

Ausarbeitung zum Softwarepraktikum Verfahren und Anwendung der Feldsimulation

Paul Leonardo Heller
Adil Semin Uslu
SoSe 2020



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung in Numerische Methoden	4
1.1 Vorbereitungsaufgaben	4
1.1.1 Differenzenverfahren	4
1.1.2 Dreidimensionale Darstellung	7
1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	11
1.2.1 Differenzenverfahren	11
1.2.2 Dreidimensionale Darstellung	15
1.3 Fazit	17
2 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 1	18
2.1 Vorbereitungsaufgaben	18
2.1.1 Überzählige Kanten	18
2.1.2 Dreiecksgitter	19
2.1.3 Duale Gitter	22
2.1.4 Ab hier sollen beide Gitter aus Abb. 2.2 betrachtet werden.	22
2.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	23
2.2.1 Datenstruktur, Visualisierung des Gitters	23
2.2.2 Die topologischen Matrizen C , \tilde{C} , S und \tilde{S}	25
2.2.3 Unbelegte Kantenelemente	27
2.2.4 Einprägen gegebener Feldverteilungen	29
2.3 Fragen zur Ausarbeitung	30
2.4 Fazit	31
3 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 2	32
3.1 Vorbereitungsaufgaben	32
3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	34
3.2.1 Materialmatrizen	34
3.2.2 Interpolation und Visualisierung	36
3.3 Fragen zur Ausarbeitung	38
3.4 Fazit	39
4 Elektrostatisik und Magnetostatik 1	40
4.1 Vorbereitungsaufgaben	40
4.1.1 Elektrostatisik	40
4.1.2 Skalare Magnetostatik	44
4.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	46
4.2.1 Elektrostatisik	46
4.2.2 Skalare Magnetostatik	49

4.3 Fazit	52
5 Magnetostatik 2, Quasistatik und Frequenzbereich	53
5.1 Vorbereitungsaufgaben	54
5.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	56
5.3 Fazit	62
6 HF-Zeitbereich 1: Leapfrog	63
6.1 Vorbereitungsaufgaben	63
6.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	67
6.3 Fazit	72
7 HF-Zeitbereich 2: Leitungen und Ports	73
7.1 Vorbereitungsaufgaben	74
7.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	76
7.3 Fazit	83
8 HF-Zeitbereich 3: Streuparameter	84
8.1 Vorbereitungsaufgaben	84
8.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung	86
8.2.1 Streuparameter	86
8.3 Fazit	91

1 Einführung in Numerische Methoden

1.1 Vorbereitungsaufgaben

1.1.1 Differenzenverfahren

1. Zeigen Sie, dass der zentrale Differenzenquotient (1.5) aus der Subtraktion zweier Taylor-Entwicklungen zu den Punkten x_{i+1} und x_{i-1} folgt. Vergessen Sie dabei nicht, die Fehlerterme zu berücksichtigen und kommentieren Sie die Ordnung des Fehlers im Vergleich zu vorwärts- und rückwärts-Differenzenquotient.

Der Funktionswert an der Stützstelle $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ berechnet sich zu:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Die Funktion ausgewertet an der Stützstelle $x_{i-1} = x_i - \Delta x$ liefert den Ausdruck:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - \Delta x f'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} f''(x_i) - \mathcal{O}(\Delta x^3)$$

Die Subtraktion ergibt

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) &= 2\Delta x f'(x_i) + 2\mathcal{O}(\Delta x^3) \\ f'(x_i) &= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2) \end{aligned}$$

Δx stellt hier, den durch die Gitterschrittweite definierten Abbruchfehler dar. Die Potenz des Abbruchfehler bezeichnet die Fehlerordnung der Näherung.

2. Berechnen Sie ausgehend von einem Startpunkt $f(\tilde{x}_i)$ auf einem dualen Gitter mit Hilfe von Taylorentwicklungen analog zur Differenzenvorschrift (1.6) im Fall äquidistanter Gitter eine zentrale Differenzenvorschrift vierter Ordnung zur Berechnung der ersten Ableitung. Verwenden Sie hierfür $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$ sowie $f(x_{i-1})$.

Für eine bessere Näherung bei der Berechnung der Ableitungen, wird ein duales Gitter eingeführt, um Differenzenquotienten höherer Ordnung zu erhalten. Beginnend beim Startpunkt $f(\tilde{x}_i)$ mit $\tilde{x}_i = x_i + \frac{\Delta x_i}{2}$ werden die Taylor-Entwicklungen an den Punkten $f(x_{i-1}), f(x_i), f(x_{i+1})$ und $f(x_{i+2})$ aufgestellt und das

Gleichungssystem anschließend gelöst. So ist es möglich eine Näherung der 1. Ableitung bis zur 4. Ordnung zu ermitteln.

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= f(\tilde{x}_i) - \frac{\Delta x_i}{2} f'(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i^2}{8} f''(\tilde{x}_i) - \frac{\Delta x_i^3}{48} f'''(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i^4}{384} f^{(4)}(\tilde{x}_i) - \frac{\Delta x_i^5}{3840} f^{(5)}(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
f(x_{i+1}) &= f(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i}{2} f'(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i^2}{8} f''(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i^3}{48} f'''(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i^4}{384} f^{(4)}(\tilde{x}_i) + \frac{\Delta x_i^5}{3840} f^{(5)}(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
f(x_{i-1}) &= f(\tilde{x}_i) - \frac{3\Delta x_i}{2} f'(\tilde{x}_i) + \frac{9\Delta x_i^2}{8} f''(\tilde{x}_i) - \frac{9\Delta x_i^3}{16} f'''(\tilde{x}_i) + \frac{27\Delta x_i^4}{128} f^{(4)}(\tilde{x}_i) - \frac{81\Delta x_i^5}{1280} f^{(5)}(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
f(x_{i+2}) &= f(\tilde{x}_i) + \frac{3\Delta x_i}{2} f'(\tilde{x}_i) + \frac{9\Delta x_i^2}{8} f''(\tilde{x}_i) + \frac{9\Delta x_i^3}{16} f'''(\tilde{x}_i) + \frac{27\Delta x_i^4}{128} f^{(4)}(\tilde{x}_i) + \frac{81\Delta x_i^5}{1280} f^{(5)}(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
27(f(x_i) - f(x_{i+1})) &= -27\Delta x_i f'(\tilde{x}_i) - \frac{9}{8}\Delta x_i^3 f'''(\tilde{x}_i) - \frac{9}{640}\Delta x_i^5 f^{(5)} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
f(x_{i+2}) - f(x_{i-1}) &= 3\Delta x_i f'(\tilde{x}_i) + \frac{9}{8}\Delta x_i^3 f'''(\tilde{x}_i) + \frac{81}{640}\Delta x_i^5 f^{(5)}(\tilde{x}_i) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
f'(\tilde{x}_i) &= \frac{27(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + f(x_{i-1}) - f(x_{i+2})}{24\Delta x_i} + \mathcal{O}(\Delta x^4)
\end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie aus der Differenzenvorschrift (1.10) die Matrix $\tilde{C}C$ für einen 1D-Resonator mit 5 Stützstellen für den Fall elektrischer bzw. magnetischer Randbedingungen an beiden Rändern (siehe Abb. 1.3, Gl. (1.15) und Gl. (1.16)).

Die Gleichung (1.10) wird für $i \in [0, 4]$ mit i aus N aufgestellt:

$$12\Delta x^2 f''(x_i) = -f(x_{i-2}) + 16f(x_{i-1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})$$

Eine Matrix wird erstellt deren Spalten und Reihen durch $i = 0, i = 1, i = 2$, etc. definiert sind, es stehen also erste Zeile, sowie erste Spalte für f_0 , zweite Zeile und zweite Spalte für f_1 , u.s.w.

Für $i = 0$ ergäbe sich also:

$$12\Delta x^2 f''(x_0) = -f(x_{-2}) + 16f(x_{-1}) - 30f(x_0) + 16f(x_1) - f(x_2)$$

und für $i = 1$:

$$12\Delta x^2 f''(x_1) = -f(x_{-1}) + 16f(x_0) - 30f(x_1) + 16f(x_2) - f(x_3)$$

wie auch in der Matrix erkennbar.

$$\tilde{C}C = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -30 & 16 & -1 & 0 & 0 \\ 16 & -30 & 16 & -1 & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ 0 & -1 & 16 & -30 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -30 \end{bmatrix}$$

Die Kofaktoren von $f(x_{-2})$ und $f(x_{-1})$ in Zeile eins sind nicht in der Matrix enthalten, gleiches gilt für den Kofaktor von $f(x_{-1})$ in Zeile zwei und in Zeile vier und fünf nur dass dann Kofaktoren $f(x_5)$ und $f(x_6)$ auftreten, die nicht in dieser Matrix dargestellt werden können.

Diese links, bzw. rechts überschüssigen Einträge werden mit Hilfe der Randbedingungen berücksichtigt. Unter Berücksichtigung beidseitig elektrischer Randbedingungen ergibt sich:

$$\tilde{CC} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & -29 & 16 & -1 & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ 0 & -1 & 16 & -29 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -30 \end{bmatrix}$$

Und unter Berücksichtigung beidseitig magnetischer Randbedingungen ergibt sich:

$$\tilde{CC} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} -30 & 32 & -2 & 0 & 0 \\ 16 & -31 & 16 & -1 & 0 \\ -1 & 16 & -30 & 16 & -1 \\ 0 & -1 & 16 & -31 & 16 \\ 0 & 0 & -2 & 32 & -30 \end{bmatrix}$$

4. Betrachtet werden soll exemplarisch die Berechnung der diskreten Wellenzahlen bei vorgegebener Länge des Rechengebietes nach Gl. (1.14). Geben Sie den Abbruchfehler in Abhängigkeit von der Anzahl der verwendeten Stützstellen n bzw. der Diskretisierungsschrittweite Δx an, wenn der Differenzenquotient nach Gl. (1.9) bzw. Gl. (1.10) verwendet wird. Wie müssen Sie ein entsprechendes Diagramm (Abbruchfehler vs. Anzahl der Stützstellen) skalieren, um einen geradlinigen Verlauf zu erhalten?

Mit $n = \frac{L}{\Delta x} + 1 \Leftrightarrow \Delta x = \frac{L}{n-1}$ und Δx bezeichnet dabei die Gitterschrittweite.

Für den Abbruchfehler der 2.Ordnung gilt dann mit $f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1})+f(x_{i-1})-2f(x_i)}{\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$
 $\mathcal{O}(\Delta x^2) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{L}{n-1}\right)^2\right)$

Für die 4.Ordnung gilt dann mit $f''(x_i) = \frac{-f(x_{i-2})+16f(x_{i-1})-30f(x_i)+16f(x_{i+1})-f(x_{i+2})}{12\Delta x^2} + \mathcal{O}(\Delta x^4)$
 $\mathcal{O}(\Delta x^4) = \mathcal{O}\left(\left(\frac{L}{n-1}\right)^4\right)$

Es muss ein doppelt logarithmisches Diagramm für einen geradlinigen Verlauf verwendet werden.

5. Stellen Sie eine Formel auf, mit der die analytischen Wellenzahlen $k_{x,\text{ana}}$ für die eindimensionale Wellengleichung und einem Resonator der Länge L einmal mit rein elektrischer Berandung und einmal mit unterschiedlichen Randbedingungen (eine Seite elektrisch – eine Seite magnetisch) berechnet werden kann. Bestimmen Sie dabei auch die jeweils kleinste Wellenzahl. Geben Sie bei einer numerischen Berechnung eine Formel für den relativen Wellenzahlfehler Δk_x an.

Die Gleichung für die eindimensionale Wellengleichung des elektrischen Feldes lautet:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -k_x E$$

Es liegt eine DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor, deren allgemeine Lösung durch das Aufstellen des charakteristischen Polynoms ermittelt werden kann:

$$E(x) = C_1 \cos(k_x x) + C_2 \sin(k_x x)$$

Werden elektrische Randbedingungen auf beiden Seiten des Resonators genutzt, muss das elektrische Feld dort verschwinden. Es muss also gelten: $E(0)=0$ und $E(L)=0$. Für $E(0)=0$ ergibt sich $E(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0$ also muss $C_1 = 0$ sein. Für $E(L)=0$ ergibt sich $E(L) = C_2 \sin(k_x L) = 0$ und damit $k_x = \frac{n\pi}{L}$. Die kleinste Wellenzahl ergibt sich für $n=1$:

$$k_x = \frac{\pi}{L}$$

Werden links elektrische und rechts magnetische Randbedingungen betrachtet. Muss links wieder gelten $E(0) = 0$ und rechts muss nun die Ableitung des elektrischen Feldes verschwinden, also $\frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$. Es ergibt sich wieder für $E(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$ und für $\frac{\partial E}{\partial x} \Big|_{x=L} = C_2 \cos(k_x L) = 0$ ergibt sich $k_x = \frac{(2m+1)\pi}{L}$. Die kleinste Wellenzahl folgt für $m=0$:

$$k_x = \frac{\pi}{L}$$

Berechnung relativer Wellenzahlfehler:

$$\Delta k_x = \frac{k_{x,ana} - k_{x,numerisch}}{k_{x,ana}}$$

6. Wie kann man die Orthogonalität zweier Eigenvektoren testen und was sagen orthogonale Eigenvektoren über die Lösungen eines Eigenwertproblems (Moden) aus?

Betrachtet werden zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} , deren Skalarprodukt über die Beziehung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ gegeben ist. Stehen die Vektoren orthogonal zueinander, i.e. ihr eingeschlossener Winkel ist 90° groß, so ist das Skalarprodukt 0. Wenn die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix orthogonal zueinander sind, sind ihre zugehörigen Eigenwerte verschieden. Somit hat das Eigenwertproblem der Matrix $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ n verschiedene Lösungen (Moden).

1.1.2 Dreidimensionale Darstellung

Gegeben sei in Abbildung 1.1 die Diskretisierung eines Kreiszylinders der Höhe h und des Radius r mit n_D Deckflächendreiecken der Grundlänge $2a_D$ und Höhe h_D .

7. Überlegen Sie sich einen Pseudocode mit For-Schleifen, mit welchem Sie die Koordinaten aller Dreiecke der Oberflächendiskretisierung (siehe Abb. 1.1) bestimmen können. Die Anzahl der Dreiecke n_D soll dabei beliebig sein. Beachten Sie, dass zur Oberfläche Deck-, Mantel- und Bodenfläche gehören. Außerdem besitzen die Dreiecke auf der Mantelfläche „unterschiedliche Orientierungen“.

Um die Koordinaten aller Dreiecke zu berechnen, ist es sinnvoll den Zylinder in eine Boden-, Deckel- und zwei Mantelflächen zu unterteilen. Dann wird für jede Fläche mit einer `for`-Schleife über die Anzahl der Dreiecke

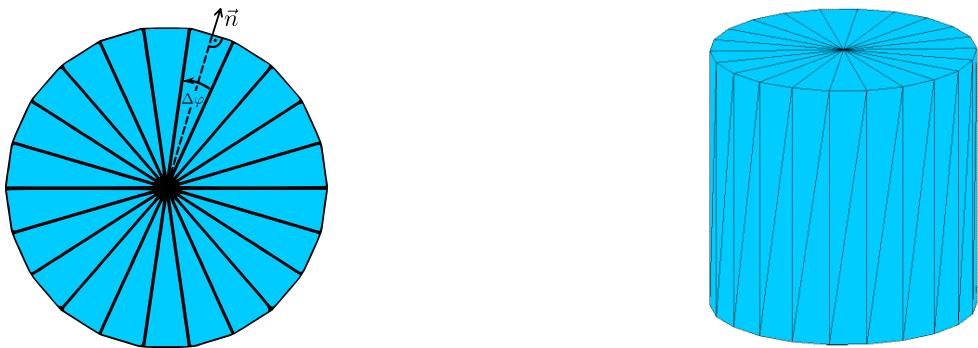


Abbildung 1.1: Diskretisierung einer Kreiszylinderoberfläche. Dargestellt sind die Dreiecksgitter der Diskretisierung der Deckelfläche (links) und des diskretisierten Zylinders in Perspektivansicht (rechts).

iteriert und für jedes Dreieck dann eine Berechnungsvorschrift der Koordinaten angegeben.

So ergibt sich beispielsweise für die Deckeldreiecke, dass alle Punkte die gleiche z-Koordinate h haben. Der erste Punkt eines Dreiecks hat immer die x- und y-Koordinaten 0, da dies den Punkt in der Mitte des Deckel-'Kreises' beschreibt. Die x- und y-Koordinate des zweiten Punktes berechnen sich nach der Vorschrift:

$$x = r \cdot \cos(i \cdot \Delta\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(i \cdot \Delta\varphi)$$

Die x- und y-Koordinaten des dritten Punktes sind immer die Koordinaten des zweiten Punktes vom Dreieck einer Iteration davor, da zwei aufeinander folgende Dreiecke diesen Punkt immer gemeinsam haben. Nur beim ersten Dreieck müssen die Koordinaten des dritten Punktes auch extra gesetzt werden, da beim ersten Dreieck bei dieser sonst rekursiven Berechnungsvorschrift auf kein Dreieck vorher zurückgegriffen werden kann. Für den Boden ist die Berechnung analog, nur dass die z-Koordinate der Punkte geringer als die des Deckels ist.

Für Mantel1 und Mantel2 erfolgte bereits die Berechnung aller Punkte, die somit nur noch eingetragen werden müssen, denn jedes Manteldreieck von Mantel1 besteht aus zwei Punkten des Deckels und einem Punkt des Bodens und jedes Manteldreieck von Mantel2 besteht aus zwei Punkten des Bodens und einem Punkt des Deckels.

8. In der Theorie wurde erwähnt, dass eine feinere Diskretisierung die Genauigkeit der Darstellung steigert¹, aber dass auch der Rechenaufwand und der geforderte Speicher zunehmen. Berechnen Sie den Speicherplatz, der zur Speicherung des oben abgebildeten, diskretisierten Zylinders im STL-Format notwendig ist, als Funktion der Anzahl der Dreiecke n_D (Normalenvektoren müssen auch berücksichtigt werden). Beachten Sie hierbei lediglich die notwendige Anzahl der `double`-Zahlen, wobei eine `double`-Zahl 8 Byte benötigt.

Die Oberfläche des Zylinders wird in 3 Teilflächen:

- Vollkreis bei Höhe h
- Mantelfläche
- Vollkreis bei Höhe 0

Ein jedes Dreieck wird durch drei Punkte beschrieben. Jeder dieser Punkte ist definiert durch eine x y z -Koordinate im Raum. Somit werden für die x -Komponenten aller Deckflächendreiecke $3 \cdot n_D$ Punkte und ebenso viele für die y -, bzw z -Komponente benötigt. Insgesamt ergeben sich so $9 \cdot n_D$ Punkte und da jede Dreiecksfläche einen Flächennormalenvektor besitzt, der aus drei Punkten besteht, gilt für die obere Dreiecksfläche:

$$P_{Deckel} = 9 \cdot n_D + 3 \cdot n_D.$$

Durch ein analoges Vorgehen kann die Anzahl Punkte für die Bodenfläche, die folglich genauso groß ist erhalten werden.

Für jedes Dreieck an den Enden des Prismas werden zwei Dreiecke auf der Mantelfläche aufgespannt. Es gilt daher:

$$P_{Mantel} = 9 \cdot n_D + 3 \cdot n_D + 9 \cdot n_D + 3 \cdot n_D.$$

Für die Gesamtanzahl an Punkten folgt:

$$P_{ges} = 12 \cdot n_D + 12 \cdot n_D + 24 \cdot n_D = 48 \cdot n_D.$$

Da jeder double 8 byte Speicherplatz belegt, werden insgesamt $8 \cdot 48 \cdot n_D = 384 \cdot n_D$ byte benötigt.

9. Gegeben ist folgender Zusammenhang für die Fläche eines Deckflächendreieckes:

$$A_D = 2 \left[\frac{1}{2} a_D h_D \right] = 2 \left[\frac{1}{2} \cdot r \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot r \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right] = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta\varphi) \quad (1.1)$$

Überlegen sie sich geometrisch, wie diese Formel zustande kommt und dokumentieren Sie die einzelnen Schritte. Leiten Sie anschließend eine Formel zur Berechnung des Volumens und der Fläche des gezeigten Zylinders in Abhängigkeit von der Anzahl der Deckflächendreiecke n_D her.

Bestimmen Sie den relativen Oberflächenfehler ΔA bzw. Volumenfehler ΔV dieser Diskretisierung. Bei welchen Körpern wäre eine solche Oberflächendiskretisierung mit Dreiecken exakt?

Die allgemein bekannte Formel für die Flächenberechnung eines Dreiecks lautet $A_D = \frac{1}{2} g_D h_D$, da die Grundseite hier die Länge $2a_D$ hat, gilt somit $A_D = 2 \left[\frac{1}{2} a_D h_D \right]$.

Die Fläche A_D kann durch die Wahl der Kanten des Dreiecks

$$x = h = r \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$y = a_D = r \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

auch als

$$A_D = 2 \left[\frac{1}{2} r \sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot r \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \right]$$

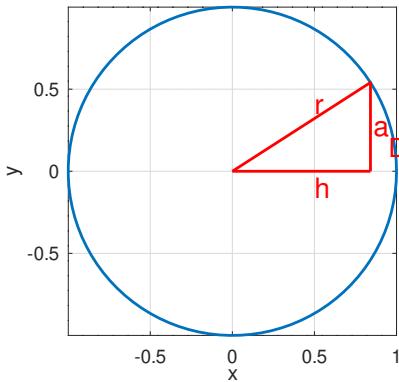


Abbildung 1.2: Dargestellt ist ein halbes Dreieck auf der Grundfläche des Zylinders.

ausgedrückt werden.

Mit den Beziehungen

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

und der Substitution $\frac{\Delta\varphi}{2} = \alpha$ ergibt sich:

$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha}}{4i} = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\Delta\varphi)$$

Wird dieser Ausdruck wieder in die Flächengleichung eingesetzt, so folgt das gesuchte Ergebnis

$$A_D = 2 \left[\frac{1}{2} r^2 \frac{1}{2} \sin(\Delta\varphi) \right] = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta\varphi)$$

Relative Oberflächenfehler ΔA :

Fläche numerisch: Mit $A_D = \frac{1}{2} r^2 \sin(\Delta\varphi)$ und $a_D = r \cdot \sin(\frac{\Delta\varphi}{2})$

$$A_N = 2n_D \cdot (A_D + h \cdot a_D)$$

Fläche analytisch: $A_A = 2\pi r \cdot (h + r)$

$$\Delta A = \frac{A_A - A_N}{A_A} = \frac{\pi r \cdot (h+r) - n_D \cdot (A_D + h \cdot a_D)}{\pi r \cdot (h+r)}$$

Relative Volumenfehler ΔV :

Volumen numerisch: $V_N = A_D n_D h$

Volumen analytisch: $V_A = \pi r^2 h$

$$\Delta V = \frac{V_A - V_N}{V_A} = \frac{\pi r^2 h - A_D n_D h}{\pi r^2 h}$$

Eine solche Diskretisierung wäre bei Körpern exakt, deren Oberfläche aus Dreiecken besteht, e.g. Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder.

10. Bei einigen Anwendungen ist es wichtig, dass die diskretisierte Fläche möglichst glatt bleibt. Ein wichtiges Beispiel hierbei ist die Streuung hochfrequenter elektromagnetischer Felder, wobei Kanten und Ecken das gestreute Feld verändern können. Angenommen bei der oberen Diskretisierung des Zylinders ist der Winkel zwischen den Normalenvektoren benachbarter Dreiecke der Deckflächen $\Delta\varphi \leq 5^\circ$ gefordert. Berechnen Sie die minimale Anzahl an Dreiecken zur Erfüllung dieser Forderung.

Anzahl Dreiecke:

$$n_D = \frac{360^\circ}{\Delta\varphi}$$

Mit $\Delta\varphi \leq 5^\circ$:

$$n_d \geq \frac{360^\circ}{\Delta\varphi} \geq \frac{360^\circ}{5^\circ} \geq 72$$

Es werden also mindestens 72 Dreiecke für die Deckfläche des Prismas benötigt. Da wie in **8.** beschrieben ein Paar von gegenüberliegenden Deck - und Bodenflächendreiecken zwei Mantelflächendreiecke aufspannen gilt für die Gesamtzahl der Dreiecke:

$$n_{D,ges} \geq 72 + 72 + 144 = 288.$$

1.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

1.2.1 Differenzenverfahren

1. Implementieren Sie eine Methode

$$[\text{cc}] = \text{createCC}(n, \text{ord}, \text{bc}) \quad (1.2)$$

welche die $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix mit der Stützstellenanzahl n , der Ordnung des Differenzenverfahrens ord ($_2$ = zweite und $_4$ = vierte Ordnung) und der für beide Ränder identischen Art der Randbedingung bc ($_0$ =fehlende, $_1$ =elektrische und $_2$ =magnetische) erstellt. Rückgabewert ist die $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix cc . Nutzen Sie hierfür das vorgefertigte Template `createCC.m`.

In der 3. Vorbereitungsaufgabe wurde bereits beschrieben, wie die $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix entsteht. Für die Implementierung wird der Befehl `spdiags(B, d, m, n)` verwendet, welcher eine $m \times n$ dünnbesetzte Matrix erzeugt und die Spalten des Vektors B auf die Diagonale d der Matrix schreibt. Je nach Randbedingung verändern sich nun die Diagonalen der Matrix. Diese Information wird dann in die Vektoren b , f bei 2. Ordnung und b , c , d , e , f bei 4. Ordnung geschrieben und die Matrix mit `spdiags` neu überschrieben. Dabei erzwingen elektrische Randbedingungen eine ungerade Symmetrie ($f(x_{N-1}) = -f(x_{N+1})$) und magnetische Randbedingungen eine gerade Symmetrie ($f(x_{N-1}) = f(x_{N+1})$). Diese zusätzliche Bedingung durch die Ränder muss nun in die $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix eingearbeitet werden, wodurch sich neue Diagonalen in der Matrix ergeben. Beispielsweise ist in der 3. Vorbereitungsaufgabe zu sehen, dass bei der $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ -Matrix 4. Ordnung mit elektrischen Randbedingungen die ersten beiden Nebendiagonalen, rechts der Hauptdiagonale, nun mit einer 0 beginnen. Also wurde diese Information in neue Vektoren e , f geschrieben und diese dann wieder mit `spdiags` auf die Diagonalen der Matrix geschrieben.

Wichtig ist hier eine gewisse Systematik der Veränderung auf den Diagonalen durch die Randbedingungen zu erkennen und diese richtig einzuarbeiten.

2. Ein einfacher Solver soll in

$$[kx, \text{modes}] = \text{solveCC}(cc, dx) \quad (1.3)$$

implementiert werden, wobei die Schrittweite dx als zusätzlicher Eingabeparameter übergeben wird. kx ist hier ein Vektor mit den geordneten Wellenzahlen, angefangen mit der kleinsten Wellenzahl. In gleicher Reihenfolge sollen auch die Eigenvektoren in der Matrix modes zurückgegeben werden. Das Eigenwertproblem lässt sich durch die MATLAB®-Funktion `eig` lösen, das Sortieren kann mit `sort` erfolgen.

Mit dem Befehl `eig` werden zuerst aus der Matrix `cc` die Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet, dann wird mit Hilfe von $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{e} = -\Delta x^2 k_x^2 e$ aus den Eigenwerten die Wellenzahlen berechnet. Dabei stellen $-\Delta x^2 k_x^2 e$ die Eigenwerte von $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ dar und da diese vorher mit `eig` berechnet wurden, kann hier $-\Delta x^2 k_x^2 e$ gleich den Eigenwerten aus `eig` gesetzt werden und nach den Wellenzahlen k_x aufgelöst werden. Anschließend werden die Wellenzahlen mit `sort` sortiert und zum Schluss werden die Eigenvektoren (Moden) nach demselben Sortierindex geordnet wie die Wellenzahlen zuvor geordnet wurden.

3. Verwenden Sie die Routine `createCC` mit `n=6`, `ord=2` und `bc=0` und anschließend `solveCC`. Überprüfen Sie die Orthogonalität der Eigenvektoren. Wie viele Eigenmoden können bei dieser Parameterwahl bestimmt werden? Nutzen Sie hierfür die bereits gegebene Datei `check_orth.m`.

Hinweis: Wenn Sie die Eigenvektoren geschickt miteinander multiplizieren, erhalten Sie eine Matrix, in der jeder Eintrag einem Produkt zweier Eigenvektoren entspricht. Diese sich ergebene Matrix lässt sich dann bequem mit dem Befehl `imagesc` (siehe Abschnitt 1.1.3) darstellen.

Zuerst ist mit der zuvor geschriebenen Methode `createCC` die Matrix mit vorgegeben Randbedingungen, Stützstellenanzahl, Ordnung und Länge erstellt worden. Dann wurden mit `solveCC` die Moden und Wellenzahlen berechnet und anschließend ist die Orthogonalität der Moden in `isOrth` überprüft worden. In der Abbildung 3.2 ist nun zu sehen, dass alle Einträge bis auf die Hauptdiagonale gleichfarbig sind. Alle Einträge, abgesehen der Hauptdiagonalen, haben den gleichen Wert 0, was bedeutet, dass die Moden orthogonal sind. Somit können $n=6$ verschiedene Moden bestimmt werden.

4. Stellen Sie die zwei niedrigsten Moden in einem Skript `plotModes` grafisch dar. Verwenden Sie `n=100`, `bc=1` und `ord=4` sowie die Länge des eindimensionalen Gebietes $L=5$ m.

Auch hier ist das Vorgehen wieder ähnlich. Anfänglich wird die Matrix $\tilde{\mathbf{C}}\mathbf{C}$ mit `createCC` erstellt und mit `solveCC` das Eigenwertproblem gelöst. Nun sollen die zwei niedrigsten Moden dargestellt werden. Dazu wird ein Intervall definiert und nun können problemlos die erste und zweite Spalte von `modes` für elektrische Randbedingungen über dieses Intervall geplottet werden. Das Intervall ist dabei wie folgt definiert: Es beginnt bei 0 und endet bei $L-dx$. L stellt die Länge des Rechengebietes und $dx = \frac{L}{n}$ die Gitterschrittweite dar. Die erste und zweite Spalte von `modes` in der Methode `solveCC` entsprechen den niedrigsten Moden, da die Moden aufsteigend sortiert wurden.

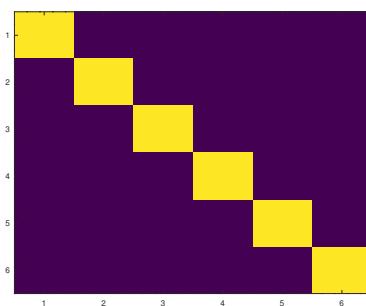


Abbildung 1.3: Dargestellt ist die Matrix deren Einträge für die Skalarprodukte aller Eigenvektoren stehen. Haben die Einträge die gleichen Werte, haben sie auch die gleiche Farbe. Alle Einträge bis auf die Hauptdiagonale haben im Falle l.u. Eigenvektoren die gleiche Farbe.

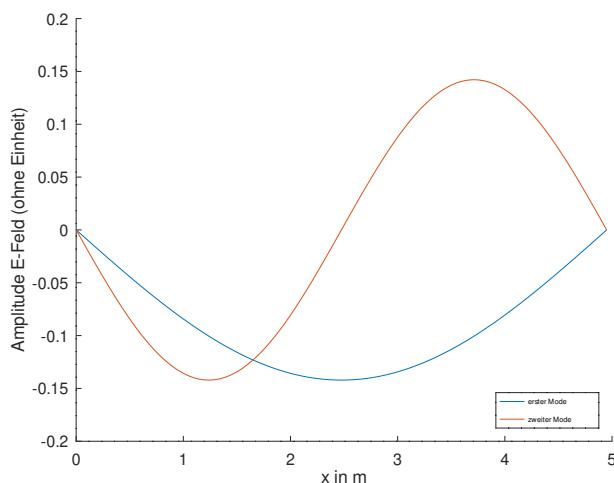


Abbildung 1.4: Die zwei niedrigsten Moden bei elektrischen Randbedingungen.

5. Als nächstes sollen Sie das Konvergenzverhalten betrachten. Schreiben Sie ein Skript `plotConv`, welches das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der Stützstellenanzahl n Ihrer verschiedenen Implementierungen in zwei Grafiken dokumentiert:

1. Lineare Darstellung der Wellenzahl des Grundmodes über der Stützstellenanzahl n im Fall elektrischer Randbedingungen, sowohl analytisch als auch zweite und vierte Ordnung.
2. Doppelt-logarithmische Darstellung des relativen Wellenzahlfehlers des Grundmodes über die Gitterschrittweite bei elektrischen und fehlenden Randbedingungen für jeweils beide Ordnungen.

Verwenden Sie die Grafiken um die Ordnung der verschiedenen Implementierungen graphisch zu bestimmen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit Aufgabe 1.1 aus der Vorbereitung. Wie verändert sich das Konvergenzverhalten, wenn keine Randbedingungen implementiert sind?

Für die Konvergenzstudie mit verschiedenen Ordnungen und verschiedenen Randbedingungen benötigt es für jede Spezifikation eine eigene `for`-Schleife, in der in Abhängigkeit der Stützstellenanzahl die Wellenzahl des Grundmodes berechnet wird. Dazu werden zu Beginn die Vektoren für die verschiedenen Ordnungen mit der jeweiligen Stützstellenanzahl und die Länge des Leiters festgelegt. Dann wird für jede Spezifikation über die Stützstellenanzahl iteriert und für jede Anzahl an Stellen die Curl-Curl Matrix `cc` mit der Methode `createcc` berechnet. Anschließend wird die Schrittweite $\Delta x = \frac{L}{n-1}$ ausgerechnet, dabei stellt n die Stützstellenanzahl und L die Länge des Leiters dar. Schließlich wird mit `solvecc` die Wellenzahl berechnet, da aber nur der Grundmode gefragt ist, wird nur dieser in einem Vektor abgespeichert. Nachdem dies für jede Stützstellenanzahl gemacht wurde, werden die Vektoren, in denen die Wellenzahlen des Grundmode für jede Anzahl an Stützstellen gespeichert sind über die Stützstellenanzahl geplottet.

In Abbildung 1.5 sind sowohl die Wellenzahlen der analytischen Lösung mit $k_x = \frac{\pi}{L}$, als auch die Wellenzahlen der 2. und 4. Ordnung für elektrische Randbedingungen über die Stützstellenanzahl dargestellt. Es ist zu erkennen, dass beide Ordnungen sich mit steigender Anzahl an Stützstellen der analytischen Lösung annähern. Dabei stimmt jedoch die 4. Ordnung schon mit 7 Stützstellen ziemlich genau mit der analytischen Lösung überein. Die 2. Ordnung benötigt dafür ca. 30 Stützstellen.

In Abbildung 1.6 ist der relative Wellenzahlfehler $\Delta k_x = \frac{k_{x,ana} - k_{x,numerisch}}{k_{x,ana}}$ logarithmisch über die Gitterschrittweite $\Delta x = \frac{L}{n-1}$ dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der relative Wellenzahlfehler für alle Ordnungen und Randbedingungen mit sinkender Gitterschrittweite (steigender Stützstellenanzahl) abnimmt. Auch ist dort zu sehen, dass ohne Randbedingungen die 4. Ordnung einen leicht geringeren relativen Wellenzahlfehler als die 2. Ordnung hat. Kommen nun zusätzlich elektrische Randbedingungen hinzu, sinkt der relative Wellenzahl von ca. 1.83% auf $5.633 \cdot 10^{-7}\%$ bei 4. Ordnung und von ca. 2.11% auf $4.196 \cdot 10^{-3}\%$ bei 2. Ordnung bei maximaler Stützstellenanzahl.

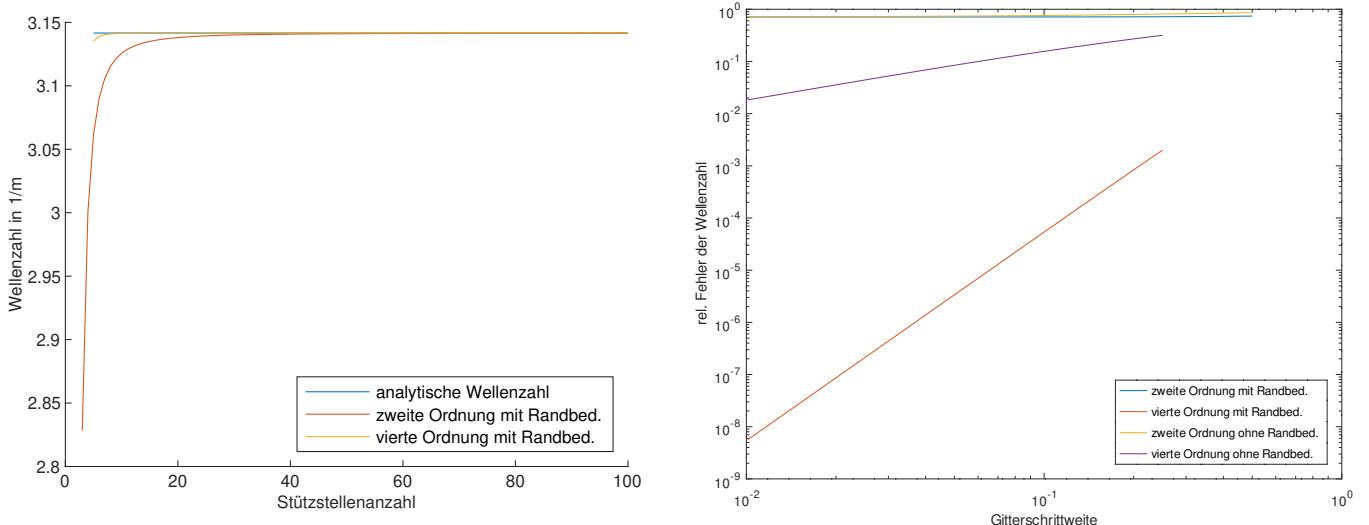


Abbildung 1.5: Dargestellt sind die Wellenzahl der 2. und 4. Ordnung mit elektrischen RB über der Stützstellenanzahl (links) und der relative Wellenzahlfehler über der Gitterschrittweite (rechts).

1.2.2 Dreidimensionale Darstellung

6. Schreiben Sie ein Skript `plotcyl`, welches den Zylinder aus der Vorbereitung visualisiert. Bauen Sie hierzu auf der MATLAB®-Funktion `patch` auf. Verwenden Sie die Anzahl der Dreiecksflächen in einer Deckelfläche $nd=20$, den Radius $r=1$ und die Höhe $h=1$.

Zur Visualisierung des Zylinders ist es zuerst notwendig für die vier Flächen (Boden, Deckel, Mantel1, Mantel2) eine $3 \times n_d$ Matrix jeweils für die x-, y- und z-Koordinate zu erstellen. N_d entspricht dabei der Anzahl an Dreiecken. In den Zeilen jeder Matrix werden jeweils die Koordinaten der drei Punkte, aus denen jedes Dreieck besteht, eingetragen. Es wird also mit einer `for`-Schleife über die Anzahl der Dreiecke iteriert und für jedes Dreieck dann eine Berechnungsvorschrift der Koordinaten angegeben.

So ergibt sich beispielsweise für die Deckeldreiecke, dass alle Punkte die z-Koordinate h haben. Der erste Punkt eines Dreiecks hat immer die x- und y-Koordinaten 0, da dies den Punkt in der Mitte des Deckel-'Kreises' beschreibt. Die x- und y-Koordinate des zweiten Punkts berechnet sich nach der in V9 hergeleiteten Vorschrift und die Koordinaten des dritten Punktes sind immer die Koordinaten des zweiten Punktes vom Dreieck einer Iteration davor, da zwei aufeinander folgende Dreiecke diesen Punkt immer gemeinsam haben. Nur beim ersten Dreieck müssen die Koordinaten des dritten Punktes auch extra gesetzt werden, da beim ersten Dreieck bei dieser sonst rekursiven Berechnungsvorschrift auf kein Dreieck vorher zurückgegriffen werden kann. Für den Boden ist die Berechnung analog, nur dass die z-Koordinate 0 ist.

Für den Mantel1 und Mantel2 haben wurden auch bereits alle Punkte berechnet, müssen diese also nur noch eintragen, denn jedes Manteldreieck von Mantel1 besteht aus zwei Punkten des Deckels und einem Punkt des Boden und jedes Manteldreieck von Mantel2 besteht aus zwei Punkten des Bodens und einem Punkt des Deckels.

Schließlich werden dann Boden-, Deckel- und Mantelmatrizen mit `patch` geplottet.

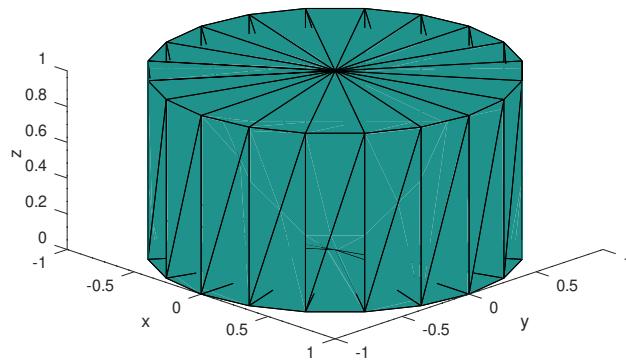


Abbildung 1.6: Diskretisierung eines Zylinders mit 20 Deckflächendreiecken.

7. Stellen Sie für einen Zylinder Ihrer Wahl den Oberflächenfehler ΔA sowie den Volumenfehler ΔV in Abhängigkeit von der Anzahl der Dreiecksflächen je Deckel n_D (Vorbereitungsaufgabe 1.1) in einem Skript `plotVisErr` doppelt-logarithmisch dar. Mit welcher Ordnung konvergieren die Fehler? Aus der Vorbereitung wissen Sie zusätzlich, wie der Speicherbedarf der Darstellung skaliert.

Wie viele Dreiecke sind notwendig um einen Diskretisierungsfehler kleiner als 10^{-5} zu garantieren?

Anfänglich werden Radius, Höhe und die maximale Anzahl an Stützstellen festgelegt. Im Folgenden werden der diskrete Schritt in azimutale Richtung ϕ und darüber die diskreten Größen für die Fläche `oberflaecheDiskrete`, sowie das Volumen `volumenDiskrete` ermittelt. Die analytischen Ausdrücke wurden durch die bereits bekannten Beziehungen für Kreise $A = 2\pi r h$ und $V = \pi r^2$ bestimmt.

Die Fehlerermittlung erfolgte mit der Formel für den relativen Fehler $\Delta f = \frac{W-E}{W}$ wobei W für den 'wahren' Wert in diesem Fall der analytischen Fläche/ Volumen und E dem Ergebnis hier dem diskreten Wert entspricht. Es sind 810 Dreiecke nötig, um einen Fehler kleiner als 10^{-5} zu garantieren.

Zur Bestimmung der Fehlerordnung kann bei beiden Verläufen mit Hilfe von 2 Punkten aus dem Graph diese nach $\frac{\ln y_1 - \ln y_2}{\ln x_1 - \ln x_2}$ berechnet werden. Die Fehlerordnung beim Volumenfehler sowie beim Oberflächenfehler entspricht demnach 2.

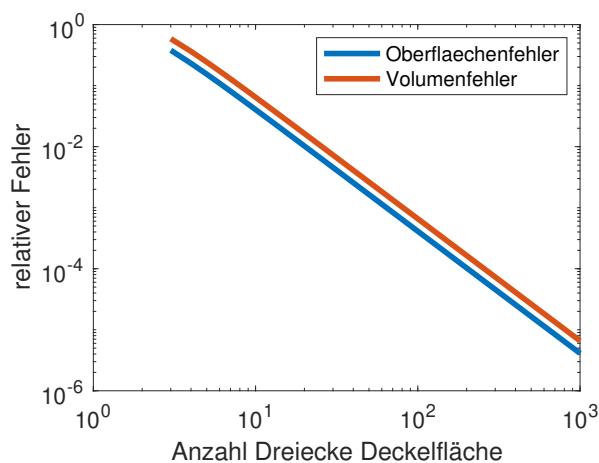


Abbildung 1.7: Dargestellt ist der relative Fehler, der bei der Diskretisierung des Zylinders entsteht, in blau für die Oberfläche und in orange für das Volumen, über der Anzahl Dreiecke der Deckfläche.

8. Verwenden Sie die bereitgestellte Methode `read_stl` um zwei der bereitgestellten Geometrien im STL-Format (vgl. Abb. 1.4) einzulesen und dann erneut mit `patch` darzustellen. Nennen Sie Ihr Skript `plotStl`.

Es werden lediglich `zylinder.stl` und `w210.stl` mit `read.stl` eingelesen und anschließend mit `patch` geplottet.

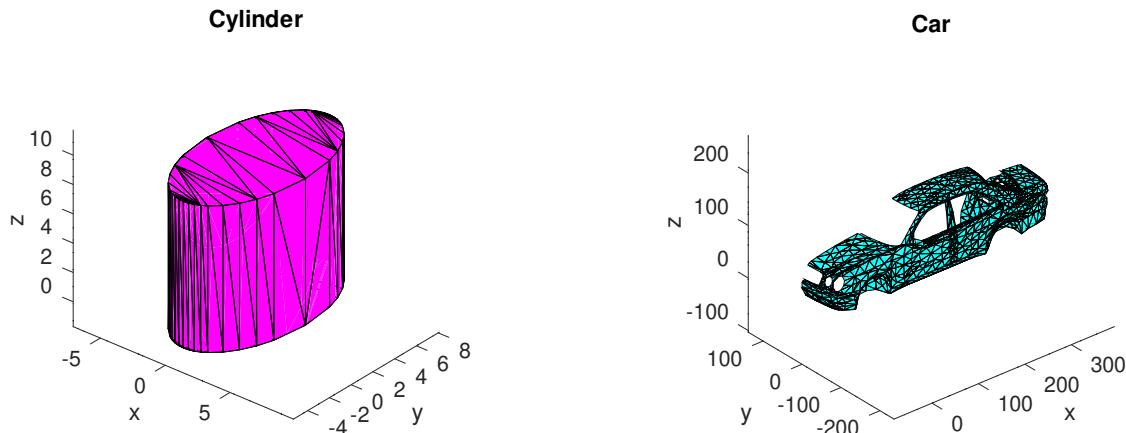


Abbildung 1.8: Ein Zylinder und ein Auto erstellt auf Basis einer .stl Datei, welche die Koordinaten aller Dreiecke und deren Normalenvektoren beinhaltet.

1.3 Fazit

Im ersten Teil dieses Versuchs wurde mit Hilfe des zentralen Differenzenquotienten (2. und 4. Ordnung) die Curl-Curl Matrix für verschiedene Randbedingungen erstellt und dann deren Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet. Die Eigenwerte wurden daraufhin auf Orthogonalität und die Moden auf Konvergenz überprüft. Auffällig war hier, dass der Differenzenquotient 4. Ordnung bei gleicher Stützstellenanzahl wie der Differenzenquotient 2. Ordnung genauer war. Im 2. Versuchsteil sollte mit Hilfe einer Dreiecksdarstellung von Oberflächen verschiedene Körper modelliert werden. Auffällig war hier, dass mit einer genügend großen Wahl an Dreiecken Körper fast beliebig genau modelliert werden können.

2 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 1

2.1 Vorbereitungsaufgaben

2.1.1 Überzählige Kanten

1. Skizzieren Sie ein zweidimensionales kartesisches Gitter mit 3×4 Punkten und tragen Sie alle Kantenindizes für die x - und y -Kanten nach dem kanonischen Indizierungsschema aus Gl. (2.5) ein. Machen Sie sich klar, welche Indizes zu nicht existierenden Kanten gehören und markieren Sie diese.

Nach dem kanonischen Indizierungsschema werden zuerst alle Punkte in x -, dann in y - und zuletzt in z -Richtung durchnummeriert. Beim primären Gitter entspricht der Kantenindize einer Kante dem Indize ihres Anfangspunktes (festgelegt durch Orientierung der Kante).

In positiver Koordinatenachsenrichtung entstehen somit Kanten außerhalb des Rechengebietes, da deren Anfangspunkt auf dem Rand, aber ihr Endpunkt außerhalb der Domäne liegt.

Diese Kanten werden als Geisterkanten bezeichnet, s. Abbildung 2.1.

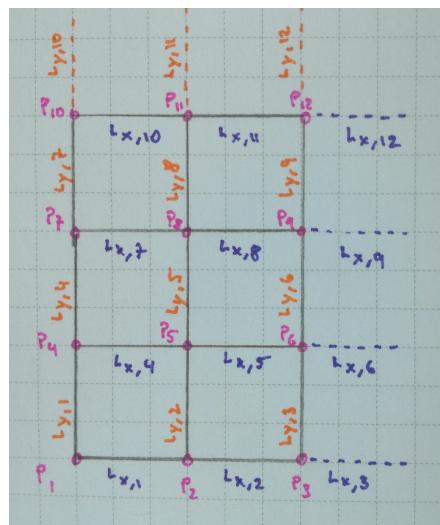


Abbildung 2.1: Zweidimensionales kartesisches Gitter mit 3×4 Punkten, indiziert nach dem kanonischen Indizierungsschema. Kanten in x -Richtung sind lila und Kanten in y -Richtung sind orange dargestellt. Geisterkanten, welche am Rand des Gebietes auftreten sind gestrichelt abgebildet.

2. Überlegen Sie sich für ein $N_x \times N_y$ -Gitter eine Formel für die Anzahl der Indizes, zu denen keine Kanten gehören. Geben Sie diese Formel auch für den Sonderfall $N_{xy} = N_x = N_y$ in Abhängigkeit von $N_p = N_{xy}^2$ an. Geben Sie darüber hinaus auch eine Formel an, um die Indizes aller Geisterkanten nach dem kanonischen Indizierungsschema zu berechnen.

Wie in Abbildung 2.1 zu sehen, hat ein 2D Gitter mit $N_x \cdot N_y$ Punkten, N_x Geisterkanten in y-Richtung und N_y in x-Richtung. Somit ist die Gesamtanzahl der Geisterkanten $N_x + N_y$. Für ein quadratisches Gitter mit $N_x = N_y = N_{xy}$ und $N_{xy}^2 = N_p$ würde das bedeuten, dass das Gitter $2 N_{xy} = 2\sqrt{N_p}$ Geisterkanten besitzt.

Indizes aller Geisterkanten:

In x-Richtung haben die Geisterkanten folgende Bezeichnung:

$L_{N_x \cdot n}$ mit $n \in [1, N_y]$, $n \in N$

Die Geisterkanten in x-Richtung liegen alle am rechten Rand und es wird förmlich über die Höhe des Gitters iteriert, i.e. es wird je Iteration eine Ebene aufgestiegen.

In y-Richtung haben die Geisterkanten folgende Bezeichnung:

$L_{N_y \cdot N_x - N_x + m}$ mit $m \in [1, N_x]$, $m \in N$

Die Geisterkanten in y-Richtung liegen alle am oberen Rand des Gitters, wobei hier bei jeder Iteration ein Punkt weiter in x-Richtung gesprungen wird.

2.1.2 Dreiecksgitter

Gegeben sind die beiden Dreiecksgitter in Abb. 2.2, **wobei zunächst nur das linke Gitter betrachtet werden soll.**

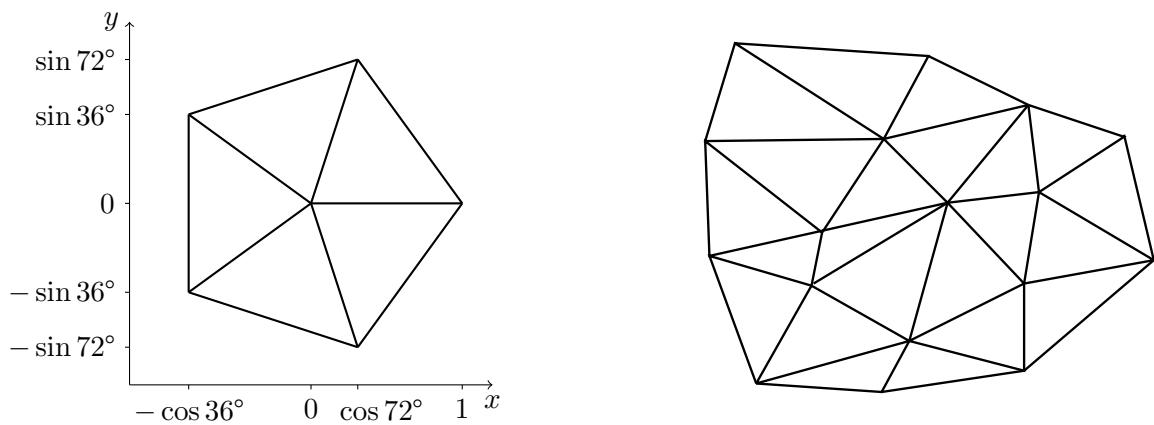


Abbildung 2.2: Dreiecksgitter von zwei verschiedenen Rechengebieten.

3. Nummerieren Sie die Flächen und Kanten des Gitters beliebig und ordnen Sie den Kanten eine Orientierung zu.

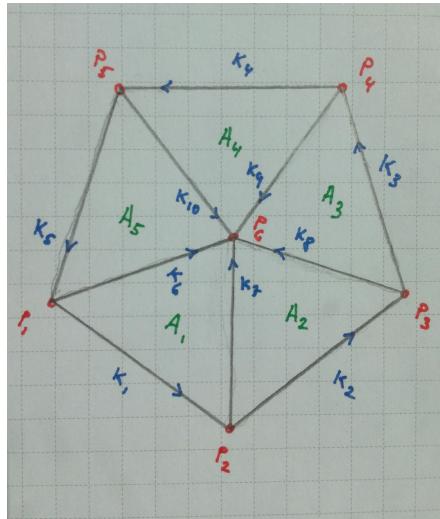


Abbildung 2.3: Knoten-, Kanten- und Flächenindizierung der linken Figur aus Abbildung 2.2. Knoten sind rot, Kanten blau und Flächen grün dargestellt.

4. Erstellen Sie die Punkteliste (3-spaltige Tabelle mit Index, x -Koordinaten und y -Koordinaten). Stellen Sie auch die Indexlisten Kanten-zu-Knoten und Flächen-zu-Kanten auf (auch Inzidenzen genannt). Beachten Sie dabei die Orientierung der Kanten und Flächen. Die Kanten sind von Punkt 1 zu Punkt 2 gerichtet. Bei der Flächen-zu-Kanten-Inzidenz werden Kanten, die gegen die Umlaufrichtung der Fläche zeigen, mit einem negativen Vorzeichen vor dem Index gekennzeichnet.

Die Tabellen wurden gemäß der Orientierung in Vorbereitungsaufgabe 2 erstellt. Dabei bezeichnet bei der Flächen-zu-Kanten-Inzidenz die Kante k_{-i} , diejenige Kante, welche entgegen der Orientierung zeigt.

P_i	x	y	L_i	Startpunkt	Endpunkt	A_i	L
i=1	$-\cos(36^\circ)$	$-\sin(36^\circ)$	i=1	P_1	P_2	i=1	L_1, L_7, L_{-6}
i=2	$\cos(72^\circ)$	$-\sin(72^\circ)$	i=2	P_2	P_3	i=2	L_2, L_8, L_{-7}
i=3	1	0	i=3	P_3	P_4	i=3	L_3, L_9, L_{-8}
i=4	$\cos(72^\circ)$	$\sin(72^\circ)$	i=4	P_4	P_5	i=4	L_4, L_{10}, L_{-9}
i=5	$-\cos(36^\circ)$	$\sin(36^\circ)$	i=5	P_5	P_1	i=5	L_5, L_6, L_{-10}
i=6	0	0	i=6	P_1	P_6		
			i=7	P_2	P_6		
			i=8	P_3	P_6		
			i=9	P_4	P_6		
			i=10	P_5	P_6		

5. Erstellen Sie aus der Kanten-zu-Knoten-Inzidenz die Gradientenmatrix \mathbf{G} . Gehen Sie von einem Potentialvektor φ der Dimension N_p aus, der die Werte einer Potentialfunktion in allen Gitterpunkten enthält. Legen Sie die Matrix \mathbf{G} so fest, dass die Multiplikation $-\mathbf{G}\varphi$ gerade den Vektor \vec{e} ergibt, was der kontinuierlichen Formel $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$ entspricht.

Zur Erstellung der Matrix \mathbf{G} wird die Kanten-zu-Knoten-Inzidenz benötigt. Die Kanten ($K_1 \dots K_{10}$) stellen die Zeilen, die Knoten ($P_1 \dots P_6$) die Spalten der Matrix \mathbf{G} dar. Die Indizierung ist dabei wie folgt gewählt:

Startpunkt der Kante: Positives Vorzeichen

Endpunkt der Kante: Negatives Vorzeichen

Es ergibt sich:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

6. Konstruieren Sie mithilfe der Flächen-zu-Kanten-Inzidenz die Curlmatrix \mathbf{C} .

Zur Erinnerung: $\mathbf{C}\vec{e} = -\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{b}}$.

Zur Erstellung der Matrix \mathbf{C} wird die Flächen-zu-Kanten-Inzidenz benötigt. Die Kanten ($K_1 \dots K_{10}$) stellen diesmal die Spalten, die Flächen ($A_1 \dots A_5$) die Zeilen der Matrix \mathbf{C} dar. Die Indizierung ist dabei wie folgt gewählt:

Kante zeigt entgegen der in Aufgabe 3 gewählten Orientierung: negatives Vorzeichen

Kante zeigt in die gleiche Richtung der gewählten Orientierung: positives Vorzeichen

Es ergibt sich:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

7. Überprüfen Sie, ob genau wie im kontinuierlichen Fall die Beziehung $\text{rot grad} = 0$ auch für die aufgestellten diskreten Matrizen $\mathbf{CG} = \mathbf{0}$ gilt.

$$C \cdot G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1.3 Duale Gitter

Ein mögliches Gestaltungsprinzip für das duale Gitter eines Dreiecksgitters resultiert aus der Forderung, dass die dualen Kanten die normalen Flächen (2D = normale Kanten) orthogonal durchstoßen. Es wird daher versucht, die dualen Kanten aus den *Mittelsenkrechten* der Dreiecke zu konstruieren, die sich bekanntermaßen in einem Punkt – dem neuen dualen Gitterpunkt – schneiden. Voraussetzung für dieses Vorgehen ist jedoch, dass der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten auch innerhalb des Dreiecks liegt, was nicht immer erfüllt ist.

2.1.4 Ab hier sollen beide Gitter aus Abb. 2.2 betrachtet werden.

8. Zeichnen Sie das orthogonale duale Gitter ein, wenn möglich nach der oben beschriebenen Konstruktionsvorschrift. Markieren Sie die dualen Gitterkanten, die die Eigenschaft der Orthogonalität nicht mehr erfüllen.

Obige Konstruktionsvorschrift führt zum Ergebnis in Abbildung 2.4.

9. Überlegen Sie sich, wie N_V , N_A , N_L und N_P mit den entsprechenden Größen des dualen Gitters \tilde{N}_V , \tilde{N}_A , \tilde{N}_L und \tilde{N}_P im Fall von 3D-Gittern zusammenhängen. Besonderheiten am Rand sind hierzu zu vernachlässigen. Wie verhalten sich die Größen im Fall von 2D-Gittern?

- (1) Jede duale Zelle hat genau einen primären Punkt $N_{\tilde{V}} = N_P$ und andersherum $N_V = N_{\tilde{P}}$
- (2) Jede duale Kante schneidet eine primäre Fläche in einem Punkt $N_{\tilde{L}} = N_A$ und andersherum $N_L = N_{\tilde{A}}$

Da es in 2D keine Zellen gibt, fällt diese Aussage dann weg. Weiter entspricht die Anzahl der dualen Kanten gerade der Anzahl der primären Kanten, weil diese aus den Mittelsenkrechten letzterer erzeugt werden.

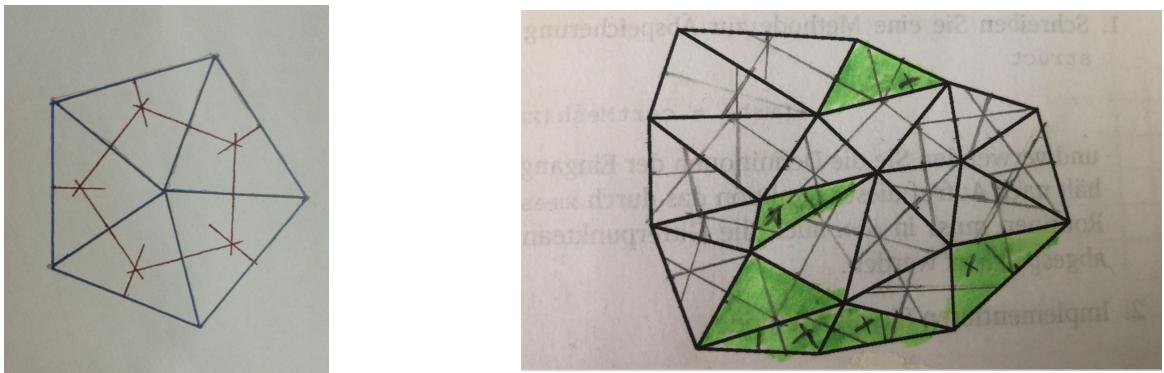


Abbildung 2.4: Links ist das duale Gitter zum rechten Gitter in Abbildung 2.2 dargestellt. In blau ist das primäre, in braun das duale Gitter eingezeichnet und es ist zu erkennen, dass alle dualen Gitterpunkten in den primären Gitterflächen liegen.

Die rechte Abbildung visualisiert das duale Gitter zur linken Skizze in Abbildung 2.2, wobei hier das primäre Gitter in schwarz und das Duale in grau visualisiert wird. Die Dreiecke bei denen sich die Mittelsenkrechten außerhalb seiner Fläche schneiden, sind grün hervorgehoben.

2.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

2.2.1 Datenstruktur, Visualisierung des Gitters

1. Schreiben Sie eine Methode zur Abspeicherung dreidimensionaler, kartesischer Gitter in einem `struct`

```
[msh] = cartMesh(xmesh, ymesh, zmesh) (2.1)
```

und verwenden Sie die Definitionen der Eingangsparameter aus Abschnitt 2.2.3. Die Struktur `msh` hält nach Aufruf dieser Funktion das durch `xmesh`, `ymesh` und `zmesh` definierte Gitter. Für spätere Routinen muss in `msh` auch die Gitterpunkteanzahl in jede Raumrichtung, d. h. `nx`, `ny` und `nz`, abgespeichert werden.

Um die Anzahl der Punkte in die jeweilige Koordinatenrichtung zu erhalten kann die Länge des zugehörigen `mesh`-Vektors genommen werden, der die Punkte auf der entsprechenden Koordinatenachse enthält. Die Gesamtanzahl der Punkte ergibt sich dann zu $N_p = N_x \cdot N_y \cdot N_z$, wobei N_x, N_y, N_z die Anzahl der Punkte in die jeweilige Raumrichtung angeben.

Die Inkremente werden auch wie gewohnt nach kanonischem Indizierungsschema berechnet, es gilt also:
 $M_x = 1, M_y = N_x, M_z = N_x \cdot N_y$.

Schließlich wird eine Struktur mit `struct` erzeugt, die alle zuvor berechneten Parameter, sowie die Eingabe-parameter enthält.

2. Implementieren Sie die Methode

```
plotMesh(msh) ,
```

 (2.2)

welche ein übergebenes kartesisches Gitter `msh` visualisiert. Verwenden Sie hierzu den `line`-Befehl und eine 3-fach Schleife über die Indizes i, j, k .

In `plotMesh` werden über eine dreifache `for`-Schleife die x-,y- und z-Kanten mit dem `line` Befehl gezeichnet. Das funktioniert indem die beiden verschiedenen Punkte in `line` Start und Endpunkt der Kante bilden. In der innersten `for`-Schleife wird über die z-Komponente iteriert, d.h. es werden am ersten Punkt die drei Kanten in x-, y- und z-Richtung gezeichnet. Dann wird `k`, i.e. `z` um eins inkrementiert, sodass dann am Punkt darüber die drei Kanten in die jeweiligen Raumrichtungen eingezeichnet werden. Ist der 'oberste' Punkt erreicht, wird durch das `if` Statement gesichert, dass keine Geisterkante gezeichnet wird.

Dann wird zum nächsten y Punkt vorgerückt und das Ganze für die y-Richtung wiederholt und schließlich in der letzten `for`-Schleife für die x-Richtung.

3. Nutzen Sie `cartMesh` zur Erzeugung eines nicht äquidistanten Gitters mit $\{3,4,5\}$ Punkten in $\{x,y,z\}$ -Richtung und visualisieren Sie es mit `plotMesh`. Nutzen Sie hierfür die bereits gegebene Datei `exampleMesh.m`.

In `exampleMesh` wird lediglich ein Gitter, bei dem die Koordinaten der Punkte bereits vorgegeben waren, mit `cartMesh` erzeugt und anschließend mit `plotMesh` geplottet.

Das führt auf das kartesische Gitter in Abbildung 2.5.

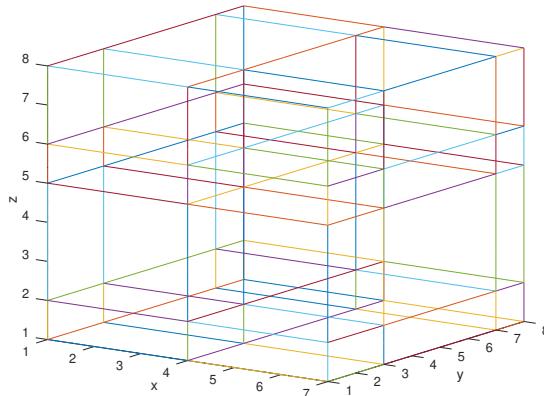


Abbildung 2.5: Das kartesische Gitter erzeugt mit der Methode `plotMesh`. Die Abstände der Punkte in `xmesh`, `ymesh` und `zmesh` werden durch verschiedenfarbige Kanten abbgebildet.

2.2.2 Die topologischen Matrizen C , \tilde{C} , S und \tilde{S}

4. Schreiben Sie eine Methode

$$[c, s, st] = geoMats(msh), \quad (2.3)$$

die die Operatormatrizen für ein kanonisches, kartesisches Gitter msh erzeugt. Die Rückgabewerte c , s und st sind die Matrizen C , S und \tilde{S} und entsprechend Abschnitt 2.2.7 definiert. Diese werden mithilfe der P_ξ -Matrizen erzeugt. Wieso ist es nicht sinnvoll, \tilde{C} und G zurückzugeben?

Hinweis: Schon bei mittleren Problemgrößen muss hier unbedingt mit MATLAB®'s speziellem Speicherformat für *dünnbesetzte* Matrizen gearbeitet werden (Befehle wie `sparse`, `speye`, usw.) Im Allgemeinen geben MATLAB®-Befehle immer dann Matrizen im `sparse`-Format zurück, wenn *alle* ihre Argumente ebenfalls `sparse` sind. Mehr zu diesem Thema ist in der MATLAB®-Dokumentation zu finden.

Die Definitionen der Matrizen C , S und \tilde{S} sind:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{pmatrix}, S = [P_x P_y P_z], \tilde{S} = [-P_x^T - P_y^T - P_z^T]$$

$P_\varepsilon = P_{u,v}$ ist wie folgt definiert:

$$P_{u,v} = \begin{cases} -1, & u = v \\ 1, & v = u + M_\varepsilon \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

P_ε erhält also eine -1 als Eintrag, wenn die Zeile der Spalte und eine +1, wenn die Spalte der Zeile $+ M_\varepsilon$ entspricht. M_ε entspricht dabei, je nach Matrix P_x , P_y , P_z dem jeweiligen M_x , M_y , M_z . Die restlichen Einträge von P_ε sind 0.

Für die Implementierung muss also mit `for`-Schleifen über die Zeilen und Spalten iteriert und dann mit einer `if-else` Abfrage geprüft werden, wann die Zeilen den Spalten und wann die Spalten den Zeilen $+ M_\varepsilon$ entsprechen. Anschließend wird dann der jeweilige Wert, -1 oder +1, gesetzt. Der Rest der Einträge sollte dann ganz einfach 0 sein.

5. Lassen Sie sich die Matrizen für eine kleine Problemgröße ($N_p < 50$) direkt ausgeben und visualisieren Sie die Matrizen für eine mittlere Problemgröße ($N_p < 5000$) mit dem Befehl `spy`. Welche speichertechnisch günstige Eigenschaft würde ohne das kanonische Indizierungsschema verloren gehen? Ermitteln Sie wie viel Speicherplatz jeweils von MATLAB® benötigt wird (`sparse` und `full`-Format). Legen Sie für die Ausarbeitung eine Tabelle mit dem jeweils benötigten Speicherplatz an. Nutzen Sie für diese Tests die bereits gegebene Datei `exampleSparse.m`.

Im Graphen ist erkennbar, dass die Matrizen C , \tilde{C} , S , \tilde{S} dünn besetzt sind. C und \tilde{C} besitzen nur Einträge auf den sechs Nebendiagonalen. Außerdem kann anhand des Graphen erahnt werden, dass $\tilde{C} = C^T$ gilt.

	sparse	full
Byte ($N_p = 27$)	$2,384 \cdot 10^3$	$5,249 \cdot 10^4$
Byte ($N_p = 125$)	$1,150 \cdot 10^4$	$1,125 \cdot 10^6$
Byte ($N_p = 512$)	$4,798 \cdot 10^4$	$1,887 \cdot 10^7$
Byte ($N_p = 2744$)	$2,600 \cdot 10^5$	$5,421 \cdot 10^8$
Byte ($N_p = 4913$)	$4,667 \cdot 10^5$	$1,738 \cdot 10^9$

Die Matrizen wurden für den Fall $N_p = 4913$ geplottet. Das Resultat ist in Abbildung 2.6 dargestellt:

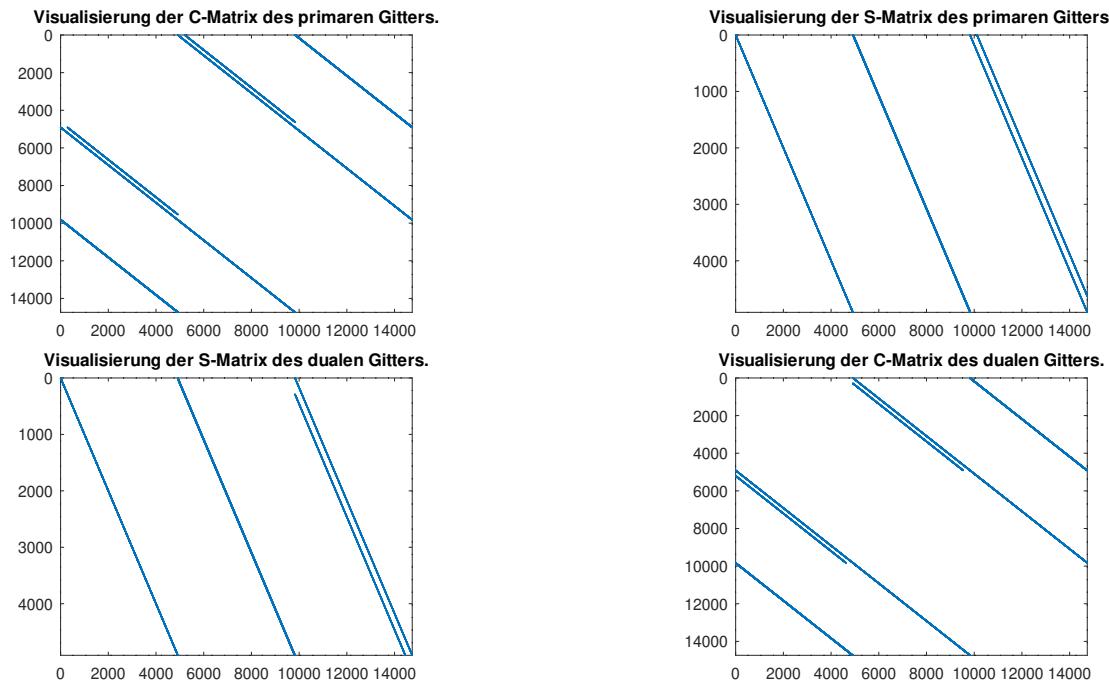


Abbildung 2.6: Dargestellt sind die diskreten Rotations- und Divergenzmatrizen für $N_p = 17 \times 17 \times 17 = 4913$ Gitterpunkte, sowohl für das duale, als auch das primäre Gitter.

6. Berechnen Sie

1. $\mathbf{C}(-\tilde{\mathbf{S}}^T)$ und
2. $\mathbf{S}\mathbf{C}$ bzw. $\tilde{\mathbf{S}}\tilde{\mathbf{C}}$.

Was bedeutet das für die topologischen Matrizen in Hinblick auf die jeweiligen analytischen Operatoren? Erinnern Sie sich, welche analytischen Operatoren den jeweiligen Matrizen entsprechen.

Die topologischen Matrizen stehen für die Differentialoperatoren Divergenz (**S**, für source), Rotation (**C** für curl) und Gradient (**G** für gradient).

- (1) Es gilt $C(-\tilde{S}^T) = 0$. Das ist aus der Dualitätseigenschaft $G = -\tilde{S}^T$ erkennbar. Somit stimmt der obige Ausdruck mit der bereits bekannten Beziehung $\text{rot grad} = 0$ überein.
- (2) Auch hier gilt wieder $SC = 0$, was zum Ausdruck $\text{div rot} = 0$ analog ist. Gleiches gilt für den zweiten Term: $\tilde{S}\tilde{C} = 0$, wobei eine weitere Dualitätseigenschaft $\tilde{C} = C^T$ besagt. Somit lässt sich einfach mit Hilfe von **C** auf \tilde{C} schließen. Die Beziehung div rot gilt somit auch für das duale Gitter.

2.2.3 Unbelegte Kantenelemente

7. Als Fortführung von Aufgabe 2 aus der Vorbereitung konstruieren Sie eine Routine, die die überzähligen Kanten erfasst.

$$\text{edg} = \text{boundEdg}(\text{msh}) \quad (2.4)$$

gibt demnach für ein gegebenes Gitter `msh` einen Vektor `edg` zurück, der entsprechend der kanonischen Indizierung `true` für normale und `false` für die überzähligen Kanten enthält.

Hinweis: Benötigt wird in diesem Versuch nur der zweidimensionale Fall `nz=1`, jedoch ist es für spätere Versuche hilfreich auch den dreidimensionalen Fall zu implementieren. Zusätzlich ist es sinnvoll, Erfahrungen mit Vektoroperationen zu sammeln, da diese in MATLAB® in der Regel schneller sind als Schleifen. Das `logical`-Format (in anderen Programmiersprachen auch als `boolean` bekannt) hat den Vorteil, dass nur 1 Byte (im Vergleich zu 8 Bytes für `double`) pro Eintrag benötigt wird.

Zuerst werden aus dem Gitter die notwendigen Informationen geholt (Anzahl der Punkte in x-,y- und z-Richtung, sowie die Schrittweiten M_x , M_y und M_z).

Dann wird ein Vektor `edg` mit einer Spalte und $3 \cdot N_p$ Zeilen dimensioniert, der später alle Kanten enthalten soll. Dabei stehen die ersten N_p Zeilen für alle Kanten in X-Richtung, die nächsten für alle Kanten in y-Richtung und die letzten N_p Zeilen für alle Kanten in z-Richtung.

Darauf hin wird für jede Richtung mit einer doppelten `for`-Schleife ein Algorithmus entwickelt, der die Zeile aller Geisterkanten in die jeweilige Richtung auf 0 setzt. Für die Geisterkanten in x- und y-Richtung wurde bereits ein Schema in Aufgabe 2 entwickelt, jedoch nur für den 2D-Fall.

Hier muss noch die z-Richtung betrachtet werden. Es wird also zusätzlich über die Schrittweite $M_z = N_x \cdot N_y$ von 1 bis $N_z - 1$ iteriert. Die z-Geisterkanten liegen alle auf der 'hinteren' Seite des Gitters. Also wird hier mit

einer doppelten `for`-Schleife über alle 'hinteren' Punkten von unten nach oben durchiteriert, da jeder von diesen Punkten eine Geisterkante in z-Richtung besitzt.

8. Zählen Sie mit `boundEdg` die unbelegten Kanten und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Formel aus der 2. Vorbereitungsaufgabe, indem Sie die relative Anzahl der unbelegten Kanten (inkl. Geisterkanten in z -Richtung) über die Anzahl aller Kanten für ein zweidimensionales Gitter `msh` mit $N_{xy} = N_x = N_y$ darstellen. `plotBoundEdg` soll diese Aufgaben dann in einem Skript zusammenfassen.

In dieser Aufgabe werden zuerst durch eine `for`-Schleife 1 bis `nxyMax` 2D Gitter mit jeweils N_{xy}^2 Punkten mit der Funktion `cartMesh` erzeugt. Danach wird für jedes Gitter durch `boundEdg` der Vektor mit allen Kanten erstellt. Mit der zweiten `for`-Schleife wird dann überprüft wie viele Kanten Geisterkanten sind und die Anzahl in `index` gespeichert.

Anschließend wird die Anzahl der Geisterkanten für das jeweilige Gitter mit N_{xy}^2 Punkten in der N_{xy} Spalte von `relOccurrence` gespeichert und schließlich durch die Gesamtanzahl der Kanten für jedes Gitter geteilt. Damit stellt `relOccurrence` den Anteil der Geisterkanten an der Anzahl aller Kanten dar. Letztlich wird dieser relative Anteil über die Anzahl der Punkte in x-Richtung (y-Richtung) dargestellt.

Das Ergebnis wird in Abbildung 2.7 festgehalten:

Der Anteil der Geisterkanten an der Anzahl aller Kanten nimmt mit steigender Anzahl an Punkten in eine Richtung ab und konvergiert gegen $\frac{1}{3}$.

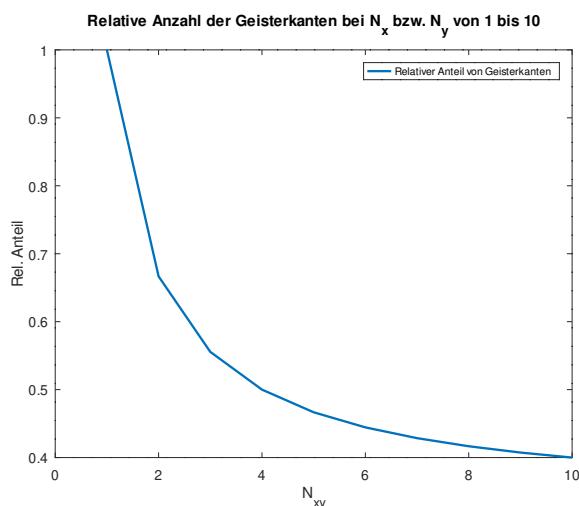


Abbildung 2.7: Dargestellt ist die Anzahl Geisterkanten über der Anzahl aller Kanten.

2.2.4 Einprägen gegebener Feldverteilungen

9. Schreiben Sie eine Methode, die für ein vorgegebenes kontinuierliches \vec{E} -Feld `field` die entsprechenden integralen Zustandsgrößen `fieldBow` in einem 3D-Gitter `msh` berechnet und in einem Vektor gemäß Gl. (2.8) abspeichert. Implementieren Sie:

```
[fieldBow] = impField(msh, field)
```

 (2.5)

Hinweis: `field` soll hierbei eine *anonymous function* sein, welche den Punkt mit x -, y - und z -Koordinate übergeben bekommt und einen Vektor mit x -, y - und z -Komponente zurückgibt. Zum Beispiel:

```
field = @(x,y,z) ([1./x.^2, 0.01*x, y+z])  
Aufruf mit field(1, 3, 4.5) oder field([3,6]', [1,3]', [2,4]') .
```

Werten Sie für die notwendige Integration über eine Kante das gegebene Feld an den Kantenmittelpunkten aus und multiplizieren Sie den Wert mit der Kantenlänge anstatt das Feld tatsächlich zu integrieren.

Zur Bestimmung der elektrischen Gitterspannung wird ein vorgegebenes Vektorfeld an den Kantenmittelpunkten der jeweiligen Raumrichtung ausgewertet und mit der Länge der Kante multipliziert. Für die jeweilige Raumrichtung bedeutet dabei, dass bei der Auswertung, beispielsweise in x -Richtung, das Feld am Mittelpunkt der x -Kante ausgewertet und mit ihrer Länge multipliziert wird.

Analog wird für y - und z -Richtung verfahren. Die Auswertung ist nach kanonischer Indizierung in `fieldBow` gespeichert.

10. Verwenden Sie Ihre Methode `impField` um folgende Felder zu diskretisieren:

1. $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{5}{2} \vec{e}_x - 1,3 \vec{e}_y + 2 \vec{e}_z,$
2. $\vec{E}(\vec{r}) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{x_{\max}-x_{\min}} (x - x_{\min})\right) \vec{e}_y ,$

wobei die Einheiten hier vernachlässigt werden. Mit Hilfe der vorgegebenen Routine `plotEdgeVoltage` sollen Sie Ihre Implementation optisch verifizieren. Fassen Sie diese Aufgabe in einem Skript `plotImpField` zusammen.

Hier werden die Vektorfelder nach dem Hinweis aus Aufgabe 9 erstellt, ihre Bogengrößen mit der Routine `impField` berechnet und anschließend mit `plotEdgeVoltage` geplottet. Es ist erkennbar, dass wie in der Aufgabenstellung definiert im rechten Plot die Feldkomponenten lediglich in y Richtung zeigen, wohingegen der Plot links Feldkomponenten in alle Raumrichtungen vorhanden sind.

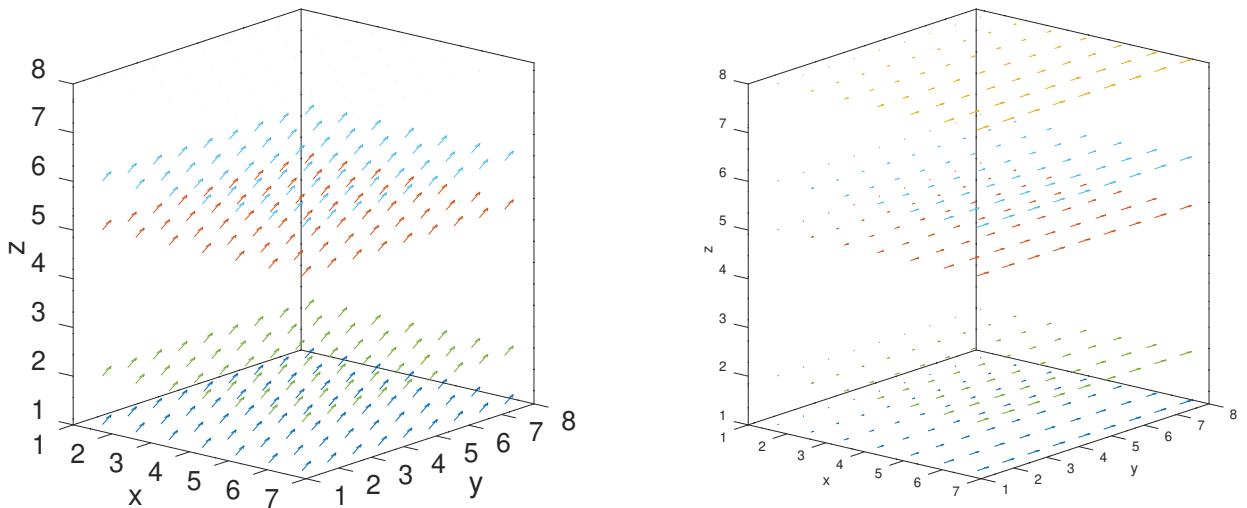


Abbildung 2.8: Die 3D Visualisierung der beiden Vektorfelder, links 1. und rechts 2.

2.3 Fragen zur Ausarbeitung

1. In den Vorbereitungsaufgabe zum dualen Gitter wurden Besonderheiten am Rand des Rechengebietes vernachlässigt.

Wie sollte das duale Gitter am Rand gewählt werden, damit die magnetische Randbedingung automatisch erfüllt ist. Machen Sie eine kleine Skizze für ein einfaches zweidimensionales kartesisches Gitter sowie für das Dreiecksgitter aus Bild 2.2 a). Ist diese Wahl des dualen Gitters am Rand immer notwendig?

Am Rand des dualen Gitters sollten die Kanten die halbe Länge aufweisen. Diese Wahl ist immer notwendig, um die Konsistenz der Größe des Gitters zu wahren.

In der linken Abbildung ist dies beispielhaft in x-Richtung für ein kartesisches Gitter dargestellt und in der Rechten für das Dreiecksgitter aus Abbildung 2.6.

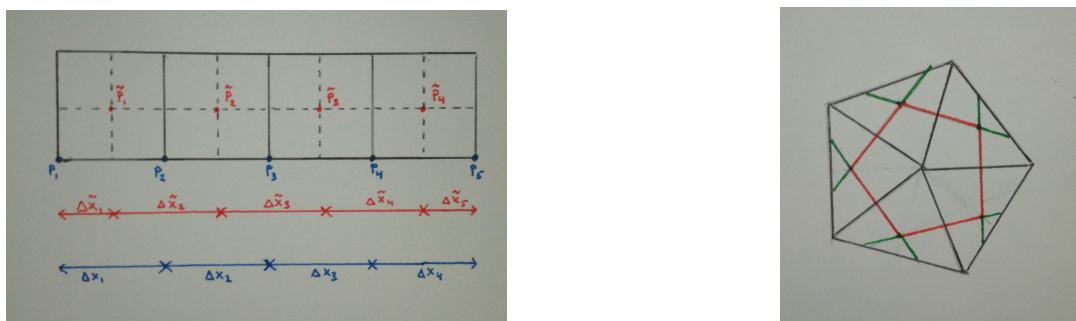


Abbildung 2.9: Zu sehen sind die Längen der dualen Kanten am Rand des Gitters. Diese sind in der linken Anordnung gestrichelt eingezeichnet und rechts in rot, beziehungsweise grün.

2.4 Fazit

Ziel in diesem Versuch war es, die topologischen Matrizen zu erstellen und die elektrische Gitterspannung aus einem kontinuierlichem E-Feld zu bestimmen. Die topologischen Matrizen sind abhängig vom Gitter, da aus den Informationen des Gitters die P_ε -Matrizen erzeugt werden und anhand dieser werden die topologischen Matrizen erstellt.

Für die Berechnung der elektrischen Gitterspannung aus dem kontinuierlichem E-Feld wird nicht integriert, sondern das Feld an den Kantenmittelpunkten ausgewertet und mit der Länge multipliziert.

3 Grundlagen der Methode der Finiten Integration 2

3.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Überlegen Sie sich, wie man ausgehend vom 3-fach Index i, j, k (vgl. Gl. (3.1)) die Randpunkte eines kartesischen Rechengebietes im kanonischen Indizierungsschema bestimmt (eine Skizze ist hilfreich). Schreiben Sie hierfür ein Schleifenkonstrukt in Pseudocode.

Die bereits zuvor entwickelte Routine zur Ermittlung der Geisterkanten wurde hier identisch übernommen. Neu hinzu kommt, dass nun auch die die jeweils andere Fläche betrachtet wird, die zwar am Rand liegt, aber keine Geisterkanten hat, beispielsweise die linke YZ-Fläche. Bei der Betrachtung der YZ-Fläche wird nun $i=1$ und $i = N_x$ gesetzt und anschließend über j und k iteriert. Analog dann bei den anderen Flächen.

Dann werden alle Randpunkte in einer Matrix bp gespeichert. Die Matrix bp hat dabei N_p Einträge und alle Einträge, die nicht 0 sind, sind Randpunkte. Dabei entspricht der Wert des Eintrags, bei nicht Null-Einträgen, dem Index des Punktes. Anschließend wird mit einer for-Schleife von 1 bis zum N_p ten Eintrag der Matrix überprüft, ob der Wert größer als 0 ist. Ist dies der Fall, wird der Eintrag in einer neuen Matrix l gespeichert. Die Matrix l enthält also so viele Einträge, wie es Randpunkte gibt und der Wert des Eintrags entspricht wieder dem Index des Randpunktes.

2. Wie sehen für ein äquidistantes, kartesisches Gitter die Geometrimatrizen D_S , \tilde{D}_S , D_A und \tilde{D}_A aus? Was ist bei den Rändern zu beachten? Welche Dimensionen besitzen die Matrizen?

Die Geometrimatrizen sind Diagonalmatrizen, bis auf ihre Hauptdiagonale sind alle Einträge 0. Bei \tilde{D}_S müssen die Strecken am Rand halbiert, bei D_S auf 0 gesetzt werden. Bei den Flächenmatrizen muss nichts am Rand beachtet werden, da sich diese aus D_S und \tilde{D}_S ergeben.

Die Matrizen besitzen alle die Dimension $3N_P \times 3N_P$:

$$D_S = \begin{pmatrix} D_{S,x} & & \\ & D_{S,y} & \\ & & D_{S,z} \end{pmatrix}$$
$$D_A = \begin{pmatrix} D_{A,x} & & \\ & D_{A,y} & \\ & & D_{A,z} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} D_{S,x}D_{S,z} & & \\ & D_{S,x}D_{S,z} & \\ & & D_{S,x}D_{S,y} \end{pmatrix}$$

3. Skizzieren Sie kurz, wie sich die Materialmatrizen zusammenstellen. Wie sind hierbei die Randbedingungen (elektrisch & magnetisch) einzuarbeiten bzw. muss überhaupt eine Änderung vorgenommen werden?

$$M_\epsilon = \tilde{D}_A D_\epsilon D_S^{-1} \text{ und } M_{\mu^{-1}} = \tilde{D}_S D_{\mu^{-1}} D_A^{-1}$$

Bei PEC Bedingungen wird die Tangentialkomponente des \vec{E} -Feldes und die Normalkomponente des \vec{B} -Feldes auf dem Rand der Rechendomäne zu 0 gesetzt. Dies erfolgt durch 0-setzen der tangentialen Komponente der Permittivität ϵ und der normalen Komponente der Permeabilität μ am Rand.

Bei PMC Bedingungen wird die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke und die Normalkomponente der elektrischen Flussdichte 0. Diese Bedingung ist automatisch erfüllt durch die die halbe duale Kantenlänge und Flächengröße am Rand.

4. Um die im Versuch zu implementierende Visualisierung zu testen, soll ein vorgegebenes rotationssymmetrisches Feld in Zylinderkoordinaten nach der analytischen Formel

$$\vec{D}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r \quad (3.1)$$

visualisiert werden. Es soll ein äquidistantes Gitter benutzt werden, dessen Mitte genau dem Koordinatenursprung entspricht.

Bestimmen Sie die diskreten Größen $\hat{d}(n)$ und $\hat{e}(n)$ des vorgegebenen Feldes. Zur Vereinfachung soll bei der hierfür notwendigen Integration der Feldwert in der Mitte der Strecke bzw. Fläche als repräsentativ gelten und damit als konstant über dem gesamten Element angenommen werden.

Hinweis: Transformieren Sie zuerst zur Bestimmung der notwendigen Feldwerte das gegebene Feld in kartesische Koordinaten $\vec{D}(x, y, z)$.

(1) Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ r\vec{e}_r &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \Leftrightarrow \vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \\ \vec{D}(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \end{aligned}$$

(2) Bestimmung der Bogengrößen

Das kontinuierliche/analytische Feld wird nun für jede Raumrichtung an den Kantenmittelpunkten ausgewertet und mit der Größe der dazugehörigen dualen Fläche multipliziert.

Abschließend wird der Bogenwert für jede Richtung in einen neuen Vektor der somit alle Bogengrößen enthält geschrieben.

3.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

3.2.1 Materialmatrizen

1. Zuerst sollen zwei Funktionen zum Bestimmen der Geometriematrizen D_S , \tilde{D}_S und D_A geschrieben werden:

$$[DS, DST] = \text{createDS}(\text{msh}) \quad (3.2)$$

$$[DA] = \text{createDA}(DS) \quad (3.3)$$

Wie kann mit der zweiten Funktion auch \tilde{D}_A bestimmt werden?

Für die Erstellung der Matrix D_S werden zuerst aus dem Gitter die Koordinaten der Punkte geholt. Dann erfolgt für jede Raumrichtung mit dem `diff` Befehl die Abstandsberechnung zweier aufeinanderfolgender Punkte und die Abstände werden jeweils in d_x , d_y und d_z als Schrittweiten gespeichert. Am Rand der Geisterkante muss die Strecke dann zu 0 gesetzt werden, damit die Dimensionen stimmen. Die wird der Diagonalvektor erstellt und mit `spdiags` auf die Hauptdiagonale geschrieben werden. Die Dimension von D_S konnte jetzt spätestens daran abgelesen werden, dass die Diagonale $3N_P$ Einträge hat.

Für \tilde{D}_S werden zuerst aus den gegebenen Koordinaten aus dem Gitter die dualen Punkte ausgerechnet. Beispielsweise für x: $\tilde{x}(i) = 0.5 \cdot (x(i) + x(i+1))$ mit $1 \leq i \leq n_x - 1$ analog für die anderen Koordinaten. Anschließend erfolgt wieder die Abstandsberechnung zwischen den Punkten mit dem Befehl `diff` und schließlich werden noch zusätzlich am Rand der Geisterkanten und am gegenüberliegenden Rand die halbe Längen der primären Kantenlänge hinzufügt, damit die Größe des Gitters konsistent bleibt. Für x-Richtung würde das bedeuten: $\Delta\tilde{x}(1) = \frac{\Delta x(1)}{2}$ und $\Delta\tilde{x}(N_x) = \frac{\Delta x(N_x-1)}{2}$. Die anderen Richtungen wieder analog. Auch hier wird wieder der Diagonalvektor erstellt und mit `spdiags` auf die Hauptdiagonale von \tilde{D}_S geschrieben.

Für D_A (\tilde{D}_A) werden aus D_S (\tilde{D}_S) die Kantenlänge in x-, y- und z-Richtung gewonnen und in drei verschiedene Vektoren geschrieben. Dann wird mit einer `For`-Schleife nach der Vorschrift $A_x(i, j, k) = \Delta y(j) \cdot \Delta z(k)$ (für die anderen Raumrichtungen wieder analog) die Flächen in jede Richtung berechnet und zum Schluss die Flächen wieder in einen Vektor geschrieben und diesen anschließend mit `spdiags` auf die Hauptdiagonale von D_A (\tilde{D}_A) geschrieben.

2. Nun sollen die Funktionen

[Deps] = createDeps(msh, DA, DAt, eps_r, bc) (3.4)

[Meps] = createMeps(DAt, Deps, DS) (3.5)

geschrieben werden, um die M_ϵ -Matrix M_{eps} aus der D_ϵ -Matrix D_{deps} der gemittelten Permittivitäten zu bestimmen. $bc = 1$ soll dabei elektrische und $bc = 2$ magnetische Randbedingungen bedeuten. Die Materialverteilung auf dem Gitter msh soll inhomogen und isotrop bezüglich der Raumrichtungen sein. Zur besseren Übersicht sollen bei der Übergabe relative Permittivitäten verwendet werden. eps_r soll damit als $N_p \times 1$ Matrix übergeben werden, also für jedes der N_p primären Volumen ein ϵ_r -Wert.

Hinweis: Für das Invertieren von D_S ist die Methode `nullInv` vorgegeben.

Zur Bestimmung der gemittelten ϵ Werte wurde Gleichung (3.10) verwendet, für die eine Fallunterscheidung durchgeführt wurde, da die Indizierung der Permittivitäten hier auch null, oder negativ werden kann.

Zu Beginn wird nur das gemittelte ϵ in x -Richtung betrachtet.

- (1) Für $i \geq 1$ und $j = k = 1$ innerhalb der drei for Schleifen wird die unterste, vorderste (am nächsten am Betrachter, als Referenz dient Abbildung (2.3) von Versuch 2) Kante gewählt, d.h. es kann nicht noch weiter herunter, oder nach vorne gegangen werden, daher wird in diesem Fall nur der $\epsilon_x(n)A_x(n)$ Term berücksichtigt.
- (2) Für $i \geq 1$, $j > 1$ und $k = 1$ kann auf die vordere Fläche zugegriffen werden, es kann also sowohl ein Sprung ((Mx)) in x -Richtung, als auch ein Sprung in ((My)) y -Richtung getätigt werden, daher wird der Term von Fall (1), sowie zusätzlich $\epsilon_x(n - M_y)A_x(n - M_y)$ berücksichtigt.
- (3) Hier gilt $i \geq 1$, $j = 1$ und $k > 1$, wodurch auf die unterste Fläche zugegriffen werden kann, somit kann sowohl durch Mx in x -Richtung, als auch durch Mz in z -Richtung inkrementiert werden, aber nicht noch weiter nach unten ((My)) in y -Richtung. Daher wird zusätzlich zum Term aus Fall (1) noch der Term $\epsilon_x(n - M_z)A_x(n - M_z)$ berücksichtigt.
- (4) Letztlich werden die verbleibenden Optionen durch das `else`-Statement betrachtet. Hier kann in jede Richtung inkrementiert werden, daher werden alle Terme von Gleichung (3.10) beachtet, i.e. alle Terme aus den bereits betrachteten Terme aus den Fällen (1)-(3) und der Term $\epsilon_x(n - M_y - M_z)A_x(n - M_y - M_z)$.

Für die anderen gemittelten ϵ Werte kann analog vorgegangen werden, nur dass berücksichtigt werden muss, die richtigen Flächenwerte zu bezeichnen (A_y statt A_x bspw.), den richtigen (eps) Wert abzugreifen (nach kanonischer Indizierung, bspw. `(eps(n+np))` für `(meanEpsY)`) und die richtigen Indizes zu halten, bzw. laufen zu lassen (in y -Richtung würde für alle Fälle $j \geq 1$ gelten).

Wichtig ist noch anzumerken, dass nach Gleichung (3.10) die Summe der Terme, die in Fällen (1)-(4) erläutert wurden mit dem Faktor $\frac{1}{4A_u(n)}$ zu multiplizieren.

Um die elektrischen Randbedingungen zu berücksichtigen, wurden an den linken und rechten Flächen (`meanEpsY(n)=0`), `meanEpsZ(n)=0`), an der oberen, bzw. unteren Fläche (`meanEpsX(n)=0`, `meanEpsZ(n)=0`) und an den vorderen, bzw. hinteren Flächen (`meanEpsX(n)=0`, `meanEpsY(n)=0`) die Tangentialkomponenten zu null gesetzt.

3. Die Funktion (3.5) soll nun mit den Parametern `xmesh = [-2 0 2], ymesh = [-1 0 1], zmesh = [0 1]` und isotropem $\varepsilon = \varepsilon_0$ die Materialmatrix M_ε für elektrische Randbedingungen berechnen und ausgeben. Vervollständigen Sie hierfür das bereits gegebene Skript `exampleMeps.m`

Mit der Funktion `cartMesh` wird das kartesische Gitter aus den `xmesh`, `ymesh` und `zmesh` Vektoren erzeugt und aus diesem die Geometriematrizen D_S, \tilde{D}_S, D_A und \tilde{D}_A ermittelt.

Die Permittivität des Raumes entspricht der des Vakuums, daher wird der `eps_r` Vektor nur mit einsen gefüllt. Letztlich werden elektrische Randbedingungen gewählt, es wird die `Deps` Matrix mit Hilfe der `createDeps` Funktion bestimmt und aus dieser die Materialmatrix `Meps`, mit der Funktion `createMeps` ermittelt. `Meps` ist dabei eine Diagonalmatrix, hat also alle Einträge 0 bis auf die Hauptdiagonale.

3.2.2 Interpolation und Visualisierung

4. Programmieren Sie eine Routine

$$eField = fitInt(msh, eBow), \quad (3.6)$$

die die Komponenten von \vec{e} als \vec{E} -Feld auf die primären Punkte interpoliert.

Nach Abrufen der Schrittweiten und Gesamtlängen, i.e. `n_x, n_y, n_z` des `mesh`s werden die Teillängen der Kanten in die drei Raumrichtungen nach kanonischer Indizierung in einem Vektor `d` der Länge $3n_p$ gespeichert. Anschließend werden drei neue Vektoren `dx, dy, dz` jeder der Länge n_p erstellt die jeweils die Längen der Kanten in x, y, z Richtung enthalten.

Im zweiten Schritt werden die Bogenwerte aus dem Vektor `eBow` den Vektoren `eEdgeX, eEdgeY, eEdgeZ` zugewiesen.

Im letzten Schritt wird mittels einer `for`-Schleife über alle Bogenwerte, bzw. Kantenlängen iteriert. Die Interpolation erfolgt mit Gleichung (3.11). Hier wird die Feldkomponente an der Mitte der Kante ausgewertet und mit ihrem Abstand zum nächsten Gitterpunkt $P(n)$ gewichtet. An den Rändern ist zu beachten, dass dort immer nur eine Kante und eine elektrische Gitterspannung existiert, weshalb hier nach PEC eine zweite elektrische Spannung $e' = e$ mit der gleichen Länge modelliert wird.

5. Schreiben sie eine Methode

$$plotEBow(msh, eBow, indz), \quad (3.7)$$

die auf Methode (3.6) aufbauend \vec{e} interpoliert und den Betrag des \vec{E} -Feldes mit dem MATLAB®-Befehl `surf` in einer $x-y$ -Ebene mit Index `indz` grafisch darstellt. Verwenden Sie hierfür bitte elektrische Randbedingungen.

Hinweis: Nutzen Sie auch für das Invertieren von M_ε die vorgegebene Methode `nullInv`.

Zu Beginn wird das gegebene Feld auf dem Gitter interpoliert und Gitterinformationen, e.g. `Mx, xmsh` in Vektoren abgespeichert.

Daraufhin werden mithilfe einer `for`-Schleife die x- und y-Koordinaten in zwei Matrizen X und Y geschrieben und die 2-Norm der interpolierten Feldstärkevektoren `eField` berechnet und in die Matrix `E` geschrieben. Über den `surf` Befehl erfolgt eine visuelle Darstellung der Ergebnisse.

6. Geben Sie das rotationssymmetrische Feld aus der Vorbereitung als Vektor \vec{d} vor, berechnen Sie daraus mit Hilfe der Materialmatrix M_e^{-1} das Feld \vec{e} und wenden Sie dann Methode (3.7) an. Visualisieren Sie außerdem die selbe Schnittebene mit der in Versuch 2 vorgestellten Methode `plotEdgeVoltage`. Vervollständigen Sie hierfür den ersten Teil des bereits gegebenen Skripts `exampleVisualEfield.m`

Zu Beginn wird die Funktion aus der Vorbereitung, i.e.:

$$\vec{D}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)$$

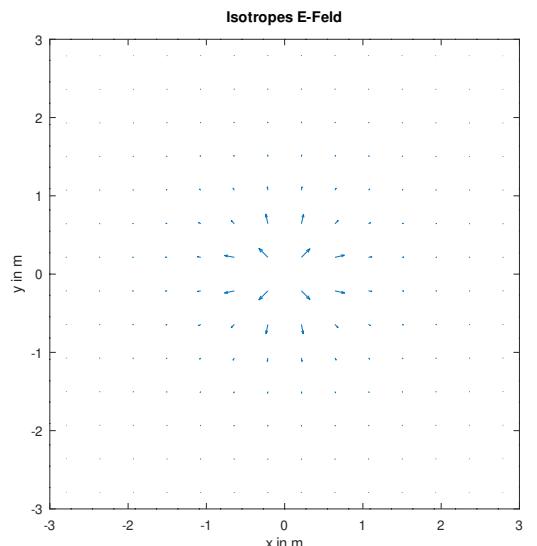
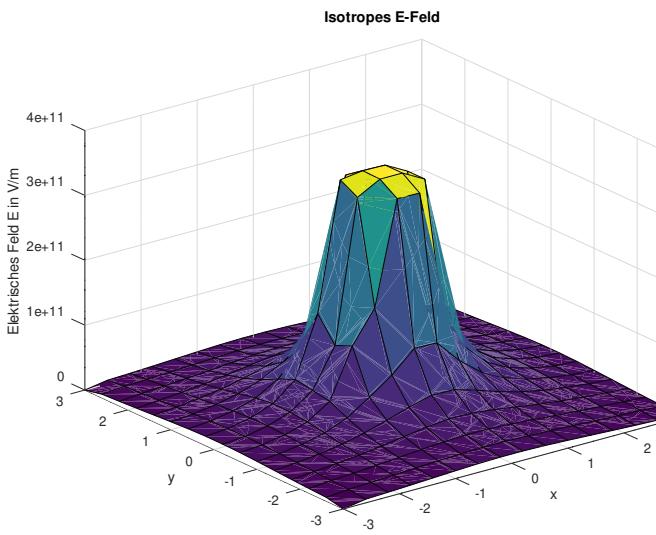
als anonymous function in Matlab repräsentiert.

In einer dreifach `for`-Schleife über die Indizes `i, j, k` werden dann die Bogenwerte des D -Feldes ermittelt werden.

Dabei wird separat für x, y und z Richtung analog vorgegangen, indem der Kantenmittelpunkt für die jeweilige Richtung ermittelt wird, dann wird die jeweilige Raumkomponente der anonymen Funktion am Kantenmittelpunkt ausgewertet und mit der Größe der jeweiligen dualen Fläche multipliziert.

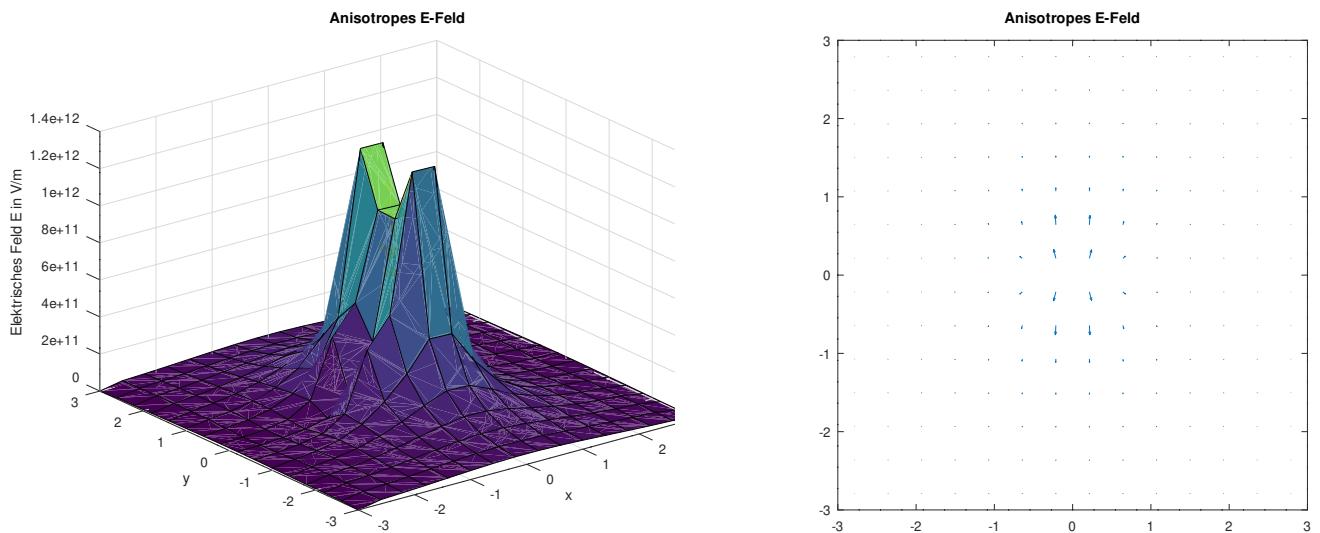
Nach kanonischer Indizierung werden all diese Werte in einen Vektor `dBow` geschrieben, der die gesuchte Bogengröße darstellt.

Das E -Feld kann nun über die Beziehung `eBow = MepsInv * dBow` ermittelt werden.



7. Überlegen Sie sich, welche Änderungen an den bisher implementierten Methoden vorgenommen werden müssen, um ein anisotropes Material zu verwenden. Ändern Sie Ihre Implementierung entsprechend und verwenden Sie ein anisotropes Material mit unterschiedlichen Permittivitäten in x - und y -Richtung (z. B. $\epsilon_x/\epsilon_y = 4$) sowie elektrische Randbedingungen. Interpolieren und visualisieren Sie das Feld \vec{e} wie in der Aufgabe zuvor. Visualisieren Sie auch hier das Ergebnis zusätzlich mit der Methode `plotEdgeVoltage`. Vervollständigen Sie hierfür den zweiten Teil des bereits gegebenen Skripts `exampleVisualEfield.m`

Um ein anisotropes Medium zu simulieren wird hier der Vektor `eps_r` aufgeteilt in `eps_x, eps_y` und `eps_z` mit Größe $n_p \times 1$. Dann kann für jede Raumrichtung die Permittivität festgelegt werden, im vorliegenden Fall ist für die x -Richtung die Permittivität ϵ_0 und in y -Richtung die Permittivität ein viertel der Größe derjenigen in x -Richtung. Anschließend wird dann wieder aus den Permittivitäten `eps_x, eps_y` und `eps_z, eps_r` gebildet mit der Größe $3n_p \times 1$ und es können wieder die bekannten Routinen zur Berechnung der Felder verwendet werden.



3.3 Fragen zur Ausarbeitung

1. Erstellen Sie eine 2D-Skizze einer dualen Gitterfläche mit den zugehörigen primären Gitterzellen, welche zur Mittelung der Permittivität notwendig sind (siehe (3.10)).

Gut zu sehen ist hier wie sich aus $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1 \tilde{A}_{n,1} + \varepsilon_2 \tilde{A}_{n,2} + \varepsilon_3 \tilde{A}_{n,3} + \varepsilon_4 \tilde{A}_{n,4}}{\tilde{A}_n}$ Gleichung (3.10) ergibt, da ersichtlich wird wie die dualen Teilflächen und die primären Flächen verknüpft sind.
 \Rightarrow z.B: $\tilde{A}_{n,1} = \frac{A_{n-M_z}}{4}$

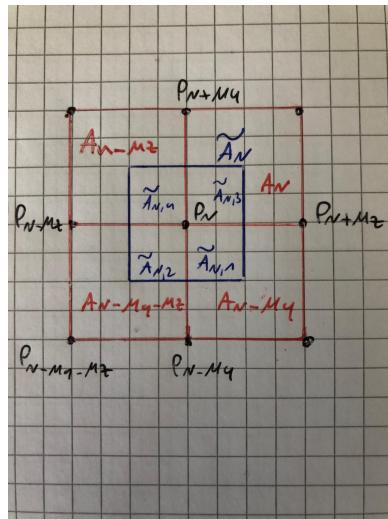


Abbildung 3.3: Duale Gitterflächen mit zugehörigen primären Gitterzellen.

2. Häufig werden für die Visualisierung der magnetischen Feldstärke \vec{H} die entsprechenden Komponenten ebenfalls auf den Punkten des primären Gitters gemittelt und nicht auf den dualen Punkten. Beschreiben Sie für diese Mittelung *kurz* eine geeignete Vorgehensweise (kleine Skizze sinnvoll) und gehen Sie dabei auch auf die Randbedingungen ein.

Das magnetostatische Feld kann im Gegensatz zur Elektrostatik nicht direkt mit Hilfe eines Skalarpotentiales beschrieben werden, weshalb ein unphysikalisches Hilfsfeld \vec{H}_i eingeführt wird, sodass die Lösung der inhomogenen DGL als Summe $\vec{H} = \vec{H}_h + \vec{H}_i$ der homogenen und inhomogenen Lösung geschrieben wird. Nun wird die magnetische Feldstärke, abweichend zur sonstigen Vorgehensweise, auf den primären Kanten allokiert. Die Materialmatrix M_μ hat deshalb die gleiche Struktur wie die Matrix M_ϵ und wird durch Flächenmittelung anstatt. Längenmittelung berechnet.

Durch die Vertauschung der Allokation werden auch die elektrischen und magnetischen Randbedingungen vertauscht. Elektrische Ränder entsprechen nun dem Neumann'schen Randoperator und magnetische Ränder dem Dirichlet'schen Randoperator.

3.4 Fazit

Ziel des Versuchs war es die Materialmatrix M_ϵ zu erstellen und die diskrete Größe $\bar{\epsilon}$ zu interpolieren und zu visualisieren. Für die Erstellung der Materialmatrix war zu beachten, dass bei der Matrix \tilde{D}_S die Kanten am Rand des Gitters nur die halbe Länge besitzen, um die Größe des Gitters konsistent zu halten. Bei der Berechnung von D_ϵ bestand die Schwierigkeit darin, die Permittivität richtig zu mitteln, da je nach dem welcher Gitterpunkt betrachtet wird, zusätzliche Flächen für die Mittlung von ϵ eine Rolle spielen. Für die Interpolation von $\bar{\epsilon}$ war es wichtig je nach Randbedingung die Feldkomponenten außerhalb des Gitters richtig zu setzen, sodass auch die Feldkomponenten am Rand richtig gemittelt wurden.

4 Elektrostatik und Magnetostatik 1

4.1 Vorbereitungsaufgaben

4.1.1 Elektrostatik

1. An welchen Stellen im Gitter sind jeweils die elektrischen Spannungen \bar{e} , die Potentiale φ , die Ladungen q und die dielektrischen Flüsse $\hat{\bar{d}}$ in der Elektrostatik allokiert?

Allokieren sind:

Die elektrischen Spannungen \bar{e} auf den primären Kanten.

Die Potentiale φ auf den primären Gitterpunkten. Dies kommt aus daher, dass die Gitterspannung \bar{e} auf den primären Kanten zwischen zwei primären Punkten allokiert ist und sich \bar{e} wie folgt berechnet:

$$\bar{e}_n = -(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

Also muss φ auf den primären Punkten allokiert sein.

Die Ladungen q auf den dualen Gitterzellen.

Die dielektrischen Flüsse $\hat{\bar{d}}$ auf den dualen Gitterflächen.

2. Machen Sie sich anhand einer lokalen zweidimensionalen Betrachtung die Beziehung zwischen der Ladung q_n einer dualen Zelle n und den assoziierten Potentialen klar. Skizzieren Sie dazu zunächst das lokale Gauß'sche Gesetz für eine duale Zelle. Nutzen Sie dabei anstatt der auftretenden Feldkomponenten die diskreten Potentialwerte, die Sie durch Gradientenbildung aus den Feldkomponenten erhalten (siehe Gleichung (4.11)).

Betrachten Sie dazu zunächst ein äquidistantes Gitter mit Schrittweite Δs und eine homogene Materialverteilung mit der Permittivität ε_0 . Tragen Sie den entstehenden „Differenzenstern“ (Differenzen der beteiligten Potentialwerte, die mit den Kopplungskoeffizienten gewichtet werden) in Ihre Skizze ein.

Die Gitterspannung ergibt sich aus $\bar{e}_n = \varphi_n - \varphi_{n+1}$

Der dielektrische Fuss aus $\hat{\bar{d}}_n = \varepsilon_0 \cdot \frac{\tilde{A}_n}{L_n} \cdot \bar{e}_n = M_\varepsilon \cdot \bar{e}_n$

Also $q_n = -\hat{\bar{d}}_{n-1} - \hat{\bar{d}}_{n-M_y+n_P} + \hat{\bar{d}}_n + \hat{\bar{d}}_{n+M_y+n_P}$ mit $M_\varepsilon = \Delta s \cdot \varepsilon_0$

$$q_n = \Delta s \cdot \varepsilon_0 \cdot ((\varphi_n - \varphi_{n+1}) - (\varphi_{n-1} - \varphi_n) - (\varphi_{n-M_y} - \varphi_n) + (\varphi_n - \varphi_{n+M_y}))$$

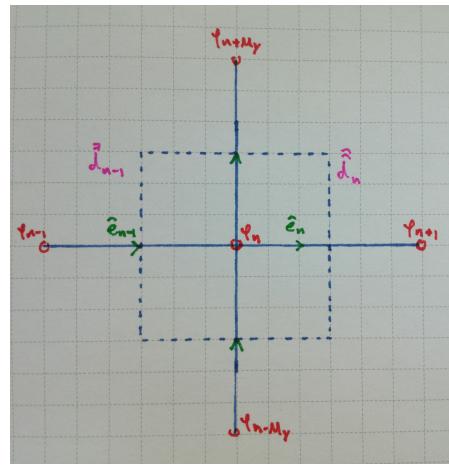


Abbildung 4.1: Primäres Gitter dargestellt durch durchgezogene Linie, duales Gitter visualisiert mit gestrichelter Linie. Die diskreten Potentialwerte sind an den primären Gitterpunkten in rot allokiert.

3. Betrachten Sie nun den Fall nichtäquidistanter Gitter und inhomogener Materialverteilung, also die Werte der Materialmatrix im Differenzenstern. Veranschaulichen Sie sich die Struktur der Systemmatrix **A** mit Hilfe einer Skizze der Bandstruktur.

Struktur: 6 auf der Hauptdiagonale und -1 auf den sechs Nebendiagonalen mit den Abständen $\pm M_x$, $\pm M_y$, $\pm M_z$ zur Hauptdiagonale.

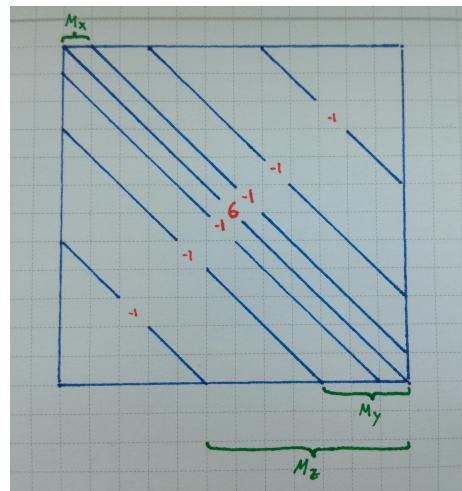


Abbildung 4.2: Bandstrukturskizze der Systemmatrix **A** bei statischen Feldproblemen.

4. Gegeben sei ein zweidimensionales Rechengebiet mit den Abmessungen¹ 0.6×1.2 mit dem Koordinatenursprung bei $(0, 0)$. Es seien drei Punktladungen im Rechengebiet mit $q_1 = q_0$ am Punkt $(0.3, 0.2)$, $q_2 = q_0/2$ bei $(0.6, 0.4)$, und $q_3 = q_0/4$ bei $(0.9, 0.2)$ gegeben.

Berechnen Sie die Größe und den Ort des Ladungsschwerpunkts q_s . Das Rechengebiet sei homogen mit ε_0 gefüllt und äquidistant mit 3×4 Gitterzellen diskretisiert. Berechnen Sie außerdem die Potentiale der Randknoten so, dass die Problemstellung mit einer offenen Berandung versehen ist.

$$\text{Mit } x_s = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^N q_i}, y_s = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^N q_i}, q_s = \sum_{i=1}^N q_i$$

$$x_s = \frac{\sum_{i=1}^3 x_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^3 q_i} = \frac{0,3 \cdot q_0 + 0,6 \cdot 0,5q_0 + 0,9 \cdot 0,25q_0}{q_0 + 0,5q_0 + 0,25q_0} = 0,47$$

$$y_s = \frac{\sum_{i=1}^3 y_i \cdot q_i}{\sum_{i=1}^3 q_i} = \frac{0,2 \cdot q_0 + 0,4 \cdot 0,5q_0 + 0,2 \cdot 0,25q_0}{q_0 + 0,5q_0 + 0,25q_0} = 0,257$$

$$q_s = \sum_{i=1}^3 q_i = \frac{7}{4}q_0$$

Potential an Randpunkt: $\varphi_b = \frac{q_s}{4\pi\varepsilon r_b}$ mit $r_b = \sqrt{(x_b - x_s)^2 + (y_b - y_s)^2}$

Alle Werte von φ_b sind in $10^{10} \cdot q_0$.

φ_b	x_b	y_b
2,93	0	0
3,32	0	0,2
3,2	0	0,4
2,7	0	0,6
5,1	0,3	0
5,46	0,6	0
3,14	0,9	0
2,03	1,2	0
2,15	1,2	0,2
2,11	1,2	0,4
1,95	1,2	0,6
4,11	0,3	0,6
4,29	0,6	0,6
2,86	0,9	0,6
1,95	1,2	0,6

5. Berechnen Sie, wenn möglich, die Kapazitäten folgender Anordnungen mithilfe von Kondensatorsschaltungen. Die Abmessung soll für alle Anordnungen mit $1 \times 1 \times 1$ angenommen werden. Dabei befinden sich die Elektroden bei $y = 0$ und $y = 1$. Wie kann Anordnung e) geändert werden, damit sie mit einer Kondensatorsschaltung berechnet werden kann?

- a) Homogen mit Permittivität $\varepsilon_r = 1$.
- b) Äquidistant längsgeschichtet mit Permittivitäten $\varepsilon_{r1} = 1$ und $\varepsilon_{r2} = 2$ (Reihenschaltung).
- c) Äquidistant quergeschichtet mit Permittivitäten $\varepsilon_{r1} = 1$ und $\varepsilon_{r2} = 2$ (Parallelschaltung).
- d) Längs- und quergeschichtet mit Permittivitäten $\varepsilon_{r1} = 1, \varepsilon_{r2} = 2, \varepsilon_{r3} = 3$ und $\varepsilon_{r4} = 4$ (Reihenschaltung von Parallelschaltungen bzw. Parallelschaltung von Reihenschaltungen).
- e) Homogen gefüllter Kondensator ($\varepsilon_r = 1$) mit Zick-Zack-förmiger oberer Platte. Ausgehend von einem homogenen Plattenkondensator soll die Geometrie der oberen Platte durch das Einbringen eines metallischen Quaders mit den Punkten $(0, 0.5, 0)$ und $(0.5, 1, 1)$ modelliert werden.

Die Kapazität eines Plattenkondensators kann mit $C_i = \varepsilon_0 \cdot \frac{A_i}{d_i}$ bestimmt werden.

- (a) In diesem Fall gilt $A = 1, d = 1$ und damit $C_a = \varepsilon_0 \approx 8.8542 \cdot 10^{-12}$
- (b) Für die Reihenschaltung von Kapazitäten gilt: $C_b = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$, mit den Teilkapazitäten C_1 , sowie C_2 . Da $A = 1$ und $d = \frac{1}{2}$ folgt

$$C_b = \left(\frac{1}{2\varepsilon_0} + \frac{1}{4\varepsilon_0} \right)^{-1} = \frac{4}{3}\varepsilon_0 \approx 1.1806 \cdot 10^{-11}$$
- (c) Für die Parallelschaltung von Kapazitäten gilt: $C_c = C_1 + C_2$, wobei C_1 und C_2 wieder Teilkapazitäten darstellen. Nun gilt $A = \frac{1}{2}$ und $d = 1$, womit sich die Gesamtkapazität durch

$$C_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0 = \frac{3}{2}\varepsilon_0 \approx 1.3281 \cdot 10^{-11}$$
 bestimmen lässt.

Sowohl für (d), als auch für (e) muss die Berechnung numerisch durchgeführt werden.

4.1.2 Skalare Magnetostatik

6. An welcher Stelle im Gitter müssen die Komponenten des Gitterstroms $\hat{\vec{j}}$ allokiert werden (bei gegebenem Ansatz des magnetischen Skalarpotentials)?

Da \hat{h} auf den primären Kanten allokiert ist, ist $\hat{\vec{j}}$ an den primären Flächen allokiert.

7. Berechnen Sie analytisch das magnetische Feld um einen unendlich ausgedehnten Linienleiter und skizzieren Sie die zu erwartende Feldverteilung.

Das Feld ist längshomogen und rotationssymmetrisch, daher hängt das Feld nur vom Abstand ϱ vom Leiter ab. Durch Anwendung des Durchflutungsgesetzes:

$$\int_{\partial A} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

auf einen Kreisbogen um die z-Achse, auf dem das Feld konstant ist, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H(\varrho) \vec{e}_\varphi \cdot \varrho d\varphi \vec{e}_\varphi &= H_\varphi 2\pi \varrho = I \\ \Rightarrow H_\varphi &= \frac{I}{2\pi \varrho} \Rightarrow \vec{H} = \frac{I}{2\pi \varrho} \vec{e}_\varphi. \end{aligned}$$

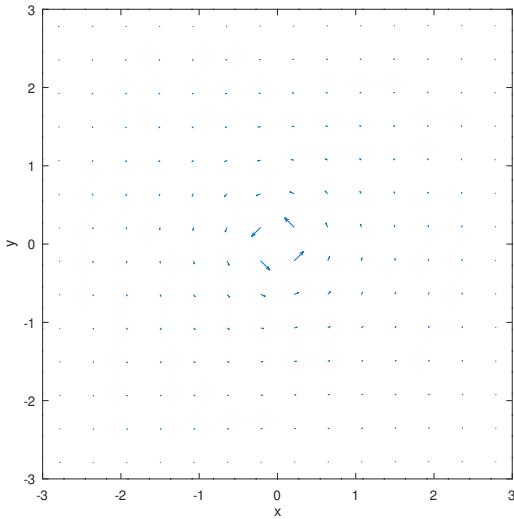


Abbildung 4.3: Magnetfeld eines unendlich langen Linienleiters in der z -Ebene.

8. Wie können die Dirichlet- und die Neumann- Randbedingung physikalisch gedeutet werden, wenn sie in der Magnetostatik auf das magnetische Skalarpotential angewandt werden?

Dirichlet:

Für Dirichlet-RB wird der Wert des Potentials auf dem Rand gleich null gesetzt, es gilt also: $\varphi|_{\Gamma} = 0$ mit $\vec{H} = -\text{grad}\varphi$ ergibt dies: $\text{grad}\varphi|_{\Gamma} \times \vec{n} = 0$ was bedeutet, dass die Tangentialkomponenten von \vec{H} verschwinden und dies entspricht gerade magnetischen Randbedingungen.

Neumann:

Für Neumann-RB wird die Änderung des Potentials in Normalenrichtung auf dem Rand gleich null gesetzt, es gilt also: $\frac{\partial \varphi|_{\Gamma}}{\partial \vec{n}} = 0$

mit $\vec{H} = -\text{grad}\varphi$ ergibt dies: $\text{grad}\varphi|_{\Gamma} \cdot \vec{n} = 0$ was bedeutet, dass die Normalkomponenten von \vec{H} verschwinden und dies entspricht gerade elektrischen Randbedingungen.

Ersichtlich ist, dass die Dirichlet- und Neumann-RB genau die umgekehrten Randbedingungen im Gegensatz zur Elektrostatisik darstellen.

9. Das Problem eines unendlich langen Leiters ist ein offenes 2D-Problem und müsste durch eine offene Randbedingung in der FIT modelliert werden. Wenn das Rechengebiet hinreichend groß ist, kann ohne großen Genauigkeitsverlust für die Felder im Inneren des Rechengebiets auf die komplizierte Implementierung eines offenen Randes verzichtet werden. Welche Randbedingung eignet sich hierfür besser? (Neumann ($H_n = 0$) oder Dirichlet ($\vec{H}_t = 0$))?

Neumann-RB eignen sich besser, da hier am Rand die Normalkomponenten von \vec{H} ohnehin null werden, wie in folgender Skizze gezeigt.

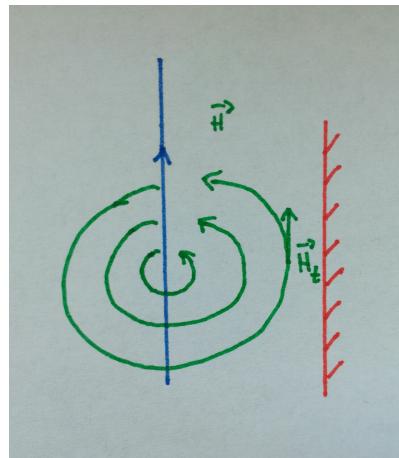


Abbildung 4.4: Das Magnetfeld eines unendlich ausgedehnten Linienleiters mit Berandung skizzenhaft dargestellt. Die Feldlinien sind in sich geschlossen, was aus Darstellungsgründen hier nicht ersichtlich ist.

4.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

4.2.1 Elektrostatik

Kern dieses Abschnitts bildet die Implementierung eines Solvers für elektrostatische Probleme. Anhand der Kondensatoranordnungen aus der Vorbereitung können die Routinen mit analytischen Berechnungen verglichen und das Konvergenzverhalten untersucht werden. Der Kondensator mit Knick dient darüber hinaus als Beispiel für ein analytisch nicht lösbares Problem.

1. Vervollständigen Sie die in `solveES.m` vorgegebene Funktion

$$[\text{phi}, \text{ebow}, \text{dbow}, \text{relRes}] = \text{solveES}(\text{msh}, \text{eps}, \text{pots}, \text{q}, \text{bc}), \quad (4.1)$$

welche einem allgemeinen Elektrostatik-Solver entspricht. `msh` ist hierbei das Rechengitter, `eps` die Permittivität, `pots` die gesetzten Potentiale für jeden Gitterpunkt (nicht bekannte Potentiale sind mit dem Wert `NaN` in diesem Vektor gekennzeichnet), `q` die vorgegebenen Ladungen und `bc` die vorgegebenen Randbedingungen. `phi`, `ebow` und `dbow` sind die integralen Feldgrößen und `relRes` ist ein Vektor mit den relativen Residuen des Solvers in jedem Iterationsschritt.

Hinweis: Für die Implementierung werden Ihnen einige Routinen vorgegeben (zum Teil handelt es sich um optimierte Funktionen aus vergangenen Versuchen), welche auf den nächsten Seiten beschrieben sind. Verwenden Sie diese so oft wie möglich.

Die Systemmatrix A kann über die in Gleichung (4.10) dargestellte Beziehung $A = \tilde{S}M_\epsilon\tilde{S}^T$ bestimmt werden. Mit der Funktion `modPots` werden die bereits bekannten Potentiale und zugehörige Zeilen aus der Systemmatrix entfernt und das verbleibende Gleichungssystem gelöst. Die Lösungen dieses Gleichungssystems enthalten somit die zuvor unbekannten Potentialwerte. Der Vektor `phi` wird mit allen Werten gefüllt, d.h. sowohl die neu bestimmten (zuvor unbekannten) in `x`, als auch die bereits zuvor bekannten in `modPots`, welche nicht durch `NaN` Werte gekennzeichnet wurden.

Um die Bogenwerte zu bestimmen wird über die Gitterknoten iteriert und für jede Richtung die zugehörige Bogengröße, bestimmt, indem die Differenz der beteiligten Potentiale an den Knoten gebildet wird. Alle Teilvektoren werden letztlich in einen Vektor `ebow` geschrieben und über die Beziehung `dbow = Meps * ebow` berechnet sich somit ebenfalls \hat{d} .

2. Schreiben Sie eine Methode

$$\text{cap} = \text{calcCap}(\text{msh}, \text{ebow}, \text{dbow}), \quad (4.2)$$

die die Kapazität `cap` berechnet und zurück gibt. Verwenden Sie hierzu die vorgegebenen Methoden `intEdge` und `intSurf`.

Um die Kapazität dieses in der XY-Ebene liegenden Kondensators zu bestimmen, wird die Formel $Q = CU$ genutzt.

Spannung: Über die Parameter `line.u`, `line.v` und `line.w` wird der Startpunkt des diskreten Konturintegrals festgelegt, der hier auf den Ursprung gelegt wurde, i.e. $i = j = k = 1$.

Die Länge des Integrationspfades (von einer Kondensatorplatte zur anderen) entspricht dabei gerade der Anzahl an Knoten in y/j Richtung und beträgt somit `msh.ny`.

Da in y -Richtung integriert wird, folgt für die Richtung des Integrationspfades $[0, 1, 0]$.

Ladung: Die Ladung kann über das Flächenintegral der elektrischen Flussdichte ermittelt werden, oder im diskreten Fall \hat{d} .

Zu Beginn werden die Eckpunkte der Fläche über `surface.ul`, `surface.uh`, `surface.vl` und `surface.vh` festgelegt. Hierbei wurde die Fläche ganz unten gewählt, das heißt für $i \geq 1$, $j = 1$ und $k \geq 1$. Der Flächen-normalenvektor zeigt in y -Richtung weshalb hier `surface.normal = [0, 1, 0]` gewählt wurde.

Die Kapazität kann letztlich mit obiger Formel berechnet werden, also $C = \frac{Q}{U}$.

3. Verwenden Sie nun die letzten beiden Methoden in dem teilweise vorgegebenen Skript `exampleCaps.m`, um die Kapazität der Kondensatorkonfigurationen a) bis d) der Vorbereitungsaufgaben numerisch zu berechnen und mit Ihren analytischen Ergebnissen zu vergleichen. Hängt die Lösung von der Größe des Gitters ab?

Der Fall in (a) für einen Kondensator ist bereits implementiert. Für zwei längsgeschichtete Permittivitäten kann ein äquivalentes ESB aus zwei seriell verschalteten Teilkapazitäten aufgestellt werden. Dies wird erreicht, indem die Box in zwei gleich große Hälften unterschiedlicher Permittivität aufgeteilt wird.

Ähnlich kann auch für (c) und (d) vorgegangen werden. Da es sich bei (c) um ein quergeschichtetes Dielektrikum handelt besteht das äquivalente ESB aus einer Parallelschaltung von zwei Teilkondensatoren, die durch eine gleichmäßige Unterteilung der Box berücksichtigt wird.

Bei (d) wird die Box in vier gleich große Teile unterschiedlicher Permittivität unterteilt.

Das Potential wurde ebenfalls mit der Methode `boxMesher` definiert. Der unteren Platte bei $y = 1$ wurde ein Potential von $0V$ und der oberen Platte bei $y = msh.ny$ ein Potential von $1V$ zugewiesen. Abschließend wird der Ladungsvektor initialisiert und mit Hilfe von `solveES` eine geeignete Lösung für die Felder des Potentials, der elektrischen Feldstärke und Flussdichte ermittelt. Die erhaltenen Werte stimmen mit den analytisch bestimmten Werten aus der Vorbereitung überein. Bei einer Vergrößerung des Gitters bei gleich bleibender Stützstellenanzahl kann beobachtet werden, dass die erhaltenen numerischen Lösungen größer werden. So folgen bspw. für eine Gittergröße von $10 \times 10 \times 10$ die folgenden Kapazitätswerte:

$$C_a = 8.854 \cdot 10^{-11}$$

$$C_b \approx 1.1805 \cdot 10^{-10}$$

$$C_c = 1.3281 \cdot 10^{-10}$$

$$C_d \approx 2.0238 \cdot 10^{-11}.$$

4. Visualisieren Sie im selben Skript das Potential (`plotPotential`) und das elektrische Feld (`plotEdgeVoltage`) der fünf Kondensatorkonfigurationen. Wählen Sie hierfür eine sinnvolle Diskretisierung und eine zweidimensionale Darstellung mit sinnvoller Schnittebene `indz`. Kommentieren Sie kurz die Feldbilder im Hinblick auf die analytischen Feldverläufe.

Die Visualisierung der Felder erfolgt mit `plotPotential` für das Potentialfeld und `plotEdgeVoltage` für das elektrische Feld. Als Schnittebene kann die y -Ebene in der Mitte beider Elektroden gewählt werden. Es ergeben sich die Feldbilder in Abbildung 4.5.

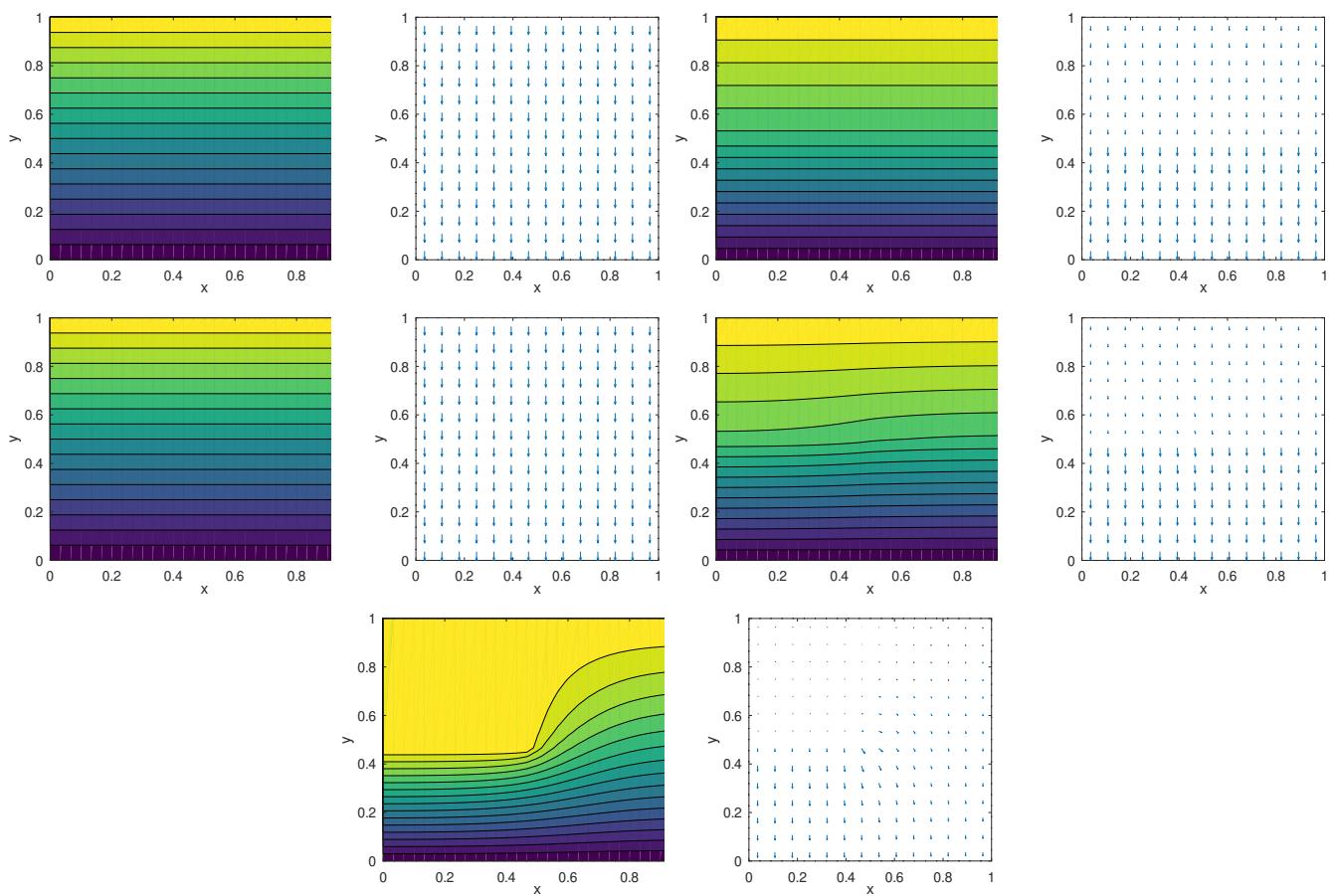


Abbildung 4.5: Die Feldbilder für das Potential (farbig, Spalte 1 und 3) und das elektrische Feld der Anordnung mit Fall 1: homogener Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0$ (Zeile 1, Spalte 1 und 2), Fall 2: äquidistant längsgeschichteten Permittivitäten ε_{r1} und ε_{r2} (Zeile 1, Spalte 3 und 4), Fall 3: selbige äquidistant quergeschichtete Permittivitäten (Zeile 2, Spalte 1 und 2) und Fall 4: sowohl längs-, als auch quergeschichtete Permittivitäten $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{r2}, \varepsilon_{r3}$ und ε_{r4} . Im letzten Fall 5 (unterste Zeile) ist der Kondensator homogen gefüllt mit $\varepsilon = 1$ und besitzt eine Zick-Zack förmige obere Platte.

Das Feldbild mit homogener Materialfüllung (Fall 1) entspricht den Erwartungen und bereits bekanntem Feldverlauf eines Plattenkondensators mit einer überall betragsmäßig gleichgroßen, gleichgerichteten elektrischen Feldstärke.

An Grenzflächen mit unterschiedlichen Dielektrika ist die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig, was begründet weshalb das Feldbild für Fall 3 genauso aussieht wie für Fall 1. Da in Fall 2 aber die elektrische Feldstärke an der Grenzfläche keine Tangentialkomponente aufweist, ändert sich das Feldbild wie zu erwarten in den beiden Bereichen oberhalb und unterhalb der Grenzschicht.

5. Dokumentieren Sie das Konvergenzverhalten des iterativen Solvers für Kondensatorkonfiguration e), indem Sie den Verlauf des relativen Residuums als Funktion des Iterationsschritts n_{iter} mithilfe eines Matlab-Skripts `plotConv.m` grafisch darstellen.

Hinweis: Entsprechend Vorgabe ist das relative Residuum für jeden Iterationsschritt in `relRes` enthalten.

Nach der Generierung des Gitters wird analog zu Aufgabe 3 die Box für die Kondensatoranordnung in e) erstellt. Dabei entspricht die Box von e) der Box von a). Der Metallquader wird hier nur über das setzen der Potentiale 'erzeugt'. Anschließend wird das Gleichungssystem mit dem Elektrostatik-Solver `solveES` gelöst und das relative Residuum wird auf einer halblogarithmischen Skala (y) über der Anzahl der Iterationen in Abbildung 4.6 geplottet.

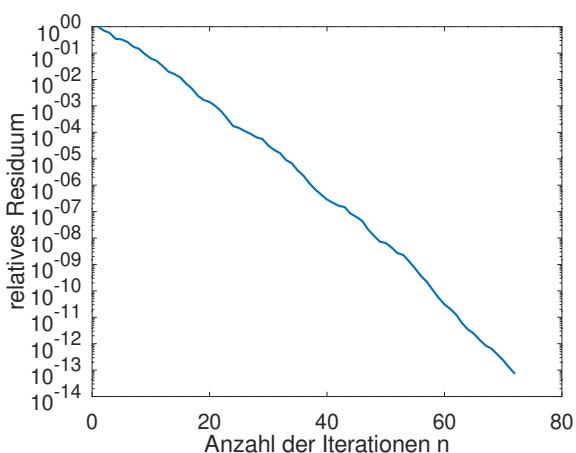


Abbildung 4.6: Verlauf des relativen Residuums über der Anzahl Iterationsschritte für Kondensatorkonfiguration e).

6. Schreiben Sie nun ein Skript `plotConvCap.m`, das die letzte Kondensatorkonfiguration e) numerisch berechnet und zusätzlich das Konvergenzverhalten (hier nicht vom Gleichungssystemlöser, sondern von der Gitterverfeinerung) angibt. Stellen Sie auch diese Lösung wieder grafisch dar.

Welcher Unterschied besteht zwischen der Konvergenz des iterativen Solvers und der Verbesserung der Lösungsgenauigkeit durch zunehmende Gitterzellenanzahl, der sogenannten Verfahrenskonvergenz?

Es wird ein beliebig gewählte Anzahl an Stützstellen im Vektor `n` gespeichert und anschließend in einer for-Schleife über diesen iteriert. Dabei wird in jedem Iterationsschritt ein Gitter mit der Kondensatorkonfiguration aus e) generiert und die zugehörige Kapazität bestimmt. Die Kapazität ist in Abbildung 4.7 über der Anzahl an Gitterpunkten dargestellt.

4.2.2 Skalare Magnetostatik

Analog zur Elektrostatik wird nun ein Solver für magnetostatische Probleme implementiert, welcher das magnetische Skalarpotential verwendet. Das Rechengebiet wird erneut zu $1 \times 1 \times 1$ gewählt. In der Mitte des

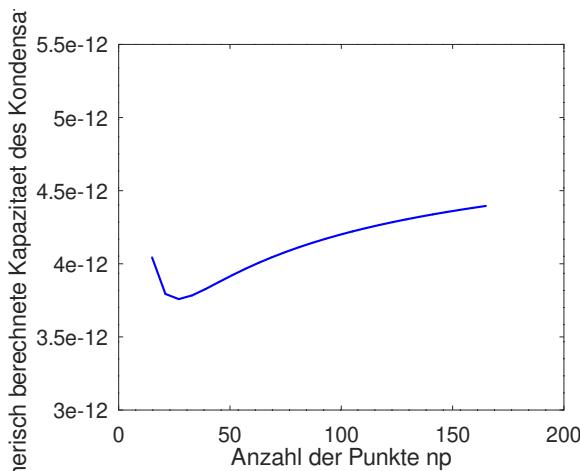


Abbildung 4.7: Dargestellt ist das Verhalten der Kapazität von Kondensatorschaltung e) in Abhängigkeit der Gesamtzahl an Gitterpunkten.

Rechengebiete soll sich ein in z -Richtung das komplette Rechengebiet durchlaufender Linienleiter, der den Strom 1000 A führt, befinden.

7. Verwenden Sie die vorgegebene Methode `calch_i`, um das Hilfsfeld \hat{h}_i des Linienleiters zu berechnen. Stellen Sie es grafisch dar. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das gegebene Skript `exampleHi.m`.

Nach Erstellung des Gitters wird der Stromvektor erzeugt. Dabei wird über alle Punkte des Gitters iteriert und überprüft, ob der betrachtete Punkt in der Mitte des Gitters liegt, d.h. in der Mitte einer z -Ebene. Ist dies der Fall dann wird der entsprechende Wert so in den Stromvektor geschrieben, dass dieser in z -Richtung zeigt. Der so entstandene Stromvektor zeigt also nur in z -Richtung, hat gleichgroße Einträge und besteht von 1 bis $2 \cdot np$ nur aus nullen. Mit der Methode `calch_i` kann das Hilfsfeld $h_{i\text{bow}}$ bestimmt und anschließend durch `plotEdgeVoltage` visualisiert werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.8 abgebildet.

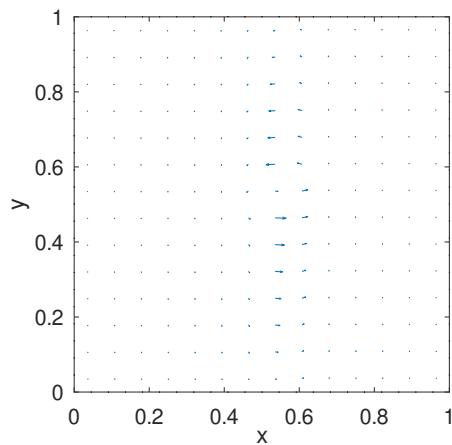


Abbildung 4.8: Hilfsfeld des Linienleiters.

8. Vervollständigen Sie den Solver

```
[hbow, bbow, relRes] = solveMS(msh, mu, jbow, bc),
```

 (4.3)

wobei `mu` hier die Permeabilität, `jbow` der Gitterstromfluss und `hbow` bzw. `bbow` die Feldgrößen sind.

Hinweis: Verwenden Sie wieder die vorgegebenen Routinen sowie die MATLAB®-Datei `solveMS`. Benutzen Sie dafür u. A. die Routine `createMeps` und beachten Sie die vertauschte Allokation der Felder in der skalaren Magnetostatik.

Mit Hilfe der geometrischen Matrizen D_S , D_A und \tilde{D}_A wird die Materialmatrix der Permeabilität M_{μ} erzeugt. Die Systemmatrix wird über die Beziehung $\tilde{S}M_{\mu}\tilde{S}^T$ bestimmt, wobei die topologische Matrix zuvor mit Hilfe des gegebenen Gitters ermittelt wurde. Im nächsten Schritt wird das Hilfsfeld `hibow` wie in Aufgabe 7 mit `calcHi` erzeugt und mit dessen Hilfe der Ladungsvektor durch $\tilde{S}M_{\mu}hibow$ ermittelt. Nun kann das Gleichungssystem gelöst werden und sowohl die magnetische Gitterspannung `hbow` als auch der magnetische Gitterfluss `bbow` bestimmt werden, wobei φ dem Potentialvektor entspricht der beim Lösen des Gleichungssystems ermittelt wurde.

9. Verwenden Sie `solveMS` um das \vec{H} -Feld zu berechnen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMShomogen.m`. Entspricht das Feldbild Ihren Erwartungen?

Es ist erkennbar, dass der Linienleiter nicht exakt im Mittelpunkt der Geometrie (0.5/0.5) liegt, sondern leicht nach rechts versetzt ist.

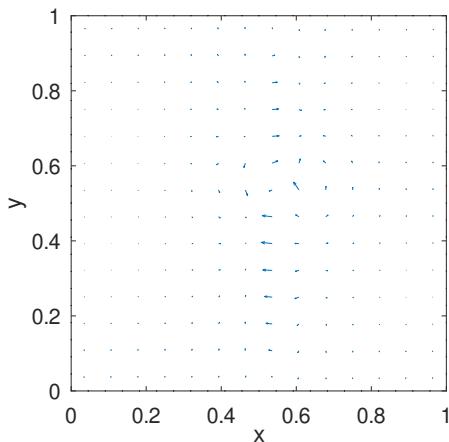


Abbildung 4.9: Abgebildet ist das magnetische Feld des Linienleiters für eine homogene verteilte Permeabilität μ .

10. Wählen Sie ein einfaches (aber sinnvolles) Beispiel einer inhomogenen Materialverteilung. Verwenden Sie die vorhandenen Methoden, um das Problem zu lösen und grafisch darzustellen. Nutzen Sie für diese Implementierung bitte das Skript `exampleMSinhomogen.m`.

Das Rechengebiet wurde ähnlich wie bei den Kondensatorschaltungen in zwei gleich große Bereiche unterteilt unterschiedlicher Permeabilität unterteilt, deren Grenzschicht in der Mitte bei $y = 0.5$ liegt. Raumteil 1 entspricht dem unteren Volumen, dem eine Permeabilität von $200 \frac{H}{m}$ und Raumteil 2 dem oberen Volumen, dem eine Permeabilität von $20 \frac{H}{m}$ zugewiesen wurde. Das Feldbild dieser inhomogenen Verteilung ist in Abbildung 4.10 dargestellt.

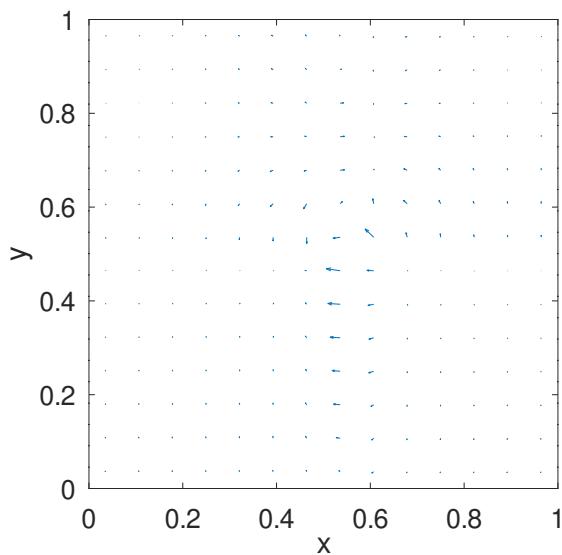


Abbildung 4.10: Zu sehen ist das magnetische Feld des Linienleiters für eine inhomogen Verteilte Permeabilität.

4.3 Fazit

Das Ziel war es eine Lösung für elektro- und magnetostatische Feldprobleme zu finden. In der Elektrostatik wurde die Lösung am Beispiel verschiedener Kondensatorkonfigurationen veranschaulicht. Besonders war dabei, dass mit Hilfe numerischer Berechnungen die Kapazitäten von Kondensatorkonfigurationen berechnet werden konnten, die längs- und quergeschichtete Dielektrika enthielten (Konfiguration (d)) und die eine Zick-zack-förmige Platte hatten (Konfiguration (e)). Analytisch konnte für diese Konfigurationen keine Lösung gefunden, an den Plots der Potentiale ist auch zu sehen, dass diese nicht linear verlaufen. Das Feldproblem der Magnetostatik wurde mit Hilfe H_i -Feld-Methode. Diese Methode wurde verwendet, um aus den vektoriellen Feldproblem mit $3 N_p$ Lösungen ein skalares Feldproblem mit N_p Lösungen zu machen. Auffällig war dabei, dass zwar der Leiter in der Mitte angeregt wurde, das magnetische Feldbild des Leiters jedoch von der Mitte leicht verschoben war.

5 Magnetostatik 2, Quasistatik und Frequenzbereich

Über einer leitenden Platte mit der Leitfähigkeit $\kappa = 5.8 \cdot 10^7 \text{ S/m}$ und der Permeabilität $\mu = 1000 \mu_0$ befindet sich eine quadratische Stromschleife. Das Material des umgebenden Rechengebiet der festen Größe $1 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ ist Vakuum. Darüber hinaus gilt im gesamten Rechengebiet für die Permittivität $\varepsilon = \varepsilon_0$. Für eine äquidistante Diskretisierung der Größe $6 \times 6 \times 5$ ist diese Problemstruktur in Abbildung 5.1 dargestellt. Trotz der gewählten Allokation auf dualen Flächen ist der Strom hier für eine bessere Übersicht auf primären Kanten eingezeichnet. Es sei in diesem Zusammenhang nochmal auf die Dualität des Gitters hingewiesen, die jeder primären Kante jeweils eine duale Fläche mit dem gleichen kanonischen Index zuordnet. Diese Diskretisierung eignet sich für das Testen der Implementierung. Insbesondere für die Visualisierungen sollte jedoch ein feineres Gitter verwendet werden. Es sollen sinnvolle Randbedingungen verwendet werden.

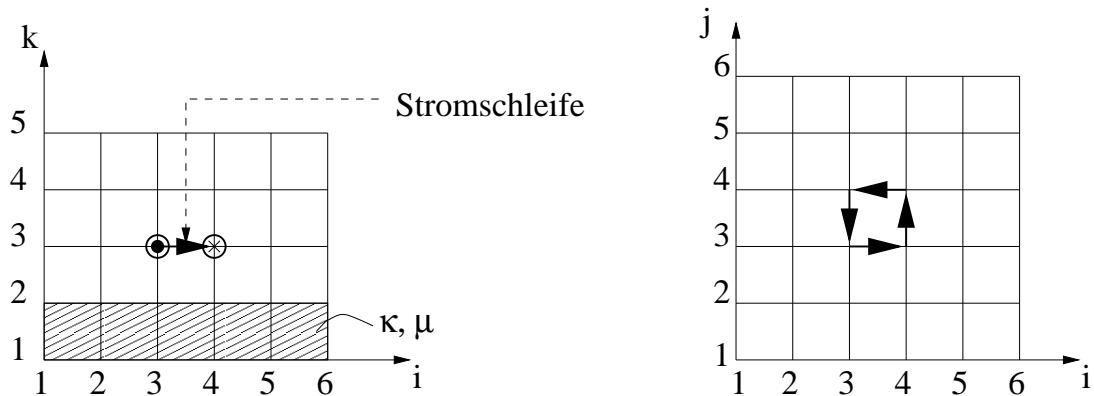


Abbildung 5.1: Problemstruktur. Gegeben ist ein äquidistantes, dreidimensionales Gitter. Die gestrichelt dargestellten Gitterzellen sollen mit leitfähigem Material gefüllt angenommen werden, d. h. $\kappa \neq 0$ und $\mu \neq \mu_0$, der Rest der Gitterzellen ist Vakuum. Es gilt überall $\varepsilon = \varepsilon_0$. Im Versuch sollen allgemeine Diskretisierungen betrachtet werden. Bei feinem Gitter gehen die Abmessungen von Schleife und Materialschicht entsprechend über mehrere Gitterzellen.

5.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Bestimmen Sie für die Problemstruktur aus Abbildung 5.1 die in FIT verwendeten gemittelten Leitfähigkeiten $\bar{\kappa} = (\bar{\kappa}_x \ \bar{\kappa}_y \ \bar{\kappa}_z)$ für die primalen Kanten, die von den primalen Punkten P_{ik} für $(i, k) \in \{(3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ ausgehen. Berechnen Sie zusätzlich die gemittelten inversen Permeabilitäten $\bar{\mu}^{-1} = (\bar{\mu}_x^{-1} \ \bar{\mu}_y^{-1} \ \bar{\mu}_z^{-1})$ für die dualen Kanten, die von den dualen Punkten \tilde{P}_{ik} mit $(i, k) \in \{(3, 1), (3, 2)\}$ ausgehen. Verwenden Sie zum Ermitteln dieser gemittelten Werte eine Taylorreihenentwicklung analog zu Versuch 3.

Für $P_{3,3}$ gilt $\bar{\kappa}_{3,3} = [0, 0, 0] \frac{S}{m}$ und $\bar{\mu}_{3,3}^{-1} = [\mu_0, \mu_0, \mu_0] \frac{Am}{Vs}$, da für $\bar{\kappa}_{3,3}$ die dualen Flächen und für $\bar{\mu}_{3,3}^{-1}$ die dualen Kanten komplett außerhalb des Gebiets des leitfähigen Materials liegen.

Für $P_{3,1}$ gilt $\bar{\kappa}_{3,1} = [5.8, 5.8, 5.8] \cdot 10^7 \frac{S}{m}$ und $\bar{\mu}_{3,1}^{-1} = \left[\frac{1}{1000\mu_0}, \frac{1}{1000\mu_0}, \frac{1}{1000\mu_0} \right] \frac{Am}{Vs}$, da hier die dualen Kanten und dualen Flächen komplett im leitfähigen Material liegen.

Für $P_{3,2}$ gilt $\bar{\kappa}_{3,2} = \left[\frac{5.8}{2}, \frac{5.8}{2}, \frac{5.8}{2} \right] \cdot 10^7 \frac{S}{m}$ und $\bar{\mu}_{3,2}^{-1} = \left[\frac{1}{\mu_0}, \frac{1}{\mu_0}, \frac{1}{\mu_0} \right] \frac{Am}{Vs}$. Bei $\bar{\kappa}_{3,2}$ liegen hier die duale X- und Y-Fläche zur Hälfte im leitfähigen Material. Die duale Z-Kante liegt für $\bar{\mu}_{3,2}^{-1}$ halb im Material.

2. Bestimmen Sie die Systemmatrix \mathbf{A}_F des magnetoquasistatischen Problems im Frequenzbereich (Gleichung (5.14)).

Mit: $\hat{\mathbf{b}} = C\hat{\mathbf{a}}$ $\tilde{C}M_{\mu^{-1}}\hat{\mathbf{b}} = M_\kappa\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{j}}_s$ und $\hat{\mathbf{j}} = -M_\kappa \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}$ ergibt sich:

$$\tilde{C}M_{\mu^{-1}}C\hat{\mathbf{a}} + M_\kappa \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{j}}_s \quad (\text{Zeitbereich})$$

$$\tilde{C}M_{\mu^{-1}}C\hat{\mathbf{a}} + M_\kappa j\omega \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{j}}_s \quad (\text{Frequenzbereich})$$

Dann ist: $A_F = \tilde{C}M_{\mu^{-1}}C + M_\kappa j\omega$

3. Bestimmen Sie die Systemmatrix \mathbf{A}_T des impliziten EULER-Zeitschrittverfahrens, d.h. setzen Sie die Näherung (5.22) in das DAE-System (5.7) ein und stellen Sie anschließend nach $\hat{\mathbf{a}}_{n+1}$ um.

Mit $\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_{n+1} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} - \hat{\mathbf{a}}_n}{t_{n+1} - t_n} = \frac{\hat{\mathbf{a}}_{n+1} - \hat{\mathbf{a}}_n}{\Delta t}$ in $\tilde{C}M_{\mu^{-1}}C\hat{\mathbf{a}} + M_\kappa \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{j}}_s$

$$(\tilde{C}M_{\mu^{-1}}C + M_\kappa \Delta t^{-1})\hat{\mathbf{a}}_{n+1} = \hat{\mathbf{j}}_s + \Delta t^{-1}M_\kappa \hat{\mathbf{a}}_n$$

Somit ist: $A_T = \tilde{C}M_{\mu^{-1}}C + M_\kappa \Delta t^{-1}$

4. Bei dem Vergleich einer Lösung im Zeitbereich mit der äquivalenten Lösung im Frequenzbereich tut sich das Problem auf, dass die Lösung im Frequenzbereich einem komplexen Feldphasor entspricht, während die Lösung im Zeitbereich rein reellwertig ist. Es könnte nun der Realteil des Feldphasors mit der Zeitbereichslösung verglichen werden, jedoch ist die Phase des Phasors unbekannt. Daher soll hier der Ansatz verfolgt werden, aus dem Zeitsignal einen komplexen Phasor zu gewinnen und diesen mit dem Phasor aus der Frequenzbereichslösung zu vergleichen.

Stellen Sie nun geeignete Bedingungen für den unbekannten Realteil und Imaginärteil des komplexen Phasors auf, um diese zu bestimmen. Formen Sie daraufhin diese Beziehungen so um, dass Sie diejenigen Zeitpunkte erhalten, an denen Sie den Realteil und den Imaginärteil des Phasors direkt am eingeschwungenen Zeitsignal ablesen können.

Realteil:

Die Lösung im Zeitbereich $\stackrel{!}{=} \text{Lösung im Frequenzbereich}$

$$\begin{aligned} A(\vec{n}, t) &= \Re(\underline{A}(\vec{n})e^{j\omega t}) = |\underline{A}| \cos(\omega t + \varphi) \stackrel{!}{=} \Re(\tilde{\underline{A}}) \text{ mit } \tilde{\underline{A}} \text{ als Phasor aus der Frequenzbereichslösung} \\ &\Leftrightarrow |\underline{A}| \cos(\omega t + \varphi) = |\tilde{\underline{A}}| \cos(\varphi) \\ &\Rightarrow |\underline{A}| = |\tilde{\underline{A}}| \\ &\Rightarrow \omega t = n2\pi \text{ mit } n \in N \\ &t = nT \end{aligned}$$

Imaginärteil:

$$\begin{aligned} A(\vec{n}, t) &= \Im(\underline{A}(\vec{n})e^{j\omega t}) = |\underline{A}| \sin(\omega t + \varphi) \stackrel{!}{=} \Im(\tilde{\underline{A}}) \\ |\underline{A}| \sin(\omega t + \varphi) &= |\tilde{\underline{A}}| \cos(\varphi - \frac{1}{2}\pi) \\ \omega t &= n2\pi - \frac{\pi}{2} \\ t &= T(n - \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

5. Geben Sie für die Problemstruktur und unter der Voraussetzung, dass in der eingezeichneten Stromschleife ein Gleichstrom von 1 kA fließt, die Einträge des Stromdichtevektors $\hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$ an. Bauen Sie den Stromdichtevektor $\hat{\hat{\mathbf{j}}}_s$ wie gewohnt mit dem kanonischen Indizierungsschema auf.

$$n = i + (j - 1) \cdot M_y + (k - 1) \cdot M_z$$

$$\begin{aligned} \hat{\hat{\mathbf{j}}}(87) &= 1000 \quad (i = 3, j = 3, k = 3) \text{ (in x-Richtung)} \\ \hat{\hat{\mathbf{j}}}(93) &= -1000 \quad (i = 3, j = 4, k = 3) \text{ (in x-Richtung)} \\ \hat{\hat{\mathbf{j}}}(267) &= -1000 \quad (i = 3, j = 3, k = 3) \text{ (in y-Richtung)} \\ \hat{\hat{\mathbf{j}}}(268) &= 1000 \quad (i = 4, j = 3, k = 3) \text{ (in y-Richtung)} \end{aligned}$$

6. Zur Erstellung des elektrischen Feldes und der Wirbelstromdichte im impliziten Zeitbereichsverfahren muss nach Gl. (5.9) die Zeitableitung des Vektorpotentials ausgewertet werden. Ein Ausdruck höherer Ordnung entsteht, indem für die Zeitableitung am *halben* Zeitpunkt $t_{n+1/2} = (t_n + t_{n+1})/2$ die beiden Näherungen

$$\dot{\bar{a}}_{n+1/2} \approx \frac{\dot{\bar{a}}_{n+1} + \dot{\bar{a}}_n}{2} = \frac{-\bar{e}_{n+1} - \bar{e}_n}{2}, \quad (\text{arithmetisches Mittel}) \quad (5.1)$$

$$\dot{\bar{a}}_{n+1/2} \approx \frac{\bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n}{\Delta t} \quad (\text{zentraler Differenzenquotient}) \quad (5.2)$$

angesetzt werden.

Leiten Sie durch Gleichsetzen beider Näherungen (5.1) und (5.2) und Auflösen nach \bar{e}_{n+1} eine Formel her, die die elektrische Gitterspannung in Abhängigkeit von ihrem jeweils letzten Wert und zwei Potentialwerten beschreibt.

Gleichsetzen von $\dot{\bar{a}}_{n+1/2} \approx \frac{\dot{\bar{a}}_{n+1} + \dot{\bar{a}}_n}{2} = \frac{-\bar{e}_{n+1} - \bar{e}_n}{2}$ und $\dot{\bar{a}}_{n+1/2} \approx \frac{\bar{a}_{n+1} - \bar{a}_n}{\Delta t}$ sowie umstellen nach \bar{e}_{n+1} ergibt:

$$\bar{e}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \cdot (\bar{a}_n - \bar{a}_{n+1}) - \bar{e}_n$$

7. Weiterhin wird die Struktur aus Abbildung 5.1 betrachtet. Überlegen Sie sich, wie D_κ , d. h. die Matrix der Materialverteilung ohne Gitterabmessungen Δs und $\Delta \tilde{A}$, für eine allgemeine äquidistante Diskretisierung des Problems aussieht. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem elektrischen Gitterstrom und der elektrischen Gitterspannung? Welche Methode aus den letzten Versuchen müssen Sie daher nur leicht modifizieren, um die Materialmatrix M_κ zu erstellen?

Die Materialmatrix D_κ ist eine Diagonalmatrix. Zur Erstellung dieser wird die Funktion `createMeps` genutzt, wobei das Argument für die Werte der Permittivitäten, für die Werte von κ ausgetauscht wird.

Der Zusammenhang zwischen elektrischen Gitterstrom und elektrischer Gitterspannung ist:

$$\hat{\mathbf{j}} = M_\kappa \bar{\mathbf{e}}$$

5.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Alle Aufgaben dieses Versuchs benötigen die Modellierung des Problems, gegeben durch Gitter, Materialverteilung und Anregung.

1. Modellieren Sie das Problem (siehe Abbildung 5.1), d. h. erstellen Sie das Rechengitter, die Anregung und die diskretisierten Materialverteilungen. Verwenden Sie hierzu das teilweise vorgegebene Skript `versuch5.m`.

Hinweis: Beachten Sie, dass später die inverse Permeabilität benötigt wird.

Zu Beginn wird ein `mesh` mit den Ausmaßen $1 \times 1 \times 1$ und äquidistanten Schrittweiten gewählt. Der $\hat{\mathbf{j}}$ -Vektor wird entsprechend der Abbildung 5.1 nach kanonischer Indizierung aufgefüllt und unterschiedliche Materialwerte werden, wie in der Vorbereitung erläutert, in entsprechenden Teilen des Rechengebietes eingeprägt.

Zuerst soll das magnetostatische Problem gelöst werden:

2. Der Solver des magnetostatischen Problems mit Hilfe eines Vektorpotentials soll in der vorbereiteten Methode

$$[\mathbf{hbow}, \mathbf{bbow}, \text{relRes}] = \text{solveMSVec}(\mathbf{msh}, \mathbf{mui}, \mathbf{jbow}) \quad (5.3)$$

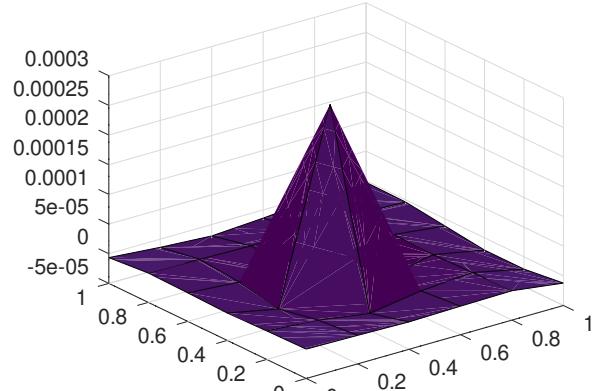
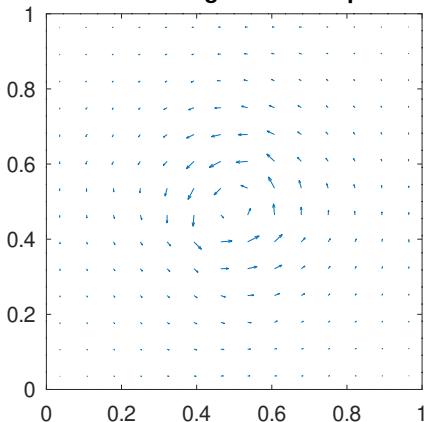
implementiert werden. Neben den bekannten Parametern `msh` und `jbow` ist `mui` hier die diskrete, gemittelte, inverse Permeabilität.

Nach initialer Erzeugung der topologischen Matrix C , der geometrischen Matrizen D_S , \tilde{D}_S und D_A , sowie der Materialmatrix $M_{\mu^{-1}}$, die die inversen Permeabilitätswerte enthält, wird die Systemmatrix A über die Beziehung $A = \tilde{C}M_{\mu^{-1}}C$ berechnet. Anschließend wird das Gleichungssystem gelöst und zuletzt die magnetischen Gitterspannungen `bbow` = $C \cdot \mathbf{abow}$ und die magnetischen Gitterflüsse `hbow` = $M_{\mu^{-1}} \cdot \mathbf{bbow}$ bestimmt.

3. Erweitern Sie das Skript `versuch5.m` und verwenden Sie Methode (5.3) und `plotEdgeVoltage`, um das magnetische Vektorpotential in der x - y -Ebene bei $k = 3$ grafisch darzustellen. Visualisieren Sie außerdem die z -Komponente der magnetischen Flussdichte in der gleichen Schnittebene. Verwenden Sie hierfür den `surf`-Befehl.

Es werden die Graphen erstellt, wobei für den 2D Plot die Methode `plotEdgeVoltage` und für den surface Plot die `surf` Funktion verwendet wurde. Bei letzterer wird über alle Punkte des Gitters iteriert und das kartesische Produkt der Punkte in der z -Ebene $z = 3$ in die Matrizen `x`, bzw. `y` geschrieben. Die z -Werte der magnetischen Flussdichte sind in der Matrix `z` enthalten.

Statische Lösung des Vektorpotentials



Nun soll das Problem für eine harmonische Anregung bei der Frequenz $f = 50$ Hz gelöst werden:

4. Implementieren Sie einen Solver für magnetoquasistatische Probleme im Frequenzbereich

`[hbow, bbow, jbow, relRes] = solveMQSF(msh, mui, kap, jebow, f),` (5.4)

wobei `kap` die diskrete, gemittelte Leitfähigkeit und `f` die Frequenz der Anregung sind.

Hinweis: Beachten Sie dabei die korrekte Form der Systemmatrix \mathbf{A}_F und der rechten Seite des Gleichungssystems. Das Gleichungssystem soll mit dem PCG-Verfahren gelöst werden (in MATLAB® gegeben als `pcg`). Damit dieses konvergiert, müssen zunächst die Beiträge der Geisterkanten aus der Systemmatrix und der rechten Seite entfernt werden. Hierbei ist Ihnen die bereits gestellte Methode `getGhostEdges` eine gute Hilfe. Außerdem muss ein geeigneter Vorkonditionierer (engl. preconditioner) gewählt werden. Besonders leicht zu implementieren ist z.B. der Jacobi Vorkonditionierer $\mathbf{M} = \text{diag } \mathbf{A}$.

Zuerst werden wieder die topologischen und geometrischen Matrizen und die Materialmatrizen $M_{\mu^{-1}}$ und M_{κ} erzeugt. Dann wird die Systemmatrix mit $A_F = \tilde{C}M_{\mu^{-1}}C + j\omega M_{\kappa}$ berechnet und anschließend soll das Gleichungssystem $A_F \cdot \hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{j}}_s$ gelöst werden.

Bei der Lösung ist zu beachten, dass alle Einträge der Geisterkanten von A_F und der rechten Seite $\hat{\mathbf{j}}_s$ gestrichen werden müssen, da sonst der Solver `pcg` nicht konvergiert.

Dabei wird wie folgt vorgegangen:

Zuerst werden mit `getGhostEdges` alle Geisterkanten ausfindig gemacht und dann mit Hilfe von `setdiff` die existierenden Kanten in einen Vektor `idxExistingEdges` geschrieben. `setdiff` funktioniert dabei so, dass der Vektor mit allen Kanten mit dem Vektor mit allen Geisterkanten verglichen wird und die Einträge aus dem Vektor mit allen Kanten rausgestrichen werden, welche nicht im Geisterkantenvektor vorhanden sind, übrig bleibt also ein Vektor mit allen existierenden Kanten. Die Matrix A_F wird dann nur an den Kanten aus `idxExistingEdges` ausgewertet, sodass sich die reduzierte Matrix $A_{F,reduced}$ ergibt.

Ebenso wird $\hat{\mathbf{j}}_s$ nur an den existierenden Kanten ausgewertet, wodurch der reduzierte Vektor $\hat{\mathbf{j}}_{s,reduced}$ entsteht.

Mit dem Vorkonditionierer $\mathbf{M} = \text{diag}(A_{F,reduced})$, $A_{F,reduced}$ und $\hat{\mathbf{j}}_{s,reduced}$ kann nun das Gleichungssystem gelöst werden, wodurch sich ein $\hat{\mathbf{a}}_{reduced}$ ergibt.

Anschließend muss zur Berechnung von:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{b}} &= C \cdot \hat{\mathbf{a}} \\ \hat{\mathbf{h}} &= M_{\mu^{-1}} \cdot \hat{\mathbf{b}} \\ \hat{\mathbf{j}} &= -i\omega M_{\kappa} \cdot \hat{\mathbf{a}}\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{a}}_{reduced}$ auf seine ursprüngliche Größe gebracht werden. Dazu wird $\hat{\mathbf{a}}$ als eine Nullmatrix erstellt und dann mittels einer For-Schleife an alle existierenden Kanten die berechneten Werte von $\hat{\mathbf{a}}_{reduced}$ geschrieben.

5. Verwenden Sie Methode (5.4) in `versuch5.m` und stellen Sie die StromdichteVerteilung in der Grenzfläche von Vakuum und leitender Platte als Vektorplot unter Verwendung von der gegebenen Methode `plotEdgeVoltage.m` grafisch dar.

Zur Darstellung der StromdichteVerteilung $\hat{\mathbf{j}}_s$ wird zuerst die vorgegebene Frequenz von $f = 50Hz$ festgelegt, dann mittels `solveMQSF` die Stromdichte berechnet und anschließend mit `plotEdgeVoltage` der Real- und Imaginärteil dieser geplottet.

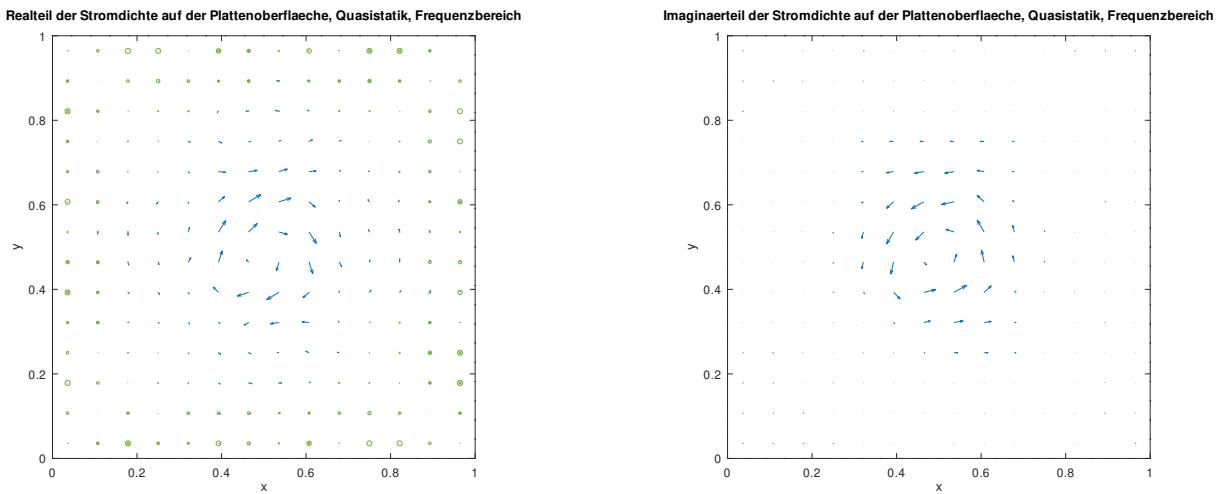


Abbildung 5.3: Realteil (links) und Imaginärteil der Stromdichte in der Grenzfläche von Vakuum und leitender Platte.

Des Weiteren soll dasselbe Problem im Zeitbereich mit dem impliziten EULER-Verfahren berechnet werden. Dazu muss ein Zeitintervall mit einer Schleife durchschritten werden. Das in jedem Schritt zu lösende Gleichungssystem haben Sie in der Vorbereitung hergeleitet.

6. Es soll nun ein Solver im Zeitbereich implementiert werden:

$$[hbow, bbow, jbow] = solveMQST(msh, mui, kap, jsbow, tend, nt), \quad (5.5)$$

wobei t der Simulationszeit und nt der Zeitschrittzahl entsprechen.

Mit Hilfe der topologischen, wobei von diesen nur C benötigt wird, und geometrischen Matrizen werden die Materialmatrizen M_κ und $M_{\mu^{-1}}$ erzeugt. Die Zeitschrittzahl ergibt sich dabei aus der Länge des Zeitvektors $tend$, der der Funktion als Argument übergeben wird. Im Solver wird in einer `for`-Schleife, die nt mal iteriert zu Beginn der alte Feldwert des Vektorpotentials gespeichert, der initial dem Argument `abow_init` der Funktion entspricht. Daraufhin wird die Systemmatrix über die Beziehung $A = \tilde{C}M_{\mu^{-1}}C + \tau^{-1}M_\kappa$ ermittelt. Anschließend kann das Gleichungssystem mit rechter Seite $j_e + \tau^{-1}M_\kappa \hat{\mathbf{a}}_{old}$ mit $j_e = \hat{\mathbf{j}}_s$ mit dem PCG Verfahren gelöst werden wodurch sich das neue $\hat{\mathbf{a}}$ ergibt.

Über den Rückwärtsdifferenzenquotienten kann schließlich auch die elektrische Gitterspannung berechnet werden. $\hat{\mathbf{b}}$ ergibt sich aus dem Produkt der topologischen Matrix C und dem magnetischen Vektorpotential $\hat{\mathbf{a}}$, $\hat{\mathbf{h}}$ und $\hat{\mathbf{j}}$ dann aus den Produkten mit $M_{\mu^{-1}}$ und $\hat{\mathbf{b}}$, bzw. M_κ und $\hat{\mathbf{e}}$.

7. Verwenden Sie Methode (5.5) und stellen Sie die Stromdichteverteilung im Punkt (3,2,2) in Abhängigkeit von der Zeit grafisch dar. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`. Was erwarten Sie für grobe Diskretisierungen in der Zeit beim impliziten EULER-Verfahren als Vorteil gegenüber dem explizitem EULER-Verfahren?

Zu Beginn wird der Anfangswert $\hat{\mathbf{a}}_{\text{init}}$ zur Lösung der DGL mit `einsen` initiiert. Die Anregung wird in Abhängigkeit der Zeit definiert als $\tilde{\mathbf{j}}_s = 150t$. Es kann nun mit dem MQS Solver `solveMQST` das magnetoquasistatische Problem gelöst werden.

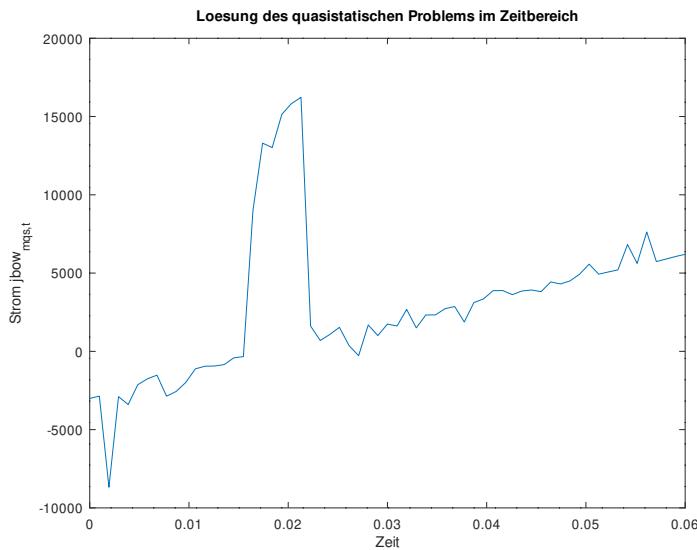


Abbildung 5.4: Stromdichteverteilung im Punkt (3,3,2) dargestellt über der Zeit.

Das explizite Eulerverfahren besitzt das Stabilitätsgebiet $S = \{z \in C : |z + 1| \leq 1\}$ was einem um -1 verschobenen Einheitskreis in der komplexen Zahlenebene entspricht. Das Stabilitätsgebiet des impliziten Eulerverfahrens ist gegeben über $S = \{z \in C : |1 - z| \geq 1\}$. Das entspricht der gesamten komplexen Zahlenebene mit Ausnahme eines Kreises mit Mittelpunkt 1 und Radius 1. Der Vorteil der sich aufgrund des größeren Stabilitätsgebiets des impliziten Eulers ergibt ist, dass es keine Einschränkung an die Zeitschrittweite gibt, was wiederum bedeutet, dass bei groben zeitlichen Diskretisierungen die Stabilität des Verfahrens gewährleistet ist.

8. Vergleichen Sie die Ergebnisse des Zeitbereichs-Solvers mit dem Ergebnis der Frequenzbereichslösung. Für diesen Vergleich muss die Frequenzbereichslösung zunächst in den Zeitbereich transformiert werden. Verwenden Sie anschließend für diesen Vergleich die Fehlernorm

$$\text{error} = \frac{\max \|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},t}(t_i) - \hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},f,t}(t_i)\|_2}{\max \|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},f,t}(t_i)\|_2}. \quad (5.6)$$

Die Zeitbereichslösung wird hier mit $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},t}$ und die in den Zeitbereich transformierte Frequenzbereichslösung mit $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},f,t}$ bezeichnet. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`.

Mit Hilfe des Zusammenhangs $\vec{E} = \Re\{\underline{E} \cdot \exp^{j\omega t}\}$ kann die gesuchte Größe aus dem Frequenz- in den Zeitbereich transformiert werden.

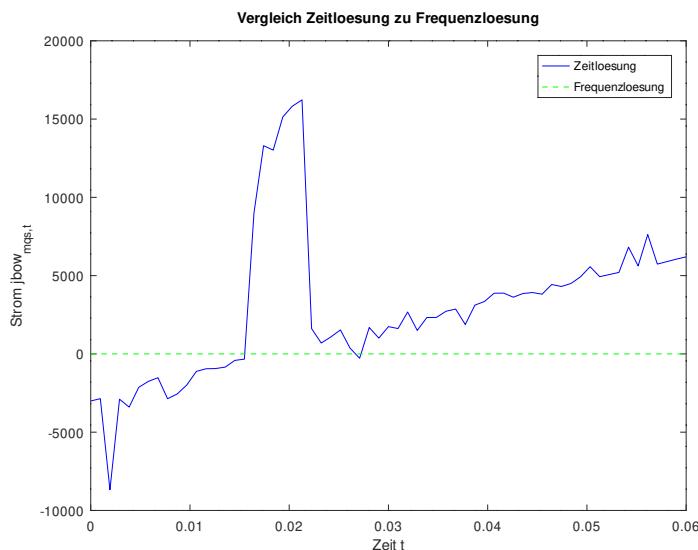


Abbildung 5.5: Zu sehen ist die Lösung im Zeitbereich (blau) und im Frequenzebereich, wobei bei letzterer aufgrund des großen Intervalls der y-Achse keine Details erkennbar sind.

Der relative Fehler, der sich nach Gleichung 5.6 ergibt sich im Zeitbereich zu `error = 80.309`.

9. Führen Sie nun denselben Vergleich noch einmal im Frequenzbereich durch. Hierfür müssen Sie den entsprechenden Phasor für die Zeitbereichslösung aufstellen und daraufhin den Real- und Imaginärteil mit der Frequenzbereichslösung vergleichen. Als Fehlernorm soll hier für Real- und Imaginärteil jeweils die Formel

$$\text{error} = \frac{\|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},t,f} - \hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},f}\|_2}{\|\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},f}\|_2} \quad (5.7)$$

verwendet werden. Die Frequenzbereichslösung wird hier mit $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},f}$ und die in den Frequenzbereich transformierte Zeitbereichslösung mit $\hat{\mathbf{j}}_{\text{mq},t,f}$ bezeichnet. Implementieren Sie diese Auswertung in `versuch5.m`.

Die Zeitbereichslösung wird in den Frequenzbereich transformiert, woraufhin der Real- und Imaginärteil des komplexen Phasors bestimmt werden kann. Die eigentliche Transformation geschieht durch eindimensionaler Interpolation durch die Funktion `interp1`. Der Real- und Imaginärteil kann nun mit der Frequenzbereichslösung verglichen werden. Die folgenden Feldbilder dienen zum Vergleich mit den Plots, die für die Verwendung der Phasoren des Frequenzbereich erhalten wurden.

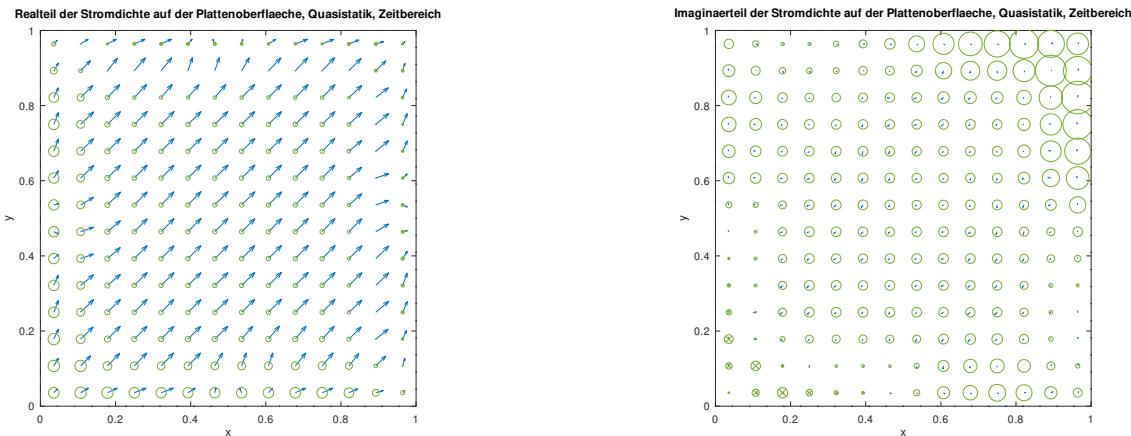


Abbildung 5.6: Real- (links) und Imaginärteil der Stromdichte auf der Plattenoberfläche.

5.3 Fazit

Weitere magnetostatische Betrachtungen erfolgten und neue Möglichkeiten zum Umgang mit den zeitabhängigen Maxwellgleichungen wurden behandelt. Dabei wurden Probleme sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich betrachtet und anschließend miteinander verglichen. Im Rechengebiet ist eine von Vakuum umgebene quadratische Stromschleife über einer leitenden Platte gegeben. Mit Hilfe verschiedener Solver für die magnetostatische und magnetoquasistatische Problemstellungen, wurden Vektorpotential, magnetische Flussdichte, sowie die Stromdichteverteilung an bestimmten Orten im Rechengebiet numerisch bestimmt.

6 HF-Zeitbereich 1: Leapfrog

6.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Geben Sie (6.6) und (6.7) für $M_\kappa \neq 0$ an. Ersetzen Sie die Ableitungen aus (6.4) und (6.5) mit dem zentralen Differenzenquotienten.

Die Bestimmung von $\widehat{\mathbf{h}}^{(n+1)}$ ändert sich nicht, sodass nach wie vor gilt:

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(n+1)} = \widehat{\mathbf{h}}^{(n-1)} - 2\Delta t M_{\mu^{-1}} C \widehat{\mathbf{e}}^{(n)}$$

Bei der Bestimmung von $\widehat{\mathbf{e}}^{(n+1)}$ taucht wie in Gleichung (6.5) ersichtlich die Leitfähigkeitsmatrix M_κ auf, weshalb das Ergebnis hier von dem in (6.7) abweichen wird. Der zentrale Differenzenquotienten, ist über $\frac{y^{(n+1)} - y^{(n-1)}}{2\Delta t}$ definiert. Somit folgt unter Berücksichtigung des Terms $-M_\varepsilon^{-1} M_\kappa \widehat{\mathbf{e}}(t)$ in (6.5) die Lösung:

$$\mathbf{e}^{(n+1)} = \widehat{\mathbf{e}}^{(n-1)} + 2\Delta t M_\varepsilon^{-1} \left(-M_\kappa \widehat{\mathbf{e}}^{(n)} + \tilde{C} \widehat{\mathbf{h}}^{(n)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(n)} \right).$$

2. Leiten Sie die Update-Gleichungen (6.10) und (6.11) des Leapfrog-Algorithmus ebenfalls für $M_\kappa \neq 0$ her und erklären Sie, welche Schwierigkeiten hier auftreten.

Das Vorgehen ist analog zu dem aus 1. nur, dass hier nicht der zentrale Differenzenquotient, sondern die Näherung der Ableitung aus Gleichung (6.8), bzw. (6.9) zu entnehmen ist. Auch hier tritt für $\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)}$ keine Veränderung (bezogen auf (6.10)) auf, da Gleichung (6.4) keine Leitfähigkeitsmatrix enthält. Es kann also geschrieben werden:

$$\widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} := \widehat{\mathbf{h}}^{(m)} - \Delta t M_{\mu^{-1}} C \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}.$$

Anders verhält es sich wieder für die elektrische Feldstärke. Wird M_κ berücksichtigt, ergibt sich folgender Term:

$$\widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} := \widehat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + \Delta t M_\varepsilon^{-1} \left(\tilde{C} \widehat{\mathbf{h}}^{(m+1)} - \widehat{\mathbf{j}}^{(m+1)} - M_\kappa \widehat{\mathbf{e}}^{(m+1)} \right).$$

Das Problem ist der Wert der unbekannten Bogenspannung $\widehat{\mathbf{e}}^{(m+1)}$ beim Zeitschritt $t^{(n+1)}$.

3. Fertigen Sie eine Skizze mit zwei gleichen, zur Illustration aber zeichnerisch getrennten Zeitachsen an. Auf eine der Zeitachsen soll die elektrische Gitterspannung \hat{e} , auf die andere Zeitachse die magnetische Gitterspannung \hat{h} zu den nach dem Leapfrog-Verfahren jeweils definierten Zeitpunkten aufgetragen werden. Veranschaulichen Sie anschließend das Leapfrog-Verfahren mithilfe von Pfeilen, indem Sie eintragen, welche Größen an welchen Zeitschritten in die jeweils zeitlich folgenden Größen eingehen.

Um die Skizze zu erstellen wird das Leapfrog-Verfahren betrachtet, also Gleichungen (6.10) und (6.11). Es ist zu erkennen, dass zur Berechnung der magnetischen Gitterspannung $\hat{h}^{(m+1)}$, sowohl $\hat{h}^{(m)}$, als auch $\hat{e}^{(m+\frac{1}{2})}$ benötigt werden. Das wird durch entsprechende Befeuilung in Abbildung (6.1) visualisiert. Um bspw. die elektrische Gitterspannung $\hat{e}^{(m+\frac{3}{2})}$ zu bestimmen, wird der Wert von \hat{e} zum Zeitpunkt $t^{(m+\frac{1}{2})}$ und \hat{h} zum Zeitschritt $t^{(m+1)}$ benötigt.

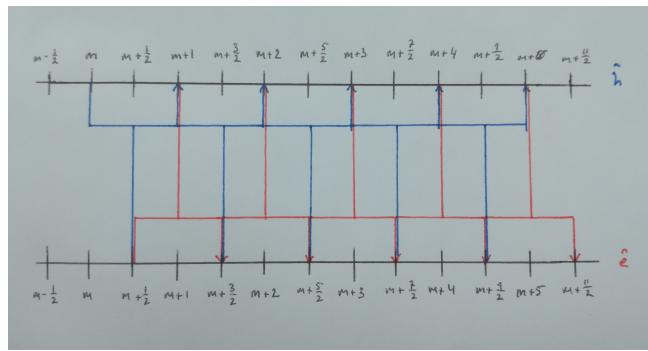


Abbildung 6.1: Visualisierung des Leapfrog-Verfahrens, wobei blaue Pfeile die magnetische und Rote die elektrische Gitterspannung kennzeichnen.

4. Für eine homogene Materialverteilung und äquidistante Gitter lässt sich eine Abschätzung des größten Eigenwertes von \mathbf{A}' (gegeben durch (6.27)) mit der Spaltensummennorm angeben, sodass

$$\lambda_{\max} \approx \|\mathbf{A}'\|_1 = \max_{k=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ik}|, \quad (6.1)$$

wobei \mathbf{A}' eine quadratische Matrix mit n Spalten und n Zeilen ist. Schätzen Sie mithilfe dieser Spaltensummennorm¹ den größten Eigenwert von \mathbf{A}' für ein äquidistantes Gitter mit homogener Materialfüllung und unter Vernachlässigung von Randeffekten ab. Geben Sie für diesen Fall Δt_{\max} an.

Die schiefsymmetrische Matrix A' setzt sich aus der Permittivitätsmatrix, der Permeabilitätsmatrix, sowie der topologischen Matrix C zusammen. Da ein homogenes, äquidistantes Gitter vorliegt, kann für die Materialmatrizen geschrieben werden:

$$M_\varepsilon = \left(\frac{\bar{\varepsilon} \tilde{A}_n}{L_n} \right) = \frac{\varepsilon(\Delta s)^2}{\Delta s} = \varepsilon \Delta s.$$

Dabei ist $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$, da das Gitter eine homogene Materialverteilung besitzt.
Gleiche Argumentation führt auch auf die Permeabilitätsmatrix:

$$M_{\mu^{-1}} = \left(\frac{\tilde{L}_n \mu^{-1}}{A_n} \right) = \frac{\Delta s \mu^{-1}}{(\Delta s)^2} = \frac{\mu^{-1}}{\Delta s}.$$

Im nächsten Schritt werden die Einträge der Matrix A' mit den soeben ermittelten Größen bestimmt.

$$\begin{aligned} A'_{21} &= M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{C} M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \Delta s}} \tilde{C} \sqrt{\frac{\mu^{-1}}{\Delta s}} = \sqrt{\frac{\mu^{-1}}{\varepsilon}} \frac{1}{\Delta s} \tilde{C} \\ A'_{12} &= -M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} C M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{\mu^{-1}}{\Delta s}} C \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \Delta s}} = -\sqrt{\frac{\mu^{-1}}{\varepsilon}} \frac{1}{\Delta s} C \end{aligned}$$

In jeder Spalte von C und C^T sind maximal 4 nicht null Einträge wie in Abbildung (2.21) erkennbar ist, die entweder 1, oder -1 sind. Da für die Abschätzung des größten Eigenwertes der Betrag der Elemente betrachtet wird, folgt somit für diesen:

$$\lambda_{max} = 4 \sqrt{\frac{\mu^{-1}}{\varepsilon}} \frac{1}{\Delta s}.$$

Mit dem Stabilitätskriterium aus Gleichung (6.31) folgt:

$$\Delta t_{max} := \frac{2}{\max|\lambda_{A,i}|} = \frac{\sqrt{\varepsilon \Delta s}}{2\sqrt{\mu^{-1}}}.$$

5. Gehen Sie wie in der vorherigen Aufgabe vor, jedoch benutzen Sie dieses Mal die Matrix A um Δt_{max} abzuschätzen. Verwenden Sie hierfür (6.18).

Für die Einträge von A gilt:

$$\begin{aligned} A_{21} &= -M_{\mu^{-1}} C = -\frac{1}{\mu \Delta s} C \\ A_{12} &= M_\varepsilon^{-1} \tilde{C} = \frac{1}{\varepsilon \Delta s} \tilde{C} \end{aligned}$$

Auch hier sind wieder maximal vier Einträge pro Spalte von null verschieden, allerdings sind die Faktoren vor den topologischen Matrizen, i.e. $\frac{1}{\mu \Delta s}$ und $\frac{1}{\varepsilon \Delta s}$ ebenfalls verschieden, anders als bei A' , bei der sie, vom Vorzeichen abgesehen, gleich sind. Aus diesem Grund wird nun die angepasste Aussage über den größten Eigenwert von A getroffen:

$$\lambda_{max} = 4 \max \left(\frac{1}{|\varepsilon|}, \frac{1}{|\mu|} \right) \frac{1}{\Delta s}.$$

Für t_{max} gilt mit Gleichung (6.31):

$$\Delta t_{max} = \frac{2}{\max|\lambda_A, i|} = \frac{\Delta s}{2 \max \left(\frac{1}{|\varepsilon|}, \frac{1}{|\mu|} \right)}.$$

6. Für Rechengebiete mit $n_z = 2$ und elektrischen Randbedingungen sind die x - und y -Komponenten von \mathbf{M}_ε sowie die z -Komponente von $\mathbf{M}_{\mu^{-1}}$ gleich Null. Schätzen Sie für diesen Fall, unter sonst gleichen Bedingungen wie zuvor, Δt_{\max} aus der Spaltensummennorm von \mathbf{A}' ab.

Im genannten Spezialfall ergeben sich die angepassten Material- und Topologiematrizen zu:

$$\begin{aligned} M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{\varepsilon,z}^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ M_{\mu^{-1}}^{-\frac{1}{2}} &= \begin{bmatrix} M_{\mu^{-1},x}^{-\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & M_{\mu^{-1},y}^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & -P_z & P_y \\ P_z & 0 & -P_x \\ -P_y & P_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Die Berechnungen erfolgen wie in Aufgabe 4. nur mit den oben beschriebenen Matrizen:

$$\begin{aligned} A'_{21} &= M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \tilde{C} M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \Delta s}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ P_y^T & -P_x^T & 0 \end{bmatrix} \\ A'_{12} &= -M_{\mu^{-1}}^{\frac{1}{2}} C M_\varepsilon^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu \Delta s}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & -P_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Bei A'_{21} röhren die transponierten Einträge daher, dass \tilde{C} genutzt wird und die Beziehung $C = \tilde{C}^T$ gilt. Genau wie bei den Betrachtungen davor sind wieder maximal vier nicht null Einträge pro Spalte vorhanden, sodass geschrieben werden kann:

$$\lambda_{\max} = \frac{4}{\Delta s} \sqrt{\frac{1}{\mu^{-1} \varepsilon}}$$

Somit ergibt sich:

$$\Delta t_{\max} = \frac{\Delta s}{2} \sqrt{\mu^{-1} \varepsilon}$$

7. Berechnen Sie mithilfe des CFL Kriteriums (6.32) die maximale Zeitschrittweite $\Delta t_{\max}^{\text{CFL}}$ für $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$, $\varepsilon_r = 1$ und $\mu_r = 1$.

Die Geometrie- und Materialwerte in Gleichung (6.32) eingesetzt ergibt die Lösung:

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{\text{CFL}} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Das Minimum muss hier nicht bestimmt werden, da die Materialverteilung homogen und das Gitter äquidistant generiert ist. Solange also ein Zeitschritt gewählt wird, der unterhalb, oder gleich t_{\max} ist sind die Berechnungen garantiert stabil, es könnte aber auch einen Zeitschritt geben der oberhalb von t_{\max} liegt für den immernoch stabile Resultate erzielt werden können.

6.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

In diesem Versuch soll die Stabilität des Leapfrog-Algorithmus' anhand eines einfachen Beispiels untersucht werden. Als Beispiel dient die Ausbreitung einer im Freiraum ($\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1$) linienförmig angeregten 2D-Welle (Zylinderwelle). Als Rechengebiet soll dafür ein Würfel mit Kantenlänge 1 gewählt werden. Es sollen drei verschiedene Gitter, gegeben durch

- $n_x = 11, n_y = 11, n_z = 2,$
- $n_x = 41, n_y = 41, n_z = 2,$
- $n_x = 91, n_y = 91, n_z = 2,$

für die Stabilitätsuntersuchung verwendet werden. Um eine Welle zu erzeugen, muss die Welle im Rechengebiet angeregt werden. Dies soll mit Hilfe eines Liniенstromes in der Mitte des Rechengebietes erfolgen, wie in Abbildung 6.2 dargestellt.

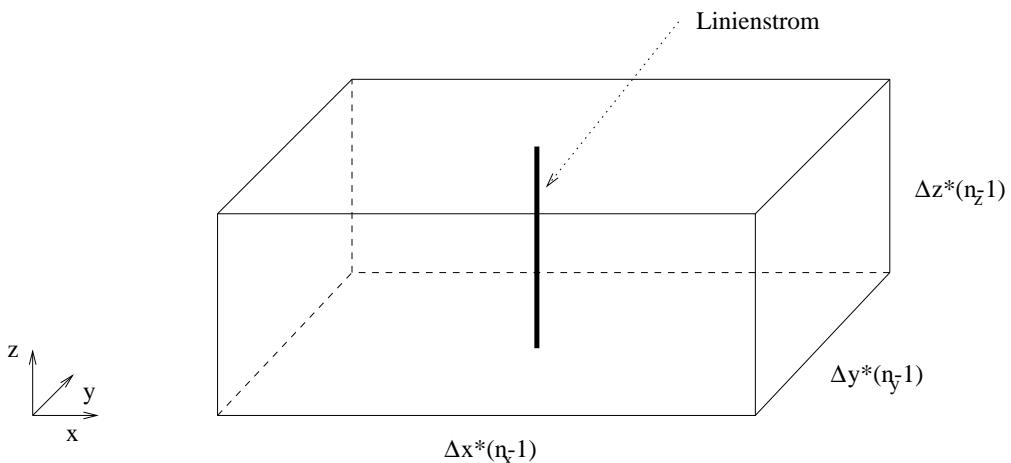


Abbildung 6.2: Geometrie des Rechengebietes

Dieser Liniestrom soll den zeitlichen Verlauf

$$\hat{\mathbf{j}}(t) = \hat{\mathbf{j}}_{\max} \exp -4 \left(\frac{t - \sigma_t}{\sigma_t} \right)^2 \quad (6.2)$$

besitzen. Mit $\sigma_t = 6 \times 10^{-10} \text{ s}$ und $0 < t \leq 2\sigma_t$ wird das Gebiet also für eine bestimmte Zeit gaußförmig angeregt. Wenn Sie noch Zeit haben, können Sie z.B. auch eine harmonische oder konstante Anregung implementieren, dies sei Ihnen jedoch freigestellt.

Wie im Theorieteil erläutert wurde, existiert bei expliziten Zeitschrittverfahren eine maximale Zeitschrittweite, bis zu der das System noch stabil ist. Wird diese Zeitschrittweite überschritten, so divergieren die Werte für $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$. Die maximale Zeitschrittweite soll durch drei verschiedene Methoden gefunden werden. Nutzen Sie bitte für die Implementierungen das teilweise vorgegebene Skript `versuch6.m`.

1. CFL-Kriterium

Bestimmen Sie für alle drei Gitter den maximal möglichen Zeitschritt anhand des CFL-Kriterium.

Da die Gitter hier äquidistant sind und eine homogene Materialverteilung mit $\epsilon_r = \mu_r = 1$ haben, gilt mit Hilfe der Vorbereitung für Δt :

$$\Delta t \leq \Delta t_{\max}^{CFL} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}$$

Die maximale Zeitschrittweite lautet also für:

Gitter 1: $\Delta t_{\max}^{CFL} = 2.353 \cdot 10^{-10}$

Gitter 2: $\Delta t_{\max}^{CFL} = 5.896 \cdot 10^{-11}$

Gitter 3: $\Delta t_{\max}^{CFL} = 2.621 \cdot 10^{-11}$

2. Stabilitätsuntersuchung mithilfe der Systemmatrix

Die maximale Zeitschrittweite soll nach Gleichung (6.31) bestimmt werden. Der größte Eigenwert einer Systemmatrix A kann mit Hilfe des Matlab-Befehls

`[Eigenvektoren, Eigenwerte] = eigs(A, 1)` gefunden werden.

Dadurch, dass im vorliegenden Versuch nur ein 2D-Rechengebiet mit elektrischen Randbedingungen betrachtet wird, gibt es nur eine z-Komponente des elektrischen Feldes. Berücksichtigt wird dies, indem die x- und y-Komponente von M_ϵ gleich 0 gesetzt wird. Des Weiteren besitzt die Matrix $M_{\mu^{-1}}$ nur x- und y-Komponenten. Es werden also zuerst mittels einer `for`-Schleife die x- und y-Komponenten von M_ϵ und die z-Komponente von $M_{\mu^{-1}}$ auf 0 gesetzt. Dann werden die Elemente A_{12} und A_{21} nach:

$$A_{12} = -M_{\mu^{-1}} C$$

$$A_{21} = M_\epsilon^{-1} C^T$$

und der größte Eigenwert dieser Matrix A mit `eig` berechnet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Schließlich wird mit $\Delta t_{\max} \leq \Delta t_{\max}^{CFL} = \frac{2}{\max|\lambda_{A,i}|}$ die maximale Zeitschrittweite berechnet, welche sich für die verschiedenen Gitter zu:

Gitter 1: $\Delta t_{\max}^{Eig_A} = 2.359 \cdot 10^{-10}$

Gitter 2: $\Delta t_{\max}^{Eig_A} = 5.897 \cdot 10^{-11}$

Gitter 3: $\Delta t_{\max}^{Eig_A} = 2.621 \cdot 10^{-11}$ ergeben.

3. Experimentelle Bestimmung mithilfe der Energie des Systems

Implementieren Sie hierzu zuerst ein Programm, das mit Hilfe des Leapfrog-Algorithmus den zeitlichen Verlauf eines elektromagnetischen Feldproblems ausgibt, also aus den jeweils alten Werten von $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ die neuen berechnet. Hierfür muss zusätzlich die Funktion

$$\left[\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} \right] = \text{leapfrog} \left(\hat{\mathbf{h}}^{(m)}, \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})}, \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)}, \mathbf{M}_{\mu^{-1}}, \mathbf{M}_{\epsilon}^{-1}, \mathbf{C}, \tilde{\mathbf{C}}, \Delta t \right) \quad (6.3)$$

für das Leapfrog-Update in jedem Zeitschritt implementiert werden. Finden Sie anschließend durch Ausgeben der Gesamtenergie (Gleichung (6.34)) in jedem Zeitschritt den maximal möglichen Zeitschritt des Verfahrens. Überlegen Sie sich dazu, wie sich die Energie verhält, wenn das Verfahren instabil ist. Vernachlässigen Sie dazu bei der Bestimmung der Energie zunächst, dass $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ nicht zum gleichen Zeitpunkt definiert sind².

Um mit Hilfe der Energie des Systems die maximale Zeitschrittweite zu bestimmen, muss zuerst eine Methode `leapfrog` entwickelt werden, die aus den alten Werten von $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ die neuen nach:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} &:= \hat{\mathbf{h}}^{(m)} - \Delta t M_{\mu^{-1}} C \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} \\ \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{3}{2})} &:= \left(1 - \Delta t^2 M_{\epsilon}^{-1} \tilde{\mathbf{C}} M_{\mu^{-1}} C \right) \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + \Delta t M_{\epsilon}^{-1} \left(\tilde{\mathbf{C}} \hat{\mathbf{h}}^m - \hat{\mathbf{j}}^{(m+1)} \right) \end{aligned}$$

berechnet.

Neben den Parametern für die Zeitsimulation wird der Linienstrom, der über $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}}_{max} \cdot e^{-4\left(\frac{t-\sigma_t}{\sigma_t}\right)^2}$ (Gauß) definiert ist als anonyme Funktion übergeben.

Anschließend wird nun für jeden Zeitschritt die Energie des Systems nach:

$$E^{(m+1)} = E^{(m)} = (\hat{\mathbf{e}}^{(m)})^T M_{\epsilon} \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + (\hat{\mathbf{h}}^{(m)})^T M_{\mu} \hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{1}{2})}$$

mit: $\hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} + \hat{\mathbf{h}}^{(m)})$ und $\hat{\mathbf{e}}^{(m)} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{e}}^{(m-\frac{1}{2})} + \hat{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})})$ berechnet.

Der Wert für $\hat{\mathbf{e}}^{(m-\frac{1}{2})}$ wird mit null initialisiert.

Dabei wird ausgehend von Δt_{max}^{CFL} die Zeitschrittweite sukzessiv solange vergrößert bis das Verfahren instabil wird, i.e. die Energie, die in jeder Iteration ausgegeben wird nicht mehr gegen einen Endwert konvergiert. Die Beobachtung des Verfahrens erfolgt über einen Zeitraum von 0 bis 18σ . Es ergibt sich:

Gitter 1: $\Delta t_{max} = 1.027 \cdot \Delta t_{max}^{CFL}$

Gitter 2: $\Delta t_{max} = 1.001 \cdot \Delta t_{max}^{CFL}$

Gitter 3: $\Delta t_{max} = 1 \cdot \Delta t_{max}^{CFL}$

Bei Gitter 3 ist eine Erhöhung der Zeitschrittweite kaum möglich ohne die Stabilität des Verfahren zu verlieren.

Nun sollen die gefundenen maximalen Zeitschrittweiten für die verschiedenen Gitter verglichen und interpretiert werden.

4. Erstellen Sie für den Vergleich eine Tabelle und kommentieren Sie, welche die exakte Methode ist. Von welchen Parametern hängt die maximale Zeitschrittweite ab? Hat die Anregung einen Einfluss auf die Stabilität des Zeitschrittverfahrens?

	CFL	EigA	Energie
Gitter 1	$2.353 \cdot 10^{-10}$	$2.359 \cdot 10^{-10}$	$2.416 \cdot 10^{-10}$
Gitter 2	$5.896 \cdot 10^{-11}$	$5.897 \cdot 10^{-11}$	$5.902 \cdot 10^{-11}$
Gitter 3	$2.621 \cdot 10^{-11}$	$2.621 \cdot 10^{-11}$	$2.621 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 6.1: Die maximalen Zeitschrittweiten ermittelt nach den zuvor aufgelisteten Methoden, zusammengefasst.

Es interessiert die maximal mögliche Schrittweite bei der das Verfahren stabil angewendet werden kann. Die Werte Δt_{max} die mit der Berechnung der Eigenwerte von A erhalten werden sind größer, als diejenigen des Courant-Friedrichs-Lowy Kriteriums. Somit ist die Methode nach der Bestimmung der Eigenwerte der Systemmatrix insofern exakter, als dass sie näher an die maximale Zeitschrittweite gelangt als das CFL Kriterium. Die gleiche Argumentation führt auch dazu, dass die Methode der Energiebetrachtung exakter ist, als die, die Gebrauch von den Eigenwerten der Matrix A macht. Es kann kein Einfluss der Größe der Anregung auf die Stabilität des Zeitschrittverfahrens beobachtet werden.

5. Anstelle der Energie soll auch der Betrag des E-Feldes grafisch nach jedem Zeitschritt ausgegeben werden. Somit erhält man den zeitlichen Verlauf einer sich in x - und y -Richtung ausbreitenden Welle. Wählen Sie die Simulationszeit so, dass die Welle den Rand des Rechengebietes gerade noch nicht erreicht und speichern Sie sich den Plot des Feldes nach dem letzten Zeitschritt für die Ausarbeitung. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

Gewählt wurde Gitter 2 mit dem Ende der Simulationszeit bei 2.5σ .

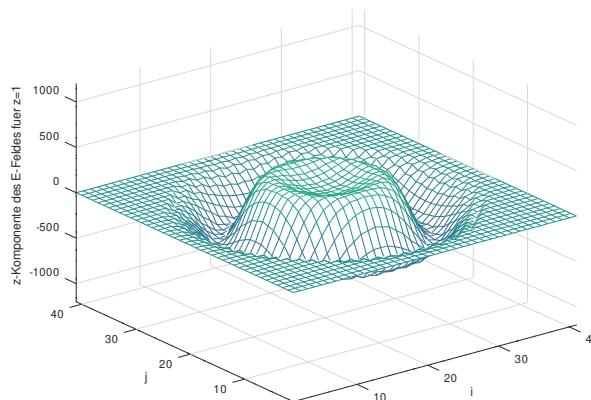


Abbildung 6.3: Der Betrag des E-Feldes im letzten Zeitschritt über den Abmessungen j und i.

Kurz vor dem in Abbildung 6.3 dargestellten Zeitpunkt ist die z-Komponente des elektrischen Feldes genau

an dem Ort maximal, an dem die Anregung definiert ist, nämlich in der Mitte der Rechendomäne. Da der Anregungsstrom als Gaußpuls definiert ist, klingt er nach einiger Zeit wieder ab, was sich darin äußert, dass die z-Komponente des Feldes ebenso kleiner wird, was in Abbildung 6.3 als 'Delle' in der Mitte des Feldbildes zu erkennen ist.

6. Bestimmen Sie nun die Energie mithilfe einer geeigneten Mittelung (siehe Abschnitt 6.2.4) und erstellen Sie einen Plot, der die Energieerhaltung verdeutlicht. Warum sinkt die Energie nach Erreichen des Maximalwertes wieder ab?

Die Bestimmung der Energie erfolgt über die Beziehung:

$$E^{(m+1)} = E^{(m)} = (\bar{\mathbf{e}}^{(m)})^T M_\varepsilon \bar{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})} + (\hat{\mathbf{h}}^{(m)})^T M_\mu \hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{1}{2})}.$$

Dabei sind über $\hat{\mathbf{h}}^{(m+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{h}}^{(m+1)} + \hat{\mathbf{h}}^{(m)})$ und $\bar{\mathbf{e}}^{(m)} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{e}}^{(m-\frac{1}{2})} + \bar{\mathbf{e}}^{(m+\frac{1}{2})})$ die interpolierten Größen, i.e. die elektrische Gitterspannung auf ganzer und der magnetische Gitterfluss auf halber Schrittweite gegeben.

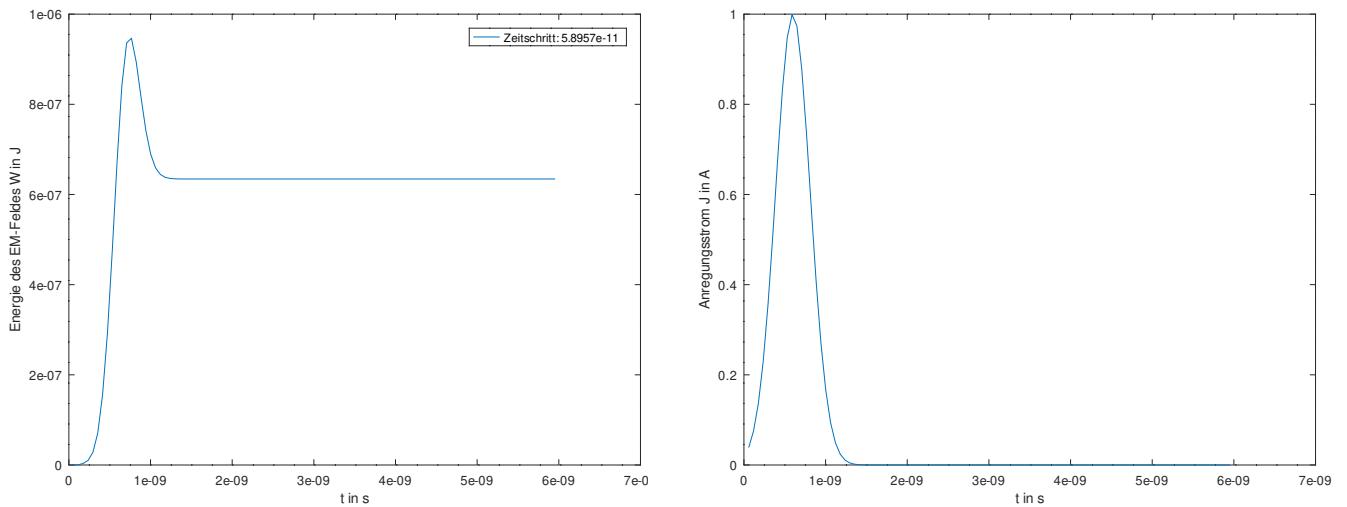


Abbildung 6.4: Abgebildet ist sowohl der zeitliche Verlauf der Energie des Feldes links, sowie der des Anregungsstromes rechts.

Im linken Plot der Abbildung 6.4 ist erkennbar, dass die Energie nach erreichen ihres Maximalwertes kurzzeitig absinkt und dann über das verbleibende Zeitintervall konstant bleibt. Der Grund für dieses Verhalten kann im Plot daneben abgelesen werden. Die Anregung erfolgt nach Definition nicht konstant, sondern über einen Gauß Puls, welcher nach kurzer Zeit wieder abklingt, womit dem System auch keine Energie mehr zugeführt wird. Der Anregungsstrom sinkt also nach gewisser Zeit ab, weshalb auch die Energie des Feldes abnimmt. Kommt der Strom zum erliegen, i.e. dem System wird keine Energie mehr zugeführt, so stellt sich eine konstante Feldenergie ein.

7. Bestimmen Sie abschließend die Leistung der Quelle und des Gesamtsystems und stellen Sie beide Größen in einem Plot dar.

Die Leistung der Quelle wird über das Produkt von elektrischer Gitterspannung und Anregungsstrom erhalten. Um die Leistung des Gesamtsystems zu ermitteln muss also die Energie des Systems nach der Zeit abgeleitet werden. Dies geschieht näherungsweise mit Hilfe des zentralen Differenzenquotienten, womit sich letztlich folgender Graph ergibt:

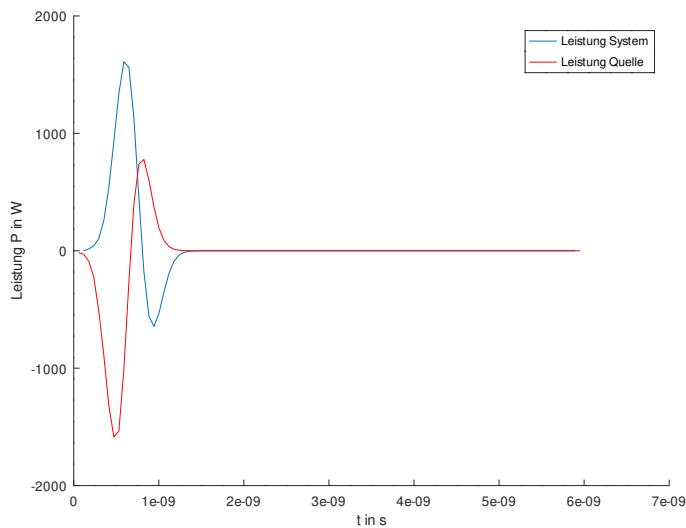


Abbildung 6.5: Dargestellt ist die Leistung des Systems in blau und die der Quelle in rot.

Ist also die Änderung der Quellenergie minimal, so ist die Änderung der Energie im System maximal und umgekehrt. Wenn eine der beiden Energien keiner zeitlichen Änderung unterliegt, so gilt das auch für die jeweils Andere.

6.3 Fazit

Im Rahmen des Versuches wird das Leapfrog Verfahren genutzt um eine numerische Lösung der Maxwellgleichungen im Zeitbereich zu erhalten. Es ist zu beachten, dass die Stabilität des Verfahrens von der gewählten Schrittweite abhängig ist, die im ersten Teil des Versuches ermittelt wurde. Die Simulation einer durch einen gaußförmigen Liniенstrom angeregten Zylinderwelle erfolgte im zweiten Teil.

7 HF-Zeitbereich 2: Leitungen und Ports

Mit Hilfe der oben beschriebenen Ansätze sollen die Eigenschaften einer einfachen Koaxialleitung untersucht werden. Die Leitung wird Ihnen – bereits diskretisiert – in zwei Varianten in Form der Materialmatrizen M_ϵ und M_μ^{-1} vorgegeben. Im ersten Fall handelt es sich um eine homogene Leitung, im zweiten Fall enthält die Leitung einen dielektrischen Einsatz (siehe Abbildung 7.1). Die Leitung selbst hat einen quadratischen

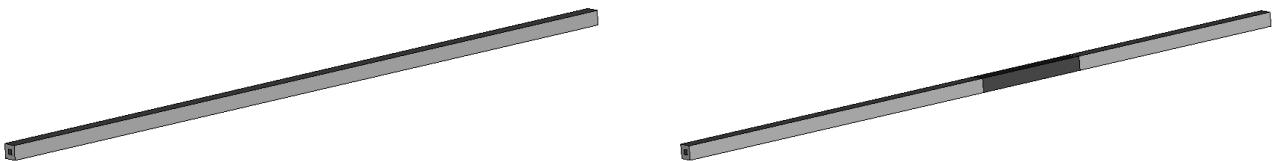


Abbildung 7.1: Verlustfreie Koaxialleitung im Versuch. Es werden zwei Fälle vorgegeben: Eine homogene Koaxialleitung (links) und eine Koaxialleitung mit Einsatz (rechts).

Querschnitt mit ebenfalls quadratischem Innenleiter. Die Kantenlängen des Querschnitts betragen 3 cm, beziehungsweise 1 cm, die Leitungslänge ist 150 cm. Der Einsatz reicht von 75 cm bis 100 cm. Alle Materialien sind als ideal angenommen. Der Innenleiter ist perfekt elektrisch leitend, die Dielektrika sind verlustfrei, im Fall der homogenen Leitung mit einem Wert von $\epsilon_r = 1.3$, der Einsatz mit $\epsilon_r = 10$. Die relative Permeabilität beträgt überall $\mu_r = 1$. Der Außenleiter wird durch einen, bereits in die vorgegebenen Matrizen eingearbeiteten, elektrischen Rand modelliert. Das Grundmaterial wurde so gewählt, dass der Wellenwiderstand der Leitung 50Ω beträgt.

An den Stirnseiten (vgl. Abbildung 7.2) wurden, ebenfalls schon in den Matrizen enthalten, magnetische Randbedingungen angenommen. Die gesamte Struktur wurde mit einem homogenen Gitter mit $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1 \text{ cm}$ diskretisiert. Die Struktur enthält damit $4 \times 4 \times 151$ Gitterpunkte. Das Gitter wurde für beide Leitungen identisch gewählt. Alle Vorüberlegungen sowie geschriebene Programm Routinen können direkt auf die Matrizen beider Strukturen angewendet werden. Als Anregung soll auf der vorderen Stirnseite ein Strom zwischen Innen- und Außenleiter eingeprägt werden. Die entsprechenden Kanten werden also im Laufe des Versuches mit einem Strom angeregt.

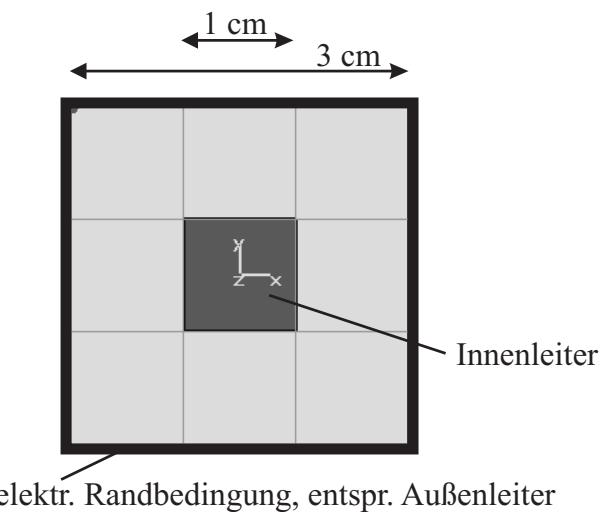


Abbildung 7.2: Stirnseite der Koaxialleitung mit Diskretisierungsgitter.

7.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Weshalb ist es sinnvoll, für die Stirnseiten der Leitungen magnetische Randbedingungen zu wählen?

In der Praxis würden weder magnetische noch elektrische Randbedingungen gewählt werden, sondern ABC (Absorbing Boundary Condition). Hier werden dennoch magnetische Randbedingungen an der Stirnseite gewählt, weil das elektrische Feld am Ende des Leiters sonst verzerrt würde.

2. Das Gitter ist ein kanonisches kartesisches Gitter. Welchen Indizes entsprechen diejenigen Kanten in der vorderen und der hinteren Stirnfläche, die jeweils Innen- und Außenleiter miteinander verbinden? Welchen Richtungssinn haben sie?

Die Kanten, die Innen- und Außenleiter miteinander verbinden, sind in Abbildung 7.3 dargestellt. Dabei wurden die Kanten nach kanonischen Indizierungsschema nummeriert. Die Kante an Punkt i in x -Richtung wird demnach mit L_i und die Kante in y -Richtung am gleichen Punkt mit L_{i+n_p} bezeichnet.

3. Nehmen Sie die erste Kante in x -Richtung, die Innen- und Außenleiter miteinander verbindet und finden Sie die Indizes der entsprechenden Kante, jeweils um einen z -Gitterschritt nach hinten versetzt durch alle 151 Ebenen.

Die erste Kante in x -Richtung, welche Innen- und Außenleiter miteinander verbindet, ist nach kanonischen Indizierungsschema die Kante mit Index 5. Folglich lassen sich die Indizes der Kanten, die in z -Richtung verschoben mit:

$$n = 5 + (k - 1) \cdot M_z, k \in [1, 151] \text{ berechnen.}$$

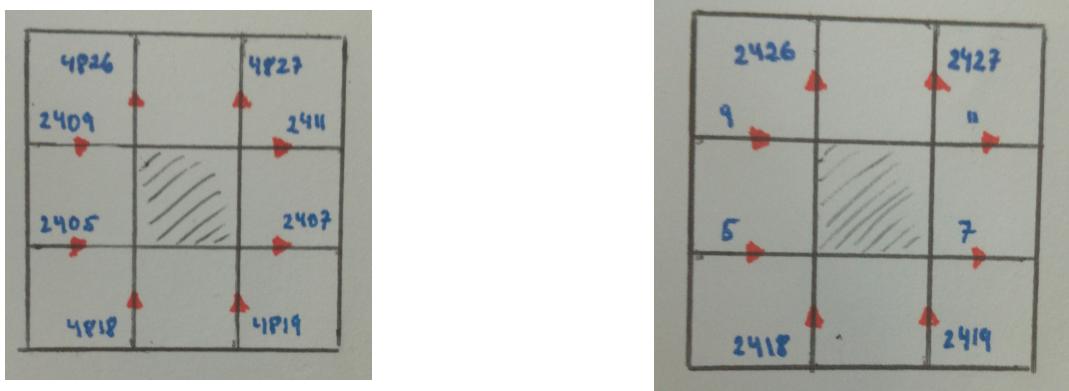


Abbildung 7.3: Querschnitt des Leiters, wobei rechts die Vorderseite und links die Rückseite abgebildet ist.

4. Geben Sie die Funktion eines stückweise linearen Trapezpulses in Abhängigkeit der Koordinaten der Knickpunkte an.

Die Funktion wird abschnittsweise definiert:

$$I_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & 0 \leq t < t_1 \\ 1, & t_1 \leq t < t_2 \\ \frac{t_3-t}{t_3-t_2}, & t_2 \leq t < t_3 \\ 0, & t \geq t_3 \end{cases}$$

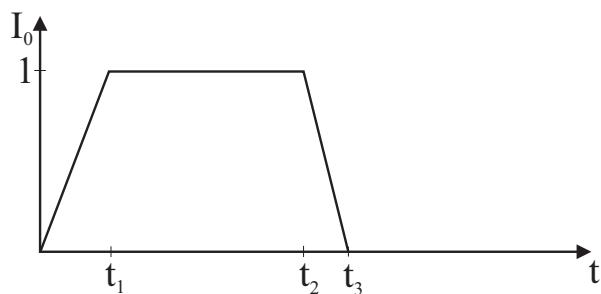


Abbildung 7.4: Trapezpuls

5. Bestimmen Sie allgemein die Konstanten σ und t_0 des Gaußpulses in Abhängigkeit der Maximalfrequenz f_{\max} und für t_0 zusätzlich auch in Abhängigkeit von σ . Bei $f = f_{\max}$ soll der Wert des Spektrums genau 1 % des Maximalwertes ($\sigma\sqrt{2\pi}$) betragen. Das zugehörige Zeitsignal soll zum Zeitpunkt $t = 0$ nur 0,1 % seines Maximalwertes betragen.

Für $f = f_{\max}$ soll der Gaußpuls 1% seines Maximalwertes von $\sigma\sqrt{2\pi}$ betragen.

Mit $F(j\omega) = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} e^{-j\omega t_0}$ folgt aus der Bedingung:

$$F(j2\pi f_{max}) \stackrel{!}{=} 0,01\sigma\sqrt{2\pi}$$

$$F(j2\pi f_{max}) = \omega e^{-j\omega t_0}$$

$$\|F(j\omega)\| = \sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{\frac{-\sigma^2 4\pi^2 f_{max}^2}{2}} \cdot 1 \text{ und mit } \|e^{-j\omega}\| = 1 \text{ ergibt sich:}$$

$$F(j2\pi f_{max}) = \omega e^{-j\omega t_0} \cdot \|e^{-j\omega}\| \text{ sodass gelten muss:}$$

$$\|F(j\omega)\| \stackrel{!}{=} 0,01\sigma\sqrt{2\pi} \text{ so ergibt sich für } \sigma:$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\ln 10}}{\pi f_{max}}$$

Für $f(t) = e^{\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}$ soll gelten $f(0) = 0,001 \cdot 1$

Es folgt:

$$f(0) = e^{\frac{t_0^2}{2\sigma^2}} \text{ woraus sich nach } t_0 \text{ umgestellt folgendes ergibt:}$$

$$t_0 = \sqrt{6\sigma^2 \ln 10}$$

6. Berechnen Sie die maximale Zeitschrittweite nach dem CFL-Kriterium.

Das CFL Kriterium lautet:

$$\Delta t \leq \Delta t_{max}^{CFL} = \min_j (\sqrt{\mu_j \epsilon_j} \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{\Delta x_j^2} + \frac{1}{\Delta y_j^2} + \frac{1}{\Delta z_j^2}}{}})$$

Es ergibt sich für $\mu_r = 1$, $\epsilon_r = 1.3$ und $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1\text{cm}$:

$$\Delta t_{max}^{CFL} = 2,2 \cdot 10^{-11}\text{s}$$

7.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

Die vorliegende Beschreibung soll nur die grobe Vorgehensweise während des Versuchs vorgeben. Sind die grundlegenden Dinge wie Pulsgenerierung, modifizierter Leapfrog und visuelle Darstellung implementiert, lassen sich verschiedene Pulsformen, verschiedene Anregungen, Leitungsabschlüsse und die beiden Leitungen beliebig miteinander kombinieren. Prinzipiell soll die Fortpflanzung eines elektrischen Pulses über die vorgegebene Struktur visualisiert werden. Dazu werden in jedem Zeitschritt die elektrischen Spannungen an hintereinander liegenden Kanten über die z-Achse aufgetragen. Zum selbstständigen Experimentieren soll hierbei durchaus ermutigt werden. Der Hauptbestandteil der Implementierung in diesem Versuch soll in dem Skript `versuch7.m` erfolgen.

1. Verwenden Sie die Leapfrog-Routine aus dem letzten Versuch. Nutzen Sie hierfür die bereits teilweise gegebene Methode `leapfrog.m`, indem Sie den Eingabe-Parameter `Rmat` zunächst ignorieren. Regen Sie eine beliebige Kante, die auf der vorderen Stirnfläche Innen- und Außenleiter verbindet, an. Anregungssignal soll ein Trapezpuls mit Anstiegs- und Abfallzeit $t_1 = t_3 - t_2 = 0.5 \text{ ns}$ und einer Haltezeit $t_2 - t_1 = 0.7 \text{ ns}$ sein. Es sollen zunächst 1000 Zeitschritte berechnet werden. Speichern sie die elektrische Spannung der von Ihnen ausgewählten Kante in jeder der 151 Ebenen ab. Plotten Sie damit das elektrische Feld zwischen Innen- und Außenleiter in Abhängigkeit von z und verfolgen Sie den Verlauf über die Zeit (als Film) mithilfe des `drawnow`-Befehls.

Für die Anregung einer beliebigen Kante auf der Stirnseite mit einem Trapezpuls, muss dieser erst definiert. Der Trapezpuls wird gemäß der Vorbereitung nach

$$I_0(t) = \begin{cases} \frac{t}{t_1}, & 0 \leq t < t_1 \\ 1, & t_1 \leq t < t_2 \\ \frac{t_3-t}{t_3-t_2}, & t_2 \leq t < t_3 \\ 0, & t \geq t_3 \end{cases}$$

mit der angegebenen Anstiegs-, Abfalls- und Haltezeit definiert.

Dieses Signal wird in eine Zeile einer $\hat{\mathbf{j}}$ -Matrix mit der Größe $3n_p \times \text{time}$ geschrieben. Über die Zeilen wird also gesteuert, welche Kante angeregt werden soll und die Spalten zeigen den zeitlichen Verlauf des Signals. Dann werden die Zeitschritte `nt = 1000` (vorgegeben) und die Zeitschrittweite $\Delta t_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-11} \text{ s}$ (nach dem CFL-Kriterium) gesetzt. Daraus wird dann der Zeitvektor `time` gebildet, der die Elemente von 0 bis $nt * \Delta t_{\max}$ enthält. Über diesen Zeitvektor wird dann eine `for`-Schleife gebildet, in der für jeden Zeitschritt nach der `Leapfrog`-Methode die Werte für $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{h}}$ berechnet werden.

Aus $\hat{\mathbf{e}}$ kann dann nach der Gleichung $U_R^{(n)} = R \cdot I_R^{(n)} = \hat{\mathbf{e}}_i^{(n+\frac{1}{2})}$ für jede Kante entlang der z-Achse, ausgehend von der Kante, an welcher angeregt wurde, die Spannung berechnet werden.

Um für jede Kante entlang der z-Achse einen Spannungswert zu berechnen, wird eine weitere `for`-Schleife benötigt. Mit dieser wird von der Kante der Anregung auf der Stirnfläche (hier Kante mit Index=5 gewählt) bis zum Ende der Leitung entlang der z-Achse iteriert und die jeweiligen Werte aus $\hat{\mathbf{e}}$ der Spannung zugewiesen. Die Berechnungsvorschrift der Indizes wurde dabei bereits in der Vorbereitung hergeleitet und lautet:

$$n = 5 + (k - 1) \cdot M_z, \quad k \in [1, 151]$$

Schließlich kann die Spannung mit Hilfe des `drawnow` Befehls über die z-Achse geplottet werden. In Abbildung 7.5 ist im linken Graph ist ein Ausschnitt aus dem Plot dargestellt und es ist zu sehen wie sich die Spannung nach der Anregung entlang des Leiters ausbreitet. Am Ende der Leitung wird das Signal voll reflektiert, und wandert wieder zum Anfang der Leitung, was im rechten Graph zu sehen ist. Am Beginn der Leitung wird das Signal wiederum voll reflektiert. Dieses Verhalten folgt aus dem Kurzschluss an den Leitungsenden, da ein Kurzschluss an einem Leitungsende einen Reflexionskoeffizienten von $\Gamma = -1$ ergibt. Das hinlaufende Signal entspricht hier also dem rücklaufenden Signal.

Das Anregungssignal ist im unteren Graph dargestellt.

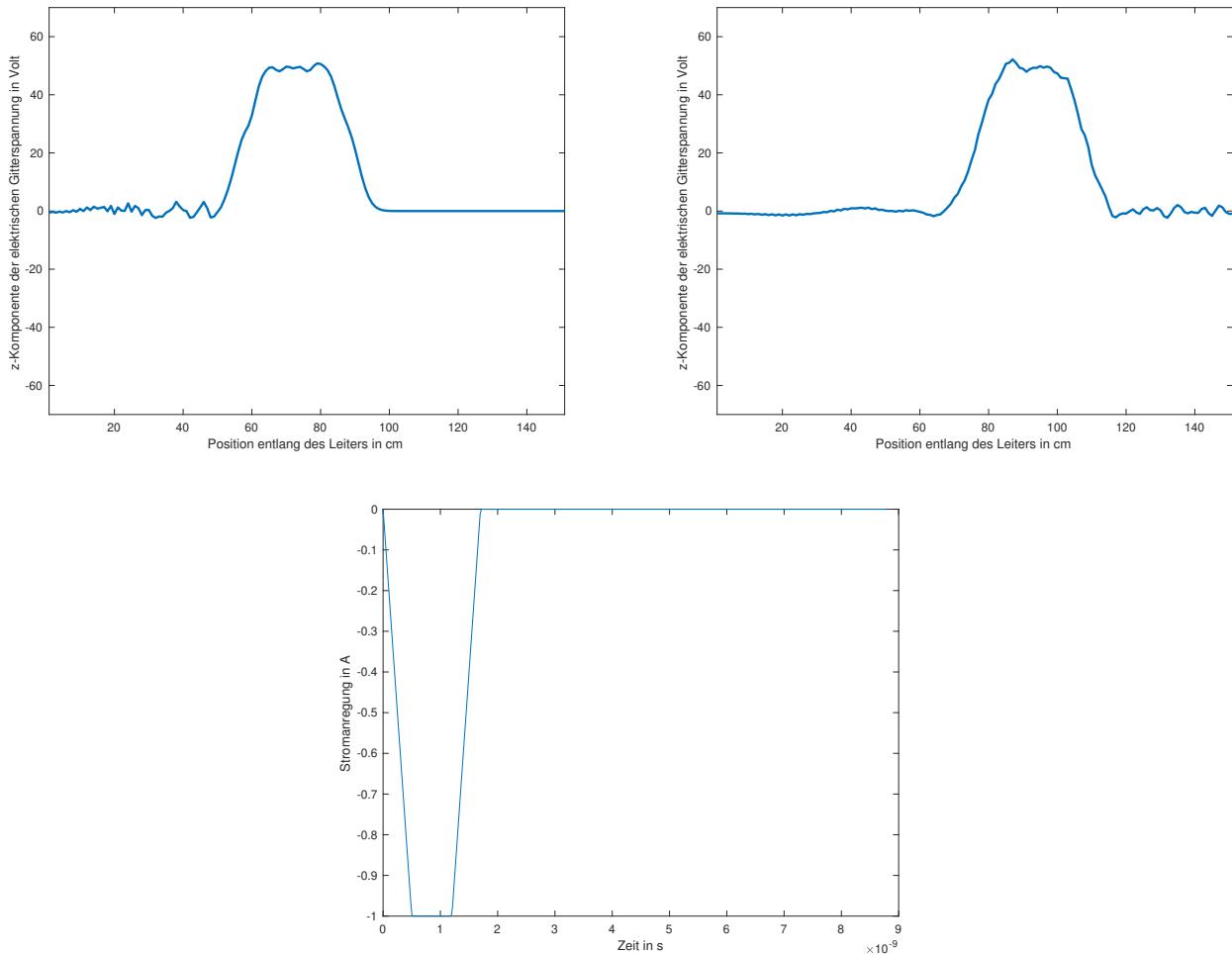


Abbildung 7.5: Dargestellt sind hin- und rücklaufende Spannung und das Anregungssignal

2. Variieren Sie Ihre Leapfrog-Routine so, dass sie im Folgenden auch konzentrierte Elemente berücksichtigen kann. Aus der Leitungstheorie ist bekannt, dass der Reflexionsfaktor Γ bei einem Abschluss Z_2 am Ende der Leitung gerade

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w}, \quad (7.1)$$

mit dem Wellenwiderstand Z_w beträgt. Für einen reflexionsfreien Abschluss soll die Leitung hier also mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen werden, indem einer der Kanten in der hinteren Stirnfläche ein Widerstand von 50Ω zugeordnet wird. Die Anzahl der Zeitschritte kann nach eigenem Ermessen verringert werden. Der Durchlauf des Pulses durch die Leitung soll auch in den weiteren Aufgabenteilen als Film betrachtet werden.

Hinweis: Benutzen Sie zum Berechnen der inversen Matrix in (7.6) den Befehl `nullInv`.

In diesem Versuchsteil muss nun die Matrix R in der Leapfrog-Methode berücksichtigt werden, da nun die

Leitung mit ihrem Wellenwiderstand $Z_w = 50\Omega$ abgeschlossen werden soll.

Dazu wird die Berechnungsvorschrift für $\tilde{\mathbf{e}}$ in Leapfrog-Methode folgendermaßen abgeändert:

$$\tilde{\mathbf{e}}^{(n+\frac{3}{2})} = (R^{-1} + \frac{M_e}{\Delta t})^{-1} (\frac{M_e}{\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}^{(n+\frac{1}{2})} + \tilde{C} \tilde{\mathbf{h}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{j}}(n+1))$$

R ist eine $3n_p \times 3n_p$ große Diagonalmatrix, welche auf allen Kanten, die ein konzentriertes Element darstellen, den Eintrag des Widerstandswertes enthält. Vorliegend soll der Abschluss der Leitung nur über eine Kante erfolgen, weshalb in einer eigenen Methode `ohmic_termination_single` nur ein Diagonalelement der Matrix R dem Wert von Z_w zugewiesen wird. Der Index dieses Elements muss dabei einer Kante auf der Rückseite entsprechen, die Innen- und Außenleiter verbindet.

Der weitere Versuchsablauf ist wie zuvor nur mit dem Unterschied, dass über eine `if`-Abfrage festgelegt wird, welche Methode zur Berechnung von R verwendet wird und damit wie die Leitung abgeschlossen wird.

Beim Abschluss einer einzelnen Kante mit dem Widerstand Z_w wird die Amplitude des rücklaufenden Signals deutlich kleiner. Bei einer perfekten Anpassung sollte der Reflexionskoeffizient $\Gamma = 0$ ergeben und es dürfte keine rücklaufende Welle auftreten. Da hier jedoch der Abschluss nur an einer Kante erfolgt, ist dieser nicht perfekt und es entsteht ein rücklaufendes Signal, welches aber eine deutlich kleinere Amplitude hat. Der Anfang der Leitung bleibt kurzgeschlossen, weshalb dort wieder das Signal perfekt reflektiert wird. Hier ändert sich also die Amplitude wieder nicht, das Signal bleibt erhalten.

In Abbildung 7.6 ist die Spannung dargestellt, nachdem das Signal das Ende der Leitung erreicht hat.

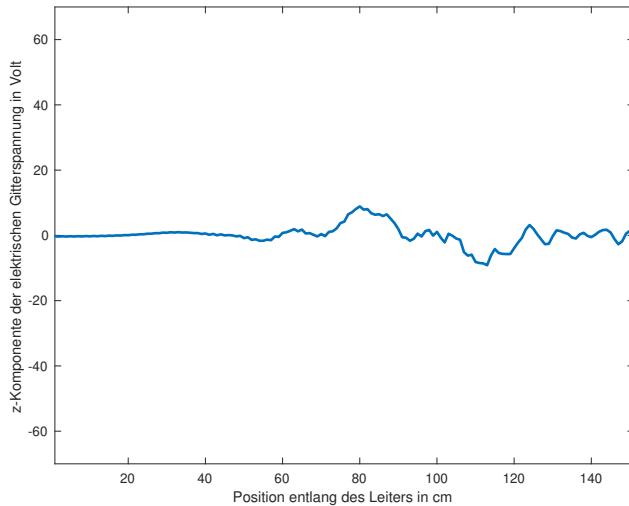


Abbildung 7.6: Spannung nach Reflexion mit dem Abschluss an einer Kante

3. Der Leitungsabschluss kann verbessert werden, indem der Gesamtwiderstand auf die acht Kanten verteilt wird. Vergleichen Sie das Reflexionsverhalten mit dem in der vorherigen Teilaufgabe. Erklären Sie die Verbesserung!

Um den Widerstand auf die acht Kanten, die Innen- und Außenleiter auf der Rückseite verbinden, zu verteilen, wird wieder eine eigene Methode `ohmic_termination_distributed_front_and_back` benutzt. Die Diagonalelemente der Matrix, die den gleichen Index, wie die gesuchten Kanten auf der Rückseite haben, werden

gleich $8R$ gesetzt, der Rest der Einträge bleibt wieder 0. Nun kann in `versuch7.m` wieder mit der `if`-Abfrage der gewünschte Leitungsabschluss gewählt werden.

Im Plot ist zu sehen, wie sich das gleiche Signal mit Amplitude 50 V wie zuvor entlang der Leitung ausbreitet. Beim Leitungsende wird nun wie erwartet kein Signal reflektiert, sondern das ganze Signal wird transmittiert und die Spannung beträgt danach ca. 0 V. In Abbildung 7.7 ist die Spannung dargestellt, nachdem das Signal das Ende der Leitung erreicht hat.

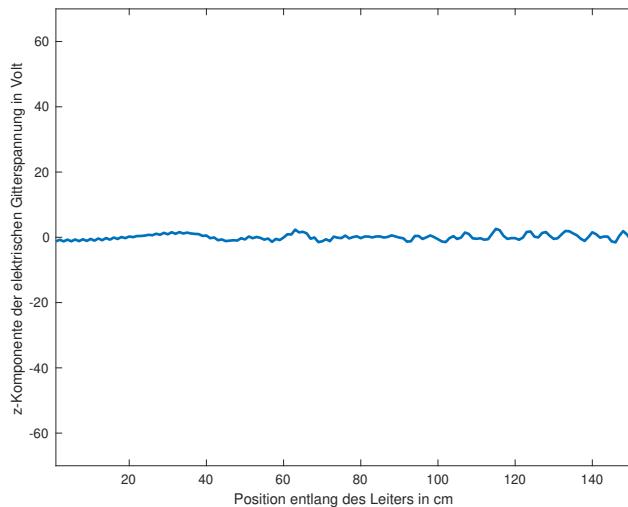


Abbildung 7.7: Spannung nach Reflexion mit dem Abschluss an allen Kanten der Rückseite, die Innen- und Außenleiter miteinander verbinden .

4. Nun soll auch die Anregung symmetriert werden. Teilen Sie den Anregungsstrom auf die acht Kanten der vorderen Stirnfläche auf. Schließen Sie auch den vorderen Port reflexionsfrei ab. Zeigen Sie die Verbesserung durch diese Maßnahme.

Für den reflexionsfreien Abschluss des vorderen Ports werden in `ohmic_termination_distributed_front_and_back` die Einträge auf der Diagonalen der Matrix R gesetzt, welche den Indizes der Kanten, die Innen- und Außenleiter auf der vorderen Seite verbinden.

Für die symmetrierte Anregung wird das Signal des Trapezpulses nicht nur in eine Zeile der $\hat{\mathbf{j}}$ -Matrix geschrieben, sondern in die acht Zeilen, deren Index wieder den Kanten zwischen Innen- und Außenleiter auf der Stirnseite entsprechen.

Auch hier kann in `Versuch7.m` wieder über eine `if`-Abfrage die Anregung ausgewählt werden.

Im Abbildung 7.8 ist zu sehen, dass durch die symmetrierte Anregung das Signal viel glatter ist. Durch die gleichzeitige Anpassung des Eingangs hat das Signal eine kleinere Amplitude. Am Ende der Leitung findet wie im rechten Graph zu sehen, keine Reflexion statt und das Signal verschwindet wieder annähernd.

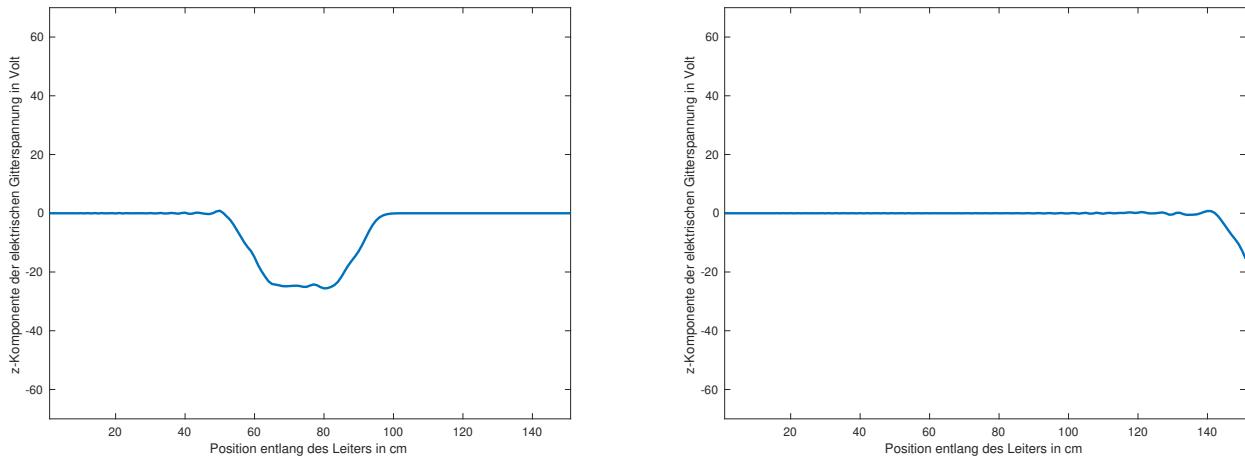


Abbildung 7.8: Dargestellt sind hinlaufende Spannung und die Spannung beim Erreichen des Leitungsende bei symmetrisierter Anregung und Abschluss an Anfang und Ende des Leiters.

5. Verwenden Sie nun anstelle des Trapezpulses einen Gaußpuls mit $f_{max} = 1 \text{ GHz}$. Was fällt bei der Ausbreitung im Vergleich zum Trapezpuls auf?

Für die Anregung mit dem Gaußpuls wird dieser nach

$$f(t) = e^{\frac{-(t-t_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{mit } t_0 = \sqrt{6\sigma^2 \ln 10} \text{ und } \sigma = \frac{\sqrt{\ln 10}}{\pi f_{max}}$$

in einer eigenen Methode `gauss_pulse` definiert.

In `versuch7.m` kann also nun mit den `if`-Abfragen zwischen verschiedenen Anregungssignalen, welche Kanten angeregt und wie Leitungsenden abgeschlossen werden sollen, gewählt werden.

In Abbildung 7.9 ist zu sehen, dass die Spannung beim Gaußpuls im Vergleich zum Trapezpuls nochmal glatter ist.

6. Verwenden Sie außer der homogenen Leitung nun auch die inhomogene. Beachten Sie die Pulsform und Ausbreitungsgeschwindigkeit innerhalb des dielektrischen Einsatzes.

Bei der inhomogenen Leitung ist ein Einsatz mit $\epsilon_r = 10$, der von 75cm bis 100cm reicht, weshalb dort ein Materialübergang stattfindet. Im Plot ist nun gut zu sehen, dass vom hinlaufende Signal beim Anfang des Einsatzes ein Teil reflektiert und ein anderer transmittiert wird. Beim Ende des Einsatzes passiert genau das gleiche wieder, sodass ein Teil des Signals zwischen Einsatzanfang und Einsatzende hin und her reflektiert. Je nach Abschluss des Ein- und Ausgang passiert nun auch noch folgendes:

Wenn die Leitung mit keinem Widerstand abgeschlossen ist, reflektieren die Signalanteile am Ein- und Ausgang und am Einsatz werden von beiden Seiten immer wieder Signalanteile in den Bereich des Einsatzes transmittiert, an diesem reflektiert und aus diesem heraus transmittiert. Die Signalanteile überlagern sich also

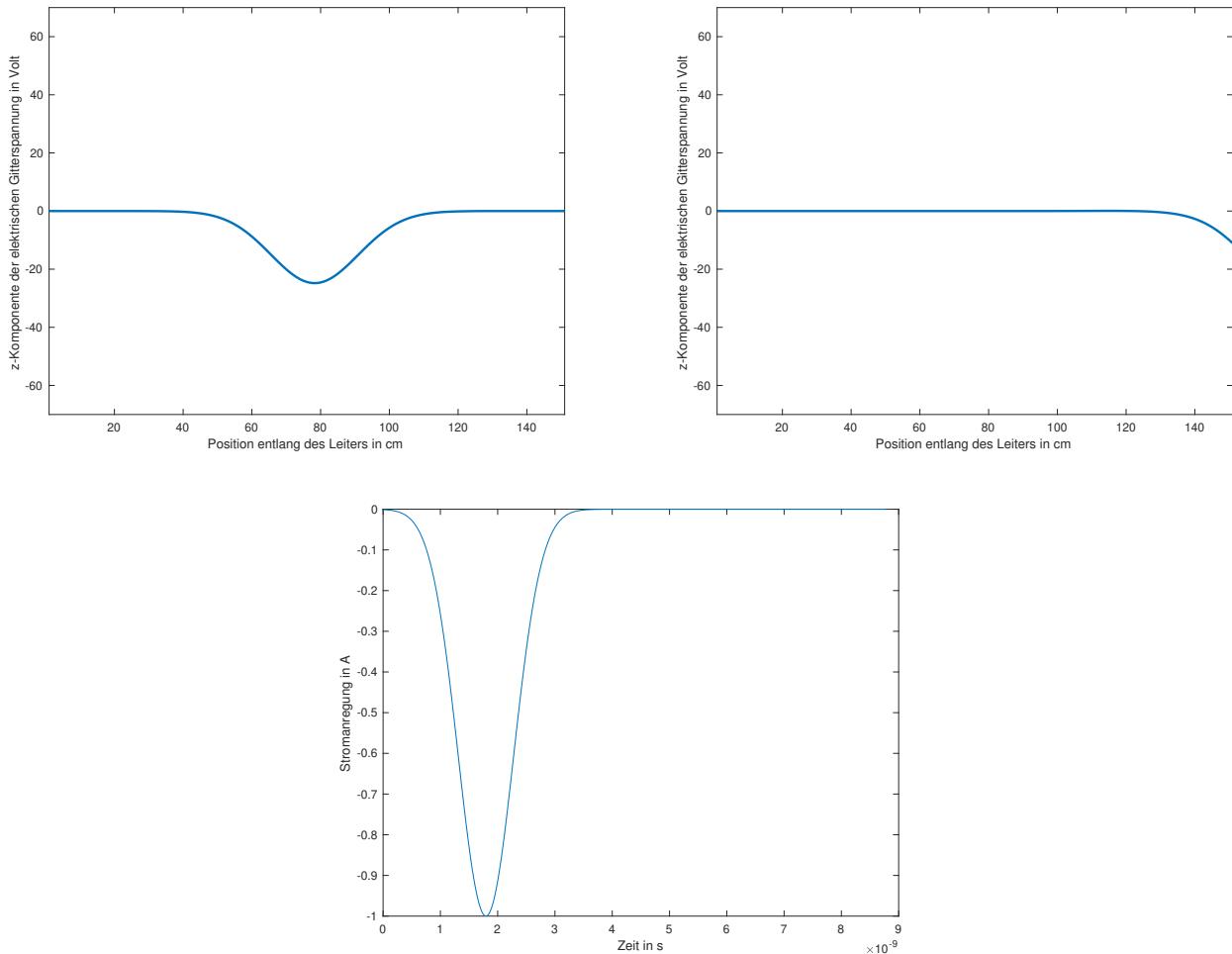


Abbildung 7.9: Dargestellt sind hinlaufende Spannung (links) und die Spannung beim Erreichen des Leitungsende (rechts) bei symmetrisierter Anregung mit einem Gaußpuls und Abschluss am Anfang und Ende des Leiters und das Signal des Gaußpulses selbst.

mehrfach und das ursprüngliche Signal ist nicht mehr zu erkennen.

Wenn die Leitung am Ende nur an einer Kante abgeschlossen ist, passiert ähnliches wie beim Kurzschluss, nur dass am Leitungsende die Reflektion deutlich schwächer ist.

Ist die Leitung am Ende an allen acht Kanten abgeschlossen, passiert erstmal ähnliches wie beim Kurzschluss. Der Unterschied ist, dass alle Signalanteile die das Ende des Einsatzes verlassen, am Ende der Leitung nicht reflektiert werden und so folglich von dieser Seite keine weiteren Signalanteile den Einsatz erreichen können. Beim Kurzschluss am Anfang der Leitung bleibt das Signal unverändert, doch bei jedem Auftreffen des Signals auf die Grenzschicht wird ein Teil transmittiert, der nicht wieder gewonnen werden kann, sodass das komplette Signal irgendwann die Leitung verlassen hat.

Beim Abschluss an Anfang und Ende der Leitung wird folglich das Signal dort auch nicht reflektiert, sodass der Anteil des Signals, welches den Einsatz verlässt, verschwindet. Es geschieht genau das gleiche nun auf beiden Seiten, was vorher nur am Ende der Leitung aufgetreten ist, sodass das Signal schon nach kurzer Zeit die Leitung verlassen hat.

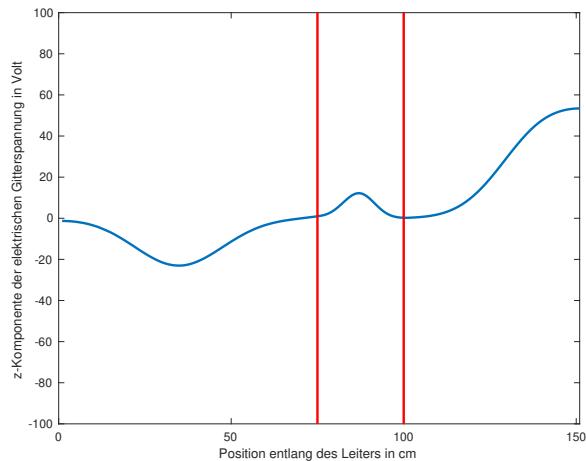
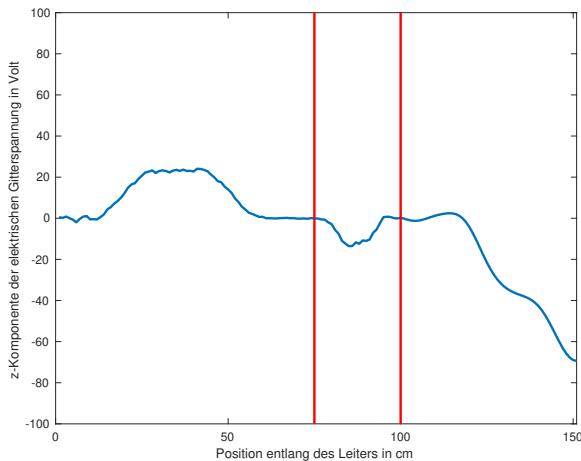


Abbildung 7.10: Dargestellt sind beispielhaft die Spannungen auf einer inhomogenen Leitung für eine symmetrisierte Anregung mit einem Trapezpuls und ohne Abschlusswiderstand (links), sowie für eine symmetrisierte Anregung mit einem Gausspuls und Anpassung an Anfang und Ende (rechts) dargestellt.

7.3 Fazit

Bei der Simulation einer Wellenausbreitung auf einer Koaxialleitung in diesem Versuch, war gut zu sehen wie sich die Eigenschaften der Welle durch verschiedene Anregungen und Leitungsabschlüsse ändert. Auffällig war, dass durch die Verteilung von Anregung und Abschluss auf mehrere Kanten, das Signal 'glatter' verlief und das Verhalten der Welle am Ende der Leitung dem erwarteten Verhalten entsprach (keine Reflexion). Durch die Verwendung von inhomogenen Material hat sich das Signal mehrfach überlagert, sodass das Ausgangssignal nicht mehr zu erkennen war.

8 HF-Zeitbereich 3: Streuparameter

Dieser Versuch schließt direkt an den letzten Versuch an. Es soll dieselbe Problemstellung sowie das im letzten Versuch bestimmte Zeitsignal verwendet werden, um dann mithilfe der DFT Analysen im Frequenzbereich durchzuführen. Insbesondere werden die Anregung I_0 sowie die Abschlusswiderstände wieder über die jeweilige Stirnfläche verteilt. Beachten Sie aber, dass im Gegensatz zum letzten Versuch hier nun für die homogene Leitung eine relative Permittivität von $\epsilon_r = 0.9$ verwendet wird. Dieser Wert ist zwar unphysikalisch, stellt aber sicher, dass der Leitungswellenwiderstand 50Ω beträgt. Für die inhomogene Leitung gilt weiterhin $\epsilon_r = 1.3$, während für beide Leitungen weiterhin $\mu_r = 1$ gewählt wurde.

8.1 Vorbereitungsaufgaben

1. Zeichnen Sie für die hier behandelte Leitung das entsprechende Zweitor mit Zählpfeilen orientiert wie in Abb. 7.7. Fügen Sie auch die hier verwendete äußere Beschaltung an den Leitungsenden hinzu.

An das Zweitor wird links an den Eingang eine ideale Stromquelle mit I_0 und eine Eingangsimpedanz Z_1 angeschlossen. An das Leitungsende wird die Ausgangsimpedanz Z_2 angehängt.

Nach der Aufgabenstellung gilt:

$$Z_w = Z_2 = Z_1 = R = 50\Omega.$$

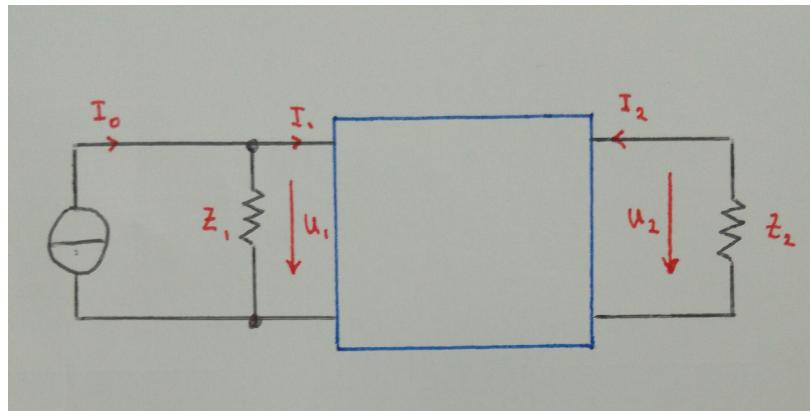


Abbildung 8.1: Der Leitung entsprechendes Zweitor.

2. Bestimmen Sie den Eingangsstrom I_1 in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_1 , dem Abschlusswiderstand R und der Anregung I_0 .

Zur Berechnung von I_1 wird die Knotengleichung an K nach der Kirchhoffschen Regel aufgestellt:

$$I_0 = I_1 + I_R = I_1 + \frac{U_1}{R}$$

$$I_1 = I_0 - \frac{U_1}{R}$$

3. Bestimmen Sie die Ausgangsspannung U_2 und den Ausgangsstrom I_2 in Abhängigkeit von der Eingangsspannung U_1 , der Länge der Leitung ℓ und der Phasenkonstante β . Sie können dabei annehmen, dass die Leitung mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist.

Allgemein gilt für die Leitungsgleichungen:

$$\begin{aligned} U(z) &= U_0^+ e^{-j\beta z} + U_0^- e^{j\beta z} \\ I(z) &= \frac{U_0^+}{Z_w} e^{-j\beta z} - \frac{U_0^-}{Z_w} e^{j\beta z} \end{aligned}$$

Für U_2 ist $z = l$:

$$\begin{aligned} U_2 &= U(z = l) = U_0^+ e^{-j\beta l} + U_0^- e^{j\beta l} \\ I_2 &= I(z = l) = -\left(\frac{U_0^+}{Z_w} e^{-j\beta l} - \frac{U_0^-}{Z_w} e^{j\beta l}\right) \end{aligned}$$

Hierbei ist U_0^+ die hinlaufende Welle und U_0^- die rücklaufende Welle. Die Ausgangsimpedanz Z_2 entspricht hier gerade dem Leitungswellenwiderstand Z_w , weshalb sich für den Reflexionsfaktor $\Gamma = \frac{Z_2 - Z_w}{Z_2 + Z_w} = 0$ ergibt. Folglich gibt es keine rücklaufende Welle U_0^- .

Es folgt für die Spannung U_2 und den Strom I_2 :

$$\begin{aligned} U_2 &= U_0^+ e^{-j\beta l} \\ I_2 &= -\frac{U_0^+}{Z_w} e^{-j\beta l} \end{aligned}$$

4. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Welle auf der gegebenen Leitung? Berechnen Sie die Zeit, die die Welle benötigt, um die Länge der Leitung einmal zu passieren.

Für die Geschwindigkeit einer Welle auf einer Leitung gilt:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \cdot c_0$$

Für die Zeit gilt:

$$t = \frac{l}{c}$$

Homogene Leitung: $\varepsilon_r = 0,9$, $\mu_r = 1$

$$c = \frac{1}{\sqrt{0,9}} \cdot c_0 = 1,0541 \cdot c_0$$

$$t = \frac{1,25m}{1,054 \cdot c_0} = 3,956ns$$

Inhomogene Leitung: $\varepsilon_r = 1,3$, $\mu_r = 1$

$$c = \frac{1}{\sqrt{1,3}} \cdot c_0 = 0,877 \cdot c_0$$

$$t = \frac{1,25m}{1,054 \cdot c_0} = 4,75ns$$

5. Wie kann man aus den im Allgemeinen komplexen Rückgabewerten der DFT (MATLAB®-Befehl `fft`) auf das Frequenzspektrum schließen?

Zuerst wird der Absolutbetrag des komplexen Outputs von `fft` berechnet. Dieser Output ist in zwei Hälften geteilt. Die erste Hälfte entspricht dem positiven, die zweite Hälfte dem negativen Spektrum. Da der Output symmetrisch ist, reicht es also aus die erste Hälfte zu betrachten. Dass heißt, wenn das volle Spektrum von $-\frac{f_s}{2}$ bis $\frac{f_s}{2}$ reicht, ist es genug die positive Hälfte, i.e. von 0 bis $\frac{f_s}{2}$ zu betrachten.

f_s bezeichnet dabei die Abtastfrequenz und $\Delta\omega = \frac{f_s}{N}$ den Abstand zwischen zwei Frequenzbereichswerten.

8.2 Aufgaben während der Praktikumssitzung

8.2.1 Streuparameter

Im Folgenden soll das Übertragungsverhalten der beiden Leitungen im Frequenzbereich von 0 bis 200 MHz bestimmt werden. Zu diesem Zweck sollen nur noch Gaußpulse verwendet werden.

1. Regen Sie die homogene Leitung mit dem in Versuch 7 beschriebenen Gauß-Puls an.

Für die Anregung der homogenen Leitung muss in `Versuch8.m` lediglich die Abtastfrequenz f_s berechnet werden, welche sich aus $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ ergibt. Sowohl das Gitter und die zugehörigen Material- und topologischen Matrizen als auch die Zeitparameter und Feldwerte der Simulation sind bereits festgelegt.

Mit diesen Informationen wird wieder wie in Versuch 7 eine Kante auf der Stirnseite mit dem Gaußpuls angeregt und mit einer `for`-Schleife über die Zeit iteriert und in jedem Zeitschritt mit der Leapfrog-Methode die Werte für \mathbf{e} und \mathbf{h} ausgerechnet. Auch hier sind die beiden Leitungsende wieder mit dem Wellenwiderstand $Z_w = R = 50\Omega$ abgeschlossen, was wiederum durch die R-Matrix in `ohmic_termination_distributed_front_and_back` festgelegt wird.

Im nächsten Schritt sollen dann für jeden Zeitschritt die Spannungen und Ströme für Ein- und Ausgang bestimmt werden.

2. Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgang der Leitung im Zeitbereich und stellen Sie diese in entsprechenden Plots dar.

Zur Ermittlung der Strom- und Spannungsgrößen werden die Ergebnisse aus der Vorbereitung herangezogen.

$$I_1 = I_0 - \frac{U_1}{R}$$

$$U_2 = U(z = l) = U_0^+ e^{-j\beta l}$$

$$I_2 = I(z = l) = -\frac{U_0^+}{Z_w} e^{-j\beta l}$$

I_0 entspricht dem Anregungssignal an den Kanten, die Innen- und Außenleiter miteinander verbinden. In diesem Fall also einem Gaußpuls mit der Anregung an Kante 5, 7, 9, 11, 2418, 2419, 2426, 2427.

U_1 entspricht dem Wert von \hat{e} an Kante 5.

U_2 entspricht demnach dem Wert von \hat{e} an Kante 2405, da wenn von Kante 5 ausgehend entlang der z-Achse gelaufen wird, Kante 2405 die parallele Kante zur Kante 5 am Leitungsende ist.

I_2 wird schließlich über $I_2 = -\frac{U_2}{Z_w} = -\frac{U_2}{R}$ berechnet.

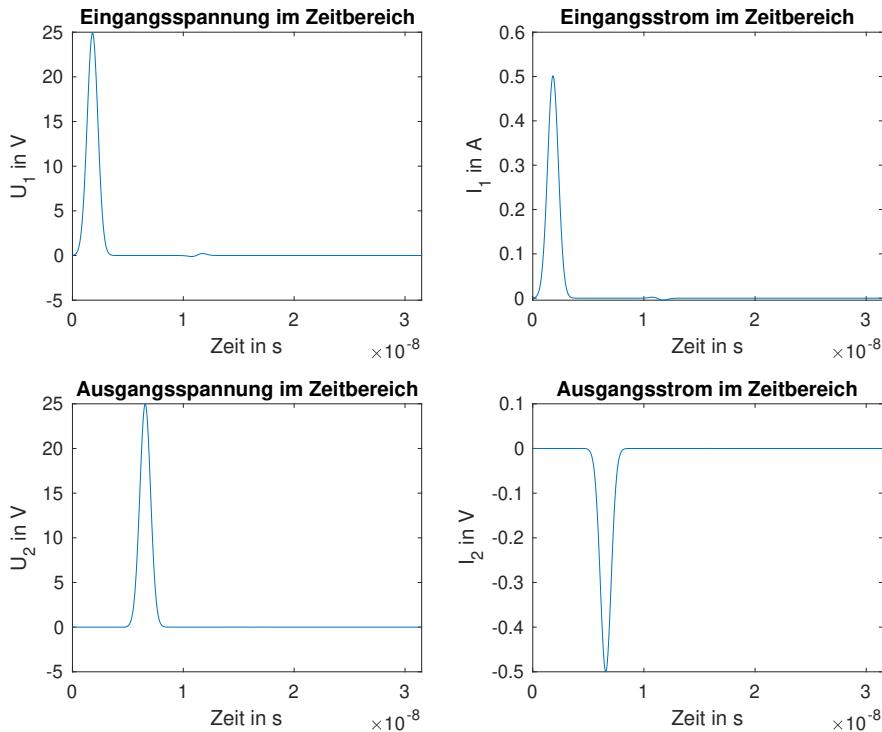


Abbildung 8.2: Spannungen und Ströme im Zeitbereich

In der Abbildung 8.2 sind die Plots der Ströme und Spannungen dargestellt. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Eingangsspannung und der Eingangsstrom einem Gaußpuls als auch die Ausgangsspannung und der Ausgangstrom einem Gaußpuls entsprechen. Die Ausgangsgrößen sind jedoch im Vergleich zu den Eingangsgrößen zeitlich verschoben, da die Welle auch eine gewisse Zeit braucht um zum Ende der Leitung zu gelangen.

3. Schreiben Sie eine Routine, die das Spektrum eines Zeitsignals berechnet und eine zugehörige Frequenzachse erzeugt. Experimentieren Sie mit dem zero-padding, um im interessierenden Frequenzbereich eine genügend gute Auflösung zu bekommen.

Für die Berechnung des Spektrums aus dem Zeitsignal wird die Funktion `fftmod` benutzt. FFT steht dabei für fast fourier transform (schnelle Fourier Transformation), mit welcher eine beliebige Anzahl von Zeitwerten verarbeitet und die Frequenzfolge ausgegeben werden kann. Somit werden aus den Zeitsignalen der Ein- und Ausgangsgrößen deren Spektren berechnet. Dazu ist es noch wichtig die maximale Frequenz f_{max} nach dem Abtasttheorem mit $f_{max} \leq \frac{f_s}{2}$ und den Frequenzabstand $\Delta f = \frac{f_s}{N}$ zu bestimmen, um daraus dann die Frequenzachse zu erzeugen. Die Frequenzachse beginnt also bei 0 und endet bei f_{max} und hat die Schrittweite Δf .

In Versuch8 werden dann die Anzahl an Samples $N = N_S + z_p$ selbst festgelegt, um eine gute Auflösung zu erhalten.

4. Bestimmen Sie die Spannungen und Ströme an Ein- und Ausgang der Leitung im Frequenzbereich und stellen Sie diese in entsprechenden Plots dar. Überprüfen Sie, ob der Gauß-Puls im Frequenzbereich die Bedingungen erfüllt, die an diesen in Versuch 7 gestellt wurden.

Die Spannungen und Ströme im Frequenzbereich werden nun mit `fftmod` bestimmt. `fftmod` erhält dabei das jeweilige Signal `y` im Zeitbereich, die Anzahl an Samples `N` und die Abtastfrequenz `f_s` als Input und liefert als Output das Signal `Y` im Frequenzbereich und die Frequenzachse `freq`.

Schließlich können die Signale über die Frequenzachse mit `plot` dargestellt werden.

In Abbildung 8.3 sind diese Plots zu sehen. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Spannungen als auch die Ströme am Ein- und Ausgang gleich sind.

Nach Versuch 7 soll der Wert des Spektrums bei $f = f_{max}$ genau 1% des Maximalwertes betragen. Der Maximalwert beträgt bei Ein- und Ausgangsspannung 1.31 V und bei Ein- und Ausgangsstrom 0.0262 A. Der Wert bei $f = f_{max}$ beträgt bei Ein- und Ausgangsspannung 0.0134 V und bei Ein- und Ausgangsstrom 0.000271 A. Also ist sowohl bei den Spannungen ($\frac{0.0134}{1.31} \approx 1\%$) als auch bei den Strömen ($\frac{0.000271}{0.0262} \approx 1\%$) die Bedingung ungefähr erfüllt.

oder ist hiermit gemeint, einfach die Bedingung im Gaußpuls dokument?

5. Berechnen Sie die Ein- und Ausgangsimpedanz im Frequenzbereich und stellen Sie diese in Abhängigkeit der Frequenz dar.

Die Ein- und Ausgangsimpedanz berechnet sich generell nach $Z_1 = \frac{U_1}{I_1}$ und $Z_2 = \frac{U_2}{I_2}$.

Für die Berechnung der Impedanz müssen die Spannungen und Ströme in den Frequenzbereich transformiert werden. Dies wurde bereits mit `fftmod` gemacht, sodass die Outputs dieser Funktion in unsere allgemeine Gleichung für die Impedanzen eingesetzt werden muss. Dann werden die Impedanzen über die Frequenzachse mit `plot` geplottet.

In Abbildung 8.4 sind die Plots zu sehen. Die Impedanz Z_2 ist über die Frequenz konstant und hat den Wert 50Ω . Die Impedanz Z_1 schwankt über die Frequenz um 50Ω , jedoch mit immer größerer Frequenz schwankt Z_1 sehr stark.

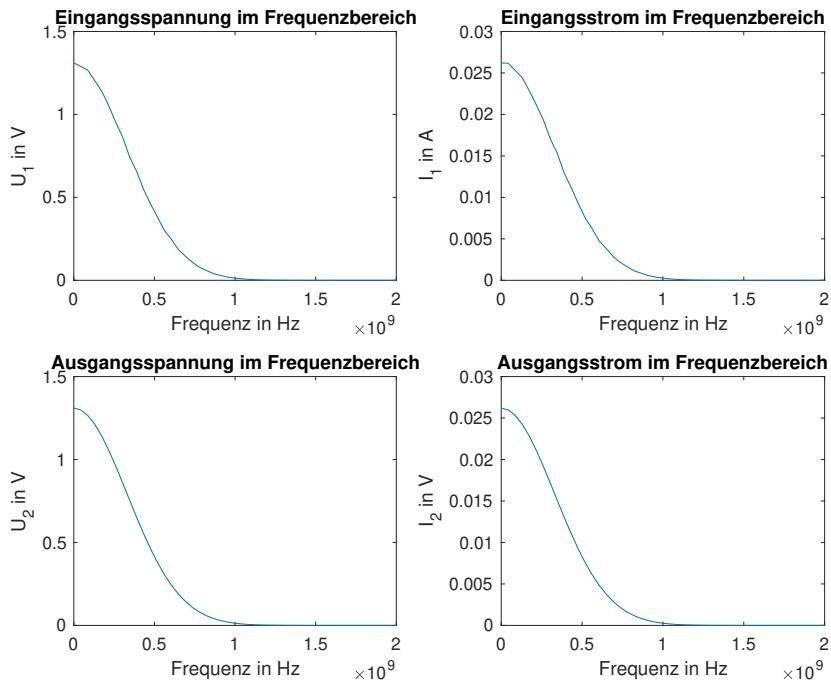


Abbildung 8.3: Spannungen und Ströme im Frequenzbereich

6. Berechnen Sie aus den Spektren der Strom- und Spannungsgrößen die Spektren der zugehörigen Wellengrößen a_1 , b_1 und b_2 und daraus die Streuparameter S_{11} und S_{21} . Interpretieren Sie das Ergebnis für Reflexion und Transmission.

Die Wellengrößen berechnen sich nach (7.17) zu:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{U_1}{\sqrt{Z_w}} + I_1 \sqrt{Z_w} \right) \\ b_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{U_1}{\sqrt{Z_w}} - I_1 \sqrt{Z_w} \right) \\ b_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{U_2}{\sqrt{Z_w}} - I_2 \sqrt{Z_w} \right) \end{aligned}$$

und die Streuparameter S_{11} und S_{21} berechnen sich nach (7.21) und (7.23) zu:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_{a_2=0} \text{Eingangs-Reflexionsfaktor} \\ S_{21} &= \left. \frac{b_2}{a_1} \right|_{a_2=0} \text{Vorwärts-Transmissionsfaktor} \end{aligned}$$

Schließlich werden $|S_{11}|^2$ und $|S_{21}|^2$ wieder mit `plot` über die Frequenzachse geplottet. In Abbildung 8.5 sind die Plots dargestellt. $|S_{11}|^2$ ist ungefähr 0, da die Eingangsimpedanz über den betrachteten Frequenzbereich ca. 50Ω beträgt und daher nahezu angepasst ist und dort keine Reflexion auftritt. $|S_{21}|^2$ ist gleich 1. Für die Transmission bedeutet dies, dass eine ideale Vorwärtsübertragung vorliegt.

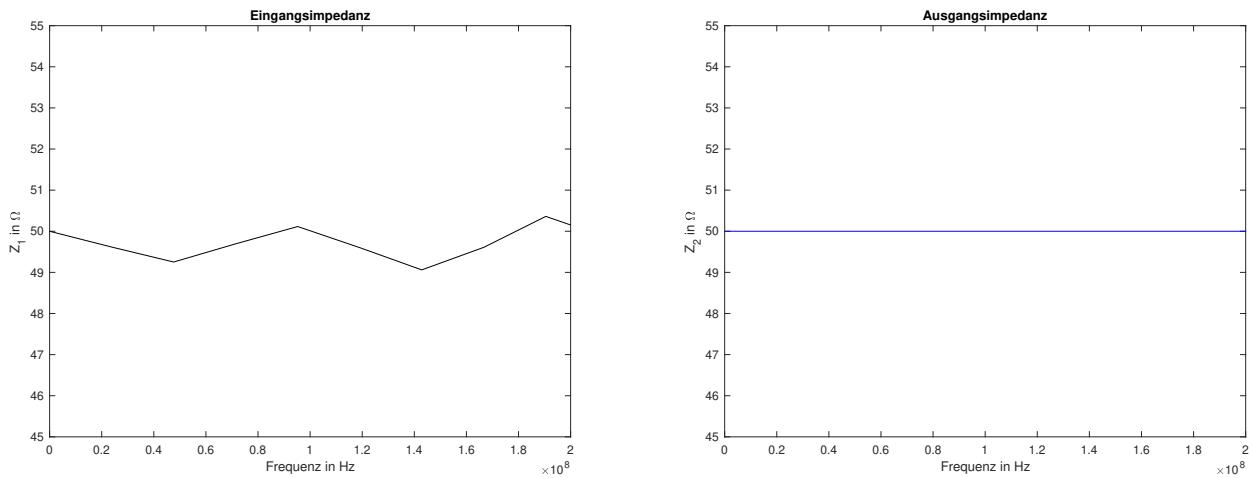


Abbildung 8.4: Impedanzen im Frequenzbereich

7. Überprüfen Sie die Energiebilanz nach (8.4).

Die Energiebilanz berechnet sich nach (8.4) zu:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1$$

In Abbildung 8.5 sind $|S_{11}|^2$, $|S_{21}|^2$ und die Summe der beiden dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Summe der beiden Streuparameter 1 ergibt. Demnach ist Gleichung (8.4) erfüllt und die Leitung ist verlustfrei.

8. Wiederholen Sie die Berechnungen für die inhomogene Leitung.

Wie in Abbildungen 8.6 erkennbar, sind die Spannungen und Ströme von Ein- und Ausgang im Zeitbereich keine Gaußpulse, sondern Funktionen mit mehreren, klar getrennten Maxima und Minima. Der Wertebereich der Eingangsspannung und des Stroms enthält sowohl positive, als auch negative Werte, wohingegen die Ausgangsspannung einen rein positiven (inklusive 0) und der Ausgangsstrom einen rein negativen (inklusive 0) Wertebereich besitzt.

Auch im Frequenzbereich unterscheiden sich die Spannungen und Ströme der inhomogenen Leitung von denen der homogenen Leitung. So sind die Signale auch hier nicht streng monoton fallend, sondern weisen mehrere Peaks auf. Dabei sind im Vergleich die Peaks der Eingangssignale merkbar größer als die der Ausgangssignale. Ab ca. 1 GHz verläuft die Funktion deutlich regelmäßiger gegen 0.

Die Eingangsimpedanz Z_1 schwankt im betrachteten Frequenzbereich stark, doch die Ausgangsimpedanz Z_2 weist wie bei der homogenen Leitung ein konstantes Verhalten über der Frequenz auf.

$|S_{11}|^2$ und $|S_{21}|^2$ alternieren beide, sodass keine einfache Aussage über die Transmission und Reflexion getroffen werden kann. Auch die Summe der beiden schwankt für den betrachteten Bereich leicht um 1, jedoch in einem Maß, in dem Gleichung (8.4) noch erfüllt ist. Erst bei höheren Frequenzen wird die Abweichung von 1 sehr groß.

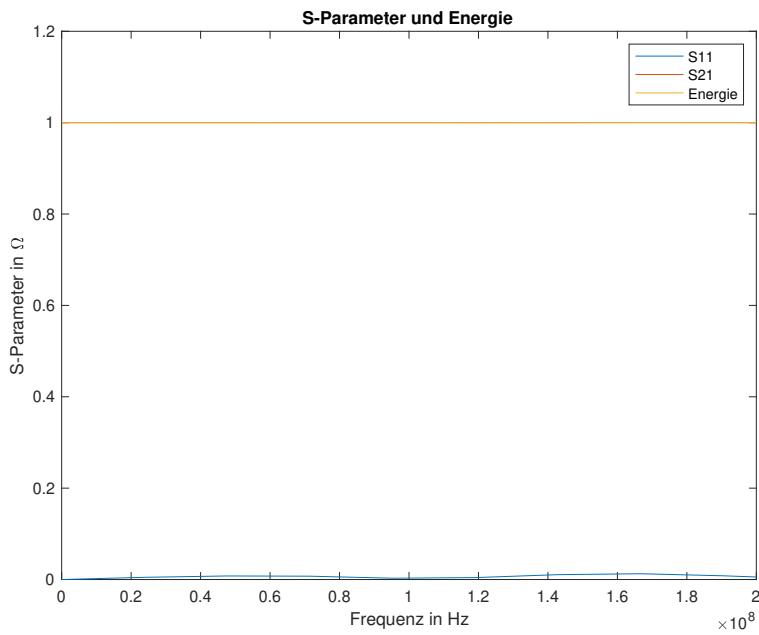


Abbildung 8.5: Darstellung von $|S_{11}|^2$, $|S_{21}|^2$ und der Summe der beiden

8.3 Fazit

Versuch 8 knüpft direkt an Versuch 7 an. Hier sollte nun aus dem Zeitsignal mit Hilfe der diskreten Fourier Transformation die Spektren der Signale, die Impedanzen und Streumatrizen berechnet werden. Auffällig war auch hier der Veränderung von homogenen Material zu inhomogenen Material. Während beim homogenen Material die Signale im Zeitbereich noch der Anregung entsprachen (beim Ausgang mit Verschiebung) und die Werte der Streuparameter durch die Anpassung an Ein- und Ausgang den erwarteten Werten entsprachen (keine Eingangsreflexion, ideale Vorwärtstransmission), haben die Signale im Zeit- und Frequenzbereich mehrere Maxima und Minima. Des Weiteren schwankt Z_1 stark, weshalb auch die Streuparameter schwanken. Lediglich die Summe von $|S_{11}|^2$ und $|S_{21}|^2$ bleibt wie bei der homogenen Leitung bei ca. 1.

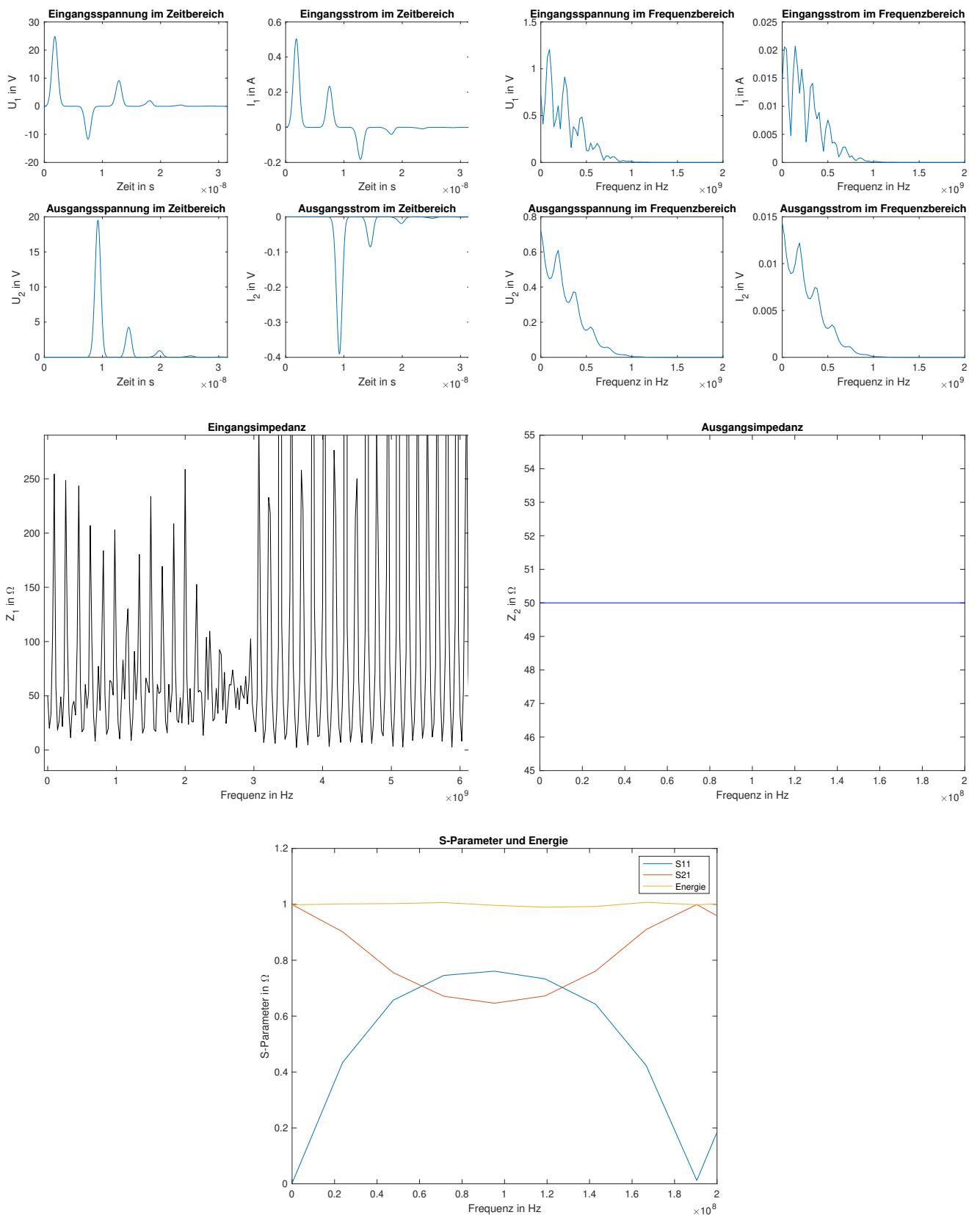


Abbildung 8.6: Dargestellt sind Spannungen, Ströme, Eingangs- und Ausgangsimpedanz, Streuparameter und die Summe der Streuparameter bei inhomogener Materialverteilung.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Diskretisierung einer Kreiszylinderoberfläche. Dargestellt sind die Dreiecksgitter der Diskretisierung der Deckelfläche (links) und des diskretisierten Zylinders in Perspektivansicht (rechts).	8
1.2	Dargestellt ist ein halbes Dreieck auf der Grundfläche des Zylinders.	10
1.3	Dargestellt ist die Matrix deren Einträge für die Skalarprodukte aller Eigenvektoren stehen. Haben die Einträge die gleichen Werte, haben sie auch die gleiche Farbe. Alle Einträge bis auf die Hauptdiagonale haben im Falle l.u. Eigenvektoren die gleiche Farbe.	13
1.4	Die zwei niedrigsten Moden bei elektrischen Randbedingungen.	13
1.5	Dargestellt sind die Wellenzahl der 2. und 4. Ordnung mit elektrischen RB über der Stützstellenanzahl (links) und der relative Wellenzahlfehler über der Gitterschrittweite (rechts).	14
1.6	Diskretisierung eines Zylinder mit 20 Deckflächendreiecken.	15
1.7	Dargestellt ist der relative Fehler, der bei der Diskretisierung des Zylinders entsteht, in blau für die Oberfläche und in orange für das Volumen, über der Anzahl Dreiecke der Deckfläche.	16
1.8	Ein Zylinder und ein Auto erstellt auf Basis einer .stl Datei, welche die Koordinaten aller Dreiecke und deren Normalenvektoren beinhaltet.	17
2.1	Zweidimensionales kartesisches Gitter mit 3×4 Punkten, indiziert nach dem kanonischen Indizierungsschema. Kanten in x-Richtung sind lila und Kanten in y-Richtung sind orange dargestellt. Geisterkanten, welche am Rand des Gebietes auftreten sind gestrichelt abgebildet.	18
2.2	Dreiecksgitter von zwei verschiedenen Rechengebieten.	19
2.3	Knoten-, Kanten- und Flächenindizierung der linken Figur aus Abbildung 2.2. Knoten sind rot, Kanten blau und Flächen grün dargestellt.	20
2.4	Links ist das duale Gitter zum rechten Gitter in Abbildung 2.2 dargestellt. In blau ist das primäre, in braun das duale Gitter eingezeichnet und es ist zu erkennen, dass alle dualen Gitterpunkten in den primären Gitterflächen liegen. Die rechte Abbildung visualisiert das duale Gitter zur linken Skizze in Abbildung 2.2, wobei hier das primäre Gitter in schwarz und das Duale in grau visualisiert wird. Die Dreiecke bei denen sich die Mittelsenkrechten außerhalb seiner Fläche schneiden, sind grün hervorgehoben.	23
2.5	Das kartesische Gitter erzeugt mit der Methode <code>plotMesh</code> . Die Abstände der Punkte in <code>xmesh</code> , <code>ymesh</code> und <code>zmesh</code> werden durch verschiedenfarbige Kanten abgebildet.	24
2.6	Dargestellt sind die diskreten Rotations- und Divergenzmatrizen für $N_p = 17 \times 17 \times 17 = 4913$ Gitterpunkte, sowohl für das duale, als auch das primäre Gitter.	26
2.7	Dargestellt ist die Anzahl Geisterkanten über der Anzahl aller Kanten.	28
2.8	Die 3D Visualisierung der beiden Vektorfelder, links 1. und rechts 2.	30
2.9	Zu sehen sind die Längen der dualen Kanten am Rand des Gitters. Diese sind in der linken Anordnung gestrichelt eingezeichnet und rechts in rot, beziehungsweise grün.	30
3.3	Duale Gitterflächen mit zugehörigen primären Gitterzellen.	39

4.1	Primäres Gitter dargestellt durch durchgezogene Linie, duales Gitter visualisiert mit gestrichelter Linie. Die diskreten Potentialwerte sind an den primären Gitterpunkten in rot allokiert.	41
4.2	Bandstrukturskizze der Systemmatrix \mathbf{A} bei statischen Feldproblemen.	41
4.3	Magnetfeld eines unendlich langen Linienleiters in der z -Ebene.	44
4.4	Das Magnetfeld eines unendlich ausgedehnten Linienleiters mit Berandung skizzenhaft dargestellt. Die Feldlinien sind in sich geschlossen, was aus Darstellungsgründen hier nicht ersichtlich ist.	45
4.5	Die Feldbilder für das Potential (farbig, Spalte 1 und 3) und das elektrische Feld der Anordnung mit Fall 1: homogener Permittivität $\epsilon = \epsilon_0$ (Zeile 1, Spalte 1 und 2), Fall 2: äquidistant längsgeschichteten Permittivitäten ϵ_{r1} und ϵ_{r2} (Zeile 1, Spalte 3 und 4), Fall 3: selbige äquidistant quergeschichtete Permittivitäten (Zeile 2, Spalte 1 und 2) und Fall 4: sowohl längs-, als auch quergeschichtete Permittivitäten $\epsilon_{r1}, \epsilon_{r2}, \epsilon_{r3}$ und ϵ_{r4} . Im letzten Fall 5 (unterste Zeile) ist der Kondensator homogen gefüllt mit $\epsilon = 1$ und besitzt eine Zick-Zack förmige obere Platte.	48
4.6	Verlauf des relativen Residuums über der Anzahl Iterationsschritte für Kondensatorkonfiguration e).	49
4.7	Dargestellt ist das Verhalten der Kapazität von Kondensatorschaltung e) in Abhängigkeit der Gesamtzahl an Gitterpunkten.	50
4.8	Hilfsfeld des Linienleiters.	50
4.9	Abgebildet ist das magnetische Feld des Linienleiters für eine homogene verteilte Permeabilität μ	51
4.10	Zu sehen ist das magnetische Feld des Linienleiters für eine inhomogene Verteilte Permeabilität.	52
5.1	Problemstruktur. Gegeben ist ein äquidistantes, dreidimensionales Gitter. Die gestrichelt dargestellten Gitterzellen sollen mit leitfähigem Material gefüllt angenommen werden, d. h. $\kappa \neq 0$ und $\mu \neq \mu_0$, der Rest der Gitterzellen ist Vakuum. Es gilt überall $\epsilon = \epsilon_0$. Im Versuch sollen allgemeine Diskretisierungen betrachtet werden. Bei feinerem Gitter gehen die Abmessungen von Schleife und Materialschicht entsprechend über mehrere Gitterzellen.	53
5.3	Realteil (links) und Imaginärteil der Stromdichte in der Grenzfläche von Vakuum und leitender Platte.	59
5.4	Stromdichteverteilung im Punkt (3,3,2) dargestellt über der Zeit.	60
5.5	Zu sehen ist die Lösung im Zeitbereich (blau) und im Frequenzbereich, wobei bei letzterer aufgrund des großen Intervalls der y-Achse keine Details erkennbar sind.	61
5.6	Real- (links) und Imaginärteil der Stromdichte auf der Plattenoberfläche.	62
6.1	Visualisierung des Leapfrog-Verfahrens, wobei blaue Pfeile die magnetische und Rote die elektrische Gitterspannung kennzeichnen.	64
6.2	Geometrie des Rechengebietes	67
6.3	Der Betrag des E-Feldes im letzten Zeitschritt über den Abmessungen j und i.	70
6.4	Abgebildet ist sowohl der zeitliche Verlauf der Energie des Feldes links, sowie der des Anregungsstromes rechts.	71
6.5	Dargestellt ist die Leistung des Systems in blau und die der Quelle in rot.	72
7.1	Verlustfreie Koaxialleitung im Versuch. Es werden zwei Fälle vorgegeben: Eine homogene Koaxialleitung (links) und eine Koaxialleitung mit Einsatz (rechts).	73
7.2	Stirnseite der Koaxialleitung mit Diskretisierungsgitter.	74
7.3	Querschnitt des Leiters, wobei rechts die Vorderseite und links die Rückseite abgebildet ist.	75
7.4	Trapezpuls	75
7.5	Dargestellt sind hin- und und rücklaufende Spannung und das Anregungssignal	78
7.6	Spannung nach Reflexion mit dem Abschluss an einer Kante	79

7.7	Spannung nach Reflexion mit dem Abschluss an allen Kanten der Rückseite, die Innen- und Außenleiter miteinander verbinden	80
7.8	Dargestellt sind hinlaufende Spannung und die Spannung beim Erreichen des Leitungsende bei symmetrisierter Anregung und Abschluss an Anfang und Ende des Leiters.	81
7.9	Dargestellt sind hinlaufende Spannung (links) und die Spannung beim Erreichen des Leitungsende (rechts) bei symmetrisierter Anregung mit einem Gaußpuls und Abschluss am Anfang und Ende des Leiters und das Signal des Gaußpulses selbst.	82
7.10	Dargestellt sind beispielhaft die Spannungen auf einer inhomogenen Leitung für eine symmetrisierte Anregung mit einem Trapezpuls und ohne Abschlusswiderstand (links), sowie für eine symmetrisierte Anregung mit einem Gaußpuls und Anpassung an Anfang und Ende (rechts) dargestellt.	83
8.1	Der Leitung entsprechendes Zweitor.	84
8.2	Spannungen und Ströme im Zeitbereich	87
8.3	Spannungen und Ströme im Frequenzbereich	89
8.4	Impedanzen im Frequenzbereich	90
8.5	Darstellung von $ S_{11} ^2$, $ S_{21} ^2$ und der Summe der beiden	91
8.6	Dargestellt sind Spannungen, Ströme, Eingangs- und Ausgangsimpedanz, Streuparamter und die Summe der Streuparamter bei inhomogener Materialverteilung.	92