5. Sustitución hacia adelante.

Factorización LU

Consiste en tomar una matríz A.

$$A = LU$$

Se construye A de forma que genere 2 matrices L y U. Las cuales cumplan que L es triangular inferior y que U se triangular superior.

$$A = T \quad U$$

$U \rightarrow$ Triangular superior

$T \rightarrow$ Triangular inferior

Sistemas triangulares

Sustitución hacia adelante:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$L \qquad x \quad = \quad b$$

$$x_1 = b_1 / l_{11}$$

$$x_2 = (b_2 - l_{21} x_1) / l_{22}$$

En un caso hipotetico de ser una matriz de sistema 3X3 se agregaría un l_{31}, l_{32} y un l_{33}. Tanbien x_3 en x, sin embargo al ser una matríz superior triangular y el resto serían ceros.

Por ende, se agregaría:

$$x_3 = (b_3 - l_{31}\, x_1 - l_{32}\, x_2) / l_{33}$$

En eso consiste el metodo de sustitución hacía adelante.

Para generalizar este metodo a un sistema de $n \times n$ se puede observar que el x_i siempre es igual a un termino que esta dividido entre el $l_{i,i}$.

$$x_i = \frac{\text{Termino}}{l_{ii}}$$

Entonces cúal sería el Termino del númerador? Se puede observar que entre el x_1 y el resto de los x hay cambios notables. Por eso se trabajara el x_1 por aparte.

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

Al ser único con respecto a los demas x se puede tomar como un caso a parte.

Con respecto a los demas x se puede observar que primero aparece el b con el mismo indice de la x y despues se iran restando terminos. La cantidad de terminos restandos concide con el número del índice de la x, menos 1 (x_{i-1}).

En un sistema $n \times n$:

$$\begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} & l_{i3} & \cdots & l_{ii} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_i \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b_i$$

Entonces se puede entender como el producto punto de toda la fila i de la matríz l con todo el vector X, sin embargo no es necesario hacer completamente el producto punto, pues despues de la entrada i,i de la matríz l el resultado son ceros, así que realmente lo único que me interesa hacer es producto punto hasta la entrada i, por ende se puede expresar como la suma ~~desde~~ desde $j=1$ hasta i de l_{ij} (la columna en si es la que va cambiando) multiplicado por el x_j y eso sera igual a b_i.

$$\sum_{j=1}^{i} l_{ij} x_j = b_i$$

Sin embargo, de todos los x de la ecuación, viendo la secuencia que se genera cuando se hace una sustitución hacía adelante, primero se conoce el x_1, despues el x_2 y despues el x_3. Por ende, cuando se quiere encontrar el x_i ya se conocen los x anteriores y si recordamos, los x que estamos considerando van desde 1 hasta i, es decir, todos los anteriores ya son de mi conocimiento, entonces se puede separar la suma en 2 partes. Primero el termino del límite superior ($j=i$).

$$l_{ii} x_i + \underbrace{\sum_{j=1}^{i} l_{ij} x_j}_{} = b_i$$

Lo conozco, por ende
lo puedo pasar a restar.

$$l_{ii} x_i = b_i - \sum_{j=1}^{i} l_{ij} x_j$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$$

Como saque el termino i el indice ahora llega a $i-1$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} x_j}{l_{ii}}$$

Asi queda un algoritmo de sustitucion hacia adelante para cualquier sistema $n \times n$

6. sustitución hacia atras

Tiene un razonamiento muy similar a la sustitucion hacia adelante; con la unica diferencia de que esta es una matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

En este caso empezamos con el ultimo termino

$$x_n = b_n / u_{nn}$$

Cambia

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right) / u_{ii}$$

Cambia