar: | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $=: (*3)$ | $=: (*4)$ | $=: (*5)$ | linke Seite | rechte Seite |

5 P

(d.) Beweis: Siehe Tabelle 3.12.

**Tabelle 3.12** Wahrheitstafel zum Beweis von $(A \vee B) \wedge \overline{A} = \overline{(A \leftrightarrow B)} \wedge \overline{(B \rightarrow A)}$

| $A$ | $B$ | $A \vee B$ | $(A \vee B) \wedge \overline{A}$ | $A \leftrightarrow B$ | $\overline{(A \leftrightarrow B)}$ | $B \rightarrow A$ | $\overline{B \rightarrow A}$ | $(*1) \wedge (*2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Kommentar: | | | linke Seite | | $=: (*1)$ | | $=: (*2)$ | rechte Seite |

5 P

## Aufgabe 3.6 Spezielle Verknüpfungen

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| (D) | 10 min | | |
| (E) | 3 min | | |
| (F) | 6 min | | (D) 4 P (E) 2 P (F) 3 P |

Tabelle 3.13 zeigt drei Wahrheitstafeln mit den Eingangsvariablen $A$ und $B$, sowie den Funktionen $C$, $D$ und $E$. Geben Sie bitte diese letztgenannten Funktionen durch aussagelogische Ausdrücke an, in denen außer $A$ und $B$ nur die Verknüpfung „NAND" vorkommt. (Anmerkung: Dabei ist es egal, wie oft die NAND- Verknüpfung gebraucht wird.)

**Tabelle 3.13** Wahrheitstafel verschiedener aussagelogischer Funktionen für Aufgabenstellung 3.6

| Eingangvariablen → | $A$ | $B$ | Funktionen → | $D$ | $E$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | | 0 | 0 | 0 |
| | 0 | 1 | | 1 | 0 | 1 |
| | 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 |
| | 1 | 1 | | 0 | 1 | 0 |

## Lösung zu 3.6

Wir stellen mit Tabelle 3.14 eine große Wahrheitstafel auf, in der die Ergebnisse aller drei Aufgabenteile zu finden sind. Dass in der Tabelle die Negation verwendet wird, soll uns dabei nicht stören, denn diese ist sehr bequem durch ein NAND darstellbar, nämlich in der Form $\overline{A} = A \otimes A$. In diesem Sinne ist zum Bsp. $\overline{A} \otimes \overline{B}$ als abkürzende Schreibweise zu verstehen, die durch drei NANDs wie folgt dargestellt wird: $\overline{A} \otimes \overline{B} = (A \otimes A) \otimes (B \otimes B)$.

Die Buchstaben „D“, „E“, „F“ bezeichnen die Ergebnisse. Die Buchstaben „G“, „H“, „I“, benennen Hilfsvariablen, die der Übersicht dienen.

**Tabelle 3.14** Wahrheitstafel zur Findung der Ergebnisse von Aufgabe 3.6

| $A$ | $B$ | $A \otimes B$ | $\overline{A} \otimes \overline{B}$ | $\overline{G \otimes H}$ | $\overline{A \otimes B}$ | $A \otimes A$ | $\overline{I \otimes B}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| Kommentar: | | $=: G$ | $=: H$ | $= D$ Ergebnis | $= E$ Ergebnis | $=: I$ | $= F$ Ergebnis |

Fasst man die Ergebnisse der Wahrheitstafel von Tabelle 3.14 in Boole’sche Ausdrücke, so erhält man:

4 P
$$D = \overline{G \otimes H} = (G \otimes H) \otimes (G \otimes H) = \left((A \otimes B) \otimes (\overline{A} \otimes \overline{B})\right) \otimes \left((A \otimes B) \otimes (\overline{A} \otimes \overline{B})\right)$$
$$= \left((A \otimes B) \otimes \left((A \otimes A) \otimes (B \otimes B)\right)\right) \otimes \left((A \otimes B) \otimes \left((A \otimes A) \otimes (B \otimes B)\right)\right)$$

2 P
$$E = \overline{A \otimes B} = (A \otimes B) \otimes (A \otimes B)$$

3 P
$$F = \overline{I \otimes B} = (I \otimes B) \otimes (I \otimes B) = \left((A \otimes A) \otimes B\right) \otimes \left((A \otimes A) \otimes B\right)$$

# 4 Geometrie und Vektorrechnung

## Aufgabe 4.1 Berechnungen in Dreieck und Viereck

| | | |
|---|---|---|
| 20 min | | Punkte 12 P |

Bei der Vermessung eines Ackers habe ein Geodät eine Seitenlänge gemessen. Zur Bestimmung der anderen drei Seitenlängen führe er nun Winkelmessungen durch. Die Messergebnisse finden sich in Bild 4-1a. Vollziehen Sie die Berechnung der Seitenlängen nach.

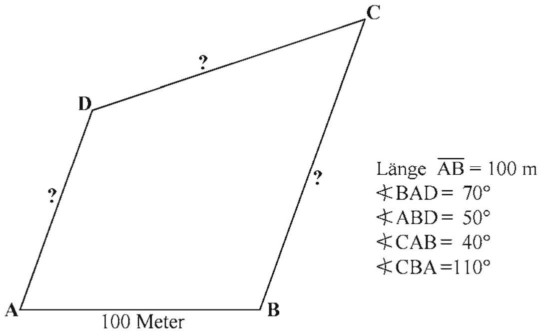



**Bild 4-1a**
Darstellung des zu berechnenden Ackers.

## Lösung zu 4.1

Dreiecke sind durch drei Größen eindeutig bestimmt (außer durch drei Winkel). Wir beginnen also den Lösungsweg, indem wir Teildreiecke suchen, in denen drei Größen laut Aufgabenstellung bekannt sind. Dies ist bei den nachfolgenden Lösungsteilen (i.) und (ii.) der Fall.

(i.) Die Seitenlänge $\overline{AD}$ bestimmen wir im Dreieck $ABD$ entsprechend Bild 4-1b

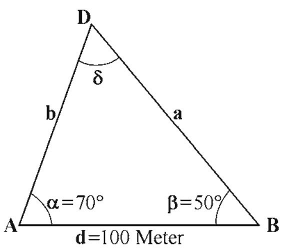



**Bild 4-1b**
Teildreieck zur Bestimmung der Länge $\overline{AD}$.

Nach dem Sinussatz findet sich die erste gefragte Seitenlänge $\overline{AD}$ als: 3 P

$$\frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\delta)}{d} \quad \Rightarrow \quad b = d \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(\delta)} = d \cdot \frac{\sin(\beta)}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = 100\,m \cdot \frac{\sin(50°)}{\sin(180° - 70° - 50°)} \overset{TR}{\approx} 88.455\,m$$

(ii.) Die Seitenlänge $\overline{BC}$ bestimmen wir im Dreieck $ABC$ entsprechend Bild 4-1c

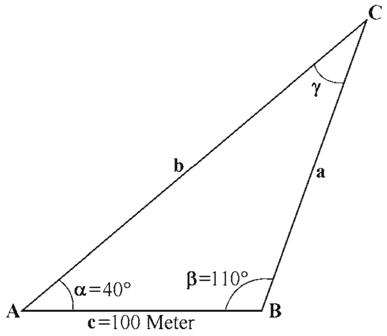



**Bild 4-1c**
Teildreieck zur Bestimmung der Länge $\overline{BC}$.

3 P Der Sinussatz führt zur Bestimmung der zweiten gefragten Seitenlänge $\overline{BC}$:

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\gamma)}{c} \quad \Rightarrow \quad a = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\gamma)} = c \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\sin(180° - \alpha - \beta)} = 100\,m \cdot \frac{\sin(40°)}{\sin(180° - 40° - 110°)} \overset{TR}{\approx} 128.558\,m$$

Nun fehlt nur noch die Seite $\overline{DC}$, zu deren Bestimmung wir das gesamte Viereck in verschiedene Teildreiecke unterteilen müssen, über die wir uns dann bis zur Seite $\overline{DC}$ durcharbeiten. Die geschieht im Lösungsteil (iii.).

(iii.) Da in den Punkten $C$ und $D$ keine Winkel gemessen wurden, müssen wir erst durch entsprechende Überlegungen solche Winkel auffinden. Dazu betrachten wir Bild 4-1d.

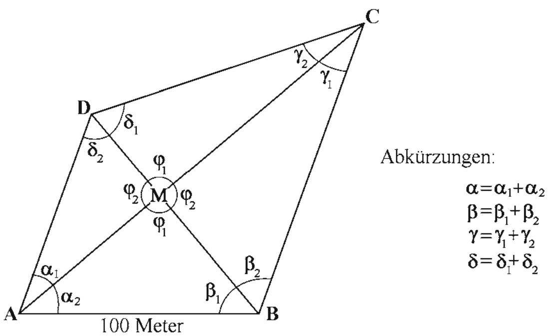



**Bild 4-1d**
Schaubild zur Bestimmung der Winkel in den Punkten $C$ und $D$

Laut Aufgabenstellung kennen wir: $\alpha = 70°$ ; $\alpha_2 = 40°$ ; $\beta_1 = 50°$ ; $\beta = 110°$ .

Damit berechnen wir direkt: $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2 = 30°$ und $\beta_2 = \beta - \beta_1 = 60°$

und im Dreieck $ABM$ : $\alpha_2 + \beta_1 + \varphi_1 = 180° \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 90°$ .

Weiterhin ist wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = 180°$ auch $\varphi_2 = 90°$ .

Damit folgt im Dreieck $BCM$ : $\varphi_2 + \gamma_1 + \beta_2 = 180° \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = 30°$

3 P und im Dreieck $AMD$ : $\alpha_1 + \varphi_2 + \delta_2 = 180° \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = 60°$ .

Die restlichen bisher noch unbestimmten Winkel könnte man berechnen, aber da man deren Werte für die Lösung der Aufgabe nicht benötigt, verzichten wir darauf. Der Lösungsweg ist vielmehr folgender: Man bestimme die Seitenlängen $\overline{DM}$ und $\overline{MC}$ und daraus über den Satz von Pythagoras im Dreieck $DMC$ die gefragte Seitenlänge $\overline{DC}$.

zu $\overline{DM}$ → Wir verwenden den Sinussatz im Dreieck $AMD$:

$$\frac{\sin(\varphi_2)}{\overline{AD}} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\overline{MD}} \quad \Rightarrow \quad \overline{MD} = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\varphi_2)} \cdot \overline{AD} = \frac{\sin(30^\circ)}{\sin(90^\circ)} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \stackrel{TR}{\approx} 44.228\,m$$ 1 P

zu $\overline{MC}$ → Hier hilft der Sinussatz im Dreieck $MBC$:

$$\frac{\sin(\varphi_2)}{\overline{BC}} = \frac{\sin(\beta_2)}{\overline{MC}} \quad \Rightarrow \quad \overline{MC} = \frac{\sin(\beta_2)}{\sin(\varphi_2)} \cdot \overline{BC} = \frac{\sin(60^\circ)}{\sin(90^\circ)} \cdot \overline{BC} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \overline{BC} \stackrel{TR}{\approx} 111.334\,m$$ 1 P

zu $\overline{DC}$ im Dreieck $DMC$ → Hier folgt aus dem Satz von Pythagoras die dritte gefragte Seitenlänge $\overline{DC}$: $\overline{DC}^2 = \overline{MD}^2 + \overline{MC}^2 \quad \Rightarrow \quad \overline{DC} \approx \sqrt{(44.228\,m)^2 + (111.3348\,m)^2} \stackrel{TR}{\approx} 119.7988\,m$ 1 P

Damit sind alle in der Aufgabenstellung gefragten Größen bestimmt.

## Aufgabe 4.2 Winkelfunktionen – berechnen spezieller Werte

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 12 min | (a.) | | (a.) 7 P |
| | (b.) | 10 min | (b.) | | (b.) 5 P |

(a.) Bestimmen Sie die Werte von $\sin(30^\circ)$, $\sin(60^\circ)$ sowie $\cos(30^\circ)$, $\cos(60^\circ)$ mit Hilfe eines gleichseitigen Dreiecks.
(b.) Bestimmen Sie die Werte von $\sin(45^\circ)$, $\cos(45^\circ)$ mit Hilfe eines gleichschenkelig recht-winkligen Dreiecks.

## Lösung zu 4.2

(a.) Ein gleichseitiges Dreieck zeichnet sich dadurch aus, dass es drei gleichlange Seiten hat. Dazu betrachten wir Bild 4-2a.

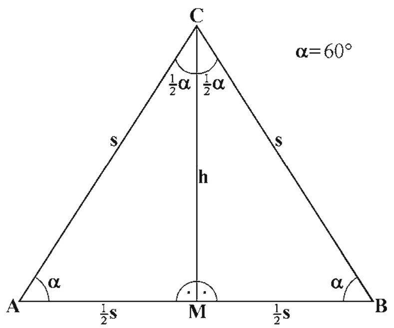



**Bild 4-2a**
Gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge „ $s$ “
Aus Symmetriegründen sind alle Winkel $\alpha = 60^\circ$. 2 P

Als Vorarbeit berechnen wir die Höhe $h$ aus der Seitenlänge $s$. Nach Pythagoras gilt im Dreieck $AMC$:

1 P $s^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad h^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4}s^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot s$

Nach der Definition der Winkelfunktionen gilt im Dreieck $AMC$:

1 P $\sin(30°) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{s/2}{s} = \frac{1}{2}$

1 P $\cos(30°) = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{h}{s} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot s}{s} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

1 P $\sin(60°) = \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{h}{s} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot s}{s} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$

1 P $\cos(60°) = \sin(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{s/2}{s} = \frac{1}{2}$

(b.) Ein gleichschenkelig rechtwinkeliges Dreieck hat zwei gleichlange Schenkel („$k$“) und einen rechten Winkel (den $\sphericalangle BCA$), wie es z.B. in Bild 4-2b skizziert ist.

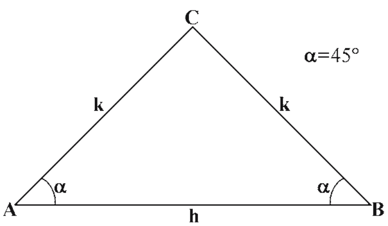
2 P 


**Bild 4-2b**
Gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck, wobei „$k$“ die Länge der Katheten und „$h$“ die Länge der Hypothenuse sei.

Aus Symmetriegründen sind die beiden Winkel $\alpha = 45°$.

Die Vorarbeit besteht wieder aus der Anwendung des Satzes von Pythagoras, jetzt im Dreieck

1 P $ABC$: $\quad h^2 = k^2 + k^2 \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{2} \cdot k$

Damit folgt nach der Definition der Winkelfunktionen im Dreieck $ABC$:

1 P $\sin(45°) = \sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{k}{h} = \frac{k}{\sqrt{2} \cdot k} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

1 P $\sin(45°) = \sin(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{k}{h} = \frac{k}{\sqrt{2} \cdot k} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

## Aufgabe 4.3 Textbeispiel - Kreisberechnung

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 min | | Punkte 4 P |

Bereits im 2. oder 3. Jhd. v. Chr. schlossen Gelehrte in Alexandria aus der Existenz des Horizonts auf die Form der Erde als Kugel. (Man sieht Schiffe hinter dem Horizont verschwinden und wiederkehren.)

Eratosthenes fand in der Bibliothek von Alexandria Hinweise auf einen Brunnen in der Stadt Syene, dessen Boden die Sonne am 21. Juni mittags schattenfrei ausleuchtete. Also musste dort die Sonne senkrecht über dem Erdboden stehen. In Alexandria hingegen warf in diesem Moment ein Turm einen Schatten (siehe Bild 4-3), aus dessen Länge Eratosthenes den Winkel bestimmen konnte, in dem die Sonnenstrahlen geneigt gegenüber der Senkrechten zum Erdboden einfielen. Eratosthenes setzte die Parallelität des Sonnenlichts voraus, und berechnete daraus den Umfang der Erde. Vollziehen Sie diese Rechnung nach. Die dafür nötigen Daten finden sich in der Legende zu Bild 4-3.

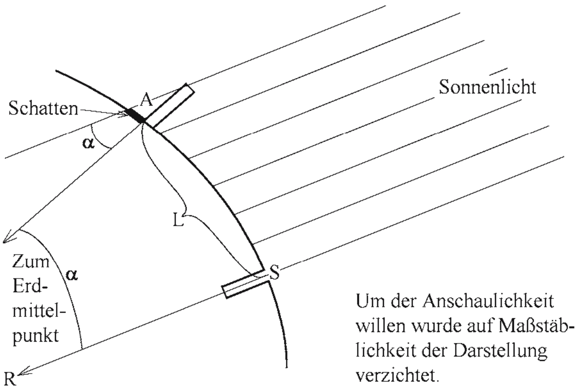



**Bild 4-3**
Skizze der Oberfläche der Erde, deren Kugelumfang Eratosthenes berechnete.
A = Stadt Alexandria
S = Stadt Syene
Die Entfernung von Alexandria nach Syene wurde mit $L = 787.5$ km bestimmt, der Winkel zwischen den Sonnenstrahlen und der Senkrechten zur Erdoberfläche in Alexandria mit $\alpha = 7.2°$ .

## Lösung zu 4.3

Die Berechnung des Eratosthenes erfolgt in Anlehnung an die Definition des Winkels im Einheitskreis. Übertragen wir diese Definition auf Kreise beliebigen Umfangs, so erhalten wir $\frac{\alpha}{360°} = \frac{L}{R}$ mit $L$ =Bogenlänge und $R$ =Kreisradius (vgl. auch Bild 4-3.)

Umformen dieser Definitionsgleichung liefert:

$\Rightarrow$ Erdradius $R = L \cdot \frac{360°}{\alpha}$ $\Rightarrow$ Erdumfang $2\pi R = 2\pi L \cdot \frac{360°}{\alpha}$

Die Werte des Eratosthenes führen zu $2\pi R = 2\pi L \cdot \frac{360°}{\alpha} = 2\pi \cdot 787.5\,\text{km} \cdot \frac{360°}{7.2°} = 39375\,\text{km}$ 4 P

Moderne Anmerkung: Die Ungenauigkeit des Eratosthenes hängt mit der Tatsache zusammen, dass der Weg von Alexandria nach Syene nicht genau in Nord-Süd-Richtung verläuft.

## Aufgabe 4.4 Winkelfunktionen – Werte ohne Taschenrechner

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…e.) je 1 min | | Punkte<br>(a) 1 P |

Berechnen Sie ohne Taschenrechner und ohne sonstige Hilfsmittel:

(a.) $a = \sin\left(-\frac{15}{3}\pi\right)$ (b.) $b = \tan\left(\frac{5}{3}\pi\right)$ (c.) $c = \cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)$

(d.) $d = \cot\left(+\frac{7}{4}\pi\right)$ (e.) $e = \tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)$

## Lösung zu 4.4

Wir führen die Ausdrücke unter Benutzung der Periodizitäten der zu berechnenden Funktionen auf Sinus- und Cosinus-Werte im ersten Quadranten zurück, die wir kennen.

1 P (a.) $a=\sin\left(-\frac{15}{3}\pi\right)=\underbrace{\sin(-5\pi)=\sin(-5\pi+6\pi)}_{\text{3 Perioden in Argument addieren }(6\pi)}=\sin(\pi)=0$

1 P (b.) $b=\tan\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\underbrace{\tan\left(\frac{5}{3}\pi\text{-}\pi\right)=\tan\left(\frac{2}{3}\pi\right)}_{\text{1 Periode }(=\pi)\text{ addieren}}=\underbrace{\frac{\sin(120°)}{\cos(120°)}=\frac{\sin(60°)}{-\cos(60°)}}_{\text{Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften}}=\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$

1 P (c.) $c=\underbrace{\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)=\cos\left(-\frac{7}{6}\pi+\frac{12}{6}\pi\right)}_{\text{1 Periode }(=2\pi)\text{ addieren}}=\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right)=-\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right)=-\cos(30°)=-\sqrt{\frac{3}{4}}$

1 P (d.) $d=\underbrace{\cot\left(+\frac{7}{4}\pi\right)=\cot\left(-\frac{1}{4}\pi\right)}_{\text{2 Perioden }(=2\pi)\text{ subtrahieren}}=-\cot\left(\frac{1}{4}\pi\right)=-\frac{\cos(45°)}{\sin(45°)}=-1$

1 P (e.) $e=\underbrace{\tan\left(-\frac{3}{4}\pi\right)=\tan\left(\frac{1}{4}\pi\right)}_{\text{1 Periode }(=\pi)\text{ addieren}}=\frac{\sin(45°)}{\cos(45°)}=1$

## Aufgabe 4.5 Additionstheoreme

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | Punkte 3 P |

Vereinfachen Sie den Ausdruck $x=\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\sin^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ soweit wie möglich.

## Lösung zu 4.5

Es gilt die nachfolgende Umformung:

$$x=\underbrace{\cos^4\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^4\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)}_{\substack{\text{Umformung der}\\ \text{3. Binomischen Formel}\\ (a^2-b^2)=(a-b)\cdot(a+b)}}=\left(\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)-\sin^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)\cdot\underbrace{\left(\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)}_{\substack{\text{nach Additionstheorem}\\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1}}=\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)-\underbrace{\left(1-\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)}_{\substack{\text{nach Additionstheorem}\\ \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1}}$$

3 P

$$=\underbrace{2\cdot\cos^2\left(\tfrac{\alpha}{2}\right)-1=2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(1+\cos\left(2\cdot\tfrac{\alpha}{2}\right)\right)-1}_{\substack{\text{wegen Additionstheorem}\\ \cos^2(\varphi)=\frac{1}{2}\cdot(1+\cos(2\varphi))}}=\cos(\alpha)$$

# Aufgabe 4.6 Textbeispiel – Navigation

| | 12 min | | Punkte 6 P |
|---|---|---|---|

Ein möglicher Arbeitsgang bei der Navigation in der Seefahrt ist das Anpeilen von Landmarken. Ein Schiff peile zwei Landmarken ( $A$ und $B$ ) an wie in Bild 4-6 dargestellt. Den Abstand der beiden Landmarken zueinander entnimmt der Seefahrer aus der Seekarte.

(a.) Wie groß sind die Entfernungen $\overline{SA}$ und $\overline{SB}$ ?

(b.) Welchen Kurs muss das Schiff fahren, um im Abstand von 4 Seemeilen am Punkt $B$ vorbeizufahren?

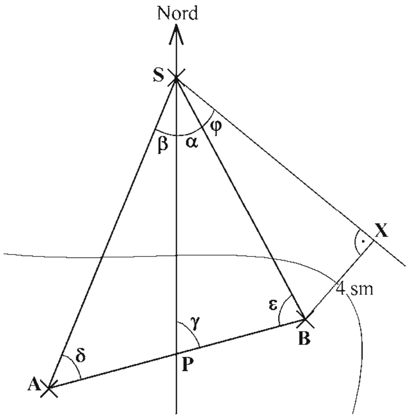



**Bild 4-6**
Schaubild zum Navigationsbeispiel
$A$ und $B$ = Landmarken.
Laut Seekarte beträgt der Abstand $\overline{AB} = 20$ sm (Seemeilen) und der Winkel $\gamma = 80°$
$S$ = Schiff; $P$ , $X$ , $\delta$ und $\varepsilon$ = Hilfsgrößen
Peilungen: $\alpha = 28°$ und $\beta = 35°$
$\varphi$ = gefragter Kurs

## Lösung zu 4.6

Planung der Vorgehensweise:
Da die einzige absolute Längenangabe im Dreieck $ABS$ vorhanden ist, müssen wir mit diesem Dreieck beginnen. Wir bestimmen zunächst alle Winkel dieses Dreiecks (im Schritt 1) und danach seine Seitenlängen (im Schritt 2). Damit können wir uns zu guter Letzt dem Dreieck $BXS$ und dem Winkel $\varphi$ zuwenden (Schritt 3), um den Kurs des Schiffes zu berechnen. 2 P

Schritt 1:
Ein Winkel ergibt sich im Dreieck $PBS$ → $\varepsilon = 180° - \alpha - \gamma = 72°$
Der andere Winkel folgt in Dreieck $ABS$ → $\delta = 180° - \beta - \alpha - \varepsilon = 45°$ 1 P

Schritt 2: Die Seitenlängen folgen aus dem Sinussatz, und zwar im Dreieck $ABS$ .
Wir berechnen zuerst die Seitenlänge $\overline{SB}$ mit

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{AB}} = \frac{\sin(\delta)}{\overline{SB}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SB} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(\delta)}{\sin(\alpha+\beta)} = 20\,sm \cdot \frac{\sin(45°)}{\sin(28°+35°)} \overset{TR}{\approx} 15.872\,sm\ ,$$ 1 P

und dann die Seitenlänge $\overline{SA}$ gemäß

1 P $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{AB}} = \frac{\sin(\varepsilon)}{\overline{SA}} \quad \Rightarrow \quad \overline{SA} = \overline{AB} \cdot \frac{\sin(\varepsilon)}{\sin(\alpha+\beta)} = 20\,sm \cdot \frac{\sin(72°)}{\sin(28°+35°)} \overset{TR}{\approx} 21.348\,sm\ ,$$

Schritt 2 gibt die Antworten auf Frage (a.).

Schritt 3: Damit sind im Dreieck $BXS$ zwei Seitenlängen und ein rechter Winkel bekannt, was zur Bestimmung des Winkels $\varphi$ aus der Definition des Sinus genügt:

1 P $$\sin(\varphi) = \frac{\overline{BX}}{\overline{SB}} \quad \Rightarrow \quad \varphi \overset{TR}{\approx} \arcsin\left(\frac{4\,sm}{15.872\,sm}\right) \overset{TR}{\approx} 14.597°$$ Dies gibt die Antwort auf Frage (b.).

## Aufgabe 4.7 Vektorprodukte

| | | Punkte |
|---|---|---|
| (a.) | 3 min | (a.) 2 P |
| (b.) | 3 min | (b.) 2 P |
| (c.) | 2 min | (c.) 1 P |
| (d.) | 3 min | (d.) 2 P |
| (e.) | 4 min | (e.) 3 P |

Gegeben seien drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

(a.) Welchen Winkel schließen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander ein?

(b.) Welche Fläche spannen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ auf?

(c.) Wie lauten die Einheitsvektoren in Richtung von $\vec{a}$ und in Richtung $\vec{b}$ ?

(d.) Welches Volumen spannen die drei Vektoren $\vec{a}$ , $\vec{b}$ und $\vec{c}$ miteinander auf?

(e.) $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen eine Ebene auf. Geben Sie die beiden Einheitsvektoren an, die senkrecht auf dieser Ebene stehen.

## Lösung zu 4.7

(a.) Am bequemsten findet man den Winkel über das Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle a,b)$ .

Darin sind

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 2+21+24 = 47 \qquad \text{und} \qquad |\vec{a}| = \sqrt{2^2+7^2+4^2} = \sqrt{69}$$

1 P $$|\vec{b}| = \sqrt{1^2+3^2+6^2} = \sqrt{46}$$

Auflösen nach dem gesuchten Winkel liefert

1 P $$\Rightarrow \quad \cos(\sphericalangle a,b) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle a,b = \arccos\left(\frac{47}{\sqrt{46 \cdot 69}}\right) \overset{TR}{\approx} 33.46°$$ für den gesuchten Winkel

(b.) Eine typische Methode zur Bestimmung der Fläche verläuft über das Kreuzprodukt:
Dieses lautet $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\sphericalangle a, b)$ .

Darin ist

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \\ -2 \cdot 6 + 4 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 - 7 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{(30)^2 + (-8)^2 + (-1)^2} = \sqrt{965} \text{ = Fläche}$$ 2 P

(c.) Die Einheitsvektoren erhält man, indem man die Vektoren durch ihre Länge dividiert:

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{69}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \overset{TR}{\approx} \begin{pmatrix} 0.24077 \\ 0.84270 \\ 0.48154 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{46}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \overset{TR}{\approx} \begin{pmatrix} 0.14744 \\ 0.44233 \\ 0.88465 \end{pmatrix}$$ 1 P

(d.) Das aufgespannte Volumen ist das Spatvolumen, das man am leichtesten wie eine Determinante berechnet:

$$V = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 7 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$ 2 P

$$= 2 \cdot (-6 - 24) - 7 \cdot (-2 + 6) + 4 \cdot (4 + 3) = -60$$

Das Vorzeichen der Determinante drückt lediglich aus, dass die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ein Linkssystem bilden, bei einem Rechtssystem wäre das Vorzeichen positiv. Auf das Volumen des Spates hat dies keinen Einfluss. Das gesuchte Volumen ist der Betrag von $V$ : $|V| = 60$ .

(e.) Das Kreuzprodukt steht senkrecht auf der Ebene, die die beiden Faktoren aufspannen – also berechnen wir $\vec{b} \times \vec{c}$ und dividieren durch dessen Betrag:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} b_y c_z - b_z c_y \\ -b_x c_z + b_z c_x \\ b_x c_y - b_y c_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 - 24 \\ +2 - 6 \\ 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| = \sqrt{(-30)^2 + (-4)^2 + (+7)^2} = \sqrt{965}$$ 2 P

Die beiden gesuchten Einheitsvektoren sind $\dfrac{+\vec{b} \times \vec{c}}{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|} = \begin{pmatrix} -30/\sqrt{965} \\ -4/\sqrt{965} \\ 7/\sqrt{965} \end{pmatrix}$ und $\dfrac{-\vec{b} \times \vec{c}}{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|} = \begin{pmatrix} 30/\sqrt{965} \\ 4/\sqrt{965} \\ -7/\sqrt{965} \end{pmatrix}$ 1 P

Die beiden Einheitsvektoren unterscheiden sich lediglich durch einen Vorzeichen, denn sie stehen antiparallel zueinander.

## Aufgabe 4.8 Lineare Abhängigkeit von Vektoren

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | je 7 min | | Punkte<br>Planung: 2 P | (a.) + 3 P<br>(b.) + 3 P |

Liegen die drei Punkte $P_1$ , $P_2$ und $P_3$ auf einer Geraden?

Wir üben diesen Aufgabentyp anhand zweier Beispiele:

(a.) $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ +7 \end{pmatrix}$ (b.) $P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Lösung zu 4.8

Planung der Vorgehensweise: Zuerst stellen wir die Geradengleichung durch die Punkte $P_1$ und $P_2$ auf (z.B. in der Punkt-Richtungs-Form), die wir $\vec{r}(\lambda)$ nennen wollen (mit einem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$). Um sie aufzustellen, bezeichnen wir den Koordinatenursprung mit $O$, somit ist $\overrightarrow{OQ}$ der Ortsvektor zu einem Punkt $Q$.

2 P Um damit dann die gegebene Fragestellung zu klären, ist zu prüfen, ob es ein $\lambda$ gibt, für das $\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP_3}$ ist. Anhand der x-Komponente suchen wir, welches $\lambda$ in Frage kommen könnte, passt dieses $\lambda$ auch für die y- und z-Komponente, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

(a.) Beim ersten Aufgabeteil ergibt die Geradengleichung als

1 P $$\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1-3 \\ 2-4 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2\lambda \\ 4-2\lambda \\ 2+1\lambda \end{pmatrix}$$

Das für die x-Komponente passende $\lambda$ ist: $3-2\lambda = -7 \;\Rightarrow\; 2\lambda = 3+7 \;\Rightarrow\; \lambda = 5$

2 P Wir berechnen $\vec{r}(\lambda=5) = \begin{pmatrix} 3-2\cdot 5 \\ 4-2\cdot 5 \\ 2+1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ +7 \end{pmatrix}$ und finden die Übereinstimmung mit $\overrightarrow{OP_3}$.

Also liegen alle drei Punkte auf einer Geraden.

(b.) Beim zweiten Aufgabenteil ergibt sich eine Geradengleichung gemäß

1 P $$\vec{r}(\lambda) = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3-5 \\ 4-2 \\ 7-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2\lambda \\ 2+2\lambda \\ 1+6\lambda \end{pmatrix}$$

Das für die x-Komponente passende $\lambda$ ist: $5-2\lambda = 1 \;\Rightarrow\; 2\lambda = 5-1 \;\Rightarrow\; \lambda = 2$

2 P Wir berechnen $\vec{r}(\lambda=2) = \begin{pmatrix} 5-2\cdot 2 \\ 2+2\cdot 2 \\ 1+6\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 13 \end{pmatrix}$, was nicht mit $\overrightarrow{OP_3}$ übereinstimmt.

Also liegen nicht alle drei Punkte auf einer Geraden. Ein Beispiel für die Berechnung des Abstandes eines Punktes zu einer Geraden findet man in Aufgabe 4.12.

## Aufgabe 4.9 Abstand eines Punktes zu einer Geraden

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 12 min | | Punkte 6 P |

Gegeben sei eine Gerade durch $\vec{r}(\lambda)$ und dazu ein Punkt $Q$ durch den Ortsvektor $\vec{r}_Q$, gemäß

$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ in der Punkt-Richtungs-Form und der Punkt mit $\vec{r}_Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes von der Geraden.

## Lösung zu 4.9

Unter dem Abstand eines Punktes zu einer Geraden versteht man die Länge der kürzesten Linie vom Punkt zur Geraden. Dies ist das Lot von $Q$ auf die Gerade (siehe Bild 4-9).

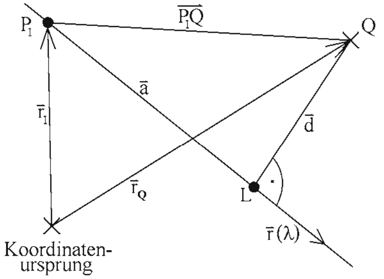



**Bild 4-9**
Schaubild zum Abstand eines Punktes von einer Geraden
$\vec{r}_Q$ = Ortsvektor des Punktes
$\vec{r}(\lambda)$ = Ortsvektoren zu den Punkten der Geraden
$\vec{d}$ = Lot vom Punkt $Q$ auf die Gerade. 2 P

Zur Berechnung des Abstandes $\left|\vec{d}\right|$ betrachten wir das von $\overrightarrow{P_1Q}$ und $\vec{a}$ aufgespannte Parallelogramm, dessen Fläche sich einerseits durch das Kreuzprodukt $\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{a}\right|$ und andererseits als Parallelogrammfläche $\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|$ berechnen lässt. $\Rightarrow$ $\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|$

Auflösen nach $\left|\vec{d}\right|$ liefert den gesuchten Abstand: $\left|\vec{d}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|\left(-\vec{r}_1 + \vec{r}_Q\right) \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|}$ 2 P

Das Einsetzen der Werte führt zum gesuchten Abstand (als Länge des Lotes):

$$\left|\vec{d}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_1Q} \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|\left(-\vec{r}_1 + \vec{r}_Q\right) \times \vec{a}\right|}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{\left|\left(-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ -4 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3^2 + 5^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{81 + 121 + 16}}{\sqrt{9 + 25 + 49}} = \sqrt{\frac{218}{83}}$$ 2 P

## Aufgabe 4.10 Ebenengleichung in verschiedenen Formen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i.) | 7 min | | Punkte - jeweils für (a.) und für (b.) | (i.) 4 P |
| (ii.) | 3 min | | | (ii.) 2 P |
| (iii.) | 3 min | | | (iii.) 2 P |

Die Punkte $P_1$, $P_2$ und $P_3$ spannen eine Ebene auf. Geben Sie die Ebenengleichung an, und zwar

(i.) in der Punkt-Richtungs-Form
(ii.) in der Normalenform
(iii.) in der Achsenabschnittsform

Wir üben diesen Aufgabentyp anhand zweier numerischer Beispiele:

(a.) $P_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ +11 \end{pmatrix}$ und (b.) $P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Lösung zu 4.10

**Arbeitshinweise:**

zu (i.) → Die Punkt-Richtungs-Form besteht aus einem Ortsvektor zu einem Punkt der Ebene und zwei Vektoren in der Ebene

zu (ii.) → Die Normalenform besteht aus einem Ortsvektor zu einem Punkt der Ebene und einem Normalenvektor senkrecht zu ihr

zu (iii.) → Die ist eine implizite Funktionsgleichung im mehrdimensionalen Raum, angegeben in kartesischen Koordinaten.

Die Musterlösung:

(a.) Die Punkt-Richtungs-Form lautet $\vec{r}(\lambda,\mu) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b}$. Dafür brauchen wir einen Ortsvektor zu einem Punkt der Ebene, z.B. $\vec{r}_1 = \overline{OP_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und dazu zwei Vektoren in der Ebene, die wir erhalten als Vektoren zwischen den Punkten der Ebene, zum Beispiel

$$\vec{a} = \overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \overline{P_1P_3} = \overline{OP_3} - \overline{OP_1} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ +7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ +9 \end{pmatrix}$$

Die Ebenengleichung in der Punkt-Richtungs-Form lautet also

4 P
$$\vec{r}(\lambda,\mu) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda - 10\mu \\ 4 - 2\lambda - 10\mu \\ 2 + 1\lambda + 9\mu \end{pmatrix}$$

Das Aufstellen der Normalenform $\vec{n} \cdot (\vec{r}(\lambda,\mu) - \vec{r}_1) = 0$ :

Eine Normale auf der Ebene findet man am leichtesten als Kreuzprodukt zweier Vektoren in der Ebene, z. Bsp.

2 P
$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{n} \cdot (\vec{r}(\lambda,\mu) - \vec{r}_1) = \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \vec{r}(\lambda,\mu) - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0}_{\text{Ebenengleichung in der Normalenform}}$$

Die Achsenabschnittsform bezieht sich auf kartesische Koordinaten. Man erhält sie, indem man $\vec{r}$ in kartesischen Koordinaten in die Normalenform einsetzt und das Skalarprodukt ausmultipliziert:

2 P
$$\vec{r}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow -8 \cdot (x-3) + 8 \cdot (y-4) + 0 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow -8x + 8y = 8$$

Teil (b.) dient der weiteren Übung und sei ohne viel Kommentar in analoger Weise gelöst:
Für das Aufstellen der Punkt-Richtungs-Form gilt

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{, dazu } \vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Damit lautet die Ebenengleichung in der Punkt-Richtungs-Form

$$\vec{r}(\lambda,\mu) = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-4\lambda-7\mu \\ 3-5\lambda+2\mu \\ 8-4\lambda-7\mu \end{pmatrix}$$ 4 P

Das Aufstellen der Normalenform sieht so aus:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 43 \\ 0 \\ -43 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{n} \cdot \left(\vec{r}(\lambda,\mu) - \vec{r}_1\right) = \begin{pmatrix} 43 \\ 0 \\ -43 \end{pmatrix} \cdot \left( \vec{r}(\lambda,\mu) - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = 0}_{\text{Ebenengleichung in der Normalenform}}$$ 2 P

Die Achsenabschnittsform erhält man wie folgt:

$$\vec{r}(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 43 \\ 0 \\ -43 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = 0 \Rightarrow 43 \cdot (x-5) + 0 \cdot (y-3) - 43 \cdot (z-8) = 0$$

$\Rightarrow \; 43x - 43z = -129$ Dies ist die Achsenabschnittsform. 2 P

## Aufgabe 4.11 Lage von Punkten in einer Ebene

| | | | | Punkte | $Q_1$: 4 P |
|---|---|---|---|---|---|
| | Vorbereitung ($Q_1$, $Q_2$) | 2 min je 8 min | | Vorbereitung: 2 P | $Q_2$: 4 P |

Gegeben ist eine Ebene durch drei Punkte $P_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Liegen die beiden Punkte $Q_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$ und $Q_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ in dieser Ebene?

## ▾ Lösung zu 4.11

Zuerst stellen wir die Ebenengleichung in der Punkt-Richtungs-Form auf:

$$\vec{r}(\lambda,\mu) = \overrightarrow{OP_1} + \lambda \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + \mu \cdot \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3-5 \\ 4-2 \\ 7-1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1-5 \\ 0-2 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-2\lambda-4\mu \\ 2+2\lambda-2\mu \\ 1+6\lambda \end{pmatrix}$$ 2 P

Die Prüfung, ob die Punkte $Q_1$ und $Q_2$ in dieser Ebene liegen, erfolgt dadurch, dass man eine Kombination $\lambda$, $\mu$ finden muss, mit der der jeweils untersuchte Punkt sich in allen drei

Koordinaten innerhalb der Ebenengleichung darstellen lassen muss. Wir benutzen also die x- und y-Komponente zur Bestimmung von $\lambda$ und $\mu$ und prüfen anschließend, ob die z-Komponente dazu passt.

Für den Punkt $Q_1$ bedeutet dies: x-Komponente $\Rightarrow\ 5-2\lambda-4\mu=-11 \quad (*1)$

y-Komponente $\Rightarrow\ 2+2\lambda-2\mu=0 \quad (*2)$

Dieses Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen wir nach dem Gauß-Algorithmus (im Vorgriff auf Kapitel 5 – wer den Gauß-Algorithmus nicht beherrscht, möge das Gleichungssystem auf eine andere Art lösen):

3 P

$$\begin{array}{lrr|rl}
 & \lambda & \mu & & \\
(*1)\Rightarrow & -2 & -4 & -16 & \\
(*2)\Rightarrow & +2 & -2 & -2 & \leftarrow +\text{Zeile}\,1 \\
\hline
 & -2 & -4 & -16 & \leftarrow -\tfrac{2}{3}\cdot \text{Zeile 2} \\
 & 0 & -6 & -18 & \\
\hline
 & -2 & 0 & -4 & \leftarrow \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\
 & 0 & -6 & -18 & \leftarrow \cdot\left(-\tfrac{1}{6}\right) \\
\hline
 & 1 & 0 & 2 & \\
 & 0 & 1 & 3 & \\
\hline
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\lambda=2\\ \mu=3\end{array}$$

Damit sind $\lambda$ und $\mu$ bestimmt.

Die Prüfung, ob die z-Komponente passt, geschieht durch Einsetzen von $\lambda$ und $\mu$ in die Ebenengleichung: $1+6\lambda=1+12=13$

1 P Tatsächlich passt die z-Komponente von $Q_1$, also liegt $Q_1$ mit $P_1$, $P_2$, $P_3$ in einer Ebene.

Für den Punkt $Q_2$ bedeutet dies: x-Komponente $\Rightarrow\ 5-2\lambda-4\mu=-1 \quad (*3)$

y-Komponente $\Rightarrow\ 2+2\lambda-2\mu=-4 \quad (*4)$

Wieder lösen wir das Gleichungssystem mit dem Gauß-Algorithmus:

3 P

$$\begin{array}{lrr|rl}
 & \lambda & \mu & & \\
(*3)\Rightarrow & -2 & -4 & -6 & \\
(*4)\Rightarrow & +2 & -2 & -6 & \leftarrow +\text{Zeile}\,1 \\
\hline
 & -2 & -4 & +2 & \leftarrow -\tfrac{2}{3}\cdot \text{Zeile 2} \\
 & 0 & -6 & -12 & \\
\hline
 & -2 & 0 & +2 & \leftarrow \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \\
 & 0 & -6 & -12 & \leftarrow \cdot\left(-\tfrac{1}{6}\right) \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & \\
 & 0 & 1 & +2 & \\
\hline
\end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\lambda=-1\\ \mu=2\end{array}$$

Damit sind $\lambda$ und $\mu$ bestimmt.

Es folgt die Prüfung, ob die z-Komponente passt, und zwar wieder durch Einsetzen von $\lambda$ und $\mu$ in die Ebenengleichung: $1+6\lambda=1-6=-5$

1 P Dies ist nicht die z-Komponente von $Q_2$, also liegt $Q_2$ nicht in einer Ebene mit $P_1$, $P_2$, $P_3$.

# Aufgabe 4.12 Abstand eines Punktes von einer Ebene

| | | |
|---|---|---|
| 10 min | | Punkte 6 P |

Gegeben sei eine Ebene durch $\vec{n}\cdot\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)=0$ in der Normalenform sowie ein Punkt $Q$ durch den Ortsvektor $\vec{r}_Q$.

Die Werte für unser Übungsbeispiel seien $\vec{r}_1=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$, $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{r}_Q=\begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}$.

Die anschauliche Bedeutung dieser Größen findet sich in Bild 4-12. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes von der Ebene.

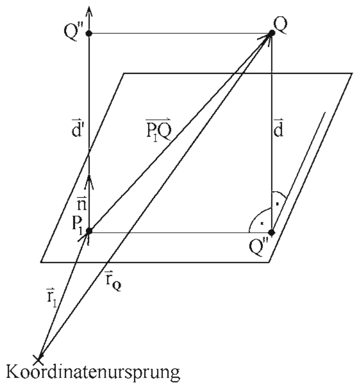



**Bild 4-12**
Schaubild zum Abstand eines Punktes von einer Ebenen
$\vec{r}_Q$ = Ortsvektor des Punktes
$\vec{n}$ = Normalenvektor zur Ebenen
$\vec{r}_1$ = Ortsvektor zu einem Punkt $P_1$ auf der Ebenen
$\vec{d}$ = Lot vom Punkt $Q$ auf die Gerade
$\vec{d}\,'$ = zu $\vec{d}$ paralleler Vektor mit Anfang in $P_1$
$Q'$, $Q"$ = Hilfsgrößen, die sich im Verlauf der Lösung der Aufgabe ergeben

## Lösung zu 4.12

Der einfachste Weg zur Berechnung des Abstandes $\left|\vec{d}\right|$ verläuft über die Projektion von $Q$ auf den Normalenvektor $\vec{n}$. Dies führt zum Vektor $\vec{d}\,'$, der von $P_1$ nach $Q"$ zeigt.
Da die Projektion dem Skalarprodukt entspricht, gilt

$$\vec{n}\cdot\vec{d}\,'=\underbrace{\vec{n}\cdot\overline{P_1Q"}\;=\;\vec{n}\cdot\overline{P_1Q}}_{\text{weil die Projektion betrachtet wird}}=\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)$$

Wir lösen nach $\left|\vec{d}\,'\right|$ auf, unter Verwendung der für Vektoren gültigen Rechenregeln:

$\vec{n}\cdot\vec{d}\,'=\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)$ | wegen der Kommutativität des Skalarprodukts folgt

$\vec{d}\,'\cdot\vec{n}=\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)$ | Multiplikation mit $\vec{n}$ von rechts liefert

$\left(\vec{d}\,'\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}=\left(\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)\right)\cdot\vec{n}$ | Assoziativität des Skalarprodukts führt zu

$\vec{d}\,'\cdot\left(\vec{n}\cdot\vec{n}\right)=\left(\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)\right)\cdot\vec{n}$ | Division durch den Skalar $\left(\vec{n}\cdot\vec{n}\right)$

3 P
$$\vec{d}\,' = \frac{\left(\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)\right)\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2} \qquad \text{| Betrag der Vektoren bilden}$$

$$\left|\vec{d}\,'\right| = \frac{\left(\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)\right)\cdot|\vec{n}|}{|\vec{n}|^2} \qquad \text{| Kürzen durch } |\vec{n}| \text{ und Einsetzen der Werte}$$

3 P
$$\left|\vec{d}\,'\right| = \frac{\left(\vec{n}\cdot\left(-\vec{r}_Q+\vec{r}_1\right)\right)}{|\vec{n}|} = \frac{\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\left(-\begin{pmatrix}0\\12\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}\right)\right)}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{\left(\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-7\\5\end{pmatrix}\right)}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{(6-7+10)}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} \qquad (*)$$

Da $\vec{d}\,'$ die selbe Länge hat wie $\vec{d}$ (vgl. nochmals Bild 4-12), ist dies der gesuchte Abstand des Punktes von der Ebene.

**Anmerkung:**

Über die Länge des Normalenvektors $\vec{n}$ im Zusammenhang mit der Projektion eines anderen Vektors auf $\vec{n}$ braucht man sich keine Gedanken machen. Es ist egal, ob $\vec{n}$ kürzer oder länger ist als $\overline{P_1Q}$ bzw. $\overline{P_1Q''}$, denn am Ende der Berechnung kürzt sich die Länge von $\vec{n}$ heraus. Dies erkennt man daran, dass in der Gleichung $(*)$ ein Faktor $\cancel{\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}}$ enthalten ist.

## Aufgabe 4.13 Abstand eines Punktes von einer Geraden

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | allgem. Teil → <br> (a,b,c.) → | 2 min <br> je 5 min | | Punkte <br> allgem Teil: 2 P | dazu <br> (a,b,c.) je 2 P |

Eine Gerade sei gegeben in der Punkt-Richtungs-Form $\vec{r}(\lambda)=\overline{OP_1}+\lambda\cdot\vec{a}$ (mit $O$ = Koordinatenursprung) und dazu sei ein Punkt $Q$ gegeben, dessen Abstand von der Geraden berechnet werden soll. Wir üben diese Aufgabestellung anhand der drei nachfolgenden Beispiele:

(a.) $P_1=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}$, dazu der Punkt $Q=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$

(b.) $P_1=\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$ und $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$, dazu der Punkt $Q=\begin{pmatrix}8\\8\\7\end{pmatrix}$

(c.) $P_1=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}$, dazu der Punkt $Q=\begin{pmatrix}-4\\-2\\-3\end{pmatrix}$

## Lösung zu 4.13

Den Abstand eines Punktes ( $P_1$ ) von einer Geraden in der Punkt-Richtungs-Form berechnet man gemäß $d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$. Dabei kann man den Vektor $\overrightarrow{P_1Q}$ aus der Differenz der Ortsvektoren der beiden Punkte finden: $\overrightarrow{P_1Q}=-\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP_1}$

Damit schreibt sich der gesuchte Abstand als $d=\frac{\left|\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP_1}\right)\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$ 2 P

Wir setzen in diesen Ausdruck die Geraden und die Punkte unserer Aufgabenstellung ein:
(Die Bildung des Kreuzproduktes mag der Leser ohne Lösungsmuster nachvollziehen.)

(a.)

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP_1}\right)\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}4-2\\2-4\\3-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}7\\13\\-4\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{(7)^2+(13)^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-3)^2+(1)^2+(-2)^2}}=\sqrt{\frac{234}{14}}=\sqrt{\frac{117}{7}}$$ 2 P

(b.)

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP_1}\right)\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}8-3\\8-5\\7-7\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-6\\10\\7\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{(-6)^2+(10)^2+(7)^2}}{\sqrt{(1)^2+(2)^2+(-2)^2}}=\sqrt{\frac{185}{9}}$$ 2 P

(c.)

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{P_1Q}\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP_1}\right)\times\vec{a}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-4-4\\-2-4\\-3-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\3\\5\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\left|\begin{pmatrix}-9\\54\\-36\end{pmatrix}\right|}{|\vec{a}|}=\frac{\sqrt{(7)^2+(13)^2+(-4)^2}}{\sqrt{(-2)^2+(3)^2+(5)^2}}=\sqrt{\frac{4293}{38}}$$ 2 P

## Aufgabe 4.14 Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a,i) & (a,ii) | 3 min 3 min | | Punkte (a,i) 2 P | (a,ii) 2 P |
| (b,i) & (b,ii) | 2 min 2 min | | (b,ii) 1 P | (b,ii) 1 P |

Eine Ebene verlaufe senkrecht zum Vektor $\vec{n}$ und enthalte den Punkt $A$.

(a.) Bestimmen Sie die Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten.

(b.) Bestimmen Sie die y-Koordinate eines Punktes $B$ von dem die x- und die z-Koordinate gegeben ist, und der in der Ebene liegt.

Man findet die Fragestellung (b.) manchmal auch unter der Formulierung:

An welchem Punkt durchstößt eine Parallele zur y-Achse mit gegebener x- und z-Koordinate die Ebene?

Wir üben diesen Aufgabentyp anhand zweier Beispiel-Wertevorgaben:

(i.) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ B_y = ? \\ 2 \end{pmatrix}$ und (ii.) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ; $B = \begin{pmatrix} 4 \\ B_y = ? \\ 2 \end{pmatrix}$

## Lösung zu 4.14

(a.) Gegeben ist eine Ebene in der Normalenform. Diese lautet $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \qquad (**)$,

worin $\vec{n}$ = Normalenvektor,
$\vec{r}$ = Ortsvektor zu den Punkten der Ebene
$\vec{r}_A$ = Ortsvektor zum Punkt $A$

Rechnen wir das Skalarprodukt in $(**)$ aus, so erhalten wir die Ebenengleichung in kartesischen Koordinaten, also in der Form $ax + by + cz = d$ :

2 P (i.) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = (5x-5) + (2y-4) + (z-3) = 0 \Rightarrow \quad 5x + 2y + z = 12$

2 P (ii.) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-11 \\ y-2 \\ z+3 \end{pmatrix} = (2x-22) + (4y-8) + (7z+21) = 0 \Rightarrow \quad 2x + 4y + 7z = 9$

(b.) Die Ebenengleichung muss auch für den Punkt $B$ passen, d.h. es muss gelten
$a \cdot B_x + b \cdot B_y + c \cdot B_z = d$ .

Darauf basierend bestimmen wir $B_y$ , also die y-Koordinate von $B$ :

1 P (i.) $5B_x + 2B_y + B_z = 12 \quad \Rightarrow \quad 5 \cdot 4 + 2 \cdot B_y + 1 \cdot 2 = 12 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot B_y = 12 - 20 - 2 \quad \Rightarrow \quad B_y = -5$

1 P (ii.) $2B_x + 4B_y + 7B_z = 9 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 4 + 4 \cdot B_y + 7 \cdot 2 = 9 \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot B_y = 9 - 8 - 14 \quad \Rightarrow \quad B_y = -\frac{13}{4}$

## Aufgabe 4.15 Schnittpunkt von Geraden

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (i,a) & (i,b) | 7 min<br>3 min | | Punkte<br>(i,a) 4 P | (i,b) 2 P |
| | (ii,a) & (ii,b) | 6 min<br>8 min | | (ii,a) 4 P | (ii,b) 4 P |

Gegeben seien zwei Geraden $\vec{g}_1(\lambda_1) = \vec{r}_1 + \lambda_1 \vec{a}_1$ und $\vec{g}_2(\lambda_2) = \vec{r}_2 + \lambda_2 \vec{a}_2$

(a.) Untersuchen Sie, ob die beiden Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
(b.) Falls ja → Bestimmen Sie die Lage dieses gemeinsamen Schnittpunktes.
Falls nein → Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der beiden Geraden zueinander.

Wir üben wieder anhand zweier Beispiele:

(i.) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dazu $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und

(ii.) $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dazu $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

## Lösung zu 4.15

**Arbeitshinweis zu (a.):**
Zur Untersuchung auf einen gemeinsamen Punkt setzt man die beiden Geraden gleich und erhält so drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung, so haben die Geraden einen gemeinsamen Punkt. Ist das Gleichungssystem hingegen in sich widersprüchlich, so gibt es keinen gemeinsamen Punkt.

**Arbeitshinweis zu (b.):**
Aufgabenteil (i.) → Haben die Geraden einen gemeinsamen Schnittpunkt, so findet man diesen, indem man einen der beiden Parameter $\lambda_1$ oder $\lambda_2$ aus Aufgabenteil (a.) in die zugehörige Geradengleichung einsetzt (also $\lambda_1$ in $g_1$ oder $\lambda_2$ in $g_2$) – der sich ergebende Punkt ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Aufgabenteil (ii.) → Zur Bestimmung des kleinsten Abstandes der beiden Geraden zueinander verwendet man eine Formel, die man normalerweise in Formelsammlungen nachschlägt und die man sich nicht auswendig merkt. Sie ist im weiteren Verlauf der Musterlösung angegeben.

(i,a.) Wir beginnen mit dem Gleichsetzen der Geraden zur Prüfung, ob ein gemeinsamer Schnittpunkt existiert:

$$\vec{g}_1 = \vec{g}_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 1+2\lambda_1 = 4-\lambda_2 & (*1) \\ 2+\lambda_1 = 7+3\lambda_2 & (*2) \\ 3 = 1-2\lambda_2 & (*3) \end{matrix}$$ 2 P

Zur Bestimmung von $\lambda_1$ und $\lambda_2$ beschränken wir uns auf die Gleichungen $(*1)$ und $(*2)$. Soll die Gerade einen Schnittpunkt haben, dann muss das so gefundene Ergebnis auch in $(*3)$ passen.

Dazu bilden wir die Differenz $(*1) - 2 \cdot (*2)$:

$$\begin{array}{rl} 1+2\lambda_1 = 4-1\lambda_2 & \Big| \\ 4+2\lambda_1 = 14+6\lambda_2 & \Big| - \\ \hline -3 = -10-7\lambda_2 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 7\lambda_2 = -7 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = -1$$

2 P Einsetzen von $\lambda_2$ in $(*1)$ liefert dann: $1+2\lambda_1 = 4-(-1) \;\Rightarrow\; 2\lambda_1 = 4 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 2$

Es folgt die Kontrolle der beiden Parameter in $(*3)$: $3 = 1-2\lambda_2 \;\Leftrightarrow\; 3 = 1-(-2)$ , passt

(i,b.) Die beiden Geraden haben also einen Schnittpunkt, dessen Lage wir bestimmen:

$$\vec{g}_1(\lambda_1 = 2) = \begin{pmatrix} 1+2\lambda_1 \\ 2+1\lambda_1 \\ 3+0\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und ebenso} \quad \vec{g}_2(\lambda_2 = -1) = \begin{pmatrix} 4-1\lambda_2 \\ 7+3\lambda_2 \\ 1-2\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 P Dort liegt der gemeinsame Schnittpunkt.

(ii,a.) Gleichsetzen der Geraden zur Prüfung der Existenz eines gemeinsamen Schnittpunktes:

2 P
$$\vec{g}_1 = \vec{g}_2 \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{array}{ll} 2+\lambda_1 = -1+2\lambda_2 & (*4) \\ 4+2\lambda_1 = -3+4\lambda_2 & (*5) \\ 7+3\lambda_1 = -5+7\lambda_2 & (*6) \end{array}$$

Zum Auflösen des Gleichungssystems bilden wir die Differenz $(*5)-2\cdot(*4)$:

2 P
$$\begin{array}{l|l} 4+2\lambda_1 = -3+4\lambda_2 & \\ 4+2\lambda_1 = -2+4\lambda_2 & - \\ \hline 0 = -1 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung.
Die Geraden haben keinen Schnittpunkt.

(ii,b.) Wir bestimmen also den kürzesten Abstand der beiden Geraden zueinander. Die Formel dafür findet man in einer Formelsammlung:

$$d = \frac{\left|\left[\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \;\; (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right]\right|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$ , wobei der Ausdruck im Zähler das Spatprodukt ist.

Darin ist

$$\mathit{Zähler} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -7 \\ 3 & 7 & -12 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & -12 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 1$$

Die Berechnung erfolgt im Vorgriff auf Kapitel 5 als Determinante.

4 P
$$\mathit{Nenner} = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 14-12 \\ -(7-6) \\ (4-4) \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} +2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} \;\Rightarrow\; d = \frac{\mathit{Zähler}}{\mathit{Nenner}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$ als Abstand

## Aufgabe 4.16 Schnittgeraden von Ebenen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (i.) | 10 min | | Punkte | (i.) 6 P |
| (ii.) | 4 min | | | (ii.) 2 P |

Gegeben seien zwei Ebenen in der Normalenform: $\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0$ und $\vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) = 0$ ,

mit den Werten $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie die Schnittgerade und den Schnittwinkel der beiden Ebenen (vgl. Bild 4-16).

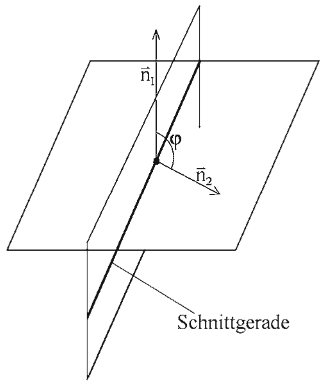



**Bild 4-16**
Schaubild → Schnittgerade und Schnittwinkel zweier Ebenen
$\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ = Normalenvektoren der beiden Ebenen
$\varphi$ = Schnittwinkel

## ▾ Lösung zu 4.16

(i.) Zuerst bestimmen wir die Schnittgerade. Sie trage die Geradengleichung $\vec{s}(\lambda) = \vec{s}_1 + \lambda \cdot \vec{a}$, deren Größen $\vec{s}_1$ und $\vec{a}$ wir nun bestimmen müssen:
Ihre Richtung $\vec{a}$ steht senkrecht zu den beiden Normalenvektoren, ist also aus deren Kreuzprodukt bestimmbar:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}$$ 2 P

Einen Punkt $\vec{s}_1$ auf der Schnittgeraden findet man durch Gleichsetzen der beiden Ebenengleichungen:

$$\vec{n}_1 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_1) = 0 = \vec{n}_2 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_2) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \underset{(*1)}{=} 0 \underset{(*2)}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

Die beiden Gleichzeichen $(*1)$ und $(*2)$ definieren zwei Gleichungen mit den drei kartesischen Komponenten von $\vec{r}$ (nämlich $r_x$, $r_y$ und $r_z$) also mit drei Unbekannten:

$$2 \cdot (r_x - 3) + 5 \cdot (r_y - 1) + 1 \cdot (r_z - 2) = 0 \quad \text{und} \quad 2 \cdot (r_x - 0) + 4 \cdot (r_y - 2) + 7 \cdot (r_z - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2r_x + 5r_y + 1r_z = 13 \quad \text{und} \quad \Rightarrow \quad 2r_x + 4r_y + 7r_z = 50 \qquad (**)$$ 2 P

**Arbeitshinweis:**

Theoretisch hätte man diese beiden Gleichungen benutzen können, um zwei der drei Parameter ($r_x, r_y, r_z$) zu bestimmen. Das Ergebnis wäre dann die Geradengleichung der Schnittgeraden, wobei der dritte Parameter als der freie Parameter der Geradengleichung fungieren würde (siehe $\lambda$ in der Gleichung für $\vec{s}(\lambda)$).

Da wir aber die Richtung der Schnittgeraden bereits kennen, ist es bequemer, einen willkürlichen Punkt auf der Schnittgeraden zu wählen, also einen der drei Parameter willkürlich festzulegen und die anderen beiden dazu passend zu berechnen.

In der vorliegenden Aufgabe wählen wir (willkürlich) $r_x = 0$, was uns zu demjenigen Punkt führt, an dem die Schnittgerade die yz-Ebene durchstößt. Setzt man $r_x = 0$ in die beiden Gleichungen $(**)$ ein, so erhält man ein Gleichungssystems aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welches sich nach $r_y$ und $r_z$ auflösen lässt:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot 0+5\cdot r_y+1\cdot r_z=13 \;\Rightarrow\; 5\cdot r_y+1\cdot r_z=6 \\ 2\cdot 0+4\cdot r_y+7\cdot r_z=50 \;\Rightarrow\; 4\cdot r_y+7\cdot r_z=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} r_y=\frac{41}{31} \\ r_z=\frac{198}{31} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{s}_1=\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{41}{31} \\ \frac{198}{31} \end{pmatrix}$$

2 P Damit sind die beiden Größen $\vec{a}$ und $\vec{s}_1$ für eine mögliche Angabe der Geradengleichung der Schnittgeraden der beiden Ebenen $\vec{s}(\lambda)=\vec{s}_1+\lambda\cdot\vec{a}$ gefunden.

(ii.) Es folgt die Bestimmung des Schnittwinkels:
Da die beiden Normalvektoren senkrecht auf den beiden Ebenen stehen, ist der Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen der selbe wie zwischen den Normalenvektoren. Es genügt also die Bestimmung des Winkels zwischen den beiden Vektoren über das Skalarprodukt:
$\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|\cdot\cos(\varphi)$

2 P
$$\Rightarrow \quad \cos(\varphi)=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{4+20+7}{\sqrt{4+25+1}\cdot\sqrt{4+16+49}}=\sqrt{\frac{961}{2070}} \quad\Rightarrow\quad \varphi=\arccos\left(\sqrt{\frac{961}{1170}}\right)\overset{TR}{\approx}47.05°$$

für den Schnittwinkel zwischen den beiden Ebenen.

## Aufgabe 4.17 Ellipsengleichung

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 min | | Punkte 2 P |

Betrachten Sie die Ellipse in Bild 4-17. Geben Sie deren mathematische Funktion in der expliziten Form $y = y(x)$ an.

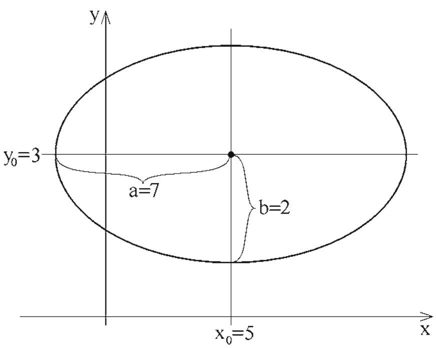



**Bild 4-17**
Graph einer Ellipse, deren Gleichung bestimmt werden soll.

## Lösung zu 4.17

Die Ellipse ist einer der Kegelschnitte. Die allgemeine Ellipsen-Gleichung lautet in impliziter Form:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (*)$$

Um die explizite Form zu bestimmen, lösen wir $(*)$ nach $y$ auf:

$$\tfrac{b^2}{a^2}\cdot(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=b^2 \quad\Rightarrow\quad (y-y_0)^2=b^2-\tfrac{b^2}{a^2}\cdot(x-x_0)^2 \quad\Rightarrow\quad y=y_0\pm\sqrt{b^2-\tfrac{b^2}{a^2}\cdot(x-x_0)^2}$$

Speziell für die Vorgaben aus Bild 4-9 erhält man damit

$$y=y_0\pm\sqrt{b^2-\tfrac{b^2}{a^2}\cdot(x-x_0)^2}=y_0\pm\tfrac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-(x-x_0)^2}=3\pm\tfrac{2}{7}\cdot\sqrt{49-(x-5)^2}=3\pm\tfrac{2}{7}\cdot\sqrt{-x^2+10x+24}$$ 2 P

Das Rechenzeichen „$\pm$" vor der Wurzel unterscheidet zwischen den beiden Hälften der Ellipse. Das „$+$" steht für die obere Hälfte, das „$-$" für die untere Hälfte.

## Aufgabe 4.18 Koordinatentransformation – Drehung

| | | |
|---|---|---|
| | (A…D) je 3 min | Punkte je 1 P |

Gegeben sei eine Figur in der xy-Ebene, bestehend aus den Punkten $A, B, C, D$ (siehe Bild 4-18). Diese Figur soll in mathematisch positiver Drehrichtung um einen Winkel von $\varphi=127°$ um die z-Achse gedreht werden. Berechnen Sie, auf welchen Positionen $A', B', C', D'$ die Punkte nach der Drehung zu liegen kommen.

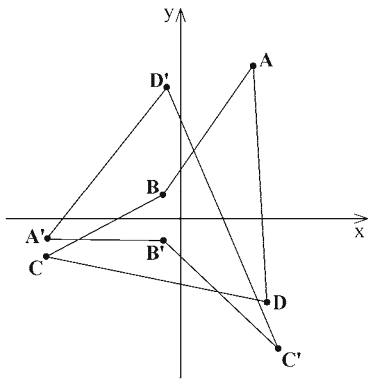



**Bild 4-18**
Graphische Darstellung der ungedrehten und der gedrehten Figur, bestehend aus je vier Punkten auf der Ebene mit den folgenden Koordinaten:

$$A=\begin{pmatrix}+3.7\\+5.6\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}-0.8\\+0.9\end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix}-6.4\\-1.5\end{pmatrix};\quad D=\begin{pmatrix}+4.2\\-3.0\end{pmatrix}$$

## Lösung zu 4.18

In Formelsammlungen findet man typischerweise die Formel für die Drehung der Koordinatenachsen um den Winkel $\alpha$:

$$x'=x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\sin(\alpha)$$
$$y'=-x\cdot\sin(\alpha)+y\cdot\cos(\alpha)$$

Da laut Aufgabenstellung umgekehrt die Punkte gegenüber den Koordinatenachsen gedreht werden sollen, müssen wir $\alpha = -\varphi$ einsetzen:

$$x' = x \cdot \cos(-\varphi) + y \cdot \sin(-\varphi)$$
$$y' = -x \cdot \sin(-\varphi) + y \cdot \cos(-\varphi)$$

Setzen wir in diese Transformation die Punkte $A, B, C, D$ ein, so erhalten wir

1 P $$\left.\begin{array}{l} x_a' = x_a \cdot \cos(-\varphi) + y_a \cdot \sin(-\varphi) = 3.7 \cdot \cos(-127°) + 5.6 \cdot \sin(-127°) \\ y_a' = -x_a \cdot \sin(-\varphi) + y_a \cdot \cos(-\varphi) = -3.7 \cdot \sin(-127°) + 5.6 \cdot \cos(-127°) \end{array}\right\} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} -6.69907 \\ -0.41521 \end{pmatrix}$$

1 P $$\left.\begin{array}{l} x_b' = x_b \cdot \cos(-\varphi) + y_b \cdot \sin(-\varphi) = -0.8 \cdot \cos(-127°) + 0.9 \cdot \sin(-127°) \\ y_b' = -x_b \cdot \sin(-\varphi) + y_b \cdot \cos(-\varphi) = -0.8 \cdot \sin(-127°) + 0.9 \cdot \cos(-127°) \end{array}\right\} \Rightarrow B' = \begin{pmatrix} -0.23732 \\ -1.18054 \end{pmatrix}$$

1 P $$\left.\begin{array}{l} x_c' = x_c \cdot \cos(-\varphi) + y_c \cdot \sin(-\varphi) = -6.4 \cdot \cos(-127°) - 1.5 \cdot \sin(-127°) \\ y_c' = -x_c \cdot \sin(-\varphi) + y_c \cdot \cos(-\varphi) = +6.4 \cdot \sin(-127°) - 1.5 \cdot \cos(-127°) \end{array}\right\} \Rightarrow C' = \begin{pmatrix} 5.04957 \\ -4.20854 \end{pmatrix}$$

1 P $$\left.\begin{array}{l} x_d' = x_d \cdot \cos(-\varphi) + y_d \cdot \sin(-\varphi) = 3.7 \cdot \cos(-127°) + 5.6 \cdot \sin(-127°) \\ y_d' = -x_d \cdot \sin(-\varphi) + y_d \cdot \cos(-\varphi) = -3.7 \cdot \sin(-127°) + 5.6 \cdot \cos(-127°) \end{array}\right\} \Rightarrow D' = \begin{pmatrix} -0.131717 \\ +5.159714 \end{pmatrix}$$

**Arbeitshinweis:**

Wer die Matrixmultiplikation beherrscht (siehe Kapitel 5), wird folgende Schreibweise für die Drehung wiedererkennen, die das Merken erleichtert:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 4.19 Polarkoordinaten

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 min | | Punkte 3 P |

Transformieren Sie bitte die in kartesischen Koordinaten gegebene Funktionsgleichung $y(x) = 2x - 5$ in eine Funktionsgleichung in Polarkoordinaten.

Zur Veranschaulichung fertigen Sie bitte auch eine graphische Darstellung der Funktion an.

## Lösung zu 4.19

**Arbeitshinweis:**

Die Darstellung von Polarkoordinaten und deren Umrechnung in kartesische Koordinaten wird zur Erinnerung in Bild 4-19a gezeigt.

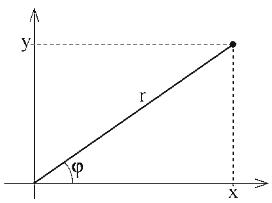



**Bild 4-19a**
Übliche Darstellung von Polarkoordinaten und deren Umrechnung in kartesische Koordinaten.

$$x = r \cdot \cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r \cdot \sin(\varphi) \quad \text{sowie} \quad \tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

**Stolperfalle:**

Gibt man Funktionsgleichungen in Polarkoordinaten an, so kann der Radius $r$ auch negative Werte annehmen. Beim Zeichnen der Funktion ist dies wie folgt zu berücksichtigen: Trägt man unter einem Winkel $\varphi$ einen negativen Radius $r$ an, so ist dies gleichbedeutend mit dem Antragen des Betrages des Radius $|r|$ unter dem Winkel $\varphi + 180°$ .

Wir setzen die Koordinatentransformation in die Funktion und erhalten

$$y = 2x - 5 \;\Rightarrow\; r \cdot \sin(\varphi) = 2r \cdot \cos(\varphi) - 5 \;\Rightarrow\; r \cdot (\sin(\varphi) - 2\cos(\varphi)) = 5 \;\Rightarrow\; r = \frac{5}{(\sin(\varphi) - 2\cos(\varphi))}$$ 2 P

Die graphische Darstellung findet man in Bild 4-19b. Wer mag, kann zur Erhöhung der Plausibilität der Darstellung eine Wertetabelle anfertigen.

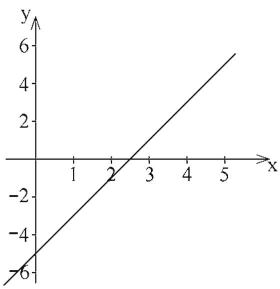



**Bild 4-19b**
Graphische Darstellung der Funktionen
$y = 2x - 5$ bzw. $r = \dfrac{5}{(\sin(\varphi) - 2\cos(\varphi))}$ 1 P

## Aufgabe 4.20 Kugelkoordinaten

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | je 2 min | | je 5 P |

Beim GPS-Navigationssystem werden Navigationspositionen in kartesischen Koordinaten beschrieben. In der terrestrischen Navigation hingegen werden die Positionskoordinaten typischerweise in Koordinaten angegeben, die den Kugelkoordinaten sehr ähneln. Der Unterschied zwischen Kugelkoordinaten der Mathematik und den Navigationskoordinaten der Geodäsie ist folgender:

• Der Radius $r$ wird in Kugelkoordinaten ab dem Erdmittelpunkt gezählt, in der Navigation hingegen wird die Höhe über (oder unter) der Meeresoberfläche angegeben. Für die vorliegende Übungsaufgabe genüge uns die Näherung: Der Erdradius sei mit 6380 km angesetzt.

• Der Polwinkel $\vartheta$ läuft in Kugelkoordinaten von $0°...180°$, der geographische Breitengrad der Navigation hingegen läuft von $90°$ nördlicher Breite (Nordpol, $\vartheta = 0°$) über $0°$ nördlicher oder südlicher Breite (Äquator $\vartheta = 90°$) bis $90°$ südlicher Breite (Südpol $\vartheta = 180°$).

• Der Winkel $\varphi$ ist in beiden Fällen gleichbedeutend, wobei $\varphi = 0°$ in Greenwich liegt und in Richtung Osten ansteigt.

Zur Erinnerung zeigt Bild 4-20 die in der Mathematik übliche Darstellung von Kugelkoordinaten sowie deren Umrechnung in kartesische Koordinaten.

Rechnen Sie bitte auf dieser Basis einige Navigationskoordinaten um:

(a.) 52°10.542’Nord ; 10°32.877’Ost ; 120 Meter über dem Meeresspiegel → x,y,z = ?

(b.) 38°51.333’Nord ; 94°47.941’West ; 250 Meter über dem Meeresspiegel → x,y,z = ?

(c.) $x = 5202.20168\,\text{km}$ ; $y = -1893.44656\,\text{km}$ ; $z = -3196.2500\,\text{km}$ → Navigationskoordinaten ?

(d.) $x = -6177.9210\,\text{km}$ ; $y = +1089.3342\,\text{km}$ ; $z = -1106.1389\,\text{km}$ → Navigationskoordinaten ?

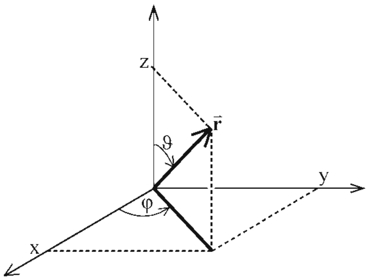



**Bild 4-20**
Übliche Darstellung von Kugelkoordinaten und deren Umrechnung in kartesische Koordinaten.

$$x = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$y = r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \sin(\varphi) \qquad \vartheta = \arccos\left(\tfrac{z}{r}\right)$$
$$z = r \cdot \cos(\vartheta) \qquad \tan(\varphi) = \tfrac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right) + n \cdot \pi$$

$$\text{mit} \quad n = \begin{cases} 0 & \text{für } x > 0 \text{ und } y > 0 \\ 1 & \text{für } x < 0 \\ 2 & \text{für } x > 0 \text{ und } y < 0 \end{cases}$$

siehe Anmerkung Stolperfalle bei Aufgabenteil (c.)

## Lösung zu 4.20

Bei der Umrechnung von Navigationskoordinaten in kartesische Koordinaten bestimmen wir zuerst aus den geographischen Angaben die $r, \vartheta, \varphi$ in Kugelkoordinaten und daraus schließlich die $x, y, z$ der kartesischen Koordinaten.

Dabei sind Bogenminuten und ggf. Bogensekunden umzurechnen: $1' = \frac{1}{60}°$ und $1'' = \frac{1}{3600}°$.

(a.) $52°10.542’\text{Nord} = \left(52° + \frac{10.542°}{60}\right)\text{Nord} = 52.1757°\,\text{Nord} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 37.8243°$

$10°32.877’\text{Ost} = \left(10° + \frac{32.877°}{60}\right)\text{Ost} = 10.54795°\,\text{Ost} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 10.54795°$

120 Meter über Normalnull $\Rightarrow \quad r = 6380\text{ km} + 0.12\text{ km} = 6380.12\text{ km}$

2 P $\Rightarrow \quad x \overset{TR}{\approx} 3846.444\text{ km}$ und $y \overset{TR}{\approx} 716.226\,\text{km}$ und $z \overset{TR}{\approx} 5039.625\,\text{km}$

(b.) $38°51.333’\text{Nord} = \left(38° + \frac{51.333°}{60}\right)\text{Nord} = 38.85555°\,\text{Nord} \quad \Rightarrow \quad \vartheta = 51.14445°$

$94°47.941’\text{West} = \left(94° + \frac{47.941°}{60}\right)\text{West} = 94.79902°\,\text{West} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 265.20098°$

250 Meter über Normalnull $\Rightarrow \quad r = 6380\text{ km} + 0.25\text{ km} = 6380.25\text{ km}$

2 P $\Rightarrow \quad x \overset{TR}{\approx} -415.668\text{ km}$ und $y \overset{TR}{\approx} -4951.075\,\text{km}$ und $z \overset{TR}{\approx} 4002.708\,\text{km}$

Aus kartesischen Koordinaten kommend, finden wir über Kugelkoordinaten schließlich die Navigationskoordinaten.

(c.) $x = 5202.20168\,\text{km}$ ; $y = -1893.44656\,\text{km}$ ; $z = -3196.2500\,\text{km}$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \overset{TR}{\approx} 6392.500\,\text{km} \quad \Rightarrow$ Höhe über dem Meeresspiegel $h \overset{TR}{\approx} 12.500\,\text{km}$

und $\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{-3196.2500\,\text{km}}{6392.5\,\text{km}} \overset{TR}{\approx} 120.00000° \quad \Rightarrow$ Dies sind 30° südlicher Breite.

und $\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi \overset{TR}{\approx} -20.00000° + 360° = 340° \quad \Rightarrow$ Dies sind 20° westlicher Länge. 2 P

**Stolperfalle:**

Bei der Berechnung von $\varphi$ muss man bedenken, dass der Arcus Tangens nur Winkel zwischen $-90°$ und $+90°$ ergeben kann. Der Winkel $\varphi$ läuft aber in Kugelkoordinaten von $0°$ bis $360°$. Je nach Lage des Punktes (siehe Bild 4-20) muss also ggf. 180° oder 360° addiert werden, um die volle Kugeloberfläche beschreiben zu können. (Anmerkung: Diese Stolperfalle gilt in analoger Weise auch bei Polarkoordinaten – siehe Aufgabe 4.19.)

Im Beispiel des Aufgabenteil (c.) ist $x > 0$ und $y < 0 \quad \Rightarrow \quad n = 2$.

Es müssen also $360°$ addiert werden, d.h. es ist $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 360°$

(d.) $x = -6177.9210\,\text{km}$ ; $y = +1089.3342\,\text{km}$ ; $z = -1106.1389\,\text{km}$

$\Rightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \overset{TR}{\approx} 6370.000\,\text{km} \quad \Rightarrow$ Höhe $h \overset{TR}{\approx} -10.000\,\text{km}$ , 10000 Meter unter dem Meer.

und $\vartheta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{z = -1106.1389\,\text{km}}{6370.000\,\text{km}} \overset{TR}{\approx} 100.00000° \quad \Rightarrow$ Dies sind 10° südlicher Breite.

und $\tan(\varphi) = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad \varphi \overset{TR}{\approx} -10.00000° + 180° = 170° \quad \Rightarrow$ Dies sind 170° östlicher Länge. 2 P

(Im Fall von Aufgabenteil (d.) ist $n = 1$ in der Formel von Bild 4-20.)

## Aufgabe 4.21 Textbeispiel – Vektorrechnung

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 20 min | | Punkte 9 P |

Ein Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h relativ zur Luft. Der Wind weht genau aus Südost (Kompassrichtung 315°) mit 80 km/h.

Welchen Kompasskurs muss der Pilot einstellen, damit er genau in Richtung Norden fliegt?

Welche Geschwindigkeit über Grund legt das Flugzeug auf diesem Nordkurs zurück?

Anmerkung: Kompasskurse rechnet man bei der Navigation wie folgt:

Norden = 0°, und dann in aufsteigender Zählung nach Osten = 90°, weiter nach Süden = 180° und wieder weiter nach Westen = 270°. Vollendet man einen ganzen Kreis in aufsteigender Zählung, so erreicht man schließlich bei 360° wieder Norden.

## Lösung zu 4.21

**Arbeitshinweis:**

Die Vektoren sind über Beträge und Kompasskurse gegeben bzw. gefragt. Da aber die zur Lösungsfindung benötigte Vektoraddition in kartesischen Koordinaten auszuführen ist, müssen wir entsprechend umrechnen.

Vorgehensweise:
Gearbeitet wird mit den Vektoren der Geschwindigkeiten. Diese bestimmen wir zuerst, um anschließend damit die Fragen der Aufgabenstellung beantworten zu können.

Drei Vektoren liegen vor: Windgeschwindigkeit → $\vec{v}_w = \begin{pmatrix} v_{wx} \\ v_{wy} \end{pmatrix}$

Flugzeuggeschwindigkeit relativ zur Luft → $\vec{v}_l = \begin{pmatrix} v_{lx} \\ v_{ly} \end{pmatrix}$

1 P Flugzeuggeschwindigkeit relativ zum Grund → $\vec{v}_g = \begin{pmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \end{pmatrix}$

Die drei Vektoren enthalten 6 skalare Größen, die durch die 6 folgenden Beziehungen (von i … vi) bestimmt werden:

(i.) und (ii) Die Umwandlung der Windgeschwindigkeit in kartesische Koordinaten liefert zwei der sechs Parameter (vgl. auch Bild 4-21a):

1 P $\sin(\varphi) = \frac{|v_{wx}|}{|\vec{v}_w|} \quad \Rightarrow \quad |v_{wx}| = |\vec{v}_w| \cdot \sin(\varphi) = 80\,{}^{km}\!/_{h} \cdot \sin(45°) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot 80\,{}^{km}\!/_{h} \quad \Rightarrow \quad v_{wx} = -\sqrt{3200}\,{}^{km}\!/_{h}$

1 P $\cos(\varphi) = \frac{|v_{wy}|}{|\vec{v}_w|} \quad \Rightarrow \quad |v_{wy}| = |\vec{v}_w| \cdot \cos(\varphi) = 80\,{}^{km}\!/_{h} \cdot \cos(45°) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot 80\,{}^{km}\!/_{h} \quad \Rightarrow \quad v_{wy} = \sqrt{3200}\,{}^{km}\!/_{h}$

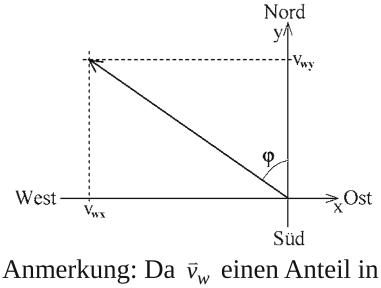



**Bild 4-21a**
Veranschaulichung zur Angabe der Windgeschwindigkeit in kartesischen Koordinaten.

Anmerkung: Da $\vec{v}_w$ einen Anteil in negativer x-Richtung hat, ist $v_{wx}$ negativ.

(iii) Der Betrag von $\vec{v}_l$ ist gegeben: $|\vec{v}_l| = \sqrt{{v_{lx}}^2 + {v_{ly}}^2} = 300\,{}^{km}\!/_{h}$

2 P (iv.) Da $\vec{v}_g$ in Nordrichtung zeigt, ist seine Komponente $v_{gx} = 0$

(v.) und (vi.) Die Vektoraddition der Geschwindigkeiten lautet $\vec{v}_g = \vec{v}_w + \vec{v}_l$, denn relativ zum Grund bewegt sich das Flugzeug mit der Summe aus der Windgeschwindigkeit und seiner Geschwindigkeit relativ zur Luft. $\Rightarrow \begin{pmatrix} v_{gx} \\ v_{gy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{wx} \\ v_{wy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{lx} \\ v_{ly} \end{pmatrix} \Rightarrow$ (v.) $v_{gx} = v_{wx} + v_{lx}$ (vi.) $v_{gy} = v_{wy} + v_{ly}$ 1 P

Die drei Gleichungen (i.), (ii.) und (iv.) hatten sofort drei der Parameter ergeben. Die restlichen noch offenen Parameter bestimmen wir nun aus den restlichen Gleichungen:

(iv.) in (v.) $\Rightarrow \quad v_{wx} + v_{lx} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{lx} = -v_{wx} = +\sqrt{3200}\, {}^{km}\!/_{h}$

$v_{lx}$ in (iii.) $\Rightarrow \quad {v_{ly}}^2 = \left|\vec{v}_l\right|^2 - {v_{lx}}^2 = \left(300\, {}^{km}\!/_{h}\right)^2 - 3200\left({}^{km}\!/_{h}\right)^2 = 86800\left({}^{km}\!/_{h}\right)^2 \Rightarrow \quad v_{ly} = \sqrt{86800}\, {}^{km}\!/_{h}$

$v_{ly}$ in (vi.) $\Rightarrow \quad v_{gy} = v_{wy} + v_{ly} = \sqrt{3200}\, {}^{km}\!/_{h} + \sqrt{86800}\, {}^{km}\!/_{h} \overset{TR}{\approx} 351.19\, {}^{km}\!/_{h}$ 2 P

Nun sind alle beteiligten Vektoren bestimmt und wir können uns der Beantwortung der Fragen in der Aufgabenstellung zuwenden:

Da der Pilot seinen Kompasskurs relativ zur Luft einstellt, ergibt sich dieser aus den Komponenten von $\vec{v}_l$ (vgl. auch Bild 4-21b), nämlich gemäß

$$\tan(\alpha) = \frac{v_{lx}}{v_{ly}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{3200}\, {}^{km}\!/_{h}}{\sqrt{86800}\, {}^{km}\!/_{h}}\right) \overset{TR}{\approx} 10.87° \; = \text{Kompasskurs}$$

Die Geschwindigkeit des Flugzeugs über Grund ist $\left|\vec{v}_g\right| = v_{gy} \overset{TR}{\approx} 351.19\, {}^{km}\!/_{h}$, da $v_{gx} = 0$. 1 P

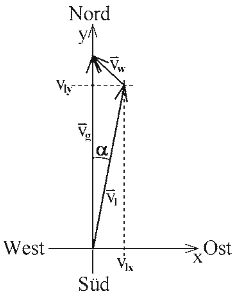



**Bild 4-21b**
Die Vektoraddition der Windgeschwindigkeit und der Fluggeschwindigkeit relativ zur Luft ergibt die Geschwindigkeit des Flugzeugs über Grund.

# 5 Lineare Algebra

## Allgemeiner Hinweis zur Nomenklatur:

Matrizen sind durch fettgedruckte Buchstaben kenntlich gemacht.

## Aufgabe 5.1 Multiplikation von Matrizen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a) | 5 min | (a) | | Punkte<br>(a) 3 P |
| | (b) | 1 min | (b) | | (b) 1 P |

Gegeben seien drei Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a.) Bilden Sie das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ .

(b.) Welche Spalten- und Zeilenzahl müsste eine Matrix $\mathbf{D}$ haben, damit man $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$ berechnen kann? Welche Dimension hat dann das Produkt $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$ ?

## Lösung zu 5.1

**Arbeitshinweis:**

Es gilt $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ , deswegen können die Klammern in der Aufgabenstellung weggelassen werden.

(a.)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 7 & -2 & -3 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+14-18 & 2-4+0 & 0-6+3 \\ 20+0-12 & 10-0+0 & 0-0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix}$$

3 P

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 8 & 10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4-3 \\ 56-20+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 38 \end{pmatrix}$$

(b.) Da $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ eine Spalte hat, muss $\mathbf{D}$ eine Zeile haben, die Spaltenzahl ist egal.

Wenn die $n$ Spaltenzahl von $\mathbf{D}$ ist, dann hat $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \cdot \mathbf{D}$ genau 2 Zeilen und n Spalten. 1 P

## Aufgabe 5.2 Berechnung von Determinanten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (A,B) | je 7 min | | Punkte | |
| (C) | 3 min | | (A,B) je 3 P | (C) 2 P |

Berechnen Sie die drei nachfolgend genannten Determinanten ( $A,B,C\in\mathbb{R}$ )

$$A=\begin{vmatrix}1&0&-2&2\\2&6&-4&0\\0&-3&1&-1\\3&12&-4&0\end{vmatrix}\;;\quad B=\begin{vmatrix}1&3&0&5\\2&2&-4&6\\-2&-6&1&-10\\1&-1&3&0\end{vmatrix}\;;\quad C=\begin{vmatrix}x&0&0&y\\0&a&b&0\\0&b&a&0\\y&0&0&x\end{vmatrix}$$

## Lösung zu 5.2

**Arbeitshinweise:**

Da das Bilden von Linearkombinationen der einzelnen Zeilen (oder ebenso Spalten) den Wert der Determinanten nicht verändert, ist es bei $A$ und $B$ am einfachsten, die Matrizen mittels Gauß-Algorithmus auf eine Dreiecksform zu bringen.

Bei $C$ hingegen ist aufgrund der vielen Nullen das Entwickeln nach Zeilen oder Spalten am bequemsten.

Anmerkung zur Nomenklatur: Die in den einzelnen Zeilen angebrachten Kommentare (mit Pfeil) beschreiben die Veränderungen der jeweiligen Zeile (als Linearkombinationen) bei der Umformung zum nächsten Schritt.

Man betrachte die beiden Lösungen zu $A$ und $B$ in Kolumnen:

$$A=\begin{vmatrix}1&0&-2&2\\2&6&-4&0\\0&-3&1&-1\\3&12&-4&0\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \leftarrow -2\cdot\text{Zeile 1}\\ \\ \leftarrow -3\cdot\text{Zeile 1}\end{array}\qquad B=\begin{vmatrix}1&3&0&5\\2&2&-4&6\\-2&-6&1&-10\\1&-1&3&0\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \leftarrow -2\cdot\text{Zeile 1}\\ \leftarrow +2\cdot\text{Zeile 1}\\ \leftarrow -1\cdot\text{Zeile 1}\end{array}$$

$$A=\begin{vmatrix}1&0&-2&2\\0&6&0&-4\\0&-3&1&-1\\0&12&2&-6\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow +\tfrac{1}{2}\cdot\text{Zeile 2}\\ \leftarrow -2\cdot\text{Zeile 2}\end{array}\qquad B=\begin{vmatrix}1&3&0&5\\0&-4&-4&-4\\0&0&1&0\\0&-4&3&-5\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \leftarrow \text{ entfällt}\\ \leftarrow -1\cdot\text{Zeile 2}\end{array}$$

$$A=\begin{vmatrix}1&0&-2&2\\0&6&0&-4\\0&0&1&-3\\0&0&2&2\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow -2\cdot\text{Zeile 3}\end{array}\qquad B=\begin{vmatrix}1&3&0&5\\0&-4&-4&-4\\0&0&1&0\\0&0&7&-1\end{vmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ \leftarrow -7\cdot\text{Zeile 3}\end{array}$$

je 3 P

$$A=\begin{vmatrix}1&0&-2&2\\0&6&0&-4\\0&0&1&-3\\0&0&0&8\end{vmatrix}\Rightarrow\quad A=1\cdot 6\cdot 1\cdot 8=48\qquad B=\begin{vmatrix}1&3&0&5\\0&-4&-4&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}\Rightarrow\quad B=1\cdot(-4)\cdot 1\cdot(-1)=4$$

Die Lösung von $C$ schreiben wir durch Entwickeln nach Spalten:

$$\underbrace{C=\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}}_{\text{Zu Beginn: Entwickeln nach der ersten Spalte}} \underbrace{\underbrace{= x\cdot\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix} 0 & 0 & y \\ a & b & 0 \\ b & a & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Das Minuszeichen vor } y \text{ folgt der Schachbrett- Regel}}}_{\text{Dann: Beide Determinanten nach der letzten Spalte entwickeln}} = x^2\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} - y^2\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = \left(x^2-y^2\right)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$=\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(a^2-b^2\right) \qquad \text{2 P}$$

# Aufgabe 5.3 Inversion von Matrizen

| | | | | Punkte | Aufgabenteil |
|---|---|---|---|---|---|
| | (A) | 15 min | | (A) 8 P | (a und b.) |
| | (B) | 20 min | | (B) 10 P | jeweils gemeinsam |

Gegeben sind zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -11 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 17 & -2 & 3 & 7 \\ -10 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a.) Invertieren Sie bitte diese beiden Matrizen.
(b.) Bestimmen Sie bitte die Determinante dieser beiden Matrizen.

## Lösung zu 5.3

(a.)

**Arbeitshinweis:**

Zum Invertieren quadratischer Matrizen kann man das Gauß-Jordan-Verfahren anwenden, bei dem der Gauß-Algorithmus doppelt zur Wirkung kommt, einmal von der Diagonale nach links unten und einmal von der Diagonale nach rechts oben, wobei man die Einheitsmatrix mit gleichartigen Umformungen mitlaufen lässt.

Die entsprechenden Umformungen seien nachfolgend vorgeführt:

Inversion der Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -11 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{ entfällt } \rightarrow \\ \leftarrow +\tfrac{5}{11}\cdot\text{Zeile 1}\rightarrow \\ \leftarrow +\tfrac{7}{11}\cdot\text{Zeile 1}\rightarrow \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\mathbf{E}$$

$$\begin{matrix} -11 & 3 & 2 \\ 0 & \tfrac{4}{11} & \tfrac{-1}{11} \\ 0 & \tfrac{-1}{11} & \tfrac{3}{11} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow -\tfrac{33}{4}\cdot\text{Zeile 2}\rightarrow \\ \leftarrow \text{ entfällt } \rightarrow \\ \leftarrow +\tfrac{1}{4}\cdot\text{Zeile 2}\rightarrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ \tfrac{5}{11} & 1 & 0 \\ \tfrac{7}{11} & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c|ccc}
-11 & 0 & \frac{11}{4} & \leftarrow -11\cdot\text{Zeile }3\rightarrow & -\frac{11}{4} & -\frac{33}{4} & 0\\
0 & \frac{4}{11} & -\frac{1}{11} & \leftarrow +\frac{4}{11}\cdot\text{Zeile }3\rightarrow & \frac{5}{11} & 1 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \leftarrow\ \text{entfällt}\ \rightarrow & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|ccc}
-11 & 0 & 0 & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)\rightarrow & -11 & -11 & -11\\
0 & \frac{4}{11} & 0 & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot\frac{11}{4}\rightarrow & \frac{8}{11} & \frac{12}{11} & \frac{4}{11}\\
0 & 0 & \frac{1}{4} & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot 4\rightarrow & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 1
\end{array}\qquad \text{(Stadium **)}$$

8 P

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{array}{c}\leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\\ \leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\\ \leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\end{array}\quad\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&1&4\end{pmatrix}=\mathbf{A}^{-1}=\text{Inverse Matrix zu }\mathbf{A}$$

Inversion der Matrix $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}17&-2&3&7\\-10&0&-1&-3\\3&-1&1&2\\10&2&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{array}{c}\leftarrow\ \text{entfällt}\ \rightarrow\\ \leftarrow +\frac{10}{17}\cdot\text{Zeile }1\rightarrow\\ \leftarrow -\frac{3}{17}\cdot\text{Zeile }1\rightarrow\\ \leftarrow -\frac{10}{17}\cdot\text{Zeile }1\rightarrow\end{array}\quad\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|cccc}
17 & -2 & 3 & 7 & \leftarrow -\frac{17}{10}\cdot\text{Zeile }2\rightarrow & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{20}{17} & \frac{13}{17} & \frac{19}{17} & \leftarrow\ \text{entfällt}\ \rightarrow & +\frac{10}{17} & 1 & 0 & 0\\
0 & -\frac{11}{17} & \frac{8}{17} & \frac{13}{17} & \leftarrow -\frac{11}{20}\cdot\text{Zeile }2\rightarrow & -\frac{3}{17} & 0 & 1 & 0\\
0 & +\frac{54}{17} & -\frac{30}{17} & -\frac{53}{17} & \leftarrow +\frac{54}{20}\cdot\text{Zeile }2\rightarrow & -\frac{10}{17} & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|cccc}
17 & 0 & \frac{17}{10} & \frac{51}{10} & \leftarrow -34\cdot\text{Zeile }3\rightarrow & 0 & -\frac{17}{10} & 0 & 0\\
0 & -\frac{20}{17} & \frac{13}{17} & \frac{19}{17} & \leftarrow -\frac{260}{17}\cdot\text{Zeile }3\rightarrow & +\frac{10}{17} & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \leftarrow\ \text{entfällt}\ \rightarrow & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{20} & 1 & 0\\
0 & 0 & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & \leftarrow -6\cdot\text{Zeile }3\rightarrow & 1 & \frac{27}{10} & 0 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|cccc}
17 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow +0\rightarrow & 17 & 17 & -34 & 0\\
0 & -\frac{20}{17} & 0 & \frac{20}{17} & \leftarrow +\frac{20}{17}\cdot\text{Zeile }4\rightarrow & +\frac{140}{17} & \frac{160}{17} & -\frac{260}{17} & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \leftarrow +\frac{3}{20}\cdot\text{Zeile }4\rightarrow & -\frac{1}{2} & -\frac{11}{20} & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -1 & \leftarrow\ \text{entfällt}\ \rightarrow & 4 & 6 & -6 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|c|cccc}
17 & 0 & 0 & 0 & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot\frac{1}{17}\rightarrow & 17 & 17 & -34 & 0\\
0 & -\frac{20}{17} & 0 & 0 & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot\left(\frac{-17}{20}\right)\rightarrow & +\frac{60}{17} & \frac{40}{17} & -\frac{140}{17} & \frac{-20}{17}\\
0 & 0 & \frac{1}{20} & 0 & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot 20\rightarrow & \frac{1}{10} & \frac{7}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{20}\\
0 & 0 & 0 & -1 & \leftarrow \text{diese Zeile }\cdot(-1)\rightarrow & 4 & 6 & -6 & 1
\end{array}\qquad \text{(Stadium **)}$$

10 P

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad\begin{array}{c}\leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\\ \leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\\ \leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\\ \leftarrow\ \text{fertig}\ \rightarrow\end{array}\quad\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\-3&-2&7&1\\2&7&2&3\\-4&-6&6&-1\end{pmatrix}=\mathbf{B}^{-1}=\text{Inverse zu }\mathbf{B}$$

(b.)

**Arbeitshinweis:**

Solange nur Linearkombinationen der einzelnen Zeilen (oder Spalten) ausgeführt werden, verändert sich der Wert der Determinante einer Matrix nicht. Aus diesem Grunde hat der mit „(Stadium **)“ markierte Umformungszustand die selbe Determinante wie die jeweilige Matrix im Ausgangszustand. Beim „(Stadium **)“ lässt sich die Determinante der Matrix sehr leicht bestimmen, indem man einfach die Diagonale durchmultipliziert.

Damit ergibt sich für unsere Aufgabe:

$$\det(\mathbf{A}) = (-11)\cdot\left(4/11\right)\cdot\left(1/4\right) = -1$$

$$\det(\mathbf{B}) = (17)\cdot\left(-20/17\right)\cdot\left(1/20\right)\cdot(-1) = +1$$

## Aufgabe 5.4 Rang von Matrizen

(A,B) je 5 min — Punkte je 3 P

Gegeben sind zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie bitte den Rang dieser Matrizen.

## Lösung zu 5.4

**Arbeitshinweis:**

Der Rang ist die Zahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten. Auch dorthin kommt man sehr leicht mit dem Gauß-Algorithmus.

Man betrachte die beiden Lösungen zu $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ in Kolumnen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow -4\cdot\text{Zeile 1} \\ \leftarrow -7\cdot\text{Zeile 1} \end{array} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow -4\cdot\text{Zeile 1} \\ \leftarrow -7\cdot\text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrl} 1 & 2 & 3 & \leftarrow +2/3\cdot\text{Zeile 2} \\ 0 & -3 & -6 & \leftarrow \text{ entfällt} \\ 0 & -6 & -12 & \leftarrow -2\cdot\text{Zeile 2} \end{array} \qquad \begin{array}{rrrl} 1 & 2 & 3 & \leftarrow \text{ entfällt} \\ 0 & -2 & -7 & \leftarrow \text{ entfällt} \\ 0 & -22 & -18 & \leftarrow -11\cdot\text{Zeile 2} \end{array}$$

je 2 P

$$\begin{array}{ccc} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 59 \end{array}$$

je 1 P

Die erste Zeile von $\mathbf{A}$ kann nicht als Linearkombination aller anderen Zeilen dargestellt werden, gleiches gilt für die zweite Zeile. Also ist der Rang von $\mathbf{A}$ mindestens 2. Da die dritte Zeile aber eine Linearkombination der ersten beiden Zeilen ist, ist der Rang von $\mathbf{A}$ kleiner als 3. Damit ist das Ergebnis: $rg(\mathbf{A}) = 2$

Hier sind alle drei Zeilen linear unabhängig, also ist $rg(\mathbf{B}) = 3$ .

**Arbeitshinweis:**

Ist der Rang einer quadratischen Matrix kleiner als die Zahl ihrer Zeilen oder Spalten, so ist die Determinante Null → $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot (-3) \cdot 0 = 0$

Ist hingegen der Rang gleich der Zahl der Zeilen und Spalten, so ist die Determinante ungleich Null → $\det(\mathbf{B}) = 1 \cdot (-2) \cdot 59 = -118 \neq 0$

## Aufgabe 5.5 Lösen linearer Gleichungssysteme

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| | (a) | 10 min | | (a) 5 P |
| | (b) | 10 min | | (b) 5 P |

Lösen Sie das nachfolgend gegebene lineare Gleichungssystem

(a.) mit dem Gauß'schen Algorithmus (bzw. dem Gauß-Jordan-Algorithmus) und

(b.) mit der Cramer'schen Regel

$$\begin{aligned} 2a - 4b - 10c &= -38 \\ -a + 3b - 2c &= -\ 1 \\ -3a - b + 3c &= +14 \end{aligned}$$

## Lösung zu 5.5

(a.) Wir bringen die Koeffizientenmatrix mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus auf Diagonalform und lassen die rechte Seite mitlaufen:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -10 & -38 \\ -1 & 3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & +14 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \ \text{entfällt} \\ \leftarrow + \tfrac{1}{2} \cdot \text{Zeile 1} \\ \leftarrow + \tfrac{3}{2} \cdot \text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & -10 & -38 \\ 0 & 1 & -7 & -20 \\ 0 & -7 & -12 & -43 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow +4 \cdot \text{Zeile 2} \\ \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow +7 \cdot \text{Zeile 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -38 & -118 \\ 0 & 1 & -7 & -20 \\ 0 & 0 & -61 & -183 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow -{}^{38}\!/_{61} \cdot \text{Zeile 3} \\ \leftarrow -{}^{7}\!/_{61} \cdot \text{Zeile 3} \\ \leftarrow \text{ entfällt} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -61 & -183 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{diese Zeile } \cdot\left({}^{1}\!/_{2}\right) \\ \leftarrow \text{diese Zeile bleibt} \\ \leftarrow \text{diese Zeile } \cdot\left({}^{-1}\!/_{61}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{diese Zeile } \cdot\left({}^{1}\!/_{2}\right) \\ \leftarrow \text{diese Zeile bleibt} \\ \leftarrow \text{diese Zeile } \cdot\left({}^{-1}\!/_{61}\right) \end{array}$$

Der Lösungsvektor steht auf der rechten Seite, sobald die Koeffizientenmatrix in die Einheitsmatrix umgewandelt ist:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ +3 \end{pmatrix}$$ 5 P

(b.) Wir bezeichnen mit $\mathbf{A_i}$ diejenige Matrix, bei der die $i$-te Spalte der Koeffizientenmatrix durch die rechte Seite ersetzt wurde und berechnen die einzelnen Determinanten wie folgt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -10 \\ -1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -122$$

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} -38 & -4 & -10 \\ -1 & 3 & -2 \\ 14 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A_1}) = -38 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 14 \cdot \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = +244$$

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & -38 & -10 \\ -1 & -1 & -2 \\ -3 & 14 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A_2}) = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -38 & -10 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -38 & -10 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -122$$

$$\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -38 \\ -1 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{A_3}) = -38 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -38 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -38 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -366$$

Damit werden die drei Unbekannten wie folgt bestimmt:

$$a = \frac{\det(\mathbf{A_1})}{\det(\mathbf{A})} = \frac{244}{-122} = -2 \ ; \qquad b = \frac{\det(\mathbf{A_2})}{d\,\mathrm{et}(\mathbf{A})} = \frac{-122}{-122} = 1 \ ; \qquad c = \frac{\det(\mathbf{A_1})}{\det(\mathbf{A})} = \frac{-366}{-122} = +3$$ 5 P

## Aufgabe 5.6 Lösen linearer Gleichungssysteme

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| (a) | je 8 min | | (a) je 4 P |

Gegeben sind die beiden folgenden linearen Gleichungssysteme

$$(a.)\quad \begin{aligned} 1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 &= 4 \\ -2\cdot x_1 + 1\cdot x_2 - 1\cdot x_3 &= 9 \\ 7\cdot x_1 - 0\cdot x_2 + 6\cdot x_3 &= -23 \end{aligned} \qquad (b.)\quad \begin{aligned} -1\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 1\cdot x_3 &= 1 \\ 2\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 4\cdot x_3 &= -2 \\ 3\cdot x_1 - 1\cdot x_2 + 5\cdot x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie bitte zu jedem der beiden Gleichungssysteme sämtliche möglichen Lösungen.

## Lösung zu 5.6

Am einfachsten ist die Arbeit mit dem Gauß-Algorithmus:

(a.)

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 9 \\ 7 & 0 & 6 & -23 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow +2\cdot \text{Zeile 1} \\ \leftarrow -7\cdot \text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 5 & 17 \\ 0 & -21 & -15 & -51 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow -\tfrac{3}{7}\cdot \text{Zeile 2} \\ \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow +3\cdot \text{Zeile 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \tfrac{6}{7} & -\tfrac{23}{7} \\ 0 & 7 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dies sind zwei Gleichungen mit drei Unbekannten.
Offensichtlich sind die Zeilen der Koeffizientenmatrix linear abhängig.

Also gibt es unendlich viele Lösungen. Man kann z.B. $x_1$ und $x_2$ durch $x_3$ ausdrücken. Ein Parameter (z.B. $x_3$) bleibt prinzipiell unbestimmt.

4 P

$$\begin{array}{ccc|c} 1\cdot x_1 & 0 & \tfrac{6}{7}\cdot x_3 & -\tfrac{23}{7} \\ 0 & 7\cdot x_2 & 5\cdot x_3 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow\ 1\cdot x_1 + \tfrac{6}{7}\cdot x_3 = -\tfrac{23}{7} \ \Rightarrow\ x_1 = -\tfrac{23}{7} - \tfrac{6}{7}\cdot x_3 \\ \Rightarrow\ 7\cdot x_2 + 5\cdot x_3 = 17 \ \Rightarrow\ x_2 = \tfrac{17}{7} - \tfrac{5}{7}\cdot x_3 \\ \phantom{0} \end{array}$$

(b.)

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow +2\cdot \text{Zeile 1} \\ \leftarrow +3\cdot \text{Zeile 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow \text{ entfällt} \\ \leftarrow -\tfrac{4}{3}\cdot \text{Zeile 2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{Das bedeutet } 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 = 5, \text{ also } 0 = 5$$

Dass die Gleichung $0=5$ keine Lösung hat, bedeutet eine leere Lösungsmenge für das lineare Gleichungssystem: $\mathbb{L}=\varnothing$ 4 P

## Aufgabe 5.7 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| | (a) | 20 min | (a) | (a) 10 P |
| | (b) | 5 min | (b) | (b) 4 P |

Betrachten Sie die Matrix $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

(a.) Bestimmen Sie deren Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.
(b.) Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis durch Einsetzen in die charakteristische Gleichung.

## Lösung zu 5.7

Aufgabenteil (a.):

**Arbeitshinweis:**
Die Eigenwerte findet man anhand der charakteristischen Gleichung $\det\underbrace{(\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{E})}_{=:\mathbf{M}}=0$.

(Dabei ist $\mathbf{E}$ die Einheitsmatrix.)

Dazu berechnen wir die Matrix $\mathbf{M}$ mit $\quad \mathbf{M}=\mathbf{A}-\lambda\cdot\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 5 & 4-\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \det(\mathbf{M})=(2-\lambda)\cdot(4-\lambda)-3\cdot 5=\lambda^2-6\lambda+8-15=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2}=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm 4$

Die beiden Eigenwerte lauten also $\lambda_1=-1$ und $\lambda_2=+7$ 2 P

Damit bestimmen wir jetzt die zugehörigen Eigenvektoren.

**Arbeitshinweis:**
Eigenvektoren $\vec{x}_i$ zeichnen sich dadurch aus, dass gilt $\mathbf{A}\cdot\vec{x}_i=\lambda_i\cdot\vec{x}_i$. Die Aufgabe ist es also, für die beiden Werte von $\lambda_i$ (mit $i=1...2$) die passenden $\vec{x}_i$ zu finden.

(i.) Zu $\lambda_1=-1$ bestimmen wir den Eigenvektor $\vec{x}_1=\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}$ wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1}=\underbrace{-1}_{\lambda_1}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}}_{\vec{x}_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2\cdot x_{1,1}+3\cdot x_{1,2} \\ 5\cdot x_{1,1}+4\cdot x_{1,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x_{1,1} \\ -x_{1,2} \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten $x_{1,1}$ und

$x_{1,2}$, nämlich $\begin{matrix} 2\cdot x_{1,1}+3\cdot x_{1,2}=-x_{1,1} \\ 5\cdot x_{1,1}+4\cdot x_{1,2}=-x_{1,2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 3\cdot x_{1,1}+3\cdot x_{1,2}=0 \\ 5\cdot x_{1,1}+5\cdot x_{1,2}=0 \end{matrix}$

Die beiden Gleichungen sind linear abhängig, deshalb bleibt einer der beiden Parameter frei wählbar. Willkürlich entscheiden wir uns, den Parameter $x_{1,1}$ frei zu wählen, also setzen wir $x_{1,1} =: \alpha \in \mathbb{R}$. Daraus ergibt sich dann $x_{1,2}$ gemäß $3\cdot x_{1,1}+3\cdot x_{1,2}=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=-x_{1,1}=-\alpha$ .

4 P Der Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_1=-1$ lautet also $\vec{x}_1=\begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} +\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (mit $\alpha\in\mathbb{R}$).

(ii.) Zu $\lambda_2=+7$ bestimmen wir den Eigenvektor $\vec{x}_2=\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}$ wie folgt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2}=\underbrace{+7}_{\lambda_2}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x2_{2,2} \end{pmatrix}}_{\vec{x}_2} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x_{2,1}+3\cdot x_{2,2} \\ 5\cdot x_{2,1}+4\cdot x_{2,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7\cdot x_{2,1} \\ 7\cdot x_{2,2} \end{pmatrix}$$

Auch dieses Gleichungssystem lösen wir nun auf:

$$2\cdot x_{2,1}+3\cdot x_{2,2}=7\cdot x_{2,1} \;\overset{-2\cdot x_{2,1}}{\Rightarrow}\; 3\cdot x_{2,2}=5\cdot x_{2,1}$$

$$5\cdot x_{2,1}+4\cdot x_{2,2}=7\cdot x_{2,2} \;\overset{-4\cdot x_{2,2}}{\Rightarrow}\; 5\cdot x_{2,1}=3\cdot x_{2,2}$$

Wieder sind die beiden Gleichungen linear abhängig und wir müssen einen Parameter frei wählen. Entscheiden wir uns willkürlich für $x_{2,1}=:3\beta\in\mathbb{R}$, so erhalten wir für den anderen Parameter den Wert $x_{2,2}=\frac{5}{3}\cdot x_{2,1}$.

4 P Der Eigenvektor zu Eigenwert $\lambda_2=+7$ lautet also $\vec{x}_2=\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{2,1} \\ \frac{5}{3}x_{2,1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\beta \\ 5\beta \end{pmatrix}=\beta\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabenteil (b.):
Zur Kontrolle setzen wir ein in die charakteristische Gleichung $\mathbf{A}\cdot\vec{x}_i=\lambda_i\cdot\vec{x}_i$

(i.) Für $\lambda_1$ und $x_1$ erhalten wir :

2 P $\mathbf{A}\cdot\vec{x}_1=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} +\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\alpha-3\alpha \\ 5\alpha-4\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha \\ +\alpha \end{pmatrix}$ und $\lambda_1\cdot\vec{x}_1=-1\cdot\begin{pmatrix} +\alpha \\ -\alpha \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\alpha \\ +\alpha \end{pmatrix}$ → passt.

(ii.) Für $\lambda_2$ und $x_2$ erhalten wir :

2 P $\mathbf{A}\cdot\vec{x}_2=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3\beta \\ 5\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6\beta+15\beta \\ 15\beta+20\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21\beta \\ 35\beta \end{pmatrix}$ und $\lambda_2\cdot\vec{x}_2=+7\cdot\begin{pmatrix} 3\beta \\ 5\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 21\beta \\ 35\beta \end{pmatrix}$ → passt.

## Aufgabe 5.8 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a) | 30 min | | Punkte 21 P |

Betrachten Sie die Matrix $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

(a.) Bestimmen Sie deren Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren.

(b.) Kontrollieren Sie außerdem Ihr Ergebnis durch Einsetzen in die charakteristische Gleichung.

## ▾ Lösung zu 5.8

(a.)

**Arbeitshinweis:**

Bekanntlich sind die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix identisch mit deren Hauptdiagonal-Elementen. Da es sich bei $\mathbf{A}$ um eine solche Dreiecksmatrix handelt, können wir die Eigenwerte direkt ablesen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = 6$.

Die zugehörigen Eigenvektoren müssen wir noch bestimmen. Nennen wir sie $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ mit $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ und berechnen wir sie aus der charakteristischen Gleichung $\mathbf{A} \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$:

(i.) Für $\lambda_1 = 1$ erhalten wir

für die linke Seite der charakterist. Glg. und für die rechte Seite dieser Glg.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 3y_1 \\ 5x_1 + 4y_1 + 6z_1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$ 2 P

Gleichsetzen der beiden Seiten liefert ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten, welches wir wie folgt aufstellen und lösen:

$$x_1 = x_1$$

$$2x_1 + 3y_1 = y_1 \;\Rightarrow\; 2x_1 = -2y_1 \;\Rightarrow\; y_1 = -x_1$$

$$5x_1 + 4y_1 + 6z_1 = z_1 \;\Rightarrow\; 5x_1 + 4y_1 = -5z_1 \;\Rightarrow\; 5x_1 + 4x_1 = -5z_1 \;\Rightarrow\; z_1 = -\tfrac{1}{5} x_1$$

Ein Parameter bleibt unbestimmt. Hierfür wählen wir (willkürlich) $x_1 =: 5\alpha \in \mathbb{R}$ und erhalten als Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$ den Vektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +5\alpha \\ -5\alpha \\ -1\alpha \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ 3 P

Die Kontrolle durch Einsetzen in die charakteristische Gleichung liefert

$$\mathbf{A} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 - 15 \\ 25 - 20 - 6 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und dazu } \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot \vec{v}_1 = 1 \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} +5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$ 2 P

Die Übereinstimmung bestätigt das Ergebnis.

(ii.) Für $\lambda_2 = 3$ erhalten wir

für die linke Seite der charakteristischen Glg. und für ihre rechte Seite

2 P $\mathbf{A}\cdot\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&4&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_2\\2x_2+3y_2\\5x_2+4y_2+6z_2\end{pmatrix}$ und $\lambda_2\cdot\vec{v}_2 = 3\cdot\vec{v}_2 = 3\cdot\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$

Gleichsetzen der beiden Seiten liefert ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten, welches wir wieder wie folgt aufstellen und lösen:

$x_2 = 3\cdot x_2 \quad\Rightarrow\quad x_2 = 0$

$2x_2 + 3y_2 = 3y_2 \quad\Rightarrow\quad y_2 = y_2$

$5x_2 + 4y_2 + 6z_2 = 3z_2 \quad\Rightarrow\quad 4y_2 = -3z_2 \quad\Rightarrow\quad z_2 = -\frac{4}{3}y_2$

3 P Wieder bleibt ein Parameter unbestimmt. Hierfür wählen wir (willkürlich) $y_2 =: \beta \in \mathbb{R}$ und erhalten als Eigenvektor zu $\lambda_2 = 3$ den Vektor $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot\beta\\1\cdot\beta\\-\frac{4}{3}\cdot\beta\end{pmatrix} = \beta\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

Die Kontrolle durch Einsetzen in die charakteristische Gleichung liefert

2 P $\mathbf{A}\cdot\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&4&6\end{pmatrix}\cdot\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix} = \beta\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\4-8\end{pmatrix} = \beta\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$, dazu $\lambda_2\cdot\vec{v}_2 = 3\cdot\vec{v}_2 = 3\cdot\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix} = \beta\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix}$

Abermals bestätigt die Übereinstimmung das Ergebnis.

(iii.) Für $\lambda_3 = 6$ erhalten wir

für die linke Seite der charakteristischen Glg. und für ihre rechte Seite

2 P $\mathbf{A}\cdot\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&4&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_3\\2x_3+3y_3\\5x_3+4y_3+6z_3\end{pmatrix}$ und $\lambda_3\cdot\vec{v}_3 = 6\cdot\vec{v}_3 = 6\cdot\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$

Gleichsetzen der beiden Seiten liefert ein Gleichungssystem aus drei Gleichungen mit drei Unbekannten, das wir wie folgt aufstellen und lösen:

$x_3 = 6\cdot x_3 \quad\Rightarrow\quad x_3 = 0$

$2x_3 + 3y_3 = 6y_3 \quad\Rightarrow\quad 2x_3 = 3y_3 \quad\Rightarrow\quad y_3 = \frac{2}{3}x_3 \quad\Rightarrow\quad y_3 = 0$

$5x_3 + 4y_3 + 6z_3 = 6z_3 \quad\Rightarrow\quad z_3 \in \mathbb{R}$ ist beliebig , dazu ist $5x_3 = -4y_3 \Leftrightarrow 0 = 0$, ok

3 P Ein Parameter bleibt unbestimmt; wir wählen $z_3 =: \gamma \in \mathbb{R}$ und erhalten als Eigenvektor zu $\lambda_3 = 6$ den Vektor $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot\gamma\\0\cdot\gamma\\1\cdot\gamma\end{pmatrix} = \gamma\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Die Kontrolle durch Einsetzen in die charakteristische Gleichung liefert

2 P $\mathbf{A}\cdot\vec{v}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\5&4&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\gamma\end{pmatrix}$ und dazu $\lambda_3\cdot\vec{v}_3 = 6\cdot\vec{v}_3 = 6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\end{pmatrix}$ → stimmt wieder überein.

# 6 Differentialrechnung

## Aufgabe 6.1 Berechnung von Differentialquotienten

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 8 min | | Punkte<br>3 P |

Leiten Sie $f(x) = x^n$ durch Einsetzen in die elementare Definition des Differentialquotienten $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ab.

## Lösung zu 6.1

Wir setzen ein in den Differentialquotienten und lösen mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes auf:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot \Delta x^k\right] - x^n}{\Delta x} \qquad \Big| \text{Bruch zusammenfassen}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot \Delta x^{k-1}\right] - x^n \cdot \Delta x^{-1}\right] \qquad \Big| \text{Summanden ausschreiben}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[ \underbrace{\binom{n}{0} \cdot x^{n-0} \cdot \Delta x^{0-1}}_{=(*1)} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot x^{n-1}}_{=(*3)} \cdot \underbrace{\Delta x^{1-1}}_{\Delta x^0 = 1} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^{2-1}}_{=(*2)} + \underbrace{\ldots}_{=(*2)} + \underbrace{\binom{n}{n} \cdot x^{n-n} \cdot \Delta x^{n-1}}_{=(*2)} \underbrace{- x^n \cdot \Delta x^{-1}}_{=(*1)} \right]$$

3 P

Die beiden mit $(*1)$ gekennzeichneten Ausdrücke sind bis auf das Vorzeichen identisch und heben sich daher gegenseitig auf. Alle mit $(*2)$ enthalten $\Delta x$ im Zähler und gehen daher wegen der Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ gegen Null. Übrig bleibt daher alleine nur $(*3)$, wobei sich bei $(*3)$ auch noch der Binomialkoeffizient ausrechnen lässt:

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}$$

## Aufgabe 6.2 Ableiten: Summenregel, Faktorregel, Produktregel

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) je 1 min | (a,b,c.) | Punkte (a,b,c) je 1 P |
| | (d,e,f.) je 2 min | (d,e,f.) | (d,e,f.) je 1 P |

Leiten Sie bitte die folgenden Funktionen nach x ab:

(a.) $f_a(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

(b.) $f_b(x) = 7x^6 + 3x^5 - 4x^3 - 2x^2 + x$

(c.) $f_c(x) = 2x^{16} + x^9 - 4x^{32} - 5x^8 + 2x^2$

(d.) $f_d(x) = 2x \cdot (x^2 - 2)$

(e.) $f_e(x) = \left(3x^2 - 5x\right) \cdot \left(8x^3 - 2x^2\right)$

(f.) $f_f(x) = \left(9x^2 - 8x + 5\right) \cdot \left(4x^3\right)$

## Lösung zu 6.2

Bei den Aufgabenteilen (a…c) handelt es sich um das Ableiten von Polynomen. Dazu benutzt man die Faktorregel und die Summenregel, wonach gilt:

1 P (a.) $f_a'(x) = 9x^2 - 8x + 5$

1 P (b.) $f_b'(x) = 42x^5 + 15x^4 - 12x^2 - 4x + 1$

1 P (c.) $f_c'(x) = 32x^{15} + 9x^8 - 128x^{31} - 40x^7 + 4x$

**Arbeitshinweis:**

Die Koeffizienten werden mit den Exponenten der noch nicht abgeleiteten Potenzen von $x$ multipliziert. Die Exponenten werden um jeweils 1 erniedrigt.

Bei den Aufgabenteilen (d…f) wird mit der Produktregel abgeleitet, wobei in der Musterlösung zum besseren Verständnis die $u$ und $v$ bzw. $u'$ und $v'$ markiert sind:

1 P (d.) $f_d(x) = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{(x^2 - 2)}_{v} \Rightarrow f_1'(x) = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{(2x)}_{v'} + \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{\left(x^2 - 2\right)}_{v} = 6x^2 - 4$

1 P (e.) $f_e(x) = \underbrace{\left(3x^2 - 5x\right)}_{u} \cdot \underbrace{\left(8x^3 - 2x^2\right)}_{v} \Rightarrow f_2'(x) = \underbrace{\left(3x^2 - 5x\right)}_{u} \cdot \underbrace{\left(24x^2 - 4x\right)}_{v'} + \underbrace{(6x - 5)}_{u'} \cdot \underbrace{\left(8x^3 - 2x^2\right)}_{v}$

$$= 120x^4 - 184x^3 + 30x^2$$

1 P (f.) $f_f(x) = \underbrace{\left(9x^2 - 8x + 5\right)}_{u} \cdot \underbrace{\left(4x^3\right)}_{v} \Rightarrow f_f'(x) = \underbrace{\left(9x^2 - 8x + 5\right)}_{u} \cdot \underbrace{\left(12x^2\right)}_{v'} + \underbrace{(18x - 8)}_{u'} \cdot \underbrace{\left(4x^3\right)}_{v}$

$$= 180x^4 - 128x^3 + 60x^2$$

Anmerkung: Als alternativen Lösungsweg könnte man die Funktionen $f_d$, $f_e$, $f_f$ auch erst ausmultiplizieren und dann ableiten. Dieser Weg funktioniert aber nur, solange die einzelnen Faktoren nicht zu aufwändig werden.

## Aufgabe 6.3 Ableiten mit Produktregel

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c,d.) je 2 min | | Punkte<br>(a,b) je 1 P |

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab:

(a.) $f_1(x) = 2x \cdot \sin(x)$

(b.) $f_2(x) = e^x \cdot \sin(x)$

(c.) $f_3(x) = x^4 \cdot \ln(x)$

(d.) $f_4(x) = \sqrt{x} \cdot \arctan(x)$

## Lösung zu 6.3

Abgeleitet wird mit der Produktregel, wobei in der Musterlösung zum besseren Verständnis die $u$ und $v$ bzw. $u'$ und $v'$ markiert sind.

(a.) $f_1(x) = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} \Rightarrow f_1'(x) = \underbrace{2x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'} + \underbrace{2}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}$ 1 P

(b.) $f_2(x) = \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v} \Rightarrow f_2'(x) = \underbrace{e^x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'} + \underbrace{e^x}_{u'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{v}$ 1 P

(c.) $f_3(x) = \underbrace{x^4}_{u} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} \Rightarrow f_3'(x) = \underbrace{x^4}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} + \underbrace{4x^3}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} = x^3 \cdot \left(1 + 4\ln(x)\right)$ 1 P

(d.) $f_4(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{v} \Rightarrow f_4'(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{v'} + \underbrace{\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{v}$ 1 P

Anmerkungen:

- Bei den Ableitungen der Logarithmusfunktion, der Winkelfunktionen, der Arcusfunktionen und ebenso der Hyperbelfunktionen greift man auf Tabellen aus Formelsammlungen zurück.

- Speziell bei Aufgabe (d.) ist die Ableitung der Wurzelfunktion wie folgt zu verstehen:

$$u(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## Aufgabe 6.4 Ableiten mit Quotientenregel

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | 2 min | (a.) | | Punkte (a.) 1 P |
| (b…f.) | je 3 min | (b…f.) | | (b…f.) je 2 P |

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab:

(a.) $f_1(x)=\frac{x^2+2}{x}$ (b.) $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ (c.) $f_3(x)=\frac{x^4}{\ln(x)}$

(d.) $f_4(x)=\frac{\sin(x)}{e^x}$ (e.) $f_5(x)=\tan(x)$ (f.) $f_6(x)=\frac{\left(3x^4+2x^3-5x\right)}{\left(x^2+7x-4\right)}$

## Lösung zu 6.4

Abgeleitet wird mit der Quotientenregel, wobei in der Musterlösung zum besseren Verständnis die $u$ und $v$ bzw. $u'$ und $v'$ markiert sind.

1 P (a.) $f_1(x)=\frac{x^2+2}{x}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \Rightarrow f_1'(x)=\frac{\overbrace{x}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{(2x)}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{\left(x^2+2\right)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{1}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{x^2}_{\mathrm{v}^2}}=\frac{x^2-2}{x^2}$

2 P (b.) $f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \Rightarrow f_2'(x)=\frac{\overbrace{(1+x)^{\frac{1}{2}}}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{1}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{x}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{\tfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{1+x}_{\mathrm{v}^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{x}{2\sqrt{(1+x)^3}}$

2 P (c.) $f_3(x)=\frac{x^4}{\ln(x)}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \Rightarrow f_3'(x)=\frac{\overbrace{\ln(x)}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{4x^3}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{x^4}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{\frac{1}{x}}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{\left(\ln(x)\right)^2}_{\mathrm{v}^2}}=\frac{x^3}{\ln(x)}\cdot\left(4-\frac{1}{\ln(x)}\right)$

2 P (d.) $f_4(x)=\frac{\sin(x)}{e^x}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \Rightarrow f_4'(x)=\frac{\overbrace{e^x}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{\cos(x)}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{\sin(x)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{e^x}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{e^{2x}}_{\mathrm{v}^2}}=\left(\cos(x)-\sin(x)\right)\cdot e^{-x}$

2 P (e.) $f_5(x)=\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \Rightarrow f_5'(x)=\frac{\overbrace{\cos(x)}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{\cos(x)}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{\sin(x)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{(-\sin(x))}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{\cos^2(x)}_{\mathrm{v}^2}}=\frac{1}{\cos^2(x)}$

(f.) $f_6(x) = \dfrac{\overbrace{\left(3x^4+2x^3-5x\right)}^{u}}{\underbrace{\left(x^2+7x-4\right)}_{v}} \Rightarrow f_6'(x) = \dfrac{\overbrace{\left(x^2+7x-4\right)}^{v}\cdot\overbrace{\left(12x^3+6x-5\right)}^{u'}-\overbrace{\left(3x^4+2x^3-5x\right)}^{u}\cdot\overbrace{\left(2x+7\right)}^{v'}}{\underbrace{\left(x^2+7x-4\right)^2}_{v^2}}$

$$\Rightarrow f_6'(x) = \frac{6x^5+65x^4-20x^3-19x^2+20}{\left(x^2+7x-4\right)^2} \quad (\text{zusammengefasst})$$ 2 P

Anmerkung:

- Bei Aufgabenteil (b.) wird die Kenntnis der Kettenregel vorausgesetzt (siehe Aufgabe 6.5.)
- Bei Aufgabenteil (e.) wird ein Trick verwendet, der öfters bei Übungsaufgaben auftaucht, nämlich die Verwendung zweier sehr geläufiger Additionstheoreme.

**Diese beiden Additionstheoreme sollte man sich auswendig merken:**

Das eine lautet: $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \dfrac{u}{v}$ .

Das andere Additionstheorem ist: $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$ .

- Bei Aufgabentypen wie (f.) sollte man sich die Mühe des Zusammenfassens nur dann machen, wenn es tatsächliche verlangt ist.

## Aufgabe 6.5 Ableiten mit Kettenregel

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 1 min | (a,b.) | Punkte (a,b.) je 1 P |
| | (c,d.) | je 1 min | (c,d.) | (c,d.) je 1 P |

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach $x$ ab:

(a.) $f_1(x) = \sin(x^2+2)$

(b.) $f_2(x) = (3x^3+4x^2-5)^{17}$

(c.) $f_3(x) = e^{x^2\cdot\sin(x)}$

(d.) $f_4(x) = \sqrt{x^3-3x^2}$

## Lösung zu 6.5

Hier wird mit der Kettenregel abgeleitet:

(a.) $f_1'(x) = \underbrace{\cos(x^2+2)}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(2x)}_{\text{innere Ableitung}}$ 1 P

(b.) $f_2'(x) = \underbrace{17\cdot(3x^3+4x^2-5)^{16}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{(9x^2+8x)}_{\text{innere Ableitung}}$ 1 P

(c.) $f_3'(x) = \underbrace{e^{x^2\cdot\sin(x)}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(2x\cdot\sin(x)+x^2\cdot\cos(x)\right)}_{\text{innere Ableitung}}$ 1 P

1 P (d.) $f_4{}'(x) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \left(x^3 - 3x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(3x^2 - 6x\right)}_{\text{innere Ableitung}} = \frac{3x^2 - 6x}{2 \cdot \sqrt{x^3 - 3x^2}} = \frac{3x - 6}{2 \cdot \sqrt{x - 3}}$

Anmerkung: Bei Teil (c) wurde die innere Ableitung mit der Produktregel berechnet.

## Aufgabe 6.6 Mehrfache Verschachtelung der Kettenregel

| | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|
| (a,b.) | je 2 min | (a,b.) | (a,b.) | je 1 P |
| (c,d,e.) | je 3 min | (c,d,e.) | (c,d,e.) | je 2 P |

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab:

(a.) $f_1(x) = e^{\cos(x^2 + 3x)}$ (b.) $f_2(x) = \cosh\left(\ln\left(4x^3 + 5x\right)\right)$

(c.) $f_3(x) = 3^x$ (d.) $f_4(x) = x^x$ (e.) $f_5(x) = x^{\ln(x)}$

## Lösung zu 6.6

Wir benötigen jetzt die mehrfache Verschachtelung der Kettenregel.

1 P (a.) $f_1{}'(x) = \underbrace{e^{\cos(x^2 + 3x)}}_{\text{äußere Ableitung von } f_1} \cdot \underbrace{\left( \underbrace{-\sin(x^2 + 3x)}_{\substack{\text{äußere Ableitung} \\ \text{der Inneren}}} \cdot \underbrace{(2x + 3)}_{\substack{\text{innere Ableitung} \\ \text{der Inneren}}} \right)}_{\text{innere Ableitung von } f_1}$

1 P (b.) $f_2{}'(x) = \underbrace{\sinh\left(\ln\left(4x^3 + 5x\right)\right)}_{\text{äußere Ableitung von } f_2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{4x^3 + 5x}\right)}_{\substack{\text{innere Ableitung} \\ \text{von } f_2}} \cdot \underbrace{\left(12x^2 + 5\right)}_{\substack{\text{innere Ableitung} \\ \text{der Inneren}}}$

(c.) Bei der abzuleitenden Funktion taucht die Variable (hier $x$) im Exponenten auf – also **muss** die Funktion als Exponentialfunktion abgeleitet werden. Alles andere wäre falsch!

Am Ende der Musterlösung zu Aufgabe 6.6 sind hierzu Erläuterungen als Arbeitshinweis und als Stolperfalle angebracht. Die Anwendung der dortigen Ausführungen sieht man bei der nachfolgenden Musterlösung:

Wir beginnen mit einer Umformung vorab: $f_3(x) = 3^x = e^{\ln\left(3^x\right)} = e^{x \cdot \ln(3)}$

2 P Damit können wir nun ableiten: $f_3{}'(x) = \underbrace{e^{x \cdot \ln(3)}}_{\substack{\text{äußere} \\ \text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{\ln(3)}_{\substack{\text{innere} \\ \text{Ableitung}}} = \underbrace{3^x \cdot \ln(x)}_{\substack{\text{Vereinfachung} \\ \text{des Ausdrucks}}}$

(d.) Wieder ist die logarithmische Ableitung nötig, die wir mit einer Umformung

vorbereiten: $f_4(x) = x^x = e^{\ln\left(x^x\right)} = e^{x \cdot \ln(x)}$

Damit leiten wir nun ab: $f_4{}'(x) = \underbrace{e^{x \cdot \ln(x)}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right)}_{\text{innere Ableitung}} = x^x \cdot \left(1 + \ln(x)\right)$ 2 P

(e.) Auch hier verwenden wir wieder die logarithmische Ableitung

$$f_5(x) = x^{\ln(x)} \quad \Rightarrow \quad f_5(x) = e^{\ln\left(x^{\ln(x)}\right)} = e^{\ln(x) \cdot \ln(x)} = e^{\left(\ln(x)\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f_5{}'(x) = e^{\left(\ln(x)\right)^2} \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln(x)}{x} \cdot x^{\ln(x)}$$ 2 P

**Stolperfalle bei Teil (b.):**

Die Ableitung des Cosinus-hyperbolicus gibt einen positiven Sinus-hyperbolicus. Die Winkelfunktionen, die Hyperbelfunktionen und auch die Exponentialfunktion reproduzieren sich beim Ableiten, aber mit unterschiedlichen Zyklen:

Winkelfunktionen: $\sin(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \cos(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} -\sin(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} -\cos(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \sin(x)$

Hyperbelfunktionen: $\sinh(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \cosh(x) \xrightarrow{\frac{d}{dx}} +\sinh(x)$

Exponentialfunktion: $e^x \xrightarrow{\frac{d}{dx}} e^x$

**Arbeitshinweis zu Teil (c.):**

Liegt bei einer Exponentialfunktion eine andere Basis vor als die Euler'sche Zahl, so reproduziert sich die Exponentialfunktion nicht identisch selbst, sondern es kommt noch als Faktor der Logarithmus der Basis hinzu. Man sieht dies am leichtesten ein, indem man schreibt $f(x) = e^{\ln(f(x))}$, denn die Exponentialfunktion und der Logarithmus heben einander auf. Auf diese Weise erhält man eine Exponentialfunktion, deren Basis die Euler'sche Zahl ist, sodass man wie gewohnt ableiten kann. Allerdings darf man die innere Ableitung nicht vergessen, wie in der Lösung zu sehen ist.

**Anmerkung und Stolperfalle:**

Der „Trick" mit der Schreibweise $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ wird auch als „Logarithmische Ableitung" bezeichnet. Immer wenn die freie Variable $x$ im Exponenten steht, muss man davon Gebrauch machen, da das Ableiten wie bei einem Polynom zu einem Fehler führen würde. Man achte aber darauf, dass man bei der „Logarithmischen Ableitung" die Kettenregel anwendet und ggf. auch die innere Ableitung erneut nach der Kettenregel ableitet, usw.

Hinweis zu Teil (d.):

Ähnlich wie bei Teil (c.) ist auch bei Teil (d.) die Basis nicht die Euler'sche Zahl. Damit ist auch hier logarithmische Ableitung gemäß $f(x) = e^{\ln(f(x))}$ nötig. Allerdings ist bei Teil (d.) die innere Ableitung des Exponenten nach der Produktregel zu berechnen.

## Aufgabe 6.7 Vermischtes Anwenden von Ableitungsregeln

| | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,d,e.) | je 2 min | | (a,d,e.) | je 1 P |
| | (b,c,f,g,h.) | je 4 min | | (b,c,f,g,h.) | je 2 P |

Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab:

(a.) $f_1(x) = x^4 \cdot \sin(3x)$

(b.) $f_2(x) = x \cdot \cos^3\left(\dfrac{x}{3}\right)$

(c.) $f_3(x) = \dfrac{e^{4x}}{4+x^2}$

(d.) $f_4(x) = \tan\left(1+x^2\right)$

(e.) $f_5(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

(f.) $f_6(x) = \lg\left(4x^2+1\right)^4$

(g.) $f_7(x) = \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

(h.) $f_8(x) = \sqrt[3]{\sinh^2(x-1)}$

## Lösung zu 6.7

Jetzt werden verschiedene Ableitungsregeln gleichzeitig benötigt:

1 P (a.) $f_1(x) = \underbrace{x^4}_{v} \cdot \underbrace{\sin(3x)}_{u} \quad \Rightarrow \quad f_1'(x) = \underbrace{4x^3}_{v'} \cdot \underbrace{\sin(3x)}_{u} + \underbrace{x^4}_{v} \cdot \underbrace{\cos(3x) \cdot 3}_{u'}$

Hier kommt die Produktregel zum Einsatz, wobei v' über die Kettenregel zu berechnen ist.

(b.) $f_2'(x) = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos^3\left(\dfrac{x}{3}\right)}_{v} \quad \Rightarrow \quad f_2'(x) = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{3\cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right) \cdot \left(-\sin\left(\dfrac{x}{3}\right) \cdot \dfrac{1}{3}\right)}_{v'} + \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\cos^3\left(\dfrac{x}{3}\right)}_{v}$

2 P

Wieder wird nach der Produktregel abgeleitet, allerdings braucht man zum Berechnen von v' die mehrfach verschachtelte Anwendung der Kettenregel. Es ist nämlich

$$v = \cos^3\left(\frac{x}{3}\right) = \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]^3 \quad \Rightarrow \quad v' = \underbrace{3 \cdot \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]^2}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(-\sin\left(\frac{x}{3}\right)\right)}_{\text{1. innere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{2. innere Ableitung}}$$

Zum Verständnis der mehrfach verschachtelten Kettenregel mag manchem Leser auch die folgende Erläuterung bekannt vorkommen:

$$v(g(h(x))) = \left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]^3 \quad \text{mit} \quad v(g)=g^3 \; ; \quad g(h)=\cos(h) \; ; \quad h(x)=\frac{x}{3}$$

Man findet dann die Kettenregel in der Form $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{dv}{dg} \cdot \dfrac{dg}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dx}$ wieder.

(c.) $f_3(x)=\frac{e^{4x}}{4+x^2}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \quad\Rightarrow\quad f_3'(x)=\frac{\overbrace{\left(4+x^2\right)}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{e^{4x}\cdot 4}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{e^{4x}}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{2x}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{\left(4+x^2\right)^2}_{\mathrm{u}^2}}=\frac{4x^2-2x+16}{\left(4+x^2\right)^2}\cdot e^{4x}$ 2 P

Hier wird die Quotientenregel benutzt, wobei man zum Ableiten des $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ die Kettenregel braucht.

(d.) $f_4'(x)=\underbrace{\frac{1}{\cos^2\left(1+x^2\right)}}_{\text{äußere Ableitung}}\cdot\underbrace{2x}_{\substack{\text{innere}\\ \text{Ableitung}}}$ 1 P

Wir verwenden das Ergebnis von Aufg.6.4.e (aus der Quotientenregel), nämlich $\frac{d}{dx}\tan(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ und vergessen nicht die Kettenregel.

(e.) Es gilt

$$f_5'(x)=\frac{\overbrace{1+\tfrac{1}{2}\cdot\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}^{\text{innere Ableitung}}\cdot\overbrace{2x}^{\substack{\text{innere Ab-}\\ \text{leitung der}\\ \text{Inneren}}}}{\underbrace{x+\sqrt{x^2+1}}_{\text{äußere Ableitung}}}$$ 1 P

**Stolperfalle:**

Die Funktion $f_5(x)$ ist der Area-sinus-hyperbolicus. Sollte in einer Aufgabenstellung nach dessen Ableitung gefragt sein, so muss man sich erinnern, dass gilt:

$\operatorname{arsinh}(\mathrm{x})=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Auf ähnliche Weise lassen sich alle Areafunktionen ableiten.

(f.) Neben der mehrfachen Anwendung der Kettenregel ist noch folgendes zu beachten:

Die hier gewählten Bezeichnungen seien: $\ln$ = natürlicher Logarithmus

$\log_b$ = Logarithmus zur Basis $b$

$\lg=\log_{10}$ = Logarithmus zur Basis 10.

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus (mit der Euler'schen Zahl als Basis) ist $\frac{d}{dx}\ln(x)=\frac{1}{x}$. Hat die Basis einen anderen Wert, so muss mit Hilfe der Rechenregeln für Logarithmen umgerechnet werden:

$$\log_b(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(b)} \quad\Rightarrow\quad \frac{d}{dx}\log_b(x)=\frac{1}{\ln(b)}\cdot\frac{1}{x} \quad \text{also auch} \quad \frac{d}{dx}\lg(x)=\frac{1}{\ln(10)}\cdot\frac{1}{x}$$

Damit wenden wir uns dem Lösen der Aufgabe zu. Wir bringen $f_6(x)$ in eine für das Ableiten angenehme Form, nämlich

$$f_6(x) = \lg\left(4x^2+1\right)^4 = \frac{\left(\ln\left(4x^2+1\right)\right)^4}{\left(\ln(10)\right)^4}$$ und leiten dann ab:

2 P
$$f_6{}'(x) = \underbrace{\frac{4\cdot\left(\ln\left(4x^2+1\right)\right)^3}{\left(\ln(10)\right)^4}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4x^2+1}}_{\substack{\text{1.innere}\\\text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{8x}_{\substack{\text{2.innere}\\\text{Ableitung}}}$$

(g.) Es gilt

2 P
$$f_7{}'(x) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\substack{\text{1.innere}\\\text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\substack{\text{2.innere}\\\text{Ableitung}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Die Ableitung des Arcus-sinus findet man in Tabellen elementarer Ableitungen. Sie lautet $\frac{d}{dg}\arcsin(g) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2}}$. Im Falle unserer Aufgabe ist $g=\sqrt{1-x^2}$. Damit ist die äußere Ableitung erklärt. Die zweifache Anwendung der Kettenregel versteht man mit $h=1-x^2$.
Dann ergibt nämlich $f_7(x) = f(g(h(x))$ die Ableitung $f_7{}'(x) = \underbrace{\frac{df}{dg}}_{\substack{\text{äußere}\\\text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{\frac{dg}{dh}}_{\substack{\text{1.innere}\\\text{Ableitung}}} \cdot \underbrace{\frac{dh}{dx}}_{\substack{\text{2.innere}\\\text{Ableitung}}}$.

(h.) Wenn wir vorab das Wurzelzeichen so umformen, dass man Exponenten sieht, vermeiden wir Verwirrung. Es gilt nämlich: $f_8(x) = \sqrt[3]{\sinh^2(x-1)} = \left(\sinh^2(x-1)\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\sinh(x-1)\right)^{\frac{2}{3}}$

2 P Damit leiten wir wie folgt ab: $f_8{}'(x) = \underbrace{\frac{2}{3}\left(\sinh(x-1)\right)^{-\frac{1}{3}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\cosh(x-1)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{1}_{\substack{\text{2.innere}\\\text{Ableitung}}} = \frac{2\cosh(x-1)}{3\cdot\sqrt[3]{\sinh(x-1)}}$

Dies ließ sich mit der Kettenregel relativ leicht ableiten.

Praktischer Hinweis: Bei mehrfach verschachtelter Anwendung der Kettenregel taucht immer wieder die Frage auf, wann man aufhören darf, die inneren Ableitungen der inneren Ableitungen hinzuschreiben.

Die Antwort ist die: Die innerste Ableitung, die man als letzte hinschreiben muss, erkennt man daran, dass man sie ohne Kettenregel bilden kann. Dies gilt z.B. beim Ableiten von Polynomen, bei der Anwendung der Produkt- oder der Quotientenregel, oder bei elementaren Ableitungen, die man aus Tabellen kennt, wie etwa Ableitungen von Winkelfunktionen, etc.

Dass speziell bei Aufgabenteil (h.) die letzte innere Ableitung einen Faktor 1 liefert, sollte uns dabei nicht stören.

## Aufgabe 6.8 Höhere Ableitungen

| | | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 12 min | (a,b.) | | (a,b.) | je 9 P |

Leiten Sie die folgenden Funktionen hintereinander fünfmal nach x ab:

(a.) $f_1(x) = e^{x^2}$ (b.) $f_2(x) = e^{2x^2-2}$

## Lösung zu 6.8

(a.) $$\frac{d}{dx} f_1(x) = \underbrace{e^{x^2}}_{u_2} \cdot \underbrace{2x}_{v_2}$$ 1 P

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2} f_1(x) = \underbrace{e^{x^2} \cdot 2x}_{u_2'} \cdot \underbrace{2x}_{v_2} + \underbrace{e^{x^2}}_{u_2} \cdot \underbrace{2}_{v'_2} = \underbrace{e^{x^2}}_{u_3} \cdot \underbrace{\left(4x^2+2\right)}_{v_3}$$ 1 P

$$\Rightarrow \frac{d^3}{dx^3} f_1(x) = \underbrace{e^{x^2} \cdot (2x)}_{u_3'} \cdot \underbrace{\left(4x^2+2\right)}_{v_3} + \underbrace{e^{x^2}}_{u_3} \cdot \underbrace{8x}_{v'_3} = \underbrace{e^{x^2}}_{u_4} \cdot \underbrace{\left(8x^3+12x\right)}_{v_4}$$ 2 P

$$\Rightarrow \frac{d^4}{dx^4} f_1(x) = \underbrace{e^{x^2} \cdot (2x)}_{u_4'} \cdot \underbrace{\left(8x^3+12x\right)}_{v_4} + \underbrace{e^{x^2}}_{u_4} \cdot \underbrace{\left(24x^2+12\right)}_{v'_4} = \underbrace{e^{x^2}}_{u_5} \cdot \underbrace{\left(16x^4+48x^2+12\right)}_{v_5}$$ 2 P

$$\Rightarrow \frac{d^5}{dx^5} f_1(x) = \underbrace{e^{x^2} \cdot (2x)}_{u_5'} \cdot \underbrace{\left(16x^4+48x^2+12\right)}_{v_5} + \underbrace{e^{x^2}}_{u_5} \cdot \underbrace{\left(64x^3+96x\right)}_{v'_5} = e^{x^2} \cdot \left(32x^5+160x^3+120x\right)$$ 3 P

Die erste Ableitung wird nach der Kettenregel gebildet, alle weiteren Ableitungen sind nach der Produktregel zu berechnen, in der wieder die Kettenregel auftaucht. Die zur Erleichterung eingeführten „u“ und „v“ tragen jeweils den Index „n“ für die Bildung der n-ten Ableitung (also $u_2$ und $v_2$ zur Bestimmung der zweiten Ableitung), damit Verwirrung vermieden wird.

**Arbeitshinweis:**

Das Lernziel bei dieser Aufgabe ist, dass man die Funktion immer vor dem Ableiten in eine Form bringen soll, die die praktische Durchführung des Ableitens möglichst einfach werden lässt. Darauf ist nicht nur bei der vorliegenden Aufgabe zu achten, sondern generell bei allen Ableitungsaufgaben.

Anmerkung: Man sieht, dass der Term $e^{x^2}$ immer mit einem Polynom multipliziert wird.

(b.) Dieser Aufgabenteil verläuft dem Prinzip nach in völliger Analogie zu Teil (a), lediglich mit dem Unterschied, dass die Polynome als Faktoren der e-Funktion anders lauten:

$$\frac{d}{dx} f_1(x) = \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_2} \cdot \underbrace{(4x)}_{v_2}$$ 1 P

1 P $\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2} f_1(x) = \underbrace{e^{2x^2-2}\cdot 4x}_{u_2'} \cdot \underbrace{4x}_{v_2} + \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_2} \cdot \underbrace{4}_{v'_2} = \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_3} \cdot \underbrace{\left(16x^2+4\right)}_{v_3}$

2 P $\Rightarrow \quad \frac{d^3}{dx^3} f_1(x) = \underbrace{e^{2x^2-2}\cdot(4x)}_{u_3'} \cdot \underbrace{\left(16x^2+4\right)}_{v_3} + \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_3} \cdot \underbrace{(32x)}_{v'_3} = \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_4} \cdot \underbrace{\left(64x^3+48x\right)}_{v_4}$

2 P $\Rightarrow \quad \frac{d^4}{dx^4} f_1(x) = \underbrace{e^{2x^2-2}\cdot(4x)}_{u_4'} \cdot \underbrace{\left(64x^3+48x\right)}_{v_4} + \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_4} \cdot \underbrace{\left(192x^2+48\right)}_{v'_4} = \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_5} \cdot \underbrace{\left(256x^4+384x^2+48\right)}_{v_5}$

3 P $\Rightarrow \quad \frac{d^5}{dx^5} f_1(x) = \underbrace{e^{2x^2-2}\cdot(4x)}_{u_5'} \cdot \underbrace{\left(256x^4+384x^2+48\right)}_{v_5} + \underbrace{e^{2x^2-2}}_{u_5} \cdot \underbrace{\left(1024x^3+768x\right)}_{v'_5}$

$$= e^{2x^2-2}\cdot\left(1024x^5+2560x^3+960x\right)$$

## Aufgabe 6.9 Implizites Ableiten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) 2 min | (a.) | | Punkte (a.) 1 P |
| | (b,c,d.) je 3 min | (b,c,d.) | | (b,c,d.) je 2 P |

Berechnen Sie die folgenden impliziten Ableitungen nach x:

(a.) $x \cdot y = 1$ (b.) $x^2 + y^2 = r^2$ (mit konstantem $r$ )

(c.) $y^3 + 4x^2 - y - 4 = 0$ (d.) $4x^2 + \sin^2(y) = 5$

## Lösung zu 6.9

**Allgemeine Erklärung / Stolperfalle:**

Bei den Aufgaben 6.1 bis 6.8 waren die zu differenzierenden Funktionen explizit gegeben. Im Unterschied dazu sind sie bei Aufgabe 6.9 in impliziter Form gegeben. Das Prinzip des Ableitens bleibt davon aber unberührt – man muss lediglich daran denken, dass y eine Funktion von x ist, und dass deshalb Funktionen von y beim Ableiten nach x die Kettenregel erfordern. Bezogen auf unsere Aufgaben sieht dies wie folgt aus:

(a.) $\underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{y}_{u} = 1$ ist abzuleiten mittels Produktregel

1 P $\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dx}{dx}}_{v'} \cdot \underbrace{y}_{u} + \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{u'} \cdot \underbrace{x}_{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad y + y' \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{x \cdot y' = -y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-y}{x} = \frac{-1}{x^2}}_{\text{Auflösen nach y'durch Einsetzen von } y=\frac{1}{x}}$

(b.) Bei dieser Ableitung ist $r$ als Konstante zu behandeln.

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(r^2\right) \quad \Rightarrow \quad 2x+2y\cdot y'=0 \quad \Rightarrow \quad y\cdot y'=-x \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{-x}{y}$$ 2 P

Will man die Ableitung explizit kennen, so löst man die implizite Gleichung der Aufgabenstellung nach y auf und setzt dieses y in die Ableitung ein:

$x^2+y^2=r^2 \quad \Rightarrow \quad y=\sqrt{r^2-x^2}$ führt zu $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$

(c.) Wieder wird jeder einzelne Summand elementar nach x abgeleitet:

$$\frac{d}{dx}\left(y^3\right)+\frac{d}{dx}\left(4x^2\right)-\frac{d}{dx}(y)-\frac{d}{dx}(4)=0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\left(3y^2\cdot y'\right)}_{\text{Kettenregel !}}+(8x)-(y')-(0)=0$$ 2 P

$$\Rightarrow \quad 3y^2\cdot y'-y'=-8x \quad \Rightarrow \quad y'\cdot\left(3y^2-1\right)=-8x \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{-8x}{3y^2-1}$$

Auf eine explizite Angabe von $y'$ als Funktion von x wird hier verzichtet, da man dafür die implizite Formulierung der Funktion aus der Aufgabenstellung nach y auflösen müsste. Bei den Aufgabenteilen (a) und (b) haben wir dies zum Zwecke der Demonstration getan, im Allgemeinen aber wird man dies nicht immer durchführen.

(d.) Um eine Verwirrung durch die abkürzende Schreibweise des Quadrates des Sinus zu vermeiden, können wir die Aufgabenstellung auch umschreiben: $4x^2+(\sin(y))^2=5$

Wieder leiten wir jeden Summanden nach x ab (und vergessen nicht die Kettenregel):

$$\frac{d}{dx}\left(4x^2\right)+\frac{d}{dx}\left((\sin(y))^2\right)=\frac{d}{dx}(5) \quad \Rightarrow \quad 8x+2\cdot\sin(y)\cdot\cos(y)\cdot y'=0$$

$$\Rightarrow \quad \sin(y)\cdot\cos(y)\cdot y'=-4x \quad \Rightarrow \quad y'=\frac{-4x}{\sin(y)\cdot\cos(y)}$$ 2 P

# Aufg 6.10 Ableiten in Parameterdarstellung und Polarkoordinaten

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) je 8 min | (a,b,c.) | Punkte<br>(a,b,c.) je 3 P |
| | (d.) 20 min | (d.) | (d) 8 P |

Bei den Aufgabenteilen (a.) und (b.) sind Funktionen in Parameterdarstellung gegeben, bei den Aufgabenteilen (c.) und (d.) sind Funktionen in Polarkoordinaten gegeben.

Berechnen Sie bitte durch Bilden der Ableitungen deren Steigungen. Bestimmen Sie außerdem die Punkte $P_i=(x_i;y_i)$ (Index „i“ zur Nummerierung), in denen die Tangenten waagerecht oder senkrecht verlaufen.

(a.) $x(t)=\sin(t)$ und $y(t)=-t^2+4t+5$

(b.) $x(t)=\frac{1}{3}t^3+2t^2-5t+7$ und $y(t)=e^{-t}$

(c.) $r=\sin(\varphi)$

(d.) $r=a\cdot\sqrt{\cos(2\varphi)}$ Die Kurve heißt Lemniskate. Man achte auf ihren Definitionsbereich, der bestimmt ist durch den nicht negativen Radikanden für $\cos(2\varphi)\geq 0$

Ein Umlauf der Kurve wird erreicht für $\varphi\in\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n\,;+\frac{\pi}{4}+2\pi n\right]\cup\left[\frac{3}{4}\pi+2\pi n\,;+\frac{5}{4}\pi+2\pi n\right]$, wobei wir uns für die Berechung dieser Aufgabe auf den Umlauf der ersten Periode beschränken: $n=0$

## Lösung zu 6.10

**Arbeitshinweis:**

Allgemein lautet die Ableitung von Funktionen in Parameterdarstellung: $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

Für die Lösung unserer Aufgaben bedeutet dies:

1 P (a.) $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t+4}{\cos(t)}$ für die Steigung in Parameterdarstellung

Die Stellen mit waagerechten Tangenten sind $\frac{dy}{dx}=0$. Dies sind die Nullstellen des Zählers der Ableitung (sofern sie nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind; in diesem Falle müssten weitergehende Untersuchungen erfolgen). Unsere Aufgabe hat eine Stelle mit waagerechter Tangente bei

$-2t+4=0 \Rightarrow t_w=2$ (Index w für waagerechte Tangente), dort liegen keine Nennernullstellen.

1 P Also: $P_w=(x_w;y_w)=\left(\sin(t_w)\;;\;-t_w^2+4t_w+5\right)=\left(\sin(2)\;;\;-4+8+5\right)=\left(\sin(2)\;;\;9\right)$

Stellen mit senkrechten Tangenten sind die Nullstellen des Nenners der Ableitung (sofern sie nicht gleichzeitig Nullstellen des Zählers sind, was ebenfalls weitergehende Untersuchungen erfordern würde). Unsere Aufgabe hat unendlich viele Stellen mit senkrechten Tangenten bei

$\cos(t)=0 \Rightarrow t_s=\left(s+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$ (mit $s\in\mathbb{Z}$), dort liegen keine Zählernullstellen.

Die zugehörigen Punkte auf der Kurve liegen bei

$$P_s=(x_s;y_s)=\left(\sin(t_s)\;;\;-t_s^2+4t_s+5\right)=\left(\sin\left(s\pi+\frac{\pi}{2}\right)\;;\;-\left(s\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2+4\left(s\pi+\frac{\pi}{2}\right)+5\right)$$

1 P

$$=\left((-1)^s\;;\;-\pi^2\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+4\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)+5\right)$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Zur Veranschaulichung sei noch das Bild 6-10a gezeigt.

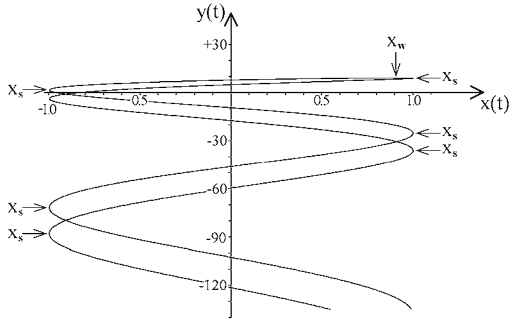



**Bild 6-10a**
Funktionsgraph zu der in Parameterdarstellung gegebenen Funktion (geplottet für $t = -10 \ldots +14$)

$x(t) = \sin(t)$ und $y(t) = -t^2 + 4t + 5$

Der Punkt mit einer waagerechten Tangente ist mit $x_w$ markiert, die Punkte mit senkrechten Tangenten mit $x_s$.

(b.) Hier berechnet man die Steigung in Parameterdarstellung gemäß $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-e^{-t}}{t^2 + 4t - 5}$ 1 P

Der Bruch, der diese Steigung ausdrückt, hat keine Zählernullstellen, also gibt es keine waagerechten Tangenten.

Senkrechte Tangenten findet man als Nennernullstellen mit der pq-Formel:

$t^2 + 4t - 5 = 0 \Rightarrow \quad t_{s1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} \Rightarrow \quad t_{s1} = +1 \;;\; t_{s2} = -5$ (Index s für senkrechte Tangente), 1 P

dort liegen keine Zählernullstellen.

Also: $P_{s1} = (x_{s1}; y_{s1}) = \left(\frac{1}{3} t_{s1}{}^3 + 2t_{s1}{}^2 - 5t_{s1} + 7 \;;\; e^{-t_{s1}}\right) = \left(\frac{13}{3} \;;\; e^{-1}\right)$

Und: $P_{s2} = (x_{s2}; y_{s2}) = \left(\frac{1}{3} t_{s2}{}^3 + 2t_{s2}{}^2 - 5t_{s2} + 7 \;;\; e^{-t_{s1}}\right) = \left(\frac{121}{3} \;;\; e^{+5}\right)$ 1 P

Auch zu dieser Funktion existiert eine Veranschaulichung, sie ist in Bild 6-10b zu sehen.

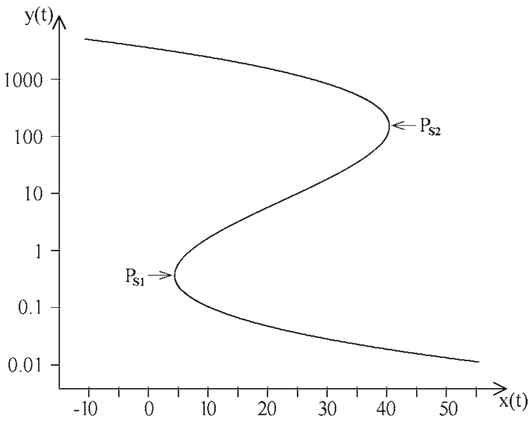



**Bild 6-10b**
Funktionsgraph zu der in Parameterdarstellung gegebenen Funktion

$x(t) = \frac{1}{3} t^3 + 2t^2 - 5t + 7$ und $y(t) = e^{-t}$

Die beiden Punkte mit senkrechten Tangenten sind mit $P_{S1}$ und $P_{S2}$ markiert.

Der Übersichtlichkeit halber ist eine halblogarithmische Darstellung gewählt.

(c.)

**Arbeitshinweis:**

Allgemein gilt für die Ableitung von Funktionen in Polarkoordinaten:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{r}\cdot\sin(\varphi)+r\cdot\cos(\varphi)}{\dot{r}\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)}$$, wobei $\dot{r}$ für $\dot{r}=\frac{dr}{d\varphi}$ steht.

Zum Lösen unserer Beispielaufgabe bestimmen wir zuerst die Ableitung $\dot{r}$: $\dot{r}=\frac{dr}{d\varphi}=\cos(\varphi)$

Damit setzen wir ein in die Tangentensteigung:

1 P $$\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{r}\cdot\sin(\varphi)+r\cdot\cos(\varphi)}{\dot{r}\cdot\cos(\varphi)-r\cdot\sin(\varphi)}=\frac{\cos(\varphi)\cdot\sin(\varphi)+\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)\cdot\cos(\varphi)-\sin(\varphi)\cdot\sin(\varphi)}=\frac{2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{1-2\cdot\sin^2(\varphi)}$$

(wobei das Additionstheorem $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$ verwendet wurde.)

Die Nullstellen des Zählers weisen auf waagerechte Tangenten hin (wenn der Nenner dort nicht verschwindet). Da ein Produkt Null wird, sobald einer der Faktoren Null wird, sind alle Nullstellen des Sinus und alle Nullstellen des Cosinus auch Nullstellen des Zählers:

1 P $$2\cdot\sin(\varphi)\cdot\cos(\varphi)\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\text{einerseits} & \varphi_i=\mathrm{i}\cdot\pi \quad (\text{mit } \mathrm{i}\in\mathbb{Z})\\ \text{andererseits} & \varphi_n=\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)\cdot\pi \quad (\text{mit } \mathrm{n}\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Die Nullstellen des Nenners die (beim Nichtverschwinden des Zählers) die senkrechten Tangenten erkennen lassen, findet man gemäß

1 P $$1-2\cdot\sin^2(\varphi)=0\quad\Rightarrow\quad\sin^2(\varphi)=\tfrac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad\sin(\varphi)=\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}}\quad\Rightarrow\quad\varphi_j=\left(j+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\quad(\text{mit } \mathrm{j}\in\mathbb{Z})$$

Die Veranschaulichung dieser Funktion und der berechneten Punkte zeigt Bild 6-10c.

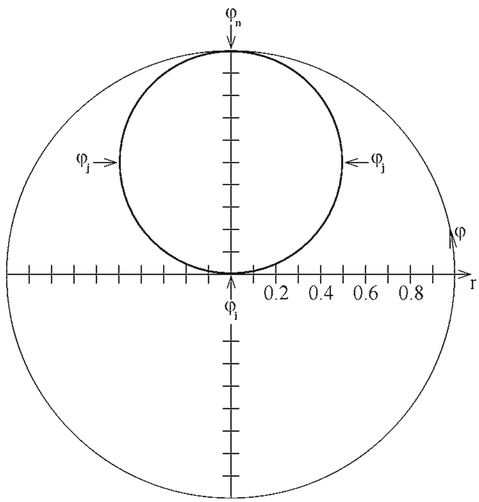



**Bild 6-10c**
Funktionsgraph zu der in Polarkoordinaten gegebenen Funktion $r(\varphi)=\sin(\varphi)$

Die Punkte mit senkrechten Tangenten gehören zu den Winkeln $\varphi_j$.

Die Punkte mit waagerechten Tangenten gehören zu den Winkeln $\varphi_i$ und $\varphi_n$.

(d.) Wieder bestimmen wir zuerst die Ableitung $\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}$ :

$$r = a \cdot \left(\cos(2\varphi)\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = a \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot \left(\cos(2\varphi)\right)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{äußere Ableitung}} \cdot \underbrace{\left(-\sin(2\varphi)\right)}_{\text{innere Ableitung}} \cdot \underbrace{2}_{\substack{\text{innere} \\ \text{der inneren} \\ \text{Ableitung}}} = -a \cdot \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} \qquad \text{1 P}$$

Diese Ableitung setzen wir dann in $\frac{dy}{dx}$ ein:

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{r} \cdot \sin(\varphi) + r \cdot \cos(\varphi)}{\dot{r} \cdot \cos(\varphi) - r \cdot \sin(\varphi)} = \frac{-a \cdot \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} \cdot \sin(\varphi) + a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \cos(\varphi)}{-a \cdot \frac{\sin(2\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} \cdot \cos(\varphi) - a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)} \cdot \sin(\varphi)} \cdot \frac{\sqrt{\cos(2\varphi)}}{\sqrt{\cos(2\varphi)}}$$

$$= \frac{\sin(2\varphi) \cdot \sin(\varphi) - \cos(2\varphi) \cdot \cos(\varphi)}{\sin(2\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \cos(2\varphi) \cdot \sin(\varphi)} = \frac{2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - \left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) \cdot \cos(\varphi)}{2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) \cdot \sin(\varphi)} \qquad \text{5 P}$$

$$\left(\text{mit den Additionstheoremen } \sin(2\varphi) = 2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \cos(2\varphi) = \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)$$

$$= \frac{2 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - \cos^3(\varphi) + \cos(\varphi) \cdot \sin^2(\varphi)}{2 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)} = \frac{\left(3 \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi)\right) \cdot \cos(\varphi)}{\left(3\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) \cdot \sin(\varphi)} =$$

$$= \frac{\left(3 \cdot \sin^2(\varphi) - \left(1 - \sin^2(\varphi)\right)\right) \cdot \cos(\varphi)}{\left(3\cos^2(\varphi) - \left(1 - \cos^2(\varphi)\right)\right) \cdot \sin(\varphi)} = \frac{\left(4 \cdot \sin^2(\varphi) - 1\right) \cdot \cos(\varphi)}{\left(4 \cdot \cos^2(\varphi) - 1\right) \cdot \sin(\varphi)}$$

Stellen mit senkrechter Tangente finden wir als Nullstellen des Nenners. Der Nenner wird Null, wenn einer der beiden Faktoren, aus denen er sich zusammensetzt, Null wird, also bei

$\sin(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_i = i \cdot \pi \qquad (\text{mit } i \in \mathbb{Z})$ und andererseits bei

$$4 \cdot \cos^2(\varphi) - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2(\varphi) = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) = \pm\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{einerseits} & \varphi_j = \left(j + \frac{1}{3}\right) \cdot \pi \quad (j \in \mathbb{Z}) \\ \text{andererseits} & \varphi_k = \left(k + \frac{2}{3}\right) \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \qquad \text{1 P}$$

(An all diesen Stellen hat der Zähler keine Nullstellen.)

Stellen mit waagerechter Tangente finden wir als Nullstellen des Zählers. Diese treten auf, sobald einer der beiden Faktoren des Zählers verschwindet, also bei

$\cos(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_l = \left(l + \frac{1}{2}\right) \cdot \pi \qquad (\text{mit } l \in \mathbb{Z})$ und andererseits bei

$$4 \cdot \sin^2(\varphi) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2(\varphi) = \tfrac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \sin(\varphi) = \pm\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{einerseits} & \varphi_m = \left(m + \frac{1}{6}\right) \cdot \pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \\ \text{andererseits} & \varphi_n = \left(n + \frac{5}{6}\right) \cdot \pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{cases} \qquad \text{1 P}$$

Die Kurve und die untersuchten markanten Punkte sind in Bild 6-10d veranschaulicht.

Anmerkung: Die $\varphi_i$, $\varphi_n$ und $\varphi_m$ sind im Graphen eingetragen, die $\varphi_j$, $\varphi_k$ und $\varphi_l$ nicht. Dies hat seinen Grund darin, dass die nicht eingetragenen $\varphi_j$, $\varphi_k$, $\varphi_l$ außerhalb des ersten Umlaufs der Funktion liegen, auf den wir uns laut Aufgabenstellung beschränken wollen.

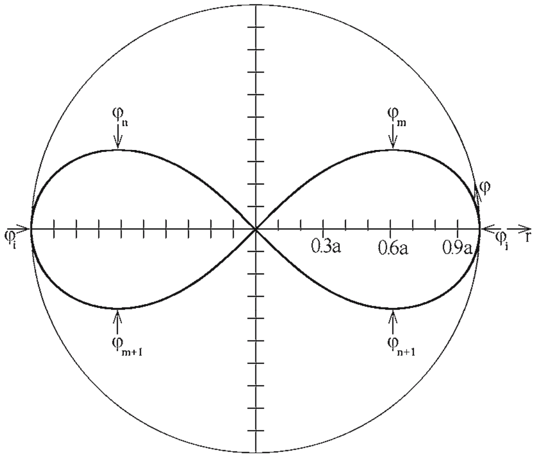



**Bild 6-10d**

Graph der Lemniskate $r = a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)}$ für $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}\,;+\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi\,;+\frac{5}{4}\pi\right]$

Markiert sind die Punkte mit waagerechten und mit senkrechten Tangenten.

## Aufgabe 6.11 Kurvendiskussionen verschiedenster Art

| | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 20 min | (a.) | (a.) 12 P |
| | (b.) | 20 min | (b.) | (b.) 12 P |
| | (c.) | 30 min | (c.) | (c.) 19 P |
| | (d.) | 40 min | (d.) | (d.) 22 P |
| | (e.) | 30 min | (e.) | (e.) 16 P |
| | (f.) | 40 min | (f.) | (f.) 20 P |
| | (g.) | 8 min | (g.) | (g.) 3 P |

Führen Sie Kurvendiskussionen für die untenstehend gegebenen Funktionen unter Berücksichtigung folgender Aspekte durch:

(i.) Definitionsbereich
(ii.) Nullstellen
(iii.) Polstellen
(iv.) Asymptotisches Verhalten für $\lim\limits_{x\to+\infty}$ und $\lim\limits_{x\to-\infty}$
(v.) Gerade bzw. ungerade Symmetrieeigenschaften
(vi.) Ableitungen (von der ersten bis mindestens zur dritten)
(vii.) Extrema (Maxima und Minima)
(viii.) Wendepunkte und Sattelpunkte
(ix.) Schnittpunkt mit der y-Achse
(x.) Wertebereich
(xi.) Skizze des Funktionsgraphen

Die zur Kurvendiskussion gegebenen Funktionen seien folgende:

(a.) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$ (b.) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$ (c.) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$

(d.) $f(x) = \dfrac{x^3-4x}{x^2+1}$ (e.) $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$ (f.) $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

(g.) Hinweis auf eine allgemeine Stolperfalle bei der Berechnung von Asymptoten:

Berechnen Sie das Verhalten für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ bei der Funktion $f(x) = \dfrac{6x^4+4x^3+x^2-5}{2x^2+x-1}$

## Lösung zu 6.11

Für jede einzelne der gegebenen Funktionen wollen wir der Reihe nach die Punkte (i.) bis (xi.) durchgehen.

<u>zu a:</u> Die Funktion lautet $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 6$

(a,i) Bei Polynomen reeller Zahlen gibt es keine Definitionslücken $\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R}$ 1 P

(a,ii) Durch Ausprobieren finden wir eine Nullstelle bei $x_1 = 1$, was sich durch einfaches Einsetzen bestätigen lässt: $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 6 = 0$

Da ein Polynom dritten Grades maximal drei reelle Nullstellen haben kann, spalten wir mittels Polynomdivision einen Faktor $(x - x_1)$ ab, um anschließend mittels pq-Formel untersuchen zu können, ob noch weitere Nullstellen (in $\mathbb{R}$) auftreten.

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-4x^2-3x+6\right):\left(x-1\right)=x^2-3x-6 \\
-\left(x^3-x^2\right) \\
\hline
\quad -3x^2-3x \\
\quad -\left(-3x^2+3x\right) \\
\hline
\qquad -6x+6 \\
\qquad -\left(-6x+6\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

1 P

also:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 6 = (x-1) \cdot \left(x^2 - 3x - 6\right)$$

Mit der pq-Formel sind also die Nullstellen von $\left(x^2 - 3x - 6\right)$ zu suchen:

$$x_{2,3} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 6} = +\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{4}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33} \quad \text{und} \quad x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{33}$$ 1 P

Die Funktion hat also drei reelle Nullstellen: $x_1,\ x_2$ und $x_3$

(a,iii) Polstellen treten bei reellen Polynomen nicht auf.

(a,iv) Asymptoten: Eine Vereinfachung des Ausdruckes für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ ist nicht möglich.

1 P (a,v) Da das Polynom Summanden mit geradzahligem und solche mit ungeradzahligem Exponenten enthält, liegt weder eine gerade noch eine ungerade Symmetrie vor.

(a,vi) Ableitungen: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3$

$f''(x) = 6x - 8$

1 P $f'''(x) = 6$

Alle Ableitungen ab der vierten verschwinden identisch, d.h. sie sind überall Null.

(a,vii) **Arbeitshinweis:** Die notwendige Bedingung für Extrema lautet $f'(x) = 0$.

Für unsere Aufgabe bedeutet dies: $f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 8x - 3 = 0$

Die Nullstellen der ersten Ableitung suchen wir wieder mit der pq-Formel. Dazu müssen wir die quadratische Gleichung in die Normalform bringen, d.h. der Faktor vor dem $x^2$ muss 1 sein: $x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0$

1 P $$\Rightarrow \quad x_{4,5} = +\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} = +\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{4 \pm 5}{3} \quad \Rightarrow \quad x_4 = 3 \quad \text{und} \quad x_5 = -\frac{1}{3}$$

**Arbeitshinweis:**

Ob es sich bei diesen Stellen wirklich um Extrema handelt, prüfen wir durch Einsetzen in die zweite Ableitung. Ist sie an den in Frage kommenden Stellen positiv, so handelt es sich um ein Minimum, ist sie hingegen dort negativ, so handelt es sich um ein Maximum:

$f''(x_4) = 6x_4 - 8 = 6 \cdot 3 - 8 = +10 > 0 \quad \Rightarrow$ bei $x_4$ ist ein lokales Minimum

1 P

$f''(x_5) = 6x_5 - 8 = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - 8 = -10 < 0 \quad \Rightarrow$ bei $x_5$ ist ein lokales Maximum

Anmerkung: Würde die Ableitung an einer der untersuchten Stellen verschwinden, so wären weitere Untersuchungen nötig. Solche Fälle werden wir im weiteren Verlauf von Aufgabe 6.11 noch betrachten.

(a,viii) **Arbeitshinweis:** Sowohl Wendepunkte als auch Sattelpunkte haben die notwendige Bedingung $f'' = 0$.

Wir suchen die Nullstellen von $f''$: $\quad 6x - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_6 = \frac{4}{3}$

**Arbeitshinweis:** Hinreichende Bedingung für Wendepunkte ist $f'' = 0$ und $f''' \neq 0$.

Wir setzen also ein:

1 P $f'''(x_6) = 6 > 0 \quad \Rightarrow$ Es handelt sich also um einen Wendepunkt, und zwar um einen rechts-links-Wendepunkt, also um einen Wendepunkt mit Übergang von der Rechtskrümmung in die Linkskrümmung.

**Arbeitshinweis:**

Zur Unterscheidung von rechts-links-Wendepunkten und links-rechts-Wendepunkten dient wieder das Vorzeichen von $f'''$. Setzt man die Nullstellen von $f''$ in $f'''$ ein, so zeigt ein positives Vorzeichen von $f'''$ an diesen Stellen auf einen rechts-links-Wendepunkt hin, ein negatives Vorzeichen hingegen auf einen links-rechts-Wendepunkt.

Ist dieser Wendepunkt gleichzeitig auch ein Sattelpunkt?

**Arbeitshinweis:**

Sattelpunkte sind spezielle Wendepunkte, nämlich solche, in denen die Kurve die Steigung Null hat. Hinreichende Bedingung wäre also: $f'=0$ und $f''=0$ und $f'''\neq 0$.

Wir prüfen dies für unsere Aufgabe:

$f''$ und $f'''$ an der Stelle $x_6$ kennen wir bereits, dazu berechnen wir $f'(x_6)=3x_6^2-8x_6-3=3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2-8\cdot\frac{4}{3}-3=-\frac{25}{3}\neq 0$. Dieser Wendepunkt ist also kein Sattelpunkt. Da die Kurve keine weiteren Wendepunkte hat, können auch keine weiteren Sattelpunkte auftreten. Die Kurve hat also überhaupt keine Sattelpunkte. 1 P

(a,ix) Der Schnittpunkt mit der Ordinate liegt bei $y=f(0)=0^3-4\cdot 0^2-3\cdot 0+6=6$

(a,x) Da die Funktion für $x\to-\infty$ aus $y\to-\infty$ kommt und für $x\to+\infty$ nach $y\to+\infty$ geht, ist die nicht beschränkt. Der Wertebereich ist also $\mathbb{W}=\mathbb{R}$ 1 P

(a,xi) Für eine einfache Handskizze trägt man zuerst die soeben berechneten charakteristischen Kurvenpunkte in ein xy-Diagramm ein und zeichnet dann die Kurve durch: 2 P

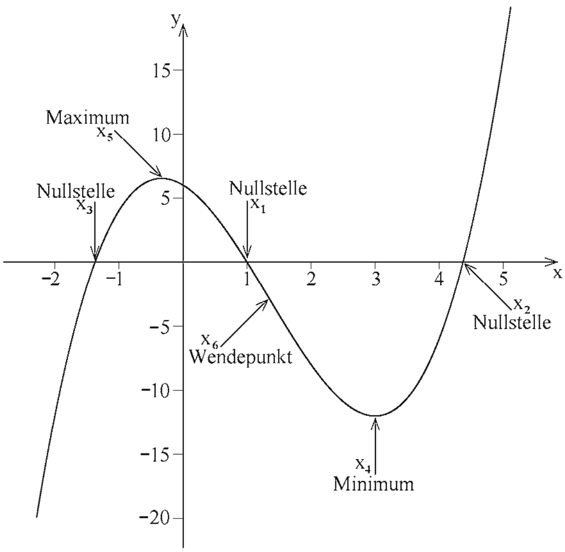



**Bild 6-11a**
Funktionsgraph zu Aufgabe 6.11a
Die Funktion lautet
$f(x)=x^3-4x^2-3x+6$

zu b: Die Funktion lautet $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$

(b,i) Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, denn die Nennernullstelle ist eine Definitionslücke.

(b,ii) Der Zähler hat eine Nullstelle bei $2x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-\frac{3}{2}$ .

Da $x_1$ keine Nullstelle des Nenners ist, ist $x_1$ tatsächlich eine Nullstelle von $f(x)$ .

2 P (b,iii) Polstellen finden wir als Nullstellen des Nenners: $x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-1$
Man erinnere sich daran, dass die Polstelle nicht im Definitionsbereich enthalten ist.

(b,iv) Das asymptotische Verhalten von Polynombrüchen finden wir nach erfolgter Polynomdivision:

1 P

$$\begin{array}{l} (2x+3):(x+1)=2+\frac{1}{x+1} \\ -\underline{2x+2} \\ \quad 1 \end{array}$$

Da der echt gebrochene Anteil für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$ verschwindet, also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x+1}=0$ ist, sind die Asymptoten: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=2$

(b,v) Die Funktion ist weder gerade noch ungerade.

Begründung: $u(x)=2x$ zeigt ungerade Symmetrie,

aber $g(x)=3$ zeigt gerade Symmetrie

1 P Die Summe aus beiden bildet den Zähler, der damit weder gerade noch ungerade ist. Damit bleibt auch dem gesamten Polynombruch die gerade oder ungerade Symmetrie verwehrt.

(b,vi) Die Ableitungen sind als Vorarbeit für die Punkte (b,vii) und (b,viii) zu verstehen. Wir verwenden die Quotientenregel.

2 P

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(x+1)\cdot 2-(2x+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{(x+1)^2}=-(x+1)^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad f''(x)=+2\cdot(x+1)^{-3}$$

$$\Rightarrow \quad f'''(x)=-6\cdot(x+1)^{-4}$$

(b,vii) Notwendige Bedingung für die Existenz lokaler Extrema ist das Verschwinden der ersten Ableitung $f'(x)=0$. Da der Zähler von $f'$ keine Nullstellen hat, ist das Auftreten lokaler Extrema unmöglich.

1 P (b,viii) Notwendige Bedingung für das Auftreten von Wende- und Sattelpunkten ist das Verschwinden der zweiten Ableitung $f''(x)=0$. Da auch $f''$ keine Nullstellen hat, treten derartige charakteristische Kurvenpunkte ebenfalls nicht auf.

1 P (b,ix) Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei x=0. Wir berechnen also $f(0)=\frac{2x+3}{x+1}=3$

(b,x) Bei der Frage nach dem Wertebereich muss untersucht werden, welche möglichen y-Werte die Funktion annehmen kann.

Wie wir aus (b,iv) wissen, gibt uns die Betrachtung des asymptotischen Verhaltens in diesem Beispiel hierüber keine Auskunft. Wir betrachten also das Verhalten der Kurve bei Annäherung an die Polstelle.

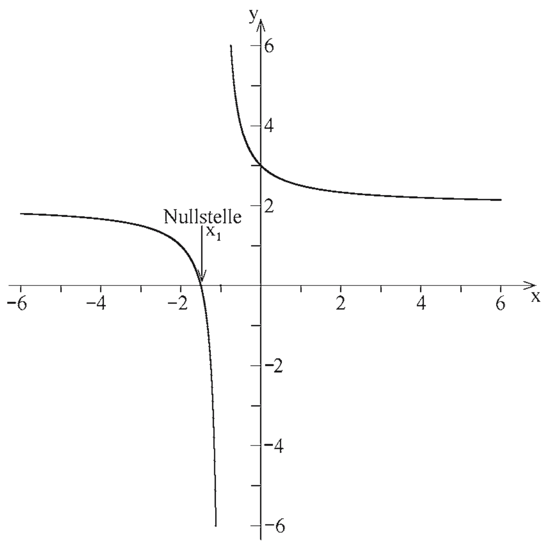
Der linksseitige Grenzwert lautet $\lim\limits_{x\to -1_-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_-} \frac{2x+3}{x+1} = -\infty$

Der rechtsseitige Grenzwert lautet $\lim\limits_{x\to -1_+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1_+} \frac{2x+3}{x+1} = +\infty$

Damit ist eine Beschränkung des Wertebereichs nach oben oder unten ausgeschlossen. Wie wir am Funktionsgraphen (b,xi) erkennen werden, kann lediglich der asymptotische Wert nie vollständig erreicht werden.

Somit lautet der Wertebereich der Funktion $\mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. 2 P

(b,xi) Aus den soeben bestimmten markanten Kurveneigenschaften konstruiert man den in Bild 6-11b dargestellten Kurvenverlauf.




2 P

**Bild 6-11b**
Funktionsgraph zu Aufgabe 6.11b
Die Funktion lautet $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$

<u>zu c:</u> Die Funktion lautet $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$

(c,i) Einschränkungen im Definitionsbereich ergeben sich aus Nullstellen des Nenners. Wir lösen also die Gleichung $x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = +1 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = \pm 1$, bzw. $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

Diese beiden Punkte sind Definitionslücken $\Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1;+1\}$ . 1 P

(c,ii) Nullstellen liegen sicher vor beim Verschwinden des Zählers und gleichzeitigem Nichtverschwinden des Nenners. Wir beginnen also mit der Suche der Nullstellen des Zählers.

Wir erraten unschwer eine Zählernullstelle bei $x_3 = -1$. Diese ist allerdings (wie wir aus (c,i) wissen) auch gleichzeitig eine Nullstelle des Nenners und muss daher weiter untersucht werden:

Ob es sich dabei um eine behebbare Definitionslücke handelt, erfahren wir durch Kürzen, also nach erfolgter Faktorisierung des Zählers und des Nenners.

1 P Die Faktorisierung des Nenners ist nach (c,i) einfach: $x^2 - 1 = (x+1)\cdot(x-1)$

Die Faktorisierung des Zählers erfolgt mittels Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3+1):(x+1) = x^2 - x + 1 \\
-\underline{(x^3 + x^2)} \\
\quad -x^2 + 1 \\
\quad -\underline{(-x^2 - x)} \\
\qquad x + 1 \\
\qquad -\underline{(x + 1)} \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Es gilt also: $(x^3+1) = (x^2 - x + 1)\cdot(x+1)$

2 P Damit können wir schreiben: $f(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{(x^2-x+1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}$

Die Stelle bei $x_3 = -1$ ist also tatsächlich eine behebbare Definitionslücke, denn sie tritt als Nullstelle des Zählers und des Nenners gleichzeitig auf.

Dies ändert nichts an der Definitionsmenge der Funktion $f(x)$, aber es erlaubt uns, alle weiteren Überlegungen mit einer gekürzten Ersatzfunktion $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ durchzuführen, die in allen Punkten außer bei $x_3$ mit $f(x)$ identisch ist.

2 P Da jedoch $g(x_3) = \frac{(-1)^2 - (-1) + 1}{(-1) - 1} = -\frac{3}{2} \neq 0$ ist, kann man die Definitionslücke bei $x_3$ nicht mit einer Nullstelle beheben, sondern mit dem Funktionswert $-\frac{3}{2}$.

Offen ist noch die Frage nach weiteren Nullstellen des Zählers. Diese beantworten wir jetzt, und zwar mit Hilfe der pq-Formel:

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{4,5} = +\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} \notin \mathbb{R}$$

Diese Nullstellen sind komplex aber nicht reell. Das bedeutet, dass $f(x)$ in den reellen Zahlen tatsächlich keine Nullstellen hat.

1 P Im Übrigen werden wir bei allen weiteren Untersuchungen mit der Ersatzfunktion $g(x)$ arbeiten, da diese fast überall (d.h. überall außer in einem Punkt, nämlich bei $(x_3; g(x_3))$ ) mit $f(x)$ identisch ist.

(c,iii) Polstellen findet man bei den Nullstellen des Nenners. $g(x)$ hat zwei Nennernullstellen, und zwar bei $x_1 = 1$ und bei $x_3 = -1$.

Die Nennernullstelle bei $x_3$ haben wir bereits als behebbare Definitionslücke identifiziert; die Nennernullstelle bei $x_1$ tritt nicht als Nullstelle des Zählers auf und ist daher eine Polstelle. 1 P

(c,iv) Asymptotisches Verhalten findet man nach Polynomdivision

$$\begin{array}{l} \left(x^2 - x + 1\right) : (x-1) = x + \dfrac{1}{x-1} \\ -\left(x^2 - x\right) \\ \hline \qquad 0 + 1 \end{array}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ folgt für die Asymptoten: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = x$ 1 P

(c,v) Sowohl im Zähler als auch im Nenner tauchen gerade und ungerade Summanden nebeneinander auf. Folglich kann die Funktion weder gerade noch ungerade sein.

(c,vi) Zum Ableiten benutzen wir die Ersatzfunktion und arbeiten mit der Quotientenregel

$$g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1} = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{\overbrace{(\text{x-1})}^{\mathrm{v}} \cdot \overbrace{(\text{2x-1})}^{\mathrm{u'}} - \overbrace{\left(\mathrm{x}^2 - x + 1\right)}^{\mathrm{u}} \cdot \overbrace{(+1)}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{(x-1)^2}_{\mathrm{v}^2}} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$ 1 P

$$g'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \quad \Rightarrow \quad g''(x) = \frac{\overbrace{(\text{x-1})^2}^{\mathrm{v}} \cdot \overbrace{(\text{2x-2})}^{\mathrm{u'}} - \overbrace{\left(\mathrm{x}^2 - 2x\right)}^{\mathrm{u}} \cdot \overbrace{2(x-1)}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{(x-1)^4}_{\mathrm{v}^2}} = \frac{2}{(x-1)^3}$$ 1 P

$$\Rightarrow \quad g'''(x) = -6 \cdot (x-1)^{-4}$$ 1 P

(c,vii) Wo könnten Extrema sein? Dazu prüfen wir die notwendige Bedingung für Extrema, also $g'(x) = 0$, wobei wir zunächst die Zählernullstellen von $g'$ suchen. Man könnte das mit der pq-Formel machen, aber hier geht es schneller durch Faktorisieren mit Ausklammern von $x$, nämlich:

$x^2 - 2x = x \cdot (x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_6 = 0$ und $x_7 = +2$. 1 P

Da weder $x_6$ noch $x_7$ Nennernullstelle ist, handelt es sich um Nullstellen von $g'(x)$.

Um zu klären, ob bei $x_6$ und $x_7$ wirklich Extrema auftauchen, prüfe man die hinreichende Bedingung. Dabei kommt zu $g'(x) = 0$ noch $g''(x) \neq 0$ hinzu:

$$g''(x_6) = \frac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum bei } \mathrm{x}_6 = 0$$

1 P

$$g''(x_7) = \frac{2}{(2-1)^3} = +2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum bei } \mathrm{x}_7 = 2$$

(c,viii) Wo könnten Wendepunkte sein?

Dazu prüfen wir die notwendige Bedingung für Wendepunkte, also $g''(x) = 0$.

Wie man durch Einsetzen in $g''$ sieht, liegen dessen Zählernullstellen bei $2 = 0$. Da diese Bedingung für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, hat die Funktion keine Wendepunkte.

1 P Sattelpunkte sind spezielle Wendepunkte. Wenn also keine Wendepunkte vorliegen, dann liegen auch keine Sattelpunkte vor.

1 P (c,ix) Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $y = g(0) = \frac{0^2 - 0 + 1}{0 - 1} = -1$

(c,x) Den Wertebereich sieht man am leichtesten, wenn man schon auf den nächsten und letzten Unterpunkt der Aufgabe 6.11c schaut, auf den Graphen der Kurve.

Nach oben und unten ist die Funktion nicht beschränkt, aber die y-Werte zwischen den beiden Extrema fehlen im Wertebereich. Dazu berechnen wir

1 P
$$g(x_6) = \frac{x_6^2 - x_6 + 1}{x_6 - 1} = \frac{0^2 - 0 + 1}{0 - 1} = -1$$
$$g(x_7) = \frac{x_7^2 - x_7 + 1}{x_7 - 1} = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 1} = +3$$
$$\Rightarrow \quad \mathbb{W} = \mathbb{R} \setminus \left]-1;3\right[ \quad \text{für den Wertebereich}$$

(c,xi) Aus den soeben bestimmten markanten Kurveneigenschaften konstruiert man den in Bild 6-11b dargestellten Kurvenverlauf.

2 P

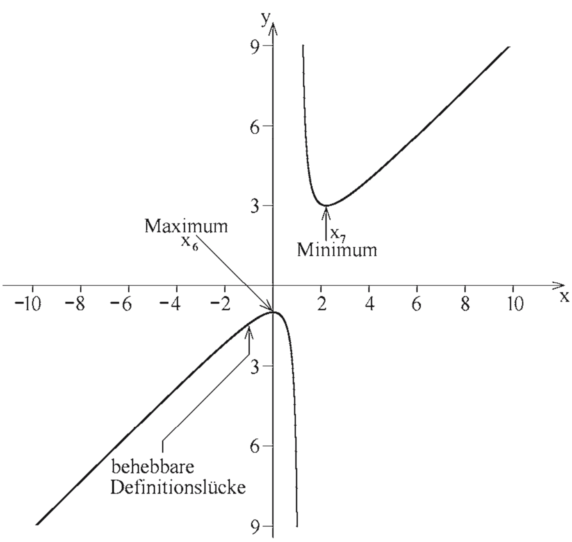



**Bild 6-11c**
Funktionsgraph zu Aufgabe 6.11c

Die Funktion lautet $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$, aber der Graph sieht außer in einer behebbaren Definitionslücke genauso aus wie der Graph der Ersatzfunktion $g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

<u>zu d:</u> Die Funktion lautet $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+1}$

(d,i) Definitionslücken suchen wir als Nullstellen des Nenners, also durch Lösen der Gleichung $x^2+1=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$. In den reellen Zahlen treten bei dieser Funktion also keine Definitionslücken auf. 1 P

(d,ii) Da ein Nullwerden des Nenners nicht passiert, sind alle Nullstellen des Zählers auch Nullstellen der Funktion $f(x)$. Diesen Zähler zerlegen wir in Linearfaktoren, indem wir zuerst ein x ausklammern und den Rest als dritte Binomische Formel erkennen:

Ausklammern: $x^3-4x=\left(x^2-4\right)\cdot x$

Dritte Binomische Formel: $x^2-4=x^2-2^2=(x-2)\cdot(x+2)=0$

Damit ist $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{x^2+1}=\dfrac{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{x^2+1}$ und wir sehen nun die drei Nullstellen:

$x_3=0;\quad x_4=+2;\quad x_5=-2$ 2 P

(d,iii) Da das Nennerpolynom keine reellen Nullstellen hat (siehe Teil d,i), wissen wir auch, dass keine Polstellen auftreten.

(d,iv) Das asymptotische Verhalten untersuchen wir wie gewohnt durch Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}\left(x^3-4x\right):\left(x^2+1\right)=x-\dfrac{5x}{x^2+1}\\ -\left(x^3+x\right)\\ \hline \quad -5x\end{array}$$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x}{x^2+1}=0$ folgt also für die Asymptoten $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=x$. 1 P

(d,v) Die Funktion zeigt ungerade Symmetrie.
Begründung:
- Im Zähler zeigen alle Summanden ungerade Symmetrie, also ist das Zählerpolynom ungerade (Merkregel: $u+u\mapsto u$ )
- Im Nenner zeigen alle Summanden gerade Symmetrie, also ist das Nennerpolynom gerade (Merkregel: $g+g\mapsto g$ )
- Der Quotient der beiden Polynome ist dann ungerade (Merkregel: $\dfrac{u}{g}\mapsto u$ ) 1 P

(d,vi) Abgeleitet wird nach der Quotientenregel:

$$f(x)=\frac{x^3-4x}{x^2+1}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{\overbrace{\left(x^2+1\right)}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{\left(3x^2-4\right)}^{\mathrm{u'}}-\overbrace{\left(x^3-4x\right)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{(2x)}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{\left(x^2+1\right)^2}_{\mathrm{v}^2}}=\frac{x^4+7x^2-4}{\left(x^2+1\right)^2}$$ 1 P

$$f'(x)=\frac{x^4+7x^2-4}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=\frac{\overbrace{\left(x^2+1\right)^2}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{\left(4\mathrm{x}^3+14x\right)}^{\mathrm{u}'}-\overbrace{\left(x^4+7x^2-4\right)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{2\left(x^2+1\right)\cdot 2x}^{\mathrm{v}'}}{\underbrace{\left(x^2+1\right)^4}_{\mathrm{v}^2}}$$

2 P

$$=\frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(4\mathrm{x}^3+14x\right)-\left(x^4+7x^2-4\right)\cdot 4x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$= f''(x)=\frac{4x^5+4x^3+14x^3+14x-4x^5-28x^3+16x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-10x^3+30x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=\frac{-10x^3+30x}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=\frac{\overbrace{\left(x^2+1\right)^3}^{\mathrm{v}}\cdot\overbrace{\left(\text{-}30\mathrm{x}^2+30\right)}^{\mathrm{u}'}-\overbrace{\left(-10x^3+30x\right)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{3\left(x^2+1\right)^2\cdot 2x}^{\mathrm{v}'}}{\underbrace{\left(x^2+1\right)^6}_{\mathrm{v}^2}}$$

2 P

$$=\frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left(\text{-}30\mathrm{x}^2+30\right)+\left(10x^3-30x\right)\cdot 6x}{\left(x^2+1\right)^4}$$

$$= f'''(x)=\frac{\text{-}30\mathrm{x}^4+30x^2\text{-}30\mathrm{x}^2+30+60x^4-180x^2}{\left(x^2+1\right)^4}=\frac{30\mathrm{x}^4-180x^2+30}{\left(x^2+1\right)^4}$$

(d,vii) Die Suche nach Extrema beginnt mit der Prüfung der notwendigen Bedingung $f'=0$. Da der Nenner von $f'$ keine Nullstellen enthält, genügt es, die Zählernullstellen zu suchen: $x^4+7x^2-4=0$

Rechentrick: Um die Nullstellen eines beliebigen Polynoms vierten Grades zu finden, gibt es kein allgemeines Verfahren. Aber hier liegt ein Sonderfall vor, den man sich als Rechentrick merken sollte. Dieses Polynom vierten Grades enthält keine ungeraden Exponenten von $x$, d.h. es treten keine $x^1$ und keine $x^3$ auf. Dadurch lässt sich die zu lösende Gleichung auf eine quadratische Gleichung reduzieren, indem man die Substitution einführt: $t:=x^2 \quad\Rightarrow\quad t^2+7t-4=0$

Diese Gleichung lässt sich ganz einfach mit der pq-Formel lösen:

$$t_{1,2}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}+4}=-\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{65}{4}}\overset{TR}{\approx}-3.5\pm 4{,}0311 \quad\Rightarrow\quad t_1\overset{TR}{\approx}-7{,}5311 \quad\text{und}\quad \mathrm{t}_2\overset{TR}{\approx}+0{,}5311$$

Resubstitution liefert das Ergebnis in $x$: $x_{6,7}\overset{TR}{\approx}\pm\sqrt{t_1}\overset{TR}{\approx}\pm\sqrt{-7.5311}\notin\mathbb{R}$

2 P

$$x_{8,9}=\pm\sqrt{t_2}\overset{TR}{\approx}\pm\sqrt{+0.5311}\overset{TR}{\approx}\pm 0{,}7288$$

Natürlich hat das Polynom vierten Grades in den komplexen Zahlen vier Nullstellen, aber nur zwei davon sind reellwertig, nämlich $x_8$ und $x_9$. Diese kommen als Kandidaten für Extrema in Frage. Durch Einsetzen in $f''$ wollen wir überprüfen, um welche Art von Extrema es sich dabei handelt – falls es überhaupt solche sind.

$$f''(x_8) = \frac{-10x_8^3 + 30x_8}{\left(x_8^2+1\right)^3} \overset{TR}{\approx} +5{,}0126 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Minimum in } x_8 \overset{TR}{\approx} +0{,}7288$$

$$f''(x_9) = \frac{-10x_9^3 + 30x_9}{\left(x_9^2+1\right)^3} \overset{TR}{\approx} -5{,}0126 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Maximum in } x_9 \overset{TR}{\approx} -0{,}7288$$ 1 P

(d,viii) Die Suche nach Wendepunkten und Sattelpunkten beginnt mit der Prüfung der dafür notwendigen Bedingung $f''=0$. Da der Nenner keine Nullstellen enthält, genügt es, die Zählernullstellen zu suchen: $-10x^3+30x=0$

Rechentrick: Obwohl hier die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades gesucht werden müssen, ist kein Erraten einer Nullstelle nötig, denn es taucht kein x-freier Summand auf. Man kann also einfach $x$ ausklammern und folgern:

$$-10x^3+30x = -10\cdot x\cdot\left(x^2-3\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x_{10}=0 \;;\quad x_{11}=+\sqrt{3} \;;\quad x_{12}=-\sqrt{3}$$ 1 P

Die hinreichende Bedingung für Wendepunkte folgt aus dem zusätzlichen Einsetzen von $x_{10,11\,\text{und}\,12}$ in $f'''$:

$$f'''(x_{10}) = \frac{30x_{10}^4 - 180x_{10}^2 + 30}{\left(x_{10}^2+1\right)^4} = \frac{0-0+30}{(0+1)^4} = 30 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rechts-links-Wendepunkt in } x_{10}$$

$$f'''(x_{11}) = \frac{30x_{11}^4 - 180x_{11}^2 + 30}{\left(x_{11}^2+1\right)^4} = \frac{30\cdot 9 - 180\cdot 3 + 30}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)^4} = -0.9375 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{links-rechts-Wdp. in } x_{11}$$

$$f'''(x_{12}) = \frac{30x_{12}^4 - 180x_{12}^2 + 30}{\left(x_{12}^2+1\right)^4} = \frac{30\cdot 9 - 180\cdot 3 + 30}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)^4} = -0.9375 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{links-rechts-Wdp. in } x_{12}$$ 2 P

Damit ist die Suche nach Wendepunkten geklärt. Wir wollen jetzt nach Sattelpunkten schauen. Diese sind spezielle Wendepunkte, nämlich solche mit der Steigung Null. Deshalb müssen wir $x_{10,11\,\text{und}\,12}$ in $f'$ einsetzen, um herauszufinden, ob einer oder mehrere der gefundenen Wendepunkte auch gleichzeitig Sattelpunkte sind:

$$f'(x_{10}) = f'(0) = \frac{0^4+7\cdot 0-4}{(0+1)^2} = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Sattelpunkt in } x_{10}.$$

$$f'(x_{11}) = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^4 + 7\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2 - 4}{\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1\right)^2} = \frac{9+21-4}{(3+1)^2} = \frac{13}{8} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{kein Sattelpunkt in } x_{11}.$$

2 P $$f'\left(x_{12}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^4+7\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2-4}{\left(\left(-\sqrt{3}\right)^2+1\right)^2}=\frac{9+21-4}{\left(3+1\right)^2}=\frac{13}{8}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \text{kein Sattelpunkt in } x_{12}.$$

Sattelpunkte tauchen also bei dieser Funktion überhaupt nicht auf.

1 P (d,ix) Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $y=f\left(0\right)=\frac{0^3-4\cdot 0}{0^2+1}=0$

Dies überrascht uns nicht, nachdem wir wissen, dass bei $x=0$ eine Nullstelle vorliegt.

(d,x) Der Wertebereich ist $\mathbb{W}=\mathbb{R}$. Die Begründung sieht man wie folgt:

- Polstellen existieren nicht (siehe: d,iii), also gibt es keine Definitionslücken.
- Eine Beschränkung nach oben oder unten existiert auch nicht (siehe d,iv), denn die

1 P Asymptoten sind $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f\left(x\right)=x$, und somit nicht beschränkt.

(d,xi) Unter Berücksichtigung der soeben berechneten markanten Kurvenpunkte zeichnet man den in Bild 6-11d dargestellten Kurvenverlauf.

2 P

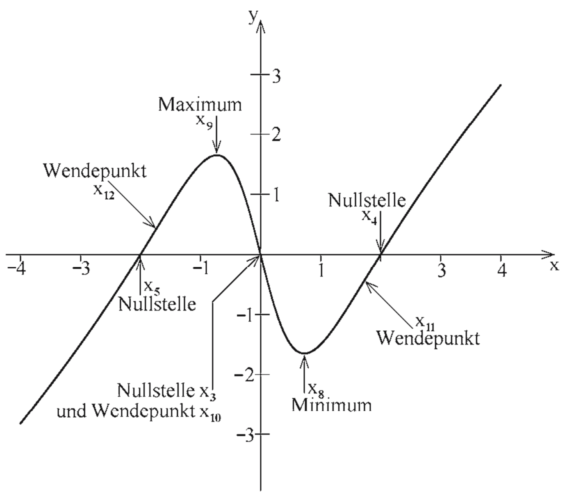



**Bild 6-11d**
Funktionsgraph zu Aufgabe 6.11d

Die Funktion lautet $f\left(x\right)=\frac{x^3-4x}{x^2+1}$

<u>zu e:</u> Die Funktion lautet $f\left(x\right)=\sqrt{x^2+4x+5}$

1 P (e,i) Definitionslücken könnten sich ergeben, wenn der Radikand negativ wird. Dies könnten sogar ausgedehnte Definitionslücken sein. Wie wir aber gleich bei (e,ii) sehen werden, hat die Funktion keine Nullstellen, sondern der Radikand ist für alle $x\in\mathbb{R}$ positiv. Deshalb ist der Definitionsbereich: $\mathbb{D}=\mathbb{R}$

(e,ii) Die Wurzel ist Null, wenn der Radikand Null wird. Nach solchen Nullstellen suchen wir mit der pq-Formel: $x^2+4x+5=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-5}\notin\mathbb{R}$

Folgerung: Die Funktion hat in der Menge der reellen Zahlen keine Nullstellen.

(e,iii) Polstellen treten nicht auf. 1 P

(e,iv) Den $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ finden wir in diesem Fall am leichtesten, indem wir ein $x^2$ aus der Wurzel herausziehen, wobei man daran denken muss, dass das Quadrieren das Vorzeichen löscht (Betragsstriche beachten): $\sqrt{x^2+4x+5}=|x|\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$

Wegen $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x}=0$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^2}=0$ ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=1$

Damit ist $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+4x+5}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|\cdot\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}|x|$

Die Asymptote von $f(x)$ ist also $y_{as}(x)=|x|$. 2 P

(e,v) Da bereits der Radikand als Summe gerader und ungerader Terme weder gerade noch ungerade Symmetrie aufweist, kann auch die Funktion selbst keine der beiden Symmetrieformen aufweisen. 1 P

(e,vi) Die erste Ableitung bilden wir mit der Kettenregel, für alle höheren Ableitungen braucht man zusätzlich noch die Quotientenregel (Kettenregel bei v' nicht vergessen):

$$f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}=\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x)=\frac{1}{2}\left(x^2+4x+5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+4)=\frac{(x+2)}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}}$$ 1 P

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{\overbrace{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{1}{2}}}^{\mathrm{v}}\cdot\overset{\mathrm{u'}}{1}-\overbrace{(x+2)}^{\mathrm{u}}\cdot\overbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+4x+5\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+4)}^{\mathrm{v'}}}{\underbrace{\left(x^2+4x+5\right)}_{\mathrm{v}^2}}\cdot\frac{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(Bruch erweitern)}$$ 2 P

$$=\frac{\left(x^2+4x+5\right)-(x+2)\cdot(x+2)}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(x^2+4x+5\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow f'''(x)=-\frac{3}{2}\cdot\left(x^2+4x+5\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot(2x+4)=\frac{-3\cdot(x+2)}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{5}{2}}}$$ 1 P

(e,vii) Die Suche nach Extrema beginnen wir mit der Prüfung der notwendigen Bedingung:

$$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; \frac{(x+2)}{\left(x^2+4x+5\right)^{\frac{1}{2}}}=0 \;\Rightarrow\; (x+2)=0 \;\Rightarrow\; x_3=-2$$ 1 P

Dort könnte ein Extremum sein. Ob es tatsächlich ein solches ist, und falls ja – welches, dies überprüfen wir durch Einsetzen von $x_3$ in die zweite Ableitung:

1 P $f''(x_3) = \left((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5\right)^{-\frac{3}{2}} = 1 > 0 \quad \Rightarrow$ in $x_3$ liegt ein Minimum vor.

(e,viii) Die Suche nach Wende- und Sattelpunkten beginnt man mit der Suche nach Nullstel-
1 P len von $f''$. Da solche hier nicht auftreten, wissen wir, dass die Funktion weder Wende- noch Sattelpunkte haben kann.

1 P (e,ix) Der Schnittpunkt mit der y-Achse liegt bei $y = f(0) = \sqrt{0^2 + 4 \cdot 0 + 5} = \sqrt{5}$

(e,x) Der Wertebereich ist nach oben unbegrenzt, denn die Asymptote für $\lim\limits_{x \to \pm\infty}$ ist $y_{as}(x) = |x|$ (siehe e,iv). Nach unten hingegen wird er durch das Minimum begrenzt, sodass wir den zum Minimum gehörenden $y$-Wert jetzt ausrechnen müssen:

$$y(x_3) = f(-2) = \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5} = 1$$

1 P Damit lautet der Wertebereich: $\mathbb{W} = \{y \mid y \geq 1\} = [1;\infty[ \; = \mathbb{R} \setminus ]-\infty;1[$

Anmerkung: Zur Beschreibung der bezeichneten $y$-Werte genügt natürlich eine der drei hier nebeneinander dargestellten Schreibweisen. Die Verwendung verschiedener Schreibweisen dient zur Übung des Lesers. Dabei sind Intervallgrenzen immer so angegeben, dass bei nach außen geöffneten eckigen Klammern die zugehörige Grenze nicht im Intervall enthalten ist (offene oder halboffene Intervalle), die Grenze an der nach innen geöffneten eckigen Klammer hingegen doch (geschlossene oder halbgeschlossene Intervalle).

(e,xi) Damit ergibt sich der Plot des Funktionsgraphen nach Bild 6-11e:

2 P

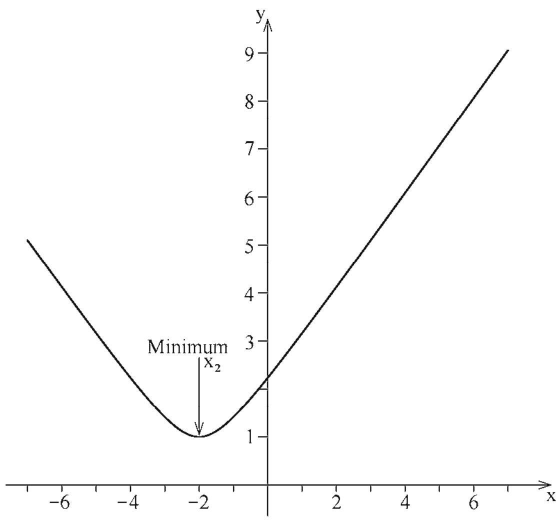



**Bild 6-11e**
Funktionsgraph zu Aufgabe 6.11e
Die Funktion lautet $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

<u>zu f:</u> Die Funktion lautet $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

(f,i) Da sowohl $y = x^2$ als $y = e^{-\frac{x}{2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind, gilt dies auch für den gesamten Definitionsbereich $\Rightarrow$ $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

(f,ii) Sobald einer der beiden Faktoren verschwindet, hat die Funktion eine Nullstelle. Da das Verschwinden für die Exponentialfunktion nicht möglich ist, liegen Nullstellen nur beim Verschwinden des Faktors $x^2$ vor. D.h., die einzige Nullstelle liegt bei $x_1 = 0$.

(f,iii) Polstellen: keine 2 P

(f,iv) Asymptotisches Verhalten für $x \to \pm\infty$:

Da die Exponentialfunktion für $x \to \pm\infty$ stärker ist, als jedes Polynom, bestimmt sie auch hier das Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Für positive x gilt: Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}} = 0$ ist auch $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Für negative x hingegen gilt: Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}} = +\infty$ ist auch $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Als Asymptote könnte man für $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ nur die Funktion selbst angeben – ein vereinfachter Ausdruck lässt sich dabei nicht aufstellen. 2 P

(f,v) Da die Exponentialfunktion $e^{-\frac{x}{2}}$ weder gerade noch ungerade Symmetrie aufweist, überträgt sich das Fehlen dieser Symmetrien auf die gesamte Funktion $f(x)$. 1 P

(f,vi) Abgeleitet wird mit der Produktregel unter Berücksichtigung der Kettenregel:

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{u} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)}_{u'} + \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{u} \cdot \underbrace{2x}_{v} = \left(2x - \tfrac{1}{2}x^2\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$ 1 P

$$f'(x) = \underbrace{\left(2x - \tfrac{1}{2}x^2\right)}_{v} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{u} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \underbrace{\left(2x - \tfrac{1}{2}x^2\right)}_{v} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)}_{u'} + \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{u} \cdot \underbrace{(2-x)}_{v'} = \left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$ 2 P

$$f''(x) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 2\right)}_{v} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{u} \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{4}x^2 - 2x + 2\right)}_{v} \cdot \underbrace{e^{-\frac{x}{2}} \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)}_{u'} + \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{u} \cdot \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}x - 2\right)}_{v'}$$ 2 P

$$= f'''(x) = \left(-\tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{3}{2}x - 3\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

(f,vii) Auf der Suche nach Extrema prüfen wir zuerst die notwendige Bedingung $f' = 0$:

Da die Exponentialfunktion nicht Null werden kann, kommt nur $2x - \frac{1}{2}x^2 = 0$ in Frage. Die hierdurch bestimmten x-Werte lassen sich durch Ausklammern von $x$ sofort finden:

$2x - \frac{1}{2}x^2 = \left(2 - \frac{1}{2}x\right) \cdot x = 0 \Rightarrow$ zwei mögl. Extrema bei $x_2 = 0$ und bei $\left(2 - \frac{1}{2}x_3\right) = 0$, also $x_3 = 4$ 1 P

Ob es sich dabei um Extrema handelt, erfahren wir durch Einsetzen in die zweite Ableitung:

$$f''(x_2)=\left(\tfrac{1}{4}x_2^{\,2}-2x_2+2\right)\cdot e^{-\frac{x_2}{2}}=\left(\tfrac{1}{4}\cdot 0^2-2\cdot 0+2\right)\cdot e^0=2\cdot 1=2>0 \quad\Rightarrow \text{ Hier liegt ein Minimum.}$$

1 P
$$f''(x_3)=\left(\tfrac{1}{4}x_3^{\,2}-2x_3+2\right)\cdot e^{-\frac{x_3}{2}}=\left(\tfrac{1}{4}\cdot 4^2-2\cdot 4+2\right)\cdot e^{-2}=-2\cdot e^{-2}<0 \quad\Rightarrow \text{ Hier liegt ein Maximum.}$$

Anmerkung:
Da $x_1$ mit $x_2$ identisch ist, liegt bei $x=0$ eine Nullstelle und ein Minimum zugleich vor.

(f,viii) Wendepunkte und Sattelpunkte – Die notwendige Bedingung erfordert das Suchen der Nullstellen der zweiten Ableitung: $f''(x)=\left(\tfrac{1}{4}x^2-2x+2\right)\cdot e^{-\frac{x}{2}}=0$. Da die Exponentialfunktion die Null nicht erreichen kann, geht dies nur bei $\tfrac{1}{4}x^2-2x+2=0$. Wir bringen diese Gleichung in Normalform und suchen die Nullstellen mit Hilfe der pq-Formel:

2 P
$$x^2-8x+8=0 \quad\Rightarrow\quad x_{4,5}=4\pm\sqrt{16-8}=4\pm\sqrt{8} \quad\Rightarrow\quad x_4 \overset{TR}{\approx} 1.17157 \text{ und } x_5 \overset{TR}{\approx} 6.82843$$

Zur Prüfung der hinreichenden Bedingung für Wendepunkte setzen wir zusätzlich in $f'''$ ein:

$$f'''(x_4)=\left(-\tfrac{1}{8}x_4^{\,2}+\tfrac{3}{2}x_4-3\right)\cdot e^{-\frac{x_4}{2}}\approx -0.787<0 \quad\Rightarrow\quad \text{links-rechts-Wendepunkt in } x_4$$

1 P
$$f'''(x_5)=\left(-\tfrac{1}{8}x_5^{\,2}+\tfrac{3}{2}x_5-3\right)\cdot e^{-\frac{x_5}{2}}\approx +0.0465>0 \quad\Rightarrow\quad \text{rechts-links-Wendepunkt in } x_5$$

Die Frage, ob einer oder mehrere dieser Wendepunkte gleichzeitig ein Sattelpunkt ist, klären wir durch Einsetzen in die erste Ableitung: $f'(x_4)\overset{?}{=}0$ und $f'(x_5)\overset{?}{=}0$ ?

Beide Fragen können wir ohne Nachrechnen mit „NEIN“ beantworten, denn wir haben unter Punkt (f,vi) bereits die Nullstellen von $f'$ gesucht: $x_4$ und $x_5$ sind nicht dabei.

1 P Da wir solchermaßen wissen, dass $f'(x_4)\neq 0$ und $f'(x_5)\neq 0$ sind, ist klar, dass die Funktion keine Sattelpunkte hat.

(f,ix) Den Schnittpunkt mit der y-Achse haben wir oben bereits als Nullstelle identifiziert:

1 P
$$y=f(0)=0^2\cdot e^{-\frac{0}{2}}=0$$

(f,x) Der Wertebereich ist nach oben unbegrenzt (siehe asymptotisches Verhalten für $x\to-\infty$), nach unten hingegen ist er begrenzt, und zwar wie folgt:

1 P Beide Faktoren von $f(x)$, nämlich $x^2$ und $e^{-\frac{x}{2}}$ sind immer $\geq 0$. Die Funktionswerte müssen also auch immer $\geq 0$ sein. Aufgrund der Existenz einer Nullstelle wissen wir, dass die Null tatsächlich erreicht wird, also ist der Wertebereich $\mathbb{W}=\{x\mid x\geq 0\}$.

**Arbeitstrick:**

Die Argumentation bei der Auffindung des Wertebereichs ist logisch nachvollziehbar, aber mancher Leser mag sich fragen, wie er im Prüfungsfall aus eigener Kraft auf eine derartige Argumentation hätte kommen können. Dazu sei hier einen Hinweis zur Auffindung von Wertebereichen (im allgemeinen Fall) geben:

Wenn man sich zuerst den Graphen einer Funktion malt, dann ist danach die Bestimmung ihres Wertebereichs ganz einfach. Dem Graphen sieht man auf einen Blick an, welche Werte erreicht werden können und welche nicht. Ergeben sich dann Beschränkungen durch Extrema oder durch asymptotisches Verhalten, so kann man auf die Kenntnis dieser Eigenschaften bereits zurückgreifen, da man all diese Dinge in der vorangehenden Kurvendiskussion ja schon untersucht hat. Dies ist auch der Grund, warum man die Betrachtung des Wertebereichs immer ganz zum Abschluss einer Kurvendiskussion vornehmen sollte.

(f,xi) Der Plot des Funktionsgraphen ist in Bild 6-11f zu sehen. 2 P

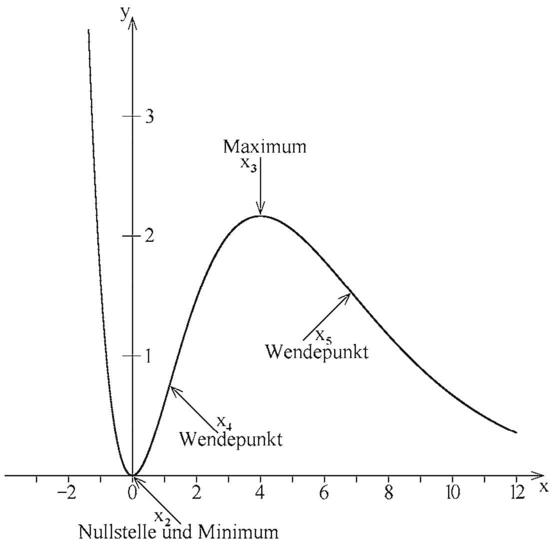



**Bild 6-11f**
Funktionsgraph zu Aufgabe 6.11e

Die Funktion lautet $f(x) = x^2 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

<u>zu g:</u> Bei der Betrachtung der Asymptoten (Verhalten für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}$) von Polynombrüchen haben wir immer Polynomdivision verwendet. In einigen Fällen ist dies unerlässlich, das nachfolgende Beispiel ist eines davon: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x^4 + 4x^3 + x^2 - 5}{2x^2 + x - 1}$

Um dies einzusehen, führen wir die Polynomdivision aus:

$$\left(6x^4+4x^3+x^2-5\right):\left(2x^2+x-1\right)=3x^2+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{7}{4}-\frac{5x+13}{4\cdot\left(2x^2+x-1\right)}$$

$$\begin{array}{l}
-\left|\begin{array}{l} 6x^4+3x^3-3x^2 \end{array}\right.\\
\qquad -\left|\begin{array}{l} 1\cdot x^3+4x^2 \\ 1\cdot x^3+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x \end{array}\right.\\
\qquad\qquad -\left|\begin{array}{l} \tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x-5 \\ \tfrac{7}{2}x^2+\tfrac{7}{4}x-\tfrac{7}{4} \end{array}\right.\\
\qquad\qquad\qquad -\tfrac{5}{4}x-\tfrac{13}{4}
\end{array}$$

3 P Dass der Divisionsrest bei der Bestimmung der Asymptoten keine Rolle spielt, weil er gegen Null geht, weiß jeder Leser ohne viel Erklärung; es ist nämlich $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5x+13}{4\cdot\left(2x^2+x-1\right)}=0$, denn das Zählerpolynom hat einen höheren Grad als das Nennerpolynom. Die Asymptote lautet also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=3x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ .

**Stolperfalle:**

Genau in der korrekten Angabe der Asymptote liegt der entscheidende Punkt. Sie lautet $y_{as}(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=3x^2+\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$ ,

denn gegen $y_{as}$ konvergiert die Funktion $f(x)$ für $x\to\pm\infty$, d.h. der Abstand zwischen $f(x)$ und $y_{as}$ wird für $x\to\pm\infty$ unendlich klein. Eben dadurch ist ja bekanntlich das asymptotische Verhalten definiert.

Ein Fehler, der immer wieder bei Anfängern beobachtet wird, ist das Weglassen der Terme $\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}$. Da diese aber für $x\to\pm\infty$ durchaus nicht gegen Null gehen, nähert sich $f(x)$ eben nicht asymptotisch an $3x^2$ an, sondern der Unterschied zwischen $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to\pm\infty} 3x^2$ wird nicht unendlich klein, er beträgt vielmehr $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2}x+\frac{7}{4}=\pm\infty$ und ist damit in diesem Beispiel sogar unendlich groß. Eine absolut sichere Methode zur Vermeidung dieses Fehlers ist die Polynomdivision, in der Form, wie sie im vorliegenden Buch prinzipiell immer bei der Bestimmung des asymptotischen Verhaltes von Polynombrüchen angewandt wird.

## Aufgabe 6.12 Beispiel – Harmonischer Oszillator

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 min | | Punkte 1 P |

Die Auslenkung $y(t)$ eines (näherungsweise ungedämpften) harmonischen Oszillators als Funktion der Zeit sei gegeben durch die Gleichung $y(t)=A\cdot\sin\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)$

(übliche Bezeichnungen: $A$ = Amplitude, $\omega_0$ = Eigenkreisfrequenz, $\varphi_0$ = Nullphasenwinkel)

Geben Sie die Gleichungen für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Oszillators als Funktion der Zeit an.

## Lösung zu 6.12

Die Auslenkung steht für den Ort: $y(t) = A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

Die Geschwindigkeit ist die 1. Ableitung des Ortes nach der Zeit: $\dot{y}(t) = A \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \omega_0$

Die Beschleunigung ist die 2. Ableitung des Ortes nach der Zeit: $\ddot{y}(t) = -A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot \omega_0{}^2$ 1 P

## Aufgabe 6.13 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 12 min | | Punkte 5 P |

Aus Tabellenwerken sei ein Maß für die Belastbarkeit $B$ eines Biegebalkens mit rechteckigem Querschnitt entsprechend Bild 6-13 entnommen, und zwar zu $B := c \cdot ab^2$, wobei $c$ eine Konstante ist, die verschiedene Größen wie Materialeigenschaften, Einspannverhältnisse, etc… beschreibt; $a$ sei die Breite und $b$ die Höhe des Balkens. (Eine Definition für das verwendete Maß der Belastbarkeit ist für unsere Aufgabe nicht von Interesse.)

Frage: Sie haben die Aufgabe, aus einem Baumstamm mit kreisrundem Querschnitt (siehe Bild 6-13) einen Balken mit maximaler Belastbarkeit zu sägen: Mit welcher Breite $a$ und mit welcher Höhe $b$ muss der Balken gesägt werden, damit die Belastbarkeit maximal wird? Der Radius des Baumstammes sei $r = 10\,\text{cm}$.

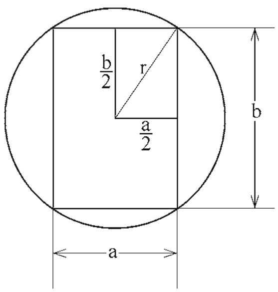



**Bild 6-13**
Skizze des Querschnittes eines Biegebalkens der Höhe „$b$“ und Breite „$a$“, der aus einem zylindrischen Baumstamm mit dem Radius „$r$“ herausgesägt wurde.

## Lösung zu 6.13

1. Schritt: Da wir zwei Größen bestimmen sollen, nämlich $a$ und $b$, aber nur nach einer Größe ableiten wollen, müssen wir eine der beiden Größen durch die andere ausdrücken. Dies geht mit Hilfe des Satzes von Pythagoras: $a^2 + b^2 = (2r)^2$

Aufgelöst nach $b^2$ ergibt sich: $b^2 = 4 \cdot r^2 - a^2$ (6.15a)

Einsetzen in das Widerstandsmoment liefert: $B := c \cdot a \cdot b^2 = c \cdot a \cdot \left(4 \cdot r^2 - a^2\right) = 4car^2 - ca^3$ 1 P

2. Schritt: Da die Belastbarkeit nun als Funktion einer einzigen Variablen ausgedrückt ist, nämlich $a$, können wir zum Zwecke der Extremwertsfindung nach dieser Variablen ableiten.

1 P $\frac{d}{da}B(a) = 4cr^2 - 3ca^2$

3. Schritt: Wir suchen nun die Nullstellen der Ableitung und finden das Ergebnis.

$$4cr^2 - 3ca^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3ca^2 = 4cr^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = \tfrac{4}{3}r^2 \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot r \overset{TR}{\approx} \pm 5.77\,cm$$

1 P Da negative Abmessungen sinnlos sind, kommt nur in Betracht: $a = +\sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot r \overset{TR}{\approx} + 5.77\,cm$

Einsetzen von $a^2$ in Gleichung (6.15a) liefert $b$:

$b^2 = 4 \cdot r^2 - \left(\tfrac{4}{3}r^2\right) = \tfrac{8}{3}r^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{\tfrac{8}{3}} \cdot r \overset{TR}{\approx} 8.16\,cm$ (Sinnvoll sind nur positive Abmessungen.)

Damit ist das Ergebnis genannt: Breite des Balkens: $a = \sqrt{\tfrac{4}{3}} \cdot 10\,cm$

1 P Höhe des Balkens: $b = \sqrt{\tfrac{8}{3}} \cdot 10\,cm$

4. Schritt: Streng genommen müsste man jetzt noch anhand der zweiten Ableitung kontrollieren, ob der gefundene Wert auch tatsächlich ein Maximum ist. Bei „Textaufgaben" erübrigt sich diese Kontrolle oftmals, weil aus der Anschauung mit klarem Menschenverstand heraus bereits klar ist, ob es sich um ein Maximum, ein Minimum oder einen Sattelpunkt handelt. Nichtsdestotrotz sei der Vollständigkeit halber nachfolgend noch die zweite Ableitung untersucht.

$$\frac{d^2}{da^2}B(a) = -6ca < 0$$

1 P Der Ausdruck ist tatsächlich negativ, weil $c$ und $a$ prinzipiell immer positiv sein müssen. Das oben genannte Ergebnis repräsentiert also tatsächlich ein Maximum.

## Aufgabe 6.14 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 min | | Punkte<br>4 P |

Wir betrachten die Parabel $f(x) = 5 - 2x^2$ und das im ersten Quadranten definierte Rechteck entsprechend Bild 6-14. Für welches x wird der Flächeninhalt maximal? Geben Sie auch die Größe der zugehörigen (maximalen) Fläche an.

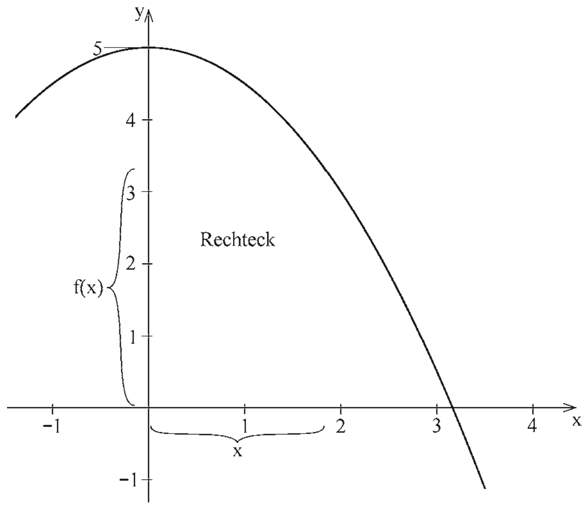



**Bild 6-14**
Beschreibung eines Rechtecks dessen Fläche maximiert werden soll.

## Lösung zu 6.14

1. Schritt: Wir stellen eine Formel zur Berechnung der Rechtecksfläche $F(x)$ als Funktion des $x$ auf: $F(x) = \text{Breite} \cdot \text{Höhe} = x \cdot f(x) = x \cdot \left(5 - 2x^2\right) = 5x - 2x^3$ 1 P

2. Schritt: Ableiten und Nullsetzen der Ableitung führt zur Suche nach Extrema:

$$F'(x) = 5 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{\tfrac{5}{6}}$$

Bei der gegebenen Aufgabenstellung macht nur die positive Lösung einen Sinn, denn die negative Lösung liegt außerhalb des zu untersuchenden Bereichs: $x_1 = +\sqrt{\frac{5}{6}}$ 1 P

3. Schritt: Anhand der zweiten Ableitung lässt sich prüfen, ob wirklich ein Maximum vorliegt.

$$F''(x) = -12x \quad \Rightarrow \quad F''(x_1) = -12x_1 = -12 \cdot \sqrt{\tfrac{5}{6}} = -\sqrt{120} < 0$$

Da die zweite Ableitung negativ ist, handelt es sich wirklich um ein Maximum. 1 P

4. Schritt: Berechnung des Flächeninhalts: $F(x_1) = 5x_1 - 2x_1^3 = 5 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} - 2 \cdot \sqrt{\frac{125}{216}} \overset{TR}{\approx} 3.0429$ 1 P

## Aufgabe 6.15 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 min | | Punkte 5 P |

Sie sollen möglichst materialsparend zylindrische Konservendosen bauen. Wie müssen Sie den Durchmesser und die Höhe des Zylinders einstellen, damit Sie möglichst wenig Blech verbrauchen (minimale Oberfläche), um ein vorgegebenes Dosenvolumen $V$ von genau einem Liter zu erreichen?

## Lösung zu 6.15

1. Schritt: Beschreibung der Geometrie (siehe Bild 6-15)

Die Dosenoberfläche besteht aus zwei Kreisen (Boden und Deckel) und einem Zylindermantel und lautet daher:

1 P $A = 2 \cdot \underbrace{\pi r^2}_{\text{Kreis}} + \underbrace{2\pi r \cdot h}_{\text{Mantel}}$

Das Dosenvolumen ergibt sich aus Grundfläche mal Höhe: $V = \pi r^2 \cdot h$

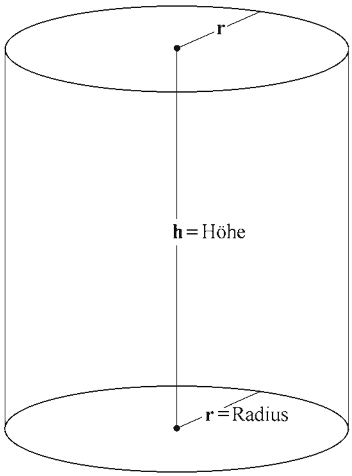



**Bild 6-15**
Veranschaulichung der Dose, deren Oberfläche zu minimieren ist.

2. Schritt: Um die Grundfläche durch einen einzigen unbekannten Parameter ausdrücken zu können, lösen wir die Formel des Volumens nach $h$ auf, damit wir dann durch Einsetzen das $h$ aus der Formel der Oberfläche eliminieren können:

1 P $$\left.\begin{array}{r} h = \dfrac{V}{\pi r^2} \\ A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow A = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

Nun kennen wir die Oberfläche als Funktion des Parameters $r$.

3. Schritt: Ableiten der Oberfläche nach $r$ und Nullsetzen der Ableitung liefert den Radius

1 P $$\frac{d}{dr} A(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r = \frac{2V}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{1000\,cm^3}{2\pi}} \approx 5.41926\,cm$$

Die Höhe ergibt sich dann durch Einsetzen in die Formel für das Volumen

1 P $$V = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V}{\pi} \cdot \frac{(2\pi)^{\frac{2}{3}}}{V^{\frac{2}{3}}} = \frac{4^{\frac{1}{3}} \cdot V^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 1000\,cm^3}{\pi}} \approx 10.83852\,cm$$

Nebenbemerkung: In der realen Produktion werden sehr viele Konservendosen nach der hier gezeigten Optimierung des Materialverbrauchs hergestellt.

4. Schritt: Das Untersuchen der zweiten Ableitung erübrigt sich eigentlich aus Gründen der Anschauung. Der Vollständigkeit halber sei es dennoch kurz vollzogen:

$$\frac{d^2}{dr^2}A(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}A(r)\right)=4\pi+\frac{4V}{r^3}=4\pi+\frac{4V}{\frac{V}{2\pi}}=4\pi+8\pi=12\pi>0$$ 1 P

Damit ist klar, dass das gefundene Extremum wirklich ein Minimum der Oberfläche ist.

## Aufgabe 6.16 Textbeispiel – Maximalwertaufgabe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 min | | Punkte 5 P |

Sie ziehen eine Linie der Länge $r$, halbieren diese in der Mitte durch den Punkt $M$ und schlagen um $M$ einen Halbkreis ebenfalls mit dem Radius $r$. Danach verbinden Sie die beiden Enden $A$ und $B$ der Linie mit einem Punkt auf dem Halbkreis $C$ – die Konstruktion ist dargestellt in Bild 6-16.

(a.) Wie groß muss der in diesem Bild eingetragene Winkel $\alpha$ sein, damit die Fläche des Dreiecks $A\ B\ C$ maximal wird?

(b.) Wie groß wird die Fläche des Dreiecks $A\ B\ C$ dabei?

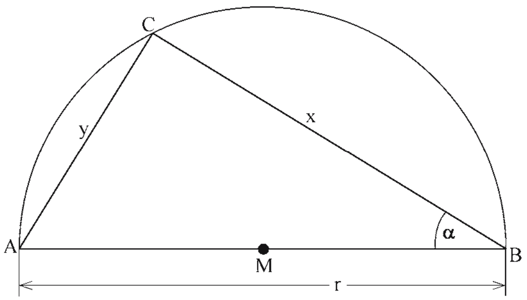



**Bild 6-16**
Konstruktion eines Dreiecks, dessen Fläche maximiert werden soll.

## Lösung zu 6.16

Da es sich bei der Konstruktion um einen Thales-Kreis handelt, ist das Dreieck rechtwinkelig. Daher ist die Fläche des Dreiecks zu berechnen als $F=\frac{1}{2}x\cdot y$ (dabei spielt $x$ die Rolle einer Grundfläche und $y$ die Rolle einer Höhe; vgl. Bild 6-16).

Nach Pythagoras ist $x^2+y^2=r^2 \quad\Rightarrow\quad y=\sqrt{r^2-x^2}$.

Damit ergibt sich die Fläche zu $F(x)=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{r^2-x^2}=\frac{1}{2}\left(r^2x^2-x^4\right)^{\frac{1}{2}}$ 1 P

Nullsetzen der Ableitung führt zur Suche des Maximums:

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{1}{4}\left(r^2x^2-x^4\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2r^2x-4x^3\right)=\frac{2r^2x-4x^3}{4\cdot\sqrt{r^2x^2-x^4}}=0$$ 1 P

Der Bruch wird zu Null, wenn der Zähler verschwindet, aber der Nenner nicht. Wir suchen also die Nullstellen des Zählers:

1 P $$2r^2x-4x^3=\left(2r^2-4x^2\right)\cdot x=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_1=0 & \text{und} \\ r^2=2x_{2,3}{}^2 \quad\Rightarrow\quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r \end{cases}$$

Die Zählernullstelle bei $x_1=0$ ist gleichzeitig eine Nennernullstelle. Man könnte nachweisen, dass sie zu einem Minimum der Fläche führt.

Von den Zählernullstellen bei $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r$ macht nur die positive Lösung Sinn, wir betrachten also nur: $x_2=+\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r$ .

Der Nenner von $\frac{d}{dx}F(x)$ wird dort nicht zu Null, wie man leicht sieht, nämlich:

$$4\cdot\sqrt{r^2x_2{}^2-x_2{}^4}=4\cdot\sqrt{r^2\cdot\frac{1}{2}r^2-\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2}=4\cdot\sqrt{\frac{1}{4}r^4}=2r^2\neq 0\ .$$

1 P Also ist die Zählernullstelle wirklich eine Nullstelle von $\frac{d}{dx}F(x)$.

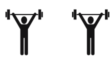
Den Winkel $\alpha$ berechnen wir aus der Definition des Sinus: $\sin(\alpha)=\frac{x}{r}=\sqrt{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \alpha=45°$

Bei diesem Winkel wird die Dreiecksfläche maximal.

Der Wert der zugehörigen Dreiecksfläche ergibt sich wie folgt:

1 P $$F=\frac{1}{2}x\cdot y=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{r^2-x^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r\right)\cdot\sqrt{r^2-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r\right)^2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}r^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot r^2=\frac{1}{4}r^2$$

## Aufgabe 6.17 Krümmung von Kurven

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | 4 min | (a,b.) | | Punkte | (a,b.) je 2 P |
|  | (c,d.) | 6 min | (c,d.) |  | | (c,d.) je 3 P |
| | (e.) | 8 min | (e.) | | | (e.) 4 P |

Nachfolgend sind einige Funktionen gegeben, zu deren Kurven Sie bitte in einem Punkt $P_0=(x_0;y_0)$ die Krümmung und den Krümmungsradius berechnen. Geben Sie außerdem auch die Lage des Lage des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes an.

Die zu untersuchenden Funktionen und Punkte $P_0$ lauten:

(a.) $f(x)=3x^2+2x+4$ mit $P_0=(1;9)$ in expliziter Angabe in kartesischen Koordinaten

(b.) $f(x)=e^{-x^2}$ mit $P_0=(0;1)$ in expliziter Angabe in kartesischen Koordinaten

(c.) $x(t)=\cos(t)$ und $y(t)=\exp(t)$ im Punkt $P_0$ bei $t_0=0$ (in Parameterdarstellung)

(d.) $x(t)=\sqrt{9-t^2}$ und $y(t)=t^2-3t+2$ im Punkt $P_0$ bei $t_0=0$ (in Parameterdarstellung)

(e.) Die Archimedische Spirale $r(\varphi)=\varphi$ im Punkt $P_0$ bei $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ (in Polarkoordinaten)

## Lösung zu 6.17

Ist die Funktion explizit in kartesischen Koordinaten gegeben, so gilt:

Krümmung $K = \dfrac{f''(x_0)}{\left(1+\left(f'(x_0)\right)^2\right)^{3/2}}$ und Krümmungsradius $R = \left|\dfrac{1}{K}\right|$

Der Krümmungsmittelpunkt als Mittelpunkte des Kreises mit dem Krümmungsradius an die Kurve der Funktion $f(x)$ hat seine Lage bei

$$x_M = x_0 - \frac{f'(x_0)\cdot\left(1+\left(f'(x_0)\right)^2\right)}{f''(x_0)} \quad \text{und} \quad y_M = y_0 + \frac{1+\left(f'(x_0)\right)^2}{f''(x_0)}$$

(a.) Für diesen Aufgabenteil ergibt sich

$$f(x) = 3x^2+2x+4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x+2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6$$

$K(P_1) = \dfrac{6}{\left(1+(8)^2\right)^{3/2}} \overset{TR}{\approx} 0.01144936$ und $R(P_1) = \dfrac{1}{K(P_1)} = \dfrac{\left(1+(8)^2\right)^{3/2}}{6} \overset{TR}{\approx} 87.3411256$, dazu 1 P

$$x_M = 1 - \frac{8\cdot\left(1+(8)^2\right)}{6} = \frac{-257}{3} = -85.\overline{6} \quad \text{und} \quad y_M = 9 + \frac{1+(8)^2}{6} = \frac{119}{6} = 19.8\overline{3}$$

Der im Punkt $P_1$ in die Krümmung einbeschriebene Kreis hat den Radius $R = 87.3411256$. 1 P
Sein Mittelpunkt liegt bei $P_M = \left(\frac{-257}{3};\frac{119}{6}\right)$

(b.) Die ersten beiden Ableitungen der Funktion erhalten wir als

$f(x) = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x\cdot e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \left(4x^2-2\right)\cdot e^{-x^2}$, woraus folgt:

$K(P_1) = \dfrac{-2}{\left(1+(0)^2\right)^{3/2}} = -2$ und $R(P_1) = \left|\dfrac{1}{K(P_1)}\right| = \dfrac{1}{2}$, sowie 1 P

$x_M = 0 - \dfrac{0\cdot\left(1+(0)^2\right)}{-2\cdot 1} = 0$ und $y_M = 1 + \dfrac{1+0}{-2\cdot 1} \overset{TR}{\approx} 0.5$ 1 P

(c.& d.) Ist die Funktion in kartesischen Koordinaten in Parameterdarstellung gegeben, so gelten am Punkt $P_0 = \left(x(t_0)\,;\,y(t_0)\right)$ die Berechnungsformeln:

Krümmung $K = \dfrac{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}{\left(\left(x'(t_0)\right)^2+\left(y'(t_0)\right)^2\right)^{3/2}}$ und Krümmungsradius $R = \left|\dfrac{1}{K}\right|$

Der Krümmungsmittelpunkt hat seine Lage bei

$$x_M = x(t_0) - \frac{y'(t_0)\cdot\left(\left(x'(t_0)\right)^2+\left(y'(t_0)\right)^2\right)}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0)\end{vmatrix}} \quad \text{und} \quad y_M = y(t_0) + \frac{x'(t_0)\cdot\left(\left(x'(t_0)\right)^2+\left(y'(t_0)\right)^2\right)}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0)\end{vmatrix}}$$

(Dabei tauchen Determinanten im Zähler der Krümmung und in den Nennern der Mittelpunktskoordinaten auf.)

Setzen wir die Werte der Vorgaben ein, so erhalten wir für die Aufgabenteil (c.) und (d.):

(c.) Für $x(t)=\cos(t)$ und $y(t)=\exp(t)$ (und $t_0=0$) ist

$x'(t)=-\sin(t)$ $\quad$ $y'(t)=\exp(t)$

$x''(t)=-\cos(t)$ $\quad$ $y''(t)=\exp(t)$

1 P $\Rightarrow$ $x(t_0)=1$, $x'(t_0)=0$, $x''(t_0)=-1$ $\quad$ $y(t_0)=1$, $y'(t_0)=1$, $y''(t_0)=1$

Diese Werte führen uns zu den gefragten Ergebnissen:

1 P $$K = \frac{\begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}}{\left(0^2+1^2\right)^{3/2}} = \frac{0-(-1)}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad R = \left|\frac{1}{K}\right| = 1 = \text{Krümmungsradius}$$

und für den Mittelpunkt des Krümmungskreises

1 P $$x_M = 1 - \frac{1\cdot\left(0^2+1^2\right)}{\begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}} = 1-\frac{1}{1} = 0 \quad \text{und} \quad y_M = 1 + \frac{0\cdot\left(0^2+1^2\right)}{\begin{vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix}} = 1-\frac{0}{1} = 1$$

(d.) Für $x(t)=\sqrt{9-t^2}$ und $y(t)=t^2-3t+2$ (und $t_0=0$) ist

$x'(t) = -t\cdot\left(9-t^2\right)^{-1/2}$ $\quad$ $y'(t)=2t-3$

$x''(t) = -\left(9-t^2\right)^{-1/2} - t^2\cdot\left(9-t^2\right)^{-3/2}$ $\quad$ $y''(t)=2$

1 P $\Rightarrow$ $x(t_0)=+3$, $x'(t_0)=0$, $x''(t_0)=-\frac{1}{3}$ und $y(t_0)=+2$, $y'(t_0)=-3$, $y''(t_0)=+2$

erhalten wir als Krümmungsradius

1 P $$K = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1/3 & +2 \end{vmatrix}}{\left(0+(-3)^2\right)^{3/2}} = \frac{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)}{9^{3/2}} = \frac{-1}{27} \quad \Rightarrow \quad R = \left|\frac{1}{K}\right| = 27$$

und für den Mittelpunkt des Krümmungskreises

$$x_M = 3 - \frac{(-3)\cdot\left(0^2+(-3)^2\right)}{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)} = 3 - \frac{-27}{-1} = -24 \quad \text{und} \quad y_M = 2 + \frac{0\cdot\left(0^2+(-3)^2\right)}{0-\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)} = 2$$ 1 P

(e.) Ist die Funktion in Polarkoordinaten gegeben, so gelten am Punkt $P_0 = (x_0; y_0) = \left(r(\varphi_0)\cdot\cos(\varphi_0); r(\varphi_0)\cdot\sin(\varphi_0)\right)$ bei $r(\varphi_0)$ die Berechnungsformeln:

Krümmung $K = \dfrac{(r(\varphi_0))^2 + 2\cdot(r'(\varphi_0))^2 - (r(\varphi_0))\cdot(r''(\varphi_0))}{\left((r(\varphi_0))^2 + (r'(\varphi_0))^2\right)^{3/2}}$ und Krümmungsradius $R = \left|\dfrac{1}{K}\right|$

Der Krümmungsmittelpunkt hat seine Lage bei

$$x_M = r(\varphi_0)\cdot\cos(\varphi_0) - \frac{\left((r(\varphi_0))^2 + (r'(\varphi_0))^2\right)\cdot\left(r(\varphi_0)\cdot\cos(\varphi_0) + r'(\varphi_0)\cdot\sin(\varphi_0)\right)}{(r(\varphi_0))^2 + 2\cdot(r'(\varphi_0))^2 - (r(\varphi_0))\cdot(r''(\varphi_0))}$$

und $$y_M = r(\varphi_0)\cdot\sin(\varphi_0) - \frac{\left((r(\varphi_0))^2 + (r'(\varphi_0))^2\right)\cdot\left(r(\varphi_0)\cdot\sin(\varphi_0) + r'(\varphi_0)\cdot\cos(\varphi_0)\right)}{(r(\varphi_0))^2 + 2\cdot(r'(\varphi_0))^2 - (r(\varphi_0))\cdot(r''(\varphi_0))}$$

Mit den Vorgaben der Aufgabestellung erhalten wir dann

$$r(\varphi) = \varphi \quad \Rightarrow \quad r'(\varphi) = 1 \quad \Rightarrow \quad r''(\varphi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r(\varphi_0) = \tfrac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad r''(\varphi_0) = 1 \quad \Rightarrow \quad r''(\varphi_0) = 0$$ 1 P

Diese Werte setzen wir ein und kommen zu den gefragten Ergebnissen:

Krümmung $K = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\cdot(1)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(0)}{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2\right)^{3/2}} \overset{TR}{\approx} 0.69190875$, Krümmungsradius $R = \left|\dfrac{1}{K}\right| \overset{TR}{\approx} 1.4452773$ 1 P

Der Krümmungsmittelpunkt hat seine Lage bei

$$x_M = \tfrac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\cdot(1)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(0)} = -\frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2\right)\cdot(1)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\cdot(1)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(0)} \overset{TR}{\approx} -0.7761562$$ 1 P

$$y_M = \tfrac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\cdot(1)^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot(0)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right)}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + 2\cdot(1)^2} \overset{TR}{\approx} 0.351613$$ 1 P

# 7 Integralrechnung

## Aufgabe 7.1 Integration von Polynomen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 1 min | (a,b.) | Punkte<br>(a,b.) je 1 P |
| | (c,d.) | je 2 min | (c,d.) | (c,d.) je 1 P |

Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $I_1 = \int \left(4x^2 + 3x - 7\right) dx$

(b.) $I_2 = \int \left(4x^{-2} + 3x^{\frac{2}{7}} - 7x\right) dx$

(c.) $I_3 = \int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right) dx$

(d.) $I_4 = \int \frac{2x^4 - 3\sqrt{x}}{7 \cdot \sqrt[3]{x^4}} dx$

## Lösung zu 7.1

Bei Polynomen wird jeder Summand einzeln integriert, indem man den Exponenten um eins erhöht und den Kehrwert des so erhöhten Exponenten als Faktor vor jeden Summanden multipliziert.

(a.) $I_1 = \int \left(4x^2 + 3x - 7\right) dx = 4 \cdot \frac{1}{3} x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 7x + C = \frac{4}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 - 7x + C$ 1 P

(b.) $I_2 = \int \left(4x^{-2} + 3x^{\frac{2}{7}} - 7x\right) dx = 4 \cdot \frac{1}{-1} x^{-1} + 3 \cdot \frac{7}{9} x^{\frac{9}{7}} - 7 \cdot \frac{1}{2} x^2 + C = -4x^{-1} + \frac{7}{3} x^{\frac{9}{7}} - \frac{7}{2} x^2 + C$ 1 P

(c.) $I_3 = \int \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[5]{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{5}} - x^{-2} + x^{-\frac{4}{3}}\right) dx$ 1 P

$$= \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - 2x^{+\frac{1}{2}} + \frac{5}{8} x^{\frac{8}{5}} + x^{-1} - 3x^{-\frac{1}{3}} + C$$

(d.) $I_4 = \int \frac{2x^4 - 3\sqrt{x}}{7 \cdot \sqrt[3]{x^4}} dx = \int \left(\frac{2x^4}{7x^{\frac{4}{3}}} - \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{7x^{\frac{4}{3}}}\right) dx = \int \left(\frac{2}{7} \cdot x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{7} \cdot x^{-\frac{5}{6}}\right) dx = \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{11} \cdot x^{\frac{11}{3}} - \frac{3}{7} \cdot 6 \cdot x^{+\frac{1}{6}} + C$ 1 P

$$= \frac{6}{77} x^{\frac{11}{3}} - \frac{18}{7} x^{\frac{1}{6}} + C$$

**Stolperfalle**:

Man vergesse nicht die Integrationskonstanten.

## Aufgabe 7.2 Integration mittels Substitution

| | | | | | Punkte | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b) | je 2 min | (a,b) | | (a) 1 P | (b) 1 P | |
| | (c,d) | je 2 min | (c,d) | | (c) 1 P | (d) 1 P | |
| | (e,f,g,i) | je 2 min | (e,f,g) | | (e) 2 P | (f) 2 P | (g) 2 P |
| | (h,j) | je 4 min | (h,i,j) | | (h) 4 P | (i) 2 P | (j) 3 P |
| | (k,l,m) | je 3 min | (k,l,m) | | (k) 3 P | (l) 3 P | (m) 3 P |
| | (n,o,p) | je 5 min | (n,o,p) | | (n) 3 P | (o) 2 P | (p) 3 P |

Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $I_1 = \int (3x-2)^5 dx$ (b.) $I_2 = \int 5 \cdot \sin(2x-1) dx$ (c.) $I_3 = \int \frac{1}{5x+7} dx$

(d.) $I_4 = \int 2x \cdot \left(x^2+3\right) dx$ (e.) $I_5 = \int \cos(x) \cdot \sin^3(x) dx$

(f.) $I_6 = \int \left(6x^2-4\right) \cdot \left(x^3-2x\right) dx$ (g.) $I_7 = \int \left(6x^2-4\right) \cdot \left(x^3-2x\right)^4 dx$

(h.) $I_8 = \int \sin^4(x) dx$ (i.) $I_9 = \int \cos(x) \cdot \sqrt[3]{3+\sin(x)}\, dx$ (j.) $I_{10} = \int \frac{1+\ln(x)}{x \cdot \ln(x)} dx$

(k) $I_{11} = \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (l.) $I_{12} = \int \frac{1}{x \cdot \ln\left(x^2\right)} dx$ (m.) $I_{13} = \int \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)} dx$

(n.) $I_{14} = \int \frac{\ln\left(\mathrm{x} \cdot e^x\right)}{x} dx$ (o.) $I_{15} = \int \frac{6x^3-5x}{3x^4-5x^2+1} dx$ (p.) $I_{16} = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+1}} dx$

## Lösung zu 7.2

Es handelt sich um Integrale, die mit Hilfe der Methode der Substitution gelöst werden. Dabei wird ein von $x$ abhängiger Ausdruck durch eine zusammenfassende Variable (wie z.B. $z$) ausgedrückt, wobei gleichzeitig ein Zusammenhang zwischen $dx$ und $dz$ herzustellen ist, mit dessen Hilfe $dx$ durch $dz$ ersetzt wird. Diesen Zusammenhang zwischen $dx$ und $dz$ findet man bei einer Vielzahl von Aufgaben am leichtesten, indem man $z$ nach $x$ ableitet. Wenn man nun nach $dx$ auflöst, kann man das $dx$ im Integral sofort durch einen Ausdruck in $dz$ ersetzen.

Wir lösen nun die gestellten Beispielaufgaben:

(a.) $I_1 = \int (3x-2)^5 dx = \underbrace{\int z^5 \cdot \frac{1}{3} dz}_{\text{Substitution}} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} z^6 + C_1}_{\text{Integration}} = \underbrace{\frac{1}{18}(3x-2)^6 + C_2}_{\text{Resubstitution}}$

Substitution: $z := 3x+2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 3 \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{3} dz$ 1 P

Hinweis zur Durchnummerierung der Integrationskonstanten: Bei der Resubstitution könnte sich der Wert der Integrationskonstanten ändern, deshalb führen wir bei diesem Schritt eine neue Integrationskonstante ein. Es ist unnötig, einen Zusammenhang zwischen den beiden Konstanten $C_1$ und $C_2$ herzustellen, denn beide sind willkürlich (aber konstant).

(b.) $I_2 = \int 5 \cdot \sin(2x-1) dx = \int 5 \cdot \sin(z) \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{5}{2} \cdot (-\cos(z)) + C_1 = -\frac{5}{2} \cos(2x-1) + C_2$

Substitution: $z := 2x-1 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 2 \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{2} dz$ 1 P

(c.) $I_3 = \int \frac{1}{5x+7} dx = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{5} dz = \frac{1}{5} \cdot \ln(|z|) + C_1 = \frac{1}{5} \cdot \ln(|5x+7|) + C_2$

Substitution: $z := 5x+7 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 5 \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{5} dz$ 1 P

(d.) $I_4 = \int 2x \cdot (x^2+3) dx = \int z \, dz = \frac{1}{2} z^2 + C_1 = \frac{1}{2} \cdot (x^2+3)^2 + C_2 = \frac{1}{2} x^4 + 3x^2 + \frac{9}{2} + C_2$

Substitution: $z := x^2+3 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; 2x \cdot dx = dz$ 1 P

Anmerkung: Wer nicht substituiert sondern ausklammert, hat ebenso korrekt gerechnet:

$I_4 = \int 2x \cdot (x^2+3) dx = \int (2x^3 + 6x) dx = \frac{1}{2} x^4 + 3x^2 + C_3$ Es ist eben $C_3 = \frac{9}{2} + C_2$ .

**Stolperfalle:**

Man vermeide unter allen Umständen eine Vermischung der $x$ und der $z$ innerhalb eines Integralzeichens. Wenn über $dx$ integriert wird, dann ist die gesamte zu integrierende Funktion ausschließlich nur in $x$ auszudrücken – andere Variablen haben dort nichts zu suchen. Gleiches gilt in analoger Weise für $z$ .

Eine Vermischung der Variablen innerhalb eines Integralzeichens führt bei Anfängern immer wieder zu Rechenfehlern und zum Verlust der Orientierung.

**Arbeitshinweis:**

Wenn man einen Ausdruck findet, dessen Ableitung als Faktor zum $dx$ auftaucht, dann ist oftmals die Substitution die Integrationsmethode der Wahl, denn beim oben genannten Ableiten des $dz$ nach $dx$ , kommt genau der bewusste Faktor zum $dx$ .

Wir sehen nachfolgend Beispiele hierfür:

(e.) $I_5 = \int \cos(x) \cdot \sin^3(x) dx = \int z^3 dz = \frac{1}{4} z^4 + C_1 = \frac{1}{4} \sin^4(x) + C_2$

Substitution: $z := \sin(x) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \cos(x) \;\Rightarrow\; dz = \cos(x) \cdot dx$ 2 P

Hinweis: Die Idee zur Substitution liegt auf der Hand: Die Ableitung des $\sin(x)$ ist der $\cos(x)$, und der taucht als Faktor zum $dx$ auf.

(f.) $I_6 = \int \left(6x^2-4\right)\cdot\left(x^3-2x\right)dx$

Hinweis: Hier muss man genau hinsehen, um zu erkennen, dass die Ableitung von $\left(x^3-2x\right)$ als Faktor zu $dx$ auftritt, und zwar wie folgt: Bekanntlich ist die Ableitung des $\left(x^3-2x\right)$ der Ausdruck $\left(3x^2-2\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(6x^2-4\right)$. Die gesuchte Ableitung taucht also hier nur bis auf einen konstanten Faktor auf, und dieser lässt sich mühelos vor das Integral ziehen. Die Integration sieht dann wie folgt aus:

$$I_6 = \int \left(6x^2-4\right)\cdot\left(x^3-2x\right)dx = 2\cdot\int\left(3x^2-2\right)\cdot\left(x^3-2x\right)dx = 2\cdot\int z\,dz = z^2+C_1 = \left(x^3-2x\right)^2+C_2$$

2 P Substitution: $z := x^3-2x \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx}=3x^2-2 \;\Rightarrow\; dz=\left(3x^2-2\right)\cdot dx$

(g.) $I_7 = \int \left(6x^2-4\right)\cdot\left(x^3-2x\right)^4 dx = 2\cdot\int\left(3x^2-2\right)\cdot\left(x^3-2x\right)^4 dx = 2\cdot\int z^4\,dz = \frac{2}{5}z^5+C_1$

$$= \frac{2}{5}\left(x^3-2x\right)^5+C_2$$

2 P Substitution: $z := x^3-2x \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx}=3x^2-2 \;\Rightarrow\; dz=\left(3x^2-2\right)\cdot dx$

Hinweis: Dieser Aufgabenteil ist dem vorausgehenden Teil (f.) sehr ähnlich. Der Unterschied liegt lediglich in der Potenz des $z$.

(h.) $I_8 = \int \sin^4(x)\,dx$

**Arbeitshinweis:**

Die Integration goniometrischer Funktionen (dies sind Funktionen, in denen die Winkelfunktionen auftauchen) vereinfacht sich oftmals erheblich, wenn man mit Hilfe von Additionstheoremen die Funktion in eine möglichst einfache Form bringt, bevor man mit dem Ausführen der Integration beginnt.

Im vorliegenden Fall bietet sich folgendes Additionstheorem an:

$\sin^4(x)=\frac{1}{8}\cdot\cos(4x)-\frac{1}{2}\cdot\cos(2x)+\frac{3}{8}$ . Damit folgt dann

$$I_8 = \int \sin^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\cdot\int\cos(4x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot\int\cos(2x)\,dx+\int\frac{3}{8}\,dx$$

Zwei Substitutionen werden nun gleichzeitig vorgenommen $u := 4x \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}=4$

und $s := 2x \;\Rightarrow\; \frac{ds}{dx}=2$

$$\Rightarrow \quad I_8 = \tfrac{1}{8}\cdot\int \cos(u)\cdot\tfrac{1}{4}\,du - \tfrac{1}{2}\cdot\int \cos(s)\cdot\tfrac{1}{2}\,ds + \int \tfrac{3}{8}\,dx = \tfrac{1}{32}\cdot\sin(u) - \tfrac{1}{4}\cdot\sin(s) + \tfrac{3}{8}x + C_1$$

$$= \tfrac{1}{32}\cdot\sin(4x) - \tfrac{1}{4}\cdot\sin(2x) + \tfrac{3}{8}x + C_2$$

4 P

(i.) $I_9 = \int \cos(x)\cdot\sqrt[3]{3+\sin(x)}\,dx = \int z^{\frac{1}{3}}\,dz = \frac{3}{4}z^{\frac{4}{3}} + C_1 = \frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{(3+\sin(x))^4} + C_2$

Die Substitution liegt auf der Hand: $z := 3+\sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \cos(x)$ 2 P

(j.) $I_{10} = \int \frac{1+\ln(x)}{x\cdot\ln(x)}\,dx = \int \frac{1+\ln(x)}{\ln(x)}\cdot\frac{dx}{x} = \int \frac{1+z}{z}\cdot dz = \int \frac{1}{z}\cdot dz + \int \frac{z}{z}\cdot dz = \ln(|z|) + z + C_1$

$$= \ln\big(|\ln(|x|)|\big) + \ln(|x|) + C_2$$

Mit der Substitution: $z := \ln(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dz$ 3 P

**Arbeitshinweis:**

Mitunter sind auch nach erfolgter Substitution mehr oder weniger ausgedehnte Rechenwege erforderlich, bis schließlich die Lösung eines Integrals erreicht wird.

(k) $I_{11} = \int \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int z\,dz = \frac{1}{2}z^2 + C_1 = \frac{1}{2}\arcsin^2(x) + C_2$ 3 P

Mit der Substitution: $z := \arcsin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dz$

**Arbeitstrick:**

Wenn Arcus-Funktionen und Area-Funktionen auftauchen, erinnere man sich an deren Ableitungen.

(l.) $I_{12} = \int \frac{1}{x\cdot\ln(x^2)}\,dx = \int \frac{1}{\ln(x^2)}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2}\,dz = \frac{1}{2}\ln(|z|) + C_1 = \frac{1}{2}\ln\big(|\ln(x^2)|\big) + C_2$

Mit der Substitution: $z := \ln(x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2}\cdot 2x = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,dz$ 3 P

**Stolperfalle:**

Auch beim Ableiten des $\frac{dz}{dx}$ sind immer alle Ableitungsregeln zu beachten und z.B. auch die Kettenregel nicht zu vergessen.

**Arbeitshinweis:**

Nicht immer hat man auf Anhieb die Idee für die passende Substitution. Würde man bei Aufgabenteil (l.) z.B. nur $z := x^2$ substituieren, so käme man nicht zum Erfolg. In solchen Fällen kann man mehrere verschiedene Ansätze probieren, bis man schließlich einen funktionsfähigen Ansatz findet, der zur Lösung der Aufgabe führt.

(m.) $I_{13} = \int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)} dx = \int \frac{-dz}{z} = -\ln(|z|) + C_1 = -\ln(|\cos(x)+\sin(x)|) + C_2$

3 P Substitution: $z := \cos(x)+\sin(x) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\sin(x)+\cos(x) \Rightarrow (\sin(x)-\cos(x)) \cdot dx = -dz$

(n.) $I_{14} = \int \frac{\ln(x \cdot e^x)}{x} dx = \int \frac{\ln(x)+\ln(e^x)}{x} dx = \int \frac{x+\ln(x)}{x} dx = \int 1 dx + \int \frac{\ln(x)}{x} dx$

3 P Erst jetzt folgt die Substitution: $z := \ln(x) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{x} = dz$ , womit man wie folgt integrieren kann: $I_{14} = \int 1 dx + \int \frac{\ln(x)}{x} dx = x + C_1 + \int z\, dz = x + \frac{1}{2} z^2 + C_2 = x + \frac{1}{2}(\ln(|x|))^2 + C_3$

**Arbeitshinweis:**

Vor Beginn der Integration bringt man das Integral durch geeignete Umformungen in eine zur Lösung der Aufgabe brauchbare Form.

(o.) $I_{15} = \int \frac{6x^3-5x}{3x^4-5x^2+1} dx = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \cdot \ln(|z|) + C_1 = \ln\left(\sqrt{|3x^4-5x^2+1|}\right) + C_2$

2 P Substitution: $z := 3x^4-5x^2+1 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 12x^3-10x \;\Rightarrow\; \frac{1}{2} dz = (6x^3-5x) dx$

(p.) $I_{16} = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+1}} dx$

Substitution: $z := \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2z} \;\Rightarrow\; dx = 2z \cdot dz$

Dann lässt sich der Integrand nämlich wie folgt umformen

$z := \sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; z^2 = x+1 \;\Rightarrow\; z^4 = (x+1)^2 = x^2+2x+1$ und somit: $\frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x+1}} = \frac{z^4}{z} = z^3$

3 P Das gesuchte Integral wird somit $I_{16} = \int z^3 \cdot 2z\, dz = \int 2z^4 dz = \frac{2}{5} z^5 + C_1 = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{(x+1)^5} + C_2$

## Aufgabe 7.3 Partielle Integration

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 1 min<br>3 min | (a.)<br>(b.) | | Punkte<br>(a) 1 P (b.) 2 P |
| | (c.)<br>(d.) | 5 min<br>5 min | (c.)<br>(d.) | | (c) 3 P (d) 3 P |
| | (e.)<br>(f.) | 1 min<br>2 min | (e.)<br>(f.) | | (e) 2 P (f) 1 P |
| | (g.)<br>(h.) | 2 min<br>2 min | (g.)<br>(h.) | | (g) 2 P (h) 2 P |

Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $I_1 = \int x \cdot \sin(x)\,dx$ (b.) $I_2 = \int x^2 \cdot e^{3x}\,dx$ (c.) $I_3 = \int e^x \cdot \sin(x)\,dx$

(d.) $I_4 = \int \sin^2(x)\,dx$ (e.) $I_5 = \int \ln(x)\,dx$ (f.) $I_6 = \int x \cdot \ln(x)\,dx$

(g.) $I_7 = \int \arctan(x)\,dx$ (h.) $I_5 = \int (\ln(x))^2\,dx$

## Lösung zu 7.3

Es handelt sich um Integrale, die mit Hilfe der partiellen Integration gelöst werden. Dabei wird der Integrand in zwei Teile zerlegt und dann in Teilen integriert.

(a.) $I_1 = \int \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'}\,dx = \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{u} + C_1 - \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{u}\,dx = -x \cdot \cos(x) + \sin(x) + C_2$ 1 P

**Arbeitshinweis:**

Beim partiellen Integrieren ist immer einer der beiden Teile abzuleiten. Im vorliegenden Beispiel leitet man sinnvollerweise denjenigen Faktor ab, der durch das Ableiten verschwindet. Dies ist ein typischer Anwendungsfall für die partielle Integration.

Anmerkung: Die Integration ist erst dann fertig, wenn sämtliche Integralzeichen aufgelöst sind.

(b.) $I_2 = \int \underbrace{x^2}_{v_1} \cdot \underbrace{e^{3x}}_{u'_1}\,dx = \underbrace{x^2}_{v_1} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{3x}}_{u_1} + C_1 - \int \underbrace{2x}_{v'_1|v_2} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{3}e^{3x}}_{u_1|u'_2}\,dx = \tfrac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \left[\underbrace{2x}_{v_2} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{9}e^{3x}}_{u_2} - \int \underbrace{2}_{v'_2} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{9}e^{3x}}_{u_2}\,dx\right] + C_2$

$= \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{9}x\right) \cdot e^{3x} + \tfrac{2}{9} \cdot \int e^{3x}\,dx + C_2 = \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{9}x\right) \cdot e^{3x} + \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} + C_3 = \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{9}x + \tfrac{2}{27}\right) \cdot e^{3x} + C_3$ 2 P

Hinweis: Es gibt Integrale, bei denen die partielle Integration mehrfach hintereinander wiederholt angewandt werden muss. Im vorliegenden Beispiel genügt bereits die zweifache Anwendung. Bei der Markierung mit v,u,v',u' wird der Index „1" für den ersten Schritt verwendet und der Index „2" für den zweiten Schritt.

**Stolperfalle:**

Beim mehrfachen partiellen Integrieren ist die Gefahr von Vorzeichenfehlern relativ groß. Man vermeidet derart unnötige Fehler am sichersten, indem man beim eigentlichen Rechenschritt des Integrierens reichlich Klammern setzt, die man in einem eigenen Rechenschritt anschließend in Ruhe auflöst.

(c.) $I_3 = \int \underbrace{e^x}_{v_1} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'_1}\,dx = \underbrace{e^x}_{v_1} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{u_1} + C_1 - \int \underbrace{e^x}_{v'_1} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{u_1}\,dx = -e^x \cdot \cos(x) + C_1 + \int \underbrace{e^x}_{v_2} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{u'_2}\,dx$

$= -e^x \cdot \cos(x) + \underbrace{e^x}_{v_2} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u_2} + C_2 - \int \underbrace{e^x}_{v'_2} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u_2}\,dx = e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x)) + C_2 - I_3$ 2 P

**Rechentrick:**

Das vorliegende Beispiel ist typisch für eine ganze Reihe von Integralen, die sich beim partiellen Integrieren selbst reproduzieren. In solchen Fällen führt eine Äquivalenzumformung zum Ziel; wir betrachten hierzu nämlich die gesamte Gleichung und bringen das gesuchte Integral (hier $I_3$) auf eine Seite.

In unserem Beispiel gelingt dies, indem man auf beiden Seiten $1 \cdot I_3$ addiert. Dies sieht wie folgt aus:

1 P
$$\begin{aligned} I_3 &= e^x \cdot \big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C_2 - I_3 && \big| + I_3 \\ \Rightarrow \quad 2 \cdot I_3 &= e^x \cdot \big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C_2 && \big| \cdot \tfrac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad I_3 &= \tfrac{1}{2} e^x \cdot \big(\sin(x) - \cos(x)\big) + C_3 && \text{Dies ist die gesuchte Lösung.} \end{aligned}$$

(d.) Hinweis: Auch dieses Integral reproduziert sich durch partielle Integration selbst, und kann durch anschließende Äquivalenzumformung (ähnlich wie bei Aufgabenteil (c.)) aufgelöst werden. Es handelt sich dabei um ein Standard-Beispiel, das mitunter in Klausuren abgefragt wird.

1 P
$$I_4 = \int \underbrace{\sin(x)}_{v} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{u'} dx = \underbrace{\sin(x)}_{v} \cdot \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{u} + C_1 - \int \underbrace{\cos(x)}_{v'} \cdot \underbrace{\big(-\cos(x)\big)}_{u} dx = -\sin(x) \cdot \cos(x) + C_1 + \int \cos^2(x)\, dx$$

In welcher Weise sich das Ausgangs-Integral ($I_4$) hier bereits reproduziert hat, sieht man durch Einsatz eines Additionstheorems, nämlich $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. Damit ergibt sich

$$\int \cos^2(x)\, dx = \int 1\, dx - \int \sin^2(x)\, dx .$$

Einsetzen in $I_4$ liefert

2 P
$$\begin{aligned} I_4 = -\sin(x) \cdot \cos(x) + C_1 + \int \cos^2(x)\, dx &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + C_1 + \int 1\, dx - \int \sin^2(x)\, dx \\ &= -\sin(x) \cdot \cos(x) + x + C_2 - I_4 \qquad \big| + I_4 \end{aligned}$$

Die nötige Äquivalenzumformung ist auch hier eine simple Addition des $I_4$:

$$2 \cdot I_4 = -\sin(x) \cdot \cos(x) + x + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad I_4 = -\tfrac{1}{2} \sin(x) \cdot \cos(x) + \tfrac{1}{2} x + C_3 \qquad \text{fertig.}$$

2 P (e.) $I_5 = \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} dx = \underbrace{\ln(x)}_{v} \cdot \underbrace{x + C_1}_{u} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \cdot \underbrace{x}_{u} dx = x \cdot \ln(x) - x + C_2$

Hinweis: Bei den Aufgabenteilen (a.) und (b.) war gezeigt worden, wie man $x$ oder Potenzen von $x$ mittels partieller Integration durch Ableiten (von $v$ nach $v'$) aus dem Integranden entfernen kann. Dass man auf die selbe Weise einen Logarithmus entfernen kann, sieht man bei den Aufgabenteilen (e.) und (f.).

Wie man im Allgemeinen das Verfahren der partiellen Integration benutzen kann, um Funktionen zuerst abzuleiten und danach die Ableitung zu integrieren, wird in den Aufgabenteilen (g.) und (h) gezeigt.

(f.)

$$I_6 = \int \underbrace{x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} dx = \underbrace{\ln(x)}_{v} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{u} + C_1 - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2}x^2}_{u} dx = \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) + C_1 - \int \tfrac{1}{2}x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \tfrac{1}{4}x^2 + C_2 \qquad 1\text{ P}$$

Hinweis → siehe oben

(g.) $$I_7 = \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\arctan(x)}_{v} dx = \underbrace{\arctan(x)}_{v} \cdot \underbrace{x}_{u} + C_1 - \int \frac{1}{\underbrace{1+x^2}_{v'}} \cdot \underbrace{x}_{u} dx$$

Der durch partielle Integration entstandene Zwischenschritt lässt sich mittels Substitution integrieren: $z := 1 + x^2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; x \cdot dx = \frac{1}{2}dz$ Damit folgt

$$I_7 = \arctan(x) \cdot x + C_1 - \int \frac{1}{z} \cdot \tfrac{1}{2}dz = x \cdot \arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln(|z|) + C_2 = x \cdot \arctan(x) - \tfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + C_3 \qquad 2\text{ P}$$

Anmerkung: Bei $\ln\left(1+x^2\right)$ wird die Betragsbildung überflüssig, denn $1 + x^2$ ist stets positiv.

(h.) $$I_5 = \int \underbrace{\ln(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} dx = \underbrace{\ln(x)}_{v} \cdot \underbrace{\left(x \cdot \ln(x) - x\right)}_{u} + C_1 - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \cdot \underbrace{\left(x \cdot \ln(x) - x\right)}_{u} dx$$

$$= \ln(x) \cdot \left(x \cdot \ln(x) - x\right) + C_1 - \int \ln(x)\,dx + \int 1\,dx = \ln(x) \cdot \left(x \cdot \ln(x) - x\right) - \left(x \cdot \ln(x) - x\right) + x + C_2 \qquad 2\text{ P}$$

$$= x \cdot \left(\ln(x)\right)^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x + C_2$$

Bei der Berechnung des u' aus dem u wurde das Ergebnis von Aufgabenteil (e.) verwendet.

## Aufgabe 7.4 Integration nach geeigneter Umformung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 3 min | (a,b.) | | Punkte<br>(a.) 2 P (b.) 2 P |
| | (c.)<br>(d.) | 6 min<br>12 min | (c.)<br>(d.) | | (c.) 4 P (d.) 7 P |
| | (e.) | je 15 min | (e.) | | (e.) 8 P |

Berechnen Sie bitte die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $I_1 = \int \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x+1}} dx$ (b.) $I_2 = \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$ (c.) $I_3 = \int \frac{2 + x}{x^2 + 4x + 5} dx$

(d.) $I_4 = \int \frac{2x}{x^4 - 6x^2 + 13} dx$ (e.) $I_5 = \int \frac{1}{x^2 + 2x - 8} dx$

## Lösung zu 7.4

Manche Integrale lassen sich durch geeignete Umformungen in eine für das Lösen angenehme Form bringen. In den Beispielen von Aufgabe 7.4. betrachte man insbesondere die quadratische Ergänzung.

(a.) Der Zähler erlaubt die quadratische Ergänzung $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Damit wird

2 P
$$I_1=\int\frac{(x+1)^2}{(x+1)^{\frac{1}{2}}}dx=\int(x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx=\int t^{\frac{3}{2}}\,dt=\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+C_1=\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}+C_2=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{(x+1)^5}+C_2$$

Mit der Substitution $t:=x+1 \quad\Rightarrow\quad dt=dx$

(b.) Formt man den Nenner mittels quadratischer Ergänzung um, so erhält man

$x^2+4x+5=\left(x^2+4x+4\right)+1=(x+2)^2+1=z^2+1$ mit der Substitution $z:=x+2 \quad\Rightarrow\quad dz=dx$

**Allgemeingültiger Arbeitshinweis:**

Das Ziel quadratischer Ergänzungen ist es, dass der Integrand nur Glieder enthält, in denen die Integrationsvariable (hier $z$) quadratisch auftritt (Konstanten dürfen zusätzlich noch auftreten). Solche Summanden, in denen die Integrationsvariable linear auftritt, sollen nach Ausführen der quadratischen Ergänzung nicht mehr im Integranden zu sehen sein.

Nach erfolgter quadratischer Ergänzung lässt sich nun unsere Beispielaufgabe leicht lösen:

2 P
$$I_2=\int\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{1}{z^2+1}dz=\arctan(z)+C_1=\arctan(x+2)+C_2$$

Wie man sieht, enthält der Integrand keine in $z$ linearen Summanden (weder im Zähler noch im Nenner).

(c.) Nach erfolgreichem Lösen von Aufgabenteil (b.) liegt die Lösung für (c.) auf der Hand, da sowohl die quadratische Ergänzung als auch die Substitution mit den dortigen identisch sind:

$x^2+4x+5=\left(x^2+4x+4\right)+1=(x+2)^2+1=z^2+1$ mit der Substitution $z:=x+2 \quad\Rightarrow\quad dz=dx$

2 P
$$I_3=\int\frac{2+x}{x^2+4x+5}dx=\int\frac{z}{z^2+1}dz$$

Im Unterschied zu Aufgabenteil (b.) ist jetzt aber eine erneute Substitution nötig, um das Integral vollends zu lösen: $t:=z^2+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dz}=2z \quad\Rightarrow\quad z\cdot dz=\frac{1}{2}dt$

2 P
Damit folgt $I_3=\int\frac{z}{z^2+1}dz=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\cdot\ln(|t|)+C_1=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(z^2+1\right)+C_2=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\left|x^2+4x+5\right|\right)+C_3$

Natürlich müssen letztendlich sämtliche Substitutionen durch die entsprechenden Resubstitutionen wieder rückgängig gemacht werden.

(d.) $I_4 = \int \frac{2x}{x^4 - 6x^2 + 13} dx$

Zunächst einmal tauchen im Nenner die $x$ nur in geraden Potenzen auf. Aus diesem Grunde hilft uns eine Substitution, den Nenner in eine Form zu bringen, die zur quadratischen Ergänzung geeignet ist: $t := x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dt = 2x \cdot dx$

Damit gilt $I_4 = \int \frac{2x \cdot dx}{x^4 - 6x^2 + 13} = \int \frac{1}{t^2 - 6t + 13} dt = \int \frac{1}{\left(t^2 - 6t + 9\right) + 4} dt = \int \frac{1}{(t-3)^2 + 4} dt$ 2 P

Nach Durchführung der quadratischen Ergänzung, folgt die typische Substitution:

$z := t - 3 \quad \Rightarrow \quad dz = dt$ ,

woraus folgt $I_4 = \int \frac{1}{(t-3)^2 + 4} dt = \int \frac{1}{z^2 + 4} dz$ . 1 P

**Allgemeingültiger Arbeitshinweis:**

Zur Lösung derartiger Integrale gibt es einen weiteren Arbeitstrick, der auf dem Gebrauch der nachfolgenden Integrale beruht, welche in vielen Formelsammlungen zu finden sind.

- $\int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan(u) + C$
- $\int \frac{1}{1 - u^2} du = \begin{cases} \operatorname{artanh}(u) + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right) + C & \text{für } |u| < 1 \\ \operatorname{arcoth}(u) + C = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right) + C & \text{für } |u| > 1 \end{cases}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} du = \operatorname{arsinh}(u) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{u^2 - 1}} du = \operatorname{arcosh}(u) + C$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du = \arcsin(u) + C$

Wenn man den Nenner in eine dieser Formen bringen kann, so lässt sich die Stammfunktion sofort angeben. Das Entscheidende dabei ist die Tatsache, dass neben dem quadratischen Summanden eine Konstante im Nenner steht. Erweitert man den Bruch derart, dass diese Konstante zu „eins“ wird, so passen die gezeigten Formeln aus der Formelsammlung.

Wendet man diesen Arbeitstrick auf unser Beispiel an, so passiert folgendes:

$$I_4 = \int \frac{1}{z^2 + 4} dz = \int \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cdot \left(z^2 + 4\right)} dz = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 1} dz = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{1}{s^2 + 1} \cdot 2ds = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{s^2 + 1} ds \quad ,$$

2 P

wobei schließlich die Substitution eingesetzt wurde: $s := \frac{z}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dz} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad dz = 2 \cdot ds$

Endlich lässt sich das Integral mit Hilfe der im Arbeitshinweis genannten Stammfunktion auflösen:

$I_4 = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{s^2 + 1} ds = \frac{1}{2} \arctan(s) + C_1$ 1 P

Drei Resubstitutionen sind nötig, um die Stammfunktion als Funktion von $x$ zu erhalten:

$I_4 = \int \frac{2x}{x^4 - 6x^2 + 13} dx = \frac{1}{2} \arctan(s) + C_1 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{z}{2}\right) + C_2 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{t-3}{2}\right) + C_3 = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x^2-3}{2}\right) + C_4$ 1 P (e.) Dieses Integral erfordert keine neuen Arbeitstricks. Es dient lediglich dem Zweck, den Lernerfolg der aus Aufgabenteil (d.) bekannten Techniken zu vertiefen.

Die quadratische Ergänzung des Nenners lautet $x^2+2x-8=\left(x^2+2x+1\right)-9=(x+1)^2-9$

Damit berechnet sich das Integral wie folgt:

$$I_5=\int\frac{1}{x^2+2x-8}dx=\int\frac{1}{(x+1)^2-9}dx=\int\frac{1}{z^2-9}dz \quad ,$$

2 P wobei die Substitution verwendet wurde: $z:=x+1 \quad\Rightarrow\quad dz=dx$

Es folgt das Umformen des Nenners in die Form mit dem konstanten Summanden „eins“:

$$I_5=\int\frac{1}{z^2-9}dz=\int\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}\cdot\left(z^2-9\right)}dz=\int\frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{z}{3}\right)^2-1}dz=\frac{1}{9}\int\frac{1}{t^2-1}\cdot 3dt=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2-1}dt \quad ,$$

2 P unter Verwendung der Substitution $t:=\frac{z}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dz}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad dz=3\cdot dt$ .

Die Stammfunktion dieses Integrals $I_5$ ist eine der im Arbeitstrick von Aufgabenteil (d.) genannten, nämlich:

1 P
$$I_5=\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2-1}dt=\begin{cases}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)+C_1 & \text{für } |t|<1\\ -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{t+1}{t-1}\right)+C_2 & \text{für } |t|>1\end{cases}$$

woraus sich nach zweimaliger Resubstitution das Endergebnis finden lässt:

2 P
$$I_5=\int\frac{1}{x^2+2x-8}dx=\begin{cases}\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+\frac{z}{3}}{1-\frac{z}{3}}\right)+C_1=\frac{-1}{6}\cdot\ln\left(\frac{3+z}{3-z}\right)+C_3 & \text{für } \left|\frac{z}{3}\right|<1\\ \frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{\frac{z}{3}+1}{\frac{z}{3}-1}\right)+C_2=\frac{-1}{6}\cdot\ln\left(\frac{z+3}{z-3}\right)+C_4 & \text{für } \left|\frac{z}{3}\right|>1\end{cases}$$

für die erste Resubstitution

1 P
$$\Rightarrow\quad I_5=\begin{cases}-\frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{3+x+1}{3-x-1}\right)+C_5=-\frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{x+4}{2-x}\right)+C_5 & \text{für } |t|=\left|\frac{z}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{3}\right|<1\\ -\frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{x+1+3}{x+1-3}\right)+C_6=-\frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{x+4}{x-2}\right)+C_6 & \text{für } |t|=\left|\frac{z}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{3}\right|>1\end{cases}$$

## Aufgabe 7.5 Integration nach Partialbruchzerlegung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 10 min<br>12 min | (a.)<br>(b.) | | Punkte<br>(a.) 6 P (b.) 7 P |
| | (c.)<br>(d.) | 10 min<br>30 min | (c.)<br>(d.) | | (c.) 6 P (d.) 12 P |
| | (e.)<br>(f.) | 15 min<br>20 min | (e.)<br>(f.) | | (e.) 9 P (f.) 12 P |

Berechnen Sie bitte die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $I_1=\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}dx$ (b.) $I_2=\int\frac{2x^2+x+1}{(x+3)\cdot(x-1)^2}dx$ (c.) $I_3=\int\frac{1}{x^3+x}dx$

(d.) $I_4 = \int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}\,dx$ (e.) $I_5 = \int \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-4x+3}\,dx$ (f.) $I_6 = \int \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-4x+5}\,dx$

## Lösung zu 7.5

Es handelt sich um Integrale, die nach vorgeschalteter Partialbruchzerlegung gelöst werden.

**Allgemeiner Hinweis:**

Die Partialbruchzerlegung dient der Zerlegung komplizierter Polynombrüche in kleine handliche Stücke nach den Regeln der Bruchrechnung. Das Verfahren wird nicht nur bei der Integration gebrochenrationaler Integranden eingesetzt, sondern z. B. auch bei der Durchführung von Funktionaltransformationen, wie z.B. bei der Fourier-Transformation oder der Laplace-Transformation.

Der Arbeitsweg ist der: Zuerst wird der komplizierte Polynombruch zerlegt. Erst danach werden die so erhaltenen einfachen Stücke der Integration bzw. der Funktionaltransformation zugeführt.

**Stolperfalle:**

Vor Beginn der Partialbruchzerlegung ist zu prüfen, ob der Integrand eine echt gebrochen rationale Funktion ist oder eine unecht gebrochen rationale Funktion. Die Partialbruchzerlegung kann nur für echte Polynombrüche gebraucht werden. Im Falle unechter Polynombrüche ist vor Beginn der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision durchzuführen. Nur der echt gebrochene Anteil ist dann der Partialbruchzerlegung zuzuführen.

<u>Gliederung des Lösungsweges der vorliegenden Aufgabe im Überblick:</u>
Schritt 0: Falls unecht gebrochene Polynombrüche → Polynomdivision
Schritt 1: Aufsuchen der Nennernullstellen des echten Polynombruches
Schritt 2: Aufstellen eines Ansatzes für die Zerlegung des Polynombruches in Partialbrüche
Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler der Partialbrüche
Schritt 4: Durchführung der Integration (bzw. der Funktionaltransformation)

Damit wenden wir uns nun den Lösungen der einzelnen Aufgaben zu:

(a.) $I_1 = \int \frac{x+1}{x^2-3x+2}\,dx$

Schritt 1: Nennernullstellen

Diese findet man hier leicht mit der pq-Formel:

$$x^2-3x+2=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{3\pm 1}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = 1$$ 1 P

Schritt 2: Ansatz für die Partialbrüche: $\frac{x+1}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{(x-2)\cdot(x-1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$

Begründung: Jede einfach auftretende reelle Nennernullstelle erhält einen Partialbruch.

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler

Zunächst werden die Partialbrüche mittels Bruchrechnung zu einem Polynombruch zusammengefasst (Gleichnamigmachen der Brüche und Addieren).

1 P $$\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}=\frac{A\cdot(x-1)}{(x-2)\cdot(x-1)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)}=\frac{A\cdot(x-1)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-1)}=\frac{x+1}{(x-2)\cdot(x-1)}$$

Da der so erhaltene Zähler mit dem ursprünglichen Zähler des Integranden für alle reellen x-Werte gleich sein muss (siehe letztes Gleichheitszeichen in der vorangehenden Zeile), setzen wir zwei willkürlich wählbare x-Werte ein, um ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen zur Bestimmung der zwei Unbekannten A und B zu erhalten. Sinnvollerweise sucht man dafür solche x-Werte aus, die zu einem möglichst einfach zu lösenden Gleichungssystem führen. Dies ist der Fall, wenn jede einzelne der Gleichungen möglichst wenige unterschiedliche Unbekannte enthält:

- $x=+1 \rightarrow A\cdot(1-1)+B\cdot(1-2)=1+1 \quad \Rightarrow \quad B\cdot(-1)=2 \quad \Rightarrow \quad B=-2$
- $x=+2 \rightarrow A\cdot(2-1)+B\cdot(2-2)=(2+1) \quad \Rightarrow \quad A=3$

2 P Die Partialbruchzerlegung lautet also: $\frac{x+1}{x^2-3x+2}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-1}$

Schritt 4: Die Integration

Setzt man die Partialbrüche in das Integral ein, so erhält man:

$$I_1=\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}dx=\int\frac{3}{x-2}dx-\int\frac{2}{x-1}dx=\int\frac{3}{z}dz-\int\frac{2}{u}du=3\cdot\ln(|z|)-2\cdot\ln(|u|)+C_1 \quad ,$$

wobei die Substitutionen verwendet wurden: $z:=x-2 \;\Rightarrow\; dz=dx$ und $u:=x-1 \;\Rightarrow\; du=dx$

2 P Resubstitution liefert das Endergebnis:

$$I_1=\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}dx=3\cdot\ln(|x-2|)-2\cdot\ln(|x-1|)+C_2$$

Anmerkung:

Zur Bestimmung der Konstanten für die Zähler der Partialbrüche gibt es verschiedene Methoden. Was man immer wieder findet, ist z.B. die sogenannte „Zuhaltemethode“ und ihr Ableger, die „erweiterte Zuhaltemethode“. Hier sei allen Lesern empfohlen, ihre eigenen Methoden anzuwenden und beizubehalten. Dass dabei das eigene Ergebnis mit dem Ergebnis der Buch-Musterlösung übereinstimmen muss, versteht sich von selbst.

(b.) $I_2=\int\frac{2x^2+x+1}{(x+3)\cdot(x-1)^2}dx$

Schritt 1: Nennernullstellen

Da der Nenner in faktorisierter Form vorliegt, sieht man seine Nullstellen sofort:

1 P $x_1=-3 \qquad x_2=+1 \qquad x_3=+1$

Schritt 2: Ansatz für die Partialbrüche:

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+3)\cdot(x-1)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}$$

Begründung: Mehrfach auftretende reelle Nennernullstellen erfordern eine Anzahl von Partialbrüchen entsprechend der Häufigkeit ihres Auftretens.

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler

Zunächst werden die Partialbrüche mittels Bruchrechnung zu einem Polynombruch zusammengefasst (Gleichnamigmachen der Brüche und Addieren).

$$\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A\cdot(x-1)^2}{(x+3)\cdot(x-1)^2}+\frac{B\cdot(x+3)\cdot(x-1)}{(x+3)\cdot(x-1)^2}+\frac{C\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-1)^2} \qquad \text{2 P}$$

$$=\frac{A\cdot(x-1)^2+B\cdot(x+3)\cdot(x-1)+C\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-1)^2}=\frac{2x^2+x+1}{(x+3)\cdot(x-1)^2}$$

Wir vergleichen wieder den durch Zerlegung erhaltenen Zähler mit dem ursprünglichen Zähler des Integranden und setzen drei willkürlich wählbare x-Werte ein, um drei möglichst einfache Gleichungen zur Bestimmung der drei Unbekannten $A, B$ und $C$ zu erhalten:

- $x=+1 \rightarrow \ A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 4=(2+1+1) \qquad \Rightarrow \quad C=1$
- $x=-3 \rightarrow \ A\cdot(-4)^2+B\cdot 0+C\cdot 0=(18-3+1) \qquad \Rightarrow \quad 16A=16 \quad \Rightarrow \quad A=1$ 2 P
- $x=0 \rightarrow \ A-3B+3C=1 \qquad \Rightarrow \quad 1-3B+3=1 \quad \Rightarrow \quad 3B=3 \quad \Rightarrow \quad B=1$

Damit ist der Polynombruch in seine Partialbrüche zerlegt, nämlich

$$\frac{2x^2+x+1}{(x+3)\cdot(x-1)^2}=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

Somit können wir uns der eigentlichen Berechnung der Integration zuwenden.

Schritt 4: Die Integration

Es ist $I_2=\int\frac{2x^2+x+1}{(x+3)\cdot(x-1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x+3}dx+\int\frac{1}{x-1}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx$ 1 P

Das Lösen der Integrale erfolgt durch die Substitutionen $\begin{array}{l} z:=x+3 \\ dz=dx \end{array}$ und $\begin{array}{l} u:=x-1 \\ du=dx \end{array}$

und lautet somit

$$I_2=\int\frac{1}{z}dz+\int\frac{1}{u}du+\int\frac{1}{u^2}du=\ln|z|+\ln|u|+(-\frac{1}{u})+C_1=\ln|x+3|+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+C_2 \qquad \text{1 P}$$

(c.) $I_3=\int\frac{1}{x^3+x}dx$

Schritt 1: Nennernullstellen: Durch Ausklammern eines $x$ findet man $x^3+x=\left(x^2+1\right)\cdot\left(x-0\right)$

Schritt 2: Ansatz für die Partialbrüche: $\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$

1 P

Begründung: Jede reelle Nennernullstelle $(x-0)$ erhält einen Partialbruch. Im Faktor $\left(x^2+1\right)$ sind zwei komplexe Nennernullstellen enthalten, aber keine reelle – dazu gehört ein Partialbruch mit zwei Konstanten in der Form $Bx+C$. (Anders sähe der Ansatz aus, wenn man eine vollständig komplexwertige Partialbruchzerlegung durchführen würde.)

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler

Wir beginnen mit dem Zusammenfassen der Partialbrüche mittels Bruchrechnung

1 P $\frac{1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A\cdot\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\cdot x}{x\cdot\left(x^2+1\right)}$

und setzen drei x-Werte ein, um $A, B$ und $C$ zu bestimmen:

- Glg.I: $x=0 \rightarrow A+0=1 \Rightarrow A=1$
- Glg.II: $x=+1 \rightarrow 2A+B+C=1$
- Glg.III: $x=-1 \rightarrow 2A+B-C=1$

Subtraktion Glg.II – Glg.III liefert:
$$\begin{array}{r|l} 2A+B+C=1 & - \\ 2A+B-C=1 & \\ \hline 2C=0 \Rightarrow C=0 & \end{array}$$

Einsetzen von A und C in Glg.II liefert: $2+B+0=1 \Rightarrow B=-1$

2 P

Damit ist der Polynombruch in seine Partialbrüche zerlegt: $\frac{1}{x^3+x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$

Schritt 4: Die Integration

1 P Es ist $I_3=\int\frac{1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{\frac{1}{2}dz}{z}$

Integriert wurde mit Hilfe der Substitutionen $z:=x^2+1 \Rightarrow \frac{dz}{dx}=2x \Rightarrow x\cdot dx=\frac{1}{2}dz$

Das Integral wird somit

1 P $I_3=\int\frac{1}{x^3+x}dx=\int\frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\int\frac{dz}{z}=\ln(|x|)-\frac{1}{2}\ln(|z|)+C_1=\ln(|x|)-\frac{1}{2}\ln\left(\left|x^2+1\right|\right)+C_2$

(d.) $I_4=\int\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx$

Schritt 1: Nennernullstellen

Da von $x$ nur gerade Potenzen im Nenner auftreten, substituieren wir $t:=x^2$ und schreiben den Nenner als $x^4+2x^2+1=t^2+2t+1$. Mittels quadratischer Ergänzung finden wir $t^2+2t+1=(t+1)^2$.

Nach Resubstitution erhalten wir: $x^4+2x^2+1=t^2+2t+1=(t+1)^2=\left(x^2+1\right)^2$ 1 P

Weiter lässt sich der Nenner in den reellen Zahlen nicht faktorisieren. Es sind also 4 komplexe Nullstellen vorhanden, die jeweils paarweise auftreten. Reelle Nullstellen hat der Nenner nicht.

Schritt 2: Ansatz für die Partialbrüche:

$$\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}$$ 1 P

Begründung: Komplexe Nennernullstellen enthalten Partialbrüche mit zwei reellen Konstanten. Da jede der komplexen Nennernullstellen genau zweimal auftritt, treten die so gebildeten Partialbrüche auch zweimal auf.

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler

Wir beginnen mit dem Zusammenfassen der Partialbrüche mittels Bruchrechnung

$$\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}=\frac{Ax+B}{\left(x^2+1\right)}+\frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{(Ax+B)\cdot\left(x^2+1\right)+(Cx+D)}{\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+1\right)}$$ 1 P

und setzen vier willkürlich gewählte x-Werte ein, um die vier Konstanten zu bestimmen:

- Glg.I: $x=0 \;\rightarrow\; B+D=2$ $\quad\Rightarrow\quad 0A+1B+0C+1D=2$
- Glg.II: $x=+1 \rightarrow (A+B)\cdot 2+C+D=1+1+2$ $\quad\Rightarrow\quad 2A+2B+1C+1D=4$
- Glg.III: $x=-1 \rightarrow (-A+B)\cdot 2-C+D=-1-1+2$ $\quad\Rightarrow\quad -2A+2B-1C+1D=0$
- Glg.IV: $x=+2 \rightarrow (2A+B)\cdot 5+(2C+D)=(8+2+2)$ $\quad\Rightarrow\quad 10A+5B+2C+1D=12$

Das Auflösen des Gleichungssystems aus vier Gleichungen mit 4 Unbekannten sei an dieser Stelle aus Platzgründen dem Leser in Eigenarbeit überlassen. Die Werte der vier reellen Konstanten lauten: $A=1$, $B=0$, $C=0$, $D=2$ 4 P

Damit gilt für die gesamte Zerlegung des Polynombruchs in Partialbrüche:

$$\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}=\frac{x}{\left(x^2+1\right)}+\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Schritt 4: Die Integration

Es ist $I_4=\int\frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1}dx=\int\frac{x}{\left(x^2+1\right)}dx+\int\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

Das erste der beiden Teilintegrale löst man mit Hilfe der Substitution:

$$z:=x^2+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=2x \quad\Rightarrow\quad x\cdot dx=\tfrac{1}{2}dz \quad ,$$

2 P woraus folgt $\int \frac{x}{\left(x^2+1\right)} dx = \int \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(|z|\right) + C_1 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + C_2$

Das zweite der beiden Teilintegrale werden wir in Aufgabe 7.6.a lösen. Ein Vorgriff auf das

2 P Ergebnis sei an dieser Stelle bereits gestattet: $\int \frac{2}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) + C_3$

Damit sind alle Teile gesammelt, die wir brauchen, um das Endergebnis der Aufgabe zu präsentieren:

1 P $I_4 = \int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^2+1} dx = \int \frac{x}{\left(x^2+1\right)} dx + \int \frac{2}{\left(x^2+1\right)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x^2+1\right) + \frac{x}{1+x^2} + \arctan(x) + C_4$

(e.) Da ein unechter Polynombruch zu bearbeiten ist, muss der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision vorgeschaltet werden. Wir spalten auf diese Weise den unechten Polynombruch in einen polynomialen Anteil und einen echten Polynombruch:

3 P

$$\begin{array}{l} \left(x^3-3x^2+2x+7\right):\left(x^2-4x+3\right) = x+1+\dfrac{3x+4}{x^2-4x+3} \\ -\left(x^3-4x^2+3x\right) \\ \hline \qquad x^2-x+7 \\ \qquad -\left(x^2-4x+3\right) \\ \hline \qquad\qquad 3x+4 \end{array}$$

Für die zu lösende Aufgabe bedeutet dies:

$$I_5 = \int \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-4x+5} dx = \int (x+1) dx + \int \frac{3x+4}{x^2-4x+3} dx$$

Da der polynomiale Anteil ohne Schwierigkeiten zu integrieren ist, wenden wir uns dem übrig gebliebenen echten Polynombruch zu, den wir mit Partialbruchzerlegung bearbeiten:

Schritt 1: Nennernullstellen

Diese finden wir mit Hilfe der pq-Formel:

$$x^2-4x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad \text{und} \quad x_2 = 3$$

1 P Also gilt $x^2-4x+3 = (x-1)\cdot(x-3)$

Schritt 2: Ansatz für die Partialbrüche:

$$\frac{3x+4}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}$$

Begründung: Zwei reelle Nennernullstellen.

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler

Wir beginnen mit dem Zusammenfassen der Partialbrüche mittels Bruchrechnung

$$\frac{3x+4}{x^2-4x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A\cdot(x-3)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-3)}$$ 1 P

und setzen zwei willkürlich gewählte x-Werte ein, um die Konstanten zu bestimmen:

- $x=+1 \;\rightarrow\; 3+4=A\cdot(-2)+0 \quad\Rightarrow\quad A=-\frac{7}{2}$
- $x=+3 \;\rightarrow\; 9+4=0+B\cdot(3-1) \quad\Rightarrow\quad B=\frac{13}{2}$

2 P

Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet also: $\frac{3x+4}{x^2-4x+3}=\frac{-\frac{7}{2}}{x-1}+\frac{\frac{13}{2}}{x-3}$

Schritt 4: Die Integration läuft daher wie folgt:

$$I_5=\int(x+1)\,dx-\tfrac{7}{2}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\tfrac{13}{2}\int\frac{1}{x-3}\,dx=\int(x+1)\,dx-\tfrac{7}{2}\int\frac{1}{z}\,dz+\tfrac{13}{2}\int\frac{1}{t}\,dt$$
$$=\tfrac{1}{2}x^2+x-\tfrac{7}{2}\ln(|z|)+\tfrac{13}{2}\ln(|t|)+C_1=\tfrac{1}{2}x^2+x-\tfrac{7}{2}\ln(|x-1|)+\tfrac{13}{2}\ln(|x-3|)+C_2$$

mit Hilfe der beiden Substitutionen: $z:=x-1 \;\Rightarrow\; dz=dx$ 2 P

sowie : $t:=x-3 \;\Rightarrow\; dt=dx$

(f.) Wieder liegt ein unechter Polynombruch vor und wir müssen der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision vorschalten:

$$\begin{array}{l}
\;\;(x^3-3x^2+2x+7):(x^2-4x+5)=x+1+\dfrac{x+2}{x^2-4x+5}\\
-(x^3-4x^2+5x)\\
\hline
\qquad x^2-3x+7\\
\quad -(x^2-4x+5)\\
\hline
\qquad\qquad x+2
\end{array}$$ 3 P

Damit kann die Partialbruchzerlegung des echt gebrochenen Anteils beginnen.

Schritt 1: Nennernullstellen

Diese suchen wir mit Hilfe der pq-Formel: $x^2-4x+5=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=2\pm\sqrt{4-5}\notin\mathbb{R}$

Also liegen zwei komplexe Nennernullstellen vor, aber keine reelle. 1 P

Schritt 2: Ansatz für die Partialbrüche (es ist nur ein einziger Partialbruch):

$$\frac{x+2}{x^2-4x+5}=\frac{Ax+B}{x^2-4x+5}$$

Begründung: Dies ist der typische Ansatz für ein Paar komplexer Nullstellen, von denen jede nur einfach auftritt.

Schritt 3: Bestimmung der Konstanten für die Zähler

Natürlich könnte man jetzt das übliche Verfahren zur Bestimmung der Zähler-Konstanten anwenden, aber wenn man die beiden Seiten des Ansatzes betrachtet, sieht man auch ohne Berechnung, dass dies eine überflüssige Arbeit wäre. Dort steht nämlich $x+2=Ax+B$. Dies lässt sich nicht weiter vereinfachen, denn es taucht ein linearer Term in $x$ auf und eine Konstante. Deshalb kann man sofort erkennen: $A=1$ und $B=2$.

Dies sieht man auch dem Bruch selbst ohne lange Berechnung an:

1 P $$\frac{x+2}{x^2-4x+5}=\frac{x}{x^2-4x+5}+\frac{2}{x^2-4x+5}$$

Ein einziger Bruch im Ansatz lässt sich mit Partialbruchzerlegung nicht zerlegen.

**Allgemeine Merkregel:**

Hat man einen Bruch mit nur zwei Nennernullstellen, die beide komplex aber nicht reell sind, so lohnt eine Partialbruchzerlegung nicht.

Für unser Beispiel bedeutet dies: Das Integral $\int \frac{x+2}{x^2-4x+5}dx$ kann nur durch quadratische Ergänzung im Nenner gelöst werden. Da wir dieses Verfahren bereits geübt haben, können wir es jetzt ohne weitere Erläuterungen durchführen:

$$\int \frac{x+2}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{x+2}{\left(x^2-4x+4\right)+1}dx=\int \frac{x+2}{(x-2)^2+1}dx$$

Es folgt die Substitution $z:=x-2 \quad\Rightarrow\quad dz=dx$ und damit wird

3 P $$\int \frac{x+2}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{z+4}{z^2+1}dz=\int \frac{z}{z^2+1}dz+\int \frac{4}{z^2+1}dz$$

Das erste der beiden sich ergebenden Integrale lösen wir mit Hilfe der Substitution

$$t:=z^2+1 \quad\Rightarrow\quad \frac{dt}{dz}=2z \quad\Rightarrow\quad z\cdot dz=\tfrac{1}{2}dt$$

Das zweite der beiden sich ergebenden Integrale führt uns direkt zum Arcus Tangens. Man vergleiche hierzu die unter Aufgabe 7.4.d angegebenen Formeln.
Damit erhalten wir:

2 P $$\int \frac{x+2}{x^2-4x+5}dx=\int \frac{z+4}{z^2+1}dz=\int \frac{z}{z^2+1}dz+\int \frac{4}{z^2+1}dz=\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t}+\int \frac{4}{z^2+1}dz$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(|t|\right)+4\cdot\arctan(z)+C_1=\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(z^2+1\right)+4\cdot\arctan(z)+C_2$$
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left((x-2)^2+1\right)+4\cdot\arctan(x-2)+C_3$$

Nachdem nun der Polynombruch integriert ist, erinnern wir uns an die Polynomdivision und lösen das gesamte Integral der Aufgabenstellung:

2 P $$I_6=\int \frac{x^3-3x^2+2x+7}{x^2-4x+5}dx=\int (x+1)\,dx+\int \frac{x+2}{x^2-4x+5}dx$$
$$=\tfrac{1}{2}x^2+x+\tfrac{1}{2}\ln\left((x-2)^2+1\right)+4\cdot\arctan(x-2)+C_4$$

Das Entscheidende bei Aufgabenteil (f.) war also nicht die Partialbruchzerlegung, sondern die Polynomdivision. Dass in der Musterlösung trotzdem die Partialbruchzerlegung demonstriert wurde, dient dem Zweck, den Lesern zu zeigen, wann eine Partialbruchzerlegung lohnt und wann nicht. Dieses Wissen kann im Falle einer Klausur ggf. den nutzlosen Verlust wertvoller Bearbeitungszeit sparen.

## Aufgabe 7.6 Substitutionen mit Rechentrick

| | | | | Punkte | „+“: mehr P, falls kein Rückgriff auf andere Aufgabenteile. |
|---|---|---|---|---|---|
| (a.)<br>(b.) | 15 min (+)<br>12 min | (a.)<br>(b.) | | (a) 6P+ (b) 7 P | |
| (c.)<br>(d.) | 20 min<br>15 min | (c.)<br>(d.) | | (c) 11 P (d) 7 P | |
| (e.)<br>(f.)<br>(g.) | 8 min<br>10 min<br>8 min | (e.)<br>(f.)<br>(g.) | | (e) 4 P (f) 5 P | (g) 4 P |

Berechnen Sie die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $I_1 = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx$ ← Lösungstipp: Substituieren Sie $x =: \tan(z)$

(b.) $I_2 = \int \sqrt{1-4x^2}\, dx$ (c.) $I_3 = \int \sqrt{x^2+6x+10}\, dx$ (d.) $I_4 = \int \frac{3 \cdot e^{2x}}{e^{2x}-e^x-2} dx$

(e.) $I_5 = \int \sin\left(\sqrt{x}\right) dx$ (f.) $I_6 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+8}} dx$ (g.) $I_7 = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

## ▾ Lösung zu 7.6

Aufgabe 7.6. erfordert das Anwenden verschiedenster Lösungsverfahren mit dem Sinn, dass die Studierenden selbst erkennen und ausprobieren, welches Verfahren zum Ziel führt.

(a.) Für das Prinzip der Substitution ist es völlig egal, ob man $x =: \tan(z)$ substituiert, oder $z := \arctan(x)$. Das entscheidende ist nur, dass man eine alte Variable (hier $x$) durch eine neue (hier $z$) ausdrückt, und dass man einen Zusammenhang zwischen $dx$ und $dz$ herstellen kann. Letzteres muss nicht wie bei Aufgabe 7.3 durch Ableiten $\frac{dz}{dx}$ geschehen, ebenso gut kann man auch $\frac{dx}{dz}$ ableiten: $x =: \tan(z) \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\cos^2(z)} \Rightarrow dx = \frac{dz}{\cos^2(z)}$ 1 P

Damit lässt sich nun die Aufgabe lösen:

$$I_1 = \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} dx = \int \frac{1}{\left(1+\tan^2(z)\right)^2} \cdot \frac{dz}{\cos^2(x)} \underbrace{=}_{(**)} \int \left(\cos^2(z)\right)^2 \cdot \frac{dz}{\cos^2(x)} = \int \cos^2(z) \cdot dz$$ 1 P

An der Stelle (**) wurde ein Additionstheorem verwendet: $1+\tan^2(\alpha)=\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

Nebenrechnung:

(+ P) Zum Auflösen des $\int \cos^2(z)\cdot dz$ greifen wir der Einfachheit halber auf Aufgabe 7.3.d. zurück deren Ergebnis war: $\int \sin^2(z)\cdot dz = -\tfrac{1}{2}\sin(z)\cdot\cos(z)+\tfrac{1}{2}z+C_1$.

Damit folgt

2 P $$\int \cos^2(z)\cdot dz = \int 1dz - \int \sin^2(z)\cdot dz = z-\left(-\tfrac{1}{2}\sin(z)\cdot\cos(z)+\tfrac{1}{2}z\right)+C_2 = \tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\sin(z)\cdot\cos(z)+C_2$$

Zurück zur Hauptrechnung:

Setzt man das $\int \cos^2(z)\cdot dz$ in $I_4$ ein, so erhält man nach Resubstitution das Ergebnis:

2 P $$I_1 = \int \cos^2(z)\cdot dz = \tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\sin(z)\cdot\cos(z)+C_2 = \tfrac{1}{2}z+\tfrac{1}{2}\frac{\sin(z)}{\cos(z)}\cdot\cos^2(z)+C_2$$
$$=\tfrac{1}{2}\tan(z)\cdot\cos^2(z)+\tfrac{1}{2}z+C_2 = \tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{1+\tan^2(z)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_3 = \tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{1+x^2}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_4$$

Dabei ist $\tan(z)=x$ von der Vorgabe der Substitution her bekannt und $\cos^2(z)$ aus dem Additionstheorem (**).

(b.)

**Arbeitshinweis:**

Steht im Integranden eine Wurzel aus einem quadratischen Polynom, so kann man (ggf. nach vorgeschalteter quadratischer Ergänzung) mit einer der folgenden Substitutionen arbeiten (wobei a eine reelle Konstante ist).:

– falls im Integranden $\sqrt{a^2-x^2}$ steht $\Rightarrow$ Man substituiere.: $x =: a\cdot\sin(t)$

– falls im Integranden $\sqrt{x^2+a^2}$ steht $\Rightarrow$ Man substituiere.: $x =: a\cdot\sinh(t)$

– falls im Integranden $\sqrt{x^2-a^2}$ steht $\Rightarrow$ Man substituiere.: $x =: a\cdot\cosh(t)$

Dass der neu eingeführte Substitutionsparameter in impliziter Form gegeben ist, bereitet kein Problem.

Speziell für unsere Beispielaufgabe (b.) bedeutet dies die folgenden drei Arbeitsschritte:

1. Schritt → Man bringe den Integranden in eine der soeben genannten Formen.
2. Schritt → Man führe eine Substitution entsprechend der obigen Liste durch.
3. Schritt → Man löse das Integral auf und resubstituiere.

Diese drei Schritte führen wir nun am Beispiel unserer Aufgabe durch:

1. Schritt: $I_2 = \int \sqrt{1-4x^2}\, dx = \int 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\, dx$ , entsprechend der Form in der Liste. 1 P

2. Schritt: Die geeignete Substitution aus der Liste lautet: $x := \frac{1}{2} \cdot \sin(t) \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \cos(t)$ 1 P

3. Schritt: Beim Lösen des Integrals sieht man, warum diese Substitution zum Ziel führt.

$$I_2 = 2 \cdot \int \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}\, dx = 2 \cdot \int \sqrt{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2}\sin(t)\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\cos(t)\, dt = \int \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\, dt$$ 2 P

$$= \frac{1}{2} \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\, dt = \frac{1}{2} \int \cos(t) \cdot \cos(t)\, dt = \frac{1}{2} \int \cos^2(t)\, dt$$

Der entscheidende Punkt dabei war der: Durch die spezielle Wahl der Substitution ist im Integranden ein Ausdruck entstanden (in unserem Bsp. $\sqrt{1-\sin^2(t)}$ ), der aufgrund eines Additionstheorems sehr einfach auszudrücken ist (in unserem Bsp. $\cos(x)$ ).

**Allgemein sei angemerkt:**

Zu allen drei in der Liste des Arbeitshinweises genannten Substitutionen existiert je ein Additionstheorem, mit dem eine derartige Vereinfachung des Integranden möglich ist. Hierin liegt der tiefere Grund für die spezielle Wahl der doch zunächst überraschenden Substitution.

Der Rest der Lösungsfindung ist jetzt simpel. Wir greifen auf eine Nebenrechnung zurück, die bei Aufgabe 7.6.a. durchgeführt wurde, nämlich $\int \cos^2(t) \cdot dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin(t) \cdot \cos(t) + C_1$, setzen ein und resubstituieren gemäß $x := \frac{1}{2} \cdot \sin(t) \;\Rightarrow\; 2x = \sin(t) \;\Rightarrow\; t = \arcsin(2x)$ .:

$$I_2 = \frac{1}{2} \int \cos^2(t)\, dt = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4}\sin(t) \cdot \cos(t) + C_2 = \underbrace{\frac{1}{4}\arcsin(2x)}_{\text{von } \frac{1}{4}\text{t}} + \underbrace{\frac{1}{2}x}_{\text{von } \frac{1}{4}\sin(\text{t})} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\sin^2(t)}}_{\text{von } \cos(\text{t})} + C_3$$ 3 P

$$= \frac{1}{4}\arcsin(2x) + \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-4x^2} + C_4$$

(c.) Die Vorgehensweise ist im Prinzip die selbe wie bei Aufgabenteil (b.), allerdings muss der Integrand zuerst vorab mittels quadratischer Ergänzung in die dafür geeignete Form gebracht werden: $x^2 + 6x + 10 = \left(x^2 + 6x + 9\right) + 1 = (x+3)^2 + 1$

Wir substituieren also $z := x + 3 \;\Rightarrow\; dx = dz$ und erhalten so die gewünschte Form:

$$I_3 = \int \sqrt{x^2 + 6x + 10}\, dx = \int \sqrt{(x+3)^2 + 1}\, dx = \int \sqrt{z^2 + 1}\, dz$$ 2 P

Nach der Tabelle von Aufgabenteil (b.) substituieren wir $z =: \sinh(t) \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dt} = \cosh(t)$ und erhalten aufgrund des Additionstheorems $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \;\Rightarrow\; 1 + \sinh^2(t) = \cosh^2(t)$ den Ausdruck: 2 P

$$I_3 = \int \sqrt{z^2 + 1}\, dz = \int \sqrt{\sinh^2(t) + 1} \cdot \cosh(t)\, dt = \int \cosh(t) \cdot \cosh(t)\, dt = \int \cosh^2(t)\, dt$$ 2 P

Damit ist der Integrand in eine Form gebracht, die nun integriert werden kann. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier auf die explizite Darstellung des Rechenweges verzichtet, es sei aber erwähnt, dass die Rechenwege bei der Integration des $\sin^2(x)$, des $\cos^2(x)$ des $\sinh^2(x)$ und des $\cosh^2(x)$ in allen vier Fällen in analoger Form verlaufen. Man erinnere sich hierzu an Aufgabe 7.3.d. Die Lösung lautet: $\int \cosh^2(t)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + C_1$

Durch Resubstitution erhalten wir das Endergebnis unserer Beispielaufgabe:

5 P
$$I_3 = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh(t)\cdot\cosh(t) + C_1 = \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(z) + \tfrac{1}{2}z\cdot\sqrt{1+\sinh^2(t)} + C_2 = \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(z) + \tfrac{1}{2}z\cdot\sqrt{1+z^2} + C_3$$
$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(x+3) + \tfrac{1}{2}(x+3)\cdot\sqrt{1+(x+3)^2} + C_4 = \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(x+3) + \tfrac{1}{2}(x+3)\cdot\sqrt{x^2+6x+10} + C_4$$

(d.) Zunächst lassen wir mit einer Substitution die Exponentialfunktion verschwinden:

$$z := e^x \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx} = e^x = z \quad\Rightarrow\quad dx = \frac{1}{z}\cdot dz$$

2 P
Somit ergibt sich: $I_4 = \int \frac{3\cdot e^{2x}}{e^{2x}-e^x-2}dx = \int \frac{3\cdot z^2}{z^2-z-2}\frac{dz}{z} = \int \frac{3\cdot z}{z^2-z-2}dz$

Dies ist ein typischer Fall für eine Partialbruchzerlegung. Wir suchen die Nennernullstellen:

1 P
$$z^2-z-2=0 \;\Rightarrow\; z_{1/2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}+2} = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; z_1 = 2;\; z_2 = -1 \;\Rightarrow\; z^2-z-2 = (z-2)\cdot(z+1)$$

Damit lautet der Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

1 P
$$\frac{3\cdot z}{z^2-z-2} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1} = \frac{A\cdot(z+1)+B\cdot(z-2)}{(z-2)\cdot(z+1)}$$

Durch Einsetzen zweier Werte in den Zähler bestimmen wir $A$ und $B$:

1 P
- für $z=-1$ ist $3\cdot(-1) = A\cdot 0 + B\cdot(-3) \quad\Rightarrow\quad B=1$
- für $z=+2$ ist $3\cdot(+2) = A\cdot(2+1) + B\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad A=2$

Setzt man diese Partialbruchzerlegung in $I_3$ ein, so erhält man

1 P
$$I_4 = \int \frac{3\cdot z}{z^2-z-2}dz = \int \frac{2}{z-2}dz + \int \frac{1}{z+1}dz$$

Integration und Resubstitution liefert das Ergebnis:

1 P
$$I_4 = 2\cdot\ln(|z-2|) + \ln(|z+1|) + C_1 = 2\cdot\ln\left(\left|e^x-2\right|\right) + \ln\left(\left|e^x+1\right|\right) + C_2$$

(e.) Da die Wurzel im Argument des Sinus stört, substituieren wir:

$$z := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\cdot z^{-1} \quad\Rightarrow\quad dx = 2z\cdot dz$$

2 P
Somit lautet das Integral $I_5 = \int \sin\left(\sqrt{x}\right)dx = \int \sin(z)\cdot 2z\cdot dz$

$\wedge$

Das Integral wird nun durch partielle Integration gelöst und anschließend resubstituiert:

$$I_5 = \int \underbrace{\sin(z)}_{v'} \cdot \underbrace{2z}_{u} \cdot dz = \underbrace{-\cos(z)}_{v} \cdot \underbrace{2z}_{u} + C_1 - \int \underbrace{-\cos(z)}_{v} \cdot \underbrace{2}_{u'} \cdot dz = -2z \cdot \cos(z) + C_1 + 2\int \cos(z)\,dz$$ 2 P

$$= -2z \cdot \cos(z) + 2\sin(z) + C_2 = -2\sqrt{x} \cdot \cos\left(\sqrt{x}\right) + 2\sin\left(\sqrt{x}\right) + C_3$$

(f.) Wir bringen den Nenner durch quadratische Ergänzung in eine geeignete Form.

$$x^2 - 4x + 8 = \left(x^2 - 4x + 4\right) + 4 = (x-2)^2 + 4 = 4 \cdot \left(\tfrac{x}{2} - 1\right)^2 + 4 = 4 \cdot \left[\left(\tfrac{x}{2} - 1\right)^2 + 1\right]$$ 1 P

Anmerkung: Als Ergebnis der quadratischen Ergänzung und der zugehörigen Substitutionen wollen wir eine der Formen erhalten, die in der Liste von Aufgabe 7.4.d aufgezählt wurden. Dazu könnte man natürlich (wie in Aufgabe 7.4. gezeigt) zuerst die quadratische Ergänzung ausführen und dann substituieren. Anschließend würde man dann den konstanten Faktor 4 ausklammern und erneut substituieren.

Um den Arbeitsaufwand zu optimieren, kann man aber auch (wie hier durchgeführt) die quadratische Ergänzung und das Ausklammern des konstanten Faktors in einem Schritt erledigen. Dann genügt eine einzige Substitution, die beides enthält, nämlich

$$z := \tfrac{x}{2} - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = 2 \cdot dz$$ 1 P

Dies führt zu der folgenden Auflösung des Integrals

$$I_6 = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 8}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \left(z^2 + 1\right)}} \cdot 2\,dz = \operatorname{arsinh}(z) + C_1 = \operatorname{arsinh}\left(\tfrac{x}{2} - 1\right) + C_2 \quad ,$$

wobei die Formel $\int \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\,du = \operatorname{arsinh}(u) + C$ aus Aufgabe 7.4.d verwendet wurde. 3 P

(g.) Dieses Integral besteht aus zwei Summanden, die wir einzeln gut integrieren können:

$$I_7 = \int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ 1 P

Der erste der beiden Summanden wird integriert mit Hilfe der Substitution

$$z := 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -2x \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx = -\tfrac{1}{2}\,dz$$ 1 P

Der zweite der beiden Summanden findet sich in der Tabelle von Aufgabe 7.4.d, und zwar gemäß $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(u) + C$

Damit erhalten wir:

$$I_7 = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{2}\,dz}{\sqrt{z}} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\tfrac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$ 2 P

$$= -\tfrac{1}{2} \cdot 2z^{+\frac{1}{2}} + \arcsin(x) + C_1 = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) + C_2$$

## Aufgabe 7.7 Demonstrationsbeispiel Integrationskonstante

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | | Punkte | | |
| | (b.) | 8 min | | | | |
| | (c.) | 5 min | | (a.) 6 P | (b.) 4 P | (c.) 3 P |

Berechnen Sie auf zweierlei Wege das Integral $I_1 = \int \frac{1+x^3}{\left(1+x^2\right)^2}dx$ , und zwar

(a.) nach Partialbruchzerlegung gemäß dem Ansatz $\frac{1+x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{\left(1+x^2\right)^2}$

(b.) Durch Aufteilen in zwei Summanden $\frac{1+x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} + \frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2}$ , wobei der erstgenannte bereits aus Aufgabe 7.6.a bekannt ist, und der zweite partiell integriert werden soll mit $u:=x^2$ und $v':=\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$ .

(c.) Man vergleiche die beiden Ergebnisse der Aufgabenteile (a.) und (b.) und erkläre deren Unterschiede.

## Lösung zu 7.7

(a.) Die Partialbruchzerlegung lautet

1 P

$$\frac{1+x^3}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{(Ax+B)\cdot\left(1+x^2\right)+(Cx+D)}{\left(1+x^2\right).\left(1+x^2\right)}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $A$, $B$, $C$ und $D$ setzen wir vier willkürlich gewählte x-Werte in den Nenner ein, und erhalten:

4 P

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet\ x=0 & \Rightarrow\ B+D=1 \\ \bullet\ x=1 & \Rightarrow\ (A+B)\cdot 2+C+D=2 \\ \bullet\ x=-1 & \Rightarrow\ (-A+B)\cdot 2-C+D=0 \\ \bullet\ x=2 & \Rightarrow\ (2A+B)\cdot 5+(2C+D)=9 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Auflösen nach den vier Unbekannten liefert: $A=1;\quad B=0;\quad C=-1;\quad D=1$

Setzen wir diese Koeffizienten in die Partialbruchzerlegung und in das Integral ein, so erhalten wir:

$$I_1 = \int \frac{1+x^3}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx + \int \frac{-x+1}{\left(1+x^2\right)^2}dx = \int \frac{x}{1+x^2}dx - \int \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx + \int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx$$

Den letzten der drei sich ergebenden Summanden kennen wir bereits aus Aufgabe 7.6.a; die ersten beiden Summanden lösen wir mit Hilfe der Substitution:

$$z:=1+x^2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dx}=2x \quad\Rightarrow\quad x\cdot dx=\tfrac{1}{2}dz \;.$$

Damit erhalten wir:

$$I_1=\int\frac{1}{z}\cdot\tfrac{1}{2}dz-\int\frac{1}{z^2}\cdot\tfrac{1}{2}dz+\tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{1+x^2}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_1$$

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left(|z|\right)+\tfrac{1}{2}z^{-1}+\tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{1+x^2}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_2$$ 2 P

$$=\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\frac{x}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_3=\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{x+1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_3$$

Dies war der zu Aufgabenteil (a.) vorgeschlagene Rechenweg, nun folgt die Alternativlösung:

(b.) Das Aufteilen in zwei Summanden war in der Aufgabenstellung vorgeschlagen worden, es folgt die partielle Integration:

$$I_1=\int\frac{1+x^3}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\int\frac{x^3}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\underbrace{\int\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}dx}_{\text{Lösung lt. Aufg.7.6.a}}+\int\underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{\frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}}_{v'}dx$$ 2 P

$$=\tfrac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_4+\underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{\frac{-1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}}_{v}-\int\underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{-1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}}_{v}dx$$

Das letzte noch übrig gebliebene Integral wird wieder gelöst mit der Substitution

$z:=1+x^2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{dz}{dx}=2x \quad\Rightarrow\quad x\cdot dx=\tfrac{1}{2}dz$ , was zu dem Ergebnis führt:

$$I_1=\frac{x}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_4-\frac{x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\int\frac{1}{z}\cdot\tfrac{1}{2}dz=\frac{x-x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+\tfrac{1}{2}\ln\left(|z|\right)+C_5$$ 2 P

Resubstitution liefert das Endergebnis: $I_1=\dfrac{x-x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C_6$ 2 P

(c.) Vergleicht man nun die beiden Ergebnisse nach den Aufgabenteilen (a.) und (b.), so findet man in den Logarithmus- und in den Arcus Tangens- Ausdrücken eine absolute Übereinstimmung – aber die Brüche sind unterschiedlich. Heißt dies etwa, dass die beiden Ergebnisse unterschiedlich sind?

Antwort: Nein – die Ergebnisse sind nicht unterschiedlich. Die nachfolgende kurze Rechnung wird dies zeigen.

Betrachten wir dazu vorab eine kleine Nebenrechnung:

$$\underbrace{\frac{x-x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}}_{\substack{\text{Bruch nach Ergeb-}\\ \text{nis (b.)aus Partial-}\\ \text{brucherzerlegung}}}=\frac{x+(1-1)-x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}=\frac{x+1-1-x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}=\frac{x+1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}-\frac{1+x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}=\underbrace{\frac{x+1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}}_{\substack{\text{Bruch nach}\\ \text{Ergebnis (a.)}\\ \text{aus partieller}\\ \text{Integration}}}-\frac{1}{2} \qquad (**)$$ 1 P

Nun setzen wir die beiden Lösungen aus (a.) und (b.) gleich und überprüfen das Ergebnis:

1 P $$\underbrace{\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{x+1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+C_3}_{\text{Lösung aus Aufgabenteil (a.)}}=\underbrace{\frac{x-x^2}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+\tfrac{1}{2}\arctan(x)+\tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C_6}_{\text{Lösung aus Aufgabenteil (b.)}}$$

Da sich die Logarithmus- und Arcus Tangens-Terme miteinander aufheben, führt das Einsetzen der Nebenrechnung (**) zur Gleichung:

1 P $$\frac{x+1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}+C_3=\frac{x+1}{2\cdot\left(1+x^2\right)}-\frac{1}{2}+C_6 \quad\Rightarrow\quad C_3=C_6-\frac{1}{2}$$

Der ganze Unterschied zwischen den beiden Lösungen liegt also darin, dass sich die Integrationskonstanten $C_3$ und $C_6$ um die additive Konstante $-\frac{1}{2}$ unterscheiden. Da Integrationskonstanten ohnehin frei wählbar sind, sind die beiden Lösungen also doch identisch.

## Aufgabe 7.8 Integration abschnittweise gegebener Funktionen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | Punkte 5 P |

Gegeben sei eine Funktion $f(x)=\begin{cases}2x & \text{für } x\in[0;2]\\ 8-2x & \text{für } x\in[2;4]\end{cases}$

Skizzieren Sie den Graphen dieser Funktion, berechnen Sie deren Stammfunktion und skizzieren Sie den Graphen der Stammfunktion.

## Lösung zu 7.8

Der Graph der Funktion ist in Bild 7-8a skizziert

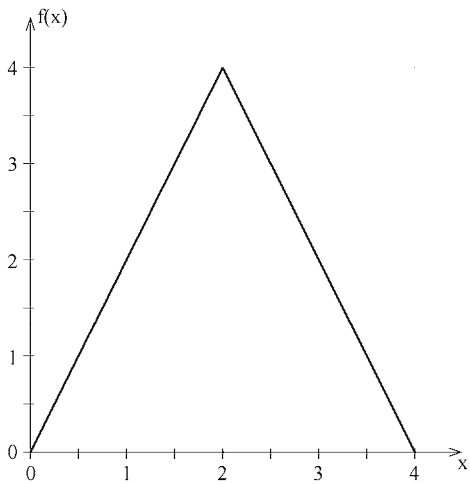



**Bild 7-8a**
Funktionsgraph zu Aufgabe 7.8.a
Die Funktion lautet

$$f(x)=\begin{cases}2x & \text{für } x\in[0;2]\\ 8-2x & \text{für } x\in[2;4]\end{cases}$$

Integrieren wir die beiden Teile von $f(x)$ einzeln, so erhalten wir die Teil-Stammfunktionen:

$$F(x)=\begin{cases} x^2+C_1 & \text{für } x\in[0;2] \\ 8x-x^2+C_2 & \text{für } x\in[2;4] \end{cases}$$ 1 P

Allerdings muss man beachten, dass die Stammfunktion stetig ist!
Begründung: Mit stetig wachsendem Argument $x$ nimmt auch der Flächeninhalt unter der Kurve stetig zu.
Aus diesem Grunde muss am Übergang zwischen den beiden Teilen der Stammfunktion die Gleichheit der Funktionswerte gelten:
$x^2+C_1=8x-x^2+C_2$ an der Stelle $x=2$ .
Setzt man das $x=2$ ein, so findet man den Zusammenhang zwischen $C_1$ und $C_2$:

$$2^2+C_1=8\cdot 2-2^2+C_2 \quad\Rightarrow\quad 4+C_1=12+C_2 \quad\Rightarrow\quad C_1=C_2+8$$ 3 P

Setzt man dies in die Stammfunktion ein, so erhält man das Endergebnis:

$$F(x)=\begin{cases} x^2+C_2+8 & \text{für } x\in[0;2] \\ 8x-x^2+C_2 & \text{für } x\in[2;4] \end{cases}$$ 1 P

**Anmerkung:**

Bei einmaliger Integration entsteht immer genau eine Integrationskonstante – nicht mehr und nicht weniger.

Von der Stetigkeit der Stammfunktion überzeugt Bild 7-8b.

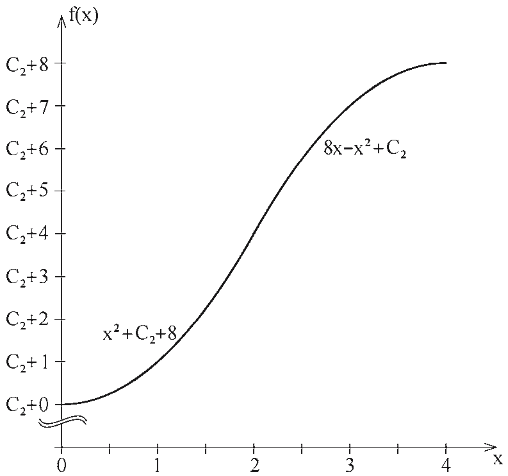



**Bild 7-8b**
Skizze der Stammfunktion zu Aufgabe 7.8.b
Diese lautet

$$F(x)=\begin{cases} x^2+C_2+8 & \text{für } x\in[0;2] \\ 8x-x^2+C_2 & \text{für } x\in[2;4] \end{cases}$$

**Arbeitshinweis:**

Bei Funktionen, deren Definitionen mehrere Fallunterscheidungen enthalten, sind an allen Fallgrenzen die Stetigkeiten der Übergänge herzustellen.

## Aufgabe 7.9 Bestimmte Integrale mit Substitution

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a) 4 min<br>(b) 4 min | | Punkte<br>(a) 2 P (b) 2 P |

Gegeben sei das bestimmte Integral: $\int_{1/2}^{1} e^{3x+5}\, dx$

Zum Lösen dieses Integrals wählt man das Verfahren der Substitution. Berechnen Sie die Lösung auf zwei verschiedene Arten, nämlich

(a.) In einem ersten Arbeitsschritt lösen Sie das unbestimmte Integral, indem Sie substituieren, lösen und dann resubstituieren. Danach folgt in einem zweiten Arbeitsschritt das Einsetzen der Grenzen.

(b.) Als alternativen Lösungsweg kann man auch beide Arbeitsschritte in einem Arbeitsgang ausführen: Substituieren, und dabei die Grenzen mitsubstituieren, dann lösen und die mitsubstituierten Grenzen einsetzen.

## Lösung zu 7.9

Das Einsetzen von Integralgrenzen zur Berechnung bestimmter Integrale bereitet normalerweise keine Probleme. Lediglich bei der Substitution gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, die Grenzen einzusetzen. Der Vergleich dieser beiden Möglichkeiten ist der Sinn dieser Übungsaufgabe.

(a.) Substitution: $z := 3x+5 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} dz$

Bestimmen der Stammfunktion: $\int e^{3x+5}\, dx = \int e^{z} \cdot \frac{1}{3} dz = \frac{1}{3} e^{z} + C_1 = \frac{1}{3} e^{3x+5} + C_2$

2 P Einsetzen der Grenzen: $\int_{1/2}^{1} e^{3x+5}\, dx = \left[\frac{1}{3} e^{3x+5}\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{3} e^{8} - \frac{1}{3} e^{\frac{13}{2}} \overset{TR}{\approx} 771.94$

(b.) Substitution wie gehabt: $z := 3x+5 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 3 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3} dz$

Mitsubstituieren der Grenzen: $z\left(\frac{1}{2}\right) := 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = \frac{13}{2}$ und $z(1) := 3 \cdot 1 + 5 = 8$

2 P Integrieren: $\int_{1/2}^{1} e^{3x+5}\, dx = \int_{z(1/2)}^{z(1)} e^{z} \cdot \frac{1}{3} dz = \left[\frac{1}{3} e^{z}\right]_{\frac{13}{2}}^{8} = \frac{1}{3} e^{8} - \frac{1}{3} e^{\frac{13}{2}} \overset{TR}{\approx} 771.94$

Selbstverständlich müssen die beiden Wege zum selben Ergebnis führen. Deshalb darf man frei wählen, für welchen Weg man sich entscheidet.

# Aufgabe 7.10 Uneigentliche Integrale

| | | Punkte |
|---|---|---|
| (a…e.) je 3 min | | je 2 P |

Berechnen Sie die nachfolgenden uneigentlichen Integrale:

(a.) $I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$ (b.) $I_2 = \int\limits_{-\infty}^2 e^x\,dx$ (c.) $I_3 = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$

(d.) $I_4 = \int\limits_{-\infty}^\infty x\,dx$ (e.) $I_5 = \int\limits_c^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ (mit konstantem "c")

## Lösung zu 7.10

**Arbeitshinweis:**

Zunächst sind diejenigen Stellen, die Unendlichkeiten in sich bergen, die also das Integral zum uneigentlichen Integral machen, zu markieren. Dies geschieht, indem man die entsprechenden Grenzwerte (Limes) angibt (siehe Arbeitsschritt 1). Danach wird das Integral gelöst (siehe Arbeitsschritt 2) und die Grenzen eingesetzt (siehe Arbeitsschritt 3). Ergibt sich dabei ein endlicher Grenzwert, so bezeichnet man das uneigentliche Integral als konvergent und gibt den Grenzwert an. Ist der Grenzwert unendlich, so bezeichnet man das uneigentliche Integral als divergent.

Beziehen wir diesen Arbeitshinweis auf unsere Aufgabe, so erhalten wir:

(a.) $I_1 = \int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \underbrace{\lim_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\lambda e^{-x}\,dx}_{\text{Arbeitsschritt 1}} = \underbrace{\lim_{\lambda\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^\lambda}_{\text{Arbeitsschritt 2}} = \underbrace{\lim_{\lambda\to\infty} -e^{-\lambda}+e^0}_{\text{Arbeitsschritt 3}} = -0+1 = 1$ (konvergent) 2 P

(b.) $I_2 = \int\limits_{-\infty}^2 e^x\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\int\limits_\lambda^2 e^x\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\left[e^x\right]_\lambda^2 = e^2 - \lim_{\lambda\to-\infty} e^\lambda = e^2 - 0 = e^2$ (konvergent) 2 P

(c.)

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\int\limits_\lambda^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^\lambda \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to-\infty}\left[\arctan(x)\right]_\lambda^0 + \lim_{\lambda\to+\infty}\left[\arctan(x)\right]_0^\lambda$$ 2 P

$$= \arctan(0) - \lim_{\lambda\to-\infty}\arctan(\lambda) + \lim_{\lambda\to+\infty}\arctan(\lambda) - \arctan(0) = \tfrac{\pi}{2} - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right) = \pi$$

**Stolperfalle:**

Hat ein uneigentliches Integral mehrere Unendlichkeitsstellen, so ist es unbedingt in lauter Teilstücke zu zerlegen, von denen jedes nur eine einzige Unendlichkeitsstelle hat. Würde man diese Zerlegung nicht vornehmen, so liefe man Gefahr, ein falsches Ergebnis zu erzielen.

Anmerkung: An welcher Stelle wir das Zerlegen des Integrals vornehmen, ist egal, solange die Funktion und deren Stammfunktion dort definiert sind und endliche Werte annehmen. Im vorliegenden Bsp. haben wir diese Zerlegung willkürlich bei $x=0$ vorgenommen. Wie man sieht, hebt sich die Stammfunktion an der Stelle $x=0$ ohnehin mit sich selbst auf (es ist $\arctan(0)-\arctan(0)=0$).

2 P (d.) $I_4=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,dx=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\int\limits_{\lambda}^{0} x\,dx+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{0}^{\lambda} x\,dx=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{\lambda}^{0}+\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{0}^{\lambda}=(0-\infty)+(\infty-0)=\infty$

Dieses uneigentliche Integral ist divergent.

Hier sieht man, wie wichtig es ist, wirklich jede Unendlichkeit einzeln für sich zu betrachten und dabei zu bedenken, dass sich „unendlich“ eben nicht einfach mit sich selbst wegheben kann. Die Wahrheit ist nämlich die folgende:

Zerlegt man ein uneigentliches Integral in lauter einzelne Teilstücke mit je maximal einer einzigen Unendlichkeit, dann ist das gesamte uneigentliche Integral divergent, sobald mindestens ein einziges der Teilstücke divergiert.

Dies ist im Beispiel des vorliegenden Aufgabenteils (d.) der Fall. Speziell hier erkennt man dies auch anschaulich: Die Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion $f(x)=x$ wird eben nicht Null, wenn man sie von $-\infty$ bis $+\infty$ betrachtet. Vielmehr liegt unterhalb der x-Achse ein unendlich großes Flächenstück und oberhalb der x-Achse ebenfalls.

2 P (e.) $I_5=\int\limits_{c}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_{c}^{\lambda} x^{-2}\,dx=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_{c}^{\lambda}=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)-\left(-\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{c}$

Dies ist ein konvergentes uneigentliches Integral, dessen Grenzwert durch die untere Grenze bestimmt wird. Es findet in der Technik und in der Physik eine Anwendung.

## Aufgabe 7.11 Spezielle bestimmte Integrale

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…d.) je 3 min | | Punkte<br>(a…d.) je 2 P |
| | (e.) je 10 min | | (e.) 6 P |

Berechnen Sie die nachfolgenden uneigentlichen Integrale:

(a.) $I_1=\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{x}\,dx$ (b.) $I_2=\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{x^2}\,dx$ (c.) $I_3=\int\limits_{0}^{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

(d.) $I_4=\int\limits_{-4}^{3}\frac{1}{x^2}\,dx$ (e.) $I_5=\int\limits_{2}^{4}\frac{1}{\sqrt[4]{(x-3)^2}}\,dx$

## Lösung zu 7.11

**Stolperfalle:**

Uneigentliche Integrale liegen auch dann vor, wenn der Integrand Definitionslücken in dem zu integrierenden Intervall enthält. Hier bestehen die beiden folgenden Möglichkeiten:

- Die Unendlichkeitsstellen können an den Integrationsgrenzen liegen. In diesem Falle bemerkt man sie zumeist und erkennt so das Integral als uneigentliches.
- Die Unendlichkeitsstellen können aber auch inmitten des Integrationsintervalls liegen. In solchen Fällen wird das Integral nur dann als uneigentliches erkannt, wenn man bewusst die Funktion im Verlauf des Integrationsintervalls betrachtet. Dies sollte man bei bestimmten Integralen immer tun, um nicht Unendlichkeitsstellen zu übersehen und dadurch ein falsches Ergebnis zu erhalten.

(a.) $I_1 = \int_0^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \int_\lambda^2 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \left[\ln(x)\right]_\lambda^2 = \ln(2) - (-\infty) = \infty$ (divergentes uneigentliches Integral) 2 P

Hier liegt die Unendlichkeitsstelle an der unteren Integrationsgrenze und wird dort mit einem Limes markiert. Die Integration erfolgt dann wie üblich. Nach Einsetzen des Limes erkennt man dann, ob das Integral konvergiert oder divergiert.

(b.)

$I_2 = \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \int_\lambda^2 x^{-2}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \left[-x^{-1}\right]_\lambda^2 = -\frac{1}{2} + \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda} = \infty$ (divergentes uneigentliches Integral) 2 P

Die Divergenz sollte nach den obigen Erläuterungen verständlich sein.

(c.) $I_3 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \int_\lambda^2 x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\lambda^2 = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{0} = \sqrt{8}$ 2 P

Hier liegt ein konvergentes uneigentliches Integral vor, dessen Limes wir berechnet haben.

(d.)

$I_4 = \int_{-4}^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \int_{-4}^\lambda \frac{1}{x^2}\,dx + \lim_{\lambda\to 0} \int_\lambda^3 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-4}^\lambda + \lim_{\lambda\to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_\lambda^3 = \left(-\infty - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \infty\right) = \infty$ 2 P

**Stolperfalle:**

Wie oben erwähnt, muss man hier erkennen, dass der Integrand im Verlauf des zu integrierenden Intervalls eine Unendlichkeit durchläuft. Da man beim Ausrechnen uneigentlicher Integrale stets eine Zerlegung des Integrationsintervalls vornehmen **muss**, derart dass jedes Teilstück nur maximal eine einzige Unendlichkeitsstelle hat, bekommt man mehrere uneigentliche Integrale.

Die Stelle $x=0$ für die Zerlegung ist nicht frei wählbar, denn die Unendlichkeitsstellen müssen unbedingt an den Integralgrenzen auftauchen, damit später beim Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion auch tatsächlich die Konvergenz untersucht wird.

Ergebnis: Das hier zu untersuchende uneigentliche Integral **divergiert** also.

(e.) Dies ist ein Beispiel für ein uneigentliches Integral mit einer Unendlichkeitsstelle im Inneren des Integrationsintervalls – aber dieses Integral konvergiert, wie wir sehen werden.

Beginnen wir die Berechnung dieses uneigentlichen Integrals:

Da die Unendlichkeitsstelle bei $x=3$ liegt (dort wird der Nenner zu Null), müssen wir genau dort die Aufteilung des Integrationsintervalls vornehmen:

$$I_5 = \int_2^4 \frac{1}{\sqrt[4]{(x-3)^2}}\,dx = \underbrace{\lim_{\lambda\to 3}\int_2^\lambda \frac{1}{\sqrt[4]{(x-3)^2}}\,dx}_{\text{1. Teilintegral}} + \underbrace{\lim_{\lambda\to 3}\int_\lambda^4 \frac{1}{\sqrt[4]{(x-3)^2}}\,dx}_{\text{2. Teilintegral}}$$

Zum Auffinden der Stammfunktion müssen wir den Integranden vereinfachen. Dazu soll das Quadrat im Nenner gegen die vierte Wurzel verrechnet werden. Will man aber nur eine einfache Wurzel daraus machen, so muss man das Vorzeichen des Radikanden berücksichtigen. Dies geht wie folgt:

- Im 1. Teilintegral ist $2 \le x < 3 \quad\Rightarrow\quad (x-3)<0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt[4]{(x-3)^2} = \sqrt{3-x}$ (Radikand positiv)

3 P
- Im 2. Teilintegral ist $3 < x \le 4 \quad\Rightarrow\quad (x-3)>0 \quad\Rightarrow\quad \sqrt[4]{(x-3)^2} = \sqrt{x-3}$ (Radikand positiv)

In $I_5$ eingesetzt erhalten wir:

$$I_5 = \underbrace{\lim_{\lambda\to 3}\int_2^\lambda \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx}_{\text{1. Teilintegral}} + \underbrace{\lim_{\lambda\to 3}\int_\lambda^4 \frac{1}{\sqrt{x-3}}\,dx}_{\text{2. Teilintegral}} = \underbrace{\lim_{\lambda\to 3}\int_2^\lambda (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx}_{\text{1. Teilintegral}} + \underbrace{\lim_{\lambda\to 3}\int_\lambda^4 (x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx}_{\text{2. Teilintegral}}$$

Die beiden Teilintegrale mit je einer einzelnen Unendlichkeit integrieren wir getrennt:

- 1. Teilintegral → Substitution $u := 3-x \quad\Rightarrow\quad dx = -du$

Aufsuchen der Stammfunktion: $\int (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int -u^{-\frac{1}{2}}du = -2\sqrt{u}+C_1 = -2\sqrt{(3-x)}+C_2$

1 P
Einsetzen der Integralgrenzen: $\lim_{\lambda\to 3}\int_2^\lambda (3-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\lambda\to 3}\left[-2\sqrt{3-x}\right]_2^\lambda = -2\cdot\sqrt{0}+2\cdot\sqrt{1} = 2$

- 2. Teilintegral → Substitution $u := x-3 \quad\Rightarrow\quad dx = du$

Aufsuchen der Stammfunktion: $\int (x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int u^{-\frac{1}{2}}du = 2\sqrt{u}+C_3 = 2\sqrt{(x-3)}+C_4$

1 P
Einsetzen der Integralgrenzen: $\lim_{\lambda\to 3}\int_\lambda^4 (x-3)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{\lambda\to 3}\left[2\sqrt{x-3}\right]_\lambda^4 = 2\cdot\sqrt{1}+2\cdot\sqrt{0} = 2$

Da beide Teilintegrale konvergieren, konvergiert auch das gesamte uneigentliche Integral. Als Ergebnis erhalten wir die Summe der beiden Teilintegrale:

$$I_5 = \underbrace{\lim_{\lambda \to 3} \int_2^{\lambda} (3-x)^{-\frac{1}{2}}\, dx}_{\text{1. Teilintegral}} + \underbrace{\lim_{\lambda \to 3} \int_{\lambda}^{4} (x-3)^{-\frac{1}{2}}\, dx}_{\text{2. Teilintegral}} = 2+2=4$$ 1 P

## Aufgabe 7.12 Linearer-, quadratischer- und Betragsmittelwert

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | | Punkte |
| | (b.) | 6 min | | (a.) 5 P (b.) 3 P |

In den Bildern 7-12a und 7-12b sind zwei Funktionen gegeben, zu denen Sie bitte die drei folgenden Mittelwerte berechnen: den linearen, den quadratischen, den Betragsmittelwert.

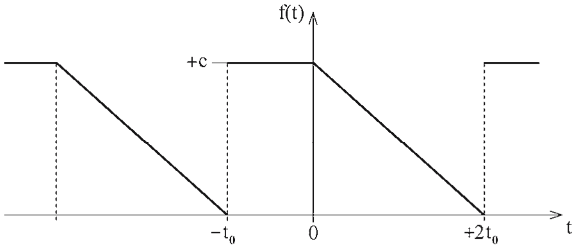



**Bild 7-12a**
Darstellung einer periodischen Funktion, deren Mittelwerte berechnet werden sollen.

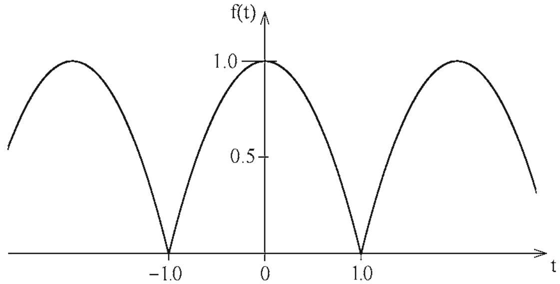



**Bild 7-12b**
Darstellung einer periodischen Funktion, deren Mittelwerte berechnet werden sollen.

Die Funktion innerhalb einer Periode lautet

$f(t) = 1 - t^2$ für $t \in [-1;+1]$

## Lösung zu 7.12

**Arbeitshinweis: Die Definitionen der drei gefragten Mittelwerte lauten:**

• Der lineare Mittelwert: $\overline{y} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b y(t)\, dt$ • Der Betragsmittelwert: $\overline{|y|} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b |y(t)|\, dt$

• Der quadratische Mittelwert: $\overline{y^2} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b (y(t))^2\, dt}$

Integriert wird über eine Periode eines periodischen Signals, wobei „a“ den Anfang einer Periode angibt und „$b$“ deren Ende.

In diese Definitionen setzen wir nun die in der Aufgabenstellung gegebenen Funktionen ein:

1 P (a.) Nach Bild 7-12a ist $f_a(t)=\begin{cases}+c & \textit{für } t=-t_0\,...0 \\ c-\frac{c}{2t_0}\cdot t & \textit{für } t=0...+2t_0\end{cases}$

So ergeben sich die Mittelwerte:

• Der lineare: $\overline{y}=\dfrac{1}{+2t_0-(-t_0)}\cdot\left(\int\limits_{-t_0}^{0}c\cdot dt+\int\limits_{0}^{2t_0}\left(c-\frac{c}{2t_0}\cdot t\right)dt\right)=\dfrac{1}{3t_0}\cdot\left([ct]_{-t_0}^{0}+\left[ct-\frac{c}{4t_0}\cdot t^2\right]_0^{2t_0}\right)$

1 P $$=\frac{1}{3t_0}\cdot\left([ct_0]+\left[2ct_0-\frac{c}{4t_0}\cdot(2t_0)^2\right]\right)=\frac{2}{3}c$$

• Betragsmittelwert: Da im gesamten Verlauf der Funktion $y(t)>0$ ist, ist der Betragsmittel-

1 P wert mit dem linearen identisch: $\overline{|y|}=\dfrac{2}{3}c$

• Der quadratische: $\overline{y^2}=\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b(y(t))^2}=\sqrt{\dfrac{1}{+2t_0-(-t_0)}\cdot\left(\int\limits_{-t_0}^{0}c^2\cdot dt+\int\limits_0^{2t_0}\left(c-\frac{c}{2t_0}\cdot t\right)^2dt\right)}$

$$=\sqrt{\frac{1}{+3t_0}\cdot\left(\int\limits_{-t_0}^{0}c^2\cdot dt+\int\limits_0^{2t_0}\left(c^2-\frac{c^2}{t_0}\cdot t+\frac{c^2}{4t_0^2}\cdot t^2\right)dt\right)}=\sqrt{\frac{1}{+3t_0}\cdot\left(\left[c^2t\right]_{-t_0}^{0}+\left[c^2t-\frac{c^2}{2t_0}\cdot t^2+\frac{c^2}{12t_0^2}\cdot t^3\right]_0^{2t_0}\right)}$$

2 P $$=\sqrt{\frac{1}{+3t_0}\cdot\left(c^2t_0+\frac{2}{3}c^2t_0\right)}=\sqrt{\frac{5}{9}}\cdot c$$

(b.) Nach Bild 7-12b ist $f_b(t)=1-t^2$ für eine Periode von $t=-1...+1$

Dafür ergeben sich die Mittelwerte:

1 P • Der lineare: $\overline{y}=\dfrac{1}{2}\cdot\int\limits_{-1}^{+1}\left(1-t^2\right)\cdot dt=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\left[t-\frac{1}{3}\cdot t^3\right]_{-1}^{+1}\right)=\dfrac{1}{2}\cdot\left(\left[1-\frac{1}{3}\right]-\left[-1+\frac{1}{3}\right]\right)=\frac{2}{3}$

1 P • Der Betragsmittelwert ist wegen $y>0$ auch hier identisch mit linearen $\overline{|y|}=\dfrac{2}{3}$

• Der quadratische Mittelwert:

1 P $$\overline{y^2}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\int\limits_{-1}^{+1}\left(1-t^2\right)^2dt}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left(\int\limits_{-1}^{+1}\left(t^4-2t^2+1\right)\cdot dt\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3+t\right]_{-1}^{+1}}=\sqrt{\frac{8}{15}}$$

Anmerkung: In allen Fällen genügt die Integration über genau eine Periode, da alle weiteren Perioden nichts weiter bewirken würden, als die Reproduktion des selben Ergebnisses.

## Aufgabe 7.13 Flächenberechnung mittels Integralrechnung

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| (a.) | 12 min | | |
| (b.) | 12 min | | |
| (c.) | 10 min | | (a.) 6 P (b.) 7 P (c.) 5 P |

Die nachfolgend genannten Funktionen schneiden die x-Achse mehrmals, sodass die Kurven gemeinsam mit der x-Achse geschlossene Flächen definieren. Berechnen Sie die Flächeninhalte dieser geschlossenen Flächen.

(a.) $f_1(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ (b.) $f_2(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 5}$ (c.) $f_3(x) = -\dfrac{x^4}{8} + 2x^2$

## Lösung zu 7.13

Die in der Aufgabestellung beschriebenen geschlossenen Flächen werden begrenzt durch die Schnittpunkte der Funktionsgraphen mit der x-Achse, dies sind die Nullstellen der Funktionen. Damit zeichnet sich der Lösungsweg ab: Man bestimme die Nullstellen der Funktionen und berechne die Beträge der Integrale zwischen den Nullstellen. Als Hilfe hierzu kann man eine grobe Handskizze des Funktionsgraphen anfertigen, damit man auf einen Blick sieht, was man eigentlich ausrechnen soll.

(a.) Hier handelt es sich um ein Polynom dritten Grades, sodass man eine Nullstelle durch Probieren herausfinden muss. Setzt man $x_1 = 1$ ein, so findet man $f_1(1) = 0$ .

Zum Auffinden der anderen beiden Nullstellen spaltet man mittels Polynomdivision ein quadratisches Polynom ab, sodass man mit Hilfe der pq-Formel die anderen beiden Nullstellen finden kann:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right) : \left(x - 1\right) = x^2 - 2x - 3 \\
-\left(x^3 - x^2\right) \\
\hline
\quad -2x^2 - x \\
\quad -\left(-2x^2 + 2x\right) \\
\hline
\qquad -3x + 3 \\
\qquad -\left(-3x + 3\right) \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Wir suchen also die Nullstellen: $x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1+3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3; \quad x_3 = -1$ 1 P

**Arbeitshinweis:**

Veranschaulichen lassen sich Aufgabenstellungen der Flächenberechnungen mittels Integration sehr schnell und effektiv anhand von Funktionsgraphen. Hierzu wird man sicherlich aus Zeitgründen keine gesamte Kurvendiskussion durchführen (insbesondere nicht während einer Prüfung) – viel sinnvoller ist es, einige wenige Funktionswerte zwischen und neben den

Nullstellen zu berechnen, und damit eine grobe Skizze der Funktion zu erstellen. Auf diese Weise sieht man rasch, wie sich die Kurve in etwa verhält – das genügt für die Zwecke der Anschauung zur Flächenberechnung.

Im Beispiel unserer Aufgabe sieht man den Funktionsgraphen in Bild 7-13a.

3 P

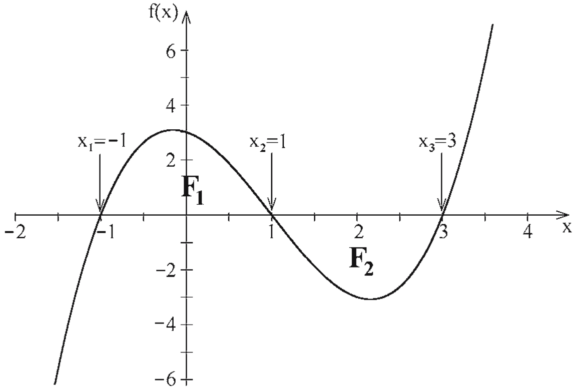



**Bild 7-13a**
Graph der Funktion zu Aufgabe 7.13.a
Diese lautet

$$f_1(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

Die zu berechnende Fläche ist gepunktet.

**Stolperfalle:**

Um die gepunktete Fläche zu berechnen, genügt es **nicht**, einfach die Integrale zwischen den Nullstellen zu berechnen und deren Werte zusammenzuzählen. Der Grund liegt in der Tatsache, dass die Integration Flächen oberhalb der x-Achse mit positivem Vorzeichen angibt, Flächen unterhalb der x-Achse hingegen mit negativem Vorzeichen. Aus diesem Grunde berechnet man alle auftretenden Flächenabschnitte einzeln und addiert danach deren Beträge.

In diesem Sinn berechnen wir hier die beiden Flächen $F_1$ und $F_2$ getrennt und addieren erst zuletzt deren Flächeninhalte:

$$F_1 = \int_{-1}^{+1}\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{+1} = \left(\tfrac{1}{4} - 1 - \tfrac{1}{2} + 3\right) - \left(\tfrac{1}{4} + 1 - \tfrac{1}{2} - 3\right) = 4$$

2 P

$$F_2 = \int_{+1}^{+3}\left(x^3 - 3x^2 - x + 3\right)dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4 - x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{+1}^{+3} = \left(\tfrac{1}{4}\cdot 81 - 27 - \tfrac{1}{2}\cdot 9 + 3\cdot 3\right) - \left(\tfrac{1}{4} - 1 - \tfrac{1}{2} + 3\right) = -4$$

Die gefragte Gesamtfläche lautet somit: $F_{ges} = |F_1| + |F_2| = 4 + 4 = 8$

(b.) Die Nullstellen der Funktion sind sehr einfach zu finden als Nullstellen des Zählers:

1 P $x^2 - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm 2$ (Sie treten nicht als Nullstellen des Nenners auf.)

Eine Skizze des Funktionsgraphen findet man in Bild 7-13b.

Da die gesuchte Fläche oberhalb der x-Achse liegt und ohne Unterbrechungen durch die beiden Nullstellen begrenzt wird, ist der Ansatz für das Integral zur Berechnung des Flächeninhaltes einfach:

$$F = \int_{-2}^{+2}\left(\frac{x^2-4}{x-5}\right)dx$$

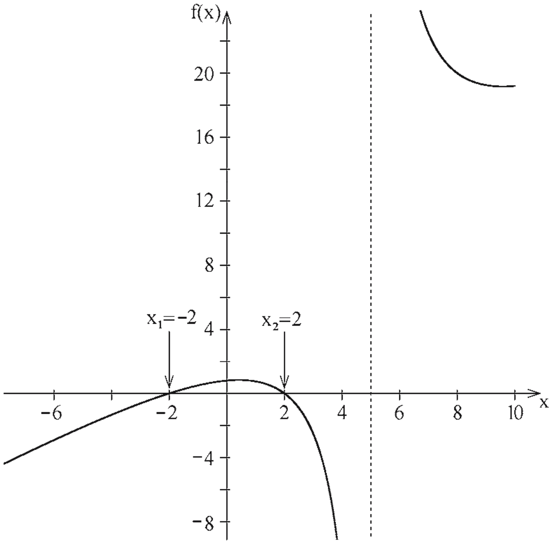



**Bild 7-13b** 3 P
Graph der Funktion zu Aufgabe 7.13.b
Diese lautet

$$f_2(x) = \frac{x^2-4}{x-5}$$

Die zu berechnende Fläche ist gepunktet.

Da wir die Stammfunktion der Funktion $f_2(x)$ nicht sofort sehen können, gehen wir in zwei Schritten vor: 1. Schritt → Bestimmung der Stammfunktion
2. Schritt → Einsetzen der Grenzen in die Stammfunktion

Schritt 1: Wir substituieren $u := x-5 \quad \Rightarrow \quad dx = du$ und erhalten die Stammfunktion:

$$\int \frac{x^2-4}{x-5}dx = \int \frac{(u+5)^2-4}{u}du = \int \frac{u^2+10u+25-4}{u}du = \int \frac{u^2+10u+21}{u}du$$

$$= \int \frac{u^2}{u}du + \int \frac{10u}{u}du + \int \frac{21}{u}du = \int u\,du + \int 10\,du + \int \frac{21}{u}du = \tfrac{1}{2}u^2 + 10u + 21\cdot\ln\left(|u|\right) + C_1$$ 2 P

$$= \tfrac{1}{2}(x-5)^2 + 10\cdot(x-5) + 21\cdot\ln\left(|(x-5)|\right) + C_2 = \tfrac{1}{2}x^2 + 5x - \tfrac{75}{2} + 21\cdot\ln\left(|(x-5)|\right) + C_2$$

Schritt 2: Wir setzen die Grenzen in die Stammfunktion ein und erhalten den Flächeninhalt:

$$F = \int_{-2}^{+2}\left(\tfrac{x^2-4}{x-5}\right)dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + 5x - \tfrac{75}{2} + 21\cdot\ln\left(|(x-5)|\right)\right]_{-2}^{+2}$$ 1 P

$$= \left(\tfrac{1}{2}\cdot 4 + 5\cdot 2 - \tfrac{75}{2} + 21\cdot\ln\left(|(2-5)|\right)\right) - \left(\tfrac{1}{2}\cdot 4 + 5\cdot(-2) - \tfrac{75}{2} + 21\cdot\ln\left(|(-2-5)|\right)\right)$$

$$= 20 + 21\cdot\left(\ln(3) - \ln(7)\right) = 20 + 21\cdot\ln\left(\tfrac{3}{7}\right) \overset{TR}{\approx} 2.2067$$

Anmerkung: Alternativer Lösungsweg.
Mancher Leser mag die Schritte 1 und 2 gemeinsam in einem Arbeitsgang ausführen und dabei die Grenzen mitsubstituieren. Mathematisch ist das nicht prinzipiell anders als der oben gezeigte Weg – und wer den Überblick dabei nicht verliert, kann das problemlos tun.

Damit all diejenigen, die diesen Weg bevorzugen, ihre Lösung wiederfinden, sei der entsprechende Rechenweg nachfolgend als Alternative zum oben gezeigten Weg skizziert:

Will man beide Rechenschritte in einem Arbeitsgang erledigen, so muss man natürlich gleich von Anfang an mit dem bestimmten Integral beginnen, also die Integrationsgrenzen angeben.

Die Substitution der Variablen: $u := x-5 \quad \Rightarrow \quad dx = du$

Mitsubstituieren der Grenzen: $x_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad u_1 := x_1 - 5 = -7$

$x_2 = +2 \quad \Rightarrow \quad u_2 := x_2 - 5 = -3$

Die Integration:

$$F = \int_{-2}^{+2} \frac{x^2-4}{x-5}\,dx = \int_{-7}^{-3} \frac{(u+5)^2-4}{u}\,du = \underbrace{\ldots\ldots}_{\text{integrieren siehe oben}} = \int_{-7}^{-3} u\,du + \int_{-7}^{-3} 10\,du + \int_{-7}^{-3} \frac{21}{u}\,du$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}u^2 + 10u + 21\cdot\ln(|u|)\right]_{-7}^{-3} = \left(\tfrac{9}{2} - 30 + 21\cdot\ln(3)\right) - \left(\tfrac{49}{2} - 70 + 21\cdot\ln(7)\right) = 20 + 21\cdot\ln(3) - 21\cdot\ln(7)$$

$$= 20 + 21\cdot\ln\left(\tfrac{3}{7}\right) \overset{TR}{\approx} 2.2067$$

(Das Ergebnis ist natürlich identisch mit dem obigen.)

(c.) Die Nullstellen findet man nach Ausklammern von $x^2$:

$$-\frac{x^4}{8} + 2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\tfrac{1}{8}x^2 + 2\right)\cdot x^2 = 0$$

Also liegt eine doppelte Nullstelle vor bei $x_1 = 0$ .

1 P Die anderen beiden Nullstellen liegen bei $-\frac{1}{8}x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \pm 4$

Eine Skizze des Funktionsgraphen zeigt Bild 7-13c

3 P

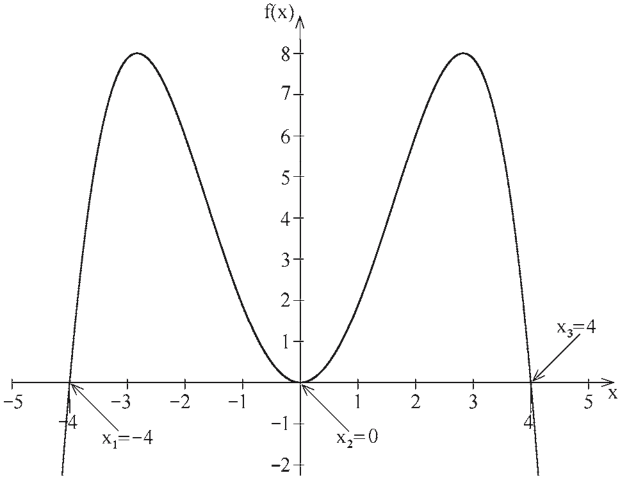



**Bild 7-13c**
Graph der Funktion zu Aufgabe 7.13.c
Diese lautet

$$f_3(x) = -\frac{x^4}{8} + 2x^2$$

Die zu berechnende Fläche ist gepunktet.

Da die gesamte Fläche oberhalb der x-Achse liegt, darf in einem einzigen Arbeitsschritt integriert werden:

1 P $$F = \int_{-4}^{+4} -\frac{x^4}{8} + 2x^2\,dx = \left[-\tfrac{1}{40}x^5 + \tfrac{2}{3}x^3\right]_{-4}^{+4} = \left(-\tfrac{1024}{40} + \tfrac{128}{3}\right) - \left(+\tfrac{1024}{40} - \tfrac{128}{3}\right) = \tfrac{-3072+5120-3072+5120}{120} = \tfrac{512}{15}$$

## Aufgabe 7.14 Numerische Integration: Simpson-Verfahren

| | | | | | Punkte | Hier wird ein programmierbarer Taschenrechner vorausgesetzt. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 20 min | (a.) | | (a.) 12 P | |
| | (b.) | 20 min | (b.) | | (b) 12 P | |

Näherungsweise numerische Integration: Nachfolgend sind zwei bestimmte Integrale gegeben, deren Werte bitte Sie mit dem Simpson-Verfahren bestimmen (auch als Kepler'sche Faßregel bekannt.)

Dazu teilen Sie das Intervall, über welches integriert werden soll, in 20 äquidistante Streifen ein und berechnen die 21 Funktionswerte an den Streifengrenzen. Darauf basierend berechnen Sie den Näherungswert des Integrals zweimal, nämlich einmal für 10 Streifen und einmal für 20 Streifen. Aus dem Vergleich der beiden so erhaltenen Näherungswerte führen Sie eine Restgliedabschätzung durch und formulieren das Ergebnis.

(a.) $F_a = \int_1^2 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$  (b.) $F_b = \int_1^2 x^x\,dx$

## Lösung zu 7.14

(a.) $F_a = \int_1^2 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$

Gemäß Aufgabenstellung teilen wir das zu integrierende Intervall in 10 bzw. 20 Streifen mit 11 bzw. 21 Grenzen ein und erhalten die dortigen Funktionswerte entsprechend Tabelle 7.14.a.

**Tabelle 7.14.a** Funktionswerte an den Grenzen äquidistanter Streifen des Integrationsintervalls

| Grenze-Nummer: $i$ für n = 10 Streifen | Grenze-Nummer: $i$ für n = 20 Streifen | $x_i$ | $f(x_i) = {}^{1-e^{-x_i}}\!/\!_{x_i}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.00 | 0.632120558829 |
| | 1 | 1.05 | 0.619106905608 |
| 1 | 2 | 1.10 | 0.606480833002 |
| | 3 | 1.15 | 0.594228896192 |
| 2 | 4 | 1.20 | 0.582338156740 |
| | 5 | 1.25 | 0.570796162512 |
| 3 | 6 | 1.30 | 0.559590928435 |
| | 7 | 1.35 | 0.548710918040 |
| 4 | 8 | 1.40 | 0.538145025756 |
| | 9 | 1.45 | 0.527882559935 |
| 5 | 10 | 1.50 | 0.517913226568 |
| | 11 | 1.55 | 0.508227113660 |
| 6 | 12 | 1.60 | 0.498814676253 |
| | 13 | 1.65 | 0. 489666722048 |
| 7 | 14 | 1.70 | 0.480774397616 |
| | 15 | 1.75 | 0.472129175171 |
| 8 | 16 | 1.80 | 0.463722839877 |
| | 17 | 1.85 | 0.455547477668 |
| 9 | 18 | 1.90 | 0.447595463567 |
| | 19 | 1.95 | 0.439859450468 |
| 10 | 20 | 2.00 | 0.432332358382 |

5 P

Die erste Näherung basierend auf 10 Streifen (siehe Nummerierung in der äußerst linken Kolumne von Tab.7.14.a) ergibt:

2 P
$$F_{10} = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 2\cdot\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}\right) + 4\cdot\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}\right)\right] \quad \text{(mit n=10)}$$
$$= \frac{h}{3}\cdot\left[\left(y_0 + y_{10}\right) + 2\cdot\left(y_2 + y_4 + y_6 + y_8\right) + 4\cdot\left(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9\right)\right] = 0.522663790374$$

Darin ist ganz allgemein „$h$“ die Breite der einzelnen Streifen, also

$$h = \frac{\text{Integralobergrenze - Integraluntergrenze}}{\text{Anzahl der Streifen } n}\ .$$

Im speziellen Fall unseres Beispieles zur Berechnung von $F_{10}$ bedeutet die $h = \frac{1-0}{10} = 0.1$

Die zweite Näherung basierend auf 20 Streifen (siehe Nummerierung in der zweiten Kolumne von links) ergibt (mit $h = \frac{1-0}{20} = 0.05$):

2 P
$$F_{20} = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[\left(y_0 + y_{2n}\right) + 2\cdot\left(y_2 + y_4 + ... + y_{2n-2}\right) + 4\cdot\left(y_1 + y_3 + ... + y_{2n-1}\right)\right] \quad \text{(mit n=20)}$$
$$= \frac{h}{3}\cdot\left[\left(y_0 + y_{20}\right) + 2\cdot\left(y_2 + y_4 + ... + y_{18}\right) + 4\cdot\left(y_1 + y_3 + y_5 + ... + y_{19}\right)\right] = 0.522663758968$$

Die Restgliedabschätzung aus dem Vergleich der beiden Näherungen ergibt:

2 P
$$R_{2n} \approx \tfrac{1}{15}\cdot\left(F_n - F_{2n}\right) = \tfrac{1}{15}\cdot\left(F_{10} - F_{20}\right) \overset{TR}{\approx} \tfrac{1}{15}\cdot 3.14\cdot 10^{-8} \overset{TR}{\approx} 2.1\cdot 10^{-9} \qquad \text{(mit 2n = 20)}$$

Dies ist der typische Weg der Restgliedabschätzung, für den Fall, dass man die Iteration für zwei Aufteilungen des zu integrierenden Intervalls kennt, deren Feinheit (Anzahl von Streifen) sich genau um einen Faktor 2 unterschiedet.

1 P Das Ergebnis lautet also $F_1 = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \approx 0.5226637590(\pm 21)$

Anmerkung zur Schreibweise: In der Literatur existiert eine ganze Reihe verschiedener Schreibweisen zur Angabe von Messungenauigkeiten bzw. Rechenungenauigkeiten nebeneinander. Eine davon (die hier verwendete) benennt das mit einer Unsicherheit behaftete Ergebnis und gibt in Klammern dahinter die Unsicherheit der letzten Stellen an. (Das Zeichen „$\pm$“ in der Klammer wird oftmals auch weggelassen.) In unserem Fall bedeutet dies, dass die „90“ am Ende des Ergebnisses eine Unsicherheit von „$\pm 21$“ trägt.

**Zur Beachtung:**

Bei Angaben, die Unsicherheiten enthalten (dazu zählen auch die Ergebnisse von Näherungsrechnungen), müssen neben der Angabe des eigentlichen Wertes auch **immer** die Unsicherheiten mit angegeben werden. Ansonsten wäre die Benennung des Wertes nutzlos, denn man wüsste nicht, in wie weit man ihm trauen könnte.

Anmerkung: Die Anzahl der im Ergebnis anzugebenden Stellen hängt vom Ausmaß der Unsicherheit ab. Von der Unsicherheit werden immer nur ein bis zwei Stellen angegeben. Der kleinste in der Unsicherheit angegebene Stellenwert ist dann auch der kleinste bei Näherungswert oder Messwert anzugebende Stellenwert.

(b.) $F_2 = \int_1^2 x^x \, dx$

Die Aufteilung des zu integrierenden Intervalls in 10 bzw. 20 Streifen mit 11 bzw. 21 Grenzen führt uns zu Tabelle 7.14.b .

**Tabelle 7.14.b** Funktionswerte an den Grenzen äquidistanter Streifen des Integrationsintervalls

| Grenze-Nummer: $i$ für n = 10 Streifen | Grenze-Nummer: $i$ für n = 20 Streifen | $x_i$ | $f(x_i) = x_i^{x_i}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.00 | 1.000000000000 |
| | 1 | 1.05 | 1.052564610541 |
| 1 | 2 | 1.10 | 1.110534241055 |
| | 3 | 1.15 | 1.174363423709 |
| 2 | 4 | 1.20 | 1.244564747204 |
| | 5 | 1.25 | 1.321714079301 |
| 3 | 6 | 1.30 | 1.406456673238 |
| | 7 | 1.35 | 1.499514216229 |
| 4 | 8 | 1.40 | 1.601692898202 |
| | 9 | 1.45 | 1.713892598386 |
| 5 | 10 | 1.50 | 1.837117307087 |
| | 11 | 1.55 | 1.972486920801 |
| 6 | 12 | 1.60 | 2.121250571098 |
| | 13 | 1.65 | 2.284801672229 |
| 7 | 14 | 1.70 | 2.464694899485 |
| | 15 | 1.75 | 2.662665340663 |
| 8 | 16 | 1.80 | 2.880650097068 |
| | 17 | 1.85 | 3.120812648961 |
| 9 | 18 | 1.90 | 3.385570343918 |
| | 19 | 1.95 | 3.677625416028 |
| 10 | 20 | 2.00 | 4.000000000000 |

5 P

Die erste Näherung mit 10 Streifen, basierend auf der Nummerierung in der äußerst linken Kolumne von Tab.7.14.a ergibt:

$$F_{10} = \int_0^1 x^x \, dx \approx \frac{h}{3} \cdot \left[ \left( y_0 + y_{2n} \right) + 2 \cdot \left( y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2} \right) + 4 \cdot \left( y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1} \right) \right] \qquad \text{(mit n=10)}$$

2 P

$$= \frac{h}{3} \cdot \left[ \left( y_0 + y_{10} \right) + 2 \cdot \left( y_2 + y_2 + y_6 + y_8 \right) + 4 \cdot \left( y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 \right) \right] = 2.050460349542$$

Die zweite Näherung mit 20 Streifen, basierend auf der Nummerierung der zweiten Kolumne von links ergibt:

$$F_{20} = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx \approx \frac{h}{3}\cdot\left[\left(y_0+y_{2n}\right)+2\cdot\left(y_2+y_4+...+y_{2n-2}\right)+4\cdot\left(y_1+y_3+...+y_{2n-1}\right)\right] \quad \text{(mit n=20)}$$

2 P

$$=\frac{h}{3}\cdot\left[\left(y_0+y_{20}\right)+2\cdot\left(y_2+y_4+...+y_{18}\right)+4\cdot\left(y_1+y_3+y_5+...+y_{19}\right)\right]=2.050447121068$$

Die Restgliedabschätzung aus dem Vergleich der beiden Näherungen ergibt:

2 P $R_{2n} \approx \frac{1}{15}\cdot\left(F_n - F_{2n}\right) \overset{TR}{\approx} \frac{1}{15}\cdot\left(-1.3228\cdot 10^{-5}\right) \overset{TR}{\approx} 8.82\cdot 10^{-7}$ (mit 2n = 20)

1 P Das Ergebnis lautet also $F_2 = \int_1^2 x^x\,dx \approx 2.05044712(\pm 88)$

**Allgemeine Anmerkung:**

Es gibt einige Integrale, die sich nicht analytisch integrieren lassen, d.h. zu deren Integranden man keine Stammfunktion angeben kann. Für Funktionen wie z.B. $f(x)=e^{-x^2}$ oder $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ oder $f(x)=\frac{1}{\ln(x)}$ wurde mathematisch nachgewiesen, dass innerhalb unseres Funktionsbegriffes keine Stammfunktionen angegeben werden können. Das hat letztlich seine Ursache in der Begriffsbildung der Funktion.

Für solche Funktionen, die nicht analytisch integriert werden können, ist die numerische Integration einer der möglichen Wege zur Berechnung bestimmter Integrale. Einen anderen möglichen Weg kennt man z.B. im Zusammenhang mit der Behandlung von Taylor-Reihen (siehe Kapitel 11).

## Aufgabe 7.15 Schnittflächen zwischen Funktionen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | 15 min | | Punkte | |
| (b,c.) | 10 min | | (a) 7 P | (b,c.) 5 P |

Bei jeder der folgenden Teilaufgaben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ gegeben, deren Schnittflächen berechnet werden sollen:

(a.) $f(x)=x\cdot e^{x^2}$ und $g(x)=4x$

(b.) $f(x)=4a-\frac{x^2}{a}$ und $g(x)=\frac{3}{a}\cdot(x-2a)^2$ (wobei $a$ eine positive reelle Konstante sei)

(c.) $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$ Gesucht ist die Schnittfläche zwischen zwei aufeinander folgenden Schnittpunkten.

## Lösung zu 7.15

Die Funktionsgraphen begrenzen die Flächen als Kurven. Deren Schnittpunkte bestimmen die Integrationsgrenzen. Man berechnet sie an den Stellen, an denen $f(x)=g(x)$ ist.

(a.) Bestimmung der Schnittpunkte: Wir setzen $x \cdot e^{x^2} = 4x$

Ein Schnittpunkt liegt bei $x_1 = 0$, denn dann lautet die Gleichung $0=0$

Andere Schnittpunkte bei $x \neq 0$ findet man, indem man die Gleichung durch $x$ kürzt:

$x \cdot e^{x^2} = 4x \quad \Rightarrow \quad e^{x^2} = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \ln(4) \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\sqrt{\ln(4)}$ und $x_3 = +\sqrt{\ln(4)}$ 1 P

Eine Skizze der zu berechnenden Schnittfläche zeigt Bild 7-15a.

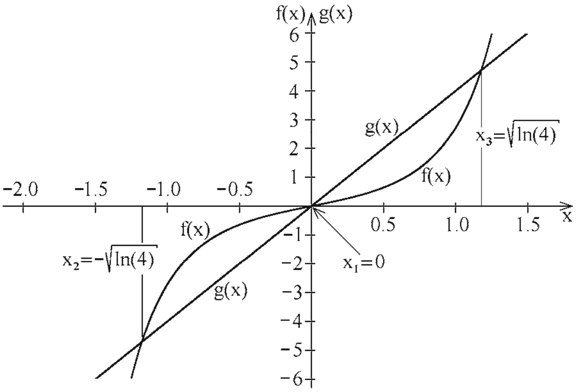



**Bild 7-15a**

Graphen der Funktionen $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ und $g(x) = 4x$ 2 P

Die zu berechnende Schnittfläche ist grau unterlegt.

Bei der Aufstellung der Integrale muss man beachten, ob die zu berechnenden Flächen oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen. Damit ergibt sich die Fläche gemäß

$$F = \underbrace{-\int_{x_2}^{x_1} g(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx}_{\text{Anteil unterhalb der x-Achse}} + \underbrace{\int_{x_1}^{x_3} g(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_3} f(x)\,dx}_{\text{Anteil oberhalb der x-Achse}}$$ 1 P

Als Nebenrechnung (Einschub) wollen wir die Stammfunktion zu $f(x)$ suchen. Dies geschieht mittels Substitution: $z := x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx = \frac{1}{2} dz$

Somit lautet die Stammfunktion $\int x \cdot e^{x^2}\,dx = \int e^z \cdot \frac{1}{2} dz = \frac{1}{2} e^z + C_1 = \frac{1}{2} e^{x^2} + C_2$ 1 P

Damit ist jetzt die Flächenberechnung möglich:

$$F = -\int_{x_2}^{0} 4x \cdot dx + \int_{x_2}^{0} x \cdot e^{x^2}\,dx + \int_{0}^{x_3} 4x \cdot dx - \int_{0}^{x_3} x \cdot e^{x^2}\,dx$$

$$= -\left[2x^2\right]_{-\sqrt{\ln(4)}}^{0} + \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_{-\sqrt{\ln(4)}}^{0} + \left[2x^2\right]_{0}^{+\sqrt{\ln(4)}} - \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_{0}^{+\sqrt{\ln(4)}}$$ 2 P

$$= -\left[0 - 2 \cdot \ln(4)\right] + \left[\tfrac{1}{2} \cdot e^0 - \tfrac{1}{2} \cdot e^{\ln(4)}\right] + \left[2 \cdot \ln(4) - 0\right] - \left[\tfrac{1}{2} \cdot e^{\ln(4)} - \tfrac{1}{2} \cdot e^0\right] = -3 + 4 \cdot \ln(4)$$

(b.) Bestimmung der Schnittpunkte: Wir setzen $4a-\frac{x^2}{a}=\frac{3}{a}\cdot(x-2a)^2$ und lösen nach $x$ auf:

$$\Rightarrow \quad 4a^2-x^2=3\cdot\left(x^2-4ax+4a^2\right) \qquad \Rightarrow \qquad x^2-3ax+2a^2=0$$

1 P Mit der pq-Formel folgt: $x_{1/2}=\frac{3}{2}a\pm\sqrt{\frac{9}{4}a^2-\frac{8}{4}a^2}=\frac{3}{2}a\pm\frac{1}{2}a \quad\Rightarrow\quad x_1=a$ und $x_2=2a$

Eine Skizze der zu berechnenden Schnittfläche zeigt Bild 7-15b

2 P

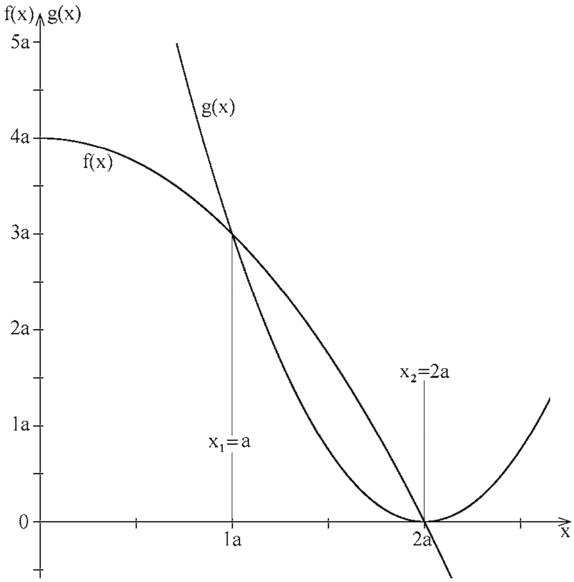



**Bild 7-15b**

Graphen der Funktionen $f(x)=4a-\frac{x^2}{a}$

und

$g(x)=\frac{3}{a}\cdot(x-2a)^2$

Die zu berechnende Schnittfläche ist grau unterlegt..

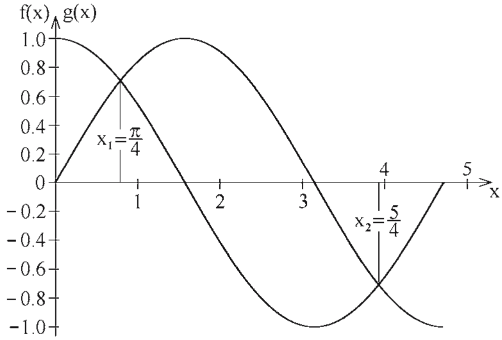
Da die gesamte zu berechnende Fläche oberhalb der x-Achse liegt, ist das Aufstellen der Integrale einfach, ebenso das Lösen:

2 P

$$F=\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx-\int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{a}^{2a} 4a-\frac{x^2}{a}-\frac{3}{a}\cdot(x-2a)^2\,dx$$

$$=\left[4ax-\frac{x^3}{3a}-\frac{1}{a}\cdot(x-2a)^3\right]_a^{2a}=\left[8a^2-\frac{8a^3}{3a}-\frac{1}{a}\cdot(2a-2a)^3\right]-\left[4a^2-\frac{a^3}{3a}-\frac{1}{a}\cdot(a-2a)^3\right]=\frac{2}{3}a^2$$

(c.) Die Graphen von Sinus und Cosinus sind allgemein bekannt (siehe Bild 7-15c).




2 P

**Bild 7-15c**
Graphen der Funktionen $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\cos(x)$
Die gesuchte Schnittfläche ist grau unterlegt.

Die Lage zweier aufeinander folgender Schnittpunkte bestimmen wir wie folgt:

$$\sin(x)=\cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(x)}{\cos(x)}=1 \quad \Rightarrow \quad \tan(x)=1$$

Wegen $\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$ und wegen der π-Periodizität des Tangens, gibt es unendlich viele Schnittstellen, die bei $x_k=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$ (mit $k\in\mathbb{Z}$) liegen. Zwei benachbarte Schnittstellen innerhalb der ersten Periode des Sinus und Cosinus liegen also bei $x_1=\frac{\pi}{4}$ und $x_2=\frac{5\pi}{4}$. 1 P

Damit ergibt sich die zu integrierende Fläche:

$$F = \underbrace{\underbrace{\int_{x_1}^{\pi}\sin(x)\,dx - \int_{x_1}^{\pi/2}\cos(x)\,dx}_{\text{Flächenanteil oberhalb der x-Achse}} \underbrace{- \int_{\pi/2}^{x_2}\cos(x)\,dx + \int_{\pi}^{x_2}\sin(x)\,dx}_{\text{Flächenanteil unterhalb der x-Achse}}}_{\text{Flächen oberhalb der x-Achse werden positiv gezählt. Flächen unterhalb der x-Achse sind aus der Integration negativ und bekommen deshalb ein Minus hinzugefügt.}} = \underbrace{\int_{x_1}^{x_2}\sin(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2}\cos(x)\,dx}_{\text{Zusammenfassen der Integrale erleichtert den Rechenaufwand.}}$$ 2 P

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(\sin(x)-\cos(x)\right)dx = \left[-\cos(x)-\sin(x)\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} = -\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)-\left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)+\sqrt{\tfrac{1}{2}}+\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 4\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{8}$$

Anmerkung: Aus Symmetriegründen hätte es auch genügt, die Fläche oberhalb der x-Achse zu berechnen und daraus durch Multiplikation mit zwei die Gesamtfläche zu bestimmen.

## Aufgabe 7.16 Integration in Parameterdarstellung

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a.) | 15 min | Punkte | |
| (b.) | 12 min | (a.) 7 P | (b.) 7 P |

Gegeben seien zwei Kurven in Parameterdarstellung (also durch $x(t)$ und $y(t)$). Fertigen Sie von den Kurven jeweils einfache Handskizzen im xy-Diagramm derart, dass die Verläufe der Kurven prinzipiell erkennbar werden.

Die Kurve von Aufgabenteil (a.) bildet mit der x-Achse eine geschlossene Fläche, die Kurve von Aufgabenteil (b.) mit der y-Achse. Berechnen Sie bitte die beiden so beschriebenen Flächeninhalte. Die beiden Kurven lauten:

(a.) $x(t) = \sin(t)$ und $y(t) = -t^2 + 4t + 5$ und werde betrachtet für den Bereich $t = -1 ... +5$

(b.) $x(t) = -t^2 + 4t + 5$ und $y(t) = e^{-t}$ und werde betrachtet für den Bereich $t = -1 ... +5$

## Lösung zu 7.16

(a.) Die gesuchte Parameterdarstellung zeigt Bild 7-16a

3 P

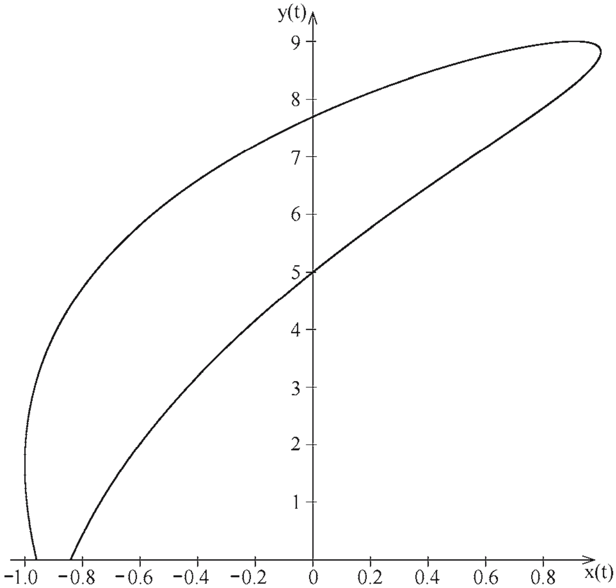



**Bild 7-16a**
Graph zu einer Funktion in Parameterdarstellung:
$x(t) = \sin(t)$
$y(t) = -t^2 + 4t + 5$
für $t = -1 ... +5$

Wenn die Fläche gesucht wird, die die Kurve mit der x-Achse einschließt, so müssen wir die beiden Nullstellen der Funktion $y(t)$ kennen. Diese finden wir mit der pq-Formel:

1 P $y(t) = -t^2 + 4t + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 4t - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -1 \quad \text{und} \quad t_2 = +5$

Dies umfasst den nach der Aufgabenstellung vorgegebenen Bereich. Über das Intervall $[t_1; t_2]$ müssen wir also integrieren.

Die Flächenintegration in Parameterdarstellung lautet:

1 P $$F = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(-t^2 + 4t + 5\right) \cdot \cos(t) \cdot dt$$

Integriert wird wie gewohnt durch zweimalige partielle Integration:

$$F = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(-t^2 + 4t + 5\right)}_{u_1} \cdot \underbrace{\cos(t)}_{v'_1} \cdot dt = \left[ \underbrace{\left(-t^2 + 4t + 5\right)}_{u_1} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{v_1} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(-2t + 4)}_{u'_1} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{v_1} \cdot dt$$

2 P $$= \left[ \left(-t^2 + 4t + 5\right) \cdot \sin(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{(2t - 4)}_{u_2} \cdot \underbrace{\sin(t)}_{v'_2} \cdot dt$$

$$= \left[\left(-t^2+4t+5\right)\cdot\sin(t)\right]_{t_1}^{t_2} + \left[\underbrace{(2t-4)}_{u_2}\cdot\underbrace{(-\cos(t))}_{v_2}\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\underbrace{(2)}_{u'_2}\cdot\underbrace{(-\cos(t))}_{v_2}\cdot dt$$

$$= \left[\left(-t^2+4t+5\right)\cdot\sin(t)\right]_{-1}^{+5} - \left[(2t-4)\cdot(\cos(t))\right]_{-1}^{+5} + \left[2\cdot\sin(t)\right]_{-1}^{+5}$$

$$= 2\cdot\sin(5) - 6\cdot\cos(5) + 2\cdot\sin(1) - 6\cdot\cos(1) \overset{TR}{\approx} -5.1787$$

Anmerkung: Das negative Vorzeichen steht für den linkslaufenden Umlaufsinn der Kurve beim Plotten mit wachsendem Argument $t$. Ein rechtslaufender Umlaufsinn würde zu einem positiven Vorzeichen des Ergebnisses führen. Die tatsächlich umschlossene Fläche ist der Betrag des Ergebnisses, also $F \overset{TR}{\approx} 5.1787$ Flächeneinheiten.

**Arbeitshinweis:**

Die Tatsache, dass das Vorzeichen der über die Integration berechneten Fläche den Umlaufsinn der Kurve wiedergibt, ist eine prinzipielle Eigenschaft der Integration in Parameterdarstellung.

(b.) Die Kurve in Parameterdarstellung zeigt Bild 7-16b

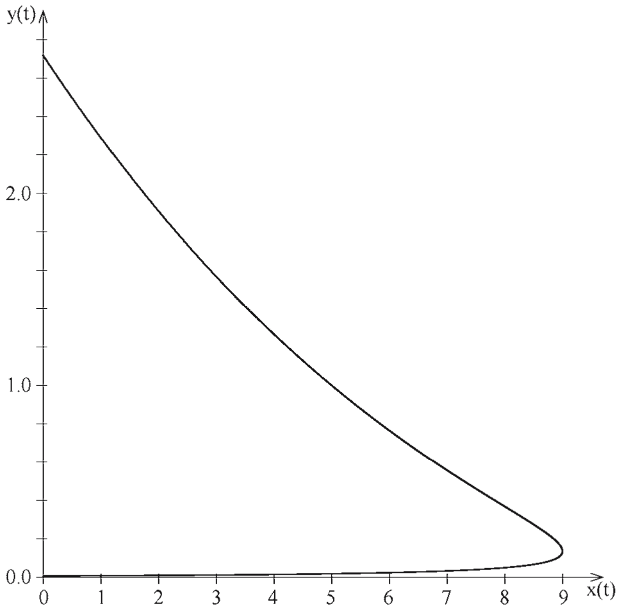



**Bild 7-16b**
Graph zu einer Funktion in Parameterdarstellung: 3 P

$$x(t) = -t^2+4t+5$$

$$y(t) = e^{-t}$$

für $t = -1 \ldots +5$

Wenn die Fläche gesucht wird, die die Kurve mit der y-Achse einschließt, so müssen wir die Nullstellen von $x(t)$ kennen. In Analogie zu Aufgabenteil (a.) benutzen wir die pq-Formel:

$x(t) = -t^2+4t+5 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2-4t-5=0 \quad \Rightarrow \quad t_{1/2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3 \quad \Rightarrow \quad t_1 = -1$ und $t_2 = +5$ 1 P

Damit lautet die Flächenintegration in Parameterdarstellung:

1 P $$F = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} y \cdot \dot{x} \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-t} \cdot (-2t+4) \cdot dt$$

Zur Integration genügt einmalige partielle Integration:

1 P $$F = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{e^{-t}}_{u'_1} \cdot \underbrace{(-2t+4)}_{v_1} \cdot dt = \left[ \underbrace{\left(-e^{-t}\right)}_{u_1} \cdot \underbrace{(-2t+4)}_{v_1} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(-e^{-t}\right)}_{u_1} \cdot \underbrace{(-2)}_{v'_1} \cdot dt = \left[\left(-e^{-t}\right) \cdot (-2t+4)\right]_{t_1}^{t_2} + \left[2e^{-t}\right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \left[(2t-2) \cdot e^{-t}\right]_{t_1}^{t_2} = 8 \cdot e^{-5} + 4 \cdot e^{+1} \overset{TR}{\approx} +10.927$$

## Aufgabe 7.17 Integration in Polarkoordinaten

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| (a.) | 3 min | (a.) | (a.) 2 P |
| (b.) | 10 min | (b.) | (b.) 7 P |
| (c.) | 8 min | (c.) | (c.) 4 P |

Gegeben seien Kurven $r = r(\varphi)$ in Polarkoordinaten. Zeichnen Sie die Kurven und berechnen Sie die eingeschlossenen Flächen.

(a.) $r = R = const.$ Flächenberechnung für einen gesamten Umlauf $\varphi = 0 \ldots 2\pi$

(b.) $r = a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)}$ Zeichnung und Flächenberechnung für einen gesamten Umlauf, wobei auf den Definitionsbereich zu achten ist:

Der Radikand ist nicht negativ für

$$\cos(2\varphi) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \in \left[-\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\,;\, +\tfrac{\pi}{4} + 2\pi n\right] \cup \left[\tfrac{3}{4}\pi + 2\pi n\,;\, +\tfrac{5}{4}\pi + 2\pi n\right]$$

Der erste Umlauf entspricht diesem Intervall für $n = 0$.

(c.) $r = \varphi$ Zeichnung und Flächenberechnung für einen Umlauf $\varphi = 0 \ldots 2\pi$

## Lösung zu 7.17

Die Formel zur Berechnung der eingeschlossenen Fläche bei einer in Polarkoordinaten gegebenen Kurve lautet

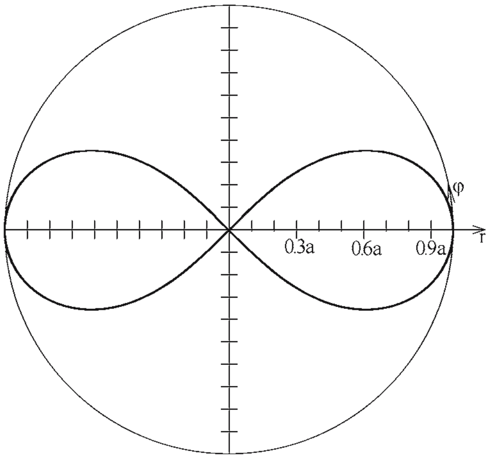
$$F = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2} \left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi$$

In diese Formel setzen wir nachfolgend die drei oben angegebenen Kurven ein.

(a.) $F = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2} R^2 d\varphi = \left[ \frac{1}{2} R^2 \cdot \varphi \right]_0^{2\pi} = \pi R^2$ 1 P

Dass die Kurve natürlich einen Kreis beschreibt, ist bei konstantem Radius offensichtlich. Aus diesem Grunde überlassen wir das Zeichnen der Kurve den Lesern selbst. 1 P

(b.) Die Kurve ist bekannt als Lemniskate, man sieht sie in Bild 7-17b.




3 P

**Bild 7-17b**
Graph der Lemniskate $r = a \cdot \sqrt{\cos(2\varphi)}$
Dargestellt ist der erste Umlauf für
$\varphi \in \left[ -\frac{\pi}{4} ; +\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3}{4}\pi ; +\frac{5}{4}\pi \right]$

Die Flächenberechnung bezieht sich eigentlich auf die gesamte Fläche innerhalb der beiden Hanteln. Führt man aber die Integration durch, so muss man wegen der Unterbrechungen im Definitionsbereich der Funktion die gesamte Fläche aus entsprechenden Stücken zusammensetzen. Aus Symmetriegründen kann man ebensogut aber das grau schraffierte kleine Stück integrieren, welches genau ein Viertel der gesamten Fläche einnimmt. Die Integrationsgrenzen zu diesem grauen Stück sind $\varphi = 0 ... \frac{\pi}{4}$. (Dadurch wird die Arbeit erleichtert.)

$F_{1/4} = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} a^2 \cdot \cos(2\varphi) d\varphi = \left[ \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4} a^2 \sin\left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} a^2$ 3 P

Aus Symmetriegründen ist dann die gesamte Fläche das Vierfache dieser schraffierten Fläche: $F_{ges} = 4 \cdot F_{1/4} = a^2$ 1 P

(c.) Die Kurve heißt nach ihrem Entdecker die Archimedische Spirale: siehe Bild 7-17c.

2 P

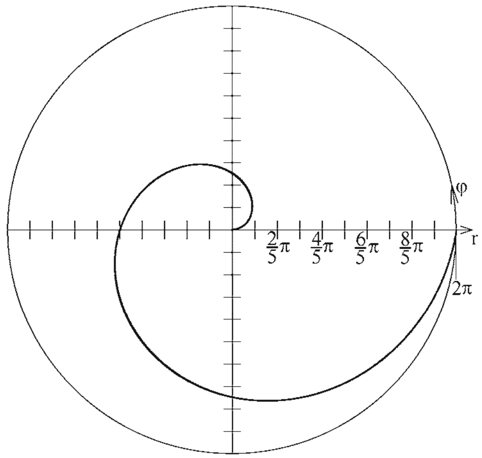



**Bild 7-17c**
Graph der Archimedischen Spirale: $r = \varphi$
Sie ist dargestellt für $\varphi \in [0;2\pi]$.

Die Flächenberechnung für den ersten Umlauf, also $\varphi \in [0;2\pi]$ lautet

2 P $$F = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}\left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}\varphi^2 d\varphi \left[\tfrac{1}{6}\varphi^3\right]_0^{2\pi} = \tfrac{8}{6}\pi^3 - 0 = \tfrac{4}{3}\pi^3$$

Dies ist genau der Inhalt der grau schraffierten Fläche.

## Aufgabe 7.18 Bogenlängenberechnung mittels Integration

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 12 min | (a.) | | (a.) 6 P |
| | (b.) | 10 min | (b.) | | (b.) 5 P |

(a.) Berechnen Sie die Bogenlänge (also die Länge des Striches des Graphen) einer Normalparabel $y = x^2$ beginnend beim Koordinatenursprung und endend im Punkt P=(3;9).

(b.) Berechnen Sie die Bogenlänge der in Polarkoordinaten gegebenen Archimedischen Spirale $r(\varphi) = 2\varphi$ für einen Umlauf mit $\varphi = 0...2\pi$.

## ▾ Lösung zu 7.18

(a.) Ist die Funktion in kartesischen Koordinaten gegeben (also $y = f(x)$), so lautet die Bogenlängenberechnung $S = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot dx$. Für unser Beispiel folgt daraus:

1 P $$S = \int_0^3 \sqrt{1+(2x)^2} \cdot dx = \int_0^3 \sqrt{1+4x^2} \cdot dx$$

Die Stammfunktion findet man wie in Aufgabe 7.6 gezeigt

durch eine Substitution $x =: \frac{1}{2} \cdot \sinh(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\cosh(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}\cosh(t) \cdot dt$

Damit folgt nämlich:

$$\int \sqrt{4x^2 + 1^2}\, dx = \int \sqrt{4 \cdot \tfrac{1}{4}\sinh^2(t) + 1^2} \cdot \tfrac{1}{2}\cosh(t)\, dt = \tfrac{1}{2} \int \cosh^2(t)\, dt \quad (**)$$ 1 P

Diese Integration mit einer Hyperbelfunktion im Integranden folgt einem altbekannten Schema mit partieller Integration und der Verwendung von Additionstheoremen, die wir als Nebenrechnung ausführen:

$$\int \underbrace{\cosh(t)}_{u} \cdot \underbrace{\cosh(t)}_{v'} dt = \underbrace{\cosh(t)}_{u} \cdot \underbrace{\sinh(t)}_{v} + C_1 - \int \underbrace{\sinh(t)}_{u'} \cdot \underbrace{\sinh(t)}_{v} dt$$ 1 P

$$= \underbrace{\cosh(t) \cdot \sinh(t) + C_1 - \int \left(\cosh^2(t) - 1\right) dt}_{\text{nach dem Additionstheorem: } \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1} = \cosh(t) \cdot \sinh(t) + C_1 - \int \cosh^2(t)\, dt + \int 1\, dt$$

Durch Äquivalenzumformung mittels Addition von $\int \cosh^2(t)\, dt$ auf beiden Seiten folgt:

$$2 \cdot \int \cosh^2(t)\, dt = \cosh(t) \cdot \sinh(t) + C_1 + \int 1\, dt = \cosh(t) \cdot \sinh(t) + t + C_2$$ 1 P

Setzt man das Ergebnis dieser Nebenrechnung in die obige Gleichung (**) ein, so folgt:

$$\int \sqrt{4x^2 + 1^2}\, dx = \tfrac{1}{2} \int \cosh^2(t)\, dt = \tfrac{1}{4}\cosh(t) \cdot \sinh(t) + \tfrac{1}{4}t + C_2 = \tfrac{1}{4} \cdot \sqrt{4x^2 + 1} \cdot 2x + \tfrac{1}{4}\operatorname{arsinh}(2x) + C_2$$ 1 P

wobei die Resubstitution verwendet wurde: $\sinh(t) = 2x \quad \Rightarrow \quad \cosh(t) = \sqrt{1 + \sinh^2(t)} = \sqrt{1 + 4x^2}$

Nun endlich liefert das Einsetzen der Integralgrenzen die gesuchte Bogenlänge:

$$S = \int_0^3 \sqrt{1 + (2x)^2} \cdot dx = \int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2} \cdot dx = \left[\tfrac{1}{2}x \cdot \sqrt{4x^2 + 1} + \tfrac{1}{4}\operatorname{arsinh}(2x)\right]_0^3 = \tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{37} + \tfrac{1}{4}\operatorname{arsinh}(6) \overset{TR}{\approx} 9.747$$ 1 P

(b.) Die Bogenlängenberechnung in Polarkoordinaten lautet $S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2 + \left(r(\varphi)\right)^2} \cdot d\varphi$

Setzen wir die Gleichung der Archimedischen Spirale $r(\varphi) = 2\varphi$ ein, so ergibt sich

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(2)^2 + (2\varphi)^2} \cdot d\varphi = 2 \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + \varphi^2} \cdot d\varphi$$ 1 P

Beim Aufsuchen der Stammfunktion sei auf Aufgabe 7.6.c verwiesen, in der genau diese Integration auftaucht. Das unbestimmte Integral übernehmen wir von dort, und zwar als

$\int \sqrt{1 + \varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\varphi) + \frac{1}{2} \cdot \varphi \cdot \sqrt{1 + \varphi^2} + C$ . Wir setzen nun noch die Grenzen ein: 3 P

$$S = 2 \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{1 + \varphi^2} \cdot d\varphi = \left[\operatorname{arsinh}(\varphi) + \varphi \cdot \sqrt{1 + \varphi^2}\right]_0^{2\pi} = \left[\operatorname{arsinh}(2\pi) + 2\pi \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2}\right] - [0+0] \overset{TR}{\approx} 42.512588$$ 1 P

Dies ist die gefragte Bogenlänge der Archimedischen Spirale für den ersten Umlauf.

## Aufgabe 7.19 Berechnung eines Rotationsvolumens

6 min — Punkte 6 P

Gegeben sei ein Trichter, dessen Oberfläche durch Rotation der Funktion $y(x) = \sqrt{x}$ um die y-Achse beschrieben werde. Man betrachte hierzu Bild 7-19a.

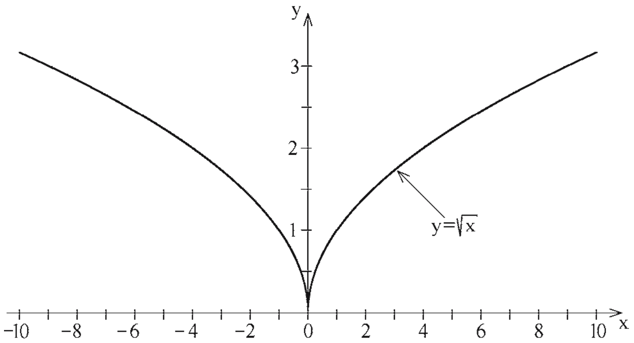



**Bild 7-19a**
Veranschaulichung eines Trichters, der durch Rotation der Funktion $y(x) = \sqrt{x}$ um die y-Achse entsteht. Die graue Schraffur symbolisiert Wasser, welches bis zu einem Pegelstand von $y = 3$ eingefüllt ist.

Wieviel Wasser kann der Trichter fassen, wenn man ihn bis zu einer Höhe von $y = 3$ füllt? Berechnen Sie das Rotationsvolumen.

## Lösung zu 7.19

Zur Berechnung von Rotationsvolumina findet man in den meisten Formelsammlungen zweierlei Formeln. Die eine gilt für die Rotation der Kurve $y = y(x)$ um die x-Achse, die andere gilt für die Rotation der Kurve $x = x(y)$ um die y-Achse.

Zur Aufgabenstellung passt aber keine der beiden Möglichkeiten, denn wir haben $y = y(x)$ gegeben, aber diese Kurve rotiert um y-Achse. Nun bieten sich uns zwei Möglichkeiten der Anpassung:

- Zum Einen können wir die Umkehrfunktion zu $y(x) = \sqrt{x}$ bilden und damit $x = x(y)$ bestimmen. Diese Funktion können wir dann um die y-Achse rotieren lassen. (Einen vergleichbaren Weg werden wir in Aufgabe 7.20 gehen.)
- Zum Anderen aber können wir ebenso gut die Rotation um die x-Achse betrachten. Dieser Weg ist der am weitesten verbreitete Lösungsweg. Deshalb entscheiden wir uns für ihn. Auch hierfür benötigen wir die Umkehrfunktion. Zur Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion die quadratische Parabel: $y = x^2$ Wir berechnen also das Rotationsvolumen gemäß Bild 7-19b bei Rotation der quadratischen Parabel um die x-Achse.

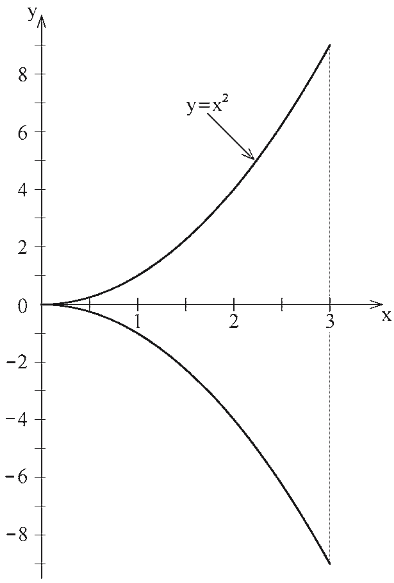



**Bild 7-19b**
Der hier gezeigte Trichter, der durch Rotation der Funktion $y = x^2$ um die x-Achse entsteht, vereinfacht die Lösung von Aufgabe 7.19. 2 P

Jetzt symbolisiert die graue Schraffur das Wasser, welches bis zu einem Pegelstand von $x = 3$ eingefüllt sein müsste. Dies entspricht einem $y = -9$ bis $y = +9$ in der Umkehrfunktion.

(a.) In der Formelsammlung finden wir nun die Berechnung des Rotationsvolumens bei Rotation um die x-Achse, in die wir nun leicht einsetzen können:

$$V = \pi \cdot \int_0^3 \left(y(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^3 x^4 dx = \frac{\pi}{5} x^5 \Big|_0^3 = \frac{243\pi}{5} \overset{TR}{\approx} 152.68 \text{ Volumeneinheiten}$$ 4 P

## Aufgabe 7.20 Berechnung eines Rotationsvolumens

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 10 min | | Punkte 8 P |

Dreht man einen zylindrischen Becher, der eine Flüssigkeit enthält, um seine Symmetrieachse, so nimmt die Oberfläche der Flüssigkeit aufgrund der Zentrifugalkraft und der Schwerkraft die Form einer Parabel an, wie in Bild 7-20 gezeigt. Berechnen Sie das Flüssigkeitsvolumen, welches sich in dem dort dargestellten Becher befindet.

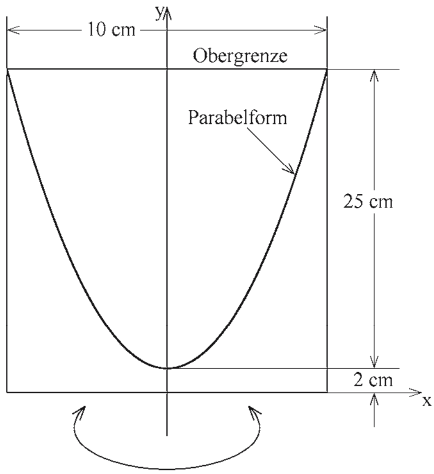



**Bild 7-20**
Gezeigt wird der Querschnitt durch ein rotierendes Becherglas, in dem sich eine Flüssigkeit befindet, die mit der selben Geschwindigkeit rotiert wie das Glas selbst. Die Flüssigkeit ist grau schraffiert, ihre Oberfläche hat die Form einer Parabel.
Die für das Lösen der Aufgabe benötigten Abmessungen sind in der Graphik skizziert.

## Lösung zu 7.20

Wir gehen in zwei Schritten vor:
1. Schritt → Aufstellen der mathematischen Gleichung der Parabel an der Oberfläche
2. Schritt → Berechnen des Rotationsvolumens der Parabel.
3. Schritt → Angeben der Antwort: Flüssigkeitsvolumen

Zu Schritt 1:

Die Parabel stellt eine Funktion mit gerader Symmetrie dar, die sich beschreiben lässt durch die Funktionsgleichung: $y(x) = ax^2 + b$

Zwei Punkte kennen wir aus Bild 7-20 zur Bestimmung der beiden Koeffizienten:

$y(0\text{ cm}) = 2\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad b = 2\text{ cm}$ und

2 P $y(5\text{ cm}) = 27\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad a\cdot(5\text{ cm})^2 + 2\text{ cm} = 27\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad (5\text{ cm})^2 \cdot a = 25\text{ cm} \quad \Rightarrow \quad a = 1\cdot\frac{1}{\text{cm}}$

Zu Schritt 2:

Die Parabel rotiert nicht um die x-Achse, sondern um die y-Achse !

Diesmal verwenden wir die in den Formelsammlungen angegebene Formel für das Rotationsvolumen innerhalb einer um die y-Achse rotierenden Kurve. Am leichtesten erreichen wir die Lösung, wenn wir das von der Parabel beschriebene Luftvolumen unterhalb der in Bild 7-20 als „Obergrenze" bezeichneten Linie berechnen. Die Formel dafür lautet

$$V_{Luft} = \pi \int_{y_1}^{y_2} \left( f^{-1}(y) \right)^2 dy \,. \qquad (*2)$$

Dafür benötigen wir die Umkehrfunktion $f^{-1}$ der Parabel:

$$y = f(x) = ax^2 + b \quad \Rightarrow \quad ax^2 = y - b \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{y-b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y-b}{a}} \qquad (*1)$$ 1 P

Die Integration des Rotationsvolumens der Luft erhält man durch Einsetzen der Gleichung (*1) in die Gleichung (*2):

$$V_{Luft} = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left( \sqrt{\frac{y-b}{a}} \right)^2 dy = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{y-b}{a} dy = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} \left( \frac{y}{a} - \frac{b}{a} \right) dy = \pi \cdot \int_{2\,\text{cm}}^{27\,\text{cm}} \left( \frac{y}{\frac{1}{\text{cm}}} - \frac{2\,\text{cm}}{\frac{1}{\text{cm}}} \right) dy$$ 4 P

$$= \pi \cdot \left[ \tfrac{1}{2} \text{cm} \cdot y^2 - 2\,\text{cm}^2 \cdot y \right]_{2\,\text{cm}}^{27\,\text{cm}} = \pi \cdot 312.5 cm^3 \overset{TR}{\approx} 981.74 cm^3$$

Zu Schritt 3:

Da sich das Flüssigkeitsvolumen und das Luftvolumen unterhalb der „Obergrenze“ zu einem Zylindervolumen ergänzen, dessen Inhalt man sehr simpel berechnen kann, finden wir das Volumen der Flüssigkeit wie folgt:

Das gesamte Zylindervolumen beträgt $V_{Zylinder} = \pi R^2 \cdot h = \pi \cdot (5 cm)^2 \cdot (27 cm)$

Das Flüssigkeitsvolumen ist das Volumen des 27 cm hohen Zylinders abzüglich des berechneten Luftvolumens:

$$V_{Wasser} = V_{Zylinder} - V_{Luft} = \pi \cdot (5 cm)^2 \cdot (27 cm) - \pi \cdot 312.5 cm^3 \overset{TR}{\approx} 1138.8 cm^3$$ 1 P

Es sind also etwa $1138.8\ \text{cm}^3$ Flüssigkeit im Zylinder enthalten.

## Aufgabe 7.21 Berechnung einer Rotationsoberfläche

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 min | | Punkte 11 P |

Wie viel Gummi braucht man zur Herstellung eines Schlauches für einen Fahrradreifen?

Der Schlauch hat die Form eines Ringtorus, wie er entsteht, wenn man einen Kreis entsprechend Bild 7-21 um die x-Achse rotieren lässt. Berechnen Sie die Oberfläche dieses Ringtorus.

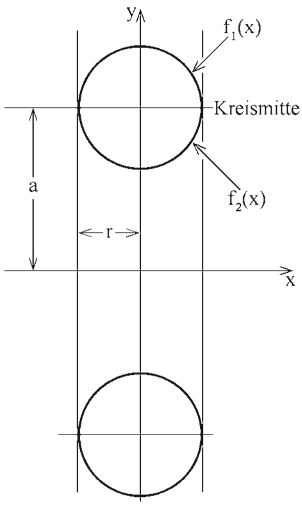



**Bild 7-21**
Ringtorus zur Beschreibung der Oberfläche eines Fahrradschlauches. Der Schlauch entsteht, wenn man einen Kreis um die x-Achse rotieren lässt.

Hinweis:
Zur Berechnung der Oberfläche des Ringtorus beschreibe man den rotierenden Kreis in zwei Abschnitten, wovon einer in der Skizze als $f_1(x)$ bezeichnet wurde (dies ist der Abschnitt oberhalb der als „Kreismitte" bezeichneten Linie) und der andere $f_2(x)$ (unterhalb der Linie mit dem Namen „Kreismitte").

Die für das Lösen der Aufgabe benötigten Parameter „a" und „r" seien als Konstanten zu behandeln und dürfen für das Auffinden der Lösung als bekannt vorausgesetzt werden.

## Lösung zu 7.21

Hier bietet sich eine Vorgehensweise in zwei Schritten an:
1. Schritt → Aufstellen der mathematischen Gleichungen für $f_1(x)$ und $f_2(x)$
2. Schritt → Berechnen der Mantelfläche des Rotationskörpers

Zu Schritt 1:
Anmerkung: Die Untergliederung des Kreises in zwei Abschnitte ist deshalb nötig, weil der mathematische Funktionsbegriff zu jedem Wert der Definitionsmenge (hier x-Wert) nur maximal einen Wert der Wertemenge (hier y-Wert) zulässt.

Da es sich um Kreise handelt, machen wir von der Kenntnis der Kreisgleichung Gebrauch:

$f_1(x) = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ (nach oben geöffneter Halbkreis um den Punkt $(x;y) = (0;a)$ )

3 P

$f_2(x) = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ (nach unten geöffneter Halbkreis um den Punkt $(x;y) = (0;a)$ )

Zu Schritt 2:
Die Mantelfläche des gesamten Torus ergibt sich, wenn man jeden der beiden Halbkreise für sich (einzeln) um die x-Achse rotieren lässt und die beiden so berechneten Oberflächen addiert.
Die allgemeine Formel zur Berechnung von Manteloberflächen lautet

$$A = 2\pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Damit ist erste Oberfläche $A_1 = 2\pi \cdot \int_{-r}^{+r} \left(a + \sqrt{r^2 - x^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \underbrace{\frac{x^2}{r^2 - x^2}}_{\text{dies ist } (f_1')^2}}\, dx$

und die zweite Oberfläche ist $A_2 = 2\pi \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \left(a - \sqrt{r^2 - x^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \underbrace{\frac{x^2}{r^2 - x^2}}_{\text{dies ist } (f_2')^2}}\, dx$ 3 P

Wir addieren und führen die Integration aus:

$$A_{Torus} = 2\pi \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \left(a + \sqrt{r^2 - x^2} + a - \sqrt{r^2 - x^2}\right) \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi a \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx$$

$$= 4\pi a \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi a \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi a \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{1}{1^2 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}}\, dx$$ 3 P

Mit einer einfachen Substitution kommen wir zum Ziel: $z := \frac{x}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad dx = r \cdot dz$

$$A_{Torus} = 4\pi a \cdot \int\limits_{-r}^{+r} \sqrt{\frac{1}{1^2 - z^2}} \cdot r \cdot dz = 4\pi a r \cdot \left[\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]_{-r}^{+r} = 4\pi a r \cdot \left(\underbrace{\arcsin(1)}_{=\pi/2} - \underbrace{\arcsin(-1)}_{=-\pi/2}\right) = 4\pi^2 a r$$ 2 P

Anmerkung: Die Integration, die zum Arcus Sinus führt, sollte in allen elementaren Integraltabellen stehen.

Die Oberfläche des Fahrradschlauches beträgt also $4\pi^2 ar$. Da $a$ und $r$ Längeneinheiten tragen, ist die Einheit der Oberfläche auch korrekterweise das Quadrat einer Längeneinheit.

# Aufgabe 7.22 Bogenlängenberechnung

| | | |
|---|---|---|
| 8 min | | Punkte 5 P |

Der Weg des Ventils am Reifen beim Fahren ist die Zykloide. In Parameterdarstellung wird sie beschrieben durch $x(t) = a \cdot (t - \sin(t))$

und $y(t) = a \cdot (1 - \cos(t))$

Ihren Verlauf erkennt man in Bild 7-22.

Berechnen Sie die Bogenlänge der Zykloiden von einer Nullstelle bis zur nächsten. Dies ist der Weg, den das Ventil während einer Umdrehung des Reifens zurücklegt.

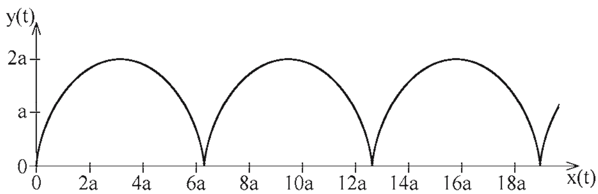



**Bild 7-22**
Verlauf der Zykloiden, die den Weg des Ventils am Reifen beim Fahren beschreibt.
Die Größe „a“ ist der Radius des Reifens. Sie darf für die vorliegende Aufgabe als bekannte Konstante vorausgesetzt werden.

Für die vorliegende Aufgabe sei das Ventil näherungsweise als am äußersten Rand des Reifens angebracht zu betrachten.

## Lösung zu 7.22

Die Bogenlänge einer in Parameterdarstellung gegebenen Kurve berechnet man gemäß

1 P $S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt$ . Speziell für die Zykloide unserer Aufgabe gilt $\frac{dx}{dt}=a\cdot\left(1-\cos(t)\right)$, $\frac{dy}{dt}=a\cdot\sin(t)$

Setzen wir ein, so erhalten wir

1 P $$S=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{a^2\cdot\left(1-\cos(t)\right)^2+a^2\cdot\sin(t)^2}\,dt=a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{\underbrace{\left(1-2\cos(t)+\cos^2(t)\right)}_{\text{ausquadriert nach der 2. Binomischen Formel}}+\sin(t)^2}\,dt$$

2 P $$=a\cdot\int_0^{\pi}\sqrt{1-2\cos(t)+\underbrace{\cos^2(t)+\sin(t)^2}_{=1}}\,dt=\underbrace{a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\cos(t)}\,dt=a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt}_{\text{Aufgrund des Additionstheorems } 1-\cos(t)=2\cdot\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}=$$

1 P $$=2a\cdot\int_0^{2\pi}\sin\left(\frac{t}{2}\right)dt=-4a\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}=-4a\cdot\left(\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}-\underbrace{\cos(0)}_{=+1}\right)=+8a$$

Das Ventil legt also während einer Umdrehung des Rades das achtfache des Reifenradius als Strecke zurück.

# 8 Komplexe Zahlen

## Aufgabe 8.1 Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) | je ¼ min | (a,b,c.) | | Punkte (a,b,c.) je 1 P |
| | (d,g.) | je ½ min | (d.) | | (e.) 1 P |
| | (e,f.) | 1 min | (f,g) | | (f.) 1 P (g.) 1 P |

Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1; z_2 \in \mathbb{C}$ mit den Werten $z_1 = 3 + 5i$ und $z_1 = 4 - 2i$ (mit $i$ als komplexer Einheit). Führen Sie bitte folgende Berechnungen aus:

(a.) $z_1 + z_2 = ?$ (b.) $z_1 - z_2 = ?$ (c.) $z_1^* = ?$ (d.) $z_1 \cdot z_2 = ?$

(e.) $\frac{z_1}{z_2} = ?$ (f.) $z_1^2 = ?$ (g.) $|z_1| = ?$

## Lösung zu 8.1

**Arbeitshinweis:** In der hier verwendeten algebraischen Darstellung werden komplexe Zahlen als Summen (aus einen Real- und einem Imaginärteil) beschrieben. Bei den vier Grundrechenarten werden sie dann auch wie ganz normale Summen verarbeitet.

(a.) $z_1 + z_2 = (3+5i) + (4-2i) = 7 + 3i$ Addiert wird durch Auflösen der Klammern. 1 P

(b.) $z_1 - z_2 = (3+5i) + (4-2i) = -1 + 7i$ Subtrahiert wird ebenso. 1 P

(c.) $z_1^* = 3 - 5i$ Die komplexe Konjugation verdreht das Vorzeichen des Imaginärteils. 1 P

(d.) $z_1 \cdot z_2 = (3+5i) \cdot (4-2i) = 12 + 20i - 6i \underbrace{-10i^2}_{=+10} = 22 + 14i$ Ausmultiplizieren der Klammern 1 P

(e.) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+5i}{4-2i} \cdot \frac{4+2i}{4+2i} = \frac{12 + 20i + 6i \overbrace{+10i^2}^{=-10}}{16 + 8i - 8i \underbrace{-4i^2}_{=+4}} = \frac{2+26i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{13}{10} i$ 1 P

**Arbeitshinweis:**

Bei der Division ist darauf zu achten, dass im Ergebnis auch wieder Realteil und Imaginärteil getrennt sind. Dies erreicht man durch Erweitern des Bruches mit dem komplex Konjugierten des Nenners.

(f.) $z_1^2 = (3+5i)^2 = 9 + 15i + 15i \underbrace{+25i^2}_{=-25} = -16 + 30i$ 1 P

Das Quadrieren ist wie die Multiplikation zweier Zahlen auszuführen.

1 P (g.) $|z_1| = |3+5i| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

**Arbeitshinweis:**

Die Betragsbildung erfolgt am einfachsten, indem man das Quadrat des Realteils und das Quadrat des Imaginärteils addiert. Alternativ könnte man auch die Wurzel aus $z \cdot z^*$ bilden, also $\sqrt{z \cdot z^*} \neq |z|$ berechnet.

$$|z_1| = \sqrt{z_1 \cdot z_1^*} = \sqrt{(3+5i)\cdot(3-5i)} = \sqrt{9+15i-15i\underbrace{-25i^2}_{=+25}} = \underbrace{\sqrt{9+25}}_{\text{Quadrat des Realteils plus Quadrat des Imaginärteils}} = \sqrt{34}$$

**Stolperfalle:**

Man bedenke aber, dass im allgemeinen für komplexe Zahlen $\sqrt{z \cdot z} \neq |z|$ ist. Hier dürfte das „Ungleich“ nur dann durch ein „Gleich“ ersetzt werden, wenn der Imaginärteil Null ist, also für reelle Zahlen.

## Aufgabe 8.2 Umwandlung zwischen Darstellungsformen

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) je 2 min | (a,b,c.) | (a,b,c.) je 2 P |
| | (d,e,h,i.) je 1 min | (d,e.) | (d,e,h,i.) je 1 P |
| | (f,g.) je 2 min | (f,g.) | (f,g.) je 2 P |
| | (j,k.) je 2 min | (j,k.) | (j,k.) je 2 P |

Formen Sie die nachfolgend genannten komplexen Zahlen zwischen den unterschiedlichen Darstellungsformen um. ($i$ ist die komplexe Einheit.)

Bei (a..c)→ gegeben: Algebraische Form; gesucht: Exponentialform, Trigonometrische Form

Bei (d,e)→ gegeben: Exponentialform; gesucht: Algebraische Form, Trigonometrische Form

Bei (f..j)→ gegeben: Trigonometrische Form; gesucht: Algebraische Form, Exponentialform

Bei (j,k)→ gegeben: keine der drei genannten Formen; gesucht: alle drei genannten Formen

(a.) $z_a = 2 - i \cdot \sqrt{12}$  (b.) $z_b = -2 + i \cdot \pi$  (c.) $z_c = -3 - 2i$

(d.) $z_d = 2 \cdot (\cos(-135°) + i \cdot \sin(-135°))$  (e.) $z_e = 3 \cdot (\cos(30°) + i \cdot \sin(30°))$

(f.) $z_f = 6 \cdot e^{i \cdot 240°}$  (g.) $z_g = 6 \cdot e^{-i \cdot 240°}$  (h.) $z_h = 5 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}}$  (i.) $z_i = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

(j.) $z_j = 3 \cdot (\cos(60°) + i \cdot \sin(30°))$  (k.) $z_k = 3 \cdot (\cos(-45°) + i \cdot \sin(150°))$

Tragen Sie außerdem sämtliche Zahlen in die Gauß’sche Zahlenebene ein.

## Lösung zu 8.2

Für die Lösungen von Aufgabe 8.2. seien folgende Bezeichnungen gewählt:

$z = a + i \cdot b \in \mathbb{C}$, mit $a =$ Realteil und $b =$ Imaginärteil von $z$

$z = |z| \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)) = |z| \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, mit $|z| =$ Betrag und $\varphi =$ Phase von $z$

**Arbeitshinweis zu (a…c):**

Aus der algebraischen Form kommend, müssen wir Betrag und Phase berechnen, um in die anderen Formen zu gelangen.

Speziell bei der Berechnung der Phase achte man auf die Argument-Funktion, die sich von der Arcus Tangens- Funktion dadurch unterscheidet, dass sie den Quadranten der komplexen Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene mit berücksichtigt.

(a.) $|z_a| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$

$\varphi_a = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n\pi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{12}}{2}\right) = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = -60° = -\frac{\pi}{3}$ (mit $n = 0$ im 4.Quadranten)

$\Rightarrow \quad z_a = 4 \cdot (\cos(-60°) + i \cdot \sin(-60°))$ für die trigonometrische Form,

und $z_a = 4 \cdot e^{-i \cdot 60°} = 4 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}}$ für die Exponentialform. 2 P

(b.) $|z_b| = \sqrt{(-2)^2 + \pi^2} \overset{TR}{\approx} 3.7242$

$\varphi_b = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n\pi = \arctan\left(\frac{\pi}{-2}\right) + \pi \overset{TR}{\approx} 2.1377\,\text{rad} \overset{TR}{\approx} 122.48°$ (mit $n = 1$ im 2.Quadranten)

$\Rightarrow \quad z_b \overset{TR}{\approx} \underbrace{3.7242 \cdot (\cos(122.48°) + i \cdot \sin(122.48°))}_{\text{trigonometrische Form}} = \underbrace{3.7242 \cdot e^{i \cdot 122.48°}}_{\substack{\text{Exponentialform} \\ \text{(Winkel in Grad)}}} = \underbrace{3.7242 \cdot e^{i \cdot 2.1377}}_{\substack{\text{Exponentialform} \\ \text{(Winkel in Radianten)}}}$ 2 P

(c.) $|z_c| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$

$\varphi_c = \arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n\pi = \arctan\left(\frac{-2}{-3}\right) - \pi \overset{TR}{\approx} -146.31°$ (mit $n = -1$ im 3.Quadranten)

$\Rightarrow z_c \overset{TR}{\approx} \sqrt{13} \cdot (\cos(-146.31°) + i \cdot \sin(-146.31°)) = \sqrt{13} \cdot (\cos(146.31°) - i \cdot \sin(146.31°))$ (trig. Form)

$z_c \overset{TR}{\approx} \sqrt{13} \cdot e^{-i \cdot 146.31°} \overset{TR}{\approx} \sqrt{13} \cdot e^{-i \cdot 2.5536}$ (Exponentialform) 2 P

**Anmerkung:**

Winkel dürfen wahlweise in Radianten oder in Grad angegeben werden. Die Angabe in Radianten kann durch Weglassen der Einheit oder durch Hinzufügen der Bezeichnung „rad" gekennzeichnet werden. Bei Angabe in Grad ist die Verwendung des Symbols „°" obligatorisch.

Das Symbol „°" bedeutet folgende Abkürzung: $° = \frac{\pi}{180} rad$

**Arbeitshinweis:**

Die korrekte Verwendung des „$n$“ bei der Argumentfunktion sorgt dafür, dass das Ergebnis immer den Hauptwert einer komplexen Zahl angibt. (Man verwechsele diese Begriffsbildung nicht mit dem Hauptwert von Wurzeln oder Logarithmen.)

**Arbeitshinweis zu (d…e):**

Von der trigonometrischen Form gelangt man recht mühelos in die beiden anderen Formen. Die algebraische Form ergibt sich durch Ausrechnen der trigonometrischen Funktionen, die Exponentialform durch den Gebrauch der Euler-Formel.

(d.) $z_d = 2 \cdot \left(\cos(-135°) + i \cdot \sin(-135°)\right)$

$z_d = 2 \cdot \left(-\sqrt{\frac{1}{2}} + i \cdot -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}$ (für die algebraische Form)

1 P $z_d = 2 \cdot e^{-i \cdot 135°} = 2 \cdot e^{-i \cdot \frac{3}{4}\pi}$ (für die Exponentialform)

(e.) $z_e = 3 \cdot \left(\cos(30°) + i \cdot \sin(30°)\right)$

$z_e = 3 \cdot \left(\sqrt{\frac{3}{4}} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{27}{4}} + i \cdot \frac{3}{2}$ (für die algebraische Form)

1 P $z_e = 3 \cdot e^{i \cdot 30°} = 3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}$ (für die Exponentialform)

**Arbeitshinweis zu (f…i):**

Von der Exponentialform gelangt man nur über die trigonometrische Form zur algebraischen Form. Dadurch ist der Rechenweg für diese Aufgabenteile vorgezeichnet.

(f.) $z_f = 6 \cdot e^{i \cdot 240°} = 6 \cdot e^{-i \cdot 120°}$ Damit ist $z_f$ auf den Hauptwert einer komplexen Zahl gebracht.

$\Rightarrow \; z_f = 6 \cdot \left(\cos(-120°) + i \cdot \sin(-120°)\right) = 6 \cdot \left(\cos(120°) - i \cdot \sin(120°)\right)$ (trigonometr. Form)

2 P $\Rightarrow \; z_f = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -3 - i \cdot \sqrt{\frac{108}{4}} = -3 - i \cdot \sqrt{27}$ (algebraische Form)

(g.) $z_g = 6 \cdot e^{-i \cdot 240°} = 6 \cdot e^{i \cdot 120°}$ Damit ist $z_f$ auf den Hauptwert einer komplexen Zahl gebracht.

$\Rightarrow \; z_g = 6 \cdot \left(\cos(120°) + i \cdot \sin(120°)\right)$ (trigonometrische Form)

2 P $\Rightarrow \; z_g = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}\right) = -3 + i \cdot \sqrt{\frac{108}{4}} = -3 + i \cdot \sqrt{27}$ (algebraische Form)

**Anmerkung:**

Wie man sieht, entspricht ein Verdrehen des Vorzeichens der Phase in der Exponentialform bzw. in der trigonometrischen Form einem Verdrehen des Vorzeichens des Imaginärteils in der algebraischen Form. Beide Methoden können wahlweise benutzt werden, um eine komplexe Zahl komplex zu konjugieren.

(h.) $z_h = 5 \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{3}}$

$\Rightarrow \; z_h = 5 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 5 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (trigonometrische Form)

$\Rightarrow \quad z_h = 5 \cdot \left( \frac{1}{2} - i \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} \right) = \frac{5}{2} - i \cdot \sqrt{\frac{75}{4}}$ (algebraische Form) 1 P

(i.) $z_i = 4 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow \quad z_i = 4 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = 4 \cdot \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$ (trigonometrische Form)

$\Rightarrow \quad z_i = 4 \cdot \left( \sqrt{\frac{1}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{8} + i \cdot \sqrt{8}$ (algebraische Form) 1 P

**Arbeitshinweis zu (j…k):**

Bei diesen beiden Aufgabenteilen sind zwar komplexe Zahlen gegeben, aber in keiner der drei bisher behandelten standardisierten Formen. Am einfachsten sind die komplexen Zahlen $z_j$ und $z_k$ in die algebraische Form umzuwandeln, denn die trigonometrische Form setzt voraus, dass es sich bei den beiden Argumenten der trigonometrischen Funktionen um ein und den selben Winkel handelt – was hier nicht der Fall ist.

Damit ist der Rechenweg klar:

Schritt 1 → Umformen in die algebraische Form

Schritt 2 → Weiter in die beiden anderen Formen ähnlich den Aufgabenteilen (a…c)

(j.) Schritt 1: $z_j = 3 \cdot \left( \cos(60°) + i \cdot \sin(30°) \right) = 3 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot i \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + i \cdot \frac{3}{2}$

Schritt 2: Betrag $|z_j| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2}}$

Phase $\varphi_j = \arg(z) = \arctan\left( \frac{3/2}{3/2} \right) + 0 \cdot \pi = 45°$

$$\Rightarrow \quad z_j = \underbrace{\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot \left( \cos(45°) + i \cdot \sin(45°) \right)}_{\text{trigonometrische Form}} = \underbrace{\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot e^{i \cdot 45°}}_{\substack{\text{Exponentialform} \\ \text{(Winkel in Grad)}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{9}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{4}}}_{\substack{\text{Exponentialform} \\ \text{(Winkel in Radianten)}}}$$ 2 P

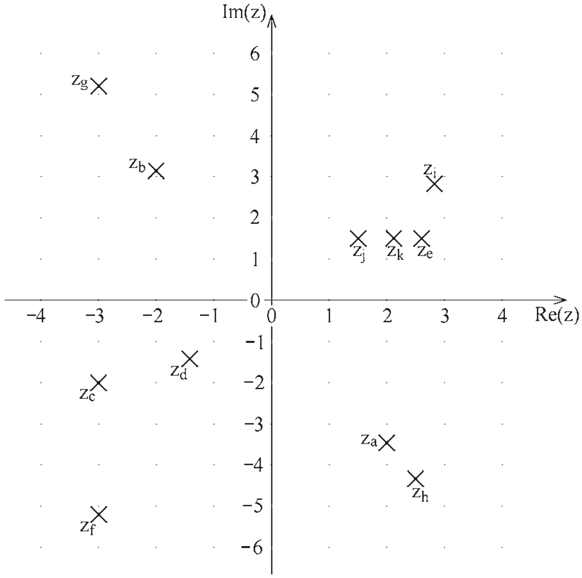
(k.) Schritt 1: $z_k = 3 \cdot \left( \cos(-45°) + i \cdot \sin(150°) \right) = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + 3 \cdot i \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{9}{2}} + i \cdot \frac{3}{2}$

Schritt 2: Betrag $|z_k| = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{9}{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}}$

Phase $\varphi_k = \arg(z) = \arctan\left( \frac{3/3}{\sqrt{9/2}} \right) + 0 \cdot \pi \overset{TR}{\approx} 35.2644° \overset{TR}{\approx} 0.61548\,\text{rad}$

$$\Rightarrow \quad z_k \overset{TR}{\approx} \underbrace{\sqrt{\frac{27}{4}} \cdot \left( \cos(35.2644°) + i \cdot \sin(35.2644°) \right)}_{\text{trigonometrische Form}} = \underbrace{\sqrt{\frac{27}{4}} \cdot e^{i \cdot 35.2644°}}_{\substack{\text{Exponentialform} \\ \text{(Winkel in Grad)}}} \overset{TR}{\approx} \underbrace{\sqrt{\frac{27}{4}} \cdot e^{i \cdot 0.61548}}_{\substack{\text{Exponentialform} \\ \text{(Winkel in Radianten)}}}$$ 2 P

Die Darstellung aller genannten Zahlen in der Gauß'schen Zahlenebene zeigt Bild 8-2.




Die in den einzelnen Aufgabenteilen vergebenen Punkte beinhalten auch die Darstellung in der komplexen Zahlenebene.

**Bild 8-2**
Darstellung der Zahlen von Aufgabe 8.2 in der Gauß'schen Zahlenebene

## Aufgabe 8.3 Berechnungen in verschiedenen Darstellungsformen

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a.) | ½ min | | Punkte |
| (b.) | 1 min | | |
| (c.) | 3 min | | (a.) 1 P (b.) 1 P (c.) 2 P |
| (d.) | 1 min | | |
| (e,f.) | 2 min | | (d,e,f.) je 2 P |
| (g.) | 3 min | | |
| (h.) | 4 min | | (g,h.) je 2 P |

Führen Sie bitte die nachfolgenden Berechnungen durch (für die Aufgabenteile a…d sind die komplexen Zahlen aus Aufgabe 8.2 zu verwenden):

(a.) $z_c + z_j$ (b.) $z_j \cdot z_g$ in der algebraischen Form und in der Exponentialform

(c.) $\frac{z_i}{z_h}$ in der algebraischen Form und in der Exponentialform (d.) $|z_a|$ und $|z_j|$

(e.) $u = \dfrac{4 \cdot (3-i)^*}{(1+i)\cdot(-1+i)}$ (f.) $v = (2-4i)^2 + \dfrac{\left|1-\sqrt{3}\cdot i\right|}{i}$

(g.) $w = \dfrac{2i}{3-4i} + 2 \cdot e^{-i \cdot 30°} + 3 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ (h.) $x = \dfrac{(-2.78 + i \cdot 0.97)\cdot(0.18 + i \cdot 7.36)}{(8.63 + i \cdot 11.27)^3}$

In denjenigen Fällen, in denen keine Darstellungsform für die Berechnung vorgeschrieben ist, verwenden Sie bitte die Form, die den einfachsten Rechenweg und das kompakteste Ergebnis liefert.

## Lösung zu 8.3

Addition und Subtraktion funktionieren am besten in der algebraischen Form.

(a.) Die Addition ist am leichtesten in der algebraischen Form:

$$z_c + z_j = (-3 - i\cdot 2) + \left(\tfrac{3}{2} + i\cdot\tfrac{3}{2}\right) = -\tfrac{3}{2} - i\cdot\tfrac{1}{2}$$ 1 P

(b.) Die Multiplikation in algebraischer Form:

$$z_j \cdot z_g = \left(\tfrac{3}{2} + i\cdot\tfrac{3}{2}\right)\cdot\left(-3 + i\cdot\sqrt{27}\right) = -\tfrac{9}{2} - \tfrac{9}{2}i + i\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{27} + i^2\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\sqrt{27} \approx -12.294 + i\cdot 3.294$$

Die Multiplikation in Exponentialform:

$$z_j \cdot z_g = \left(\sqrt{\tfrac{9}{2}}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}\right)\cdot\left(6\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}}\right) = \sqrt{\tfrac{9\cdot 36}{2}}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\pi} = \sqrt{162}\cdot e^{i\cdot\frac{11}{12}\pi}$$ 1 P

(c.) Die Division in algebraischer Form:

$$\frac{z_i}{z_h} = \frac{\sqrt{8} + i\cdot\sqrt{8}}{\frac{5}{2} - i\cdot\sqrt{\frac{75}{4}}}\cdot\frac{\frac{5}{2} + i\cdot\sqrt{\frac{75}{4}}}{\frac{5}{2} + i\cdot\sqrt{\frac{75}{4}}} = \frac{\frac{5}{2}\cdot\sqrt{8} + \frac{5}{2}i\cdot\sqrt{8} + \sqrt{8}\cdot i\cdot\sqrt{\frac{75}{4}} + i^2\cdot\sqrt{\frac{8\cdot 75}{4}}}{\frac{25}{4} + \frac{75}{4}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{50} - \sqrt{150}\right) + i\cdot\left(\sqrt{50} + \sqrt{150}\right)}{25} = \left(\sqrt{\tfrac{2}{25}} - \sqrt{\tfrac{6}{25}}\right) + i\cdot\left(\sqrt{\tfrac{2}{25}} + \sqrt{\tfrac{6}{25}}\right)$$

Die Division in Exponentialform:

$$\frac{z_i}{z_h} = \frac{4\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}}{5\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{3}}} = \frac{4}{5}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4}{5}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{7}{12}\pi\right)}$$ 2 P

(d.) Betragsbildung ist einfach in der trigonometrischen Form und in der Exponentialform:

$$|z_a| = 4\cdot\underbrace{\left|e^{-i\cdot 60°}\right|}_{=1} = 4 \quad\text{und}\quad |z_j| = \sqrt{\tfrac{9}{2}}\cdot\underbrace{\left|\left(\cos(45°) + i\cdot\sin(45°)\right)\right|}_{=1} = \sqrt{\tfrac{9}{2}}$$ 1 P

(e.) Berechnung in der algebraischen Form: $u = \dfrac{4\cdot(3-i)^*}{(1+i)\cdot(-1+i)} = \dfrac{12+4i}{-1-i+i+i^2} = \dfrac{12+4i}{-2} = -6-2i$ 1 P

(f.) $v = (2-4i)^2 + \dfrac{\left|1-\sqrt{3}\cdot i\right|}{i} = \underbrace{\left(4-16i+16i^2\right)}_{\text{Binomische Formel}}\underbrace{-i\cdot\sqrt{1^2+3}}_{\text{weil } \frac{1}{i}=-i} = 4-16-16i-\sqrt{4}\cdot i = -12-18i$ 1 P

(g.)Zur Addition muss in die algebraische Form umgewandelt werden:

$$w = \underbrace{\frac{2i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i}}_{\substack{\text{erweitert mit dem komplex}\\ \text{Konjugierten des Nenners}}} + \underbrace{2\cdot\left(\cos(30°) - i\cdot\sin(30°)\right)}_{\substack{\text{umgewandelt von der Exponential-}\\ \text{form in die trigonometrische Form}}} + 3\cdot\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i\cdot\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$ 2 P

$$= \underbrace{\frac{6i+8i^2}{9+16} + 2\cdot\sqrt{\tfrac{3}{4}} - 2i\cdot\tfrac{1}{2} + 3\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}} + 3i\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}}}_{\text{Winkelfunktionen eingesetzt}} = \underbrace{\left(-\tfrac{8}{25} + \sqrt{3} + \sqrt{\tfrac{9}{2}}\right) + i\cdot\left(\tfrac{6}{25} - 1 + \sqrt{\tfrac{9}{2}}\right)}_{\text{sortiert nach Realteil und Imaginärteil}} \overset{TR}{\approx} 3.5337 + 1.3613i$$

(h.) Vorarbeit: Getrenntes Ausmultiplizieren des Zählers und des Nenners

$$(-2.78 + i\cdot 0.97)\cdot(0.18 + i\cdot 7.36) = -2.78\cdot 0.18 + i\cdot 0.97\cdot 0.18 - 2.78\cdot i\cdot 7.36 + i^2\cdot 0.97\cdot 7.36$$

$$= -7.6396 - i\cdot 20.2862$$

$$(8.63+i\cdot 11.27)^3 = 8.63^3+3\cdot 8.63^2\cdot 11.27i+3\cdot 8.63\cdot 11.27^2 i^2+i^3\cdot 11.27^3 \overset{TR}{\approx} -2645.628+1086.6286\cdot i$$

Dies setzt man nun in den Bruch ein:

2 P
$$x \overset{TR}{\approx} \frac{-7.6396-i\cdot 20.2862}{-2645.628+1086.6286\cdot i}\cdot\frac{-2645.628-1086.6286\cdot i}{-2645.628-1086.6286\cdot i} \overset{TR}{\approx} \frac{-1832.0254+i\cdot 61971.1466}{8180109.229}$$
$$\overset{TR}{\approx} 2.2396\cdot 10^{-4}+i\cdot 7.576\cdot 10^{-3}$$

## Aufgabe 8.4 Anwendungsbeispiel zur Euler-Formel

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 min | | Punkte 6 P |

Berechnen Sie mit Hilfe der beiden komplexen Zahlen $u=1+i$ und $v=3+i\cdot\sqrt{3}$ die Werte von $\sin(15°)$, $\cos(15°)$ sowie $\sin(75°)$ und $\cos(75°)$.

## Lösung zu 8.4

Da die Werte von Winkelfunktionen gesucht sind, liegt der Verdacht nahe, dass wir über Formen der komplexen Zahlen gehen müssen, die Winkel enthalten, als da wäre die Exponentialform und die trigonometrische Form. Diese beiden bilden wir als Vorarbeit:

1 P
$$\left.\begin{array}{l} |u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2} \\ \varphi_u=\arg(u)=\arctan\left(\frac{1}{1}\right)+0\cdot\pi=45° \end{array}\right\} \Rightarrow u=\sqrt{2}\cdot(\cos(45°)+i\cdot\sin(45°))=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°}$$

und

1 P
$$\left.\begin{array}{l} |v|=\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{12} \\ \varphi_v=\arg(v)=\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+0\cdot\pi=30° \end{array}\right\} \Rightarrow v=\sqrt{12}\cdot(\cos(30°)+i\cdot\sin(30°))=\sqrt{12}\cdot e^{i\cdot 30°}$$

Durch Addition und Subtraktion der Winkel von 30° und 45° erhält man Winkel von 15° und 75°. Die Addition der Winkel entspricht einer Multiplikation komplexer Zahlen in der Exponentialform, die Subtraktion der Winkel entspricht einer Division. Wir berechnen also:

$$u\cdot v=\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°}\right)\cdot\left(\sqrt{12}\cdot e^{i\cdot 30°}\right)=\sqrt{24}\cdot e^{i\cdot 75°}=\sqrt{24}\cdot(\cos(75°)+i\cdot\sin(75°)) \quad (\text{Gleichung } *^{1a})$$

1 P und

$$\frac{u}{v}=\frac{\left(\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 45°}\right)}{\left(\sqrt{12}\cdot e^{i\cdot 30°}\right)}\cdot=\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot e^{i\cdot 15°}=\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot(\cos(15°)+i\cdot\sin(15°)) \quad (\text{Gleichung } *^{2a})$$

Wie man sieht, tauchen die gesuchten Werte als Realteil und Imaginärteil des Produkts bzw. des Quotienten auf. Will man diese Real- und Imaginärteile bestimmen, so führt man die Multiplikation bzw. die Division in der algebraischen Form aus:

$$u \cdot v = (1+i) \cdot \left(3 + i \cdot \sqrt{3}\right) = 3 + 3i + \sqrt{3} \cdot i + \sqrt{3} \cdot i^2 = \left(3 - \sqrt{3}\right) + i \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) \quad \left(*^{1b}\right)$$

und 1 P

$$\frac{u}{v} = \frac{(1+i)}{\left(3 + i \cdot \sqrt{3}\right)} \cdot \frac{\left(3 - i \cdot \sqrt{3}\right)}{\left(3 - i \cdot \sqrt{3}\right)} = \frac{3 + 3i - i \cdot \sqrt{3} - i^2 \cdot \sqrt{3}}{3^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right) + i \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{12}\right) \quad \left(*^{2b}\right)$$

Setzt man nun die beiden Formen des Produktes nach den Gleichungen $\left(*^{1a}\right)$ und $\left(*^{1b}\right)$ gleich, so erhält man die gesuchten Winkelfunktionen für 75°. Durch Vergleich von $\left(*^{2a}\right)$ mit $\left(*^{2b}\right)$ erhält man in analoger Weise die Winkelfunktionen für 15°:

$$\sqrt{24} \cdot \left(\cos(75°) + i \cdot \sin(75°)\right) = \left(3 - \sqrt{3}\right) + i \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos(75°) = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\sqrt{24}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{8}} & \text{(Realteil)} \\ \sin(75°) = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{24}} = \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\sqrt{8}} & \text{(Imaginärteil)} \end{cases}$$ 1 P

und

$$\sqrt{\tfrac{1}{6}} \cdot \left(\cos(15°) + i \cdot \sin(15°)\right) = \left(\tfrac{3+\sqrt{3}}{12}\right) + i \cdot \left(\tfrac{3-\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos(15°) = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \sqrt{6} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}}\right) & \text{(Realteil)} \\ \sin(15°) = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{12}\right) \cdot \sqrt{6} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}\right) & \text{(Imaginärteil)} \end{cases}$$ 1 P

## Aufgabe 8.5 Wurzeln und Logarithmen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a…f.) je 5 min | (a…f.) | | Punkte (a…f.) je 3 P |
| | (g,i.) je 8 min | (g,i.) | | (g,i.) je 5 P |
| | (h.) je 7 min | (h.) | | (h) 4 P |

Führen Sie die nachfolgenden Berechnungen durch unter Angabe sämtlicher Haupt- und Nebenwerte und stellen Sie die Ergebnisse in der Gauß'schen Zahlenebene dar:

(a.) $z_a = \sqrt[5]{32}$ (b.) $z_b = \sqrt[5]{-32}$ (c.) $z_c = \sqrt[3]{2-4i}$

(d.) $z_d = \left(\sqrt{3} - i \cdot \sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ (e.) $z_e = (1+i)^{\frac{3}{2}}$ (f.) $z_f = \ln(3+i)$

(g.) $z_g = \ln\left(\sqrt{1+i}\right)$ (h.) $z_h = \ln\left(\frac{1}{2i}\right)$ (i.) $z_i = \ln\left((-3 - i \cdot 4)^{\frac{3}{4}}\right)$

# ▼ Lösung zu 8.5

**Arbeitshinweis:**

Wurzeln berechnet man in der Exponentialform. Dazu bringt man den Radikanden in die Exponentialform und zieht dann die Wurzel. Jede k-te Wurzel hat einen Hauptwert (Zählung $n=0$) und $(k-1)$ Nebenwerte (Zählung $n=1...k$), deren komplexe Zeiger in Winkeln von $\frac{1}{n}\cdot 360°$ zueinander stehen. Ließe man den Zählindex „$n$“ auf $k+1$ laufen oder noch weiter, so ergäben sich dadurch keine neuen Werte.

(a.) Radikand in Exponentialform: $32 = 32\cdot e^{i\cdot(0+2\pi\cdot n)}$ (mit Nebenwerten)

$\Rightarrow \quad z_a = \sqrt[5]{32}\cdot e^{i\cdot\frac{1}{5}\cdot(0+2\pi\cdot n)}$, wo Hauptwert $z_{a,0} = \sqrt[5]{32} = 2$ (mit $n=0$)

2 P und Nebenwerte $z_{a,n} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi\cdot n}{5}}$ (mit $n=1...4$).

Die Darstellung in der Gauß’schen Zahlenebene sieht man in Bild 8-5a.

1 P

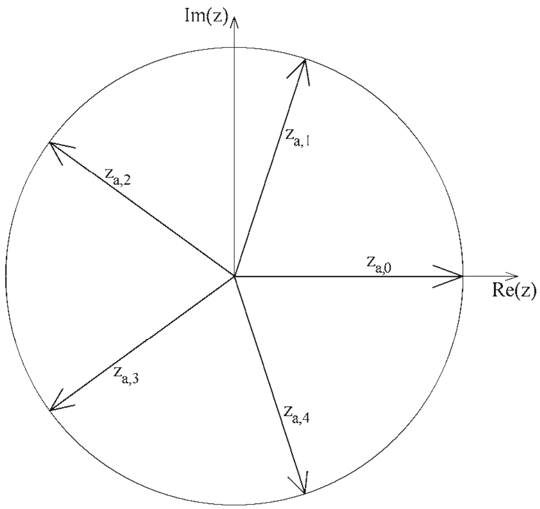



**Bild 8-5a**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_a = \sqrt[5]{32}$ in der Gauß’schen Zahlenebene.
Der Zeiger $z_{a,0}$ repräsentiert den Hauptwert.
Die Zeiger $z_{a,1}$ … $z_{a,4}$ geben die Nebenwerte wieder.
Der Kreis in der Graphik erinnert daran, dass alle Zeiger die gleiche Länge haben.

(b.) Radikand in Exponentialform: $32 = 32\cdot e^{i\cdot(\pi+2\pi\cdot n)}$ (mit Nebenwerten)

$\Rightarrow \quad z_b = \sqrt[5]{32}\cdot e^{i\cdot\frac{1}{5}\cdot(\pi+2\pi\cdot n)}$, wo Hauptwert $z_{a,0} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{5}}$ (mit $n=0$)

2 P und Nebenwerte $z_{a,n} = 2\cdot e^{i\cdot\frac{1+2\pi\cdot n}{5}}$ (mit $n=1...4$).

Die Darstellung in der Gauß’schen Zahlenebene zeigt Bild 8-5b.

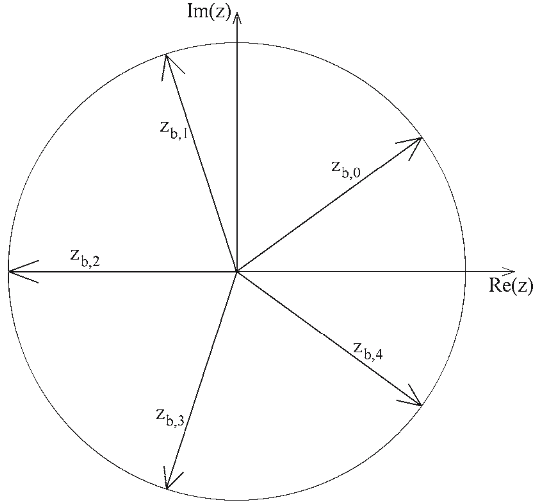



**Bild 8-5b**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_a = \sqrt[5]{-32}$ in der Gauß'schen Zahlenebene. 1 P
Der Zeiger $z_{b,0}$ repräsentiert den Hauptwert.
Die Zeiger $z_{b,1}$ … $z_{b,4}$ geben die Nebenwerte wieder.
Der Kreis in der Graphik erinnert daran, dass alle Zeiger die gleiche Länge haben.

(c.) Radikand in Exponentialform: Wir berechnen Betrag und Phase des Radikanden:

$$|2-4i| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} \text{ und } \quad \varphi = \arctan\left(\tfrac{-4}{2}\right) + 0\cdot\pi \overset{TR}{\approx} -63.43495°$$

und daraus die gesuchte Exponentialform: $2-4i \overset{TR}{\approx} \sqrt{20}\cdot e^{i\cdot(-63.43495°+n\cdot 360°)}$

$$\Rightarrow \quad z_c = \sqrt[3]{2-4i} = \sqrt[6]{20}\cdot e^{i\cdot\frac{1}{3}\cdot(-63.43495°+n\cdot 360°)} = \sqrt[6]{20}\cdot e^{i\cdot(-21.14498°+n\cdot 120°)} \qquad 2\text{ P}$$

Die Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene zeigt Bild 8-5c.

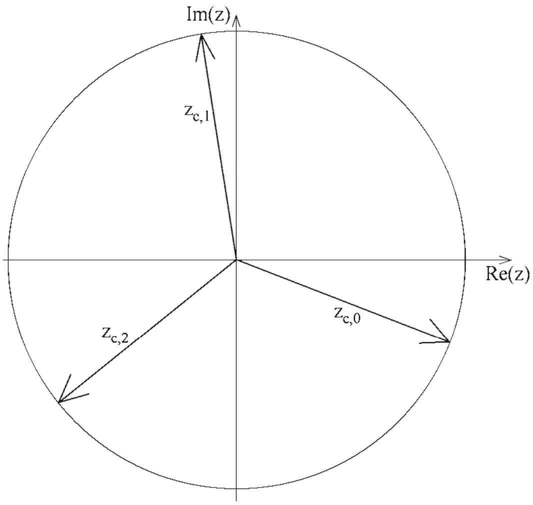



**Bild 8-5c**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_c = \sqrt[3]{2-4i}$ in der Gauß'schen Zahlenebene. 1 P
Der Zeiger $z_{c,0}$ repräsentiert den Hauptwert.
Die Zeiger $z_{c,1}$ … $z_{c,2}$ geben die Nebenwerte wieder.
Der Kreis in der Graphik erinnert daran, dass alle Zeiger die gleiche Länge haben.

(d.) Für die Potenzrechnung bringt man die Basis $\left(\sqrt{3} - i\cdot\sqrt{2}\right)$ in die Exponentialdarstellung:

Betrag: $\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\cdot i\right| = \sqrt{3+2} = \sqrt{5}$ und Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + 0\cdot\pi \overset{TR}{\approx} -39.23152°$

$\Rightarrow \quad \left(\sqrt{3}-i\cdot\sqrt{2}\right)=\sqrt{5}\cdot e^{i\cdot(-39.23152^\circ+n\cdot 360^\circ)}$ für die gesuchte Exponentialdarstellung.

Damit lässt sich die Potenzrechnung leicht ausführen:

2 P $\quad z_d=\left(\sqrt{3}-i\cdot\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\sqrt{5}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot e^{i\cdot\frac{2}{3}\cdot(-39.23152^\circ+n\cdot 360^\circ)}=\sqrt[3]{5}\cdot e^{i\cdot(-26.154347^\circ+n\cdot 240^\circ)}$

**Arbeitshinweis:**

Die Reihenfolge für die Nummerierung der Nebenwerte kann vom Rechenweg abhängen. Würde man (alternativ zu dem hier vorgestellten Rechenweg) zuerst quadrieren, danach die Periodizität der komplexen Exponentialfunktion berücksichtigen $(+n\cdot 360^\circ)$ und zuletzt die dritte Wurzel ziehen, so ergäben sich die Nebenwerte $z_d=\sqrt[3]{5}\cdot e^{i\cdot(-26.154347^\circ+n\cdot 120^\circ)}$. Lässt man „ $n$ “ von 0…2 laufen, so erhält man in beiden Fällen die selben Zahlen – nur die Nummern der Indizes der Nebenwerte unterscheiden sich.

Die Darstellung in der Gauß’schen Zahlenebene zeigt Bild 8-5d.

1 P

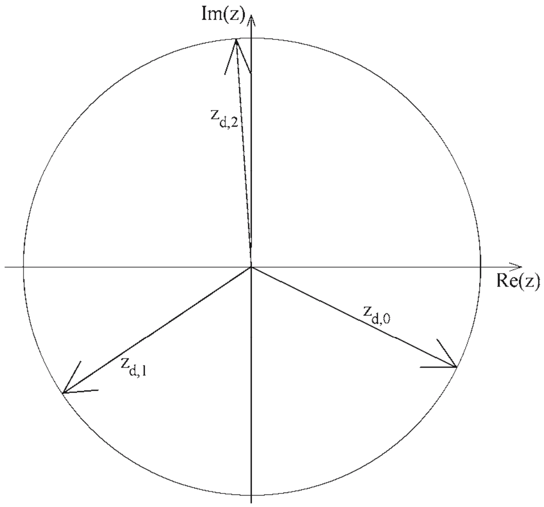



**Bild 8-5d**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_d=\left(\sqrt{3}-i\cdot\sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ in der Gauß’schen Zahlenebene.
Der Zeiger $z_{d,0}$ repräsentiert den Hauptwert.
Die Zeiger $z_{d,1}$ … $z_{d,2}$ geben Nebenwerte wieder, wobei deren Reihenfolge in Abhängigkeit vom Rechenweg variieren kann.
Der Kreis in der Graphik erinnert daran, dass alle Zeiger die gleiche Länge haben.

(e.) An dieser Stelle sei anhand eines leicht variierten Beispiels der in Aufgabenteil (d.) erwähnte alternative Rechenweg vorgeführt.

Zuerst wandeln wir die Basis in die Exponentialform um: $(1+i)=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot(45^\circ)}$ (Gleichung $**$)

Danach potenziert man mit 3: $(1+i)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3\cdot e^{i\cdot(3\cdot 45^\circ+n\cdot 360^\circ)}=\sqrt{8}\cdot e^{i\cdot(135^\circ+n\cdot 360^\circ)}$, wobei man die Periodizität der komplexen Exponentialfunktion zu allerletzt einführt.

2 P Erst jetzt ziehen wir die Wurzel: $\quad z_e=(1+i)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\sqrt{8}}\cdot e^{i\cdot\frac{1}{2}\cdot(135^\circ+n\cdot 360^\circ)}=\sqrt[4]{8}\cdot e^{i\cdot(67.5^\circ+n\cdot 180^\circ)}$

Die Veranschaulichung in der Gauß’schen Zahlenebene findet man in Bild 8-5e.

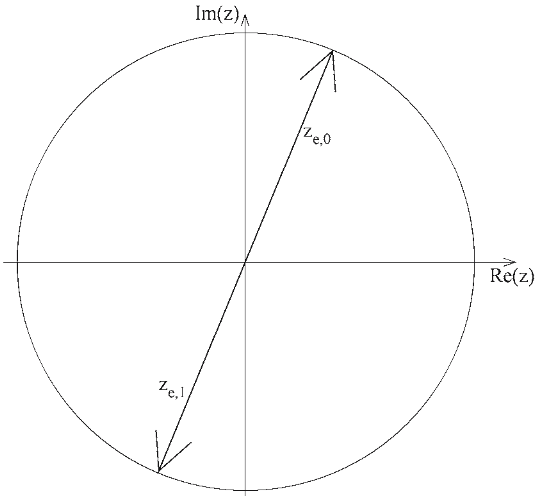



**Bild 8-5e**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_e = (1+i)^{\frac{3}{2}}$ in der Gauß'schen Zahlenebene. 1 P

Der Zeiger $z_{e,0}$ repräsentiert den Hauptwert.

Da es sich um eine Quadratwurzel handelt, existiert nur ein einziger Nebenwert, der unter dem Namen $z_{e,1}$ eingetragen ist.

Der Kreis in der Graphik erinnert daran, dass alle Zeiger die gleiche Länge haben.

**Arbeitshinweis:**

Die Umformung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen einer komplexen Zahl kann mitunter sehr schnell und einfach vonstatten gehen, wenn man sich deren Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene vorstellt. Im Beispiel von $(**)$ ist $(1+i)$ in die Exponentialform zu bringen. Stellt man sich diese Zahl in der Gauß'schen Zahlenebene vor (vom Nullpunkt aus eine reelle Einheit nach rechts und eine imaginäre nach oben), dann sieht man sofort den Phasenwinkel von 45° und ebenso den Betrag von 2 (letzteren nach Pythagoras).

(f.)

**Arbeitshinweis:**

Auch zum Logarithmieren muss das Argument zunächst in der Exponentialdarstellung vorliegen, allerdings wandelt die Berechnung des Logarithmus die Darstellungsform in die algebraische Darstellung um. Wir müssen also in einer Form starten, landen aber in einer anderen!

Wir beginnen also mit der Berechnung von Betrag und Phase:

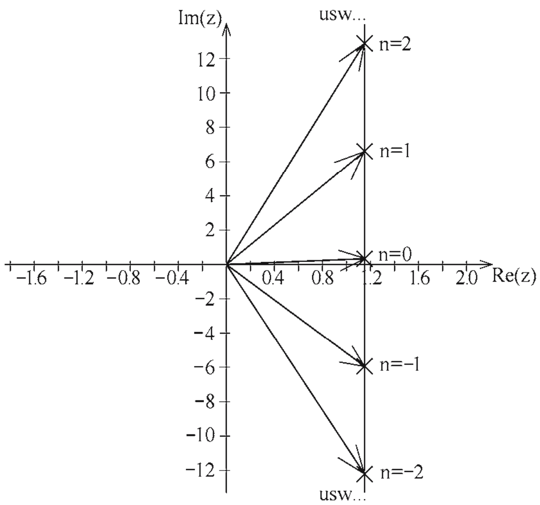
Betrag: $|3+i| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ und Phase: $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + 0 \cdot \pi \overset{TR}{\approx} 0.32175\,\text{rad}$

$$\Rightarrow \quad z_f = \ln(3+i) = \ln\left(\sqrt{10} \cdot e^{i\cdot(0.32175+n\cdot 2\pi)}\right) = \ln\left(\sqrt{10}\right) + i \cdot (0.32175 + n \cdot 2\pi)$$ 2 P

**Arbeitshinweis:**

Der Betrag einer komplexen Zahl (in Exponentialdarstellung) wird beim Logarithmieren zum Realteil des Logarithmus, die Phase wird zum Imaginärteil des Logarithmus.

Die Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene zeigt Bild 8-5f.




1 P

**Bild 8-5f**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_f = \ln(3+i)$ in der Gauß'schen Zahlenebene.

Der Zeiger $z_{f,0}$ repräsentiert den Hauptwert.

Beim Logarithmieren entstehen unendlich viele Nebenwerte.

(g.) Zuerst schreiben wir den Radikanten in Exponentialform: $1+i=\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4}+n\cdot 2\pi\right)}$

Dann ziehen wir die Wurzel mit allen Nebenwerten: $\sqrt{1+i}=\sqrt[4]{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{8}+n\cdot\pi\right)}$

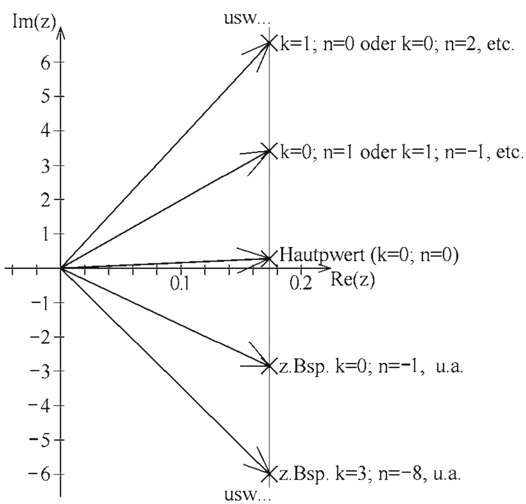
(Bei einer Quadratwurzel erhalten wir einen Hauptwert und einen Nebenwert.)

Erneut wird die Periodizität der komplexen Exponentialfunktion eingesetzt:

$\sqrt{1+i}=\sqrt[4]{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{8}+n\cdot\pi+\mathrm{k}\cdot 2\pi\right)}$ (mit „k“ und „n“ zwei natürlichen Zahlen)

3 P Nun logarithmiert man: $z_g=\ln\left(\sqrt{1+i}\right)=\ln\left(\sqrt[4]{2}\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{8}+n\cdot\pi+\mathrm{k}\cdot 2\pi\right)}\right)=\frac{1}{4}\ln(2)+i\cdot\left(\frac{\pi}{8}+n\cdot\pi+\mathrm{k}\cdot 2\pi\right)$

Wie man in der Gauß'schen Zahlenebene (Bild 8-5g) sieht, tauchen mit „$n=1,2$“ zwei Gruppen von Nebenwerten auf, von denen jede unendlich viele Nebenwerte zu „$k$“ hat.



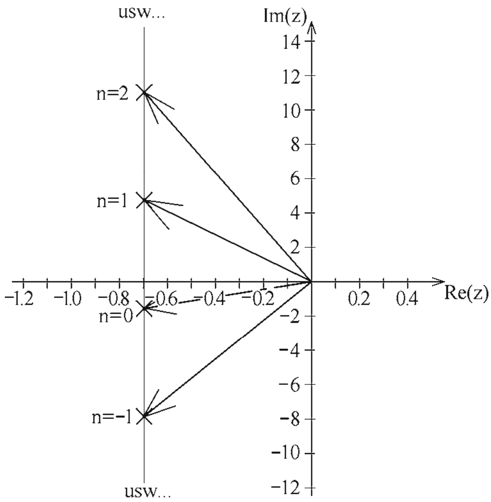

2 P

**Bild 8-5g**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_g=\ln\left(\sqrt{1+i}\right)$ in der Gauß'schen Zahlenebene.
Da zwei Nebenwerte erzeugende Rechenoperationen durchgeführt wurden, tauchen zwei Gruppen von Nebenwerten auf, die durch zweierlei Indizes ($n$ und $k$) gekennzeichnet werden.

(h.) Wegen $\frac{1}{i}=-i$ ist die Lage des Arguments in der Gauß'schen Ebene leicht vorzustellen:

$\frac{1}{2i}$ liegt eine halbe Einheit in negativer Richtung des Imaginärteils.

$\Rightarrow\ \frac{1}{2i}=-\frac{1}{2}\cdot i=\frac{1}{2}\cdot e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right)}$. Damit ist $z_h=\ln\left(\frac{1}{2i}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\cdot e^{i\cdot\left(-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right)}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)+i\cdot\left(-\frac{\pi}{2}+n\cdot 2\pi\right)$. 2 P




2 P

**Bild 8-5h**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $z_f=\ln\left(\frac{1}{2i}\right)$ in der Gauß'schen Zahlenebene.
Der Zeiger $n=0$ repräsentiert den Hauptwert. Beim Logarithmieren entstehen unendlich viele Nebenwerte.

(i.) Zuerst findet eine Potenzrechnung statt. Dafür benötigen wir die Basis in Exponentialform.

Betrag: $|-3-i\cdot 4|=\sqrt{9+16}=5$ und Phase: $\varphi=\underbrace{\arctan\left(\frac{-4}{-3}\right)-1\cdot\pi}_{\substack{\text{Argumentfunktion}\\ \text{im 3. Quadranten}}}\overset{TR}{\approx}-2.2143$

$\Rightarrow\ (-3-i\cdot 4)\overset{TR}{\approx}5\cdot e^{i\cdot(-2.2143+n\cdot 2\pi)}\quad\Rightarrow\ (-3-i\cdot 4)^{\frac{3}{4}}\overset{TR}{\approx}5^{\frac{3}{4}}\cdot e^{i\cdot\left(-1.6607+n\cdot\frac{3}{2}\pi\right)}$

Erneutes Einführen der Periodizität der komplexzahligen Exponentialfunktion und Logarithmieren führt schließlich zum Ergebnis, welches in Bild 8-5i dargestellt ist:

$z_i=\ln\left(5^{\frac{3}{4}}\cdot e^{i\cdot\left(-1.6607+n\cdot\frac{3}{2}\pi+\mathrm{k}\cdot 2\pi\right)}\right)=\frac{3}{4}\cdot\ln(5)+i\left(-1.6607+n\cdot\frac{3}{2}\pi+\mathrm{k}\cdot 2\pi\right)$ 3 P

2 P

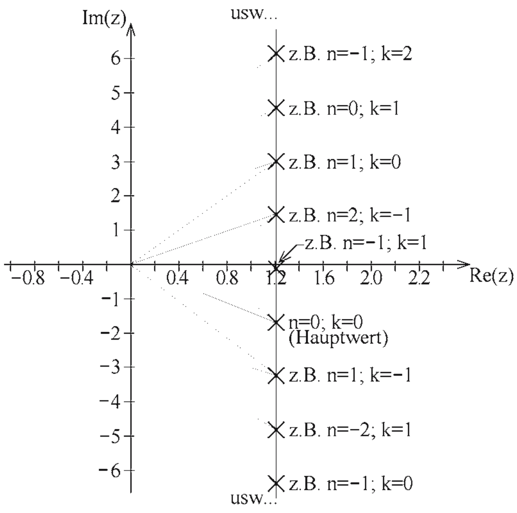



**Bild 8-5i**
Veranschaulichung der komplexen Aufgabe $\ln\left(\left(-3-i\cdot 4\right)^{\frac{3}{4}}\right)$ in der Gauß'schen Zahlenebene.
Der Hauptwert ist zu finden unter $n=0;\, k=0$. Alle anderen Werte sind Nebenwerte.

## Aufgabe 8.6 Vertiefende Rechenbeispiele

| | | | | | Punkte : |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b,c,d.) | 5 min<br>je 2 min | (a…d) | | (a.) 3 P (b,c,d.) je 1 P |
| | (e) | 8 min | (e) | | (e.) 5 P |

Berechnen Sie bitte unter Beschränkung auf die Hauptwerte:

(a.) $z_a = (3+4i)^{(2-3i)}$ (b.) $z_b = i^i$ (c.) $z_c = \left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{-2}\right)}$

(d.) $z_d = (-i)^{2i}$ (e.) $z_e = \ln \frac{\left(1+i\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt[3]{-2+i}}$

## Lösung zu 8.6

**Arbeitshinweis:**
Bei (a…d) handelt es sich um Aufgaben der komplexzahligen Potenzrechnung. Dafür gibt es einen Weg, der prinzipiell für alle Aufgaben dieses Typs funktioniert. Er basiert auf der Gleichung: $a^b = e^{\ln\left(a^b\right)} = e^{b\cdot\ln(a)}$

Die durchzuführenden Rechenschritte sind dann diese:

Schritt 1 → Basis „ $a$ “ in Exponentialform darstellen

Schritt 2 → Basis „ $a$ “ logarithmieren. Der Logarithmus hat automatisch algebraische Form.

Schritt 3 → Multiplikation von „ $\ln(a)$ “ mit „ $b$ “ in der algebraischen Form.

Schritt 4 → Das Ergebnis von Schritt 3 wird als Exponent in die Exponentialfunktion gestellt, wodurch man automatisch wieder in die Exponentialform gelangt.

Damit lösen wir jetzt die Aufgabenteile (a.) … (d.):

(a.) Wir ordnen zu: $(3+4i)^{(2-3i)} = a^b$

Schritt 1: $a = 3+4i$ → Betrag $|a| = \sqrt{9+16}$ und Phase $\varphi = \underbrace{\arctan\left(\frac{4}{3}\right) - 0\cdot\pi}_{\text{1. Quadrant}} \overset{TR}{\approx} 0.927295\,\text{rad}$

Schritt 2: $a = 5\cdot e^{i\cdot(0.927295)} \quad \Rightarrow \quad \ln(a) = \ln(5) + i\cdot 0.927295$

Schritt 3: $\Rightarrow \quad b\cdot\ln(a) = (2-3i)\cdot(\ln(5) + i\cdot 0.927295)$

$$= 2\cdot\ln(5) - 3i\cdot\ln(5) + 2i\cdot 0.927295 - 3i^2\cdot 0.927295 \overset{TR}{\approx} 6.00076 - i\cdot 2.97372$$

3 P

Schritt 4: $z_a = e^{b\cdot\ln(a)} = e^{6.00076 - i\cdot 2.97372} \overset{TR}{\approx} 403.7355\cdot e^{-i\cdot 2.97372}$ (in Exponentialform)

(b.) Hier die Basis $a = i$ und der Exponent $b = i$ .

Schritt 1: Die komplexe Einheit kennt man in Exponentialdarstellung $i = 1\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$

Schritt 2: Deren Logarithmus beträgt: $\ln(i) = \ln\left(e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = i\cdot\frac{\pi}{2}$

Schritt 3: $\Rightarrow \quad b\cdot\ln(a) = i\cdot\left(i\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

1 P

Schritt 4: $z_b = e^{b\cdot\ln(a)} = e^{-\frac{\pi}{2}} \overset{TR}{\approx} 0.2079796$

(c.) $z_c = \left(\sqrt{2}\right)^{\left(\sqrt{-2}\right)}$

Schritt 1: Eine reelle Zahl lässt sich leicht in Exponentialdarstellung bringen: $\sqrt{2} = \sqrt{2}\cdot e^{i\cdot 0}$

Schritt 2: Deren Logarithmus beträgt: $\ln(a) = \ln\left(\sqrt{2}\right)$

Schritt 3: $\Rightarrow \quad \underbrace{b\cdot\ln(a) = \ln\left(\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{-2} = i\cdot\sqrt{2}\cdot\ln\left(\sqrt{2}\right)}_{\text{weil } \sqrt{-2} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{2} = i\cdot\sqrt{2}}$

1 P

Schritt 4: $z_c = e^{b\cdot\ln(a)} = e^{i\cdot\sqrt{2}\cdot\ln\left(\sqrt{2}\right)} \overset{TR}{\approx} e^{i\cdot(0.49013)}$

(d.)

Schritt 1: Basis in Exponentialdarstellung $a = -i = 1\cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}$

Schritt 2: Deren Logarithmus beträgt: $\ln(a) = \ln\left(e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}\right) = -i\cdot\frac{\pi}{2}$

Schritt 3: $\Rightarrow \quad b\cdot\ln(a) = 2i\cdot\left(-i\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

1 P

Schritt 4: $z_d = e^{b\cdot\ln(a)} = e^{-2i^2\cdot\frac{\pi}{2}} = e^{\pi}$

(e.) Da der Nenner in keiner der standardisierten Formen angegeben ist, müssen wir ihn in eine solche bringen. In welcher der Formen wir arbeiten, entscheiden wir wie folgt:
Der Logarithmus erfordert als Argument eine Exponentialdarstellung. In diese Form muss also der Bruch gebracht werden. Da in dieser Form auch die Division des Zählers durch den Nenner bequem ist, bringen wir beide in die Exponentialdarstellung.

Der Zähler $1+i\cdot\sqrt{2}$ → Betrag: $\left|1+i\cdot\sqrt{2}\right|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}$; Phase: $\varphi=\underbrace{\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)+0\cdot\pi}_{\text{1. Quadrant}}\overset{TR}{\approx}0.9553\text{ rad}$ $\quad\Rightarrow\quad 1+i\cdot\sqrt{2}\overset{TR}{\approx}\sqrt{3}\cdot e^{i\cdot 0.9553}$

3 P Der Nenner → Wir bringen zuerst den Radikanden in die Exponentialform und ziehen anschließend die dritte Wurzel.

$-2+i$ → Betrag: $\left|-2+i\right|=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$; Phase: $\varphi=\underbrace{\arctan\left(\frac{1}{-2}\right)+1\cdot\pi}_{\text{2. Quadrant}}\overset{TR}{\approx}2.677945\text{ rad}$ $\quad\Rightarrow\quad -2+i\overset{TR}{\approx}\sqrt{5}\cdot e^{i\cdot 2.677945}$

Wegen der in der Aufgabenstellung vorgegebenen Beschränkung auf die Hauptwerte ziehen wir die Wurzel: $\sqrt[3]{-2+i}\overset{TR}{\approx}\sqrt[6]{5}\cdot e^{i\cdot 0.89265}$

Nachdem wir Zähler und Nenner in der Exponentialform kennen, ist die Division einfach:

$$\frac{\left(1+i\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt[3]{-2+i}}\overset{TR}{\approx}\frac{\sqrt{3}\cdot e^{i\cdot 0.9553}}{\sqrt[6]{5}\cdot e^{i\cdot 0.89265}}\overset{TR}{\approx}\sqrt[6]{\frac{27}{5}}\cdot e^{i\cdot(0.06265)}$$

Logarithmieren liefert das Endergebnis:

2 P $$z_e=\ln\left(\frac{\left(1+i\cdot\sqrt{2}\right)}{\sqrt[3]{-2+i}}\right)\overset{TR}{\approx}\ln\left(\sqrt[6]{\frac{27}{5}}\cdot e^{i\cdot(0.06265)}\right)\overset{TR}{\approx}\ln\left(\sqrt[6]{\frac{27}{5}}\right)+0.06265\cdot i$$

## Aufgabe 8.7 Winkelfunktionen und Hyperbelfunktionen

| | | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b) | je 4 min | (a,b.) | | (a,b) | je 2 P |
| | (c.)<br>(d.) | 6 min<br>15 min | (c,d.) | | (c.) 3 P | (d.) 8 P |

Berechnen Sie bitte unter Beschränkung auf die Hauptwerte:

(a.) $z_a=\sin\left(\pi+i\,\pi\right)$ (b.) $z_b=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2.99322\cdot i\right)$

(c.) $z_c=\cosh\left(\ln(2)+\frac{\pi}{4}\cdot i\right)$ (d.) $z_d=\arcsin\left(-1+i\right)$

## Lösung zu 8.7

**Arbeitshinweis:**

Es handelt sich um komplexwertige Winkelfunktionen, Hyperbelfunktionen, Arcus- oder Areafunktionen. Die beiden erstgenannten führt man auf die Exponentialfunktion zurück, die beiden letztgenannten auf den Logarithmus. Von der Exponentialfunktion kommt man mit der Euler-Formel in eine der definierten Darstellungsformen (in die algebraische), vom Logarithmus aus führt der Weg in die algebraische Darstellungsform, indem man das Argument des Logarithmus in Exponentialform schreibt und anschließend logarithmiert.

(a.) In Formelsammlungen findet man: $\sin(z) = -\frac{1}{2} i \cdot \left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right)$

Damit ist

$$z_a = \sin(\pi + i\pi) = -\tfrac{1}{2} i \cdot \left(e^{i\cdot(\pi+i\pi)} - e^{-i\cdot(\pi+i\pi)}\right) = -\tfrac{1}{2} i \cdot \left(e^{i^2\pi+i\pi} - e^{-i^2\pi-i\pi}\right) \qquad \text{2 P}$$

$$= -\tfrac{1}{2} i \cdot \left(e^{i^2\pi} \cdot e^{i\pi} - e^{-i^2\pi} \cdot e^{-i\pi}\right) = -\tfrac{1}{2} i \cdot \left(e^{-\pi} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} - e^{+\pi} \cdot \underbrace{e^{-i\pi}}_{=-1}\right) = -\tfrac{1}{2} i \cdot \left(-e^{-\pi} + e^{+\pi}\right) \overset{TR}{\approx} -11.54874 \cdot i$$

(b.) Es ist $z_b = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\cdot i\right) = -\frac{1}{2} i \cdot \left(e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}-3\cdot i\right)} - e^{-i\cdot\left(\frac{\pi}{2}-3\cdot i\right)}\right) = -\frac{1}{2} i \cdot \left(\underbrace{e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}}_{=+i} \cdot e^{-3\cdot i^2} - \underbrace{e^{-i\cdot\frac{\pi}{2}}}_{=-i} \cdot e^{+3\cdot i^2}\right)$

$$= -\tfrac{1}{2} i \cdot \left(i \cdot e^{-3\cdot i^2} + i \cdot e^{+3\cdot i^2}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(e^3 + e^{-3}\right) \overset{TR}{\approx} 10.068 \qquad \text{2 P}$$

(c.) In Formelsammlungen findet man $\cosh(z) = \cos(-i\cdot z)$. Damit lässt sich umformen:

$$z_c = \cosh\left(\ln(2) + \tfrac{\pi}{4} \cdot i\right) = \cos\left(-i \cdot \ln(2) - i^2 \cdot \tfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - i \cdot \ln(2)\right)$$

Setzt man nun die komplexe Cosinus-Funktion $\cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{i\cdot z} + e^{-i\cdot z}\right)$ ein, so erhält man

$$z_c = \tfrac{1}{2} \cdot \left(e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{4} - i\cdot\ln(2)\right)} + e^{-i\cdot\left(\frac{\pi}{4} - i\cdot\ln(2)\right)}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-i^2\cdot\ln(2)} + e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot e^{+i^2\cdot\ln(2)}\right) \qquad \text{2 P}$$

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \left(e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{e^{\ln(2)}}_{=2} + e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{e^{-\ln(2)}}_{=\frac{1}{2}}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} + \tfrac{1}{2} \cdot e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}\right) = e^{i\cdot\frac{\pi}{4}} + \tfrac{1}{4} e^{-i\cdot\frac{\pi}{4}}$$

Dies ist immer noch keine der Standard-Darstellungsformen. Um dorthin zu gelangen, müssen die Exponentialfunktionen ausgerechnet werden, wozu man die Euler-Formel benutzt. Nach ihr gilt $e^{\pm i\cdot z} = \cos(z) \pm i \cdot \sin(z)$. Damit wird

$$z_c = e^{\pm i\cdot z} = \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right] + \tfrac{1}{4} \cdot \left[\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right] = \tfrac{5}{4} \cdot \underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{1/2}} + \tfrac{3}{4} i \cdot \underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{1/2}} = \sqrt{\tfrac{25}{32}} + \sqrt{\tfrac{9}{32}} \cdot i \qquad \text{1 P}$$

**Stolperfalle:**

Komplexwertige Rechenaufgaben sind erst dann fertig bearbeitet, wenn das Ergebnis in eine der standardisierten Formen gebracht ist. Nachdem hier die algebraische Form vorliegt, darf man jetzt aufhören, weiter zu rechnen.

(d.) Laut Formelsammlung ist $\arcsin(z) = -i \cdot \ln\left(i \cdot z + \sqrt{1 - z^2}\right)$. Damit können wir umformen:

$$z_d = \arcsin(-1+i) = -i \cdot \ln\left(i \cdot (-1+i) + \sqrt{1 - (-1+i)^2}\right) = -i \cdot \ln\left(-i + i^2 + \sqrt{1 - \left(1 - 2i + i^2\right)}\right) \qquad \text{2 P}$$

$$= -i \cdot \ln\left(-i + i^2 + \sqrt{1 - 1 + 2i - i^2}\right) = -i \cdot \ln\left(-i - 1 + \sqrt{2i+1}\right) \qquad (**)$$

Logarithmiert werden kann nur dann, wenn das Argument in Exponentialform steht. Dorthin können wir aber nur gelangen, wenn wir die Wurzel $\left(\sqrt{2i+1}\right)$ ausrechnen. Zum Wurzelziehen ist es nötig, den Radikanten $r = (2i+1)$ in Exponentialform zu bringen:

2 P $r=(1+2i) \Rightarrow$ Betrag: $|r|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$ ; Phase: $\varphi=\arctan\left(\frac{2}{1}\right)\overset{TR}{\approx}63.435°$ $\Rightarrow r\overset{TR}{\approx}\sqrt{5}\cdot e^{i\cdot 63.435°} \Rightarrow \sqrt{r}\overset{TR}{\approx}\sqrt[4]{5}\cdot e^{i\cdot 31.7175°}$

Da im Argument des Logarithmus zur Wurzel noch Zahlen in algebraischer Darstellung addiert werden müssen, müssen wir $\sqrt{r}$ ebenfalls in die algebraische Darstellung bringen. Dafür benutzen wir die Euler-Formel:

$$\sqrt{r}\overset{TR}{\approx}\sqrt[4]{5}\cdot\left(\cos(31.7175°)+i\cdot\sin(31.7175°)\right)\overset{TR}{\approx}\sqrt[4]{5}\cdot(0.85065+i\cdot 0.52573)\overset{TR}{\approx}1.27202+i\cdot 0.78615$$

Damit lässt sich die Addition ausführen, die zum Argument des Logarithmus führt:

2 P $a=-i-1+\sqrt{2i+1}=-i-1+\sqrt{r}\overset{TR}{\approx}(-1-i)+(1.27202+i\cdot 0.78615)=0.27202-i\cdot 0.21385$

Da Additionen in der algebraischen Darstellung erfolgen müssen, sind wir in dieser Form gelandet. Zum Logarithmieren aber benötigen wir die Exponentialform. Die Umwandlung geschieht wie folgt:

$a\overset{TR}{\approx}(0.27202+i\cdot 0.21385) \Rightarrow$ Betrag: $|a|\overset{TR}{\approx}\sqrt{(0.27202)^2+(-0.21385)^2}=0.3460$ ; Phase: $\varphi\overset{TR}{\approx}\arctan\left(\frac{-0.21385}{+0.27202}\right)\overset{TR}{\approx}-0.66624$ rad

$$\Rightarrow a\overset{TR}{\approx}0.3460\cdot e^{-i\cdot 0.66624}$$

Jetzt ist das Argument des Logarithmus zum Logarithmieren bereit:

$$\ln\left(-i-1+\sqrt{2i+1}\right)=\ln(a)\overset{TR}{\approx}\ln(0.3460)-i\cdot 0.66624\overset{TR}{\approx}-1.0613-i\cdot 0.66624$$

Eingesetzt in $(**)$ erhalten wir nun das Endergebnis (in algebraischer Darstellungsform):

2 P $z_d=\arcsin(-1+i)=-i\cdot\ln(a)\overset{TR}{\approx}-i\cdot(-1.0613-i\cdot 0.66624)=-0.66624+i\cdot 1.0613$

## Aufgabe 8.8 Faktorisierung komplexer Polynome

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | (a.) | | Punkte |
| | (b.) | 6 min | (b.) | | (a.) 5 P (b) 3 P |
| | (c.) | 8 min | (c.) | | |
| | (d.) | 10 min | (d.) | | (c.) 4 P (d) 5 P |

Zerlegen Sie die nachfolgenden Polynome vollständig in Produkte aus Linearfaktoren:

(a.) $P_a(x)=x^2+(-1+i)\cdot x+(4+7i)$ (b.) $P_b(x)=x^3-5x^2-8x-2$

(c.) $P_c(x)=x^2+(-3+2i)\cdot x+(5-5i)$ (d.) $P_d(x)=x^4-4x^3-x^2+38x-26$

Tipp: Das Polynom $P_d(x)$ hat eine Nullstelle bei $x_1=3+2i$

## Lösung zu 8.8

**Arbeitshinweis:**

Im Komplexen haben Polynome des Grades $n$ prinzipiell $n$ Nullstellen und können daher immer in genau $n$ Linearfaktoren zerlegt werden.

(a.) Wir arbeiten mit der pq-Formel: $P_a(x) = x^2 + (-1+i)\cdot x + (4+7i) = 0$ und finden

$$x_{1/2} = -\tfrac{1}{2}\cdot(-1+i) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot(-1+i)^2 - (4+7i)} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\right) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot\left(1-2i+i^2\right) - (4+7i)} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\right) \pm \sqrt{-4 - \tfrac{15}{2}i}$$ 1 P

Wurzeln zieht man in der Exponentialform, wir wandeln also den Radikanten in diese um:

$$r = -4 - \tfrac{15}{2}i \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Betrag: } |r| = \sqrt{4^2 + \tfrac{15}{2}^2} = \sqrt{\tfrac{4\cdot 16+225}{4}} = \tfrac{17}{2} \\ \text{Phase: } \varphi = \underbrace{\arctan\left(\frac{-\frac{15}{2}}{-4}\right) - \pi}_{\text{im 3. Quadranten}} \overset{TR}{\approx} -118.072487° \end{array} \quad \Rightarrow \quad r \overset{TR}{\approx} \tfrac{17}{2}\cdot e^{-i\cdot 118.072487°}$$ 1 P

Daraus lässt sich die Wurzel ziehen und diese lässt sich anschließend mit Hilfe der Euler-Formel in die algebraische Form umwandeln:

$$\sqrt{-4 - \tfrac{15}{2}i} \overset{TR}{\approx} \sqrt{\tfrac{17}{2}\cdot e^{-i\cdot 118.072487°}} = \sqrt{\tfrac{17}{2}}\cdot e^{-i\cdot 59.0362435°}$$
$$= \sqrt{\tfrac{17}{2}}\cdot\left(\cos(59.0362435°) - i\cdot\sin(59.0362435°)\right) \overset{TR}{\approx} 1.49999999 - i\cdot 2.50000001 \approx \tfrac{3}{2} - i\cdot\tfrac{5}{2}$$ 1 P

Da die Wurzel sehr nahe bei Brüchen mit „glatten“ Zahlen liegt, drängt sich der Verdacht auf, dass die Abweichung davon nur auf Rundungsfehlern des Taschenrechners beruht. Dies können wir am Ende der Berechnung durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren testen.
Die Wurzel setzen wir in $x_{1/2}$ ein und erhalten

$$x_{1/2} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\right) \pm \sqrt{-4 - \tfrac{15}{2}i} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{i}{2}\right) \pm \left(\tfrac{3}{2} - i\cdot\tfrac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 = 2 - 3i \\ x_2 = -1 + 2i \end{array}$$

Es folgt der Test durch Ausmultiplizieren der Linearfaktoren:

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = (x - 2 + 3i)\cdot(x + 1 - 2i) = x^2 - 2x + 3ix + x - 2 + 3i - 2ix + 4i - 6i^2$$
$$= x^2 + (i-1)\cdot x + (4+7i) \quad \rightarrow \quad \text{passt}$$ 2 P

Anmerkung:
Wir haben beim Wurzelziehen mit dem Hauptwert der Wurzel gearbeitet. Anstelle dessen hätte man auch auf die Idee kommen können, mit dem Nebenwert zu arbeiten. Diese Berechnung führt aber zu den selben Werten für $x_1$ und $x_2$. Der Grund ist der:
Bei Quadratwurzeln gibt es genau einen Hauptwert und einen Nebenwert; diese beiden sind gegeneinander um 180° phasenverschoben, d.h. der Nebenwert ist genau das negative des Hauptwertes. Nun steht vor der Wurzel in der pq-Formel aber ohnehin das Rechenzeichen „ $\pm$ “, sodass gerade diese Vorzeichenfrage keine Rolle spielt.

(b.) Durch Probieren findet man eine Nullstelle bei $x_1 = -1$ (also $P_b(-1) = -1 - 5 + 8 - 2 = 0$).
Diese spalten wir durch Polynomdivision von dem Polynom dritten Grades ab:

$$\begin{array}{l} \left(x^3 - 5x^2 - 8x - 2\right) : (x + 1) = x^2 - 6x - 2 \\ -\left(x^3 + x^2\right) \\ \quad\; -6x^2 - 8x \\ \quad -\left(-6x^2 - 6x\right) \\ \qquad\quad -2x - 2 \\ \qquad -\left(-2x - 2\right) \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$ 2 P

also:

$$P_b(x) = \left(x^3 - 5x^2 - 8x - 2\right) = (x+1)\cdot\left(x^2 - 6x - 2\right)$$

Die Nullstellen des übrig bleibenden quadratischen Polynoms suchen wir mit der pq-Formel:

$$x^2-6x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x_{2/3}=3\pm\sqrt{9+2} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x_2=3+\sqrt{11} \\ x_3=3-\sqrt{11} \end{array}$$

1 P

Somit ist: $P_b(x)=x^3-5x^2-8x-2=(x+1)\cdot\left(x-3-\sqrt{11}\right)\cdot\left(x-3+\sqrt{11}\right)$

Das hätte auch ohne Kenntnis der komplexen Zahlen funktioniert. Auch jetzt soll man nicht die elementare Rechenkunst in den reellen Zahlen vergessen.

(c.) Wir üben nochmals die pq-Formel in $\mathbb{C}$ und suchen die Nullstellen von $P_c(x)$:

1 P $$x_{1/2}=-\tfrac{1}{2}\cdot(-3+2i)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot(-3+2i)^2-(5-5i)}=\left(\tfrac{3}{2}-i\right)\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}\cdot\left(9-12i+4i^2\right)-5+5i}=\left(\tfrac{3}{2}-i\right)\pm\sqrt{-\tfrac{15}{4}+2i}$$

Wieder wandeln wir den Radikanten zwecks Wurzelziehen in die Exponentialform um

1 P

$$r=-\tfrac{15}{4}+2i \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} \text{Betrag:} & |r|=\sqrt{\left(\tfrac{15}{4}\right)^2+2^2}=\sqrt{\tfrac{225+64}{16}}=\tfrac{17}{4} \\ \text{Phase:} & \varphi=\underbrace{\arctan\left(\frac{2}{-\frac{15}{4}}\right)+\pi}_{\text{im 2. Quadranten}}\overset{TR}{\approx}151.9275^\circ \end{array} \quad\Rightarrow\quad r\overset{TR}{\approx}\tfrac{17}{4}\cdot e^{i\cdot 151.9275^\circ}$$

und ziehen dann die Wurzel:

1 P $$\sqrt{-\tfrac{15}{4}+2i}\overset{TR}{\approx}\sqrt{\tfrac{17}{4}\cdot e^{i\cdot 151.9275^\circ}}=\sqrt{\tfrac{17}{4}}\cdot e^{i\cdot 75.96376^\circ}=\sqrt{\tfrac{17}{4}}\cdot\left(\cos(75.96376^\circ)+i\cdot\sin(75.96376^\circ)\right)\overset{TR}{\approx}\tfrac{1}{2}+i\cdot 2 \;.$$

Einsetzen in die pq-Formel liefert $x_1$ und $x_2$

$$x_{1/2}=\left(\tfrac{3}{2}-i\right)\pm\sqrt{-\tfrac{15}{4}+2i}=\left(\tfrac{3}{2}-i\right)\pm\left(\tfrac{1}{2}+i\cdot 2\right) \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} x_1=2+i \\ x_2=1-3i \end{array}$$

und somit die gesuchte Zerlegung von $P_c(x)$ in Linearfaktoren

1 P $$P_c(x)=x^2+(-3+2i)\cdot x+(5-5i)=(x-2-i)\cdot(x-1+3i)$$

(d.)

**Arbeitshinweis:**

Komplexe Nullstellen mit nicht verschwindendem Imaginärteil treten immer paarweise auf, und zwar ist mit jeder Nullstelle auch ihr komplex Konjugiertes eine Nullstelle.

Deshalb verrät uns der Tipp in der Aufgabenstellung gleich zwei Nullstellen:

$$x_1=3+2i \qquad \text{und} \qquad x_2=3-2i$$

Diese beiden Nullstellen müssen wir durch Polynomdivision von $P_d(x)$ abspalten. Um aber nicht die Polynomdivision zweimal ausführen zu müssen, multiplizieren wir zuerst die Linearfaktoren aus

1 P $$(x-x_1)\cdot(x-x_2)=(x-3-2i)\cdot(x-3+2i)=x^2-3x-2ix-3x+9+6i+2ix-6i-4i^2=x^2-6x+13 \;,$$

damit anschließend eine einzige Polynomdivision genügt. (Übrigens erspart man sich durch diese Vorgehensweise komplexe Zahlen in der Polynomdivision):

$$
\begin{array}{l}
\left(x^4-4x^3-x^2+38x-26\right):\left(x^2-6x+13\right)=x^2+2x-2\\
-\left(x^4-6x^3+13x^2\right)\\
\quad 2x^3-14x^2+38x\\
\quad -\left(2x^3-12x^2+26x\right)\\
\qquad -2x^2+12x-26\\
\qquad -\left(-2x^2+12x-26\right)\\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$ 2 P

Somit folgt $P_d(x)=\left(x^4-4x^3-x^2+38x-26\right)=\left(x^2-6x+13\right)\cdot\left(x^2+2x-2\right)$

Was noch aussteht, ist die Bestimmung der beiden Nullstellen im Faktor $\left(x^2+2x-2\right)$, die wir mittels pq-Formel vollziehen: $\left(x^2+2x-2\right)=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+2} \;\Rightarrow\; \begin{array}{l} x_1=-1+\sqrt{3}\\ x_2=-1-\sqrt{3}\end{array}$

Die Zerlegung des Polynoms $P_d(x)$ in Linearfaktoren lautet also:

$P_d(x)=x^4-4x^3-x^2+38x-26=(x-3-2i)\cdot(x-3+2i)\cdot\left(x+1-\sqrt{3}\right)\cdot\left(x+1+\sqrt{3}\right)$ 2 P

## Aufgabe 8.9 Komplexwertige Partialbruchzerlegung

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 min | | Punkte<br>8 P |

Führen Sie die komplexwertige Partialbruchzerlegung des Polynombruches $\dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$ aus.

## Lösung zu 8.9

**Arbeitshinweis:**

Die aus der reellwertigen Partialbruchzerlegung bekannte Unterscheidung zwischen reellen und komplexen Nullstellen (mit Zählern, die unterschiedlich viele Nullstellen repräsentieren) existiert in $\mathbb{C}$ natürlich nicht. In $\mathbb{C}$ sind alle Nullstellen gleichberechtigt, egal ob ihr Imaginärteil verschwindet oder vorhanden ist. Man muss also lediglich aufpassen, ob Nullstellen einfach oder mehrfach auftreten.

Um dies auf unsere Aufgabe anwenden zu können, suchen wir vorab die Nennernullstellen.

Es gilt $x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm i \;\Rightarrow\; x^2+1=(x+i)\cdot(x-i)$

Da jede der Nennernullstellen doppelt auftritt, ist $\left(x^2+1\right)^2=(x+i)^2\cdot(x-i)^2$ 1 P

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet daher:

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{A}{(x+i)}+\frac{B}{(x+i)^2}+\frac{C}{(x-i)}+\frac{D}{(x-i)^2}\quad\text{mit}\quad A,B,C,D\in\mathbb{C}$$

1 P

$$=\frac{A\cdot(x+i)\cdot(x-i)^2+B\cdot(x-i)^2+C\cdot(x+i)^2\cdot(x-i)+D\cdot(x+i)^2}{(x+i)\cdot(x+i)\cdot(x-i)\cdot(x-i)}$$

Da anders als in den reellen Zahlen immer jede Nullstelle separat für sich auftritt, gelingt die Bestimmung der komplexwertigen Koeffizienten $A,B,C,D$ recht mühelos:

- für $x=+i \;\rightarrow\; D\cdot(i+i)^2=1 \;\Rightarrow\; D\cdot 4i^2=1 \;\Rightarrow\; D=-\frac{1}{4}$
- für $x=-i \;\rightarrow\; B\cdot(-i-i)^2=1 \;\Rightarrow\; B\cdot 4i^2=1 \;\Rightarrow\; B=-\frac{1}{4}$
- für $x=0 \;\rightarrow\; A\cdot i\cdot i^2+B\cdot i^2+C\cdot(-i)\cdot i^2+D\cdot i^2=1 \;\Rightarrow\; -iA-B+iC-D=1$

nach Einsetzen von $B$ und $D$ ergibt sich $C=A-\frac{1}{2}i \quad (*1)$

- für $x=1 \;\rightarrow\; A\cdot\underbrace{(1+i)\cdot(1-i)}_{=1-(-1)}\cdot(1-i)+B\cdot(1-i)^2+C\cdot\underbrace{(1-i)\cdot(1+i)}_{=1-(-1)}\cdot(1+i)+D\cdot(1+i)^2=1$

4 P

$$\Rightarrow\quad A\cdot(2-2i)+B\cdot\left(1-2i+i^2\right)+C\cdot(2+2i)+D\cdot\left(1+2i+i^2\right)=1$$

$$\Rightarrow\quad A\cdot(2-2i)+C\cdot(2+2i)+2i\cdot\underbrace{(D-B)}_{=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=0}=1 \qquad \overset{\cdot\frac{1}{2}}{\Rightarrow}\quad A\cdot(1-i)+C\cdot(1+i)=\frac{1}{2}\quad(*2)$$

Dabei bilden $(*1)$ und $(*2)$ zusammen ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, das man leicht lösen kann. Setzt man z.B. $(*1)$ in $(*2)$ ein, so folgt:

$$A\cdot(1-i)+\left(A-\tfrac{1}{2}i\right)\cdot(1+i)=\frac{1}{2}\quad\Rightarrow\quad A=\frac{1}{4}i$$

Damit liefert $(*1)$: $\quad C=A-\frac{1}{2}i=\frac{1}{4}i-\frac{1}{2}i \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{1}{4}i$

Die Partialbruchzerlegung ist nun fertig: $\displaystyle\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{i\cdot 1/4}{(x+i)}-\frac{1/4}{(x+i)^2}-\frac{i\cdot 1/4}{(x-i)}-\frac{1/4}{(x-i)^2}$

2 P

## Aufgabe 8.10 Lösungsmengen komplexzahliger Gleichungen

| | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a.) | 15 min | (a.) | | (a.) 10 P | |
| (b.) | 10 min | (b.) | | | |
| (c.) | 10 min | (c.) | | (b.) 6 P | (c.) 6 P |
| (d.) | 6 min | (d.) | | | |
| (e.) | 8 min | (e.) | | (d.) 3 P | (e.) 5 P |

Bestimmen Sie die Lösungsmengen für die nachfolgenden Gleichungen mit $z\in\mathbb{C}$.

(a.) $\dfrac{1-z}{|1-z|}=i\cdot\dfrac{1+z}{|1+z|}$ (b.) $\sin(z)=2$ (c.) $\sin(z)=-3i$

(d.) $\sqrt{z} = -z^2$ (e.) $(-10)^z = 10$

## Lösung zu 8.10

**Arbeitshinweis – beim Erkennen dieses Aufgabentyps:**

Für das Auflösen derartiger Gleichungen gibt es kein „Rezept“. Vielmehr ist das individuelle Geschick und Fingerspitzengefühl für den Erfolg bei der Bearbeitung entscheidend. Hat man nicht sofort den richtigen Weg gefunden, dann hilft nur herumprobieren. Da dies zu Unwägbarkeiten in der Bearbeitungszeit führt, kann es im Falle von Klausuren ratsam sein, derartige Aufgaben als letzte zu lösen, um nicht die Zeit für andere Aufgaben zu verlieren.

(a.) $\frac{1-z}{|1-z|} = i \cdot \frac{1+z}{|1+z|}$ $\left| \cdot \frac{|1-z|}{1+z} \right.$ , damit man die Beträge zusammenfasst

$\Rightarrow \frac{1-z}{1+z} = i \cdot \left| \frac{1-z}{1+z} \right|$ Zur Vereinfachung substituiert man $u = \frac{1-z}{1+z}$ $(**)$ und erhält 1 P

$\Rightarrow u = i \cdot |u|$ , wobei $u$ wieder einen Real- und einen Imaginärteil enthält, also $u = a + i \cdot b$ .

Wir bilden den Betrag von $u$ und setzen in die Gleichung ein:

Mit $|u| = a^2 + b^2$ lautet die Gleichung $u = i \cdot |u|$ dann $(a+ib) = i \cdot \left(a^2 + b^2\right)$ $(*)$ . 1 P

Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sowohl ihre Real- als auch ihre Imaginärteile gleich sind. Wir wenden dies auf unsere Gleichung in der Form $(*)$ an:

- Auf der rechten Seite ist der Realteil Null, also hat er links den gleichen Wert $\Rightarrow$ $a = 0$ .
- Damit vereinfacht sich $(*)$ zu $ib = i \cdot b^2$ $\Rightarrow$ $b^2 - b = 0$ $\Rightarrow$ $b \cdot (b-1) = 0$ 1 P

  Es gibt also zwei Lösungen: $b_1 = 0$ und $b_2 = 1$
- Damit erhält man zwei mögliche Lösungen in $u$ : $u_1 = a + i \cdot b_1 = 0$

  und : $u_2 = a + i \cdot b_2 = i$ 1 P
- Resubstitution liefert $z$ , wofür man $(**)$ eben nach $z$ auflösen muss:

  aus $u_1 = 0$ erhält man $\frac{1-z_1}{1+z_1} = 0$ $\Rightarrow$ $1 - z_1 = 0$ $\Rightarrow$ $z_1 = 1$

  aus $u_2 = i$ erhält man $\frac{1-z_2}{1+z_2} = i \Rightarrow 1 - z_2 = i + i \cdot z_2 \Rightarrow 1 - i = z_2 + i \cdot z_2 = z_2 \cdot (1+i) \Rightarrow z_2 = \frac{1-i}{1+i}$ 2 P

**Stolperfalle:**

Komplizierte Lösungswege enthalten mitunter Rechenschritte, bei denen Ergebnisse generiert werden, die in Wirklichkeit gar nicht zur Lösungsmenge der ursprünglichen Gleichung gehören. (Man erinnere sich in diesem Zusammenhang z.B. auch an die Wurzelgleichungen in Aufgabe 2.6.) Freilich könnte man sich Gedanken machen, wie und wann so etwas passieren kann. Weniger arbeitsaufwändig und absolut sicher ist aber die Probe durch Einsetzen: Man setze die erhaltenen Ergebnisse in die Gleichung der Aufgabenstellung ein und teste so, welches der Ergebnisse passt. Überdies erhält man dadurch den Vorteil, dass man die Korrektheit seiner Lösungen überprüfen kann.

Setzen wir zuerst $z_1$ in die Aufgabenstellung ein:

$$\frac{1-z_1}{|1-z_1|} \overset{?}{=} i\cdot\frac{1+z_1}{|1+z_1|} \quad\Rightarrow\quad \frac{1-1}{|1-1|} \overset{?}{=} i\cdot\frac{1+1}{|1+1|} \quad\Rightarrow\quad z_1 \text{ ist keine Lösung,}$$

1 P denn der Nenner $|1-1|$ ist nicht definiert.

Danach setzen wir $z_2$ in die Aufgabenstellung ein:

1 P $$\frac{1-z_2}{|1-z_2|} \overset{?}{=} i\cdot\frac{1+z_2}{|1+z_2|} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1-\frac{1-i}{1+i}}{\left|1-\frac{1-i}{1+i}\right|} \overset{?}{=} i\cdot\frac{1+\frac{1-i}{1+i}}{\left|1+\frac{1-i}{1+i}\right|} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\frac{1+i-1+i}{1+i}}{\left|\frac{1+i-1+i}{1+i}\right|} \overset{?}{=} i\cdot\frac{\frac{1+i+1-i}{1+i}}{\left|\frac{1+i+1-i}{1+i}\right|} \quad \Bigg|\ \text{Beträge zusammenfassen}$$

1 P $$\Leftrightarrow\quad \frac{\frac{1+i-1+i}{1+i}}{\frac{1+i+1-i}{1+i}} \overset{?}{=} i\cdot\left|\frac{\frac{1+i-1+i}{1+i}}{\frac{1+i+1-i}{1+i}}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1+i-1+i}{1+i+1-i} \overset{?}{=} i\cdot\left|\frac{1+i-1+i}{1+i+1-i}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2i}{2} \overset{?}{=} i\cdot\left|\frac{2i}{2}\right| \quad\Leftrightarrow\quad i = i\cdot|i|$$

Bedenkt man, dass $|i|=1$ ist, so hat sich die Lösung $z_2$ als richtig erwiesen. Den Ausdruck sollte man noch in eine der definierten Darstellungsformen komplexer Zahlen bringen, bevor man die Lösungsmenge von Aufgabenteil (a.) angibt. Wir erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners, um in die algebraische Form zu gelangen:

1 P $$z_2 = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1+1} = -i \qquad\Longrightarrow\qquad \text{Die Lösungsmenge lautet also: } \mathbb{L}_a = \{-i\}$$

(b.) Der komplexwertige Sinus ist bekannt als $\sin(z) = -\frac{i}{2}\cdot\left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right)$

Für unsere Aufgabe $\sin(z) = 2$ bedeutet dies:

$$-\tfrac{i}{2}\cdot\left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right) = 2 \quad\Rightarrow\quad \left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right) = 4i \qquad \Big|\cdot e^{i\cdot z}$$

1 P $$\Rightarrow\quad e^{2iz} - e^0 = 4i\cdot e^{iz} \quad\Rightarrow\quad e^{2iz} - 4i\cdot e^{iz} - 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung in $e^{iz}$, kann man leicht lösen, wenn man $u := e^{iz}$ substituiert:

1 P $$u^2 - 4iu - 1 = 0 \quad\Rightarrow\quad u_{1/2} = 2i \pm \sqrt{4i^2+1} = 2i \pm \sqrt{-3} = 2i \pm i\cdot\sqrt{3} = i\cdot\left(2\pm\sqrt{3}\right) \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{l} u_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot i \\ u_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i \end{array}$$

1 P Die Lösungsmenge suchen wir in $z$, also müssen wir die obige Substitution $u := e^{iz}$ rückgängig machen: $u := e^{iz} \ \Rightarrow\ \ln(u) = i\cdot z \ \Rightarrow\ z = -i\cdot\ln(u) \qquad (*)$

Dazu benötigen wir den Logarithmus von $u$, den wir nur über die Exponentialdarstellung bekommen können. Also bringen wir $u$ dorthin. Da $u$ rein imaginär ist (der Realteil verschwindet), ist dies ohne mühsame Berechnung möglich:

1 P $$\begin{array}{l} u_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot i \quad\Rightarrow\quad u_1 = \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)} \quad\Rightarrow\quad \ln(u_1) = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) + i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \\ u_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot i \quad\Rightarrow\quad \underbrace{u_2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\cdot e^{i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}}_{\text{Exponentialdarstellung}} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\ln(u_2) = \ln\left(2-\sqrt{3}\right) + i\cdot\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)}_{\text{Logarithmus}} \end{array} \quad (\text{mit } k\in\mathbb{Z})$$

Damit können wir nun die Resubstitution nach $(*)$ ausführen:

$$z_1 = -i \cdot \ln(u_1) = -i \cdot \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - i^2 \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i \cdot \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

$$z_2 = -i \cdot \ln(u_2) = -i \cdot \ln\left(2-\sqrt{3}\right) - i^2 \cdot \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i \cdot \ln\left(2-\sqrt{3}\right)$$ 1 P

Anmerkung:
Nachdem wir im Allgemeinen ohne Nebenwerte rechnen, mag die Berücksichtigung der Periodizität der komplexen Exponentialfunktion manchen Leser vielleicht überraschen. Diese Berücksichtigung hat nur den Sinn, die Periodizität der Sinus-Funktion zu berücksichtigen, die man wie immer in Richtung des Realteils erkennt.

Durch Einsetzen der Lösungen in die Aufgabenstellung könnte man sämtliche angegebenen Lösungen als richtig verifizieren. Diese Übung sei den Lesern selbst überlassen. Die Lösungsmenge lautet also:

$$\mathbb{L}_b = \left\{ \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i \cdot \ln\left(2+\sqrt{3}\right) \;\; ; \;\; \left(\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) - i \cdot \ln\left(2-\sqrt{3}\right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \right\}$$ 1 P

**Demonstration:**

Die Aufgabe demonstriert, dass in den komplexen Zahlen Winkelfunktionen auch Werte annehmen können, die man bei einer durch reelle Zahlen geprägten Denkweise als „größer 1“ bezeichnen würde. Darüber soll man sich nicht wundern, denn diese Denkweise hat im Komplexen keinen Sinn – eine größer/kleiner Beziehung existiert in $\mathbb{C}$ bekanntlich nicht.

(c.) Die Aufgabe verläuft sehr ähnlich wie Aufgabenteil (b.) und wird deshalb nur sehr sparsam kommentiert. Man setzt den komplexwertigen Sinus ein und erhält mit $\sin(z) = -3i$ :

$$-\tfrac{i}{2} \cdot \left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right) = -3i \overset{\cdot 2i}{\Rightarrow} -i^2 \cdot \left(e^{i\cdot z} - e^{-i\cdot z}\right) = -6i^2 \qquad \Big| \cdot e^{i\cdot z}$$

$$\Rightarrow \quad e^{2iz} - e^0 = 6 \cdot e^{iz} \quad \Rightarrow \quad e^{2iz} - 6 \cdot e^{iz} - 1 = 0$$ 1 P

Substitution $u := e^{iz} \quad \Rightarrow \quad u^2 - 6u - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9+1} = 3 \pm \sqrt{10}$ 1 P

Unwandlung in die Exponentialdarstellung und logarithmieren:

$$u_1 = \left(3+\sqrt{10}\right) \;\Rightarrow\; u_1 = \left(3+\sqrt{10}\right) \cdot e^{i\cdot(2\pi k)} \;\Rightarrow\; \ln(u_1) = \ln\left(3+\sqrt{10}\right) + i \cdot 2\pi k$$ 1 P

$$u_2 = \left(3-\sqrt{10}\right) \;\Rightarrow\; \underbrace{u_2 = \left(3-\sqrt{10}\right) \cdot e^{i\cdot(2\pi k)}}_{\text{Exponentialdarstellung}} \;\Rightarrow\; \underbrace{\ln(u_2) = \ln\left(3-\sqrt{10}\right) + i \cdot 2\pi k}_{\text{Logarithmus}} \quad (\text{mit } k \in \mathbb{Z})$$

Resubstitution:

$$z_1 = -i \cdot \left(\ln\left(3+\sqrt{10}\right) + i \cdot 2\pi k\right) = 2\pi k - \mathrm{i} \cdot \ln\left(3+\sqrt{10}\right)$$

$$z_2 = -i \cdot \left(\ln\left(3-\sqrt{10}\right) + i \cdot 2\pi k\right) = 2\pi k - \mathrm{i} \cdot \ln\left(3-\sqrt{10}\right)$$ 1 P

Jetzt kommt noch etwas, das in Aufgabenteil (b.) nicht enthalten war: Die Lösung $z_1$ kann man einfach mit dem Taschenrechner berechnen, denn das Argument des Logarithmus ist positiv. Bei Lösung $z_2$ ist dies nicht der Fall, dort ist das Argument des Logarithmus negativ, deshalb braucht man zum Logarithmieren noch eine Zusatzüberlegung:

$$3-\sqrt{10} = -\left(\sqrt{10}-3\right) = \left(\sqrt{10}-3\right) \cdot e^{i\cdot\pi} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(3-\sqrt{10}\right) = \ln\left(\sqrt{10}-3\right) + i \cdot \pi$$

1 P Damit ergibt sich für $z_2$ :

$$z_2 = 2\pi k - i\cdot\ln\left(3-\sqrt{10}\right) = 2\pi k - i\cdot\left(\ln\left(\sqrt{10}-3\right)+i\cdot\pi\right) = (2k+1)\cdot\pi - i\cdot\ln\left(\sqrt{10}-3\right)$$

Das Ergebnis ist somit die Lösungsmenge

1 P $\mathbb{L}_c = \left\{2\pi k - i\cdot\ln\left(3+\sqrt{10}\right) \quad ; \quad \pi\cdot(2k+1) - i\cdot\ln\left(\sqrt{10}-3\right) \qquad \text{mit } k\in\mathbb{Z}\right\}$

Nebenbemerkung: Als alternativen Rechenweg hätte man für die Aufgabenteile (b.) und (c.) auch die Funktion des Arcus Sinus aus der Formelsammlung benutzen können. So wie komplexe Winkelfunktionen auf die Exponentialfunktion zurückgeführt werden, werden komplexe Arcusfunktionen auf den Logarithmus zurückgeführt.

(d.) $\sqrt{z} = -z^2$

Im Reellen sind Wurzeln und Quadrate immer positiv. Dass die beiden (wie in der Aufgabenstellung gegeben) unterschiedliche Vorzeichen haben können, macht nur in den komplexen Zahlen Sinn. Diesen können wir finden, wenn wir das Vorzeichen als Phase auffassen:

$\sqrt{z} = z^2\cdot e^{i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}$ | Zum Lösen wird logarithmiert

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(z) = 2\ln(z) + i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)$ | $-2\ln(z)$

$\Rightarrow -\frac{3}{2}\ln(z) = i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)$ | $\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow \ln(z) = -i\cdot\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}k\cdot\pi\right)$ | Exponentialfunktion anwenden

2 P $\Rightarrow z_k = e^{-i\cdot\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}k\cdot\pi\right)}$ .

Dies sind Zahlen vom Betrag 1 mit unterschiedlichen Phasen.

Eine (fast triviale) Lösung haben wir auf diesem Weg nicht gefunden, die am Rande noch erwähnt sei: $z_t = 0$ . Setzt man sie in die Aufgabenstellung ein, so sieht man $\sqrt{0} = -0^2$ . Dass wir diese Lösung nicht fanden, leuchtet ein, denn die Null kann nicht logarithmiert werden.

1 P Die Lösungsmenge umfasst also alle $z_k$ und das $z_t$ : $\mathbb{L}_d = \left\{e^{-i\cdot\left(\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}k\cdot\pi\right)} \qquad \text{mit } k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{0\}$

(e.) Es ist offensichtlich, dass man durch logarithmieren (und auflösen) zu $z$ kommen kann:

$(-10)^z = 10$ | Zum Lösen wird logarithmiert

$\Rightarrow z\cdot\ln(-10) = \ln(10)$ | Das Vorzeichen wird als komplexe Phase behandelt

1 P $\Rightarrow z\cdot\ln\left(10\cdot e^{i\cdot\pi+2k\cdot\pi}\right) = \ln(10)$ | Auflösen nach $z$

1 P $\Rightarrow z = \dfrac{\ln(10)}{\ln\left(10\cdot e^{i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}\right)} = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)+i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}$ | Reellmachen des Nenners

1 P $\Rightarrow z = \dfrac{\ln(10)}{\ln(10)+i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}\cdot\dfrac{\ln(10)-i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}{\ln(10)-i\cdot(\pi+2k\cdot\pi)} = \dfrac{\ln(10)\cdot\ln(10)-i\cdot\ln(10)\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}{(\ln(10))^2+(\pi+2k\cdot\pi)^2}$

Damit lässt sich $z$ in algebraischer Darstellung angeben:

1 P $\Rightarrow z = \dfrac{\ln(10)\cdot\ln(10)}{(\ln(10))^2+(\pi+2k\cdot\pi)^2} - i\cdot\dfrac{\ln(10)\cdot(\pi+2k\cdot\pi)}{(\ln(10))^2+(\pi+2k\cdot\pi)^2} \Rightarrow z_H \underbrace{\overset{TR}{\approx} 0.3495 - i\cdot 0.4768}_{\text{Hauptwert per Taschenrechner}}$

Dies liefert uns auch die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}_e = \left\{ \frac{\ln(10)\cdot\ln(10)}{\left(\ln(10)\right)^2 + \left(\pi + 2k\cdot\pi\right)^2} - i\cdot\frac{\ln(10)\cdot\left(\pi+2k\cdot\pi\right)}{\left(\ln(10)\right)^2 + \left(\pi+2k\cdot\pi\right)^2} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z} \right\}$$ 1 P

## Aufgabe 8.11 Zeichnen von Ortskurven

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…c) je 5 min | (a…c) | Punkte<br>(a…c) je 3 P |

Die Zahl der Punkte kann je nach geforderter Präzision der Zeichnung stark variieren (bis hin zur Kurvendiskussion).
Für je 3 P / 5 min sind einfache grobe Handskizzen zu erwarten – mehr nicht.

Zeichnen Sie die Ortskurven der nachfolgenden Funktionen mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$.

(a.) $z(\lambda) = \sin(\lambda) + i\cdot\cos(2\lambda)$ für $\lambda = 0 \ldots 2\pi$

(b.) $z(\lambda) = \sqrt{100-\lambda^2} + i\cdot\left(\lambda^3 - \lambda^2 - 9\lambda - 4\right)$ für $\lambda = -5 \ldots +5$

(c.) $z(\lambda) = \left(1 + 2\cdot\sin(\lambda)\right) + i\cdot\left(\frac{1}{2} + \cos(\lambda)\right)$ für $\lambda = 0 \ldots 2\pi$

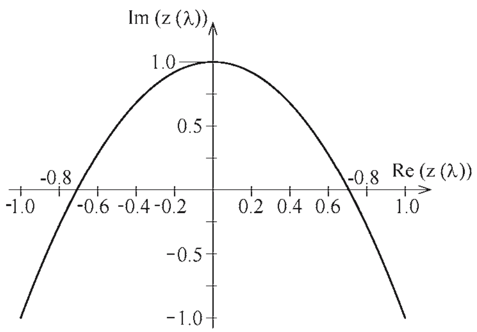
## ▾ Lösung zu 8.11

**Arbeitshinweis:**

Ortskurven sind Graphen von Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$, die in der Parameterdarstellung wiedergegeben werden, wobei das Argument der laufende Parameter ist (also eine reelle Zahl) und der Wertebereich in der Gauß'schen Zahlenebene dargestellt wird (komplex).

Zum Anfertigen der Graphen lege man Wertetabellen an und trage die Werte in der Gauß' schen Zahlenebene ein. Dadurch erhält man Graphen wie in den Bildern 8-11a,b,c zu sehen.

Das Anfertigen der Wertetabellen mögen die Leser ohne Musterlösung bewerkstelligen.




3 P

**Bild 8-11a**
Ortskurve der komplexwertigen Funktion
$z(\lambda) = \sin(\lambda) + i\cdot\cos(2\lambda)$
gezeichnet für $\lambda = 0 \ldots 2\pi$

3 P

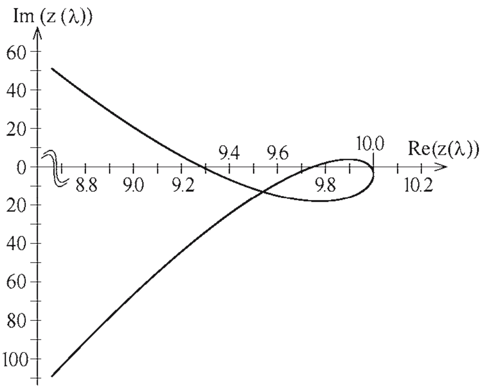



**Bild 8-11b**
Ortskurve der komplexwertigen Funktion
$z(\lambda)=\sqrt{100-\lambda^2}+i\cdot\left(\lambda^3-\lambda^2-9\lambda-4\right)$
gezeichnet für $\lambda=-5\,...+5$

3 P

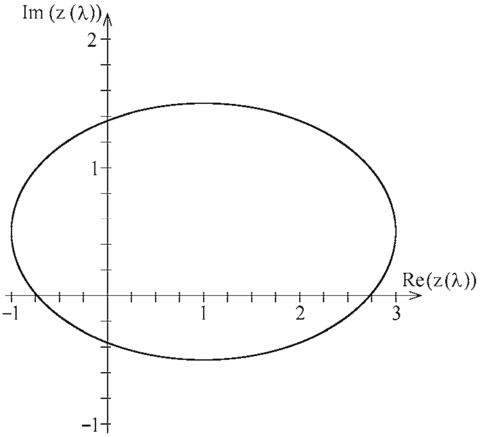



**Bild 8-11c**
Ortskurve der komplexwertigen Funktion
$z(\lambda)=\left(1+2\cdot\sin(\lambda)\right)+i\cdot\left(\frac{1}{2}+\cos(\lambda)\right)$
gezeichnet für $\lambda=0\,...\,2\pi$

## Aufgabe 8.12 Arbeiten mit Ortskurven

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 2 min<br>4 min | (a.)<br>(b.) | | Punkte<br>(a) 2 P (b) 2 P |
| | (c.)<br>(d.) | 5 min<br>7 min | (c.)<br>(d.) | | (c) 3 P (d) 4 P |

Gegeben sei eine Funktion mit $f(\lambda):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{C}$ mit $f(\lambda)=(3-\lambda)+i\cdot(1+\lambda)$.

(a.) Zeichnen Sie die Ortskurve dieser Funktion für $\lambda=-2...5$.

(b.) Invertieren Sie die Ortskurve.

(c.) Zeichnen Sie die invertierte Ortskurve für $\lambda=-\infty...+\infty$.

(d.) Für welches $\lambda$ kommt die Ortskurve am dichtesten zum Koordinatenursprung?

Welches ist der zugehörige Punkt $z_1$ auf der Ortskurve?

# Lösung zu 8.12

(a.) Bild 8-12a zeigt die Ortskurve von $f(\lambda)$.

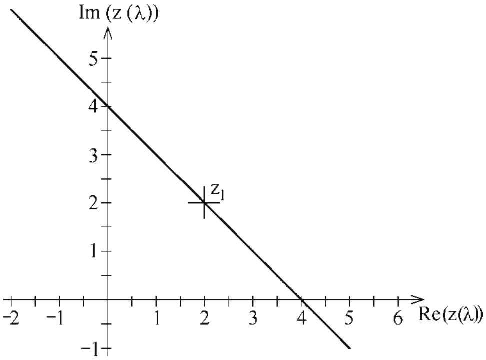



**Bild 8-12a**
Ortskurve der komplexwertigen Funktion
$f(\lambda) = (3-\lambda) + i \cdot (1+\lambda)$ 2 P
gezeichnet für $\lambda = -2 \ldots +5$

Der Punkt $z_1$ markiert (im Vorgriff) das Ergebnis von Aufgabenteil (d.), denjenigen Punkt auf der Ortskurve mit dem minimalen Abstand zum Nullpunkt.

(b.)

**Arbeitshinweis:**

Betrachtet man $u(\lambda)$ und $v(\lambda)$ als Real- und Imaginärteil der Ortskurve, so ergibt sich die invertierte Ortskurve (siehe Formelsammlung) zu

$$w(\lambda) = a(\lambda) + i \cdot b(\lambda) \quad \text{mit} \quad a(\lambda) = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad b(\lambda) = \frac{-v}{u^2+v^2}$$

Wir setzen unsere Funktion ein: $f(\lambda) = \underbrace{(3-\lambda)}_{u(\lambda)} + i \cdot \underbrace{(1+\lambda)}_{v(\lambda)}$ und erhalten

$$\Rightarrow \quad a(\lambda) = \frac{u}{u^2+v^2} = \frac{(3-\lambda)}{(3-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2} = \frac{(3-\lambda)}{9-6\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2} = \frac{3-\lambda}{2\lambda^2-4\lambda+10}$$

und $$b(\lambda) = \frac{-v}{u^2+v^2} = \frac{-(1+\lambda)}{(3-\lambda)^2 + (1+\lambda)^2} = \frac{-(1+\lambda)}{9-6\lambda+\lambda^2+1+2\lambda+\lambda^2} = \frac{-1-\lambda}{2\lambda^2-4\lambda+10}$$

Die invertierte Funktion lautet also $w(\lambda) = a(\lambda) + i \cdot b(\lambda) = \dfrac{3-\lambda}{2\lambda^2-4\lambda+10} + i \cdot \dfrac{-1-\lambda}{2\lambda^2-4\lambda+10}$ 2 P

(c.) Die graphische Darstellung der invertierten Ortskurve sieht man in Bild 8-12b

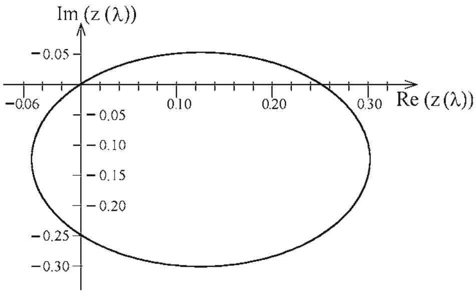



**Bild 8-12b** 3 P
Ortskurve der invertierten Funktion
$w(\lambda) = \dfrac{3-\lambda}{2\lambda^2-4\lambda+10} + i \cdot \dfrac{-1-\lambda}{2\lambda^2-4\lambda+10}$
gezeichnet für $\lambda = -\infty \ldots +\infty$

(d.) Wir betrachten nochmals die Funktion $f(\lambda) = \underbrace{(3-\lambda)}_{u(\lambda)} + i \cdot \underbrace{(1+\lambda)}_{v(\lambda)}$

**Arbeitshinweis:**

Die notwendige Bedingung für ein Abstandsextremum entnimmt man einer Formelsammlung: $u \cdot u' = -v \cdot v'$

1 P Dies wäre für unsere Aufgabe: $\underbrace{(3-\lambda)}_{u(\lambda)} \cdot \underbrace{(-1)}_{u'(\lambda)} = -\underbrace{(1+\lambda)}_{v(\lambda)} \cdot \underbrace{(1)}_{v'(\lambda)} \quad \Rightarrow \quad \lambda - 3 = -\lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1$

**Arbeitshinweis:**

Ob dort wirklich ein Abstandsextremum liegt, prüfen wir anhand der hinreichenden Bedingung $u' \cdot u' + u \cdot u'' + v' \cdot v' + v \cdot v'' \neq -\dfrac{u \cdot u' + v \cdot v'}{u^2 + v^2}$ an der Stelle $\lambda_1$:

1 P $$\left((-1)^2 + 0 + 1 \cdot 1 + 0\right) \overset{?}{\neq} -\frac{(2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1)^2}{(3-1)^2 + (1+1)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (1+1) \overset{?}{\neq} \frac{(-2+2)^2}{4+4} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \overset{?}{\neq} 0$$

1 P Die Ungleichheit ist gegeben, also handelt es sich um ein Abstandsextremum. Da die linke Seite $u' \cdot u' + u \cdot u'' + v' \cdot v' + v \cdot v'' = +2$ größer ist als die rechte Seite $-\dfrac{u \cdot u' + v \cdot v'}{u^2 + v^2} = 0$, ist dieses Extremum ein Abstandminimum.

1 P Der zugehörige Punkt $z_1$ auf der Ortskurve liegt bei $f(\lambda_1) = (3-\lambda_1) + i \cdot (1+\lambda_1) = 2 + 2i$.

Er ist in Bild 8-12a eingetragen.

## Aufgabe 8.13 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände

| | | |
|---|---|---|
| 10 min | | Punkte 5 P |

Berechnen Sie bitte den komplexen Wechselstromwiderstand der in Bild 8-13 gegebenen Schaltung bei einer Kreisfrequenz von $\omega = 100 \cdot 2\pi$ Hz.

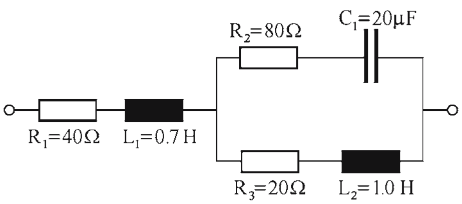



**Bild 8-13**
Vorgabe der Schaltung, zu der der komplexe Wechselstromwiderstand berechnet werden soll.

## Lösung zu 8.13

Wir fassen $R_2$, $C_1$, $R_3$ und $L_2$ zu $Z_X$ als einem Teil der Schaltung zusammen. Es handelt sich um eine Parallelschaltung aus einerseits $R_2$ und $C_1$ in Reihe sowie andererseits aus $R_3$ und $L_2$ in Reihe. Damit berechnen wir $Z_X$ gemäß

$$\frac{1}{Z_X} = \frac{1}{Z_{R2}+Z_{C1}} + \frac{1}{Z_{R3}+Z_{L2}} = \frac{1}{R_2+\frac{1}{i\omega C_1}} + \frac{1}{R_3+i\omega L_2} = \frac{\left(R_2+\frac{1}{i\omega C_1}\right)\cdot\left(R_3+i\omega L_2\right)}{\left(R_2+\frac{1}{i\omega C_1}\right)+\left(R_3+i\omega L_2\right)}$$ 1 P

(Nomenklatur: $Z$ mit dem Index eines Schaltelements bezeichnet dessen Impedanz.)

Für die gesamte Schaltung als Hintereinanderschaltung aus $R_1$, $L_1$ und $Z_X$ ergibt sich dann

$$Z_{ges} = Z_{R1}+Z_{L1}+Z_X = R_1+i\omega L_1+Z_X = R_1+i\omega L_1+\frac{\left(R_2+\frac{1}{i\omega C_1}\right)\cdot\left(R_3+i\omega L_2\right)}{\left(R_2+\frac{1}{i\omega C_1}\right)+\left(R_3+i\omega L_2\right)}$$ 1 P

Setzen wir die Werte entsprechend Bild 8-13 ein, so erhalten wir

$$Z_{ges} = 40\Omega + i\cdot 2\pi\cdot 100\text{Hz}\cdot 0.7\text{H} + \frac{\left(80\Omega+\frac{1}{i\cdot 2\pi\cdot 100\text{Hz}\cdot 2\cdot 10^{-5}\,\text{F}}\right)\cdot\left(20\Omega+i\cdot 2\pi\cdot 100\text{Hz}\cdot 1\text{H}\right)}{\left(80\Omega+\frac{1}{i\cdot 2\pi\cdot 100\text{Hz}\cdot 2\cdot 10^{-5}\,\text{F}}\right)+\left(20\Omega+i\cdot 2\pi\cdot 100\text{Hz}\cdot 1\text{H}\right)}$$

$$\overset{TR}{\approx} 40\Omega + i\cdot 439.823\Omega + \frac{\left(80\Omega - i\cdot 79.57747\Omega\right)\cdot\left(20\Omega+i\cdot 628.3185\Omega\right)}{\left(80\Omega - i\cdot 79.57747\Omega\right)+\left(20\Omega+i\cdot 628.3185\Omega\right)}$$

$$= 40\Omega + i\cdot 439.823\Omega + \frac{1600\Omega^2 - i\cdot 1591.5494\Omega^2 + i\cdot 50265.48\Omega^2 - i^2\cdot 50000\Omega^2}{100\Omega + i\cdot 548.74103\Omega}$$

$$= 40\Omega + i\cdot 439.823\Omega + \frac{51600\Omega^2 + i\cdot 48673.93\Omega^2}{100\Omega + i\cdot 548.74103\Omega}\cdot\frac{100\Omega - i\cdot 548.74103\Omega}{100\Omega - i\cdot 548.74103\Omega}$$ erweitert mit dem komplex Konju-gierten des Nenners 3 P

$$= 40\Omega + i\cdot 439.823\Omega + \frac{31869382.5\Omega^3 - i\cdot 23447644\Omega^3}{311116.72\Omega^2}$$

$$= 40\Omega + i\cdot 439.823\Omega + 102.435\,\Omega - i\cdot 75.366\,\Omega = 142.435\Omega + i\cdot 364.457\,\Omega$$

## Aufgabe 8.14 Textbeispiel – komplexe Wechselstromwiderstände

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | (a.) | | (a.) 6 P |
| | (b.) | 4 min | (b.) | | (b.) 2 P |

Sie bekommen die Aufgabe, eine amerikanische Glühbirne ($U_{eff} = 110\,\text{V}$ mit einer Leistung von $P_{eff} = 100\,\text{W}$) an ein europäisches Stromnetz ($U_{eff} = 230\,\text{V}$) anzuschließen. Damit die Birne „normal" brennen kann, schalten Sie eine Spule in Reihe (→ Spannungsteilerschaltung).

(a.) Welche Induktivität muss die Spule besitzen?
(b.) Wie viel Leistung zieht die Spule?

## Lösung zu 8.14

Schritt 1: Zur Anschauung skizzieren wir vorab in Bild 8-14 die sich ergebende Schaltung.

1 P

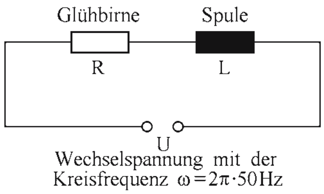



**Bild 8-14**
Skizze der Schaltung, zur Realisierung der Aufgabenstellung

Schritt 2: Wollen wir die Schaltung berechnen, so müssen wir den ohm'schen Widerstand der Glühbirne kennen:

1 P $$P_{eff} = U_{eff} \cdot I_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U_{eff}^2}{P_{eff}} = \frac{(110\,\text{V})^2}{100\,\text{W}} = 121\,\Omega$$

Schritt 3: Wir betrachten die Schaltung als Spannungsteiler, bei dem über der Glühbirne die Spannung $U_R = 110\,\text{V}$ abfällt und über der Spule $U_L = 120\,\text{V}$ :

$$\frac{U_L}{U_{ges}} = \frac{|Z_L|}{|Z_{ges}|} \quad \Rightarrow \quad \frac{120\text{V}}{230\text{V}} = \frac{|i\omega L|}{|i\omega L + R|} = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}}$$

2 P Auflösen nach $L$ liefert:

$$\frac{U_L}{U_{ges}} = \frac{120\text{V}}{230\text{V}} = \frac{12}{23} = \frac{\omega L}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} \qquad \Big|\ \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{12^2}{23^2} = \frac{(\omega L)^2}{(\omega L)^2 + R^2} \qquad \Big|\ \text{Kehrwert}$$

2 P $$\Rightarrow \quad \left(\frac{23}{12}\right)^2 = \frac{(\omega L)^2 + R^2}{(\omega L)^2} = 1 + \frac{R^2}{(\omega L)^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{23}{12}\right)^2 - 1 = \frac{R^2}{(\omega L)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{529-144}{144} = \frac{385}{144} = \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \quad \Big| \cdot \frac{144}{385} L^2$$

$$\Rightarrow \quad L^2 = \frac{144}{385} \cdot \frac{R^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad L = \sqrt{\frac{144}{385}} \cdot \frac{R}{\omega} \overset{TR}{\approx} 0.61158 \cdot \frac{121\Omega}{2\pi \cdot 50\text{Hz}} = 0.23555\,\text{H} = 235.55\text{mH}$$

(b.) Man darf die Leistung nicht isoliert betrachten, sondern als Bestandteil der gesamten Schaltung. Die gesamte verbrauchte Leistung beträgt

2 P $$P_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{|Z_{ges}|} \quad \Rightarrow \quad P_{eff} = \frac{U_{eff}^2}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \overset{TR}{\approx} \frac{(230\,\text{V})^2}{\sqrt{(121\Omega)^2 + \left(50 \cdot 2\pi\,\text{Hz} \cdot 235.55 \cdot 10^{-3}\,\text{H}\right)^2}} \overset{TR}{\approx} 373\,\text{Watt}$$

Also ist der Leistungsverbrauch 100 Watt für die Glühbirne plus 273 Watt für die Spule.

# 9 Funktionen mehrerer Variabler und Vektoranalysis

## Aufgabe 9.1 Parameterdarstellung einer mehrdim. Funktion

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | (a.) | | Punkte | |
| | (b.) | 5 min | (b.) | | (a) 6 P | (b) 3 P |

Gegeben sei eine Funktion $\vec{s}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ durch $\vec{s}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ $(*1)$

$$t \mapsto \vec{s}(t) = \begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0 \quad (*2)$$

mit $\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} a_{0x} \\ a_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}\frac{m}{s^2}$ ; $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_{0x} \\ v_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \end{pmatrix}\frac{m}{s}$ und $\vec{s}_0 = \begin{pmatrix} s_{0x} \\ s_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} m$

(a.) Stellen Sie die Funktion graphisch dar in Parameterdarstellung für $t = 0 ... 5\text{sec}$.

(b.) Wandeln Sie die Funktion um in die explizite Funktionsdarstellung $s_y = s_y(s_x)$ .

**Anmerkung zu Aufgabe 9.1**

Es gibt verschiedene Schreibweisen zur Angabe von Funktionen. Eine davon ist die hier in der Aufgabenstellung gebrauchte, die aus zwei Zeilen besteht, und die man wie folgt versteht:

1. Zeile (siehe $(*1)$ ) → Funktion / Doppelpunkt / Definitionsmenge / Pfeil / Wertemenge

2. Teile (siehe $(*2)$ ) → freier Parameter / Fußpfeil / Funktion / Gleich / mathemat. Ausdruck

## Lösung zu 9.1

(a.) Zur Vorbereitung fertigen wir eine Wertetabelle an, wie z.B. Tabelle 9.1.

**Tabelle 9.1** Wertetabelle zur Funktion $\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0$ in Parameterdarstellung

| t /sec. | $s_x(t)\,/\,m$ | $s_y(t)\,/\,m$ | |
|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.0 | + 0.00 | |
| 0.50 | 15.0 | + 8.75 | |
| 1.00 | 30.0 | + 15.00 | |
| 1.50 | 45.0 | + 18.75 | |
| 2.00 | 60.0 | + 20.00 | |
| 2.50 | 75.0 | + 18.75 | |
| 3.00 | 90.0 | + 15.00 | 3 P |
| 3.50 | 105.0 | + 8.75 | |
| 4.00 | 120.0 | + 0.00 | |
| 4.50 | 135.0 | - 11.25 | |
| 5.00 | 150.0 | - 25.00 | |

Damit lässt sich dann die in Bild 9-1 dargestellte Funktion zeichnen.

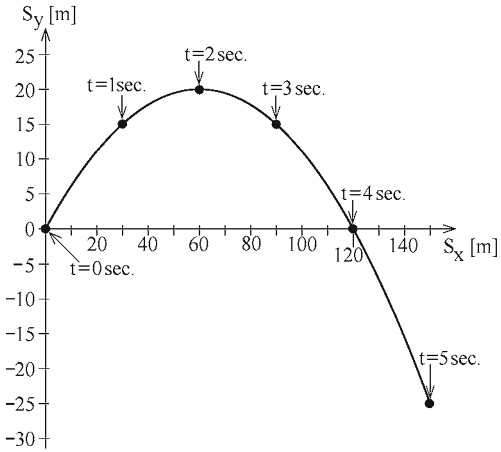
3 P 


**Bild 9-1**
Graphische Darstellung der Funktion
$\vec{s}(t) = \frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{s}_0$ in Parameterdarstellung
(mit $\vec{a}_0$, $\vec{v}_0$, $\vec{s}_0$ laut Aufgabenstellung)

(b.) Zur expliziten Funktionsdarstellung gelangt man durch die folgenden Arbeitsschritte:

Schritt 1: Man drücke den freien Parameter $t$ durch $s_x$ aus.
Schritt 2: Den so erhaltenen Ausdruck für $t$ setze man in $s_y$ ein.

Zu Schritt 1:

Wegen $a_{0x} = 0$ und $s_{0x} = 0$ lautet die Gleichung für die x-Koordinate von $\vec{s}(t)$

1 P $$s_x(t) = v_{0x} t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s_{0x}}{v_{0x}}$$

Zu Schritt 2:

Setzt man dieses $t$ in die Gleichung für die y-Koordinate von $\vec{s}(t)$ ein, so erhält man

1 P $$s_y(t) = \tfrac{1}{2} a_{0y} t^2 + v_{0y} t + s_{0y} = \tfrac{1}{2} a_{0y} \cdot \left( \frac{s_{0x}}{v_{0x}} \right)^2 + v_{0y} \cdot \left( \frac{s_{0x}}{v_{0x}} \right) + s_{0y} = \frac{a_{0y}}{2 v_{0x}^2} \cdot s_{0x}^2 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \cdot s_{0x} + s_{0y}$$

Setzt man die Zahlenwerte für $a_{0x}$, $a_{0y}$ sowie $v_{0x}$, $v_{0y}$ und $s_{0x}$, $s_{0y}$ ein, so erhält man

1 P $$s_y(t) = \frac{-10 \frac{m}{s^2}}{2 \cdot \left( 30 \frac{m}{s} \right)^2} \cdot s_x^2 + \frac{20 \frac{m}{s}}{30 \frac{m}{s}} \cdot s_x + 0m = -\frac{1}{180m} \cdot s_x^2 + \frac{2}{3} \cdot s_x \ ,$$

was ebenfalls zu dem in Bild 9-1 gezeigten Plot führt (bis auf die Angabe der Zeit $t$, die in der expliziten Darstellung natürlich nicht mehr erkennbar ist.)

## Aufgabe 9.2 Höhenliniendiagramme mehrdim. Funktionen

| | | | Punkte | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a,b) | je 5 min | | (a,b.) | je 4 P | Aufgabenteil (b.) setzt einen grafikfähigen Rechner voraus. |
| (c.) | 5 min | | (c) 4 P | | |

Zeichnen Sie Höhenliniendiagramme der nachfolgend genannten Funktionen $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x;y) \mapsto z$$

(a.) $z = 3x^2 + y^2$ für $x = 0...10$ und $y = 0...10$

(b.) $z = \cos(x) + \sin(y)$ für $x = 0°...360°$ und $y = 0°...360°$

(c.) $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ für $x = -5...5$ und $y = -5...5$

## Lösung zu 9.2

**Arbeitshinweis:**

Was immer funktioniert: Man kann die Höhenlinien über Wertetabellen zeichnen – genau so wie ein Plotter es tut. Mitunter kann man aber auch durch geschicktes Überlegen bekannte Strukturen wiederfinden, die ein Verständnis über das Aussehen der Höhenlinien eröffnen.

(a.) Höhenlinien sind Linien mit konstantem $z$. Denkt man an Ellipsengleichungen, so kennt man deren Form in Aufgabe 3.a wieder.

Diejenigen Ellipsen, die die Koeffizienten $3x^2 + y^2 = r^2$ (mit $r = \sqrt{z}$) tragen, sind in Bild 9-2a aufgetragen. Wie üblich sind die Höhenlinien mit Höhenangaben versehen. 2 P

2 P

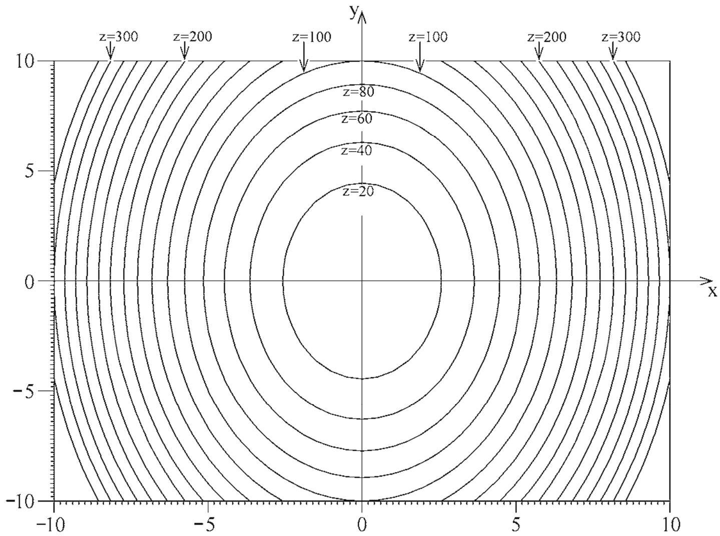



**Bild 9-2a**
Höhenliniendiagramm der Funktion
$z = 3x^2 + y^2$

Die Höhenlinien sind mit äquidistanten Höhenabständen aufgetragen, und zwar mit Abständen von 20 Höheneinheiten.

(b.) In Bild 9-2b findet man die Periodizität der Winkelfunktionen wieder. Würde man die zu zeichnenden Intervalle für $x$ und $y$ vergrößern, so könnte man das gezeigte Bild fortgesetzt übereinander bzw. nebeneinander kopieren.

4 P

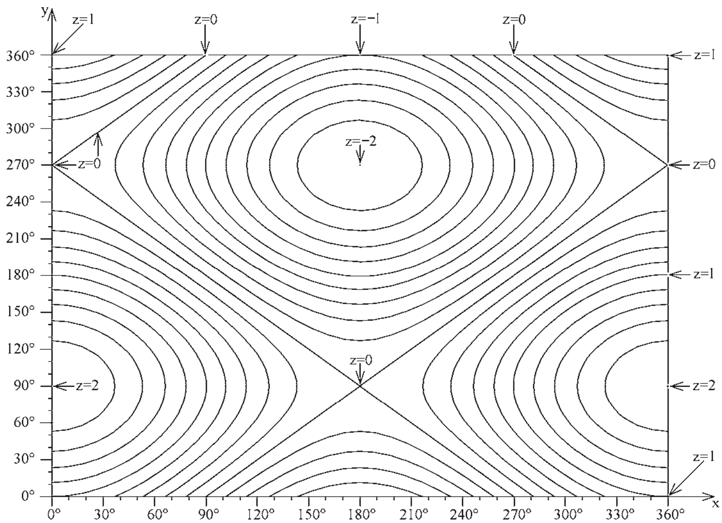


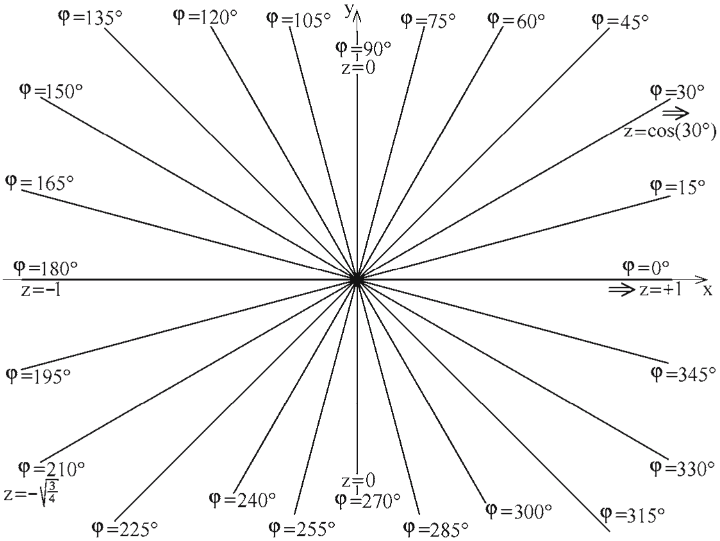

**Bild 9-2b**
Höhenliniendiagramm der Funktion
$z = \cos(x) + \sin(y)$

Die Höhenlinien sind mit äquidistanten Höhenabständen aufgetragen, und zwar mit Abständen von 0.2 Höheneinheiten.

(c.) Erkennt man im Nenner der Funktion die Kreisgleichung, so drängt sich der Verdacht auf, dass die Verwendung von Polarkoordinaten den Ausdruck vereinfachen könnte. Wir probieren dies aus und erhalten wegen $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$ den Ausdruck

2 P
$$z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{r^2 \cdot \cos^2(\varphi) + r^2 \cdot \sin^2(\varphi)}} = \frac{r \cdot \cos(\varphi)}{\sqrt{r^2}} = \cos(\varphi)$$

Die Funktion ist bei gegebenem Winkel $\varphi$ von $r$ unabhängig, und somit also für alle $r$ konstant, d.h. wir erhalten Strahlen, die vom Koordinatenursprung ausgehen. Einige davon sind in Bild 9-2c gezeichnet.




2 P

**Bild 9-2c** Höhenliniendiagramm der Funktion $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

## Aufgabe 9.3 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz

(a…d.) je 3 min

Punkte (a…d.) je 2 P

Nachfolgend seien einige Funktionen gegeben, die die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllen. Zeigen Sie anhand dieser Beispiele, dass die gemischten partiellen zweiten Ableitungen dieser Funktionen gleich sind.

(a.) $f(x;y) = (ax+by)^n$

(b.) $f(x;y) = e^{xy}$

(c.) $f(x;y) = (x+y)\cdot\sin(x-y)$

(d.) $f(x;y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$

## Lösung zu 9.3

(a.) Die Funktion ist abzuleiten als Polynom:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= f_x = n\cdot(ax+by)^{n-1}\cdot a \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f_y = n\cdot(ax+by)^{n-1}\cdot b \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= f_{xy} = n\cdot(n-1)\cdot(ax+by)^{n-2}\cdot a\cdot b \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= f_{yx} = n\cdot(n-1)\cdot(ax+by)^{n-2}\cdot b\cdot a \end{aligned}$$

2 P

(b.) Abgeleitet wird mit Produktregel:

2 P
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=e^{xy}\cdot y\\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_y=e^{xy}\cdot x\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}=e^{xy}\cdot x\cdot y+e^{xy}\\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}=e^{xy}\cdot y\cdot x+e^{xy}\end{array}$$

(c.) Produktregel anwenden, Kettenregel nicht vergessen:

2 P
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=1\cdot\sin(x-y)\cdot 1+(x+y)\cdot\cos(x-y)\cdot 1=\sin(x-y)+(x+y)\cdot\cos(x-y)\\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_y=1\cdot\sin(x-y)+(x+y)\cdot\cos(x-y)\cdot(-1)=\sin(x-y)-(x+y)\cdot\cos(x-y)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}=\cos(x-y)\cdot(-1)+1\cdot\cos(x-y)+(x+y)\cdot(-\sin(x-y)\cdot(-1))=(x+y)\cdot\sin(x-y)\\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}=\cos(x-y)-1\cdot\cos(x-y)-(x+y)\cdot(-\sin(x-y))=(x+y)\cdot\sin(x-y)\end{array}$$

(d.) Hier ist die Kettenregel wichtig:

2 P
$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)}\\ \frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f_{xy}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 0-2x\cdot(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=f_{yx}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 0-2y\cdot(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{array}$$

Wie man sieht, stimmen in allen Fällen die gemischten partiellen zweiten Ableitungen jeweils überein.

## Aufgabe 9.4 Partielle Ableitungen, Satz von Schwarz

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 8 min | | Punkte<br>(a,b.) je 4 P |

Nachfolgend seien zwei Funktionen gegeben, die die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllen. Zeigen Sie anhand dieser Beispiele, dass sämtliche gemischte partielle dritte Ableitungen der gegebenen Funktionen jeweils einander gleich sind.

(a.) $f(x;y;z)=\sin^2(x)+z\cdot e^y\cdot\sqrt{x}+23$ (b.) $f(x;y;z)=x^2\cdot y+z\cdot\ln\left(x+y^2\right)$

## Lösung zu 9.4

Hier müssen verschiedene dritte Ableitungen verglichen werden. Wollen wir sämtliche gemischte partielle dritte Ableitungen vergleichen, dann müssen wir die Ableitungen in allen denkbar möglichen Reihenfolgen ausführen: $f_{xyz}\overset{?}{=}f_{xzy}\overset{?}{=}f_{yxz}\overset{?}{=}f_{yzx}\overset{?}{=}f_{zxy}\overset{?}{=}f_{zyx}$

(a.)

$$f_x = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + z\cdot e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_{xy} = \tfrac{1}{2}z\cdot x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^y \quad\Rightarrow\quad f_{xyz} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot e^y$$

$$f_x = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + z\cdot e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_{xz} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_{xzy} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_y = z\cdot e^y\cdot\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f_{yx} = z\cdot e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_{yxz} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_y = z\cdot e^y\cdot\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f_{yz} = e^y\cdot x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_{yzx} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_z = e^y\cdot\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f_{zx} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f_{zxy} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

4 P

$$f_z = e^y\cdot\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f_{zy} = e^y\cdot\sqrt{x} \quad\Rightarrow\quad f_{zyx} = e^y\cdot\tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

(b.)

$$f_x = 2xy + z\cdot\left(x+y^2\right)^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_{xy} = 2x - z\cdot\left(x+y^2\right)^{-2}\cdot 2y \quad\Rightarrow\quad f_{xyz} = -\left(x+y^2\right)^{-2}\cdot 2y$$

$$f_x = 2xy + z\cdot\left(x+y^2\right)^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_{xz} = \left(x+y^2\right)^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_{xyz} = -\left(x+y^2\right)^{-2}\cdot 2y$$

$$f_y = x^2 + z\cdot\left(x+y^2\right)^{-1}\cdot 2y \quad\Rightarrow\quad f_{yx} = 2x - 2zy\cdot\left(x+y^2\right)^{-2} \quad\Rightarrow\quad f_{yxz} = -2y\cdot\left(x+y^2\right)^{-2}$$

$$f_y = x^2 + z\cdot\left(x+y^2\right)^{-1}\cdot 2y \quad\Rightarrow\quad f_{yz} = 2y\cdot\left(x+y^2\right)^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_{yzx} = -2y\cdot\left(x+y^2\right)^{-2}$$

$$f_z = \ln\left(x+y^2\right) \quad\Rightarrow\quad f_{zx} = \left(x+y^2\right)^{-1} \quad\Rightarrow\quad f_{zxy} = -\left(x+y^2\right)^{-2}\cdot 2y$$

4 P

$$f_z = \ln\left(x+y^2\right) \quad\Rightarrow\quad f_{zy} = \left(x+y^2\right)^{-1}\cdot 2y \quad\Rightarrow\quad f_{yzx} = -\left(x+y^2\right)^{-2}\cdot 2y$$

Wie man sieht, sind bei beiden Teilaufgaben auch alle gemischten partiellen dritten Ableitungen identisch.

## Aufgabe 9.5 Totales Differential, lineare Näherung

| | | | |
|---|---|---|---|
| (i,ii,iii) je 8 min | | | Punkte (i,ii,iii.) je 6 P |

Gegeben seien drei Funktionen (i.) $f(x;y) = \cos(x) + \sin(y)$

(ii.) $f(x;y) = 3e^{2x} + 4xy + 5\cdot\ln(y)$

(iii.) $f(x;y) = x^3 + 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3$

Anmerkung: Argumente von Winkelfunktionen verstehen sich im Bogenmaß.

Berechnen Sie für jede der Funktionen:

(a.) den Funktionswert im Arbeitspunkt $(x_0; y_0) = (0.5;\, 0.5)$

(b.) das totale Differential (auch vollständiges Differential genannt) (c.) die Änderung des Funktionswerts in linearer Näherung, ausgehend vom Punkt $(x_0; y_0)$, wenn man von dort aus um $(\Delta x; \Delta y) = (+0.01; -0.01)$ fortschreitet.

(d.) Vergleichen Sie den Funktionswert der linearen Näherung mit der unmittelbaren Berechnung der Funktionswerte am Ort $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = (0.51; 0.49)$ und geben Sie prozentual an, wie genau (bzw. ungenau) die Näherungen sind.

## Lösung zu 9.5

**Arbeitshinweise:**

zu (a.) Der Funktionswert ergibt sich durch Einsetzen der Argumente in die Funktion.
zu (b.) Beim totalen Differential verwenden wir neben den partiellen Ableitungen kleine Buchstaben $df$, $dx$, $dy$ um auf die Grenzwertbildung der Infinitesimalrechnung hinzuweisen. So enthält z.B. ein $dx$ noch ein $\lim\limits_{\Delta x \to 0}$.
zu (c.) Bei der linearen Näherung hingegen werden anstelle der Grenzwerte $df$, $dx$, $dy$ endlich große Intervalle $\Delta f$, $\Delta x$, $\Delta y$ verwendet.
zu (d.) Den Funktionswert in linearer Näherung erhält man, indem man zum Funktionswert im Arbeitspunkt $f(x_0; y_0)$ das $\Delta f$ addiert.

Betrachtung der Funktion (i.)

1 P (a.) $f(x_0; y_0) = \cos(0.5) + \sin(0.5) \overset{TR}{\approx} 1.357008$

1 P (b.) $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = -\sin(x) \cdot dx + \cos(y) \cdot dy$

1 P (c.) $\Delta f = f_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y = -\sin(0.5) \cdot (+0.01) + \cos(0.5) \cdot (-0.01) \overset{TR}{\approx} -0.013570$

(d.) Der Funktionswert in linearer Näherung lautet

$$f(x_0; y_0) + \Delta f \overset{TR}{\approx} 1.357008 - 0.013570 = 1.343438$$

Der unmittelbar berechnete Funktionswert ergibt

2 P $$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(0.51; 0.49) = \cos(0.51) + \sin(0.49) \overset{TR}{\approx} 1.3433704$$

Anmerkung:

1 P Der Betrag der Differenz der beiden Werte beträgt nur ca. 0.005% des exakten Wertes. Je dichter man die lineare Näherung in der Nähe des Arbeitspunktes $(x_0; y_0)$ betrachtet, um so besser ist die Qualität der Näherung.

Betrachtung der Funktion (ii.)

1 P (a.) $f(x_0; y_0) = 3e^{2 \cdot 0.5} + 4 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 5 \cdot \ln(0.5) \overset{TR}{\approx} 5.68910958$

1 P (b.) $df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy = \left(6 \cdot e^{2x} + 4y\right) \cdot dx + \left(4x + \frac{5}{y}\right) \cdot dy$

(c.)

$\Delta f = f_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y = \left(6\cdot e^{2\cdot 0.5}+4\cdot 0.5\right)\cdot(0.01)+\left(4\cdot 0.5+\frac{5}{0.5}\right)\cdot(-0.01)\overset{TR}{\approx}0.06309691$ 1 P

(d.) Der Funktionswert in linearer Näherung lautet

$f(x_0;y_0)+\Delta f\overset{TR}{\approx}5.68910958+0.06309691=5.75220649$

Der unmittelbar berechnete Funktionswert ergibt

$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)= f(0.51;\,0.49)=3e^{2\cdot 0.51}+4\cdot 0.51\cdot 0.49+5\cdot\ln(0.49)=5.75243485$ 2 P

Hier liegt der Betrag der Differenz der beiden Werte bei ca. 0.004% des exakten Wertes. 1 P

<u>Betrachtung der Funktion (iii.)</u>

(a.) $f(x_0;y_0)=0.5^3+3\cdot 0.5^2\cdot 0.5+2\cdot 0.5\cdot 0.5^2-4\cdot 0.5^3=0.250$ 1 P

(b.) $df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy=\left(3x^2+6xy+2y^2\right)\cdot dx+\left(3x^2+4xy-12y^2\right)\cdot dy$ 1 P

(c.) $\Delta f = f_x(x_0;y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0;y_0)\cdot\Delta y$

$=\left(3\cdot 0.5^2+6\cdot 0.5\cdot 0.5+2\cdot 0.5^2\right)\cdot(0.01)+\left(3\cdot 0.5^2+4\cdot 0.5\cdot 0.5-12\cdot 0.5^2\right)\cdot(-0.01)=0.04$ 1 P

(d.) Der Funktionswert in linearer Näherung lautet $f(x_0;y_0)+\Delta f = 0.25+0.04=0.29$

Der unmittelbar berechnete Funktionswert ergibt

$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y)= f(0.51;\,0.49)=0.289304$ 2 P

Der Betrag der Differenz der beiden Werte liegt hier bei ca. 0.24% des exakten Wertes. 1 P

## Aufgabe 9.6 Totales Differential, lineare Näherung

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | (i,ii) | je 10 min | (i,ii.) je 7 P |

Gegeben seien die beiden Funktionen (i.) $f(x;y;z)=30\cdot x\cdot y\cdot z^2+e^{x+y+z}$

(ii.) $f(x;y;z)=x\cdot\ln(y)\cdot\sqrt{z}$

Berechnen Sie jeweils für jede der Funktionen

(a.) den Funktionswert im Arbeitspunkt $(x_0;y_0;z_0)=(1.2;1.5;1.8)$

(b.) das totale Differential

(c.) die Änderung des Funktionswerts in linearer Näherung, ausgehend vom Punkt $(x_0;y_0;z_0)$, wenn man von dort aus um $(\Delta x;\Delta y;\Delta z)=(+0.02;-0.01;+0.03)$ fortschreitet.

(d.) Vergleichen Sie den Funktionswert der linearen Näherung mit der unmittelbaren Berechnung der Funktionswerte am Ort $(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)=(1.22;1.49;1.83)$.

## Lösung zu 9.6

Die Rechnung verläuft in Analogie zu Aufgabe 9.5. Der Unterschied ist die Dimensionalität. Während man sich beim zweidimensionalen Argument $f(x;y)$ eine Höhenlandschaft vorstellen kann, mit $(x;y)$ als Ort auf der Fläche und $f$ als Höhe, versagt beim dreidimensionalen Argument $(x;y;z)$ die anschauliche Interpretation. Die Anschauung ändert aber prinzipiell nichts am abstrakt durchzuführenden Rechenweg.

<u>Betrachtung der Funktion (i.)</u>

1 P (a.) $f(x_0;y_0;z_0)=30\cdot 1.2\cdot 1.5\cdot 1.8^2+e^{1.2+1.5+1.8}\overset{TR}{\approx}264.9771313$

(b.)

1 P $$df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz=\left(30yz^2+e^{x+y+z}\right)\cdot dx+\left(30xz^2+e^{x+y+z}\right)\cdot dy+\left(60xyz+e^{x+y+z}\right)\cdot dz$$

(c.) $\Delta f = f_x(x_0;y_0;z_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0;y_0;z_0)\cdot\Delta y+f_z(x_0;y_0;z_0)\cdot\Delta z$

2 P $$=\left(30\cdot 1.5\cdot 1.8^2+e^{4.5}\right)\cdot(0.02)+\left(30\cdot 1.2\cdot 1.8^2+e^{4.5}\right)\cdot(-0.01)+\left(60\cdot 1.2\cdot 1.5\cdot 1.8+e^{4.5}\right)\cdot(0.03)$$
$$\overset{TR}{\approx}11.182285$$

(d.) Der Funktionswert in linearer Näherung lautet

$$f(x_0;y_0;z_0)+\Delta f\overset{TR}{\approx}264.9771313+11.1822853=276.1594166$$

Der unmittelbar berechnete Funktionswert ergibt

2 P $$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)=f(1.22;1.49;1.83)\overset{TR}{\approx}276.31971$$

1 P Der Betrag der Differenz der beiden Werte liegt hier bei ca. 0.06 % des exakten Wertes.

<u>Betrachtung der Funktion (ii.)</u>

1 P (a.) $f(x_0;y_0;z_0)=1.2\cdot\ln(1.5)\cdot\sqrt{1.8}\overset{TR}{\approx}0.652786232$

1 P (b.) $$df=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot dz=\left(\ln(y)\cdot\sqrt{z}\right)\cdot dx+\left(x\cdot\tfrac{1}{y}\cdot\sqrt{z}\right)\cdot dy+\left(x\cdot\ln(y)\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{z}}\right)\cdot dz$$

(c.) $\Delta f = f_x(x_0;y_0;z_0)\cdot\Delta x+f_y(x_0;y_0;z_0)\cdot\Delta y+f_z(x_0;y_0;z_0)\cdot\Delta z$

2 P $$=\left(\ln(1.5)\cdot\sqrt{1.8}\right)\cdot(0.02)+\left(1.2\cdot\tfrac{1}{1.5}\cdot\sqrt{1.8}\right)\cdot(-0.01)+\left(1.2\cdot\ln(1.5)\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{1.8}}\right)\cdot(0.03)\overset{TR}{\approx}0.00558653$$

(d.) Der Funktionswert in linearer Näherung lautet

$$f(x_0;y_0;z_0)+\Delta f\overset{TR}{\approx}0.652786232+0.00558653=0.658372762$$

Der unmittelbar berechnete Funktionswert ergibt

2 P $$f(x_0+\Delta x;y_0+\Delta y;z_0+\Delta z)=f(1.22;1.49;1.83)\overset{TR}{\approx}0.65813429$$

1 P Der Betrag der Differenz der beiden Werte liegt hier bei ca. 0.036 % des exakten Wertes.

# Aufgabe 9.7 Ebenengleichung einer Tangentialebene

| | | |
|---|---|---|
| (a,b.) je 7 min | | Punkte (a,b.) je 4 P |

Betrachten Sie die beiden Funktionen (a.) $f(x;y) = 3e^{2x} + 4xy + 5 \cdot \ln(y)$

(b.) $f(x;y) = x^3 + 3x^2 y + 2xy^2 - 4y^3$

Bestimmen Sie jeweils die Ebenengleichung der Tangentialebene im Punkt $(x_0; y_0) = (1.2; 1.5)$

## Lösung zu 9.7

**Arbeitshinweis:**

Allgemein lautet die Gleichung der Tangentialebene einer Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

$$t(x;y) = a \cdot x + b \cdot y + c \ .$$

Darin sind die Steigungen $a$ und $b$ die partiellen Ableitungen im Arbeitspunkt:

$a = f_x(x_0; y_0)$ und $b = f_y(x_0; y_0)$

Der Achsenabschnitt $c$ wird aus der Lage des Arbeitspunktes berechnet:

$t(x_0; y_0) = a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c = f(x_0; y_0) \quad \Rightarrow \quad c = f(x_0; y_0) - a \cdot x_0 - b \cdot y_0$

Wenden wir dies auf die beiden gegebenen Funktionen an, so erhalten wir:

(a.) Die Steigungen lauten: $\frac{\partial f}{\partial x} = 6 \cdot e^{2x} + 4y \quad \Rightarrow \quad a = f_x(x_0; y_0) = 6 \cdot e^{2 \cdot 1.2} + 4 \cdot 1.5 \overset{TR}{\approx} 72.1391$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + \frac{5}{y} \quad \Rightarrow \quad b = f_y(x_0; y_0) = 4 \cdot 1.2 + \frac{5}{1.5} \overset{TR}{\approx} 8.13333$ 1 P

Der Achsenabschnitt ist

$c = f(x_0; y_0) - a \cdot x_0 - b \cdot y_0 \overset{TR}{\approx} \left[3e^{2 \cdot 1.2} + 4 \cdot 1.2 \cdot 1.5 + 5 \cdot \ln(1.5)\right] - 72.1391 \cdot 1.2 - 8.1333 \cdot 1.5 \overset{TR}{\approx} -56.4701$ 1 P

Damit lautet die gesuchte Gleichung der Tangentialebene zu Aufgabenteil (a.)

$t(x;y) = a \cdot x + b \cdot y + c \overset{TR}{\approx} 72.1391 \cdot x + 8.1333 \cdot y - 56.4701$ 2 P

(b.) Die Steigungen lauten:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy + 2y^2 \quad \Rightarrow \quad a = f_x(x_0; y_0) = 3 \cdot 1.2^2 + 6 \cdot 1.2 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.5^2 = 19.62$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4xy - 12y^2 \quad \Rightarrow \quad b = f_y(x_0; y_0) = 3 \cdot 1.2^2 + 4 \cdot 1.2 \cdot 1.5 - 12 \cdot 1.5^2 = -15.48$ 1 P

Der Achsenabschnitt ist

$c = f(x_0; y_0) - a \cdot x_0 - b \cdot y_0 \overset{TR}{\approx} \left[1.2^3 + 3 \cdot 1.2^2 \cdot 1.5 + 2 \cdot 1.2 \cdot 1.5^2 - 4 \cdot 1.5^3\right] - 19.62 \cdot 1.2 + 15.48 \cdot 1.5 = -0.216$ 1 P

Damit lautet die gesuchte Gleichung der Tangentialebene zu Aufgabenteil (b.)

$t(x;y) = a \cdot x + b \cdot y + c = 19.62 \cdot x - 15.48 \cdot y - 0.216$ 2 P

## Aufgabe 9.8 Differentialformen, Integrabilitätsbedingung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 8 min | (a,b.) | Punkte<br>(a,b.) je 4 P |
| | (c.) | 3 min | (c.) | (c.) 2 P |
| | (d.) | 15 min | (d.) | (d.) 9 P |

Untersuchen Sie die nachfolgend genannten Differentialformen, ob es sich dabei um totale Differentiale handelt – falls ja, bestimmen Sie deren Stammfunktionen.

(a.) $P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy = \left(y+\cos(x)\right)\cdot dx + (x+2y)\cdot dy$

(b.) $P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot y}\cdot dx - \dfrac{\sqrt{x}}{y^2}\cdot dy$

(c.) $P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy = \dfrac{x^2}{y}\cdot dx + \dfrac{x^3}{2y^2}\cdot dy$

(d.) $P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy = \dfrac{-y}{x^2+y^2}\cdot dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\cdot dy$

## Lösung zu 9.8

**Arbeitshinweis:**

Zu der Differentialform $P(x;y)\cdot dx + Q(x;y)\cdot dy$ lautet die Integrabilitätsbedingung $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Differentialform integrabel, d.h. es kann integriert werden. (Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so existiert keine Stammfunktion.)

Die Stammfunktion lautet dann $F(x;y) = \int P(x;y)\cdot dx + \int Q(x;y)\cdot dy$. Deren partielle Ableitungen ergeben $P$ und $Q$, nämlich $P(x) = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ und $Q(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}$.

Bezogen auf unsere Aufgaben sieht das wie folgt aus:

(a.) Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

1 P
$$P(x;y) = y+\cos(x) \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$
$$Q(x;y) = x+2y \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, es existiert also eine Stammfunktion mit

1 P $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x)$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(y)$. Diese wollen wir nun bestimmen:

$$F(x;y) = \int P(x;y)\cdot dx = \int (y+\cos(x))\,dx = xy + \sin(x) + g(y)$$
$$F(x;y) = \int Q(x;y)\cdot dy = \int (x+2y)\,dy = xy + y^2 + h(x)$$ 1 P

**Arbeitshinweis:**

Für die Integration nach $x$ existiert eine Integrationskonstante im Bezug auf $x$, die also in $x$-Richtung konstant ist, wohl aber von $y$ abhängen kann. Wir haben sie $g(y)$ genannt. Gleiches gilt in analoger Weise für die Integration nach $y$, bei der eine Integrationskonstante im Bezug auf $y$ berücksichtigt werden muss, und die wir $h(x)$ nennen wollen.

Diese Integrationskonstanten müssen derart bestimmt werden, dass beide Rechenwege zur Stammfunktion $F(x;y)$ dasselbe Ergebnis liefern.

Im Falle unserer Aufgabe wäre dies $xy + \sin(x) + g(y) = F(x;y) = xy + y^2 + h(x)$.

Das geht nur, wenn $h(x) = \sin(x) + C$ und $g(y) = y^2 + C$ sind. $h(x)$ übernimmt dabei die Rolle der von $y$ unabhängigen Terme und $g(y)$ die Rolle der von $x$ unabhängigen Terme.

Die gesuchte Stammfunktion lautet also $F(x;y) = xy + y^2 + \sin(x) + C$ 1 P

(b.) Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$P(x;y) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{x}\cdot y^2}$$
$$Q(x;y) = -\frac{\sqrt{x}}{y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\tfrac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{y^2}$$ 1 P

Auch hier ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, wir bestimmen also die Stammfunktion: 1 P

$$F(x;y) = \int P(x;y)\cdot dx = \int \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot y^{-1}dx = \tfrac{1}{2}\cdot 2x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-1} + g(y)$$ 1 P
$$F(x;y) = \int Q(x;y)\cdot dy = \int -x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{-2}dy = -x^{\frac{1}{2}}\cdot\left(-y^{-1}\right) + h(x)$$

Die Stammfunktion lautet also $F(x;y) = \frac{\sqrt{x}}{y} + C$ 1 P

(c.) Wir prüfen die Integrabilitätsbedingung:

$$P(x;y) = \frac{x^2}{y} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2}$$
$$Q(x;y) = \frac{x^3}{2y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3x^2}{2y^2}$$

Wegen $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt. 2 P

Das bedeutet, dass zu dieser Differentialform keine Stammfunktion existiert. Wollte man dennoch versuchen, eine zu berechnen, so würde man feststellen, dass die beiden Rechenwege, die zu $F(x;y)$ führen, widersprüchliche Ergebnisse liefern, die mit $h(x)$ und $g(y)$ nicht in Übereinstimmung gebracht werden können.

(d.) Prüfen der Integrabilitätsbedingung:

$$P(x;y)=\frac{-y}{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot(-1)-(-y)\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{-x^2-y^2+2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

2 P

$$Q(x;y)=\frac{x}{x^2+y^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\cdot 1-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Also ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, und wir bestimmen die Stammfunktion:

2 P $$F(x;y)=\int P\cdot dx=\int\frac{-y}{x^2+y^2}\cdot\frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y^2}}\,dx=\underbrace{\int\frac{-\frac{1}{y}}{\frac{x^2}{y^2}+1}\,dx=\int\frac{-1}{u^2+1}}_{\substack{\text{Substitution:}\\ u:=\frac{x}{y}\Rightarrow\frac{du}{dx}=\frac{1}{y}\Rightarrow du=\frac{1}{y}\cdot dx}}\,dx=-\arctan(u)+C_1=-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+g(y)$$

2 P $$F(x;y)=\int Q\cdot dy=\int\frac{x}{x^2+y^2}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}\,dy=\underbrace{\int\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,dy=\int\frac{dv}{1+v^2}}_{\substack{\text{Substitution:}\\ v:=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dv}{dy}=\frac{1}{x}\Rightarrow dv=\frac{1}{x}\cdot dy}}=\arctan(v)+C_2=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+h(x)$$

**Stolperfalle:**

Auf den ersten Blick sieht es aus, als ob die beiden Rechenwege unterschiedliche Ergebnisse liefern. Da die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, kann das nicht sein.

Eine Übereinstimmung kann man erzielen, indem man folgendes Additionstheorem verwendet: $\arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan(\alpha)$. Mit $\alpha=\frac{x}{y}$ lässt sich nämlich die erstgenannte Stammfunktion umformen gemäß $F(x;y)=-\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+g(y)=\frac{\pi}{2}+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+g(y)$. Nach dieser Umformung können die beiden Ergebnisse in Übereinstimmung gebracht werden:

$$\left.\begin{aligned}F(x;y)&=\tfrac{\pi}{2}+\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)+g(y)\\ F(x;y)&=\arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)+h(x)\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \text{Das geht für } h(x)=\tfrac{\pi}{2}+g(y)=C$$

3 P Die gesuchte Stammfunktion lautet also $F(x;y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+C$

## Aufgabe 9.9 Ableiten implizit gegebener Funktionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 3 min<br>8 min | | Punkte<br>(a.) 2 P | <br>(b.) 4 P |
| | (c.)<br>(d.) | 6 min<br>6 min | | <br>(c.) 3 P | <br>(d.) 3 P |

Gegeben seien vier Funktionen in impliziter Form:

(a.) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$ (b.) $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ (c.) $y^2+\sin\left(\sqrt{x+y}\right)=0$ (d.) $e^{x+y}=\frac{1}{x\cdot\sqrt{y}}$

Berechnen Sie bitte für alle diese Funktionen jeweils die Steigung $y'(x)=\frac{dy}{dx}$.

## Lösung zu 9.9

**Arbeitshinweis:**

Ist eine Funktion implizit gegeben in der Form $z(x;y)=0$, so ist die Kurve der Funktion $y=y(x)$ die Schnittlinie der Funktion $z(x;y)$ mit der xy-Ebene. Dies ist die Fläche mit der Höhe $z=0$.

Dann gilt $y'(x)=-\frac{z_x(x;y)}{z_y(x;y)}$ mit den partiellen Ableitungen $z_x=\frac{\partial z}{\partial x}$ und $z_y=\frac{\partial z}{\partial y}$

Für unsere Aufgabe bedeutet dies:

(a.) $z(x;y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}-1=0 \Rightarrow \begin{array}{l} z_x=\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{2} \\ z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{4} \end{array} \Rightarrow y'(x)=-\frac{z_x}{z_y}=-\frac{x/2}{y/4}=-2\frac{x}{y}$ 2 P

Anmerkung: Die Funktion ist eine Ellipse, und zwar wird aufgrund der impliziten Schreibweise der volle Umfang beschrieben, nicht nur eine obere oder eine untere Hälfte. Die implizite Ableitung gibt auch die Steigung an jedem beliebigen Punkt (der oberen und der unteren Hälfte der Kurve) wieder.

(b.) $z(x;y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ Vorab berechnen wir $z_x$ und $z_y$:

$$\Rightarrow \quad z_x=\underbrace{\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot 1-x\cdot\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x}{x^2+y^2}}_{\text{Quotientenregel, und darin die Kettenregel}}\cdot\underbrace{\frac{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}}_{\text{erweitert}}=\frac{\left(x^2+y^2\right)-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$z=x\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad z_y=\frac{\partial z}{\partial y}=x\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-xy\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$ 3 P

Dies setzen wir in $y'(x)$ ein:

$$\Rightarrow \quad y'(x)=-\frac{z_x}{z_y}=-\frac{y^2\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}{-xy\cdot\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}}=\frac{y}{x}$$ 1 P

(c.) $z(x;y) = y^2 + \sin\left(\sqrt{x+y}\right) = 0$

3 P
$$\Rightarrow \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(\sqrt{x+y}\right) \cdot \tfrac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \cos\left(\sqrt{x+y}\right) \cdot \tfrac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{z_x}{z_y} = -\frac{\cos\left(\sqrt{x+y}\right) \cdot \tfrac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}}{2y + \cos\left(\sqrt{x+y}\right) \cdot \tfrac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}}$$

(d.) $e^{x+y} = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{y}} \quad \Rightarrow \quad z(x;y) = e^{x+y} - \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{y}} = e^{x+y} - x^{-1} \cdot y^{-\frac{1}{2}} = 0$

3 P
$$\Rightarrow \quad z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} + x^{-2} \cdot y^{-\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x+y} + \tfrac{1}{2} x^{-1} \cdot y^{-\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow \quad y'(x) = -\frac{z_x}{z_y} = -\frac{e^{x+y} + x^{-2} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{e^{x+y} + \tfrac{1}{2} x^{-1} \cdot y^{-\frac{3}{2}}}$$

## Aufgabe 9.10 Extremwerte mehrdimensionaler Funktionen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | (a) 15 min | | Punkte | |
| | (b.) | (b) 30 min | | (a.) 8 P | (b) 21 P |

Bestimmen Sie die Extremwerte (mit Unterscheidung zwischen Minima und Maxima) und die Sattelpunkte der durch die beiden folgenden Funktionen definierten Flächen.

(a.) $z(x;y) = 3xy - x^3 - y^3$ (b.) $z(x;y) = (x-y-4) \cdot \left(x^2 - 4x - y\right)$

## ▾ Lösung zu 9.10

**Arbeitshinweis:**

Wie bei Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so ist (zur Suche nach Extrema und Sattelpunkten) auch bei Funktionen $z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine notwendige Bedingung (anhand der ersten Ableitungen) und eine hinreichende Bedingung (anhand der zweiten Ableitungen) zu überprüfen.

Die notwendige Bedingung lautet $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ und $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ zum Auffinden von Punkten $P_i$, an denen Extrema oder Sattelpunkte liegen können.

Die hinreichende Bedingung bezieht sich auf die Delta-Diskriminante $\Delta_i = \begin{vmatrix} z_{xx}(P_i) & z_{xy}(P_i) \\ z_{yx}(P_i) & z_{yy}(P_i) \end{vmatrix}$

und lautet
$\Delta_i < 0 \quad \Rightarrow \quad$ In $P_i$ liegt ein Sattelpunkte vor, aber kein Extremum.
$\Delta_i = 0 \quad \Rightarrow \quad$ keine Entscheidung, ob Sattelpunkt oder Extremum.
$\Delta_i > 0 \quad \Rightarrow \quad$ In $P_i$ liegt ein Extremum vor.

Zur Unterscheidung zwischen Minimum und Maximum wird $z_{xx} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ herangezogen:

$z_{xx}(P_i) < 0 \quad \Rightarrow \quad$ relatives Maximum in $P_i$
$z_{xx}(P_i) > 0 \quad \Rightarrow \quad$ relatives Minimum in $P_i$

Auf diese Weise untersuchen wir die gestellten Aufgaben:

(a.) Notwendige Bedingung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 3y - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 \quad (*1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = 3x - 3y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y^2 \quad (*2)$$ 1 P

Lösen wir diese zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, so erhalten wir die Menge aller Punkte, die für mögliche Extrema oder Sattelpunkte in Frage kommen.

Einsetzen von $(*1)$ in $(*2)$ liefert: $x = y^2 = x^4 \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \left(x^3 - 1\right) = 0$

Zwei der Lösungen sind reell, nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

Die zugehörigen y-Werte sind nach $(*1)$: $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$

Extrema oder Sattelpunkte können also nur bei $P_1 = (0;0)$ und bei $P_2 = (1;1)$ auftreten. 2 P

An diesen Stellen überprüfen wir die hinreichende Bedingung

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z_{xx}(P_1) & z_{xy}(P_1) \\ z_{yx}(P_1) & z_{yy}(P_1) \end{vmatrix} = \left.\begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix}\right|_{\text{bei } P_1=(0;0)} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$ also ist bei $P_1$ ein Sattelpunkt. 2 P

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} z_{xx}(P_2) & z_{xy}(P_2) \\ z_{yx}(P_2) & z_{yy}(P_2) \end{vmatrix} = \left.\begin{vmatrix} -6x & 3 \\ 3 & -6y \end{vmatrix}\right|_{\text{bei } P_2=(1;1)} = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 36 - 9 > 0$$ also ein Extremum bei $P_2$. 2 P

Wir untersuchen die Art des Extremums: $z_{xx}(P_2) = -6x\big|_{\text{bei } P_2=(1;1)} = -6 < 0$

Somit ist das Extremum bei $P_2$ ein Maximum. 1 P

(b.) Notwendige Bedingung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 1 \cdot \left(x^2 - 4x - y\right) + (x - y - 4) \cdot (2x - 4) = 0 \qquad (*1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = (-1) \cdot \left(x^2 - 4x - y\right) + (x - y - 4) \cdot (-1) = 0 \qquad (*2)$$ 1 P

Wieder müssen wir zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auflösen. Dazu lösen wir $(*1)$ nach $y$ auf und setzen dies in $(*2)$ ein:

$$(*1) \Rightarrow \quad \left(x^2 - 4x - y\right) + (x - y - 4) \cdot (2x - 4) = x^2 - 4x - y + 2x^2 - 4x - 2xy + 4y - 8x + 16 = 0$$

Sortieren nach $y$-haltigen und $y$-freien Summanden liefert

$$\Rightarrow \quad 3y - 2xy = -3x^2 + 16x - 16$$

$$\Rightarrow \quad y \cdot (3 - 2x) = -3x^2 + 16x - 16 \qquad \Rightarrow \quad y = \frac{3x^2 - 16x + 16}{2x - 3} \qquad (*3)$$ 2 P

Damit sind wir bereit, $y$ in $(*2)$ einzusetzen.

$$-\left(x^2 - 4x - \frac{3x^2 - 16x + 16}{2x - 3}\right) - \left(x - \frac{3x^2 - 16x + 16}{2x - 3} - 4\right) = 0 \qquad \Big| \cdot (2x - 3)$$

$$\Rightarrow\quad -\Big(\big(x^2-4x\big)\cdot(2x-3)-\big(3x^2-16x+16\big)\Big)-\Big((x-4)\cdot(2x-3)-\big(3x^2-16x+16\big)\Big)=0$$

$$\Rightarrow\quad -\big(2x^3-8x^2-3x^2+12x-3x^2+16x-16\big)-\big(2x^2-8x-3x+12-3x^2+16x+16\big)=0$$

2 P $\Rightarrow\quad -2x^3+15x^2-33x+20=0$

Wir suchen die Nullstellen eines Polynoms dritten Grades. Eine davon raten wir bei $x_1=4$.
Polynomdivision bestätigt die geratene Nullstelle und führt uns zu den anderen beiden:

2 P
$$\begin{array}{l}
\big(-2x^3+15x^2-33x+20=0\big):\big(x\ \ -4\ \big)=-2x^2+7x-5\\
-\underline{\big(-2x^3+8x^2\big)}\\
\qquad\quad +7x^2-33x\\
\qquad -\underline{\big(+7x^2-28x\big)}\\
\qquad\qquad\quad -5x+20\\
\qquad\qquad -\underline{\big(-5x+20\big)}\\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

$0\quad\rightarrow$ kein Divisionsrest, also ist $x_1=4$ tatsächlich Nullstelle

Die anderen beiden Nullstellen suchen wir über die pq-Formel:

1 P $-2x^2+7x-5=0 \quad\Rightarrow\quad x^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}=0 \quad\Rightarrow\quad x_{2/3}=\frac{7}{4}\pm\sqrt{\frac{49}{16}-\frac{40}{16}}=\frac{7}{4}\pm\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad x_2=\frac{5}{2}$ und $x_3=1$

Die zu $x_1$, $x_2$, $x_3$ gehörenden $y$-Werte ergeben sich durch Einsetzen in $(*3)$:

1 P $y_1=\dfrac{3x_1^{\,2}-16x_1+16}{2x_1-3}=\dfrac{3\cdot4^2-16\cdot4+16}{2\cdot4-3}=0 \quad\Rightarrow\quad P_1=(x_1;y_1)=(4;0)$

1 P $y_2=\dfrac{3x_2^{\,2}-16x_2+16}{2x_2-3}=\dfrac{3\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-16\cdot\left(\frac{5}{2}\right)+16}{2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)-3}=\dfrac{\frac{75}{4}-\frac{160}{4}+\frac{64}{4}}{\frac{20}{4}-\frac{12}{4}}=\dfrac{-21}{8} \quad\Rightarrow\quad P_2=(x_2;y_2)=\left(\frac{5}{2};\frac{-21}{8}\right)$

1 P $y_3=\dfrac{3x_3^{\,2}-16x_3+16}{2x_3-3}=\dfrac{3\cdot1^2-16\cdot1+16}{2\cdot1-3}=\dfrac{3}{-1}=-3 \quad\Rightarrow\quad P_3=(x_1;y_1)=(1;-3)$

Um an den Stellen $P_1$, $P_2$, $P_3$ die hinreichende Bedingung überprüfen zu können, bilden wir die zweiten Ableitungen, die in der Delta-Diskriminante benötigt werden.
Dazu schreiben wir $z_x$ und $z_y$ als Polynom

$(*1)\quad\Rightarrow\quad z_x=3x^2-16x+3y-2xy+16$

$(*2)\quad\Rightarrow\quad z_y=-x^2+3x+2y+4$ und leiten dann ab

2 P $\Rightarrow\quad z_{xx}=6x-16-2y$ und $z_{xy}=z_{yx}=3-2x$ und $z_{yy}=2$,

sodass wir jetzt einsetzen können

2 P $\Delta_1=\begin{vmatrix} z_{xx}(P_1) & z_{xy}(P_1)\\ z_{yx}(P_1) & z_{yy}(P_1)\end{vmatrix}=\left.\begin{vmatrix} 6x-2y-16 & 3-2x\\ 3-2x & +2\end{vmatrix}\right|_{\text{bei } P_1=(4;0)}=\begin{vmatrix} 8 & -5\\ -5 & 2\end{vmatrix}=16-25=-9<0$

2 P $\Delta_2=\begin{vmatrix} z_{xx}(P_2) & z_{xy}(P_2)\\ z_{yx}(P_2) & z_{yy}(P_2)\end{vmatrix}=\left.\begin{vmatrix} 6x-2y-16 & 3-2x\\ 3-2x & +2\end{vmatrix}\right|_{\text{bei } P_2=\left(\frac{5}{2};\frac{-21}{8}\right)}=\begin{vmatrix} \frac{17}{4} & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}=\frac{17}{2}-4=\frac{9}{2}>0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} z_{xx}(P_3) & z_{xy}(P_3) \\ z_{yx}(P_3) & z_{yy}(P_3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x-2y-16 & 3-2x \\ 3-2x & +2 \end{vmatrix}\Bigg|_{\text{bei } P_3=(1;-3)} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8-1 = -9 < 0$$ 2 P

Schlussfolgerung – Interpretation der Delta-Diskriminante:
Wegen $\Delta_1 < 0$, $\Delta_3 < 0$ sind die charakteristischen Punkte bei $P_1$ und bei $P_3$ Sattelpunkte.
Wegen $\Delta_2 > 0$ liegt bei $P_2$ ein Extremum vor, dessen Art wir untersuchen müssen:

$z_{xx}(P_2) = 6x_2 - 2y_2 - 16 = 6 \cdot \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{-21}{8} - 16 = \frac{17}{4} > 0 \Rightarrow$ Das Extremum bei $P_2$ ist ein Minimum.

Anmerkung: Wer die Funktionen veranschaulichen möchten, stelle mit Hilfe eines Plotprogramms Höhenliniendiagramme dar. 2 P

## Aufgabe 9.11 Gleichung eines Rotationsparaboloids

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 min | | Punkte 2 P |

Ein Rotationsparaboloid, wie es entsteht bei der Rotation einer Parabel um die z-Achse, enthalte den Punkt $P_1 = (x_1; y_1; z_1;) = (1; 0; 2)$. Bestimmen Sie die Gleichung des Paraboloids.

Hinweis: Die allgemeine Form der Gleichung eines Rotationsparaboloids lautet $z(x;y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2}$. Die Bestimmung des Parameters $a$ ist Ziel der Aufgabe.

## Lösung zu 9.11

Bestimmt werden muss ein einziger Parameter und wir kennen einen Punkt, durch den die Funktion läuft.
Wir setzen den Punkt $P_1 = (1; 0; 2)$ in die Gleichung des Paraboloids ein und erhalten

$$2 = \frac{1^2}{a^2} + \frac{0^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$ 2 P

Unser spezielles Rotationsparaboloid hört also auf die Gleichung $z(x;y) = 2x^2 + 2y^2$

## Aufgabe 9.12 Unbestimmte Mehrfachintegrale

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 8 min | | Punkte (a.) 5 P |
| | (b.) | 5 min | | (b.) 3 P |

Berechnen Sie bitte die folgenden beiden unbestimmten Mehrfachintegrale:

(a.) $\int\int (x+y) \cdot e^{x+y} \, dy \, dx$ (b.) $\int\int\int \frac{x}{y} \cdot e^z \, dz \, dy \, dx$

## ▾ Lösung zu 9.12

**Arbeitshinweis:**

Bei Mehrfachintegralen wird immer von innen nach außen integriert. Bei der hier verwendeten Reihenfolge wäre deshalb beim Doppelintegral zuerst über $dy$ und danach über $dx$ zu integrieren, beim Dreifachintegral zuerst über $dz$, dann über $dy$ und zuletzt über $dx$.

$$\text{(a.)} \int\int (x+y)\cdot e^{x+y}\,dy\,dx = \int\int\left(x\cdot e^{x+y} + y\cdot e^{x+y}\right)dy\,dx = \int\left(\underbrace{\int x\cdot e^{x+y}dy}_{\text{"unkompliziert"}} + \underbrace{\int \underbrace{y}_{u}\cdot\underbrace{e^{x+y}}_{v'}dy}_{\text{partiell}}\right)dx$$

3 P

$$= \int\left(x\cdot e^{x+y} + \underbrace{y}_{u}\cdot\underbrace{e^{x+y}}_{v} + C_1 - \int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x+y}}_{v}dy\right)dx = \int\left(x\cdot e^{x+y} + y\cdot e^{x+y} - e^{x+y} + C_2\right)dx$$

Damit ist die Integration nach $dy$ fertig, es folgt jetzt die Integration nach $dx$.

$$= \int\left(\underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{x+y}}_{v'} + \underbrace{y\cdot e^{x+y} - e^{x+y} + C_2}_{\text{"unkompliziert"}}\right)dx = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{e^{x+y}}_{v} - \int\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{e^{x+y}}_{v}dx + \underbrace{y\cdot e^{x+y} - e^{x+y} + C_2\cdot x + C_3}_{\text{dies ist der unkomplizierte Teil}}$$

2 P

$$= x\cdot e^{x+y} - e^{x+y} + y\cdot e^{x+y} - e^{x+y} + C_2\cdot x + C_4 = (x+y-2)\cdot e^{x+y} + C_2\cdot x + C_4$$

**Stolperfalle:**

Man muss immer genau aufpassen, nach welchem Parameter man gerade integriert. So ist zum Beispiel bei der Integration nach $dy$ das $x$ wie eine Konstante zu behandeln, das $y$ hingegen nicht. Aus diesem Grunde ergibt sich in der ersten Zeile der Rechnung auch die Notwendigkeit, das $y\cdot e^{x+y}$ partiell zu integrieren, was beim $x\cdot e^{x+y}$ nicht nötig ist.

Hat man immer im Kopf, wann man über welchen Parameter integriert, so versteht man auch die weiteren Schritte der Musterlösung.

$$\text{(b.)} \int\int\int \tfrac{x}{y}\cdot e^z\,dz\,dy\,dx = \int\int\tfrac{x}{y}\cdot\left(\int e^z\,dz\right)dy\,dx = \int\int\tfrac{x}{y}\cdot\left(e^z + C_1\right)dy\,dx = \int x\cdot\left(e^z + C_1\right)\left(\int\tfrac{1}{y}\,dy\right)dx$$

3 P

$$= \int x\cdot\left(e^z + C_1\right)\left(\ln(y) + C_2\right)dx = \left(e^z + C_1\right)\left(\ln(y) + C_2\right)\cdot\int x\,dx = \left(e^z + C_1\right)\left(\ln(y) + C_2\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}x^2 + C_3\right)$$

**Arbeitshinweis:**

Es ist immer eine gute Taktik, diejenigen Anteile des Integranden, die bei der Integration nach einem bestimmten Parameter konstant sind (als zum Bsp. $x$ und $y$ bei der Integration nach $dz$), aus dem jeweiligen innersten Integral herauszuziehen, sofern die Funktion dies erlaubt. Gelingt das, so kann man oftmals den Integranden in einer recht einfachen Darstellung sehen. Dadurch können komplizierte Aufgaben ihre in Wirklichkeit vorhandene Unkompliziertheit offenbaren, was im soeben gezeigten Beispiel einige Male angewendet wird.

# Aufgabe 9.13 Bestimmte Mehrfachintegrale

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 12 min | (a.) | | (a.) 6 P |
| | (b.) | 5 min | (b.) | | (b.) 3 P |

Berechnen Sie bitte die folgenden beiden bestimmten Mehrfachintegrale:

(a.) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\sin(x)\,dy\,dx$ (b.) $\int\limits_0^3 \int\limits_0^{1-x} \left(2xy - x^2 - y^2\right)dy\,dx$

## Lösung zu 9.13

(a.)
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\cdot\sin(x)\,dy\,dx = \int_0^1 \sin(x)\cdot \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^1 \sin(x)\cdot\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \sin(x)\cdot\tfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)dx$$ 1 P

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sin(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 \overbrace{\underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{v'}dx}^{\text{partielle Integration}} = \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sin(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\cdot\left(\left[\underbrace{x^2}_{u}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{v'}\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{(-\cos(x))}_{v}dx\right)$$ 1 P

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sin(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot(\cos(x))\right]_0^1 - \overbrace{\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{(\cos(x))}_{v'}dx}^{\text{erneut partiell}}$$ 1 P

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\int_0^1 \sin(x)\,dx + \tfrac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot(\cos(x))\right]_0^1 - \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{(\sin(x))}_{v} + \int_0^1 \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\sin(x)}_{v}dx$$ 1 P

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left[-\cos(x)\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot(\cos(x))\right]_0^1 - \left[x\cdot(\sin(x))\right]_0^1 + \left[-\cos(x)\right]_0^1$$ 1 P

$$= \tfrac{1}{2}\cdot\left[-\cos(1)+\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right] + \tfrac{1}{2}\cdot\left[(\cos(1))-0\right] - \left[(\sin(1))-0\right] + \left[-\cos(1)+\underbrace{\cos(0)}_{=1}\right]$$ 1 P

$$= -\tfrac{1}{2}\cdot\cos(1)+\tfrac{1}{2} \quad +\tfrac{1}{2}\cdot(\cos(1)) \quad -(\sin(1)) \quad -\cos(1)+1 = +\tfrac{3}{2}-\sin(1)-\cos(1) \overset{TR}{\approx} 0.1182267$$

(b.)
$$\int_0^3 \int_0^{1-x} \left(2xy - x^2 - y^2\right)dy\,dx = \int_0^3 \left[xy^2 - x^2y - \tfrac{1}{3}y^3\right]_0^{1-x} dx = \int_0^3 \left[x\cdot(1-x)^2 - x^2\cdot(1-x) - \tfrac{1}{3}(1-x)^3\right]dx$$ 1 P

$$= \int_0^3 \left[x\cdot\left(1-2x+x^2\right) - x^2 + x^3 - \tfrac{1}{3}\left(1-3x+3x^2-x^3\right)\right]dx = \int_0^3 \left(\tfrac{7}{3}x^3 - 4x^2 + 2x - \tfrac{1}{3}\right)dx$$ 1 P

$$= \tfrac{7}{12}x^4 - \tfrac{4}{3}x^3 + x^2 - \tfrac{1}{3}x\Big|_0^3 = \tfrac{7}{12}\cdot 3^4 - \tfrac{4}{3}\cdot 3^3 + 3^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 3 = \tfrac{77}{4}$$ 1 P

## Aufgabe 9.14 Textbeispiel – Mehrfachintegral

| | | |
|---|---|---|
| 20 min | | Punkte 11 P |

In einem Schwimmbad befinde sich ein Becken mit der in Bild 9-14 wiedergegebenen Grundfläche (mit Blick aus der z-Richtung). Die Wassertiefe sei gleichförmig zunehmend mit der Funktion $z(x;y)=\frac{1}{10}\cdot y$ . Berechnen Sie das Wasservolumen.

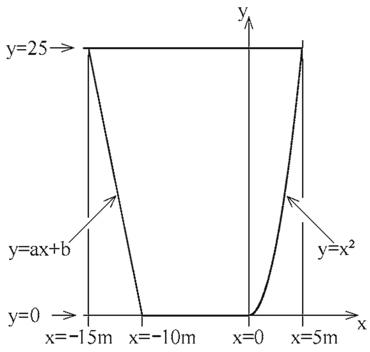



**Bild 9-14**
Draufsicht auf das Schwimmbecken, dessen Wasservolumen berechnet werden soll.
In $x$ – Richtung wird das Becken begrenzt durch eine Normalparabel $y=x^2$ und eine Gerade $y=ax+b$ .
In $y$ – Richtung wird das Becken durch zwei ebene Wände begrenzt.
Die Wassertiefe $z$ nimmt in $y$ – Richtung kontinuierlich zu.

## Lösung zu 9.14

**Stolperfalle:**

Die zu integrierende Funktion ist simpel – sie ist in der Aufgabe gegeben. Die Kunst liegt in der richtigen Aufstellung der Integralgrenzen. Da die Integration in $x$ – Richtung von der $y$ – Koordinate abhängt, **muss** die innere (zuerst durchzuführende) Integration über den Parameter $x$ laufen und die zugehörigen Grenzen müssen als $x=x(y)$ angegeben werden. Erst zuletzt kommen diejenigen Grenzen, in deren Richtung eine konstante Begrenzung angegeben werden kann. Dies ist die Integration in $y$ – Richtung.

Wie aus der Erklärung der „Stolperfalle" zu entnehmen ist, müssen als Vorarbeit die Integralgrenzen bestimmt werden:

- Die Grenzen in $y$ – Richtung sind: Untergrenze $y_U=0$ und Obergrenze $y_O=5^2=25$
- 2 P Die rechte Grenze in $x$ – Richtung ist $y=x^2 \quad\Rightarrow\quad x_R=\sqrt{y}$
- Die linke Grenze in $x$ – Richtung ergibt sich aus der Geradengleichung $y=ax+b$ , die wir aus den beiden bekannten Punkten bestimmen: $y(-10)=0$ und $y(-15)=25$

$\Rightarrow$ Geradensteigung $a=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-0}{-15+10}=-5$

$\Rightarrow$ Achsenabschnitt $b=y_0-ax_0$ mit einem Punkt $(x_0;y_0)$ auf der Geraden. Wir nehmen z.B. den Punkt $(x_0;y_0)=(-10;0)$ und erhalten $b=0-(-5)\cdot(-10)=-50$

$\Rightarrow$ Geradengleichung: $y=-5x-50$

Da wir $x$ als Funktion von $y$ brauchen, bilden wir die Umkehrfunktion

$y=-5x-50 \quad \Rightarrow \quad y+50=-5x \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{5}y-10$, also linke Grenze $x_L(y)=-\frac{1}{5}y-10$ 4 P

Damit sind die Integralgrenzen bestimmt und wir können das Integral ansetzen:

$$V=\int_{y_U}^{y_O}\int_{x_L(y)}^{x_R(y)} z(x;y)\,dx\,dy=\int_{0}^{25}\int_{-\frac{1}{5}y-10}^{\sqrt{y}} \frac{1}{10}y\,dx\,dy$$ 2 P

Die Schwierigkeit liegt im Ansetzen des Integrals mit seinen Grenzen – das Lösen selbst ist kein Problem:

$$V=\int_{0}^{25}\int_{-\frac{1}{5}y-10}^{\sqrt{y}} \frac{1}{10}y\,dx\,dy=\int_{0}^{25}\left[\frac{1}{10}xy\right]_{-\frac{1}{5}y-10}^{\sqrt{y}}dy=\int_{0}^{25}\left[\frac{1}{10}\sqrt{y}\cdot y-\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}y-10\right)\cdot y\right]dy$$

$$=\int_{0}^{25}\left(\frac{1}{10}y^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{50}y^2+y\right)dy=\left[\frac{1}{10}\cdot\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{150}y^3+\frac{1}{2}y^2\right]_0^{25}=\frac{2}{50}\cdot 25^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{150}\cdot 25^3+\frac{1}{2}\cdot 25^2=\frac{1625}{3}=541\frac{2}{3}$$

Antwort: Das Volumen beträgt $V=541\frac{2}{3}m^3$ (bei Verwendung des Meters als Längeneinheit). 3 P

## Aufgabe 9.15 Flächenberechnung in Polarkoordinaten

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | 4 P |

Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Archimedischen Spirale für einen Umlauf, also für $\varphi=0...2\pi$

Hinweis: Die Archimedische Spirale hat die Funktionsgleichung $r(\varphi)=a\cdot\varphi$ in Polarkoordinaten (worin $a$ eine positive reelle Konstante ist). Sie ist in Bild 9-15 zur Veranschaulichung dargestellt.

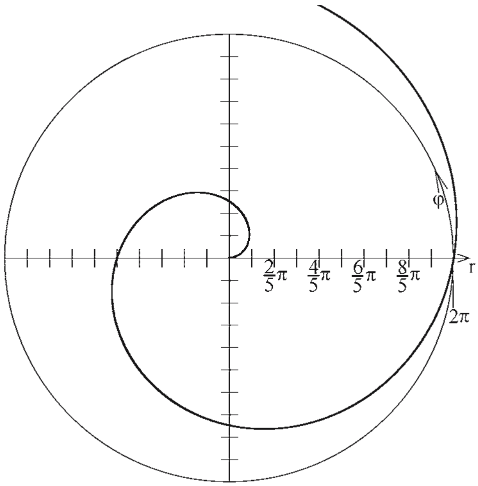



**Bild 9-15**
Bild der Archimedischen Spirale $r(\varphi)=a\cdot\varphi$

Die grau unterlegte Fläche ist die in Aufgabe 9.15 zu bestimmende

## Lösung zu 9.15

**Arbeitshinweis / Stolperfalle:**

Die Klippe liegt hier im Aufstellen des zweidimensionalen Integrals in Polarkoordinaten. Berechnet man eine Fläche mit Hilfe eines Flächenintegrals, so ist die zu integrierende Funktion $f=1$ (egal in welchen Koordinaten).

Da wir in Polarkoordinaten arbeiten, lautet das zugehörige Flächenelement $r\,dr\,d\varphi$ .

Die Integralgrenze in $r$ – Richtung beginnt im Koordinatenursprung und endet bei der Kurve der Funktion. Zur Verbesserung der Klarheit wurden bei Aufstellen des Integrals die Grenzen mit den jeweils wirkenden Funktionen beschriftet. Diese Maßnahme ist erlaubt aber nicht zwingend erforderlich.

4 P

Fläche $A=\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\int\limits_{r=0}^{r(\varphi)=a\cdot\varphi} 1\cdot r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_0^{a\cdot\varphi}d\varphi=\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi}\tfrac{1}{2}a^2\varphi^2 d\varphi=\left[\tfrac{1}{2}a^2\cdot\tfrac{1}{3}\varphi^3\right]_0^{2\pi}=\tfrac{8}{6}a^2\cdot\pi^3$

## Aufgabe 9.16 Schwerpunktsberechnung einer Fläche

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a) | 2 min | (a) | | (a.) 2 P |
| | (b) | 12 min | (b) | | (b.) 6 P |

Gegeben seien zwei Funktionen in kartesischen Koordinaten $f(x)=x^2$ und $g(x)=x$, die miteinander eine Fläche einschließen.
(a.) Skizzieren Sie die Funktionen und die Fläche.
(b.) Berechnen Sie Flächeninhalt und Schwerpunkt.

## Lösung zu 9.16

(a.) Die gefragte Skizze sieht man in Bild 9-16.

2 P

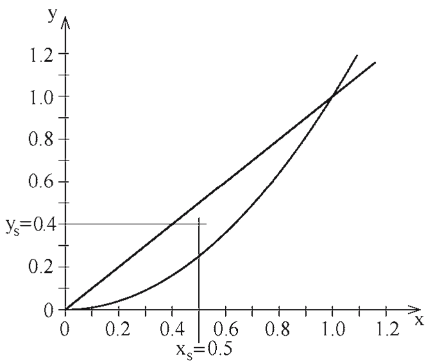



**Bild 9-16**

Skizze der Funktionen $f(x)=x^2$ und $g(x)=x$ sowie der eingeschlossenen Fläche, deren Flächeninhalt und Schwerpunkt zu bestimmen sind.
Die Lage der Schwerpunktskoordinaten $(x_S;y_S)$ ist im Vorgriff auf Aufgabenteil (b.) bereits eingetragen.

(b.) Die Schnittpunkte der beiden Funktionen bei $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ sieht man sofort ohne lange Berechnung. Damit ergibt sich die gefragte Fläche als eindimensionales Integral

$$A = \int_{x_0}^{x_1} \left(g(x) - f(x)\right) dx = \int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6} \qquad \text{2 P}$$

Zur Auffindung des Schwerpunkts verwendet man in kartesischen Koordinaten die Formeln

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \int_{f_U(x)}^{f_O(x)} x\,dy\,dx \quad \text{und} \quad y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \int_{f_U(x)}^{f_O(x)} y\,dy\,dx \quad \text{mit der Schwerpunktsposition } (x_S; y_S)$$

Dabei ist die untere Funktionsgrenze $f_U(x) = f(x) = x^2$ und die obere $f_O(x) = f(x) = x$.
Wir setzen ein und bestimmen die gesuchte Schwerpunktsposition:

$$x_S = \frac{1}{1/6} \cdot \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x\,dy\,dx = 6 \cdot \int_0^1 [xy]_{x^2}^{x} dx = 6 \cdot \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = 6 \cdot \left[\tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4\right]_0^1 = 6 \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{2} \qquad \text{2 P}$$

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \int_{f_U(x)}^{f_O(x)} y\,dy\,dx = \frac{1}{1/6} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{x^2}^{x} dx = 6 \cdot \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^4\right) dx = 6 \cdot \left[\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{10}x^5\right]_0^1 = 6 \cdot \left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{10}\right) = \tfrac{2}{5} \qquad \text{2 P}$$

## Aufgabe 9.17 Schwerpunktsberechnung einer Fläche

| | | |
|---|---|---|
| 15 min | | Punkte 7 P |

Betrachten Sie nochmals Aufgabe 7.15.b mit den beiden Funktionen $f(x) = 4a - \frac{x^2}{a}$ und $g(x) = \frac{3}{a} \cdot (x - 2a)^2$, die zwischen den beiden Schnittpunkten $x_1 = a$ und $x_2 = 2a$ die in Aufgabe 7.15.b berechnete Fläche von $A = \frac{2}{3}a^2$ einschließen.
Berechnen Sie jetzt die Schwerpunktskoordinaten dieser Fläche.

## Lösung zu 9.17

Die Skizze der Fläche kennen wir bereits aus Bild 7-15b.
Die Schwerpunktskoordinaten berechnen wir wieder mit den üblichen Formeln, wobei $f_U(x) = g(x)$ und $f_O(x) = f(x)$ ist.

$$x_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x_1}^{x_2} \int_{f_U(x)}^{f_O(x)} x\,dy\,dx = \frac{1}{\frac{2}{3}a^2} \cdot \int_a^{2a} [xy]_{\left(\frac{3}{a}\cdot(x-2a)^2\right)}^{\left(4a - \frac{x^2}{a}\right)} dx = \frac{3}{2a^2} \cdot \int_a^{2a} \left[x\left(4a - \tfrac{x^2}{a}\right) - x\left(\tfrac{3}{a} \cdot (x-2a)^2\right)\right] dx$$

$$= \frac{3}{2a^2} \cdot \int_a^{2a} \left[4ax - \tfrac{x^3}{a} - \tfrac{3x}{a} \cdot \left(x^2 - 4ax + 4a^2\right)\right] dx = \frac{3}{2a^2} \cdot \int_a^{2a} \left[4ax - \tfrac{x^3}{a} - \tfrac{3x^3}{a} + 12x^2 - 12ax\right] dx$$

$$= \frac{3}{2a^2} \cdot \int_a^{2a} \left[ -\tfrac{4x^3}{a} + 12x^2 - 8ax \right] dx = \frac{3}{2a^2} \cdot \left[ -\tfrac{x^4}{a} + 4x^3 - 4ax^2 \right]_a^{2a}$$

4 P
$$= \frac{3}{2a^2} \cdot \left[ -\frac{(2a)^4}{a} + 4 \cdot (2a)^3 - 4a \cdot (2a)^2 \right] - \frac{3}{2a^2} \cdot \left[ -\frac{a^4}{a} + 4 \cdot a^3 - 4a \cdot a^2 \right] = -\frac{3}{2a^2} \cdot \left( -a^3 \right) = \frac{3}{2} a$$

Und für die y-Koordinate des Schwerpunktes gilt:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \int_{f_U(x)}^{f_O(x)} y \, dy \, dx = \frac{1}{\frac{2}{3} a^2} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left[ \tfrac{1}{2} y^2 \right]_{\left(\frac{3}{a} \cdot (x-2a)^2\right)}^{\left(4a - \frac{x^2}{a}\right)} dx = \frac{3}{2a^2} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{1}{2} \left( 4a - \frac{x^2}{a} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{3}{a} \cdot (x-2a)^2 \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{3}{2a^2} \cdot \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{1}{2} \left( 16a^2 - 8x^2 + \frac{x^4}{a^2} \right) - \frac{9}{2a^2} \left( x^2 - 4ax + 4a^2 \right)^2 \right] dx \overbrace{= \; \ldots \; = \; \ldots \; = \; \ldots \; = \; \ldots \;}^{\text{einfaches aus-x-en schafft der Leser selbst}} = \frac{13}{10} \cdot a$$

3 P Damit ist die Schwerpunktsposition bestimmt: $P_S = \left( x_S ; y_S \right) = \left( \tfrac{3}{2} a \, ; \tfrac{13}{10} a \right)$

## Aufgabe 9.18 Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 45 min | | Punkte 23 P |

Wir berechnen den Flächeninhalt und den Schwerpunkt einer in Polarkoordinaten gegebenen Funktion, und zwar der sog. logarithmischen Spirale: $r(\varphi) = e^{a \cdot \varphi}$ .

Um konkrete Zahlen einsetzen zu können, verwenden wir $a = \frac{1}{5}$ und betrachten die Kurve von $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ bis $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ (Angabe von $\varphi$ im Bogenmaß). Einen Plot der Funktion in Polarkoordinaten zeigt Bild 9-18. Die zu betrachtende Fläche ist grau unterlegt.

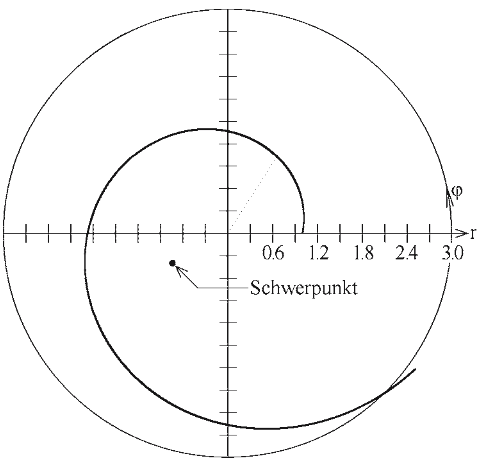



**Bild 9-18**
Skizze der logarithmischen Spirale:
$r(\varphi) = e^{a \cdot \varphi}$ in Polarkoordinaten
Der zu betrachtende Flächenanteil ist grau unterlegt.

## ▾ Lösung zu 9.18

Die Flächenberechnung in Polarkoordinaten hat weitgehende Ähnlichkeit mit der Flächenberechnung in Aufgabe 9.15, nur dass die Funktion eine andere ist und sich daher die Integralgrenzen unterscheiden. Jetzt lautet die zu berechnende Fläche:

$$A=\int\limits_{\varphi=\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int\limits_{r=0}^{r(\varphi)=e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}} 1\cdot r\,dr\,d\varphi=\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}}d\varphi=\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{2}e^{\left(\frac{2}{5}\varphi\right)}d\varphi=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}e^{\left(\frac{2}{5}\varphi\right)}\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$=\frac{5}{4}\cdot\left(e^{\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\pi\right)}-e^{\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}\pi\right)}\right)\overset{TR}{\approx}6.332256924$$ 3 P

Die Schwerpunktsberechnung in Polarkoordinaten geschieht mit den Formeln

$$x_S=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{r_I(\varphi)}^{r_A(\varphi)} r^2\cdot\cos(\varphi)\,dr\,d\varphi \qquad \text{und} \qquad y_S=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int\limits_{r_I(\varphi)}^{r_A(\varphi)} r^2\cdot\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi$$

mit der Schwerpunktsposition $(x_S;y_S)$

Dabei ist die innere Funktionsgrenze $r_I(\varphi)$ und die äußere $r_A(\varphi)$,

sowie der Winkelbereich $\varphi_1 ... \varphi_2$.

Durch Einsetzen erhalten wir die gesuchte Schwerpunktsposition:

$$x_S=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int\limits_{0}^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}} r^2\cdot\cos(\varphi)\,dr\,d\varphi=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\cdot\cos(\varphi)\right]_0^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}}d\varphi=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{3}\cos(\varphi)\cdot\left[r^3\right]_0^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}}d\varphi$$

$$=\frac{1}{3A}\cdot\int\limits_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\cos(\varphi)\cdot e^{\left(\frac{3}{5}\varphi\right)}\right)d\varphi \qquad (*1)$$ 2 P

Zum Aufsuchen der Stammfunktion schieben wir eine Nebenrechnung mittels zweimaliger partieller Integration ein:

$$\int\underbrace{\cos(x)}_{u'_1}\cdot\underbrace{e^{bx}}_{v_1}dx=\underbrace{\sin(x)}_{u_1}\cdot\underbrace{e^{bx}}_{v_1}+C_1-\int\underbrace{\sin(x)}_{u_1}\cdot\underbrace{b\cdot e^{bx}}_{v'_1}dx \quad \text{erste partielle Integration fertig}$$

$$=\sin(x)\cdot e^{bx}+C_1-\int\underbrace{\sin(x)}_{u'_2}\cdot\underbrace{b\cdot e^{bx}}_{v_2}dx=\sin(x)\cdot e^{bx}-\left(\underbrace{-\cos(x)}_{u_2}\cdot\underbrace{b\cdot e^{bx}}_{v_2}+C_2-\int\underbrace{-\cos(x)}_{u_2}\cdot\underbrace{b^2\cdot e^{bx}}_{v'_2}dx\right)$$ 2 P

Wir schreiben den Anfang der Gleichungskette links und das vereinfachte Ende rechts des Gleichheitszeichens und führen Äquivalenzumformungen durch:

$$\Rightarrow \quad \int\cos(x)\cdot e^{bx}dx=\sin(x)\cdot e^{bx}+a\cdot\cos(x)\cdot e^{bx}-C_2-b^2\cdot\int\cos(x)\cdot e^{bx}dx \qquad \Big| +b^2\cdot\int ...dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(1+b^2\right)\cdot\int\cos(x)\cdot e^{bx}dx=\sin(x)\cdot e^{bx}+b\cdot\cos(x)\cdot e^{bx}+C=\left(\sin(x)-b\cdot\cos(x)\right)\cdot e^{bx}+C \quad \Big| \cdot\frac{1}{1-b^2}$$

$$\Rightarrow \quad \int\cos(x)\cdot e^{bx}dx=\frac{\sin(x)+b\cdot\cos(x)}{b^2+1}\cdot e^{bx}+C_3 \quad \text{Stammfunktion gefunden, Nebenrechnung fertig}$$ 2 P

Das Ergebnis dieser Nebenrechnung setzen wir in den Hauptrechengang an der Stelle $(*1)$

1 P ein und erhalten mit $b=\frac{3}{5}$: $x_S=\frac{1}{3A}\cdot\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\cos(\varphi)\cdot e^{\left(\frac{3}{5}\varphi\right)}\right)d\varphi=\frac{1}{3A}\cdot\left[\frac{\sin(\varphi)+\frac{3}{5}\cdot\cos(\varphi)}{\left(\frac{3}{5}\right)^2+1}\cdot e^{\frac{3}{5}\varphi}\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$

$$=\frac{1}{3A}\cdot\left(\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}^{=-1}+\frac{3}{5}\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}^{=0}}{\frac{34}{25}}\cdot e^{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}\pi}-\frac{\overbrace{\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}^{=\sqrt{3/4}}+\frac{3}{5}\cdot\overbrace{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)}^{=1/2}}{\frac{34}{25}}\cdot e^{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\pi}\right)$$

3 P

$$=\frac{1}{3A}\cdot\left(\frac{-1}{\frac{34}{25}}\cdot e^{\frac{9}{10}\cdot\pi}-\frac{\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{34}{25}}\cdot e^{\frac{1}{5}\cdot\pi}\right)\overset{TR}{\approx}\frac{1}{3\cdot 6.332256924}\cdot\left(\frac{-25}{34}\right)\cdot\left(e^{\frac{9}{10}\cdot\pi}+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{5}\cdot\pi}\right)$$

$$\Rightarrow\quad x_S\overset{TR}{\approx}\frac{-14.0350644}{3\cdot 6.332256924}\overset{TR}{\approx}-0.73881317$$ für die x- Koordinate des Schwerpunktes

In analoger Weise bestimmen wir y-Koordinate der Schwerpunktsposition. Die zugehörige Formel unterscheidet sich von der Formel für $x_S$ durch die Winkelfunktion im Integranden:

$$y_S=\frac{1}{A}\cdot\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}}r^2\cdot\sin(\varphi)\,dr\,d\varphi=\frac{1}{A}\cdot\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[\frac{1}{3}r^3\cdot\sin(\varphi)\right]_0^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}}d\varphi=\frac{1}{A}\cdot\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{3}\sin(\varphi)\cdot\left[r^3\right]_0^{e^{\left(\frac{\varphi}{5}\right)}}d\varphi$$

2 P

$$=\frac{1}{3A}\cdot\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\sin(\varphi)\cdot e^{\left(\frac{3}{5}\varphi\right)}\right)d\varphi\qquad(*2)$$

Bei der Integration über $dr$ spielte die Winkelfunktion keine Rolle. Bei der sich nun anschließenden Integration über $d\varphi$ hingegen müssen wir eine neue Stammfunktion suchen. Der Kürze halber sei diese Integration dem Leser selbst überlassen, denn die Integration von

4 P $(*2)$ verläuft in völlig analoger Weise wie die Integration von $(*1)$. Das Ergebnis der entsprechenden Nebenrechnung zu $(*2)$ lautet:

Nebenrechnung $\Rightarrow\quad\int\sin(x)\cdot e^{ax}dx=\frac{a\cdot\sin(x)-\cos(x)}{a^2+1}\cdot e^{ax}+C_4$ Stammfunktion zu $(*2)$

1 P Damit wird $y_S=\frac{1}{3A}\cdot\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(\sin(\varphi)\cdot e^{\left(\frac{3}{5}\varphi\right)}\right)d\varphi=\frac{1}{3A}\cdot\left[\frac{\frac{3}{5}\cdot\sin(\varphi)-\cos(\varphi)}{\left(\frac{3}{5}\right)^2+1}\cdot e^{\frac{3}{5}\varphi}\right]_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$

$$=\frac{1}{3A}\cdot\left(\frac{\frac{3}{5}\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)}^{=-1}-\overbrace{\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)}^{=0}}{\frac{34}{25}}\cdot e^{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{2}\pi}-\frac{\frac{3}{5}\cdot\overbrace{\sin\left(\frac{1}{3}\pi\right)}^{=\sqrt{3/4}}-\overbrace{\cos\left(\frac{1}{3}\pi\right)}^{=1/2}}{\frac{34}{25}}\cdot e^{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{3A} \cdot \frac{25}{34} \left( \frac{-3}{5} \cdot e^{\frac{9}{10} \cdot \pi} - \left( \frac{3}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right) \cdot e^{\frac{1}{5} \cdot \pi} \right) \overset{TR}{\approx} \frac{1}{3 \cdot 6.332256924} \cdot \frac{25}{34} \cdot (-10.1412145 - 0.03676791)$$ 3 P

$\Rightarrow \quad y_S \overset{TR}{\approx} -0.393951724$ für die y- Koordinate des Schwerpunktes

Damit ist die Schwerpunktsposition bestimmt: $P_S = (x_S ; y_S) \overset{TR}{\approx} (-0.73881317 ; -0.393951724)$

Der Punkt ist in Bild 9-18 markiert.

## Aufgabe 9.19 Schwerpunksberechnung einer Fläche

| | | |
|---|---|---|
| 15 min | | Punkte 9 P |

Wo liegt der Schwerpunkt der von den beiden Parabeln $y_1$ und $y_2$ begrenzten Fläche, mit $y_1(x) = 2 - 3x^2$ und $y_2(x) = -x^2$ ?

## Lösung zu 9.19

Um Übersicht zu bekommen, fertigen wir vorab eine Skizze der zu untersuchenden Fläche.

**Arbeitshinweis:**

Bei komplizierten Aufgaben spart man mitunter Zeit, wenn man eine Zeichnung anfertigt, auch wenn es nicht in der Aufgabenstellung gefordert ist. Dies ist auch bei Integralen mit komplizierten Integralgrenzen der Fall.

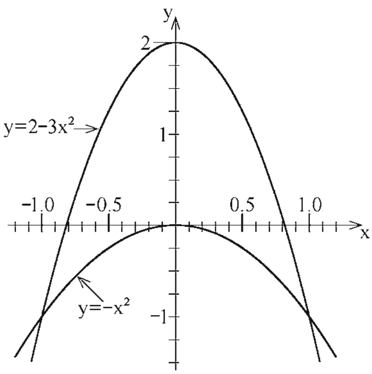



**Bild 9-19**
Skizze der von zwei Parabeln eingeschlossenen Fläche:
$y_1(x) = 2 - 3x^2$ und $y_2(x) = -x^2$
Der zu betrachtende Flächenanteil ist grau unterlegt. 2 P

Die Integralgrenzen in y-Richtung sind die beiden Parabeln. Die Integralgrenzen in x-Richtung müssen wir als Schnittpunkte der beiden Parabeln erst suchen:

$y_1(x) = y_2(x) \quad \Rightarrow \quad 2 - 3x^2 = -x^2 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 1$ 1 P

Damit können wir die Fläche zwischen den beiden Parabeln bestimmen:

2 P $$A=\int\limits_{x=-1}^{+1}\int\limits_{y=-x^2}^{2-3x^2} 1\cdot dy\,dx=\int\limits_{x=-1}^{+1}\left[y\right]_{-x^2}^{2-3x^2}dx=\int\limits_{x=-1}^{+1}\left(2-3x^2+x^2\right)dx=\int\limits_{x=-1}^{+1}\left(2-2x^2\right)dx=\left[2x-\tfrac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{+1}=\frac{8}{3}$$

Damit sind alle Größen, die man für die Schwerpunktsberechnung braucht, vorhanden:

$$y_S=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{x=-1}^{+1}\int\limits_{y=-x^2}^{2-3x^2} y\cdot dy\,dx=\frac{1}{A}\cdot\int\limits_{x=-1}^{+1}\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_{-x^2}^{2-3x^2}dx=\frac{1}{8/3}\cdot\int\limits_{x=-1}^{+1}\tfrac{1}{2}\cdot\left(2-3x^2\right)^2-\tfrac{1}{2}\cdot\left(-x^2\right)^2dx$$

3 P $$\Rightarrow\quad y_S=\frac{3}{8}\cdot\int\limits_{x=-1}^{+1}\tfrac{1}{2}\cdot\left(4-12x^2+9x^4\right)-\tfrac{1}{2}x^4\,dx=\frac{3}{8}\cdot\int\limits_{x=-1}^{+1}2-6x^2+4x^4\,dx=\frac{3}{8}\cdot\left[2x-2x^3+\frac{4}{5}x^5\right]_{-1}^{+1}=\frac{3}{5}$$

Soweit wurde die y-Koordinate des Schwerpunktes berechnet. Seine x-Koordinate ist auch ohne Berechnung klar, weil aus Symmetriegründen (beiden Funktionen weisen gerade Symmetrie auf) der Schwerpunkt auf der y-Achse liegen muss – dies bedeutet $x_S=0$ .

1 P Die Schwerpunktsposition ist also $P_S=\left(x_S;y_S\right)=\left(0\,;0.6\right)$

## Aufgabe 9.20 Schwerpunktsberechnung eines Rotationsvolumens

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 min | | Punkte 9 P |

Lässt man ein Becherglas mit Wasser um seine Längsachse rotieren, so nimmt die Wasseroberfläche die Form einer Parabel ein. Berechnen Sie das Volumen des Wassers, wie es in Bild 9-20 beschrieben ist und geben Sie auch seine Schwerpunktsposition an.

Führen Sie die Berechnung bitte über Volumenintegration in Zylinderkoordinaten durch!

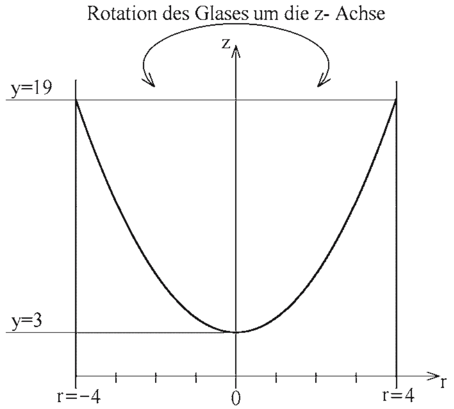



**Bild 9-20**
Zylindrisches Becherglas mit Wasser bei der Rotation um die z-Achse.

Die Wasseroberfläche wird beschrieben durch die Rotation der Parabel $z(x)=ar^2+b$ um die z-Achse.
Das zu betrachtende Volumen ist grau unterlegt.

## Lösung zu 9.20

Die Aufgabe hat den Sinn, das Ansetzen und Lösen dreidimensionaler Integrale, sog. Volumenintegrale zu üben. Wegen der Zylindersymmetrie stellen wir das dreidimensionale Integral hier in Zylinderkoordinaten auf.

Vorab bestimmen wir die Gleichung der Parabel. Wir benötigen zwei Punkte um die beiden Parameter $a$ und $b$ auffinden zu können:

$$\left.\begin{array}{l} z(0)=3 \quad\Rightarrow\quad a\cdot 0^2+b=3 \quad\Rightarrow\quad b=3 \\ z(4)=19 \quad\Rightarrow\quad a\cdot 4^2+3=19 \quad\Rightarrow\quad a\cdot 4^2=16 \quad\Rightarrow\quad a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad z=r^2+3$$ 2 P

Damit haben wir die Möglichkeit geschaffen, das Rotationsvolumen zu berechnen:

$$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=0}^{r^2+3} dV \qquad (*)$$ 2 P

**Arbeitshinweis:**

Beim Ansetzen des Integrals muss man aufpassen, dass man das gesamte zu integrierende Volumen genau einmal überstreicht. In unserem Bsp. geschieht dies durch die folgenden drei Schritte:

Die zuerst auszuführende Integration über $z$ geht vom Boden des Bechers (Untergrenze $z=0$) bis zur Parabel $z=r^2+3$ hoch.

Die danach auszuführende Integration über $r$ läuft von der z-Achse ($r=0$) bis zum Becherrand ($r=4$).

Die dritte und letzte geht über den Winkel $\varphi$. Sie vollführt eine volle Umdrehung, also $\varphi=0$ bis $\varphi=2\pi$.

**Stolperfalle:**

Volumenelement $dV$ ist in Zylinderkoordinaten $dV=r\cdot dz\,dr\,d\varphi$. Man vergesse nicht die Multiplikation mit der Längeneinheit, also das $r$ vor dem $dz\,dr\,d\varphi$. In Kugelkoordinaten wäre das Volumenelement noch komplizierter: $dV=r^2\sin(\vartheta)\cdot dr\,d\vartheta\,d\varphi$

Führen wir nun unsere Integration aus:

$$V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\int_{z=0}^{r^2+3} r\cdot dz\,dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\left[r\cdot z\right]_0^{r^2+3} dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{4}\left(r^3+3r\right)dr\,d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left[\tfrac{1}{4}r^4+\tfrac{3}{2}r^2\right]_0^4 d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad V=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\tfrac{1}{4}\cdot 4^4+\tfrac{3}{2}\cdot 4^2\right)d\varphi=\int_{\varphi=0}^{2\pi} 88\,d\varphi=\left[88\varphi\right]_0^{2\pi}=176\pi \ \text{(Wasservolumen)}$$ 2 P

Zu guter Letzt suchen wir die gefragte Schwerpunktsposition:
Aus Symmetriegründen liegt der Schwerpunkt auf der z-Achse. $\Rightarrow \quad x_S = 0$ und $y_S = 0$
Lediglich die z-Koordinate des Schwerpunktes müssen wir explizit ausrechnen:

$$z_S = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \int_{z=0}^{r^2+3} z \cdot r \cdot dz\, dr\, d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \left[ \tfrac{1}{2} z^2 \cdot r \right]_0^{r^2+3} dr\, d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \left( \tfrac{1}{2} \left( r^2+3 \right)^2 \cdot r \right) dr\, d\varphi$$

3 P

$$= \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{4} \left( \tfrac{1}{2} r^5 + 3r^3 + \tfrac{9}{2} r \right) dr\, d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \tfrac{1}{12} r^6 + \tfrac{3}{4} r^4 + \tfrac{9}{4} r^2 \right]_0^4 d\varphi = \frac{1}{V} \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1708}{3} d\varphi$$

$$\Rightarrow \quad z_S = \frac{1}{V} \cdot \left[ \frac{1708}{3} \varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{176 \cdot \pi} \cdot \frac{1708}{3} \cdot 2\pi = \frac{427}{66} = 6.4\overline{69}$$

## Aufgabe 9.21 Massenträgheitsmomente der Rotation

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 min | | Punkte 3 P |

**Allgemeine Anmerkung:**

Die Berechnung von Massenträgheitsmomenten der Rotation ist eine immer wiederkehrende Aufgabe zu dreidimensionalen Integralen. Das Massenträgheitsmoment $J$ (bei Rotation eines Körpers um eine Hauptträgheitsachse) ist definiert als das Volumenintegral $J = \iiint_{(V)} r^2 \cdot \rho\, dV$, wobei $\rho$ die ortsabhängige Dichte des rotierenden Körpers ist.

Für unser Beispiel wollen wir das Massenträgheitsmoment eines um seine Längsachse rotierenden Rohres berechnen, wie es in Bild 9-21 zu sehen ist.

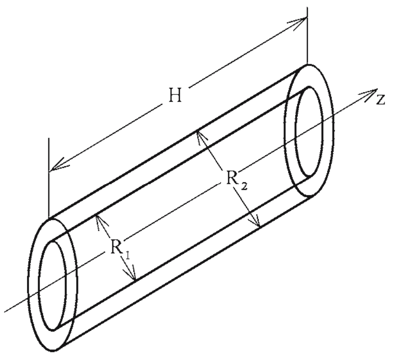



**Bild 9-21**
Zylindersymmetrisches Rohr bei seiner Rotation um Symmetrieachse, die in Richtung der z-Achse orientiert sei.
Es gelten folgende Abmessungen:
$R_1$ = Innendurchmesser
$R_2$ = Außendurchmesser
$H$ = Länge des Rohres
$\rho$ = Dichte, sie sei über das gesamte Material homogen

## Lösung zu 9.21

Den Ansatz findet man in den Vorab-Erläuterungen der Aufgabenstellung:

$$J = \iiint\limits_{(V)} r^2 \cdot \rho \, dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=R_1}^{R_2} \int\limits_{z=0}^{H} r^2 \rho \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=R_1}^{R_2} \left[ r^3 \rho \cdot z \right]_0^H dr \, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=R_1}^{R_2} r^3 \rho \cdot H \, dr \, d\varphi$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \left[ \tfrac{1}{4} r^4 \cdot \rho \cdot H \right]_{R_1}^{R_2} d\varphi = \left[ \tfrac{1}{4} r^4 \cdot \rho \cdot H \right]_{R_1}^{R_2} \cdot \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \left[ \tfrac{1}{4} r^4 \cdot \rho \cdot H \right]_{R_1}^{R_2} \cdot \left[ \varphi \right]_0^{2\pi} = \left[ \frac{\rho \cdot H}{4} \cdot \left( R_2^4 - R_1^4 \right) \right] \cdot \left[ 2\pi \right]$$ 3 P

$\Rightarrow \quad J = \frac{\pi}{2} \rho \cdot H \cdot \left( R_2^4 - R_1^4 \right)$ Damit ist die Aufgabe gelöst.

Anmerkung:
In Tabellenwerken findet man für das Rotationsträgheitsmoment des Rohres mitunter einen etwas anders aussehenden Ausdruck, den man durch die nachfolgenden Umformungen erhalten kann. Es gilt

$J = \frac{\pi}{2} \rho \cdot H \cdot \left( R_2^4 - R_1^4 \right) = \frac{\pi}{2} \rho H \cdot \left( R_2^2 - R_1^2 \right) \cdot \left( R_2^2 + R_1^2 \right)$ wegen der dritten Binomischen Formel.

Die Masse des Rohres ist $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot H = \rho \cdot \pi \left( R_2^2 - R_1^2 \right) \cdot H$ (wo $A$ =Querschnittsfläche).

Setzt man die so berechnete Masse in das Trägheitsmoment ein, so erhält man

$J = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\rho \pi \mathrm{H} \cdot \left( R_2^2 - R_1^2 \right)}_{= m \text{ (Masse)}} \cdot \left( R_2^2 + R_1^2 \right) = \frac{1}{2} m \cdot \left( R_2^2 + R_1^2 \right)$, wie es zumeist in Tabellenwerken steht.

Anmerkung:
In der vorgeführten Art und Weise lassen sich die Rotations-Massenträgheitsmomente vieler Gegenstände berechnen, wie man sie in Formelsammlungen und Tabellenwerken findet. So können sich alle Studierenden eine Menge Übungsaufgaben schaffen und ihre Ergebnisse anhand der Tabellen kontrollieren.

## Aufgabe 9.22 Vektorwertiges Integral

| | | | |
|---|---|---|---|
| 60 min | | Punkte 23 P | Nur wenige Studierende können diese Aufgabe selbstständig rechnen. Aber auch das Nachvollziehen ist bereits eine gute Übung. |

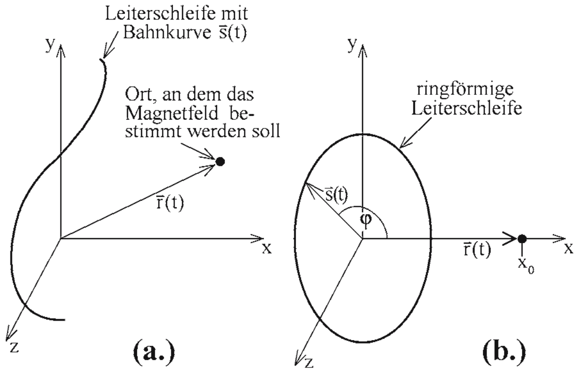
Bei vektorwertigen Integralen ist der Integrand ein Vektor. Ein immer wiederkehrendes Beispiel hierfür ist die Berechnung eines Magnetfeldes nach dem Gesetz von Biot-Savart.

Dieses lautet $d\vec{H} = \dfrac{I \cdot d\vec{s} \times \left( \vec{s} - \vec{r} \right)}{4\pi \cdot \left| \vec{s} - \vec{r} \right|^3}$ und ist in Bild 9-22a veranschaulicht und erklärt.

Das gesamte Magnetfeld der Leiterschleife erhält man durch die Integration $\vec{H} = \int\limits_{\text{(Leiterschleife)}} d\vec{H}$ .

Als spezielle Leiterkonfiguration, deren Magnetfeld in der vorliegenden Aufgaben bestimmt werden soll, sei eine ringförmige Leiterschleife entsprechend Bild 9-22b vorgegeben. Diese werde von einem Strom $I$ durchflossen. Die Frage lautet nun: Welches Magnetfeld wird am

Ort $x_0$ auf der x-Achse erzeugt? Dabei soll $x_0$ beliebig sein, darf aber in der Integration als Konstante behandelt werden.




**Bilder 9-22a und b**
Eine von einem Strom $I$ durchflossene Leiterschleife mit der Bahnkurve $\vec{s}(t)$ erzeugt am Ort $\vec{r}$ ein Magnetfeld $\vec{H}$. Dabei trägt jedes infinitesimale Leiterelement $d\vec{s}$ mit einem Beitrag $d\vec{H}$ zum gesamten Feld $\vec{H}$ bei.
Die Leiterschleife in Bild 9-22b habe in der yz-Ebene die Bahnkurve

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$

Darin ist $a$ der Radius des Leiterringes.

Hinweis zum Lösungsweg: Da der Strom $I$ im gesamten Verlauf der Leiterschleife konstant ist, denn alle infinitesimalen Ladungselemente bewegen sich (in Näherung) gleich schnell, kann man den Vektor $I \cdot d\vec{s}$ umschreiben als $I \cdot d\vec{s} = \frac{dq}{dt} \cdot d\vec{s} = dq \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} \cdot dq$. Dabei ist $\vec{v}$ die Geschwindigkeit jedes einzelnen Ladungselementes und $dq$ dessen Ladung.

Gibt man zu jedem infinitesimalen Leiterelement $d\varphi$ dessen Ladung $dq$ als infinitesimales Ladungselement an, so erhält man den Zusammenhang $\frac{dq}{q} = \frac{d\varphi}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad dq = q \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$. Dies bedeutet, dass der Anteil des Ladungselements an der gesamten Ladung ebenso groß ist wie der Anteil des Leiterelements am gesamten Leiterring.

Der Sinn dieser Umformung ist eine Vereinfachung der Berechnung: Wir müssen ein Linienintegral über die Leiterschleife lösen. Dafür wird die Linie parametrisiert (wie in der Legende zu Bild 9-22b geschehen), sodass die Integration über $d\vec{s}$ zu einer eindimensionalen Integration über den Winkel $d\varphi$ (als Parameter) wird.

(Wem der technische Hintergrund zu schwierig ist, der betrachte die Musterlösung bis zur Gleichung ($*2$) und beginne dann das Integrieren in eigener Leistung.)

## Lösung zu 9.22

Wir beginnen, indem wir mit Hilfe des Hinweises zum Lösungsweg das Gesetz von Biot-Savart in eine Form bringen, die bequem zu integrieren ist.

2 P $$d\vec{H} = \frac{I \cdot d\vec{s} \times (\vec{s} - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s} - \vec{r}|^3} = \frac{\vec{v} \cdot dq \times (\vec{s} - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s} - \vec{r}|^3} = \frac{q \cdot \vec{v} \times (\vec{s} - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s} - \vec{r}|^3} \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} \qquad \text{(Gleichung } *2\text{)}$$

Bevor wir integrieren können, berechnen wir den Ausdruck nun Schritt für Schritt in kartesischen Koordinaten, denn das Kreuzprodukt können wir nur in kartesischen Koordinaten ausrechnen:

Aus der Parametrisierung der Leiterschleife $\vec{s}(t)$ gemäß Bild 9-22b folgt durch Ableiten des Ortsvektors nach der Zeit die Geschwindigkeit der einzelnen Ladungselemente:

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi) \\ -a\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi) \end{pmatrix}$$ 2 P

Damit wird das Kreuzprodukt im Zähler von $d\vec{H}$ zu

$$\vec{v} \times (\vec{s} - \vec{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) \\ -a\omega \cdot \sin(\omega t+\varphi) \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot \sin(\omega t+\varphi) \\ a \cdot \cos(\omega t+\varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ a\omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) \\ -a\omega \cdot \sin(\omega t+\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -x_0 \\ a \cdot \sin(\omega t+\varphi) \\ a \cdot \cos(\omega t+\varphi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2\omega \cdot \cos^2(\omega t+\varphi) + a^2\omega \cdot \sin^2(\omega t+\varphi) \\ a\,x_0\omega \cdot \sin(\omega t+\varphi) \\ a\,x_0\omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2\omega \\ a\,x_0\omega \cdot \sin(\omega t+\varphi) \\ a\,x_0\omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) \end{pmatrix}$$ 3 P

Dies ist der vektorielle Anteil des Integranden in Gleichung $(*2)$. Die anderen Anteile dieses Integranden betrachten wir ebenfalls:
Der Betrag mit der dritten Potenz im Nenner dieser Gleichung schreibt sich als

$$|\vec{s} - \vec{r}|^3 = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ a \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|^3 = \left| \begin{pmatrix} -x_0 \\ a \cdot \sin(\omega t + \varphi) \\ a \cdot \cos(\omega t + \varphi) \end{pmatrix} \right|^3$$ 3 P

$$= \left( \sqrt{x_0^2 + a^2 \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) + a^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)} \right)^3 = \left( x_0^2 + a^2 \right)^{\frac{3}{2}}$$

Damit kennen wir alle Größen in $(*2)$ und können $d\vec{H}$ für unsere Konfiguration formulieren:

$$d\vec{H} = \frac{q \cdot \vec{v} \times (\vec{s} - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s} - \vec{r}|^3} \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} a^2\omega \\ a\,x_0\omega \cdot \sin(\omega t+\varphi) \\ a\,x_0\omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$$ 3 P

Um das gesamte Magnetfeld zu finden, führen wir die in der Aufgabenstellung vorgegebene Integration über die Leiterschleife aus. Nachdem wir alle Ausdrücke darauf ausgerichtet haben, genügt hier eine einzige Dimension der Integration, nämlich der Winkel $\varphi$ :

$$\vec{H} = \int_{\text{(Leiterschleife)}} d\vec{H} = \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} a^2\omega \\ a\,x_0\omega \cdot \sin(\omega t+\varphi) \\ a\,x_0\omega \cdot \cos(\omega t+\varphi) \end{pmatrix} \cdot \frac{d\varphi}{2\pi}$$ 2 P

Zum Lösen des vektorwertigen Integrals können wir jede einzelne der drei Vektorkomponenten für sich integrieren:

$$H_x = \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a^2\omega \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \left[ \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a^2\omega \cdot \frac{\varphi}{2\pi} \right]_0^{2\pi} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a^2\omega$$ 2 P

2 P $$H_y = \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a\, x_0 \omega \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a\, x_0 \omega \cdot \left[ -\frac{1}{\omega} \cos\left(\omega t + \varphi\right) \right]_0^{2\pi} = 0$$

2 P $$H_z = \int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a\, x_0 \omega \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right) \cdot \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a\, x_0 \omega \cdot \left[ \frac{1}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi\right) \right]_0^{2\pi} = 0$$

Eigentlich stellen die drei kartesischen Komponenten des Magnetfeldes bereits das Ergebnis dar. Der Übersichtlichkeit halber wollen wir es aber noch zu einem Vektor zusammenfassen, der sich wegen $H_y = 0$ und $H_z = 0$ besonders übersichtlich schreiben lässt:

2 P $$H_x = \underbrace{\frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a^2 \omega = \frac{q}{4\pi} \cdot \frac{1}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot a^2 \cdot \frac{2\pi}{\mathrm{T}}}_{\text{weil } \omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}, \text{ wo } \mathrm{T} = \text{Umlaufdauer der Ladung im Kreisring}} \underbrace{= \frac{I}{2} \cdot \frac{a^2}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}}}_{\text{weil Strom } I = \frac{q}{T}} \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \frac{I}{2} \cdot \frac{a^2}{\left(x_0^2 + a^2\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 9.23 Volumenintegration in Kugelkoordinaten

| | | |
|---|---|---|
| | 30 min | Punkte 14 P |

Berechnen Sie bitte näherungsweise die Gesamtmasse der Luft unserer Erde (siehe $*^1$). Die Dichte $\rho$ dieser Luft als Funktion der Höhe über dem Erdboden folgt der barometrischen Höhenformel :

$\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}}$ , worin $h$ = Höhe über dem Erdboden

$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ = Erdbeschleunigung

$p_0 = 101325 \frac{N}{m^2}$ = Luftdruck am Erdboden (Normaldruck)

$\rho_0 = 1.293 \frac{kg}{m^3}$ = Dichte der Luft direkt am Erdboden

Integriert werden soll über die gesamte Lufthülle der Erde. Da diese kugelsymmetrisch ist, ist es am einfachsten, ein Volumenintegral in Kugelkoordinaten zu lösen. Dazu beachte man folgenden Hinweis: Der Radius der Erdoberfläche beläuft sich auf $R_0 = 6380\,km = 6.38 \cdot 10^6\, m$ .

Hinweis: Betrachten Sie für die vorliegende Aufgabe die Erde als eine Kugel. In Wirklichkeit ist die Erde keine Kugel. Genau betrachtet ist sie ein abgeplattetes Rotationsellipsoid, aber für ein solches würde unsere Berechnung den Komplexitätsgrad einer Klausur- oder Übungsaufgabe sprengen.

($*^1$) Zur Begründung der Näherung: Für große Abstände von der Erdoberfläche weicht die tatsächliche Dichte der Luft von der Angabe der barometrischen Höhenformel ab. Dies führt dazu, dass das Ergebnis unserer Berechnung größer sein wird als der tatsächliche Wert.

## Lösung zu 9.23

In der barometrischen Höhenformel tauchen einige Größen auf, die man für die vorliegende Aufgabe zusammenfassen kann, um das Arbeiten zu erleichtern. Es gilt

$\frac{p_0}{\rho_0 \cdot g} = \frac{101325 \frac{N}{m^2}}{1.293 \frac{kg}{m^3} \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}} = 7988.2\, m =: \alpha$ Zur Vereinfachung führen wir die Abkürzung $\alpha$ ein.

Damit schreiben wir kurz $\rho(h) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{h}{\alpha}}$ 1 P

Um die Kugelsymmetrie der Lufthülle zu nutzen, beziehen wir die Luftdichte auf den Abstand vom Erdmittelpunkt. Damit wird die barometrische Höhenformel zu

$\rho(r) = \rho_0 \cdot e^{-\frac{r-R_0}{\alpha}}$, gültig für $r > R_0$, wobei $r$ = Abstand vom Erdmittelpunkt

Nun sind alle Vorarbeiten erledigt und wir können mit dem eigentlichen Lösen der Aufgabe beginnen. Dazu stellen wir das Volumenintegral über die Lufthülle zur Berechnung der Luftmasse $m$ auf:

$$m = \iiint_{(V)} \rho(r)\, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^{\infty} \rho_0 \cdot e^{-\frac{r-R_0}{\alpha}} \cdot r^2 \sin(\vartheta) \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi$$ 3 P

**Arbeitshinweise**

Zum Volumenelement: Dieses lautet in Kugelkoordinaten $dV = r^2 \sin(\vartheta) \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi$

Zu den Integrationsgrenzen:

- Die Integration über $d\vartheta \cdot d\varphi$ hat lediglich dafür Sorge zu tragen, dass der gesamte Umlauf um die Kugelschale genau einmal stattfindet.
- Die Integration über $dr$ beginnt auf der Erdoberfläche und verläuft sich in den Weiten des Universums. Wir erhalten also ein uneigentliches Integral, dessen Konvergenz wir noch feststellen werden.
- Da die Integration über $dr$ von $\vartheta$ und $\varphi$ völlig unabhängig ist, kann man den von $r$ abhängigen Teil des Integrals als Konstante aus den Integralen über $\vartheta$ und $\varphi$ herausziehen. Mathematisch hat dies zwar keine Bedeutung, aber es erleichtert den Überblick, da die uneigentliche Integration solange aufgeschoben werden kann, bis nur noch eine einzige Dimension übrig ist.

Die Arbeitshinweise zur Integration setzen wir nun um:

$$m = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^{\infty} \rho_0 \cdot e^{-\frac{r-R_0}{\alpha}} \cdot r^2 \sin(\vartheta) \cdot dr\, d\vartheta\, d\varphi = \int_{R_0}^{\infty} \rho_0 \cdot e^{-\frac{r-R_0}{\alpha}} \cdot r^2\, dr \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi$$ 1 P

Den zweiten Faktor kann man sehr leicht berechnen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\vartheta)\, d\vartheta\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[-\cos(\vartheta)\right]_0^{\pi}}_{=1+1} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2\, d\varphi = \left[2\varphi\right]_0^{2\pi} = 4\pi\ ,$$ 1 P

was zu einer Masse führt, deren Integral wir noch etwas vereinfachen können:

1 P $$m = 4\pi\rho_0 \cdot \int_{R_0}^{\infty} r^2 \cdot e^{-\frac{r-R_0}{\alpha}}\, dr = 4\pi\rho_0 \cdot \int_{R_0}^{\infty} r^2 \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}} \cdot e^{\frac{R_0}{\alpha}}\, dr = 4\pi\rho_0 \cdot e^{\frac{R_0}{\alpha}} \cdot \int_{R_0}^{\infty} r^2 \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\, dr$$

Der nunmehr letzte der Integrationsschritte erfolgt durch zweifache partielle Integration (erste partielle Integration mit Index „1“, zweite partielle Integration mit Index „2“), wobei alle Vorfaktoren (mittels Äquivalenzumformung) auf die linke Seite gebracht werden, damit sie beim Integrieren nicht stören:

$$m \cdot \left(4\pi\rho_0 \cdot e^{\frac{R_0}{\alpha}}\right)^{-1} = \int_{R_0}^{\infty} \underbrace{r^2}_{v_1} \cdot \underbrace{e^{-\frac{r}{\alpha}}}_{u_1'}\, dr = \left[\underbrace{r^2}_{v_1} \cdot \underbrace{\left(-\alpha \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)}_{u_1}\right]_{R_0}^{\infty} - \int_{R_0}^{\infty} \underbrace{2r}_{v_1' \text{ bzw } v_2} \cdot \underbrace{\left(-\alpha \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)}_{u_1 \text{ bzw. } u_2'} dx$$

$$= \left[\underbrace{r^2}_{v_1} \cdot \underbrace{\left(-\alpha \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)}_{u_1}\right]_{R_0}^{\infty} - \left[\underbrace{2r}_{v_2} \cdot \underbrace{\left(\alpha^2 \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)}_{u_2}\right]_{R_0}^{\infty} + \int_{R_0}^{\infty} \underbrace{2}_{v_2'} \cdot \underbrace{\left(\alpha^2 \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)}_{u_2} dx$$

$$= \left[r^2 \cdot \left(-\alpha \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)\right]_{R_0}^{\infty} - \left[2r \cdot \left(\alpha^2 \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)\right]_{R_0}^{\infty} + \left[2 \cdot \left(-\alpha^3 \cdot e^{-\frac{r}{\alpha}}\right)\right]_{R_0}^{\infty}$$

Einsetzen der Grenzen: Die obere Integralgrenze führt wegen der Exponentialfunktion beim Einsetzen zur Null, die untere Integralgrenze bleibt übrig:

5 P $$= \left[R_0^{\,2} \cdot \left(\alpha \cdot e^{-\frac{R_0}{\alpha}}\right)\right] + \left[2R_0 \cdot \left(\alpha^2 \cdot e^{-\frac{R_0}{\alpha}}\right)\right] + \left[2 \cdot \left(\alpha^3 \cdot e^{-\frac{R_0}{\alpha}}\right)\right]$$

Diese lange Gleichung über einige Zeilen lässt sich zusammenfassen und nach der Masse $m$ auflösen:

$$\Rightarrow \quad m \cdot (4\pi\rho_0)^{-1} \cdot \left(e^{-\frac{R_0}{\alpha}}\right) = \left[R_0^{\,2} + 2R_0 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha^2\right] \cdot \alpha \cdot \left(e^{-\frac{R_0}{\alpha}}\right)$$

2 P $$\Rightarrow \quad m = \underbrace{\left[R_0^{\,2} + 2R_0 \cdot \alpha + 2 \cdot \alpha^2\right] \cdot \alpha}_{\left[4.08065 \cdot 10^{13}\right] \cdot 7988.2\ m^3} \cdot \underbrace{(4\pi\rho_0)}_{16.248 \frac{kg}{m^3}} = 5.296 \cdot 10^{18}\, kg$$

Soviel wiegt die gesamte Luftmasse unserer Erde (wenn man in Näherung die barometrische Höhenformel zu beliebig großen Abständen von der Erdoberfläche extrapoliert).

## Aufgabe 9.24 Gradienten von Skalarfeldern

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 1 min | | Punkte | |
| | (b,c,d.) | 2 min | | (a.) 1 P | (b,c,d.) 1 P |

Berechnen Sie bitte die Gradienten der nachfolgend gegebenen Skalarfelder:

(a.) $\phi(x;y) = 3x^2 + 4y^2 + 5$ (b.) $\phi(x;y) = 3x^2 \cdot y^3 + 5 \cdot \sin(x \cdot y)$

(c.) $\phi(x;y;z) = 3x^2 + 4y^2 \cdot z + 5 \cdot e^{xyz}$ (d.) $\phi(x;y) = 3x^2 y + y^z + 2y \cdot z^3$ (mit $y, z > 0$)

## Lösung zu 9.24

**Arbeitshinweis:**

Der Gradient ist definiert für skalare Felder, er selbst ist ein Vektorfeld:

$\operatorname{grad}\phi = \vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\phi;....;\frac{\partial}{\partial x_n}\phi\right)$ mit $n =$ Dimensionalität der Aufgabenstellung

Anmerkung: Aus Platzgründen seien die Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben.

(a.) $\operatorname{grad}\phi(x;y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x};\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (6x;8y)$ 1 P

(b.) $\operatorname{grad}\phi(x;y) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x};\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \left(6x\cdot y^3 + 5y\cdot\cos(x\cdot y);9x^2y^2 + 5x\cdot\cos(x\cdot y)\right)$ 1 P

(c.) $\operatorname{grad}\phi(x;y;z) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x};\frac{\partial\phi}{\partial y};\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(6x + 5yz\cdot e^{xyz};8yz + 5xz\cdot e^{xyz};4y^2 + 5xy\cdot e^{xyz}\right)$ 1 P

(d.) $\operatorname{grad}\phi(x;y;z) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x};\frac{\partial\phi}{\partial y};\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) = \left(6xy;3x^2 + z\cdot y^{z-1} + 2z^3;y^z\cdot\ln(y) + 6yz^2\right)$ 1 P

## Aufgabe 9.25 Richtungsableitungen in Skalarfeldern

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 4 min | | Punkte (a,b.) je 2 P |

Gegeben sind die folgenden Skalarfelder, deren Richtungsableitungen Sie bitte berechnen, und zwar in allen Punkten $(x;y;z)$ jeweils immer in der Richtung des Vektors $\vec{a} = (4;-1;8)$.

(a.) $\phi(x;y;z) = 8x^3y^2\cdot e^{2z}$ (b.) $\phi(x;y;z) = x^2\cdot e^{yz} + yz^3$

## Lösung zu 9.25

**Arbeitshinweis:**

Die Richtungsableitung wird mitunter abgekürzt als $\frac{d\phi}{d\vec{a}}$. Das meint $\frac{d\phi}{d\vec{a}} = \operatorname{grad}\phi\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

(a.) Es gilt

$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{a}} = \begin{pmatrix} 24x^2y^2\cdot e^{2z} \\ 16x^3y\cdot e^{2z} \\ 16x^3y^2\cdot e^{2z} \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{16+1+64}}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\left[4\cdot\left(24x^2y^2\cdot e^{2z}\right) - 1\cdot\left(16x^3y\cdot e^{2z}\right) + 8\cdot\left(16x^3y^2\cdot e^{2z}\right)\right] \quad \text{2 P}$$

$$= \tfrac{16}{9}x^2y\cdot e^{2z}\cdot[6y - x + 8xy]$$

(b.) Auch ist

2 P
$$\frac{\partial\phi}{\partial\vec{a}} = \begin{pmatrix} 2x\cdot e^{yz} \\ x^2\cdot z\cdot e^{yz} + z^3 \\ x^2\cdot y\cdot e^{yz} + 3yz^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{16+1+64}} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{9}\cdot\left[4\cdot\left(2x\cdot e^{yz}\right) - 1\cdot\left(x^2\cdot z\cdot e^{yz} + z^3\right) + 8\cdot\left(x^2\cdot y\cdot e^{yz} + 3yz^2\right)\right]$$

### Einschub: Allgemeine Anmerkung zur Schreibweise in Kapitel 9

Dieser Einschub ist eine Erklärung zur Schreibweise von Vektoren und Ortskoordinaten im weiteren Verlauf von Kapitel 9.

Aus systematischen Gründen ist es wünschenswert, Ortskoordinaten und ebenso Vektoren als Spaltenvektoren zu schreiben. Aus Platzgründen ist die Schreibweise als Zeilenvektor günstiger, weil sie sparsamer mit dem Papier umgeht. Deshalb findet man oft die Schreibweise des Spaltenvektors als transponierten Zeilenvektor, gekennzeichnet durch ein hochgestelltes „$T$“. Das sieht dann so aus: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x;y;z)^T$.

Diese papiersparende Schreibweise ist im Übrigen bei Fachpublikationen nicht ungewöhnlich, deshalb ist es ratsam, wenn sich die Studierenden von Anfang an daran gewöhnen.

## Aufgabe 9.26 Richtungsableitungen in Skalarfeldern

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 4 min | | Punkte | |
| | (b.) | 4 min | | (a) 2 P | (b) 2 P |

Betrachten wir das skalare Feld $\phi(x;y;z) = 3x^2y^2 + yz^3$.

(a.) Wie ändern sich die Funktionswerte von $\phi(x;y;z)$ im Punkt $P_0 = (2;1;-1)^T$, wenn man in der Richtung $\vec{a} = (2;1;0)^T$ fortschreitet (Richtungsableitung)?

(b.) In welcher Richtung $\vec{c}$ ist die Richtungsableitung in $P_0$ dem Betrage nach am größten?

Geben Sie zu beiden Aufgabenteilen die Werte der Richtungsableitungen im Punkt $P_0$ an.

## Lösung zu 9.26

(a.) Die Richtungsableitung in Richtung von $\vec{a}$ lautet

3 P
$$\frac{d\phi}{d\vec{a}} = \operatorname{grad}\phi\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 6x\cdot y^2 \\ 6x^2\cdot y + z^3 \\ 3y\cdot z^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{4+1+0}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{12xy^2}{\sqrt{5}} + \frac{6x^2y + z^3}{\sqrt{5}}$$

Speziell im Punkt $P_0$ nimmt sie den Wert $\left.\frac{d\phi}{d\vec{a}}\right|_{P_0} = \frac{12\cdot 2\cdot 1^2}{\sqrt{5}} + \frac{6\cdot 2^2\cdot 1+(-1)^3}{\sqrt{5}} = \frac{47}{\sqrt{5}}$ an. 1 P

(b.) Prinzipiell ist die Richtungsableitung am größten in Richtung des Gradienten, also ist

$$\vec{c} = \left.\operatorname{grad}\phi\right|_{P_0} = \begin{pmatrix} 6\cdot 2\cdot 1^2 \\ 6\cdot 2^2\cdot 1+(-1)^3 \\ 3\cdot 1\cdot(-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 3 \end{pmatrix}$$ 2 P

Der Wert der Richtungsableitung in dieser Richtung ist der Betrag des Gradienten, nämlich $\frac{d\phi}{d\vec{c}} = \operatorname{grad}\phi\cdot\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = |\operatorname{grad}\phi|$, weil $\operatorname{grad}\phi \parallel \vec{c}$ ist. Der in der Aufgabenstellung gefragte Betrag des Gradienten in $P_0$ ist damit: $\left|\left.\operatorname{grad}\phi\right|_{P_0}\right| = \sqrt{12^2+23^2+3^2} = \sqrt{682} \overset{TR}{\approx} 26.115$ 2 P

## Aufgabe 9.27 Totales Differential im Skalarfeld

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 1 min | | Punkte |
| | (b.) | 3 min | | (a) 1 P (b) 2 P |
| | (c.) | 2 min | | |
| | (d.) | 5 min | | |
| | (e.) | 2 min | | (c.) 1 P (d) 3 P (e) 1 P |

Betrachten wir das skalare Feld $\phi(x;y) = 3x^2 + 2xy$ .

(a.) In welchen Punkten $(x;y)$ ist $\phi(x;y)$ differenzierbar?

(b.) Berechnen Sie das totale Differential von $\phi(x;y)$ im Punkt $P_0 = (3;1)^T$

(c.) Berechnen Sie $\operatorname{grad}\phi$ für jeden beliebigen Punkt $(x;y)$ und im Punkt $P_0 = (3;1)^T$ .

(d.) Berechnen Sie die Richtungsableitungen von $\phi(x;y)$ im Punkt $P_0 = (3;1)^T$ für die Richtungen $\vec{a} = (2;1)^T$ , $\vec{b} = (3;-2)^T$ und $\vec{c} = (-2;0)^T$

(e.) Welchen Wert hat das Maximum der Richtungsableitungen von $\phi(x;y)$ im Punkt $P_0$ ?

## Lösung zu 9.27

(a.) $3x^2$, $2x$ und $y$ sind stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ , also hat auch $\phi(x;y)$ diese Eigenschaft. 1 P

(b.) Das totale Differential lautet: $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot dy = (6x+2y)\cdot dx + (2x)\cdot dy$ . 1 P

Speziell im Punkt $P_0 = (3;1)^T$ ist damit das totale Differential:

$$d\phi = (6\cdot 3+2\cdot 1)\cdot dx + (2\cdot 3)\cdot dy = 20\cdot dx + 6\cdot dy \ .$$ 1 P

(c.) In einem beliebigen Punkt $(x;y)$ ist: $\operatorname{grad}\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial x \\ \partial\phi/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+2y \\ 2x \end{pmatrix}$,

1 P speziell in $P_0$ : $\operatorname{grad}\phi = \begin{pmatrix} 6\cdot 3+2 \\ 2\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(d.) Das Einsetzen der Richtungen in das Ergebnis von Aufgabenteil (c.) liefert die gefragten Richtungsableitungen:

1 P $\frac{d\phi}{d\vec{a}} = \operatorname{grad}\phi \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (20\cdot 2 + 6\cdot 1) = \frac{46}{\sqrt{5}}$

1 P $\frac{d\phi}{d\vec{b}} = \operatorname{grad}\phi \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left(20\cdot 3 + 6\cdot(-2)\right) = \frac{48}{\sqrt{13}}$

1 P $\frac{d\phi}{d\vec{c}} = \operatorname{grad}\phi \cdot \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+0}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \cdot \left(20\cdot(-2) + 0\right) = -20$

1 P (e.) Hier ist der Betrag des Gradienten gefragt: $\left| \operatorname{grad}\phi|_{P_0} \right| = \sqrt{20^2+6^2} = \sqrt{436}$

## Aufgabe 9.28 Vektorfelder, Konservatives Kraftfeld

| | | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 6 min | (a,b.) | | | |
| | (c.) | 1 min | (c.) | | (a,b.) je 4 P | (c) 1 P |

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}(x;y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2\cdot y^2 \end{pmatrix}$.

In diesem Feld bewegen wir uns vom Punkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, und zwar

(a.) einerseits auf dem direkten Weg (Funktion $f_1(x)$, siehe Bild 9-28) und andererseits

(b.) auf dem Weg über die Kurve mit der Funktion $f_2(x) = \sqrt{\frac{16}{5}x}$ .

Berechnen Sie den Wert der Linienintegrale zu beiden Aufgabenteilen.

(c.) Zusatzfrage: Handelt es sich bei $\vec{F}(x;y)$ um ein konservatives Kraftfeld? Geben Sie Ihre Antwort mit Begründung.

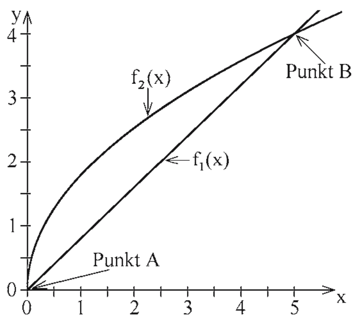



**Bild 9-28**
Darstellung zweier Wege, auf denen eine Linienintegration durch ein Vektorfeld ausgeführt werden soll.

Der Funktion $f_1(x)$ ist eine Gerade.

Der Funktion $f_2(x)$ ist in Aufgabenteil (b.) explizit gegeben.

## Lösung zu 9.28

**Arbeitshinweis:**

Bevor wir die Linienintegration ausführen können, müssen wir die Parametrisierung der Wege darstellen. Diese Parametrisierung ist willkürlich (die Bahnkurve darf selbst gewählt werden) im Bezug auf den einzuführenden eindimensionalen Parameter (nennen wir ihn $t$ oder $u$ ), solange gewährleistet ist, dass diese parametrisierte Bahnkurve (nennen wir sie $\vec{s}(t)$ oder $\vec{s}(u)$ ) tatsächlich die gewünschte Kurve der Aufgabenstellung durchläuft.

Bei Aufgabenteil (a.) ist der Weg eine Gerade, die durch die Punkte $A$ und $B$ eindeutig festgelegt ist: $f_1(x)=\frac{4}{5}x$

Der zugehörige Weg kann also z. Bsp. parametrisiert werden als $\vec{s}_1(t)=\begin{pmatrix}5t\\4t\end{pmatrix}$ mit $t=0...1$ . 1 P

Bei Aufgabenteil (b.) ist die Funktion $f_2(x)$ gegeben. Danach könnte der Weg z. Bsp. parametrisiert werden gemäß $\vec{s}(u)=\begin{pmatrix}u\\ \sqrt{\frac{16}{5}u}\end{pmatrix}$. Substituiert man aber $u:=5t^2$, so sieht die Parametrisierung bequemer aus, denn man benötigt schließlich keine Wurzelzeichen mehr: 1 P

$$\vec{s}_2(t)=\begin{pmatrix}5t^2\\ \sqrt{\frac{16}{5}\cdot 5t^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5t^2\\4t\end{pmatrix} \text{ mit } t=0...1 \;.$$

Mit diesen beiden Parametrisierungen lösen wir nun die beiden Linienintegrale (wobei die Erklärung der einzelnen Schritte im Anschluss an die jeweilige Berechnung folgen wird):

$$\text{(a.)}\; L_1=\underbrace{\int_{\vec{s}_1}\vec{F}\cdot d\vec{s}_1=\int_{t=0}^{1}\vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}_1}{dt}\cdot dt}_{\text{Schritt 1}}=\underbrace{\int_{t=0}^{1}\begin{pmatrix}x^2+y^2\\x^2\cdot y^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\cdot dt}_{\text{Schritt 2}}=\underbrace{\int_{t=0}^{1}\left(5x^2+5y^2+4x^2\cdot y^2\right)dt}_{\text{Schritt 3}}$$

$$=\underbrace{\int_{t=0}^{1}\left(5\cdot(5t)^2+5\cdot(4t)^2+4\cdot(5t)^2\cdot(4t)^2\right)dt}_{\text{Schritt 4}}=\underbrace{\int_{0}^{1}\left(205t^2+1600t^4\right)dt=\left[\frac{205}{3}t^3+\frac{1600}{5}t^5\right]_0^1=\frac{1165}{3}}_{\text{Schritt 5}}$$ 3 P

Kommentar zu den einzelnen Arbeitsschritten:

Schritt 1 → Die Linienintegration wird auf den (eindimensionalen) Parameter $t$ (entlang der Linie) bezogen. Dieser Schritt sieht bei allen Linienintegralen immer gleich aus. („Schlampig“ gesprochen könnte man sagen, es wurde mit $dt$ erweitert.)

Schritt 2 → Einsetzen des Vektorfeldes und der Ableitung der Linie nach dem Parameter. Den Vektor $\frac{d\vec{s}}{dt}$ erhält man durch komponentenweises Ableiten von $\vec{s}$ nach $t$ .

Dadurch entsteht ein Skalarprodukt, welches bei Schritt 3 → ausmultipliziert wird.

Schritt 4 → Aus der Parametrisierung der Linie wissen wir $\vec{s}_1(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t \\ 4t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $x = 5t$ und $y = 4t$ . Wir setzen diese Werte für $x$ und $y$ ein.

Schritt 5 → Nun ist das Integral eindimensional und wird in gewohnter Weise ausgerechnet.

(b.) In analoger Weise wird auch das zweite Linienintegral $L_2$ ausgerechnet:

$$L_2 = \int_{\vec{s}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}_2 = \int_{t=0}^{1} \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}_2}{dt} \cdot dt = \int_{t=0}^{1} \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 \cdot y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10t \\ 4 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_{t=0}^{1} \left(10t \cdot \left(x^2 + y^2\right) + 4 \cdot \left(x^2 \cdot y^2\right)\right) dt$$

3 P

$$= \int_0^1 \left(10t \cdot \left(25t^4 + 16t^2\right) + 4 \cdot \left(25t^4 \cdot 16t^2\right)\right) dt = \int_0^1 \left(1600t^6 + 250t^5 + 160t^3\right) dt$$

$$= \left[\tfrac{1600}{7} t^7 + \tfrac{250}{6} t^6 + 40t^4\right]_0^1 = \frac{6515}{21}$$

(c.) Das Kraftfeld $\vec{F}(x;y)$ ist nicht konservativ.

1 P Begründung: Wie wir sehen, ist $L_1 = \frac{1165}{3} \overset{TR}{\approx} 388.33$ , aber $L_2 = \frac{6515}{21} \overset{TR}{\approx} 310.24$ , also $L_1 \neq L_2$ . Das Linienintegral ändert also in Abhängigkeit vom zurückgelegten Weg seinen Wert. Dies ist der Fall bei nicht konservativen Feldern. Bei konservativen Feldern hingegen hängt das Linienintegral nicht vom Weg ab, sondern nur von der Lage des Anfangs- und des Endpunktes des Weges.

**Stolperfalle:**

Wäre $L_1 = L_2$ , dann wäre noch lange nicht bewiesen, dass das Kraftfeld konservativ ist. Nur dann, wenn prinzipiell immer alle Wege zum gleichen Ergebnis des Linienintegrals führen, ist das Feld ein konservatives. Wie man den Nachweis hierfür erbringen kann, sehen wir in Aufgabe 9.29.

Umgekehrt ist klar: Wenn wir zwei verschiedene Linienintegrale finden, dann ist bereits bewiesen, dass nicht alle Linienintegrale zum selben Ergebnis führen können, d.h. das Feld ist nicht konservativ.

## Aufgabe 9.29 Linienintegrale in Vektorfeldern

| | | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | (a,b.) je 6 min | (a,b.) | | | |
| | (c.) | (c.) 3 min | (c.) | | (a,b,) 4 P | (c) 2 P |

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}(x;y) = \begin{pmatrix} 3y \cdot e^{xy} + y^2 \\ 3x \cdot e^{xy} + 2xy \end{pmatrix}$

In diesem Feld bewegen wir uns vom Punkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zum Punkt $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , und zwar (a.) einerseits auf dem direkten Weg und andererseits

(b.) auf dem Weg über die Kurve mit der Funktion $f(x) = x^2$.

Berechnen Sie den Wert der Linienintegrale zu beiden Aufgabenteilen.

(c.) Zusatzfrage: Handelt es sich bei $\vec{F}(x;y)$ um ein konservatives Kraftfeld?

Geben Sie Ihre Antwort mit Begründung.

## Lösung zu 9.29

Arbeitshinweis: Die ersten beiden Aufgabenteile (a,b) werden in weitgehender Analogie zu Aufgabe 9.28 gelöst (zur Vertiefung der Übung), bedürfen also keiner erneuten Erläuterung. Die Parametrisierung der beiden Wege liegt auf der Hand:

Der direkte Weg ist eine Gerade mit $\bar{s}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ mit $t = 0...1$ . 1 P

Die Kurve bei Aufgabenteil (b.) ist eine Parabel: $\bar{s}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$ mit $t = 0...1$ 1 P

Damit setzen wir in die Linienintegrale ein:

(a.) Bei Aufgabenteil (a.) ist $x = t$ und $y = t$

$$L_1 = \int_{\bar{s}_1} \vec{F} \cdot d\bar{s}_1 = \int_{t=0}^{1} \vec{F} \cdot \frac{d\bar{s}_1}{dt} \cdot dt = \int_{t=0}^{1} \begin{pmatrix} 3y \cdot e^{xy} + y^2 \\ 3x \cdot e^{xy} + 2xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot dt = \int_{t=0}^{1} \left(3y \cdot e^{xy} + y^2 + 3x \cdot e^{xy} + 2xy\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(3t \cdot e^{t^2} + t^2 + 3t \cdot e^{t^2} + 2t^2\right) dt = \underbrace{\int_0^1 \left(6t \cdot e^{t^2} + 3t^2\right) dt = \left[3 \cdot e^{t^2} + t^3\right]_0^1}_{\text{Integration durch Substitution } u:=t^2} = 3 \cdot e^1 + 1 - 3 \cdot e^0 - 0 = 3e^1 - 2$$ 3 P

(b.) Bei Aufgabenteil (b.) ist $x = t$ und $y = t^2$

$$L_2 = \int_{\bar{s}_2} \vec{F} \cdot d\bar{s}_2 = \int_{t=0}^{1} \vec{F} \cdot \frac{d\bar{s}_2}{dt} dt = \int_{t=0}^{1} \begin{pmatrix} 3y \cdot e^{xy} + y^2 \\ 3x \cdot e^{xy} + 2xy \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_{t=0}^{1} \left( \left(3y \cdot e^{xy} + y^2\right) + 2t \cdot \left(3x \cdot e^{xy} + 2xy\right) \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left( \left(3t^2 \cdot e^{t^3} + t^4\right) + 2t \cdot \left(3t \cdot e^{t^3} + 2t^3\right) \right) dt = \underbrace{\int_0^1 \left(9t^2 \cdot e^{t^3} + 5t^4\right) dt = \left[3 \cdot e^{t^3} + t^5\right]_0^1}_{\text{Integration durch Substitution } u:=t^3} = 3e^1 - 2$$ 3 P

(c.) Nun sind die Linienintegrale über zwei verschiedene Wege gleich. Also könnte das Vektorfeld konservativ sein. Ob dies wirklich der Fall ist, überprüfen wir anhand der Integrabilitätsbedingung, die im zweidimensionalen Fall (also für zweidimensionale Vektorfelder) lautet:

Das Feld sei $\vec{F}(x;y) = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ (Die Indizes $x$ und $y$ am $F$ stehen für Komponenten.)

Die Integrabilitätsbedingung lautet $\frac{\partial F_x}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial F_y}{\partial x}$. Ist sie erfüllt, so ist das Feld konservativ.

Wir prüfen dies nach:

2 P $$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F_x}{\partial y} = 3e^{xy} + 3yx \cdot e^{xy} + 2y \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} = 3e^{xy} + 3xy \cdot e^{xy} + 2y \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Wegen der Gleichheit dieser beiden partiellen Ableitungen ist bewiesen, dass das Feld konservativ ist.

## Aufgabe 9.30 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes

| | | | | | Punkte |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | (a.) 4 min | (a.) | | |
| | (b.) | (b.) 1 min | (b.) | | |
| | (c.) | (c.) 2 min | (c.) | | (a) 2 P (b) 1 P (c) 1 P |

In Aufgabe 9.29 war das konservative Vektorfeld $\vec{F}(x;y) = \begin{pmatrix} 3y \cdot e^{xy} + y^2 \\ 3x \cdot e^{xy} + 2xy \end{pmatrix}$ gegeben worden.

(a.) Berechnen Sie das zugehörige skalare Feld $V(x;y)$ (das sog. Potentialfeld), dessen Gradient das Feld $\vec{F}(x;y)$ ist, also für das gilt $\vec{F}(x;y) = \operatorname{grad} V(x;y)$

(b.) Bestimmen Sie anhand des Potentials, welchen Wert prinzipiell alle Linienintegrale, beginnend beim Punkt $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und endend beim Punkt $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ haben müssen.

(c.) Kontrolle: Bilden Sie $\operatorname{grad} V(x;y)$ und kontrollieren Sie, dass sich $\vec{F}(x;y)$ ergibt.

## Lösung zu 9.30

(a.) Wir führen eine wegunabhängige Integration durch:

2 P $$\left.\begin{array}{l} V(x) = \int F_x\,dx = \int 3y \cdot e^{xy} + y^2\,dx = 3 \cdot e^{xy} + xy^2 + C_1(y) \\ V(x) = \int F_y\,dy = \int 3x \cdot e^{xy} + 2xy\,dy = 3 \cdot e^{xy} + xy^2 + C_2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow V(x) = 3 \cdot e^{xy} + xy^2 + C$$

Anmerkung: Bei Anwendungen wird die Integrationskonstante $C$ benutzt, um den Potentialnullpunkt geeignet festzulegen.

1 P (b.) Gesucht ist $V(B) - V(A) = V\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - V\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(3 \cdot e^1 + 1^2 + C\right) - \left(3 \cdot e^0 + C\right) = 3 \cdot e^1 - 2$

Dies bestätigt unsere Ergebnisse von Aufgabe 9.29, Teile (a.) und (b.).

1 P (c.) $\operatorname{grad} V(x;y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(3 \cdot e^{xy} + xy^2 + C\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(3 \cdot e^{xy} + xy^2 + C\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y \cdot e^{xy} + y^2 \\ 3x \cdot e^{xy} + 2xy \end{pmatrix}$ ,passt, denn dies ist $\vec{F}(x;y)$.

# Aufgabe 9.31 Divergenz und Rotation von Vektorfeldern

| | | |
|---|---|---|
| (a…e.) je 5 min | | Punkte (a…e.) je 3 P |

Bestimmen Sie die Divergenz und die Rotation der folgenden Vektorfelder:

(a.) $\vec{F}(x;y)=\begin{pmatrix} 3y\cdot e^{xy}+y^2 \\ 3x\cdot e^{xy}+2xy \\ 3 \end{pmatrix}$ (b.) $\vec{F}(x;y)=\begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ x^2\cdot y^2 \\ 5 \end{pmatrix}$

(c.) $\vec{F}(x;y;z)=\begin{pmatrix} x\cdot e^{-y} \\ y\cdot e^{-z} \\ z\cdot e^{-x} \end{pmatrix}$ (d.) $\vec{F}(x;y;z)=\begin{pmatrix} y\cdot z^3 \\ x^2\cdot z^2 \\ y\cdot x^3 \end{pmatrix}$ (e.) $\vec{F}(x;y;z)=\begin{pmatrix} 3yz+y \\ 3xz+x+z \\ 3xy+y \end{pmatrix}$

## Lösung zu 9.31

**Arbeitshinweis:**

Die Berechnung von Divergenzen und Rotationen ist eine reine Frage der Rechentechnik. Man muss nur nach Rezept einsetzen: $\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}$ und $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}$

(a.)

$$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\left(3y^2\cdot e^{xy}\right)+\left(3x^2\cdot e^{xy}+2x\right)+(0)=3\cdot\left(x^2+y^2\right)\cdot e^{xy}+2x$$ 1 P

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(3)-\frac{\partial}{\partial z}\left(3x\cdot e^{xy}+2xy\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(3y\cdot e^{xy}+y^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}(3) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(3x\cdot e^{xy}+2xy\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(3y\cdot e^{xy}+y^2\right) \end{pmatrix}$$ 2 P

$$=\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ \left(3e^{xy}+3xy\cdot e^{xy}+2y\right)-\left(3e^{xy}+3yx\cdot e^{xy}+2y\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Arbeitshinweis:**

Dass das Feld wirbelfrei ist, erwarten wir nach den Aufgaben 9.29 und 9.30, denn es ist konservativ. Wirbelfreie Felder (also Felder mit $\operatorname{rot}\vec{F}=0$) sind konservativ. Häufig benutzt man bei dreidimensionalen Feldern die Berechnung der Rotation, um die Integrabilitätsbedingung zu prüfen, d.h. um zu untersuchen, ob zu einem Vektorfeld ein skalares Potentialfeld existiert.

(b.)

1 P $$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=(2x)+\left(2x^2y\right)+(0)=2x+2x^2y$$

2 P $$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}(5)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2\cdot y^2\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2\right)-\frac{\partial}{\partial x}(5)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot y^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-0\\ 0-0\\ \left(2xy^2\right)-(2y)\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

**Arbeitshinweis:**

Dieses Feld ist nicht rotationsfrei, sondern es enthält Wirbel. Vektorfelder mit Wirbeln sind nicht integrabel, d.h. es existiert kein skalares Potentialfeld, als dessen Gradient sich das untersuchte Vektorfeld darstellen lässt. Mit anderen Worten: Linienintegrale durch dieses Vektorfeld können bei gleichem Anfangs- und Endpunkt auf verschiedenen Wegen zu verschiedenen Ergebnissen führen. Dass das vorliegende Feld wirbelbehaftet ist, überrascht uns nach Aufgabe 9.28 nicht.

(c.)

1 P $$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=\left(e^{-y}\right)+\left(e^{-z}\right)+\left(e^{-x}\right)$$

2 P $$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\left(z\cdot e^{-x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(y\cdot e^{-z}\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(x\cdot e^{-y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(z\cdot e^{-x}\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(y\cdot e^{-z}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x\cdot e^{-y}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+y\cdot e^{-z}\\ 0+z\cdot e^{-x}\\ 0+x\cdot e^{-y}\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

Auch dieses Vektorfeld ist nicht konservativ, d.h. es existiert kein skalares Potentialfeld.

(d.)

1 P $$\operatorname{div}\vec{F}=\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0+0+0=0$$

Das Feld enthält weder Quellen noch Senken.

2 P $$\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot x^3\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2\cdot z^2\right)\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(y\cdot z^3\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(y\cdot x^3\right)\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\cdot z^2\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(y\cdot z^3\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^3-2x^2z\\ 3yz^2-3yx^2\\ 2xz^2-z^3\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

(e.)

$$\operatorname{div}\vec{F} = \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = (0)+(0)+(0) = 0$$

Das Feld enthält weder Quellen noch Senken. 1 P

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(3xy+y) - \frac{\partial}{\partial z}(3xz+x+z) \\ \frac{\partial}{\partial z}(3yz+y) - \frac{\partial}{\partial x}(3xy+y) \\ \frac{\partial}{\partial x}(3xz+x+z) - \frac{\partial}{\partial y}(3yz+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3x+1)-(3x+1) \\ (3y)-(3y) \\ (3z+1)-(3z+1) \end{pmatrix} = \vec{0}$$ 2 P

Das Feld ist wirbelfrei, es handelt sich also um ein konservatives Vektorfeld.

## Aufgabe 9.32 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 min | | Punkte 3 P |

Betrachten Sie nochmals das in Aufgabe 9.31.e gegebene konservative Vektorfeld

$$\vec{F}(x;y) = \begin{pmatrix} 3yz+y \\ 3xz+x+z \\ 3xy+y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das zugehörige Potentialfeld.

## Lösung zu 9.32

Da die Integrabilitätsbedingung bereits in Aufgabe (9.31.e) verifiziert wurde, können wir wegunabhängig integrieren:

$$V(x;y;z) = \int F_x\,dx = \int (3yz+y)\,dx = 3yzx + yx + C_1(y;z)$$

$$V(x;y;z) = \int F_y\,dy = \int (3xz+x+z)\,dy = 3xzy + xy + zy + C_2(x;z)$$

$$V(x;y;z) = \int F_z\,dz = \int (3xy+y)\,dz = 3xyz + yz + C_3(x;y)$$

In Übereinstimmung zu bringen sind diese Ausdrücke für

$$C_1(y;z) = z\cdot y + C\,,\quad C_2(x;z) = 0 + C\,,\quad C_3(x;y) = x\cdot y + C$$ 3 P

Damit ergibt sich das Potential zu $V(x;y;z) = 3xzy + xy + zy + C$

## Aufgabe 9.33 Das Potentialfeld eines Vektorfeldes

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 2 min | (a.) | Punkte |
| | (b.) | 4 min | (b.) | (a) 1 P (b) 2 P |
| | (c.) | 1 min | (c.) | |
| | (d.) | 6 min | (d.) | (c) 1 P (d) 3 P |

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(x;y;z)=\begin{pmatrix} 3x^2y-2z^3 \\ x^3+2yz^2 \\ 2y^2z-6xz^2 \end{pmatrix}$

(a.) Ist das Feld divergenzfrei?

(b.) Ist das Feld wirbelfrei?

(c.) Ist das Feld konservativ?

(d.) Berechnen Sie, falls möglich, das zugehörige Potentialfeld.

## Lösung zu 9.33

1 P (a.) Es gilt $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y-2z^3\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+2yz^2\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(2y^2z-6xz^2\right)=6xy+2z^2+2y^2-12xz\neq 0$

Also ist das Feld nicht überall divergenzfrei, d.h. es enthält Quellen oder Senken.

2 P (b.) $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4yz-4yz \\ -6z^2+6z^2 \\ 3x^2-3x^2 \end{pmatrix}=\vec{0}$

Also ist das Feld überall wirbelfrei.

(c.)

1 P Da die Begriffe „wirbelfrei“, „rotationsfrei“ und „konservativ“ für Vektorfelder gleichbedeutend sind, ist ein wirbelfreies Feld auch konservativ.

Damit ist es in unserem Beispiel auch möglich, ein zugehöriges Potentialfeld zu bestimmen.

(d.) Die wegunabhängige Integration verläuft wie folgt:

$$V(x;y;z) = \int F_x\,dx = \int\left(3x^2y-2z^3\right)dx = x^3y-2xz^3+C_1(y;z)$$

$$V(x;y;z) = \int F_y\,dy = \int\left(x^3+2yz^2\right)dy = x^3y+y^2z^2+C_2(x;z)$$

$$V(x;y;z) = \int F_z\,dz = \int\left(2y^2z-6xz^2\right)dz = y^2z^2-2xz^3+C_3(x;y)$$

Übereinstimmung tritt ein für $C_1(y;z)=y^2z^2+C$, $C_2(x;z)=-2xz^3+C$, $C_3(x;y)=x^3y+C$ 3 P

Dann ergibt sich das Potential zu $V(x;y;z)=x^3y+y^2z^2-2xz^3+C$

## Aufgabe 9.34 Bsp. für ein zentralsymmetrisches Potentialfeld

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b,c.) | (a.) 7 min<br>(b,c.) je 4 min | (a.)<br>(b,c.) | | Punkte<br>(a) 3 P (b) 2 P (c) 2 P |

Gegeben sei ein zentralsymmetrisches Potentialfeld $V(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Berechnen Sie $\operatorname{grad} V$ auf zwei Arten:

(a.) Bildung des Gradienten in kartesischen Koordinaten und anschließend Koordinatentransformation des Gradienten in Kugelkoordinaten.

(b.) Koordinatentransformation des Potentials in Kugelkoordinaten und anschließend Bildung des Gradienten in Kugelkoordinaten.

(c.) Berechnen Sie $\operatorname{div}(\operatorname{grad} V)$.

## Lösung zu 9.34

(a.) In kartesischen Koordinaten berechnen wir den Gradienten:

$$\operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x \\ -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y \\ -\frac{1}{2}\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2z \end{pmatrix} = \frac{-1}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ 2 P

Transformation in Kugelkoordinaten basiert auf $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ und $\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (mit $\vec{r}=r\cdot\vec{e}_r=$ Vektor vom Koordinatenursprung zum Punkt $(x;y;z)^T$) und liefert:

$$\operatorname{grad} V = \frac{-1}{\left(r^2\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-\vec{r}}{r^3} = \frac{-\vec{e}_r}{r^2}$$ (Dabei ist $\vec{e}_r$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{r}$) 1 P

(b.) Die Transformation des Potentials in Kugelkoordinaten liefert $V(r;\vartheta;\varphi)=\frac{1}{r}$

2 P Der Gradient in Kugelkoordinaten berechnet sich als $\operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$

Für unser zentralsymmetrisches Potential erhalten wir somit den Gradienten

2 P $$\operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ \frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-\vec{e}_r}{r^2}$$

Logischerweise müssen die Aufgabenteile (a.) und (b.) zum selben Ergebnis führen.

(c.) Auch die Berechnung der Divergenz ist am leichtesten direkt in Kugelkoordinaten. Die Divergenz eines Vektorfeldes $\vec{F}$ in Kugelkoordinaten lautet:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\left(r^2\cdot F_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial\left(\sin(\vartheta)\cdot F_\vartheta\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r\cdot\sin(\vartheta)}\cdot\frac{\partial\left(F_\varphi\right)}{\partial\varphi}$$

2 P Mit $\vec{F} = \operatorname{grad} V = \begin{pmatrix} \frac{-1}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ folgt: $\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cdot\frac{-1}{r^2}\right)+0+0 = \frac{1}{r^2}\cdot 0 = 0$

Anmerkung: Ein zentralsymmetrisches Feld wie das hier behandelte taucht z.B. bei Newton's Gravitationsformel oder auch beim elektrischen Feld einer Punktladung auf.

## Aufgabe 9.35 Vektorfelder in Kugelkoordinaten

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (div) | 10 min | (div) | | Punkte<br>(div) 5 P |
| | (rot) | 15 min | (rot) | | (rot) 9 P |

Gegeben sei ein Vektorfeld in Kugelkoordinaten, dessen Divergenz und Rotation Sie bitte ebenfalls in Kugelkoordinaten berechnen.

$$\vec{F}\begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_r \\ F_\vartheta \\ F_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\cdot\sin(2\vartheta)\cdot\cos(\varphi) \\ B\cdot\sin(2\vartheta)\cdot\sin(\varphi) \\ C + D\cdot\sin^2(\vartheta) \end{pmatrix}$$

## Lösung zu 9.35

Die Divergenz in Kugelkoordinaten lautet:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 \cdot F_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial\left(\sin(\vartheta) \cdot F_\vartheta\right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial\left(F_\varphi\right)}{\partial \varphi}$$

Die Rotation in Kugelkoordinaten lautet:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \left( \frac{\partial\left(\sin(\vartheta) \cdot F_\varphi\right)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(r \cdot F_\varphi\right)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(r \cdot F_\vartheta\right)}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(F_r\right)}{\partial \vartheta} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Divergenz des in der Aufgabenstellung gegebenen Vektorfeldes zu

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\left(r^2 \cdot A \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \cos(\varphi)\right)}{\partial r} + \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial\left(\sin(\vartheta) \cdot B \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \sin(\varphi)\right)}{\partial \vartheta} \underbrace{+0}_{\uparrow}$$

da $F_\varphi$ von $\varphi$ unabhängig ist

$$= \frac{1}{r^2} \cdot A \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{\partial r^2}{\partial r} + \frac{B \cdot \sin(\varphi)}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta) \cdot \sin(2\vartheta)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot A \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \cdot 2r + \frac{B \cdot \sin(\varphi)}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \left(\cos(\vartheta) \cdot \sin(2\vartheta) + 2 \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(2\vartheta)\right)$$

$$= \frac{2A}{r} \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \cos(\varphi) + \frac{2B}{r} \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(2\vartheta) + \frac{B}{r} \cdot \frac{\sin(\varphi)}{\tan(\vartheta)} \cdot \sin(2\vartheta)$$ 5 P

Die Angabe bezieht sich natürlich ebenfalls auf Kugelkoordinaten.

Aus Gründen der Übersicht schreiben wir die Berechnung der Rotation komponentenweise:

• Die Radialkomponente lautet

$$\left[\operatorname{rot}(\vec{F})\right]_r = \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \left( \frac{\partial\left(\sin(\vartheta) \cdot F_\varphi\right)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial F_\vartheta}{\partial \varphi} \right)$$

$$= \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin(\vartheta) \cdot \left(C + D \cdot \sin^2(\vartheta)\right)\right) - \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(B \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \sin(\varphi)\right)$$

$$= \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(C \cdot \sin(\vartheta) + D \cdot \sin^3(\vartheta)\right) - \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(B \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \sin(\varphi)\right)$$ 3 P

$$= \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \left(C \cdot \cos(\vartheta) + 3D \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta)\right) - \frac{B \cdot \sin(2\vartheta)}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \cos(\varphi)$$

Die $\vartheta$-Komponente lautet

$$\left[\operatorname{rot}(\vec{F})\right]_\vartheta = \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\left(r \cdot F_\varphi\right)}{\partial r} = \frac{1}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(A \cdot \sin(2\vartheta) \cdot \cos(\varphi)\right) - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left[r \cdot C + r \cdot D \cdot \sin^2(\vartheta)\right]$$

$$= -\frac{A \cdot \sin(2\vartheta)}{r \cdot \sin(\vartheta)} \cdot \sin(\varphi) - \frac{1}{r} \cdot \left(C + D \cdot \sin^2(\vartheta)\right)$$ 3 P

Die $\varphi$-Komponente lautet

$$\left[\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)\right]_{\varphi}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\left(r\cdot F_{\vartheta}\right)}{\partial r}-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\left(F_r\right)}{\partial\vartheta}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot B\cdot\sin\left(2\vartheta\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)\right)-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A\cdot\sin\left(2\vartheta\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)\right)$$

3 P $$=\frac{1}{r}\cdot B\cdot\sin\left(2\vartheta\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)-\frac{2A}{r}\cdot\cos\left(2\vartheta\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)$$

Da die Rotation ein Vektorfeld ist, schreiben wir die Lösung durch Zusammenfassen der Komponenten auf (wieder in Kugelkoordinaten):

$$\operatorname{rot}\left(\vec{F}\right)=\begin{pmatrix}\frac{C}{r\cdot\sin\left(\vartheta\right)}\cdot\cos\left(\vartheta\right)+\frac{3D}{r\cdot\sin\left(\vartheta\right)}\cdot\sin^2\left(\vartheta\right)\cdot\cos\left(\vartheta\right)-\frac{B\cdot\sin\left(2\vartheta\right)}{r\cdot\sin\left(\vartheta\right)}\cdot\cos\left(\varphi\right)\\ -\frac{A\cdot\sin\left(2\vartheta\right)}{r\cdot\sin\left(\vartheta\right)}\cdot\sin\left(\varphi\right)-\frac{C}{r}+\frac{D}{r}\cdot\sin^2\left(\vartheta\right)\\ \frac{1}{r}\cdot B\cdot\sin\left(2\vartheta\right)\cdot\sin\left(\varphi\right)-\frac{2A}{r}\cdot\cos\left(2\vartheta\right)\cdot\cos\left(\varphi\right)\end{pmatrix}$$

# 10 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

## Aufgabe 10.1 Textbeispiel – Permutationen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 min | | Punkte 2 P |

Sie haben im Geldbeutel 5 Zehn-Cent-Münzen, 3 Fünfzig-Cent-Münzen und 4 Ein-Euro-Münzen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung ergeben sich, wenn Sie die Münzen eine nach der anderen aus dem Geldbeutel entnehmen?

(Wir setzen voraus, dass Münzen gleichen Wertes nicht unterschieden werden können.)

## Lösung zu 10.1

**Arbeitshinweis:**

Wird jedes Element genau einmal entnommen, so muss die Zahl der Permutationen berechnet werden. 1 P

In unserem Beispiel liegt folgender Fall vor:

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = 5 \text{ Münzen der ersten Sorte} \\ n_2 = 3 \text{ Münzen der zweiten Sorte} \\ n_3 = 4 \text{ Münzen der dritten Sorte} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Anzahl der Permutationen: } \mathrm{P}_n^{(n_1;n_2;n_3)} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3!} \quad (\text{mit } n = n_1 + n_2 + n_3)$$

Einsetzen der Werte liefert: $\mathrm{P}_{12}^{(5;3;4)} = \dfrac{12!}{5!\,3!\,4!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 27720$ 1 P

Antwort: Es gibt also 27720 Möglichkeiten, die Münzen anzuordnen.

Anmerkung: Das Ausschreiben der Fakultäten dient dem Hinweis, dass man mit vernünftigem Kürzen den Rechenaufwand minimieren kann.

## Aufgabe 10.2 Textbeispiel – Kombinationen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | Punkte 3 P |

In einem Hörsaal mit 80 Sitzplätzen nehmen 50 Studierende Platz. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Leute auf den Sitzen zu anzuordnen.

## Lösung zu 10.2

**Arbeitshinweis:**

Bei der Bearbeitung dieses Aufgabentyps beginnt man mit der Unterscheidung zwischen Variationen und Kombinationen (geordnete und ungeordnete Stichprobe) und überlegt sich, ob eine Wiederholung möglich ist oder nicht. Auf diese Weise klärt man, welche Formel anzuwenden ist.

In unserem Beispiel gilt:

Die Reihenfolge, in der sich die Personen auf die Plätze setzen, ist egal, d.h. es interessiert nicht, wer sich zuerst hinsetzt und wer danach. → Kombinationen

1 P Jeder nimmt nur einen und genau einen Platz ein → ohne Wiederholung

Die zugehörige Formel lautet $C_n^{(k)} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ mit k=50 Studierende, n=80 Sitzplätze

2 P $C_{80}^{(50)} = \frac{80!}{50! \cdot 30!} = 88714125348404534630\,08 \overset{TR}{\approx} 8.8714 \cdot 10^{21}$ Möglichkeiten der Platzierung.

Anmerkung: Der Taschenrechner kann diese Zahl berechnen – wenn man nicht stupide die Fakultäten eintippt, sondern zuerst kürzt: $\frac{80!}{50! \cdot 30!} = \frac{51 \cdot 52 \cdot 53 \cdot ... \cdot 79 \cdot 80}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 29 \cdot 30}$

## Aufgabe 10.3 Textbeispiel – Variationen

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) | zusammen 6 min | 4 P |

Unser Alphabet enthält 26 Buchstaben. Wie viele verschiedene Worte lassen sich maximal bilden

(a.) aus genau drei Zeichen?

(b.) aus mindestens zwei und höchstens vier Zeichen?

(c.) aus bis zu fünf Zeichen?

## Lösung zu 10.3

**Arbeitshinweis:**

1 P Bei der Darstellung von Worten spielt die Reihenfolge der Buchstaben eine entscheidende Rolle, also betrachten wir eine geordnete Stichprobe, d.h. Variationen. Da eine Wiederholung der Buchstaben möglich ist, betrachten wir Variationen mit Wiederholung.

Deren Anzahl lautet: $V_{W;n}^{(k)} = n^k$, mit $n =$ Zahl der Elemente und $k =$ Stichprobenumfang.

1 P (a.) Genau drei Zeichen ergeben $V_{W;26}^{(3)} = 26^3 = 17576$ Möglichkeiten.

(b.) Zwei bis vier Zeichen ergeben $V_{W;26}^{(2)}+V_{W;26}^{(3)}+V_{W;26}^{(4)}=26^2+26^3+26^4=475228$ Möglichkeiten. 1 P

(c.) Ein bis fünf Zeichen ergeben

$$V_{W;26}^{(1)}+V_{W;26}^{(2)}+V_{W;26}^{(3)}+V_{W;26}^{(4)}+V_{W;26}^{(5)}=26^1+26^2+26^3+26^4+26^5=12356630 \text{ Möglichkeiten}$$ 1 P

## Aufgabe 10.4 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | (a.) 8 min | | Punkte: | (a.) 4 P |
| (b.) | (b.) 8 min | | | (b.) 6 P |
| (c.) | (c.) 5 min | | | (c.) 2 P |
| (d.) | (d.) 5 min | | | (d.) 3 P |
| (e.) | (e.) 5 min | | | (e.) 3 P |

Beim Skatspiel werden 32 Karten verteilt. Drei Spieler bekommen je 10 Karten und zwei Karten werden in den sog. Stock gelegt.

(a.) Wie viele verschiedene Spielsituationen sind prinzipiell möglich?

(b.) Wie viele Möglichkeiten gibt es, dass einer der drei Spieler alle vier Buben erhält?

(c.) Wie groß ist für jeden einzelnen Spieler die Wahrscheinlichkeit, alle vier Buben zu erhalten?

(d.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Buben im Stock liegen?

(e.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Spieler, ganz ohne Buben zu spielen?

## Lösung zu 10.4

(a.) Drei Spieler bekommen je 10 Karten. Da jede der Karten genau einmal vorhanden ist, findet das Austeilen der Karten ohne Wiederholung statt (→ Kombinationen), wobei die Reihenfolge egal ist, in der man die Karten bekommt.

- Der erste Spieler bekommt 10 Karten aus 32: $C_{32}^{(10)}=\begin{pmatrix}10\\32\end{pmatrix}=64512240$ Möglichkeiten 1 P
- Der zweite Spieler bekommt 10 Karten aus den verbliebenen 22: $C_{22}^{(10)}=\begin{pmatrix}10\\22\end{pmatrix}=646646$ Mög. 1 P
- Der dritte Spieler bekommt 10 Karten aus den verbliebenen 12: $C_{12}^{(10)}=\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix}=66$ Möglichk. 1 P
- Schließlich werden 2 von 2 Karten in den Skat gelegt, dafür gibt es genau 1 Möglichkeit.

Gefragt ist, nun nach der Zahl der Spielsituationen insgesamt, also

$$C_{32}^{(10)}\cdot C_{22}^{(10)}\cdot C_{12}^{(10)}=\begin{pmatrix}10\\32\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\22\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\12\end{pmatrix}\cdot 1=2753294408504640\overset{TR}{\approx}2.7533\cdot 10^{15}$$ 1 P

2 P (b.) Geben wir dem ersten Spieler alle vier Buben. Dazu sucht man gezielt (d.h. außerhalb der Zufälligkeit) alle vier Buben heraus und gibt ihm danach per Zufall die restlichen 6 Karten aus den übrig gebliebenen 28 Karten. Wieder handelt es sich um Kombinationen ohne Wiederholung:

1 P $C_n^{(k)} = C_{28}^{(6)} = \begin{pmatrix} 6 \\ 28 \end{pmatrix} = \frac{28!}{6! \cdot (28-6)!} = \frac{23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 376740$ Möglichkeiten

Die Zahl der Möglichkeiten für den zweiten Spieler, den dritten Spieler und den Skat sind wie bei Aufgabenteil (a.), also $C_{22}^{(10)}$, $C_{12}^{(10)}$ und 1.

Die Zahl der Möglichkeiten, dass der erste Spieler vier Buben bekommt, ist also

1 P $C_{28}^{(6)} \cdot C_{22}^{(10)} \cdot C_{12}^{(10)} = 376740 \cdot 646646 \cdot 66 = 16078749326640 \overset{TR}{\approx} 1.60787 \cdot 10^{13}$

1 P Ebensogroß wie die Zahl der Möglichkeiten für den ersten Spieler ist die Zahl der Möglichkeiten für den zweiten und für den dritten Spieler. Die Zahl der Möglichkeiten insgesamt (die hier gefragt ist), ist also dreimal so groß wie Zahl der Möglichkeiten für jeden einzelnen Spieler:

1 P $3 \cdot C_{28}^{(6)} \cdot C_{22}^{(10)} \cdot C_{12}^{(10)} = 3 \cdot 376740 \cdot 646646 \cdot 66 = 48236247979920 \overset{TR}{\approx} 4.8236 \cdot 10^{13}$

(c.) Dazu können wir die Zahl der Möglichkeiten für einen einzelnen Spieler aus Aufgabenteil (b.) in Relation zur Gesamtzahl aller Möglichkeiten aus Aufgabenteil (a.) setzen:

1 P $P_{\text{gefragt}} = \frac{C_{28}^{(6)} \cdot C_{22}^{(10)} \cdot C_{12}^{(10)}}{C_{32}^{(10)} \cdot C_{22}^{(10)} \cdot C_{12}^{(10)}} = \frac{C_{28}^{(6)}}{C_{32}^{(10)}}$

Wie man sieht, lässt sich der Bruch sehr stark kürzen. Man hätte sich auch gleich den gekürzten Bruch überlegen können, nämlich als denjenigen Quotienten, den man erhält, wenn man die Zahl der Möglichkeiten einem Spieler vier Karten (Buben) gezielt und dazu 6 Karten (die restlichen) willkürlich zu geben in Relation setzt zur Zahl der Möglichkeiten, diesem Spieler 10 beliebige Karten zu geben.

Die numerische Berechnung des Ergebnisses ist unkompliziert:

1 P $P_{\text{gefragt}} = \frac{C_{28}^{(6)}}{C_{32}^{(10)}} = \frac{28!}{6! \cdot (28-6)!} \cdot \frac{10! \cdot (32-10)!}{32!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{29 \cdot 30 \cdot 31 \cdot 32} \overset{TR}{\approx} 0.584\%$

(d.) Die Zahl der Möglichkeiten, zwei beliebige Karten aus dem Stapel zu ziehen, ist $C_{32}^{(2)}$ .

1 P Die Zahl der Möglichkeiten, zwei aus den vier vorhandenen Buben zu ziehen, ist $C_4^{(2)}$ .

Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden beliebigen Karten gerade zwei Buben sind,

2 P gegeben durch $P = \frac{C_4^{(2)}}{C_{32}^{(2)}} = \frac{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}{\frac{32!}{30! 2!}} = \frac{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 2}}{\frac{31 \cdot 32}{2}} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 31 \cdot 32} = \frac{48}{3968} \overset{TR}{\approx} 1.21\%$

(e.) Dazu entnehme man dem Stapel gezielt die vier Buben und berechne die Zahl der Möglichkeiten, 10 aus den restlichen 28 Karten zu geben:

$$C_{28}^{(10)} = \binom{10}{28} = \frac{28!}{10! \cdot (28-10)!} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = 13123110 \text{ Möglichkeiten} \qquad 2\text{ P}$$

Die Zahl dieser Möglichkeiten ist in Relation zu setzen mit der Zahl der Möglichkeiten des 10 Karten-Bekommens überhaupt (siehe Teil b.): $C_{32}^{(10)} = 64512240$ Möglichkeiten

Also ist die gefragte Wahrscheinlichkeit $P = \frac{13123110}{64512240} \overset{TR}{\approx} 20.34\%$ (für ein Spiel ohne Buben). 1 P

## Aufgabe 10.5 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 4 min | | Punkte 3 P |

Bei einem Wettkampf starten 12 Sportler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Wette die Zuteilung von Gold-, Silber- und Bronzemedaille richtig vorherzusagen?

## Lösung zu 10.5

Selbstverständlich spielt hier die Reihenfolge eine Rolle, also haben wir es mit einer geordneten Stichprobe (Variationen) ohne Wiederholung zu tun.

Wir berechnen zuerst die Zahl der Möglichkeiten des Zieleinlaufs der ersten drei Sportler insgesamt: $V_n^{(k)} = V_{12}^{(3)} = \frac{12!}{(12-3)!} = \frac{12!}{9!} = 10 \cdot 11 \cdot 12 = 1320$ mit n=Zahl der Sportler, k=Zahl der geordnet Entnommenen

Genau eine dieser Möglichkeiten wird sich als tatsächliches Wettkampfresultat herausstellen, also ist die gefragte Wahrscheinlichkeit: $P = \frac{1}{1320} \overset{TR}{\approx} 0.076\%$. 3 P

## Aufgabe 10.6 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…h.) zusammen 20 min | | Punkte komplett 11 P |

Ein typisches Zufallsexperiment, welches auch in Prüfungen immer wieder auftaucht, ist das Würfeln. Nehmen wir an, wir würfeln mit drei Würfeln gleichzeitig und berechnen die Wahrscheinlichkeiten für das Würfeln

(a.) mindestens einer Sechs.
(b.) genau zweier Sechsen.
(c.) maximal dreier Sechsen.
(d.) genau einer Sechs.
(e.) mindestens dreier Sechsen.
(f.) gar keiner Sechs.
(g.) maximal einer Sechs.
(h.) von mehr als einer Sechs.

Es wird die Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsbaumes empfohlen.

## Lösung zu 10.6

Ein Wahrscheinlichkeitsbaum zu diesem Zufallsexperiment ist in Bild 10-6. konstruiert. Wie üblich sind an den einzelnen Zweigen die Wahrscheinlichkeiten ab dem jeweiligen Knoten markiert, der den Ast hält und zwar bis zum nächsten Knoten.

3 P

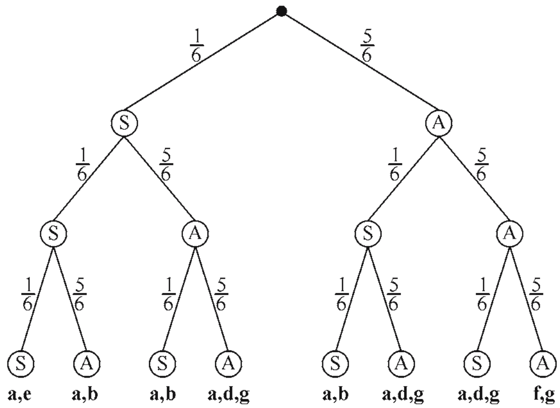



**Bild 10-6**
Wahrscheinlichkeitsbaum zum Würfeln mit drei Würfeln. Im Hinblick auf die Fragestellungen wurde bei den einzelnen Würfen nur unterschieden, ob Sechsen („S“) oder andere Zahlen („A“) geworfen werden.
Die Kleinbuchstaben am Ende der einzelnen Pfade geben an, zu welchen einzelnen Aufgabenteilen die jeweiligen Pfad-Wahrscheinlichkeiten addiert werden müssen.

**Arbeitshinweis:**

- Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden miteinander multipliziert.

- Führen mehrere Pfade zum selben Endergebnis, so addieren sich die Wahrscheinlichkeiten.

Damit lassen sich die in der Aufgabenstellung gefragten Wahrscheinlichkeiten durch einfache Multiplikationen und Additionen bestimmen:

(a.) Wir addieren alle Pfad-Wahrscheinlichkeiten, die mit einem „a“ enden und erhalten die Wahrscheinlichkeit

1 P $$P_a = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+5+5+25+5+25+25}{216}=\frac{91}{216}\overset{TR}{\approx}42.13\%$$

(b.) Alle Pfade mit einem „b“ führen zu einer Gesamtwahrscheinlichkeit von

1 P $$P_b = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5+5+5}{216}=\frac{15}{216}\overset{TR}{\approx}6.94\%\ .$$

(c.) Mit drei Würfeln kann man höchstens drei Sechsen würfeln – mehr geht nicht. Also ist
1 P die Forderung der Aufgabenstellung (c.) in jedem Fall erfüllt. $\Rightarrow\ P_c = 100\%$ .

Da man bei (c.) nichts rechnen muss, sind die Pfade zu (c.) nicht im Wahrscheinlichkeitsbaum eingetragen.

1 P (d.) Addition aller Pfade „d“ führt zu $P_d = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25+25+25}{216}=\frac{75}{216}\overset{TR}{\approx}34.72\%$ .

(e.) Mindestens drei Sechsen sind genau drei Sechsen, denn mehr geht nicht:

1 P $$\Rightarrow\quad P_e = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}\overset{TR}{\approx}0.463\%\ .$$

1 P (f.) Auch die Fragestellung „gar keine Sechs“ führt zu genau einem einzigen Pfad. Dieser hat die Wahrscheinlichkeit $P_f = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}\overset{TR}{\approx}57.87\%$ .

(g.) Hier sind die Wahrscheinlichkeiten vierer Pfade zu addieren:

$$\Rightarrow \quad P_g = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25+25+25+125}{216} = \frac{200}{216} \overset{TR}{\approx} 92.59\,\% \,.$$ 1 P

(h.) Dies ist das Komplement zur Wahrscheinlichkeit (g.), also ist

$$P_h = 1 - P_g = 1 - \frac{200}{216} = \frac{16}{216} \overset{TR}{\approx} 7.41\,\% \,.$$ 1 P

Da wir die Antwort zu Aufgabenteil (h.) nicht im Wahrscheinlichkeitsbaum suchen, sind die Pfade ebenfalls nicht in Bild 10-6 eingetragen.

## Aufgabe 10.7 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | (a) 8 min | | Punkte |
| | (b.) | (b) 2 min | | (a.) 4 P (b) 2 P |

Im Qualitätswesen gibt es den Begriff des AQL (= Acceptable Quality Level, zu Deutsch die Annehmbare Qualitätsgrenzlage). Man drückt damit aus, wie viele Schlechtteile bei einer Serienfertigung in einer Lieferung akzeptiert werden.

Nehmen wir an, Ihre Firma kauft eine Kiste mit 100 Bauteilen, in denen 5 Schlechtteile enthalten sind. Für jedes Gerät, das Sie bauen, benötigen Sie 5 Bauteile, sodass Sie 20 Geräte herstellen.

(a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jedes einzelne Gerät, in Ordnung zu sein?

(b.) Wie viele schlechte Geräte liefert Ihre Firma im Durchschnitt aufgrund dieser Vorgehensweise aus?

## Lösung zu 10.7

Die Bauteile werden ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen (Kombinationen) und ohne Wiederholung. 1 P

(a.) Wir setzen nun in Relation: Wie viele Kombinationen ohne Wiederholung gibt es insgesamt und wie viele davon enthalten keine Schlechtteile?

Zahl der Kombinationen insgesamt – dazu werden 5 beliebige Teile aus den 100 Teilen entnommen → $C_{100}^{(5)} = \binom{5}{100} = \frac{100!}{5!\cdot 95!} = \frac{96\cdot 97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 75287520$ 1 P

Zahl der Kombinationen, die nur Gutteile enthalten – dazu sortieren wir die 5 Schlechtteile aus und entnehmen 5 beliebige Teile aus den restlichen 95 Gutteilen

→ $C_{95}^{(5)} = \binom{5}{95} = \frac{95!}{5!\cdot 90!} = \frac{91\cdot 92\cdot 93\cdot 94\cdot 95}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 57940519$ 1 P

Der Quotient gibt die Wahrscheinlichkeit an, bei 5 entnommenen Teilen zufällig lauter Gutteile zu erwischen: $P_{\text{Aufgabe(a.)}} = \frac{C_{95}^{(5)}}{C_{100}^{(5)}} = \frac{57940519}{75287520} \overset{TR}{\approx} 76.96\%$ 1 P (b.) Hier sind alle Geräte gefragt, bei denen nicht zufällig lauter Gutteile verbaut wurden. Dies ist das Komplement zu der in Aufgabenteil (a.) berechneten Wahrscheinlichkeit:

2 P $P_{\text{Aufgabe(b.)}} = 100\% - P_{\text{Aufgabe(a.)}} \overset{TR}{\approx} 23.04\%$ der Geräte sind schlecht, sofern keine zusätzlichen weiteren Fehler aus anderen Fehlerquellen als den hier genannten auftreten.

## Aufgabe 10.8 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a…d.) | je 3 min | | Punkte: je 1 P |

Ein typisches Standardbeispiel für Prüfungssituationen ist das Würfeln mit mehreren Würfeln. Nehmen wir an, Sie würfeln mit zwei Würfeln und zählen die Augensumme.

(a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme genau ZEHN beträgt?

(b.) Betrachten wir nur die Würfe mit Augensumme ZEHN – Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei ein „Pasch" würfeln (d.h. beide Würfel zeigen gleiche Zahlen)?

(c.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme mindestens ZEHN beträgt?

(d.) Betrachten wir alle überhaupt möglichen Würfe insgesamt - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie mit einem „Pasch" eine Augensumme von mindestens ZEHN würfeln?

## Lösung zu 10.8

Bei der Lösung dieser Aufgabe ist es am einfachsten, auf die einzelnen Elementarereignisse zurückzugreifen. Das Würfeln mit zwei Würfeln bietet genau 36 Möglichkeiten.

(a.) Folgende Möglichkeiten führen zur Augensumme ZEHN: (4+6) / (5+5) / (6+4)

1 P Das sind 3 Möglichkeiten aus 36. $\Rightarrow \quad P_{\text{a}} = \frac{3}{36} \overset{TR}{\approx} 8.33\%$ .

1 P (b.) Genau eine der drei Möglichkeiten aus Aufgabenteil (a.) enthält ein „Pasch", nämlich die (5+5). $\Rightarrow \quad P_{\text{b}} = \frac{1}{3} \overset{TR}{\approx} 33.33\%$ .

(c.) Die Forderung „Augensumme mindestens ZEHN" wird von folgenden Kombinationen erfüllt: (6+4) /(6+5) /(6+6) /(5+5) /(5+6) /(4+6)

1 P Das sind 6 Möglichkeiten aus 36. $\Rightarrow \quad P_{\text{c}} = \frac{6}{36} \overset{TR}{\approx} 16.67\%$ .

1 P (d.) Aus der Liste der Würfe mit „Augensumme mindestens ZEHN" sind dies genau die beiden Möglichkeiten: (6+6) /(5+5) $\Rightarrow \quad P_{\text{d}} = \frac{2}{36} \overset{TR}{\approx} 5.556\%$ .

**Stolperfalle:**

Bei den Aufgabenteilen (b.) und (d.) unterscheide man zwischen den verschiedenartigen Fragestellungen. Bei (b.) ist eine bedingte Wahrscheinlichkeit gefragt, nämlich „Pasch unter der Bedingung der Augensumme ZEHN", bei (d.) hingegen bezieht sich die Frage auf die Grundgesamtheit (aller 36 möglichen Würfe).

## Aufgabe 10.9 Textbsp. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Baum + (a…i.) | Zusammen 20 min. | | Punkte komplett 13 P |

Aus einem Stapel Rommé-Karten (110 Karten) dürfen Sie nacheinander drei Karten ziehen in der Hoffnung auf einen Joker. Der Stapel enthält 6 Joker. Gezogene Karten werden nicht zurückgelegt.

(a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei überhaupt Joker bekommen?

(b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei genau einen Joker bekommen?

(c.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei genau zwei Joker bekommen?

(d.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie dabei genau drei Joker bekommen?

(e.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie beim ersten und dritten Versuch einen Joker ziehen, beim zweiten aber nicht?

(f.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Versuch einen Joker zu ziehen?

(g.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Versuch einen Joker zu ziehen?

(h.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Versuch einen Joker zu ziehen?

(i.) Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen eines Jokers im zweiten Versuch unter der Voraussetzung, dass im ersten Versuch kein Joker gezogen wurde, mit der Wahrscheinlichkeit, dass im ersten Versuch doch einer gezogen wurde.

## Lösung zu 10.9

**Vorgehensweise:**

Aus der Komplexität der Fragestellungen wird klar, dass es sinnvoll ist, hier wieder mit einem Wahrscheinlichkeitsbaum zu arbeiten. Diese Methode ist gerade bei komplizierten Fragestellungen deshalb empfehlenswert, weil sie die Übersicht maximiert.

**Arbeitshinweis:**

In Prüfungssituationen ist die Arbeitsweise mit dem Wahrscheinlichkeitsbaum im Allgemeinen sehr empfehlenswert, denn er strukturiert die Denkvorgänge in sehr übersichtlicher Weise und schafft daher eine hohe Sicherheit beim Auffinden der korrekten Lösungen. Wann immer es möglich ist, ist die Verwendung eines Wahrscheinlichkeitsbaumes ratsam.

**Arbeitshinweis:**

Wahrscheinlichkeitsbäume lassen sich speziell im Hinblick auf die Fragestellung erstellen. Dies sollte man auch tun, um den Aufwand beim Zeichnen des Wahrscheinlichkeitsbaumes zu minimieren. Würde man z.B. beim Rommé-Stapel alle verschiedenen Karten einzeln aufführen, so würde der Wahrscheinlichkeitsbaum gigantisch. Beschränkt man sich hingegen nur auf die Aspekte der Aufgabenstellung, so spart man Arbeitszeit.

Der Wahrscheinlichkeitsbaum zu Aufgabe 10.9 ist in Bild 10-9 konstruiert. Da ohne Zurücklegen gearbeitet wird, muss bei der Angabe der einzelnen Wahrscheinlichkeiten an den Zweigen die jeweils aktuelle Zahl der Karten berücksichtigt werden.

3 P

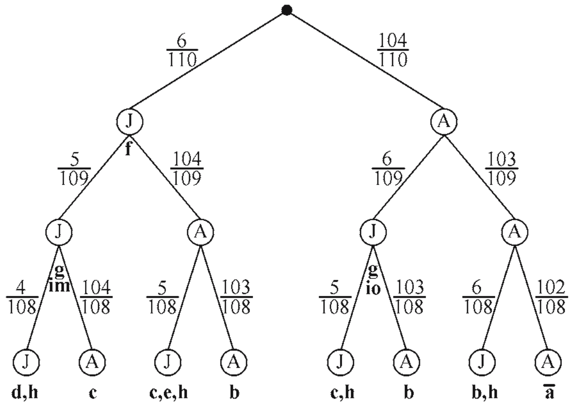



**Bild 10-9**
Wahrscheinlichkeitsbaum zum Ziehen von Jokern aus einem Rommé-Spiel. Im Hinblick auf die Fragestellungen wurde bei den einzelnen Ziehungen nur unterschieden zwischen Jokern („J") und anderen Karten („A").
Die Kleinbuchstaben am Ende der einzelnen Pfade geben an, zu welchen einzelnen Aufgabenteilen die jeweiligen Pfade führen.

(a.) Alle Pfade führen zu mindestens einem Joker, außer dem Pfad „$\overline{a}$". Der schnellste Weg zum Ziel ist also die Berechnung der Pfad-Wahrscheinlichkeit $\overline{a}$ und die Bildung der komplementären Wahrscheinlichkeit dazu:

1 P $$P_{\overline{a}} = \frac{104}{110}\cdot\frac{103}{109}\cdot\frac{102}{108} \;\Rightarrow\; P_a = 1-\frac{104}{110}\cdot\frac{103}{109}\cdot\frac{102}{108} \overset{TR}{\approx} 15.62\% \quad \text{für erfolgreiches Joker-Ziehen.}$$

(b.) Hier sind die Wahrscheinlichkeiten über drei Pfade zu summieren, denn man könnte als erste, als zweite oder als dritte Karten einen Joker ziehen:

1 P $$P_b = \frac{6}{110}\cdot\frac{104}{109}\cdot\frac{103}{108}+\frac{104}{110}\cdot\frac{6}{109}\cdot\frac{103}{108}+\frac{104}{110}\cdot\frac{103}{109}\cdot\frac{6}{108} \overset{TR}{\approx} 14.89\%\,.$$

(c.) Wie man am Wahrscheinlichkeitsbaum sieht, gibt es auch hier wieder drei Pfade:

1 P $$P_c = \frac{6}{110}\cdot\frac{5}{109}\cdot\frac{104}{108}+\frac{6}{110}\cdot\frac{104}{109}\cdot\frac{5}{108}+\frac{104}{110}\cdot\frac{6}{109}\cdot\frac{5}{108} \overset{TR}{\approx} 0.723\%\,.$$

(d.) Für drei Joker aus drei Versuchen existiert nur ein einziger Pfad:

1 P $$P_d = \frac{6}{110}\cdot\frac{5}{109}\cdot\frac{4}{108} \overset{TR}{\approx} 0.00927\% = 92.7\,\text{ppm} \quad \text{(Anmerkung: „ppm" = parts per million).}$$

Nebenbemerkung zur Selbstkontrolle: Die Wahrscheinlichkeiten $P_b + P_c + P_d$ müssen zusammen $P_a$ ergeben. Sind in Prüfungen derart simple Selbstkontrollen möglichen, so ist deren Durchführung durchaus ratsam.

1 P (e.) Hier wird gezielt genau ein Pfad abgefragt: $P_e = \frac{6}{110}\cdot\frac{104}{109}\cdot\frac{5}{108} \overset{TR}{\approx} 0.241\%$ .

(f.) Fragt man nach dem Joker im ersten Versuch, so ist egal, was danach kommt. Aus diesem Grund genügt es, bis zu dem mit „f" bezeichneten Knoten zu gehen. (Die Teil-Wahrscheinlichkeiten aller Zweige nach einem Knoten addieren sich zu 100 %.)

1 P $$\Rightarrow \quad P_f = \frac{6}{110}\cdot \overset{TR}{\approx} 5.45\%\,.$$

(g.) Hier spielt der dritte Versuch keine Rolle mehr, also genügt die Betrachtung bis zum zweiten Knoten (siehe die beiden Markierungen „g“):

$$\Rightarrow \quad P_g = \frac{6}{110} \cdot \frac{5}{109} + \frac{104}{110} \cdot \frac{6}{109} = \frac{6}{110} \overset{TR}{\approx} 5.45\%$$ 1 P

(h.) Dieses Mal werden 4 Pfade addiert:

$$P_h = \frac{6}{110} \cdot \frac{5}{109} \cdot \frac{4}{108} + \frac{6}{110} \cdot \frac{104}{109} \cdot \frac{5}{108} + \frac{104}{110} \cdot \frac{6}{109} \cdot \frac{5}{108} + \frac{104}{110} \cdot \frac{103}{109} \cdot \frac{6}{108} = \frac{6}{110} \overset{TR}{\approx} 5.45\%$$ 1 P

Kommentar: Wie man durch Vergleich von $P_f$, $P_g$ und $P_h$ sieht, beeinflussen sich die einzelnen Versuche nicht gegenseitig.

(i.) Hier sind die beiden Pfade von Aufgabenteil (g.) zu unterscheiden, und zwar als bedingte Wahrscheinlichkeiten.

Voraussetzung für den einen Teil des Vergleichs ist, dass im ersten Versuch ein Joker gezogen wurde. Danach ist die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Versuch noch einen Joker zu ziehen $P_{im} = \frac{5}{109} \cdot \overset{TR}{\approx} 4.587\%$. 1 P

Im anderen Teil des Vergleichs ist die Voraussetzung, dass im ersten Versuch kein Joker gezogen wurde. Unter dieser Voraussetzung ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, im zweiten Versuch noch einen Joker zu ziehen $P_{io} = \frac{6}{109} \cdot \overset{TR}{\approx} 5.505\%$. 1 P

Vergleicht man die Aufgabenteile (f.), (g.) und (h.) mit dem Aufgabenteil (i.), so sieht man den Unterschied zwischen bedingter Wahrscheinlichkeit (bei i.) und unbedingter Wahrscheinlichkeit (bei f., g. und h.).

## Aufgabe 10.10 Textbsp. zum konsequenten logischen Denken

| | | |
|---|---|---|
| | Nur zu Übung → <br> Diese Aufgabe ist nicht für eine Klausur geeignet. | Punkte |

In einer Schachtel voller Holzkugeln (zu je 100 Gramm) ist eine Holzkugel mit einem Stahlkern versteckt (mit 110 Gramm). Daneben steht eine Balkenwaage (siehe Bild 10-10), die einen Gewichtsvergleich beliebig vieler Kugel erlaubt. Wie groß kann die Anzahl der Kugeln in der Schachtel maximal sein, wenn Sie durch vier Wägungen immer eindeutig (mit 100%iger Sicherheit) in der Lage sein sollen, die schwerere Kugel ausfindig zu machen.

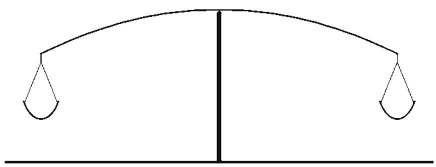


**Bild 10-10**
Balkenwaage zum Gewichtsvergleich.

## Lösung zu 10.10

Antwort:

Aus 81 Kugeln kann mit 4 Wägungen eindeutig die schwerere herausgefunden werden.

Begründung: Siehe Tabelle 1-10: Mit dem dort gezeigten Schema geht's. Sinkt die linke Schale, so ist die schwerere Kugel dort. Gleiches gilt für die rechte Schale. Bleiben beide Schalen im Gleichgewicht, so liegt die schwerere Kugel daneben.

**Tabelle 10.10** System für die Wägungen zum Aufspüren einer schwereren Kugel unter 81 Kugeln

| Wägung | Inhalt der linken Schale | Inhalt der rechten Schale | daneben gelegt |
|---|---|---|---|
| erste | 27 | 27 | 27 |
| zweite | 9 | 9 | 9 |
| dritte | 3 | 3 | 3 |
| vierte | 1 | 1 | 1 |

## Aufgabe 10.11 Diskrete Verteilung: Erwartungswert und Varianz

| | | |
|---|---|---|
| (a,b,c.) | 15 min | Punkte komplett 8 P |

In Tabelle 10.11 ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer diskreten Zufallsvariablen gegeben.

(a.) Zeichnen Sie die zugehörige Massefunktion und die Verteilungsfunktion.

(b.) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen.

(c.) Wie groß ist die Varianz und die Standardabweichung dieser Verteilung?

**Tabelle 10.11** Beispiel für die Verteilungstabelle einer diskreten Zufallsvariablen

| Zufallsvariable $x_i$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wahrscheinlichkeit $p(x_i)$ | 0.03 | 0.07 | 0.15 | 0.25 | 0.18 | 0.12 | 0.09 | 0.07 | $p(x_5)$ |

## Lösung zu 10.11

Vorarbeit: Um die Massefunktion und die Verteilungsfunktion zeichnen zu können, bestimmen wir mit Hilfe der Normierungsbedingung $p(x_5)$. Die Normierung lautet: $\sum_i p(x_i) = 1$

1 P In unserem Beispiel läuft $i$ von -3 …+5. $\Rightarrow \sum_{i=-3}^{5} p(x_i) = 100\% \Rightarrow p(x_5) = 100\% - \sum_{i=-3}^{4} p(x_i) = 0.04$

Damit lassen sich die Massefunktion und die Verteilungsfunktion der gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung gemäß Bild 10-11 darstellen.

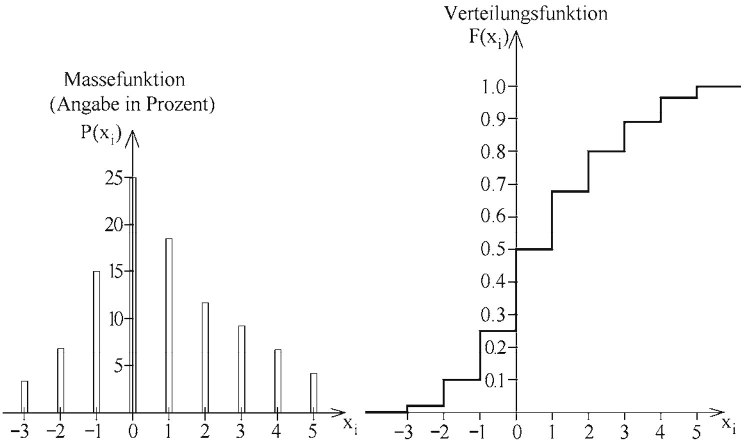



**Bild 10-11** 2+2 P
Massefunktion und Verteilungsfunktion der in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung

(b.) Der Erwartungswert ist definiert als $\mu = \sum_i x_i \cdot P(x_i)$, was in unserem Beispiel zu folgenden Werten führt:

$$\mu = \sum_{i=-3}^{5} x_i \cdot P(x_i) = -3 \cdot 0.03 - 2 \cdot 0.07 - 1 \cdot 0.15 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.18 + 2 \cdot 0.12 + 3 \cdot 0.09 + 4 \cdot 0.07 + 5 \cdot 0.04 = 0.79$$ 1 P

**Anmerkung:**

Man soll sich nicht dadurch irritieren lassen, dass der Erwartungswert kein Element des Ereignisraumes ist, d.h., dass $x_i$ nie exakt den Erwartungswert $\mu$ annehmen kann. So etwas kann durchaus vorkommen.

(c.) Die Varianz ist definiert als $\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 \cdot P(x_i)$. Für unser Beispiel bedeutet dies:

$$\sigma^2 = (-3 - 0.79)^2 \cdot 0.03 + (-2 - 0.79)^2 \cdot 0.07 + (-1 - 0.79)^2 \cdot 0.15 + (0 - 0.79)^2 \cdot 0.25 + (+1 - 0.79)^2 \cdot 0.18$$ 2 P

$$+ (+2 - 0.79)^2 \cdot 0.12 + (+3 - 0.79) \cdot 0.09 + (+4 - 0.79)^2 \cdot 0.07 + (+5 - 0.79)^2 \cdot 0.04 = 3.6659 = \text{Varianz}$$

**Arbeitshinweis:**

Wegen $(x_i - \mu)^2 = (\mu - x_i)^2$ ist die Reihenfolge der Subtraktion in der Klammer egal. Aufgrund des Quadrats ist nur der Abstand von $x_i$ zu $\mu$ wichtig, nicht aber das Vorzeichen.

Die Standardabweichung ist die Wurzel aus der Varianz: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{3.6659} \overset{TR}{\approx} 1.915$

## Aufgabe 10.12 Kontinuierliche Verteilung: Dichtefunktion, Verteilungsfunktion

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (i.) | 30 min | (i.) | | Punkte<br>(i.) 17 P |
| | (ii.) | 50 min | (ii.) | | (ii.) 29 P |

Wir üben den Umgang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit einer stetigen Zufallsvariablen $x$.
Zwei Verteilungsfunktionen seien gegeben, und zwar

(i.) die Dichtefunktion $f_i(x)$ nach Bild 10-12a und

(ii.) die Dichtefunktion $f_{ii}(x)$ nach Bild 10-12b

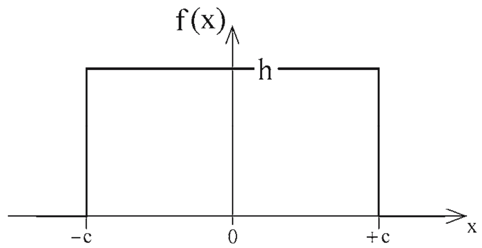



**Bild 10-12a**
Graphische Darstellung der Dichtefunktion $f_i(x)$
zu Aufgabe 10.12 (i.)

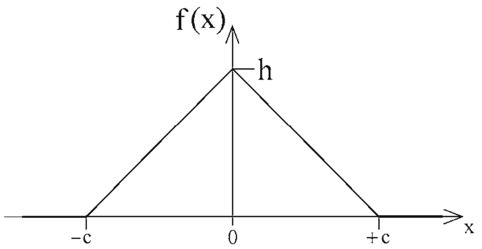



**Bild 10-12b**
Graphische Darstellung der Dichtefunktion $f_{ii}(x)$
zu Aufgabe 10.12 (ii.)

Führen Sie für beide der Verteilungsfunktionen die folgenden Berechnungen aus:

a.) Berechnen Sie aus der Normierungsbedingung die Größe $h$.
b.) Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion und stellen Sie diese graphisch dar.
c.) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu$ der Verteilung.
d.) Bestimmen Sie die Varianz $\sigma^2$ und die Standardabweichung $\sigma$ dieser Verteilung.
e.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x$ außerhalb des $1\sigma$-Konfidenzintervalls liegt?
f.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $x$ innerhalb des $3\sigma$-Konfidenzintervalls liegt?

Die Musterlösungen sind zuerst komplett für den Teil (i.) ausgearbeitet und danach für den Teil (ii.), damit diejenigen Leser, die Tipps brauchen, erst einen der Lösungswege durchgehen können und danach den anderen Aufgabenteil selbst ausprobieren können.

## Lösung zu 10.12 (i)

Als Vorarbeit wollen wir die Dichtefunktion in einen mathematischen Ausdruck bringen, der uns dann für alle weiteren Berechnungen zur Verfügung stehen wird. Da die Funktion abschnittweise sehr einfach gestaltet ist, ist eine einfache Fallunterscheidung die bequemste Art, die Funktion anzugeben:

$$f_i(x) = \begin{cases} h & \text{für } -c \le x \le +c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ 1 P

Damit wenden wir uns nun dem Lösen der einzelnen Aufgabenteile zu.

Teil a:
Allgemein lautet die Normierungsbedingung einer Dichtefunktion mit einer kontinuierlichen Zufallsvariablen: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Da nur die nicht verschwindenden Abschnitte der Funktion Beiträge zum Integral liefern, können wir das Integral wie folgt ansetzen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-c}^{+c} f(x)dx = \int_{-c}^{+c} h\,dx = \Big[h \cdot x\Big]_{-c}^{+c} = hc - (-hc) = 2hc = 1 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{1}{2c}$$ 2 P

Teil b:
Die Verteilungsfunktion erhält man durch Integration über die Dichtefunktion, nämlich

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)d\xi$$

**Anmerkung:** Um Verwechslungen zwischen der Integrationsvariablen und den Integralgrenzen zu vermeiden, wurde als Integrationsvariable ein $\xi$ eingeführt.

Die bei der Angabe der Dichtefunktion verwendete Fallunterscheidung führt nun zur Notwendigkeit einer Fallunterscheidung bei der Integration, und zwar entsprechend den folgenden drei Fällen:
Fall 1. $x \le -c$
Fall 2. $-c \le x \le +c$
Fall 3. $+c \le x$ 1 P

Hinweis: Man störe sich nicht daran, dass die Fallgrenzen jeweils doppelt auftreten. Dies ist zulässig, weil die Verteilungsfunktion stetig sein muss und daher die Werte an jeder einzelnen Fallgrenze für beide Seiten der Grenze identisch sein müssen.

zu Fall 1: In diesem Bereich ist $f_i(x) = 0$, sodass das Integral trivial wird:

$$F_{\text{Fall 1}}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot d\xi = 0$$

zu Fall 2: Beiträge zum Integral kommen nur für $x \geq -c$ zustande, d.h.

$$F_{\text{Fall 2}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_i(\xi)d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{-c} f_i(\xi)d\xi}_{=0} + \int_{-c}^{x} f_i(\xi)d\xi = \int_{-c}^{x} h\,d\xi = \Big[h\xi\Big]_{-c}^{x} = hx + hc = \underbrace{h\cdot(x+c) = \frac{1}{2c}\cdot(x+c)}_{h \text{ aus Aufgabenteil a. eingesetzt.}}$$

3 P zu Fall 3: In diesem Bereich ist die Dichtefunktion Null, sodass das Integral über die Dichtefunktion keine neuen Beiträge liefert. In Formelschreibweise drückt man diesen Sachverhalt wie folgt aus:

$$F_{\text{Fall 3}}(x) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+c} f_i(\xi)d\xi}_{=1} + \underbrace{\int_{+c}^{+\infty} f_i(\xi)d\xi}_{=0} = 1$$

Durch Zusammenfassen der drei Teile der Verteilungsfunktion ( $F_1(x)...F_3(x)$ ) erhält man:

$$F_i(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq -c \\ \dfrac{x+c}{2c} & \text{für } -c \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{für } +c \leq x \end{cases}$$

Die graphische Darstellung gemäß Bild 10-12c wird aus den entsprechenden Abschnitten der Verteilungsfunktion zusammengesetzt. Sie bestätigt deren Stetigkeit.

2 P

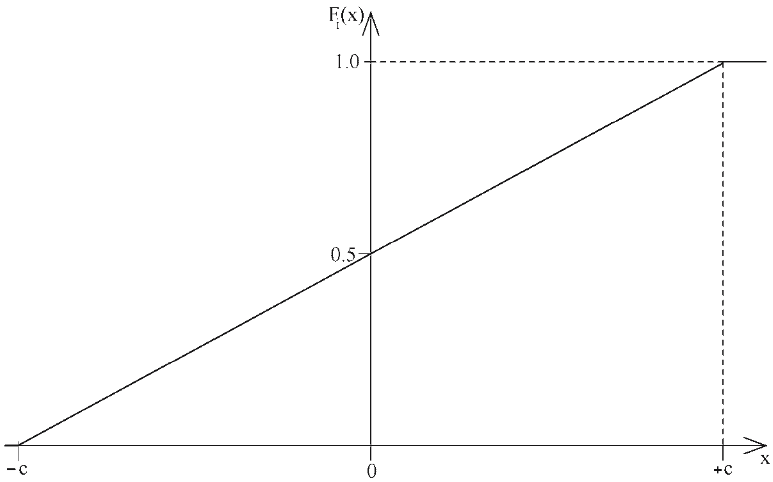



**Bild 10-12c**
Graphische Darstellung der Verteilungsfunktion zu Aufgabe 10.12.(i.)

<u>Teil c:</u>

Nach Definition wird der Erwartungswert berechnet als $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$

Berücksichtigen wir wieder, dass die Dichtefunktion für $|x| > c$ verschwindet, und setzen wir weiterhin deren Werte in den nichtverschwindenden Abschnitten ein, so erhalten wir:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_i(x)dx = \int_{-c}^{+c} x \cdot h\ dx = \left[\frac{h}{2}x^2\right]_{-c}^{+c} = \left(\frac{h \cdot c^2}{2} - \frac{h \cdot (-c)^2}{2}\right) = \left(\frac{h}{2}c^2 - \frac{h}{2}c^2\right) = 0$$ 2 P

Anmerkung:
Die Tatsache, dass der Erwartungswert Null ist, überrascht uns nicht, denn die Dichtefunktion ist symmetrisch zur Ordinate.

Teil d:

Die Varianz wird nach Definition berechnet als $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$

Unter Berücksichtigung der nichtverschwindenden Abschnitte folgt wegen $\mu = 0$:

$$\sigma^2 = \int_{-c}^{+c} x^2 \cdot f_i(x)dx = \int_{-c}^{+c} x^2 \cdot h\ dx = \left[\frac{h}{3}x^3\right]_{-c}^{+c} = \left(\frac{h}{3} \cdot c^3 - \frac{h}{3} \cdot (-c)^3\right) = \underbrace{\frac{2}{3}h \cdot c^3 = \frac{2c^3}{3 \cdot 2c}}_{wegen\ h=\frac{1}{2c}} = \frac{1}{3}c^2 \text{ (Varianz)}$$

Die zugehörige Standardabweichung lautet $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\ c$ 2 P

Teil e:
Gesucht ist das Komplement zur Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x$ innerhalb des $1\sigma$-Vertrauensintervalls liegt. Letztere berechnen wir wie folgt

$$P_{in,1\sigma} = \int_{-\sigma}^{+\sigma} f_i(x)dx = \int_{-\sigma}^{+\sigma} h\ dx = \left[hx\right]_{-\sigma}^{+\sigma} = h \cdot \sigma - h \cdot (-\sigma) = 2h\sigma$$

Begründung: Im gesamten Bereich für $x = -\sigma ... +\sigma$ ist $f_i(x) = h$, deshalb kann das Integral für $P_{in,1\sigma}$ so einfach angesetzt werden.

Einsetzen der bekannten Größen $h = \frac{1}{2c}$ und $\sigma = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot c$ liefert $P_{in,1\sigma} = 2 \cdot \frac{1}{2c} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot c = \sqrt{\frac{1}{3}}$.
2 P

Dieses $P_{in,1\sigma}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x$ innerhalb des $1\sigma$-Intervalls liegt. Ihr Komplement ist die gefragte Größe, die wir $P_{aus,1\sigma}$ nennen wollen:

$$P_{aus,1\sigma} = 1 - \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) \overset{TR}{\approx} 42.265\%$$

Teil f:
Die Wahrscheinlichkeit, das $x$ innerhalb des $3\sigma$-Konfidenzintervalls zu finden, berechnet sich im Prinzip gemäß $P_{in,3\sigma} = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f_i(x)dx$, wobei $3\sigma = 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot c = \sqrt{3} \cdot c$ ist.

Wollte man diese Integration über die Dichtefunktion explizit ausführen, so müsste man die Fallunterscheidung bei der Angabe der Dichtefunktion berücksichtigen und schreiben

2 P $$P_{in,3\sigma} = \int_{-3\sigma}^{-c} 0\,dx + \int_{-c}^{+c} h\,dx + \int_{+c}^{+3\sigma} 0\,dx = \Big[hx\Big]_{-c}^{+c} = hc - (-hc) = \underbrace{2hc = 2\cdot\frac{1}{2c}\cdot c}_{h \text{ eingesetzt nach Aufgabenteil (a.)}} = 1 = 100\%$$

Als bequemer erweist sich aber der alternative Rechenweg über die Verteilungsfunktion $F_i(x)$, in der diese Fallunterscheidung zusammen mit der Integration bereits berücksichtigt ist:

$$P_{in,3\sigma} = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f_i(x)dx = F(+3\sigma) - F(-3\sigma) = 1 - 0 = 100\%$$

Das Ergebnis überrascht uns nicht, da die Dichtefunktion bei $x = 3\sigma$ und außerhalb verschwindet.

## Lösung zu 10.12 (ii)

Die Vorarbeit ist wieder das Aufstellen eines mathematischen Ausdrucks für die Dichtefunktion.
Da alle nicht verschwindenden Anteile der Dichtefunktion Geradenabschnitte sind, brauchen wir nur deren Geradengleichungen aufzustellen. Beide Geradenstücke haben die Achsenabschnitte $+h$. Die Steigungen sind $\frac{\Delta y}{\Delta x} = +\frac{h}{c}$ für die Gerade im Intervall $x \in [-c;0]$ und $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{h}{c}$ für die Gerade im Intervall $x \in [0;+c]$. Daraus ergibt sich der folgende Ausdruck:

3 P $$f_{ii}(x) = \begin{cases} h + \frac{h}{c}\cdot x & \text{für } -c \le x \le 0 \\ h - \frac{h}{c}\cdot x & \text{für } 0 \le x \le +c\,. \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgrund des unterschiedlichen Aussehens der Ausdrücke für die beiden Geradenabschnitte der Dichtefunktion ist die Fallunterscheidung die bequemste Art der Darstellung.
Damit wenden wir uns nun dem Lösen der einzelnen Aufgabenteile zu.

Teil a:

In die Normierungsbedingung der Dichtefunktion $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ setzen wir alle nicht verschwindenden Abschnitte von $f_{ii}(x)$ ein und untergliedern das Integral wie folgt:

2 P $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{ii}(x)\,dx = \int_{-c}^{+c} f_{ii}(x)dx = \int_{-c}^{0}\left(h + \frac{h}{c}\cdot x\right)dx + \int_{0}^{+c}\left(h - \frac{h}{c}\cdot x\right)dx = \left[hx + \frac{h}{2c}x^2\right]_{-c}^{0} + \left[hx - \frac{h}{2c}x^2\right]_{0}^{+c}$$

$$= \left(0 - h\cdot(-c) - \frac{h}{2c}(-c)^2\right) + \left(hc - \frac{h}{2c}c^2 - 0\right) = hc - \tfrac{1}{2}hc + hc - \tfrac{1}{2}hc = hc = 1 \quad\Rightarrow\quad h = \frac{1}{c}$$

Teil b:
Die Verteilungsfunktion erhält man wieder durch Integration über die Dichtefunktion, nämlich $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi) d\xi$

Die bei der Angabe der Dichtefunktion verwendete Fallunterscheidung führt nun zur Notwendigkeit einer Fallunterscheidung bei der Integration entsprechend den folgenden vier Fällen:

1. $x \le -c$
2. $-c \le x \le 0$
3. $0 \le x \le +c$
4. $+c \le x$ 1 P

Auch hier ist das doppelte Auftreten der Fallgrenzen wegen der Stetigkeit der Verteilungsfunktion zulässig, weil die Werte an jeder einzelnen Fallgrenze für beide Seiten der Grenze identisch sein müssen.

zu Fall 1: In diesem Bereich ist $f_{ii}(x) = 0$, sodass das Integral trivial wird:

1 P

$$F_{\text{Fall1}}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot d\xi = 0$$

zu Fall 2: Beiträge zum Integral kommen nur für $x \ge -c$ zustande, d.h.

$$F_{\text{Fall2}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{ii}(\xi) d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{-c} f_{ii}(\xi) d\xi}_{=0} + \int_{-c}^{x} f_{ii}(\xi) d\xi = \int_{-c}^{x} \left( h + \frac{h}{c} \cdot \xi \right) d\xi = \left[ h\xi + \frac{h}{2c} \cdot \xi^2 \right]_{-c}^{x}$$ 2 P

$$= hx + \frac{hx^2}{2c} - h \cdot (-c) - \frac{h}{2c} \cdot (-c)^2 = \tfrac{1}{2} hc + hx + \frac{h}{2c} x^2$$

zu Fall 3: Wieder können wir das Integral unterteilen, wobei wir das rechte Ende von Fall 2 (also den Punkt bei $x = 0$) bereits verwenden können. Dieses lautet

$F_{\text{Fall2}}(0) = \tfrac{1}{2} hc + h \cdot 0 + \frac{h}{2c} \cdot 0^2 = \tfrac{1}{2} hc = \tfrac{1}{2}$, wobei zuletzt $h = \tfrac{1}{c}$ eingesetzt wurde. Damit ergibt sich für Fall 3:

2 P

$$F_{\text{Fall3}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{ii}(\xi) d\xi = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} f_{ii}(\xi) d\xi}_{=\frac{1}{2}} + \int_{0}^{x} f_{ii}(\xi) d\xi = \frac{1}{2} + \int_{0}^{x} \left( h - \frac{h}{c} \xi \right) d\xi = \frac{1}{2} + \left[ h\xi - \frac{h}{2c} \xi^2 \right]_{0}^{x} = \frac{1}{2} + hx - \frac{h}{2c} x^2$$

zu Fall 4: Da die Dichtefunktion für $x > +c$ keine Beiträge mehr zum Integral der Verteilungsfunktion liefert, lässt sich Fall 4 auf die rechte Grenze des Falls 3 zurückführen. In diesem Fall erhält man also

2 P

$$F_{\text{Fall4}}(x) = F(c) + \underbrace{\int_{c}^{x} f_{ii}(x) dx}_{=0} = \frac{1}{2} + hc - \frac{h}{2c} c^2 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$$

Durch Zusammenfassen der vier Teile der Verteilungsfunktion ( $F_{\text{Fall1}} \dots F_{\text{Fall4}}$ ) erhält man:

2 P

$$F_{ii}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le -c \\ \frac{1}{2}hc + hx + \frac{h}{2c}x^2 & \text{für } -c \le x \le 0 \\ \frac{1}{2} + hx - \frac{h}{2c}x^2 & \text{für } 0 \le x \le +c \\ 1 & \text{für } +c \le x \end{cases} \quad \text{mit } h = \frac{1}{c} \;\Rightarrow\; F_{ii}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le -c \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} & \text{für } -c \le x \le 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} & \text{für } 0 \le x \le +c \\ 1 & \text{für } +c \le x \end{cases}$$

Die graphische Darstellung gemäß Bild 12-12d wird aus den entsprechenden Abschnitten der Verteilungsfunktion zusammengesetzt. Sie bestätigt deren Stetigkeit.

2 P

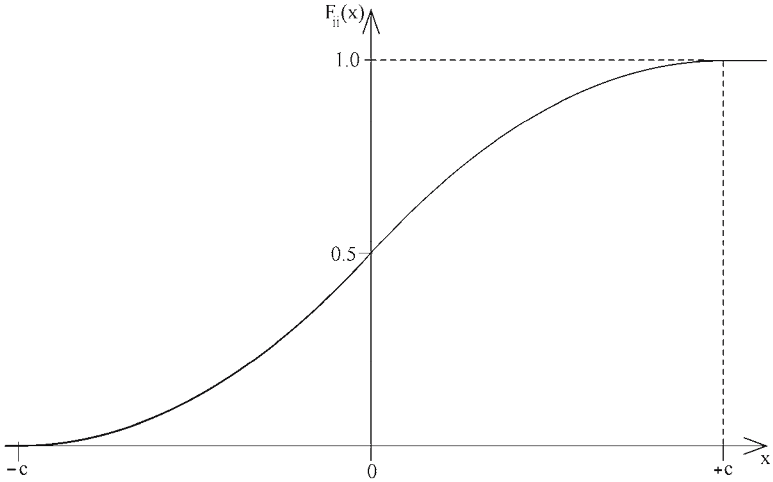



**Bild 10-12d**
Graphische Darstellung der Verteilungsfunktion zu Aufgabe 10-12, (ii.)

Teil c:

Nach Definition wird der Erwartungswert berechnet als $\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$

Berücksichtigen wir wieder, dass die Dichtefunktion für $|x| > c$ verschwindet, und setzen wir weiterhin deren Werte in den nichtverschwindenden Abschnitten ein, so erhalten wir:

3 P

$$\mu = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{ii}(x)dx = \int\limits_{-c}^{+0} x \cdot \left( h + \frac{h}{c}x \right) dx + \int\limits_{0}^{+c} x \cdot \left( h - \frac{h}{c}x \right) dx = \int\limits_{-c}^{0} \left( hx + \frac{h}{c}x^2 \right) dx + \int\limits_{0}^{+c} \left( hx - \frac{h}{c}x^2 \right) dx$$

$$= \left[ \frac{h}{2}x^2 + \frac{h}{3c}x^3 \right]_{-c}^{0} + \left[ \frac{h}{2}x^2 - \frac{h}{3c}x^3 \right]_{0}^{+c} = \left( 0 - \frac{h}{2} \cdot (-c)^2 - \frac{h}{3c} \cdot (-c)^3 \right) + \left( \frac{h}{2}c^2 - \frac{h}{3c}c^3 - 0 \right) = 0$$

Anmerkung: Auch bei dieser Verteilung ist der Erwartungswert Null, denn die Dichtefunktion ist symmetrisch zur Ordinate.

Teil d:

Die Varianz wird nach Definition berechnet als $\sigma^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \cdot f(x)dx$

Unter Berücksichtigung der nichtverschwindenden Abschnitte folgt wegen $\mu = 0$

$$\sigma^2 = \int_{-c}^{+c} x^2 \cdot f_{ii}(x)dx = \int_{-c}^{0} x^2 \cdot \left(h + \frac{h}{c}\cdot x\right)dx + \int_{0}^{+c} x^2 \cdot \left(h - \frac{h}{c}\cdot x\right)dx$$

$$= \int_{-c}^{0}\left(hx^2 + \frac{h}{c}\cdot x^3\right)dx + \int_{0}^{+c}\left(hx^2 - \frac{h}{c}\cdot x^3\right)dx = \left[\frac{h}{3}x^3 + \frac{h}{4c}x^4\right]_{-c}^{0} + \left[\frac{h}{3}x^3 - \frac{h}{4c}x^4\right]_{0}^{+c}$$

$$= \left(0 - \frac{h}{3}(-c)^3 - \frac{h}{4c}(-c)^4\right) + \left(\frac{h}{3}c^3 - \frac{h}{4c}c^4 - 0\right) = \frac{h}{3}c^3 - \frac{h}{4}c^3 + \frac{h}{3}c^3 - \frac{h}{4}c^3 = \frac{1}{6}hc^3 = \frac{1}{6}c^2$$

Die Varianz dieser Verteilung lautet $\sigma^2 = \frac{1}{6}c^2$, die Standardabweichung dazu ist $\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}}\,c$ . 3 P

Teil e:

Gesucht ist das Komplement zur Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x$ innerhalb des $1\sigma$-Vertrauensintervalls liegt. Letztere berechnen wir gemäß

$$P_{in,1\sigma} = \int_{-\sigma}^{+\sigma} f(x)dx = \int_{-\sigma}^{0}\left(h + \frac{h}{c}x\right)dx + \int_{0}^{+\sigma}\left(h - \frac{h}{c}x\right)dx = \left[hx + \frac{h}{2c}x^2\right]_{-\sigma}^{0} + \left[hx - \frac{h}{2c}x^2\right]_{0}^{+\sigma}$$

$$= \left(0 - h\cdot(-\sigma) - \frac{h}{2c}(-\sigma)^2\right) + \left(h\cdot\sigma - \frac{h}{2c}\sigma^2 - 0\right) = 2h\sigma - 2\frac{h}{2c}\sigma^2$$ 2 P

Durch Einsetzen der bekannten Größen $h = \frac{1}{c}$ und $\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}}\cdot c$ erhalten wir

$$P_{in,1\sigma} = 2\cdot\frac{1}{c}\cdot\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot c - \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{c}\cdot\frac{1}{6}c^2 = \sqrt{\frac{4}{6}} - \frac{1}{6}$$

Dieses $P_{in,1\sigma}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $x$ innerhalb des $1\sigma$-Intervalls liegt. Ihr Komplement ist die gefragte Größe, nämlich

$$P_{aus,1\sigma} = 1 - P_{in,1\sigma} = 1 - \left(\sqrt{\frac{4}{6}} - \frac{1}{6}\right) \overset{TR}{\approx} 35.017\%$$ 2 P

Teil f:

Die Wahrscheinlichkeit, das $x$ innerhalb des $3\sigma$-Konfidenzintervalls zu finden, berechnet sich gemäß $P_{in,3\sigma} = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(x)dx$

Aufgrund des Ergebnisses von Aufgabenteil (d.) können wir die Integrationsgrenzen in Einheiten von „$c$" ausdrücken. Aus $\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}}\cdot c$ folgt nämlich $3\sigma = \sqrt{\frac{9}{6}}\cdot c = \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot c$

Damit ist $3\sigma$ größer als $c$. Da die Verteilungsfunktion aber nur für $x \in [-c; +c]$ Beiträge zur Integration liefert, lässt sich schreiben

$$P_{in,3\sigma} = \int_{-3\sigma}^{+3\sigma} f(x)dx = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}}c}^{+\sqrt{\frac{3}{2}}c} f_{ii}(x)dx = F\left(+\sqrt{\tfrac{3}{2}}c\right) - F\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}c\right) = 1 - 0 = 100\%$$ 2 P

## Aufgabe 10.13 Binomialverteilung

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 4 min | (a,b.) | | Punkte | |
| | (c.) | 15 min | (c.) | | (a,b.) je 2 P | (c) 8 P |

Sie werfen 20 Münzen willkürlich auf Ihren Schreibtisch, sodass einige „Kopf“ zeigen, andere „Zahl“. Dieses Zufallsexperiment werde durch die Binomialverteilung beschrieben.

(a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 7 Münzen „Kopf“ zeigen?

(b.) Wiederholen Sie das Zufallsexperiment mit 20 Würfeln. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 7 Würfel die Zahl „Drei“ zeigen?

(c.) Zeichnen Sie die Massefunktion der Binomialverteilung für das Zufallsexperiment mit den 20 Münzen.

## Lösung zu 10.13

(a.) Die Massefunktion der Binomialverteilung lautet $f_{(k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{p^k}{q^{k-n}}$

Darin ist $n =$ Gesamtanzahl aller Ereignisse (20 Münzwürfe)

$k =$ Anzahl der Ereignisse mit gefragtem Ausgang (7 mal „Kopf“).

$p =$ Einzel-Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des gefragten Ereignisses

( $p = 0.5$ )

$q = 1 - p =$ Wahrscheinlichkeit für das Nicht-Eintreten des gefragten Ereignisses

2 P

$$\Rightarrow \quad f_{(k=7)} = \frac{20!}{7!(20-7)!} \cdot \frac{(0.5)^7}{(0.5)^{7-20}} \overset{TR}{\approx} 7.393\%$$

(b.) Dieses Zufallsexperiment unterscheidet sich von demjenigen mit Münzen durch die Werte der Einzelwahrscheinlichkeiten $p$ und $q$ :

$p = \frac{1}{6}$ Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer „Drei“

$q = \frac{5}{6}$ Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer anderen Zahl als „Drei“

2 P

Dadurch wird $f_{(k=7)} = \frac{20!}{7!(20-7)!} \cdot \frac{\left(1/6\right)^7}{\left(5/6\right)^{7-20}} \overset{TR}{\approx} 2.588\%$ für das Würfeln von 7 Dreiern.

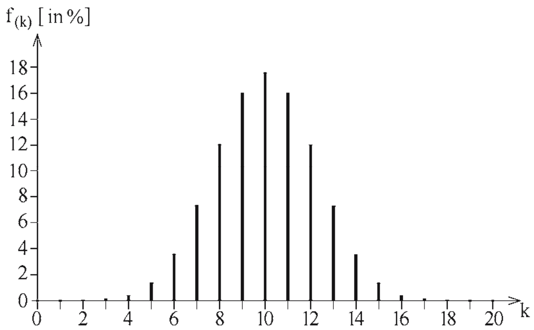
(c.) Die Massefunktion für das Münzen-Werfen erhalten wir, indem wir $k$ von 0 bis 20 laufen lassen und $f_{(k)}$ auswerten. Dabei ist $f_{(k)} = \frac{20!}{7!(20-k)!} \cdot \frac{(0.5)^k}{(0.5)^{k-20}}$ .

Der Übersicht halber sind die Ergebnisse in einer Wertetabelle dargestellt – siehe Tabelle 10.13. Die graphische Auftragung ist in Bild 10-13 zu finden.

**Tabelle 10.13** Wertetabelle für die Massefunktion einer Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = q = 0.5$ Aus Gründen der Symmetrie gilt jeder Eintrag von $f_{(k)}$ für zwei verschiedene Werte von $k$ ; deshalb stehen in der Zeile für $k$ immer zwei Werte.

| $k$ | 0, 20 | 1, 19 | 2, 18 | 3, 17 | 4, 16 | 5, 15 | 6, 14 | 7, 13 | 8, 12 | 9, 11 | 10, 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{(k)}$ | $9.5 \cdot 10^{-7}$ | 0.002 % | 0.018 % | 0.1087 % | 0.4621 % | 1.479 % | 3.696 % | 7.393 % | 12.01 % | 16.02 % | 17.62 % |

5 P




3 P

**Bild 10-13**
Graphische Darstellung der Massefunktion einer Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = q = 0.5$

**Stolperfalle:**

Man darf die Massefunktion zu einer diskreten Zufallsvariablen nicht als durchgezogene Kurve zeichnen, denn das Argument ist diskret. Dies ist mit einer kontinuierlichen Kurve unverträglich.

## Aufgabe 10.14 Kontinuierliche Verteilung: Erwartungwert,Varianz

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | (a) 10 min<br>(b) 15 min | (a.)<br>(b.) | | Punkte<br>(a.) 5 P | <br>(b.) 8 P |

Gegeben ist eine Verteilung mit der Dichtefunktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}}$ .

(a.) Berechnen Sie deren Erwartungswert durch Einsetzen in die Definition des Erwartungswertes $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$ .

(b.) Berechnen Sie deren Varianz und Standardabweichung durch Einsetzen in die Definition der Varianz $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)dx$ .

Hinweis zur Normierungsbedingung: Es gilt $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

## Lösung zu 10.14

(a.) Wir setzen die Dichtefunktion in die Definition des Erwartungswertes ein und berechnen:

$$\mu = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sqrt{2} \cdot az + b\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \cdot e^{-z^2} \sqrt{2} \cdot a \; dz}_{\text{Substitution: } z := \frac{x-b}{\sqrt{2} \cdot a} \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot a} \;\Rightarrow\; dx = \sqrt{2} \cdot a \; dz \quad \text{und} \quad x = \sqrt{2} \cdot az + b}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2} \cdot az}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z^2} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{b}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-z^2} dz = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z \cdot e^{-z^2} dz}_{\substack{\text{Substitution } u := -z^2 \\ \Rightarrow \; du = -2z \cdot dz}} + \frac{b}{\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz}_{=\sqrt{\pi} \text{ (lt. Hinweis)}}$$

5 P

$$= \underbrace{\frac{\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{\dots}^{\dots} e^u \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right) du}_{\substack{\text{Grenzen werden nicht substituiert,} \\ \text{da wir später resubstituieren.}}} + b = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a \cdot \left[-\frac{1}{2} e^u\right]_{\dots}^{\dots} + b = \underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-z^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + b = b$$

Der Erwartungswert kann also einfach als $b$ in der Dichtefunktion abgelesen werden.

(b.) Ebenso berechnen wir die Varianz, indem wir entsprechend ihrer Definition integrieren:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x) dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-b)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \cdot e^{-\frac{(x-b)^2}{2a^2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi} \cdot a} \cdot e^{-\frac{z^2}{2a^2}} dz}_{\text{Substitution: } z := (x-b) \;\Rightarrow\; dz = dx}$$

Als Nebenrechnung bestimmen wir die Stammfunktion von $\int z^2 \cdot e^{-\frac{z^2}{2a^2}} dz$ . Mit partieller Integration erhalten wir:

$$(*) = \int \underbrace{z}_{u} \cdot \underbrace{z \cdot e^{-\frac{z^2}{2a^2}}}_{v'} dz = \underbrace{z}_{u} \cdot \underbrace{\int z \cdot e^{-\frac{z^2}{2a^2}} dz}_{v} - \int \left[ \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\int z \cdot e^{-\frac{z^2}{2a^2}} dz}_{v} \right] dz$$

Die etwas laxe Schreibweise dient der Kürze der Darstellung und soll, helfen den Überblick zu erhalten.

Wir substituieren $t := -\frac{z^2}{2a^2} \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dz} = -\frac{2z}{2a^2} = -\frac{z}{a^2} \;\Rightarrow\; z \cdot dz = -a^2 \cdot dt$ und erhalten 3 P

$$\Rightarrow (*) = z \cdot \int -a^2 \cdot e^t\,dt - \int\left[\int -a^2 \cdot e^t\,dt\right]dz = -a^2 \cdot z \cdot e^t + \int a^2 \cdot e^t\,dz = -a^2 \cdot z \cdot e^{\frac{-z^2}{2a^2}} + \int a^2 \cdot e^{\frac{-z^2}{2a^2}}\,dz + C_1$$

Das Ergebnis der Nebenrechnung setzen wir nun in die Hauptrechnung ein und erhalten:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} \cdot \underbrace{\left[-a^2 \cdot z \cdot e^{\frac{-z^2}{2a^2}}\right]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cdot e^{\frac{-z^2}{2a^2}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} a^2 \cdot e^{-s^2} \cdot \sqrt{2}\,a\,ds}_{\text{Substitution } s := \frac{z}{\sqrt{2}\cdot a} \;\Rightarrow\; dz = \sqrt{2}\cdot a\,ds}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,a} \cdot \sqrt{2} \cdot a^3 \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2}\,ds}_{=\sqrt{\pi}\ \text{lt. Hinweis}} = \frac{a^3}{\sqrt{\pi}\,a} \cdot \sqrt{\pi} = a^2 \quad \text{für die Varianz.}$$ 5 P

Durch Wurzelziehen sieht man die Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{a^2} = a$
Die Standardabweichung kann also einfach als $a$ in der Dichtefunktion abgelesen werden.
Aus diesem Grunde schreibt man die Dichtefunktion normalerweise direkt in der Form $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, in der die Leser hoffentlich die Gauß-Verteilung wiedererkennen.

## Aufgabe 10.15 Gauß-Verteilung, ihre Kenngrößen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | 2 min | (a.) | | Punkte: |
| (b.) | 4 min | (b.) | | (a.) 1 P (b.) 2 P |
| (c.) | 1 min | (c.) | | |
| (d.) | 6 min | (d.) | | |
| (e.) | 2 min | (e.) | | (c.) 1 P (d.) 5 P (e) 1P |

Aus einer Messung erhalten Sie die Messwerte laut Tabelle 10.15. Vorgegeben sei außerdem die Tatsache, dass die Messwerte einer Gauß-Verteilung genügen.

**Tabelle 10.15** Tabelle der Einzelmesswerte einer Messreihe aus $N = 10$ Messpunkten.

| Messung Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Messwert | 177 | 170 | 165 | 172 | 166 | 168 | 169 | 173 | 171 | 174 |

(a.) Geben Sie die bestmögliche Abschätzung für den Erwartungswert $\mu$ der Gauß-Verteilung an.

(b.) Geben Sie die bestmögliche Abschätzung für die Standardabweichung $\sigma$ der Gauß-Verteilung an.

(c.) Wenn Sie einen weiteren Messwert aufnehmen würden – mit welcher Wahrscheinlichkeit wäre dieser Wert innerhalb des Intervalls $[167;174]$ zu erwarten?

(d.) Fertigen Sie eine Handskizze der Dichtefunktion, wobei Sie das Maximum und die beiden Wendepunkte als Anhaltspunkte für den Verlauf der Kurve eintragen.

(e.) Geben Sie diejenigen Intervalle an, in denen (z.B. bei einer Vergrößerung des Stichprobenumfangs) 95.4 % bzw. 99.7 % aller Einzelmesswerte zu erwarten sind.

## Lösung zu 10.15

(a.) Die bestmögliche Abschätzung für $\mu$ ist $\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ .

1 P In unserer Aufgabe ist $\mu = \frac{1}{10}\cdot(177+170+165+\ldots+171+174) = 170.5$ .

(b.) Die bestmögliche Abschätzung für $\sigma$ folgt aus $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mu - x_i)^2$ .

In unserer Aufgabe erfolgt die Abschätzung des Parameters $\sigma$ gemäß

2 P $\sigma^2 = \frac{1}{10}\cdot\left((177-170.5)+(170-170.5)+(165-170.5)+\ldots+(171-170.5)+(174-170.5)\right) = 12.25$

$\Rightarrow \quad \sigma = 3.5$ .

**Stolperfalle:**

Auch wenn zur Auffindung der Parameter $\mu$ und $\sigma$ Formeln benutzt werden, darf man sich nicht darüber hinweg täuschen lassen, dass die Angaben für $\mu$ und $\sigma$ nur Schätzwerte sind. Was die Formeln zu leisten vermögen, ist lediglich die Angabe der bestmöglichen Abschätzung.

**Stolperfalle:**

In der Literatur (und somit auch in den Vorlesungen) findet man zweierlei verschiedene Angaben zur Varianz einer Stichprobe nebeneinander.

Die eine lautet $\sigma^2 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{i=1}^{N}(\mu - x_i)^2$ , die andere hingegen schreibt $\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\cdot\sum_{i=1}^{N}(\mu - x_i)^2$ .

Die beiden Formeln unterscheiden sich durch den Faktor $\frac{1}{N}$ bzw. $\frac{1}{N-1}$ vor der Summe.

Der Hintergrund ist folgender: Wir müssen uns darüber im klaren sein, dass ohnehin beide Formeln nur Abschätzungen für $\sigma$ sind – und nun ist es eine Frage der Sichtweise, auf welche Art man diese Abschätzung durchführt.

• Die in der vorliegenden Musterlösung angewandte Sichtweise geht auf die elementare Definition der Varianz zurück $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} p(x_i)\cdot(\mu - x_i)^2$ , wobei $p(x_i)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $x_i$ ist, und man zunächst allen Messwerten die gleiche Aussagekraft zubilligt, also $p(x_i)=\frac{1}{N}$ setzt. Diese Schätzfunktion erhält man auch durch Anwendung der sog. Maximum-Likelihood-Methode auf die Normalverteilung, weshalb die so erhaltene Schätzung für $\sigma$ als Likelihood-Schätzfunktion bezeichnet wird.

• Die Sichtweise mit dem Vorfaktor $\frac{1}{N-1}$ ist hingegen die vorsichtigere von beiden, denn das $\sigma$, welches die Streuung der Werte repräsentiert, wird hierbei größer abgeschätzt als mit dem Vorfaktor $\frac{1}{N}$. Deshalb ist der Vorfaktor $\frac{1}{N-1}$ weiter verbreitet als der Vorfaktor $\frac{1}{N}$.

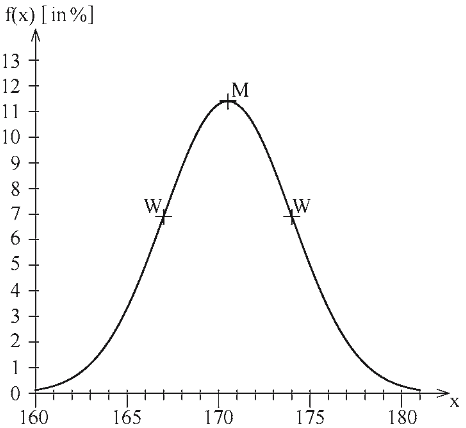
• Selbstverständlich wird den Lesern empfohlen, diejenige Sichtweise anzuwenden, die sie in ihren jeweiligen Vorlesungen kennen gelernt haben.

(c.) Wegen $\mu-\sigma=170.5-3.5=167$ und $\mu+\sigma=170.5+3.5=174$ ist das Intervall $[167;174]$ ein $1\sigma$ – Konfidenzintervall. Bei der Gauß-Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis innerhalb dieses $1\sigma$ – Konfidenzintervalls eintritt 68.3 %. 1 P

(d.) Die gefragte Skizze sieht man in Bild 10-15. Eine Kurvendiskussion zum Aufsuchen der in der Aufgabenstellung genannten charakteristischen Kurvenpunkte ist nicht nötig, da diese bei der Gauß-Glocke bekannt sind.

Das Maximum liegt bei $x_M=\mu \;\Rightarrow\; f(x_M)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(\mu-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot 3.5}\overset{TR}{\approx}11.4\%$ 1 P

Die Wendepunkte → $x_W=\mu\pm\sigma \;\Rightarrow\; f(x_W)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(\mu\pm\sigma-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\frac{f(x_M)}{\sqrt{e}}\overset{TR}{\approx}6.9\%$ 1 P




3 P

**Bild 10-15**
Skizze der Dichtefunktion einer Gaußverteilung mit $\mu=170.5$ und $\sigma=3.5$
Die markierten Punkte sind:
M = Maximum und W = Wendepunkte

(e.) 95.4 % aller Einzelereignisse liegen im $2\sigma$ – Vertrauensintervall, also innerhalb

$$[\mu-2\sigma;\mu+2\sigma]=[170.5-7;170.5+7]=[163.5;177.5]$$

99.7 % aller Einzelereignisse liegen im $3\sigma$ – Vertrauensintervall, also innerhalb 1 P

$$[\mu-3\sigma;\mu+3\sigma]=[170.5-10.5;170.5+10.5]=[160.0;181.0]$$

## Aufgabe 10.16 Konfidenzintervalle der Gauß-Verteilung

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 1 min<br>3 min | (a,b.) | | Punkte<br>(a.) 1 P | (b.) 2 P |
| | (c.)<br>(d.) | 4 min<br>4 min | (c,d.) | | (c.) 2 P | (d.) 2 P |
| | (e.) | 6 min | (e.) | | (e.) 3 P | |

Eine Gauß-Verteilung wird durch die beiden Parameter $\mu$ und $\sigma$ eindeutig und vollständig beschrieben. Betrachten wir nun eine solche Verteilung mit $\mu = 22.0$ und $\sigma = 3.0$.

Die Beantwortung der nachfolgenden Fragestellungen setzt das Vorhandensein einer Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung voraus, wie sie z.B. in Formelsammlungen abgedruckt sein kann. Ein für unsere Übungszwecke ausreichender kleiner Auszug aus einer solchen Tabelle findet sich in Kapitel 15 dieses Buches als Tabelle 15.1.

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung lautet

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u^*} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$$

Für die Standard-Normalverteilung ist $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ gesetzt, sowie $u = \frac{u^*-\mu}{\sigma}$.

Das Zurückgreifen auf Tabellen ist deshalb nötig, weil dieses Integral analytisch nicht lösbar ist. Treten als Argumente ($u$) Werte auf, die zwischen den in der Tabelle 15.1 aufgeführten liegen, so empfiehlt sich eine (lineare) Interpolation.

(a.) Wie viel Prozent aller Einzelereignisse $x_i$ sind kleiner oder gleich 23.8?

(b.) Wie viel Prozent aller Einzelereignisse $x_i$ sind kleiner oder gleich 21.1?

(c.) Wie viel Prozent aller Einzelereignisse $x_i$ liegen im Intervall $[19.0; 22.0]$?

(d.) Wie viel Prozent aller Einzelereignisse $x_i$ liegen im Intervall $[20.2; 24.1]$?

(e.) Wie viel Prozent aller Einzelereignisse $x_i$ liegen außerhalb des Intervalls $[20.5; 25.3]$?

## Lösung zu 10.16

**Arbeitshinweis:**

Zur Umrechnung der Standard-Normalverteilung in eine Gauß-Verteilung mit beliebigen Parametern $\mu$ und $\sigma$ muss man die in der Aufgabenstellung erwähnte Integralgrenze $u^*$ durch $u$ ausdrücken.

Allerdings sind die Tabellen zur Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung üblicherweise nur für $u \geq 0$ ausgedruckt, weil man die Werte der Verteilungsfunktion für negative Argumente $u$ aus Gründen der Symmetrie der Funktion auf die Werte der Verteilungsfunktion für positive $u$ zurückführen kann.

Die Lösungen der einzelnen Aufgaben stellen sich wie folgt dar:

(a.) $u^* = 23.8$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{u^* - \mu}{\sigma} = \frac{23.8-22.0}{3.0} = 0.6 \quad \Rightarrow \quad \Phi(0.60) = 0.72575$ 1 P

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit für $x_i \leq 23.8$ hier 72.575 %.

(b.) $u^* = 21.1$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u = \frac{u^* - \mu}{\sigma} = \frac{21.1-22.0}{3.0} = -0.3$

Für $u \leq 0$ müssen die Tabellenwerte auf $u \geq 0$ zurückgeführt werden. Es gilt $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$. Somit ist in unserem Rechenbeispiel $\Phi(-0.3) = 1 - \Phi(0.3) = 1 - 0.61791 = 0.38209 = 38.209\%$ 2 P

Mit dieser Wahrscheinlichkeit sind Messwerte $x_i$ kleiner oder gleich 21.1.

(c.) Hier müssen wir zwei Intervallgrenzen umrechnen, eine untere und eine obere:

Untere Grenze → $u_1^* = 19.0$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_1^* - \mu}{\sigma} = \frac{19.0-22.0}{3.0} = -1.0$

Obere Grenze → $u_2^* = 22.0$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_1^* - \mu}{\sigma} = \frac{22.0-22.0}{3.0} = 0.0$

Die zu berechnende Wahrscheinlichkeit ist gegeben durch das Integral

$$P = \int_{19.0}^{22.0} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \Phi(0) - \Phi(-1) = \Phi(0) - [1 - \Phi(1)]$$ 2 P

Ablesen der Werte für $\Phi$ aus der Tabelle liefert das Ergebnis:

$P = \Phi(0) - [1 - \Phi(1)] = 0.5 - [1 - 0.84135] = 0.34135 = 34.135\%$ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

(d.) Wieder müssen beide Intervallgrenzen (untere und obere) umgerechnet werden:

Untere Grenze → $u_1^* = 20.2$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_1^* - \mu}{\sigma} = \frac{20.2-22.0}{3.0} = -0.6$

Obere Grenze → $u_2^* = 24.1$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_1^* - \mu}{\sigma} = \frac{24.1-22.0}{3.0} = +0.7$

Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist dann

$$P = \int_{20.2}^{24.1} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi(+0.7) - \Phi(-0.6) = \Phi(0.7) - [1 - \Phi(0.6)]$$
$$= 0.75804 - (1 - 0.72575) = 48.379\%$$ 2 P

(e.) Einer der möglichen Rechenwege ist folgender: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Ereignisse außerhalb eines Intervalls liegen, kann man als Komplement zur Wahrscheinlichkeit für das Liegen innerhalb dieses Intervalls berechnen. Das sähe dann so aus:

Untere Grenze → $u_1^* = 20.5$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_1^* - \mu}{\sigma} = \frac{20.5-22.0}{3.0} = -0.5$

Obere Grenze → $u_2^* = 25.3$, $\mu = 22.0$, $\sigma = 3.0 \quad \Rightarrow \quad u_1 = \frac{u_1^* - \mu}{\sigma} = \frac{25.3-22.0}{3.0} = +1.1$

Damit ergibt sich für das Komplement der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$\underbrace{1-P}_{\substack{\text{Komplement}\\ \text{zu } P}} = \int_{20.5}^{25.3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx = \int_{-0.5}^{+1.1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx = \Phi(1.1)-\Phi(-0.5) = \Phi(1.1)-\left[1-\Phi(0.5)\right]$$

Auflösen nach $P$ liefert die gesuchte Wahrscheinlichkeit selbst:

$$P = 1-\left[\Phi(1.1)-\left(1-\Phi(0.5)\right)\right] = 1-\left[0.86433-\left(1-0.69146\right)\right] = 44.421\%$$

3 P Dies ist der Anteil aller Einzelereignisse, die wir außerhalb des Intervalls $[20.5;25.3]$ erwarten.

## Aufgabe 10.17 Stichprobe und Grundgesamtheit

| | | |
|---|---|---|
| komplett 8 min | | Punkte: insgesamt 5 P |
| Es wird vorausgesetzt, dass die Ergebnisse von Aufgabe 10.15 vorliegen. | | |

Betrachten Sie nochmals die Stichprobe aus Aufgabe 10.15 mit $\mu = 170.5$, $\sigma = 3.5$ und $N = 10$.

(a.) Wie groß schätzen Sie die Standardabweichung $\sigma_S$ der Einzelwerte von deren Mittelwert ab – in dem Sinne, dass 68.3 % aller Einzelereignisse im Intervall $[\mu-\sigma;\mu+\sigma]$ liegen?

(b.) Wie groß schätzen Sie die Standardabweichung $\sigma_G$ des Stichprobenmittelwertes vom Mittelwert der Grundgesamtheit ab – in dem Sinne, dass der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.3 % innerhalb des Intervalls $[\mu-\sigma_G;\mu+\sigma_G]$ liegt?

(c.) In welchem (um $\mu$ symmetrischen) Intervall liegt der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer statistischen Sicherheit von 95.4 %?

(d.) Wenn Sie zusätzlich zu der Stichprobe aus Aufgabe 10.15 noch eine zweite Stichprobe nehmen, können Sie die Aussagegenauigkeit im Bezug auf den Mittelwert der Grundgesamtheit verbessern. Angenommen, die zusätzliche Stichprobe liefert $\mu = 171.0$ und $N = 20$ - zu welchem gemeinsamen $\mu_G$ können Sie die beiden Stichproben dann zusammenfassen?

## Lösung zu 10.17

**Der Sinn der Aufgabe:**

Hier soll man darauf achten, zu unterscheiden zwischen

- statistischen Aussagen im Bezug auf die Einzelstichprobe und im Bezug auf Einzelereignisse

und

- statistischen Aussagen im Bezug auf die Grundgesamtheit, von der wir in vielen Fällen nur einen endlichen Auszug kennen.

(a.) Das in Aufgabe 10.15 berechnete $\sigma = 3.5$ beschreibt die Streuung der Einzelwerte um den Erwartungswert $\mu$, den wir als arithmetisches Mittel der Stichprobe abschätzen. Es ist also $\sigma_S = 3.5$.

Anmerkung: Bei dieser Angabe wurde die Likelihood-Schätzfunktion $\sigma_S^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mu - x_i)^2$ verwendet. Würde man diese durch die andere Schätzfunktion mit $\sigma_A^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mu - x_i)^2$ ersetzen, so erhielte man $\sigma_A^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \sigma_S^2 \Rightarrow \sigma_A = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \cdot \sigma_S$, d.h. man käme zu der etwas vorsichtigeren Schätzung von $\sigma_A = \sqrt{\frac{10}{9}} \cdot \sigma_S \overset{TR}{\approx} 3.69$.

(Man vergleiche hierzu die Erklärung „Stolperfalle“ in Aufgabe 10.15.) 1 P

(b.) Die Unsicherheit des Mittelwerts der Grundgesamtheit relativ zum Stichprobenmittelwert schätzt man ab als $\sigma_G^2 = \frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mu - x_i)^2 = \frac{(3.5)^2}{10-1} = \frac{49}{36} \Rightarrow \sigma_G = \frac{7}{6} \overset{TR}{\approx} 1.17$.

**Hier verliert eine Stolperfalle ihre Bedeutung:**

Bei der Abschätzung zur Unsicherheit des Mittelwerts der Grundgesamtheit ist es egal, auf welche der beiden Schätzfunktion $\sigma_A$ oder $\sigma_S$ der Stichprobe man sich bezieht, denn man schreibt

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mu - x_i)^2 = \frac{\sigma_S^2}{N-1} = \frac{\sigma_A^2}{N}$$

Dies führt immer zum selben Schätzwert im Bezug auf die Grundgesamtheit.

Der Mittelwert der Grundgesamtheit liegt also mit einer Wahrscheinlichkeit von 68.3 % innerhalb des Intervalls $\left[170.5 - \frac{7}{6}; 170.5 + \frac{7}{6}\right] = \left[169\frac{1}{3}; 171\frac{2}{3}\right]$. 1 P

(c.) Hier ist das $2\sigma$ – Konfidenzintervall im Bezug auf $\sigma_G$ gefragt:

$$\left[170.5 - 2 \cdot \tfrac{7}{6}; 170.5 + 2 \cdot \tfrac{7}{6}\right] = \left[168\tfrac{1}{6}; 172\tfrac{5}{6}\right]$$ 1 P

(d.) Da der Stichproben–Mittelwert wie ein arithmetisches Mittel abgeschätzt wird, können wir den gemeinsamen Mittelwert beider Stichproben aufgrund der Erwartungstreue der arithmetischen Mittelwerte berechnen (mit $N_{ges} = N_1 + N_2$):

2 P

$$\mu_G = \frac{1}{N_{ges}} \cdot \sum_{i=1}^{N_{ges}} x_i = \frac{1}{N_{ges}} \cdot (N_1 \cdot \mu_1 + N_2 \cdot \mu_2) = \frac{1}{30} \cdot (10 \cdot 170.5 + 20 \cdot 171.0) = \frac{1025}{6} = 170.8\overline{3}.$$

## Aufgabe 10.18 Spezielle Konfidenzintervalle bei Gauß

| | | | |
|---|---|---|---|
| insgesamt 6 min | | | Punkte insgesamt 4 P |

Aus einer Messung erhalten Sie die Messwerte laut Tabelle 10.18. Vorgegeben sei außerdem die Tatsache, dass die Messwerte einer Gauß-Verteilung genügen.

**Tabelle 10.18** Tabelle der Einzelmesswerte einer Messreihe aus $N = 12$ Messpunkten.

| Messung Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Messwert | 3.5 | 3.7 | 3.8 | 3.2 | 3.3 | 3.1 | 3.5 | 3.9 | 3.8 | 3.6 | 3.7 | 3.5 |

(a.) Berechnen Sie den Erwartungswert der Gauß-Verteilung und das $1\sigma$ – Intervall, in dem 68.3 % aller Einzelwerte zu erwarten sind (auch bei Vergrößerung des Stichprobenumfangs).

(b.) Berechnen Sie das $2\sigma$ – Intervall, in dem der Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 95.4 % liegt.

## Lösung zu 10.18

1 P (a.) Erwartungswert $\mu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{12} \cdot (3.5 + 3.7 + 3.8 + 3.2 + ... + 3.7 + 3.5) = 3.550$

Varianz der Einzelwerte zum Stichprobenmittelwert:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mu - x_i)^2 = \frac{1}{12} \cdot \left( (3.50 - 3.55)^2 + (3.70 - 3.55)^2 + ... + (3.50 - 3.55)^2 \right) = 0.0575$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir die Standardabweichung der Einzelwerte relativ zu deren

2 P Mittelwert: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.0575} \overset{TR}{\approx} 0.240$.

Es sind also 68.3 % aller Einzelwerte im Intervall $[3.550 - 0.240; 3.550 + 0.240] = [3.310; 3.790]$ zu erwarten.

(b.) Für die Grundgesamtheit gilt $\sigma_G{}^2 = \frac{1}{N \cdot (N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mu - x_i)^2 = \frac{\sigma^2}{N-1} \quad \Rightarrow \quad \sigma_G = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}$

1 P In unserer Aufgabe ist also $\sigma_G = \frac{\sigma}{\sqrt{N-1}} = \frac{0.240}{\sqrt{11}} \overset{TR}{\approx} 0.072$

Das gefragte $2\sigma$ – Intervall der Grundgesamtheit lautet also $[\mu - 2\sigma_G; \mu + 2\sigma_G] = [3.405; 3.695]$.

## Aufgabe 10.19 Verschiedene Mittelwerte

| | | Punkte |
|---|---|---|
| (a…d.) je 1 min | | (a…d.) je 1 P |

Gegeben sei eine Urliste aufgenommener Daten (siehe Tabelle 10.19a), aus der Sie bitte die folgenden verschiedenen Mittelwerte bestimmen.

(a.) Das arithmetische Mittel (b.) Den Median (=Zentralwert)
(c.) Den Modalwert (d.) Das geometrische Mittel

**Tabelle 10.19a** Urliste statistisch verteilter Daten, zu der verschiedene Mittelwerte gesucht sind.

| Nr. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wert | 22 | 25 | 20 | 17 | 28 | 24 | 24 | 23 | 26 | 29 | 21 | 27 | 19 | 24 | 25 | 24 |

## Lösung zu 10.19

(a.) Die Formel zur Berechnung des arithmetischen Mittels lautet $\bar{x} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} x_i$

In unserer Aufgabe ist das arithmetische Mittel

$\bar{x} = \frac{1}{16} \cdot (22+25+20+17+...+25+24) = 23.625$ . 1 P

**Stolperfalle:**

Hier handelt es sich nicht um einen Schätzwert, sondern um eine exakte Berechnung. Das arithmetische Mittel wird einfach nur berechnet, aber in dieser Berechnung steckt keine Aussage über die zugrunde liegende Zufallsverteilung der Einzelwerte.

Nebenbemerkung: Allerdings sieht die Formel zur Berechnung des arithmetischen Mittels genauso aus wie die Formel zur Abschätzung des Erwartungswertes einer diskreten Zufalls-Verteilung mit gleichwahrscheinlichen Einzelereignissen. Es ist müßig, darüber nachzudenken, ob es sich bei dieser formalen Ähnlichkeit um einen Zufall handelt oder nicht.

(b.) Zur Bestimmung des Zentralwertes wird die Liste nach der Größe der Messwerte geordnet. Der Wert in der Mitte ist der Zentralwert. Die geordnete Liste ist in Tabelle 10.19b zu sehen.

**Tabelle 10.19b** Geordnete Liste nach den statistisch verteilten Daten aus Tabelle 10.19a

| Nr. | 4 | 13 | 3 | 11 | 1 | 8 | 6 | 7 | 14 | 16 | 2 | 15 | 9 | 12 | 5 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wert | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | **24** | **24** | 24 | 25 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |

Da die geordnete Liste eine gerade Anzahl von Werten enthält, stehen in ihrem Zentrum zwei Werte (fett gedruckt), deren arithmetisches Mittel den Zentralwert bildet: $\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot (24+24) = 24$ 1 P

1 P (c.) Der Modalwert, auch Dichtemittel genannt, ist der häufigste Wert, also derjenige, der am häufigsten auftritt. Wie man leicht sieht, ist dies in unserem Bsp. die 24: $\hat{x} = 24$

(d.) Das geometrische Mittel wird berechnet nach der Formel $\dot{x} = \sqrt[N]{\prod_{i=1}^{N} x_i}$

1 P Für unsere Aufgabe ergibt sich dabei $\dot{x} = \sqrt[16]{22 \cdot 25 \cdot 20 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 25 \cdot 24} \overset{TR}{\approx} 23.406$

Anmerkung: Das geometrische Mittel ist immer dem Werte nach kleiner als das arithmetische (positive Einzelwerte vorausgesetzt).

## Aufgabe 10.20 Textbeispiel – Poissonverteilung

| | | |
|---|---|---|
| 6 min | | Punkte 3 P |

Betrachten wir ein elektronisches Gerät, welches $10^8$ elektronische Bauelemente enthält (was heutzutage nicht besonders viel ist). Die Ausfallwahrscheinlichkeit jedes einzelnen Bauelements innerhalb der Garantiezeit betrage $0.5\,\text{ppb} = 5 \cdot 10^{-10}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Gerät innerhalb der Garantiezeit ausfällt?

Hinweis: Arbeiten Sie mit der Poisson-Verteilung.

(Anmerkung: $1\,\text{ppb} = 1 \cdot 10^{-9} = 1$ part per billion. Im angelsächsischen Sprachgebrauch wird die „Milliarde“ mit „billion“ übersetzt.)

## Lösung zu 10.20

**Arbeitshinweis:**
Die Poisson-Verteilung ist eine diskrete Näherung der Binomialverteilung, bei der die Wahrscheinlichkeiten $p$ und $q$ sehr unterschiedlich ausfallen.

In unserem Beispiel ist $p = 5 \cdot 10^{-10} =$ Wahrscheinlichkeit für das Ausfallen eines Bauelements

$q = 0.9999999995 =$ Wahrscheinlichkeit für das Überleben des Bauelements

Die Massefunktion der Poisson-Verteilung lautet $f_{(k)} = \frac{\mu^k}{k!} \cdot e^{-\mu}$ mit $\mu = n \cdot p$

Darin ist $n = 10^8 =$ Gesamtzahl der möglichen Ereignisse

und $\mu = n \cdot p = 10^8 \cdot 5 \cdot 10^{-10} = 0.05 =$ Erwartungswert (für die Ausfälle in der Garantiezeit)

1 P Da es für den Ausfall egal ist, ob ein elektronisches Bauteil ausfällt oder mehrere, beträgt die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall in der Garantiezeit $\sum_{k=1}^{n} f_{(k)}$ .

In Anbetracht des sehr großen $n$ ist es bequemer, die Wahrscheinlichkeit für das Überleben des Geräts zu berechnen. Sie ist $f_{(k=0)}$ : $f_{(0)} = \frac{\mu^0}{0!} \cdot e^{-0.05} \overset{TR}{\approx} 95.1\%$ .

Ihr Komplement ist die Wahrscheinlichkeit für das Ausfallen eines Geräts:

$P_{\text{gefragt}} = 1 - f_{(0)} \overset{TR}{\approx} 4.9\%$ (innerhalb der Garantiezeit) 2 P

## Aufgabe 10.21 Textbeispiel – Poissonverteilung

| | | |
|---|---|---|
| Insgesamt 4 min | | Punkte insgesamt 2 P |

Der Zerfall eines radioaktiven Präparats folgt der Poisson-Verteilung.

Betrachten wir ein Präparat, das aus $10^{20}$ Atomkernen besteht, von denen jeder eine Zerfalls-Wahrscheinlichkeit von $p = 4 \cdot 10^{-18}$ im Verlauf einer Stunde hat.

(a.) Berechnen Sie den Erwartungswert: Wie viele Kerne zerfallen im Mittel in der ersten Stunde?

(b.) Berechnen Sie die Standardabweichung: Geben Sie das $1\sigma$ – Intervall an, in dem das Ergebnis von Aufgabenteil (a.) mit einer statistischen Sicherheit von 68.3 % liegt.

## ▾ Lösung zu 10.21

(a.) Der Erwartungswert der Poisson-Verteilung ist $\mu = n \cdot p = 10^{20} \cdot 4 \cdot 10^{-18} = 400$

So viele Kerne sollten im Mittel pro Stunde zerfallen.

(b.) Für die Poisson-Verteilung ist die Varianz $\sigma^2 = \mu$

$\Rightarrow$ Standardabweichung in unserem Bsp.: $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{400} = 20$ .

Das $1\sigma$ – Intervall lautet also $[\mu - \sigma ; \mu + \sigma] = [380 ; 420]$ . 2 P

## Aufgabe 10.22 Textbeispiel – Exponentialverteilung

| | | |
|---|---|---|
| insgesamt 12 min | | Punkte insgesamt 6 P |

Der Ausfall von Halbleiter-Bauelementen als Funktion der Zeit folgt einer Exponentialverteilung.

Betrachten wir das Verhalten von 20000 Bauelementen im Laufe der Zeit. Im ersten Jahr fallen 2000 Bauelemente aus.

(a.) Den Ausfall wie vieler Bauelemente erwarten Sie im Laufe des zweiten und im Laufe des dritten Jahres?

(b.) Wie viele funktionierende Bauelemente erwarten Sie noch nach 10 Jahren?

(c.) Wie groß ist die mittlere Überlebensdauer der Bauelemente? Wie viele Bauelemente funktionieren noch nach dieser Zeit?

(d.) Was mitunter Verkäufer interessiert: Nach welcher Zeit ist die Hälfte aller Bauelemente kaputt? (Die Zeit heißt auch Halbwertszeit.)

**Stolperfalle:**

Man verwechsele nicht die Ausfallwahrscheinlichkeit elektronischer Bauteile als Funktion der Zeit (wie sie in Aufgabe 10.22 betrachtet wird) mit der Ausfallwahrscheinlichkeit derselben Bauteile innerhalb eines gegebenen Zeitraumes (den wir in Aufgabe 10.20 betrachtet hatten).

## ▼ Lösung zu 10.22

(a.) Es ist ein Charakteristikum der Exponentialverteilung, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit pro Zeitintervall $\Delta t$ zeitlich konstant ist. Wenn also im ersten Jahr 10 % aller Geräte ausfallen (im Bezug auf den Jahresbeginn), dann gilt dieser Prozentsatz auch im zweiten und im dritten Jahr. Wir können also folgende Aufzählung aufschreiben:

Beginn 1.Jahr → 20000 funktionsfähige Bauelem. Im Lauf des 1. Jahres → 2000 Ausfälle
Beginn 2.Jahr → 18000 funktionsfähige Bauelem. Im Lauf des 2. Jahres → 1800 Ausfälle
1 P Beginn 3.Jahr → 16200 funktionsfähige Bauelem. Im Lauf des 3. Jahres → 1620 Ausfälle

(b.) Die Zahl der arbeitsfähigen Bauelemente als Funktion der Zeit $n(t)$ ist gegeben durch

$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$ mit $n_0$ = Zahl der arbeitsfähigen Bauelemente zur Zeit $t = 0$.

und $\lambda$ = Parameter der Exponentialverteilung (heißt auch Abklingkonstante).

Zur vollständigen Charakterisierung der Verteilung muss man $n_0$ und $\lambda$ angeben. Bereits bekannt ist $n_0 = 20000$; $\lambda$ wird nun ermittelt:

1 P $$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad\Rightarrow\quad e^{-\lambda t} = \frac{n(t)}{n_0} \quad\Rightarrow\quad -\lambda t = \ln\left(\frac{n(t)}{n_0}\right) \quad\Rightarrow\quad \lambda t = \ln\left(\frac{n_0}{n(t)}\right) \quad\Rightarrow\quad \lambda = \frac{1}{t} \cdot \ln\left(\frac{n_0}{n(t)}\right)$$

Der Zahlenwert für $\lambda$ wird bezogen auf einen Zeitraum $t$, den wir willkürlich wählen können, der aber in der Einheit von $\lambda$ angegeben sein muss. Wir entscheiden uns für den Zeitraum $t = 1\,\text{Jahr}$ und erhalten $\lambda = \frac{1}{1\,\text{Jahr}} \cdot \ln\left(\frac{20000}{18000}\right) \overset{TR}{\approx} 0.10536\ \text{Jahr}^{-1}$

1 P Unser $\lambda$ gibt als die Abklingkonstante im Bezug auf „Jahre“ an.

Will man die Zahl der funktionierenden Bauelemente zum Zeitpunkt $t = 10\,\text{Jahre}$ ausrechnen so setzt man in die obengenannte Funktion ein und erhält:

1 P $n(t = 10\,\text{Jahre}) = n_0 \cdot e^{-0.10536\,\text{Jahre}^{-1} \cdot 10\,\text{Jahre}} = 6974$ Bauelemente

So viele Bauelemente sollten am Ende des 10ten Jahres noch funktionieren.

(c.) Als mittlere Überlebensdauer bezeichnet man die Zeit $\mu = \frac{1}{\lambda}$. In unserer Aufgabe ergibt sich $\mu = \frac{1}{\lambda} = 1\,\text{Jahr} \cdot \left(\ln\left(\frac{20000}{18000}\right)\right)^{-1} \overset{TR}{\approx} 9.49122\,\text{Jahre}$ für die mittlere Überlebensdauer.

Die Zahl der nach dieser Zeit noch funktionierenden Geräte beträgt

$$n(\mu) = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \mu} = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = n_0 \cdot e^{-1} = 36.79\% \cdot n_0 .$$ 1 P

(d.) Wenn die Hälfte aller Geräte kaputt ist, hat die andere Hälfte noch überlebt. Zu diesem Zeitpunkt $t_H$ gilt

$$n(t_H) = \frac{1}{2} \cdot n_0 = n_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_H} \quad \Rightarrow \quad e^{-\lambda \cdot t_H} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad -\lambda \cdot t_H = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot t_H = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad t_H = \frac{\ln(2)}{\lambda}$$

Einsetzen der Werte führt uns zu $t_H = \frac{\ln(2)}{\lambda} = \mu \cdot \ln(2) \overset{TR}{\approx} 6.5788\,\text{Jahre}$. 1 P

Nach dieser Zeit ist die Hälfte aller Bauelemente ausgefallen.

## Aufgabe 10.23 Textbeispiel – Hypergeometrische Verteilung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 2 min | (a.) | | Punkte |
| | (b.) | 5 min | (b.) | | |
| | (c.) | 2 min | (c.) | | (a.) 1 P (b.) 3 P (c.) 1 P |

Bei Qualitätskontrollen spielt die Hypergeometrische Verteilung eine Rolle, und zwar bei der Entnahme von Stichproben. Ein typisches Beispiel hierfür ist eine Fragestellung wie die folgende:

In einer Kiste befinden sich 200 Bauteile aus einer Produktion, die typischerweise 4 % Ausschuss liefert. Zwecks Qualitätskontrolle wird eine Stichprobe mit einem Umfang von 10 Bauteilen entnommen.

(a.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei diesem Stichprobenumfang überhaupt Schlechtteile findet?

(b.) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man bei diesem Stichprobenumfang nicht mehr als drei Schlechtteile findet?

(c.) Falls man den Stichprobenumfang auf 100 Teile ausdehnen würde – wie viele Schlechtteile würde man dann in jeder Stichprobe typischerweise erwarten?

## Lösung zu 10.23

Die Wahrscheinlichkeit (gemeint ist die Massefunktion) der Hypergeometrischen Verteilung lautet

$$f(x) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

mit $N =$ Gesamtumfang der Grundgesamtheit (Bauteile in der Kiste)
$M =$ Anzahl der Elemente mit spez. Eigenschaft (Schlechtteile)
$n =$ Stichprobenumfang
$x =$ Anzahl der spez. Elemente in der Stichprobe (Schlechtteile)

In unserer Aufgabenstellung ist $N = 200$, $M = 200 \cdot 4\% = 8$ und $n = 10$.

(a.) Um den Rechenaufwand zu minimieren, addieren wir nicht die Wahrscheinlichkeiten 1, 2, 3… Schlechtteile zu finden, sondern wir berechnen das Komplement zu der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man in der Stichprobe keine Schlechtteile findet. Sie berechnet sie zu

1 P $$f(x=0) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{200-8}{10-0}}{\binom{200}{10}} \overset{TR}{\approx} 65.84\%$$

Das Komplement dazu ist die Wahrscheinlichkeit, überhaupt Schlechtteile zu finden:

$$P_{(\text{Aufg.a})} = 1 - f(0) \overset{TR}{\approx} 34.16\%$$

(b.) Hier müssen wir die Verteilungsfunktion berechnen, die sich nur durch explizite Summation über die einzelnen Terme der Massefunktion ermitteln lässt:

$$F(k) = \sum_{x=0}^{k} f(x) .$$

In unserer Aufgabe ist

3 P $$P_{(\text{Aufg.b})} = F(3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \overset{TR}{\approx} 65.8422\% + 28.7835\% + 4.9276\% + 0.4262\% = 99.9795\%$$

(c.) Hier ist der Mittelwert der Verteilung gefragt: $\mu = n \cdot \frac{M}{N} = 100 \cdot \frac{8}{200} = 4$

1 P Dies ist auch anschaulich klar: Wenn in 200 Teilen typischerweise 8 Schlechtteile enthalten sind, dann sollten in der Hälfte der Teile (=100) eben typischerweise halb so viele (= 4) Schlechtteile zu erwarten sein.

## Aufgabe 10.24 Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | | Punkte |
| | (b.) | 1 min | | (a.) 5 P (b.) 2 P |

Eine technische Größe $y$ folge dem Gesetz $y(a;b;c) = \sqrt{a^2 + 3 \cdot b^c}$

Die Einzelgrößen $a$, $b$ und $c$ seien Gaußverteilte Messgrößen über deren Erwartungswerte sich nach erfolgten Messungen folgende Aussagen machen lassen:

$a = 500 \pm 15$ ; $b = 50 \pm 1$ ; $c = 3 \pm 0.02$ (Unsicherheitsangaben als $1\sigma$ – Vertrauensintervalle)

(a.) Berechnen Sie $y$ und nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung das zugehörige $\Delta y$ ebenfalls als $1\sigma$ – Intervall.

(b.) Für welche der drei Größen $a$, $b$ oder $c$ müsste man die Messgenauigkeit zuerst verbessern, wenn man die Unsicherheit des $\Delta y$ reduzieren wollte?

## Lösung zu 10.24

(a.) Die Berechnung von $y$ ist simpel: $y=\sqrt{500^2+3\cdot 50^3}\overset{TR}{\approx}790.57$

Die Berechnung der $\Delta y$ verläuft wie folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2a=a\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial b}=\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3c\cdot b^{c-1}=\frac{3}{2}c\cdot b^{c-1}\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial c}=\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 3b^c\cdot\ln(b)=\frac{3}{2}b^c\cdot\ln(b)\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow\quad(\Delta y)^2=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\Delta a\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial b}\cdot\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial c}\cdot\Delta c\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(a\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\Delta a\right)^2+\left(\frac{3}{2}c\cdot b^{c-1}\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\Delta b\right)^2+\left(\frac{3}{2}b^c\cdot\ln(b)\cdot\left(a^2+3b^c\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\Delta c\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(500\cdot\left(500^2+3\cdot 50^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 15\right)^2+\left(\frac{3}{2}\cdot 3\cdot 50^2\cdot\left(500^2+3\cdot 50^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 1\right)^2+\left(\frac{3}{2}50^3\cdot\ln(50)\cdot\left(500^2+3\cdot 50^3\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 0.02\right)^2}$$

$$\overset{TR}{\approx}\sqrt{(9.486833)^2+(14.23025)^2+(18.55635)^2}\overset{TR}{\approx}25.235655\qquad(*)$$

Die Endangabe formuliert man wie so:

- Von der Unsicherheit gibt man (maximal) zwei Stellen (aufgerundet) an $\Rightarrow\ \Delta y\approx 26$.
- Die kleinste signifikante Stelle zur Angabe des Messwertes hat den selben Stellenwert wie die kleinste signifikante Stelle bei der Angabe der Unsicherheit (mathematisch gerundet) $\Rightarrow\ y=791$.
- Also lautet die Abschätzung für das Ergebnis $\Rightarrow\ y\pm\Delta y=791\pm 26$. 5 P

(b.) In Zeile $(*)$ sieht man, welche Beiträge die Unsicherheiten der einzelnen Messgrößen zur quadratischen Summation der Gesamtunsicherheit liefern. Diese sind:

$\Delta a\mapsto$ Beitrag von $\frac{\partial y}{\partial a}\cdot\Delta a=9.4868$

$\Delta b\mapsto$ Beitrag von $\frac{\partial y}{\partial b}\cdot\Delta b=14.230$

$\Delta c\mapsto$ Beitrag von $\frac{\partial y}{\partial c}\cdot\Delta c=18.556$ 2 P

Diese Beiträge sind die Werte, die $\Delta y$ annähme, wenn die jeweils vor dem Fußpfeil genannte Unsicherheit die einzige von Null verschiedene der Einzelgrößen wäre. Der dominante Beitrag rührt von $\Delta c$ her, also ist $c$ diejenige Einzelgröße, deren Unsicherheit bei der Berechnung von $\Delta y$ den Hauptanteil liefert. Die Größe $c$ ist es also, deren Messgenauigkeit man zuerst (oder vor allem) verbessern müsste, wenn man die Unsicherheit in der Aussage zu $y\pm\Delta y$ spürbar verringern wollte.

## Aufgabe 10.25 Gauß’sche Fehlerfortpflanzung

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | 2 P |

In der Gauß’schen Fehlerfortpflanzung liegt der Grund, warum eine kleine Differenz zweier großer Einzelgrößen immer mit einer „ziemlich großen“ relativen Unsicherheit behaftet ist.

Betrachten Sie als Beispiel hierzu die Größe $y = a - b$, wobei Sie die Einzelgrößen gemessen haben als $a = 500 \pm 0.8\%$ und $b = 480 + 1\%$.

Berechnen Sie $y \pm \Delta y$ und geben Sie die relative Unsicherheit von $y$ an.

## Lösung zu 10.25

Die Berechnung von $y$ ist eine einfache Subtraktion: $y = 500 - 480 = 20$

Zur Vorbereitung der Gauß’schen Fehlerfortpflanzung berechnen wir $\Delta a$ und $\Delta b$:

$\Delta a = 500 \cdot 8\% = 4$ und $\Delta b = 480 \cdot 1\% = 4.8$

Dies setzen wir in die Gauß’sche Fehlerfortpflanzung ein:

$$(\Delta y)^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2} = \sqrt{(1 \cdot \Delta a)^2 + (-1 \cdot \Delta b)^2} = \sqrt{(4)^2 + (4.8)^2} \overset{TR}{\approx} 6.25$$

2 P Die relative Unsicherheit von $y$ beträgt $\frac{\Delta y}{y} \approx \frac{6.25}{20} \overset{TR}{\approx} 31.2\%$.

Wie man sieht, ist die relative Unsicherheit von $y$ wesentlich größer als die relativen Unsicherheiten von $a$ und $b$.

## Aufgabe 10.26 Regressionsgerade

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| | vorab<br>(a.)<br>(b.) | 6 min<br>(a.) 3 min<br>(b.) 3 min | vorab<br>2 P (a.) 1 P (b.) 2 P |
| | (c.)<br>(d.) | (c.) 4 min (d.)<br>4 min | (c.) 2 P (d.) 2 P |

Gegeben seien Wertepaare $x_i ; y_i$ gemäß Tabelle 10.26

**Tabelle 10.26** Liste von Wertepaaren $x_i ; y_i$, deren Korrelation untersucht werden soll.

| $x_i$ | 457 | 423 | 380 | 358 | 334 | 306 | 260 | 220 | 203 | 183 | 132 | 124 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 33 | 28 | 26 | 24 | 23 | 19 | 18 | 17 | 15 | 10 | 10 | 8 | 6 |

(a.) Wie gut liegen die durch $(x_i ; y_i)$ beschriebenen Punkte auf einer Geraden? Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten.

(b.) Berechnen Sie die Ausgleichsgerade $y = ax + b$.

(c.) Berechnen Sie die Varianz $\sigma^2$ der Ausgleichsgeraden.

(d.) Berechnen Sie die Standardabweichungen der Steigung $a$ und des Achsenabschnitts $b$ der Ausgleichsgeraden.

## Lösung zu 10.26

**Arbeitshinweis:**

Die Korrelationsanalyse und die Berechnung der Ausgleichsgeraden kann man wie ein Rezept abarbeiten; die Formeln dazu findet man in Formelsammlungen. Der Rechenweg dabei ist folgender:

Als Vorarbeit berechnet man verschiedene Summen (die übrigens auf manchen Taschenrechnern bereits vorprogrammiert sind), danach setzt man diese Summen in Formeln ein, nach denen sich die verschiedenen Größen der Ausgleichsgeraden berechnen – diese wollen wir für die vorliegende Aufgabe mit folgenden Symbolen bezeichnen:

$a$ = Steigung und $b$ = Achsenabschnitt der Geraden

$\sigma^2$ = Varianz der Ausgleichsgeraden

$\Delta a$ und $\Delta b$ = Standardabweichungen der Parameter $a$ und $b$.

Die verschiedenen Summen, die man als Vorarbeit berechnet, lauten für unser Beispiel:

$$S_x = \sum_i x_i = 457 + 423 + 380 + 358 + \ldots + 124 + 80 = 3460$$

$$S_y = \sum_i y_i = 33 + 28 + 26 + 24 + \ldots + 10 + 8 + 6 = 237$$

$$S_{x^2} = \sum_i x_i^2 = 457^2 + 423^2 + 380^2 + 358^2 + \ldots + 124^2 + 80^2 = 1095432$$

$$S_{y^2} = \sum_i y_i^2 = 33^2 + 28^2 + 26^2 + 24^2 + \ldots + 10^2 + 8^2 + 6^2 = 5153$$

$$S_{xy} = \sum_i x_i \cdot y_i = 457 \cdot 33 + 423 \cdot 28 + 380 \cdot 26 + 358 \cdot 24 + \ldots + 124 \cdot 8 + 80 \cdot 6 = 74980$$ 2 P

Der Summationsindex $i$ nummeriert die Datenpaare durch, er läuft also in unserer Aufgabe von $1$ bis $13$, wobei $N = 13$ die Gesamtzahl der vorhandenen Datenpaare ist.

**Stolperfalle:**

Man beachte, dass $S_x^2 \neq S_{x^2}$ ist, ebenso $S_y^2 \neq S_{y^2}$ und $S_{xy} \neq S_x \cdot S_y$. Bei $S_x^2$ ist über die $x_i^2$ zu summieren, was eine eigenständige Summation erfordert. Es genügt dafür nicht, die Summe über die $S_x$ zu quadrieren. Gleiches gilt in analoger Weise auch für die $S_{y^2}$ und für die $S_{xy}$ – auch dies sind eigenständige Summationen.

Die Größen der Regressionsgeraden, die auch in der Aufgabenstellung gefragt sind, beantworten wir auf der Basis der Kenntnis der soeben berechneten Summen:

(a.) Die Korrelationskoeffizienten findet man als

1 P
$$r = \frac{S_{xy} - \frac{1}{N} \cdot S_x \cdot S_y}{\sqrt{\left(S_{x^2} - \frac{1}{N} \cdot S_x^2\right) \cdot \left(S_{y^2} - \frac{1}{N} \cdot S_y^2\right)}} = \frac{74980 - \frac{1}{13} \cdot 3460 \cdot 237}{\sqrt{\left(1095432 - \frac{1}{13} \cdot 3460^2\right) \cdot \left(5153 - \frac{1}{13} \cdot 237^2\right)}} \overset{TR}{\approx} 0.987 = 98.7\,\%$$

Die Werte unserer Aufgabe liefern also eine fast 100 %ige Korrelation, die ausdrückt, dass unsere Datenpaare ausgesprochen gut zu einer Geraden passen.

(b.) Den Achsenabschnitt und die Steigung der Geraden $y = ax + b$, berechnet man nach folgenden Formeln:

$$a = \frac{S_{xy} - \frac{1}{N} \cdot S_x \cdot S_y}{\left(S_{x^2} - \frac{1}{N} \cdot S_x^2\right)} = \frac{74980 - \frac{1}{13} \cdot 3460 \cdot 237}{1095432 - \frac{1}{13} \cdot 3460^2} \overset{TR}{\approx} 0.068188 \qquad \text{(für die Steigung)}$$

2 P

$$b = \frac{1}{N} \cdot S_y - a \cdot \frac{1}{N} \cdot S_x \overset{TR}{\approx} \frac{1}{13} \cdot 237 - 0.068188 \cdot \frac{1}{13} \cdot 3460 \overset{TR}{\approx} 0.08223 \qquad \text{(für den Achsenabschnitt)}$$

**Arbeitshinweis:**

In der hier verwendeten Schreibweise muss die Berechnung der Steigung $a$ zuerst durchgeführt werden, denn ihr Wert wird in die Formel zur Berechnung des Achsenabschnitts $b$ eingesetzt. Diese Vorgehensweise minimiert den Rechenaufwand.

Zusätzliche Erläuterung:

In manchen Formelsammlungen gibt es auch eine eigenständige Formel für den Achsenabschnitt $b$. Sie lautet $b = \dfrac{S_{x^2} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2}$. Tatsächlich kann diese Formulierung in die in unserer Musterlösung verwendete umgeformt werden.

Aber: Wir haben uns für die Verwendung der einfacheren Formel für $b$ entschieden, denn dadurch wird die Gefahr von Rechenfehlern verringert.

(c.) Die Varianz für Ausgleichsgeraden wird berechnet als $\sigma_{Abw}^2 = \dfrac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - ax_i - b\right)^2$.

2 P Setzt man die Werte ein, so liefert unser Beispiel $\sigma_{Abw}^2 \overset{TR}{\approx} 1.88762$.

Dies ist die Summe der Abweichungsquadrate, dividiert durch $(N-2)$. Man kann die Angabe als Maß für die Abweichung der einzelnen Punkte von der Ausgleichsgeraden interpretieren.

(d.) Die Standardabweichungen der Parameter $a$ und $b$ findet man in Formelsammlungen für den Fall, dass die $x_i$ normale Variablen (ohne Berücksichtigung einer statistischen Streuung) sind, die $y_i$ hingegen einer statistischen Streuung unterliegen. Dafür gilt:

$$\sigma_a^2 = \frac{N \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2} \overset{TR}{\approx} \frac{13 \cdot 1.88762}{13 \cdot 1095432 - 3460^2} \overset{TR}{\approx} 1.08 \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = \sqrt{\sigma_a^2} \overset{TR}{\approx} 0.00329$$

$$\sigma_b^2 = \frac{S_{x^2} \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2} \overset{TR}{\approx} \frac{1095432 \cdot 1.88762}{13 \cdot 1095432 - 3460^2} \overset{TR}{\approx} 0.9113 \quad \Rightarrow \quad \sigma_b = \sqrt{\sigma_b^2} \overset{TR}{\approx} 0.955$$

Im Sinne des $1\sigma$ – Vertrauensintervalls einer Gauß-Verteilung lässt sich also sagen:

Steigung: $a \overset{TR}{\approx} 0.06819 \pm 0.00329$ und Achsenabschnitt: $b \overset{TR}{\approx} 0.082 \pm 0.955$ 2 P

Dabei wurde angenommen, dass die Datenpunkte in y-Richtung einer statistischen Streuung unterliegen, in x-Richtung hingegen nicht.

Wer mag, kann zur Kontrolle die Punkte und die Gerade aufzeichnen.

## Aufgabe 10.27 Nichtlineare Regression

16 min | Punkte 30 min

In Tabelle 10.27a sind die Wertepaare für $x_i ; y_i$ für eine nichtlineare Regression mit zwei Parametern gegeben. Die anzupassende Regressionsfunktion sei $y = a \cdot e^{bx}$. Bestimmen Sie deren Parameter $a$ und $b$ sowie die zugehörigen Unsicherheiten $\sigma_a$ und $\sigma_b$.

**Tabelle 10.27a** Liste von Wertepaaren $x_i ; y_i$, für eine nichtlineare Regression.

| $x_i$ | 0.01 | 0.12 | 0.23 | 0.30 | 0.40 | 0.49 | 0.55 | 0.62 | 0.71 | 0.80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2.07 | 3.02 | 3.89 | 4.99 | 6.60 | 8.70 | 10.42 | 12.80 | 16.90 | 22.00 |

## Lösung zu 10.27

**Arbeitshinweis:**

Viele nichtlineare Regressionsfunktionen lassen sich, sofern sie durch genau zwei Parameter bestimmt sind, auf die Regression einer Geraden zurückführen. Dies ist auch bei der Funktion $y = a \cdot e^{bx}$ der Fall. Der Arbeitsweg besteht dann aus folgenden Schritten:

Schritt 1 → Aufstellen eines Zusammenhangs zwischen der nichtlinearen Regressionsfunktion und einer Geraden.

Schritt 2 → Umrechnen der in der Aufgabenstellung gegebenen Ausgangs-Wertepaare in Datenpaare, die einer linearen Regression zu unterziehen sind.

Schritt 3 → Bestimmung der Regressionsparameter (Steigung und Achsenabschnitt) für die umgerechnete Gerade mittels linearer Regression.

Schritt 4 → Zurückrechnen auf die Parameter $a$ und $b$ der nichtlinearen Funktion.

Zusatzschritt → Bestimmung der Standardabweichung für die Parameter $a$ und $b$.

Diesen Fahrplan arbeiten wir nun ab:

<u>Schritt 1:</u> Wir logarithmieren die nichtlineare Funktionsgleichung und erhalten

$$y = a \cdot e^{bx} \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = \ln(a) + b \cdot x$$

Substituiert man hier $v := \ln(y)$ und $A := \ln(a)$, so erhält man den linearen Zusammenhang

2 P $\ln(y) = \ln(a) + b \cdot x \quad \Rightarrow \quad v = A + b \cdot x$ mit $A$ = Achsenabschnitt und $b$ = Steigung

<u>Schritt 2:</u> Da die Substitution auf die $xy$ – Wertepaare wirkt, müssen die $xy$ – Rohdaten in entsprechende $xv$ – Wertepaare umgerechnet werden. Diese Umrechnung findet man in Tabelle 10.27b.

**Tabelle 10.27b** Umrechnung der nichtlinearen Wertepaare $x_i ; y_i$ mittels Substitution $v := \ln(y)$.

| $x_i$ | 0.01 | 0.12 | 0.23 | 0.30 | 0.40 | 0.49 | 0.55 | 0.62 | 0.71 | 0.80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2.07 | 3.02 | 3.89 | 4.99 | 6.60 | 8.70 | 10.42 | 12.80 | 16.90 | 22.00 |
| $v_i \overset{TR}{\approx} \ln(y_i)$ | 0.72755 | 1.10526 | 1.35841 | 1.60744 | 1.88707 | 2.16332 | 2.34373 | 2.54945 | 2.82731 | 3.09104 |

2 P

<u>Schritt 3:</u> Nun kann die lineare Regression $v(x) = A + b \cdot x$ vollzogen werden, deren Funktion bereits in Schritt 1 genannt worden war. Wir berechnen daher mit $N = 10$ Wertepaaren die Summen

$$S_x = \sum_i x_i = 0.01 + 0.12 + 0.23 + .... + 0.71 + 0.80 = 4.230$$

$$S_v = \sum_i v_i \overset{TR}{\approx} 0.72755 + 1.10526 + 1.35841 + .... + 2.82731 + 3.09104 = 19.66058$$

$$S_{x^2} = \sum_i x_i^2 = 0.01^2 + 0.12^2 + 0.23^2 + .... + 0.71^2 + 0.80^2 = 2.38850$$

$$S_{v^2} = \sum_i v_i^2 \overset{TR}{\approx} 2.07^2 + 3.02^2 + 3.89^2 + .... + 16.90^2 + 22.00^2 = 43.9620321$$

2 P $$S_{xv} = \sum_i x_i \cdot v_i \overset{TR}{\approx} 0.01 \cdot 0.72755 + 0.12 \cdot 1.10526 + .... + 0.71 \cdot 2.82731 + 0.80 \cdot 3.09104 = 10.09936$$

Einsetzen dieser Summen in die Formeln für den Achsenabschnitt und die Steigung einer Ausgleichsgeraden liefert:

Steigung → $b = \dfrac{S_{xv} - \frac{1}{N} \cdot S_x \cdot S_v}{\left(S_{x^2} - \frac{1}{N} \cdot S_x^2\right)} \overset{TR}{\approx} \dfrac{10.09936 - \frac{1}{10} \cdot 4.230 \cdot 19.66058}{\left(2.38850 - \frac{1}{10} \cdot 4.230^2\right)} \overset{TR}{\approx} 2.9754755$

2 P

Achsenabschnitt → $A = \frac{1}{N} \cdot S_v - a \cdot \frac{1}{N} \cdot S_x \overset{TR}{\approx} \frac{1}{10} \cdot 19.66058 - 2.9754755 \cdot \frac{1}{10} \cdot 4.230 \overset{TR}{\approx} 0.7074319$

Schritt 4:
Das Zurückrechnen auf die Parameter $a$ und $b$ der nichtlinearen Funktion erfolgt mittels Resubstitution:

Die Resubstitution von $a$ lautet nach Schritt 1: $A = \ln(a) \quad \Rightarrow \quad a = e^A \overset{TR}{\approx} e^{0.7074279} \overset{TR}{\approx} 2.028774$

Der Parameter $b$ braucht nicht resubstituiert werden, da $b$ durch nichts ersetzt wurde.

Die gesuchte nichtlineare Regressionsfunktion lautet also $y = a \cdot e^{bx} \overset{TR}{\approx} 2.028774 \cdot e^{2.9754755 \cdot x}$. 1 P

Zusatzschritt: Wir beginnen mit der Bestimmung der statistischen Unsicherheiten der Parameter der Geraden $v = A + b \cdot x$ und setzen einfach der Reihe nach in die Formeln ein, wie bereits aus Aufgabe 10.26 bekannt.

Der Korrelationskoeffizient lautet

$$r = \frac{S_{xv} - \frac{1}{N} \cdot S_x \cdot S_v}{\sqrt{\left(S_{x^2} - \frac{1}{N} \cdot S_x^2\right) \cdot \left(S_{v^2} - \frac{1}{N} \cdot S_v^2\right)}} = \frac{10.09936 - \frac{1}{10} \cdot 4.230 \cdot 19.66058}{\sqrt{\left(2.38850 - \frac{1}{10} \cdot 4.230^2\right) \cdot \left(43.9620321 - \frac{1}{10} \cdot 19.66058^2\right)}} \overset{TR}{\approx} 0.9997069$$ 1 P

Die Varianz der Punkte aus der Summe der Abweichungsquadrate beträgt

$$\sigma_{Abw}^2 = \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(v_i - bx_i - A\right)^2 \overset{TR}{\approx} 3.88845 \cdot 10^{-4}$$ 2 P

Damit können wir einsetzen in die Standardabweichungen der Parameter $b$ und $A$:

Für die Steigung $b$:

$$\sigma_b^2 = \frac{N \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2} \overset{TR}{\approx} \frac{10 \cdot 3.88845 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 2.38850 - 4.230^2} \overset{TR}{\approx} 6.489298 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \sigma_b = \sqrt{\sigma_b^2} \overset{TR}{\approx} 2.5474 \cdot 10^{-2}$$

Für den Achsenabschnitt $A$:

$$\sigma_A^2 = \frac{S_{x^2} \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2} \overset{TR}{\approx} \frac{2.38850 \cdot 3.88845 \cdot 10^{-4}}{10 \cdot 2.38850 - 4.230^2} \overset{TR}{\approx} 1.54997 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \sigma_A = \sqrt{\sigma_A^2} \overset{TR}{\approx} 1.24498 \cdot 10^{-2}$$ 2 P

Dies sind aber die Unsicherheiten der substituierten Geraden. Das gesuchte Ergebnis der Unsicherheiten der Parameter der nichtlinearen Regression erhalten wir, indem wir die Standardabweichungen der Parameter der Geraden umrechnen in die Standardabweichungen der Parameter der nichtlinearen Funktion. Die Formeln dafür benutzen wir aus der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung, auch wenn die Größen $a$ und $b$ nur von jeweils einer einzigen Einflussgröße abhängen:

- $\sigma_b$ braucht gar nicht umgerechnet werden, denn wegen $b = b$ ist auch $\sigma_b = \sigma_b \overset{TR}{\approx} 2.5474 \cdot 10^{-2}$
- $\sigma_a$ wird aus $\sigma_A$ berechnet in Anlehnung an die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit $a = e^A$ (die Abhängigkeit enthält nur eine einzige Variable):

$$\sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial A} \cdot \sigma_A\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial A}\left(e^A\right) \cdot \sigma_A\right)^2} = \sqrt{\left(e^A \cdot \sigma_A\right)^2} = \left|e^A \cdot \sigma_A\right| = \left|a \cdot \sigma_A\right| \overset{TR}{\approx} 2.028774 \cdot 1.24498 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma_a \overset{TR}{\approx} 2.5 \cdot 10^{-2}$$ 2 P

Abschließend sei das Ergebnis der nichtlinearen Regression zusammengefasst (mit Rundung auf zwei signifikante Stellen der Unsicherheit):

Die Funktion lautet $y = a \cdot e^{bx}$ mit $a \overset{TR}{\approx} 2.029 \pm 0.025$ und $b \overset{TR}{\approx} 2.975 \pm 0.026$

Anmerkung: Die Stimmigkeit der Regression mag man anhand von Bild 10-27 erkennen.

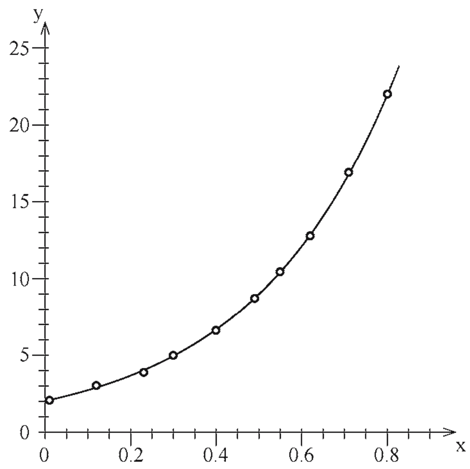



**Bild 10-27**
Vergleich zwischen den Wertepaaren der Aufgabenstellung (Kreise) und der nichtlinearen Regressionsfunktion (Linie)

**Anmerkung:** Statistische Berechnungen sind nur dann vollständig, wenn man auch die Angabe der Unsicherheiten (wie etwa der Varianzen oder Standardabweichungen) vorgenommen hat. Aus Gründen der begrenzten Bearbeitungszeit wird in Prüfungen allerdings manchmal darauf verzichtet.

## Aufgabe 10.28 Regressionsgerade

| | | Punkte |
|---|---|---|
| | 20 min | 9 P |

Zur weiteren Übung rechnen wir noch eine Ausgleichsgerade durch (ohne viel Kommentar). Die Wertepaare $x_i ; y_i$ entnehme man Tabelle 10.28. Bestimmen Sie die Steigung, den Achsenabschnitt und deren statistische Unsicherheiten.

**Tabelle 10.28** Liste von Wertepaaren $x_i ; y_i$ zur Berechnung einer Ausgleichsgeraden.

| $x_i$ | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 | 31 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2.6 | 6.5 | 9.0 | 11.0 | 15.8 | 18.3 | 20.2 | 23.7 | 27.5 | 30.0 | 33.2 | 35.1 | 38.8 | 41.7 |

# Lösung zu 10.28

Berechnung der verschiedenen Summen: $S_x = \sum_{i=1}^{14} x_i = 252$ $\qquad S_y = \sum_{i=1}^{14} y_i = 313.4$

$$S_{x^2} = \sum_{i=1}^{14} x_i^2 = 5446.0 \qquad S_{y^2} = \sum_{i=1}^{14} y_i^2 = 9040.1 \qquad S_{xy} = \sum_{i=1}^{14} x_i \cdot y_i = 6997.2$$ 2 P

Daraus folgen die Größen der Geraden:

Steigung →
$$a = \frac{S_{xy} - \frac{1}{N} \cdot S_x \cdot S_y}{\left(S_{x^2} - \frac{1}{N} \cdot S_x^2\right)} = \frac{6997.2 - \frac{1}{14} \cdot 252 \cdot 313.4}{5446 - \frac{1}{14} \cdot 252^2} \overset{TR}{\approx} 1.4901$$ 2 P

Achsenabschnitt → $b = \frac{1}{N} \cdot S_y - a \cdot \frac{1}{N} \cdot S_x \overset{TR}{\approx} \frac{1}{14} \cdot 313.4 - 1.4901 \cdot \frac{1}{14} \cdot 252 \overset{TR}{\approx} -4.43626$

Die Unsicherheitsbetrachtung verläuft dann wie folgt:

Korrelationskoeffizient →

$$r = \frac{S_{xy} - \frac{1}{N} \cdot S_x \cdot S_y}{\sqrt{\left(S_{x^2} - \frac{1}{N} \cdot S_x^2\right) \cdot \left(S_{y^2} - \frac{1}{N} \cdot S_y^2\right)}} = \frac{6997.2 - \frac{1}{14} \cdot 252 \cdot 313.4}{\sqrt{\left(5446 - \frac{1}{14} \cdot 252^2\right) \cdot \left(9040.1 - \frac{1}{14} \cdot 313.4^2\right)}} \overset{TR}{\approx} 0.9990541$$ 1 P

Varianz der Ausgleichsgeraden → $\sigma_{Abw}^2 = \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(y_i - a x_i - b\right)^2 \overset{TR}{\approx} 0.319011$ 2 P

Unsicherheiten für Steigung und Achsenabschnitt →

$$\sigma_a^2 = \frac{N \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2} \overset{TR}{\approx} \frac{14 \cdot 0.319011}{14 \cdot 5446 - 252^2} \overset{TR}{\approx} 3.5056 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = \sqrt{\sigma_a^2} \overset{TR}{\approx} 0.0187$$

$$\sigma_b^2 = \frac{S_{x^2} \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{x^2} - S_x^2} \overset{TR}{\approx} \frac{5446 \cdot 0.319011}{14 \cdot 5446 - 252^2} \overset{TR}{\approx} 0.136368 \quad \Rightarrow \quad \sigma_b = \sqrt{\sigma_b^2} \overset{TR}{\approx} 0.3693$$ 2 P

Im Sinne des $1\sigma$ – Vertrauensintervalls einer Gauß-Verteilung lässt sich also sagen:

Steigung: $a \overset{TR}{\approx} 1.4901 \pm 0.0187$ und Achsenabschnitt: $b \overset{TR}{\approx} -4.436 \pm 0.369$

# Aufgabe 10.29 Nichtlineare Regression

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 40 min | | Punkte 20 P |

Zur weiteren Übung rechnen wir noch eine nichtlineare Regression (ohne viel Kommentar). Die Wertepaare $x_i ; y_i$ entnehme man Tabelle 10.29a.

Die Kurve, deren Parameter Sie bitte bestimmen, lautet $y(x)=\frac{a\cdot x}{b+x}$ .

Vergessen Sie nicht die Betrachtung der statistischen Unsicherheiten.

**Tabelle 10.29a** Liste von Wertepaaren $x_i;y_i$ , zur Berechnung einer nichtlinearen Regression.

| $x_i$ | 2.5 | 6.7 | 11.6 | 19.2 | 28.0 | 41.6 | 46.3 | 60.8 | 72.7 | 76.2 | 77.6 | 103.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5.6 | 12.7 | 19.4 | 24.1 | 27.4 | 28.2 | 31.9 | 30.5 | 33.7 | 36.7 | 40.9 | 40.4 |

## ▾ Lösung zu 10.29

Schritt 1: Den Zusammenhang zur linearen Regression erhält man in diesem Beispiel, indem man den Kehrwert aus der nichtlinearen Funktionsgleichung bildet.

$$y=\frac{a\cdot x}{b+x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{y}=\frac{b+x}{a\cdot x}=\frac{b}{a\cdot x}+\frac{x}{a\cdot x}=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{a} \qquad (*)$$

Der Zusammenhang zur Geradengleichung wird ersichtlich, wenn man substituiert:

$v:=\frac{1}{y}$ und $u:=\frac{1}{x}$ .

2 P Damit wird die Gleichung $(*)$ zu $v=\frac{b}{a}\cdot u+\frac{1}{a}$ . Dies ist eine Geradengleichung $v=A\cdot u+B$ mit der Steigung $A=\frac{b}{a}$ und dem Achsenabschnitt $B=\frac{1}{a}$ .

Schritt 2: Aufgrund dieser Substitution rechnen wir die $xy$ – Wertepaare in $uv$ – Wertepaare um und erhalten Tabelle 10.29b.

**Tabelle 10.29b** Umrechnung der nichtlinearen Wertepaare $x_i;y_i$ mittels Substitution in $u_i;v_i$ .

| $x_i$ | 2.5 | 6.7 | 11.6 | 19.2 | 28.0 | 41.6 | 46.3 | 60.8 | 72.7 | 76.2 | 77.6 | 103.9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 5.6 | 12.7 | 19.4 | 24.1 | 27.4 | 28.2 | 31.9 | 30.5 | 33.7 | 36.7 | 40.9 | 40.4 |
| $u_i \overset{TR}{\approx} \frac{1}{x_i}$ | 0.400 000 | 0.149 254 | 0.086 207 | 0.052 083 | 0.035 714 | 0.024 038 | 0.021 598 | 0.016 447 | 0.013 755 | 0.013 123 | 0.012 887 | 0.009 625 |
| 3 P $v_i \overset{TR}{\approx} \frac{1}{y_i}$ | 0.178 571 | 0.078 740 | 0.051 546 | 0.041 494 | 0.036 496 | 0.035 461 | 0.031 348 | 0.032 787 | 0.029 674 | 0.027 248 | 0.024 450 | 0.024 752 |

Schritt 3: Vollzug der linearen Regression $v=A\cdot u+B$ :

Wir beginnen mit der Berechnung der notwendigen Summen.

$$S_u = \sum_i u_i \overset{TR}{\approx} 0.834732 \qquad S_v = \sum_i v_i \overset{TR}{\approx} 0.592568 \qquad S_{u^2} = \sum_i u_i^2 \overset{TR}{\approx} 0.195631$$

$$S_{v^2} = \sum_i v_i^2 \overset{TR}{\approx} 0.0499471 \qquad S_{uv} = \sum_i u_i \cdot v_i \overset{TR}{\approx} 0.0944769$$ 2 P

Daraus ergeben sich die Parameter der Geraden.

Steigung → $A = \dfrac{S_{uv} - \frac{1}{N} \cdot S_u \cdot S_v}{\left(S_{u^2} - \frac{1}{N} \cdot S_u^2\right)} \overset{TR}{\approx} \dfrac{0.0944769 - \frac{1}{12} \cdot 0.834732 \cdot 0.592568}{\left(0.195631 - \frac{1}{12} \cdot 0.834732^2\right)} \overset{TR}{\approx} 0.387138$ 2 P

Achsenabschnitt → $B = \frac{1}{N} \cdot S_v - A \cdot \frac{1}{N} \cdot S_u \overset{TR}{\approx} \frac{1}{12} \cdot 0.592568 - 0.387138 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0.834732 \overset{TR}{\approx} 0.022451$

Schritt 4:

Zurückrechnen auf die Parameter $a$ und $b$ der nichtlinearen Funktion mittels Resubstitution:

$$B = \frac{1}{a} \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{B} \overset{TR}{\approx} \frac{1}{0.022451} \overset{TR}{\approx} 44.54 \qquad \text{und} \qquad A = \frac{b}{a} \;\Rightarrow\; b = A \cdot a = \frac{A}{B} \overset{TR}{\approx} \frac{0.387138}{0.022451} \overset{TR}{\approx} 17.2438$$

Die gesuchte nichtlineare Regressionsfunktionen lautet $y(x) = \dfrac{a \cdot x}{b + x} \overset{TR}{\approx} \dfrac{44.54 \cdot x}{x + 17.2438}$. 2 P

Zusatzschritt: Betrachtung der statistischen Unsicherheiten:

Wir beginnen mit den Unsicherheiten der Geraden.

Korrelationskoeffizient →

$$r = \frac{S_{uv} - \frac{1}{N} \cdot S_u \cdot S_v}{\sqrt{\left(S_{u^2} - \frac{1}{N} \cdot S_u^2\right) \cdot \left(S_{v^2} - \frac{1}{N} \cdot S_v^2\right)}} \overset{TR}{\approx} \frac{0.0944769 - \frac{1}{12} \cdot 0.834732 \cdot 0.592568}{\sqrt{\left(0.195631 - \frac{1}{12} \cdot 0.834732^2\right) \cdot \left(0.0499471 - \frac{1}{12} \cdot 0.592568^2\right)}}$$ 1 P

$$\Rightarrow \quad r \overset{TR}{\approx} 0.9983588$$

Die Varianz der Punkte aus der Summe der Abweichungsquadrate beträgt

$$\sigma_{Abw}^2 = \frac{1}{N-2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left(v_i - A u_i - B\right)^2 \overset{TR}{\approx} 6.7842795 \cdot 10^{-6}$$ 2 P

Damit können wir einsetzen in die Standardabweichungen der Parameter $A$ und $B$:

$$\sigma_A^2 = \frac{N \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{u^2} - S_u^2} \overset{TR}{\approx} \frac{12 \cdot 6.7842795 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 0.195631 - 0.834732^2} \overset{TR}{\approx} 4.93163 \cdot 10^{-5} \quad \Rightarrow \quad \sigma_A = \sqrt{\sigma_b^2} \overset{TR}{\approx} 7.022557 \cdot 10^{-3}$$

2 P

$$\sigma_B^2 = \frac{S_{u^2} \cdot \sigma_{Abw}^2}{N \cdot S_{u^2} - S_u^2} \overset{TR}{\approx} \frac{0.195631 \cdot 6.7842795 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 0.195631 - 0.834732^2} \overset{TR}{\approx} 8.03985 \cdot 10^{-7} \quad \Rightarrow \quad \sigma_B = \sqrt{\sigma_A^2} \overset{TR}{\approx} 8.96652 \cdot 10^{-4}$$

Die statistischen Unsicherheiten der Parameter der nichtlinearen Kurve bestimmen wir wie gewohnt mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

- $$a = \frac{1}{B} \quad \Rightarrow \quad \sigma_a = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial A}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial B}\cdot\sigma_B\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(\frac{1}{B}\right)}{\partial A}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{B}\right)}{\partial B}\cdot\sigma_B\right)^2}$$

$$= \sqrt{(0\cdot\sigma_A)^2 + \left(\frac{-1}{B^2}\cdot\sigma_B\right)^2} = \left|\frac{\sigma_B}{B^2}\right| \overset{TR}{\approx} \frac{8.96652\cdot 10^{-4}}{0.022451^2} \overset{TR}{\approx} 1.779$$

- $$b = \frac{A}{B} \Rightarrow \sigma_b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial A}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial B}\cdot\sigma_B\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\left(\frac{A}{B}\right)}{\partial A}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(\frac{\partial\left(\frac{A}{B}\right)}{\partial B}\cdot\sigma_B\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{B}\cdot\sigma_A\right)^2 + \left(-\frac{A}{B^2}\cdot\sigma_B\right)^2}$$

3 P $$\Rightarrow \quad \sigma_b \overset{TR}{\approx} \sqrt{\left(\frac{7.022557\cdot 10^{-3}}{0.022451}\right)^2 + \left(-\frac{0.387138}{0.022451^2}\cdot 8.96652\cdot 10^{-4}\right)^2} \overset{TR}{\approx} 0.7564$$

Das Ergebnis der nichtlinearen Regression formuliert man als in geeignet gerundeter Form als

1 P $y(x) = \dfrac{a\cdot x}{b+x}$ mit $a \overset{TR}{\approx} 44.54 \pm 1.78$ und $b \overset{TR}{\approx} 17.24 \pm 0.76$

Anmerkung: Zur optischen Kontrolle des Ergebnisses wurde Bild 10-29 erstellt.

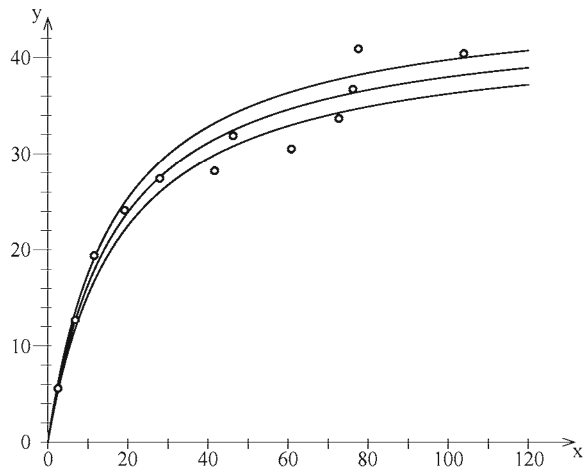



**Bild 10-29**
Vergleich zwischen den Wertepaaren der Aufgabenstellung (Kreise) und der nichtlinearen Regression. Die mittlere Linie stellt den Erwartungswert der Regressionsrechnung dar, die beiden äußeren Linien begrenzen das $1\sigma$ – Intervall, das sich für die Funktion ergibt, wenn man die Parameter $a$ und $b$ um $1\sigma$ gegenüber deren Mittelwerten variiert.

## Aufgabe 10.30 Chi-Quadrat-Test einer Gleichverteilung

| | | |
|---|---|---|
| 12 min | | Punkte 6 P |

Überprüfen Sie mit Hilfe eines Chi-Quadrat-Tests die Verteilung des Zufallszahlengenerators eines Computers. Nehmen wir an, wir weisen den Zufallszahlengenerator an, uns natürliche Zahlen von 0 … 9 auszugeben und wir wollen prüfen, ob eine Gleichverteilung vorliegt, d.h. ob alle 10 möglichen Zahlen im Rahmen der statistischen Streuung mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten. Dazu lassen wir den Zufallszahlengenerator 1000 Zahlen ausgeben und zählen, welche Zahl mit welcher Häufigkeit angezeigt wurde. Die Zählung dieser Häufigkeiten sei in Tabelle 10.30a angegeben.

**Tabelle 10.30a** Absolute Häufigkeiten des Auftretens von Zahlen bei einem Zufallszahlengenerator.

| ausgegebene Zahl $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit des Auftreten von $i$ | 95 | 100 | 107 | 112 | 111 | 100 | 95 | 90 | 93 | 97 |

(a.) Berechnen Sie das $\chi^2$ unter Verwendung der in Tabelle 10.30a angesetzten Klasseneinteilung in 10 Klassen.

(b.) Interpretieren Sie $\chi^2$: Kann man aufgrund unseres Tests bei einer statistischen Sicherheit von 90 % einer Gleichverteilung widersprechen?

Hinweis: Zu Aufgabenteil (b.) → In Formelsammlungen findet man Tabellen, die einen Zusammenhang zwischen dem Freiheitsgrad des Tests $f$, der statistischen Sicherheit $p$ und der Testvariablen $\chi^2$ herstellen. Ein für unsere Übungszwecke ausreichender Auszug aus einer derartigen Tabelle findet sich zum Beispiel auch im Anhang des vorliegenden Buches als Tabelle 15.2.

## ▾ Lösung zu 10.30

(a.) Zur Berechnung des $\chi^2$ wurde Tabelle 10.30b angelegt. Wie man sieht ist $\chi^2 = 5.22$

**Tabelle 10.30b** Bestimmung des $\chi^2$ zur Prüfung der Gleichverteilung eines Zufallszahlengenerators

| ausgegebene Zahl $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Theoret. erwartete Häufigkeit $n_i^*$ | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 | 1000 |
| Beobachtete Häufigkeit $n_i$ | 95 | 100 | 107 | 112 | 111 | 100 | 95 | 90 | 93 | 97 | 1000 |
| Absolute Differenz $\Delta n_i = n_i - n_i^*$ | -5 | 0 | +7 | +12 | +11 | 0 | -5 | -10 | -7 | -3 | 0 |
| Quadrat der rel. Differenz $\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$ | 0.25 | 0.00 | 0.49 | 1.44 | 1.21 | 0.00 | 0.25 | 1.00 | 0.49 | 0.09 | 5.22 |

4 P

(b.) Die Zahl der Freiheitsgrade des Tests ist $f = k - 1 - z = 10 - 1 - 0 = 9$

mit $k = 10 =$ Zahl der Klassen und $z = 0 =$ Zahl der Parameter der Verteilung

Nach der Aufgabenstellung ist die Nullhypothese die Gültigkeit der Gleichverteilung. Bei $f = 9$ Freiheitsgraden und einem Signifikanzniveau von $p = 90\% = 0.90$ erhalten wir einen
2 P kritischen Grenzwert von 14.68. Wäre $\chi^2 \geq 14.68$, so könnten wir mit einer Signifikanz von 90 % die Gültigkeit der Gleichverteilung ablehnen. Dies ist bei unserem Test nicht der Fall, also müssen wir die Gleichverteilung des Zufallszahlengenerators akzeptieren.

## Aufgabe 10.31 Chi-Quadrat-Test einer Gauß-Verteilung

| | | Punkte: |
|---|---|---|
| Schritt 1 → 7 min | | Schritt 1 → 3 P |
| Schritt 2 → 20 min | | Schritt 2 → 12P |
| Schritt 3 → 3 min | | Schritt 3 → 2 P |

Messwerte folgen häufig einer Gauß-Verteilung. Bei einem speziellen Messgerät haben Sie den Verdacht auf systematische Messfehler derart, dass die Messwerte vielleicht nicht einer Gauß-Verteilung folgen. Deshalb überprüfen Sie im Laufe der Zeit das Messgerät wiederholt an einer Kalibriereinrichtung (die immer den selben Ausgangswert liefert) und erhalten eine lange Liste einzelner Messwerte.

Um die kontinuierlichen Messwerte einem Chi-Quadrat-Test zuführen zu können, müssen diese in Klassen eingeordnet werden. Diese Einteilung ist bereits in der Aufgabenstellung vorweggenommen, um die Menge der zu druckenden Daten zu gering zu halten. Das Ergebnis dieser Klasseneinteilung findet man in Tabelle 10.31a.

**Tabelle 10.31a** Klasseneinteilung der Messwerte des zu prüfenden Messgerätes

| Klasse | $[5.6;5.7[$ | $[5.7;5.8[$ | $[5.8;5.9[$ | $[5.9;6.0[$ | $[6.0;6.1[$ | $[6.1;6.2[$ | $[6.2;6.3[$ | $[6.3;6.4[$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Häufigkeit | 3 | 11 | 24 | 27 | 25 | 20 | 11 | 3 |

Werten Sie bitte diese Liste aus: Würden Sie aufgrund des Ergebnisses eines $\chi^2$-Tests das Messgerät beim Hersteller mit einer Sicherheit von wenigstens 90 % reklamieren?

## Lösung zu 10.31

Die Arbeitsschritte sind folgende:

Schritt 1 → Wenn wir eine Gauß-Verteilung überprüfen wollen, müssen wir sie bestimmen, d.h. wir müssen ihre Parameter $\mu$ und $\sigma$ berechnen.

Schritt 2 → Berechnung des $\chi^2$. Dazu bestimmen wir die theoretisch erwarteten Häufigkeiten aus der in Schritt 1 berechneten Gauß-Verteilung.

Schritt 3 → Interpretation des $\chi^2$ durch Vergleich mit den Grenzwerten entsprechend der Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung.

Diese Schritte arbeiten wir nun durch:

Schritt 1: Am genauesten wäre es, die Parameter der Gauß-Verteilung aus allen Einzelmesswerten zu bestimmen. Da in der Aufgabenstellung aber nur die Klasseneinteilung gegeben ist, müssen wir uns darauf beziehen.

Die Anzahl der Messwerte beträgt $N = 3+11+24+27+25+20+11+3 = 124$ .

Zur Berechnung des Erwartungswertes setzen wir in Näherung voraus, dass innerhalb jeder einzelnen Klasse die Messwerte gleichverteilt seien. Mit sehr viel Rechenaufwand könnte man die Asymmetrie der Verteilung der Einzelwerte innerhalb jeder Klasse berücksichtigen, aber dies übersteigt den zeitlichen Rahmen von Klausuraufgaben. Wir setzen also für jede einzelne Klasse deren Mittelwert ein und erhalten die Parameter der Gauß-Verteilung:

$$\mu \approx \tfrac{1}{N} \cdot \left(3 \cdot 5.65 + 11 \cdot 5.75 + 24 \cdot 5.85 + 27 \cdot 5.95 + 25 \cdot 6.05 + 20 \cdot 6.15 + 11 \cdot 6.25 + 3 \cdot 6.35\right) = \tfrac{743.3}{124} \overset{TR}{\approx} 5.994$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(x_i - \mu\right)^2 \cdot p\left(x_i\right)$$

mit $x_i =$ Messwert Nr. $i$

$p(x_i) =$ Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von $x_i$

(= relative Häufigkeit des Auftretens)

$$\Rightarrow \quad \sigma^2 \approx \tfrac{3}{124} \cdot (5.65-\mu)^2 + \tfrac{11}{124} \cdot (5.75-\mu)^2 + \tfrac{24}{124} \cdot (5.85-\mu)^2 + \ldots + \tfrac{3}{124} \cdot (6.35-\mu)^2 \overset{TR}{\approx} 2.60165 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow \quad \sigma = \sqrt{\sigma^2} \overset{TR}{\approx} 0.1612964$$ 3 P

Damit ist bestimmt, welche Gauß-Verteilung vorliegen müsste, wenn die Daten denn einer solchen Verteilung folgen. Mit anderen Worten: Die durch die angegebenen $\mu$ und $\sigma$ bestimmte Gauß-Verteilung ist unter allen Gauß-Verteilungen diejenige, die am besten zu den Messwerten passt.

Schritt 2: Die theoretischen Häufigkeiten der Gauß-Verteilung für alle einzelnen Klassen $[x_U; x_O[$ müssen über die Verteilungsfunktion berechnet werden, also im Prinzip aus der Integration der Dichtefunktion gemäß

$$p\left([x_U; x_O[\right) = \int_{x_U}^{x_O} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \underbrace{\Phi(x_O) - \Phi(x_U)}_{\substack{\text{Einsetzen der} \\ \text{Verteilungsfunktion}}} \qquad (*)$$

Wie an dieser Stelle üblich greifen wir auf eine Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung zurück (vgl. Aufgabe 10.16 und Tabelle 15.1). Dazu müssen sämtliche Intervallgrenzen (die auch die Integralgrenzen bilden) in Einheiten von $\mu$ und $\sigma$ ausgedrückt werden. Durch Anwendung der Formel $u = \frac{u^* - \mu}{\sigma}$ aus Aufgabe 10.16 rechnen wir die Argumente $u^*$ unserer Gauß-Verteilung in die Argumente $u$ der Standardnormalverteilung um und bestimmen daraus die Werte der Verteilungsfunktion an den jeweiligen Grenzen $\Phi\left(u^*\right)$.

**Stolperfalle:**

Da die Gauß-Verteilung eine Näherung ist, die auch für extrem weit vom Mittelwert entfernte Punkte $u$ bzw. $u^*$ immer noch endliche Werte der Verteilungsfunktion $\Phi$ liefert, müssen die äußersten Intervallgrenzen bei $-\infty$ und $+\infty$ festgelegt werden.

Die untere Grenze als unterer Rand des ersten Intervall wird somit nicht aus $u^* = 5.6$ bestimmt, sondern sie lautet korrekterweise:

$$-\infty = \mu \overbrace{-\infty}^{\text{u}} \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = -\infty\right) = 0$$

In analoger Weise liegt die obere Integralgrenze des letzten Intervalls bei $\Phi(+\infty) = 1$.

Zur Bestimmung der nachfolgend angegebenen Werte der Verteilungsfunktion ist zwischen den in Tabelle 15.1 angegebenen Werten linear zu interpolieren. Am Beispiel des allerersten Wertes wird diese lineare Interpolation vorgeführt – für alle weiteren Werte mögen die Leser diese Interpolation der Einfachheit halber selbst durchrechnen und mit den Ergebnissen der Musterlösung vergleichen.

Der erste Wert, für den wir die Verteilungsfunktion aus der Tabelle entnehmen müssen, ist $u^* = 5.7 \quad \Rightarrow \quad u = 1.825$ . Die zugehörige lineare Interpolation wird wie folgt demonstriert:

Der Tabelle der Verteilungsfunktion entnimmt man die Werte

$$\left.\begin{array}{l} \bullet \text{ für } \; u_1 = 1.82 \;\; \rightarrow \;\; \Phi\left(u_1\right) = 0.96562 \\ \bullet \text{ für } \; u_2 = 1.84 \;\; \rightarrow \;\; \Phi\left(u_2\right) = 0.96712 \end{array}\right\} \;\; \Rightarrow \;\; \Delta u = u_2 - u_1 = 0.02\,, \quad \Delta\Phi = \Phi\left(u_2\right) - \Phi\left(u_1\right) = 0.0015$$

Wegen $u - u_1 = 1.825 - 1.82 = 0.005 = \frac{1}{4} \cdot \Delta u \quad \Rightarrow \quad u = u_1 + \frac{1}{4} \cdot \Delta u$ interpolieren wir linear (Abkürzung $\overset{L.I.}{\approx}$): $\quad \Phi\left(u\right) = \Phi\left(u_1 + \frac{1}{4}\Delta u\right) \overset{L.I.}{\approx} \Phi\left(u_1\right) + \frac{1}{4} \cdot \Delta\Phi = 0.96562 + \frac{1}{4} \cdot 0.0015 = 0.965995$

Da die Werte der Verteilungsfunktion in der Tabelle mit einer Genauigkeit von 5 signifikanten Stellen angegeben sind, runden wir auch den interpolierten Wert auf ebendiese Anzahl von Stellen: $\Phi(1.825) \overset{L.I.}{\approx} 0.96600$

In analoger Weise stellen wir für alle zur Lösung der Aufgabe benötigten Argumente die Werte der Verteilungsfunktion dar:

$$-\infty = \mu \overbrace{-\infty}^{u} \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = -\infty\right) = 0$$

$$5.7 \overset{TR}{\approx} \mu - 1.825 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 5.7\right) = 1 - \Phi\left(u = 1.825\right) = 1 - 0.96600 = 0.03400$$ 1 P

$$5.8 \overset{TR}{\approx} \mu - 1.205 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 5.8\right) = 1 - \Phi\left(u = 1.205\right) = 1 - 0.88589 = 0.11411$$ 1 P

$$5.9 \overset{TR}{\approx} \mu - 0.585 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 5.9\right) = 1 - \Phi\left(u = 0.585\right) = 1 - 0.72072 = 0.27928$$ 1 P

$$6.0 \overset{TR}{\approx} \mu + 0.035 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 6.0\right) = \Phi\left(u = 0.035\right) = 0.51396$$ 1 P

$$6.1 \overset{TR}{\approx} \mu + 0.655 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 6.1\right) = \Phi\left(u = 0.655\right) = 0.74376$$ 1 P

$$6.2 \overset{TR}{\approx} \mu + 1.275 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 6.2\right) = \Phi\left(u = 1.275\right) = 0.89884$$ 1 P

$$6.3 \overset{TR}{\approx} \mu + 1.895 \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = 6.3\right) = \Phi\left(u = 1.895\right) = 0.97095$$ 1 P

$$+\infty \overset{TR}{\approx} \mu + \infty \cdot \sigma \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(u^* = +\infty\right) = 1$$

Durch Differenzbildung entsprechend Gleichung $(*)$ gelangen wir nun zu den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Intervalle:

$$p\left(\left[-\infty; 5.7\right[\right) = \Phi\left(u^* = 5.7\right) - \Phi\left(u^* = -\infty\right) = 0.03400$$

$$p\left(\left[5.7; 5.8\right[\right) = \Phi\left(u^* = 5.8\right) - \Phi\left(u^* = 5.7\right) = 0.11411 - 0.03400 = 0.08011$$

$$p\left(\left[5.8; 5.9\right[\right) = \Phi\left(u^* = 5.9\right) - \Phi\left(u^* = 5.8\right) = 0.27928 - 0.11411 = 0.16517$$

$$p\left(\left[5.9; 6.0\right[\right) = \Phi\left(u^* = 6.0\right) - \Phi\left(u^* = 5.9\right) = 0.51396 - 0.27928 = 0.23468$$

$$p\left(\left[6.0; 6.1\right[\right) = \Phi\left(u^* = 6.1\right) - \Phi\left(u^* = 6.0\right) = 0.74376 - 0.51396 = 0.22980$$

$$p\left(\left[6.1; 6.2\right[\right) = \Phi\left(u^* = 6.2\right) - \Phi\left(u^* = 6.1\right) = 0.89884 - 0.74376 = 0.15508$$

$$p\left(\left[6.2; 6.3\right[\right) = \Phi\left(u^* = 6.3\right) - \Phi\left(u^* = 6.2\right) = 0.97095 - 0.89884 = 0.07211$$

$$p\left(\left[6.3; +\infty\right[\right) = \Phi\left(u^* = +\infty\right) - \Phi\left(u^* = 6.3\right) = 1 - 0.97095 = 0.02905$$ 2 P

Damit lässt sich die Tabelle 10.31b erstellen, wenn man bedenkt, dass die theoretisch zu erwartende Häufigkeit nichts anderes ist als $n_i^* = N \cdot p\left(\left[x_U; x_O\right[\right)$ .

**Tabelle 10.31b** Bestimmung des $\chi^2$ zur Prüfung der Gauß-Verteilung einer Messreihe.

| Klasse | $[-\infty;5.7[$ | $[5.7;5.8[$ | $[5.8;5.9[$ | $[5.9;6.0[$ | $[6.0;6.1[$ | $[6.1;6.2[$ | $[6.2;6.3[$ | $[6.3;+\infty[$ | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Messung → $n_i$ | 3 | 11 | 24 | 27 | 25 | 20 | 11 | 3 | 124 |
| Theorie → $n_i^*$ | 4.216 | 9.934 | 20.481 | 29.100 | 28.495 | 19.230 | 8.942 | 3.602 | 124 ** |
| $\Delta n_i = n_i - n_i^*$ | -1.216 | +1.066 | +3.519 | -2.100 | -3.495 | +0.770 | +2.058 | -0.602 | 0 ** |
| $\frac{(\Delta n_i)^2}{n_i^*}$ | 0.3507 | 0.1144 | 0.6046 | 0.1516 | 0.4287 | 0.0308 | 0.4736 | 0.1006 | 2.255 |

3 P

** Eine eventuelle Rundungs-Ungenauigkeit in der letzten Stelle könnte ignoriert werden.

Als Ergebnis von Tabelle 10.31b sehen wir: $\chi^2 = 2.255$

Schritt 3: Wir haben $k = 8$ Klassen und eine Verteilung mit $z = 2$ Parametern. Daraus ergibt sich eine Zahl von Freiheitsgraden $f = k - 1 - z = 8 - 1 - 2 = 5$. Bei einem Signifikanzniveau von $p = 90\%$ finden wir als Vergleichs-Grenzwert in der Tabelle der Quantile der Chi-
2 P Quadrat-Verteilung $g = 9.24$. Da $\chi^2 = 2.255 < g = 9.24$ haben wir eine Gauß-Verteilung nicht mit der geforderten Signifikanz widerlegt. In diesem Sinne ist eine Reklamation aufgrund der vorhandenen statistischen Daten nicht sinnvoll.

# 11 Folgen und Reihen

## Aufgabe 11.1 Erkennen von Bildungsgesetzen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…e.) je 1…2 min | | Punkte je 1P |

Versuchen Sie, Bildungsgesetze für die nachfolgend gegebenen Folgen aufzustellen, und zwar entweder in expliziter oder in rekursiver Formulierung.

(a.) $\langle a_i \rangle = \frac{2}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{6}; \frac{5}{8}; \frac{6}{10}; ...$ (b.) $\langle b_i \rangle = 3; 8; 15; 24; 35; ....$ (c.) $\langle c_i \rangle = +1; \frac{-1}{2}; \frac{+1}{3}; \frac{-1}{4}; \frac{+1}{5}; \frac{-1}{6} ....$

(d.) $\langle d_i \rangle = 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...$ (e.) $\langle e_i \rangle = 1; 2; 5; 14; 41; ...$

## Lösung zu 11.1

**Vorbemerkung:**

Die Lösungen erhält man durch geschicktes „Ausprobieren". Auch kann man zu jeder einzelnen Folge verschiedene Formulierungen des Bildungsgesetzes finden; d.h. die Lösungen sind nicht eindeutig. Bei der Beurteilung der Korrektheit einer Lösung kommt es also lediglich darauf an, ob sie die in der Aufgabenstellung genannten Zahlen korrekt reproduziert.

(a.) Betrachtet man Zähler und Nenner getrennt, so erkennt man die Folge sofort:
$Zähler = i+1$, $Nenner = 2 \cdot i$ bei Zählbeginn mit $i=1 \Rightarrow \langle a_i \rangle = \frac{i+1}{2i}$ 1 P

(b.) Die Zahlen sind alle um $1$ kleiner als die Quadratzahlen. Bei Zählbeginn mit $i=1$ kann man also schreiben: $\langle b_i \rangle = (i+1)^2 - 1$ 1 P

(c.) Der Zähler enthält ein alternierendes Vorzeichen, das sich bei Zählbeginn mit $i=1$ ausdrücken lässt als $Zähler = (-1)^{i+1}$. Damit lautet die gesamte Folge: $\langle c_i \rangle = \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ 1 P

(d.) Die Folge ist unter dem Namen Fibonacci-Folge bekannt und wird üblicherweise rekursiv definiert: Anker: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ Rekursion: $a_i = a_{i-2} + a_{i-1}$ 1 P

(e.) Eine mögliche rekursive Lösung lautet: Anker: $a_1 = 1$, Rekursion: $a_i = a_{i-1} + 3^{i-2}$ 1 P
Eine ebenfalls rekursive Alternativlösung lautet: Anker: $a_1 = 1$, Rekursion: $a_i = 3 \cdot a_{i-1} - 1$

## Aufgabe 11.2 Grenzwerte konvergenter Folgen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a…e.) je 1…2 min | | Punkte je 1 P |

Gegeben sind die Glieder einiger Folgen, deren Grenzwerte $g = \lim\limits_{i\to\infty} a_i$ Sie bitte bestimmen, falls diese existieren:

(a.) $a_i = \dfrac{3i^2 - 2i + 1}{i^2 + 2i + 3}$ (b.) $a_i = \dfrac{5\cdot\sqrt[3]{i^4} - \sqrt{i} + 15}{i\cdot\left(3 - \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{i}\right)}$ (c.) $a_i = \dfrac{\sqrt{i^2 - 1}}{\sqrt{i+1}}$

(d.) $a_i = \dfrac{i^{10}}{2^i}$ (e.) $a_i = \dfrac{i}{\lg(i)}$

## Lösung zu 11.2

Wir verzichten auf Konvergenzbeweise mit „ε -Logik“ wie sie von Studierenden der Mathematik im Hauptfach zu führen wären und machen uns nur ganz pragmatisch die Grenzwerte plausibel.

(a.) Zuerst wird durch die höchsten Potenzen von $i$ gekürzt, danach sind alle diejenigen Terme, die verschwinden (wie etwa Summanden, die gegen Null gehen oder Faktoren, die gegen Eins gehen) durchgekreuzt.

1 P $$\lim_{i\to\infty} a_i = \frac{3i^2 - 2i + 1}{i^2 + 2i + 3} = \lim_{i\to\infty} \frac{3 - \cancel{\frac{2}{i}} + \cancel{\frac{1}{i^2}}}{1 + \cancel{\frac{2}{i}} + \cancel{\frac{3}{i^2}}} = 3$$

1 P (b.) $$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} \frac{5\cdot\sqrt[3]{i^4} - \sqrt{i} + 15}{i\cdot\left(3 - \frac{1}{i} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{i}\right)} = \underbrace{\lim_{i\to\infty} \frac{5\cdot i^{\frac{4}{3}} - i^{\frac{1}{2}} + 15}{3i - 1 + \frac{1}{2}\cdot i^{\frac{4}{3}}} = \lim_{i\to\infty} \frac{5 - \cancel{i^{\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\right)}} + \cancel{15\cdot i^{-\frac{4}{3}}}}{\cancel{3i^{\left(1-\frac{4}{3}\right)}} - \cancel{i^{-\frac{4}{3}}} + \frac{1}{2}}}_{\text{kürzen durch die höchste Potenz von } i} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$$

1 P (c.) $$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} \frac{\sqrt{i^2 - 1}}{\sqrt{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \frac{\sqrt{i+1}\cdot\sqrt{i-1}}{\sqrt{i+1}} = \lim_{i\to\infty} \sqrt{i-1} = \infty$$

Diese Folge ist divergent, d.h. es existiert kein Grenzwert.

(d.) $$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} \frac{i^{10}}{2^i} = 0$$

1 P

Begründung: Die Exponentialfunktion ist für $\lim\limits_{i\to\infty}$ immer stärker als jede Potenz.

(e.) $$\lim_{i\to\infty} a_i = \lim_{i\to\infty} \frac{i}{\lg(i)} = \infty$$ (divergente Folge, d.h. es existiert kein Grenzwert)

1 P

Begründung: Die Logarithmusfunktion ist für $\lim\limits_{i\to\infty}$ immer schwächer als jede Potenz.

**Arbeitshinweis:**

Die Dominanz der Exponentialfunktion bzw. des Logarithmus gegenüber Potenzen kann man sogar mit den folgenden Beispielen illustrieren:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{i^{1000}}{1.0001^i} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{i\to\infty} \frac{\lg_{1.0001}(i)}{i^{1000}} = 0$$

## Aufgabe 11.3 Endliche Reihe (als Summenformel)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 2 min | | | Punkte | |
| | (b.) | 4 min | (a,b.) | | (a.) 1 P | (b.) 2 P |
| | (c.) | 5 min | | | | |
| | (d.) | 8 min | (c,d.) | | (c.) 3 P | (d.) 4 P |

Berechnen Sie die Summen, die durch die nachfolgenden endlichen Reihen gegeben sind:

(a.) $S_a = \sum_{i=1}^{120}(3i-2)$ (b.) $S_b = \sum_{i=10}^{123}(3i-2)$

(c.) $S_c = \sum_{i=1}^{123}\sum_{j=1}^{76}(3i+2j)$ (d.) $S_d = \sum_{i=10}^{123}\sum_{j=3}^{76}(3i\cdot 2j)$

## Lösung zu 11.3

**Arbeitshinweis:**

Zur Berechnung derartiger Summen steht uns im Normalfall nur die Gauß'sche Summenformel zur Verfügung, auf die wir kompliziertere Summen wie die gegebenen zurückführen müssen. Sie lautet: $S = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Dies führen wir nun bei den gestellten Aufgaben aus.

(a.) Wir teilen auf in einzelne Summen, die entweder nur das $i$ oder Konstanten enthalten:

$$S_a = \sum_{i=1}^{120}(3i-2) = 3\cdot\sum_{i=1}^{120} i - \sum_{i=1}^{120} 2 = 3\cdot\frac{120\cdot 121}{2} - (120\cdot 2) = 21540$$ 1 P

(b.) Ein möglicher Lösungsweg ist eine Verschiebung des Summationsindex:

$$S_b = \sum_{i=10}^{123}(3i-2) = \sum_{i=1}^{114}(3\cdot(i+9)-2) = \sum_{i=1}^{114}(3i+25) = 3\cdot\sum_{i=1}^{114} i + \sum_{i=1}^{114} 25 = 3\cdot\frac{114\cdot 115}{2} + (114\cdot 25) = 22515$$

Als alternativen Lösungsweg könnte man auch die Differenz zweier Teilsummen bilden: 2 P

$$S_b = \sum_{i=10}^{123}(3i-2) = \sum_{i=1}^{123}(3i-2) - \sum_{i=1}^{9}(3i-2) = \left[3\cdot\sum_{i=1}^{123} i - \sum_{i=1}^{123} 2\right] - \left[3\cdot\sum_{i=1}^{9} i - \sum_{i=1}^{9} 2\right] =$$

$$= \left[3\cdot\frac{123\cdot 124}{2} - (123\cdot 2)\right] - \left[3\cdot\frac{9\cdot 10}{2} - (9\cdot 2)\right] = 22515$$

(c.) Wir berechnen zuerst die innere Summe (über $j$) und danach die äußere (über $i$):

$$S_c = \sum_{i=1}^{123}\sum_{j=1}^{76}(3i+2j) = \underbrace{\sum_{i=1}^{123}\left[3\cdot\sum_{j=1}^{76}(i) + 2\cdot\sum_{j=1}^{76}(j)\right] = \sum_{i=1}^{123}\left[3\cdot 76\cdot i + 2\cdot\frac{76\cdot 77}{2}\right]}_{\text{bzgl. der Summation über } j \text{ ist das } i \text{ eine Konstante}} = 228\cdot\sum_{i=1}^{123} i + \sum_{i=1}^{123} 5852$$ 3 P

$$= 228 \cdot \frac{123 \cdot 124}{2} + 123 \cdot 5852 = 2458524$$

(d.) Wieder berechnen wir zuerst die Summe über $j$ und danach die Summe über $i$, wobei allerdings zusätzlich noch eine Verschiebung der Summationsindizes nötig wird:

$$S_d = \sum_{i=10}^{123} \sum_{j=3}^{76} (3i \cdot 2j) = \sum_{i=1}^{114} \sum_{j=1}^{74} \left(3(i+9) \cdot 2(j+2)\right) = 6 \cdot \sum_{i=1}^{114} \sum_{j=1}^{74} \left((i+9)(j+2)\right)$$

4 P

$$= 6 \cdot \sum_{i=1}^{114} \sum_{j=1}^{74} (ij + 9j + 2i + 18) = 6 \cdot \sum_{i=1}^{114} \left[ i \cdot \sum_{j=1}^{74} j + 9 \cdot \sum_{j=1}^{74} j + (2i+18) \cdot \sum_{j=1}^{74} 1 \right]$$

$$= 6 \cdot \sum_{i=1}^{114} \left[ i \cdot \frac{74 \cdot 75}{2} + 9 \cdot \frac{74 \cdot 75}{2} + (2i+18) \cdot (1 \cdot 74) \right] = 6 \cdot \sum_{i=1}^{114} \left[ 2923 \cdot i + 26307 \right]$$

$$= 6 \cdot 2923 \cdot \sum_{i=1}^{114} i + 6 \cdot 26307 \cdot \sum_{i=1}^{114} 1 = 17538 \cdot \frac{114 \cdot 115}{2} + 6 \cdot 26307 \cdot 114 = 132955578$$

## Aufgabe 11.4 Textbsp. Zum konsequenten logischen Denken

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 min | | Punkte 2 P |

Eine Raupe klettert auf einen 10 Meter hohen Baum. Tagsüber steigt sie 100 Zentimeter auf, nachts schläft sie und rutscht dabei 80 Zentimeter herunter. Nach wie vielen Tagen erreicht sie die Spitze des Baumes?

## Lösung zu 11.4

Pro Tag und Nacht schafft die Raupe in der Summe 20 cm. Eine Höhe von 5 Metern erreicht sie also nach 25 Tagen und Nächten, eine Höhe von 9 Metern nach 45 Tagen und Nächten. Aber am Abend des 46sten Tages erreicht sie die Spitze, denn 9 Meter plus 100 Zentimeter sind 10 Meter.

In Formeln:

2 P

Die Höhe $h$ am Abend des $n$ – ten Tages lautet: $\underbrace{h = 100cm + \sum_{i=1}^{n-1} 20\,cm}_{\text{so geht's}} \neq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 20\,cm}_{\text{und so eben nicht}}$

## Aufgabe 11.5 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 min | | Punkte 1 P |

Auf einem Konto werden zu Beginn eines Jahres 1000 EURO angelegt und über 10 Jahre zu 6 % verzinst. Wie viel Geld ist nach Ablauf der 10 Jahre vorhanden?

## Lösung zu 11.5

Es handelt sich wegen der Zinseszinsen um eine geometrische Folge $a_n = a_0 \cdot q^n$ mit $a_0 = 1000\,€$ und $q = 1.06$, sowie $n = 10$.

Gefragt ist $a_{10} = a_0 \cdot q^{10} = 1000\,€ \cdot 1.06^{10} = 1790.85\,€$. Dies ist das Kapital nach 10 Jahren. 1 P

## Aufgabe 11.6 Zinseszins-Berechnung (geometrische Reihe)

| | | |
|---|---|---|
| 5 min | | Punkte 3 P |

Jemand spart für eine Rente und legt dafür zu Beginn jedes Jahres 2000 EURO auf ein Konto. Das macht er 30 Jahre lang und am Ende des 30. Jahres bekommt er das Geld mitsamt Zins und Zinseszins ausbezahlt. Wie viel Geld bekommt er dann, wenn man eine Verzinsung von 5% pro Jahr voraussetzt?

## Lösung zu 11.6

**Arbeitshinweis:**

Es handelt sich um die Summe einer geometrischen Reihe.

Wenn wir die einzelne Rate von $2000\,€$ mit $r$ bezeichnen, dann wird die erste Rate 30 Jahre verzinst, die zweite Rate 29 Jahre, usw. Für das gesamte Kapital $K_n$ am Ende der $n = 30$ Jahre ergibt sich somit: $K_n = \underbrace{r \cdot q^n}_{=:a_n} + \underbrace{r \cdot q^{n-1}}_{=:a_{n-1}} + \ldots + \underbrace{r \cdot q^1}_{=:a_1}$ (wo die Summanden $a_n$ die Summanden einer geometrischen Reihe sind).

Darin ist $q = 1.05$ für den Zinssatz und $n = 30$ für die Anzahl der Jahre.

Anmerkung: Ein Summand $r \cdot q^0$ tritt nicht auf, da die letzte Rate zu Beginn des 30. Jahres einbezahlt wird, aber am Ende des 30. Jahres die Verzinsung endet.

Die Summenformel einer endlichen geometrischen Reihe findet man in einer Formelsammlung z.B. in der Form: 1 P

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} K_n = r \cdot \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \qquad \text{mit } a_n = a_0 \cdot q^n = r \cdot q^n \text{ und } a_0 = r$$

**Stolperfalle:**

Die Summenformel der geometrischen Reihe taucht in verschiedenen Formelsammlungen mit unterschiedlichen Indizes auf. Manchmal beginnt sie bei $i = 1$, manchmal aber bei $i = 0$. An dieser Stelle muss man auf die Indizierung aufpassen und gegebenenfalls den Index geeignet verschieben.

Auch hier ist das Anpassen der Indizes nötig, denn $K_n$ beginnt bei $n=1$, aber $S_n$ bei $n=0$.
Am leichtesten geht das, wenn man schreibt $S_n = K_n + a_0 \cdot q^0 \quad \Rightarrow \quad K_n = S_n - a_0 \cdot q^0 = S_n - r$.
Damit folgt für das Gesamtkapital am Ende des Zeitraumes:

2 P $$K_n = r \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} - r = 2000\,€ \cdot \frac{1.05^{31}-1}{1.05-1} - 2000\,€ = 139521.58\,€$$

## Aufgabe 11.7 Binomialkoeffizienten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a…f.) | je 1 min | (a…f.) | Punkte je 1 P |

Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten ohne Benutzung eines Taschenrechners:

(a.) $\binom{10}{6}$ (b.) $\binom{6}{10}$ (c.) $\binom{5/2}{3}$ (d.) $\binom{2/5}{3}$ (e.) $\binom{-5/2}{3}$ (f.) $\binom{-2/5}{3}$

## Lösung zu 11.7

**Arbeitshinweis:**

Für die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ gibt es zweierlei Definitionen.

Die eine gilt für $n,k \in \mathbb{N}$ und $k<n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ mit der Zusatzdefinition $\binom{n}{0} = 1$

Die andere enthält die erstgenannte, gilt aber umfassender, nämlich für $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{R}$:

$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ (ohne die Bedingung $k<n$)

und ebenfalls wieder mit der Zusatzdefinition $\binom{n}{0} = 1$

Da die zweigenannte Definition weniger Arbeit macht (ohne Taschenrechner) und überdies allgemeingültiger ist, folgen wir dieser:

1 P (a.) $\binom{10}{6} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}{3} = 210$

1 P (b.) $\binom{6}{10} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3)}{10!} = 0$

1 P (c.) $\binom{5/2}{3} = \frac{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 8} = \frac{5}{16}$

1 P (d.) $\binom{2/5}{3} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{-8}{5}}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{-(-8)}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{8}{125}$

(e.) $\binom{-5/2}{3} = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{5\cdot 7\cdot 9}{2\cdot 3\cdot 8} = -\frac{35\cdot 3}{16} = -\frac{105}{16}$ 1 P

(f.) $\binom{-2/5}{3} = \frac{\frac{-2}{5}\cdot\frac{-7}{5}\cdot\frac{-12}{5}}{1\cdot 2\cdot 3} = -\frac{2\cdot 7\cdot 2}{5\cdot 5\cdot 5} = \frac{-28}{125}$ 1 P

## Aufgabe 11.8 Binomischer Lehrsatz

| | | |
|---|---|---|
| 12 min | | Punkte 6 P |

Sie kennen die Anwendung des Binomischen Lehrsatzes zur Berechnung von $(a+b)^n$ mit $n \in \mathbb{R}$. Benutzen Sie diese Anwendung zur Berechnung von $\sqrt{10}$ mit einer Genauigkeit von mindestens 4 signifikanten Stellen.

(Wer diese Anwendung aus der Vorlesung nicht kennt, kann sie mit Hilfe von Taylorreihen herleiten. Diese Herleitung käme dann zur hier vorgestellten Musterlösung hinzu, was den zeitlichen Aufwand und die Zahl der Punkte gegenüber den Angaben im Aufgabenkopf erhöhen würde.)

## Lösung zu 11.8

**Arbeitshinweis:**

Die besagte Anwendung des Binomischen Lehrsatzes für $n \in \mathbb{R}$ lautet

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{mit } n \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{N}$$

sowie den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$

und der Zusatzdefinition $\binom{n}{0} = 1$ .

Die Berechnung von Wurzeln funktioniert natürlich nur, wenn die Reihe konvergiert. Speziell für den allgemein bekannten Fall $a=1$ und $|b| \ll 1$ ist dies gewährleistet. Aus diesem Grund wollen wir uns auf diesen Fall zurückziehen, der auch in Formelsammlungen zu finden ist. Die Konvergenz verläuft um so schneller, je kleiner $|b|$ ist.

Wollen wir die Berechnung von $\sqrt{10}$ auf den Fall $a=1$ und $|b| \ll 1$ beziehen, so leisten wir als Vorarbeit die folgende Umformung: Es gilt $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\cdot\sqrt{1+\frac{1}{9}} = 3\cdot\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ .

Wir berechnen also $\left(1+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ mit $a=1$, $b=\frac{1}{9}$, $n=\frac{1}{2}$, indem wir in den Binomischen Lehrsatz einsetzen, um später das Ergebnis dieser Berechnung mit 3 multiplizieren zu können:

$$(a+b)^{\frac{1}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}\cdot a^{n-k}\cdot b^{k}$$

$$=\binom{1/2}{0}a^{\frac{1}{2}}b^{0}+\binom{1/2}{1}a^{-\frac{1}{2}}b^{1}+\binom{1/2}{2}a^{-\frac{3}{2}}b^{2}+\binom{1/2}{3}a^{-\frac{5}{2}}b^{3}+\binom{1/2}{4}a^{-\frac{7}{2}}b^{4}+\dots$$

$$=1\cdot1^{\frac{1}{2}}\cdot1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}\cdot1^{-\frac{1}{2}}\cdot b+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\cdot1^{-\frac{3}{2}}\cdot b^{2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}\cdot1^{-\frac{5}{2}}\cdot b^{3}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)}{4!}\cdot1^{-\frac{7}{2}}\cdot b^{4}+\dots$$

$$=1+\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}b^{2}+\frac{3}{48}b^{3}-\frac{15}{16\cdot24}b^{4}+\dots=1\underbrace{+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}}_{\overset{TR}{\approx}55555.56\cdot10^{-6}}\underbrace{-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9^{2}}}_{\overset{TR}{\approx}-1543.21\cdot10^{-6}}\underbrace{+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{9^{3}}}_{\overset{TR}{\approx}+85.73\cdot10^{-6}}\underbrace{-\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{9^{4}}}_{\overset{TR}{\approx}-5.95\cdot10^{-6}}+\dots$$

$$\Rightarrow\quad(a+b)^{\frac{1}{2}}\overset{TR}{\approx}1.05409212582\quad\Rightarrow\quad\sqrt{10}=3\cdot(a+b)^{\frac{1}{2}}\overset{TR}{\approx}3.1622764$$

6 P Da die Reihe alternierend gegen den gesuchten Grenzwert konvergiert, ist der Fehler auf jeden Fall deutlich kleiner als das letzte Glied der Summation. Betrachtet man, in welcher Weise die einzelnen Summanden in der Reihe kleiner werden, so liegt das nächste Glied etwa in der Größenordnung von $10^{-6}$ oder darunter. Dies bedeutet, dass die fünfte Nachkommastelle zuverlässig ist. Vergleicht man mit dem Wert des Taschenrechners bei einer Genauigkeit von 9 Stellen, so findet man die Bestätigung: $\sqrt{10}\overset{TR}{\approx}3.16227766$. Also haben wir sicher mindestens 6 signifikante Stellen, eine vor dem Komma und 5 dahinter.

## Aufgabe 11.9 Näherungsrechnung – Binomischer Lehrsatz

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | Punkte 3 P |

Berechnen Sie $A=\sqrt{1+0.01^{4}}-\left(1+5\cdot10^{-9}\right)$

(a.) mit dem Taschenrechner und (b.) mittels einer geeigneten Näherung

## Lösung zu 11.9

(a.) Taschenrechner: $\sqrt{1+0.01^{4}}\overset{TR}{\approx}1.000000005\quad\Rightarrow\quad A\overset{TR}{\approx}0$

(b.) Wir betrachten nochmals die Reihe von Aufgabe 11.8 zur Berechnung der Wurzel und arbeiten in zweiter Näherung, d.h. mit zwei Summanden: $(1+b)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}b-\frac{1}{8}b^{2}\pm\dots$

$$\Rightarrow\quad\sqrt{1+0.01^{4}}=1+\frac{1}{2}\cdot0.01^{4}-\frac{1}{8}\cdot0.01^{8}\pm\dots=1+5\cdot10^{-9}-1.25\cdot10^{-17}$$

3 P $$\Rightarrow\quad A=1+5\cdot10^{-9}-1.25\cdot10^{-17}\pm\dots-\left(1+5\cdot10^{-9}\right)=-1.25\cdot10^{-17}\pm\dots$$

Nur wenige Taschenrechner können so genau rechnen.

## Aufgabe 11.10 Grenzwert einer unendl. geometrischen Reihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 5 min | | Punkte<br>2 P |

Berechnen Sie den Grenzwert $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i$ .

## Lösung zu 11.10

Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Für geometrische Reihen findet man in vielen Formelsammlungen den Summenwert:

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot q^i = a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Mit $a_0 = 1$ und $q = \frac{1}{3}$ folgt: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i = 1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$ 2 P

**Stolperfalle:**

In den Formelsammlungen muss man genau auf die Indizierung aufpassen. Findet man die Summenformel der geometrischen Reihe z.B. in der Form $\sum_{i=1}^{n} a_0 \cdot q^i = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$, so wäre die Musterlösung diese:

Mit $a_1 = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{1}{3}$ ergibt sich

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i = 1 + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^i = 1 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3}-1} = 1 + \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{-1}{-\frac{2}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Man achte also darauf, dass die Summenformel der geometrischen Reihe in unterschiedlichen Formelsammlungen mitunter etwas unterschiedlich ausgedrückt sein kann.

## Aufgabe 11.11 Textbeispiel zu einer endlichen Reihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 6 min | | Punkte<br>3 P |

Berechnen Sie die Summe aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 1000 sind und weder durch 2 noch durch 3 teilbar sind.

## Lösung zu 11.11

Wir veranschaulichen die Aufgabestellung, indem wir die ersten Summanden aufschreiben:

Summe $S=\underset{\text{ja}}{1}+\underset{\text{nein}}{\cancel{2}}+\underset{\text{nein}}{\cancel{3}}+\underset{\text{nein}}{\cancel{4}}+\underset{\text{ja}}{5}+\underset{\text{nein}}{\cancel{6}}+\ldots.$

Wegen der Teilbarkeit durch 2 und durch 3 wiederholt sich dieser Zyklus in 6er- Perioden, also beginnend bei 7,13,19,….

Mit „ja" sind die Zahlen gekennzeichnet, die man summieren muss, mit „nein" diejenigen, die nicht summiert werden. Innerhalb 6 aufeinander folgender Ziffern werden nur zwei mitgerechnet. Somit lautet die Summe:

2 P
$$S=\sum_{n=0}^{166}(6\cdot n+1)+\sum_{n=0}^{165}(6\cdot n+5),$$

wobei das Ende der Summation genau derart festgelegt wird, dass alle Summanden kleiner als 1000 sind, aber alle in Frage kommenden Summanden kleiner als 1000 berücksichtigt werden.

Das Ausrechnen der Summen ist nun einfach:

1 P
$$S=6\cdot\left(\sum_{n=0}^{166}n\right)+\left(\sum_{n=0}^{166}1\right)+6\cdot\left(\sum_{n=0}^{165}n\right)+\left(\sum_{n=0}^{165}5\right)=6\cdot\frac{166\cdot 167}{2}+167\cdot 1+6\cdot\frac{165\cdot 166}{2}+166\cdot 5=166333$$

Zur Beachtung: Man muss genau aufpassen, dass man mit der Summation an der richtigen Stelle aufhört. Dies ist in unserer Musterlösung berücksichtigt:

Summiert man die $(6\cdot n+1)$ von $n=0...166$, so ist der höchste Summand die 997. Die Summation der $(6\cdot n+5)$ läuft hingegen von $n=0...165$, da der 166ste Summand bereits die Zahl 1001 darstellen würde.

## Aufgabe 11.12 Grenzwerte konvergenter Reihen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 4 min | (a.) | | Punkte | |
| | (b.) | 6 min | (b.) | | (a) 2 P | (b) 3 P |
| | (c.) | 8 min | (c.) | | | |
| | (d.) | 12 min | (d.) | | (c) 4 P | (d) 6 P |

Die nachfolgend gegebenen Reihen konvergieren. Berechnen Sie bitte die Grenzwerte.

(a.) $S_a=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ (b.) $S_b=\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^i$ (c.) $S_c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\cdot(i+1)}$ (d.) $S_d=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i\cdot(i+5)}$

Hinweis: Bei (c.) und (d.) ist eine Partialbruchzerlegung sinnvoll.

## Lösung zu 11.12

(a.) Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $a_0 = 1$, $q = \frac{1}{2}$. Deren Summenformel lautet $\sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot q^i = a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Mit Bezug auf die Aufgabenstellung erhalten wir:

$$S_a = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot q^i = \lim_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1} = \frac{0-1}{\left(\frac{1}{2}\right)-1} = 2$$ 2 P

(b.)

**Arbeitshinweis:**

Sieht man nicht sofort die Lösung, so schreibt man einige Glieder explizit aus und versucht eine Systematik zu erkennen, die ein Zusammenfassen von Summanden erlaubt, um die Berechnung zu vereinfachen. Diese Technik ist weit verbreitet und bei vielen Aufgaben sinnvoll einsetzbar.

Im Falle unserer Aufgabe lassen sich immer zwei aufeinander folgende Summanden voneinander subtrahieren:

$$S_b = \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{4} - \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} - \frac{1}{32}}_{=\frac{1}{32}} + \underbrace{\frac{1}{64} - \frac{1}{128}}_{=\frac{1}{128}} + \underbrace{\frac{1}{256} - \frac{1}{512}}_{=\frac{1}{512}} \pm \ldots.$$

Dadurch ergibt sich eine geometrische Reihe mit $a_0 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{4}$, deren Summe lautet:

$$S_b = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot q^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\left(\frac{1}{4}\right)-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{0-1}{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$ 3 P

(c.) Wir folgen dem Hinweis der Aufgabestellung und wenden Partialbruchzerlegung an:

Der Ansatz lautet $\frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{A}{i} + \frac{B}{i+1} = \frac{A \cdot (i+1) + B \cdot i}{i \cdot (i+1)}$

- einsetzen: Zähler bei $i = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1$
- einsetzen: Zähler bei $i = -1 \quad \Rightarrow \quad -B = 1 \quad \Rightarrow \quad B = -1$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$ 2 P

Eine Aufzählung einiger Summanden lässt nun die Systematik erkennen:

$$S_c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i \cdot (i+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots$$

Löst man die Klammern auf, so sieht man, dass sich immer zwei aufeinander folgende Summanden gegenseitig wegheben:

$$S_c = \frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{5} + \frac{1}{5}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{6} + \frac{1}{6}}_{=0} \mp \ldots = 1$$ 2 P

(d.) Wieder folgen wir dem Hinweis auf die Partialbruchzerlegung:

Der Ansatz lautet: $\frac{1}{i\cdot(i+5)}=\frac{A}{i}+\frac{B}{i+5}=\frac{A\cdot(i+5)+B\cdot i}{i\cdot(i+5)}$

2 P
- Zähler bei $i=0 \quad \Rightarrow \quad A\cdot 5=1 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{1}{5}$
- Zähler bei $i=-5 \quad \Rightarrow \quad B\cdot(-5)=1 \quad \Rightarrow \quad B=-\frac{1}{5}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{i\cdot(i+5)}=\frac{\frac{1}{5}}{i}-\frac{\frac{1}{5}}{i+5}=\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+5}\right)$$

Damit finden wir wieder die Systematik:

$$S_d=\frac{1}{5}\left[\left(\underbrace{\frac{1}{1}}_{\text{PS.}}-\underbrace{\frac{1}{6}}_{(*1)}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{PS.}}-\underbrace{\frac{1}{7}}_{(*2)}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{PS.}}-\underbrace{\frac{1}{8}}_{(*3)}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{PS.}}-\underbrace{\frac{1}{9}}_{(*4)}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{PS.}}-\underbrace{\frac{1}{10}}_{\text{usw.}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{6}}_{(*1)}-\underbrace{\frac{1}{11}}_{\text{usw.}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{7}}_{(*2)}-\underbrace{\frac{1}{12}}_{\text{usw.}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{8}}_{(*3)}-\underbrace{\frac{1}{13}}_{\text{usw.}}\right)+\underbrace{\vdots}_{\substack{(*4)\\ \text{usw.}}}\right]$$

3 P Jeder negative Summand findet 5 runde Klammern weiter einen passenden positiven Summanden, der ihn aufhebt. $(*1)$ hebt $(*1)$ auf, ebenso $(*2)$ das $(*2)$, usw. Übrig bleiben nur die 5 positiven Summanden mit der Kennzeichnung „PS.“, die von links her keinen negativen Partner haben, um aufgehoben zu werden. Es gilt also:

1 P
$$S_d=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i\cdot(i+5)}=\frac{1}{5}\cdot\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right]=\frac{137}{300}$$

## Aufgabe 11.13 Konvergenzuntersuchungen an Reihen

| | | Punkte |
|---|---|---|
| (a.) | 2 min | |
| (b.) | 5 min | |
| (c.) | 5 min | (a) 1 P (b) 3 P (c) 3 P |
| (d.) | 3 min | |
| (e.) | 2 min | (d) 2 P (e) 1 P |
| (f.) | 3 min | |
| (g.) | 4 min | |
| (h.) | 3 min | (f) 2 P (g) 2 P (h) 2 P |
| (j.) | 7 min | |
| (k.) | 2 min | |
| (l.) | 2 min | (j) 4 P (k) 1 P (l) 1 P |

Untersuchen Sie, ob die nachfolgend genannten Reihen konvergieren oder divergieren.

(a.) $S_a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{450\cdot i+1}$ (b.) $S_b=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{450\cdot i+1}$ (c.) $S_c=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{\sqrt{i}}$

(d.) $S_d=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln(i)}{i}$ (e.) $S_e=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{\ln(i)}$ (f.) $S_f=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\sin(i)}{i^2}$

(g.) $S_g=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{i}\right)^2$ (h.) $S_h=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i^{12345}}{1.0001^i}$ (j.) $S_j=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\ln(i)}{i^2}$

(k.) $S_k = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{e^i}$ (l.) $S_l = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{10^i}{i!}$

(Aufgabenteil i wurde nicht vergessen, vielmehr wurde die Nummerierung mit i vermieden, um Verwechslungen mit dem Summationsindex auszuschließen.)

## Lösung zu 11.13

**Stolperfalle:**

Im Einzelfall kann es nötig sein, verschiedene Konvergenzkriterien durchzuprobieren, bis man eines findet, mit dem sich ein eindeutiges Ergebnis erzielen lässt. Derartiges Ausprobieren kann im Fall einer Klausur zur Zeitfalle werden. Ggf. kann es daher sinnvoll sein, solche Konvergenzuntersuchungen als letzte Aufgabe vor dem Abgeben der Klausur zu lösen, damit man nicht Gefahr läuft, die Bearbeitungszeit für andere Aufgaben zu verlieren.

Übrigens kann man sich die verschiedenen Aufgabentypen merken und im Prüfungsfall hoffentlich wieder erkennen.

(a.) Für $\lim\limits_{i\to\infty}$ konvergieren die einzelnen Summanden gegen

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{i}{450\cdot i+1}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{450+\frac{1}{i}}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\frac{1}{450}\right) = \frac{1}{450}$$ 1 P

Da die Folge keine Nullfolge ist, kann die Reihe nicht konvergieren. Das ist auch anschaulich klar, denn durch Summation unendlich vieler Summanden mit endlicher Größe kann kein endlicher Wert entstehen. Die Reihe divergiert.

(b.) Wir arbeiten mit dem Minorantenkriterium, d.h. wir suchen eine divergente Minorante. Dazu formen wir vorab die Reihe um und verschieben den Summenindex. Es gilt nämlich

$$S_b = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{450\cdot i+1} = \frac{1}{450}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+\frac{1}{450}} = \frac{1}{450}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{(i-1)+\frac{1}{450}} = \frac{1}{450}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i-\frac{450}{450}+\frac{1}{450}} = \frac{1}{450}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i-\frac{449}{450}}$$

Wegen $\frac{1}{i-\frac{449}{450}} > \frac{1}{i}$ (was sicher ab $i \geq 2$ gilt) können wir zu dieser Reihe leicht eine divergente 3 P

Minorante angeben: $S_b = \frac{1}{450}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i-\frac{449}{450}} > \underbrace{\frac{1}{450}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}}_{\substack{\text{divergente}\\ \text{Minorante}}} = \frac{1}{450}\cdot\infty = \infty$ Die Reihe divergiert.

(c.) Die Reihe ist alternierend. Wir prüfen die Konvergenz mit dem Leibniz-Kriterium. Dieses besteht aus zwei Bedingungen.

Erste Bedingung: Der Betrag der Folgeglieder muss ab einem endlichen $i$ streng monoton fallend sein, es muss also gelten $|a_i| > |a_{i+1}|$

Es gilt: $i < i+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{i} > \frac{1}{i+1} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{i}}}_{a_i} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{i+1}}}_{a_{i+1}}$ Die erste Bedingung ist also erfüllt ab $i = 1$.

Zweite Bedingung: Es muss gelten $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 0$.

3 P Für unsere Aufgabe muss also gelten $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{\sqrt{i}} = 0$, was der Fall ist.

Da beide Bedingungen des Leibniz'schen Kriteriums erfüllt sind, wissen wir, dass die Reihe konvergent ist.

(d.) Wir suchen eine divergente Minorante.

2 P Ab $i = 3$ gilt $\ln(i) > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ln(i)}{i} > \frac{1}{i}$. Damit ist die Folge $\frac{1}{i}$ eine divergente Minorante und die Reihe ist divergent wegen $S_d = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\ln(i)}{i} > \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$

(e.) Die zugehörige Folge ist keine Nullfolge, denn es gilt $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{i}{\ln(i)} = \infty$

1 P Damit ist die grundlegende Konvergenzbedingung verletzt, die besagt, dass die Folgeglieder gegen Null gehen müssen. Somit ist klar, dass die Reihe divergiert.

(f.) Wir suchen eine konvergente Majorante.

Es gilt $\sin(i) \le 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin(i)}{i^2} \le \frac{1}{i^2}$ .

2 P Aus der Konvergenz der Majorante $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ folgt die Konvergenz von $S_f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i)}{i^2}$ .

(g.) Es gilt

$$S_g = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{3i} + \frac{4}{i^2}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{1}{9}}_{\text{divergent}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{4}{3i}}_{\text{konvergent}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \cdot \frac{4}{i^2}}_{\text{konvergent}}$$

2 P Begründung: Der erste der drei Summanden konvergiert nicht gegen einen Grenzwert, sondern er alterniert zwischen zwei Werten. Da die Konvergenz die Existenz eines eindeutigen Grenzwertes voraussetzt, muss man hier von Divergenz sprechen.

Folgerung: Da keine Summanden existieren, die die divergenten Glieder aufheben würden, ist die gesamte Reihe divergent.

(h.) Auch wenn die ersten Summanden für endliche Werte von $i$ sehr groß werden, erwarten wir doch aufgrund der Exponentialfunktion im Nenner die Konvergenz der Reihe. Diese weisen wir mit Hilfe des Wurzelkriteriums nach.

Es gilt $\lim\limits_{i\to\infty}\sqrt[i]{a_i} = \lim\limits_{i\to\infty}\frac{\sqrt[i]{i^{12345}}}{\sqrt[i]{1.0001^i}} = \lim\limits_{i\to\infty}\frac{i^{\frac{12345}{i}}}{1.0001} = \frac{1}{1.0001} < 1$ 2 P

Das Wurzelkriterium ist also erfüllt, d.h. die Reihe konvergiert.

(j.) Hier lässt sich die Konvergenz mit dem Integralkriterium nachweisen.

Zuerst suchen wir mit partieller Integration die Stammfunktion:

$$\int\frac{\ln(x)}{x^2}dx = \int\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{v'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{u}dx = \underbrace{\frac{-1}{x}}_{v}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{u}+C_1-\int\underbrace{-x^{-1}}_{v}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}dx = \frac{-\ln(x)}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx+C_1 = \frac{-\ln(x)}{x}-\frac{1}{x}+C_2$$

Dann lösen wir das zugehörige uneigentliche Integral für das Integralkriterium

$$\int_1^\infty\frac{\ln(x)}{x^2}dx = \lim_{\lambda\to\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x}\cdot-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\underbrace{-\frac{\ln(\lambda)}{\lambda}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{\to 0}\right]-\left[\underbrace{-1\cdot\ln(1)}_{=0}-\frac{1}{1}\right] = +1$$ 4 P

Da das mit der Reihe korrespondierende uneigentliche Integral konvergiert (egal gegen welchen Grenzwert), ist die Konvergenz der Reihe bewiesen.

(k.) Hier greift das Wurzelkriterium. Es gilt

$$\lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{a_i} = \lim_{i\to\infty}\sqrt[i]{\frac{i}{e^i}} = \lim_{i\to\infty}\frac{i^{\frac{1}{i}}}{e^{\frac{i}{i}}} = \frac{1}{e} < 1 \quad\Rightarrow\quad \text{Die Reihe ist konvergent.}$$ 1 P

(l.) Bei dieser Aufgabe funktioniert der Konvergenzbeweis mittels Quotientenkriterium:

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{10^{i+1}}{(i+1)!}}{\frac{10^i}{i!}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{10^{i+1}\cdot i!}{(i+1)!\cdot 10^i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{10}{i+1}\right| = 0 < 1 \quad\Rightarrow\quad \text{Auch diese Reihe konvergiert.}$$ 1 P

**Stolperfalle:**

Beim Wurzelkriterium und beim Quotientenkriterium ist unbedingt (wie in der Musterlösung geschehen) ein Grenzwert zu berechnen. Nur wenn dieser Limes echt kleiner als 1 ist, dann ist die Konvergenz bewiesen.

Bei Anfängern beobachtet man immer wieder den typischen Fehler, nicht den Grenzwert zu betrachten, sondern das Argument, das hinter dem Limes steht. Aber: Ob dieses Argument kleiner als 1 ist, ist belanglos – alleine auf den Grenzwert kommt es an. Ist der Grenzwert gleich 1, so ist damit noch keine Aussage über die Konvergenz der Reihe erzielt. (Ist der Grenzwert echt größer als 1, so ist die Divergenz der Reihe bewiesen.)

## Aufgabe 11.14 Konvergenzuntersuchungen an Reihen

| | | Punkte |
|---|---|---|
| | 8 min | 5 P |

Für welche $\alpha$ konvergiert die Reihe $S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}}$ ?

## Lösung zu 11.14

Bei dieser speziellen Reihe kann man einige Konvergenzkriterien erfolglos probieren; funktionieren wird zum Beispiel das Integralkriterium.

Dafür benötigen wir eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $\alpha \neq 1$ Für diesen Fall gilt

1 P $$\int_c^{\infty} x^{-\alpha}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_c^{\lambda} x^{-\alpha}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_c^{\lambda}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}=-\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda^{\alpha}}$$

Diesen Ausdruck werten wir getrennt aus für $\alpha<1$ (als Fall 1b) und für $\alpha>1$ (als Fall 1b):

1 P Fall 1a: Für $\alpha<1$ ist $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda^{\alpha}}=\infty$ und damit $\int_c^{\infty} x^{-\alpha}dx=\infty,$ also divergent .

1 P Fall 1b: Für $\alpha>1$ ist $\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda^{\alpha}}=0 \quad\Rightarrow\quad \int_c^{\infty} x^{-\alpha}dx=-\frac{c^{1-\alpha}}{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\lambda^{\alpha}}=\frac{c^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, also konvergent.

Fall 2: $\alpha=1$ Für diesen Fall gilt

1 P $\int_c^{\infty} x^{-\alpha}dx=\int_c^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_c^{\lambda}\frac{1}{x}dx=\lim_{\lambda\to\infty}\left[\ln(x)\right]_c^{\lambda}=\lim_{\lambda\to\infty}\ln(\lambda)-\ln(c)=\infty$ . Die Reihe divergiert.

Die drei Fälle (1a, 1b und 2) fassen wir zur Lösung zusammen:

1 P Die Reihe $S=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\alpha}}\begin{cases}\text{konvergiert für } \alpha>1\\ \text{divergiert für } \alpha\leq 1\end{cases}$

## Aufgabe 11.15 Konvergenzradien von Potenzreihen

| | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b,e.) | je 2 min | | (a,b,e.) je 1 P |
| | (c,d,f.) | je 4 min | | (c,d,f.) je 2 P |

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen und geben Sie an, für welche Werte von $x$ diese Reihen konvergieren.

(a.) $e^x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ (b.) $\ln(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot \frac{(x-1)^i}{i}$ (c.) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i^2 \cdot 2^i}$

(d.) $\sum_{i=1}^{\infty} i! \cdot (x+2)^i$ (e.) $\sum_{i=1}^{\infty} c^i \cdot (x-1)^i$ mit $c$=const. (f.) $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x^i}{\ln(i^i)}$

Hinweis zu Übungszwecken: Viele mathematische Formelsammlungen enthalten Tabellen von Potenzreihenentwicklungen, bei denen auch die Konvergenzradien angegeben werden. Je nach zur Verfügung stehender Übungszeit lassen sich solche Konvergenzradien in Tabellenwerken nachrechnen, was einen großen Vorrat an Übungsaufgaben dieses Typs schafft. Einige der Aufgaben hier sind Konvergenzradius-Berechnungen zu Reihen, die in der technischen Anwendung häufig auftauchen.

## ▾ Lösung zu 11.15

Für die Musterlösung beziehen wir uns auf die Form einer Potenzreihe

$$P(x) = \sum_{i=i_0}^{\infty} a_i \cdot (x - x_0)^i \,.$$ Darin heißt $a_i$ = Koeffizient und $x_0$ = Entwicklungspunkt.

Dafür lauten die beiden bekanntesten Möglichkeiten zur Berechnung des Konvergenzradius

$r = \lim\limits_{i\to\infty} \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right|$ in Anwendung des Quotientenkriteriums und $r = \lim\limits_{i\to\infty} a_i^{-\frac{1}{i}}$ in Anwendung des Wurzelkriteriums

(a.) Dieser Konvergenzradius wird mit der Anwendung des Quotientenkriteriums berechnet:

$$r = \lim_{i\to\infty} \left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{i!}}{\frac{1}{(i+1)!}}\right| = \lim_{i\to\infty} \left|\frac{(i+1)!}{i!}\right| = \lim_{i\to\infty} |i+1| = \infty$$ 1 P

Ein unendlich großer Konvergenzradius bedeutet, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

**Stolperfalle:**

Von Anfängern wird manchmal das Ergebnis „$\infty$“ fehlinterpretiert, und zwar als Divergenz. Bei Berechnung von Grenzwerten wie in Aufgabe 11.12 und Teilen von Aufgabe 11.13 bedeutet das „$\infty$“ die Nichtexistenz eines Grenzwertes, also die Divergenz. Bei der Berechnung des Konvergenzradius hingegen wird berechnet, für welche „$x$“ die Reihe konvergiert; und dann bedeutet das „$\infty$“ die Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$. Man achte also darauf, Verwechslungen bei der Interpretation des Ergebnisses zu vermeiden. In analoger Weise gibt bei den nachfolgenden Aufgabenteilen das Ergebnis keinen Grenzwert an sondern nur den Bereich, in dem ein solcher existiert.

(b.) Berechnung des Konvergenzradius „ $r$ “ nach dem Quotientenkriterium. Es gilt:

1 P

$$r = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{i}}{\frac{1}{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{i+1}{i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|1+\frac{1}{i}\right| = 1$$

Mit $x_0 = 1$ ist daher die Konvergenz sicher gegeben für $0 < x < 2$.

Man könnte zusätzlich noch das Konvergenzverhalten an den Rändern des Konvergenzintervalls untersuchen. Allerdings ist dies nicht immer üblich, da die Ränder lediglich zwei singuläre Punkte darstellen. Beim Schreiben einer Klausur sollte man sich diese Mühe nur machen, wenn dies auch gefordert ist. Dafür werden zusätzliche Überlegungen benötigt:

Am unteren Rand → Verhalten bei $x = 0$. Die Reihe lautet dort:

$$\ln(0) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\cdot\frac{(0-1)^i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{-1}{i} = \infty,$$ also divergent

Das wundert uns nicht, denn der natürliche Logarithmus von Null ist keine endliche Zahl.

Am oberen Rand → Verhalten bei $x = 2$. Die Reihe lautet dort:

$$\ln(2) = \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\cdot\frac{(2-1)^i}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{-1}{i}$$, die Konvergenz lässt sich mit dem Leibniz-Kriterium nachweisen.

→ Es handelt sich um eine alternierende Reihe.

→ Die Beträge der zugehörigen Folgeglieder erfüllen $|a_i| > |a_{i+1}|$

→ Der Grenzwert $\lim_{i\to\infty}|a_i| = 0$ geht gegen Null.

Die Gesamtlösung von Aufgabenteil (a.) ist also: Konvergenz ist gegeben für $0 < x \le 2$.

(c.) Wieder arbeiten wir mit dem Quotientenkriterium. Es gilt:

$$r = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{i^{-2}\cdot 2^{-i}}{(i+1)^{-2}\cdot 2^{-(i+1)}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{(i+1)^2\cdot 2^{i+1}}{i^2\cdot 2^i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{\left(i^2+2i+1\right)\cdot 2}{i^2}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|2+\frac{4i}{i^2}+\frac{2}{i^2}\right| = 2$$

2 P

In Anbetracht des Entwicklungspunktes $x_0 = 0$ konvergiert die Reihe für $x \in ]-2;+2[$.

Auf eine Untersuchung der Ränder des Konvergenzintervalls wollen wir verzichten, da sie nicht gefordert ist.

(d.) Die Berechnung des Konvergenzradius nach dem Quotientenkriterium ergibt

1 P

$$r = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{i\,!}{(i+1)\,!}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{1}{(i+1)}\right| = 0$$

Es existiert also kein ausgedehntes Konvergenzintervall. Wenn überhaupt, dann kann die Reihe höchstens am Entwicklungspunkt selbst konvergieren, also bei $x_0 = -2$. Setzen wir diesen Punkt in die Reihe ein, so erhalten wir

$\sum_{i=1}^{\infty} i! \cdot (-2+2)^i = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$ Am Entwicklungspunkt selbst konvergiert die Potenzreihe. 1 P

Da die Reihe nur im Entwicklungspunkt konvergiert, erübrigt sich eine weitere Untersuchung der Ränder.

(e.) Hier wird der Konvergenzradius sicherlich von der Konstanten „$c$“ abhängen.

$$r = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{c^i}{c^{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{1}{c}\right| = \frac{1}{c}$$

Der Entwicklungspunkt ist $x_0 = 1$, also ist die Konvergenz sicher für $x \in \left]1-\frac{1}{c};1+\frac{1}{c}\right[$. 1 P

Auf eine Untersuchung der Ränder des Konvergenzintervalls wollen wir verzichten, da sie nicht gefordert ist.

(f.) Wieder arbeiten wir mit der Berechnung nach dem Quotientenkriterium:

$$r = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{\ln\left((i+1)^{(i+1)}\right)}{\ln\left(i^i\right)}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{(i+1)\cdot\ln((i+1))}{i\cdot\ln(i)}\right| = \lim_{i\to\infty}\left(\underbrace{\frac{i+1}{i}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\ln(i+1)}{\ln(i)}}_{\to 1}\right) = 1$$

2 P

Konvergenz ist also sicher gegeben für $x_0 \in \left]x_0 - r; x_0 + r\right[ = \left]0-1;0+1\right[ = \left]-1;+1\right[$

Eine Untersuchung der Ränder sei nicht explizit vorgeführt, da sie nicht gefordert ist. Für diejenigen, die die Untersuchung doch probieren wollen, diene der folgende Hinweis: An der unteren Grenze (bei $x=-1$) lässt sich eine konvergente Majorante finden, an der oberen Grenze könnte man mit dem Integralkriterium die Divergenz nachweisen.

## Aufgabe 11.16 Konvergenzradius einer komplexen Potenzreihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 12 min | | Punkte 6 P |

Gegeben sei die komplexzahlige Potenzreihe (mit $z \in \mathbb{C}$ und $j$ = komplexe Einheit):

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)^3\cdot(1+j)^n} = 1 + \frac{z}{8\cdot(1+j)} + \frac{z^2}{27\cdot(1+j)^2} + \frac{z^3}{64\cdot(1+j)^3} + \dots$$

Für welche $z$ konvergiert diese Reihe? Führen Sie die Berechnung durch und stellen Sie das Ergebnis in der Gauß’schen Zahlenebene dar.

## Lösung zu 11.16

Gesucht ist natürlich der Konvergenzradius, den wir nach der auf dem Quotientenkriterium basierenden Methode berechnen. Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$. Die Koeffizienten der Entwicklung lauten $a_n = (n+1)^{-3} \cdot (1+j)^{-n}$. Damit folgt

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^{-3} \cdot (1+j)^{-n}}{(n+2)^{-3} \cdot (1+j)^{-n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left(n^3 + 6n^2 + 12n + 8\right) \cdot (1+j)^{n+1}}{\left(n^3 + 3n^2 + 3n + 1\right) \cdot (1+j)^n} \right|$$

$$= |1+j| \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\left( \frac{n^3}{n^3} + \frac{6n^2}{n^3} + \frac{12n}{n^3} + \frac{8}{n^3} \right)}{\left( \frac{n^3}{n^3} + \frac{3n^2}{n^3} + \frac{3n}{n^3} + \frac{1}{n^3} \right)} \right| = |1+j| = \sqrt{2}$$

4 P Die Konvergenz ist also gesichert für $|z - z_0| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |z| < \sqrt{2}$

Die gesuchte Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene zeigt Bild 11-16.

Anmerkung: Die kreisförmige Gestalt der Konvergenzbereiche komplexer Reihen war Anlass für die Namensgebung des Begriffes „Konvergenzradius".

2 P

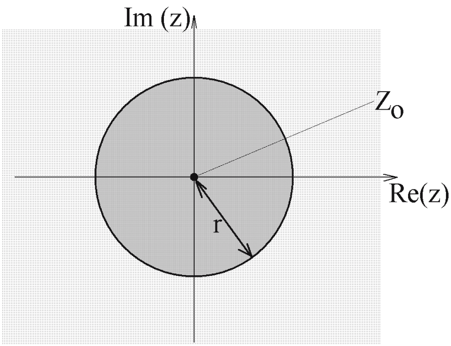



**Bild 11-16**

Darstellung des Konvergenzradius $|z| = \sqrt{2}$ in der Gauß'schen Zahlenebene.
Der Entwicklungspunkt ist $z_0 = 0$.

Im dunkel unterlegten Kreis mit dem Konvergenzradius $r$ konvergiert die Potenzreihe.
Im hell unterlegten Bereich außerhalb des Konvergenzkreises divergiert die Reihe.
Den schwarz gezeichneten Rand des Konvergenzkreises haben wir nicht auf Konvergenz untersucht.

## Aufgabe 11.17 Entwicklung von Mac Laurin-Reihen

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.)<br>(b.) | 12 min<br>15 min | (a.)<br>(b.) | | Punkte<br>(a.) 7 P | <br>(b.) 10 P |
| | (c.)<br>(d.) | 15 min<br>15 min | (c.)<br>(d.) | | <br>(c.) 10 P | <br>(d.) 9 P |

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Mac Laurin-Reihen:

(a.) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (b.) $f(x) = \sqrt{4-x}$ (c.) $f(x) = x \cdot \sin(x)$ (d.) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$

## Lösung zu 11.17

**Erster Arbeitshinweis:**

Mac Laurin-Reihen sind Taylor-Reihen mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Bei Taylor-Reihen müsste ggf. der Entwicklungspunkt aus der Aufgabenstellung erkennbar sein (oder beim Lösen der Aufgabe wählbar). Bei Mac Laurin-Reihen hingegen legt bereits der Name Mac Laurin den Entwicklungspunkt fest.

**Zweiter Arbeitshinweis:**

Das Entwickeln von Taylor-Reihen und Mac Laurin-Reihen folgt einem fest vorgegebenen Schema, das man abarbeiten kann wie ein „Kochrezept". Dabei gehe man in folgenden Schritten vor:

Schritt 1: Man bilde einige Ableitungen der Funktion, und zwar ausreichend viele, um die Systematik der höheren Ableitungen der Funktion zu erkennen. Will man die Reihe vollständig entwickeln (und nicht nur die ersten Glieder), so muss ein Ausdruck für die n-te Ableitung (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$) aufgestellt werden.

Schritt 2: Man setze den Entwicklungspunkt in den Ausdruck für die n-te Ableitung ein und bestimme daraus den Entwicklungskoeffizienten $a_n$.

Schritt 3: Das Hinschreiben der unendlichen Reihe ist, wie wir bald sehen werden, nicht immer bloß reine Formsache.

Schritt 4: Man berechne den Konvergenzradius, um den Einsatzbereich der Reihe zu kennen.

Diese Vorgehensweise wenden wir nun auf die in der Aufgabenstellung gegebenen Funktionen an:

(a.) Schritt 1 → höhere Ableitungen $\Rightarrow$ Schritt 2 → Einsetzen des Entwicklungspunktes

$$f(x) = (1+x)^{-1} \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = (1+0)^{-1} = 1$$

$$f'(x) = -(1+x)^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = -(1+0)^{-2} = -1$$

2 P

$$f''(x) = +2\cdot(1+x)^{-3} \quad \Rightarrow \quad f''(x_0) = +2\cdot(1+0)^{-3} = +2$$

$$f'''(x) = -6\cdot(1+x)^{-4} \quad \Rightarrow \quad f'''(x_0) = -6\cdot(1+0)^{-4} = -6$$

2 P

$$f''''(x) = +24\cdot(1+x)^{-5} \quad \Rightarrow \quad f''''(x_0) = +24\cdot(1+0)^{-5} = +24$$

$$\ldots \text{ usw. } \ldots \quad \Rightarrow \quad \ldots \text{ usw. } \ldots$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+x)^{-(n+1)} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(x_0) = (-1)^n \cdot n! \cdot (1+0)^{-(n+1)} = (-1)^n \cdot n!$$ 1 P

Damit folgt für den Entwicklungskoeffizienten: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n$

**Arbeitshinweis:**

Am leichtesten findet man den allgemeinen Ausdruck für die n-te Ableitung, indem man sich systematisch bewusst macht, was bei jedem einzelnen Vorgang des Ableitens passiert.

Am Beispiel unserer Aufgabe sähe dies wie folgt aus:

- Beim Ableiten wird der Exponent vor die Klammer multipliziert. Da er ein Minus enthält, entsteht vor der Klammer ein alternierendes Vorzeichen.
- Des Weiteren erhöht sich der Betrag des Exponenten mit erneutem Ableiten um Eins, sodass durch das fortwährende Multiplizieren mit dem Exponenten vor der Klammer eine Fakultät entsteht.
- Der Inhalt der Klammer verändert sich nicht.
- Der negative Exponent wird von Ableitung zu Ableitung um Eins verringert (d.h. sein Betrag wird jedesmal um Eins erhöht.)

Aufgrund der einzelnen Verrichtungen beim Ableiten ist die allgemeine Form der n-ten Ableitung relativ leicht zu erkennen.

**Stolperfalle:**

Für den allgemeinen Ausdruck der n-ten Ableitung benötigt man den Laufindex „$n$“, der die Nummer der Ableitung beschreibt. Beim Einsetzen dieses „$n$“ muss man immer genau aufpassen, dass die Zählung stimmt. So enthält z.B. die nullte Ableitung den Exponenten „$-1$“, die erste Ableitung den Exponenten „$-2$“ usw. Immer ist der negative Exponent um Eins gegenüber der Nummer der Ableitung verschoben. Deshalb taucht bei der n-ten Ableitung der Exponent „$-(n+1)$“ auf.

Der **Zweck dieser Anmerkung** ist der:

Man gewöhne sich an, prinzipiell immer an jeder Stelle, an der der Laufindex „$n$“ zum Einsatz kommt, mögliche Verschiebungen der zu verwendenden Indizierung gegenüber der Nummer der Ableitung zu überprüfen.

Hinweis zu Arbeitseffizienz:

Oftmals genügt es, beim Einsetzen des Entwicklungspunktes (Schritt 2) nur in den allgemeinen Ausdruck der n-ten Ableitung einzusetzen. Das Einsetzen in die niedrigeren Ableitungen dient lediglich der Rechenkontrolle, um eigene Rechenfehler zu erkennen und zu vermeiden.

Schritt 3 → Da wir den Entwicklungskoeffizienten bestimmt haben, können wir die unendliche Reihe sofort angeben:

1 P $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n$

Schritt 4 → Nun steht nur noch die Bestimmung des Konvergenzradius aus. Wir arbeiten mit dem Quotientenkriterium. (Auf eine Untersuchung der Ränder verzichten wir.):

1 P $r = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} |-1| = 1 \quad \Rightarrow$ Die Konvergenz ist gesichert für $x \in \left]-1;+1\right[$

(b.) Inzwischen haben wir schon etwas Übung mit der Entwicklung von Mac Laurin-Reihen und wenden das Erlernte ohne allzu üppigen Kommentar an:

Schritt 1 → höhere Ableitungen ⇒ Schritt 2 → Einsetzen des Entwicklungspunktes
(Kettenregel nicht vergessen.)

$$f(x)=(4-x)^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f(x)=(4-0)^{\frac{1}{2}}=2$$

$$f'(x)=-\tfrac{1}{2}\cdot(4-x)^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=-\tfrac{1}{2}\cdot(4-0)^{-\frac{1}{2}}=-\tfrac{1}{2}\cdot 2^{-1}$$

$$f''(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot(4-x)^{-\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad f''(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot(4-0)^{-\frac{3}{2}}=-\tfrac{1}{4}\cdot 2^{-3}$$

$$f'''(x)=-\tfrac{3}{8}\cdot(4-x)^{-\frac{5}{2}} \quad\Rightarrow\quad f'''(x)=-\tfrac{3}{8}\cdot(4-0)^{-\frac{5}{2}}=-\tfrac{3}{8}\cdot 2^{-5}$$

$$f''''(x)=-\tfrac{15}{16}\cdot(4-x)^{-\frac{7}{2}} \quad\Rightarrow\quad f''''(x)=-\tfrac{15}{16}\cdot(4-0)^{-\frac{7}{2}}=-\tfrac{15}{16}\cdot 2^{-7}$$ 2 P

. . . usw. . . . ⇒ . . . usw. . . .

$$f^{(n)}(x)=-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot(4-x)^{-\frac{2n-1}{2}} \quad\Rightarrow\quad f^{(n)}(x)=-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot 2^{-2n+1}$$ 2 P

Achtung: Die n-te Ableitung gilt für $n\geq 2$, da das im Vorfaktor enthaltene $(2n-3)$ für kleinere $n$ zu falschen Ergebnissen führen würde. Man beachte dies beim späteren Aufstellen der Potenzreihe als unendliche Summe.

Hinweise zum Erkennen der Systematik der höheren Ableitungen:

- Alle höheren Ableitungen tragen ein Minuszeichen, da der negative Exponent und das „$-1$" aus der Kettenregel sich als Faktoren gegenseitig aufheben.
- Der Faktor vor der Klammer besteht im Zähler aus dem Produkt ungerader Zahlen, die aus dem Exponenten dorthin multipliziert werden. Im Nenner wird mit jeder Ableitung ein Faktor „$2$" hinzumultipliziert.
- Der Exponent beginnt mit „$\frac{1}{2}$" wovon mit jeder Ableitung „$1$" subtrahiert wird.
- An den Stellen „$2n-1$" und „$2n-3$" achte man auf die Verschiebung der Indizes.

Damit folgt für den Entwicklungskoeffizienten:

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}\cdot 2^{-2n+1} \quad \text{gültig für } n\geq 2$$ 1 P

Schritt 3 → Da wir für den Entwicklungskoeffizient erst ab $n\geq 2$ ein allgemeines Bildungsgesetz haben, müssen wir die ersten beiden Summanden der unendlichen Reihe aus der Summe herausziehen und einzeln handhaben.

Dafür berechnen wir einzeln: $a_0=\frac{f(x_0)}{0!}=\frac{2}{1}=2$ und $a_1=\frac{f'(x_0)}{1!}=\frac{-\frac{1}{4}}{1}=-\frac{1}{4}$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}-\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}\cdot 2^{-2n+1}\cdot x^n$$ 3 P

$$= 2 - \frac{1}{4}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot 2^{2n-1} \cdot n!} \cdot x^n = 2 - \frac{1}{4}x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{3n-1} \cdot n!} \cdot x^n$$

Schritt 4 → Auf die Berechnung des Konvergenzradius nehmen die ersten einzelnen aus der Summe herausgezogenen Summanden keinen Einfluss, da der Konvergenzradius als $\lim\limits_{n \to \infty}$ berechnet wird. Wir vollführen die Rechnung nach dem Quotientenkriterium:

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{3n-1} \cdot n!}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2 \cdot (n+1) - 3)}{2^{3(n+1)-1} \cdot (n+1)!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-3) \cdot 2^{3n+2} \cdot (n+1)!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2^{3n-1} \cdot n!} \right|$$

2 P $$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^2 \cdot (n+1)}{(2n-1) \cdot 2^{-1}} \right| = 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2n-1} \right| = 8 \cdot \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} \right| = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \quad \Rightarrow \text{ Reihe konvergiert für } x \in \left]0;8\right[$$

Auf eine Aussage an den Rändern des Konvergenzintervalls verzichten wir.

(c.) Schritt 1 → höhere Ableitungen ⇒ Schritt 2 → Einsetzen des Entwicklungspunktes

| | | |
|---|---|---|
| $f(x) = +x \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f(0) = 0$ |
| $f'(x) = +1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f'(0) = 0$ |
| $f''(x) = -x \cdot \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f''(0) = 2$ |
| $f^{(3)}(x) = -3 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f^{(3)}(0) = 0$ |
| $f^{(4)}(x) = +x \cdot \sin(x) - 4 \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f^{(4)}(0) = -4$ |
| $f^{(5)}(x) = +5 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f^{(5)}(0) = 0$ |
| $f^{(6)}(x) = -x \cdot \sin(x) + 6 \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f^{(6)}(0) = +6$ |
| $f^{(7)}(x) = -7 \cdot \sin(x) - x \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f^{(7)}(0) = 0$ |
| 3 P $f^{(8)}(x) = +x \cdot \sin(x) - 8 \cdot \cos(x)$ | $\Rightarrow$ | $f^{(8)}(0) = -8$ |

Zwar kann man die Systematik der n-ten Ableitung für alle Werte von $x$ erkennen, also nicht nur für unseren speziellen Entwicklungspunkt, aber man steigert die Arbeitseffizienz, wenn man sich auf die Systematik alleine an der Stelle des Entwicklungspunktes beschränkt. Der Grund ist der: Alle Sinus-Ausdrücke verschwinden im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, ebenso alle Ausdrücke, die den Faktor $x$ enthalten. Da überdies $\cos(x_0) = 1$ ist, bleiben nach Einsetzen des Entwicklungspunktes nur die geraden Ableitungen in einfacher Form übrig:

2 P $$f^{(n)}(x_0) = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot n & \text{für gerade } n > 1 \end{cases}$$

Der Summand für $n = 0$ passt nicht in diese Systematik und muss einzeln behandelt werden.

$$\Rightarrow \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n-1)!} & \text{für gerade } n > 1 \end{cases} \qquad \text{und dazu separat} \quad a_0 = \frac{f(0)}{0!} = 0$$ 1 P

Schritt 3 → Beim Formulieren der unendlichen Reihe müssen wir der Tatsache Rechnung tragen, dass nur jeder zweite Summand von Null verschieden ist. Natürlich könnten wir mit einer Fallunterscheidung arbeiten, wie bei der Formulierung des $a_n$. Bequemer in der Handhabung und daher üblich ist jedoch eine Substitution des Laufindexes, denn alle Summanden für ungerade $n$ tauchen in der Reihe ohnehin nicht auf.

Mit $i \in \mathbb{N}$ bietet sich $n := 2i$ an, weil dann $i$ die geraden Zahlen durchläuft.

Die Reihe ohne Substitution könnte man dann so aufstellen:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \underbrace{a_0}_{=0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1}}{(n-1)!} \cdot x^n \quad \text{wobei nur über gerade n summiert wird.}$$

Durch die Substitution von $n := 2i$ folgt: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!} \cdot x^{2i}$ 3 P

Schritt 4 → Bei der Berechnung des Konvergenzradius können wir die fertige Reihe in der Form mit substituiertem Laufindex verwenden und erhalten nach dem Quotientenkriterium

$$r = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{i+1}}{(2i-1)!}}{\frac{(-1)^{i+2}}{(2(i+1)-1)!}} \right| = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(-1)^{i+1} \cdot (2i+1)!}{(-1)^{i+2} \cdot (2i-1)!} \right| = \lim_{i\to\infty} \left| -(2i) \cdot (2i+1) \right| = \infty$$ 1 P

Die Reihe konvergiert also für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d.) Schritt 1 → höhere Ableitungen $\Rightarrow$ Schritt 2 → Einsetzen des Entwicklungspunktes

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \qquad \Rightarrow \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - \frac{2x^3}{(1+x^2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{10x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{8x^4}{(1+x^2)^3} \qquad \Rightarrow \qquad f''(0) = +2 = +2!$$

$$f'''(x) = \frac{-24x}{(1+x^2)^2} + \frac{72x^3}{(1+x^2)^3} - \frac{48x^5}{(1+x^2)^4} \qquad \Rightarrow \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-24}{(1+x^2)^2} + \frac{312x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{672x^4}{(1+x^2)^4} + \frac{384x^6}{(1+x^2)^5} \qquad \Rightarrow \qquad f^{(4)}(0) = -24 = -4!$$ 3 P

Da wegen des Entwicklungspunktes $x_0 = 0$ alle Brüche mit $x$ im Zähler verschwinden, lässt sich die Systematik erkennen: Die ungeraden Ableitungen verschwinden, die geraden Ableitungen lauten $f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \cdot n!$ , gültig für geradzahlige $n \geq 2$ .

2 P $\Rightarrow \quad a_n = (-1)^{\frac{n}{2}+1}$ für geradzahlige $n \geq 2$ .

Schritt 3 → Zum Einsetzen in die Summe substituieren wir wieder $n := 2i$ , wodurch $n$ auf die geradzahligen Werte beschränkt wird, und erhalten $a_i = (-1)^{i+1}$.

Da $a_0 = 0$ und $a_1 = 0$ genügt die Summation ab $n \geq 2$ , dies ist $i \geq 1$:

3 P
$$\Rightarrow \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot x^i = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \cdot x^{2i}$$

Schritt 4 → Den Konvergenzradius berechnen wir ohne Betrachtung der Ränder gemäß

1 P
$$r = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{a_i}{a_{i+1}} \right| = \lim_{i\to\infty} \left| \frac{(-1)^{i+1}}{(-1)^{i+2}} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Die Konvergenz ist gesichert für } x \in ]-1;+1[ \ .$$

## Aufgabe 11.18 Entwicklung von Taylor-Reihen

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | | | Punkte | | |
| | (b.) | 20 min | (a,b) | | (a.) 5 P | (b.) | 11 P |

Entwickeln Sie die beiden folgenden Taylor-Reihen:

(a.) $f(x) = \ln(x)$ um dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(b.) $f(x) = \sqrt{1+x}$ um dem Entwicklungspunkt $x_0 = 3$ .

Anmerkung:

Zu (a.) Beim Logarithmus hätte eine Mac Laurin-Reihe keinen Sinn, da der Logarithmus am Punkt $x_0 = 0$ nicht entwickelt werden kann.

Zu (b.) Aus praktischen Gründen kann mitunter die Fähigkeit nötig werden, Funktionen um beliebige Punkte zu entwickeln, z.B. wenn man eine Näherungsformel in der Umgebung eines vorgegebenen Punktes benötigt.

## Lösung zu 11.18

**Arbeitshinweis:**

Das Entwickeln von Taylor-Reihen funktioniert im Prinzip genauso wie das Entwickeln von Mac Laurin-Reihen mit dem einzigen Unterschied, dass in die Ableitungen der Funktion ein anderer Entwicklungspunkt einzusetzen ist. Als Arbeitsweg übernehmen wir also die in Aufgabe 11.17 beschriebene Vorgehensweise:

(a.) Schritt 1 → höhere Ableitungen $\Rightarrow$ Schritt 2 → Einsetzen des Entwicklungspunktes

$$f(x)=\ln(x)$$
$$f'(x)=+x^{-1}$$
$$f''(x)=-x^{-2}$$
$$f'''(x)=+2x^{-3}$$
$$f''''(x)=-6x^{-4} \qquad \text{1 P}$$

… usw. …

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\cdot x^{-n} \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n+1}\cdot(n-1)! \text{ für } n\ge 1 \qquad \text{1 P}$$

$$\Rightarrow \quad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=\frac{(-1)^{n+1}\cdot(n-1)!}{n!}=\frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{1 P}$$

Schritt 3 → Das Formulieren der Reihe ist klar:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(x-1)^n \qquad \text{1 P}$$

Man beachte dabei eine Stolperfalle: Der allgemeine Ausdruck für die Summe der Taylor-Reihe beginnt bei $n=0$, aber die spezielle Anwendung bei unserem Logarithmus beginnt bei $n=1$. Der Grund liegt darin, dass der Summand mit der Nummer $n=0$ verschwindet. Dieser Summand passt nicht in die Formel für die n-te Ableitung, sondern muss einzeln ausgerechnet werden: $\frac{f(x_0)}{0!}=\frac{\ln(1)}{1}=0$ Da der Summand verschwindet, braucht man ihn nicht mehr einzeln vor die Summe schreiben.

Schritt 4 → Der Konvergenzradius folgt wie so oft nach dem Quotientenkriterium:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{(n+1)}\cdot(n+1)}{n\cdot(-1)^{(n+2)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{1}\right|=1 \qquad \text{1 P}$$

Konvergenzradius $r=1$ um den Entwicklungspunkt 1 bedeutet Konvergenz für $x\in\,]0;2[$ (ohne Betrachtung an den Rändern des Intervalls).

(b.) Schritt 1 → höhere Ableitungen $\Rightarrow$ Schritt 2 → Einsetzen des Entwicklungspunktes

$$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f(3)=(4)^{\frac{1}{2}}=2$$
$$f'(x)=\tfrac{1}{2}\cdot(1+x)^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(3)=\tfrac{1}{2}\cdot(4)^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{4}$$
$$f''(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(3)=-\tfrac{1}{4}\cdot(4)^{-\frac{3}{2}}=-\tfrac{1}{32}$$
$$f'''(x)=+\tfrac{3}{8}\cdot(1+x)^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'''(3)=+\tfrac{3}{8}\cdot(4)^{-\frac{5}{2}}=\tfrac{3}{256}$$
$$f''''(x)=-\tfrac{3\cdot 5}{16}\cdot(1+x)^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''''(3)=-\tfrac{3\cdot 5}{16}\cdot(4)^{-\frac{7}{2}}=-\tfrac{3\cdot 5}{2048} \qquad \text{2 P}$$

… usw. … $\Rightarrow$ … usw. …

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}} \qquad \text{1 P}$$

Die Systematik der höheren Ableitungen am Entwicklungspunkt lautet also

- für $n=0$ ist $f(3)=2$
- für $n=1$ ist $f'(3)=\frac{1}{4}$

2 P
- für $n\geq 2$ ist $f^{(n)}(3)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n}\cdot(4)^{-\frac{2n-1}{2}}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{3n-1}}$

Mit $a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ können wir übergehen zu Schritt 3:

Schritt 3 → Einsetzen in die Potenzreihe, wobei wir die Glieder Nr. 0 und 1 einzeln handhaben:

2 P
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot(x-x_0)^n=2+\tfrac{1}{4}\cdot(x-3)+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{3n-1}\cdot n!}\cdot(x-3)^n$$

Anm: Die Reihe beginnt $f(x)\overset{TR}{\approx}2+\frac{1}{4}(x-3)-\frac{1}{64}(x-3)^2+\frac{1}{512}(x-3)^3-\frac{5}{16384}(x-3)^4+\frac{7}{131072}(x-3)^5\pm\ldots$

Schritt 4 → Konvergenzbereich:

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^{3n-1}\cdot n!}}{(-1)^{n+2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2(n+1)-3)}{2^{3(n+1)-1}\cdot(n+1)!}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot2^{3(n+1)-1}\cdot(n+1)!}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2(n+1)-3)\cdot2^{3n-1}\cdot n!}\right|$$

3 P
$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)\cdot2^{3n+2}\cdot(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot2^{3n-1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-2^{3n+2}\cdot(n+1)}{(2n-1)\cdot2^{3n-1}}\right|=8\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{2n-1}\right|=8\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right|=4$$

Ist der Konvergenzradius $r=4$, so ist der Konvergenzbereich:

1 P $]x_0-r;x_0+r[\;=\;]3-4;3+4[\;=\;]-1;7[$

Diese Werte kann man für $x$ einsetzen, sodass sich mit dieser Reihe (für $\sqrt{1+x}$ ) die Wurzeln von $\sqrt{0}$ bis $\sqrt{8}$ berechnen lassen.

## Aufgabe 11.19 Verknüpfen von Potenzreihen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | gemeinsam 10 min | (a,b.) | Punkte (a&b.) ges. 6 P |
| | (c.) | 5 min | (c.) | (c.) 3 P |

Potenzreihen dürfen gliedweise verarbeitet werden (addiert, abgeleitet, integriert, etc…).

Bestimmen Sie mit möglichst wenig Rechenaufwand die Potenzreihen von

(a.) $f(x)=\sinh(x)$ (b.) $f(x)=\cosh(x)$ (c.) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ .

Geben Sie auch die Konvergenzbereiche der so gebildeten Potenzreihen an.

Hinweis: In Tabellenwerken findet man $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ für alle $x \in \mathbb{R}$

und $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ für $|x| < 1$

## Lösung zu 11.19

(a. & b.) Nach Definition der Hyperbelfunktionen gilt $\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)$

und $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$

Also können die Potenzreihen dieser beiden Funktionen aus der in der Aufgabenstellung genannten Potenzreihe der Exponentialfunktion aufgebaut werden:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n - (-x)^n}{n!} \qquad (*1)$$ 2 P

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} \qquad (*2)$$ 2 P

Damit sind die Aufgabeteile (a.) und (b.) im Prinzip gelöst. Allerdings lassen sich die Ausdrücke noch etwas vereinfachen, wenn man berücksichtigt, dass in $(*1)$ der Zähler für geradzahlige $n$ verschwindet und in $(*2)$ für ungeradzahlige $n$. Dazu substituieren wir $n =: 2k+1$ in $(*1)$ bzw. $n =: 2i$ in $(*2)$ und erhalten:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{und} \quad \cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n + (-x)^n}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$ 2+2 P

**Arbeitshinweis:**

Werden Potenzreihen miteinander verknüpft, so umfasst der Konvergenzbereich der resultierenden Potenzreihe mindestens die Schnittmenge der Konvergenzbereiche der verknüpften Potenzreihen.

Für die Reihen des Sinus Hyperbolicus und des Cosinus Hyperbolicus bedeutet dies: Da sie nur aus Exponentialfunktionen zusammengesetzt sind, ist ihr Konvergenzbereich ebenso groß wie derjenige der Exponentialfunktion, umfasst also alle $x \in \mathbb{R}$.

(c.) Bekanntlich ist die Ableitung des Arcus Tangens: $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Gliedweises Ableiten der in der Aufgabestellung genannten Reihe liefert

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{(2n+1) x^{2n}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}$$ 3 P

Da bei der Bildung dieser Reihe nur eine einzige Reihe verarbeitet wurde, ist der Konvergenzbereich von dieser zu übernehmen: Sie konvergiert für $|x| < 1$.

## Aufgabe 11.20 Integration einer Potenzreihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 7 min | | Punkte 4 P |

Bekanntlich lässt sich die Dichtefunktion der Gauß'schen Normalverteilung nicht analytisch integrieren. Das hat letztlich seinen Grund in der Tatsache, dass die Funktion $f(x)=e^{x^2}$ nicht analytisch integriert werden kann. Integrieren Sie nun auf folgendem Wege:

- Aufstellen der Mac Laurin-Reihe für $f(x)=e^{x^2}$
- Gliedweise Integration der Reihe.

## Lösung zu 11.20

Beim Aufstellen der Mac Laurin-Reihe greifen wir auf die Reihe der Exponentialfunktion zurück und substituieren $u := x^2$ , was gliedweise geschehen kann:

3 P
$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

1 P Die Integration lautet dann $\int e^{x^2}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int \frac{x^{2n}}{n!} dx \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$ .

## Aufgabe 11.21 Restgliedabschätzung nach Lagrange

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1. Näherung<br>2. Näherung | 8 min<br>8 min | | Punkte<br>2 × je 4 P |

Betrachten Sie nochmals die Mac Laurin-Reihen von Aufgabe 11.17.b. Auf der Basis der dortigen Ergebnisse berechnen Sie bitte $f(1)=\sqrt{3}$ in erster und in zweiter Näherung. Führen Sie bitte für beide Fälle auch eine Restgliedabschätzung nach Lagrange durch.

## Lösung zu 11.21

**Arbeitshinweis:**

Die Formel für die Restgliedabschätzung nach Lagrange lautet:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{(n+1)} \qquad \text{mit} \qquad \xi \in [0;x]$$

Erläuterung zum Index „$n$“: Wird die Reihe bis zum Glied mit der Nummer „$n$“ summiert, so trägt das zugehörige Restglied ebenfalls die Nummer „$n$“. Es dient aber der Abschätzung der Summe aller Glieder ab dem $(n+1)$ – ten.

Diese wenden wir an auf die Reihe $f(x)=\sqrt{4-x}=2-\frac{1}{4}x-\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2^{3n-1}\cdot n!}\cdot x^n$ .

Die zweite Ableitung von $f(x)$ lautet $f''(x)=-\frac{1}{4}\cdot(4-x)^{-\frac{3}{2}}$ (siehe Aufgabe 11.17.b)

Daraus folgt:

Die lineare (erste) Näherung enthält die ersten beiden Summanden und ergibt

$\sqrt{3}=f(1)\approx 2-\frac{1}{4}x=1.75$ mit folgender Restgliedabschätzung (für $n=1$) 1 P

$$R_1(x)\approx\frac{f''(\xi)}{(1+1)!}\cdot 1^{(n+1)}=\frac{-\frac{1}{4}\cdot(4-\xi)^{-\frac{3}{2}}}{2!}=\begin{cases}\frac{-\frac{1}{4}\cdot(4-0)^{-\frac{3}{2}}}{2!}\overset{TR}{\approx}-0.015 & \text{für } \xi=0\\ \frac{-\frac{1}{4}\cdot(4-1)^{-\frac{3}{2}}}{2!}\overset{TR}{\approx}-0.024 & \text{für } \xi=1\end{cases}$$ 3 P

Würde man die beiden Restglied-Schätzwerte als Grenzen des Intervalls verstehen, in dem der tatsächliche Wertes liegt, so erhielte man $\sqrt{3}\in[1.75-0.024\,;1.75-0.015]=[1.726\,;1.735]$, was in der Tat der Fall ist. In Wirklichkeit sollte man die getätigte Restgliedabschätzung nicht völlig wörtlich verstehen, denn da es sich nur um eine Abschätzung handelt, ist es durchaus im Bereich des Möglichen, dass der exakte Wert ein wenig außerhalb des angegebenen Intervalls liegen kann.

Die zweite Näherung lautet $f(1)\approx 2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{64}x^2=1.734375$ 1 P

mit der Restgliedabschätzung (für $n=2$) :

$$R_2(x)\approx\frac{f'''(\xi)}{(2+1)!}\cdot 1^{(2+1)}=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}=\frac{-\frac{3}{8}\cdot(4-\xi)^{-\frac{5}{2}}}{3!}=\begin{cases}\frac{-\frac{3}{8}\cdot(4-0)^{-\frac{5}{2}}}{3!}\overset{TR}{\approx}-0.0020 & \text{für } \xi=0\\ \frac{-\frac{3}{8}\cdot(4-1)^{-\frac{5}{2}}}{3!}\overset{TR}{\approx}-0.0040 & \text{für } \xi=1\end{cases}$$ 3 P

Aus didaktischen Gründen wollen wir wieder die Tauglichkeit dieser Restgliedabschätzung kontrollieren. Das Intervall, welches durch diese Abschätzung angegeben wird, lautet $\sqrt{3}\overset{TR}{\approx}1.7320508\in[1.734375-0.0040\,;1.734375-0.0020]=[1.730375\,;1.732375]$ und enthält tatsächlich wieder $\sqrt{3}$, wie man durch den Vergleich des mit dem Taschenrechner auf 8 signifikante Stellen berechneten Wertes erkennt. Auch wenn wir diese Aussage nicht exakt wörtlich nehmen sollen, so bestätigt sie doch wieder die Tauglichkeit der Restgliedabschätzung nach Lagrange.

## Aufgabe 11.22 Näherungspolynome aus Potenzreihen

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | ohne Formelsammlung | 20 min | | Punkte | mit FS: |
| | mit Formelsammlung | 7 min | | ohne FS 11 P | 5 P |

Geben Sie polynomiale Näherungen für die Funktion $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$ an, und zwar in erster, zweiter und in dritter Näherung.

## Lösung zu 11.22

Die gesuchten Näherungen sind Taylor-Reihen, die man nach dem ersten, zweiten bzw. dritten nichtkonstanten Glied abbricht.

**Arbeitshinweis:**

Man muss nicht immer alle Taylor-Reihen selbst explizit entwickeln, vielmehr greift man üblicherweise auf Formelsammlungen oder Tabellenwerke zurück.

Findet man dort die Reihe zum Sinus, so kann man sie benutzen. Ansonsten lässt sich die Reihe zum Sinus auch aus der Reihe der komplexen Exponentialfunktion extrahieren (in Analogie zu Aufgabe 11.19), was nachfolgend kurz vorgeführt sei:

Aufg.11.19 $\Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Auch gilt $\sin(x) = \frac{-i}{2} \cdot \left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ Darin ist $i = \sqrt{-1}$ und $n =$ Summationsindex

Damit setzen wir den Sinus aus den Reihen komplexer Exponentialfunktionen zusammen:

1 P $$\sin(x) = \frac{-i}{2} \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ix)^n}{n!} \right) = \frac{-i}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!}$$

1 P Für geradzahlige $n$ ist $(ix)^n = (-ix)^n \Rightarrow (ix)^n - (-ix)^n = 0$. Von Null verschiedene Beiträge enthält die Summe also nur für ungerade $n$. Mit der Substitution $n =: 2k+1$ erzeugt man nur die ungeraden $n$ und erhält

2 P $$\sin(x) = \frac{-i}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1} - (-ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{-i}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1} + (ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = (-i) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Wegen $i^{(2k+1)} = i^1 \cdot i^{2k} = i \cdot (-1)^k$ folgt

2 P $$\sin(x) = (-i) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i \cdot (-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$ , wie auch in Formelsammlungen zu finden.

Nun können wir mit der eigentlichen Lösung der Aufgabe 11.22 beginnen:

Aus der Reihe des Sinus folgt die Reihe von $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ indem man gliedweise dividiert.

3 P $$f(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x) = \frac{1}{x} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \, x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \frac{x^8}{9!} \mp \ldots$$

In nullter Näherung wäre dann $f(t) \approx 1$ (mit nullmaligem Auftreten der Variablen)

Die ersten Näherung lautet $f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{3!}$ (mit einmaligem Auftreten der Variablen)

Die zweite Näherung lautet $f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}$ (mit zweimaligem Auftreten der Variablen)

2 P Die dritte Näherung lautet $f(x) \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!}$ (mit dreimaligem Auftreten der Variablen)

# Aufgabe 11.23 Näherungspolynome aus Potenzreihen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1.Näherung (a.) 12 min<br>1.Näherung (b.) 12 min | | Punkte<br>(a.) 7 P (b.) 7 P |
| | 2.Näherung (a.) 15 min | | (a.) 2. Näherung: 8 P |

Linearisieren Sie bitte die beiden nachfolgend genannten Funktionen:

(a.) $f(x) = x^x$ - in der Umgebung der Stelle $x_0 = \frac{1}{e}$

- in der Umgebung der Stelle $x_1 = 1$

- in der Umgebung der Stelle $x_2 = 2$

(b.) $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ - in der Umgebung der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{6}$

Zusatzaufgabe: Geben Sie bei Aufgabenteil (a.) auch noch die zweiten Näherungen an.

Weiterer Zusatz für Übungen (nicht in der Klausur): Wenn Sie ein Computerprogramm haben, das Funktionen plotten kann, dann können Sie sich durch die graphische Darstellung der Funktion und der Näherungen von der Qualität der Näherungsformeln überzeugen.

## Lösung zu 11.23

**Arbeitshinweis:**

Für Näherungen wie die gefragten, muss man sich nicht die Mühe machen, eine vollständige Taylorreihen-Entwicklung durchzuführen, nur um diese anschließend nach wenigen niedrigen Ableitungen abzubrechen. Viel effektiver ist es, von Anfang an nur die wenigen benötigten Ableitungen zu berechnen.

Die Linearisierung sieht dann als erste Näherung so aus:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)$$

Die nächsthöhere zweite Näherung lautet dann:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x-x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \tfrac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x-x_0)^2$$ 1 P

Damit führen wir nun die in der Aufgabenstellung gefragten Näherungen durch:

(a.) Zuerst bilden wir die benötigten Ableitungen:

$$f(x) = x^x = e^{\ln\left(x^x\right)} = e^{x \cdot \ln(x)}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \tfrac{1}{x}\right) = x^x \cdot \left(1 + \ln(x)\right)$$ 2 P

$$\Rightarrow \quad f''(x) = x^x \cdot \left(1 + \ln(x)\right) \cdot \left(1 + \ln(x)\right) + x^x \cdot \left(\tfrac{1}{x}\right) = x^x \cdot \left(\left(1 + \ln(x)\right)^2 + \tfrac{1}{x}\right)$$

Dann setzen wir die Entwicklungspunkte ein und erhalten die gesuchten Näherungen:

• Beim Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{e}$ →

1 P $f(x_0) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\left(\frac{1}{e}\right)} \overset{TR}{\approx} 0.6922$

$f'(x_0) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = 0$

1 P $\Rightarrow$ 1. Näherung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \overset{TR}{\approx} 0.6922 + 0 \cdot (x - x_0) = 0.6922$

$f''(x_0) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \cdot \left(\left(1 + \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2 + e\right) \overset{TR}{\approx} 1.8816$

2 P $\Rightarrow$ 2. Näherung: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 \overset{TR}{\approx} 0.6922 + \frac{1}{2} \cdot 1.8816 \cdot \left(x - \frac{1}{e}\right)^2$

$= 0.6922 + 0.9408 \cdot \left(x - \frac{1}{e}\right)^2$

Die graphische Kontrolle findet man in Bild 11-23a.

• Beim Entwicklungspunkt $x_1 = 1$ →

1 P $f(x_1) = (1)^{(1)} = 1$

1 P $f'(x_1) = (1)^1 \cdot (1 + \ln(1)) = 1 \quad \Rightarrow$ 1.Näherung: $f(x) \approx 1 + 1 \cdot (x - x_1) = 1 + x - 1 = x$

2 P $f''(x_1) = (1)^1 \cdot \left((1 + \ln(1))^2 + 1\right) = 2 \quad \Rightarrow$ 2.Näherung: $f(x) \approx 1 + x - 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x - x_1)^2 = x + (x-1)^2$

Die graphische Kontrolle findet man in Bild 11-23b.

• Beim Entwicklungspunkt $x_2 = 2$ →

1 P $f(x_2) = (2)^{(2)} = 4$

1 P $f'(x_2) = (2)^2 \cdot (1 + \ln(2)) \overset{TR}{\approx} 6.7726 \quad \Rightarrow$ 1. Näherung: $f(x) \approx 4 + 6.7726 \cdot (x - 2) = 6.7726x - 9.5452$

$f''(x_2) = (2)^2 \cdot \left((1 + \ln(2))^2 + \frac{1}{2}\right) \overset{TR}{\approx} 13.4670$

2 P $\Rightarrow$ 2. Näherung: $f(x) \approx 4 + 6.7726 \cdot (x - 2) + \frac{1}{2} \cdot 13.4670 \cdot (x - 2)^2 = 6.7335x^2 - 20.1614x + 17.3888$

Die graphische Kontrolle findet man in Bild 11-23c.

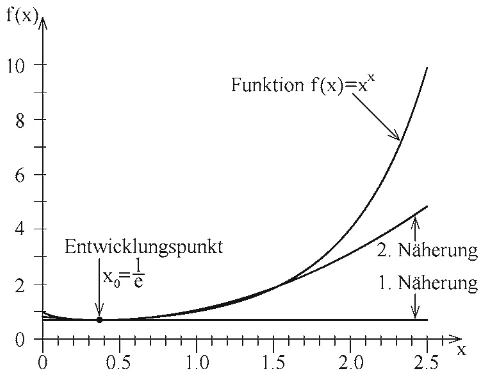



**Bild 11-23a**
Graphischer Vergleich
der Funktion $f(x) = x^x$ mit
der 1.Näherung $f(x) \approx 0.6922$ und
der 2. Näherung $f(x) \approx 0.6922 + 0.9408 \cdot \left(x - \frac{1}{e}\right)^2$
um den Entwicklungspunkt $x_0 = \frac{1}{e}$

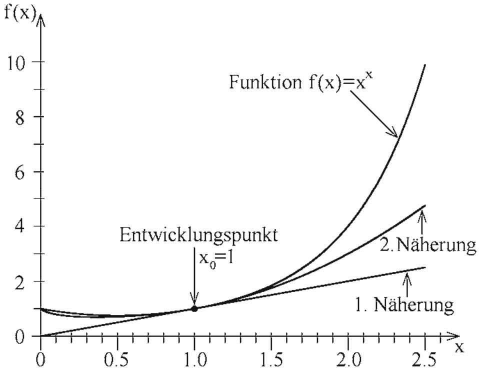



**Bild 11-23b**
Graphischer Vergleich
der Funktion $f(x) = x^x$ mit
der 1.Näherung $f(x) \approx x$ und
der 2. Näherung $f(x) \approx x + (x-1)^2$
um den Entwicklungspunkt $x_1 = 1$

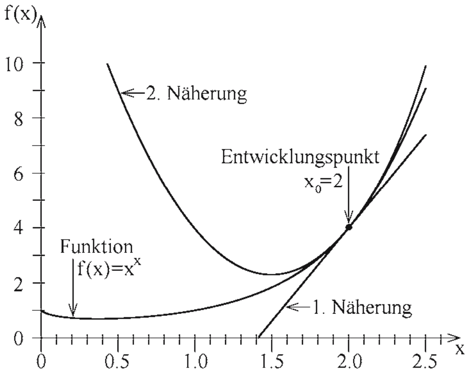



**Bild 11-23c**
Graphischer Vergleich
der Funktion $f(x) = x^x$ mit
der 1.Näherung $f(x) \approx 4 + 6.7726 \cdot (x-2)$ und
der 2. Näherung

$$f(x) \approx 4 + 6.7726 \cdot (x-2) + 6.7335 \cdot (x-2)^2$$
$$= 6.7335x^2 - 20.1614x + 17.3888$$

um den Entwicklungspunkt $x_2 = 2$

(b.) Gesucht ist die lineare Näherung für $f(x) = \sin(x)^{\sin(x)}$ in der Umgebung von $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Wir leiten ab und setzen den Arbeitspunkt ein:

$$f(x) = (\sin(x))^{(\sin(x))} = e^{\ln\left(\sin(x)^{\sin(x)}\right)} = e^{\sin(x)\cdot\ln(\sin(x))} \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \overset{TR}{\approx} 0.70711$$ 2 P

$$f'(x) = e^{\sin(x)\cdot\ln(\sin(x))} \cdot \left( \cos(x) \cdot \ln(\sin(x)) + \sin(x) \cdot \frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x) \right)$$ 3 P

$$= (\sin(x))^{\sin(x)} \cdot \cos(x) \cdot (1 + \ln(\sin(x))) \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\tfrac{3}{4}} \cdot \left(1 + \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) \overset{TR}{\approx} 0.18791$$

Einsetzen in die Formel der linearen Näherung liefert:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{1} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \overset{TR}{\approx} 0.70711 + 0.18781 \cdot \left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)$$ 2 P

Den graphischen Vergleich findet man in Bild 11-23d.

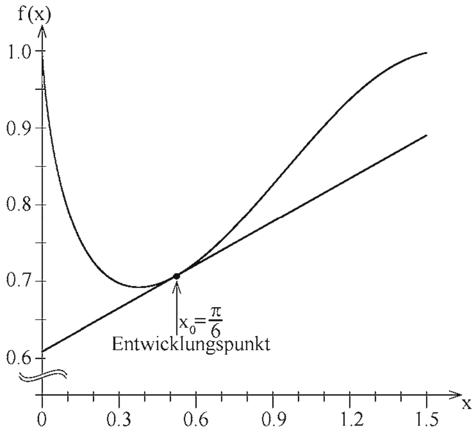



**Bild 11-23d**
Graphischer Vergleich der Funktion $f(x)=\sin(x)^{\sin(x)}$ mit der linearen Näherung

$$f(x)\approx 0.70711+0.18781\cdot\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=0.60877+0.18781\cdot x$$

um den Entwicklungspunkt $x_0=\frac{\pi}{6}$

## Aufgabe 11.24 L'Hospital'sche Regel

| | | Punkte | |
|---|---|---|---|
| (a,b,d,e,f,j.) | 2 min | (a,b,d,e,f,j.) | 1 P |
| (c,g,h,i,k) | 4 min | (c,g,h,i,k.) | 2 P |
| (l.) | 15 min | (l.) | 7 P |

Bestimmen Sie bitte die nachfolgend genannten Grenzwerte. Entscheiden Sie dabei von Fall zu Fall selbst, wann Sie die Regel von L'Hospital anwenden und wann nicht.

(a.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ (b.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}$ (c.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$ (d.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x-5}$

(e.) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}$ (f.) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2+3x-2}{x^2-3x+2}$ (g.) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}$ (h.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{27}}{e^x}$

(i.) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2+x}{e^x-1}}$ (j.) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$ (k.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)$ (l.) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)$

## Lösung zu 11.24

**Stolperfalle:**

Die Regel von L'Hospital wird zur Bestimmung von Grenzwerten von Brüchen angewandt, wenn Zähler und Nenner gleichzeitig gegen Null oder gleichzeitig gegen Unendlich gehen (symbolische Schreibweise „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$"). Andere Ausdrücke wird man vor dem Anwenden der l'Hospital'schen Regel in derartige Brüche umformen.

Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so würde die L'Hospital'sche Regel zu Fehlern führen, darf also nicht angewandt werden. Die Kontrolle, ob die Studierenden die Voraussetzungen der L'Hospital'schen Regel überprüfen, ist typisch für die Situation in Klausuren. Dabei werden einige Grenzwertaufgaben nebeneinander gestellt, von denen einige mit L'Hospital zu lösen sind, manche aber ohne. Zum Training ist dies auch bei Aufgabe 11.24 der Fall.

Bei den hier vorgestellten Musterlösungen sind die Gleichheitszeichen bei Umformung nach der L'Hospital'schen Regel mit „$\overset{LH}{=}$" markiert, wobei dieses Zeichen das Überprüfen der Ausdrücke im Zähler und im Nenner auf Zulässigkeit der Anwendung von L'Hospital bereits enthält.

(a.) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x\cdot\ln(a)-b^x\cdot\ln(b)}{1}=\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ 1 P

(b.)

**Arbeitshinweis:**

Die L'Hospital'sche Regel darf auch mehrfach angewandt werden. Sofern das Ergebnis einer Anwendung wieder zu einem „$\frac{0}{0}$" oder „$\frac{\infty}{\infty}$" führt, darf L'Hospital gleich wieder angewandt werden.

Dies ist auch bei Aufgabenteil (b.) der Fall: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$ 1 P

(c.) In symbolischer Kurzschreibweise könnte man diesen Fall als „$\infty-\infty$" bezeichnen, daher sind erst geeignete Umformungen nötig, um auf die Form für L'Hospital zu kommen. Es gilt:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{\left(e^x-1\right)-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}$ Jetzt gehen für $\lim\limits_{x\to 0}$ Zähler und Nenner gegen Null.

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+x\cdot e^x}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x+e^x+x\cdot e^x}=\frac{1}{2}$$ 2 P

(d.) Weder der Zähler noch der Nenner geht gegen Null. Hier wird nicht L'Hospital angewandt, sondern direkt ausgerechnet: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2}{x-5}=\frac{0+2}{0-5}=-\frac{2}{5}$ 1 P

(e.) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x^2-2x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{4\cdot 2-3}{2\cdot 2-2}=\frac{5}{2}$ 1 P

(f.) Es geht Zähler $\to 20$ und Nenner $\to 0$ $\Rightarrow$ kein L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4x^2+3x-2}{x^2-3x+2}=\infty$ 1 P

(g.) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\ln(x)}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x\cdot\left(1+\ln(x)\right)-1}{-1+\frac{1}{x}}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x\cdot\frac{1}{x}+\left(1+\ln(x)\right)^2\cdot x^x}{-x^{-2}}=\frac{1\cdot 1+1^2\cdot 1}{-1}=-2$ 2 P

(h.)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{27}}{e^x}\overset{LH}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27\cdot x^{26}}{e^x}\underbrace{\overset{LH}{=}\ldots\overset{LH}{=}\ldots\overset{LH}{=}}_{\text{noch 26 mal L'Hospital}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{27!}{e^x}=0$ Man sieht, warum die Exponentialfunktion immer gegenüber Potenzen dominiert. 2 P

(i) Wir untersuchen zuerst den Radikanten und fügen danach die Wurzel hinzu.

2 P $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{e^x-1}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{e^x}=\frac{1}{1}\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x^2+x}{e^x-1}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{e^x-1}}=\sqrt{1}=1$$

1 P (j.) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan(x)}{x-\frac{\pi}{2}}=\pm\infty$ Der Zähler geht gegen $\infty$, der Nenner gegen 0. Das ist kein Fall für L'Hospital.

(k.) Erst umformen, dann L'Hospital:

2 P $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(x)}{x\cdot\sin(x)}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)+x\cdot\cos(x)}\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\cdot\sin(x)}=\frac{0}{2}=0$$

(l.) Wir formen den Ausdruck „ $\infty-\infty$ “ in ein „ $\frac{0}{0}$ “ um:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-\sin^2(x)}{x^2\cdot\sin^2(x)}\right)\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-2\sin(x)\cos(x)}{2x\cdot\sin^2(x)+x^2\cdot 2\sin(x)\cos(x)}\right)$$

$$\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos^2(x)+2\sin^2(x)}{2\sin^2(x)+2x\cdot 2\sin(x)\cos(x)+2x\cdot 2\sin(x)\cos(x)+x^2\cdot\left(2\cos^2(x)-2\sin^2(x)\right)}$$

Ausdruck zusammenfassen:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2(x)}{\sin^2(x)+4x\cdot\sin(x)\cos(x)+x^2\cdot\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)}$$

$$\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{6\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+6x\cdot\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)-4x^2\cdot\left(\cos(x)\cdot\sin(x)\right)}$$

kürzen und zusammenfassen:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)}{\left(3-2x^2\right)\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+3x\cdot\left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)}$$

7 P $$\overset{LH}{=}\lim_{x\to 0}\frac{4\cdot\cos^2(x)-2}{-16x\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)+\left(6-2x^2\right)\cdot\left(2\cos^2(x)-1\right)}=\frac{4-2}{-0+6\cdot(2-1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

## Aufgabe 11.25 Funktionswerte aus Taylorreihen

| | | |
|---|---|---|
| 15…20 min | | Punkte 10 P |

Berechnen Sie $\ln(3)$ mit Hilfe einer Taylorreihe mit einer Genauigkeit von grob geschätzt etwa zwei signifikanten Stellen. Greifen Sie dabei auf das Ergebnis von Aufgabe 11.18.a zurück.

## Lösung zu 11.25

Das Ergebnis von Aufgabe 11.18.a ist die Taylor-Reihe des natürlichen Logarithmus:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(x-1)^n \text{, konvergent für } x\in\left]0;2\right[ .$$

Da das Argument $x=3$ außerhalb dieses Intervall liegt, berechnen wir das Negative des Logarithmus des Kehrwertes, sprich $\ln(3)=-\ln\left(\frac{1}{3}\right)$, denn $\frac{1}{3}$ liegt innerhalb des Konvergenzintervalls. Mit der Taylor-Reihe berechnen wir natürlich $+\ln\left(\frac{1}{3}\right)$, das Vorzeichen können wir später noch umdrehen.

$$\ln\left(\tfrac{1}{3}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(\tfrac{1}{3}-1\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot(-1)^n\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1}{n}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$ 4 P

$$=-\underbrace{\tfrac{1}{1}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^1}_{\overset{TR}{\approx}0.66666}-\underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2}_{\overset{TR}{\approx}0.22222}-\underbrace{\tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^3}_{\overset{TR}{\approx}0.09876}-\underbrace{\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^4}_{\overset{TR}{\approx}0.04938}-\underbrace{\tfrac{1}{5}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^5}_{\overset{TR}{\approx}0.02633}-\underbrace{\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^6}_{\overset{TR}{\approx}0.01463}-\underbrace{\tfrac{1}{7}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^7}_{\overset{TR}{\approx}0.00836}-\underbrace{\tfrac{1}{8}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^8}_{\overset{TR}{\approx}0.00487}-\underbrace{\tfrac{1}{9}\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^9}_{\overset{TR}{\approx}0.00289}-\ldots\overset{TR}{\approx}-1.0941$$

Die Formel für die Restgliedabschätzung nach Lagrange lautet (hier für $n=9$):

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{(n+1)} \qquad \text{mit} \qquad \xi\in[x;x_0] \quad ,$$ 2 P

wobei wir die $(n+1)$ – te Ableitung $f^{(n+1)}(x)=(-1)^{n+2}\cdot n!\cdot x^{-(n+1)}$ der Systematik von Aufgabe 11.18.a entnehmen. 1 P

Dies setzen wir in unsere Restgliedabschätzung an der Stelle $\xi=\frac{1}{3}$ ein und erhalten

$$R_9\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{(-1)^{9+2}\cdot 9!\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-(9+1)}}{(9+1)!}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^{(9+1)}=\frac{-9!}{10!}=-\frac{1}{10}$$ 2 P

Interpretiert man das Restglied wieder als Maß für die Ungenauigkeit der Berechnung, so liegt $\ln\left(\frac{1}{3}\right)$ im Intervall $[-1.1941;-1.0941]$, d.h.: $\ln(3)\overset{TR}{\approx}1.098612289\in[+1.0941;+1.1941]$, was durch die Benutzung eines Taschenrechners durchaus bestätigt wird. 1 P

Bei einer Restgliedabschätzung von $|R_n|=0.1$ ist die geforderte Rechengenauigkeit auf zwei signifikante Stellen (eine Vorkommastelle und eine Nachkommastelle) in etwa erreicht, weshalb wir die Aufgabe als gelöst betrachten dürfen.

Da das Restglied nur proportional $n^{-1}$ kleiner wird, und nicht mit einer schneller abfallenden Potenz von $n$, sehen wir, dass die Reihe recht langsam konvergiert.

## Aufgabe 11.26 Reellwertige Fourier-Reihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 30 min | | Punkte 20 P |

Gegeben sei ein periodisch wiederkehrendes Signal entsprechend Bild 11-26.

Geben Sie die mathematische Funktion im Verlauf einer Periode dieses Signals an und entwickeln Sie die reellwertige Fourier-Reihe dazu.

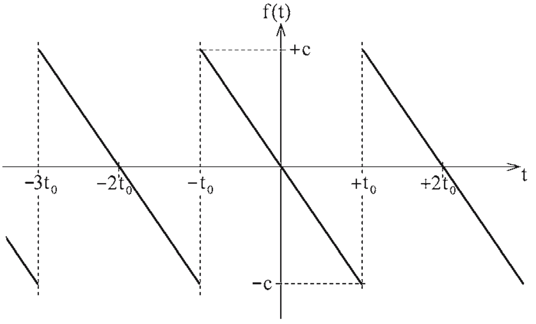



**Bild 11-26**
Darstellung eines periodischen Signals, dessen Fourier-Reihe entwickelt werden soll.

## Lösung zu 11.26

Vorbemerkung: Die Funktion $f(t)$ erfüllt die Dirichlet'sche Bedingung für die Entwickelbarkeit in eine Fourier-Reihe, denn sie hat innerhalb einer Periode nicht unendlich viele Sprünge.

**Arbeitshinweis:**

Für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten ist es günstig, wenn die Funktion innerhalb der einen zu betrachtenden Periode möglichst wenige Sprünge vollführt, da man dadurch die Arbeitseffizienz bei der Integration zur Bestimmung der Fourier-Koeffizienten optimiert. Der entsprechende Startzeitpunkt darf frei gewählt werden.

Für unsere Aufgabe ist es daher am günstigsten, den Anfangszeitpunkt der zu betrachtenden Periode bei $-t_0$ festzulegen. Da die Periodendauer $T = 2 \cdot t_0$ beträgt, endet die zu betrachtende Periode zur Zeit $+t_0$.

Zunächst suchen wir den mathematischen Ausdruck der Funktion innerhalb einer Periode:

1 P $$f(t) = -\frac{c}{t_0} \cdot t \quad \text{für} \quad t \in \left]-t_0; +t_0\right[$$

Damit beginnen wir nun die eigentliche Entwicklung der Fourier-Reihe:

**Arbeitshinweis:**

Schreibt man wie der reellzahligen Entwicklung üblich die Fourier-Reihe in der Form $f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cdot\cos(n\omega_0 t)+b_n\cdot\sin(n\omega_0 t)\right]$, so erkennt man bereits am Gleichanteil und am Symmetrieverhalten der Funktion, ob einige der Fourier-Koeffizienten verschwinden.

In unserem Beispiel ist der Gleichanteil Null, also ist $a_0=0$, und außerdem zeigt die Funktion ungerade Symmetrie, also verschwinden die Cosinus-Anteile mit gerader Symmetrie, d.h. es sind außerdem auch alle $a_n=0$ (mit $n>0$).

Im Falle einer Klausur kann man sich meistens auf die Berechnung der von Null verschiedenen Fourier-Koeffizienten beschränken – sofern der Prüfer dies zulässt.

In der vorliegenden Aufgabe wollen wir alle Fourier-Koeffizienten berechnen, auch die verschwindenden. In den späteren nachfolgenden Aufgaben werden wir uns dann auf die nicht-verschwindenden Koeffizienten beschränken.

Berechnung des $a_0$:

$$a_0=\frac{2}{T}\cdot\int_{-t_0}^{+t_0} f(t)\,dt=\frac{2}{2t_0}\cdot\int_{-t_0}^{+t_0}\left(-\frac{c}{t_0}\cdot t\right)dt=-\frac{c}{t_0^2}\cdot\int_{-t_0}^{+t_0} t\cdot dt=-\frac{c}{t_0}\cdot\left[\tfrac{1}{2}t^2\right]_{-t_0}^{+t_0}=-\frac{c}{t_0}\cdot\left(\tfrac{1}{2}t_0^2-\tfrac{1}{2}(-t_0)^2\right)=0$$ 2 P

Berechnung der $a_n$:

$$a_n=\frac{2}{T}\cdot\int_{(T)} f(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{2}{2t_0}\cdot\int_{-t_0}^{+t_0}\left(-\frac{c}{t_0}\cdot t\right)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt=-\frac{c}{t_0^2}\cdot\underbrace{\int_{-t_0}^{+t_0}\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{\cos(n\omega_0 t)}_{v'}\,dt}_{\text{partielle Integration}}$$

$$=-\frac{c}{t_0^2}\cdot\left[\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{\sin(n\omega_0 t)\cdot\frac{1}{n\omega_0}}_{v}\right]_{-t_0}^{+t_0}+\frac{c}{t_0^2}\int_{-t_0}^{+t_0}\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{n\omega_0}\cdot\sin(n\omega_0 t)}_{v}\,dt$$ 4 P

$$=\frac{-c}{n\omega_0 t_0^2}\cdot\left[t\cdot\sin(n\omega_0 t)\right]_{-t_0}^{+t_0}-\frac{c}{n^2\omega_0^2 t_0^2}\left[\cos(n\omega_0 t)\right]_{-t_0}^{+t_0}$$

Wegen $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2t_0}=\frac{\pi}{T_0}$ lassen sich die $\omega_0$ einsetzen. Eine derartige Ersetzung für $\omega_0$ wird bei der Entwicklung von Fourier-Koeffizienten häufig verwendet.

$$a_n=\frac{-c}{n\pi t_0}\cdot\left[t\cdot\sin\left(n\frac{\pi}{t_0}t\right)\right]_{-t_0}^{+t_0}-\frac{c}{n^2\pi^2}\left[\cos\left(n\frac{\pi}{t_0}t\right)\right]_{-t_0}^{+t_0}$$

$$=\frac{-c}{n\pi t_0}\cdot\left[t_0\cdot\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{t_0}t_0\right)}_{=0}-t_0\cdot\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{t_0}(-t_0)\right)}_{=0}\right]-\frac{c}{n^2\pi^2}\cdot\left[\cos\left(n\frac{\pi}{t_0}t_0\right)-\cos\left(n\frac{\pi}{t_0}(-t_0)\right)\right]$$

4 P
$$= \underbrace{-\frac{c}{n^2\pi^2}\cdot\left[\cos(n\pi)-\cos(-n\pi)\right] = -\frac{c}{n^2\pi^2}\cdot\left[\cos(n\pi)-\cos(n\pi)\right]}_{\text{Es ist } \cos(-n\pi)=\cos(n\pi)\text{, da der Cosinus eine gerade Funktion ist.}} = 0$$

Berechnung der $b_n$:

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int_{(T)} f(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{2t_0}\cdot\int_{-t_0}^{+t_0}\left(-\frac{c}{t_0}\cdot t\right)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt = -\frac{c}{t_0^2}\cdot\underbrace{\int_{-t_0}^{+t_0}\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{\sin(n\omega_0 t)}_{v'}\,dt}_{\text{partielle Integration}}$$

4 P
$$= -\frac{c}{t_0^2}\cdot\left[\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{\left(-\cos(n\omega_0 t)\right)\cdot\frac{1}{n\omega_0}}_{v}\right]_{-t_0}^{+t_0} + \frac{c}{t_0^2}\int_{-t_0}^{+t_0}\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{1}{n\omega_0}\cdot\left(-\sin(n\omega_0 t)\right)}_{v}\,dt$$

$$= \frac{c}{n\omega_0 t_0^2}\cdot\left[t\cdot\cos(n\omega_0 t)\right]_{-t_0}^{+t_0} - \frac{c}{n^2\omega_0^2 t_0^2}\left[\sin(n\omega_0 t)\right]_{-t_0}^{+t_0}$$

Wieder setzen wir $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{T_0}$ ein und erhalten:

$$b_n = \frac{c}{n\pi t_0}\cdot\left[t\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{t_0}t\right)\right]_{-t_0}^{+t_0} - \frac{c}{n^2\pi^2}\left[\sin\left(n\frac{\pi}{t_0}t\right)\right]_{-t_0}^{+t_0}$$

$$= \frac{c}{n\pi t_0}\cdot\left[t_0\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{t_0}t_0\right)-(-t_0)\cdot\cos\left(n\frac{\pi}{t_0}(-t_0)\right)\right] - \frac{c}{n^2\pi^2}\cdot\left[\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{t_0}t_0\right)}_{=0}-\underbrace{\sin\left(n\frac{\pi}{t_0}(-t_0)\right)}_{=0}\right]$$

4 P
$$= \frac{c}{n\pi t_0}\cdot\left[t_0\cos(n\pi)+t_0\cos(n\pi)\right] = \frac{2c}{n\pi}\cdot\cos(n\pi)$$

Wegen $\cos(n\pi) = (-1)^n$ lässt sich folgern: $b_n = \frac{2c}{n\pi}\cdot(-1)^n$

In den meisten Fällen sind Aufgaben zur Entwicklung von Fourier-Reihen mit der Angabe der Fourier-Koeffizienten erledigt. Mitunter möchte ein Prüfer noch die fertige Fourier-Reihe sehen, die sich durch simples Abschreiben der Koeffizienten in die Reihe ergibt. In unserem Fall lautet diese:

1 P
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\cdot\frac{2c}{n\pi}\cdot\sin(n\omega_0 t)\right]$$

## Aufgabe 11.27 Reellwertige Fourier-Reihe

| | | |
|---|---|---|
| 45 min | | Punkte 25 P |

Entwickeln Sie die in Bild 11-27 gegebene Funktion in eine reellwertige Fourier-Reihe.

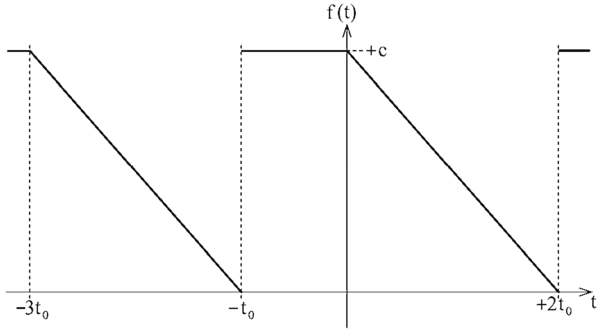



**Bild 11-27**
Darstellung eines periodischen Signals, dessen Fourier-Reihe entwickelt werden soll.

## ▾ Lösung zu 11.27

Vorarbeit: Wir bringen die Funktion in einen mathematischen Ausdruck. Dabei legen wir den Anfang der zu untersuchenden Periode bei $-t_0$ fest:

$$f(t)=\begin{cases} c & \text{für } -t_0<t<0 \\ c-\frac{c}{2t_0}\cdot t & \text{für } 0<t<2t_0 \end{cases}$$ 1 P

Damit berechnen wir die Fourier-Koeffizienten:

Der Gleichanteil lautet

$$a_0=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_{(T)} f(t)\,dt=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_{-t_0}^{0} c\,dt+\frac{2}{T}\cdot\int\limits_{0}^{2t_0}\left(c-\tfrac{c}{2t_0}\cdot t\right)dt=\frac{2}{T}\cdot\left[ct\right]_{-t_0}^{0}+\frac{2}{T}\cdot\left[ct-\tfrac{c}{4t_0}\cdot t^2\right]_0^{2t_0}$$

$$=\frac{2}{3t_0}\cdot\left[0-c(-t_0)\right]+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[c\cdot 2t_0-\tfrac{c}{4t_0}\cdot(2t_0)^2-0\right]=\frac{2ct_0}{3t_0}+\frac{4ct_0}{3t_0}-\frac{2c\cdot 4t_0^2}{12t_0^2}=\frac{4}{3}c\quad,$$ 3 P

wobei von $T=3t_0$ Gebrauch gemacht worden war.

Der Anteil mit gerader Symmetrie lautet

$$a_n=\frac{2}{T}\cdot\int\limits_{(T)} f(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt=\frac{2}{3t_0}\cdot\int\limits_{-t_0}^{0} c\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt+\frac{2}{3t_0}\cdot\int\limits_{0}^{2t_0}\left(c-\frac{c}{2t_0}\cdot t\right)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$=\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{c}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_{-t_0}^{0}+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{c}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_0^{2t_0}-\frac{2c}{6t_0^2}\cdot\int\limits_0^{2t_0} t\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt\ .$$ 3 P

Mit partieller Integration folgt

$$a_n=\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{c}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_{-t_0}^{0}+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{c}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_0^{2t_0}-\frac{2c}{6t_0^2}\cdot\left[\frac{\cos(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2}+\frac{t\cdot\sin(n\omega_0 t)}{n\,\omega_0}\right]_0^{2t_0}$$

Mit $\omega_0=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{3t_0}\ \Rightarrow\ \omega_0 t_0=\frac{2}{3}\pi$ setzen wir die Grenzen ein und erhalten

4 P
$$a_n = \frac{2}{3t_0}\cdot\left[0-\frac{c}{n\omega_0}\sin\left(n\omega_0\left(-t_0\right)\right)\right]+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{c}{n\omega_0}\sin\left(n\omega_0\cdot 2t_0\right)-0\right]$$
$$-\frac{2c}{6t_0^2}\left[\left(\frac{\cos\left(n\omega_0\cdot 2t_0\right)}{n^2\omega_0^2}+\frac{2t_0\cdot\sin\left(n\omega_0\cdot 2t_0\right)}{n\,\omega_0}\right)-\left(\frac{\cos(0)}{n^2\omega_0^2}+0\right)\right]$$

Wir fassen zusammen und vereinfachen dann

$$\Rightarrow\quad a_n = \frac{2c\cdot\sin\left(n\cdot\frac{2}{3}\pi\right)}{3n\cdot\frac{2}{3}\pi}+\frac{2c\cdot\sin\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{3n\cdot\frac{2}{3}\pi}-\frac{2c\cdot\cos\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{6n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2}-\frac{4c\cdot\sin\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{6n\cdot\frac{2}{3}\pi}+\frac{2c}{6}\cdot\frac{\cos(0)}{n^2\cdot\left(\frac{2}{3}\pi\right)^2}$$

2 P
$$=\frac{c}{n\pi}\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+\frac{3c}{4n^2\pi^2}\cdot\left(1-\cos\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)$$

Der Anteil mit ungerader Symmetrie lautet

$$b_n = \frac{2}{T}\cdot\int\limits_{(T)} f(t)\cdot\sin\left(n\omega_0 t\right)dt = \frac{2}{3t_0}\cdot\int\limits_{-t_0}^{0} c\cdot\sin\left(n\omega_0 t\right)dt+\frac{2}{3t_0}\cdot\int\limits_{0}^{2t_0}\left(c-\frac{c}{2t_0}\cdot t\right)\cdot\sin\left(n\omega_0 t\right)dt$$

3 P
$$=\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{-c}{n\omega_0}\cos\left(n\omega_0 t\right)\right]_{-t_0}^{0}+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{-c}{n\omega_0}\cos\left(n\omega_0 t\right)\right]_{0}^{2t_0}-\frac{2c}{6t_0^2}\cdot\int\limits_{0}^{2t_0} t\cdot\sin\left(n\omega_0 t\right)dt$$

Wieder folgt partielle Integration und führt zu

2 P
$$b_n = \frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{-c}{n\omega_0}\cos\left(n\omega_0 t\right)\right]_{-t_0}^{0}+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{-c}{n\omega_0}\cos\left(n\omega_0 t\right)\right]_{0}^{2t_0}-\frac{2c}{6t_0^2}\left[\frac{\sin\left(n\omega_0 t\right)}{n^2\omega_0^2}-\frac{t\cdot\cos\left(n\omega_0 t\right)}{n\,\omega_0}\right]_{0}^{2t_0}$$

Einsetzen der Integrationsgrenzen und Berücksichtigung von $\omega_0 t_0 = \frac{2}{3}\pi$ liefert

$$b_n = \frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{-c}{n\omega_0}\cos(0)+\frac{c}{n\omega_0}\cos\left(n\omega_0\cdot\left(-t_0\right)\right)\right]+\frac{2}{3t_0}\cdot\left[\frac{-c}{n\omega_0}\cos\left(n\omega_0\cdot 2t_0\right)+\frac{c}{n\omega_0}\cos(0)\right]$$
$$-\frac{2c}{6t_0^2}\left[\left(\frac{\sin\left(n\omega_0\cdot 2t_0\right)}{n^2\omega_0^2}-\frac{2t_0\cdot\cos\left(n\omega_0\cdot 2t_0\right)}{n\,\omega_0}\right)-(0-0)\right]$$

4 P
$$=\underbrace{\frac{-\frac{2}{3}\cdot c}{n\cdot\frac{2}{3}\pi}}_{(*1)}+\underbrace{\frac{\frac{2}{3}\cdot c}{n\cdot\frac{2}{3}\pi}\cos\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)}_{(*2)}+\underbrace{\frac{-\frac{2}{3}\cdot c}{n\cdot\frac{2}{3}\pi}\cos\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)}_{(*2)}+\underbrace{\frac{\frac{2}{3}\cdot c}{n\cdot\frac{2}{3}\pi}}_{(*1)}-\frac{c}{3t_0^2}\cdot\left(\frac{\sin\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{n^2\cdot\frac{4\pi^2}{9t_0^2}}-\frac{2t_0\cdot\cos\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{n\cdot\frac{2\pi}{3t_0}}\right)$$

Die beiden Terme $(*1)$ heben einander gegenseitig auf, die beiden Terme $(*2)$ ebenso, denn es gilt $\cos\left(n\cdot\frac{2}{3}\pi\right)=\cos\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)$. Es bleibt also lediglich übrig:

$$b_n = -\frac{c}{3t_0^2}\cdot\left(\frac{\sin\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{n^2\cdot\frac{4\pi^2}{9t_0^2}}-\frac{2t_0\cdot\cos\left(n\cdot\frac{4}{3}\pi\right)}{n\cdot\frac{2\pi}{3t_0}}\right)=\frac{-9c}{12\pi^2n^2}\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)+\frac{6c}{6\pi\,n}\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)$$

2 P
$$\Rightarrow\quad b_n = \frac{-3c}{4\pi^2n^2}\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)+\frac{c}{\pi\,n}\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)$$

Wer das Ergebnis zusammenfassen will, schreibt schließlich die gesamte Fourier-Reihe auf: 1 P

$$f(t) = \underbrace{\frac{2c}{3}}_{\frac{1}{2}a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\left(\frac{c}{n\pi}\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{2}{3}\pi\right)+\frac{3c}{4n^2\pi^2}\cdot\left(1-\cos\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)\right)}_{a_n}\cdot\cos\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\underbrace{\left(\frac{-3c}{4\pi^2 n^2}\cdot\sin\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)+\frac{c}{\pi\,\mathrm{n}}\cdot\cos\left(n\cdot\tfrac{4}{3}\pi\right)\right)}_{b_n}\cdot\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]$$

## Aufgabe 11.28 Reellwertige Fourier-Reihe

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 20 min | | Punkte<br>(a.) 12 P |

(a.) Entwickeln Sie die Funktion aus Bild 11-28a in eine reellwertige Fourier-Reihe.

(b.) Stellen Sie das Amplitudenspektrum dieser Fourier-Reihe graphisch dar.

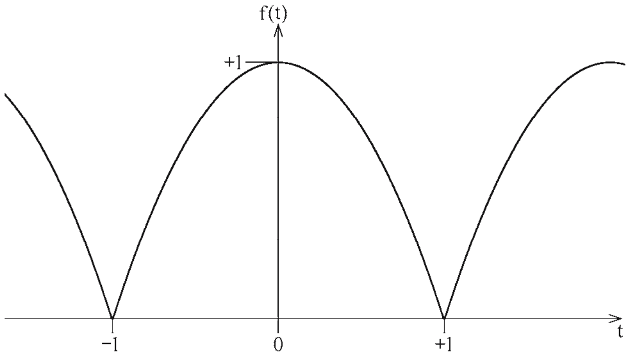



**Bild 11-28a**
Darstellung eines periodischen Signals, dessen Fourier-Reihe entwickelt werden soll.

Die Funktion innerhalb einer Periode lautet
$f(t) = 1 - t^2$ für $t \in [-1;+1]$

## Lösung zu 11.28

(a.) Zuerst entwickeln wir die Fourier-Reihe:

Da die Funktion gerade Symmetrie aufweist, sind alle Sinus-Summanden $b_n = 0$.
Explizit berechnen müssen wir also nur die $a_o$ und $a_n$.

Zuerst das $a_o$ (wobei eine Periodendauer von $T = 2 \;\Rightarrow\; \frac{2}{T} = 1$ berücksichtigt sei): 2 P

$$a_o = \frac{2}{T}\cdot\int_{-1}^{+1}\left(1-t^2\right)dt = \frac{2}{T}\cdot\left[t-\tfrac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{+1} = \left(1-\tfrac{1}{3}\right)-\left(-1+\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{4}{3}$$

Nun die $a_n$:

1 P $a_n = \frac{2}{T} \cdot \int\limits_{-1}^{+1} \left(1-t^2\right)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt = \int\limits_{-1}^{+1} \cos\left(n\omega_0 t\right)dt - \int\limits_{-1}^{+1} t^2 \cdot \cos\left(n\omega_0 t\right)dt$

Das hintere der beiden Integrale löst man durch zweifache partielle Integration und erhält

1 P $a_n = \left[\frac{1}{n\omega_0}\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]_{-1}^{+1} - \left[\frac{2t}{n^2\omega_0^2} \cdot \cos\left(n\omega_0 t\right) + \left(\frac{t^2}{n\omega_0} - \frac{2}{n^3\omega_0^3}\right)\sin\left(n\omega_0 t\right)\right]_{-1}^{+1}$

Wir setzen die Integralgrenzen ein und berücksichtigen überdies $\omega_0 = \frac{2\pi}{\mathrm{T}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$:

2 P
$$\Rightarrow \quad a_n = \left[\frac{1}{n\pi}\sin\left(n\pi\right) - \frac{1}{n\pi} \cdot \sin\left(-n\pi\right)\right] - \left[\frac{2}{n^2\pi^2} \cdot \cos\left(n\pi\right) + \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right)\sin\left(n\pi\right)\right] + \left[\frac{-2}{n^2\pi^2} \cdot \cos\left(-n\pi\right) + \left(\frac{(-1)^2}{n\pi} - \frac{2}{n^3\pi^3}\right)\sin\left(-n\pi\right)\right]$$

Mit $\sin\left(n\pi\right) = 0$ und $\cos\left(n\pi\right) = \left(-1\right)^n$ lässt sich der Ausdruck schließlich vereinfachen zu

1 P $a_n = -\left[\frac{2}{n^2\pi^2} \cdot \left(-1\right)^n\right] + \left[\frac{-2}{n^2\pi^2} \cdot \left(-1\right)^n\right] = \frac{-4}{n^2\pi^2} \cdot \left(-1\right)^n = \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \left(-1\right)^{n+1}$

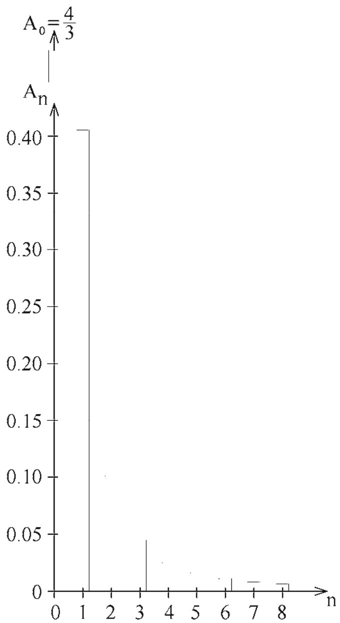
Zusammenfassend lässt sich also die gesamte Fourier-Reihe schreiben als

$$f\left(t\right) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot \left(-1\right)^{n+1} \cdot \cos\left(n\omega_0 t_0\right)$$

(b.) Wegen $b_n = 0$ ist das Amplitudenspektrum besonders einfach zu berechnen, nämlich:

2 P $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \left|a_n\right| = \frac{4}{n^2\pi^2}$ ab $n \geq 1$ (Anm: Es ist $A_0 = a_0 = \frac{4}{3}$ .)

Die graphische Darstellung sieht man in Bild 11-28b.




3 P

**Bild 11-28b**
Amplitudenspektrum zur Fourier-Entwicklung der Funktion, die in Bild 11.28a gegeben wurde:
$f(t) = 1 - t^2$ für $t \in [-1;+1]$

$$\Rightarrow \quad a_0 = \frac{4}{3}\,; \qquad a_n \, \frac{4}{n^2\pi^2} \cdot (-1)^{n+1}\,; \qquad b_n = 0$$

# Aufgabe 11.29 Komplexwertige Fourier-Reihe

| | | |
|---|---|---|
| 25 min | | Punkte<br>(a.) 16 P |

(a.) Entwickeln Sie die Funktion aus Bild 11-29 in eine komplexwertige Fourier-Reihe.

(b.) Bestimmen Sie aus den komplexen Fourier-Koeffizienten die reellwertigen.

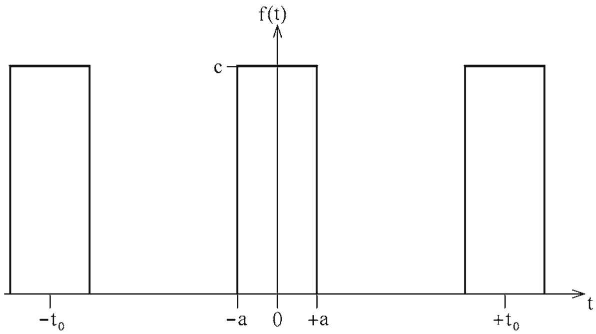



**Bild 11-29**
Darstellung eines periodisch wiederkehrenden zeitlich begrenzten Rechtecksignals, dessen komplexwertige Fourier-Reihe entwickelt werden soll.

## Lösung zu 11.29

(a.) Wir betrachten eine Periode von $t=-\frac{t_0}{2}\,...+\frac{t_0}{2}$ mit der Periodendauer $T=t_0$.

2 P

Die Funktion innerhalb einer Periode lautet $f(t)=\begin{cases}0 \text{ für } -\frac{t_0}{2}<t<-a\\ c \text{ für } -a<t<+a\\ 0 \text{ für } +a<t<+\frac{t_0}{2}\end{cases}$.

Der Gleichanteil ist eine reelle Größe und wird deshalb einzeln entwickelt:

2 P
$$c_0=\frac{1}{T}\cdot\int\limits_{(T)} f(t)\,dt=\frac{1}{t_0}\cdot\int\limits_{-a}^{+a} c\,dt=\frac{1}{t_0}\cdot\left[c\cdot t\right]_{-a}^{+a}=\frac{1}{t_0}\cdot\left(c\cdot a-c\cdot(-a)\right)=\frac{2ca}{t_0}$$

Alle anderen Fourier-Koeffizienten ($c_n$ mit $n\neq 0$) bestimmen wir mit dem Integral

2 P
$$c_n=\frac{1}{T}\cdot\int\limits_{(T)} f(t)\cdot e^{-in\omega_0 t}\cdot dt=\frac{1}{t_0}\cdot\int\limits_{-a}^{+a} c\cdot e^{-in\omega_0 t}\cdot dt=\frac{1}{t_0}\cdot\frac{1}{-i\,n\,\omega_0}\cdot\left[c\cdot e^{-in\omega_0 t}\right]_{-a}^{+a}.$$

Mit $\omega_0=\frac{2\pi}{t_0}$ folgt durch Einsetzen der Integralgrenzen

2 P
$$c_n=\frac{1}{t_0}\cdot\frac{1}{-i\,n\,\omega_0}\cdot\left(c\cdot e^{-in\omega_0 a}-c\cdot e^{in\omega_0 a}\right)=\frac{1}{t_0}\cdot\frac{i\cdot c}{n\cdot\frac{2\pi}{t_0}}\cdot\left(e^{-in\frac{2\pi}{t_0}a}-e^{in\frac{2\pi}{t_0}a}\right)=\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\left(e^{-i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}-e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}\right)$$

Damit lautet die komplexwertige Fourier-Reihe

2 P
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\cdot e^{in\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\left(e^{-in\frac{2\pi}{t_0}\cdot a}-e^{in\frac{2\pi}{t_0}\cdot a}\right)\cdot e^{in\frac{2\pi}{t_0}t}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\left(e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{t-a}{t_0}}-e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{t+a}{t_0}}\right)$$

(b.) Die reellen Fourier-Koeffizienten extrahieren wir aus den komplexen Koeffizienten für $n\neq 0$ wie folgt:

2 P
$$a_n=c_n+c_{-n}=c_n+c_n^*=\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\underbrace{\left(e^{-i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}-e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}\right)}_{=-2i\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)}+\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\underbrace{\left(e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}-e^{-i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}\right)}_{=+2i\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)}=0$$

Das entspricht unserer Erwartung, denn aufgrund der geraden Symmetrie von $f(t)$ müssen die $a_n$ (für $n\neq 0$) verschwinden.

3 P
$$b_n=i\cdot\left(c_n-c_{-n}\right)=i\cdot\left(c_n-c_n^*\right)=\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\underbrace{\left(e^{-i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}-e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}\right)}_{=-2i\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)}-\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\underbrace{\left(e^{i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}-e^{-i\cdot 2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}}\right)}_{=+2i\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)}$$
$$=\frac{i\cdot c}{2\pi n}\cdot\left(-4i\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)\right)=\frac{2c}{\pi n}\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)$$

Da der Gleichanteil $\frac{a_0}{2}=c_0$ ist, ergibt sich die reellwertige Formulierung der gesuchten Fourier-Reihe als

1 P
$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\cdot\cos\left(n\omega_0 t\right)=\frac{2ca}{t_0}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2c}{\pi n}\cdot\sin\left(2\pi n\cdot\frac{a}{t_0}\right)\cdot\cos\left(n\omega_0 t\right)$$

# 12 Gewöhnliche Differentialgleichungen

## Vorbemerkung

In diesem Kapitel müssen oftmals Integrale gelöst und Ableitungen berechnet werden. Etliche davon werden in den Musterlösungen nicht von Hand Schritt für Schritt vorgeführt, denn das Ableiten und das Integrieren sind eigentlich die Themen von Kapitel 6 und Kapitel 7. Speziell beim Integrieren wird deshalb aus Platzgründen auf Integraltafeln zurückgegriffen, wie man sie in Formelsammlungen findet. (Eine solche Integraltafel findet man z.B. im Teubner-Taschenbuch der Mathematik, 2.Aufl. Kap. 0.9.5.)

Den Lesern und Leserinnen wird empfohlen, sich mit Kapitel 12 erst dann zu befassen, wenn sie die Inhalte von Kapitel 6 und 7 sicher beherrschen.

**Anmerkung: Für Kapitel 12 werden die nachfolgenden Abkürzungen verwendet.**

| | | |
|---|---|---|
| Dgl. = Differentialgleichung | lin. = linear | allg. = allgemein |
| hom. = homogen | inhom. = inhomogen | Lsg. = Lösung |
| spez. = speziell | Glg. = Gleichung | konst. = konstant |

## Aufgabe 12.1 Die Methode der Variablentrennung

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a,b,c.) | je 4 min | | Punkte<br>(a,b,c.) je 2 P |
| (d.)<br>(e,f.) | 15 min<br>je 5 min | | (d.) 7 P<br>(e,f.) je 3 P |

Nachfolgend sind einige Dgln. genannt, die sich mit der Methode der Variablentrennung lösen lassen. Bestimmen Sie bitte jeweils die allgemeine Lösung.

(a.) $y' = -\lambda \cdot y$   (b.) $y' = y^2 \cdot \sin(x)$   (c.) $y' = x^2 \cdot \sqrt{y}$

(d.) $y' = (4x + xy) \cdot y$   (e.) $y' = e^{x+2y}$   (f.) $\frac{y'}{y} = x^2 + \cos(x)$

## Lösung zu 12.1

**Arbeitshinweis:**

Das Verfahren der Variablentrennung basiert darauf, dass man alle $x$ – haltigen Terme auf die eine Seite des Gleichheitszeichens schreibt, alle $y$ – haltigen hingegen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, und zwar sowohl die Terme mit $x$ bzw. $y$, also auch die Differentiale dieser Variablen. Sind die Variablen auf diese Weise getrennt, so lässt sich die Differentialgleichung lösen indem man beide Seiten integriert.

Wir wenden dies nun auf unsere Beispielaufgaben an:

(a.) $y' = -\lambda \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\lambda \cdot y$ $\quad \Big| \cdot \frac{dx}{y}$ zwecks Trennung der Variablen

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\lambda \cdot dx$ $\quad \Big|$ Integrationsschritt

2 P $\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int -\lambda \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \ln(y) = -\lambda \cdot x + C_1$ $\quad \Big| e^{\text{Gleichung}}$ zwecks auflösen nach $y$

$\Rightarrow \quad y = e^{-\lambda \cdot x + C_1} = y_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$

Die Umformung der Integrationskonstanten gemäß $y_0 = e^{C_1}$ wäre sogar dann zulässig, wenn man den Zusammenhang zwischen der „alten" Schreibweise ($C_1$) und der „neuen" ($y_0$) der Integrationskonstanten nicht angeben würde, denn die Konstanten können prinzipiell beliebige Werte annehmen.

(b.) $y' = y^2 \cdot \sin(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = y^2 \cdot \sin(x)$ $\quad \Big| \cdot \frac{dx}{y^2}$, danach Integrationsschritt

2 P $\Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = \sin(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int \sin(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = -\cos(x) + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{\cos(x) - C_1}$

(c.) $y' = x^2 \cdot \sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot \sqrt{y}$ $\quad \Big| \cdot \frac{dx}{\sqrt{y}}$, danach Integrationsschritt

2 P $\Rightarrow \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = x^2 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int x^2 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}x^3 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{6}x^3 + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{6}x^3 + C_2\right)^2$

1 P (d.) $y' = (4x + xy) \cdot y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 4xy + xy^2 = x \cdot \left(4y + y^2\right)$ $\quad \Big| \cdot \frac{dx}{4y + y^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\left(4y + y^2\right)} = x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\left(4y + y^2\right)} = \int x\,dx$ $\quad \Big|$ Integrationsschritt mit Partialbruchzerlegung
Diese lautet: $\frac{1}{4y+y^2} = \frac{1}{4y} - \frac{1}{16+4y}$
Außerdem wird substituiert: $t := 16 + 4y$

3 P $\Rightarrow \quad \frac{1}{4} \cdot \ln(y) - \frac{1}{4} \cdot \ln(16 + 4y) = \frac{1}{2}x^2 + C_1$ $\quad \Big|$ auflösen nach $y$

$\Rightarrow \quad \ln(y) - \ln(16 + 4y) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot C_1 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{y}{16 + 4y}\right) = 2 \cdot x^2 + 2 \cdot C_1$

$\Rightarrow \quad \frac{y}{16 + 4y} = e^{2 \cdot x^2 + 2 \cdot C_1} \quad \Rightarrow \quad y = (16 + 4y) \cdot e^{2 \cdot x^2 + 2 \cdot C_1} = 16 \cdot e^{2 \cdot x^2 + 2 \cdot C_1} + 4y \cdot e^{2 \cdot x^2 + 2 \cdot C_1}$

$$\Rightarrow \quad y-4y\cdot e^{2\cdot x^2+2\cdot C_1}=16\cdot e^{2\cdot x^2+2\cdot C_1} \quad \Rightarrow \quad y\cdot\left(1-4\cdot e^{2\cdot x^2+2\cdot C_1}\right)=16\cdot e^{2\cdot x^2+2\cdot C_1}$$

$$\Rightarrow \quad y=\frac{16\cdot e^{2\cdot x^2+2\cdot C_1}}{1-4\cdot e^{2\cdot x^2+2\cdot C_1}}$$ 3 P

Mit $c_3=e^{2\cdot C_1}$ formulieren wir die Lösung kurz als: $y=\dfrac{16\cdot C_3\cdot e^{2\cdot x^2}}{1-4\cdot C_3\cdot e^{2\cdot x^2}}$

(e.) Erst Variablen trennen, dann integrieren, dann auflösen nach $y$:

$$y'=e^{x+2y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=e^x\cdot e^{2y} \quad \Rightarrow \quad e^{-2y}dy=e^x dx \quad \Rightarrow \quad \int e^{-2y}dy=\int e^x dx \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{1}{2}\cdot e^{-2y}=e^x+C_1$$

$$\Rightarrow \quad e^{-2y}=-2\cdot e^x-2\cdot C_1 \quad \Rightarrow \quad -2y=\ln\left(-2\cdot e^x-2\cdot C_1\right) \quad \Rightarrow \quad y=-\tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(-2\cdot e^x-2\cdot C_1\right)$$ 3 P

(f.) Der Lösungsweg ist der Übliche für die Trennung der Variablen:

$$\frac{y'}{y}=x^2+\cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot y'=x^2+\cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=x^2+\cos(x) \qquad \Big|\cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y}\cdot dy=\left(x^2+\cos(x)\right)\cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int\frac{1}{y}\,dy=\int\left(x^2+\cos(x)\right)dx \qquad \Big|\text{integrieren}$$

$$\Rightarrow \quad \ln(y)=\tfrac{1}{3}x^3+\sin(x)+C_1 \quad \Rightarrow \quad y=e^{\frac{1}{3}x^3+\sin(x)+C_1}=C_2\cdot e^{\frac{1}{3}x^3+\sin(x)} \qquad \text{für die Lösung}$$ 3 P

## Aufgabe 12.2 Aufsuchen von Partikulärlösungen von Dgln.

| | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|
| (a.)<br>(b.) | 8 min<br>10 min | (a.)<br>(b.) | | (a.) 4 P | (b.) 6 P |
| (c.)<br>(d.) | 15 min<br>22 min | (c.)<br>(d.) | | (c.) 9 P | (d.) 13 P |
| (e.)<br>(f.) | 22 min<br>20 min | (e.)<br>(f.) | | (e.) 12 P | (f.) 9 P |

Bestimmen Sie für die nachfolgend genannten Differentialgleichungen diejenigen Partikulärlösungen unter den jeweils genannten Anfangsbedingungen bzw. Randbedingungen.

(a.) $y\cdot y'=-7x$ mit $y(0)=4$

(b.) $y'=xy^2\cdot\cos(x)$ mit $y(0)=2$

(c.) $y'=(5x+5y)^2$ mit $y(0)=0$

(d.) $y'=\dfrac{x^2-y^2}{-5xy}$ mit $y(1)=0$

(e.) $y'=(2x+3y+1)^2$ mit $y(0)=-\frac{1}{3}$

(f.) $y'=1-2\cdot\cos^2(2x-y)$ mit $y(0)=-\frac{\pi}{4}$

Überprüfen Sie die Partikulärlösungen durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

# Lösung zu 12.2

**Arbeitshinweis:**
Man geht in folgenden Schritten vor:
Schritt 1 → Aufsuchen der allgemeinen Lösung der Dgl.
Schritt 2 → Einsetzen der Anfangsbedingung liefert die partikuläre Lösung
Schritt 3 → Verifikation der Partikulärlösung durch Einsetzen in die Dgl.

Anmerkung: Die Kontrolle durch Einsetzen der Lösung in die Dgl. kann man sowohl für die allgemeine Lösung wie auch für die Partikulärlösung vornehmen. Wir entscheiden uns für die letztgenannte Variante, weil diese in der Aufgabenstellung gefordert ist.

(a.) Schritt 1: Die allgemeine Lösung finden wir mit der Methode der Variablentrennung.

$$y \cdot y' = -7x \quad \Rightarrow \quad y \cdot \frac{dy}{dx} = -7x \quad \Rightarrow \quad y \cdot dy = -7x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int y \cdot dy = \int -7x \cdot dx$$

2 P $\Rightarrow \quad \frac{1}{2} y^2 = -\frac{7}{2} x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y^2 = -7x^2 + C_2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{-7x^2 + C_2}$ für die allgemeine Lösung

Wir haben also sogar zwei Lösungen erhalten.

Schritt 2: Aus der Anfangsbedingung bestimmen wir denjenigen speziellen Wert von $C_2$, der zu der gesuchten Partikulärlösung passt.

$$y(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad y(0) = \pm\sqrt{-7 \cdot 0^2 + C_2} = \pm\sqrt{C_2} = 4 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 16$$

1 P Die Partikulärlösung zu $y(0) = 4$ lautet also $y = \sqrt{-7x^2 + 16}$

Als Partikulärlösung können wir nur die Wurzel mit dem positiven Vorzeichen brauchen, da bei einem Minuszeichen vor der Wurzel niemals ein positiver Wert für die Partikulärlösung herauskommen könnte.

Schritt 3: Das Einsetzen von Lösungen in Dgln. setzt das Ableiten der Lösung voraus:

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(-7x^2 + 16\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-14x)$$

Nun können wir die Lsg. und deren Ableitung in die Dgl. einsetzen:

1 P $$y \cdot y' = \sqrt{-7x^2 + 16} \cdot \frac{1}{2}\left(-7x^2 + 16\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-14x) = -7x$$

Die Übereinstimmung mit der Dgl. der Aufgabenstellung bestätigt die Korrektheit der Lsg.

(b.) Schritt 1: Auch hier führt die Variablentrennung zur allgemeinen Lösung:

$$y' = xy^2 \cdot \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = xy^2 \cdot \cos(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = x \cdot \cos(x)\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2} = \int x \cdot \cos(x)\, dx$$

Aus Gründen der Übersicht integrieren wir beide Seiten des Gleichheitszeichens getrennt:

Die linke Seite lautet $\int \frac{dy}{y^2} = -y^{-1} + C_1$

Die rechte Seite lautet $\int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{v'}\, dx = \underbrace{x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C_2}_{\text{partielle Integration}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y} = -x \cdot \sin(x) - \cos(x) + C_3$$

$\Rightarrow \; y = \dfrac{1}{-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + C_3}$ für die allgemeine Lösung 3 P

Schritt 2: Einsetzen der Anfangsbedingung liefert die Partikulärlösung

$y(0) = \dfrac{1}{-0 \cdot \sin(0) - \cos(0) + C_3} = 2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{C_3 - 1} = 2 \quad \Rightarrow \quad C_3 = \dfrac{3}{2} \;\Rightarrow\; y_{\text{part}} = \dfrac{1}{-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + \frac{3}{2}}$ 1 P

Schritt 3: Die Partikulärlösung kontrollieren wir durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl.

Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens der Dgl. steht $y'_{\text{part}} = \dfrac{x \cdot \cos(x)}{\left(-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + \frac{3}{2}\right)^2}$

Auf der rechten Seite findet sich $xy^2 \cdot \cos(x) = x \cdot \left( \dfrac{1}{-x \cdot \sin(x) - \cos(x) + \frac{3}{2}} \right)^2 \cdot \cos(x)$ 2 P

Offensichtlich sind die Terme auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens identisch, sodass die Kontrolle die Korrektheit des Ergebnisses bestätigt.

(c.) Schritt 1: Hier ist vor der Variablentrennung noch eine Substitution nötig.

Es gilt $y' = (5x + 5y)^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = 25 \cdot (x + y)^2$

Mit der Substitution $z := x + y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = 1 + \dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx} - 1$ schreibt man die Dgl. als 2 P

$\dfrac{dz}{dx} - 1 = 25 \cdot z^2 \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = 25z^2 + 1 \Rightarrow \dfrac{dz}{25z^2 + 1} = dx \Rightarrow \displaystyle\int \dfrac{dz}{25z^2 + 1} = \int dx \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{25}} \cdot \arctan\left(\sqrt{25} \cdot z\right) = x + C_1$

Wir resubstituieren $z = x + y$ und lösen auf nach $y$:

$\dfrac{1}{5} \cdot \arctan\left(5 \cdot (x + y)\right) = x + C_1 \quad \Rightarrow \quad \arctan\left(5 \cdot (x + y)\right) = 5 \cdot (x + C_1)$

$\Rightarrow \quad 5 \cdot (x + y) = \tan\left(5 \cdot (x + C_1)\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{5} \cdot \tan\left(5 \cdot (x + C_1)\right) - x = \frac{1}{5} \cdot \tan\left(5 \cdot x + C_2\right) - x$ 3 P

**Stolperfalle bei der Substitution:**

Ähnlich wie beim Integrieren findet man auch beim Lösen von Dgln. den Zusammenhang zwischen der neuen Variablen ( $z$ ) und der alten ( $x$ ) durch Ableiten (z.B. der neuen Variablen nach der alten). Sobald aber in der neuen Variablen auch die zu bestimmende Funktion ( $y(x)$ ) mit auftaucht, muss man unbedingt an die Kettenregel denken.

Schritt 2: Die Partikulärlösung für die gegebene Anfangsbedingung erhält man wie folgt.

$y(0) = \frac{1}{5} \cdot \tan\left(5 \cdot 0 + C_2\right) - 0 = \frac{1}{5} \cdot \tan\left(C_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

Ergänzung: Aufgrund der Periodizität des Tangens könnte man auch $C_2 = n \cdot \pi$ schreiben, aber da alle Lösungsfunktionen $y_{\text{part}}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ identisch sind, genügt $C_2 = 0$ .

Die gesuchte Partikulärlösung ist also $y_{\text{part}} = \frac{1}{5} \cdot \tan(5 \cdot x) - x$ . 1 P

Schritt 3: Zur Kontrolle durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl. betrachten wir die linke und die rechte Seite der Dgl. $y' = (5x + 5y)^2$ getrennt.

1 P Die linke Seite → $y_{\text{part}} = \frac{1}{5} \cdot \tan(5 \cdot x) - x \quad \Rightarrow \quad y'_{\text{part}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\cos^2(5 \cdot x)} \cdot 5 - 1 = \frac{1}{\cos^2(5 \cdot x)} - 1$

1 P Die rechte Seite → $\left(5x + 5y_{\text{part}}\right)^2 = \left(5x + 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \tan(5 \cdot x) - 5 \cdot x\right)^2 = \left(\tan(5 \cdot x)\right)^2 = \tan^2(5 \cdot x)$

Dass beide Seiten identisch sind, sieht man durch Anwendung eines Additionstheorems.

Dieses lautet $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}}{\cos(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \tan^2(\alpha) = \frac{1-\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} - 1$ .

1 P Für $\alpha = 5x$ liegt die Identität der beiden Seiten sofort auf der Hand.

(d.) Nach Kürzen durch $x^2$ nimmt die Dgl. eine Form an, die die sinnvolle Substitution sofort erkennen lässt: $y' = \frac{x^2 - y^2}{-5xy} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{-5 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)}$ legt die Substitution $z := \frac{y}{x}$ nahe.

Um $y$ durch $z$ ersetzen zu können, müssen wir die Ableitung $y'$ durch $z'$ ersetzen. Den Zusammenhang zwischen $y'$ und $z'$ finden wir durch Ableiten:

3 P $\frac{dz}{dx} = \frac{x \cdot y' - y \cdot 1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad z' \cdot x^2 = x \cdot y' - y \quad \Rightarrow \quad z' \cdot x^2 + y = x \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{z' \cdot x^2 + y}{x} = z' \cdot x + \frac{y}{x} = z' \cdot x + z$

Dies setzen wir in die Dgl. ein und erhalten

1 P $y' = \frac{x^2 - y^2}{-5xy} = \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{-5 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)} \quad \Rightarrow \quad z' \cdot x + z = \frac{1-z^2}{-5z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} \cdot x + z = \frac{1-z^2}{-5z}$ ,

was sich durch Trennung der Variablen unschwer lösen lässt:

1 P $\frac{dz}{dx} \cdot x + z = \frac{1-z^2}{-5z} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} \cdot x = \frac{1-z^2}{-5z} - z = \frac{1-z^2}{-5z} + \frac{5z^2}{-5z} = \frac{1+4z^2}{-5z} \quad \Rightarrow \quad \frac{-5z}{1+4z^2} dz = \frac{dx}{x}$

Die linke Seite der Gleichung integriert man mittels Substitution $u := 1 + 4z^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dz} = 8z$

2 P und erhält $\int \frac{-5z}{1+4z^2} dz = \frac{-5}{8} \cdot \ln\left(4z^2 + 1\right) + C_1$

dazu gilt für die rechte Seite $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + C_2$

$\Rightarrow \quad \ln(x) = \frac{-5}{8} \cdot \ln\left(4z^2 + 1\right) + C_3$

$$\Rightarrow \quad \ln(x) = \ln\left(4z^2 + 1\right)^{\frac{-5}{8}} + C_3 \qquad \Big| \; e^{\text{Gleichung}}$$

$$\Rightarrow \quad x = \left(4z^2 + 1\right)^{\frac{-5}{8}} \cdot e^{C_3} \quad \Rightarrow \quad x \cdot e^{-C_3} = \left(4z^2 + 1\right)^{\frac{-5}{8}} \quad \Rightarrow \quad \left(x \cdot e^{-C_3}\right)^{\frac{-8}{5}} = 4z^2 + 1 \qquad \Big| \; \text{Resubstitution}$$

$$\Rightarrow \quad \left(x \cdot e^{-C_3}\right)^{\frac{-8}{5}} = 4\frac{y^2}{x^2} + 1 \quad \Rightarrow \quad C_4 \cdot x^{-\frac{8}{5}} - 1 = 4\frac{y^2}{x^2} \quad \Rightarrow \quad C_4 \cdot x^{-\frac{8}{5}} \cdot \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x^2 = y^2$$

3 P $\Rightarrow \quad y^2 = \frac{C_4}{4} \cdot x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{4} x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{\frac{C_4}{4} \cdot x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{4} x^2} = \pm\sqrt{C_5 \cdot x^{\frac{2}{5}} - \frac{1}{4} x^2}$ also zwei allg. Lösungen.

Schritt 2: Den Wert der Integrationskonstanten $C_5$ unter der Randbedingung $y(1)=0$ bestimmen wir gemäß $y(1)=\pm\sqrt{C_5\cdot 1^{\frac{2}{5}}-\frac{1}{4}\cdot 1^2}=\pm\sqrt{C_5-\frac{1}{4}}=0 \;\Rightarrow\; C_5=\frac{1}{4}$ und erhalten so die Partikulärlösung unter der Randbedingung $y(1)=0$: $y_{\text{part}}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}x^{\frac{2}{5}}-\frac{1}{4}x^2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^{\frac{2}{5}}-x^2}$ . 1 P

Hier führt die Anfangsbedingung nicht zu einer Entscheidung über das Vorzeichen der Wurzel (wie dies bei Aufgabenteil (a.) der Fall war). Es liegen also zwei alternative Partikulärlösungen vor.

Schritt 3: Die Korrektheit der Lösung überprüfen wir durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl.
Deren linke Seite lautet

$$y'_{\text{part}}=\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(x^{\frac{2}{5}}-x^2\right)\cdot\left(\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}-2x\right)=\pm\frac{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}-2x\right)}{\left(x^{\frac{2}{5}}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{\frac{1}{10}x^{\frac{-3}{5}}-\frac{1}{2}x}{\left(x^{\frac{2}{5}}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Die rechte Seite der Dgl. lautet

$$\frac{x^2-y_{\text{Part}}^2}{-5xy_{\text{Part}}}=\frac{x^2-\frac{1}{4}x^{\frac{2}{5}}+\frac{1}{4}x^2}{-5x\cdot\left(\pm\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^{\frac{2}{5}}-x^2}}=\frac{\left(\mp\frac{2}{5}\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{5}{4}x^2-\frac{1}{4}x^{\frac{2}{5}}\right)}{\left(x^{\frac{2}{5}}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\mp\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{10}x^{\frac{-3}{5}}\right)}{\left(x^{\frac{2}{5}}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\pm\left(\frac{1}{10}x^{\frac{-3}{5}}-\frac{1}{2}x\right)}{\left(x^{\frac{2}{5}}-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$ 2 P

Dass die Kontrolle bei der Musterlösung aufgeht, war zu erwarten.

(e.) Auch Dgln. die Linearkombinationen aus $x$ und $y$ (plus additive Konstanten) enthalten, können oftmals mit Hilfe einer Substitution in eine Form gebracht werden, die sich zur Variablentrennung eignet. Wir sehen dies in unserem Übungsbeispiel wie folgt:

Schritt 1: In unserer Aufgabe ist die zu substituierende Linearkombinationen aus $x$ und $y$ der Term $z:=2x+3y+1$. Den Zusammenhang zwischen $dx$, $dy$ und $dz$ stellen wir wie folgt her: $\frac{dz}{dx}=2+3\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; 3\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{3}$

Damit schreiben wir die Dgl. als $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{3}=z^2$ und führen sie der Variablentrennung zu: 2 P

$$\frac{dz}{dx}-2=3z^2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{dx}=3z^2+2 \;\Rightarrow\; \frac{dz}{3z^2+2}=dx \;\Rightarrow\; \int\frac{dz}{3z^2+2}=\int dx$$ 1 P

Ausführen der Integrationen auf beiden Seiten führt zu

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{3z^2+2}=\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot z\right)+C_1\\&\int dx=x+C_2\end{aligned}\right\}\;\Rightarrow\;\sqrt{\frac{1}{6}}\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot z\right)=x+C_2-C_1$$

$$\Rightarrow\quad\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot z\right)=\sqrt{6}\cdot x+C_3$$ 3 P

$$\Rightarrow\quad\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot z=\tan\left(\sqrt{6}\cdot x+C_3\right)\;\Rightarrow\; z=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x+C_3\right)\ ,$$

woraus sich durch Resubstitution die Lösung der Dgl. ergibt:

2 P $2x+3y+1=z=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x+C_3\right) \quad\Rightarrow\quad 3y=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x+C_3\right)-2x-1$

$$\Rightarrow\quad y=\sqrt{\tfrac{2}{27}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x+C_3\right)-\tfrac{2}{3}x-\tfrac{1}{3}$$

Schritt 2:
Die Integrationskonstante $C_3$ bestimmen wir aufgrund der Anfangsbedingung $y(0)=-\frac{1}{3}$:

$$y_{\text{part}}(0)=\sqrt{\tfrac{2}{27}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot 0+C_3\right)-\tfrac{2}{3}\cdot 0-\tfrac{1}{3}=-\tfrac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad \sqrt{\tfrac{2}{27}}\cdot\tan\left(C_3\right)=0 \quad\Rightarrow\quad C_3=0$$

(Wir verzichten auf eine Betrachtung der Periodizität der Tangensfunktion.)

1 P Somit ergibt sich für die Partikulärlösung $y_{\text{part}}=\sqrt{\frac{2}{27}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x\right)-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$

Schritt 3: Überprüfen der Korrektheit der Lösung durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl.
Linke Seite der Dgl. →

$$y'_{\text{part}}=\underbrace{\sqrt{\tfrac{2}{27}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\cos^2\left(\sqrt{6}\cdot x\right)}-\tfrac{2}{3}=\sqrt{\tfrac{12}{27}}\cdot\left(1+\tan^2\left(\sqrt{6}\cdot x\right)\right)-\tfrac{2}{3}}_{\textit{Additionstheorem}:\ \frac{1}{\cos^2(\alpha)}=\tan^2(\alpha)+1}=\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{\tfrac{12}{27}}}_{=\frac{2}{3}}-\tfrac{2}{3}\right)}_{=0}+\underbrace{\sqrt{\tfrac{12}{27}}}_{=\frac{2}{3}}\cdot\tan^2\left(\sqrt{6}\cdot x\right)$$

Also ist die linke Seite der Dgl: $y'_{\text{part}}=\dfrac{2}{3}\cdot\tan^2\left(\sqrt{6}\cdot x\right)$

Für die rechte Seite der Dgl. ergibt sich →

$$2x+3y+1=\left(2x+3\cdot\left(\sqrt{\tfrac{2}{27}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x\right)-\tfrac{2}{3}x-\tfrac{1}{3}\right)+1\right)^2=\left(2x+\left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\cdot\tan\left(\sqrt{6}\cdot x\right)-2x-1\right)+1\right)^2$$

3 P $=\frac{2}{3}\tan^2\left(\sqrt{6}\cdot x\right)$

Die Übereinstimmung bestätigt unsere Berechnung.

(f.) Schritt 1: Der Lösungsweg basiert wieder auf Substitution und Trennung der Variablen. Die Substitution lautet hier $z:=2x-y$. Somit ergibt sich $\dfrac{dz}{dx}:=2-\dfrac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \dfrac{dy}{dx}=2-\dfrac{dz}{dx}$

Den Lösungsweg der Dgl. schreiben wir damit wie folgt:

2 P $y'=2-2\cdot\cos^2\left(2x-y\right) \;\Rightarrow\; 2-\dfrac{dz}{dx}=2-2\cdot\cos^2(z) \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{dx}=2\cdot\cos^2(z) \;\Rightarrow\; \dfrac{dz}{2\cdot\cos^2(z)}=dx$

$$\Rightarrow\quad \tfrac{1}{2}\underbrace{\int\frac{dz}{\cos^2(z)}}_{=\tan(z)+C_1}=\underbrace{\int dx}_{=x+C_2} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\tfrac{1}{2}\cdot\tan\left(2x-y\right)+C_1=\left(x+C_2\right)}_{\text{Hier wurde resubstituiert.}} \quad\Rightarrow\quad \tan\left(2x-y\right)=2\cdot\left(x+C_2-C_1\right)$$

2 P $2x-y=\arctan\left(2x+C_3\right) \quad\Rightarrow\quad y=2x-\arctan\left(2x+C_3\right)$

Schritt 2: Die Partikulärlösung unter der Anfangsbedingung $y(0)=-\frac{\pi}{4}$ finden wir durch Bestimmung der Integrationskonstanten $C_3$:

$$y(0)=2\cdot 0-\arctan\left(2\cdot 0+C_3\right)=-\tfrac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad \arctan\left(C_3\right)=\tfrac{\pi}{4} \quad\Rightarrow\quad C_3=\tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=1$$

(Weitere Werte für $C_3$ aufgrund der Periodizität des Tangens brauchen nicht betrachtet zu werden, da hierdurch keine neuen Lösungen entstehen.)
Die Partikulärlösung durch $y(0)=-\frac{\pi}{4}$ heißt also $y_{\text{Part}}=2x-\arctan(2x+1)$. 1 P

Schritt 3: Kontrolle durch Einsetzen der Lsg. in die Dgl.:
Durch Ableiten erhalten wir

$$y'_{\text{Part}}=2-\frac{1}{1+(2x+1)^2}\cdot 2=2\cdot\underbrace{\frac{4x^2+4x+2}{4x^2+4x+2}}_{\text{erweitert}}-\frac{2}{4x^2+4x+2}=\frac{8x^2+8x+2}{4x^2+4x+2}$$ 1 P

Dieser Term muss gleich sein mit dem Ausdruck

$$2-2\cdot\cos^2(2x-y_{\text{Part}})=2-2\cdot\cos^2\left(2x-\left(2x-\arctan(2x+1)\right)\right)=2-2\cdot\cos^2\left(\arctan(2x+1)\right)=\left(*^1\right)$$

Aus dem Additionstheorem $\arctan(\alpha)=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$ folgt

$\cos\left(\arctan(\alpha)\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \quad\Rightarrow\quad \cos^2\left(\arctan(\alpha)\right)=\frac{1}{1+\alpha^2}$, was in $\left(*^1\right)$ eingesetzt werden kann:

$$\left(*^1\right)=2-2\cdot\cos^2\left(\arctan(2x+1)\right)=2-2\cdot\frac{1}{1+(2x+1)^2}=2\cdot\underbrace{\frac{4x^2+4x+2}{4x^2+4x+2}}_{\text{erweitert}}-2\cdot\frac{1}{4x^2+4x+2}=\frac{8x^2+8x+2}{4x^2+4x+2}$$ 3 P

Erwartungsgemäß stimmen die beiden Seiten der Dgl. überein.

**Arbeitshinweis:**

Sollte beim Leser die Kontrolle nicht auf Anhieb aufgehen, so liegt dies oft an kleineren Flüchtigkeitsfehlern und nicht an schwerwiegenden konzeptionellen Problemen. Im Falle einer Klausur muss dann zwischen zwei Möglichkeiten unterschieden werden:

(i.)
Falls Flüchtigkeitsfehler nur zu geringem Punktabzug führen und der überwiegende Anteil der in der Aufgabe erreichbaren Punkte aufgrund des Vorhandenseins des prinzipiellen Rechenweges zuerkannt werden (dies sollte im Vorfeld mit dem Prüfer abgeklärt werden), so lohnt die meist langwierige Fehlersuche nur dann, wenn man dadurch keine wertvolle Zeit verliert, die man zur Bearbeitung anderer Aufgaben bräuchte

(ii.)
Will man Flüchtigkeitsfehler unbedingt finden (z.B. falls der Punkteverlust aufgrund von Flüchtigkeitsfehlern groß ist), so empfiehlt sich die Fehlersuche in größeren gedanklichen Einheiten. Eine solche Einheit ist z.B. das Lösen der substituierten Dgl. $z(x)$. Hat man deren Lsg. z.B. durch Ableiten und Einsetzen in die substituierte Dgl. überprüft (in unserem Bsp. $z'(x)=2\cdot\cos^2(z)$), so könnte man zur nächsten Fehlerquelle schreiten. Eine derartige Form der Fehlersuche führt schneller und effektiver zum Erfolg als ein wiederholtes schrittweises Nachrechnen des bereits aufgeschriebenen Rechenweges, welches die Gefahr der Wiederholung der bereits aufgeschriebenen Rechenfehler in sich birgt.

## Aufgabe 12.3 Implizite Lösungen von Dgln.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 5 min | (a.) | | Punkte |
| | (b.) | 20 min | (b.) | | (a.) 2 P (b.) 9 P |

Bei den nachfolgenden beiden Dgln. genügt die Angabe der Lösung in impliziter Form:

(a.) $y' = \dfrac{y \cdot x}{\left(x^2-5\right)\cdot\left(y^2+3\right)}$ (b.) $y' = \dfrac{y^3}{xy^2 - 2yx^2 + x^3}$

## Lösung zu 12.3

(a.) Auch hier handelt es sich um eine Dgl. mit separierbaren Variablen

$$y' = \frac{y \cdot x}{\left(x^2-5\right)\cdot\left(y^2+3\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\left(x^2-5\right)} \cdot \frac{y}{\left(y^2+3\right)} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\left(y^2+3\right)}{y}\,dy = \int \frac{x}{\left(x^2-5\right)}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \left(y + \frac{3}{y}\right) dy = \underbrace{\int \frac{x}{\left(x^2-5\right)}\,dx}_{\textit{Substitution } u := x^2-5}$$

2 P $$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}y^2 + 3\cdot\ln\left(|y|\right) + C_1 = \tfrac{1}{2}\ln\left(\left|x^2-5\right|\right) + C_2 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 6\cdot\ln\left(|y|\right) = \ln\left(\left|x^2-5\right|\right) + C_3$$

(b.) Offensichtlich liegt die Variablentrennung nicht auf der Hand, also versuchen wir mit einer Substitution dort hin zu kommen:

Es gilt $y' = \dfrac{y^3}{xy^2 - 2yx^2 + x^3} \cdot \dfrac{1/x^3}{1/x^3} = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^3}{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right) + 1}$. Mit $z := \left(\frac{y}{x}\right)$ lautet die Dgl. $y' = \dfrac{z^3}{z^2 - 2z + 1}$

3 P Der Zusammenhang der Differentiale ist $z = \left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{xy' - y\cdot 1}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\cdot x + \frac{y}{x} = \frac{dz}{dx}\cdot x + z$,

womit wir die Dgl. schreiben können als $\underbrace{\frac{dz}{dx}\cdot x + z}_{y'} = \dfrac{z^3}{z^2 - 2z + 1}$

Nun ist der Weg zur Trennung der Variablen offensichtlich geworden:

$$\frac{dz}{dx}\cdot x = \frac{z^3}{z^2-2z+1} - z \cdot \underbrace{\frac{z^2-2z+1}{z^2-2z+1}}_{\textit{erweitert}} = \frac{z^3}{z^2-2z+1} - \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2-2z+1} = \frac{2z^2 - z}{z^2-2z+1}$$

2 P $$\Rightarrow \quad \frac{z^2-2z+1}{2z^2-z}\,dz = \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z^2-2z+1}{2z^2-z}\,dz = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{(z-1)^2}{z\cdot(2z-1)}\,dz = \int \frac{dx}{x}$$

Das Integral über $z$ löst man durch Partialbruchzerlegung. Da der Polynombruch aber nicht echt gebrochen ist, müssen wir eine Polynomdivision vorschalten:

$$\begin{array}{l} \left(z^2-2z+1\right):\left(2z^2-z\right)=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{3}{2}z+1}{2z^2-z} \\ -\left(z^2-\frac{1}{2}z\right) \\ \hline \quad -\frac{3}{2}z+1 \end{array}$$ 1 P

Der gesamte Rechenweg der Partialbruchzerlegung sei hier nicht vollständig vorgeführt; ihr Ergebnis lautet $\frac{-\frac{3}{2}z+1}{2z^2-z}=\frac{-1}{z}+\frac{\frac{1}{2}}{2z-1}$, sodass gilt $\frac{(z-1)^2}{z\cdot(2z-1)}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}+\frac{1}{4z-2}$. 2 P

Die Lösung der Dgl. ergibt sich also aus der Integration $\int\frac{1}{2}dz-\int\frac{1}{z}dz+\int\frac{1}{4z-2}dz=\int\frac{dx}{x}$:

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}z-\ln\left(|z|\right)+\tfrac{1}{4}\cdot\ln\left(|4z-2|\right)=\ln\left(|x|\right)+C_1$$

Resubstitution führt zu der gefragten Lsg. der Dgl. in impliziter Form:

$$\Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{y}{x}\right)-\ln\left(\left|\left(\tfrac{y}{x}\right)\right|\right)+\tfrac{1}{4}\cdot\ln\left(\left|4\left(\tfrac{y}{x}\right)-2\right|\right)=\ln\left(|x|\right)+C_1$$ 1 P

## Aufgabe 12.4 Isoklinen von Differentialgleichungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) je 5 min | | Punkte (a,b,c.) je 3 P |

Zeichnen Sie zu den nachfolgend gegebenen Differentialgleichungen einige Kurven aus der Schar der Isoklinen, und zwar derart, dass man einen repräsentativen Überblick über die Schar der Isoklinen bekommt.

(a.) $x\cdot y'=y$ (b.) $y'=(2x+3y+1)^2$ (c.) $y'=x^2\cdot\sqrt{y}$

Anmerkung: Zwei dieser Dgln. haben wir in Kapitel 12 bereits gelöst.

## Lösung zu 12.4

**Arbeitshinweis:**

Die Isoklinen sind Kurven, auf denen die Ableitung der Lösung nach dem freien Parameter konstant ist. Das heißt, jede der Isoklinen bildet eine Kurve, die alle Punkte der (aufgrund der Integrationsparameter) verschiedenen Lösungen mit gleicher Steigung verbindet. Man braucht die Dgl. also nicht zu lösen, sondern nur nach deren Steigung aufzulösen, wenn man nur die Isoklinen bestimmen will.

(a.) $x\cdot y'=y \quad\Rightarrow\quad y'=\frac{y}{x}=C$ (wobei die Konstante $C$ beliebige Werte annehmen kann.)

Die Isoklinen dieser Dgl. werden also beschrieben durch $y'=\frac{y}{x}=C \quad\Rightarrow\quad y=C\cdot x$. Setzt man verschiedene Werte für $C$ ein, so erhält man die in Bild 12-4a dargestellte Isoklinen-Schar. Es handelt sich um Geraden durch den Koordinatenursprung. 1 P

2 P

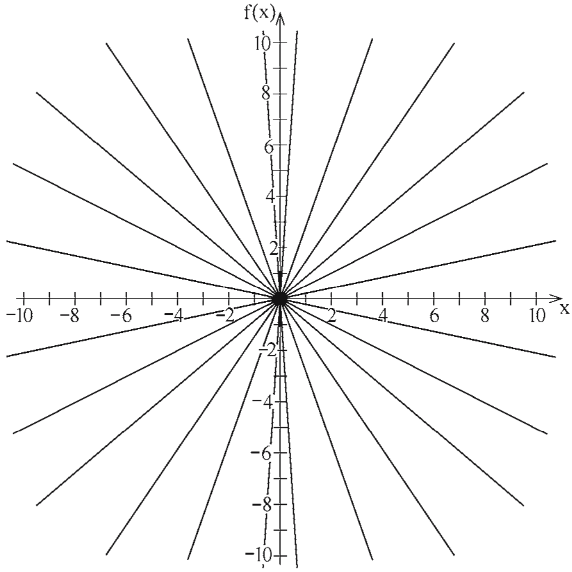



**Bild 12-4a**
Schar der Isoklinen zur Dgl.
$x \cdot y' = y$

(b.) Die Gleichungen der Isoklinen berechnen sich wie folgt:

$$y' = (2x+3y+1)^2 = C \Rightarrow 2x+3y+1 = \pm\sqrt{C} \Rightarrow 3y = \pm\sqrt{C} - 1 - 2x \Rightarrow y = \frac{\pm\sqrt{C}-1}{3} - \frac{2}{3}x = \widetilde{C} - \frac{2}{3}x$$

1 P Die graphische Darstellung findet man in Bild 12-4b. Die Isoklinen bilden eine Schar paralleler Geraden.

2 P

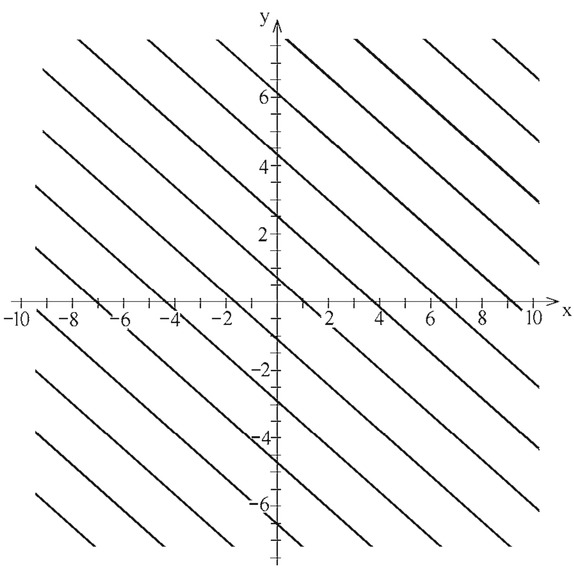
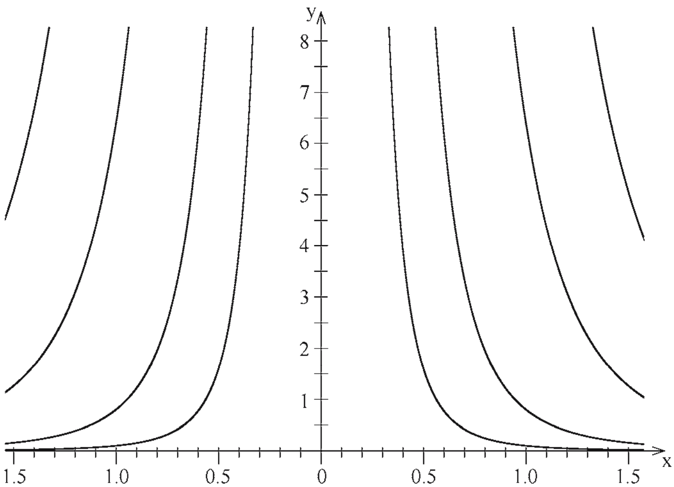



**Bild 12-4b**
Schar der Isoklinen zur Dgl.
$y' = (2x+3y+1)^2$

(c.) Berechnung der Isoklinen: $y' = x^2 \cdot \sqrt{y} = C \quad \Rightarrow \quad \sqrt{y} = \frac{C}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{C^2}{x^4}$

Zur graphischen Darstellung betrachte man Bild 12-4c. Man sieht Hyperbeln. 1 P




2 P

**Bild 12-4c**
Schar der Isoklinen zur Dgl.
$y' = x^2 \cdot \sqrt{y}$

## Aufgabe 12.5 Singuläre Lösungen von Differentialgleichungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15 min | | Punkte 8 P |

Betrachten Sie die Differentialgleichung $(y')^2 = 9y - 9$

(i.) Bestimmen Sie deren allgemeine Lösung.

(ii.) Skizzieren Sie eine repräsentative Kurvenschar zur allgem. Lsg. für einige Werte der Integrationskonstanten.

(iii.) Suchen Sie die singuläre Lösung und verifizieren Sie diese durch Einsetzen in die Dgl.

## Lösung zu 12.5

(i.) Die allgem. Lsg. suchen wir mit der Methode der Variablentrennung

$$(y')^2 = 9y - 9 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{9y-9} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{\pm 3 \cdot \sqrt{y-1}} = 1 \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\pm 3 \cdot \sqrt{y-1}} = \int dx$$ 1 P

Der Integrationsschritt liefert $\frac{1}{\pm 3} \cdot 2\sqrt{y-1} = x + C_1$ .

Durch Auflösen nach $y$ erhalten wir

1 P $\sqrt{y-1} = \pm\frac{3}{2}\cdot x \pm \frac{3}{2}\cdot C_1 = \pm\left(\frac{3}{2}x + C_2\right) \quad\Rightarrow\quad y-1 = \frac{3}{2}x + C_2$, wobei das „$\pm$“ beim Quadrieren wieder verschwindet. Damit ist die allgem. Lsg. der Dgl. $y = \left(\frac{3}{2}x + C_2\right)^2 + 1$

(ii.) Durch Einsetzen verschiedener Werte für die Integrationskonstante $C_2$ erhalten wir eine Kurvenschar für die allgem. Lsg. Sie ist in Bild 12-5a dargestellt. Es handelt sich um quadratische Parabeln, die in $x$ – Richtung gegeneinander verschoben sind.

3 P

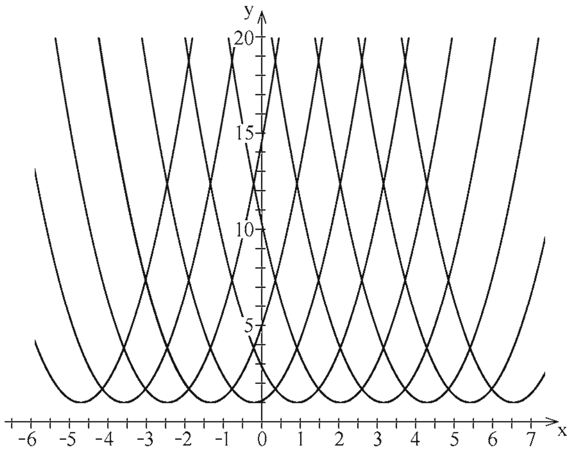



**Bild 12-5a**
Schar der Lösungen zur Dgl. $(y')^2 = 9y - 9$

Die dicke dunkelgraue Linie bei $y = 1$ symbolisiert die singuläre Lösung.

(iii) Allgemein gilt der Satz: Singuläre Lösungen ergeben sich als Einhüllende aller Lösungen für beliebige Werte der Integrationsvariablen.

1 P Wie man graphisch sofort sieht, existiert in unserem Bsp. genau eine singuläre Lösung, nämlich $y_{\text{Sing}}(x) = 1$.

1 P Begründung: Offensichtlich steuert jede Kurve aus der Schar der allgem. Lsgn. genau mit ihrem Minimum zur singulären Lsg. bei. Das Minimum der Parabel $y = \left(\frac{3}{2}x + C_2\right)^2 + 1$ liegt dort, wo $\left(\frac{3}{2}x + C_2\right)^2 = 0$, denn kleiner als Null kann das Quadrat nicht werden. Dies liegt bei $x = -\frac{2}{3}C_2$ und daher bei $y = 1$.

Wir verifizieren die singuläre Lösung $y_{\text{Sing}}(x) = 1$ durch einsetzen in die Dgl.:

1 P $\left(y'_{\text{Sing}}\right)^2 = 9y_{\text{Sing}} - 9 \quad\Rightarrow\quad 0 = 9\cdot 1 - 9$ Also ist die Verifikation gelungen.

## Aufgabe 12.6 Exakte Differentialgleichungen

| | | | | Punkte: | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 12 min | | | (a.) 7 P |
| | (b.) | 10 min | | | (b.) 6 P |
| | (c.) | 5 min | | | (c.) 3 P |

Einige der nachfolgend genannten Differentialgleichungen sind sog. exakte Differentialgleichungen.

(a.) $\frac{1}{4}y'x^4 + 3y + 2x^2yy' + x^3y + 3y'x + 5y' + 2xy^2 = 0$

(b.) $y' + \dfrac{6x\cdot\sin(y) + y\cdot e^{x\cdot y} + \frac{1}{x}}{3x^2\cdot\cos(y) + x\cdot e^{x\cdot y} + 3y^2} = 0$

(c.) $y' + \dfrac{3xy^4 + x^2y^2}{yx^3 - 2xy} = 0$

Für jeden der drei Aufgabenteile (a.), (b.) und (c.) sind die beiden folgenden Punkte zu bearbeiten:

(i.) Prüfen Sie bitte, welche dieser Dgln. exakte Differentialgleichungen sind.

(ii.) Für diejenigen Dgln., die exakte Differentialgleichungen sind, finden Sie bitte die Lösungen. Es genügt die Angabe der Lösungen jeweils in impliziter Form.

## Lösung zu 12.6

**Arbeitshinweis:**

Exakte Differentialgleichungen lassen sich auf die Form bringen $y' + \frac{f(x;y)}{g(x;y)} = 0$, und dann muss die Integrabilitätsbedingung erfüllt sein $\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x;y)}{\partial x}$.

Nur wenn diese Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, heißt die Dgl. eine exakte Dgl. und sie kann nach dem für exakte Dgln. typischen Verfahren gelöst werden. (Dies ist auch der Grund für die Beschränkung der Aufgabenstellung, nur die exakten Dgln. zu lösen.)

Der geistige Hintergrund beim Auffinden der Lösung exakter Dgln. ist derselbe wie beim Integrieren eines totalen Differentials bei Funktionen mit zweidimensionalem Argument. Deshalb ist auch der nachfolgend durchgeführte Rechenweg sehr ähnlich:

Man integriert einzeln $f(x)$ nach $x$ und $g(y)$ nach $y$ und bringt dann die beiden Integrale in Übereinstimmung. Anders als beim Integrieren des totalen Differentials muss hier zusätzlich noch die Stammfunktion $F(x;y) = C$ gesetzt werden, damit man diejenige Linie $y = y(x)$ finden kann, die die exakte Dgl. löst.

Wer diese abstrakte Erläuterung nicht ohne weiteres nachvollziehen kann, der betrachte die nun folgenden Lösungswege, die das Lösungsverfahren leicht verständlich machen:

**Gearbeitet wird in 3 Schritten:**
Schritt 1→ Prüfen der Integrabilitätsbedingung.
Schritt 2 → Falls die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, wird integriert.
Schritt 3 → Nullsetzen (oder „$=C$“- setzen) des totalen Differentials, um diejenige Linie zu finden, auf der die Stammfunktion konstant ist. (Wollte man die Lösung in expliziter Form suchen, so müsste man die implizite Gleichung dieser Linie nach $y$ auflösen.)

(a.) Schritt 1:
Um die Integrabilitätsbedingung prüfen zu können, bringen wir die Dgl. der Aufgabenstellung in die Form einer exakten Dgl., nämlich $y'+\frac{f(x;y)}{g(x;y)}=0$:

Die Dgl. lautet $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}y'x^4+3y+2x^2yy'+x^3y+3y'x+5y'+2xy^2=0$ | Sortieren nach $y'$

1 P $\Rightarrow \quad y'\cdot\left(\frac{1}{4}x^4+2x^2y+3x+5\right)+\left(x^3y+2xy^2+3y\right)=0 \quad \Rightarrow \quad y'+\frac{x^3y+2xy^2+3y}{\frac{1}{4}x^4+2x^2y+3x+5}=0$

Zum Prüfen der Integrabilitätsbedingung bilden wir also die beiden partiellen Ableitungen

2 P
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y+2xy^2+3y\right)=x^3+4xy+3\\ \frac{\partial g(x;y)}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4}x^4+2x^2y+3x+5\right)=x^3+4xy+3\end{aligned}\right\}$$

Wegen der Gleichheit der beiden Ausdrücke wissen wir, dass die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

Schritt 2:

**Arbeitshinweis:**
Sowohl $f(x)$ als auch $g(y)$ sind zu integrieren, wobei beide Stammfunktionen gleich sein müssen, da die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Dabei kann die Integration über $x$ eine von $y$ abhängige Integrationskonstante enthalten und die Integration über $y$ eine von $x$ abhängige Integrationskonstante.

$$F(x;y)=\int f(x)\,dx+\varphi(y)=\int\left(x^3y+2xy^2+3y\right)dx+\varphi(y)=\frac{1}{4}x^4y+x^2y^2+3xy+\varphi(y)$$

$$F(x;y)=\int g(y)\,dy+\Psi(x)=\int\left(\frac{1}{4}x^4+2x^2y+3x+5\right)dy+\Psi(x)=\frac{1}{4}x^4y+x^2y^2+3xy+5y+\Psi(x)$$

Übereinstimmung der beiden Ausdrücke für die Stammfunktion wird erzielt für
$\varphi(y)=5y+C_1$ und $\Psi(x)=C_1$.

3 P $\Rightarrow \quad F(x;y)=\frac{1}{4}x^4y+x^2y+3xy+5y+C_1$ für die Stammfunktion.

Schritt 3: Die implizite Lösung der exakten Dgl. lautet also $\frac{1}{4}x^4y+x^2y^2+3xy+5y=C$

1 P Ein Auflösen nach $y$ ist in diesem Beispiel eher mühsam, und es ist laut Aufgabenstellung auch nicht verlangt.

(b.) <u>Schritt 1:</u> Hier ist die Dgl. bereits in der Form $y' + \frac{f(x;y)}{g(x;y)} = 0$ gegeben, also können wir sofort in die Prüfung der Integrabilitätsbedingung einsteigen:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(6x \cdot \sin(y) + y \cdot e^{x \cdot y} + \tfrac{1}{x}\right) = 6x \cdot \cos(y) + 1 \cdot e^{xy} + y \cdot e^{xy} \cdot x$$ 2 P

$$\frac{\partial g(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 \cdot \cos(y) + x \cdot e^{x \cdot y} + 3y^2\right) = 6x \cdot \cos(y) + 1 \cdot e^{xy} + x \cdot e^{xy} \cdot y$$

Auch hier ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt, da die beiden Ausdrücke gleich sind. Daher können wir auch diese Dgl. als exakte Dgl. lösen.

<u>Schritt 2</u>

$$F(x;y) = \int f(x)\,dx + \varphi(y) = \int\left(6x \cdot \sin(y) + y \cdot e^{x \cdot y} + \tfrac{1}{x}\right)dx + \varphi(y) = 3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + \ln(x) + \varphi(y)$$

$$F(x;y) = \int g(y)\,dy + \Psi(x) = \int\left(3x^2 \cdot \cos(y) + x \cdot e^{x \cdot y} + 3y^2\right)dy + \Psi(x) = 3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + y^3 + \Psi(x)$$

Übereinstimmung der beiden Ausdrücke für die Stammfunktion wird erzielt für $\varphi(y) = y^3 + C_1$ und $\Psi(x) = \ln(x) + C_1$.

$\Rightarrow \quad F(x;y) = 3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + y^3 + \ln(x) + C_1$ für die Stammfunktion. 3 P

<u>Schritt 3:</u> Die implizite Lösung der exakten Dgl. lautet also $3x^2 \cdot \sin(y) + e^{xy} + y^3 + \ln(x) = C$.
Laut Aufgabenstellung verzichten wir auf ein explizites Auflösen nach $y$. 1 P

(c.) <u>Schritt 1:</u> Wieder ist die Dgl. in der Form $y' + \frac{f(x;y)}{g(x;y)} = 0$ gegeben, sodass wir sofort die Prüfung der Integrabilitätsbedingung durchführen können:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3xy^4 + x^2y^2\right) = 12xy^3 + 2x^2y \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial g(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(yx^3 - 2xy\right) = 3x^2y - 2y$$ 2 P

In diesem Beispiel ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, d.h. diese Dgl. ist keine exakte Dgl, kann also auch nicht als solche integriert werden. (Die Schritte 2 und 3 entfallen also laut Aufgabenstellung.) 1 P

## Aufgabe 12.7 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

| | | | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 8 min | (a.) | | | |
| | (b.) | 12 min | (b.) | | (a.) 5 P | (b.) 6 P |
| | (c.) | 10 min | (c.) | | | |
| | (d.) | 8 min | (d.) | | (c.) 6 P | (d.) 5 P |

Gegeben sind einige inhomogene lineare Differentialgleichungen, zu denen Sie bitte die allgemeinen Lösungen bestimmen, und außerdem die Partikulärlösungen unter den gegebenen Anfangsbedingungen.

(a.) $y' + y \cdot \sin(x) = \sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 2$

(b.) $y' - \frac{3x^2+4}{x^3+4x} \cdot y = x$ mit der Anfangsbedingung $y(1) = 0$

(c.) $y' + 3y = -15 \cdot \sin(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 4$

(d.) $y' = (5-y) \cdot x^2$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = 7$

## Lösung zu 12.7

(a.)

**Arbeitshinweis:**

In diesem Beispiel liegt eine inhom. Dgl. vor. Die allg. Lsg. einer inhom. Dgl. bildet man als Summe aus der allg. Lsg. der hom. Dgl. und einer spez. Lsg. der inhom. Dgl. (Abkürzungen siehe Vorbemerkungen zu Kapitel 12).Wir suchen also zwei Lsgn.:

Schritt 1 → Die allg. Lsg. der hom. Dgl.

Schritt 2 → Eine spez. Lsg. der inhom. Dgl.

Schritt 3 → Die allg. Lsg. der inhom. Dgl. ergibt sich als Summe der beiden Lsgn. aus den Schritten 1 und 2

**Arbeitshinweis:**

Für das Lösen einer lin. hom. Dgl. 1. Ordnung gibt es eine fertige Lösungsformel, in die man direkt einsetzen kann, und zwar:

Die Dgl. $y' + f(x) \cdot y = 0$ hat die allg. Lsg. $y = C \cdot e^{-\int f(x)dx}$ mit $C \in \mathbb{R}$ (Integrationskonstante)

<u>Schritt 1</u>: Wir wenden diese Lösungsformel an bei der Suche der allg. Lsg. der hom. Dgl.:

Die hom. Dgl. lautet $y' + y \cdot \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow$ In unserer Formel ist $f(x) = \sin(x)$

$$\Rightarrow \quad -\int f(x)dx = -\int \sin(x)dx = \cos(x)$$

Anmerkung: Beim Integrieren kann die Integrationskonstante weggelassen werden, denn eine solche steht explizit in der Lösungsformel für $y$.

2 P $\Rightarrow \quad y_{\text{allg, hom}} = C \cdot e^{-\int f(x)dx} = C \cdot e^{\cos(x)}$ für die allg. Lsg. der hom. Dgl.

<u>Schritt 2:</u> Eine spezielle Lsg. der inhom. Dgl. kann man oftmals am bequemsten durch Raten aufspüren, z.B. wie folgt (man nennt solch ein unterstütztes Raten auch „educated guess“):

1 P Wenn rechts des Gleichheitszeichens (bei $y' + y \cdot \sin(x) = \sin(x)$) ein Sinus steht, dann hätten wir schon eine spez. Lsg., wenn links ebenso nur ein Sinus stünde. Setzt man $y = 1$, so wäre dies der Fall, denn $y'$ verschwindet. Eine mögliche spezielle Lsg. der inhom. Dgl. lautet also $y_{\text{spez,inhom}} = 1$.

**Anmerkung:**

Für die spez. Lsg. der inhom. Dgl. ist das Rate-Verfahren immer erlaubt, denn es ist nur eine **spezielle** Lösung gesucht. Wer mit dem Beispiel des Ratens aber unzufrieden ist (weil es sich im Prüfungsfall für andere Aufgaben nicht mit Sicherheit reproduzieren lässt), der wird in den Aufgabenteilen (b.) und (c.) einen sicheren Weg finden.

<u>Schritt 3:</u> Die allg. Lsg. der inhom. Dgl. ist die Summe

$$y_{\text{allg,inhom}} = y_{\text{allg,hom}} + y_{\text{spez,inhom}} = C \cdot e^{\cos(x)} + 1$$ 1 P

Zu guter Letzt wollen wir noch die Anfangsbedingung einsetzen und die zugehörige Partikulärlösung bestimmen: $y(0) = 2$

$$y_{\text{allg,inhom}}(0) = C \cdot e^{\cos(0)} + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C \cdot e^{1} + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad C = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad y_{\text{Part}} = e^{-1} \cdot e^{\cos(x)} + 1 = e^{\cos(x)-1} + 1$$ 1 P

(b.) <u>Schritt 1:</u> Die allg. Lsg. der hom. Dgl. bestimmen wir nach demselben Schema wie bei Aufgabenteil (a.). Dabei ist $f(x) = -\frac{3x^2+4}{x^3+4x} \quad \Rightarrow \quad -\int f(x)\,dx = \underbrace{\int \frac{3x^2+4}{x^3+4x}\,dx = \ln\left(x^3+4x\right)}_{\text{Zu lösen mit Substitution } u:=x^3+4x}$

$$\Rightarrow \quad y_{\text{allg,hom}} = C_1 \cdot e^{\ln\left(x^3+4x\right)} = C_1 \cdot \left(x^3 + 4x\right)$$ 2 P

<u>Schritt 2 und Schritt 3 (in einem Arbeitsgang):</u>

**Arbeitshinweis:**

Falls man nicht durch Raten eine spez. Lsg. der inhom. Dgl. findet, kann man auf die Methode der „Variation der Konstanten“ zurückgreifen. Diese basiert auf unserem Ergebnis von Schritt 1 und lautet:

Die inhom. Dgl. $y' + f(x) \cdot y = g(x)$ hat die allg. Lsg. $y_{\text{allg,inhom}} = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx}$

mit $K(x) = \int g(x) \cdot e^{+\int f(x)dx}\,dx$

Dieses $K(x)$ wollen wir nun für das Bsp. unserer Aufgabe berechnen. Dort ist $g(x) = x$.

$$\Rightarrow \quad K(x) = \int g(x) \cdot e^{+\int f(x)dx}\,dx = \int x \cdot e^{-\ln\left(x^3+4x\right)}\,dx = \int \frac{x}{x^3+4x}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$ 2 P

Somit ergibt sich die allg. Lsg. der inhom. Dgl. zu

$$y_{\text{allg,inhom}} = K(x) \cdot e^{-\int f(x)dx} = \left(\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\right) \cdot \left(x^3 + 4x\right)$$ 1 P

**Anmerkung:**

Bei der Methode der Variation der Konstanten ist die Integrationskonstante durchaus nötig, denn aus ihr ergibt sich direkt der freie Integrationsparameter in der Lösung.

Zum Abschluss des Aufgabenteils (b.) bestimmen wir noch die Partikulärlösung unter der in der Aufgabenstellung gegebenen Anfangsbedingung $y(1)=0$. Einsetzen in die allg. Lsg. der inhom. Dgl. liefert: $y_{\text{allg, inhom}}(1)=\left(\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+C\right)\cdot\left(1^3+4\cdot 1\right)=0 \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$

1 P Die gesuchte Partikulärlösung lautet also $y_{\text{part}}(x)=\left(\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(x^3+4x\right)$

**Stolperfalle:**

Man muss aufpassen, an welchen Stellen man die Integrationskonstanten weglassen darf und an welchen Stellen nicht. De facto ist unsere Methode für Dgln. erster Ordnung geeignet, also braucht die Endlösung nur eine einzige Integrationskonstante.

- Bei der Berechnung von $e^{-\int f(x)dx}$ berücksichtigt man keine Integrationskonstante. Für die Berechnung der Lsg. $y_{\text{allg, hom}}$ braucht man sie nicht durch die Integration erzeugen, denn sie ist in der Formel explizit aufgeführt.
- Bei der Methode der Variation der Konstanten zur Berechnung von $y_{\text{allg, inhom}}$ wird man die Integrationskonstante bei der Berechnung des $K(x)=\int g(x)\cdot e^{+\int f(x)dx}dx$ durch die Integration erzeugen. Von dort aus gelangt sie in die Lsg. der Dgl.

(c.) <u>Schritt 1:</u> Die allg. Lsg. der hom. Dgl. finden wir mit dem gewohnten Schema:

$y'+3y=0$ entspricht $y'+f(x)\cdot y=0$, also $f(x)=3 \Rightarrow \; -\int f(x)\,dx = -\int 3dx=-3x+C_1$

2 P $\Rightarrow \quad y_{\text{allg, hom}}=C_2\cdot e^{-3x}$

<u>Schritte 2 und 3:</u> Die allg. Lsg. der inhom. Dgl. folgt aus der Variation der Konstanten:

$y'+3y=-15\cdot\sin(x)$ entspricht $y'+f(x)\cdot y=g(x)$, also $g(x)=-15\cdot\sin(x)$

2 P $\Rightarrow \quad K(x)=\int g(x)\cdot e^{+\int f(x)dx}dx=\int -15\cdot\sin(x)\cdot e^{+3x}dx=\frac{3}{2}\cdot e^{3x}\cdot\left(\cos(x)-3\sin(x)\right)+C$

Somit folgt die allgemeine Lösung der Dgl.:

1 P $y_{\text{allg, inhom}}=\left(\frac{3}{2}\cdot e^{3x}\cdot\left(\cos(x)-3\sin(x)\right)+C\right)\cdot e^{-3x}=C\cdot e^{-3x}+\frac{3}{2}\cdot\left(\cos(x)-3\sin(x)\right)$.

Schließlich fehlt noch die Partikulärlösung unter der Anfangsbedingung $y(0)=4$:

$y_{\text{allg, inhom}}(0)=C\cdot e^{-3\cdot 0}+\frac{3}{2}\cdot\left(\cos(0)-3\sin(0)\right)=C+\frac{3}{2}=4 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{5}{2}$

1 P Die gesuchte Partikulärlösung lautet also $y_{\text{part}}(x)=\frac{5}{2}\cdot e^{-3x}+\frac{3}{2}\cdot\left(\cos(x)-3\sin(x)\right)$

(d.) Wir bringen die Dgl. auf die gewohnte Form $y' = (5-y)\cdot x^2 \quad\Rightarrow\quad y' + \underbrace{x^2}_{f(x)} \cdot y = \underbrace{5x^2}_{g(x)}$ und

wenden das übliche Schema an: $y_{\text{allg,hom}} = C_1 \cdot e^{-\int f(x)dx} = C_1 \cdot e^{-\int x^2 dx} = C_1 \cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$

Und dazu $K(x) = \int g(x)\cdot e^{+\int f(x)dx} dx = \int 5x^2 \cdot e^{+\frac{1}{3}x^3} dx = 5\cdot e^{\frac{1}{3}x^3} + C$ 2 P

$\Rightarrow \quad y_{\text{allg,inhom}} = K(x)\cdot e^{-\int f(x)dx} = \left(5\cdot e^{\frac{1}{3}x^3} + C\right)\cdot e^{-\frac{1}{3}x^3} = 5 + C\cdot e^{-\frac{1}{3}x^3}$ (allg. Lsg. der inhom. Dgl.)

Schließlich noch: Die zur Anfangsbedingung $y(0)=7$ passende Partikulärlösung wird: 2 P

$y_{\text{allg,inhom}}(0) = 5 + C\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot 0^3} = 5 + C = 7 \quad\Rightarrow\quad C = 2 \quad\Rightarrow\quad y_{\text{Part}}(x) = 5 + 2\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot x^3}$ 1 P

## Aufgabe 12.8 Homogene lineare Dgln. 2. Ordnung

| | | | |
|---|---|---|---|
| | (a,b,c.) je 3 min | | Punkte<br>(a,b,c.) je 2 P |

Lösen Sie die nachfolgend genannten homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konst. Koeffizienten mit Hilfe von Lösungsansätzen aus Formelsammlungen.

(a.) $y'' + 10\cdot y' + 9\cdot y = 0$ (b.) $y'' - 6\cdot y' + 9\cdot y = 0$ (c.) $y'' + 2\cdot y' + 5\cdot y = 0$

## Lösung zu 12.8

**Arbeitshinweis:**

Die allg. Form der lin. hom. Dgl. 2. Ordnung lautet $y'' + a\cdot y' + b\cdot y = 0$

Der Lösungsansatz, den man in Formelsammlungen findet, sieht wie folgt aus:

Man stelle die sog. charakteristische Glg. $\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ auf,

aus der man die Lösung der Dgl. mittels Fallunterscheidung findet:

(i.) Falls $\frac{a^2}{4} - b > 0 \quad\Rightarrow\quad y_{\text{allg,hom}}(x) = C_1\cdot e^{\lambda_1 x} + C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$

(ii.) Falls $\frac{a^2}{4} - b = 0 \quad\Rightarrow\quad y_{\text{allg,hom}}(x) = (C_1\cdot x + C_2)\cdot e^{-\frac{a}{2}x}$

(iii.) Falls $\frac{a^2}{4} - b < 0 \quad\Rightarrow\quad y_{\text{allg,hom}}(x) = e^{-\frac{a}{2}x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(\beta x) + C_2\cdot\sin(\beta x)\right)$ mit $\beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$

Anmerkung: Zu (iii.) existiert die alternative Schreibweise $y_{\text{allg,hom}}(x) = C\cdot e^{-\frac{a}{2}x}\cdot\sin(\beta x + \varphi_0)$, deren beide Integrationskonstanten $C$ und $\varphi_0$ heißen.

Zu jedem dieser Fälle üben wir ein Beispiel.

(a.) Hier ist $a=10$ und $b=9 \Rightarrow \frac{a^2}{4}-b=\frac{10^2}{4}-9=16>0 \Rightarrow$ Dies ist Fall (i.).

Da gilt $\lambda_{1/2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=-5\pm\sqrt{25-9}=-5\pm 4 \Rightarrow \lambda_1=-9$ und $\lambda_2=-1$

2 P Die allg. Lsg. der hom. Dgl. lautet also $y_{\text{allg, hom}}(x)=C_1\cdot e^{-9x}+C_2\cdot e^{-x}$

(b.) Hier ist $a=-6$ und $b=9 \Rightarrow \frac{a^2}{4}-b=\frac{9^2}{4}-9=16=0 \Rightarrow$ Dies ist Fall (ii.).

2 P Hier sieht man die Lsg. der hom. Dgl.: $y_{\text{allg, hom}}(x)=(C_1\cdot x+C_2)\cdot e^{3x}$

(c.) Hier ist $a=2$ und $b=5 \Rightarrow \frac{a^2}{4}-b=\frac{2^2}{4}-5=-4<0 \Rightarrow$ Dies ist Fall (iii.).

Wir bestimmen also $\beta=\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{5-\frac{2^2}{4}}=2$

2 P Daraus folgt die allg. Lsg. der hom. Dgl.: $y_{\text{allg, hom}}(x)=e^{-x}\cdot\left(C_1\cdot\cos(2x)+C_2\cdot\sin(2x)\right)$

## Aufgabe 12.9 Inhomogene lineare Dgln. 2. Ordnung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 15 min | (a.) | | Punkte |
| | (b.) | 15 min | (b.) | | (a.) 8 P (b.) 9 P |

Lösen Sie die nachfolgend genannten inhomogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konst. Koeffizienten mit Hilfe von Lösungsansätzen aus Formelsammlungen.

(a.) $y''-12\cdot y'+11\cdot y=3x^2+2x+5$ (b.) $y''+8\cdot y'+16\cdot y=e^{-4x}$

**Anmerkung:** Die Fragestellung dieses Aufgabentyps (inhom. lin. Dgln. zweiter und höherer Ordnung) setzt voraus, dass den Studierenden die entsprechenden Tabellen mit Lösungsansätzen zur Verfügung gestellt werden (z.B. als Bestandteil von Formelsammlungen). Deshalb wird im Buch vom Vorhandensein solcher Tabellen ausgegangen. Was in den Musterlösungen angegeben ist, sind lediglich die jeweils für den individuellen Lösungsweg notwendigen Auszüge aus derartigen Tabellen. Dies gilt für die Aufgaben 12.9, 12.10 und 12.11.

## Lösung zu 12.9

**Arbeitshinweis:**

Aufgabe 12.9 unterscheidet sich von Aufgabe 12.8 durch den Störterm. Unser Lösungsweg besteht folglich in zwei Schritten.

Schritt 1 → Berechnung der allg. Lsg. der hom. Dgl. (ähnlich wie in Aufgabe 12.8)

Schritt 2 → Auffinden einer speziellen Lösung der inhom. Dgl., deren Summe mit der Lösung von Schritt 1 die allg. Lsg. der inhom. Dgl. bildet.

(a.) <u>Schritt 1:</u> Allg. Lsg. der hom. Dgl.: In der Schreibweise $y''+a\cdot y'+b\cdot y=0$ hat die Aufgabe die Parameter $a=-12$ und $b=11$. Da ist $\frac{a^2}{4}-b=\frac{12^2}{4}-11=25>0$, also lauten die Parameter $\lambda_{1/2}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}=6\pm\sqrt{25}\quad\Rightarrow\quad\lambda_1=11$ und $\lambda_2=1$.

Somit die allg. Lsg. der hom. Dgl. $y_{\text{allg,hom}}(x)=C_1\cdot e^{11x}+C_2\cdot e^{x}$. 2 P

<u>Schritt 2:</u> In Tabellen (z.B. in Formelsammlungen) findet man zu verschiedenen Störfunktionen die Lösungsansätze für $y_{\text{Part}}(x)$, also für die spez. Lsg. der inhom. Dgl. Ist die Störfunktion $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n$, so ist

$$y_{\text{Part}}(x)=\begin{cases} P_n(x) & \text{für } b\neq 0 \\ x\cdot P_n(x) & \text{für } a\neq 0, b=0 \\ x^2\cdot P_n(x) & \text{für } a=b=0 \end{cases}$$ , wo $P_n(x)$ ebenfalls ein Polynom vom Grad $n$ ist.

In unserem Bsp. ist wegen $b\neq 0$ und $g(x)=3x^2+2x+5$ (also Polynomgrad $n=2$) der Ansatz für die Partikulärlösung: $y_{\text{Part}}(x)=K_2x^2+K_1x+K_0$ 2 P

Noch zu tun ist die Bestimmung der Koeffizienten $K_2, K_1$ und $K_0$ des Polynoms in $y_{\text{Part}}(x)$. Dies geschieht durch Einsetzen der speziellen Lsg. und ihrer Ableitungen in die Dgl.

Die Ableitungen: $y_{\text{Part}}(x)=K_2x^2+K_1x+K_0 \quad\Rightarrow\quad y'_{\text{Part}}(x)=2K_2x+K_1 \quad\Rightarrow\quad y''_{\text{Part}}(x)=2K_2$

Einsetzen in die Dgl. $y''-12\cdot y'+11\cdot y=3x^2+2x+5$ liefert:

$$(2K_2)-12\cdot(2K_2x+K_1)+11\cdot\left(K_2x^2+K_1x+K_0\right)=3x^2+2x+5 \qquad \Big|\text{Sortieren nach Potenzen von } x$$

$$\Rightarrow\quad 2K_2-24K_2x-12K_1+11K_2x^2+11K_1x+11K_0=3x^2+2x+5$$ 2 P

$$\Rightarrow\quad(-12K_1+2K_2+11K_0)+(11K_1-24K_2)\cdot x+(11K_2)\cdot x^2=3x^2+2x+5$$

Da die Identität der beiden Seiten des Gleichheitszeichens für alle $x\in\mathbb{R}$ erfüllt sein muss, muss für die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von $x$ gelten:

$$\left.\begin{aligned} -12K_1+2K_2+11K_0&=5 \\ 11K_1-24K_2&=2 \\ 11K_2&=3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\quad K_2=\tfrac{3}{11};\ K_1=\tfrac{94}{121};\ K_0=\tfrac{1667}{1331} \quad\Rightarrow\quad y_{\text{Part}}(x)=\tfrac{3}{11}x^2+\tfrac{94}{121}x+\tfrac{1667}{1331}$$ 1 P

Die allg. Lsg. der inhom. Dgl. ist also

$$y_{\text{allg,inhom}}(x)=C_1\cdot e^{11x}+C_2\cdot e^{x}+y_{\text{Part}}(x)=C_1\cdot e^{11x}+C_2\cdot e^{x}+\tfrac{3}{11}x^2+\tfrac{94}{121}x+\tfrac{1667}{1331}$$ 1 P

(b.) <u>Schritt 1:</u> Allg. Lsg. der hom. Dgl.: In der Schreibweise $y''+a\cdot y'+b\cdot y=0$ hat die Aufgabe die Parameter $a=8$ und $b=16$. Da ist $\frac{a^2}{4}-b=\frac{8^2}{4}-16=0$, also lautet die allg. Lsg. der hom. Dgl. $y_{\text{allg,hom}}(x)=(C_1\cdot x+C_2)\cdot e^{-4x}$ 2 P

Schritt 2: Zur Störfunktion $g(x) = e^{Bx}$ findet man in der Formelsammlung die Lösungsansätze für $y_{\text{Part}}(x)$ entsprechend der Fallunterscheidung

$$y_{\text{Part}}(x) = \begin{cases} C \cdot e^{Bx} & \text{für } \lambda_1 \neq B \neq \lambda_2 \\ Cx \cdot e^{Bx} & \text{für } \lambda_1 = B \text{ oder } \lambda_2 = B, \text{ aber } \lambda_1 \neq \lambda_2 \\ Cx^2 \cdot e^{Bx} & \text{für } \lambda_1 = B = \lambda_2 \end{cases} \qquad \text{mit } \lambda_{1/2} = -\tfrac{a}{2} \pm \sqrt{\tfrac{a^2}{4} - b}$$

In unserem Bsp. ist $B = -4$ sowie $\lambda_{1/2} = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\frac{8^2}{4} - 16} = -4$, also $\lambda_1 = B = \lambda_2$. Deshalb müssen wir den Lösungsansatz $y_{\text{Part}}(x) = Cx^2 \cdot e^{Bx}$ wählen und dann durch Einsetzen der speziellen Lsg. in die Dgl. nur noch einen Koeffizienten bestimmen, nämlich $C$. Dazu setzen wir jetzt
2 P die spezielle Lsg. und ihre Ableitungen in die inhom. Dgl. $y'' + 8 \cdot y' + 16 \cdot y = e^{-4x}$ ein:

Zuerst bilden wir die Ableitungen von $y_{\text{Part}}(x) = Cx^2 \cdot e^{Bx} = Cx^2 \cdot e^{-4x}$ :

1 P $\Rightarrow \; y'_{\text{Part}}(x) = 2Cx \cdot e^{-4x} + Cx^2 \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = \left(2Cx - 4Cx^2\right) \cdot e^{-4x}$

1 P $\Rightarrow \; y''_{\text{Part}}(x) = (2C - 8Cx) \cdot e^{-4x} + \left(2Cx - 4Cx^2\right) \cdot (-4) \cdot e^{-4x} = \left(16Cx^2 - 16Cx + 2C\right) \cdot e^{-4x}$

Dann setzen wir in die Dgl. ein und bestimmen den Parameter $C$ :

$$\left(16Cx^2 - 16Cx + 2C\right) \cdot e^{-4x} + 8 \cdot \left(2Cx - 4Cx^2\right) \cdot e^{-4x} + 16 \cdot \left(Cx^2\right) \cdot e^{-4x} = e^{-4x} \qquad \Big| \cdot e^{4x} \text{ und Sortieren nach } x$$

2 P $\Rightarrow \; \underbrace{(16C - 32C + 16C)}_{=0} x^2 + \underbrace{(-16C + 16C)}_{=0} x + (2C) = 1 \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; y_{\text{Part}}(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-4x}$

1 P Als Summe der allg. Lsg. der hom Dgl. plus der spez. Lsg. der inhom. Dgl. erhalten wir die allg. Lsg. der inhom Dgl.: $y_{\text{allg, inhom}}(x) = (C_1 \cdot x + C_2) \cdot e^{-4x} + \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-4x}$

## Aufgabe 12.10 Homogene lineare Dgln. n-ter Ordnung

| | | | Punkte |
|---|---|---|---|
| (a.) | 12 min | | |
| (b.) | 17 min | | |
| (c.) | 17 min | | (a.) 6 P (b.) 8 P (c.) 8 P |

Gegeben sind einige homogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, die Sie bitte lösen.

(a.) $y''' - 7y' + 6y = 0$ (b.) $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$ (c.) $y''' + y'' - 16y' + 20y = 0$

Gehen Sie dabei jeweils in folgenden Schritten vor:

i. Aufstellen und Lösen der charakteristischen Gleichung und Bestimmung der Basislösungen

ii. Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Basislösungen mittels Wronski-Determinante (Schritt ii. bei Klausuren aus Gründen des zeitlichen Aufwands nicht bei Aufgabenteil (b.))

iii. Angabe der allgemeinen Lösung der hom. lin. Dgl. mit konst. Koeffizienten

## Lösung zu 12.10

(a.) Wir beginnen mit Schritt i.: Aufstellen und Lösen der charakteristischen Gleichung

Zur Dgl. $1\cdot y''' + 0y'' - 7y' + 6y = 0$ gehört die 1 P

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

charakterist. Glg. $1\cdot\lambda^3 + 0\lambda^2 - 7\lambda^1 + 6 = 0$ , kurz $\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$

Um deren drei Nullstellen zu suchen, müssen wir probieren und finden eine bei $\lambda_1 = 1$.

Diese spalten wir durch Polynomdivision ab und erhalten $\left(\lambda^3 - 7\lambda + 6\right):(\lambda - 1) = \lambda^2 + \lambda - 6$

Die anderen beiden Nullstellen finden wir mit der pq-Formel:

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = -3$ (Alle Nullstellen sind reell.)

Damit lautet die Fundamentalbasis der Dgl. $y_1 = e^{1x}$ ; $y_2 = e^{2x}$ ; $y_3 = e^{-3x}$ 2 P

Es folgt Schritt ii.: Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Basislösungen

Allgemein lautet die Wronski-Determinante für eine hom. lin. Dgl. n-ter Ordnung mit konst. Koeffizienten

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad \text{mit } y_1 \dots y_n = \text{Fundamentalbasis}.$$

Für unser Beispiel bedeutet dies: 2 P

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{-3x} \\ e^x & 2e^{2x} & -3e^{-3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{-3x} \end{vmatrix} = e^x \cdot \left(18e^{-x} + 12e^{-x}\right) - e^x \cdot \left(9e^{-x} - 4e^{-x}\right) + e^x \cdot \left(-3e^{-x} - 2e^{-x}\right) = 20 \neq 0$$

Sie ist von Null verschieden, also sind die Basislösungen linear unabhängig.

Schritt iii.: Damit geben wir die allg. Lsg. der Dgl. als Linearkombination der Basislösungen an: $y(x) = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot e^{-3x}$ 1 P

(b.) Schritt i.: Charakteristische Gleichung:

Zur Dgl. $y^{(4)} - 5y'' - 36y = 0$ gehört die 1 P

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

charakterist. Glg. $\lambda^4 - 5\lambda^2 - 36 = 0$

Deren Nullstellen finden wir nach Substitution $z := \lambda^2 \;\Rightarrow\; z^2 - 5z - 36 = 0$

Mit der pq-Formel folgt $z_1 = 9$ und $z_2 = -4$ .

Resubstitution liefert $\lambda_1 = +3$ ; $\lambda_2 = -3$ ; $\lambda_3 = +2i$ ; $\lambda_4 = -2i$ .

Beim Aufstellen der Fundamentalbasis müssen wir neben zwei reellen Nullstellen auch ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen beachten.

Die beiden reellen Nullstellen führen (laut Tabelle) zu $y_1 = e^{3x}$ und $y_2 = e^{-3x}$.

2 P Das Nullstellenpaar $\lambda_{3/4} = 0 \pm 2i$ führt (lt. Tabelle) zu $y_3 = e^0 \cdot \sin(2x)$ und $y_4 = e^0 \cdot \cos(2x)$.

<u>Schritt ii.</u>: Der Nachweis der linearen Unabhängigkeit dieser vier Basislösungen geschieht über die Wronski-Determinante (die die Leser selbst ausrechnen mögen):

4 P $$W = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} & \sin(2x) & \cos(2x) \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} & +2\cdot\cos(2x) & -2\cdot\sin(2x) \\ 9e^{3x} & +9e^{-3x} & -4\cdot\sin(2x) & -4\cdot\cos(2x) \\ 27e^{3x} & -27e^{-3x} & -8\cdot\cos(2x) & +8\cdot\sin(2x) \end{vmatrix} = 2028 \neq 0 \quad \Rightarrow$$ Die Basislösungen sind linear unabhängig.

1 P <u>Schritt iii.</u>: Die allg. Lsg. der Dgl. ist $y(x) = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-3x} + C_3 \cdot \sin(2x) + C_4 \cdot \cos(2x)$

(c.) <u>Schritt i.</u>: Charakteristische Gleichung:

1 P Zur Dgl. $y''' + y'' - 16y' + 20y = 0$ gehört die

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

charakterist. Glg. $\lambda^3 + \lambda^2 - 16\lambda + 20 = 0$

Die erste der drei Nullstellen kann man nur durch Raten und Ausprobieren finden. Eine Idee dafür holen wir uns aus dem Wurzelsatz von Viéta. Er besagt, dass das Produkt aller $n$ Nullstellen $\lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n = (-1)^n \cdot a_n$ ist, wobei $a_n$ der von $\lambda$ freie Summand ist. Für unser Beispiel bedeutet dies $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = (-1)^3 \cdot 20 = -20$. Da die $-20$ die ganzzahligen Teiler $\pm 2$, $\pm 4$, $\pm 5$ und $\pm 10$ enthält, die wir als Nullstellen probieren können, versuchen wir das Raten zuerst an diesen Stellen: Zum Beispiel bei $-5$ werden wir fündig. Eine Nullstelle der charakteristischen Gleichung liegt bei $\lambda_1 = -5$.

Diese spalten wir mit Polynomdivision ab: $\left(\lambda^3 + \lambda^2 - 16\lambda + 20\right) : (\lambda + 5) = x^2 - 4x + 4$

Die anderen beiden Nullstellen erhält man sofort mit der pq-Formel: $\lambda_2 = +2$ und $\lambda_3 = +2$

Beim Aufstellen der Fundamentalbasis sind also eine einfache und zusätzlich eine doppelt auftretende reelle Nullstelle zu berücksichtigen, sodass wir (aus einer Tabelle) folgende Basislösungen erhalten:

3 P $$\underbrace{y_1 = e^{-5x}}_{\text{für die einfache Nullstelle}} \quad \text{und dazu} \quad \underbrace{y_2 = e^{+2x} \quad \text{sowie} \quad y_3 = x \cdot e^{+2x}}_{\text{für die doppelt auftretende Nullstelle}}.$$

<u>Schritt ii.</u>: Die lineare Unabhängigkeit der Basislösungen prüft man über die Wronski-Determinante:

3 P $$W = \begin{vmatrix} e^{-5x} & e^{2x} & x \cdot e^{2x} \\ -5 \cdot e^{-5x} & 2 \cdot e^{2x} & (2x+1) \cdot e^{2x} \\ 25 \cdot e^{-5x} & 4 \cdot e^{2x} & (4x+4) \cdot e^{2x} \end{vmatrix} = e^{-5x} \cdot \left(4e^{4x}\right) + 5 \cdot e^{-5x} \cdot \left(4e^{4x}\right) + 25 \cdot e^{-5x} \cdot \left(e^{4x}\right) = 49 \cdot e^{-x} \neq 0$$

Da die Wronski-Determinante (im Allgemeinfall, also für alle $x$ ) nicht verschwindet, gilt die lineare Unabhängigkeit der Basislösungen als gesichert.

Schritt iii.: Die allg. Lsg. der Dgl. ist also die Linearkombination

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-5x} + C_2 \cdot e^{2x} + C_3 \cdot x \cdot e^{2x}$$ 1 P

## Aufgabe 12.11 Inhomogene lineare Dgln. n-ter Ordnung

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 15 min | | Punkte | |
| | (b.) | 15 min | | (a.) 7 P | (b.) 8 P |

Zu den nachfolgend genannten inhomogenen linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung finde man die allgemeinen Lösungen

(a.) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 3x^2 + 4x + 5$

(b.) $y''' + 9y' = e^{-4x}$

## Lösung zu 12.11

**Arbeitshinweis:** Sinnvollerweise geht man in zwei Schritten vor, nämlich

Schritt 1 → Bestimmen der allg. Lsg. der hom. Dgl.

Schritt 2 → Auffinden einer spez. Lsg. der inhom. Dgl.

Die Summe aus beiden Lsgn. ist wie immer die allg. Lsg. der inhom. Dgl.

(a.) Schritt 1: Die charakteristische Glg. der hom Dgl. lautet: $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$

Mit Erinnerung an den Binomischen Lehrsatz erkennt man $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$ 1 P

Die dreifache reelle Nullstelle bei $\lambda = -1$ führt (gemäß Tabelle) zu den Basislösungen $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x \cdot e^{-x}$ und $y_3 = x^2 e^{-x}$, deren Linearkombination die allg. Lsg. der hom. Dgl. ist: 1 P

$$y_{\text{allg,hom}}(x) = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-x} + C_3 \cdot x^2 \cdot e^{-x}$$

**Stolperfalle:**

Entnimmt man die Basislösungen einer Tabelle, so ist es nicht nötig, deren lineare Unabhängigkeit nachzuweisen, denn diese wurde beim Erstellen der Tabelle bereits berücksichtigt. Im Falle einer Klausur wäre es schade, an dieser Stelle Zeit zu verlieren.

Schritt 2: Der Störterm ist ein Polynom zweiten Grades, also ist als Ansatz für die Partikulärlösung der inhom. Dgl. auch ein Polynom zweiten Grades zu verwenden:

$$y_{\text{Part,inhom}}(x) = Ax^2 + Bx + C$$

Die Bestimmung der Koeffizienten $A$, $B$ und $C$ erfolgt durch Ableiten der Partikulärlösung

$y_{\text{Part}}(x) = Ax^2 + Bx + C \;\Rightarrow\; y'_{\text{Part}}(x) = 2Ax + B \;\Rightarrow\; y''_{\text{Part}}(x) = 2A \;\Rightarrow\; y'''_{\text{Part}}(x) = 0$

und Einsetzen der Ableitungen in die Dgl (d.h. in $y''' + 3y'' + 3y' + y = 3x^2 + 4x + 5$ ):

$\Rightarrow\; 0 + 3\cdot(2A) + 3\cdot(2Ax + B) + 1\cdot\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 3x^2 + 4x + 5$ | Sortieren nach Potenzen von $x$

2 P $\Rightarrow\; x^2\cdot(A-3) + x\cdot(6A + B - 4) + (6A + 3B + C - 5) = 0$

Identisch verschwinden für alle $x \in \mathbb{R}$ kann der Ausdruck nur, wenn alle Klammern für sich verschwinden, also muss gelten:

$$\left.\begin{array}{l} A - 3 = 0 \;\Rightarrow\; A = 3 \\ 6A + B - 4 = 0 \;\Rightarrow\; B = 4 - 6A = 4 - 18 = -14 \\ 6A + 3B + C - 5 = 0 \;\Rightarrow\; C = 5 - 6A - 3B = 5 - 18 + 42 = 29 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; y_{\text{Part,inhom}}(x) = 3x^2 - 14x + 29$$

Die allg. Lsg. der inhom. Dgl. ist also die Summe $y_{\text{allg,inhom}}(x) = y_{\text{allg,hom}}(x) + y_{\text{Part,inhom}}(x)$ :

3 P $y_{\text{allg,inhom}}(x) = C_1\cdot e^{-x} + C_2\cdot x\cdot e^{-x} + C_3\cdot x^2\cdot e^{-x} + 3x^2 - 14x + 29$

(b.) <u>Schritt 1:</u> Die charakteristische Glg. der hom Dgl. $y''' + 9y' = 0$ lautet: $\lambda^3 + 9\lambda = 0$

1 P Eine Nullstelle bei $\lambda_1 = 0$ sieht man sofort, da kein von $\lambda$ freier Summand vorkommt.

Die anderen beiden Nullstellen liegen bei $\lambda^2 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_{2/3} = \pm 3i$ .

Die drei zugehörigen Basislösungen entnimmt man einer Tabelle und findet:

$y_1 = e^{0\cdot x}$, $y_2 = e^0\cdot\sin(3x)$ und $y_3 = e^0\cdot\cos(3x)$ ,

deren Linearkombination die allg. Lsg. der hom. Dgl. ergibt:

2 P $y_{\text{allg,hom}}(x) = C_1 + C_2\cdot\sin(3x) + C_3\cdot\cos(3x)$ .

<u>Schritt 2:</u> Ist der Störterm eine Exponentialfunktion ( $g(x) = e^{\alpha x}$, wo $\alpha$ keine Nullstelle der charakteristischen Glg. ist), so ist ein sinnvoller Ansatz für die Partikulärlösung (laut Tabelle)

1 P ebenfalls eine Exponentialfunktion: $y_{\text{Part,inhom}}(x) = A\cdot e^{\alpha x} = Ae^{-4x}$

Ableiten $y'_{\text{Part,inhom}}(x) = -4A\cdot e^{-4x}$

$y''_{\text{Part,inhom}}(x) = +16A\cdot e^{-4x}$

1 P $y'''_{\text{Part,inhom}}(x) = -64A\cdot e^{-4x}$

und Einsetzen in die Dgl. ( $y''' + 9y' = e^{-4x}$ ) liefert

$\left(-64A\cdot e^{-4x}\right) + 9\cdot\left(-4A\cdot e^{-4x}\right) = e^{-4x}$, woraus der Koeffizient $A$ bestimmt wird:

2 P $\Rightarrow\; \left(-64A\cdot e^{-4x}\right) + 9\cdot\left(-4A\cdot e^{-4x}\right) = e^{-4x} \;\Rightarrow\; -100A = 1 \;\Rightarrow\; A = -\frac{1}{100} \;\Rightarrow\; y_{\text{Part}}(x) = \frac{-1}{100}e^{-4x}$

1 P Somit ist die allg. Lsg. der inhom. Dgl. $y_{\text{allg,inhom}}(x) = C_1 + C_2\cdot\sin(3x) + C_3\cdot\cos(3x) - \frac{1}{100}\cdot e^{-4x}$ .

# 13 Funktionaltransformationen

## Vorbemerkung

In diesem Kapitel müssen oftmals Integrale gelöst und Ableitungen berechnet werden. Etliche davon werden in den Musterlösungen nicht von Hand Schritt für Schritt vorgeführt, denn das Ableiten und das Integrieren sind eigentlich die Themen von Kapitel 6 und Kapitel 7. Speziell beim Integrieren wird deshalb aus Platzgründen auf Integraltafeln zurückgegriffen, wie man sie in Formelsammlungen findet. (Eine solche Integraltafel findet man z.B. im Teubner-Taschenbuch der Mathematik, 2.Aufl. Kap. 0.9.5.). Einen stark verkürzten Auszug davon findet man auch im Anhang des vorliegenden Buches (Kapitel 15, Tabelle 15.4).

Den Lesern und Leserinnen wird empfohlen, sich mit Kapitel 13 erst dann zu befassen, wenn sie die Inhalte von Kapitel 6 und 7 sicher beherrschen.

Bei der Anwendung der Laplace-Transformation verwenden wir das Symbol „$\bullet\!\!-\!\!\circ$“. Dabei markiert der volle Kreis immer die Funktion im Bildbereich und der offene Kreis immer die Funktion im Originalbereich – und zwar unabhängig von der Orientierung der Symbole.

Die Aussage $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}\{f(t)\}$ ist also gleichbedeutend mit $\mathcal{L}\{f(t)\} \bullet\!\!-\!\!\circ f(t)$.

Zur Berechnung von Laplace-Transformationen nimmt man oftmals sog. Korrespondenztabellen zu Hilfe. Ein kleiner Auszug aus einer solchen Korrespondenztabelle, wie er typischerweise in Klausuren zur Verfügung gestellt wird, ist ebenfalls in Kapitel 15 des vorliegenden Buches abgedruckt, und zwar in Tabelle 15.3.

## Aufgabe 13.1 Fourier-Transformationen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | (a,b.) | je 20 min | | Punkte<br>(a,b.) je 11 P |

Berechnen Sie in den komplexen Zahlen die Fourier-Transformierten der Funktionen

(a.) $f_a(t) = \cos(\omega_0 t)$ (b.) $f_b(t) = \sin(\omega_0 t)$

Veranschaulichen Sie auch die Fourier-Transformierten durch Skizzen, bei denen Sie den Realteil bzw. den Imaginärteil der Transformierten als Funktion der Frequenz $\omega$ auftragen.

## Lösung zu 13.1

**Arbeitshinweis:**

Das für die Fourier-Transformation zu berechnende Integral lautet

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt \quad (\text{mit } i = \sqrt{-1} \text{ als komplexer Einheit }).$$

(a.) Da in den komplexen Zahlen gearbeitet wird, muss die komplexe Schreibweise des Cosinus verwendet werden, nämlich $\cos(z)=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)$. Damit schreiben wir

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(\omega_0 t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{1}{2}\cdot\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

2 P
$$=\tfrac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i(\omega_0-\omega)t}+e^{-i(\omega_0+\omega)t}\right)dt=\tfrac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{i(\omega_0-\omega)t}\right)dt+\tfrac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-i(\omega_0+\omega)t}\right)dt$$

**Stolperfalle:**

Man verwechsele nicht $\omega$ mit $\omega_0$. Dies sind zwei völlig verschiedene Größen.

- $\omega$ ist die freie Variable, von der die Fourier-Transformierte im Bildraum abhängt.
- $\omega_0$ ist eine Konstante, die in der Aufgabenstellung vorgegeben wurde.

Die Ähnlichkeit der Namensgebung findet sich aus Gründen der technischen Anwendung oft in Beispielen wieder. Sie darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, dass es sich dabei um verschiedenartige Objekte handelt.

Mit den Substitutionen $u:=(\omega_0-\omega)\cdot t \;\Rightarrow\; \frac{du}{dt}=-\omega$ und $v:=(\omega_0+\omega)\cdot t \;\Rightarrow\; \frac{dv}{dt}=+\omega$

bestimmen wir die Stammfunktionen $\int e^{i(\omega_0-\omega)t}dt=\dfrac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot t}+C_1$

1 P und $\int e^{-i(\omega_0+\omega)t}dt=\dfrac{1}{-i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0+\omega)\cdot t}+C_2$

Setzen wir diese Stammfunktionen in $F(\omega)$ ein, so erhalten wir

$$F(\omega)=\tfrac{1}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\tfrac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot t}\right]_{-A}^{+A}+\tfrac{1}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\tfrac{1}{-i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot t}\right]_{-A}^{+A}$$

Durch Einsetzen der Integralgrenzen folgt

3 P
$$F(\omega)=\tfrac{1}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\tfrac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot A}-\tfrac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot A}\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\tfrac{1}{-i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot A}-\tfrac{1}{-i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot A}\right]$$

$$\Rightarrow F(\omega)=\lim_{A\to\infty}\tfrac{1}{(\omega_0-\omega)}\cdot\underbrace{\left[-\tfrac{i}{2}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot A}+\tfrac{i}{2}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot A}\right]}_{=\sin((\omega_0-\omega)\cdot A)}+\lim_{A\to\infty}\tfrac{1}{(\omega_0+\omega)}\underbrace{\left[\tfrac{i}{2}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot A}-\tfrac{i}{2}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot A}\right]}_{=\sin((\omega_0+\omega)\cdot A)}$$

Die Zuweisung der Sinus-Terme geht zurück auf die komplexe Form der Sinusfunktion, nämlich $\sin(z)=\frac{i}{2}\cdot\left(e^{-iz}-e^{iz}\right)$, womit wir dann kurz schreiben können:

2 P
$$F(\omega)=\lim_{A\to\infty}\frac{\sin((\omega_0-\omega)\cdot A)}{(\omega-\omega_0)}+\lim_{A\to\infty}\frac{\sin((\omega_0+\omega)\cdot A)}{(\omega+\omega_0)}$$

Eine mögliche Form zur Angabe der Dirac'schen Delta- Distribution ist $\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{A\to\infty}\frac{\sin(Ax)}{x}$.

Mit $x=\omega_0-\omega$ bzw. $x=\omega_0+\omega$ formen wir $F(\omega)$ um in $F(\omega)=\pi\cdot\delta(\omega_0-\omega)+\pi\cdot\delta(\omega_0+\omega)$ .
Dies ist die gesuchte Fourier-Transformierte der Funktion $f_a(t)=\cos(\omega_0 t)$. Die Skizze der Fourier-Transformierten sieht man in Bild 13-1a. 2 P

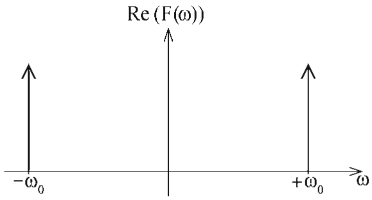



**Bild 13-1a**
Skizze der Fourier-Transformierten von $f_a(t)=\cos(\omega_0 t)$. 1 P
Gezeigt wird nur der Realteil der Fourier-Transformierten, denn ihr Imaginärteil ist Null.

(b.) Wegen $\sin(z)=\frac{i}{2}\cdot\left(e^{-iz}-e^{iz}\right)$ schreiben wir die gesuchte Fourier-Transformierte als

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\omega_0 t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\tfrac{i}{2}\cdot\left(e^{-i\omega_0 t}-e^{+i\omega_0 t}\right)\cdot e^{-i\omega t}\,dt$$

$$=\tfrac{i}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{-i(\omega_0+\omega)t}-e^{i(\omega_0-\omega)t}\right)dt=\tfrac{i}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i(\omega_0+\omega)t}\,dt-\tfrac{i}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\omega_0-\omega)t}\,dt$$ 2 P

Der Lösungsweg verläuft recht ähnlich wie bei Aufgabenteil (a.). Auch die Stammfunktionen können von dort direkt übernommen werden, sodass wir für $F(\omega)$ schreiben:

$$F(\omega)=\tfrac{i}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{-i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0+\omega)\cdot t}\right]_{-A}^{+A}-\tfrac{i}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot t}\right]_{-A}^{+A}$$ 2 P

Das Einsetzen der Integralgrenzen liefert

$$F(\omega)=\tfrac{i}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{-i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0+\omega)\cdot A}+\frac{1}{i(\omega_0+\omega)}\cdot e^{i(\omega_0+\omega)\cdot A}\right]$$ 2 P

$$-\tfrac{i}{2}\cdot\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot A}-\frac{1}{i(\omega_0-\omega)}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot A}\right]$$

$$\Rightarrow F(\omega)=\lim_{A\to\infty}\frac{i}{(\omega_0+\omega)}\cdot\underbrace{\left[\tfrac{i}{2}\cdot e^{-i(\omega_0+\omega)\cdot A}-\tfrac{i}{2}\cdot e^{i(\omega_0+\omega)\cdot A}\right]}_{=\sin((\omega_0+\omega)\cdot A)}+\lim_{A\to\infty}\frac{i}{(\omega_0-\omega)}\underbrace{\left[\tfrac{i}{2}\cdot e^{i(\omega_0-\omega)\cdot A}-\tfrac{i}{2}\cdot e^{-i(\omega_0-\omega)\cdot A}\right]}_{=-\sin((\omega_0-\omega)\cdot A)}$$

Also ist $F(\omega)=i\cdot\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{\sin((\omega_0+\omega)\cdot A)}{(\omega+\omega_0)}-i\cdot\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{\sin((\omega_0-\omega)\cdot A)}{(\omega-\omega_0)}$ 2 P

Wir verwenden wieder die Darstellung der Dirac'schen Delta- Distribution gemäß

$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{A\to\infty}\frac{\sin(Ax)}{x}$ und erhalten: $F(\omega)=i\cdot\pi\cdot\delta(\omega_0+\omega)-i\cdot\pi\cdot\delta(\omega_0-\omega)$

Dies ist die gesuchte Fourier-Transformierte der Funktion $f_b(t)=\sin(\omega_0 t)$. 2 P

Die Skizze der Fourier-Transformierten sieht man in Bild 13-1b.

1 P

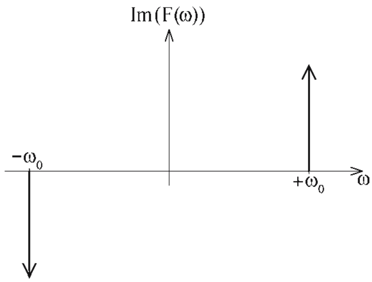



**Bild 13-1b**
Skizze der Fourier-Transformierten von $f_a(t) = \sin(\omega_0 t)$ .
Gezeigt wird nur der Imaginärteil der Fourier-Transformierten, denn ihr Realteil ist Null.

Nebenbemerkung:
Da die bei unserer Berechnung auftretenden uneigentlichen Integrale zwei Stellen der Uneigentlichkeit aufweisen, hätte man sie streng genommen (siehe Kap.7 - Integralrechnung) immer in je zwei Stücke zerteilen müssen. Dass dies hier in der Musterlösung nicht vorgeführt wurde, liegt einfach daran, dass dieser Zusatzaufwand am Ergebnis nichts ändert, wovon sich die Leser ohne größere Mühe selbst überzeugen können. Die Fourier-Transformierte des Cosinus könnte man dann z.B. ansetzen als

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{0} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt + \int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t}\, dt \;.$$

## Aufgabe 13.2 Laplace-Transformationen nach Definition

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | 15 min | | Punkte | |
| (b.) | 12 min | | (a.) 7 P | (b.) 6 P |

Berechnen Sie durch Integration aus der Definition der Laplace-Transformation die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a.) $f_a(t) = \cosh(\omega_0 t)$ (b.) $f_b(t) = (1+\lambda t) \cdot e^{-\lambda t}$

Führen Sie zur Kontrolle der Ergebnisse auch die Transformationen mit Hilfe von Korrespondenztabellen durch.

## Lösung zu 13.2

**Arbeitshinweis:**
Das für die Laplace- Transformation zu berechnende Integral lautet

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt \quad \text{(mit } s \in \mathbb{C} \text{ als Transformationsvariable).}$$

(a.) Die Funktion des Cosinus Hyperbolicus ist $\cosh(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)$. Damit schreiben wir

2 P

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left(e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}\right) \cdot e^{-st}\, dt = \tfrac{1}{2} \int_0^{+\infty} \left(e^{(\omega_0 - s)t} + e^{-(\omega_0 + s)t}\right) dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{\omega_0 - s} \cdot e^{(\omega_0 - s)t} + \frac{1}{-(\omega_0 + s)} \cdot e^{-(\omega_0 + s)t} \right]_0^A = \underbrace{\lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{\omega_0 - s} \cdot e^{(\omega_0 - s)t} \right]_0^A}_{\text{1. Summand}} + \underbrace{\lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{-(\omega_0 + s)} \cdot e^{-(\omega_0 + s)t} \right]_0^A}_{\text{2. Summand}}$$ 1 P

Im Sinne der Definition der Laplace-Transformation darf ein geeignetes $s$ vorausgesetzt werden, sodass $\lim\limits_{A\to\infty} e^{-(\lambda+s)A} = 0$ konvergiert, d.h. die Stammfunktion verschwindet beim Einsetzen der oberen Integralgrenze.

Setzen wir im ersten Summanden $\lambda_1 = -\omega_0 \quad \Rightarrow \quad (\omega_0 - s) = -(-\omega_0 + s) = -(\lambda_1 + s)$

und im zweiten Summanden $\lambda_2 = +\omega_0 \quad \Rightarrow \quad -(\omega_0 + s) = -(\lambda_2 + s)$ , so erhalten wir:

$$F(s) = \underbrace{\lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{\omega_0 - s} \cdot e^{-(\lambda_1 + s)t} \right]_0^A}_{\text{1. Summand}} + \underbrace{\lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \frac{1}{-(\omega_0 + s)} \cdot e^{-(\lambda_2 + s)t} \right]_0^A}_{\text{2. Summand}} .$$

Darin können wir nun die Integralgrenzen einsetzen und das Ergebnis finden: 3 P

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{\omega_0 - s} \cdot e^{-(\lambda_1 + s)A}}_{\to 0} - \frac{1}{\omega_0 - s} \cdot e^0 \right] + \lim_{A\to\infty} \tfrac{1}{2} \cdot \left[ \underbrace{\frac{1}{-(\omega_0 + s)} \cdot e^{-(\lambda_2 + s)A}}_{\to 0} - \frac{1}{-(\omega_0 + s)} \cdot e^0 \right] = -\frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0 - s} + \frac{1}{2} \frac{1}{\omega_0 + s}$$

In vielen Korrespondenztabellen findet man direkt die Laplace-Transformierte des Cosinus-Hyperbolicus: $\dfrac{s}{s^2 - a^2}$ ●—o $\cosh(at)$

Deren Übereinstimmung mit unserem durch Lösen des Laplace-Integrals erzielten Ergebnis findet man durch simple Bruchrechnung. Es gilt nämlich

$F(s) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0 - s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\omega_0 + s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-(\omega_0 + s) + (\omega_0 - s)}{(\omega_0 - s) \cdot (\omega_0 + s)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2s}{\omega_0^2 - s^2} = \frac{s}{s^2 - \omega_0^2}$ , wo wir $\omega_0$ mit $a$ identifizieren. 1 P

(b.) Hier können wir $f_b(t)$ direkt in das Integral der Laplace-Transformation einsetzen: 1 P

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} (1 + \lambda t) \cdot e^{-\lambda t} \cdot e^{-st} \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt + \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \underbrace{t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-(\lambda+s)t}}_{v'} dt$$

Mit partieller Integration (siehe u und v' ) folgt

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \left[ \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)t} \right]_0^A + \lim_{A\to\infty} \left[ \lambda t \cdot \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)t} \right]_0^A - \lambda \cdot \int_0^{+\infty} \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)t} dt$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[ \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)t} \right]_0^A + \lim_{A\to\infty} \left[ \lambda t \cdot \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)t} \right]_0^A + \lim_{A\to\infty} \lambda \cdot \left[ \tfrac{1}{\lambda+s} \cdot \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)t} \right]_0^A$$ 2 P

Im Sinne der Definition der Laplace-Transformation darf ein geeignetes $s$ vorausgesetzt werden, sodass $\lim\limits_{A\to\infty} e^{-(\lambda+s)A} = 0$ konvergiert, d.h. die Stammfunktion verschwindet beim Einsetzen der oberen Integralgrenze. Damit setzen wir die Integralgrenzen ein:

$$F(s) = \left[ 0 - \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)\cdot 0} \right] + \left[ 0 - \lambda \cdot 0 \cdot \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)\cdot 0} \right] + \lambda \cdot \left[ 0 - \tfrac{1}{\lambda+s} \cdot \tfrac{-1}{\lambda+s} \cdot e^{-(\lambda+s)\cdot 0} \right] = \tfrac{1}{\lambda+s} + \lambda \cdot \left( \tfrac{1}{\lambda+s} \right)^2$$ 2 P

Zur Kontrolle transformieren wir mit einer Korrespondenztabelle. Die meisten Korrespondenztabellen der Laplace-Transformation zeigen folgende Zusammenhänge

$\frac{1}{s-a}$ ●—○ $e^{at}$ Für $\lambda = -a$ gilt somit die Transformation $\frac{1}{s+\lambda}$ ●—○ $e^{-\lambda t}$

$\frac{1}{(s-a)^2}$ ●—○ $t \cdot e^{at}$ Hier folgt für $\lambda = -a$ die Transfomation $\frac{1}{(s+\lambda)^2}$ ●—○ $t \cdot e^{-\lambda t}$

Wegen der Linearität der Laplace-Transformation lässt sich die zweite Zeile mit $\lambda$ multiplizieren und dann zur ersten Zeile addieren, sodass wir

1 P $\frac{1}{s+\lambda} + \frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}$ ●—○ $\lambda t \cdot e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}$ erhalten – in Übereinstimmung mit dem durch Lösen des Laplace-Transformationsintegrals erzielten Ergebnis.

## Aufg. 13.3 Laplace-Transformationen nach Korrespondenztabelle

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| (a.) | 5 min | | Punkte: | (a.) 3 P |
| (b.) | 3 min | | | (b.) 2 P |
| (c.) | 7 min | | | (c.) 4 P |
| (d.) | 2 min | | | (d.) 1 P |
| (e.) | 15 min | | | (e.) 7 P |
| (f.) | 4 min | | | (f.) 2 P |
| (g.) | 5 min | | | (g.) 2 P |
| (h.) | 5 min | | | (h.) 2 P |

Bestimmen Sie mit Hilfe einer Korrespondenztabelle die Laplace-Transformierten der folgenden Funktionen:

(a.) $f(t) = \sin^2(\omega t)$ (b.) $f(t) = e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t)$ (c.) $f(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega^3} - \frac{t \cdot \cos(\omega t)}{\omega^2}$

(d.) $f(t) = \sqrt{\lambda \cdot t}$ (e.) $f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für } t < \frac{-\varphi_0}{\omega} \\ \cos(\omega t + \varphi_0) & \textit{für } t \geq \frac{-\varphi_0}{\omega} \end{cases}$ (f.) $f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für } t < 7 \\ (t-7)^4 & \textit{für } t \geq 7 \end{cases}$

(g.) $f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für } t < 0 \\ (t-7)^4 & \textit{für } t \geq 0 \end{cases}$ (h.) $f(t) = t^3 \cdot e^{at}$

Wer die Aufgaben ohne die nachfolgenden Hinweise lösen kann, sollte das unbedingt tun. Nur wer die Lösung aus eigener Kraft nicht findet, sollte die nachfolgenden Hinweise vor dem Lösen der einzelnen Aufgaben lesen und dann nochmals das Lösen der einzelnen Aufgabenteile versuchen. Nur diejenigen, die dann immer noch nicht zum Ergebnis kommen, mögen die Musterlösungen betrachten bevor sie die Aufgaben gelöst haben.

## Hinweise zu 13.3

Hinweis zu a.: Mit einem Additionstheorem lässt sich die Aufgabenstellung vereinfachen.
Hinweis zu b.: Man arbeitet mit dem Dämpfungssatz.
Hinweis zu c.: Findet man die Funktion $t \cdot \cos(\omega t)$ nicht in einer Korrespondenztabelle, so hilft die Ableitung im Bildbereich weiter.
Hinweis zu d.: Dies geht gut, wenn man die Wurzel in einer Korrespondenztabelle findet.
Hinweis zu e.: Hier ist der Verschiebungssatz nach links gefragt.
Hinweis zu f.: Hier ist der Verschiebungssatz nach rechts gefragt.
Hinweis zu g.: Die unverschobene Funktion wird als Polynom transformiert.
Hinweis zu h.: Dies ist ein Standard-Beispiel zur Ableitung im Bildbereich.

## Lösung zu 13.3

(a.) Wir vereinfachen die Aufgabe aufgrund des Additionstheorems $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$ und transformieren $f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t)$. 1 P

In Korrespondenztabellen findet man

$\varepsilon(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$ Die Heaviside-Sprungfunktion $\varepsilon(t)$ steht für eine bei $t=0$ eingeschaltete $1$.

Mitunter steht also in Korrespondenztabellen nicht $\varepsilon(t)$ sondern nur 1.

$$\cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2}$$

Wegen der Linearität der Laplace-Transformation fassen wir zusammen (mit $a = 2\omega$ ):

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \cos(2\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+(2\omega)^2} = \frac{\frac{1}{2}\left(s^2+4\omega^2\right) - \frac{1}{2}s^2}{s \cdot \left(s^2+4\omega^2\right)} = \frac{2\omega^2}{s \cdot \left(s^2+4\omega^2\right)} = F(s)$$ 2 P

**Stolperfalle:**

Man darf eine Konstante nicht einfach vom Originalraum in den Bildraum abschreiben, sondern man benötigt die Heaviside-Sprungfunktion zur Transformation.

(b.) Aus einer Korrespondenztabelle entnimmt man $\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Darauf wenden wir den Dämpfungssatz an, der lautet $e^{-\lambda t} \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s+\lambda)$ und erhalten

$$e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{(s+\lambda)}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$$ 2 P

(c.) Aus Korrespondenztabelle $\Rightarrow$ $\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ und $\cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Durch Ableitung im Bildbereich (die Regel lautet $-t \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F'(s)$) erhalten wir aus der

2 P Transformation des Cosinus: $-t \cdot \cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{\left(s^2+\omega^2\right) - s \cdot 2s}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = \frac{\omega^2 - s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$

Wegen der Linearität der Laplace-Transformation können wir zusammenfassen

$$f(t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega^3} - \frac{t \cdot \cos(\omega t)}{\omega^2} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \frac{1}{\omega^3} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \frac{1}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2 - s^2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2} = F(s)$$

2 P Der Ausdruck lässt sich vereinfachen zu $F(s) = \frac{\omega \cdot \left(s^2+\omega^2\right) + \omega \cdot \left(\omega^2 - s^2\right)}{\omega^3 \cdot \left(s^2+\omega^2\right)^2} = \frac{2}{\left(s^2+\omega^2\right)^2}$ .

(d.) Aus Korrespondenztabellen $\Rightarrow$ $\sqrt{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{s \cdot \sqrt{s}}$

1 P Somit ist $\Rightarrow$ $\sqrt{\lambda \cdot t} = \sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\, \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda}}{s \cdot \sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi \cdot \lambda}{4 \cdot s^3}}$

(e.) Zu transformieren ist $f(t) = \cos(\omega t + \varphi_0)$ und zwar als ein um $\varphi_0$ nach links verschobener Cosinus, denn die Funktion nimmt bereits vor $t = 0$ Werte an, die von Null verschieden sind. Wir benötigen also den Verschiebungssatz nach links. Er lautet

$$f\left(t+\tilde{t}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\, e^{s \cdot \tilde{t}} \cdot \left( F(s) - \int_0^{\tilde{t}} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} dt \right) = \mathcal{L}\left\{ f\left(t+\tilde{t}\right) \right\} \qquad \left(\text{mit } \tilde{t} > 0\right)$$

Für unsere Aufgabe müssen wir von $\varphi_0$ in $\tilde{t}$ umrechnen:

1 P Für $\tilde{t} = \frac{\varphi_0}{\omega}$ ist $\cos(\omega t + \varphi_0) = \cos\left(\omega\left(t+\tilde{t}\right)\right)$ .

**Stolperfalle:**

Verschiebungen müssen natürlich immer direkt als Verschiebungen des Parameters $t$ ausgedrückt werden, da nur dann die Integration korrekte Ergebnisse liefern kann.

Damit wenden wir den Verschiebungssatz nach links wie folgt an:

1 P
$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(\omega\left(t+\tilde{t}\right)\right)\right\} = e^{\tilde{t} \cdot s} \cdot \left( \mathcal{L}\left\{\cos(\omega t)\right\} - \int_0^{\tilde{t}} \cos(\omega t) \cdot e^{-t \cdot s} dt \right) = e^{\tilde{t} \cdot s} \cdot \left( \frac{s}{s^2+\omega^2} - \int_0^{\tilde{t}} \cos(\omega t) \cdot e^{-t \cdot s}\, dt \right) \qquad (*)$$

Nebenrechnung: Die Stammfunktion zum Integral in Gleichung $(*)$ löst man mit zweimaliger partieller Integration. Setzt man in diese die Integralgrenzen ein, so erhält man

$$\int_0^{\tilde{t}} \cos(\omega t)\cdot e^{-t\cdot s}dt = \left[\frac{e^{-s\cdot t}}{s^2+\omega^2}\cdot\left(\omega\cdot\sin(\omega t)-s\cdot\cos(\omega t)\right)\right]_0^{\tilde{t}}$$ 3 P

$$=\left[\frac{e^{-s\cdot\tilde{t}}}{s^2+\omega^2}\cdot\left(\omega\cdot\sin\left(\omega\tilde{t}\right)-s\cdot\cos\left(\omega\tilde{t}\right)\right)\right]-\left[\frac{e^{-s\cdot 0}}{s^2+\omega^2}\cdot\left(\omega\cdot\sin(\omega\cdot 0)-s\cdot\cos(\omega\cdot 0)\right)\right]$$

$$=\frac{e^{-s\cdot\tilde{t}}}{s^2+\omega^2}\cdot\omega\cdot\sin\left(\omega\tilde{t}\right)-\frac{e^{-s\cdot\tilde{t}}}{s^2+\omega^2}\cdot s\cdot\cos\left(\omega\tilde{t}\right)+\frac{s}{s^2+\omega^2}$$

Setzt man das Ergebnis dieser Nebenrechnung in die Gleichung $(*)$ ein, so erhält man:

$$\mathcal{L}\left\{\cos\left(\omega\left(t+\tilde{t}\right)\right)\right\}=e^{\tilde{t}\cdot s}\cdot\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}-\frac{e^{-s\cdot\tilde{t}}}{s^2+\omega^2}\cdot\omega\cdot\sin\left(\omega\tilde{t}\right)+\frac{e^{-s\cdot\tilde{t}}}{s^2+\omega^2}\cdot s\cdot\cos\left(\omega\tilde{t}\right)-\frac{s}{s^2+\omega^2}\right)$$ 2 P

$$=-\frac{\omega\cdot\sin\left(\omega\tilde{t}\right)}{s^2+\omega^2}+\frac{s\cdot\cos\left(\omega\tilde{t}\right)}{s^2+\omega^2}=\frac{s\cdot\cos(\varphi_0)}{s^2+\omega^2}-\frac{\omega\cdot\sin(\varphi_0)}{s^2+\omega^2}$$

(f.) Bei der Funktion $f(t)=(t-7)^4$ liegt eine Verschiebung des Arguments um $7$ nach rechts vor, Wir benötigen also den Verschiebungssatz nach rechts. Er lautet

$f\left(t-\tilde{t}\right) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-s\cdot\tilde{t}}\cdot F(s)=\mathcal{L}\left\{f\left(t-\tilde{t}\right)\right\}$ $\left(\text{mit } \tilde{t}>0\right)$

Zur Bestimmung der Transformierten der unverschobenen Funktion $F(s)$ finden wir in Korrespondenztabellen den Zusammenhang $t^n \circ\!\!-\!\!\bullet\ n!\cdot\frac{1}{s^{n+1}}$ $\left(\text{in unserem Bsp. ist } n=4\right)$ 1 P

Speziell für $n=4$ transformiert sich $t^4 \circ\!\!-\!\!\bullet\ 4!\cdot\frac{1}{s^5}=\frac{24}{s^5}$

Darauf wenden wir mit $\tilde{t}=+7$ den besagten Verschiebungssatz nach rechts an und erhalten:

$(t-7)^4 \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-7s}\cdot\frac{24}{s^5}$ 1 P

Man beachte, dass die Funktion erst später als bei $t=0$ beginnt, nämlich bei $t=7$.

(g.) Hier ist die unverschobene Funktion gemeint, denn sie beginnt laut Aufgabenstellung bei $t=0$. Wir können also einfach ein Polynom transformieren:

$$f(t)=(t-7)^4=t^4-28\cdot t^3+294\cdot t^2-1372\cdot t+2401= \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{4!}{s^5}-\frac{28\cdot 3!}{s^4}+\frac{294\cdot 2!}{s^3}-\frac{1372\cdot}{s^2}+\frac{2401}{s}$$

Dabei wurde jeder einzelne Summand transformiert gemäß $t^n \circ\!\!-\!\!\bullet\ n!\cdot\frac{1}{s^{n+1}}$. 2 P

**Allgemeiner Hinweis:**

Wie man sieht, ist das Ergebnis ein völlig anderes als bei Aufgabenteil (f.). Es spielt also durchaus eine entscheidende Rolle, zu welchem Zeitpunkt $f(t)$ im Originalraum eingeschaltet wird.

**Stolperfalle:**

Man beachte die Transformation $2401 = \circ\!-\!\bullet\ 2401 \cdot \frac{1}{s}$ .

Eine Konstante aus dem Originalraum wird nicht als Konstante in den Bildraum transformiert, denn die Konstante im Originalraum ist als Heaviside'sche Sprungfunktion zu verstehen, die mit einer Konstanten multipliziert wurde.

Der Grund dafür, dass sich die $1$ gemäß $1\ \circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{s}$ transformiert, liegt darin, dass auch die Funktion $f(t)=1$ erst bei $t=0$ eingeschaltet wird und nicht schon früher. Wirklich vollständig geschrieben müsste diese Transformation eigentlich mit der Heaviside-Sprungfunktion $\varepsilon(t)$ geschrieben werden: $\varepsilon(t) = \circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{s}$ und entsprechend $2401 \cdot \varepsilon(t) = \circ\!-\!\bullet\ 2401 \cdot \frac{1}{s}$. Dass man trotzdem immer wieder (auch in Korrespondenztabellen) die bequemere Schreibweise ohne Heaviside-Funktion findet, liegt einfach an folgender Konvention: Sofern nicht explizit anders erwähnt, werden <u>alle</u> Funktionen genau bei $t=0$ eingeschaltet. Unter Beachtung dieser Konvention ist die einfache Schreibweise $1\ \circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{s}$ bzw. auch $2401 = \circ\!-\!\bullet\ 2401 \cdot \frac{1}{s}$ eine durchaus zulässige und übliche Abkürzung, also korrekt.

**Merkregel:**

Im Sinne der Laplace-Transformation ist die Heaviside-Funktion nichts anderes als eine bei $t=0$ eingeschaltete $1$.

(h.) Der Satz von der Ableitung im Bildbereich lautet $(-t)^n \cdot f(t)\ \circ\!-\!\bullet\ \frac{d^n}{ds^n} F(s)$

Mit $n=3$ (dritte Ableitung im Bildbereich) erhalten wir folgenden Lösungsweg:

Aus der Korrespondenztabelle entnehmen wir $f(t) = e^{at}\ \circ\!-\!\bullet\ \frac{1}{s-a} = F(s)$

Dies leiten wir dreimal im Bildbereich ab und erhalten $(-t)^3 \cdot e^{at}\ \circ\!-\!\bullet\ \frac{d^3}{ds^3} \frac{1}{s-a} = \frac{-6}{(s-a)^4}$

2 P Wegen der Linearitätseigenschaft der Laplace-Transformation können wir das Minuszeichen verarbeiten und gelangen zu dem Ergebnis des Aufgabenteils (h):

$$\frac{6}{(s-a)^4}\ \bullet\!-\!\circ\ t^3 \cdot e^{at}$$

## Aufgabe 13.4 Laplace-Rücktransformationen, Faltungsprodukt

| | | | Punkte | |
|---|---|---|---|---|
| | (a.) | 10 min | | (a.) 5 P |
| | (b.) | 10 min | | (b.) 5 P |
| | (c.) | 12 min | | (c.) 6 P |

Berechnen Sie mit Hilfe des Faltungsprodukts die Laplace-Rücktransformierten der folgenden Funktionen:

(a.) $F(s)=\frac{1}{s^4+a^2s^2}$ (b.) $F(s)=\frac{1}{s^2+2s-15}$ (c.) $F(s)=\frac{8}{s\cdot(s-2)^3}$

# Lösung zu 13.4

**Arbeitshinweis:**

Das Faltungsprodukt (mit dem Rechenzeichen „ $*$ “ ) lautet

$$f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-u)\cdot f_2(u)\,du \circ\!\!-\!\!\bullet\; F(s)=F_1(s)\cdot F_2(s) \quad ,$$

wobei die Indizes „1“ und „2“ willkürlich zugewiesen werden können.

Damit lösen wir die Aufgabe wie folgt:

(a.) Wir zerlegen $F(s)=\frac{1}{s^4+a^2s^2}=\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F_1(s)}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+a^2}}_{F_2(s)}$ und rücktransformieren stückweise gemäß

Korrespondenztabelle: $F_1(s)=\frac{1}{s^2}\bullet\!\!-\!\!\circ\; t=f_1(t)$ und $F_2(s)=\frac{1}{s^2+a^2}\bullet\!\!-\!\!\circ\;\frac{1}{a}\cdot\sin(at)=f_2(t)$

Das Faltungsprodukt wird dann zu $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t (t-u)\cdot\frac{1}{a}\cdot\sin(au)\,du \circ\!\!-\!\!\bullet\; F_1(s)\cdot F_2(s)$ 1+1 P

Dieses Integral müssen wir nun ausführen (wobei das in der nächsten Zeile als zweites genannte Integral partiell integriert wird):

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t t\cdot\frac{1}{a}\cdot\sin(au)\,du-\int_0^t u\cdot\frac{1}{a}\cdot\sin(au)\,du$$

$$=\left[-\frac{t}{a^2}\cdot\cos(au)\right]_0^t-\left[\frac{u}{a}\cdot\left(\frac{-1}{a}\cos(au)\right)\right]_0^t+\int_0^t\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{-1}{a}\cos(au)\right)du$$

$$=\left[-\frac{t}{a^2}\cdot\cos(au)\right]_0^t+\left[\frac{u}{a^2}\cdot\cos(au)\right]_0^t-\left[\frac{1}{a^3}\cdot\sin(au)\right]_0^t$$

$$=\left[-\frac{t}{a^2}\cdot\cos(at)+\frac{t}{a^2}\cdot 1\right]+\left[\frac{t}{a^2}\cdot\cos(at)-0\right]-\left[\frac{1}{a^3}\cdot\sin(at)+0\right]=\frac{t}{a^2}-\frac{1}{a^3}\cdot\sin(at)=f(t)\circ\!\!-\!\!\bullet\;\frac{1}{s^4+a^2s^2}$$ 3 P

(b.) Als Vorarbeit ist der Nenner in zwei Faktoren zu zerlegen. Dazu suchen wir die Nennernullstellen: $s^2+2s-15=0 \;\Rightarrow\; s_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+15}=-1\pm 4 \;\Rightarrow\; s^2+2s-15=(s-3)\cdot(s+5)$.

Die Aufgabenstellung lässt sich also formulieren als $F(s)=\frac{1}{s^2+2s-15}=\frac{1}{s-3}\cdot\frac{1}{s+5}\bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t)=?$.

Nach Korrespondenztabelle gilt $F_1(s)=\frac{1}{s-3}\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{3t}=f_1(t)$ und $F_2(s)=\frac{1}{s+5}\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-5t}=f_2(t)$. 3 P

Damit sind wir in der Lage, die Rücktransformation durch Faltung auszuführen:

2 P
$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t e^{3\cdot(t-u)} \cdot e^{-5u}\, du = \int_0^t e^{3t} \cdot e^{-3u} \cdot e^{-5u}\, du = e^{3t} \cdot \int_0^t e^{-8u}\, du = e^{3t} \cdot \left[ -\frac{1}{8} e^{-8u} \right]_0^t$$
$$= e^{3t} \cdot \left[ -\frac{1}{8} e^{-8t} + \frac{1}{8} e^{0} \right] = \frac{1}{8} e^{3t} - \frac{1}{8} e^{-5t}$$

(c.) In Korrespondenztabellen findet man $F_1(s) = \frac{1}{s}$ ●—○ $1 = f_1(t)$

und $\frac{1}{(s-a)^3}$ ●—○ $\frac{1}{2} t^2 \cdot e^{at}$ $\Rightarrow$ $F_2(s) = \frac{8}{(s-2)^3}$ ●—○ $4t^2 \cdot e^{2t} = f_2(t)$.

3 P Also gilt $F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{8}{(s-2)^3} = F(s)$.

1 P Damit falten wir $f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t 1 \cdot 4u^2 \cdot e^{2u} du$ ○—● $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$.

**Arbeitshinweis und Stolperfalle:**

Die Funktion $f_1(t) = 1$ ist eine besonders simple Funktion. Man kann jedes beliebige Argument einsetzen (z.B. auch $t-u$), der Funktionswert bleibt immer die $1$. Einerseits ist dies sehr bequem, denn man kann es ausnutzen, um das $t-u$ beim Faltungsprodukt besonders einfach zu „entsorgen". Andererseits muss man natürlich auch aufpassen, dass man als Funktionswert wirklich immer nur die $1$ bekommt, alles andere wäre falsch.

Durch zweimalige partielle Integration erhalten wir das Ergebnis:

2 P
$$f(t) = 4 \cdot \int_0^t u^2 \cdot e^{2u} du = 4 \cdot \left[ u^2 \cdot \frac{1}{2} e^{2u} \right]_0^t - 4 \cdot \int_0^t 2u \cdot \frac{1}{2} e^{2u} du = \left[ 2u^2 \cdot e^{2u} \right]_0^t - 4 \cdot \left( \left[ u \cdot \frac{1}{2} e^{2u} \right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{2} e^{2u} du \right)$$
$$= \left[ 2u^2 \cdot e^{2u} \right]_0^t - \left[ 2u \cdot e^{2u} \right]_0^t + 4 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2u} \right]_0^t = 2t^2 \cdot e^{2t} - 0 - 2t \cdot e^{2t} + 0 + e^{2t} - e^{0} = 2t^2 \cdot e^{2t} - 2t \cdot e^{2t} + e^{2t} - 1$$

Dies ist die gesuchte Laplace-Rücktransformierte.

## Aufgabe 13.5 Laplace- Rücktransformationen (allgemein)

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a.) | 6 min | Punkte: | (a.) 3 P |
| (b.) | 12 min | | (b.) 6 P |
| (c.) | 7 min | | (c.) 3 P |
| (d.) | 9 min | | (d.) 4 P |
| (e.) | 5 min | | (e.) 3 P |
| (f.) | 15 min | | (f.) 7 P |

Es folgen weitere Beispiele für Laplace-Rücktransformationen:

(a.) $F(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$ (b.) $F(s) = \frac{3s^2 + 5s + 2}{s^3 - 2s^2 + s}$ (c.) $F(s) = \frac{s-3}{s^2 + 3s - 10}$

(d.) $F(s)=\frac{5s+15}{s^3-s^2+4s-4}$ (e.) $F(s)=\frac{5}{s^3+9s}$ (f.) $F(s)=\frac{1}{s^4-a^4}$

Ähnlich wie bei Aufgabe 13.3 sind auch bei Aufgabe 13.5 den Musterlösungen wieder Hinweise vorgeschaltet. Ideal wäre es für die Leser dieses Buches, die Aufgaben ohne vorherige Kenntnis der Hinweise zu lösen. Wer das nicht schafft, kann die Hinweise betrachten, dann die Aufgaben lösen und danach zu den Musterlösungen weitergehen.

### Hinweise zu 13.5

Hinweis zu a.: Nach quadratischer Ergänzung des Nenners ist der Dämpfungssatz gefragt.

Hinweis zu b.: Die Rücktransformation erfolgt erst nach einer Partialbruchzerlegung

Hinweis zu c.: Noch ein einfaches Bsp. mit vorgeschalteter Partialbruchzerlegung

Hinweis zu d.: Partialbruchzerlegung mit einer reellen Nullstelle bei $s=1$
und zwei komplexen Nullstellen

Hinweis zu e.: Damit der Faltungssatz nicht in Vergessenheit gerät.

Hinweis zu f.: Partialbruchzerlegung, zwei reelle und zwei komplexe Nennernullstellen.

## Lösung zu 13.5

(a.) Der Nenner lässt sich mit quadratischer Ergänzung umformen: $s^2+2s+5=(s+1)^2+4$

Der Dämpfungssatz lautet $F(s+a)= \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{-at}\cdot\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ .

Des Weiteren findet man in Korrespondenztabelle die Transformation $\frac{1}{s^2+b^2}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{\sin(bt)}{b}$ .

Mit $a=1$ und $b=2$ nach passen diese Transformationen zu unserer Aufgabe. Die Rücktransformation lautet also: $F(s+1)=\frac{1}{(s+1)^2+4}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ e^{-1\cdot t}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}=e^{-t}\cdot\frac{\sin(2t)}{2}$ 3 P

(b.) Die Rechentechnik der Partialbruchzerlegung wurde in Kapitel 7 eingeübt und wird daher jetzt nicht nochmals in der Musterlösung vorgeführt. In unserem Bsp. lautet die Partialbruchzerlegung: $\frac{3s^2+5s+2}{s^3-2s^2+s}=\frac{2}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{10}{(s-1)^2}$ 4 P

Jeder einzelne Partialbruch wird nach Korrespondenztabelle rücktransformiert, wobei in der Musterlösung mit den Nummern 1, 2 und 3 markiert ist, welcher Partialbruch mit welcher Rücktransformation korrespondiert: 2 P

$$F(s)=\frac{3s^2+5s+2}{s^3-2s^2+s}=\underbrace{\frac{2}{s}}_{\text{Nr.1}}+\underbrace{\frac{1}{s-1}}_{\text{Nr.2}}+\underbrace{\frac{10}{(s-1)^2}}_{\text{Nr.3}}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \underbrace{2}_{\text{Nr.1}}+\underbrace{e^{+t}}_{\text{Nr.2}}+\underbrace{10\cdot t\cdot e^{+t}}_{\text{Nr.3}}=f(t)$$

(c.) Es gilt die Partialbruchzerlegung $\frac{s-3}{s^2+3s-10}=\frac{8/7}{s+5}-\frac{1/7}{s-2}$ 2 P

1 P Die Rücktransformation lautet also $F(s)=\frac{s-3}{s^2+3s-10}=\frac{8/7}{s+5}-\frac{1/7}{s-2}$ ●—o $\frac{8}{7}\cdot e^{-5t}-\frac{1}{7}\cdot e^{2t}=f(f)$

(d.) Der Hinweis, eine reelle Nullstelle läge bei $s=1$ hilft bei der Faktorisierung des Nenners vermittels Polynomdivision: $\left(s^3-s^2+4s-4\right):(s-1)=s^2+4$

3 P Damit wird die Partialbruchzerlegung zu $\frac{5s+15}{s^3-s^2+4s-4}=\underbrace{\frac{A}{s-1}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+4}}_{\text{reellwertiger Ansatz}}=\underbrace{\frac{4}{s-1}+\frac{1-4s}{s^2+4}}_{\text{Koeffizienten bestimmt}}$

Um kleine Stücke zu bekommen, die man in Korrespondenztabellen wiederfindet, zerteilen wir den zweiten Partialbruch und können nun rücktransformieren:

1 P $F(s)=\frac{5s+15}{s^3-s^2+4s-4}=\frac{4}{s-1}+\frac{1}{s^2+4}-\frac{4s}{s^2+4}$ ●—o $4\cdot e^t+\frac{1}{2}\sin(2t)-4\cdot\cos(2t)=f(t)$

1 P (e.) Wir zerlegen die Funktion im Bildraum in zwei Faktoren $F(s)=\frac{5}{s^3+9s}=\underbrace{\frac{5}{s}}_{=F_1}\cdot\underbrace{\frac{1}{s^2+9}}_{=F_2}$ ,

von denen sich jeder einzelne gemäß Korrespondenztabelle rücktransformieren lässt:

1 P $F_1(s)=\frac{5}{s}$ ●—o $5\cdot\varepsilon(t)=f_1(t)$ und $F_2(s)=\frac{1}{s^2+3^2}$ ●—o $\frac{1}{3}\cdot\sin(3t)=f_2(t)$

Diese beiden können wir falten und erhalten so die gesamte Rücktransformierte:

1 P $f(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t 5\cdot\frac{1}{3}\sin(3u)\,du=\frac{5}{3}\cdot\left[-\frac{1}{3}\cos(3u)\right]_0^t=-\frac{5}{9}\cdot\left(\cos(3t)-1\right)$

(f.) Wenn man die dritte binomische Formel sieht, kommt man rasch zur Zerlegung des Nenners und darauf basierend auf eine Partialbruchzerlegung des gesamten Bruches:

$$F(s)=\frac{1}{s^4-a^4}=\frac{1}{\left(s^2-a^2\right)\cdot\left(s^2+a^2\right)}=\frac{1}{(s-a)\cdot(s+a)\cdot\left(s^2+a^2\right)}=\frac{A}{s-a}+\frac{B}{s+a}+\frac{Cs+D}{s^2+a^2}$$

4 P Die Berechnung der Koeffizienten liefert $F(s)=\frac{1}{s^4-a^4}=\frac{1/4a^3}{s-a}-\frac{1/4a^3}{s+a}-\frac{1/2a^2}{s^2+a^2}$

Summandenweise Laplace-Rücktransformation gemäß Korrespondenztabelle führt zu

2 P $F(s)=\frac{1/4a^3}{s-a}-\frac{1/4a^3}{s+a}-\frac{1/2a^2}{s^2+a^2}$ ●—o $\frac{1}{4a^3}\cdot e^{at}-\frac{1}{4a^3}\cdot e^{-at}-\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{\sin(at)}{a}=\frac{1}{4a^3}\cdot\left(\underbrace{e^{at}-e^{-at}}_{=2\cdot\sinh(at)}-2\cdot\sin(at)\right)$

1 P Wir fassen das Ergebnis noch zusammen: $F(s)=\frac{1}{s^4-a^4}$ ●—o $\frac{1}{2a^3}\cdot\left(\sinh(at)-\sin(at)\right)=f(t)$

## Aufgabe 13.6 Lösen von Dgln. mittels Laplace-Transformation

| | | | Punkte: |
|---|---|---|---|
| (a.) | 4 min | | (a.) 2 P |
| (b.) | 8 min | | (b.) 4 P |
| (c.) | 6 min | | (c.) 3 P |
| (d.) | 8 min | | (d.) 4 P |
| (e.) | 23 min | | (e.) 12 P |
| (f.) | 12 min | | (f.) 6 P |
| (g.) | 15 min | | (g.) 7 P |

Eine der typischen Anwendungen der Laplace-Transformation (die im Berufsalltag des Ingenieurs immer wieder auftaucht und daher oft in Klausuren geprüft wird) ist das Lösen von Differentialgleichungen (Abkürzung: „Dgl.“). Das Lösungsverfahren von Differentialgleichungen mittels Laplace-Transformation setzt die Kenntnis der Anfangsbedingungen (Abkürzung: „AnfBed.“) voraus.

(a.) Dgl.: $y'+4y=0$ mit der AnfBed. $y(0)=1$

(b.) Dgl.: $y'-4y=2\cdot\sin(t)$ mit der AnfBed. $y(0)=0$

(c.) Dgl.: $y'-2y=e^{2t}$ mit der AnfBed. $y(0)=7$

(d.) Dgl.: $y''+2y'-8y=0$ mit den AnfBed. $y(0)=3$ und $y'(0)=0$

(e.) Dgl.: $y''+4y'+5y=e^{-5t}$ mit den AnfBed $y(0)=1$ und $y'(0)=-5$

(f.) Dgl.: $y''-6y'+9y=t\cdot e^{3t}$ mit den AnfBed $y(0)=1$ und $y'(0)=0$

(g.) Dgl.: $y'''-16y'=0$ mit den AnfBed $y(0)=3$ und $y'(0)=2$ und $y''(0)=48$

## Lösung zu 13.6

**Arbeitshinweis: Der Lösungsweg verläuft über drei Schritte:**

Schritt 1 → Transformation der Differentialgleichung in den Bildraum. Zur Transformation der Ableitungen verwendet man den Ableitungssatz, nach dem die Ableitungen im Originalraum zu einfachen Multiplikationen im Bildraum werden.

Schritt 2 → Lösen der transformierten Differentialgleichung im Bildraum.

Schritt 3 → Rücktransformation der Lösung in den Originalraum.

Für den Verlauf dieser Aufgabe wollen wir folgende Bezeichnungen wählen:

$y(t)$ = Funktion im Originalraum und $\mathcal{Y}(s)$ = Funktion im Bildraum

Der Satz von der Ableitung im Originalraum lautet

$y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s\cdot\mathcal{Y}(s)-y(0)$ für die erste Ableitung

$y^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^n\cdot\mathcal{Y}(s)-s^{n-1}\cdot y(0)-s^{n-2}\cdot y'(0)-\ldots-y^{(n-1)}(0)$ für die n-te Ableitung (a.) Schritt 1: Transformiert werden wegen der Linearitätseigenschaft der Laplace-Transformation alle Summanden einzeln: $\underbrace{y'}_{\circ\!-\!\bullet\, s\cdot\mathcal{Y}(s)-y(0)} + \underbrace{4y}_{\circ\!-\!\bullet\, 4\cdot\mathcal{Y}(s)} = 0 \quad \circ\!-\!\bullet \quad s\cdot\mathcal{Y}(s)-y(0)+4\cdot\mathcal{Y}(s)=0$

Schritt 2: Das Lösen im Bildraum ist eine einfache algebraische Aufgabe, bei der die Anfangsbedingungen einzusetzen sind:

$$s\cdot\mathcal{Y}(s)-y(0)+4\cdot\mathcal{Y}(s)=0 \;\Rightarrow\; \mathcal{Y}(s)\cdot(s+4)=y(0)=1 \;\Rightarrow\; \mathcal{Y}(s)=\frac{1}{s+4}$$

Schritt 3: Zur Rücktransformation wird eine Korrespondenztabelle zu Hilfe genommen:

2 P $\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{s+4} \;\bullet\!-\!\circ\; e^{-4t}=f(t)$ Dies ist die Lösung der in der Aufgabestellung genannten Dgl.

(b.) Schritt 1: Transformation in den Bildraum

$$\underbrace{y'}_{\circ\!-\!\bullet\, s\cdot\mathcal{Y}(s)-y(0)} - \underbrace{4y}_{\circ\!-\!\bullet\, 4\cdot\mathcal{Y}(s)} = \underbrace{2\cdot\sin(t)}_{\circ\!-\!\bullet\, \frac{2}{s^2+1}} \;\circ\!-\!\bullet\; s\cdot\mathcal{Y}(s)-\underbrace{y(0)}_{=0}-4\cdot\mathcal{Y}(s)=\frac{2}{s^2+1}$$

Schritt 2: Lösen im Bildraum $\Rightarrow\; (s-4)\cdot\mathcal{Y}(s)=\frac{2}{s^2+1} \;\Rightarrow\; \mathcal{Y}(s)=\frac{2}{s^2+1}\cdot\frac{1}{s-4}$

2 P Schritt 3: Die Rücktransformation erfolgt mit Faltung.

Die einzelnen Faktoren sind $\frac{1}{s-4} \;\bullet\!-\!\circ\; e^{4t}$ und $\frac{2}{s^2+1} \;\bullet\!-\!\circ\; 2\cdot\sin(t)$ . Damit folgt

2 P
$$y(t)=y_1(t)*y_2(t)=\int_0^t e^{4\cdot(t-u)}\cdot 2\cdot\sin(u)\,du = 2\cdot e^{4t}\cdot\int_0^t e^{-4u}\cdot\sin(u)\,du = 2\cdot e^{4t}\cdot\left[e^{-4u}\cdot\left(-\tfrac{1}{17}\cos(u)-\tfrac{4}{17}\sin(u)\right)\right]_0^t$$

$$\Rightarrow\; y(t)=2\cdot e^{4t}\cdot\left[e^{-4t}\cdot\left(-\tfrac{1}{17}\cos(t)-\tfrac{4}{17}\sin(t)\right)-e^{-4\cdot 0}\cdot\left(-\tfrac{1}{17}\cos(0)-\tfrac{4}{17}\sin(0)\right)\right]=-\tfrac{2}{17}\cos(t)-\tfrac{8}{17}\sin(t)+\tfrac{2}{17}e^{4t}$$

(c.) Schritt 1: Transformation in den Bildraum

1 P
$$\underbrace{y'}_{\circ\!-\!\bullet\, s\cdot\mathcal{Y}(s)-y(0)} - \underbrace{2y}_{\circ\!-\!\bullet\, 2\cdot\mathcal{Y}(s)} = \underbrace{e^{2t}}_{\circ\!-\!\bullet\, \frac{1}{s-2}} \;\circ\!-\!\bullet\; s\cdot\mathcal{Y}(s)-\underbrace{y(0)}_{=+7}-2\cdot\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{s-2}$$

1 P Schritt 2: Lösen im Bildraum $(s-2)\cdot\mathcal{Y}(s)-7=\frac{1}{s-2} \;\Rightarrow\; \mathcal{Y}(s)=\left(\frac{1}{s-2}+7\right)\cdot\frac{1}{s-2}=\frac{1}{(s-2)^2}+\frac{7}{s-2}$

Schritt 3: Rücktransformation mit Korrespondenztabelle

1 P $\mathcal{Y}(s)=\underbrace{\frac{1}{(s-2)^2}}_{\bullet\!-\!\circ\, t\cdot e^{2t}}+\underbrace{\frac{7}{s-2}}_{\bullet\!-\!\circ\, 7\cdot e^{2t}} \;\bullet\!-\!\circ\; (t+7)\cdot e^{2t}=y(t)$ als die gesuchte Lösung der Dgl.

(d.) Schritt 1: Transformation in den Bildraum

1 P
$$\underbrace{y''}_{\circ\!-\!\bullet\; s^2\cdot\mathcal{Y}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)} + \underbrace{2\cdot y'}_{\circ\!-\!\bullet\; 2s\cdot\mathcal{Y}(s)-2\cdot y(0)} - \underbrace{8y}_{\circ\!-\!\bullet\; 8\cdot\mathcal{Y}(s)} = \underbrace{0}_{\circ\!-\!\bullet\, 0} \;\circ\!-\!\bullet\; s^2\cdot\mathcal{Y}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)+2s\cdot\mathcal{Y}(s)-2\cdot y(0)-8\cdot\mathcal{Y}(s)=0$$

Schritt 2: Lösen im Bildraum

1 P
$$\mathcal{Y}(s)\cdot\left(s^2+2s-8\right)=(s+2)\cdot\underbrace{y(0)}_{=3}+\underbrace{y'(0)}_{=0}=3s+6 \;\Rightarrow\; \mathcal{Y}(s)=\frac{3s+6}{s^2+2s-8}$$

Schritt 3: Rücktransformation nach Partialbruchzerlegung.

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{3s+6}{s^2+2s-8}=\frac{A}{s+4}+\frac{B}{s-2}=\underbrace{\frac{1}{s+4}}_{\bullet\!-\!\circ\; e^{-4t}}+\underbrace{\frac{2}{s-2}}_{\bullet\!-\!\circ\; 2\cdot e^{2t}}\quad \bullet\!-\!\circ\quad e^{-4t}+2\cdot e^{2t}=y(t)$$ als Lösung der Dgl. 2 P

(e.) Schritt 1: Transformation in den Bildraum

$$\underbrace{y''}_{\circ\!-\!\bullet\; s^2\cdot\mathcal{Y}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)}+\underbrace{4\cdot y'}_{\circ\!-\!\bullet\; 4s\cdot\mathcal{Y}(s)-4\cdot y(0)}+\underbrace{5y}_{\circ\!-\!\bullet\; 5\cdot\mathcal{Y}(s)}=\underbrace{e^{-5t}}_{\circ\!-\!\bullet\; \frac{1}{s+5}}\circ\!-\!\bullet\; s^2\cdot\mathcal{Y}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)+4s\cdot\mathcal{Y}(s)-4\cdot y(0)+5\cdot\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{s+5}$$ 2 P

Schritt 2: Lösen im Bildraum

$$\mathcal{Y}(s)\cdot\left(s^2+4s+5\right)+\left(-s\cdot\underbrace{y(0)}_{=1}-\underbrace{y'(0)}_{=-5}-4\underbrace{y(0)}_{=1}\right)=\frac{1}{s+5}$$

2 P

$$\Rightarrow\quad \mathcal{Y}(s)\cdot\left(s^2+4s+5\right)=\frac{1}{s+5}+s-5+4=\frac{1}{s+5}+s-1=\frac{1+(s-1)\cdot(s+5)}{s+5}=\frac{s^2+4s-4}{s+5}$$

$$\Rightarrow\quad \mathcal{Y}(s)=\frac{s^2+4s-4}{(s+5)\cdot\left(s^2+4s+5\right)}$$

Schritt 3: Rücktransformation in den Originalraum

Wir wollen eine Partialbruchzerlegung ausführen, wobei der Nenner bereits in faktorisierter Form vorliegt. Deshalb lauten Ansatz und Zerlegung: 3 P

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{s^2+4s-4}{(s+5)\cdot\left(s^2+4s+5\right)}=\underbrace{\frac{A}{s+5}+\frac{B\cdot s+C}{s^2+4s+5}=\frac{\frac{1}{10}}{s+5}+\frac{9}{10}\cdot\frac{s-1}{s^2+4s+5}}_{\text{Die Bestimmung der Koeffizienten mögen die Leser selbst ausführen.}}$$

Zur Vorbereitung auf die Rücktransformation berechnen wir die quadratische Ergänzung für den Nenner des zuletzt genannten Bruches: $s^2+4s+5=\left(s^2+4s+4\right)+1=(s+2)^2+1$ 1 P

Damit bringen wir die Lösung im Bildraum in eine Form, die sich rücktransformieren lässt:

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s+5}+\frac{9}{10}\cdot\frac{s-1}{(s+2)^2+1}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s+5}+\frac{9}{10}\cdot\frac{(s+2)-3}{(s+2)^2+1}$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\underbrace{\frac{1}{s+5}}_{\bullet\!-\!\circ\; e^{-5t}}+\frac{9}{10}\cdot\underbrace{\underbrace{\frac{(s+2)}{(s+2)^2+1}}_{\bullet\!-\!\circ\; e^{-2t}\cdot\cos(t)}}_{(*1)}+\frac{9}{10}\cdot\underbrace{\underbrace{\frac{-3}{(s+2)^2+1}}_{\bullet\!-\!\circ\; -3\cdot e^{-2t}\cdot\sin(t)}}_{(*2)}\quad\bullet\!-\!\circ\;\underbrace{\frac{1}{10}\cdot e^{-5t}+\frac{9}{10}\cdot e^{-2t}\cdot\cos(t)-\frac{27}{10}\cdot e^{-2t}\cdot\sin(t)}_{=y(t)}$$

als die gesuchte Lösung im Originalraum

Erläuterung zu $(*1)$ und $(*2)$: In beiden Ausdrücken gelangt der Verschiebungssatz nach rechts zur Anwendung, und zwar um eine Verschiebung von $2$. Bei $(*1)$ wird dieser Verschiebungssatz angewandt auf $\frac{s}{s^2+a^2}\circ\!-\!\bullet\cos(at)$ mit $a=1$; bei $(*2)$ wird der Verschiebungssatz angewandt auf $\frac{a}{s^2+a^2}\bullet\!-\!\circ\sin(at)$ ebenfalls mit $a=1$. 4 P (f.) Schritt 1: Transformation in den Bildraum

2 P $$\underbrace{y''}_{\substack{\circ\!-\!\bullet \\ s^2\cdot\mathcal{Y}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)}} - \underbrace{6\cdot y'}_{\substack{\circ\!-\!\bullet \\ 6s\cdot\mathcal{Y}(s)-6\cdot y(0)}} + \underbrace{9y}_{\substack{\circ\!-\!\bullet \\ 9\cdot\mathcal{Y}(s)}} = \underbrace{t\cdot e^{3t}}_{\substack{\circ\!-\!\bullet \\ \frac{1}{(s-3)^2}}} \circ\!-\!\bullet\, s^2\cdot\mathcal{Y}(s)-s\cdot y(0)-y'(0)-6s\cdot\mathcal{Y}(s)+6\cdot y(0)+9\cdot\mathcal{Y}(s)=\frac{1}{(s-3)^2}$$

Schritt 2: Lösen im Bildraum

2 P $$\mathcal{Y}(s)\cdot\left(s^2-6s+9\right)=(-s+6)\cdot\underbrace{y(0)}_{=1}+\underbrace{y'(0)}_{=0}+\frac{1}{(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ \mathcal{Y}(s)=\frac{s-6}{s^2-6s+9}+\frac{1}{\left(s^2-6s+9\right)\cdot(s-3)^2}=\underbrace{\frac{s-6}{(s-3)^2}}_{(*1)}+\underbrace{\frac{1}{(s-3)^4}}_{(*2)}$$ , weil $\left(s^2-6s+9\right)=(s-3)^2$ ist.

Schritt 3: Rücktransformation in den Originalraum: Für diesen Schritt zerlegen wir $(*1)$ mit Partialbruchzerlegung, $(*2)$ hingegen kann so rücktransformiert, wie er ist.

$$\mathcal{Y}(s)=\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-3)^4}=\frac{A}{(s-3)}+\frac{B}{(s-3)^2}+\frac{1}{(s-3)^4}=\frac{1}{\underbrace{s-3}_{\substack{\bullet\!-\!\circ \\ e^{3t}}}}-\frac{3}{\underbrace{(s-3)^2}_{\substack{\bullet\!-\!\circ \\ -3t\cdot e^{3t}}}}+\frac{1}{\underbrace{(s-3)^4}_{\substack{\bullet\!-\!\circ \\ \frac{1}{6}t^3\cdot e^{3t}}}}$$

2 P Damit lautet die Lösung der Dgl. $y(t)=e^{3t}-3t\cdot e^{3t}+\frac{1}{6}t^3\cdot e^{3t}$ .

(g.) Schritt 1: Transformation in den Bildraum

2 P $$\underbrace{y'''}_{\substack{\circ\!-\!\bullet \\ s^3\cdot\mathcal{Y}(s)-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)}} - \underbrace{16\cdot y'}_{\substack{\circ\!-\!\bullet \\ 16s\cdot\mathcal{Y}(s)-16\cdot y(0)}} =0\ \circ\!-\!\bullet\ s^3\cdot\mathcal{Y}(s)-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)-16s\cdot\mathcal{Y}(s)+16\cdot y(0)=0$$

Schritt 2: Lösen im Bildraum

$$\mathcal{Y}(s)\cdot\left(s^3-16s\right)=s^2\cdot y(0)+s\cdot y'(0)+y''(0)-16\cdot y(0)=\left(s^2-16\right)\cdot\underbrace{y(0)}_{=3}+s\cdot\underbrace{y'(0)}_{=2}+\underbrace{y''(0)}_{=48}=3s^2+2s$$

2 P $$\Rightarrow\ \mathcal{Y}(s)=\frac{3s^2+2s}{s^3-16s}=\frac{3s+2}{s^2-16}$$ für die Lösung im Bildraum

Schritt 3: Rücktransformation in den Originalraum

Eine Möglichkeit der Rücktransformation wäre die Partialbruchzerlegung. Wesentlich bequemer und eleganter gelingt es, wenn man in einer Korrespondenztabelle folgende Beziehungen findet: $\frac{1}{s^2-a^2}\ \bullet\!-\!\circ\ \frac{1}{a}\cdot\sinh(at)$ und $\frac{s}{s^2-a^2}\ \bullet\!-\!\circ\ \cosh(at)$.

Dann schreibt man nämlich mit $a=4$:

2 P $$\mathcal{Y}(s)=\frac{3s+2}{s^2-16}=3\cdot\frac{s}{s^2-4^2}+2\cdot\frac{1}{s^2-4^2}\ \bullet\!-\!\circ\ 3\cdot\cosh(4t)+2\cdot\frac{1}{4}\cdot\sinh(4t)=f(t)$$

Damit ist die Lösung des Aufgabenteils (g.) eigentlich erledigt. Alle diejenigen, die mit Partialbruchzerlegung gearbeitet haben, erhalten als Ergebnis keine Hyperbelfunktionen sondern Exponentialfunktionen. Die Kompatibilität der beiden Ergebnisse demonstriert die einfache Umrechnung:

1 P $$f(t)=3\cdot\cosh(4t)+\frac{1}{2}\cdot\sinh(4t)=\frac{3}{2}\cdot\left(e^{4t}+e^{-4t}\right)+\frac{1}{4}\cdot\left(e^{4t}-e^{-4t}\right)=\frac{7}{4}\cdot e^{4t}+\frac{5}{4}\cdot e^{-4t}$$

# 14 Musterklausuren (verschiedener Hochschulen)

## Vorbemerkung

Die Besonderheit der Übungsaufgaben in Kapitel 14 ist: Es handelt sich um echte Klausuren verschiedener Hochschulen, so wie sie dort stattgefunden haben. Jede einzelne Klausur bildet einen Querschnitt über verschiedene Themen der jeweiligen Semester-Vorlesung. Für den Stil der Aufgabenstellungen zeichnet der Autor dieses Buches nicht verantwortlich. Für Studierende sollte es aber interessant sein zu sehen, was „andernorts" verlangt wird.

## Aufgabenstellungen und Musterlösungen

Anders als in den vorhergehenden Kapiteln werden in Kapitel 14 zuerst alle Aufgabenstellungen im Zusammenhang gezeigt und danach alle Musterlösungen. Dies hat den Sinn, dass man beim Umblättern nicht unerwünscht in die Nähe der Lösungen gerät. Im Übrigen sind die Kommentare außerordentlich knapp gehalten – entsprechend der Arbeitsweise bei echten Klausuren unter Zeitdruck:

### Klausur 14.1: Analysis 1 (1.Semester)

| 90 Minuten | Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte: | 4 | 3 | 4 | 4 | 5 | 4 |

Zum Bestehen sind 8 Punkte erforderlich. Hilfsmittel: nicht grafikfähiger Taschenrechner
Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht anerkannt.

**Aufgabe 1:** Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen. Bezeichnen Sie insbesondere die Koordinaten der markanten Punkte der Kurve (z.B. Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen oder Scheitel).

(a.) $y=\tan(x)$ (b.) $y=1+\cos(x)$ (c.) $y=-e^{-x}$ (d.) $y=(x-2)^2-4$

**Aufgabe 2:** Radioaktive Substanzen zerfallen mit der Zeit $t$ gemäß $N(t)=N_0\cdot e^{-\lambda t}$

Dabei ist $N(t)$ die Anzahl der verbliebenen radioaktiven Atome, $N_0=N(0)$ die Anzahl der radioaktiven Atome zum Zeitpunkt $t_0=0$ und $\lambda$ eine vom Material abhängige Konstante.

Das für Altersbestimmungen wichtige Isotop $C^{14}$ hat eine Halbwertszeit von 5 730 Jahren, d.h. nach dieser Zeit ist die Hälfte der radioaktiven Isotope zerfallen. Nach wie vielen Jahren sind 90% der Isotope zerfallen?

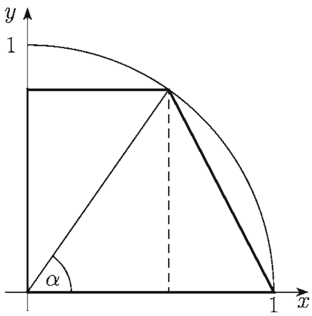
**Aufgabe 3:** Bestimmen Sie die Konstanten $a$, $b$ so, dass die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+a & \text{für} \quad x<0\\ -3 & \text{für} \quad x=0\\ b\cdot\sin(x)-3 & \text{für} \quad x>0\end{cases}$$

an der Stelle $x_0=0$ stetig und differenzierbar ist. Wie groß ist dann der Wert der Ableitung an dieser Stelle $x_0=0$ ?

**Aufgabe 4:** Zeigen Sie, dass sich die beiden Funktionen $f(x) = a \cdot e^{\frac{x-1}{a}}$ und $g(x) = x \cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right) + a$ an der Stelle $x_0 = 1$ schneiden. Wie lauten die Koordinaten des Schnittpunkts? Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

**Aufgabe 5:** Dem Vierteleinheitskreis wird in der skizzierten Weise ein Viereck einbeschrieben. Mit $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ wird der Winkel zwischen der $x$ – Achse und der Ecke mit positiver $x$ – und $y$ – Koordinate bezeichnet.




(a.) Zeigen Sie, dass sich der Flächeninhalt des Vierecks über die Formel $A(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha)\sin\alpha$ berechnen lässt.

(b.) Für welches $\alpha$ nimmt der Flächeninhalt des Vierecks ein lokales Extremum an? Um welche Art eines Extremums handelt es sich und wie groß ist der gefundene extremale Flächeninhalt?

(c.) Ist das in Aufgabenteil (b.) gefundene lokale Extremum ein absolutes Extremum? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 6:** Gesucht ist der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + x^2}{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-3x}}$

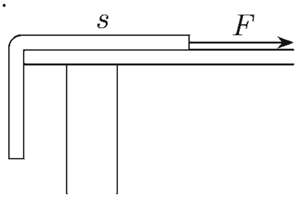
(a.) Zeigen Sie, dass die Regel von Bernoulli-de l'Hospital zur Berechnung dieses Grenzwertes angewendet werden darf, und berechnen Sie den Grenzwert mit dieser Regel.
(b.) Berechnen Sie den obigen Grenzwert mit elementaren Methoden, also ohne Verwendung der Regel von Bernoulli–de l'Hospital.

## Klausur 14.2: Analysis 2 (2. Semester)

| 120 Minuten | Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte: | 4 | 4 | 5 | 3 | 4 | 4 |

Zum Bestehen sind 8 Punkte erforderlich.
Hilfsmittel: Literatur, Vorlesungsmitschrift, Taschenrechner und Computeralgebrasystem
Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht anerkannt.

**Aufgabe 1:** Ein Seil mit einer Gesamtlänge $L = 0.80\,m$ und dem Gewicht $F_G = 20\,N$ hängt anfangs vollständig über der Tischkante und wird dann ganz auf den Tisch gezogen (vgl. Skizze). Wie groß ist die benötigte physikalische Arbeit $W = \int_0^L F\,ds$ ?




Hinweis: Die Reibung bei diesem Vorgang darf vernachlässigt werden.

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie eine Potenzreihendarstellung der nicht elementar darstellbaren Funktion $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+2t)}{t}\,dt$

Wie lautet die Darstellung mit dem Summenzeichen? Wie groß ist der Konvergenzradius $r$ der entstehenden Potenzreihe?

**Aufgabe 3:** Durch die periodische Fortsetzung der Funktion

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \le x < \pi \\ 1 & \text{für } \pi \le x < 2\pi \end{cases}$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Funktion gegeben.

(a.) Skizzieren Sie den Graphen dieser so definierten Funktion.
(b.) Zeigen Sie, dass sich die Koeffizienten $c_k$ in der komplexen Darstellung der Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ berechnen als $c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade und } k \neq 0 \\ \frac{i}{k\pi} & \text{für } k = \text{ungerade} \end{cases}$

(c.) Berechnen Sie aus dem Ergebnis von Aufgabenteil (b.) die Koeffizienten $a_k, b_k$ der reellen Fourier-Reihendarstellung $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$.

**Aufgabe 4:** Gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welche die partiellen Ableitungen

$$f_x(x,y) = x^2 + 4y$$
$$f_y(x,y) = 3x^2 - y^3$$

besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f(x,y) = e^{12y - x^2 - y^3}$ und geben Sie jeweils die Art und den Wert des Extremums an. Sind die gefundenen lokalen Extrema global? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 6:** Der Durchhang einer Kette ist in einem geeigneten Koordinatensystem durch die Gleichung $y = a \cdot \cosh \frac{x}{a}$; $a > 0$ gegeben.

(a.) Geben Sie eine Parameterdarstellung $\vec{x}(t)$ dieser Kurve an.

(b.) Zeigen Sie: Die ab $x_0 = 0$ gemessene Bogelänge $s$ berechnet sich als $s = a \cdot \sinh \frac{x}{a}$.

(c.) Zeigen Sie: Der Krümmungsradius $r = \frac{1}{\kappa}$ berechnet sich als $r = a \cdot \cosh^2 \frac{x}{a}$.

# Klausur 14.3: Erstes Semester (Grundlagen und Differentialrechnung)

| 120 Minuten | Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte | 20 | 6 | 21 | 24 | 10 | 14 | 8 | 69 | 15 | 22 | 14 | 35 |

Zum Bestehen sind 129 Punkte erforderlich. Hilfsmittel: Ausgegebene Formelsammlung (kein Taschenrechner)
Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht anerkannt.

**Aufgabe 1:** In der Vorlesung haben Sie die Implikation (Symbol „$\Rightarrow$") als logische Verknüpfung zweier Aussagen (z.B. „$x$" und „$y$") mit der nebenstehenden Wahrheitstafel kennen gelernt. Stellen Sie nun die Wahrheitstafel für die sog. Kettenfolgerung „$z$" als Funktion der logischen Aussagen „$a$", „$b$", und „$c$" auf, die beschrieben wird durch die Verknüpfung $z := \left[(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)\right]$.

| **x** | **y** | $x \Rightarrow y$ |
|---|---|---|
| **W** | **W** | **W** |
| **W** | **F** | **F** |
| **F** | **W** | **W** |
| **F** | **F** | **W** |

**Aufgabe 2:** Wie lauten die Namen der Mengen (a.) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ und (b.) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ?

**Aufgabe 3:** Wandeln Sie die Dezimalzahl $31472_{Dez.}$ ins Dualsystem und ins Hexadezimalsystem um.

**Aufgabe 4:** Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{x^2+3} > \frac{1}{4x}$

**Aufgabe 5:** Gegeben sei eine Folge durch die Rekursionsformel $a_0 = 2$ und $a_i = \sqrt{2^{a_{i-1}}}$ .

Berechnen Sie die Summe $\sum_{i=0}^{100} a_i$ .

**Aufgabe 6:** Sind die drei folgenden Vektoren linear abhängig: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ ?

**Aufgabe 7:** Wandeln Sie die implizit gegebene Funktion $x^3 - ax^2 + xy^2 + ay^2 = 0$ in die explizite Form um.

**Aufgabe 8:** Kurvendiskussion der Funktion: $f(x) = x^2 + e^{\left(1-x^2\right)}$

Diskutieren Sie folgende Eigenschaften:

(a.) Definitionsmenge, Polstellen (b.) Maxima und Minima
(c.) Ungefähre Handskizze (unter Berücksichtigung der obigen Punkte)
(d.) Beschränktheit (kleinste obere Schranke ? / größte untere Schranke ?)
(e.) Symmetrieeigenschaften (gerade / ungerade ?)

Hinweis: Das Lösen der Aufgabe ist am einfachsten, wenn Sie in der obigen Reihenfolge (a…e) bearbeitet wird.

**Aufgabe 9:** Berechnen Sie das asymptotische Verhalten für $x \to \pm\infty$ zur Funktion

$$f(x) = \frac{x^7 + 3x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 2}{2x^5 - x^4 + x^3 + x}.$$

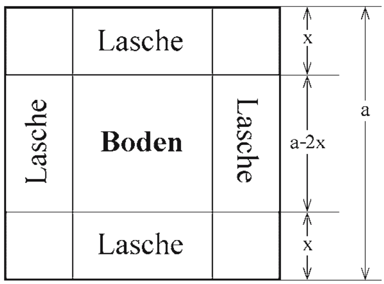
**Aufgabe 10:** Leiten Sie die nachfolgend genannten Funktionen nach $x$ ab:

(a.) $f(x) = \ln(\tan(x))$ (b.) $f(x) = \cosh(x^2)$

(c.) $f(x) = \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}$ (d.) $f(x) = \ln(x) \cdot e^x$.

**Aufgabe 11:** Eine Gerade laufe durch die Punkte $P_1 = (1;2)$ und $P_2 = (3;5)$. Geben Sie die Geradengleichung in der Form $y = f(x)$ an.

**Aufgabe 12:** Zur Herstellung eines Kartons sollen an den Ecken einer quadratischen Pappe mit der Seitenlänge „$a$" vier Quadrate herausgeschnitten werden (Schraffur, Seitenlänge der Ausschnitte = „$x$") Die verbleibenden vier Laschen werden hochgehoben und bilden die Seitenwände des Kartons.




(a.) Wie groß müssen die Einschnitte „$x$" gemacht werden, damit der Rauminhalt des Kartons möglichst groß wird?

(b.) Wie groß wird dabei das maximal mögliche Kartonvolumen?

## Klausur 14.4: Zweites Semester (verschiedene Themen)

| 90 Minuten | Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte: | 35 | 6 | 8 | 11 | 24 | 20 | 16 | 15 | 15 | 16 |

Zum Bestehen sind 83 Punkte erforderlich. Hilfsmittel: nicht grafikfähiger Taschenrechner
Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht anerkannt.

**Aufgabe 1**: Berechnen Sie bitte die nachfolgenden unbestimmten Integrale:

(a.) $\int x \cdot e^x dx$ (b.) $\int \sin(x) \cdot e^x dx$ (c.) $\int \frac{x^2 - 5x + 2}{x^2 - 8x + 7} dx$ (d.) $\int \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) \cdot \sin\left(x^3 + x\right) dx$

**Aufgabe 2**: Berechnen Sie bitte das bestimmten Integral $\int\limits_{-2}^{+3} \int\limits_{0}^{x} x \cdot y \, dy \, dx$

**Aufgabe 3:** Berechnen Sie bitte die Bogenlänge der Kardioiden für einen ganzen Umlauf $0 \le \phi \le 2\pi$. Hinweis: Die Funktion der Kardioiden lautet in Polarkoordinaten $r(\phi) = 1 + \cos(\phi)$.

**Aufgabe 4:** Berechnen Sie bitte das uneigentliche Integral $\int_0^1 \ln x \, dx$ .

**Aufgabe 5:** Gegeben sind zwei Vektorfelder, eines ist ein Potentialfeld, das andere nicht.

$$\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} \cos(x) + yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy^2 z \\ y^2 z \end{pmatrix}$$

(a.) Prüfen Sie beide Felder um zu beurteilen, welches das Potentialfeld ist.
(b.) Bestimmen Sie zum Potentialfeld des Potential.
(c.) Berechnen Sie die Divergenz: $div\left(\overrightarrow{F_2}\right)$.

**Aufgabe 6:** In einer Lieferung von 20 Netzteilen sind zwei Schlechtteile enthalten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie beim Einbau von drei Netzteilen in einem Gerät nur gute Netzteile einbauen?

Geben Sie Ihre Antwort als Prozentsatz ohne Nachkommastellen an. (Es sei vorausgesetzt, dass Sie die Netzteile willkürlich aus der Lieferung entnehmen.)

**Aufgabe 7:** Bei einer Stichprobenprüfung von Spannungsquellen erhalten Sie die folgenden 10 Messwerte:

| Gerät-Nummer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Spannung | 31 V | 34 V | 29 V | 26 V | 30 V | 32 V | 25 V | 29 V | 34 V | 30 V |

Beantworten Sie die folgenden Fragen unter der Annahme, dass die Messwerte einer Gauß-Verteilung folgen.

(a.) Mit welchem Mittelwert als Spannungsangabe würden Sie die Geräte verkaufen?

(b.) Berechnen Sie das $2\sigma$ – Konfidenzintervall der Streuung der Einzelwerte der Stichprobe in Bezug auf deren Mittelwert.

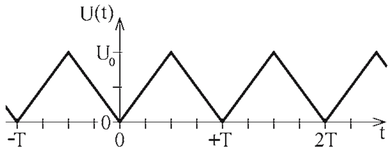
(c.) Geben Sie das Intervall an, innerhalb dessen der Mittelwert der gesamten Produktion (aller Geräte) mit 99.7% Wahrscheinlichkeit liegen sollte.

(Die Ergebnisse dürfen Wurzeln enthalten.)

**Aufgabe 8:** Durch den ohm'schen Widerstand $R \pm \Delta R$ fließe in der Zeit $t = (12.0 \pm 1.0)\text{sec.}$ die Ladung von $Q = (0.2 \pm 0.01)C$. Über dem Widerstand messen Sie dabei die Spannung $U = (5.0 \pm 0.2)V$. Dem Vorgang liegt das physikalische Gesetz $U = R \cdot I = R \cdot \frac{Q}{T}$ zugrunde.

Berechnen Sie die Werte für $R$ und $\Delta R$. Berücksichtigen Sie dabei die Einheiten. (Bei der Angabe des Ergebnisses genügt die Rundung auf ganze Zahlen.)

**Aufgabe 9:** Sie sehen auf dem Oszilloskop den nebenstehenden periodischen Spannungsverlauf. Bitte berechnen Sie den Effektivwert der Spannung $U_{eff} = ?$




**Aufgabe 10:** Gegeben sei eine Funktion $z: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $z(x;y) := \sin(x) + \cos(y)$

Frage: Liegt im Punkt $P_0 = \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ ein Minimum, ein Maximum, ein Sattelpunkt oder keines von alledem vor? Geben Sie Ihre Antwort mit Begründung.

## Klausur 14.5: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)

| 120 Minuten | Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte: | 37 | 16 | 24 | 17 | 36 | 9 | 13 | 19 | 12 | 17 |

Zum Bestehen sind 100 Punkte erforderlich. Hilfsmittel: Ausgegebene Formelsammlung
Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht anerkannt. (kein Taschenrechner)

**Aufgabe 1:** Führen Sie die nachfolgend genannten komplexzahligen Berechnungen durch. Geben Sie in allen Fällen die Ergebnisse in der algebraischen Darstellungsform an. (Es ist $i = \sqrt{-1}$):

(a.) $\frac{3+7i}{2+5i} = ?$ (b.) $\left(3 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{6}}\right) = ?$ (c.) $\sin\left(i \cdot \frac{\pi}{2}\right) = ?$

(d.) $\sqrt{-i} = ?$ (Hauptwert und Nebenwert angeben.)

(e.) $\ln(1) = ?$ (Hauptwert und alle Nebenwerte angeben.)

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = ?$ .

**Aufgabe 3:**

(a.) Geben Sie für die Funktion $y = \sqrt{x}$ eine Näherung an, die Sie als nach dem dritten Glied abgebrochene Taylorreihe berechnen, und zwar mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

(b.) Berechnen Sie nach dieser Näherungsformel numerisch den ungefähren Wert für $\sqrt{2}$ .

**Aufgabe 4:** Nachfolgend sind einige Grenzwerte zu berechnen, die Sie zum Teil direkt ausrechnen können, zum Teil auch mit der Regel von L'Hospital. Führen Sie in allen Fällen die richtige Berechnung durch:

(a.) $\lim\limits_{x\to\infty} x^k \cdot e^{-x}$ ( $k \in \mathbb{N};\ k = \text{const.}$ ) (b.) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+7}{x-3}$ (c.) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{4\cdot\sin(x)}$

**Aufgabe 5:** Berechnen Sie die nachfolgend gefragte Laplace-Transformierte und die Laplace-Rücktransformierten. (Die Transformationsvariable ist mit „ $p$ “ bezeichnet.)

(a.) $? \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{p+1}{p^2}$ (b.) $\omega_0^2 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ ?$ (c.) $? \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{p^2} \cdot \frac{p}{p^2+1}$

**Aufgabe 6:** Lösen Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Differentialgleichung $y'+7y=0$ mit der Anfangsbedingung $y(0)=3$.

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie ohne Kenntnis der Randbedingung die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $3y\cdot y'-6x^2=0$ .

**Aufgabe 8:**

(a.) Geben Sie für die nachfolgende homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung die Lösung an. (Hinweis: Verwenden Sie Lösungsansätze aus der Formelsammlung.)

(b.) Verifizieren Sei die gefundene Lösung durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

Die zu lösende Differentialgleichung lautet $y''-4y'-3y=0$

**Aufgabe 9:** Führen Sie die Matrixmultiplikation aus: $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=?$

**Aufgabe 10:** Betrachten Sie die Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\5&7&9\end{pmatrix}$

(a) Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix.

(b) Bestimmen Sie den Rang dieser Matrix.

## Klausur 14.6: Drittes Semester (anwendungsnahe Themen)

| 90 Minuten | Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Punkte: | 22 | 9 | 16 | 17 | 22 | 30 | 20 |

Zum Bestehen sind 68 Punkte erforderlich.
Hilfsmittel: Ausgegebene Formelsammlung und ausgegebener Taschenrechner
Ergebnisse ohne Lösungsweg werden nicht anerkannt.

**Aufgabe 1:**

Prüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

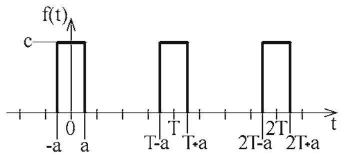
(a.) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n}{n^2+1}$ (b.) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ (c.) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

**Aufgabe 2:** Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$ .

**Aufgabe 3:** Entwickeln Sie $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ in eine Mac Laurin-Reihe.

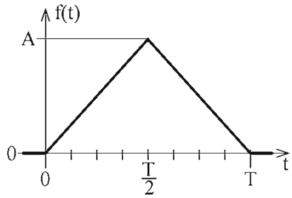
**Aufgabe 4:**

Entwickeln Sie die nebenstehende Funktion (sie sei periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ ) in eine Fourier-Reihe. (Das Ausrechnen der Fourier-Koeffizienten $a_0$ , $a_n$ , $b_n$ genügt.)




**Aufgabe 5:**

Bestimmen Sie zu der nebenstehend abgebildeten Funktion die Fourier-Transformierte.




**Aufgabe 6:** Berechnen Sie die nachfolgenden Laplace-Hin- bzw. Rück-Transformierten. (Die Transformationsvariable ist mit $p$ bezeichnet.)

(a.) $t^2$ o—● ? unter Verwendung der Integration im Originalraum,
ausgehend von der Transformation $t$ o—● $\frac{1}{p^2}$

(b.) ? o—● $\frac{5p-4}{p^2+3p-10}$ mit Hilfe einer Korrespondenztabelle

(c.) ? o—● $\frac{1}{p^2+2p-8}$ mit Hilfe einer Korrespondenztabelle.

**Aufgabe 7:**

Lösen Sie die Differentialgleichung $y'+2y=2t+4$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.
Als Anfangsbedingung sei gegeben: $y(t=0)=1$.

Kontrollieren Sie das Ergebnis zur Probe durch Einsetzen in die Differentialgleichung.

## Klausur 14.7: Erstes Semester (Master / Bachelor-Programm)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Aufgabe: | 1 a | 1 b | 2 | 3 a | 3b |
| Punkte: | 6 | 2 | 8 | 4 | 4 |

Zum Bestehen sind 10 Punkte erforderlich.

**Aufgabe 1:** (a.) Gegeben ist ein Tetraeder mit den Ecken

$$A=(3,1,-1)\ ,\quad B=(1,0,1)\ ,\quad C=(-5,3,1)\ ,\quad D=(-4,1,2)$$

(i) Man bestimme die Länge $h$ der Höhe des Tetraeders durch $D$.
(ii.) Man bestimme das Volumen des Tetraeders.
(iii.) Man bestimme den Winkel zwischen den durch die Punkte $A,B,C$ und $A,B,D$ aufgespannten Ebenen.
(b.) Man zeige die Gültigkeit der folgenden Beziehung für beliebige Vektoren $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ des $\mathbb{R}^3$:
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left((\vec{a}+\vec{c})\times\vec{b}\right)=-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\vec{c}$ Es darf keine Komponentenschreibweise verwendet werden.

**Aufgabe 2:** Mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus bestimme man, für welche reellen Werte $\alpha$ und $\beta$ das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & \alpha x_4 & = & \beta \end{array}$$

(i) eine eindeutige Lösung (man berechne diese),
(ii) mehrere Lösungen (man gebe die allgemeine Lösung an),
(iii) keine Lösung besitzt.

**Aufgabe 3:** (a.) (i.) Mittels Polynomdivision und anschließender Partialbruchzerlegung berechne man $\int \frac{x^3-x^2-3x+12}{x^2+x-6}\,dx$.

(ii.) Man führe im folgenden Integral die Substitution $t:=e^x$ durch:

$\int \frac{2\cdot e^{2x}-3e^x-2}{e^{2x}-e^x-2}\,dx$ Das Integral ist nicht weiter auszuwerten.

(b.) Man berechne das Volumen und die Oberfläche des Körpers, der entsteht, wenn die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x)=\sin(x)$ und $g(x)=\frac{2x}{\pi}$ im Intervall $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ um die $x$–Achse rotiert.

## Klausur 14.8: Zweites Semester (Master / Bachelor-Programm)

| Aufgabe: | 1 a | 1 b | 2 a | 2 b | 3 a | 3 b | 3 c |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte: | 3 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |

Zum Bestehen sind 10 Punkte erforderlich.

**Aufgabe 1:** Man löse die folgenden Anfangswertprobleme

(a.) $y' = 1 + x + y^2 + xy^2 \quad , \quad y(2) = 1$

(b.) $y' = \frac{\cos(\ln(x))}{x} \cdot e^y \quad , \quad y\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = -\ln 2$

Hier ist das in der Variablen $x$ auftretende Integral mittels der Substitutionsregel ( $\ln x = t$ ) zu bestimmen.

**Aufgabe 2:**

(a.) Man berechne die Länge $L(a)$ der Kurve $\vec{r}(t) = \left(e^{-2t} \cdot \cos(t); e^{-2t} \cdot \sin(t)\right)$ , $0 \le t \le a$

Was ergibt sich für $\lim\limits_{a \to \infty} L(a)$ ?

(b.) Gegeben ist die Polarkoordinatendarstellung $\rho(\varphi) = \sin 3\varphi$ , $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ , einer Kurve.

(i) Man skizziere die Kurve.

(ii) Man berechne den Inhalt $A$ der von der Kurve eingeschlossenen Fläche.

(iii) Man gebe eine Formel zur Berechnung des Tangentenvektors und bestimme diesen für $\varphi = \frac{\pi}{6}$

**Aufgabe 3:** (a.) Man bestimme den stationären Punkt der Funktion

$f(x, y) = 4e^{x^2 + y^2} - x^2 - y^2$ und klassifiziere diesen.

(b.) Man berechne das Taylorpolynom zweiten Grades $p_2(x, y)$ für die Funktion $f(x, y) = (2x - 3y) \cdot \sin(3x - 2y)$ im Punkt $(0, 0)$ .

(c.) Man bestimme die Richtungsableitung von $f(x, y, z) = \ln\left(\ln\left(\ln(x) + y\right) + z\right)$ im Punkt $(e, e-1, e)$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = (2, 3, 6)$ .

Welches ist der maximale Wert der Richtungsableitung in diesem Punkt?

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.1

**Aufgabe 1:** Die Skizzen der genannten Funktionen werden anbei gezeigt. Markante Punkte sind mit Abkürzungen markiert:

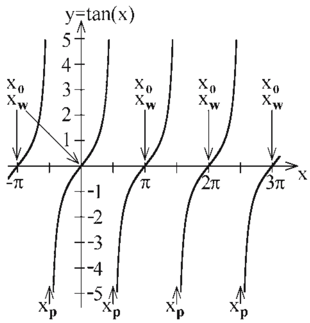
$x_0$ = Nullstellen

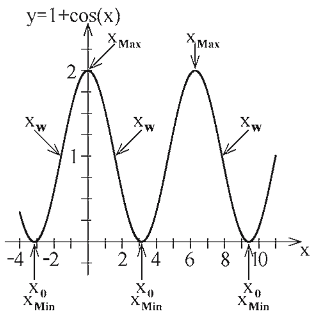
$x_P$ = Polstellen

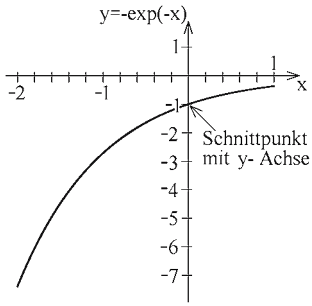
$x_{Max}, x_{Min}$ = Maxima, Minima

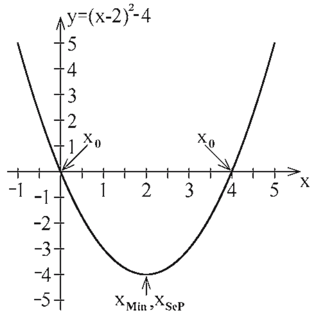
$x_W, x_S$ = Wendepunkt, Sattelpunkte

$x_{SeP}$ = Scheitelpunkt einer Parabel




**Aufgabe 2:** Es gilt $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda t}$, wo Werte für $\frac{N(t)}{N_0}$ gegeben sind.

Nach der Halbwertszeit $T_{0.5}$ sind 50% der Substanz übrig, nach der Zeit $T_{0.1}$ sind 10% der Substanz übrig, weil dann 90% zerfallen sind. Also setzen wir ein:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Nach } t = T_{0.5} \text{ ist } \frac{N(t)}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T_{0.5}} \overset{\ln}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \cdot T_{0.5} \\ \text{Nach } t = T_{0.1} \text{ ist } \frac{N(t)}{N_0} = \frac{1}{10} = e^{-\lambda \cdot T_{0.1}} \overset{\ln}{\Rightarrow} \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -\lambda \cdot T_{0.1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{T_{0.5}} = -\lambda = \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{T_{0.1}}$$

Auflösen nach $T_{0.1} \quad \Rightarrow \quad T_{0.1} = T_{0.5} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \overset{TR}{\approx} 19034.65$ Jahre für die gefragte Zeit.

**Aufgabe 3:**

Aus der Forderung der Stetigkeit bestimmen wir die Konstante $a$ an der ersten Fallgrenze:

$$-x^2 + 2x + a = -3 \quad \text{bei} \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad -0^2 + 2 \cdot 0 + a = -3 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

Die Konstante $b$ bekommen wir aus der Differenzierbarkeit an der zweiten Fallgrenze:

$$\frac{d}{dx}\left(-x^2+2x+a\right)=\frac{d}{dx}\left(b\cdot\sin(x)-3\right) \Rightarrow -2x+2=b\cdot\cos(x) \text{ bei } x=0 \Rightarrow +2=b\cdot 1 \Rightarrow b=2$$

Die Steigung bei $x_0=0$ können wir wegen der Differenzierbarkeit z.B. (willkürlich) aus der Parabel berechnen: $\frac{d}{dx}\left(-x^2+2x+a\right)\Big|_{x_0=0}=-2x+2\Big|_{x_0=0}=2$ = Wert der Steigung bei $x_0=0$.

**Aufgabe 4:** Sollen sich die beiden Funktionen bei $x_0=1$ schneiden, so müssen sie dort denselben Funktionswert haben: $f(1)=a\cdot e^{\frac{1-1}{a}}=a$ und $g(1)=1\cdot\ln\left(\frac{1}{1}\right)+a=a$. Dies ist der Fall.

Also schneiden sich $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt $(x_0;y_0)=(1;f(1))=(1;g(1))=(1;a)$

Zur Bestimmung des Schnittwinkels berechnen wir die Tangentensteigungen beider Kurven:

$$f'(x)=a\cdot e^{\frac{x-1}{a}}\cdot\frac{1}{a}=e^{\frac{x-1}{a}} \Rightarrow f'(1)=a\cdot e^{\frac{1-1}{a}}=e^0=1 \Rightarrow \text{Steigungswinkel } \varphi_f=\arctan(1)=45°$$

$$f'(x)=1\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1/x}\cdot(-x)^{-2}=\ln\left(\frac{1}{x}\right)-1 \Rightarrow g'(1)=\ln\left(\frac{1}{1}\right)-1=-1 \Rightarrow \varphi_g=\arctan(-1)=-45°$$

Der Schnittwinkel ist die Differenz der beiden Steigungswinkel $\Delta\varphi=\varphi_f-\varphi_g=90°$.

**Aufgabe 5:** Die besprochene Vierecksfläche $F_V$ ist die Summe der Rechtecksfläche $F_R$ (des links im Kreis eingeschriebenen Rechtecks) und der Dreiecksfläche $F_D$ (welches im Kreis rechts neben dem Rechteck eingeschrieben ist).

(a.) Mit $x=\cos(\alpha)$ und $y=\sin(\alpha)$ (da wir im Einheitskreis arbeiten) geben wir die Flächen an: $F_R=x\cdot y=\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$ und $F_D=\frac{1}{2}(1-x)\cdot y=\frac{1}{2}(1-\cos(\alpha))\cdot\sin(\alpha)$

$$\Rightarrow F_V=F_R+F_D=\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\sin(\alpha)-\frac{1}{2}\sin(\alpha)\cos(\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\alpha)\cdot(1+\cos(\alpha))$$

(b.) Das Maximum suchen wir als Nullstelle der Ableitung (abgeleitet mit Produktregel):

$$\frac{d}{d\alpha}F_V(\alpha)=\frac{1}{2}\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha)-\underbrace{\frac{1}{2}\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)}_{=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos^2(\alpha))}$$

$$=\frac{1}{2}\cos(\alpha)+\frac{1}{2}\cos^2(\alpha)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2(\alpha)=\underbrace{\cos^2(\alpha)}_{z^2}+\underbrace{\frac{1}{2}\cos(\alpha)}_{\frac{1}{2}\cdot z}-\frac{1}{2}=0$$

Die quadratische Gleichung können wir nach Substitution $z:=\cos(\alpha)$ mit pq-Formel lösen:

$$z^2+\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow z_{1,2}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}}=-\frac{1}{4}\pm\frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} z_1=-1 \\ z_2=+\frac{1}{2}\end{cases} \qquad (**)$$

Wegen $0\le\alpha\le 90°$ macht nur die Lösung $z_2$ Sinn, nicht $z_1$. $\Rightarrow$ $z_2=\frac{1}{2}=\cos(\alpha) \Rightarrow \alpha=60°$.

Die Fläche des Vierecks für $\alpha=60°$ beträgt $F_{V,\max}=\frac{1}{2}\sin(60°)\cdot(1+\cos(60°))=\frac{3}{8}\cdot\sqrt{3}$.

Dass das gefundene Extremum ein Maximum ist, sagt eigentlich schon die Anschauung. Der Vollständigkeit halber wollen wir dies aber noch anhand der zweiten Ableitung nachweisen:

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}F_V(\alpha) = -2\cdot\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) - \tfrac{1}{2}\sin(\alpha)\Big|_{\alpha=60^\circ} \overset{TR}{\approx} -1.299 < 0 \quad , \quad \text{also ist dort ein Maximum.}$$

(c.) Das gefundene Maximum ist nicht nur ein lokales, sondern sogar ein absolutes, denn für alle $x\in\mathbb{R}$ ist $f(x)\le f(60^\circ)$. Diese Aussage lässt sich auch begründen:

Da die Winkelfunktionen nach oben beschränkt sind (und somit auch $F_V(\alpha)$), müsste es sofern bei 60° kein absolutes Maximum vorläge, noch ein Maximum mit höheren Funktionswerten geben. Dafür käme nach $(**)$ nur $\alpha=-60^\circ$ oder $\alpha=\pm180^\circ$ in Frage. Jedoch ist $F_V(\pm180^\circ)=0$ und $F_V(-60^\circ)=-\frac{3}{8}\cdot\sqrt{3}$. Keiner dieser Werte übersteigt jedoch $F_V(60^\circ)$, folglich muss das Maximum bei $\alpha=60^\circ$ ein absolutes sein.

**Aufgabe 6:** (a.) Es gilt $\lim\limits_{x\to0}\sin(x)+x^2=0$ und $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}=0$

Man sieht: Da sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruches in der Aufgabenstellung gegen Null geht, darf die L'Hospital'sche Regel angewandt werden. Dies tun wir im Folgenden:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}} \overset{L.Hosp.}{=} \lim_{x\to0}\frac{\cos(x)+2x}{3\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+3x)^{-1/2}-(-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-3x)^{-1/2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos(0)}{3\cdot\frac{1}{2}\cdot(1+0)^{-1/2}-(-3)\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-0)^{-1/2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

(b.) Als Vorarbeit vereinfachen wir den Nenner, und zwar durch Erweiterung des Bruches:

$$\frac{1}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}\cdot\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}=\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}{(1+3x)-(1-3x)}=\frac{\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}}{6x}$$

Damit können wir nun zwei Grenzwerte betrachten, deren Addition uns später zum gewünschten Ergebnis führen wird.

Den ersten dieser beiden Grenzwerte finden wir aufgrund der Kenntnis von $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)\cdot\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}\right)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)\cdot2}{6x}=\frac{2}{6}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{3}$$

Der zweite dieser beiden Grenzwerte lässt sich wie folgt berechnen:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{1-3x}\right)}{6x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\cdot2}{6x}=\frac{2}{6}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x}=\frac{2}{6}\cdot\lim_{x\to0}x=0$$

Die Addition ist nun kein Problem mehr: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x)+x^2}{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-3x}}=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.2

**Aufgabe 1:** Die Kraft, die auf das Seil wirkt, ist $F(s)=\frac{s}{L}\cdot F_g$ (mit $s=0...0.80\,m$).

Wir integrieren $W=\int_0^L F\,ds=\frac{F_G}{L}\cdot\int_0^L s\,ds=\frac{F_G}{L}\cdot\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^L=\frac{F_G}{L}\cdot\frac{L^2}{2}=\frac{1}{2}F_G\cdot L=\frac{1}{2}\cdot 20N\cdot 0.80m=8\,J$

**Aufgabe 2:** Als Vorarbeit entwickeln wir $g(t)=\ln(1+2t)$ in eine Potenzreihe

$g(t)=\ln(1+2t)$ $\quad\Rightarrow\; g(0)=0$

$\Rightarrow\; g'(t)=2\cdot(1+2t)^{-1}$ $\quad\Rightarrow\; g'(0)=2$

$\Rightarrow\; g''(t)=-4\cdot(1+2t)^{-2}$ $\quad\Rightarrow\; g''(0)=-4$

$\Rightarrow\; g'''(t)=+16\cdot(1+2t)^{-3}$ $\quad .....$

$\Rightarrow\; g^{(n)}(t)=(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!\cdot(1+2t)^{-n}$ $\quad\Rightarrow\; g^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot(n-1)!$

Aufgrund dieser Ableitungen schreiben wir die Reihe auf (wegen $g(0)=0$ entfällt der Summand mit $n=0$) :

$$g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}\cdot t^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot 2^n\cdot\frac{(n-1)!}{n!}\cdot t^n=-\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot t^n$$

Gliedweise Division durch $t$ führt nun zur Reihe $f(t)=\frac{g(t)}{t}=\frac{\ln(1+2t)}{t}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}$ .

Integriert wird ebenso gliedweise:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x-\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot t^{n-1}dt=-\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n\cdot n}\cdot t^n\Bigg|_0^x=-\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot x^n\,.$$

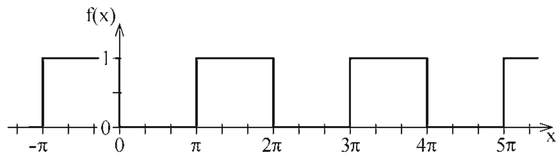
Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot x^n$ lautet mit $a_n=-(-2)^n\cdot\frac{1}{n^2}$ :

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^n\cdot\frac{1}{n^2}}{2^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2\cdot n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{2\cdot n^2}=\frac{1}{2}\,.$$

Da der Entwicklungspunkt bei $x_0=0$ liegt, ist die Konvergenz sicher für $x\in\left]0;1\right[$ .

**Aufgabe 3:**

(a.) Die gefragte Skizze:



(b.) Die komplexwertige Fourier-Entwicklung lautet:

$$c_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} 1\mathrm{dx} = \frac{1}{2\pi} \cdot [x]_{\pi}^{2\pi} = \frac{2\pi\text{-}\pi}{2\pi} = \frac{1}{2} \qquad (\text{für } k=0)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} f(x) \cdot e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ikx}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left[ \frac{1}{-ik} \cdot e^{-ikx} \right]_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \left( \frac{1}{-ik} \cdot e^{-i\cdot 2\pi \mathrm{k}} - \frac{1}{-ik} \cdot e^{-i\cdot \pi \mathrm{k}} \right)$$

Wegen $e^{-i\cdot 2\pi\mathrm{k}} = 1$ für alle $k \neq 0$ und $e^{-i\cdot\pi\mathrm{k}} = \begin{cases} +1 \text{ für gerade k} \\ -1 \text{ für ungerade k} \end{cases}$ fassen wir zusammen:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-ik} \cdot (1-1) & \text{für gerade k} \\ \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{-ik} \cdot (1-(-1)) & \text{für ungerade k} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{für gerade k} \\ \frac{i}{\pi \mathrm{k}} & \text{für ungerade k} \end{cases} \qquad (\text{für alle } k \neq 0)$$

(c.) Die Koeffizienten einer reellwertigen Fourier-Reihe berechnen wir daraus wie folgt:

$$c_0 = \frac{a_0}{2} \quad \Rightarrow \quad a_0 = 2c_0 = 1$$

$$a_k = c_k + c_k^* = \left. \begin{cases} 0+0 & \text{für gerade k} \\ \frac{i}{\pi k} + \frac{-i}{\pi k} & \text{für ungerade k} \end{cases} \right\} = 0 \qquad (\text{für alle } k \neq 0)$$

$$b_k = i \cdot \left( c_k - c_k^* \right) = \begin{cases} i \cdot 0 - i \cdot 0 & \text{für gerade k} \\ i \cdot \left( \frac{i}{\pi k} - \frac{-i}{\pi k} \right) & \text{für ungerade k} \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{für gerade k} \\ \frac{-2}{\pi k} & \text{für ungerade k} \end{cases} \qquad (\text{für alle } k \neq 0)$$

**Aufgabe 4:** Die Differentialform $f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$ ist integrabel (d.h. es existiert eine Stammfunktion), wenn die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y)$ erfüllt ist.

Diese prüfen wir: $\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial y} f_x(x,y) = 4 \\ \frac{\partial}{\partial x} f_y(x,y) = 6x \end{array} \right\} \Rightarrow$ Wegen der Ungleichheit der beiden Ausdrücke ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt.

Also gibt es keine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit den in der Aufgabenstellung genannten partiellen Ableitungen.

**Aufgabe 5:** Weil die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, liegen die Extrema des Exponenten bei denselben $x$ – Werten wie die Extrema der gesamten Funktion $f(x,y)$. Außerdem findet man auch Maxima als Maxima wieder und Minima als Minima.

Der Arbeitseffizienz halber suchen wir also bei $f(x,y) = e^{g(x,y)}$ mit $g(x,y) = 12y - x^2 - y^3$ die Extrema der Funktion $g(x,y)$. Notwendige Bedingung für die Existenz solcher charakteristischer Punkte ist das Verschwinden der partiellen Ableitungen:

$g_x(x,y) = -2x \quad \Rightarrow$ Nullstelle bei $x=0$, $y$ beliebig

$g_y(x,y) = 12-3y^2 \quad \Rightarrow$ zwei Nullstellen bei $y=\pm 2$, $x$ beliebig

Eigentlich ist dies ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, welches wir lösen müssen. Da facto aber sind die beiden Gleichungen entkoppelt, sodas uns das Lösen besonders leicht fällt: 1. möglicher charakterist. Punkt bei $x_1 = 0$, $y_1 = -2$

2. möglicher charakterist. Punkt bei $x_2 = 0$, $y_2 = +2$

Die hinreichende Bedingung für Extrema und Sattelpunkte untersuchen wir anhand der $\Delta$ – Diskriminante. Diese berechnen wir allgemein für $g(x,y) = 12y - x^2 - y^3$ zu

$\Delta = \begin{vmatrix} g_{xx}(x,y) & g_{xy}(x,y) \\ g_{yx}(x,y) & g_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6y \end{vmatrix} = 12y$ und setzen die Werte der charakterist. Punkte ein:

$\Delta(x_1;y_1) = 12y_1 = -24 < 0 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt bei $P_1 = (x_1;y_1)$, kein Extremum

$\Delta(x_2;y_2) = 12y_2 = +24 > 0 \quad \Rightarrow$ Extremum $P_2 = (x_1;y_1)$

Die Art des Extremums findet sich aus $g_{xx}(x_2,y_2) = -2 < 0 \;\Rightarrow$ relatives Maximum bei $P_2$.

Zusatzfrage: Ist dieses Extremum lokal oder global? Anwort: Es ist nur lokal, nicht global.

Begründung: Für $y \to -\infty$ geht $f(x,y) = e^{12y-x^2-y^3} \to \infty$ und übertrifft damit jedes relative Maximum.

**Aufgabe 6:** (a.) Eine mögliche Parametrisierung lautet $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a}\cdot t \\ a\cdot\cosh\left(\frac{t}{a^2}\right) \end{pmatrix}$ Dies ließe sich graphisch leicht kontrollieren.

(b.) Die Bogenlänge ab $x_0 = 0$ berechnen wir mit der Bogenlängen-Formel:

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+a^2\cdot\left(\sinh\left(\tfrac{\xi}{a}\right)\cdot\tfrac{1}{a}\right)^2}\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \sqrt{1+\sinh^2\left(\tfrac{\xi}{a}\right)}\, d\xi = \int_{x_0}^{x} \sqrt{\cosh^2\left(\tfrac{\xi}{a}\right)}\, d\xi$$

$$= \int_{x_0}^{x} \cosh\left(\tfrac{\xi}{a}\right) d\xi = a\cdot\sinh\left(\tfrac{\xi}{a}\right)\Big|_{x_0}^{x} = a\cdot\sinh\left(\tfrac{x}{a}\right)$$

(c.) Der Krümmungsradius berechnet sich zu $r = \dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$.

Setzen wir $y = a\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ und ihre Ableitungen $y' = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ und $y'' = \frac{1}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ein, so folgt

$$r = \frac{\left[1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{3/2}}{\frac{1}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\left[\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right]^{3/2}}{\frac{1}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = \frac{\cosh^3\left(\frac{x}{a}\right)}{\frac{1}{a}\cdot\cosh\left(\frac{x}{a}\right)} = a\cdot\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)$$

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.3

**Aufgabe 1:** Wir bauen die Wahrheitstafel schrittweise auf, sodass mit jeder Spalte eine Verknüpfung hinzugefügt wird:

| a | b | c | $a \Rightarrow b$ | $b \Rightarrow c$ | $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow c)$ | $a \Rightarrow c$ | $(*1) \Rightarrow (*2)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| W | W | W | W | W | W | W | W |
| W | W | F | W | F | F | F | W |
| W | F | W | F | W | F | W | W |
| W | F | F | F | W | F | F | W |
| F | W | W | W | W | W | W | W |
| F | W | F | W | F | F | W | W |
| F | F | W | W | W | W | W | W |
| F | F | F | W | W | W | W | W |
| | | | | | $=: (*1)$ | $=: (*2)$ | $= z$ |

Offensichtlich ist „z“ für sämtliche möglichen Eingangszustände „wahr“ und somit bewiesen.

**Aufgabe 2:** (a.) Gebrochene Zahlen (= echte, teilerfremde Brüche)

(b.) irrationale Zahlen

**Aufgabe 3:** Wir wenden das Horner-Schema an:

31472 : 2 = 15736 R 0
15736 : 2 = 7868 R 0
7868 : 2 = 3934 R 0
3934 : 2 = 1967 R 0
1967 : 2 = 983 R 1
983 : 2 = 491 R 1
491 : 2 = 245 R 1
245 : 2 = 122 R 1
122 : 2 = 61 R 0
61 : 2 = 30 R 1
30 : 2 = 15 R 0
15 : 2 = 7 R 1
7 : 2 = 3 R 1 Leserichtung der Reste von unten nach oben
3 : 2 = 1 R 1
1 : 2 = 0 R 1

$$\Rightarrow 31472_{\text{Dez.}} = \underbrace{111}_{7}\,\underbrace{1010}_{A}\,\underbrace{1111}_{F}\,\underbrace{0000}_{0}{}_{(Dual.)} \rightarrow 7AF0_{(\text{Hex.})}$$

**Aufgabe 4:** Mit einer Kehrwertbildung lassen sich die Brüche beseitigen. Dazu benötigen wir eine Fallunterscheidung: Fall 1→ $x < 0$ und Fall 2→ $x > 0$
(Der Fall $x = 0$ taucht nicht auf, da hierbei einer der Nenner zu Null werden würde.)

Zu Fall 1 $x < 0$ → Hier ist $\frac{1}{x^2+3}$ positiv, aber $\frac{1}{4x}$ negativ, also ist $\frac{1}{x^2+3} > \frac{1}{4x}$ für alle $x$ in diesem Fall erfüllt („positiv ist größer als negativ“).

Zu Fall 2 $x > 0$ → Hier sind beide Seiten der Ungleichung positiv, also dreht die Kehrwertbildung das Relationszeichen um: $\frac{1}{x^2+3} > \frac{1}{4x} \Rightarrow x^2+3 < 4x \Rightarrow x^2-4x+3 < 0$

Die beiden Nullstellen von $x^2-4x+3$ lauten (pq-Formel): $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

Da die Parabel $x^2-4x+3$ nach oben geöffnet ist, sind alle $x$ – Werte zwischen den beiden Nullstellen kleiner als Null, dies sind alle $x \in ]1;3[$. Da diese $x$ – Werte positiv sind, sind sie in Fall Nr.2 enthalten, folglich sind sie Bestandteil der Lösungsmenge.

Die gesamte Lösungsmenge setzt sich aus Fall 1 und 2 zusammen: $\mathbb{L} = \{x \mid (x<0) \vee (1<x<3)\}$

**Aufgabe 5:** Wenn $a_{i-1} = 2$ ist, dann ist $a_i = \sqrt{2^{a_{i-1}}} = \sqrt{2^2} = 2$. Also sind alle $\underset{i\in\mathbb{N}_0}{\forall} a_i = 2$.

Die gefragte Summe ist also lediglich $\sum_{i=0}^{100} a_i = \sum_{i=0}^{100} 2 = 101 \cdot 2 = 202$.

**Aufgabe 6:** Wir berechnen das Spatprodukt als Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 1\cdot(32-35) - 2\cdot(24-30) + 3\cdot(21-24) = -3+12-9 = 0.$$

Da die drei Vektoren einen Spat vom Volumen Null aufspannen, sind sie linear abhängig.

**Aufgabe 7:** Wir müssen die Gleichung aus der Aufgabenstellung nach $y$ auflösen:

$$x^3 - ax^2 + xy^2 + ay^2 = 0 \Rightarrow x^3 - ax^2 = -xy^2 - ay^2 = -(x+a)\cdot y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^3-ax^2}{-(x+a)} = x^2 \cdot \frac{a-x}{a+x} \Rightarrow y = \pm x \cdot \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$$

**Aufgabe 8:**

(a.) Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$, keine Polstellen

(b.) Die Suche nach Extrema bereiten wir durch zweimaliges Ableiten der Funktion vor:

$$f(x) = x^2 + e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = 2x + e^{(1-x^2)} \cdot (-2x) = 2x \cdot \left(1 - e^{1-x^2}\right)$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2\cdot\left(1-e^{1-x^2}\right) + 2x \cdot \left(-e^{1-x^2} \cdot (-2x)\right) = 2 - 2\cdot e^{1-x^2} + 4x^2 \cdot e^{1-x^2}$$

Notwendige Bedingung für Extrema sind Nullstellen der ersten Ableitung $f'(x)$ :

Eine Nullstelle ist bei $x_1 = 0$;

Weitere Nullstellen sind bei $1 - e^{1-x^2} = 0 \Rightarrow e^{1-x^2} = 1 \overset{\ln}{\Rightarrow} 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = +1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

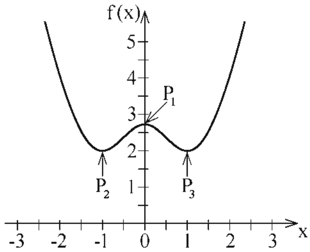
Zur hinreichenden Bedingung überprüfen wir noch das Nichtverschwinden von $f''(x)$:

$f''(x_1) = f''(0) = 2 - 2e^1 - 0 = 2 - 2e \overset{TR}{\approx} -3.4366 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum bei $x_1$

$f''(x_2) = f''(-1) = 2 - 2e^0 + 4 \cdot e^0 = 2 - 2 + 4 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum bei $x_2$

$f''(x_3) = f''(+1) = 2 - 2e^0 + 4 \cdot e^0 = 2 - 2 + 4 = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum bei $x_3$

(c.) Zum Erstellen der Skizze berechnen wir die Positionen der markanten Punkte und tragen diese ein:




$f(x_1) = f(0) = 0^2 + e^{1-0^2} = e \quad \Rightarrow \quad P_1 = (0; e)$, Maximum

$f(x_2) = f(-1) = 1 + e^0 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_1 = (-1; 2)$, Minimum

$f(x_3) = f(+1) = 1 + e^0 = 2 \quad \Rightarrow \quad P_1 = (+1; 2)$, Minimum

(d.) Nach oben ist die Funktion nicht beschränkt, nach unten aber doch. Die größtmögliche untere Schranke lautet $x = 2$. Der Wertebereich ist also $\mathbb{W} = \{x \mid x \geq 2\}$

(e.) $x^2$ ist gerade, das Argument der e-Funktion $1 - x^2$ auch $\Rightarrow f(x)$ zeigt gerade Symmetrie.

**Aufgabe 9:** Dazu führen wir eine Polynomdivision durch

$$\left(x^7 + 3x^6 + 2x^4 - 3x^2 + 2\right) : \left(2x^5 - x^4 + x^3 + x\right) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{8} + \underbrace{\frac{\frac{7}{8}x^4 - \frac{9}{8}x^3 - \frac{19}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + 2}{2x^5 - x^4 + x^3 + x}}_{\text{geht gegen 0 für } x \to \infty}$$

$$\begin{array}{l}
-\left(x^7 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{1}{2}x^3\right) \\
\hline
\quad \frac{7}{2}x^6 - \frac{1}{2}x^5 + 2x^4 - \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 2 \\
\quad -\left(\frac{7}{2}x^6 - \frac{7}{4}x^5 + \frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4}x^2\right) \\
\hline
\qquad \frac{5}{4}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{19}{4}x^2 + 2 \\
\qquad -\left(\frac{5}{4}x^5 - \frac{5}{8}x^4 + \frac{5}{8}x^3 + \frac{5}{8}x\right) \\
\hline
\qquad\quad \frac{7}{8}x^4 - \frac{9}{8}x^3 - \frac{19}{4}x^2 - \frac{5}{8}x + 2
\end{array}$$

$\Rightarrow$ also ist $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{5}{8}$

**Aufgabe 10:**

(a.) $f'(x) = \dfrac{1}{\tan x} \cdot \left(\dfrac{d}{dx} \tan x\right) = \dfrac{1}{\tan x} \cdot \left(\dfrac{d}{dx} \dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \dfrac{1}{\tan x} \cdot \dfrac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$$

(b.) $f'(x) = \sinh\left(x^2\right) \cdot 2x$

(c.) $f'(x)=\dfrac{(1-\cos x)\cdot(-\sin x)-(1+\cos x)\cdot(\sin x)}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{-\sin x+\sin x\cdot\cos x-\sin x-\sin x\cdot\cos x}{(1-\cos x)^2}=\dfrac{-2\cdot\sin x}{(1-\cos x)^2}$

(d.) $f'(x)=\frac{1}{x}\cdot e^x+\ln x\cdot e^x=\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)\cdot e^x$

**Aufgabe 11:** Wir setzen die beiden Punkte in die Gleichung einer Geraden $f(x)=ax+b$ ein

$$\begin{aligned} P_1=(1;2) &\quad\Rightarrow\quad f(1)=a\cdot 1+b=2 \\ P_2=(3;5) &\quad\Rightarrow\quad f(3)=a\cdot 3+b=5 \end{aligned}$$

und subtrahieren die Gleichungen voneinander

$$\Rightarrow\quad a\cdot(1-3)+0\cdot b=2-5\quad\Rightarrow\quad a=\frac{3}{2}$$

Einsetzen von $a$ in Glg. 1 liefert: $\frac{3}{2}\cdot 1+b=2\ \Rightarrow\ b=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ als Geradengleichung

**Aufgabe 12:** Der Rauminhalt des Kartons beträgt $V(x)=(a-2x)^2\cdot x=4x^3-4ax^2+a^2x$

Extrema können liegen $V'(x)=0$, also bei $12x^2-8ax+a^2=0\quad\Rightarrow\quad x^2-\frac{2}{3}ax+\frac{1}{12}a^2=0$

Die pq-Formel liefert : $x_{1,2}=\frac{1}{3}a\pm\sqrt{\frac{a^2}{9}-\frac{a^2}{12}}=\frac{1}{3}a\pm\sqrt{\frac{4a^2-3a^2}{36}}=\frac{1}{3}a\pm\frac{1}{6}a\quad\Rightarrow\quad\begin{cases} x_1=\frac{1}{6}a \\ x_2=\frac{1}{2}a \end{cases}$

Welcher von beiden Werten führt zum gesuchten Maximum? Einsetzen in $V''$ sagt uns

$$V''(x)=24x-8a\quad\Rightarrow\quad V''(x_1)=V''\left(\frac{a}{6}\right)=24\cdot\frac{a}{6}-8a=-4a<0\quad\leftrightarrow\ \text{Maximum}$$

$$V''(x_2)=V''\left(\frac{a}{2}\right)=24\cdot\frac{a}{2}-8a=+4a>0\quad\leftrightarrow\ \text{Minimum}$$

Die Einschnitttiefe $x_1=\frac{1}{6}a$ führt also zum gesuchten Maximum des Volumens. Dieses beträgt dann $V\left(\frac{1}{6}a\right)=\left(a-2\cdot\frac{1}{6}a\right)^2\cdot\frac{1}{6}a=\left(\frac{2}{3}a\right)^2\cdot\frac{1}{6}a=\frac{2}{27}a^3$.

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.4

**Aufgabe 1:**

(a.) Mit partieller Integration: $\int\underbrace{x}_{\text{u}}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v'}}dx=\underbrace{x}_{\text{u}}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v}}+C_1-\int\underbrace{1}_{\text{u'}}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v}}dx=x\cdot e^x-e^x+C_2$

(b.) Man muss zweimal partiell integrieren (unterschieden durch die Indizes 1 und 2):

$$\int\underbrace{\sin x}_{\text{u}_1}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v'}_1}dx=\underbrace{\sin x}_{\text{u}_1}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v}_1}+C_1-\int\underbrace{\cos x}_{\text{u'}_1=\text{u}_2}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v}_1=\text{v'}_2}dx=\sin x\cdot e^x-\left[\underbrace{\cos x}_{\text{u}_2}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v}_2}-\int\underbrace{-\sin x}_{\text{u'}_2}\cdot\underbrace{e^x}_{\text{v}_2}dx\right]+C_2$$

$\Rightarrow\ \int\sin x\cdot e^x dx=\sin x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x-\int\sin x\cdot e^x dx+C_2\quad\Big|$Addition von $\int\sin x\cdot e^x dx$ zur Gleichung

$$\Rightarrow\ 2\cdot\int\sin x\cdot e^x dx=(\sin x-\cos x)\cdot e^x+C_2\quad\Rightarrow\quad\int\sin x\cdot e^x dx=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)\cdot e^x+C_3$$

(c.) Man arbeitet mit Partialbruchzerlegung, da der Integrand unecht gebrochen ist, muss eine Polynomdivision vorgeschaltet werden.

Die vorgeschaltete Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(x^2-5x+2\right):\left(x^2-8x+7\right)=1+\dfrac{3x-5}{x^2-8x+7} \\ -\left(x^2-8x+7\right) \\ \hline 0+3x-5 \end{array}$$

Die Faktorisierung des Nenners:

$$x^2-8x+7=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1.2}=4\pm\sqrt{16-7}=4\pm 3$$

$$\Rightarrow \quad x^2-8x+7=(x-1)\cdot(x-7)$$

Den echt gebrochenen Anteil führen wir nun der Partialbruchzerlegung zu. Da wir zwei reelle Nullstellen haben, lautet der Ansatz:

$$\frac{3x-5}{x^2-8x+7}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-1}=\frac{A\cdot(x-1)+B\cdot(x-7)}{(x-7)\cdot(x-1)}$$

Die Koeffizienten bestimmen wir durch Einsetzen von

- $x=7 \rightarrow \quad 3\cdot 7-5=A\cdot(7-1)+B\cdot(7-7) \quad \Rightarrow \quad 16=6A \quad \Rightarrow \quad A=\frac{8}{3}$ und
- $x=1 \rightarrow \quad 3\cdot 1-5=A\cdot(1-1)+B\cdot(1-7) \quad \Rightarrow \quad -2=-6B \quad \Rightarrow \quad B=\frac{1}{3}$

Damit können wir das Integral aus der Aufgabenstellung zerteilen und vereinfachen

$$\int\frac{x^2-5x+2}{x^2-8x+7}\,dx=\int 1\,dx+\int\frac{8/3}{x-7}\,dx+\int\frac{1/3}{x-1}\,dx$$ , sodass es lösbar wird

mit den beiden Substitutionen $t:=x-7 \Rightarrow dt=dx$ und $v:=x-1 \Rightarrow dv=dx$ , und zwar

$$\int\frac{x^2-5x+2}{x^2-8x+7}\,dx=\int 1\,dx+\frac{8}{3}\int\frac{1}{t}\,dt+\frac{1}{3}\int\frac{1}{v}\,dv=x+\frac{8}{3}\ln(|t|)+\frac{1}{3}\ln(|v|)+C_1=x+\frac{8}{3}\ln(|x-7|)+\frac{1}{3}\ln(|x-1|)+C_2$$

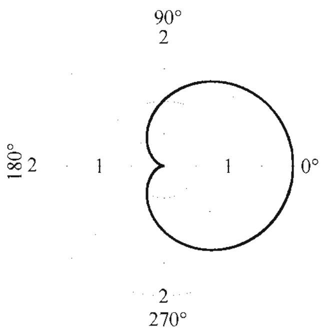
(d.) Mit der Substitution $t:=x^3+x \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx}=3x^2+1 \quad \Rightarrow \quad \left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx=\frac{1}{3}dt$ erhalten wir

$$\int\left(x^2+\tfrac{1}{3}\right)\cdot\sin\left(x^3+x\right)dx=\int\sin(t)\cdot\tfrac{1}{3}\,dt=\tfrac{1}{3}\cdot\left(-\cos(t)\right)+C_1=-\tfrac{1}{3}\cdot\cos\left(x^3+x\right)+C_2$$

**Aufgabe 2:** Integriert wird von innen nach außen, also sieht die Lösung wie folgt aus:

$$\int_{-2}^{+3}\int_{0}^{x}x\cdot y\,dy\,dx=\int_{-2}^{+3}x\cdot\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^x dx=\int_{-2}^{+3}x\cdot\left[\tfrac{1}{2}x^2-0\right]dx=\int_{-2}^{+3}\tfrac{1}{2}x^3\,dx=\left[\tfrac{1}{8}x^4\right]_{-2}^{+3}=\frac{3^4}{8}-\frac{(-2)^4}{8}=\frac{65}{8}$$

**Aufgabe 3:** Das neben stehende Bild der Kardioiden gibt eine Vorstellung über die zu integrierende Linie. Wir wollen über $\varphi=0\ldots\pi$ integrieren um Probleme mit Periodizitäten der Winkelfunktionen zu vermeiden (wir integrieren also über eine Hälfte der Kardioiden) und setzen damit die typische Bogenlängenberechnung in Polarkoordinaten an:




$$L_{1/2}=\int_0^{\pi}\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

$$\Rightarrow\ L_{1/2} = \int_0^\pi \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{1+2\cos\varphi + \underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1}}\, d\varphi$$

$$\Rightarrow\ L_{1/2} = \int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = \underbrace{\int_0^\pi \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\varphi}\, d\varphi = \int_0^\pi \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\, d\varphi}_{\text{nach dem Additionstheorem } 2\cdot\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)=1+\cos\varphi} = \int_0^\pi 2\cdot\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi = \left[4\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^\pi$$

$\Rightarrow\ L_{1/2} = 4\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4\cdot\sin(0) = 4$ für die Länge der halben Kardioide.

Die Bogenlänge der gesamten Kardioide lautet somit $L = 2\cdot L_{1/2} = 8$

**Aufgabe 4:** Wir lösen die Aufgabe in zwei Schritten.

Schritt 1 → Auffinden der Stammfunktion mittels partieller Integration

$$\int \underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\ln x}_{v}\, dx = \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\ln x}_{v} + C_1 - \int \underbrace{x}_{u}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\, dx = x\cdot\ln x - x + C_2$$

Schritt 1 → Einsetzen in das unbestimmte Integral

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\lambda\to 0}\int_\lambda^1 \ln x\, dx = \lim_{\lambda\to 0}\left[x\cdot\ln x - x\right]_\lambda^1 = \left(\underbrace{1\cdot\ln 1}_{=0} - 1\right) - \lim_{\lambda\to 0}\left(\underbrace{\lambda\cdot\ln\lambda}_{(*1),\text{s.u.}} - \underbrace{\lambda}_{\to 0}\right)$$

Den Grenzwert von $(*1)$ berechnen wir nach der Regel von L'Hospital

$$\lim_{\lambda\to 0}\lambda\cdot\ln\lambda = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{\lambda\to 0}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = \lim_{\lambda\to 0}(-\lambda) = 0 \quad \text{und erhalten so} \quad \int_0^1 \ln x\, dx = -1-0 = -1$$

**Aufgabe 5:** (a.) Ein Potential existiert, wenn das Feld integrabel ist. Dies ist der Fall, wenn es rotationsfrei ist. Wir berechnen also zu beiden Feldern die Rotation:

$$rot\ \overrightarrow{F_1} = \vec{\nabla}\times\overrightarrow{F_1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{1,z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1,y}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{1,x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{1,z}}{\partial x} \\ \frac{\partial F_{1,y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1,x}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-x \\ y-y \\ z-z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Die Rotation verschwindet.
(Das Feld ist wirbelfrei.)
Das Feld ist ein Potentialfeld.

$$rot\ \overrightarrow{F_2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{2,z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{2,y}}{\partial z} \\ \frac{\partial F_{2,x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{2,z}}{\partial x} \\ \frac{\partial F_{2,y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2,x}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2yz - xy^2 \\ 0-0 \\ y^2 z - x^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

Die Rotation verschwindet nicht für alle $x, y, z$.
(Das Feld enthält Wirbel.)
Das Feld ist kein Potentialfeld.

(b.) Das Potential bestimmen wir also zum Feld $\overrightarrow{F_1}$, hier mit wegunabhängiger Integration:

$$\left.\begin{array}{l} V = \int F_x dx = \int (\cos x + yz)\, dx = \sin x + xyz + C_1(y,z) \\ V = \int F_y dy = \int xz\, dy = xyz + C_2(x,z) \\ V = \int F_z dz = \int xy\, dz = xyz + C_3(x,y) \end{array}\right\}$$

Übereinstimmung der drei Rechenwege tritt ein für $C_1 = c$ ; $C_2 = \sin x + c$ ; $C_3 = \sin x + c$
Das Potential lautet dann:
$V = x \cdot y \cdot z + \sin x + c$

(c.) Die Divergenz von $\overrightarrow{F_2}$ lautet:

$$div\, \overrightarrow{F_2} = \vec{\nabla} \cdot \overrightarrow{F_2} = \frac{\partial F_{2,x}}{\partial x} + \frac{\partial F_{2,y}}{\partial y} + \frac{\partial F_{2,z}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} x^2 y + \frac{\partial}{\partial y} xy^2 z + \frac{\partial}{\partial z} y^2 z = 2xy + 2xyz + y^2$$

**Aufgabe 6:** Das Entnehmen der Netzteile erfolgt ohne Wiederholung, wobei die Reihenfolge der Entnahme keine Rolle spielt. Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung.

- Die Zahl der Möglichkeiten, überhaupt 3 Netzteile aus 20 zu entnehmen beträgt
  $C_{20}^{(3)} = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140$ .
- Die Zahl der Möglichkeiten, 3 Netzteile aus den 18 Guten zu entnehmen (nach Aussortieren der beiden Schlechten) beträgt
  $C_{18}^{(3)} = \frac{18!}{3!(18-3)!} = \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 816$ .
- Die gefragte Wahrscheinlichkeit ist der Quotient $\frac{C_{18}^{(3)}}{C_{20}^{(3)}} = \frac{816}{1140} \overset{TR}{\approx} 72\%$ .

**Aufgabe 7:** (a.) Der Erwartungswert der Gauß-Verteilung beträgt

$$\overline{U} = \tfrac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} U_i = \tfrac{1}{10} \cdot (31+34+29+26+30+32+25+29+34+30)\,\text{V} = 30\text{V} \quad .$$

(b.) Gefragt ist die Standardabweichung der Gauß-Verteilung. Ihr Quadrat, die Varianz ist

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{10} \cdot \sum_{i=1}^{10} \left(U_i - \overline{U}\right)^2 = \tfrac{1}{10} \cdot (1+16+1+16+0+4+25+1+16+0)\,\text{V}^2 = \frac{80}{10}\text{V}^2 = 8\,\text{V}^2 \quad .$$

Wurzelziehen führt zur Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{8\,\text{V}^2} = \sqrt{8}\,\text{V} \overset{TR}{\approx} 2.83\text{V}$

Das gefragt $2\sigma$- Konfidenzintervall lautet also $\left[\overline{\text{U}} - 2\sigma\,;\, \overline{\text{U}} + 2\sigma\right] \overset{TR}{\approx} [24.34\,\text{V}\,;\, 35.66\,\text{V}]$ .

(c.) Gefragt ist das $3\sigma$-Konfidenzintervall des Mittelwertes der Grundgesamtheit. Dieses können wir nur als Schätzwert angeben. Das zugehörige $\sigma_{\overline{U}}$ lautet:

$$\sigma_{\overline{U}}^2 = \frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^{N} \left(U_i - \overline{U}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{(N-1)} = \frac{8\,\text{V}^2}{9} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\overline{U}} = \tfrac{1}{3} \cdot \sqrt{8}\,\text{V} \overset{TR}{\approx} 0.94\,\text{V}$$

Da das $3\sigma$-Intervall der Streuung des Mittelwertes relativ zur Grundgesamtheit gefragt ist, geben wir es an mit $\left[\overline{\mathrm{U}}-3\cdot\sigma_{\overline{U}}\,;\overline{\mathrm{U}}+3\cdot\sigma_{\overline{U}}\right]=\left[\left(30-\sqrt{8}\right)\mathrm{V}\,;\left(30+\sqrt{8}\right)\mathrm{V}\right]\overset{TR}{\approx}\left[\left(27.17\right)\mathrm{V}\,;\left(32.28\right)\mathrm{V}\right]$

**Aufgabe 8:** Der Wert für $R$ berechnet sich durch simples Einsetzen der Zahlen aus der Aufgabenstellung: $R(U,t,Q)=\frac{U\cdot t}{Q}=\frac{5.0\,\mathrm{V}\cdot 12.0\,\mathrm{sec.}}{0.2\;\mathrm{C}}=300\,\Omega$.

Die Berechnung der statistischen Unsicherheit $\Delta R$ soll mit Gauß'scher Fehlerfortpflanzung durchgeführt werden:

$$(\Delta R)^2=\left(\frac{\partial R}{\partial U}\cdot\Delta U\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial t}\cdot\Delta t\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial Q}\cdot\Delta Q\right)^2=\left(\frac{t}{Q}\cdot\Delta U\right)^2+\left(\frac{U}{Q}\cdot\Delta t\right)^2+\left(\frac{U\cdot t}{-Q^2}\cdot\Delta Q\right)^2$$

$$=\left(\frac{12\,\mathrm{sec.}}{0.2\,\mathrm{C}}\cdot 0.2\,\mathrm{V}\right)^2+\left(\frac{5\,\mathrm{V}}{0.2\,\mathrm{C}}\cdot 1\mathrm{sec.}\right)^2+\left(\frac{5\,\mathrm{V}\cdot 12\,\mathrm{sec.}}{-(0.2\,\mathrm{C})^2}\cdot 0.01\mathrm{C}\right)^2=(12\,\Omega)^2+(25\,\Omega)^2+(-15\,\Omega)^2=994\,\Omega^2$$

$$\Delta R=\sqrt{994}\,\Omega\overset{TR}{\approx}31.5\,\Omega$$

Bei der Angabe des Ergebnisses wird die Unsicherheit auf zwei signifikante Stellen gerundet: $R=(300\pm 32)\,\Omega$

**Aufgabe 9:** Der Effektivwert ist (siehe Formelsammlung) derjenige Mittelwert einer periodischen Funktion mit der Definition $U_{eff}^2:=\frac{1}{T}\cdot\int\limits_{(T)}U^2(t)\,dt$ (mit $T=$ Dauer einer Periode).

Um dieses Integral berechnen zu können, müssen wir die Funktion im Integranden (die in einem Bild gegeben ist) für eine Periode in einen mathematischen Ausdruck fassen:

$$U(t)=\underbrace{\frac{2U_0}{T}\cdot|t|}_{\text{für}\,t\in\left[-\frac{T}{2};+\frac{T}{2}\right]}=\begin{cases}+\dfrac{2U_0}{T}\cdot t & \text{für}\,t\in\left[-\frac{T}{2};0\right]\\ -\dfrac{2U_0}{T}\cdot t & \text{für}\,t\in\left[0;+\frac{T}{2}\right]\end{cases}\qquad\Rightarrow\quad U^2(t)=\frac{4U_0^2}{T^2}\cdot t^2\quad\text{für }t\in\left[-\tfrac{T}{2};+\tfrac{T}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\int\limits_{(T)}U^2(t)\,dt=\frac{4U_0^2}{T^2}\cdot\int\limits_{-T/2}^{+T/2}t^2dt=\frac{4U_0^2}{T^2}\cdot\left[\frac{T^3}{3}\right]_{-T/2}^{+T/2}=\frac{4U_0^2}{T^2}\cdot\left(\frac{T^3}{3\cdot 8}+\frac{T^3}{3\cdot 8}\right)=\tfrac{1}{3}U_0^2T\;\Rightarrow U_{eff}^2=\frac{1}{T}\cdot\int\limits_{(T)}U^2(t)\,dt=\frac{U_0^2}{3}$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir nun den gefragten Effektivwert: $U_{eff}=\sqrt{\tfrac{1}{3}}U_0$ .

**Aufgabe 10:** Notwendige Bedingung für Extrema ist $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ und $\frac{\partial z}{\partial y}=0$. Wir überprüfen dies in dem zu untersuchenden Punkt $P_0$: $\frac{\partial z}{\partial x}=\cos x\big|_{P_0}=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ und

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin y\big|_{P_0}=-\sin(\pi)=0$$

Da die notwendige Bedingung erfüllt ist, könnte in $P_0$ ein Extremum oder ein Sattelpunkt vorliegen. Wir überprüfen dies anhand der $\Delta$ – Diskriminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos y \end{vmatrix} = \sin x \cdot \cos y \quad \Rightarrow \quad \Delta\big|_{P_0} = \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi) = (+1) \cdot (-1) < 0$$

Da die $\Delta$ – Diskriminante negativ ist, liegt im Punkt $P_0$ ein Sattelpunkt vor.

## Lösungen zur Klausur Nr. 14.5

**Aufgabe 1:** (a.) Wir erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners

$$\frac{(3+7i)\cdot(2-5i)}{(2+5i)\cdot(2-5i)} = \frac{6+14i-15i-35i^2}{4+25} = \frac{6-i+35}{29} = \frac{41}{29} - \frac{1}{29} \cdot i$$

(b.) Die Euler-Formel liefert

$$3 \cdot e^{i \cdot \frac{1}{6}\pi} = 3 \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)\right) = 3 \cdot \left(\sqrt{\tfrac{3}{4}} + i \cdot \tfrac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{\tfrac{27}{4}} + \tfrac{3}{2} \cdot i\right)$$

(c.) In Formelsammlungen findet man die komplexe Sinus-Funktion und erhält

$$\sin\left(i \cdot \tfrac{\pi}{2}\right) = -i \cdot \left(\frac{e^{i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot i} - e^{-i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot i}}{2}\right) = \frac{-i}{2} \cdot \left(e^{-\frac{\pi}{2}} - e^{+\frac{\pi}{2}}\right) \overset{TR}{\approx} 0 + i \cdot 2.3012989$$

(d.) Eine Quadratwurzel hat einen Hauptwert und einen Nebenwert:

$$(-i) = e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)} \quad \Rightarrow \quad (-i)^{1/2} = e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \cdot \frac{1}{2}} = \begin{cases} e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)} & (\text{Hauptwert, da } n = 0) \\ e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right)} & (\text{Nebenwert, da } n = 1) \end{cases}$$

Wir müssen noch in die algebraische Darstellung umwandeln:

$$\sqrt{(-i)} = \begin{cases} e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} - i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ e^{i \cdot \left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right)} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

(e.) Da auch Nebenwerte gefragt sind, benutzen wir die Periodizität der Exponentialfunktion:

$$\ln(1) = \ln\left(1 \cdot e^{i \cdot (0 + 2n\pi)}\right) = 0 + i \cdot (0 + 2n\pi) = \begin{cases} 0 & \text{Hauptwert, für } n = 0 \\ \mathrm{i} \cdot 2\pi\mathrm{n} & \text{Nebenwerte, für } n \neq 0 \end{cases}$$

**Aufgabe 2:** Bei dieser Summe handelt es sich um eine geometrische Reihe mit

$a_1 = \frac{1}{e}$ , $q = \frac{1}{e}$ , $a_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Wir setzen in die Summenformel der geometrischen Reihe ein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{n \to \infty} a_1 \cdot \frac{e^{-n} - 1}{e^{-1} - 1} = \frac{1}{e} \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{-1}{1 - e} = \frac{1}{e - 1} \overset{TR}{\approx} 0.5819767$$

**Aufgabe 3:** Da nur drei Summanden der Reihe gefragt sind, müssen wir nicht einen allgemeinen Ausdruck für die n-te Ableitung finden. Vielmehr ist eine Beschränkung auf die Funktion und ihre ersten beiden Ableitungen ausreichend:

$$y(x)=x^{\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad y(x_0)=1^{\frac{1}{2}}=1$$
$$y'(x)=\tfrac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad\Rightarrow\quad y'(x_0)=\tfrac{1}{2}\cdot 1^{-\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{2}$$
$$y''(x)=-\tfrac{1}{4}\cdot x^{-\frac{3}{2}} \quad\Rightarrow\quad y''(x_0)=-\tfrac{1}{4}\cdot 1^{-\frac{3}{2}}=-\tfrac{1}{4}$$

Dies setzen wir in die Entwicklungsformel für Taylorreihen ein und erhalten

$$y(x)=y(x_0)+y'(x_0)\cdot(x-x_0)+\tfrac{1}{2}y''(x_0)\cdot(x-x_0)^2=1+\tfrac{1}{2}\cdot(x-1)+\tfrac{1}{2}\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right)(x-1)^2=-\tfrac{1}{8}x^2+\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{8}$$

(b.) Für $x=2$ gibt die Näherung $\sqrt{2}\approx y(x)=-\tfrac{1}{8}\cdot 2^2+\tfrac{3}{4}\cdot 2+\tfrac{3}{8}=\tfrac{11}{8}$

**Aufgabe 4:** Man prüfe die Voraussetzungen für die Anwendung der L'Hospital'schen Regel.

(a.) $$\lim_{x\to\infty} x^k\cdot e^{-x}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{x^{-k}}}_{"\frac{0}{0}"}\overset{L'Hosp.}{=}\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{-e^{-x}}{-x^{-k+1}}=\;.\;.\;.\;.\;=}_{\text{k-maliges Anwenden von L'Hospital}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-x}}{k!}=0$$

(b.) $$\underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{x^2+7}{x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{1^2+7}{1-3}}_{\substack{\text{Zähler}\to 8\;;\;\text{Nenner}\to -2\\ \Rightarrow\;\text{kein Fall für L'Hospital}}}=\frac{8}{-2}=-4$$

(c.) $$\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x}{4\cdot\sin(x)}}_{"\frac{0}{0}"}\overset{L'Hosp.}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-2}{4\cdot\cos(x)}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

**Aufgabe 5:** (a) Rücktransformation: $$\frac{p+1}{p^2}=\frac{p}{p^2}+\frac{1}{p^2}=\frac{1}{\underbrace{p}_{\bullet\!-\!\circ 1}}+\frac{1}{\underbrace{p^2}_{\bullet\!-\!\circ t}}\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+1}{p^2}\right\}=1+t$$

(b.) Mit Korrespondenztabelle: $$-\omega_0^2\cdot\underbrace{\sin(\omega_0\cdot t)}_{\bullet\!-\!\circ\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}}=-\omega_0^2\cdot\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}^{-1}\left\{-\omega_0^2\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\right\}=\frac{-\omega_0^3}{s^2+\omega_0^2}$$

(c.) Hier ist das Faltungsprodukt bequem anzuwenden:

Korrespondenztabelle $\Rightarrow\;\frac{1}{p^2}\;\bullet\!-\!\circ\; t=f_1(t)$ und $\frac{p}{p^2+1}\;\bullet\!-\!\circ\;\cos(t)=f_2(t)$. Damit falten wir

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(u)\cdot f_2(t-u)\,du=\underbrace{\int_0^t u\cdot\cos(t-u)\,du=\Big[u\cdot\big(-\sin(t-u)\big)\Big]_0^t-\int_0^t -\sin(t-u)\,du}_{\text{partielle Integration}}$$

$$=\Big[u\cdot\big(-\sin(t-u)\big)\Big]_0^t+\Big[\cos(t-u)\Big]_0^t=-t\cdot\sin(0)+0\cdot\sin(-u)+\cos(0)-\cos(t)=1-\cos(t)$$

**Aufgabe 6:** Wir transformieren die Dgl. in den Bildraum und lösen sie dort:

$$\underbrace{y'}_{\circ\!-\!\bullet\, p\cdot\mathcal{Y}(p)-y(0)}+\underbrace{7y}_{\circ\!-\!\bullet\, 7\cdot\mathcal{Y}(p)}=0\;\circ\!-\!\bullet\; p\cdot\mathcal{Y}(p)-y(0)+7\cdot\mathcal{Y}(p)=0\;\Rightarrow\;\mathcal{Y}(p)\cdot(p+7)=y(0)=3\;\Rightarrow\;\mathcal{Y}(p)=\frac{3}{p+7}$$

Die Rücktransformation (mittels Korrespondenztabelle) liefert die Lösung im Originalraum:

$\mathcal{Y}(s)=\frac{3}{p+7}$ •—o $3\cdot e^{-7t}=f(t)$ als Lösung der Differentialgleichung.

**Aufgabe 7:** Hier ist das Verfahren der Variablentrennung anzuwenden:

$$3y\,y'-6x^2=0 \;\Rightarrow\; 3y\frac{dy}{dx}=6x^2 \;\Rightarrow\; 3y\,dy=6x^2\,dx \qquad \Big|\text{ Es folgt die Integration}$$

$$\Rightarrow \int 3y\,dy=\int 6x^2\,dx \;\Rightarrow\; \tfrac{3}{2}y^2=2x^3+C_1 \;\Rightarrow\; y^2=\tfrac{4}{3}x^3+C_2 \;\Rightarrow\; y=\pm\sqrt{\tfrac{4}{3}x^3+C_2}$$

**Aufgabe 8:** (a.) Den Lösungsansatz für eine lin. hom. Dgl. 2. Ordnung entnimmt man einem Tabellenwerk. Eine Tabelle der Lösungsansätze findet man bei der Lösung zu Aufgabe 12.8.

Die allgem. Form der Dgl. ist $y''+a\cdot y'+b\cdot y=0$, unsere Aufgabe lautet $y''+\underbrace{4}_{a=4}y'\underbrace{-3}_{b=-3}y=0$

Wegen $\frac{a^2}{4}-b=\frac{16}{4}-(-3)=7>0$ ist der Lösungsansatz $y(x)=C_1\cdot e^{\lambda_1 x}+C_2\cdot e^{\lambda_2 x}$ mit

$$\lambda_{1/2}=-\tfrac{a}{2}\pm\sqrt{\tfrac{a^2}{4}-b}=-2\pm\sqrt{4+3} \Rightarrow \begin{cases}\lambda_1=-2+\sqrt{7}\\ \lambda_2=-2-\sqrt{7}\end{cases} \Rightarrow y(x)=C_1\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}$$

(b.) Die Verifikation der Lösung geschieht durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl.:

$y(x)=C_1\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}$ für die Lösung aus Aufgabenteil (a.)

$$\Rightarrow\; y'(x)=C_1\cdot\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}$$

$$\Rightarrow\; y''(x)=C_1\cdot\left(-2+\sqrt{7}\right)^2\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot\left(-2-\sqrt{7}\right)^2\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung $y''+4y'-3y=0$ liefert (mit „$\stackrel{?}{=}0$" in der Bedeutung „zu verifizieren"):

$$C_1\cdot\left(-2+\sqrt{7}\right)^2\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot\left(-2-\sqrt{7}\right)^2\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}+4\cdot C_1\cdot\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}$$
$$+4\cdot C_2\cdot\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}-3\cdot C_1\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}-3\cdot C_2\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}\stackrel{?}{=}0$$

Sortieren nach Exponenten der Exponentialfunktion ergibt:

$$C_1\cdot\left(\left(-2+\sqrt{7}\right)^2+4\left(-2+\sqrt{7}\right)-3\right)\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot\left(\left(-2-\sqrt{7}\right)^2+4\cdot\left(-2-\sqrt{7}\right)-3\right)\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}\stackrel{?}{=}0$$

Ausrechnen der großen Klammern führt zur nachfolgend gezeigten Verifikation:

$$C_1\cdot\left(\underbrace{4-4\cdot\sqrt{7}+7-8+4\cdot\sqrt{7}-3}_{=0}\right)\cdot e^{\left(-2+\sqrt{7}\right)\cdot x}+C_2\cdot\left(\underbrace{4+4\cdot\sqrt{7}+7-8-4\cdot\sqrt{7}-3}_{=0}\right)\cdot e^{\left(-2-\sqrt{7}\right)\cdot x}\stackrel{?}{=}0$$

**Aufgabe 9:** Die Matrixmultiplikation sei ohne viel Erklärung vorgeführt.

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+8&2+10&3+12\\3+16&6+20&9+24\\5+24&10+30&15+36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&12&15\\19&26&33\\29&40&51\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 10:** Am einfachsten löst man die Aufgabe, wenn man als Vorarbeit die Matrix nach dem Gauß-Algorithmus umformt.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\5&7&9\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow -4\cdot\text{Zeile }1\\ \leftarrow -5\cdot\text{Zeile }1\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-3&-6\end{matrix}\quad\begin{matrix}\\ \\ \leftarrow -\text{Zeile }2\end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&0&0\end{matrix}\right\}(*1)$$

Die Determinante der Matrix ist Null, was man sieht, wenn man $(*1)$ nach der letzten Zeile entwickelt.

$\Rightarrow$ Der Rang $rg(A)$ ist deshalb kleiner als 3.

Entwickelt man eine Unterdeterminante, z.B. links oben in $(*1)$

$$\begin{vmatrix}1&2\\0&-3\end{vmatrix}=-3-0\neq 0\,,$$

so sieht man, dass der Rang $rg(A)$ mindestens 2 sein muss. Wenn nun $2\le rg(A)<3$ ist, so ist $rg(A)=2$.

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.6

**Aufgabe 1:** (a.) Alle Bedingungen des Leibniz-Kriteriums sind erfüllt, wie man sieht:

- Es liegt eine alternierende Reihe vor (Vorzeichen $(-1)^n$).
- Die Folgeglieder konvergieren gegen Null, denn es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ .
- Das streng monoton fallende Verhalten der Folgeglieder sieht man aus der Überlegung

$$|a_{n+1}|-|a_n|=\frac{n+1}{(n+1)^2+1}-\frac{n}{n^2+1}=\frac{(n+1)\cdot(n^2+1)-n\cdot((n+1)^2+1)}{((n+1)^2+1)\cdot(n^2+1)}=\frac{n^3+n^2+n+1-n\cdot(n^2+2n+2)}{(n^2+2n+2)\cdot(n^2+1)}$$

$$=\frac{n^3+n^2+n+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+2n+2)\cdot(n^2+1)}=\frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)\cdot(n^2+1)}<0\quad\text{ab}\quad n\ge 2$$

Also ist die Reihe konvergent.

(b.) Mit dem Quotientenkriterium sieht man

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2n}=\frac{1}{2}<1$$

Also ist die Reihe konvergent.

(c.) Zu dieser Reihe geben wir eine divergente Minorante an. Es gilt $\frac{n+1}{n^2}>\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n}$ .

Da die Summe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergiert, divergiert nach dem Minorantenkriterium auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2}$

**Aufgabe 2:** Bei dieser Summe handelt es sich um eine geometrische Reihe mit

$a_1 = \frac{1}{e}$ , $q = \frac{1}{e}$ , $a_n = \left(\frac{1}{e}\right)^n$. Wir setzen in die Summenformel der geometrischen Reihe ein:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = \lim_{n\to\infty} a_1 \cdot \frac{e^{-n}-1}{e^{-1}-1} = \frac{1}{e} \cdot \frac{0-1}{\frac{1}{e}-1} = \frac{-1}{1-e} = \frac{1}{e-1} \overset{TR}{\approx} 0.5819767$$

**Aufgabe 3:** Wir beginnen mit der Systematik der Ableitungen (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$):

$$\begin{array}{llll}
 & f(x) = (1+x)^{-2} & \Rightarrow & f(x_0) = (1+0)^{-2} = 1 \\
 & f'(x) = -2\cdot(1+x)^{-3} & \Rightarrow & f'(x_0) = -2\cdot(1+0)^{-3} = -2 \\
 & f''(x) = (-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4} & \Rightarrow & f''(x_0) = (-2)\cdot(-3)\cdot(1+0)^{-3} = +6 \\
 & f'''(x) = (-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(1+x)^{-5} & \Rightarrow & f'''(x_0) = (-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(1+0)^{-4} = +24 \\
\Rightarrow & f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot(n+1)!\cdot(1+x)^{-n-2} & \Rightarrow & f^{(n)}(x_0) = (-1)^n\cdot(n+1)!
\end{array}$$

Diese setzen wir in die Formel der MacLaurin-Reihe ein

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\cdot(n+1)!}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot x^n$ und erhalten so das Ergebnis.

**Aufgabe 4:** Wir fassen die zu entwickelnde Funktion in einen mathematischen Ausdruck, gültig für eine Periode: $f(t) = \begin{cases} c & \text{für } -a \le t \le +a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Darauf basierend bestimmen wir die Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \int_{-a}^{+a} c\,dt = \frac{2}{T} \cdot [ct]_{-a}^{+a} = \frac{2}{T} \cdot 2ca = \frac{4ac}{T}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t)\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \int_{-a}^{+a} c\cdot\cos(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2c}{T} \cdot \left[\frac{1}{n\omega_0}\sin(n\omega_0 t)\right]_{-a}^{+a}$$

$$= \frac{2c}{n\omega_0 T} \cdot \left[\sin(n\omega_0 a) - \sin(-n\omega_0 a)\right] = \frac{4c}{n\omega_0 T} \cdot \sin(n\omega_0 a)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{(T)} f(t)\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2}{T} \cdot \int_{-a}^{+a} c\cdot\sin(n\omega_0 t)\,dt = \frac{2c}{T} \cdot \left[\frac{-1}{n\omega_0}\cos(n\omega_0 t)\right]_{-a}^{+a}$$

$= \frac{2c}{n\omega_0 T} \cdot \left[-\cos(n\omega_0 a) + \cos(-n\omega_0 a)\right] = 0$ , wie erwartet, da die Funktion gerade Symmetrie aufweist.

**Aufgabe 5:** Die in der Aufgabenstellung gegebene Funktion wird beschrieben durch

$$f(t)=\begin{cases}\frac{2A}{T}\cdot t & \text{für } 0\le t\le\frac{T}{2}\\ 2A-\frac{2A}{T}\cdot t & \text{für } \frac{T}{2}\le t\le T\end{cases}$$

Zum Ausführen der Fourier-Transformation berechnen wir ihr komplexwertiges Integral:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot e^{-i\omega t}\,dt=\int_0^{\frac{T}{2}}\frac{2A}{T}\cdot\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{e^{-i\omega t}}_{v'}dt+\int_{\frac{T}{2}}^{T}2A\cdot\underbrace{\left(1-\frac{t}{T}\right)}_{u}\cdot\underbrace{e^{-i\omega t}}_{v'}dt$$

Beide Integrale werden nun partiell integriert.

$$F(\omega)=\frac{2A}{T}\cdot\left[\underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{\frac{-1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}}_{v}\right]_0^{\frac{T}{2}}-\frac{2A}{T}\cdot\int_0^{\frac{T}{2}}\underbrace{1}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{-1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}}_{v}dt+2A\cdot\left[\underbrace{\left(1-\frac{t}{T}\right)}_{u}\cdot\underbrace{\frac{-1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}}_{v}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}-2A\cdot\int_{\frac{T}{2}}^{T}\underbrace{\frac{-1}{T}}_{u'}\cdot\underbrace{\frac{-1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}}_{v}dt$$

$$=\frac{-2A}{T}\cdot\frac{T}{2i\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}+0+\frac{2A}{i\omega T}\cdot\left[\frac{-1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega t}\right]_0^{\frac{T}{2}}+2A\cdot\left[0+\underbrace{\left(1+\frac{-T}{2T}\right)}_{=\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right)\right]+\frac{2A}{T}\cdot\left[\frac{1}{(i\omega)^2}\cdot e^{-i\omega t}\right]_{\frac{T}{2}}^{T}$$

$$=-\frac{A}{i\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}+\frac{2A}{i\omega T}\cdot\left(-\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}+\frac{1}{i\omega}\right)+2A\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{i\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right)+\frac{2A}{T}\cdot\left(\frac{+1}{(i\omega)^2}\cdot e^{-i\omega T}-\frac{1}{(i\omega)^2}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}\right)$$

Zusammenfassen liefert das Endergebnis:

$$\Rightarrow\quad F(\omega)=\frac{iA}{\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}+\frac{2A}{\omega^2T}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}-\frac{2A}{\omega^2T}-\frac{iA}{\omega}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}-\frac{2A}{\omega^2T}\cdot e^{-i\omega T}+\frac{2A}{\omega^2T}\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}$$

$$=\frac{2A}{\omega^2T}\cdot\left(2\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}-e^{-i\omega T}-1\right)=\frac{-2A}{\omega^2T}\cdot\underbrace{\left(e^{-i\omega T}-2\cdot e^{-i\omega\frac{T}{2}}+1\right)}_{\text{2. Binomische Formel}}=\frac{-2A}{\omega^2T}\cdot\left(e^{-i\omega\frac{T}{2}}-1\right)^2$$

**Aufgabe 6:**

(a.) Aufgrund der Vorgabe der Aufgabenstellung bauen wir auf, auf der Transformation

$f(t)=t \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; F(p)=\frac{1}{p^2}$ und integrieren im Originalraum:

$$\int_0^t\tau\,d\tau\;\circ\!\!-\!\!\bullet\;\frac{1}{p}\cdot F(p)\quad\Rightarrow\quad\left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t\;\circ\!\!-\!\!\bullet\;\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{2}t^2-0\;\circ\!\!-\!\!\bullet\;\frac{1}{p^3}\quad\Rightarrow\quad t^2\;\circ\!\!-\!\!\bullet\;\frac{2}{p^3}$$

(b.) Mit einer Partialbruchzerlegung bringen wir die Funktion im Bildraum in eine Form, die man in Korrespondenztabellen findet.

Wir beginnen mit der Suche der Nennernullstellen mit Hilfe der pq-Formel:

$$p^2+3p-10=0\quad\Rightarrow\quad p_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{40}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{7}{2}\quad\Rightarrow\quad p^2+3p-10=(p-2)\cdot(p+5)$$

$\Rightarrow$ Ansatz für Partialbruchzerlegung $\dfrac{5p-4}{p^2+3p-10}=\dfrac{A}{p-2}+\dfrac{B}{p+5}=\dfrac{A(p+5)+B\cdot(p-2)}{(p-2)\cdot(p+5)}$

Bestimmung der Koeffizienten: Bei $p=2 \;\Rightarrow\; 10-4=A\cdot 7+0 \;\Rightarrow\; A=\frac{6}{7}$

Bei $p=-5 \;\Rightarrow\; -25-4=B\cdot(-7)+0 \;\Rightarrow\; B=\frac{29}{7}$

Damit formuliert sich die Laplace-Rücktransformation wie folgt:

$$F(p)=\frac{5p-4}{p^2+3p-10}=\frac{\frac{6}{7}}{p-2}+\frac{\frac{29}{7}}{p+5} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; f(t)=\tfrac{6}{7}\cdot e^{2t}+\tfrac{29}{7}\cdot e^{-5t}$$

(c.) Mit quadratischer Ergänzung sehen wir sofort die Faktorisierung des Nenners

$$F(p)=\frac{1}{p^2+2p-8}=\underbrace{\frac{1}{p-2}}_{\bullet\!-\!\circ\, g_1(t)=e^{2t}}\cdot\underbrace{\frac{1}{p+4}}_{\bullet\!-\!\circ\, g_2(t)=e^{-4t}}$$ und berechnen dann das Faltungsprodukt:

$$F(p)\bullet\!\!-\!\!\circ\, f(t)=\int_0^t g_1(u)\cdot g_2(t-u)\,du=\int_0^t e^{2u}\cdot e^{-4(t-u)}du=e^{-4t}\cdot\int_0^t e^{+6u}\,du=e^{-4t}\cdot\left[\tfrac{1}{6}\cdot e^{+6u}\right]_0^t$$

$$=e^{-4t}\cdot\left(\tfrac{1}{6}\cdot e^{+6t}+\tfrac{1}{6}\cdot e^{0}\right)=\tfrac{1}{6}\cdot e^{2t}-\tfrac{1}{6}\cdot e^{-4t}$$

**Aufgabe 7:** Wir transformieren die Differentialgleichung in den Bildraum

$$\underbrace{y'}_{\circ\!-\!\bullet\, p\cdot\mathcal{Y}(p)-y(0)}+\underbrace{2y}_{\circ\!-\!\bullet\, 2\cdot\mathcal{Y}(p)}=\underbrace{2t}_{\circ\!-\!\bullet\,\frac{2}{p^2}}+\underbrace{4}_{\circ\!-\!\bullet\,\frac{4}{p}} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; p\cdot\mathcal{Y}(s)-\underbrace{y(0)}_{=1}+2\cdot\mathcal{Y}(p)=\frac{2}{p^2}+\frac{4}{p}$$ und lösen sie dort:

$$\Rightarrow\; (p+2)\cdot\mathcal{Y}(s)=\frac{2}{p^2}+\frac{4}{p}+1 \;\Rightarrow\; \mathcal{Y}(p)=\underbrace{\frac{2}{p^2\cdot(p+2)}}_{(*1)\text{ siehe unten}}+\underbrace{\frac{4}{p\cdot(p+2)}}_{4\cdot\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)}+\underbrace{\frac{1}{(p+2)}}_{e^{-2t}}$$

Zur Rücktransformation finden wir zwei der drei Summanden in der Korrespondenztabelle von Kapitel 15.3. Den Summand $(*1)$ jedoch müssen durch eine Berechnung rücktransformieren. Wir gehen über das Faltungsprodukt: Mit $\frac{1}{p^2}\bullet\!\!-\!\!\circ\; t=g_1(t)$ und $\frac{1}{p+2}\bullet\!\!-\!\!\circ\; e^{-2t}=g_2(t)$ stellen wir dieses auf und lösen das sich ergebende Integral mit partieller Integration:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{p^2\cdot(p+2)}\bullet\!\!-\!\!\circ\int_0^t g_1(t-u)\cdot g_2(u)\,du=\int_0^t (t-u)\cdot e^{-2u}du=\int_0^t t\cdot e^{-2u}du-\int_0^t u\cdot e^{-2u}du$$

$$=\left[\tfrac{t}{-2}\cdot e^{-2u}\right]_0^t-\left[u\cdot\tfrac{1}{-2}\cdot e^{-2u}\right]_0^t+\int_0^t\tfrac{1}{-2}e^{-2u}du=\left[\tfrac{t}{-2}\cdot e^{-2u}\right]_0^t-\left[u\cdot\tfrac{1}{-2}\cdot e^{-2u}\right]_0^t+\left[\tfrac{1}{4}\cdot e^{-2u}\right]_0^t$$

$$=\tfrac{t}{-2}\cdot e^{-2t}+\tfrac{t}{2}+\tfrac{t}{2}e^{-2t}-0+\tfrac{1}{4}\cdot e^{-2t}-\tfrac{1}{4}=\tfrac{t}{2}+\tfrac{1}{4}\cdot e^{-2t}-\tfrac{1}{4}$$ | Multiplikation mit 2

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{p^2 \cdot (p+2)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; t + \tfrac{1}{2} \cdot e^{-2t} - \tfrac{1}{2}$$

Damit fassen wir die Rücktransformation des $\mathcal{Y}(p)$ zur Lösung der Dgl. zusammen:

$$\mathcal{Y}(p) = \tfrac{2}{p^2 \cdot (p+2)} + \tfrac{4}{p \cdot (p+2)} + \tfrac{1}{(p+2)} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; y(t) = t + \tfrac{1}{2} \cdot e^{-2t} - \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - e^{-2t}\right) + e^{-2t} = -\tfrac{1}{2} e^{-2t} + t + \tfrac{3}{2}$$

Die Kontrolle der Lösung durch Ableiten und Einsetzen in die Dgl. sieht so aus:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2} e^{-2t} + t + \tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad y'(t) = e^{-2t} + 1$$

$$y' + 2y = \left(e^{-2t} + 1\right) + 2 \cdot \left(-\tfrac{1}{2} e^{-2t} + t + \tfrac{3}{2}\right) = e^{-2t} + 1 - e^{-2t} + 2t + 3 = 2t + 4 \quad \rightarrow \quad \text{passt.}$$

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.7

**Aufgabe 1:** (a.) Die dem Punkt $D$ gegenüberliegende Grundfläche wird aufgespannt durch die Punkte $A, B, C$, also durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Ist $O$ der Koordinatenursprung, so lauten diese beiden Vektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -5-3 \\ 3-1 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eine mögliche Normale auf dieser Fläche geben wir als deren Kreuzprodukt an:

$$\vec{n}_{ABC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-4 \\ +4-16 \\ -4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Ihr Betrag lautet

$$|\vec{n}_{ABC}| = \sqrt{(-6)^2 + (-12)^2 + (-12)^2} = 18 .$$

(i.) Die Höhe des Tetraeders berechnen wir als Projektion des Vektors $\overrightarrow{AD}$ auf $\vec{n}_{ABC}$. Den Rechenweg hierzu findet man in Aufgabe 4.12. Wir setzen sofort die Werte ein:

$$h = \frac{\vec{n}_{ABC} \cdot \left(-\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}\right)}{|\vec{n}_{ABC}|} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +4+3 \\ -1+1 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{-42-0+36}{18} = -\frac{1}{3} .$$

Die Höhe des Tetraeders ist natürlich der Betrag dieses Wertes, also $h = \dfrac{1}{3}$.

(ii.) Das Volumen eines Tetraeders ist laut Formelsammlung $V = \tfrac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \bullet \text{Höhe}$. Da der Betrag des Kreuzproduktes zweier Vektoren der von ihnen aufgespannten Fläche entspricht, ist in unserer Aufgabe $V = \tfrac{1}{3} \cdot |\vec{n}_{ABC}| \cdot |h| = \tfrac{1}{3} \cdot 18 \cdot \tfrac{1}{3} = 2$.

(iii.) Der Schnittwinkel zwischen den beiden Flächen ist derselbe wie der Schnittwinkel zwischen den beiden Flächennormalen (vgl. Aufgabe 4.16). Wir bestimmen noch $\vec{n}_{ABD}$:

$$\vec{n}_{ABD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) \times \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4-3 \\ 1-1 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ +6-14 \\ 0-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Den Schnittwinkel $\varphi$ der beiden Flächennormalen $\vec{n}_{ABC}$ und $\vec{n}_{ABD}$ erhält man über das Skalarprodukt: $\quad \vec{n}_{ABC} \cdot \vec{n}_{ABD} = \left|\vec{n}_{ABC}\right| \cdot \left|\vec{n}_{ABD}\right| \cdot \cos\varphi$

$$\Rightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\vec{n}_{ABC} \cdot \vec{n}_{ABD}}{\left|\vec{n}_{ABC}\right| \cdot \left|\vec{n}_{ABD}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -12 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-6)^2+(-12)^2+(-12)^2} \bullet \sqrt{(-3)^2+(-8)^2+(-7)^2}} = \frac{18+96+84}{18 \cdot \sqrt{122}} = \frac{198}{18 \cdot \sqrt{122}}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{198}{18 \cdot \sqrt{122}}\right) \overset{TR}{\approx} 5.1944° \quad \text{für den gefragten Schnittwinkel}$$

(b.) Mit der Schreibweise $\left[\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z}\right] = \vec{x} \cdot \left(\vec{y} \times \vec{z}\right)$ für das Spatprodukt lösen wir die Klammer auf:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right) \cdot \left(\left(\vec{a}+\vec{c}\right) \times \vec{b}\right) = \left(\vec{a}+\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \vec{b} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + \vec{a} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right) + \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{b}\right)$$

$$= \underbrace{\left[\vec{a}\ \vec{a}\ \vec{b}\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\vec{b}\ \vec{a}\ \vec{b}\right]}_{=0} + \left[\vec{a}\ \vec{c}\ \vec{b}\right] + \underbrace{\left[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}\right]}_{=0}$$

Sind zwei der Vektoren parallel, so wird das Spatprodukt zu Null.

$$= -\left[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}\right] = -\vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = -\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Beim Vertauschen zweier Faktoren wechselt das Vorzeichen des Spatproduktes.

**Aufgabe 2:** (a.) Wir beginnen mit dem Gauß-Algorithmus, wobei die Koeffizientenmatrix mit A bezeichnet sei und die erweiterte Koeffizientenmatrix mit $A|c$.

| A | | | | c | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 0 | $\leftarrow -\frac{1}{2} \cdot$ Zeile 1 |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | $\alpha$ | $\beta$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | $\leftarrow -\frac{2}{3} \cdot$ Zeile 2 |
| 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 0 | |
| 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | $\leftarrow -\frac{2}{3} \cdot$ Zeile 2 |
| 0 | 0 | 1 | $\alpha$ | $\beta$ | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 0 | 0 | $\leftarrow +\frac{1}{2} \cdot$ Zeile 3 |
| 0 | $\frac{3}{2}$ | 1 | 0 | 0 | $\leftarrow -\frac{3}{4} \cdot$ Zeile 3 |
| 0 | 0 | $\frac{4}{3}$ | 1 | 0 | |
| 0 | 0 | 1 | $\alpha$ | $\beta$ | $\leftarrow -\frac{3}{4} \cdot$ Zeile 3 |

$$\begin{array}{cccc|cl} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \leftarrow -\frac{2}{4\alpha-3}\cdot \text{Zeile 4} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & \leftarrow +\frac{3}{4\alpha-3}\cdot \text{Zeile 4} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 1 & 0 & \leftarrow -\frac{4}{4\alpha-3}\cdot \text{Zeile 4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\alpha-3}{4} & \beta & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccl} 2 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2\beta}{4\alpha-3} & \Rightarrow & x_1=\frac{-\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & +\frac{3\beta}{4\alpha-3} & \Rightarrow & x_2=\frac{+2\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & -\frac{4\beta}{4\alpha-3} & \Rightarrow & x_3=\frac{-3\beta}{4\alpha-3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\alpha-3}{4} & \beta & \Rightarrow & x_4=\frac{+4\beta}{4\alpha-3} \\ \hline \end{array}$$

Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösungen bestimmt man anhand der Ränge der Koeffizientenmatrix $\mathrm{A}$ und der erweiterten Koeffizientenmatrix $\mathrm{A}|c$:

(i.) Die Determinante der Koeffizientenmatrix ist $\det(A)=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}(4\alpha-3)=4\alpha-3$

Sind beide Ränge, $rg(\mathrm{A})$ und $rg(\mathrm{A}|c)$ gleich der Zahl der Unbekannten ($n=4$), so hat das Gleichungssystem eine eindeutige Lösung. Dies ist der Fall für $\det(A)\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha\neq\frac{3}{4}$. Die zugehörige Lösung ist am Ende des Gauß-Algorithmus angegeben.

(ii.) Nicht eindeutig lösbar ist das Gleichungssystem falls $rg(\mathrm{A})=3$. Ist dann $rg(\mathrm{A})=rg(\mathrm{A}|c)=3$, so existieren unendlich viele Lösungen. Dies ist der Fall für $\alpha=\frac{3}{4}$ und $\beta=0$, weil dann die vierte Zeile im Gauß-Algorithmus zu $0=0$ wird. Damit bleibt $x_4$ unbestimmt. Die allgemeine Lösung ist also $x_1, x_2, x_3$ wie oben berechnet, aber $x_4\in\mathbb{R}$ beliebig.

(iii.) Ist $rg(\mathrm{A})=3\neq rg(\mathrm{A}|c)=4$, so ist das Gleichungssystem in sich widersprüchlich und hat daher gar keine Lösung. Dies ist der Fall für $\det(A)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=\frac{3}{4}$ aber $\beta\neq 0$. (Dies entspricht anschaulich der Situation $0\cdot x_4=\beta\neq 0$. Solche $x_4$ existieren nicht.)

**Aufgabe 3:** (a.,i) Da der Integrand ein unecht gebrochener Partialbruch ist, müssen wir der Partialbruchzerlegung eine Polynomdivision vorschalten:

$$\begin{array}{l} \left(x^3-x^2-3x+12\right):\left(x^2+x-6\right)=x-2+\frac{5x}{x^2+x-6} \\ -\left(x^3+x^2-6x\right) \\ \hline \quad 0-2x^2+3x+12 \\ \quad -\left(-2x^2-2x+12\right) \\ \hline \qquad\qquad 5x \end{array}$$

Die Nullstellen des echt gebrochenen Anteils suchen wir mit der pq-Formel:

$$x^2+x-6=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=-\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+6}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{5}{2} \quad\Rightarrow\quad x_1=2 \quad\text{und}\quad x_2=-3$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet folglich:

$$\frac{5x}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A\cdot(x+3)+B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+3)}$$ Das Einsetzen zweier Werte liefert:

- für $x=2 \quad \rightarrow \quad 5\cdot 2=A\cdot(2+3)+0 \quad \Rightarrow \quad 10=5A \quad \Rightarrow \quad A=2$
- für $x=-3 \quad \rightarrow \quad 5\cdot(-3)=A\cdot 0+B\cdot(-5) \quad \Rightarrow \quad -5B=-15 \quad \Rightarrow \quad B=3$

Nach dieser Vorarbeit lösen wir das Integral der Aufgabenstellung wie folgt:

$$\int\frac{x^3-x^2-3x+12}{x^2+x-6}dx=\int(x-2)\,dx+\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{3}{x+3}dx \quad \text{Substitution}\begin{cases}u:=x-2 \;\Rightarrow\; du=dx\\ v:=x+3 \;\Rightarrow\; dv=dx\end{cases}$$

$$=\tfrac{1}{2}x^2-2x+C_1+\int\frac{2\,du}{u}+\int\frac{3\,dv}{v}=\tfrac{1}{2}x^2-2x+2\cdot\ln|x-2|+3\cdot\ln|x+3|+c_2$$

(a,ii.) Auch wenn in der Aufgabenstellung nur die Substitution gefragt wird, so führen wir doch die gesamte Lösung des Integrals vor.

Die vorgeschlagene Substitution lautet $t:=e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx}=e^x \quad \Rightarrow \quad dx=e^{-x}\cdot dt=\frac{1}{t}\cdot dt$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{2\cdot e^{2x}-3e^x-2}{e^{2x}-e^x-2}dx=\int\frac{2\cdot t^2-3t-2}{t^2-t-2}\cdot\frac{1}{t}dt$$

Dies lösen wir vermittels Partialbruchzerlegung. Eine Nennernullstelle liegt bei $x_1=0$. Die anderen beiden finden wir mit Hilfe der pq-Formel:

$$t^2-t-2=0 \quad \Rightarrow \quad t_{2,3}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+2}=-\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad t_2=2 \quad \text{und} \quad t_3=-1$$

Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung lautet folglich:

$$\frac{2t^2-3t-2}{(t^2-t-2)\cdot t}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-2}+\frac{C}{t+1}=\frac{A\cdot(t-2)\cdot(t+1)+B\cdot t\cdot(t+1)C\cdot t\cdot(t-2)}{t\cdot(t-2)\cdot(t+1)}$$ Werte einsetzen liefert:

$$\left.\begin{array}{l}\bullet \text{ für } t=0 \quad \rightarrow \quad -2=A\cdot(-2)\cdot 1+0+0 \quad \Rightarrow \quad A=1\\ \bullet \text{ für } x=-1 \quad \rightarrow \quad 2+3-2=0+0+C\cdot(-1)\cdot(-3) \quad \Rightarrow \quad C=1\\ \bullet \text{ für } t=2 \quad \rightarrow \quad 8-6-2=0+B\cdot 2\cdot 3+0 \quad \Rightarrow \quad B=0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{2t^2-3t-2}{(t^2-t-2)\cdot t}=\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{2\cdot e^{2x}-3e^x-2}{e^{2x}-e^x-2}dx=\int\frac{1}{t}dt+\int\frac{1}{t+1}dt=\ln|t|+\ln|t+1|+C_1=x+\ln\left(e^x+1\right)+C_2$$

(b.) Die beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich bei $x=0$ und bei $x=\frac{\pi}{2}$.

Das Rotationsvolumen bei Drehung einer Kurve um die $x$ – Achse ist $V=\pi\cdot\int\limits_a^b\left(y(x)\right)^2dx$

$$\Rightarrow \ f(x) \text{ überstreicht } V_f = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x)\,dx = \pi \cdot \left[\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}\sin(x)\cos(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \cdot \left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\pi}{2} - 0\right) = \tfrac{1}{4}\pi^2$$

$$\Rightarrow \ g(x) \text{ überstreicht das Volumen } V_g = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\tfrac{2x}{\pi}\right)^2 dx = \pi \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\pi^3}{8} - 0\right) = \frac{\pi^2}{6}$$

Die Differenz der beiden ist das gefragte Volumen: $V_{\text{Lösung}} = V_f - V_g = \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6}\right)\pi^2 = \tfrac{1}{12}\pi^2$ .

Die Mantelfläche eines Rotationskörpers bei Drehung der Kurve um die x- Achse lautet

$$M = 2\pi \cdot \int_a^b y(x) \cdot \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\,dx \ .$$

Für $f(x)$ ergibt sich diese gemäß

$$M_f = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \cdot \sqrt{1 + \cos^2(x)}\,dx$$

Integriert wird nach der Substitution mit $u := \cos x \ \Rightarrow \ \frac{du}{dx} = -\sin x \ \Rightarrow \ \sin x \cdot dx = -du$

$$\Rightarrow \ M_f = \underbrace{-2\pi \cdot \int_{\dots}^{\dots} \sqrt{1+u^2}\,du = -2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{2}u \cdot \sqrt{1+u^2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(u)\right]}_{\text{Genau dieses unbestimmte Integral wurde in Aufgabe 7.6.c vorgeführt.}}$$

$$= -2\pi \cdot \left[\tfrac{1}{2}\cos(x) \cdot \sqrt{1+\cos^2(x)} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\pi \cdot (0-0) + 2\pi \cdot \left(\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{1+1^2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{arsinh}(1)\right) = \pi \cdot \left(\sqrt{2} + \operatorname{arsinh}(1)\right) \overset{TR}{\approx} 7.21179924$$

Für $g(x)$ hingegen berechnen wir

$$M_g = 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{\pi} \cdot \sqrt{1 + \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^2}\,dx = 2\pi \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{1+\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,dx = 4 \cdot \sqrt{1+\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^2} \cdot \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 4 \cdot \sqrt{1+\left(\tfrac{2}{\pi}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \overset{TR}{\approx} 5.84994677$$

Die Summe ist die gesuchte Oberfläche: $M_{\text{ges}} = M_f + M_g \overset{TR}{\approx} 7.21179924 + 5.84994677 \overset{TR}{\approx} 13.0617465$ .

# Lösungen zur Klausur Nr. 14.8

**Aufgabe 1:** (a.) Wir arbeiten mit der Methode der Trennung der Variablen.

$$y' = 1 + x + y^2 + xy^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1 + x + (1+x) \cdot y^2 = (1+x) \cdot \left(1 + y^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \int (1+x)\,dx$$

$$\Rightarrow \quad \arctan(y) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + C_1 \quad \Rightarrow \quad y = \tan\left(\tfrac{1}{2}x^2 + x + C_1\right) \qquad \text{als allgemeine Lsg. der Dgl.}$$

Einsetzen des Anfangswertes liefert:

$$y(2) = 1 \;\Rightarrow\; \tan\left(\tfrac{1}{2} \cdot 4 + 2 + C_1\right) = 1 \;\Rightarrow\; \tan(4 + C_1) = 1 \;\Rightarrow\; 4 + C_1 = \arctan(1) = \tfrac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; C_1 = \tfrac{\pi}{4} - 4$$

(b.) Auch hier ist die Variablentrennung die Methode der Wahl:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(\ln(x))}{x} \cdot e^y \quad \Rightarrow \quad e^{-y} \cdot dy = \frac{\cos(\ln(x))}{x} \cdot dx$$

$$\Rightarrow \quad \int e^{-y}\,dy = \underbrace{\int \tfrac{1}{x} \cdot \cos(\ln(x))\,dx \quad \Rightarrow \quad -e^{-y} = \int \cos(t)\,dt}_{\text{Mit der Substitution } \ln(x) =: t \;\Rightarrow\; \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; \frac{1}{x}dx = dt} = \sin(t) + C_1 = \sin(\ln(x)) + C$$

$$\Rightarrow \quad e^{-y} = -\sin(\ln(x)) - C \qquad \Big| \text{ Gleichung logarithmieren}$$

$$\Rightarrow \quad -y = \ln\left(-\sin(\ln(x)) - C\right) \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\ln\left(-\sin(\ln(x)) - C\right) \qquad \text{als allg. Lsg. der Dgl.}$$

$$\text{Anfangswert} \quad \Rightarrow \quad y\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = -\ln\left(-\sin\left(\ln\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)\right) - C\right) = -\ln\left(-\sin\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) - C\right) = -\ln(1-c) = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - c = 2 \quad \Rightarrow \quad c = -1$$

**Aufgabe 2:** (a.) Die Formel für die Bogenlängenberechnung einer in Parameterdarstellung gegebenen Kurve $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ findet man zu $B = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$ .

Um dieses Integral aufzustellen, berechnen wir als Vorarbeit

$$\dot{x}(t) = -2 \cdot e^{-2t} \cdot \cos(t) - e^{-2t} \cdot \sin(t) = \left(-2\cos(t) - \sin(t)\right) \cdot e^{-2t}$$

$$\dot{y}(t) = -2 \cdot e^{-2t} \cdot \sin(t) + e^{-2t} \cdot \cos(t) = \left(-2\sin(t) + \cos(t)\right) \cdot e^{-2t}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(-2\cos(t) - \sin(t)\right)^2 \cdot e^{-4t} + \left(-2\sin(t) + \cos(t)\right)^2 \cdot e^{-4t}$$

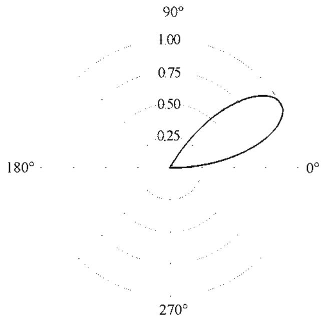
$$= \left[4\cos^2(t) + 4\cos(t)\sin(t) + \sin^2(t) + 4\sin^2(t) - 4\sin(t)\cos(t) + \cos^2(t)\right] \cdot e^{-4t}$$

$$= 5 \cdot e^{-4t} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{5} \cdot e^{-2t} \qquad \text{Damit setzen wir ein:}$$

$$B = \int\limits_0^a \sqrt{5} \cdot e^{-2t}\,dt = \left[-\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot e^{-2t}\right]_0^a = -\tfrac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \left(e^{-2a} - 1\right) \quad \text{für die gefragte Bogenlänge}$$

Der gefragte Grenzwert lautet somit $\lim\limits_{a \to \infty} B(a) = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$

(b.)




(i.) Die graphische Darstellung der Funktion $\rho(\varphi) = \sin(3\varphi)$ für $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$

findet man nebenstehend.

(ii.) Der Flächeninhalt einer Kurve in Polarkoordinaten ist $F = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{2}\left(\rho(\varphi)\right)^2 d\varphi$

Wir setzen die Funktion aus der Aufgabenstellung ein und erhalten

$$F = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \tfrac{1}{2}\sin^2(3\varphi)\, d\varphi = \left[\tfrac{1}{4}\varphi - \tfrac{1}{12}\sin(3\varphi)\cdot\cos(3\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{\pi}{3} - 0\right) - (0-0) = \tfrac{\pi}{12}$$

(iii.) Die Tangentensteigung einer Funktion in Polarkoordinaten lautet

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{\dot{\rho}\cdot\sin(\varphi) + \rho\cdot\cos(\varphi)}{\dot{\rho}\cdot\cos(\varphi) - \rho\cdot\sin(\varphi)} = \frac{3\cdot\cos(3\varphi)\cdot\sin(\varphi) + \sin(3\varphi)\cdot\cos(\varphi)}{3\cdot\cos(3\varphi)\cdot\cos(\varphi) - \sin(3\varphi)\cdot\sin(\varphi)}$$

$$= \underbrace{\frac{3\cdot\cos(90°)\cdot\sin(30°) + \sin(90°)\cdot\cos(30°)}{3\cdot\cos(90°)\cdot\cos(30°) - \sin(90°)\cdot\sin(30°)} = \frac{\cos(30°)}{-\sin(30°)}}_{\text{weil } \cos(90°)=0 \text{ und } \sin(90°)=1} = \frac{-1}{\tan(30°)} = -\sqrt{3}$$

**Aufgabe 3:** (a.) Charakteristische Kurvenpunkte sucht man anhand der Nullstellen der Ableitungen. Da der Wertebereich der zu untersuchenden Funktion $f(x,y) = 4e^{x^2+y^2} - x^2 - y^2$ zweidimensional ist, berechnen wir die entsprechenden partiellen Ableitungen als Vorarbeit:

$$f_x = 8x\cdot e^{x^2+y^2} - 2x \qquad f_y = 8y\cdot e^{x^2+y^2} - 2y \qquad f_{xy} = 16xy\cdot e^{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = 8\cdot e^{x^2+y^2} + 16x^2\cdot e^{x^2+y^2} - 2 \qquad f_{yy} = 8\cdot e^{x^2+y^2} + 16y^2\cdot e^{x^2+y^2} - 2$$

Wir suchen nun die Nullstellen der partiellen ersten Ableitungen:

- $f_x = 8x\cdot e^{x^2+y^2} - 2x = 0 \;\Rightarrow\; 2x\cdot\left(4e^{x^2+y^2} - 1\right) = 0 \;\Rightarrow$ Eine Nullstelle bei $x_1 = 0$

Weitere Nullstellen könnten liegen bei $4e^{x^2+y^2} = 1 \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$. Da Quadrate in $\mathbb{R}$ immer positiv sind, $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ aber negativ, finden wir in $\mathbb{R}$ keine weiteren Nullstellen von $f_x$.

- $f_y = 8y \cdot e^{x^2+y^2} - 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y \cdot \left(4e^{x^2+y^2} - 1\right) = 0 \quad \Rightarrow$ Eine Nullstelle bei $y_1 = 0$

Weitere Nullstellen treten bei $f_y$ aus dem gleichen Grunde in $\mathbb{R}$ nicht auf wie bei $f_x$.

Folgerung: Ein einziger charakteristischer Kurvenpunkt wurde gefunden bei $x_1 = 0$ , $y_1 = 0$.

Wir klassifizieren diesen anhand der Delta-Diskriminante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(0;0) & f_{xy}(0;0) \\ f_{yx}(0;0) & f_{yy}(0;0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 \cdot e^0 + 0 - 2 & 0 \\ 0 & 8 \cdot e^0 + 0 - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0$$

Da die Delta-Diskriminante dort größer als Null ist, liegt ein Extremum vor. Die Art des Extremums finden wir anhand der zweiten partiellen Ableitung: $f_{xx}(0;0) = 8 \cdot e^0 + 0 - 2 = 6 > 0$

Da diese in dem bewussten Punkt positiv ist, liegt ein lokales Minimum vor.

(b.) Ein Taylorpolynom zweiten Grades, also eine nach der zweiten Ableitung abgebrochene Taylorreihe als Funktion zweier Variabler lautet:

$$p_2(x,y) = f(x_0,y_0) + \left[\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \cdot x + \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \cdot y\right] + \frac{1}{2} \cdot \left[\tfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} \cdot x^2 + \tfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\, \partial y} \cdot x \cdot y + \tfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \cdot y^2\right]$$

Dafür berechnen wir die partiellen Ableitungen und deren Werte im Entwicklungspunkt

| | |
|---|---|
| $f(x,y) = (2x-3y) \cdot \sin(3x-2y)$ | $f(0,0) = 0$ |
| $f_x(x,y) = 2 \cdot \sin(3x-2y) + (2x-3y) \cdot 3 \cdot \cos(3x-2y)$ | $f_x(0,0) = 0$ |
| $f_{xx}(x,y) = 12 \cdot \cos(3x-2y) - (6x-9y) \cdot 3 \cdot \sin(3x-2y)$ | $f_{xx}(0,0) = 12$ |
| $f_y(x,y) = -3 \cdot \sin(3x-2y) - (2x-3y) \cdot 2 \cdot \cos(3x-2y)$ | $f_y(0,0) = 0$ |
| $f_{yy}(x,y) = 12 \cdot \cos(3x-2y) - (4x-6y) \cdot 2 \cdot \sin(3x-2y)$ | $f_{yy}(0,0) = 12$ |
| $f_{xy}(x,y) = -13 \cdot \cos(3x-2y) + (6x-9y) \cdot 2 \cdot \sin(3x-2y)$ | $f_{xy}(0,0) = -13$ |

Und setzen diese in das Taylorpolynom ein:

$$p_2(x,y) = 0 + [0 \cdot x + 0 \cdot y] + \tfrac{1}{2} \cdot \left[12 \cdot x^2 - 13 \cdot x \cdot y + 12 \cdot y^2\right] = 6x^2 - \tfrac{13}{2}xy + 6y^2$$

(c.) Die Richtungsableitung ist $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \text{grad } f \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Darin ist $\text{grad } f = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \; f(x,y,z) \\ \partial/\partial y \; f(x,y,z) \\ \partial/\partial z \; f(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left[\, x \cdot (\ln(x)+y) \cdot (\ln(\ln(x)+y)+z) \,\right]^{-1} \\ \left[\, (\ln(x)+y) \cdot (\ln(\ln(x)+y)+z) \,\right]^{-1} \\ \left[\, \ln(\ln(x)+y)+z \,\right]^{-1} \end{pmatrix}$

und außerdem $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$ .

Wir setzen den Punkt $P_0 = \begin{pmatrix} e \\ e-1 \\ e \end{pmatrix}$ ein und erhalten $\operatorname{grad} f \,\Big|_{P_0} = \begin{pmatrix} \left(e^2 \cdot (e+1)\right)^{-1} \\ \left(e \cdot (e+1)\right)^{-1} \\ (e+1)^{-1} \end{pmatrix} = \frac{e^{-2}}{e+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ e^2 \end{pmatrix}$ .

Damit können wir die gefragte Richtungsableitung im Punkt $P_0$ als Skalarprodukt berechnen:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\right|_{P_0} = \operatorname{grad} f \,\Big|_{P_0} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{e^{-2}}{e+1} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{e^{-2}}{7 \cdot (e+1)} \cdot \left(2 + 3e + 6e^2\right) \overset{TR}{\approx} 0.2833224449278 \,.$$

Den maximalen Wert nimmt die Richtungsableitung in Richtung des Gradienten an. Sein Betrag ist also der maximal mögliche Wert der Richtungsableitung:

Im Punkt $P_0$ lautet er $\left|\operatorname{grad} f \,\Big|_{P_0}\right| = \left|\frac{e^{-2}}{e+1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e \\ e^2 \end{pmatrix}\right| = \frac{e^{-2}}{e+1} \cdot \sqrt{1 + e^2 + e^4} \overset{TR}{\approx} 0.2888649869$ .

# 15 Anhang: Tabellen

Tabellen sind hier nur insoweit wiedergegeben, wie man sie direkt für das Lösen der vorgestellten Übungsaufgaben benötigt. Umfassendere Tabellen findet man z.B. in Formelsammlungen wie etwas „Formeln und Fakten im Grundkurs Mathematik“ von Klaus Vetters (ISBN 3-519-20207-7) oder im „Teubner-Taschenbuch der Mathematik“, (ISBN 3-519-20012-0). Aus diesen Werken sind auch die nachfolgenden Tabellen entnommen.

## Tabelle 1: Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist $\Phi_0(u) = \int_0^u \varphi(x)\,dx = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ .

Sie wird in Bild 15-1 veranschaulicht. Die Werte, entnimmt man Tabelle 15.1.

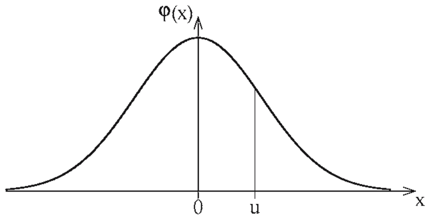



**Bild 15-1**
Veranschaulichung der Standardnormalverteilung. Die Kurve gibt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\varphi(x)$ wieder.

Die Verteilungsfunktion entspricht der grau unterlegten Fläche unter der Kurve, also $\Phi(u)$ .

**Tabelle 15.1** Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung (Vorkomma-Nullen sind nicht gedruckt.)

| $\Phi_0(u)$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | $\Phi_0(u)$ | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .50000 | .50798 | .51595 | .52392 | .53188 | 1.5 | .93319 | .93575 | .93822 | .94062 | .94295 |
| 0.1 | .53983 | .54776 | .55567 | .56356 | .57142 | 1.6 | .94520 | .94738 | .94950 | .95154 | .95352 |
| 0.2 | .57926 | .58706 | .59484 | .60257 | .61026 | 1.7 | .95544 | .95728 | .95907 | .96080 | .96246 |
| 0.3 | .61791 | .62552 | .63307 | .64058 | .64803 | 1.8 | .96407 | .96562 | .96712 | .96856 | .96995 |
| 0.4 | .65542 | .66276 | .67003 | .67724 | .68439 | 1.9 | .97128 | .97257 | .97381 | .97500 | .97615 |
| 0.5 | .69146 | .69847 | .70540 | .71226 | .71904 | 2.0 | .97725 | .97831 | .97933 | .98030 | .98124 |
| 0.6 | .72575 | .73237 | .73891 | .74537 | .75175 | 2.1 | .98214 | .98300 | .98382 | .98461 | .98537 |
| 0.7 | .75804 | .76424 | .77035 | .77637 | .78231 | 2.2 | .98610 | .98679 | .98746 | .98809 | .98870 |
| 0.8 | .78815 | .79389 | .79955 | .80511 | .81057 | 2.3 | .98928 | .98983 | .99036 | .99086 | .99134 |
| 0.9 | .81594 | .82121 | .82639 | .83147 | .83646 | 2.4 | .99180 | .99224 | .99266 | .99305 | .99343 |
| 1.0 | .84135 | .84614 | .85083 | .85543 | .85993 | 2.5 | .99379 | .99413 | .99446 | .99477 | .99506 |
| 1.1 | .86433 | .86864 | .87286 | .87698 | .88100 | 2.6 | .99534 | .99560 | .99586 | .99609 | .99632 |
| 1.2 | .88493 | .88877 | .89251 | .89617 | .89973 | 2.7 | .99653 | .99674 | .99693 | .99711 | .99728 |
| 1.3 | .90320 | .90658 | .90988 | .91309 | .91621 | 2.8 | .99745 | .99760 | .99774 | .99788 | .99801 |
| 1.4 | .91924 | .92220 | .92507 | .92786 | .93056 | 2.9 | .99813 | .99825 | .99836 | .99846 | .99856 |

# Tabelle 2: Quantile $\chi^2_{(m,q)}$ der $\chi^2$-Verteilung

Die Veranschaulichung findet sich in Bild 15-2, die Daten sind in Tabelle 15.2 gedruckt.

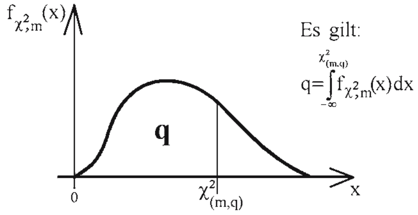



**Bild 15-2**
Quantile der $\chi^2$-Verteilung.
Aus der Wahrscheinlichkeit $q$ ergibt sich bei $m$ Freiheitsgraden ein Quantil $\chi^2_{(m,q)}$ als einseitige Abgrenzung nach oben.

**Tabelle 15.2** Quantile der $\chi^2$-Verteilung

| $m\downarrow$ $q\rightarrow$ | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.1 | 0.9 | 0.95 | 0.975 | 0.99 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00016 | 0.00098 | 0.0039 | 0.0158 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 |
| 2 | 0.0201 | 0.0506 | 0.103 | 0.211 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 |
| 3 | 0.115 | 0.216 | 0.352 | 0.584 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.35 |
| 4 | 0.297 | 0.484 | 0.711 | 1.06 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 |
| 5 | 0.554 | 0.831 | 1.15 | 1.61 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.08 |
| 6 | 0.872 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 |
| 7 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.47 |
| 8 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 |
| 9 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 |
| 10 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 |
| 11 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 |
| 12 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 |
| 13 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 |
| 14 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 |
| 15 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 |
| 16 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 |
| 17 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 |
| 18 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 |
| 19 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 |
| 20 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 |
| 22 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 |
| 24 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 |
| 26 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 |
| 28 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 |
| 30 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 |
| 40 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 29.05 | 51.81 | 55.76 | 59.34 | 63.96 |
| 50 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 37.69 | 63.17 | 67.51 | 71.42 | 76.15 |

# Tabelle 3: Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

**Tabelle 15.3** Korrespondenztabelle der Laplace-Transformation

| $F(s)$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $f(t)$ | $F(s)$ $\bullet\!\!-\!\!\circ$ | $f(t)$ |
|---|---|---|---|
| $a\cdot F(s)+b\cdot G(s)$ | $a\cdot f(t)+b\cdot g(t)$ | $\int_s^\infty F(u)du$ | $\frac{1}{t}\cdot f(t)$ |
| $\frac{1}{c}\cdot F\left(\frac{s}{c}\right)$ | $f(c\cdot t)$ | $e^{-\tilde{t}s}\cdot F(s)$ mit $\tilde{t}\geq 0$ | $f(t-\tilde{t})\cdot\varepsilon(t-\tilde{t})$ |
| $s^nF(s)-s^{n-1}f(0+)$ $-s^{n-2}f'(0+)-\ldots$ $\ldots-f^{(n-1)}(0+)$ | $\frac{d^n}{dt^n}f(t)$ | $e^{s\cdot\tilde{t}}\left(F(s)-\int_0^{\tilde{t}}f(t)\cdot e^{-s\cdot t}dt\right)$ | $f(t+\tilde{t})$ |
| | | $F(s)\cdot G(s)$ | $\int_0^t f(t-\tau)\cdot g(\tau)d\tau$ |
| $\frac{1}{s}F(s)$ | $\int_0^t f(\tau)d\tau$ | $F(s+a)$ | $e^{-at}\cdot f(t)$ |
| $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $t^n$ | $(-1)^n\cdot\frac{d^n}{dt^n}F(s)$ | $t^n\cdot f(t)$ |
| $\frac{1}{s}$ | $1$ | $\ln\left(\frac{s-a}{s-b}\right)$ | $\frac{1}{t}\cdot\left(e^{bt}-e^{at}\right)$ |
| $\frac{1}{s^2}$ | $t$ | $\ln\left(\frac{s^2+a^2}{s^2+b^2}\right)$ | $\frac{2}{t}\cdot\left(\cos(bt)-\cos(at)\right)$ |
| $1$ | $\delta(t)$ | $\frac{1}{\sqrt{s}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi\cdot t}}$ |
| $e^{-as}$ | $\delta(t-a)$ | $\sqrt{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{s\cdot\sqrt{s}}$ | $\sqrt{t}$ |
| $\frac{1}{s^n}$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)^1}$ | $\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$ | $\frac{1}{2t\cdot\sqrt{\pi\cdot t}}\left(e^{bt}-e^{at}\right)$ |
| $\frac{1}{s+a}$ | $e^{-at}$ | $\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$ | $\frac{1}{t}\cdot\sin(at)$ |
| $\frac{1}{(s+a)^n}$ | $\frac{t^{n-1}\cdot e^{-at}}{(n-1)!}$ | $\frac{\sin\left(b+\arctan\frac{a}{s}\right)}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | $\sin(at+b)$ |
| $\frac{1}{s\cdot(s+a)}$ | $\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$ | $\frac{\cos\left(b+\arctan\frac{a}{s}\right)}{\sqrt{s^2+a^2}}$ | $\cos(at+b)$ |
| $\frac{1}{(s+a)\cdot(s+b)}$ | $\frac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ | $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $t\cdot e^{at}$ |
| $\frac{1}{s^2+a^2}$ | $\frac{1}{a}\cdot\sin(at)$ | $\frac{s}{(s-a)^2}$ | $(1+at)\cdot e^{at}$ |
| $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos(at)$ | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh(at)$ |
| $\frac{1}{(s-a)^3}$ | $\frac{1}{2}t^2\cdot e^{at}$ | $\frac{1}{s^2-a^2}$ | $\frac{1}{a}\cdot\sinh(at)$ |

In dieser Tabelle sind $a,b,c\in\mathbb{R}$ und $0\neq a^2\neq b^2\neq 0$; sowie $\varphi(0+):=\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)$

Auch ist $\delta(t)$ die Dirac'sche Deltafunktion und $\varepsilon(t)$ die Heaviside-Sprungfunktion.

# Tabelle 4: Einige Ableitungen und unbestimmte Integrale

**Tabelle 15.4** Weitere Ableitungen und Integrale lassen sich mit geeigneten Rechenregeln bestimmen.

| $f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ | $F(x)+C=\int f(x)dx$ | $f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ | $F(x)+C=\int f(x)dx$ |
|---|---|---|---|
| $x^n$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad \text{mit } n\neq -1$ | | |
| $x^{-1}$ | $\ln(x)+C$ | $\sqrt{a^2-x^2}$ | $\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$ |
| $e^x$ | $e^x+C$ | $\sqrt{a^2+x^2}$ | $\frac{x}{2}\cdot\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{ar}\sinh\left(\frac{x}{a}\right)+C$ |
| $a^x$ | $\frac{a^x}{\ln(a)}+C$ | $\sqrt{x^2-a^2}$ | $\frac{x}{2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\operatorname{ar}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)+C$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x)+C$ | $\tan(ax)$ | $-\frac{1}{a}\cdot\ln\lvert\cos(ax)\rvert+C$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x)+C$ | $\sin^2(ax)$ | $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4a}\cdot\sin(2ax)+C$ |
| $\frac{1}{\cos^2(x)}$ | $\tan(x)+C$ | $\cos^2(ax)$ | $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4a}\cdot\sin(2ax)+C$ |
| $\frac{1}{\sin^2(x)}$ | $-\cot(x)+C$ | $\sin(ax)\cdot\cos(ax)$ | $\frac{1}{2a}\cdot\sin^2(x)+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ | $\begin{cases}\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C_1\\-\arccos\left(\frac{x}{a}\right)+C_2\end{cases}$ | $\arcsin(x)$ | $x\cdot\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}+C$ mit $\lvert x\rvert\leq 1$ |
| $\frac{1}{1+x^2}$ | $\begin{cases}\arctan(x)+C_1\\-\operatorname{arc}\cot(x)+C_2\end{cases}$ | $\arccos(x)$ | $x\cdot\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}+C$ mit $\lvert x\rvert\leq 1$ |
| $\sinh(x)$ | $\cosh(x)+C$ | $\cosh(x)$ | $\sinh(x)+C$ |
| $\frac{1}{\cosh^2(x)}$ | $\tanh(x)+C$ | $\tanh(x)$ | $\ln(\cosh(x))+C$ |
| $\frac{1}{\sinh^2(x)}$ | $-\coth(x)+C$ | $\sqrt{(ax+b)^n}$ | $\frac{2}{a\cdot(2+n)}\sqrt{(ax+b)^{n+2}}+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ | $\operatorname{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right)+C$ | $\ln(x)$ | $x\cdot\ln(x)-x+C$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ | $\operatorname{arcosh}\left(\frac{x}{a}\right)+C$ (mit $\lvert x\rvert<\lvert a\rvert$) | $\frac{1}{x\cdot\ln(x)}$ | $\ln(\ln(x))+C$ |
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\begin{cases}\operatorname{ar}\tanh(x)+C_1 & \text{für } \lvert x\rvert<1\\-\operatorname{ar}\coth(x)+C_2 & \text{für } \lvert x\rvert>1\end{cases}$ | $(\ln(x))^2$ | $x\cdot(\ln(x))^2-2x\cdot\ln(x)+2x+C$ |

# Sachwortverzeichnis

## E



## F