

Gestion de Portefeuille

TP-2: Droite de Marchés des Capitaux

Paul Giraud & Kouamé YAO

Version: 20 fév 2022

Données

Séries de rendement quotidien pour 11 valeurs:

```
daily.ret.file <- file.path(get.data.folder(), "daily.ret.rda")
load(daily.ret.file)
kable(table.Stats(daily.ret), "latex", booktabs=T) %>% kable_styling(latex_options="scale_down")
```

Rendement annuel moyen:

```
kable(252*100*colMeans(daily.ret), "latex", booktabs=T, digits=1, col.names=c("Rendement (%)"),
      caption="Rendement annuel moyen")
```

Matrice de corrélation des rendements:

```
correl <- cor(daily.ret)
correl[lower.tri(correl)] <- NA
```

	AAPL	AMZN	MSFT	F	SPY	QQQ	XOM	MMM	HD	PG	KO
Observations	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000	3308.0000
NAs	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
Minimum	-0.1792	-0.1278	-0.1171	-0.2500	-0.0984	-0.0896	-0.1395	-0.1295	-0.0822	-0.0790	-0.0867
Quartile 1	-0.0077	-0.0094	-0.0073	-0.0103	-0.0038	-0.0047	-0.0068	-0.0055	-0.0067	-0.0046	-0.0047
Median	0.0010	0.0008	0.0005	0.0000	0.0006	0.0010	0.0001	0.0008	0.0006	0.0004	0.0007
Arithmetic Mean	0.0012	0.0015	0.0008	0.0005	0.0004	0.0006	0.0001	0.0004	0.0008	0.0004	0.0005
Geometric Mean	0.0010	0.0012	0.0006	0.0001	0.0003	0.0005	0.0000	0.0003	0.0006	0.0003	0.0004
Quartile 3	0.0112	0.0123	0.0088	0.0106	0.0056	0.0070	0.0073	0.0070	0.0082	0.0055	0.0059
Maximum	0.1390	0.2695	0.1860	0.2952	0.1452	0.1216	0.1719	0.0988	0.1407	0.1021	0.1388
SE Mean	0.0003	0.0004	0.0003	0.0005	0.0002	0.0002	0.0003	0.0002	0.0003	0.0002	0.0002
LCL Mean (0.95)	0.0005	0.0006	0.0002	-0.0005	0.0000	0.0002	-0.0004	-0.0001	0.0002	0.0000	0.0001
UCL Mean (0.95)	0.0019	0.0023	0.0013	0.0014	0.0008	0.0011	0.0006	0.0009	0.0013	0.0007	0.0009
Variance	0.0004	0.0006	0.0003	0.0007	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0001	0.0001
Stdev	0.0196	0.0243	0.0170	0.0266	0.0121	0.0130	0.0150	0.0140	0.0162	0.0109	0.0113
Skewness	-0.2151	1.4889	0.4319	0.7627	0.1379	-0.0084	0.4199	-0.3815	0.5114	0.0555	0.5004
Kurtosis	6.2706	16.8872	10.2176	20.9458	15.2824	7.3976	15.4203	7.3856	6.4641	8.1017	14.3236

Table 1: Rendement annuel moyen

	Rendement (%)
AAPL	30.2
AMZN	37.2
MSFT	19.0
F	11.4
SPY	9.9
QQQ	15.3
XOM	3.5
MMM	9.9
HD	19.2
PG	9.3
KO	12.5

Table 2: Corrélation des rendements quotidiens

	AAPL	AMZN	MSFT	F	SPY	QQQ	XOM	MMM	HD	PG	KO
AAPL	1	0.46	0.49	0.37	0.61	0.75	0.40	0.45	0.42	0.32	0.32
AMZN		1.00	0.50	0.33	0.56	0.66	0.39	0.41	0.44	0.27	0.30
MSFT			1.00	0.39	0.71	0.76	0.53	0.53	0.49	0.44	0.46
F				1.00	0.56	0.53	0.37	0.44	0.46	0.30	0.31
SPY					1.00	0.92	0.77	0.75	0.71	0.62	0.60
QQQ						1.00	0.64	0.69	0.66	0.52	0.52
XOM							1.00	0.60	0.47	0.52	0.49
MMM								1.00	0.55	0.50	0.47
HD									1.00	0.45	0.44
PG										1.00	0.57
KO											1.00

```
options(knitr.kable.NA = '')
kable(correl, "latex", booktabs=T, digits=2, caption="Corrélation des rendements quotidiens") %>%
kable_styling(latex_options="scale_down")
```

Droite de Marché des Capitaux (Capital Market Line)

- A partir des calculs présentés en cours, mettre en oeuvre une méthode numérique pour déterminer le portefeuille tangent quand les poids des actifs risqués sont contraints à être positifs: $w_i \geq 0$.

Pour déterminer le portefeuille nous devons calculer le portefeuille sur frontière efficiente qui maximise le ratio de Sharpe càd:

$$\begin{aligned} \max_w \quad & \frac{w^T \mu - r_f}{(w^T \Sigma w)^{\frac{1}{2}}} \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \mathbf{1}^T w = 1 \end{aligned}$$

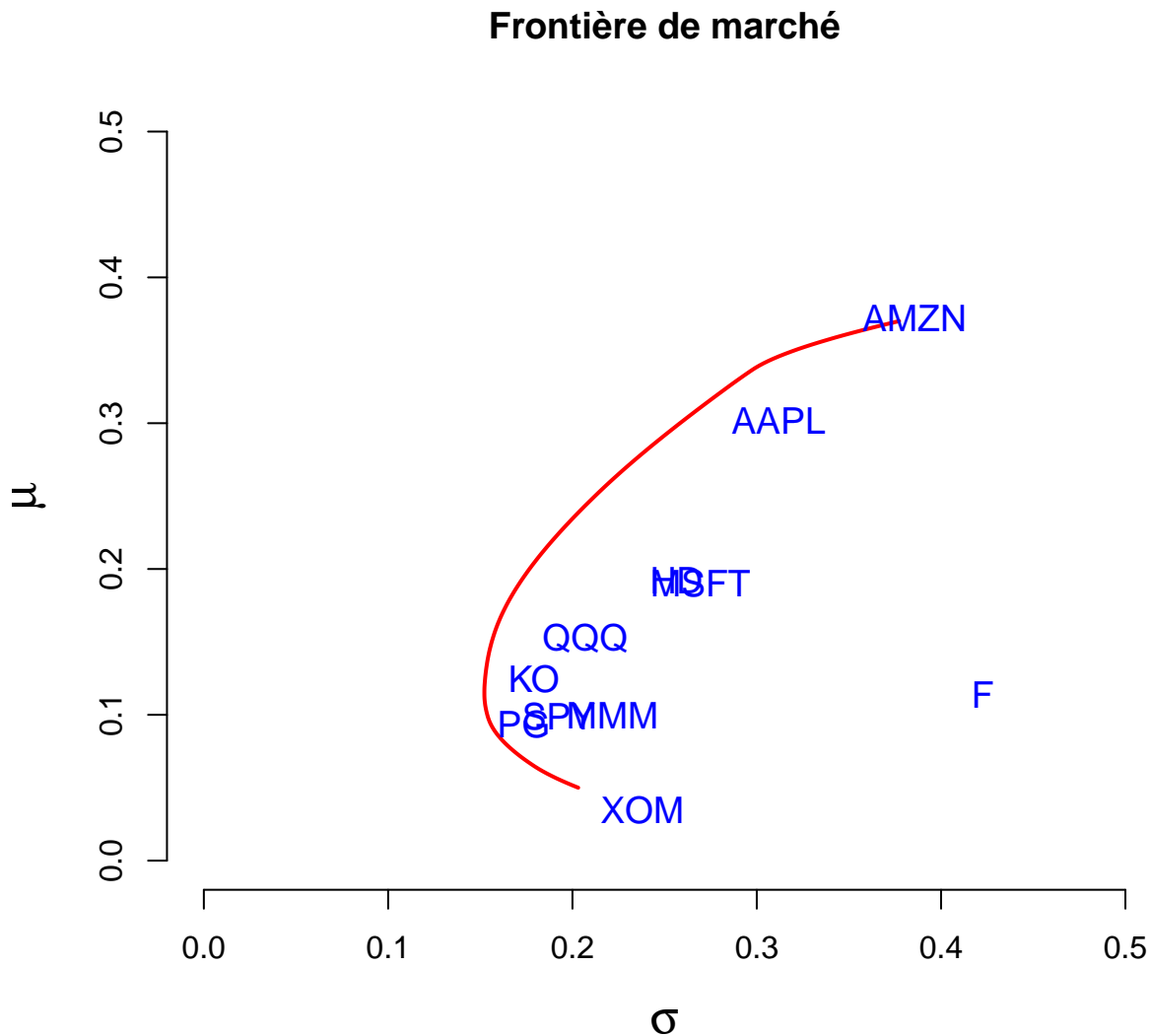
Solution:

$$w = \frac{\Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1}(\mu - r_f \mathbf{1})}$$

Dans un premier temps nous allons voir la frontière en utilisant le modèle de Markowitz:

$$\begin{aligned} \min \quad & w^T \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & \mu^T w = \mu^* \\ & \mathbf{1}^T w = 1 \end{aligned}$$

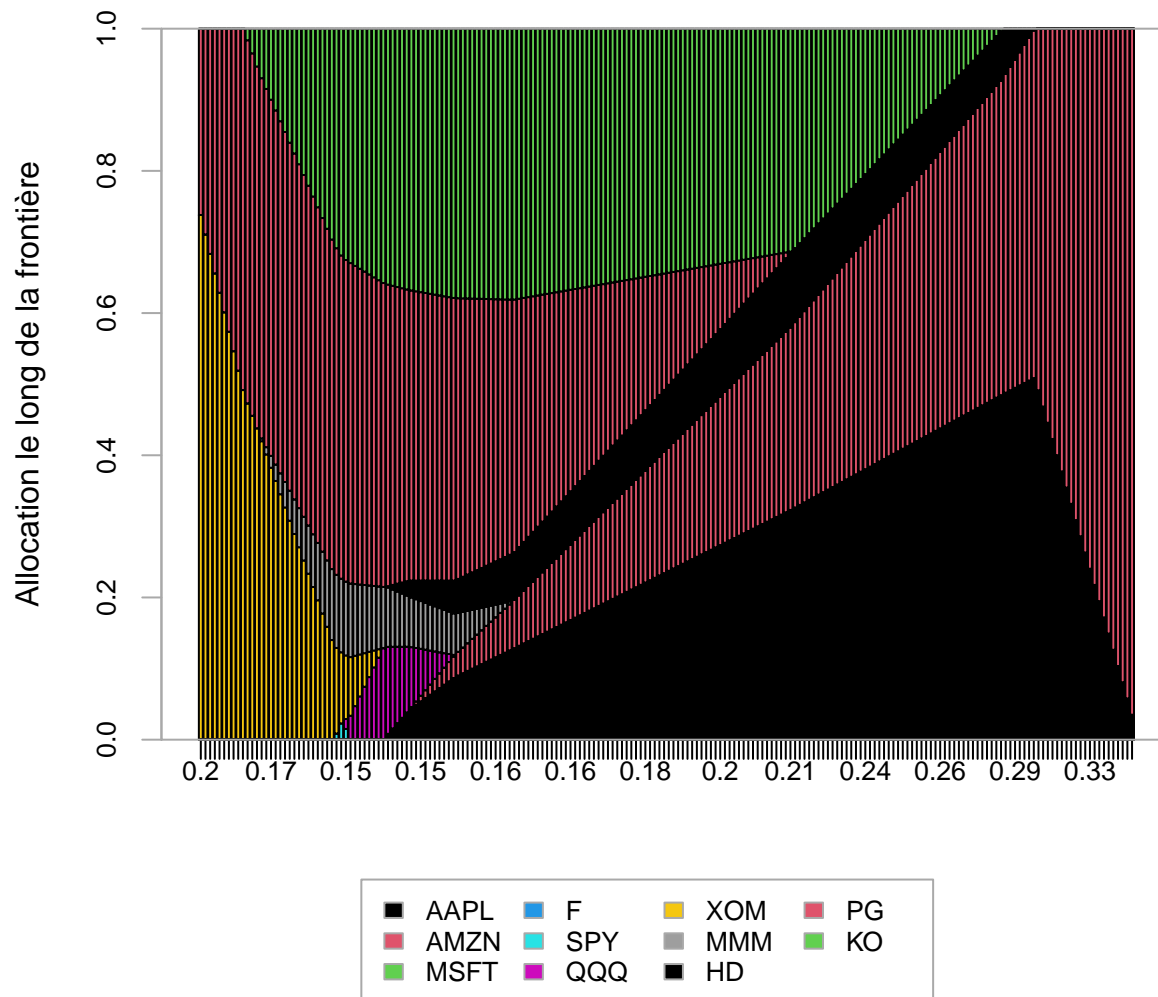
Calcul de la frontière de marché (Long)



Nous avons imposé que les poids des actifs soient contraints à être positifs, donc que nous ne pouvons pas vendre à découvert ces actifs. Nous pouvons vérifier cela dans l'allocation le long de la frontière de marché.

Allocation le long de la frontière

```
chart.StackedBar(sol[, 3+seq_along(mu)], xaxis.labels=round(sol[, "stdev"],2),
  xlab="SD Portefeuille", ylab="Allocation le long de la frontière")
```



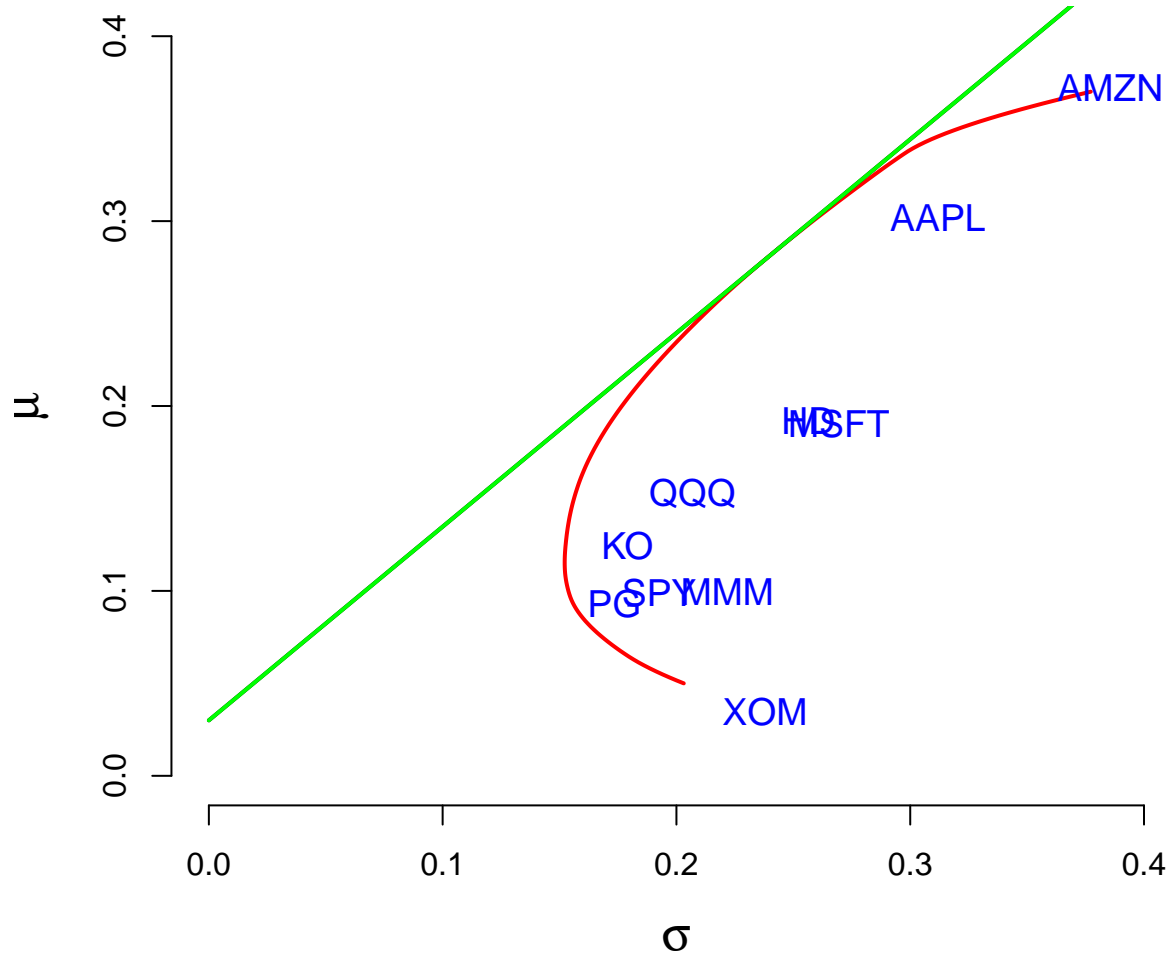
Calcul de la Frontière (Long) en ajoutant un actif sans risque pour obtenir le portefeuille tangent.

Maintenant pour obtenir le portefeuille tangent nous allons ajouter un actif sans risque au portefeuille :

```
sol.with.rf <- NULL
for(mu.star in seq(from=rf, to=1.3, length.out=200)){
  tmp <- matrix(c(mu.star, (mu.star - rf)/sharpe.max , sharpe.max, (mu.star - rf)*w.tangent), nrow=1)
  if(is.null(sol.with.rf)) {
    sol.with.rf <- tmp
  } else {
    sol.with.rf <- rbind(sol.with.rf, tmp)
  }
}
dimnames(w.tangent)<- list(tickers)
```

```
sigma.tangent <- sqrt(t(w.tangent) %*% Sigma %*% w.tangent)
colnames(sol.with.rf) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", tickers)
colnames(sol) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", tickers)
```

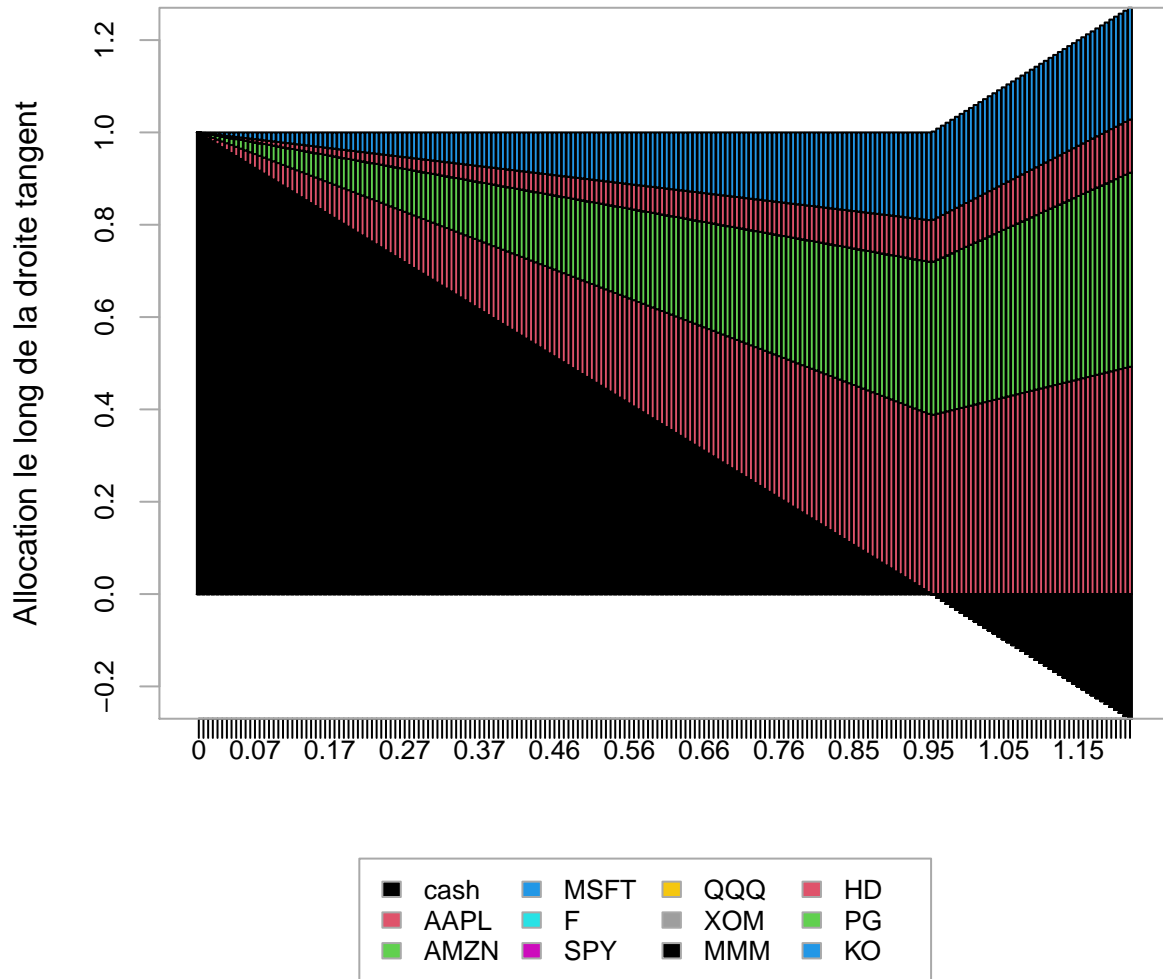
Frontière de marché (selon contraintes)



Allocation le long de la droite tangente

```
cash <- 1-rowSums(sol.with.rf[,3+seq_along(mu)])
alloc <- cbind(cash, sol.with.rf[,3+seq_along(mu)] )

chart.StackedBar(alloc, xaxis.labels=round(sol.with.rf[,"stdev"],2),
                  xlab="SD Portefeuille", ylab="Allocation le long de la droite tangente")
```



Composition du portefeuille tangent

Nous pouvons remarquer d'après la table de composition du portefeuille tangent que nous n'avons pas besoin seulement de 4 titres différents pour le former. Nous pouvons voir que pour la participation pour Amazon ou Apple est élevé. Un investisseur pourrait préférer ne pas investir plus qu'un certain seuil dans un seul et même titre. Nous allons par exemple dans la suite contraindre nos poids à ne pas dépasser 20 %.

```
kable(w.tangent*100, booktabs=T, digits=2, col.names = "Proportion (%)",
      caption="Composition du portefeuille tangeant")
```

Nous allons refaire les mêmes calcul en ajoutant des contraintes supplémentaires qui nous semblent pertinentes

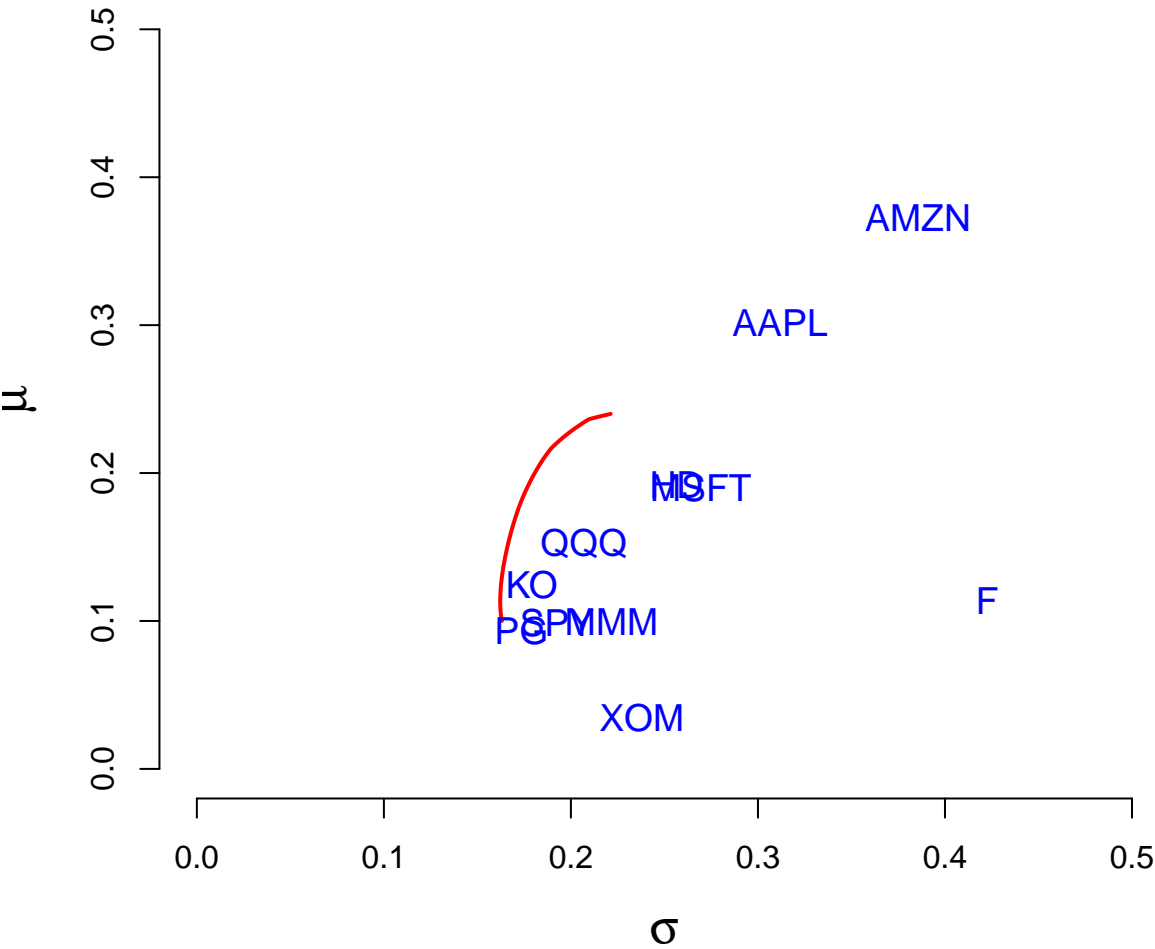
Table 3: Composition du portefeuille tangent

Proportion (%)	
AAPL	38.76
AMZN	33.11
MSFT	0.00
F	0.00
SPY	0.00
QQQ	0.00
XOM	0.00
MMM	0.00
HD	9.07
PG	0.00
KO	19.06

Pas plus de 20% de l'actif risqué alloué à un seul titre

Calcul de la frontière de marché (Long)

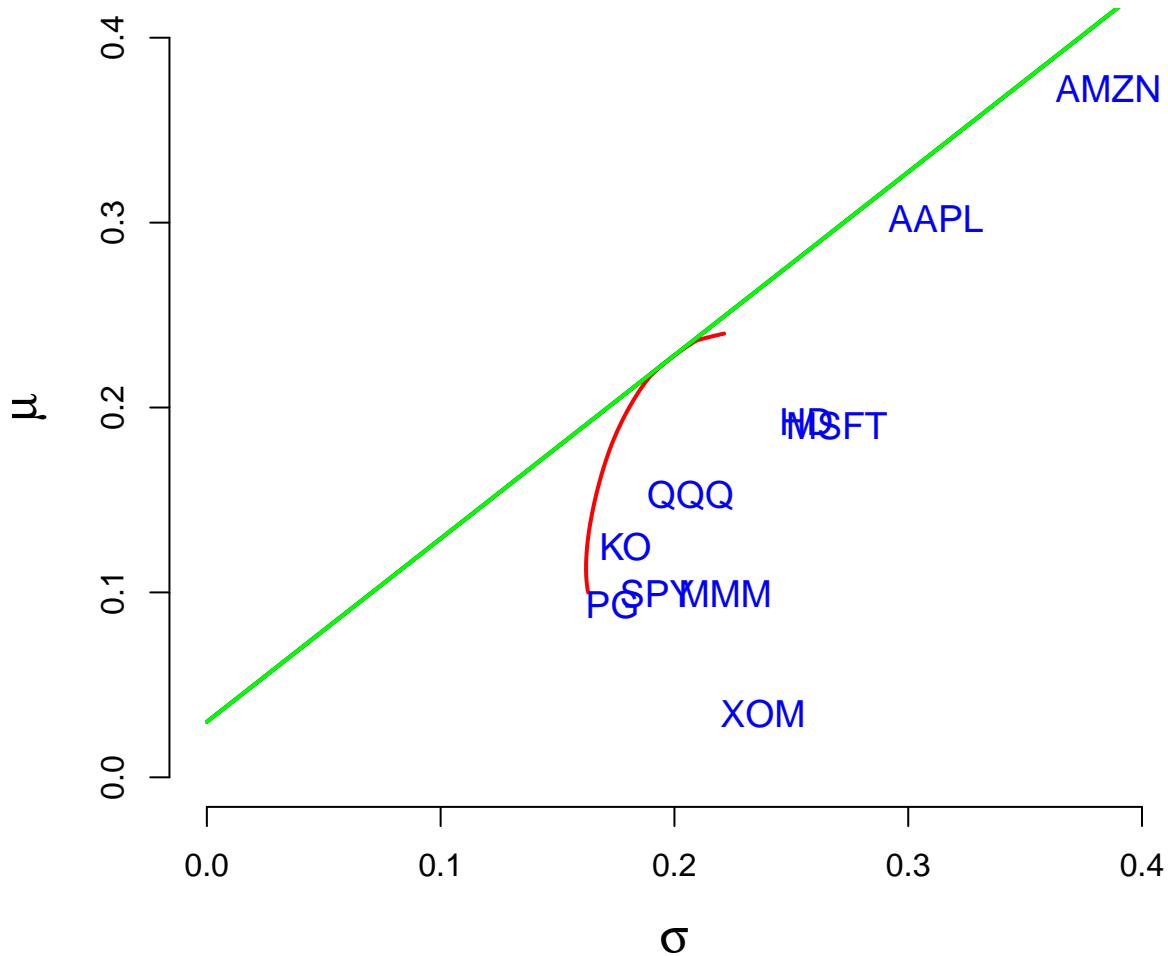
Frontière de marché



Calcul du portefeuille tangent.

```
sol.with.rf <- NULL
for(mu.star in seq(from=rf, to=1.3, length.out=200)){
  tmp <- matrix(c(mu.star, (mu.star - rf)/sharpe.max, sharpe.max, (mu.star - rf)*w.tangent), nrow=1)
  if(is.null(sol.with.rf)) {
    sol.with.rf <- tmp
  } else {
    sol.with.rf <- rbind(sol.with.rf, tmp)
  }
}
dimnames(w.tangent) <- list(tickers)
sigma.tangent <- sqrt(t(w.tangent) %*% Sigma %*% w.tangent)
colnames(sol.with.rf) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", tickers)
colnames(sol) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", tickers)
```

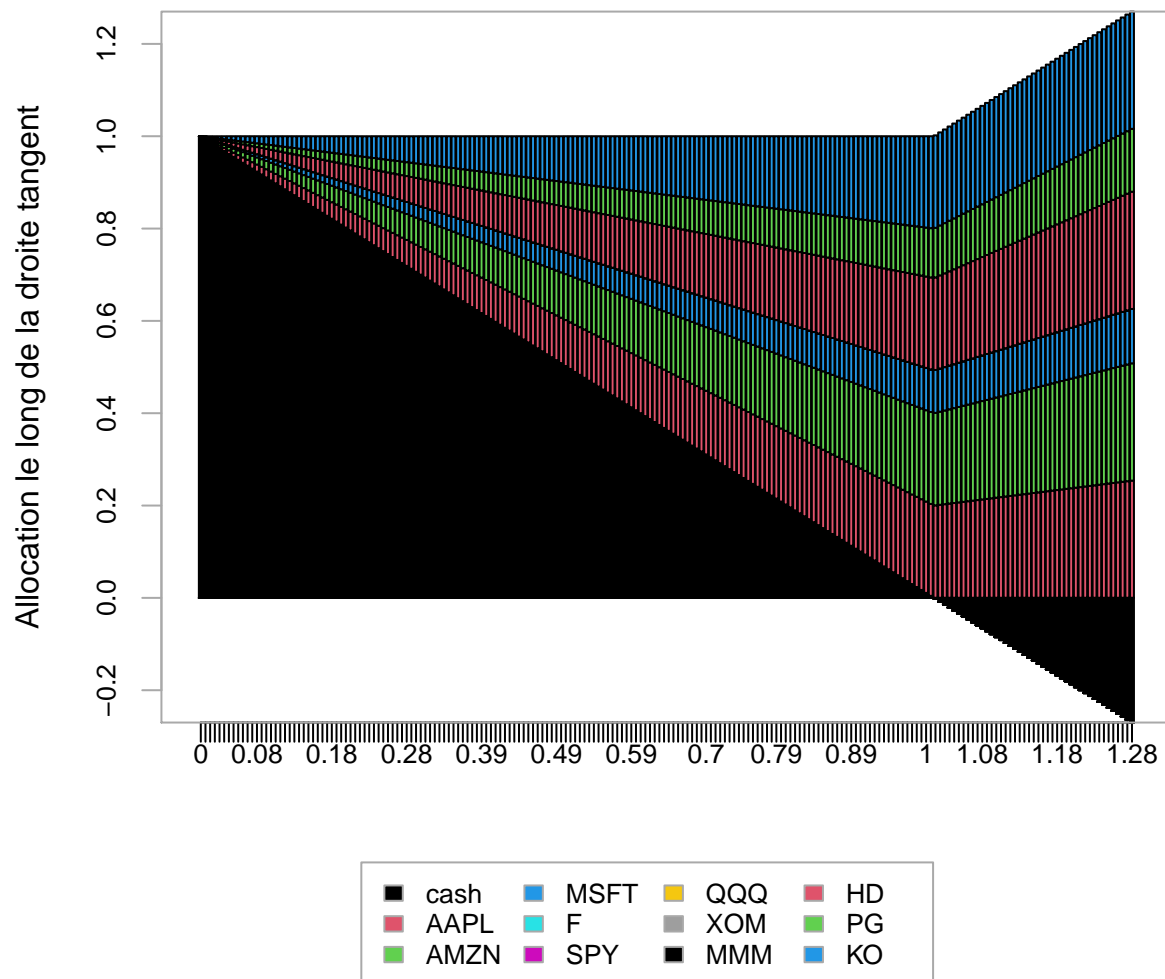
Frontière de marché (selon contraintes)



Allocation le long de la droite tangente

```
cash <- 1-rowSums(sol.with.rf[,3+seq_along(mu)])
alloc <- cbind(cash, sol.with.rf[,3+seq_along(mu)] )

chart.StackedBar(alloc, xaxis.labels=round(sol.with.rf[, "stdev"],2),
                  xlab="SD Portefeuille", ylab="Allocation le long de la droite tangent")
```



Composition du portefeuille tangent avec contraintes

```
kable(w.tangent*100, booktabs=T, digits=2, col.names = "Proportion (%)",
      caption="Composition du portefeuille tangeant")
```

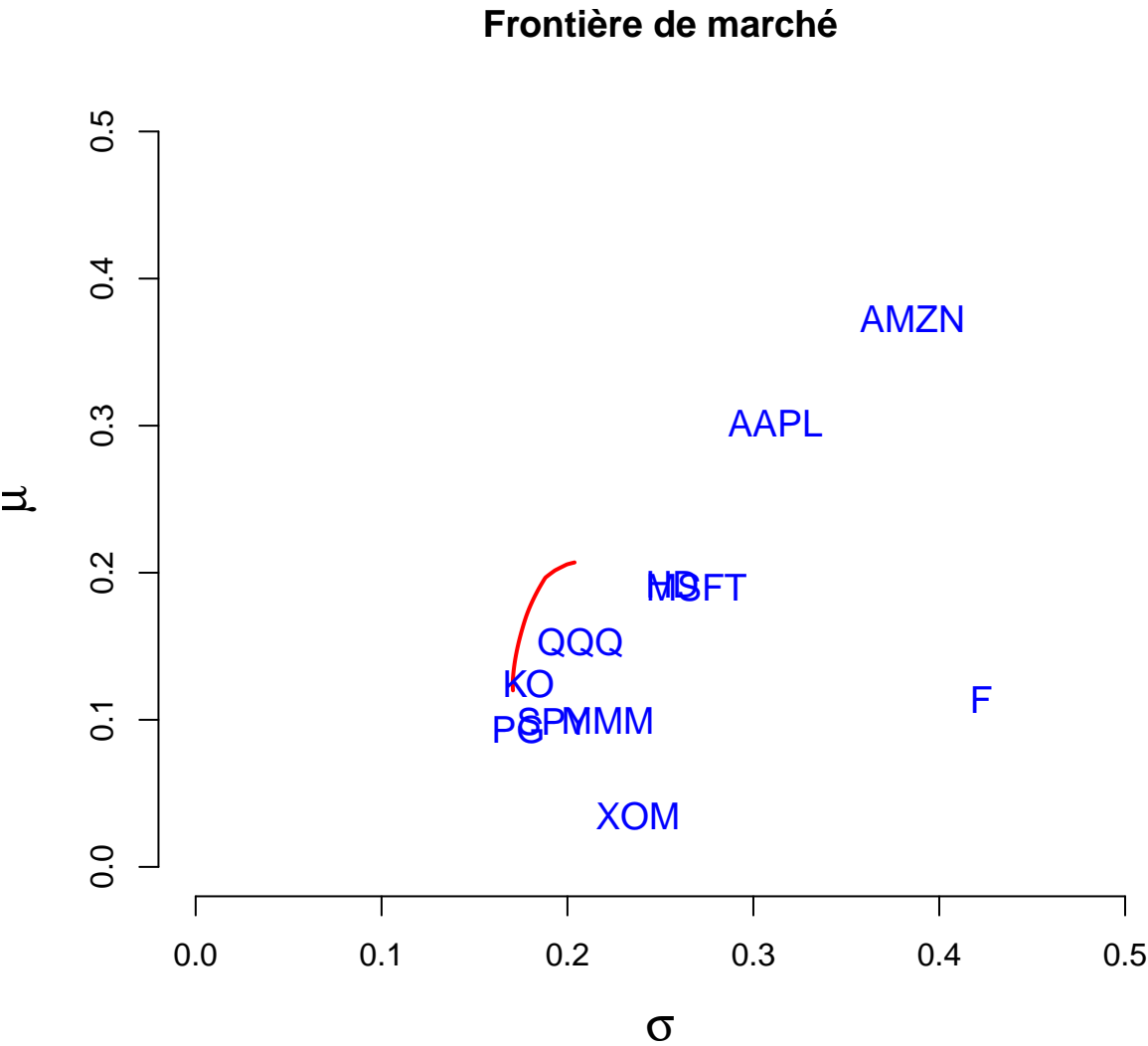
Pas plus de 25% de l'actif risqué alloué à un seul titre et investir au minimum 5% dans chaque titre

Nous voulons maintenant diversifier au plus nos actifs. Pour cela, nous voulons au minimum 3% de chaque actif et ne pas leur allouer plus de 15%.

Table 4: Composition du portefeuille tangent

Proportion (%)	
AAPL	20.00
AMZN	20.00
MSFT	9.28
F	0.00
SPY	0.00
QQQ	0.00
XOM	0.00
MMM	0.00
HD	20.00
PG	10.72
KO	20.00

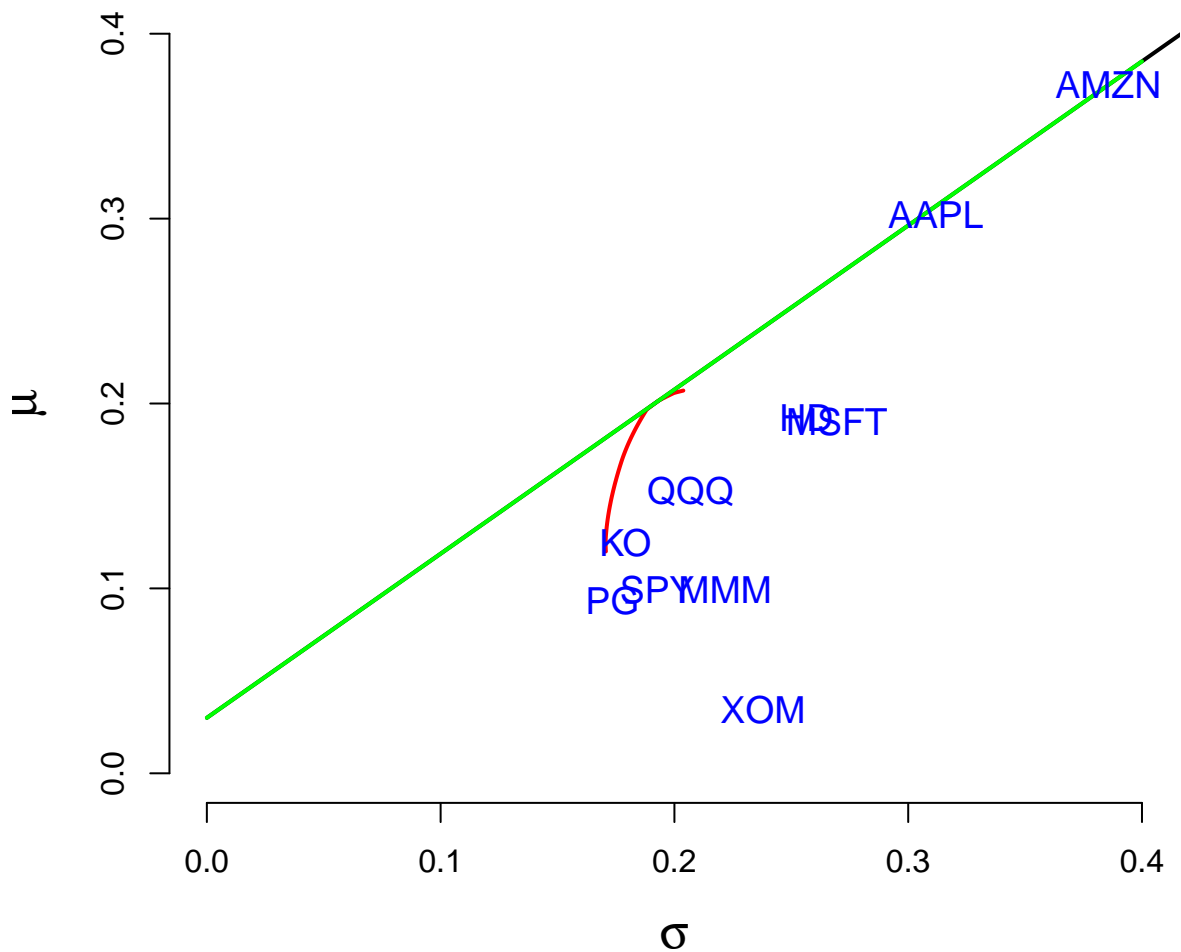
Calcul de la frontière de marché (Long)



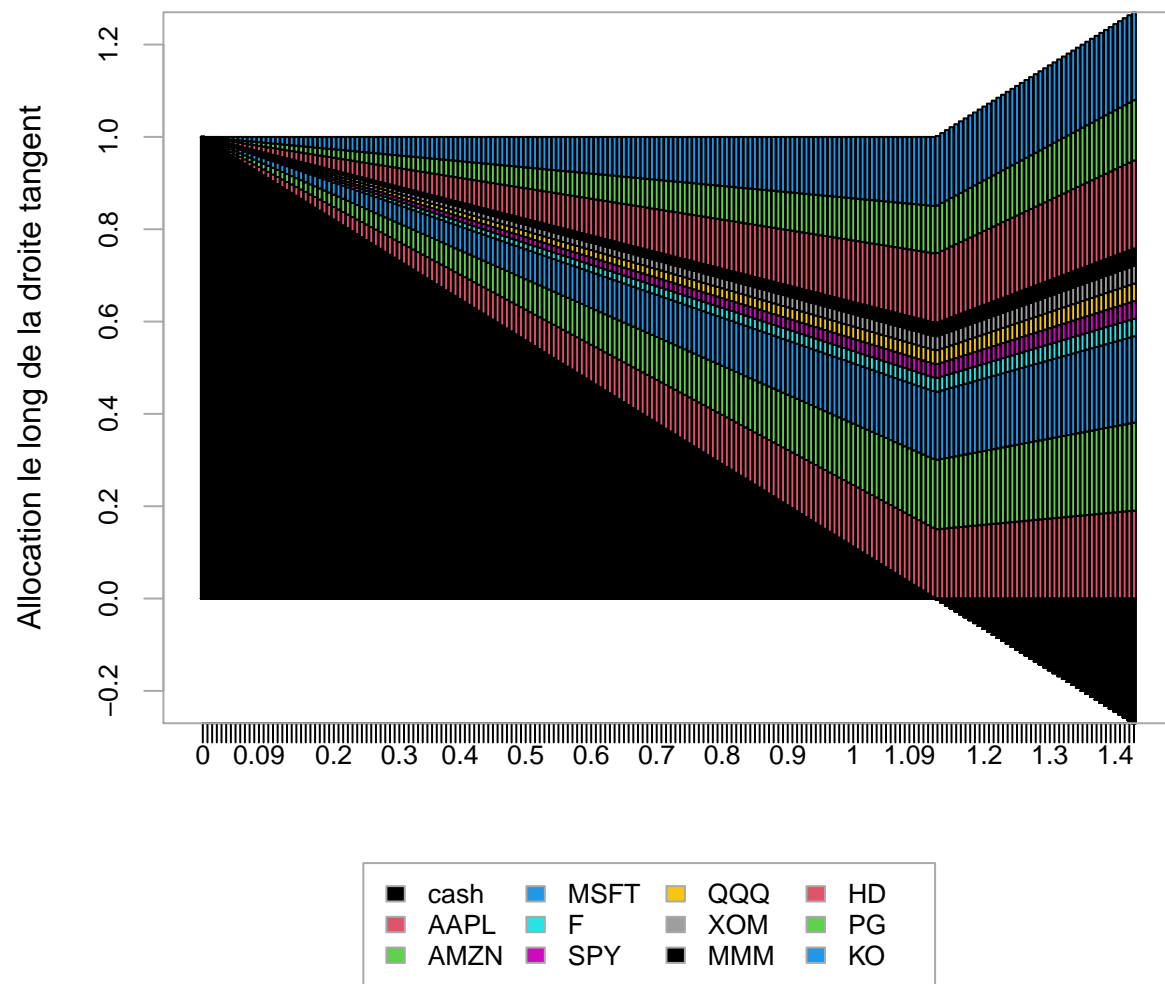
Calcul du portefeuille tangent.

```
sol.with.rf <- NULL
for(mu.star in seq(from=rf, to=1.3, length.out=200)){
  tmp <- matrix(c(mu.star, (mu.star - rf)/sharpe.max, sharpe.max, (mu.star - rf)*w.tangent), nrow=1)
  if(is.null(sol.with.rf)) {
    sol.with.rf <- tmp
  } else {
    sol.with.rf <- rbind(sol.with.rf, tmp)
  }
}
dimnames(w.tangent) <- list(tickers)
sigma.tangent <- sqrt(t(w.tangent) %*% Sigma %*% w.tangent)
colnames(sol.with.rf) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", tickers)
colnames(sol) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", tickers)
```

Frontière de marché (selon contraintes)



Allocation le long de la droite tangente



Composition du portefeuille tangent avec contraintes

```
kable(w.tangent*100, booktabs=T, digits=2, col.names = "Proportion (%)",
      caption="Composition du portefeuille tangeant")
```

Table 5: Composition du portefeuille tangent

	Proportion (%)
AAPL	15.00
AMZN	15.00
MSFT	14.72
F	3.00
SPY	3.00
QQQ	3.00
XOM	3.00
MMM	3.00
HD	15.00
PG	10.28
KO	15.00