Gestion de Portefeuille

TP-4: Impact de la matrice de covariance dans le modèle MV

Berthoumieu Aymeric, Jallouli Mouad, Kingne Jéhoiakim

Février-Mars 2021

Données

On utilise la base de données "MultiAsset" du paquet FRAPO:

```
library(FRAPO)
data(MultiAsset)
R <- returnseries(MultiAsset, percentage=F, trim=T)
```

Quelques statistiques descriptives sont résumées ci-dessous:

```
statNames <- c("mean", "std dev", "skewness", "kurtosis")
symbols <- colnames(R)
mo <- matrix(NA, nrow=length(symbols), ncol=length(statNames))
n <- 1
for(s in symbols) {
  ts <- R[, s]
  mo[n,] <- c(mean(ts), sd(ts), skewness(ts), kurtosis(ts))
  n <- n+1
}

colnames(mo) <- statNames
rownames(mo) <- symbols
```

```
kbl(mo, caption="Summary Statistics", booktabs=T) %>%
  kable_styling(latex_options=c("stripped", "HOLD_position"))
```

Table 1: Summary Statistics

	mean	std dev	skewness	kurtosis
GSPC	0.0007196	0.0483492	-0.8809988	1.7602430
RUA	0.0011323	0.0503202	-0.8975063	1.8397675
GDAXI	0.0046327	0.0597951	-0.9841812	1.9749395
FTSE	0.0018748	0.0437702	-0.6912771	0.4962667
N225	-0.0030518	0.0623081	-1.0447685	2.8567460
EEM	0.0085561	0.0807882	-0.7309404	1.2765558
DJCBTI	0.0037850	0.0167642	0.7542986	2.7505223
GREXP	0.0037178	0.0101831	0.1244254	-0.4231236
BG05.L	0.0013854	0.0151824	0.2047405	1.1789559
GLD	0.0158004	0.0547407	-0.4762910	0.7606515

Etude de la matrice de covariance

On se propose d'étudier la matrice de covariance à l'aide de la formule de Stevens pour la matrice d'information $\mathcal{I} = \Sigma^{-1}$.

- Pour chaque actif, estimer le modèle

$$R_{i,t} = \beta_0 + \beta_i^T R_t^{(-i)} + \epsilon_{i,t}$$

avec $R_t^{(-i)}$ vecteur de rendement de tous les actifs sauf l'actif i, $\epsilon_{i,t} \sim \mathcal{N}(0, s_i^2)$

```
Assets <- colnames(R)
end <- dim(R)[2]
reg_result<-data.frame(row.names = c("Intercept",Assets))

residuals <- data.frame(row.names = Assets)

for (i in 1:end){
  toRegress <- R[,i]
  X <- R
  X[,i] <- NULL

  #linear regression
  res <- lm(toRegress ~ X[,1] + X[,2] + X[,3] + X[,4] + X[,5] + X[,6] + X[,7] + X[,8] + X[,9])
  coef <- res$coefficients
  residuals[i,1:length(res$residuals)] <- res$residuals

  # save the coefficient in the dataframe
  reg_result[-(i+1),i] <- coef
  reg_result[i+1,i] <- 0
}
colnames(reg_result) <- Assets
```

```r
kbl(reg_result,
    caption="Regression coeficients",booktabs=T) %>%
  kable_styling(latex_options=c("scale_down", "HOLD_position"))
```

Table 2: Regression coeficients

	GSPC	RUA	GDAXI	FTSE	N225	EEM	DJCBTI	GREXP	BG05.L	GLD
Intercept	-0.0003723	0.0003146	0.0075545	-0.0000051	-0.0061170	0.0010314	0.0006139	0.0027672	-0.0021850	0.0088452
GSPC	0.0000000	0.9944360	-0.4891005	0.6433106	-2.2776046	-0.9278675	0.6719678	-0.1815166	-0.0626254	-1.1120692
RUA	0.9786626	0.0000000	0.9029563	-0.3099280	2.3761407	1.6102497	-0.5659893	0.1537922	-0.0442393	0.9262960
GDAXI	-0.0071170	0.0133509	0.0000000	0.2084721	0.2901686	0.1348772	-0.0384100	-0.0483384	0.0881103	-0.3797045
FTSE	0.0188581	-0.0092317	0.4199770	0.0000000	0.3252629	0.4990441	-0.0189834	0.0261764	0.0400349	-0.3057432
N225	-0.0144138	0.0152798	0.1261975	0.0702194	0.0000000	0.0810539	-0.0108309	-0.0046509	0.0085509	0.0062008
EEM	-0.0080379	0.0141740	0.0802958	0.1474742	0.1109503	0.0000000	-0.0290964	-0.0016587	0.0079406	0.6826637
DJCBTI	0.0616101	-0.0527297	-0.2420182	-0.0593744	-0.1569163	-0.3079558	0.0000000	0.2534506	0.5424742	1.2266790
GREXP	-0.0353573	0.0304398	-0.6470762	0.1739383	-0.1431530	-0.0372976	0.5384594	0.0000000	0.3776007	-0.2575828
BG05.L	-0.0053052	-0.0038081	0.5129561	0.1156949	0.1144624	0.0776519	0.5012209	0.1642189	0.0000000	-0.3381080
GLD	-0.0055844	0.0047265	-0.1310360	-0.0523750	0.0049203	0.3957284	0.0671850	-0.0066405	-0.0200423	0.0000000

- Trier les modèles par R_i^2 décroissant. En déduire les actifs qui sont susceptibles de recevoir un poids important dans le portefeuille optimal MV.

```r
modelised.ret <- data.frame(init=rep(0,dim(R)[1]))

for (i in 1:end){
  modelised.ret[,Assets[i]] <-
    apply(R, 1, weighted.mean, reg_result[2:(end+1),i]) + reg_result[1,i]

}
modelised.ret$init <- NULL
variance <- data.frame(variance=apply(modelised.ret, 2, sd)^2)
residual.variance <- apply(t(residuals), 2, sd)^2
residual.variance <- sort(residual.variance, decreasing = TRUE)
df <- as.data.frame(residual.variance)
colnames(df) <- "Résidual variance"
df$Variance <- variance$variance[match(rownames(df), rownames(variance))]

kbl(df,
    caption="Asset sorted by variance of their modelisation in decreasing order",booktabs=T) %>%
  kable_styling(latex_options=c("stripped", "HOLD_position"))
```

Table 3: Asset sorted by variance of their modelisation in decreasing order

	Résidual variance	Variance
GLD	0.0018018	0.0059360
N225	0.0014297	0.0059093
EEM	0.0010445	0.0023558
GDAXI	0.0006218	0.0103910
FTSE	0.0003087	0.0018289
BG05.L	0.0001068	0.0001406
DJCBTI	0.0000987	0.0001465
GREXP	0.0000465	0.0004547
RUA	0.0000092	0.0024898
GSPC	0.0000090	0.0024083

Les poids des actifs étant inversement proportionnels à la variance de leur modélisation (mieux un actif est modélisé plus on lui donne un fort poids dans notre portefeuille). Ainsi, le modèle MV donnera des poids de plus en plus fort à mesure que l'on descend dans le tableau.

- Calculer les poids optimaux du modèle MV, et comparer avec les résultats des régressions.

```
gamma <- 0.08
exp.ret <- colMeans(R)
df.weight <- data.frame(matrix(nrow=end,ncol=4))
colnames(df.weight) <- c("Expected Return","Return of the replication","Residual Variance","Proportion
rownames(df.weight) <- c(Assets)
for (as in Assets){
   others.ret <- exp.ret%*%reg_result[2:(end+1),as]
   df.weight[as,1] <- exp.ret[as]
   df.weight[as,2] <- others.ret
   df.weight[as,4] <-  round(100*gamma*(exp.ret[as] - others.ret)/residual.variance[as],2)
}
df.weight[,3] <- df[,1]
kbl(df.weight,
    caption="Multifacteur assets allocation",booktabs=T) %>%
  kable_styling(latex_options=c("stripped", "HOLD_position"))
```

Table 4: Multifacteur assets allocation

	Expected Return	Return of the replication	Residual Variance	Proportion (%)
GSPC	0.0007196	0.0010919	0.0018018	-329.20
RUA	0.0011323	0.0008178	0.0014297	273.71
GDAXI	0.0046327	-0.0029217	0.0010445	97.19
FTSE	0.0018748	0.0018800	0.0006218	-0.13
N225	-0.0030518	0.0030652	0.0003087	-34.23
EEM	0.0085561	0.0075248	0.0001068	7.90
DJCBTI	0.0037850	0.0031710	0.0000987	49.77
GREXP	0.0037178	0.0009505	0.0000465	476.59
BG05.L	0.0013854	0.0035703	0.0000092	-163.66
GLD	0.0158004	0.0069553	0.0000090	39.27

Modèle MV

On considère que le risk free rate vaut 3%.

```
mu <- colMeans(R[,Assets]) * 12
Sigma <- cov(R[,Assets]) * 12
mu.star <- seq(from=0.0, to=1, length.out=200)
mu.free <- 0.03
sol <- NULL
sol.with.rf<-NULL
sharpe.max <- 0

for(mu.s in mu.star) {

# constraints: 2 equality
A.sum <- matrix(rep(1,length(mu)), ncol=1)
A.mat <- cbind(A.sum, mu)
b <- c(1, mu.s)
qp <- solve.QP(2*Sigma, rep(0,length(mu)), A.mat, b, meq=2)
sharpe <- (mu.s - mu.free) / sqrt(qp$value)

if (sharpe > sharpe.max){
  # tangent portfolio
  w.tangent <- matrix(qp$solution / sum(qp$solution), ncol=1)
  sharpe.max <- sharpe
}
tmp <- matrix(c(mu.s, sqrt(qp$value), sharpe, qp$solution), nrow=1)
if(is.null(sol)) {
  sol <- tmp
} else {
  sol <- rbind(sol, tmp)
}
}

for(mu.s in seq(from=0.09, to=1.2, length.out=200)){
  tmp <- matrix(c(mu.s, (mu.s - mu.free)/sharpe.max , sharpe.max, (mu.s - mu.free)*w.tangent), nrow=1)
  if(is.null(sol.with.rf)) {
    sol.with.rf <- tmp
  } else {
    sol.with.rf <- rbind(sol.with.rf, tmp)
  }
}
dimnames(w.tangent)<- list(Assets)
sigma.tangent <- sqrt(t(w.tangent) %*% Sigma %*% w.tangent)
colnames(sol.with.rf) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", Assets)
colnames(sol) <- c("mu", "stdev", "Sharpe", Assets)
```

```
plot(sol[,"stdev"], sol[,"mu"], type='l', col='red', lwd=2,
     xlab=expression(sigma), ylab="Excess Return",
     ylim=c(0, 0.4), xlim=c(.0, 0.3),
     cex.lab=1.5, bty='n', main="Frontière de marché (selon contraintes)")

lines(x = c(.0, 0.40), sharpe.max*c(.0, 0.40)+mu.free,
      type='l', col='green', lwd=2)
```

```
for(i in seq_along(Assets)) {
  text(sqrt(Sigma[i,i]), mu[i], Assets[i], cex=0.9, col="blue")
}
```

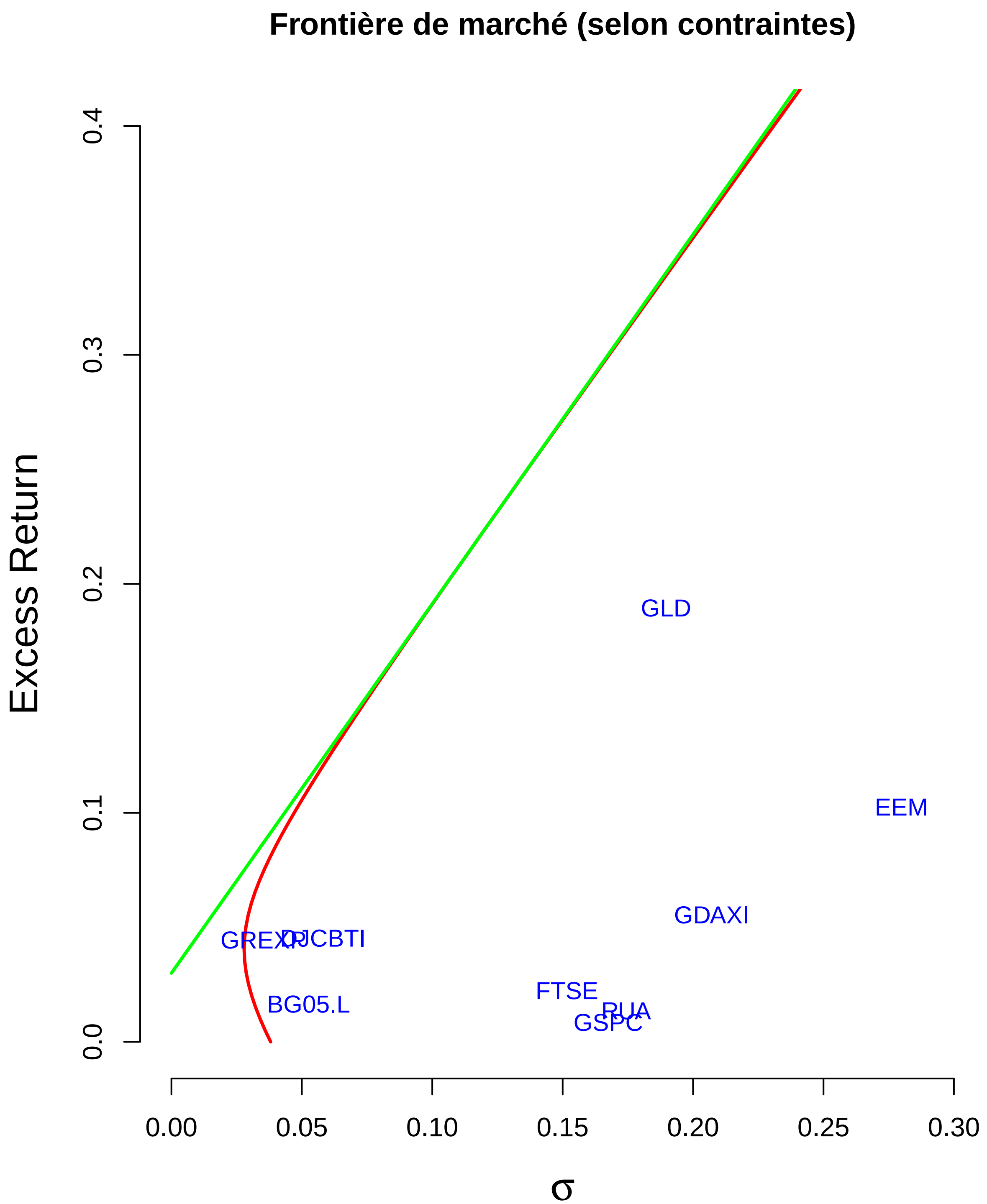


Table 5: Composition du portefeuille optimal selon modèle MV

	Proportion (%)
GSPC	-336.05
RUA	264.52
GDAXI	75.46
FTSE	-3.84
N225	-35.99
EEM	16.48
DJCBTI	67.16
GREXP	182.74
BG05.L	-160.93
GLD	30.44

```
kable(w.tangent*100, booktabs=T, digits=2, col.names = "Proportion (%)",
      caption="Composition du portefeuille optimal selon modèle MV")
```

Interpretation

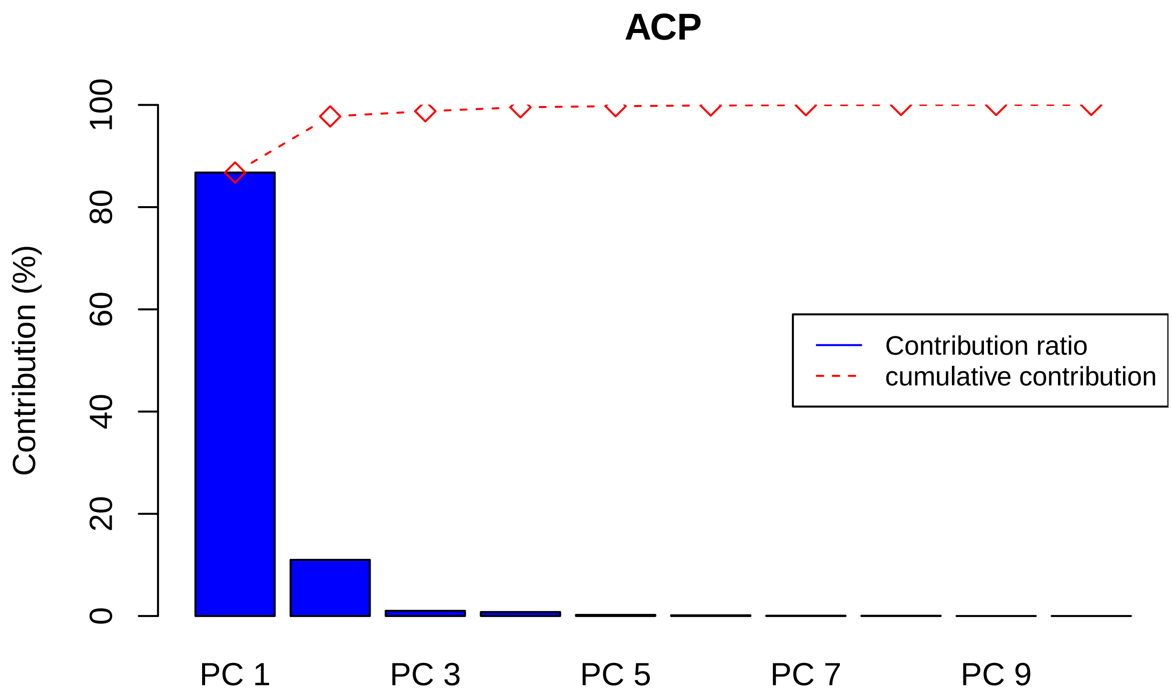
Pour les trois plus gros poids en valeurs absolues, on retrouve bien les actifs aillant les variances résiduelles les plus faible. En revanche, l'ordre est chamboulé pour le reste des actifs car les poids ne sont pas calculé qu'à partir de cette variance résiduelle. Ainsi, d'autres facteurs deviennent prépondérants. Ces facteurs sont le rendement espéré de l'actif et la qualité de réplication des autres actifs qui sont calculés dans le modèle Multifacteur ci-dessus. On voit bien que, pour une variance résiduelle fixée, plus l'actif est bien répliqué par les autres actifs plus forte sera sa pondération. Le signe de la pondération est aussi bien déterminé par le signe de la différence entre le rendement espéré et le rendement espéré de la réplication (autres actifs). Le modèle multifacteur(matrice d'information) permet donc de justifier les pondérations obtenues par l'optimisation MV. Les poids obtenus par les deux méthodes sont bien similaires.

Lien avec l'ACP

- Effectuer une ACP de la matrice de covariance des rendements.

```
nb.ev = 10
nb.obs <- nrow(Sigma)

res.pca.1 <- prcomp(Sigma, scale=TRUE)

# normalized eigenvalues
norm.ev <- res.pca.1$sdev^2
norm.ev <- norm.ev/sum(norm.ev)

large.ev.1 <- norm.ev[1:nb.ev]
names(large.ev.1) <- paste("PC", seq_along(large.ev.1))


plot.1 <- barplot(100*large.ev.1, ylim=c(0,100),
                  col="blue", ylab="Contribution (%)",
```

```
                  main="ACP")
lines(plot.1, 100*cumsum(large.ev.1), type="b", pch=5, col="red", lty=2)
legend("right", legend=c("Contribution ratio", "cumulative contribution"),
       col=c("blue", "red"), lty=1:2, cex=0.8)
```




```
tick <- rownames(res.pca.1$rotation[,1:2]*100)
pc <- data.frame(ticks=Assets, pc1=res.pca.1$rotation[,1]*100,
                 pc2=res.pca.1$rotation[,2]*100,
                 pc3=res.pca.1$rotation[,3]*100,
                 pc4=res.pca.1$rotation[,4]*100,
                 pc5=res.pca.1$rotation[,5]*100,
                 pc6=res.pca.1$rotation[,6]*100,
                 pc7=res.pca.1$rotation[,7]*100,
                 pc8=res.pca.1$rotation[,8]*100,
                 pc9=res.pca.1$rotation[,9]*100,
                 pc10=res.pca.1$rotation[,10]*100,
                 stringsAsFactors=FALSE)

knitr::kable(pc,
             col.names=c("Tickers", "PC1", "PC2","PC3","PC4","PC5","PC6","PC7","PC8","PC9","PC10"),
             caption="Composition of PCs",
             digits=2, booktab=TRUE, row.names=FALSE) %>%
  kable_styling(latex_options=c("stripped", "HOLD_position"))
```

Table 6: Composition of PCs

Tickers	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
GSPC	-33.74	-4.03	-10.63	29.08	-19.91	23.75	38.92	-4.99	-40.13	61.45
RUA	-33.76	-4.32	-10.62	26.42	-19.25	21.79	37.75	-2.64	71.53	-25.23
GDAXI	-33.64	7.12	-22.21	3.37	45.54	20.08	-45.31	48.00	22.77	31.01
FTSE	-33.79	0.11	-19.78	12.00	-2.86	-17.36	-47.70	-75.31	5.71	5.96
N225	-32.92	0.99	0.21	-85.06	-36.73	13.84	-1.27	1.42	6.08	9.91
EEM	-32.68	-22.08	-32.63	13.80	-33.69	-55.15	-8.08	40.56	-23.01	-27.79
DJCBTI	33.01	-18.48	-17.26	18.51	-53.40	54.23	-44.44	9.40	-4.55	-7.16
GREXP	33.84	-2.87	5.23	3.09	-30.36	-45.51	-6.20	7.74	45.89	60.11
BG05.L	32.42	8.53	-86.57	-19.63	15.86	0.57	24.80	-11.09	1.51	1.98
GLD	3.13	-94.89	2.27	-11.74	25.34	3.33	6.11	-8.64	5.21	7.19

Table 7: Contribution and return by PC

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10
contribution au risque (%)	86.76854	10.98363	1.01477	0.77584	0.21869	0.13354	0.05658	0.04840	0.00002	0.00000
rendement (%)	0.11790	1.33505	0.29659	-3.30179	-0.09190	-1.64836	0.77994	7.39759	0.20955	0.18329

- Identifier un vecteur propre qui est un facteur d'arbitrage caractérisé

Les vecteurs 7 et 8 se compense quasiment en terme de risque. Ainsi, si l'on compose un portefeuille comprenant $1 \times PC8 + (-1) \times PC7$ on aurait un risque quasiment nul mais une espérence de rendement d'environs 6.3%. Un bel arbitrage donc...