Exercice 1.

Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction continue

Montrer que f admet au moins un point fixe (c'est à dire :
$\exists x_0 \in [0,1], \ f(x_0) = x_0$

Exercice 2 : Autour de la convergence.

$\forall n \geq 1$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}$$

On dit que f_n converge simplement vers f sur $[a,b]$ si

$$\forall x \in [a,b], \ f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$$

1) Montrer que f_n converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction que l'on précisera

2) On dit que f_n converge uniformément vers f sur $[a,b]$ si il existe une suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b], \ |f_n(x) - f(x)| \leq \ell_n, \ \forall n \text{ assez grand.} \\ \ell_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \end{cases}$$

Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

3) mêmes questions avec $g_n(x) = \dfrac{n}{1 + (x+1)n}$

Exercice 3 : Dérivabilité.

Soit f une fonction dérivable en x_0.

Montrer que $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(x_0)$

Et si la limite précédente existe, cela signifie-t-il que f est dérivable en x_0 ?

Exercice 4 :

Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et strictement décroissante.

Montrer que f a un unique point fixe ($\exists! x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = x_0$)

Exercice 6 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

Exercice 7 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ continue.

On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l < 1$

Montrer que f admet un point fixe ($\exists x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) = x_0$)

Exercice 8 :

* Trouver les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(On prendra une fonction f qui convient et on essaiera de trouver sa nature).

* Même question avec f continue.

On ne s'intéressera qu'à l'égalité sur des nombres rationnels, et on montrera que $f\left(\frac{p}{q}\right) = f(1)\frac{p}{q}$

M'appeler ensuite.

Exercice 9 :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bornée et dérivable. On suppose que

$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Montrer que $l = 0$.

Exercice 13 :

1) Soit f une fonction dérivable, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.

2) En déduire que les courbes d'équations $y = x^2$ et $y = \frac{1}{x}$ admettent une unique tangente commune.

Exercice 24 :

On rappelle le théorème des bornes atteintes.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, $a < b$, alors f admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$.

1) Montrer que la condition de continuité est nécessaire.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 25 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, soit $(p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$

Montrer que $\exists\, c \in [a, b]$, $p f(a) + q f(b) = (p+q) f(c)$

Exercice 26 :

On appelle polynôme de degré $n \geq 1$ une fonction de la forme $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

Pour $k \geq 0$, on note $f^{(k)}$ la k-ième dérivée de f, c'est à dire $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, etc.

On va montrer par récurrence sur le degré que si f est un polynome de degré n, et $a \in \mathbb{R}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Pour la suite, on fixe $a \in \mathbb{R}$.

1) Faire l'initialisation pour un polynome de degré 1.

2) Soit $n \geq 1$. On considère, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, un polynome de degré n.

a) Vérifier que P' est un polynome de degré $n-1$, lui appliquer l'hypothèse de récurrence.

c) En intégrant puis en évaluant en a, conclure.

Note : Vous verrez que pour toute fonction g dérivable $n+1$ fois, on a en fait :

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} g^{(n+1)}(t) \, dt.$$

Exercice 14 : Pell - Fermat.

On rappelle la formule du binôme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

On va montrer que l'équation $x^2 - 2y^2 = 0$ admet une infinité de solutions entières.

1) Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il existe des entiers x_n et y_n tels que $(3+2\sqrt{2})^n = x_n + \sqrt{2}\, y_n$

2) Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n

3) En déduire que les suites (x_n) et (y_n) sont strictement croissantes.

4) Conclure

Exercice 15 :

Soit f une fonction continue et périodique telle que :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

Montrer que f est constante

Exercice 16 :

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

En déduire le comportement de la suite :

$$U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Exercice 17.

$\forall n \geq 1$, $\forall x \in]-1, 1[$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$

1) Calculer f_n'

2) Écrire f_n d'une autre manière, et réexprimer f_n'

3) Soit $x \in]-1, 1[$. À l'aide des deux expressions de f_n', calculer $\sum_{k=0}^{+\infty} k x^k$, c'est à dire $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} k x^k$

Exercice 18 :

Calculer $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \min(i,j) \right)$ en fonction de

$a_n = \sum_{k=1}^{n} k$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$

Exercice 10 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 1$.

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -1$

Exercice 11

Soit A une partie d'un ensemble E on appelle fonction caractéristique de A la fonction

$$f : E \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Soient A et B deux parties de E, f_A et f_B leurs fonctions caractéristiques. Montrer que les fonctions suivantes sont les fonctions caractéristiques d'ensemble qu'on déterminera :

1) $1 - f_A$

2) $f_A \times f_B$

3) $f_A + f_B - f_A f_B$

Exercice 12 : Irrationalité de e :

Soit (u_n) et (v_n) définies par :

$\forall n \geq 1,$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1) Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes (c'est-à-dire l'une est croissante, l'autre est décroissante, et $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$)

On note e leur limite commune.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n!\,u_n < n!\,e < n!\,u_n + \frac{1}{n}$

3) Par l'absurde, montrer que e est irrationnel.
(On écrira $e = \frac{p}{q}$ et on appliquera 2) à $n = q$

Exercice 13 :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \geq 0$

Montrer que $l = 0$.

Exercice 19 : k pair.

On rappelle la formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

1) Analyser la valeur de $\frac{1+(-1)^n}{2}$ en fonction de la parité de n.

2) En déduire la valeur de $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ (c'est à dire qu'on ne somme que pour les valeurs de k pair).

Exercice 20.

1) Déterminer a et b tels que $\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}$.

2) En déduire la limite de $u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

3) De la même manière, factoriser k^2+3k+2 puis calculer la limite de $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}$.

Exercice 21 : Irrationalité de $\sqrt{2}$, par l'absurde

1) On écrit $\sqrt{2}$ sous forme irréductible $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

a) Montrer par contraposée que a^2 pair $\Rightarrow$ a pair, $\forall a \in \mathbb{N}$.

b) Élever " $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ " au carré, puis montrer que p est pair.

Donc $p = 2p'$

c) En déduire que q est pair, puis conclure.

Exercice 22 : Suite de racines.

$\forall n \geq 1$, on considère l'égalité $x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1 = 0$ (E)

1) Montrer que (E) admet une unique racine dans $\mathbb{R}_+$. On la note x_n

2) Montrer que (x_n) est décroissante, et en déduire qu'elle converge.

3) Montrer que $\forall n \geq 1$, $U_n \geq \frac{1}{2}$

4) Soit $p \in \left]1/2, 1\right[$. montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(p) > 0$

avec $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x - 1$.

5) En déduire la limite de (U_n).