Zusammenfassung
Modul: Lineare Algebra

Eine Formel- und Konzeptsammlung

Herbstsemester 2025

Erstellt mit LaTeX und `amsmath`

Inhaltsverzeichnis

1 Kompakt Formelsammlung

1.1 Allgemeine Grundlagen

- **Mitternachtsformel** ($ax^2 + bx + c = 0$):
  $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- **pq-Formel** (normiert: $x^2 + px + q = 0$):
  $x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$
- **Skalarprodukt** ($x^T y$):
  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_2 y_2$
- **Norm (Länge):** $\|x\| = \sqrt{x^T x}$
- **Winkel α:** $\cos(\alpha) = \frac{x^T y}{\|x\| \cdot \|y\|}$
- **Orthogonalität:** $x \perp y \iff x^T y = 0$
- **Multiplikation** (Zeile · Spalte):
  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$
- **Transponieren** ($(AB)^T = B^T A^T$):
  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$
- **Determinante** ($\det(A) \neq 0 \iff$ invertierbar):
  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$
- **Inverse** ($(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$):
  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- **Symmetrisch:** $A = A^T$
- **Orthogonal (Q):** $Q^T = Q^{-1}$ (Spalten sind orthonormal).
- **Einheit V:** $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{I}$

2 Vektoren, Matrizen und Gleichungssysteme

2.1 Vektoren

Skalare und Vektoren
Man unterscheidet zwischen skalaren und vektoriellen Größen:

- **Skalar:** Wird nur durch einen Zahlenwert definiert.
  - Beispiele: Temperatur, Druck, Luftfeuchtigkeit.
- **Vektor:** Wird durch einen Zahlenwert (Betrag) und eine Richtung definiert.
  - Beispiele: Windgeschwindigkeit an einem Ort, Kraft auf einen Körper.

Eigenschaften eines Vektors
Ein Vektor zeichnet sich durch folgende Merkmale aus:

- Er hat eine **Länge** (Betrag).
- Er hat eine **Richtung**.
- Er lässt sich geometrisch als Pfeil darstellen.
- Er kann arithmetisch durch Zahlen (Komponenten) beschrieben werden.

Ortsvektoren

- Ein Ortsvektor hat den Ursprung des Koordinatensystems (Nullpunkt) als Anfangspunkt und verbindet diesen mit seinem gegebenen Endpunkt.
- **Wichtig:** Ortsvektoren und ihre Endpunkte haben die identischen Koordinaten.

Rechenregeln und Definitionen

- **Gleichheit:** Zwei Vektoren sind gleich, wenn sie die gleiche Länge und die gleiche Richtung besitzen.
- **Verschiebbarkeit:** Vektoren lassen sich parallel verschieben, ohne dass sich der Vektor ändert (solange Länge und Richtung gleich bleiben).

2.2 Rechenregeln für Vektoren

Vektorraum-Axiome
Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ Vektoren (beliebige Dimension), $\mathbf{0}$ der Nullvektor und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ Skalare. Die Menge der Vektoren bildet zusammen mit den reellen Zahlen einen Vektorraum, wenn folgende Regeln gelten:
1. Addition:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (Kommutativgesetz)
2. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ (Assoziativgesetz)
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ (Existenz des neutralen Elements $\mathbf{0}$)
4. $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ (Existenz des Inversen $-\mathbf{a}$)

2. Skalarmultiplikation:

5. $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$
6. $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$
7. $(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}) = \mu(\lambda\mathbf{a})$
8. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$

2.3 Schnittpunkte Geraden und Ebenen

Definitionen

- **Gerade:** $g : \mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{u}$ (Stützvektor $\mathbf{p}$, Richtungsvektor $\mathbf{u}$)
- **Ebene:** $E : \mathbf{r} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}$ (Spannvektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$)

Schnittpunkte berechnen

- **Ansatz:** Gleichsetzen der Parametergleichungen ($g = h$ oder $g = E$).
- **Wichtig:** Für jedes Objekt unterschiedliche Parameter (z. B. λ, μ, τ) verwenden.
- **Lösung:** Das entstehende LGS lösen und den Parameter in die Vektorgleichung einsetzen.

2.4 Matrizen

Definition
Eine Matrix A vom Typ $m \times n$ besteht aus m Zeilen und n Spalten. Die Einträge werden mit $a_{i,j}$ bezeichnet (Zeile i, Spalte j).

Spezielle Matrizen und Begriffe
Die folgende Tabelle fasst wichtige Matrix-Typen und Eigenschaften zusammen:

Begriff	**Erklärung / Eigenschaft**	**Beispiel**
Quadratisch	Gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten ($m = n$).	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
Diagonalmatrix	Quadratisch, alle Einträge ausserhalb der Hauptdiagonale sind 0.	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
Einheitsmatrix I	Diagonalmatrix mit nur Einsen auf der Diagonale. Neutrales Element ($A \cdot I = A$).	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Symmetrisch	Matrix ist gleich ihrer Transponierten: $A = A^T$. (Spiegelsymmetrisch zur Diagonale).	$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & 3 \end{pmatrix}$
Transponiert A^T	Vertauschen von Zeilen und Spalten. Aus $m \times n$ wird $n \times m$.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
Invers A^{-1}	Kehrmatrix, sodass $A \cdot A^{-1} = I$. Existiert nur, wenn $\det(A) \neq 0$.	$(AA^{-1} = I)$
Orthogonal	$A^T = A^{-1}$ bzw. $A^T A = I$. Die Spaltenvektoren sind zueinander orthogonal und haben Länge 1.	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Zeilenstufenform	Durch Gauss-Elimination erzeugt. Nullen unterhalb der Stufen.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2.5 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition

Ein LGS besteht aus mehreren linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Lösungsmethoden

- **Einsetzungsverfahren:** Eine Gleichung auflösen und in die andere einsetzen.
- **Gleichsetzungsverfahren:** Beide Gleichungen nach einer Variablen auflösen und gleichsetzen.
- **Additions-/Eliminationsverfahren (Gauss):** Systematische Elimination von Variablen.

Erweiterte Koeffizientenmatrix

Man schreibt die Koeffizienten A und die rechte Seite $\mathbf{b}$ in eine gemeinsame Matrix $(A|\mathbf{b})$. Zeilenoperationen (z. B. Zeile 2 minus Zeile 1) ändern die Lösungsmenge nicht.

Beispiel:

$$\begin{aligned} s - 160t &= 0 \\ s - 120t &= 100 \end{aligned} \xrightarrow{\text{Matrixform}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -160 & 0 \\ 1 & -120 & 100 \end{array}\right)$$

Ziel ist die **Zeilenstufenform** (Nullen unter der Diagonalen), um die Lösung durch **Rückwärtseinsetzen** zu finden.

Lösungsfälle Ein lineares Gleichungssystem hat entweder:

- **Genau eine Lösung** (Schnittpunkt).
- **Keine Lösung** (Widerspruch, z. B. parallele Geraden).
- **Unendlich viele Lösungen** (Identische Geraden).

2.6 Skalarprodukt

Definitionen

Das Skalarprodukt (Symbol $\cdot$) verknüpft zwei Vektoren zu einer reellen Zahl (Skalar).

- **Geometrisch:** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos(\phi)$
  (wobei ϕ der Winkel zwischen den Vektoren ist).
- **Algebraisch (in Koordinaten):** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$

Wichtige Anwendungen

- **Länge (Betrag) eines Vektors:**
  Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ergibt das Quadrat seiner Länge.
  $$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$
- **Orthogonalität (Senkrecht):**
  Zwei Vektoren ($\neq \mathbf{0}$) stehen genau dann senkrecht aufeinander ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$), wenn ihr Skalarprodukt **Null** ist.
  $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$$
- **Winkelberechnung:**
  Durch Umstellen der geometrischen Definition:
  $$\cos(\phi) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$
- **Normierung (Einheitsvektor):**
  Um einen Vektor auf die Länge 1 zu bringen (Einheitsvektor $\mathbf{e}$), teilt man ihn durch seinen Betrag:
  $$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$$

Rechenregeln Für Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ und Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (Kommutativgesetz)
- $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ (Distributivgesetz)
- $\lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\lambda\mathbf{b})$ (Assoziativ mit Skalar)

3 Gauss-Algorithmus

3.1 Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Definition
Ein Gleichungssystem besteht aus mehreren Gleichungen, die alle gemeinsam erfüllt sein müssen. Es heisst **linear**, wenn:

- Variablen nur in der **ersten Potenz** vorkommen (kein x^2, $\sin(x)$ etc.).
- Koeffizienten konstant sind (keine Variablen im Nenner oder Exponenten).

Erweiterte Koeffizientenmatrix
Um Schreibarbeit zu sparen, notiert man das System $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ als Matrix. Man fügt die rechte Seite $\mathbf{b}$ als extra Spalte an die Matrix A an:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 4x - y &= 1 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Matrix}} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

3.2 Gauss-Eliminationsverfahren

Ziel: Zeilenstufenform
Das Verfahren formt das LGS so um, dass eine „Treppenstruktur“ entsteht, aus der man die Lösung leicht ablesen kann.

- **Pivot (Leitkoeffizient):** Der erste Eintrag einer Zeile $\neq 0$.
- Pivots müssen immer weiter rechts stehen als in der Zeile darüber.
- Alle Einträge unterhalb der Pivots müssen 0 sein.

Erlaubte Operationen (Elementare Zeilenumformungen)
Diese ändern die Lösungsmenge nicht:

1. **Vertauschen:** Zwei Zeilen vertauschen.
2. **Skalieren:** Eine Zeile mit einer Zahl $c \neq 0$ multiplizieren.
3. **Addieren:** Ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren (Standard-Schritt, um Nullen zu erzeugen).

Lösungsweg

1. **Vorwärtselimination:** Bringe die Matrix durch Addition/Subtraktion von Zeilen in die Zeilenstufenform.
2. **Rückwärtseinsetzen:** Beginne bei der untersten Zeile, löse nach der Variablen auf und setze das Ergebnis schrittweise in die oberen Zeilen ein.

3.3 Beispiel: Gauss-Elimination

Gegebenes System:

$$\begin{aligned} x + y + 10z &= -6 \\ 6x - y - z &= 4 \\ 2x - y + z &= -2 \end{aligned}$$

1. Erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellen:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 6 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

2. Vorwärtselimination (Nullen erzeugen):

- *Ziel:* Nullen unter der ersten 1 (Spalte 1).
- $Z_2 \to Z_2 - 6 \cdot Z_1$
- $Z_3 \to Z_3 - 2 \cdot Z_1$

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & -7 & -61 & 40 \\ 0 & -3 & -19 & 10 \end{array}\right)$$

- *Ziel:* Null unter der -7 (Spalte 2). Um Brüche zu vermeiden, kann man z. B. Z_2 und Z_3 skalieren oder direkt $7 \cdot Z_3 - 3 \cdot Z_2$ rechnen.

$$\to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & -7 & -61 & 40 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \end{array}\right) \quad \text{(Zeilenstufenform erreicht)}$$

3. Rückwärtseinsetzen:

- **Aus Zeile 3:** $50z = -50 \implies \mathbf{z = -1}$
- **In Zeile 2:** $-7y - 61(-1) = 40 \implies -7y + 61 = 40 \implies -7y = -21 \implies \mathbf{y = 3}$
- **In Zeile 1:** $1x + 1(3) + 10(-1) = -6 \implies x + 3 - 10 = -6 \implies x - 7 = -6 \implies \mathbf{x = 1}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(1, 3, -1)\}$

4 LU-Zerlegung

4.1 Invertierbare Matrizen

Definition
Eine quadratische $n \times n$-Matrix A heisst **invertierbar**, **regulär** oder **nichtsingulär**, wenn eine $n \times n$-Matrix B existiert, sodass gilt:

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

Man nennt B die zu A inverse Matrix und bezeichnet sie mit $B = A^{-1}$.

Eigenschaften

- Ist A invertierbar, hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für jedes b eine eindeutige Lösung ($x = A^{-1}b$).
- Das Inverse eines Produkts kehrt die Reihenfolge um: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4.2 Permutationsmatrix

Definition
Eine Permutationsmatrix P ist eine quadratische Matrix, bei der jede Zeile und jede Spalte genau eine Eins enthält, wobei alle anderen Elemente Null sind. Sie entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von Zeilen.

Wirkung

- **Multiplikation von links (PA):** Vertauscht die Zeilen von A.
- **Multiplikation von rechts (AP):** Vertauscht die Spalten von A.

Beispiel (Zeilentausch)
Um bei einer 3×3-Matrix die 1. und 2. Zeile zu vertauschen, wird die Einheitsmatrix entsprechend umgeformt (Tausch der 1. und 2. Zeile von E):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Angewandt auf eine Matrix A:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Hier wurde die erste Zeile $(0, 1, 1)$ mit der zweiten Zeile $(1, 2, 1)$ vertauscht.

4.3 LR-Zerlegung (LU Decomposition)

Konzept
Die LR-Zerlegung faktorisiert eine Matrix A in das Produkt einer unteren Dreiecksmatrix L (Lower) und einer oberen Dreiecksmatrix U (Upper).

$$A = L \cdot U$$

- U **(Upper):** Ist die Zeilenstufenform von A, die durch Gauss-Elimination entsteht.
- L **(Lower):** Ist eine untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen. Sie enthält die Multiplikatoren der Eliminationsschritte (l_{ij} an der Position i-te Zeile, j-te Spalte).

Zerlegung mit Zeilentausch
Müssen während der Elimination Zeilen vertauscht werden (Pivotisierung), wird die Matrix PA zerlegt:

$$P \cdot A = L \cdot U$$

4.4 Lösen eines LGS mittels LR-Zerlegung

Das Verfahren nutzt die Zerlegung $A = LU$, um das System $Ax = b$ durch zwei einfachere Dreieckssysteme zu lösen. Dies ist besonders effizient, wenn mehrere Gleichungssysteme mit derselben Matrix A, aber unterschiedlichen Vektoren b gelöst werden müssen.

Vorgehen Das System $Ax = b$ wird umgeformt zu $L(Ux) = b$. Man substituiert $Ux = y$ und löst in zwei Schritten:

1. **Vorwärtseinsetzen:** Löse $Ly = b$ nach y auf.
2. **Rückwärtseinsetzen:** Löse $Ux = y$ nach x auf.

1. Vorwärtseinsetzen ($Ly = b$)
Da L eine untere Dreiecksmatrix ist, lassen sich die Unbekannten y von oben nach unten berechnen. Beispiel für 3×3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich direkt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 \\ y_2 &= b_2 - l_{21}y_1 \\ y_3 &= b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2 \end{aligned}$$

2. Rückwärtseinsetzen ($Ux = y$)
Da U eine obere Dreiecksmatrix ist, lassen sich die Unbekannten x von unten nach oben berechnen. Beispiel für 3×3:

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen (Auflösen nach x_3, dann x_2, dann x_1):

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{y_3}{u_{33}} \\ x_2 &= \frac{y_2 - u_{23}x_3}{u_{22}} \\ x_1 &= \frac{y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3}{u_{11}} \end{aligned}$$

Konkretes Beispiel (2×2)
Gegeben sei das System $Ax = b$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix}$.

Die LR-Zerlegung von A ergibt: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Schritt 1 ($Ly = b$):**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 5$$

$$4 \cdot 5 + y_2 = 21 \implies y_2 = 1$$

$\implies y = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

- **Schritt 2 ($Ux = y$):**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 1$$

$$x_1 + 2 \cdot 1 = 5 \implies x_1 = 3$$

$\implies$ **Lösung:** $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5 Gauss-Jordan-Elimination

5.1 Gauss-Jordan-Algorithmus

Konzept
Das Gauss-Jordan-Verfahren ist eine Erweiterung des Gauss-Eliminationsverfahrens. Ziel ist es, die Matrix nicht nur in die Zeilenstufenform, sondern in die **reduzierte Zeilenstufenform** (Diagonalmatrix, idealerweise Einheitsmatrix) zu bringen.

Vorgehen

1. Matrix in Zeilenstufenform bringen (Gauss-Elimination).
2. Von **rechts nach links** und von **unten nach oben** Nullen oberhalb der Pivotelemente erzeugen.
3. Pivotelemente durch Division auf 1 normieren.

Anwendung

- Direktes Ablesen der Lösungen ohne Rückwärtseinsetzen.
- Simultanes Lösen mehrerer Gleichungssysteme ($Ax = a, Ax = b, \ldots$) durch Erweiterung der Matrix.
- Berechnung der inversen Matrix.

5.2 Inverse Matrix

Definition
Eine quadratische Matrix A ist invertierbar, wenn eine Matrix A^{-1} existiert, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = I \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = I$$

wobei I die Einheitsmatrix ist.

Berechnung mittels Gauss-Jordan
Man schreibt die Matrix A und die Einheitsmatrix I nebeneinander: $(A \mid I)$. Durch Anwendung des Gauss-Jordan-Algorithmus wird die linke Seite zur Einheitsmatrix umgeformt. Die rechte Seite wird dabei automatisch zur Inversen.

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{Gauss-Jordan}} (I \mid A^{-1})$$

5.3 Determinante

Definition und Bedeutung
Die Determinante ist eine Kennzahl (Skalar) für quadratische Matrizen.

- $\det(A) \neq 0 \iff A$ ist regulär (invertierbar).
- $\det(A) = 0 \iff A$ ist singulär (nicht invertierbar).
- Geometrisch entspricht sie im $\mathbb{R}^2$ der Fläche und im $\mathbb{R}^3$ dem Volumen (Spatprodukt).

Berechnung

- **2 × 2 Matrix:**
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \det(A) = ad - bc$$

- **3 × 3 Matrix (Regel von Sarrus):**
Für $A = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ gilt:
$$\det(A) = (u_1v_2w_3 + v_1w_2u_3 + w_1u_2v_3) - (u_3v_2w_1 + v_3w_2u_1 + w_3u_2v_1)$$

- **Dreiecksmatrizen:**
Die Determinante ist das Produkt der Diagonalelemente.

Rechenregeln für Determinanten

- **Zeilenvertauschung:** Das Vorzeichen ändert sich ($\det_{neu} = -\det_{alt}$).
- **Zeilenmultiplikation:** Wird eine Zeile mit Faktor k multipliziert, ändert sich die Determinante um Faktor k.
- **Zeilenaddition:** Die Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen ändert die Determinante **nicht**.
- **Transposition:** $\det(A) = \det(A^T)$.

5.4 Cramersche Regel

Ein Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme $Ax = b$, wenn $\det(A) \neq 0$.

Formel

Die Lösung für die Unbekannte x_i ist:
$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Dabei ist A_i die Matrix, die entsteht, wenn man die i-te Spalte von A durch den Vektor b ersetzt.

Beispiel (2 × 2)
$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$
mit $D = \det(A)$, $D_x = \det(b, \text{Spalte}_2)$, $D_y = \det(\text{Spalte}_1, b)$.

6 Vektorprodukt und Lineare Abbildungen

6.1 Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Definition
Das Vektorprodukt $u \times v$ zweier Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor x, der senkrecht (orthogonal) auf beiden Vektoren steht.

Berechnung
Für $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann die Regel von Sarrus mit den Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 verwendet werden:

$$u \times v = \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

- **Länge:** $|u \times v| = |u| \cdot |v| \cdot \sin(\varphi)$, wobei φ der eingeschlossene Winkel ist. Geometrisch entspricht dies der Fläche des von u und v aufgespannten Parallelogramms.
- **Orthogonalität:** Das Produkt steht senkrecht auf u und v ($u \cdot (u \times v) = 0$).
- **Antikommutativität:** $u \times v = -(v \times u)$.
- **Parallelität:** Sind u und v parallel, ist $u \times v = 0$.

6.2 Lineare Abbildungen

Definition
Eine Abbildung $F : V \to W$ heisst **linear**, wenn für alle Vektoren u, v und Skalare s gilt:

- $F(u + v) = F(u) + F(v)$ (Additivität)
- $F(s \cdot u) = s \cdot F(u)$ (Homogenität)

Matrix-Darstellung
Jede lineare Abbildung im $\mathbb{R}^n$ lässt sich durch eine Matrix A darstellen.

$$F(x) = A \cdot x$$

Dabei sind die Spalten der Matrix A die Bilder der Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ unter der Abbildung.

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ F(e_1) & F(e_2) & \ldots & F(e_n) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

6.3 Beispiele (2D-Transformationen)

Hier sind die Standardmatrizen für Transformationen im $\mathbb{R}^2$:

1. Skalierung

Streckung um Faktor λ (zentrisch am Ursprung):

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

2. Drehung

Drehung um den Ursprung um den Winkel φ (gegen den Uhrzeigersinn):

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

3. Spiegelung

- An der x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- An der y-Achse: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- An einer Ursprungsgeraden mit Winkel φ:

$$S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \sin(2\varphi) \\ \sin(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix}$$

4. Scherung

Scherung entlang der x-Achse mit Faktor s:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6.4 Zusammensetzung von Abbildungen

Werden mehrere lineare Abbildungen nacheinander ausgeführt, entspricht dies der Multiplikation ihrer Matrizen.

Reihenfolge

Sei A die erste Abbildung ($x \to Ax$) und B die zweite Abbildung ($y \to By$). Die Gesamtabbildung C ist:

$$C = B \cdot A$$

Wichtig: Die zuerst ausgeführte Abbildung steht in der Multiplikation rechts (nahe am Vektor x).

$$z = B(Ax) = (B \cdot A)x$$

Die Matrixmultiplikation ist im Allgemeinen nicht kommutativ ($B \cdot A \neq A \cdot B$), daher ist die Reihenfolge entscheidend.

7 Orthogonale Abbildungen und Homogene Koordinaten

7.1 Orthogonale Abbildungen

Definition
Eine lineare Abbildung A heisst **orthogonal**, wenn sie längentreu und winkeltreu ist. Das bedeutet, geometrische Formen werden zwar gedreht oder gespiegelt, aber nicht verzerrt oder skaliert.
Eigenschaften

- **Inverse:** Die Inverse ist gleich der Transponierten ($A^{-1} = A^T$).
- **Determinante:** $\det(A) = \pm 1$.
  - $\det(A) = 1$: Drehung (Orientierung bleibt erhalten).
  - $\det(A) = -1$: Spiegelung (Orientierung wird umgekehrt).
- **Normierung:** Die Spalten- und Zeilenvektoren haben die Länge 1 und stehen paarweise senkrecht aufeinander.
- **Skalarprodukt:** Das Skalarprodukt bleibt erhalten: $(Ax) \cdot (Ay) = x \cdot y$.

7.2 Homogene Koordinaten (2D)

Konzept
Die klassische Matrix-Vektor-Multiplikation Ax kann nur lineare Abbildungen (Drehung, Skalierung) darstellen, aber keine Verschiebungen (Translationen), da der Nullvektor bei linearen Abbildungen immer auf sich selbst abgebildet werden muss. Um Translationen ebenfalls als Matrix-Multiplikation schreiben zu können, erweitert man die Koordinaten um eine Dimension (homogene Komponente, meist 1).

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\text{homogen}} \quad v_h = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

2D-Transformationen in homogenen Koordinaten (3×3 Matrizen)

- **Rotation (um Ursprung):**

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Translation (Verschiebung um u, v):**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & 1 & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.3 Zusammensetzung von Abbildungen

Mehrere Transformationen werden durch Multiplikation der entsprechenden Matrizen verkettet. Da die Matrixmultiplikation **nicht kommutativ** ist, ist die Reihenfolge entscheidend.

Reihenfolge: Die Abbildung, die zuerst auf den Vektor wirken soll, steht rechts (am nächsten beim Vektor).

$$v_{neu} = \underbrace{M_n \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1}_{\text{Gesamtmatrix } M} \cdot v_{alt}$$

Beispiel: Drehung um einen beliebigen Punkt P
Um ein Objekt um einen Punkt P (statt um den Ursprung) zu drehen, sind drei Schritte nötig:

1. Verschiebung von P in den Ursprung (T^{-1}).
2. Drehung um den Ursprung (R).
3. Rückverschiebung an die ursprüngliche Position (T).

$$M_{Gesamt} = T \cdot R \cdot T^{-1}$$

7.4 Homogene Koordinaten in 3D

Für den dreidimensionalen Raum werden Vektoren auf 4 Komponenten erweitert $(x, y, z, 1)^T$. Die Transformationsmatrizen haben die Grösse 4×4.

Translation (3D)

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u \\ 0 & 1 & 0 & v \\ 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotationen (3D)

- **Um x-Achse:**

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Um y-Achse:**

$$R_y = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Um z-Achse:**

$$R_z = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Einfache lineare Regression

Kommt bald...

9 Multiple lineare Regression

Kommt bald...

10 Eigenwerte und Eigenvektoren

Sicher hinzufügen wie man einfach eigenwerte ablesen kann und auch eigenvektore

11 Eigenwerte- und Eigenvektoren

11.1 Positiv definite Matrizen

Definition
Eine symmetrische Matrix A heisst **positiv definit**, wenn für jeden Vektor $x \neq 0$ gilt:

$$x^T A x > 0$$

Gilt nur $x^T A x \geq 0$, nennt man die Matrix **positiv semi-definit**.

Regeln (Symmetrische Matrizen):

Standard Regeln

- Die Matrix ist positiv definit, wenn alle **Eigenwerte λ positiv** sind ($\lambda > 0$).
- Für symmetrische 2×2 Matrix gilt:

$$a > 0 \quad \text{und} \quad \det(A) = ad - b^2 > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

Sylvester-Kriterium (min 1 Krt.)

1. Alle Pivots sind positiv.
2. Alle führenden Hauptminoren (det oben links) sind positiv.
3. Alle Eigenwerte $\lambda_i > 0$.
4. Die definierende Eigenschaft gilt: $x^T A x > 0$ für alle $x \neq 0$.
5. Es existiert eine Zerlegung $A = R^T R$ (mit R mit unabhängigen Spalten).

11.2 Diagonalisierung

Voraussetzung: Die $n \times n$-Matrix A muss n linear unabhängige Eigenvektoren besitzen.

- **Hauptformeln:**

$$A = V \Lambda V^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda = V^{-1} A V$$

- **Ableitung:** Die Grundgleichung $Ax_i = \lambda_i x_i$ wird zur Matrixgleichung $AV = V\Lambda$.
- **Variablen:**
  - V: Die **Eigenvektormatrix** (Spalten sind die Eigenvektoren x_i).
  - Λ: Die **Eigenwertmatrix** (Diagonalmatrix mit den Eigenwerten λ_i).

$$A \underbrace{[x_1, x_2]}_{\mathbf{V}} = [\lambda_1 \mathbf{x_1}, \lambda_2 \mathbf{x_2}] = \underbrace{[x_1, x_2]}_{\mathbf{V}} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Lambda}}$$

11.3 Eigenschaften von Determinante (det) und Spur (tr)

Es gilt für beliebige Matrizen $\mathbf{A}(n \times n)$:

- Die Spur der Matrix ist gleich der Summe der Eigenwerte.
- Die Determinante der Matrix ist gleich dem Produkt der Eigenwerte.

Für beliebige Matrizen $\mathbf{A}(n \times n)$ und $\mathbf{B}(n \times n)$ und ein Skalar c gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{A}) + \mathrm{tr}(\mathbf{B}) \\
\mathrm{tr}(c\mathbf{A}) &= c \cdot \mathrm{tr}(\mathbf{A}) \\
\det(c\mathbf{A}) &= c^n \det(\mathbf{A}) \\
\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) &= \mathrm{tr}(\mathbf{BA}) \\
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{BA}) \\
\det(\mathbf{AB}) &= \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \\
\det(\mathbf{A}^{-1}) &= (\det(\mathbf{A}))^{-1}
\end{aligned}$$

11.4 Ähnliche Matrizen

Definition und Kern-Eigenschaften

- **Definition:** Zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ sind ähnlich, wenn eine invertierbare Matrix $\mathbf{M}$ existiert, sodass gilt:
$$\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$$
- **Theorem:** Ähnliche Matrizen haben immer die **selben Eigenwerte** (λ).
- **Folgerung:** Haben dieselbe **Spur** ($\mathrm{tr} = \sum \lambda$) und **Determinante** ($\det = \prod \lambda$).

Prüfung und Beispiel

- Bei Diagonalmatrizen können die Eigenwerte λ direkt von der Diagonale abgelesen werden.
- **Beispiel-Matrizen** (alle ähnlich mit $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$):

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

Nachweis der Ähnlichkeit durch Matrix M

Ziel: Finde eine invertierbare Matrix $\mathbf{M}$, die $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{AM}$ erfüllt.

1. **Prüfbedingung aufstellen:** Nutze die äquivalente Gleichung:
$$\mathbf{MB} = \mathbf{AM}$$
2. **Transformationsmatrix M bestimmen (Heuristik):** Wähle $\mathbf{M}$ basierend auf der visuellen Transformation (Vorzeichen, Vertauschung) zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. Beispielwahl: $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. **Gleichung verifizieren (Berechnung):** Die Multiplikation beider Seiten muss zum gleichen Ergebnis führen.

$$\begin{aligned}
\mathbf{MB} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AM} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Fazit: Da $\mathbf{MB} = \mathbf{AM}$ gilt, ist die Ähnlichkeit nachgewiesen.

11.5 Potenzen von Matrizen

Eigenschaften der Potenzierung

- Falls $\mathbf{A}$ potenziert wird, bleiben die Eigenvektoren x gleich, die Eigenwerte λ werden aber potenziert ($\lambda \to \lambda^n$).
- Für jeden EV x zum EW λ gilt:

$$\mathbf{A}^n x = \lambda^n x$$

Effiziente Berechnung von $\mathbf{A}^n$

- **Methode:** Berechnung mittels Diagonalisierung $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$.
- **Endformel:**

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{V}^{-1}$$

- **Vorteil (2x2):** Die Potenzierung von $\mathbf{\Lambda}$ erfolgt trivial auf der Diagonale:

$$\mathbf{\Lambda}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

12 Singulärwertzerlegung-I

12.1 Definition

Satz der Singulärwertzerlegung
Die Singulärwertzerlegung (SVD) zerlegt jede beliebige $m \times n$-Matrix A in ein Produkt von drei speziellen Matrizen[cite: 66]:

$$A = U\Sigma V^T$$

Die Eigenschaften der Komponenten sind:

- U**:** Eine orthogonale $m \times m$-Matrix ($U^T U = I$, $U^{-1} = U^T$)[cite: 69]. Die Spalten von U heissen **Links-Singulärvektoren**[cite: 268].
- Σ**:** Eine $m \times n$-Diagonalmatrix. Die Einträge auf der Diagonalen heissen **Singulärwerte** σ_i[cite: 70]. Sie sind positiv und der Grösse nach geordnet ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$)[cite: 152].
- V**:** Eine orthogonale $n \times n$-Matrix ($V^T V = I$, $V^{-1} = V^T$)[cite: 71]. Die Spalten von V heissen **Rechts-Singulärvektoren**[cite: 268].

Zusammenhang mit symmetrischen Matrizen
Die Berechnung der SVD basiert auf den Eigenwerten und Eigenvektoren der symmetrischen Matrizen $A^T A$ und AA^T[cite: 42]:

- $A^T A = V\Sigma^2 V^T$: Die Matrix $A^T A$ liefert die Rechts-Singulärvektoren V und die Quadrate der Singulärwerte[cite: 270, 271].
- $AA^T = U\Sigma^2 U^T$: Die Matrix AA^T liefert die Links-Singulärvektoren U[cite: 272, 273].

12.2 Berechnung

Die Bestimmung der SVD erfolgt typischerweise in folgenden Schritten:
1. Berechnung von V und Σ

1. Berechne die symmetrische Matrix $A^T A$[cite: 269].
2. Bestimme die Eigenwerte λ_i von $A^T A$ durch Lösen der charakteristischen Gleichung $\det(A^T A - \lambda I) = 0$[cite: 287].
3. Die **Singulärwerte** sind die Wurzeln dieser Eigenwerte: $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$[cite: 280, 288]. Damit ist die Matrix Σ bestimmt.
4. Bestimme die zugehörigen normierten Eigenvektoren. Diese bilden die Spalten v_i der Matrix V[cite: 281].

2. Berechnung von U Um die Matrix U zu bestimmen, nutzt man die Beziehung $AV = U\Sigma$, was spaltenweise $Av_i = \sigma_i u_i$ entspricht[cite: 321, 332].

- Für jeden Singulärwert $\sigma_i > 0$ berechnet sich der Vektor u_i durch:

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

  Dies stellt sicher, dass die Vorzeichen korrekt sind[cite: 318].

- Falls A nicht quadratisch ist oder $\sigma_i = 0$, müssen die fehlenden Vektoren u_i so gewählt werden, dass sie orthonormal zu den bestehenden Spalten sind (Basisergänzung)[cite: 383].

Alternativer Weg für U:
Man kann U auch als Eigenvektoren von AA^T berechnen[cite: 307]. Dabei muss jedoch darauf geachtet werden, dass die Vorzeichen mit V kompatibel sind.

13 Singulärwertzerlegung II

To do...