Demotración Simpson 3/8

Paul Forero* and Risshi Ospina**
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
(Dated: 26 de septiembre de 2023)

Este documento desarrola una demostración de la regla se Simpson de 3/8, de forma que se pueda entender una de las maneras no cnocencionales de hacer interpolaciones y hallar el area bajo la curva, este siendo una generalizacion de la regla del trapecio.

x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$

I. INTRODUCCIÓN

Si bien existe la relga de Simpsonde 1/3, la relga de Simpson 3/8 se utiliza en los casos en la que la funcion tiene m puntos, en esta funcion se pidio un m = 4 y con esos puntos se trabajaran.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f_3(x)dx$$

Para f_3:

$$\begin{aligned}f_3(x) = f(x_0)&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\\ &+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\\ &+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\\ &+ f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\end{aligned}$$

Donde:

$$h = \frac{x_1 - x_0}{3} = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2$$

$$2h = x_0 = x_3 - x_1 = x_2$$

Luego:

$$\begin{array}{rcrcl} x_3 & - & x_0 & = & 3\text{h} \\ \underline{-\ x_3} & \underline{+} & \underline{x_2} & \underline{=} & \underline{-\ \text{h}} \\ x_2 & - & x_0 & = & 2\text{h} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} x_3 & - & x_0 & = & 3\text{h} \\ \underline{-\ x_1} & \underline{+} & \underline{x_0} & \underline{=} & \underline{-\ \text{h}} \\ x_3 & - & x_1 & = & 2\text{h} \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) = \int_{x_0}^{x_3}\Bigg(f(x_0)&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)}\\ &+ f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(h)(-h)(-2h)}\\ &+ f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(2h)(h)(-h)}\\ &+ f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(3h)(2h)(h)}\Bigg)dx\end{aligned}$$

Como sabemos, la integral de una suma se puede reescribir como la suma de las integrales, por ende, podemos dejar la expresión como:

$$-\frac{f(x_0)}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx$$

$$+\frac{f(x_1)}{2h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)dx$$

$$-\frac{f(x_2)}{2h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)dx$$

$$+\frac{f(x_3)}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)dx$$

---

* Correo institucional: p.foreror@uniandes.edu.co
** Correo institucional: r.ospina@uniandes.edu.co

Ahora hay que hallar los valores de I que corresponden al área bajo la curva:

$$I_0 = \int (x-a)(x-b)(x-c)dx$$

$$I_0 = \int (x^2 - ax - bx + ab)(x-c)dx$$

Primero se utiliza la substitución:

$$u = x^2 - ax + ab$$

$$du = 2x - a - b$$

Si utilizamos esta sustitución en la integral queda de la siguiente forma:

$$\int du = \int (x-c)dx$$

$$u = \frac{(x-c)^2}{2}$$

Igualmente, podemos hallar los siguientes valores con las sustituciones realizadas:

$$u = x - c$$

$$du = dx \tag{1}$$

$$x = u - c$$

La última no corresponde necesariamente a un despeje de la primera. Con estos datos podemos empezar a trabajar en I.

$$I = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2}$$

$$-\int \frac{2x(x-c)^2}{2} - \frac{a(x-c)^2}{2} - \frac{b(x-c)^2}{2} dx$$

Si vovlemos a utilizar el cocepto de pasar de una integral de sumas a una suma de integrales la expreison se vera así:

$$I = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2}$$

$$-\int x(x-c)^2 dx$$

$$+\frac{a}{2}\int (x-c)^2 dx$$

$$+\frac{b}{2}\int (x-c)^2 dx$$

Integramos las ecuaciones más facíles:

$$I = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2}$$

$$-\int x(x-c)^2 dx$$

$$+\frac{a}{2}\frac{(x-c)^3}{3}$$

$$+\frac{b}{2}\frac{(x-c)^3}{3}$$

Utilizando las sustituciones obtenidas en la ecuación 1, podemos integrar la ecuación restante:

$$I = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2}$$

$$-\int u^2(u-c)du$$

$$+\frac{a}{2}\frac{(x-c)^3}{3}$$

$$+\frac{b}{2}\frac{(x-c)^3}{3}$$

Posteriormente, se obtiene la siguiente expresión para I:

$$I = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2}$$

$$-\frac{(x-c)^4}{4} - \frac{(x-c)}{3} + \frac{a}{2}\frac{(x-c)^3}{3} + \frac{b}{2}\frac{(x-c)^3}{3}$$

Operando y manipulando algebraicamente la expresiòn un poco finalmente llegamos a la expresion general para I:

$$I = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)^2}{2}$$

$$-\frac{(x-c)^4}{4} + (-c + \frac{a}{2} + \frac{b}{2})(\frac{(x-c)^3}{3})$$

Ya que se obtuvo la ecuación general para I podemos reemplazar valores para obtener I_1, I_2, I_3 y I_4.

$$I_1 = -\frac{f(x_0)}{6h^3}\Bigg[\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2} - \frac{(x-x_3)^4}{4}$$

$$+\Bigg(-x_3 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\Bigg)\Bigg(\frac{(x-x_3)^3}{3}\Bigg)\Bigg|_{x_0}^{x_3}\Bigg]$$

$$-\frac{f(x_0)}{6h^3}\Bigg[\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)^2}{2} - \frac{(x_0-x_3)^4}{4}$$

$$+\Bigg(-x_3 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\Bigg)\Bigg(\frac{(x_0-x_3)^3}{3}\Bigg)\Bigg]$$

Donde:

$$x_1 - x_3 + x_2 - x_3 = h - 2h$$

$$-x_3 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = -\frac{3h}{2}$$

Reemplazando:

$$-\frac{f(x_0)}{6h^3}\Bigg[\frac{(-h)(-2h)(-3h)^2}{2} - \frac{(-3h)^4}{4}$$

$$-\Bigg(\frac{-3h}{2}\Bigg)\Bigg(\frac{(-3h)^3}{3}\Bigg)\Bigg]$$

Simplificando:

$$-\frac{f(x_0)}{6h^3}\Bigg(-\frac{9}{4}h^4\Bigg)$$

$$I_1 = \frac{3}{8}f(x_0)h$$

Un procedimineto similar se raliza para encontrar I_2, I_3 e I_4.

Para I_2:

$$I_2 = \frac{f(x_4)}{2h^3}\Bigg[\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2} - \frac{(x-x_3)^4}{4}$$

$$+\Bigg(-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_2}{2}\Bigg)\Bigg(\frac{(x-x_3)^3}{3}\Bigg)\Bigg|_{x_0}^{x_3}\Bigg]$$

$$I_2 = \frac{f(x_4)}{2h^3}\Bigg[-\Bigg(\frac{(x-x_3)^4}{4}$$

$$+\Bigg(-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_2}{2}\Bigg)\Bigg(\frac{(x_0-x_3)^3}{3}\Bigg)\Bigg]$$

Donde:

$$x_0 - x_3 + x_2 - x_3 = -h - 3h$$

$$-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_2}{2} = -2h$$

Reemplazando y simplificando:

$$\frac{f(x_1)}{2h^3}\left(\frac{9}{4}h^4\right)$$

$$I_2 = \frac{9}{8}f(x_1)h$$

Mismo procedimiento para hallar I_3:

$$I_3 = -\frac{f(x_2)}{2h^3}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)^2}{2} - \frac{(x-x_3)^4}{4}\right.$$

$$\left. + \left(-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{(x-x_3)^3}{3}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_3}\right]$$

$$I_2 = -\frac{f(x_2)}{2h^3}\left[-\left(-\frac{(x_0-x_3)^4}{4}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{(x_0-x_3)^3}{3}\right)\right)\right]$$

Donde:

$$x_1 - x_3 + x_0 - x_3 = -2h - 3h$$

$$-x_3 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2} = -\frac{5h}{2}$$

Reemplazando y simplificando:

$$\frac{f(x_2)}{2h^3}\left(\frac{-9}{4}h^4\right)$$

$$I_3 = \frac{9}{8}f(x_2)h$$

Finalmente, utilizamos los mismo procedimientos para hallar I_4:

$$I_4 = \frac{f(x_3)}{6h^3}\left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)^2}{2} - \frac{(x-x_2)^4}{4}\right.$$

$$\left. + \left(-x_2 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{(x_0-x_2)^3}{3}\right)\Bigg|_{x_0}^{x_3}\right]$$

$$I_4 = \frac{f(x_3)}{6h^3}\left[\frac{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)^2}{2} - \frac{(x_0-x_2)^4}{4}\right.$$

$$+ \left(-x_2 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right)\left(\frac{(x_3-x_2)^3}{3}\right)$$

$$\left. -\left(-\frac{(x_0-x_2)^4}{4} + \left(-x_2 + \frac{x_0}{2} + \frac{x_1}{2}\right)\frac{(x_0-x_2)^3}{3}\right]\right.$$

Donde:

$$\frac{f(x_3)}{6h^3}\left[3h^4 - \frac{h^4}{4} - \frac{h^4}{2}\right]$$

Simplificando:

$$\frac{f(x_3)}{6h^3}\left[\frac{9}{4}h^4\right]$$

$$I_4 = \frac{3}{8}f(x_3)h$$

Una vez hallamos esto valores de I podemos comprararlos con la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3}{8}f(x_0)h + \frac{9}{8}f(x_1)h + \frac{9}{8}f(x_2)h + \frac{3}{8}f(x_3)h$$

$$\approx \frac{3}{8}h\bigg(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\bigg)$$

Asi, finalmente conlcuyendo que:

$$\int_a^b f(x)dx \approx x_3 - x_0 \left[\frac{f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)}{8} \right]$$

Para aclarar, podrian tomarse los limites de integración a y b como

$$y$$

respectivamente, pues como se esta tomando el m $=$ 4 de igual forma se satisface la ecuación.