3.) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_2(x)\,dx$

Usaremos el polinomio de Lagrange.

$$f_2(x) = f(a)\frac{(x-x_m)(x-b)}{(a-x_m)(a-b)} + f(x_m)\frac{(x-a)(a-b)}{(x_m-a)(x_m-b)} + f(b)\frac{(x-a)(x-x_m)}{(b-a)(b-x_m)}$$

si denotamos $h = \frac{b-a}{2} = x_m - a = b - x_m$ Entonces:

$$f_2(x) = f(a)\frac{(x-x_m)(x-b)}{(-h)(-2h)} + f(x_m)\frac{(x-a)(x-b)}{(h)(-h)} + f(b)\frac{(x-a)(x-x_m)}{(2h)(h)}$$

Simplificando:

$$f_2(x) = \frac{f(a)}{2h^2}(x-x_m)(x-b) - \frac{f(x_m)}{h^2}(x-a)(x-b) + \frac{f(b)}{2h^2}(x-a)(x-x_m)$$

Los terminos anteriores escencialmente son de la forma $(x-\alpha)(x-\beta)$, así que se puede calcular como una integral por partes:

$$\int (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

donde:

$u = x-\alpha$; $du = dx$

$dv = (x-\beta)\,dx$; $v = \int (x-\beta)\,dx = \frac{(x-\beta)^2}{2}$

Por lo tanto:

$$\int (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = (x-\alpha)\frac{(x-\beta)^2}{2} - \int \frac{(x-\beta)^2}{2}\,dx$$

$$= (x-\alpha)\frac{(x-\beta)^2}{2} - \frac{(x-\beta)^3}{6}$$

Usamos esta fórmula para calcular la integral de cada uno de los tres términos de $f_2(x)$.

$$\int_a^b f_2(x)dx = \frac{f(a)}{2h^2}\left(\int_a^b (x-x_m)(x-b)\,dx\right) - \frac{f(x_m)}{h^2}\left(\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx\right)$$

$$+ \frac{f(b)}{2h^2}\left(\int_a^b (x-a)(x-x_m)\,dx\right)$$

- $I_1 = \int_a^b (x-x_m)(x-b)\,dx = \left[(x-x_m)\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6}\right]\Bigg|_a^b$

$$= -(a-x_m)\frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a-b)^3}{6} = -(-h)\frac{(-2h)^2}{2} + \frac{(-2h)^3}{6} = 2h^3 - \frac{4}{3}h^3 = \frac{2}{3}h^3$$

- $I_2 = \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \left[(x-a)\frac{(x-b)^2}{2} - \frac{(x-b)^3}{6}\right]\Bigg|_a^b$

$$= \frac{(a-b)^3}{6} = \frac{(-2h)^3}{6} = -\frac{4}{3}h^3$$

- $I_3 = \int_a^b (x-a)(x-x_m)\,dx = \left[(x-a)\frac{(x-x_m)^2}{2} - \frac{(x-x_m)^3}{6}\right]\Bigg|_a^b$

$$= (b-a)\frac{(b-x_m)^2}{2} - \frac{(b-x_m)^3}{6} + \frac{(a-x_m)^3}{6}$$

$$= 2h\left(\frac{h^2}{2}\right) - \frac{h^3}{6} + \frac{(-h)^3}{6} = h^3 - \frac{h^3}{3} = \frac{2h^3}{3}$$

Por ende:

$$\int_a^b f_2(x)\,dx = \frac{f(a)}{2h^2}\left(\frac{2}{3}h^3\right) - \frac{f(x_m)}{h^2}\left(-\frac{4}{3}h^3\right) + \frac{f(b)}{2h^2}\left(\frac{2}{3}h^3\right)$$

$$= f(a)\frac{h}{3} + f(x_m)\frac{4}{3}h + f(b)\frac{h}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f(x_m) + f(b)\right]$$

Debido al factor $\frac{1}{3}h$ se le conoce como la regla de simpson de un tercio.