

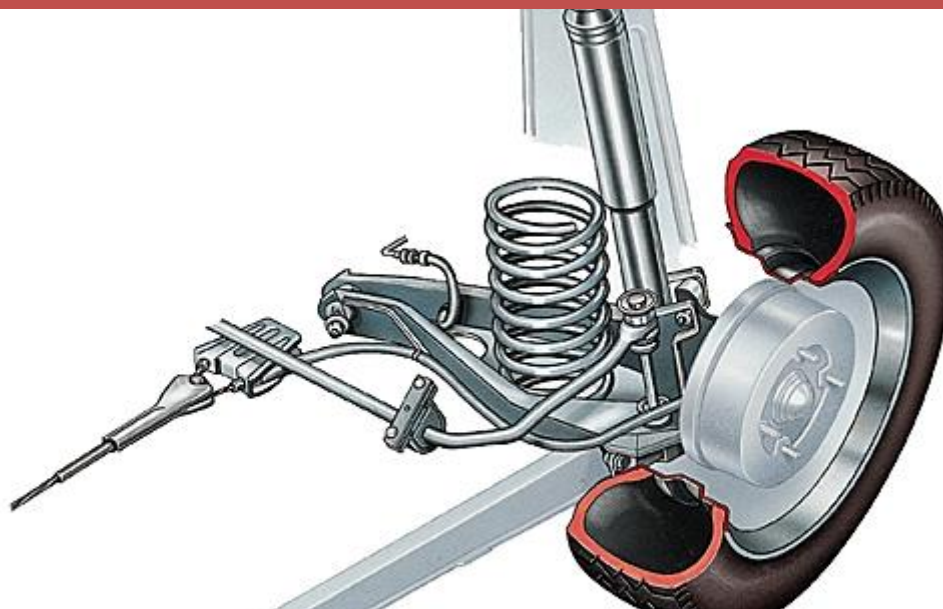


télécom  
saint-étienne

école d'ingénieurs  
nouvelles technologies

Niveau de confidentialité : document  
ouvert

# Suspension d'une automobile



Corentin FAURE, Hugo MORAI-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE, Mohamed  
OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

## Table des matières

<b>1.</b>	<b><u>Introduction .....</u></b>	<b><u>3</u></b>
<b>2.</b>	<b><u>Etude qualitative d'une suspension automobile .....</u></b>	<b><u>3</u></b>
<b>3.</b>	<b><u>Etude mécanique du système, avec un profil de route rectiligne .....</u></b>	<b><u>4</u></b>
3.1.	Système sans amortisseur.....	4
3.2.	Système avec amortisseur .....	7
<b>4.</b>	<b><u>Profil de route sinusoïdal .....</u></b>	<b><u>12</u></b>
4.1.	Une première forme réelle pour caractériser le mouvement .....	12
4.2.	Une seconde forme complexe .....	14
4.3.	Interprétation des résultats dans le contexte d'étude (véhicule) .....	16
<b>5.</b>	<b><u>Conclusion .....</u></b>	<b><u>18</u></b>
<b>6.</b>	<b><u>Bibliographie .....</u></b>	<b><u>18</u></b>
<b>7.</b>	<b><u>Annexes.....</u></b>	<b><u>19</u></b>

## 1. Introduction

La suspension est un élément indispensable d'une automobile. Celle-ci permet à la fois d'assurer le confort des passagers et d'amortir les chocs liés au profil de la route sur les pièces du châssis. Pour cela, elle utilise deux éléments, un ressort et un amortisseur. L'intérêt du ressort peut être déduit facilement, tandis que celui de l'amortisseur est plus complexe à visualiser. Au cours de cette étude, nous nous intéresserons à un système simplifié d'un véhicule, constitué d'un véhicule d'une certaine masse, relié à l'arbre de la roue par le ressort de la suspension associé à un amortisseur. Nous étudierons d'abord ce système de manière qualitative puis nous verrons son fonctionnement sous forme d'une étude mécanique. Cette étude se décomposera en deux parties. Tout d'abord, l'aspect transitoire du mouvement d'un véhicule soumis aux irrégularités de la route sera considéré, en étudiant le système avec et sans amortisseur pour comprendre de manière quantitative son intérêt. Ensuite nous nous proposerons d'étudier l'aspect permanent, sur une route de profil sinusoïdal, pour ensuite interpréter les résultats en termes d'usure du système et d'effets de cette usure sur le comportement du véhicule.

## 2. Etude qualitative d'une suspension automobile

L'amortissement d'un système mécanique est sa capacité à affaiblir son mouvement au cours du temps, c'est-à-dire à absorber l'énergie causant ce mouvement. Selon les cas, il peut être proportionnel à la vitesse du système, au carré de sa vitesse ou pas lié à celle-ci. Dans le cadre d'un système automobile, l'amortissement à effectuer est celui des rebonds des suspensions à chaque sollicitation de celles-ci, ce qui est assuré par les amortisseurs.



Figure 1 : exemple de suspension automobile (ressort en bleu et amortisseur à l'intérieur) [3]

La suspension d'une automobile est principalement assurée par deux pièces, le ressort et l'amortisseur (cf. figure 1). Le ressort va permettre d'absorber les déformations. On pourrait donc penser qu'un ressort pourrait suffire pour réaliser la suspension. Cependant lorsqu'un ressort est mis en mouvement, il oscille ensuite pendant un certain temps. Ce phénomène d'oscillation est dangereux car lors d'une déformation importante le ressort va absorber dans un premier temps le choc en se comprimant puis ensuite en se détendant, il va faire perdre l'adhérence du véhicule. La roue ne sera donc plus en contact avec le sol donc le conducteur ne sera plus maître de son véhicule. C'est maintenant que l'amortisseur va avoir un rôle important. Il permet justement de réduire les oscillations du ressort pour qu'il retourne dans son état initial plus rapidement. Il va donc permettre de maintenir les roues en contact avec le sol. Les amortisseurs ont une influence directe sur l'efficacité du freinage et de la direction, ainsi que sur la tenue de route du véhicule.

Maintenant, nous allons rentrer plus en détail dans le fonctionnement des amortisseurs. Un amortisseur peut être vu comme une sorte de vérin, c'est-à-dire une enceinte fermée contenant un fluide, dans lequel se trouve un piston. Une compression du ressort aura tendance à faire rentrer le piston dans le corps de l'amortisseur et inversement, lorsque la suspension se détend, le piston sortira du corps. Ainsi les mouvements du ressort et de l'amortisseur sont liés.

Corentin FAURE, Hugo MORAI-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

2015

On pourra contrôler le mouvement de la suspension en agissant sur l'amortisseur. Pour atténuer ce mouvement, on utilise le principe d'écoulement d'un fluide entre deux chambres (récipients de fluide) de l'amortisseur, le transfert du fluide d'une chambre à une autre étant assuré grâce au piston. En contrôlant le débit du fluide lors de son transfert d'une chambre à une autre, on peut ralentir le débattement du piston et donc le mouvement de la suspension. Il existe différentes technologies d'amortisseurs (hydrauliques, pneumatiques, hydractifs ...)

Par exemple, pour les amortisseurs hydrauliques télescopiques, il existe plusieurs manières. L'une d'elles est que les deux chambres sont simplement séparées par le piston, celui-ci constitué de plusieurs clapets pour permettre le passage de l'huile d'une chambre à l'autre. Ainsi on ajustera l'amortissement grâce au nombre et au diamètre des clapets (cf. figure 2).

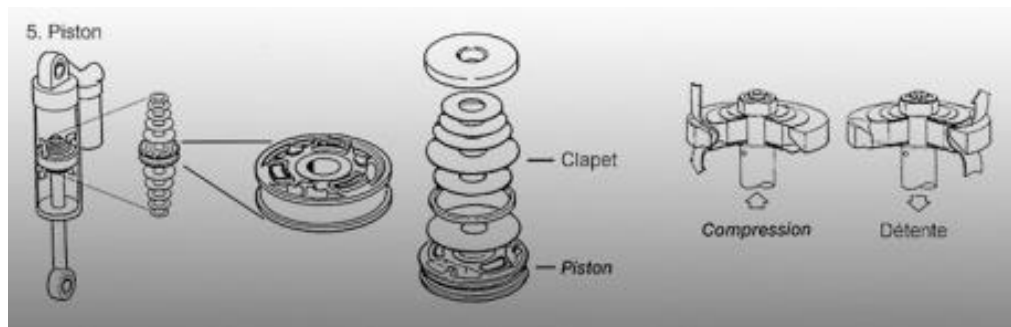


Figure 2 : Détail d'un piston [6]

Une autre manière reprend le principe d'une seringue : une première chambre contenant le piston est un tube intégré dans le corps de l'amortisseur avec un trou en bas de celui-ci et une seconde est l'extérieur de ce tube, c'est-à-dire la partie située dans le corps de l'amortisseur, à l'extérieur du tube. Le fluide est situé dans la zone du tube sous le piston et dans le reste du corps du vérin. Une compression de la suspension entraîne le piston vers le bas et expulse l'huile à l'extérieur du tube vers la seconde chambre, et à l'inverse un débattement de la suspension entraîne l'aspiration de l'huile à l'intérieur du tube. Ainsi on régule le débit d'huile et donc le mouvement de la suspension grâce à l'orifice du tube, dimensionné selon l'amortissement souhaité (cf. annexe 1)

Dans la technologie pneumatique le ressort est remplacé par des coussins d'air. Ceci permet de gagner en confort et de pouvoir régler la hauteur du châssis en fonction de la chaussée et du mode de conduite. Les amortisseurs pneumatiques ont un fonctionnement similaire aux amortisseurs hydrauliques. Cependant, ce n'est plus de l'huile mais de l'air comprimé alimenté par un moteur ou un compresseur (cf. annexe 2)

Certains amortisseurs pneumatiques fonctionnent non avec de l'air mais avec un gaz particulier. Sachant que le gaz utilisé est un gaz compressible il permet ainsi de supprimer le ressort (ou les coussins d'air).

La technologie hydractive est un peu plus évoluée. Elle adapte automatiquement la hauteur du véhicule en fonction de la vitesse et de l'état de la route. L'amortisseur est alimenté en huile sous pression par une pompe, et une vanne permet de donner quatre positions prédéfinies au véhicule. Le fonctionnement est le même que pour les amortisseurs hydrauliques.

## 3. Etude mécanique du système, avec un profil de route rectiligne

### 3.1. Système sans amortisseur

Tout d'abord, nous allons étudier le système d'une suspension automobile sans amortisseur. Cette étude mécanique peut s'assimiler à celle d'une masse  $M$  (symbolisant le véhicule) sur un ressort de raideur  $k$  et de

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

longueur à vide  $l_0$ . Sous l'action de  $M$ , le ressort a alors une nouvelle longueur à l'équilibre que l'on nommera  $l_1$ . Le point de contact entre l'extrémité supérieure du ressort et  $M$  sera nommé  $B$ , et celui entre l'extrémité inférieure et l'arbre de la roue du véhicule sera nommé  $A$ . On cherche alors à déterminer le mouvement de  $M$  au cours du temps, lorsqu'on écarte le ressort d'une longueur  $y_0$  par rapport à sa position d'équilibre  $l_1$ .

Dans ce cas, la masse  $M$  est soumise à uniquement 2 forces, son poids  $\vec{P} = m \vec{g}$  s'appliquant au point  $G$  et la force de rappel du ressort  $\vec{R}$  au point  $B$ . La norme de la force de rappel d'un ressort se définit par l'écartement par rapport à sa longueur à vide  $l_0$  multiplié par sa raideur en N/m. Cette force est dans l'axe du ressort (donc ici l'axe vertical) et son sens est différent si l'on écarte le ressort de sa longueur à vide ou si l'on le compresse. Dans les deux cas cette force tend à faire revenir le ressort vers sa longueur à vide. Ces deux forces agissant sur le même axe (vertical), on définira un repère cartésien et l'étude mécanique se résumera à un seul axe  $y$ , de vecteur unitaire  $\vec{j}$ . Le centre de gravité de la masse  $M$  est situé à l'origine du repère à la position d'équilibre. On étudiera le mouvement de ce point (cf. figure 3).

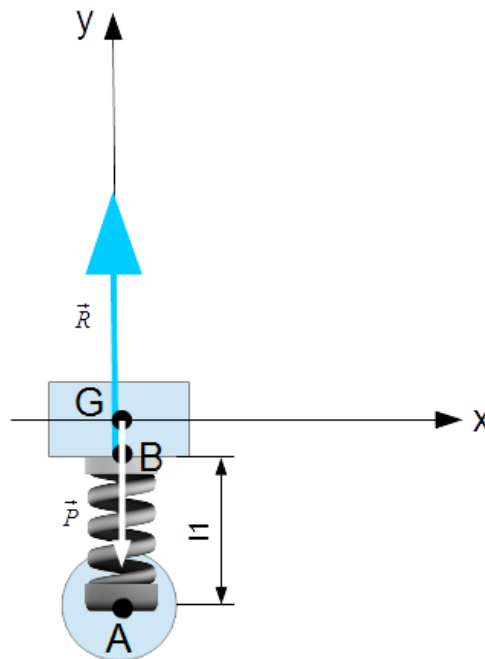


Figure 3 : Système étudié dans cette partie [8]

On considère d'abord le cas à l'équilibre (le ressort n'est pas écarté de sa position d'équilibre). On a dans ce cas (relation fondamentale de la dynamique appliquée à un système à l'équilibre) :

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

La force de rappel sera vers le haut (sens de  $\vec{j}$ ) lorsque la longueur du ressort sera inférieure à  $l_0$  (comme sur la figure 1 à la position  $l_1$  où le ressort est comprimé) et l'inverse (sens contraire de  $\vec{j}$ ) dans le cas contraire. Le poids, quant à lui, est uniquement vers le bas. On peut donc écrire :

$$k(l_0 - l_1)\vec{j} - Mg\vec{j} = \vec{0}$$

Ou plus simplement :

$$k(l_0 - l_1) - Mg = 0 \quad (1)$$

On considère maintenant le cas sans équilibre (ressort écarté de sa position  $l_1$ ). L'action du poids est toujours la même, mais la longueur du ressort est modifiée en rajoutant ou soustrayant une longueur correspondant à la position  $y$  de  $M$  (celle-ci étant placée à l'origine à l'équilibre du ressort). En appliquant le principe fondamental de la dynamique à un système en mouvement, on a :

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

$$k (l_0 - (l_1 + y)) \vec{j} - Mg \vec{j} = M \vec{a}$$

Ou plus simplement, sachant que  $\vec{a}$  sera selon  $\vec{j}$  :

$$k (l_0 - (l_1 + y)) - Mg = Ma = M \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (2)$$

Si l'on soustrait l'équation (2) à la (1) on obtient :

$$k ((l_0 - l_1) - (l_0 - (l_1 + y))) - Mg + Mg = -M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$k y = -M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$k y + M \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

$$\frac{k}{M} y + \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Pour déterminer le mouvement de M, il suffit de résoudre cette équation différentielle du second ordre à coefficients constants. On définit l'équation caractéristique suivante (d'inconnue r) :

$$\frac{k}{M} + r^2 = 0$$

$$r^2 = -\frac{k}{M}$$

On a alors deux solutions :

$$r = \pm j \sqrt{\frac{k}{M}}$$

On peut donc caractériser le mouvement  $y(t)$  par une solution générale réelle ( $C_1$  et  $C_2$  constantes réelles) :

$$y(t) = C_1 \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t + C_2 \sin \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

On détermine ensuite  $C_1$  à l'aide des conditions initiales de position de M :

$$y(t=0) = y_0$$

$$C_1 = y_0$$

On fait de même pour  $C_2$  grâce à la vitesse initiale de M :

$$V_y(t=0) = 0$$

$$\frac{dy}{dt}(t=0) = 0$$

$$\text{Or } \frac{dy}{dt} = -C_1 \sqrt{\frac{k}{M}} \sin \sqrt{\frac{k}{M}} t + C_2 \sqrt{\frac{k}{M}} \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

2015

$$\text{Donc } C_2 \sqrt{\frac{k}{M}} = 0$$

$$C_2 = 0$$

Ainsi on obtient le mouvement de M au cours du temps :

$$y(t) = y_0 \cos \sqrt{\frac{k}{M}} t$$

On obtient ainsi un mouvement sinusoïdal, d'amplitude  $y_0$  et de pulsation  $\sqrt{\frac{k}{M}}$  (cf. figure 4). Cette pulsation est aussi appelée pulsation propre du système, ce qui correspond à la pulsation de ses oscillations sans amortissement extérieur. Elle sera notée  $\omega_0$  par la suite et s'exprime en rad/s.

Ainsi, pour une masse M fixe, plus la raideur du ressort est grande, plus  $\omega_0$  sera grande et plus M va osciller rapidement.

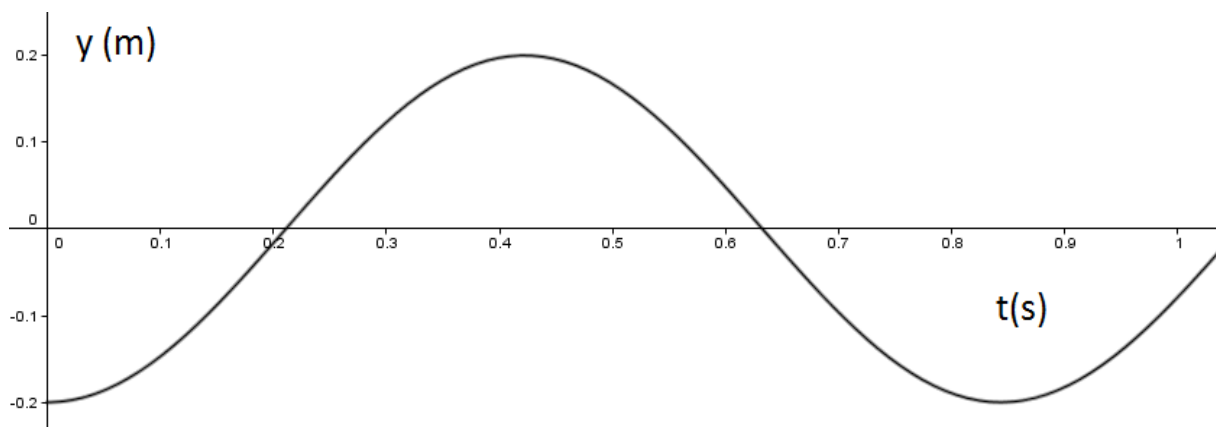


Figure 4 : Mouvement de M en fonction du temps avec un véhicule de 900 kg et un ressort de raideur  $k = 5,0 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ , en comprimant le ressort de 20 cm ( $y_0 = -0.2\text{m}$ ) [10]

## 3.2. Système avec amortisseur

On souhaite déterminer cette fois le mouvement de M en rajoutant un amortisseur coaxial au système, ce qui revient à exercer une force de frottement  $\vec{f}$  qui s'oppose au mouvement de M, tout en exerçant une force proportionnelle à la vitesse instantanée de M. On a  $\vec{f} = -f\vec{v} = -f \frac{dy}{dt}$  avec  $f$  un coefficient quelconque dépendant de l'amortisseur, exprimé en N.s/m.

En appliquant le principe fondamental de la statique, nous retrouvons la même équation que précédemment :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow -Mg + k(l_0 - l_1) = 0 \quad (1)$$

On applique à nouveau le principe fondamental de la dynamique, mais cette fois, une force de frottement  $\vec{f}$  entre en compte, due à la présence de l'amortisseur :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a} \Leftrightarrow \vec{f} + \vec{P} + \vec{R} = M\vec{a} \Leftrightarrow -f \frac{dy}{dt} - Mg + k(l_0 - [l_1 + y]) = M * \frac{d^2y}{dt^2} \quad (2)$$

En soustrayant l'équation (1) à l'équation (2) on obtient :

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

$$(1)-(2) : -Mg + k(l_0 - l_1) + f \frac{dy}{dt} + Mg - k(l_0 - [l_1 + y]) = 0 - M * \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftrightarrow ky + f y' + M y'' = 0$$

On aboutit donc à une équation différentielle du second ordre à coefficients constants et sans second membre.

Nous déterminons donc son équation caractéristique :  $k + fr + Mr^2 = 0$

On cherche ensuite le discriminant :  $\Delta = f^2 - 4kM$

Nous remarquons donc que ce discriminant dépend de la valeur de  $f$ .

- Si  $\Delta < 0 \Leftrightarrow f^2 < 4kM \Leftrightarrow f < 2\sqrt{kM}$  :

$$r = \frac{-f \pm j\sqrt{|f^2 - 4kM|}}{2M}$$

En simplifiant, on obtient finalement :

$$r = \frac{-f}{2M} \pm j \sqrt{\frac{k}{M}} \sqrt{1 - \left(\frac{f}{2\sqrt{kM}}\right)^2}$$

En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ ,  $\tau = \frac{2M}{f}$ ,  $\xi = \frac{f}{2\sqrt{kM}}$  et  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  on peut écrire :

$$r = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega$$

On a donc une solution de la forme :

$$y(t) = e^{\frac{-t}{\tau}} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t))$$

Pour la suite, il nous faut  $y'(t)$ .

$$y'(t) = \frac{-1}{\tau} e^{\frac{-t}{\tau}} (C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)) + e^{\frac{-t}{\tau}} (-C_1 \omega \sin(\omega t) + C_2 \omega \cos(\omega t))$$

Avec les conditions initiales  $y(t=0) = y_0$  et  $v(t=0) = y'(t=0) = 0$  on peut déterminer  $C_1$  et  $C_2$  :

$$e^{\frac{0}{\tau}} (C_1 \cos(\omega * 0) + C_2 \sin(\omega * 0)) = y_0$$

$$\frac{-1}{\tau} e^{\frac{0}{\tau}} (C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)) + e^{\frac{0}{\tau}} (-C_1 \omega \sin(0) + C_2 \omega \cos(0)) = 0$$

Donc :

$$C_1 = y_0 \text{ et } C_2 = \frac{y_0}{\omega \tau}$$

On a finalement :

$$y(t) = e^{\frac{-t}{\tau}} \left( y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega \tau} \sin(\omega t) \right)$$

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

2015



$$\text{Avec } \begin{cases} \tau = \frac{2M}{f} \\ \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ et } \xi = \frac{f}{2\sqrt{kM}} \end{cases}$$

- Si  $\Delta > 0 \Leftrightarrow f^2 > 4Mk \Leftrightarrow f > 2\sqrt{kM}$  :

$$r = \frac{-f \pm \sqrt{f^2 - 4kM}}{2M}$$

En simplifiant, on obtient :

$$r = \sqrt{\frac{k}{M}} \left( \frac{-f}{2\sqrt{kM}} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4kM} - 1} \right)$$

Et en prenant les mêmes constantes que précédemment, on peut simplifier les deux solutions sous la forme :

$$r_1 = -\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}), r_2 = -\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

On pose ensuite :  $\tau_1 = -\frac{1}{r_1}$  et  $\tau_2 = -\frac{1}{r_2}$

On a donc :

$$y(t) = C_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} + C_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}}$$

Avec les conditions initiales  $y(t=0) = y_0$  et  $v(t=0) = y'(t=0) = 0$  on peut déterminer  $C_1$  et  $C_2$ , on a finalement :

$$y(t) = \frac{\tau_1 y_0}{\tau_1 - \tau_2} e^{\frac{-t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 y_0}{\tau_2 - \tau_1} e^{\frac{-t}{\tau_2}}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} \tau_1 = \frac{1}{\omega_0 (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}, \tau_2 = \frac{1}{\omega_0 (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}, \xi = \frac{f}{2\sqrt{kM}} \end{cases}$$

Si  $\Delta = 0 \Leftrightarrow f^2 = 4Mk \Leftrightarrow f = 2\sqrt{kM}$  :

$$r = -\frac{f}{2M}$$

Ou également avec la notation adoptée précédemment :  $r = \frac{-1}{\tau}$  car  $\tau = \frac{2M}{f}$

La solution est donc de la forme :

$$y(t) = (C_1 t + C_2) e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Avec la condition initiale  $y(t=0)$  on peut en déduire  $C_2$  :

$$y(t=0) = y_0 \Leftrightarrow C_2 = y_0$$

On obtient :

$$y(t) = (C_1 t + y_0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$V_y = C_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + (C_1 t + y_0) \frac{-1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avec les conditions initiales  $V_y(t=0)$  on peut en déduire  $C_1$  :

$$0 = C_1 + y_0 \left( -\frac{1}{\tau} \right)$$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{y_0}{\tau}$$

On a finalement :

$$y(t) = \left( \frac{y_0}{\tau} t + y_0 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On a ainsi obtenu les différents régimes possibles en fonction des valeurs du coefficient de frottement  $f$ . Au-delà des calculs théoriques, la constante  $\xi$ , sans dimension, appelée également taux d'amortissement, de valeur  $\frac{f}{2\sqrt{kM}}$  permet de différencier les différents régimes. En effet, pour  $\Delta = 0$ , on a  $\xi = 1$ .

Ainsi,  $0 < \xi < 1$  définit le régime avec le mouvement de M suivant :

$$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left( y_0 \cos(\omega t) + \frac{y_0}{\omega \tau} \sin(\omega t) \right)$$

Dans ce régime, le mouvement de M au cours du temps est de la forme d'une sinusoïde amortie. On qualifie ce régime de pseudo-périodique (car en réalité on ne peut pas parler de période à cause de l'atténuation au cours du temps). Sa pseudo-pulsation propre  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  dépend de la pulsation propre du système définie précédemment (système sans amortissement) ainsi que du taux d'amortissement. Elle s'exprime en rad/s. Plus le taux d'amortissement est faible, et plus la pseudo-pulsation propre sera importante, celle-ci restant inférieure à  $\omega_0$ . L'amortissement de la sinusoïde dépend de la constante de temps exprimée en secondes  $\tau = \frac{2M}{f}$  donc plus le coefficient de frottement est important, plus l'amortissement du mouvement sinusoïdal le sera également et le véhicule reviendra rapidement à sa position d'équilibre.  $\tau$  caractérise la durée au bout de laquelle le mouvement atteint environ 37% de son amplitude de départ.

$\xi > 1$  définit le régime avec le mouvement de M suivant :

$$y(t) = \frac{\tau_1 y_0}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{\tau_2 y_0}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

On a dans ce cas un mouvement de M au cours du temps de la forme d'une somme de deux exponentielles de limite 0. On appelle cela le régime aperiodique, du fait que contrairement au régime pseudo-périodique, l'amortissement occasionné n'entraîne aucune oscillation autour de la position d'équilibre  $y=0$  (on peut également dire que  $y(t) > 0$ ). L'exposant négatif de chaque exponentielle dépend des deux constantes de temps définies précédemment, exprimées en secondes, celles-ci dépendant directement de la pulsation propre du système ainsi que du taux d'amortissement choisi :

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega_0(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})}, \tau_2 = \frac{1}{\omega_0(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})}$$

Dans ce cas, plus  $\xi$  est important, plus  $y(t)$  décroît lentement.

Corentin FAURE, Hugo MORAI-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

2015

Enfin,  $\xi = 1$  définit le régime avec le mouvement de M suivant :

$$y(t) = \left(\frac{y_0}{\tau} t + y_0\right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dans ce régime, le mouvement de M au cours du temps est de la forme d'une fonction affine amortie. On nomme couramment ce régime « régime critique » car il constitue le mouvement amorti le plus rapidement possible sans entraîner d'oscillations, soit la limite entre le régime apériodique et le régime pseudo-périodique. La constante de temps définissant l'amortissement est la même que précédemment ( $\tau = \frac{2M}{f}$ ) mais pour une valeur fixe de coefficient de frottement car  $\xi = 1 \Leftrightarrow f = 2\sqrt{kM}$ .

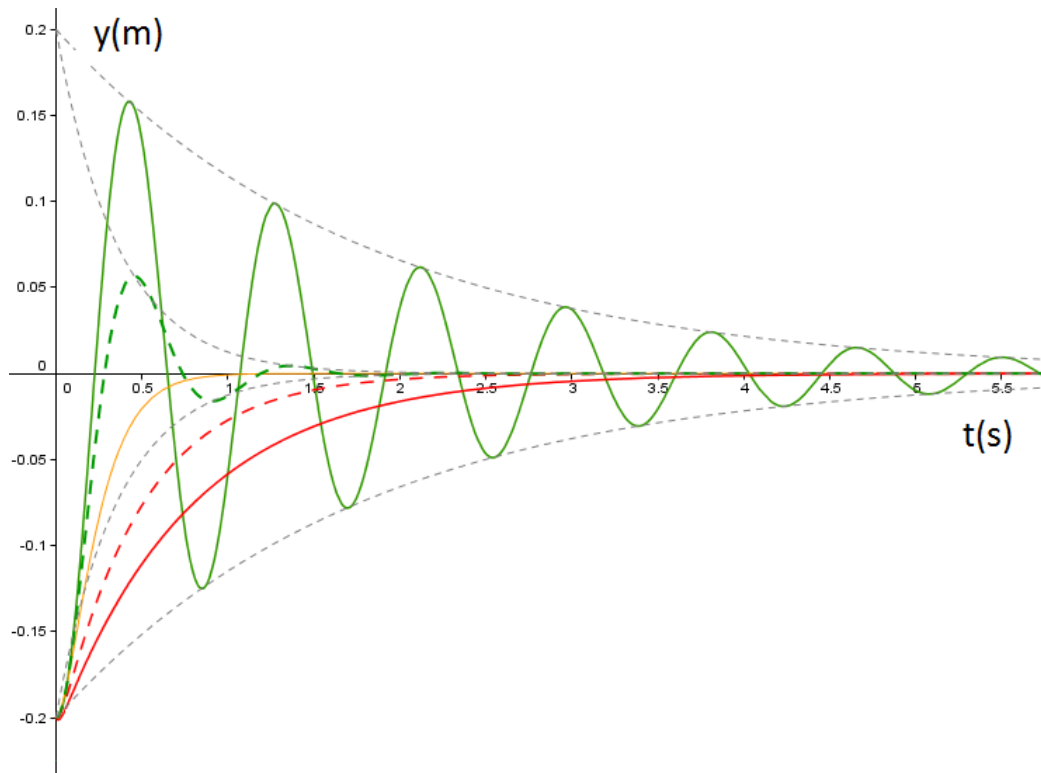


Figure 5: Tracé des courbes de  $y(t)$  avec différents taux d'amortissement [10]

Les calculs ont été effectués avec les mêmes valeurs que précédemment (véhicule de masse  $M = 900\text{kg}$ , raideur du ressort  $K = 5,0 \cdot 10^4 \text{ N.m}^{-1}$ ) mais avec cette fois une compression initiale du ressort de 20 cm ( $y_0 = -0.2\text{m}$ ).

On a dans ce cas  $2\sqrt{kM} = 13416 \text{ N.s/m}$  environ.

Courbes vertes : cas où  $0 < \xi < 1 : 0 < f < 2\sqrt{kM}$

Ce type de régime, comme nous l'avons vu, se caractérise par des oscillations autour de la position d'équilibre, avec une pulsation plus faible que  $\omega_0$ . On remarque qu'avec ce régime et un coefficient de frottement assez important (comme sur la courbe en pointillés : 5000 N.s/m), l'amplitude du mouvement réduit rapidement, permettant un confort relativement optimal pour l'utilisateur du véhicule mais au détriment de la tenue de route, minimisée par les oscillations du véhicule. L'avantage du confort est perdu pour des coefficients de frottements plus faibles (courbe en trait continu : 1000 N.s/m) où l'on remarque une grande amplitude d'oscillations sur une durée considérable.

Courbe rouge : cas où  $\xi > 1 : f > 2\sqrt{kM}$

Ce régime est caractérisé par un retour sans oscillations (courbe de type exponentielle) du véhicule vers la position d'équilibre, permettant une meilleure tenue de route. Plus le coefficient de frottements est important,

*Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT*

plus ce retour est lent (courbe en pointillés : 26000 N.s/m et courbe en trait continu : 40000 N.s/m) et donc le confort s'en trouve minimisé.

Courbe jaune : cas où  $\xi = 1 : f = 2\sqrt{kM} = 13416 \text{ N.s/m}$

Comme nous l'avons vu précédemment, elle décrit le retour le plus rapide vers la position d'équilibre sans oscillations. Cette configuration d'amortisseur apparaît donc comme le meilleur compromis entre garantir une bonne tenue de route (pas d'oscillations) et assurer un confort correct (retour rapide vers la position d'équilibre, dans notre cas environ 1 seconde).

## 4. Profil de route sinusoïdal

### 4.1. Une première forme réelle pour caractériser le mouvement

Après avoir étudié l'amortissement de l'habitacle d'un véhicule fixe, on se place maintenant dans le cas où le véhicule est soumis aux irrégularités de la route par le biais de l'arbre de la roue. Le profil de la route étudié ici sera de la forme  $z = z_0 \cos(\omega_1 t)$ . On souhaite à partir de ceci déterminer le mouvement de M en fonction du temps.

Ce système est au niveau de l'étude mécanique assez similaire au système précédent. Le poids  $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$  reste inchangé ainsi que la force de frottement  $\vec{F} = -f\vec{v}$ . La modification (profil de la route) opère au niveau de la force de rappel du ressort puisque la longueur du ressort est modifiée par le profil de la route  $z$  en fonction du temps, en plus des facteurs vus précédemment (cf :  $z = \Delta l$  sur figure). On donc  $\vec{R} = k (l_0 - (l_1 + y(t) - z(t))) \vec{j}$  (les appellations  $y$  et  $z$  sont utilisées uniquement pour différencier les deux modifications de  $l$  en fonction du temps, mais ces deux opèrent sur le même axe  $y$  de la figure 6).

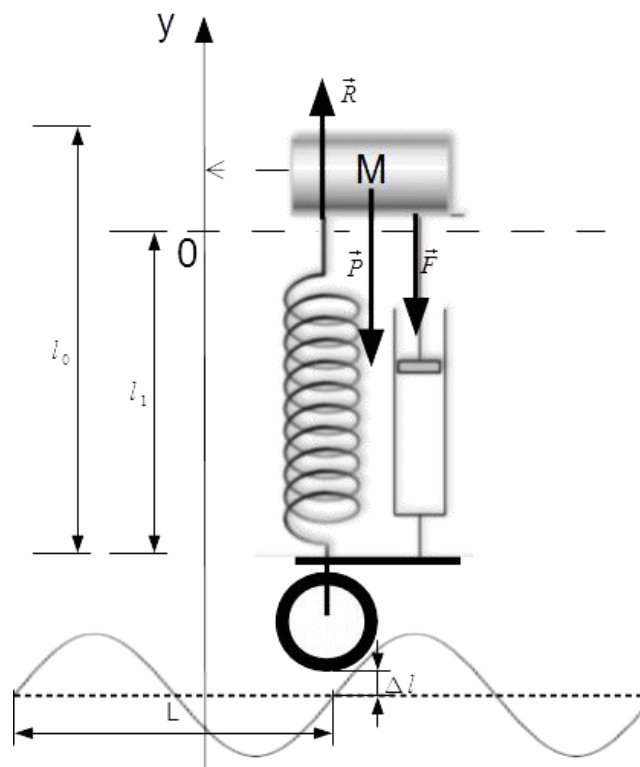


Figure 6: Système étudié ( $\vec{R}$  symbolisée par le ressort et  $\vec{F}$  par l'amortisseur), sur une route sinusoïdale de période spatiale quelconque  $L$  [8]

L'équation à l'équilibre vue précédemment reste valable :  $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Leftrightarrow -Mg + k(l_0 - l_1) = 0$ . L'équation en mouvement est cette fois de la forme :  $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R} = M\vec{a} \Leftrightarrow -f \frac{dy}{dt} - Mg + k(l_0 - [l_1 + y - z])$

Comme précédemment, on soustrait la première équation à la deuxième et on obtient l'expression simplifiée suivante :

$$ky - kz + f \frac{dy}{dt} = -M \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = kz = k \cdot z_0 \cos(\omega_1 t)$$

Ainsi on obtient la même équation différentielle que pour le mouvement sans profil de route spécifié, mais cette fois avec un second membre  $k \cdot z_0 \cos(\omega_1 t)$ . La résolution précédente nous permet donc de caractériser le régime transitoire de ce mouvement (si  $y_0 \neq 0$ , sinon le mouvement en régime transitoire est négligeable). Il reste à déterminer le mouvement du régime permanent. Pour cela, on cherche d'abord une solution sinusoïdale, sous la forme  $y = A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)$ . Après avoir calculé les dérivées premières et secondes de cette solution, on remplace dans l'équation différentielles afin d'identifier A et B :

$$M(-A\omega_1^2 \cos(\omega_1 t) - B\omega_1^2 \sin(\omega_1 t)) + f(-A\omega_1 \sin(\omega_1 t) + B\omega_1 \cos(\omega_1 t)) + k(A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)) = k \cdot z_0 \cos(\omega_1 t)$$

On aboutit par identification au système suivant :

$$\begin{cases} -MA\omega_1^2 + fB\omega_1 + kA = k \cdot z_0 \\ -MB\omega_1^2 - fA\omega_1 + kB = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (k - M\omega_1^2)A + f\omega_1 B = k \cdot z_0 \\ -f\omega_1 A + (k - M\omega_1^2)B = 0 \end{cases}$$

Ce système étant un système de Cramer (Autant d'équations que d'inconnues, et matrice contenant les coefficients du système inversible), on se propose de résoudre celui-ci de manière matricielle. Les matrices équivalentes du système linéaire sont :

$$a = \begin{pmatrix} k - M\omega_1^2 & f\omega_1 \\ -f\omega_1 & k - M\omega_1^2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} k \cdot z_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Pour pouvoir appliquer les formules de Cramer, on calcule le déterminant de a :

$$\det(a) = \begin{vmatrix} k - M\omega_1^2 & f\omega_1 \\ -f\omega_1 & k - M\omega_1^2 \end{vmatrix} = (k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2$$

On calcule ensuite A et B en appliquant les formules de Cramer :

$$A = \frac{\begin{vmatrix} k \cdot z_0 & f\omega_1 \\ 0 & k - M\omega_1^2 \end{vmatrix}}{\det(a)} = \frac{k \cdot z_0 (k - M\omega_1^2)}{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} k - M\omega_1^2 & k \cdot z_0 \\ -f\omega_1 & 0 \end{vmatrix}}{\det(a)} = \frac{k \cdot z_0 f\omega_1}{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2}$$

Ainsi on obtient un mouvement en régime permanent de :

$$y(t) = \frac{k \cdot z_0}{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2} [(k - M\omega_1^2)\cos(\omega_1 t) + f\omega_1 \sin(\omega_1 t)]$$

On considère pour montrer pertinemment l'intérêt de la suspension automobile sur ce profil de route uniquement le régime permanent, le régime transitoire ayant été étudié précédemment dans la partie 3. Nous avons mis en évidence le comportement de M avec différents taux d'amortissement, lorsque le véhicule est à une vitesse de 20 km/h sur une route sinusoïdale de période spatiale 5m et d'amplitude  $z_0 = 10$  cm.

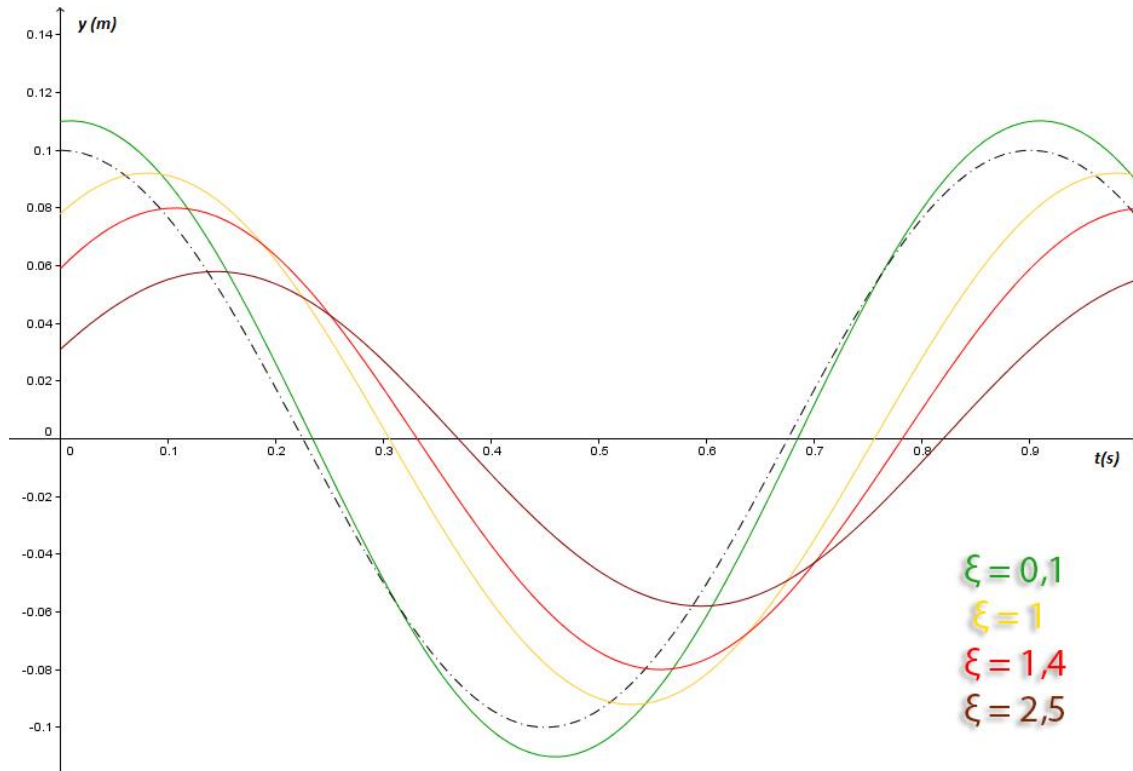


Figure 7: mise en évidence du mouvement de M pour différentes valeurs de taux d'amortissement [10]

On constate donc pour une même route différentes amplitudes d'oscillation de la masse M, mais on remarque également un déphasage plus ou moins important entre le profil de la route abordée en fonction du temps et le mouvement de l'habitacle du véhicule.

On essaie maintenant de prendre un coefficient d'amortissement fixe (on prendra 0.1) et de faire varier  $\omega_1$  (pulsation de la sinusoïde décrivant le profil de la route) soit faire varier la vitesse du véhicule (cf. annexe 3)

On constate un nouveau phénomène, la variation de l'amplitude du mouvement ainsi que du déphasage avec la route en fonction de la vitesse du véhicule soit de la pulsation. Egalement, dans ce cas particulier, on constate la présence d'un maximum d'amplitude atteinte pour une certaine vitesse puisque l'amplitude du mouvement croît puis décroît ensuite à partir d'une certaine vitesse. L'étude qui suit tentera d'expliquer ce phénomène.

## 4.2. Une seconde forme complexe

On cherche maintenant à trouver une solution sous une forme complexe  $y = y_0 e^{i(\omega_1 t + \varphi)}$ . Pour cela, on garde l'équation différentielle précédente tout en exprimant le second membre sous forme complexe également : ainsi on passe de  $z = z_0 \cos(\omega_1 t)$  à  $z = z_0 e^{i\omega_1 t}$ .

L'équation différentielle est donc :

Corentin FAURE, Hugo MORAI-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

$$M \frac{d^2 y}{dt^2} + f \frac{dy}{dt} + ky = k \cdot z_0 e^{i\omega_1 t}$$

On détermine les dérivées premières et secondes de  $y$  sous forme complexe de manière simple : il suffit de multiplier  $y$  par  $i\omega_1$ , une fois pour la dérivée première ( $\frac{dy}{dt} = i\omega_1 \cdot y$ ) et deux fois pour la dérivée seconde ( $\frac{d^2 y}{dt^2} = -\omega_1^2 \cdot y$ ). On peut ainsi remplacer dans l'équation différentielle :

$$-M\omega_1^2 y + if\omega_1 y + ky = k \cdot z_0 e^{i\omega_1 t}$$

Il reste ensuite à isoler  $y$  :

$$y = \frac{k \cdot z_0}{k - M\omega_1^2 + if\omega_1} e^{i\omega_1 t}$$

On met ensuite ce résultat sous la forme demandée (forme module et argument) en multipliant d'abord par le conjugué au numérateur et au dénominateur :

$$y = \frac{k \cdot z_0}{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2} (k - M\omega_1^2 - if\omega_1) e^{i\omega_1 t}$$

On peut ensuite calculer le module et l'argument du nombre complexe  $k - M\omega_1^2 - if\omega_1$  :

$$\|k - M\omega_1^2 + if\omega_1\| = \sqrt{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2}$$

On pose  $\varphi = \arg(k - M\omega_1^2 - if\omega_1)$

On a  $\sin(\varphi) < 0$  pour toute valeur de  $f$  tandis que le signe de  $\cos(\varphi)$  dépend de  $k$  et  $M$  :

$$\cos(\varphi) > 0 \text{ si } k - M\omega_1^2 > 0 \text{ soit si } \omega_1 < \sqrt{\frac{k}{M}} = \omega_0$$

$$\cos(\varphi) < 0 \text{ si } \omega_1 > \omega_0$$

Ainsi  $\tan(\varphi)$  est définie sur la période  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  uniquement pour  $\omega_1 < \omega_0$  (car  $\varphi$  est compris entre  $\frac{-\pi}{2}$  et  $-\pi$  dans le cas contraire, et donc  $\tan \varphi$  est sur  $[0; +\infty[$ , ce qui donnera  $\tan^{-1}(\tan \varphi)$  entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$  au lieu de  $-\pi$  et  $\frac{-\pi}{2}$ ). On devra donc retrancher  $\pi$  à  $\tan^{-1}(\tan \varphi)$  si  $\omega_1 > \omega_0$ .

On obtient l'expression suivante :

$$\varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{-f\omega_1}{k - M\omega_1^2}\right) \text{ si } \omega_1 < \omega_0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{-f\omega_1}{k - M\omega_1^2}\right) - \pi \text{ si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases}$$

$$y = \frac{k \cdot z_0}{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2} \sqrt{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2} e^{i\varphi} e^{i\omega_1 t}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{k \cdot z_0}{\sqrt{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2}} e^{i\omega_1 t + \varphi}$$

On peut ainsi identifier les constantes de la solution  $y = y_0 e^{i(\omega_1 t + \varphi)}$  :

Corentin FAURE, Hugo MORAI-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

$$\begin{cases} y_0 = \frac{k \cdot z_0}{\sqrt{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2}} \\ \varphi = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{-f\omega_1}{k - M\omega_1^2}\right) \text{ si } \omega_1 < \omega_0 \\ \tan^{-1}\left(\frac{-f\omega_1}{k - M\omega_1^2}\right) - \pi \text{ si } \omega_1 > \omega_0 \end{cases} \end{cases}$$

### 4.3. Interprétation des résultats dans le contexte d'étude (véhicule)

Avec cette nouvelle forme utilisée pour la solution, nous faisons apparaître clairement deux grandeurs, l'amplitude du mouvement résultant  $y_0$  et le déphasage entre le profil de la route et le mouvement de la masse  $M$  symbolisant le véhicule en fonction du temps, celles-ci étant toutes deux en fonction de la pulsation  $\omega_1$ .

On peut ainsi aborder le problème à la manière d'une étude fréquentielle, c'est-à-dire exprimer l'amplification du mouvement  $\frac{y_0}{z_0}$  en fonction de la pulsation (soit de la vitesse du véhicule), de même pour le déphasage exprimé précédemment.

Pour cela, on se simplifie la tâche en exprimant ces deux grandeurs en fonctions des constantes définies au cours de cet étude et on obtient finalement :

$$y_0 = \frac{k \cdot z_0}{\sqrt{(k - M\omega_1^2)^2 + (f\omega_1)^2}} = \frac{z_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} \Leftrightarrow \frac{y_0}{z_0} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\xi^2 \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{-f\omega_1}{k - M\omega_1^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\xi \frac{\omega_1}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}\right) \quad (-\pi \text{ si } \omega_1 > \omega_0)$$

On choisit de tracer ces différentes caractéristiques en fonction de  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$  (au lieu de  $\omega_1$  car cela facilite le tracé ainsi que la lecture : cf. figure 9)

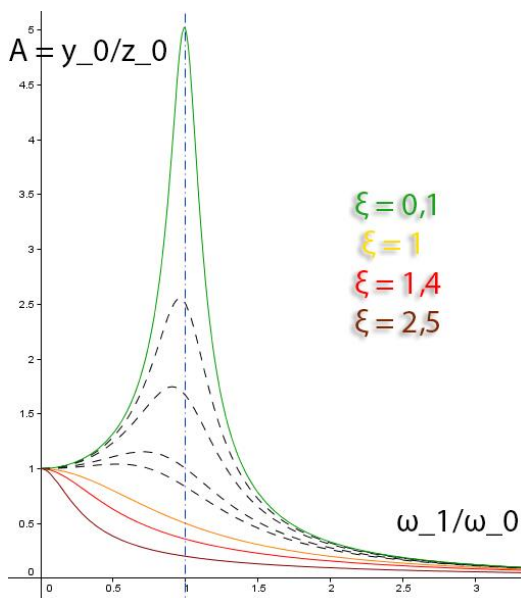


Figure 9 : Amplification du mouvement créé par le profil de la route en fonction de  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ , avec les taux d'amortissement utilisés précédemment. [10]

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT



On constate un comportement spécifique selon les régimes : les régimes apériodique et critique sont caractérisés par une amplification qui décroît lorsque la pulsation  $\omega_1$  (et donc la vitesse du véhicule) augmente. Cette décroissance est d'autant plus importante que le taux d'amortissement de la suspension est important.

Le régime pseudo-périodique, quant à lui, observe comme constaté lors de l'étude fréquentielle menée précédemment une croissance de l'amplification jusqu'à une certaine pulsation, celle-ci se rapprochant de la pulsation naturelle  $\omega_0$  lorsque le taux d'amortissement tend vers 0, puis une décroissance après cette pulsation. Elle est appelée pulsation de résonance et se caractérise par la pulsation à laquelle la dérivée par rapport au temps de l'amplification est nulle. En appliquant cette définition, on peut obtenir l'expression de cette pulsation :

$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

La solution exprimée ci-dessus existe uniquement lorsque  $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , donc le phénomène de résonance n'a pas lieu au-dessus de cette valeur et donc une partie du régime pseudo-périodique a le même comportement que les autres régimes évoqués. D'après l'expression, il est logique de voir  $\omega_R$  tendre vers  $\omega_0$  lorsque  $\xi$  tend vers 0.

Les véhicules actuels grand public étant conçus de manière à se trouver proche du régime critique ( $\xi = 1$ ), ils ne sont normalement pas soumis à un risque de résonance. Il se pose cependant lors de la conception une problématique d'usure de l'amortisseur : en effet, l'usure aura pour effet de réduire le taux d'amortissement et donc de potentiellement se rapprocher de plus en plus d'un cas de résonance à une certaine vitesse, qui n'est évidemment pas souhaité pour le confort et la tenue de route. Il faudrait donc prévoir cette éventualité de manière à ce que le système n'entre pas facilement en résonance lorsqu'il s'use (et donc agir sur la pulsation propre du système).

On se propose ensuite d'étudier la variation de  $\varphi$  en fonction du taux d'amortissement du système.

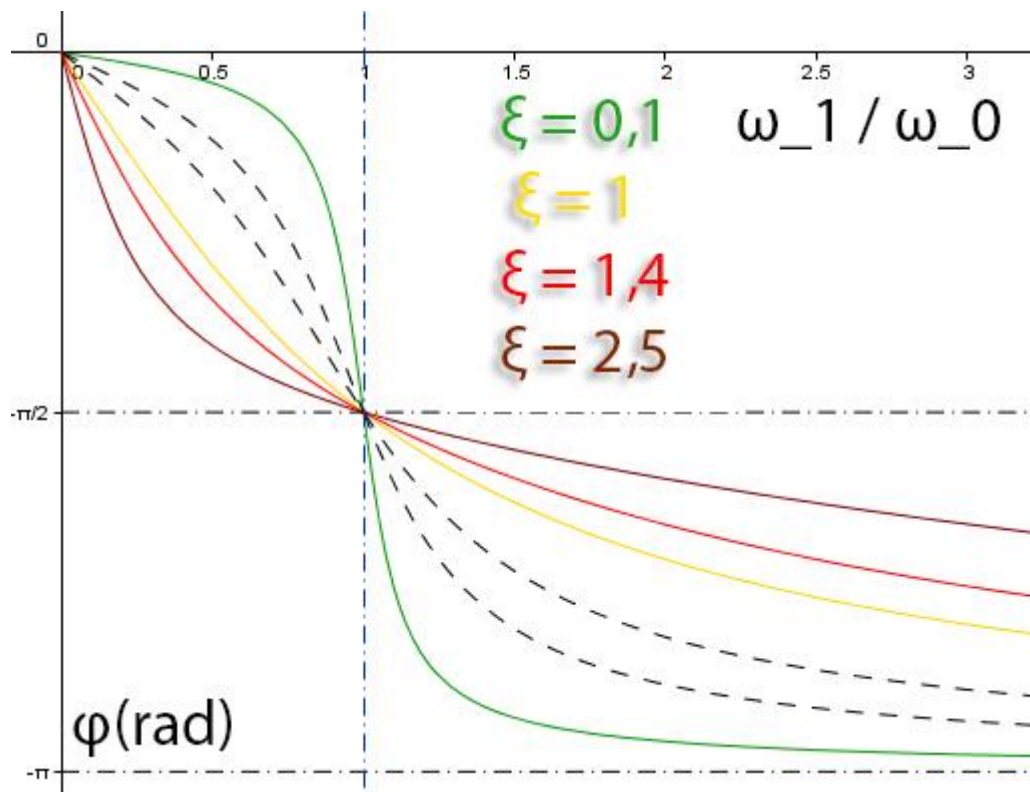


Figure 10: évolution de  $\varphi$  en fonction de  $\frac{\omega_1}{\omega_0}$ , pour différents taux d'amortissement [10]

On constate une décroissance de  $\varphi$  importante pour les forts taux d'amortissement lorsque  $\omega_1 < \omega_0$ . Lorsqu'on atteint  $\omega_0$ , on a un déphasage qui converge vers  $-\frac{\pi}{2}$  pour n'importe quel taux d'amortissement. Le déphasage tend ensuite vers  $-\pi$  lorsqu'on augmente la pulsation (et donc la vitesse du véhicule). On remarque que la variation vers  $-\pi$  se fait d'autant plus brusquement que le taux d'amortissement est faible.

Le fonctionnement sans usure du système correspondrait à la courbe jaune (régime critique). Dans cette configuration, la voiture entrera moins facilement en opposition de phase avec la route que pour les faibles taux d'amortissement, mais un peu plus rapidement que pour de forts taux d'amortissement. Dans ce cas, l'usure, c'est-à-dire la baisse du taux d'amortissement, fera tendre plus facilement le véhicule vers une opposition de phase avec la route. Cela aura pour effet des extensions/compressions plus importantes du ressort de la suspension et donc potentiellement une usure accélérée de ce même ressort.

## 5. Conclusion

L'étude effectuée nous a permis de visualiser de manière théorique le comportement d'un véhicule en fonction de différents paramètres. En effet, la masse du véhicule, la raideur du ressort et le coefficient d'amortissement de sa suspension, tout comme sa vitesse influent directement sur son mouvement vertical lorsque celui-ci est soumis aux irrégularités de la route. L'aspect transitoire du mouvement montre que pour allier confort et tenue de route sur des véhicules grand public, il faut concevoir la suspension avec un taux d'amortissement proche de 1. Lorsqu'on se place dans le régime permanent du mouvement (une fois le régime transitoire négligeable), avec des irrégularités de route assimilables à un phénomène périodique, deux aspects sont à prendre en compte. Tout d'abord, on constate que l'amplitude du mouvement vertical du véhicule suite à ces irrégularités est variable selon la vitesse et présente un phénomène de résonance pour un taux d'amortissement suffisamment faible. Si ce phénomène n'est pas censé se produire au régime critique présent sur les véhicules neufs, une usure de l'amortisseur pourrait entraîner une amplification des irrégularités de la route au niveau du véhicule à une certaine vitesse. D'autre part, cette usure pourrait engendrer un déphasage du mouvement périodique du véhicule par rapport à la route tendant rapidement vers une opposition de phase lorsqu'on dépasse la pulsation propre de la suspension. Ceci aurait pour effet une sollicitation importante du ressort de la suspension qui aurait tendance à l'user rapidement.

Dans le film « le salaire de la peur », une équipe s'engage à transporter en camion une importante cargaison de nitroglycérine, en passant par une route très délicate. On peut, pour terminer, interpréter les risques encourus grâce à notre étude. Par exemple, ce film datant de 1953, on peut supposer des amortisseurs de mauvaise qualité (avec un faible taux d'amortissement). Ainsi, si l'on associe l'explosion de la cargaison à une certaine amplitude du mouvement du coffre, deux solutions sont possibles : soit cette amplitude correspond à une vitesse dans la plage de résonance de la suspension (amplification supérieure à 1) et à ce moment-là, il faut soit rouler suffisamment doucement, soit suffisamment vite pour ne pas entrer dans la plage d'amplitude dangereuse. Si cette amplitude se situe en dehors de la résonance, il faudra rouler suffisamment vite pour se situer en dessous de celle-ci. Pour affiner l'étude, on pourrait éventuellement complexifier le système en considérant l'effet de suspension engendré par les pneus du véhicule.

## 6. Bibliographie

[1] Wikipédia – Wikipédia, l'encyclopédie libre [en ligne]. Disponible sur : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Amortissement\\_physique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Amortissement_physique)

[2] Wikipédia – Wikipédia, l'encyclopédie libre [en ligne]. Disponible sur : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Amortisseur>

[3] Fiches-auto.fr – Fiches auto : Tests, essais complets, motorisation diesel et essence [en ligne]. Disponible sur : <http://www.fiches-auto.fr/articles-auto/fonctionnement-d-une-auto/s-863-amortisseur-et-suspension.php>

[4] Autobiz – Reprise de votre voiture en moins de 1h par autobiz [en ligne]. Disponible sur : <http://vendre.autobiz.fr/suspension-pneumatique/>

*Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT*

2015

[5] Autodeclics.com – Voitures d'occasion, achat auto, entretien auto, annonces, essais [en ligne]. Disponible sur : [http://www.autodeclics.com/citroen/article/4952-la\\_suspension\\_hydractive.html](http://www.autodeclics.com/citroen/article/4952-la_suspension_hydractive.html)

[6] Laurent DEVOULON – MotoRevue – Actualités et essais moto [en ligne]. Disponible sur : <http://www.motorevue.com/site/amortisseurs-les-differents-types-fonctionnements-et-reglages-24789.html>

[7] Daniel DUCHET - Maurice ESPERANCE - Philippe GEGOUT - Robert SEJOURNE – Vous et votre voiture. Selection Du Reader's Digest, 01/05/1986, 303 pages.

[8] Figure dessinée grâce à l'outil dessin d'Open Office

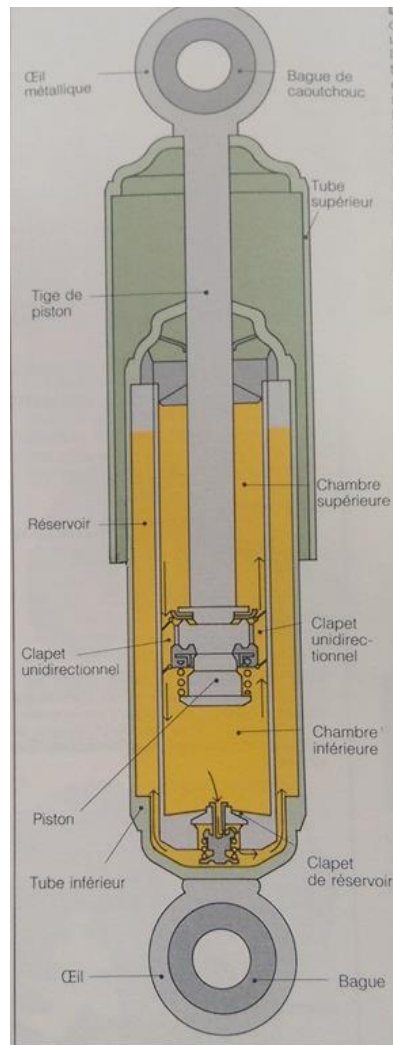
[9] Fascicule de TP de mécanique – Faculté de sciences (semestre 1 de CITISE)

[10] Tracé des courbes sur le logiciel GeoGebra

[11] Eric BONIN - Adrien CALENDRON - Thibaut SCHWENDER - TIPE : Modélisation des amortissements [en ligne]. Disponible sur : [http://ericbonin.free.fr/Download/TIPE/TIPE\\_spe.pdf](http://ericbonin.free.fr/Download/TIPE/TIPE_spe.pdf)

[12] Denis GUILLEMAIN – TP2 : Vibrations (GMP semestre 4 – Université de Reims) [en ligne]. Disponible sur : <http://gmp.iut-troyes.univ-reims.fr/wp/wp-content/uploads/2014/01/TP02V.pdf>

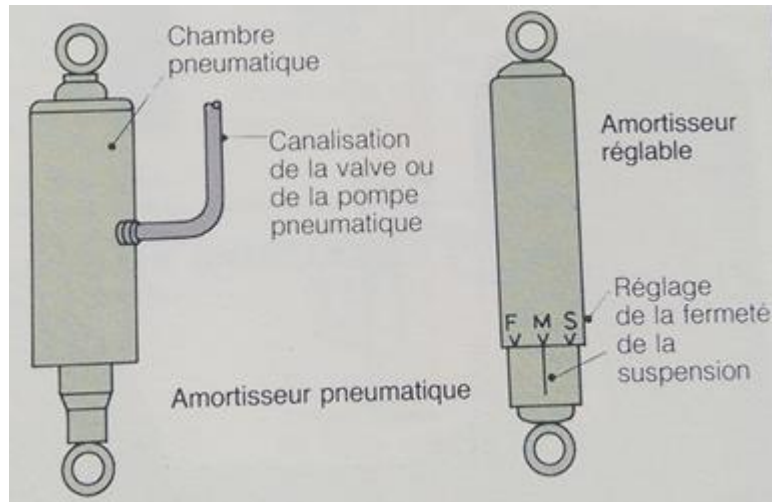
## 7. Annexes



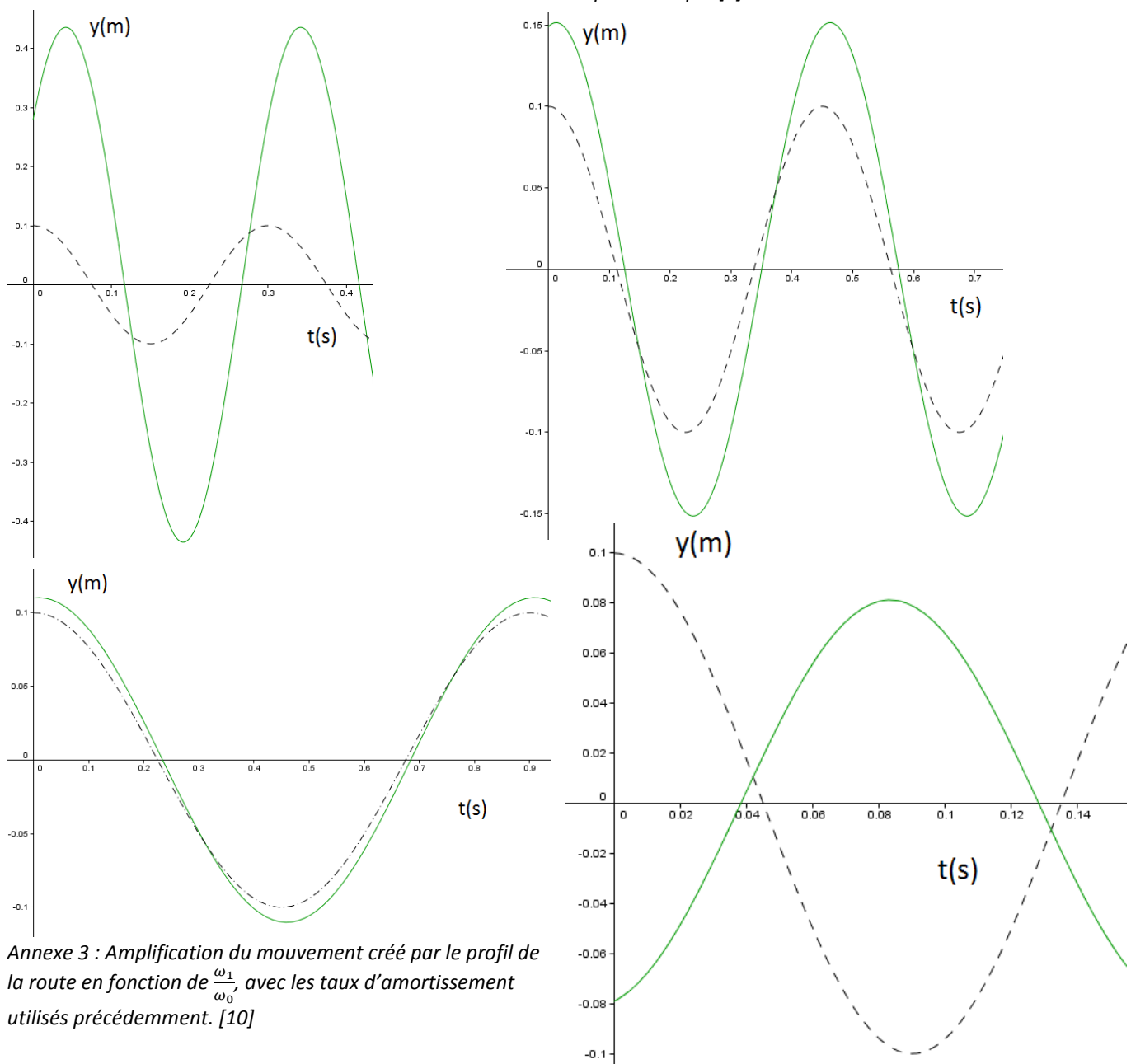
Annexe 1 : schéma d'un amortisseur hydraulique [7]

Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT

2015



Annexe 2 : schéma d'un amortisseur pneumatique [7]



Corentin FAURE, Hugo MORAIS-COSTA, Louis POY-TARDIEU, Fabien BOUTEYRE,  
Mohamed OUDOUNI et Paul-Elia TABARANT