Projet C++ *"Pricing Derivatives by using Partial Differential Equations"*

Ezechiel-Andre KOFFI[1], Paul Gresland[1]

[1]3A - MS, Department of Quantitative Finance, ENSAE Paristech

Dans le cadre du projet de programmation, nous développons un pricer sous QT et C++. L'objectif de ce pricer est de valoriser des dérivés dans le cadre de Black-Scholes à partir des équations aux dérivés partielles. L'objectif à long terme qu'on s'est fixé, au delà du projet sera de rendre le pricer plus flexible en permettant la valorisation de produits plus structurés et complexes (straddles, basket options, strangles, condors) et d'y inclure une sortie des différentes sensibilités classiques (Delta, Gamma, Vega, Theta, Rho).

Choix de l'implémentation

Pourquoi Qt Qt est une API orientée objet et développée en C++ par Qt Development Frameworks, filiale de Digia. Qt offre des composants d'interface graphique (widgets), d'accès aux données, de connexions réseaux, de gestion des fils d'exécution, d'analyse XML, etc. ; par certains aspects, elle ressemble à un framework lorsqu'on l'utilise pour concevoir des interfaces graphiques ou que l'on conçoit l'architecture de son application en utilisant les mécanismes des signaux et slots par exemple.

De plus, Qt permet la portabilité des applications qui n'utilisent que ses composants par simple recompilation du code source. Les environnements supportés sont les Unix (dont GNU/Linux) qui utilisent le système graphique X Window System ou Wayland, Windows, Mac OS X et également Tizen. Le fait d'être une bibliothèque logicielle multiplateforme attire un grand nombre de personnes qui ont donc l'occasion de diffuser leurs programmes sur les principaux OS existants. Qt supporte des bindings avec plus d'une dizaine de langages autres que le C++.

Dès lors, QT s'est vite imposé à nous parce que nous avons choisi de développer une interface graphique, et après une revue des différents choix qui s'offraient à nous il s'avère que c'était la solution la plus idoine. Ce ne fut pas facile mais ce fut très enrichissant et très ludique.

Modélisation et présentation de la solution

Nous allons présenter une méthode de résolution numérique de valorisations d'options vanilles, mais aussi de dérivés plus complexes avec des payoff non-linéaires comme les options exotiques. Les méthodes de différences finies sont utilisées pour valoriser des dérivés en resolvant l'équation aux dérivées partielles sujette aux conditions initiales de prix et de payoff.

Considérons l'équation aux dérivées partielles de Black-Scholes (BS PDE) :

$\frac{\partial f}{\partial t} + (r-q)S\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$, avec la condition terminale f(S_T, T) = $(S_T - X)^+$. Nous divisons l'espace et le temps en intervalles discrets, Δt et Δx, puis nous allons ajouter des conditions aux limites à la grille. Ce qui va permettre de déterminer le prix de l'option comme une fonction du prix de l'actif pour des valeurs minimales et maximales de telle sorte que $\frac{\partial f}{\partial S} = 1$ pour S grand et $\frac{\partial f}{\partial S} = 0$ pour S petit.

Nous pouvons simplifier dejà l'EDP en posant x = ln(S) de tel sorte qu'on a :

$\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = rf$, avec μ = r-q. Pour faire disparaitre le terme en rf, on pose u(x,t) = $e^{r(T-t)}$ f(e^x,t). La fonction u(x,t) est le prix forward de l'option et satisfait l'EDP :

$\mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ = - $\frac{\partial u}{\partial t}$

Nous allons maintenant discrétiser l'EDP en prenant les différences centrées de la variable x et les différences en avant de la variable temps.

Soit $u_{i,j}$ = u(x_j, t_i), t_i = iΔt et x_j = jΔx.

En remplaçant les différences finies dans l'edp satisfait par le prix forward de l'option, :

$\frac{1}{2}\sigma^2(\frac{u_{i+1,j+1}-2u_{i+1,j}+u_{i+1,j-1}}{\Delta x^2}) + \mu(\frac{u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j-1}}{2\Delta x})$ = - $(\frac{u_{i+1,j}}{\Delta t})$.

En réarrangeant les termes, on obtient la relation de récurrence pour le prix forward de l'option : $u_{i,j} = \tilde{p}_u u_{i+1,j+1} + \tilde{p}_m u_{i+1,j} + \tilde{p}_d u_{i+1,j-1}$ où :

$\tilde{p}_u = \frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2} + \frac{\mu\Delta t}{2\Delta x}$,

$\tilde{p}_m = 1 - \frac{\sigma^2\Delta t}{\Delta x^2}$,

$\tilde{p}_d = \frac{\sigma^2\Delta t}{2\Delta x^2} - \frac{\mu\Delta t}{2\Delta x}$.

Notons que $\tilde{p}_u + \tilde{p}_m + \tilde{p}_d = 1$. En posant $\alpha = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ et $\beta = \frac{\mu\Delta t}{\Delta x}$, nous pouvons réecrire :

$\tilde{p}_u = \frac{1}{2}(\sigma^2\alpha + \beta)$,

$\tilde{p}_m = 1 - \sigma^2\alpha$,

$\tilde{p}_d = \frac{1}{2}(\sigma^2\alpha + \beta)$.

Nous arrivons donc au prix de l'option qui suit la relation :

$f_{i,j} = e^{-r\Delta t}[\tilde{p}_u f_{i+1,j+1} + \tilde{p}_m f_{i+1,j} + \tilde{p}_d f_{i+1,j-1}]$

Présentation des résultats

Github L'ensemble du code source se trouve sur github à l'adresse suivante :

`https://github.com/paulgresland/PDEPricerDerivatives/tree/IG`

- copie/Figures/doc1.pdf

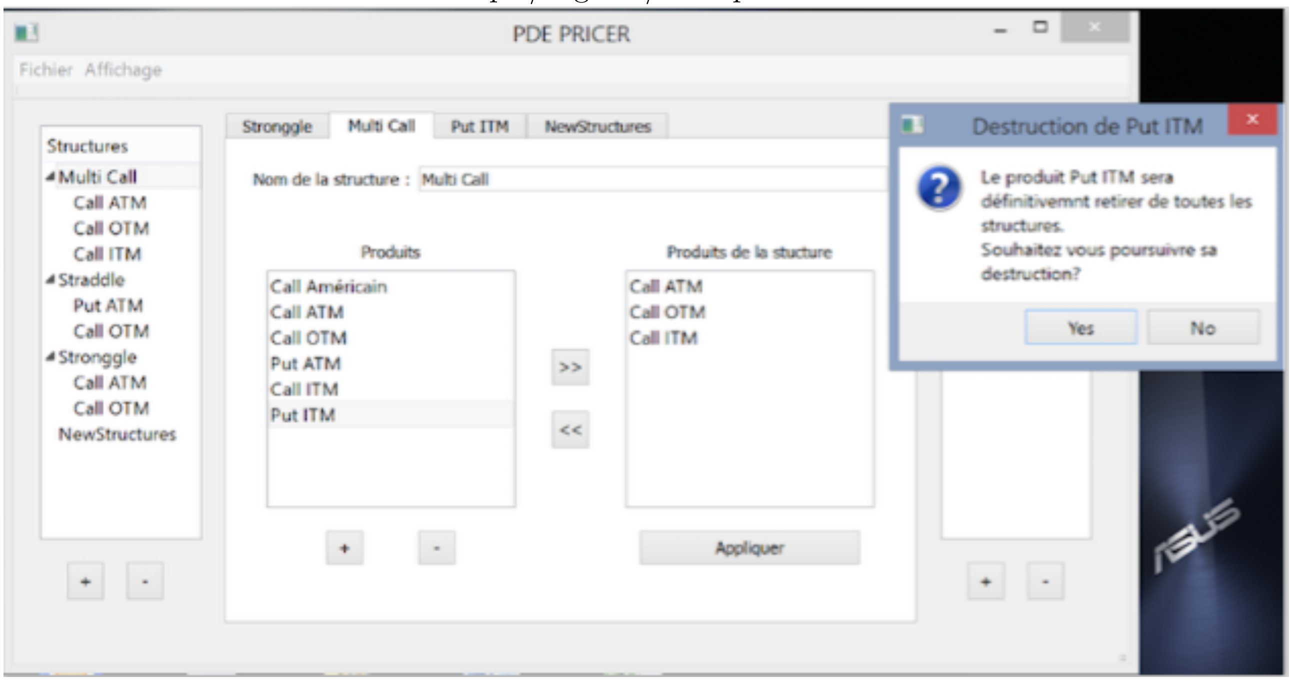

Figure 1: Interface multistructure du pricer

Tutoriel Ci-dessus, l'interface graphique multi-structure du pricer. Nous avons essayé de la rendre évoluée afin de pouvoir dans un futur proche être flexible dans son évolution. L'interface graphique présente des onglets pour chaque produit, un menu de structures, une interface de composition de structures à partir de produits vanilles ...

Les différentes étapes afin d'utiliser notre pricer EDP sont les suivantes :

1. Lancer le fichier executable
2. Pour naviguer dans le pricer, il faut créer un nouveau dossier vide puis le sélectionner
3. Charger un nouveau workspace ou un workspace existant
4. Définir les différents paramètres du produit dérivé et appliquer.
5. Lire les résultats dans les sorties adéquates

- copie/Figures/doc4.pdf

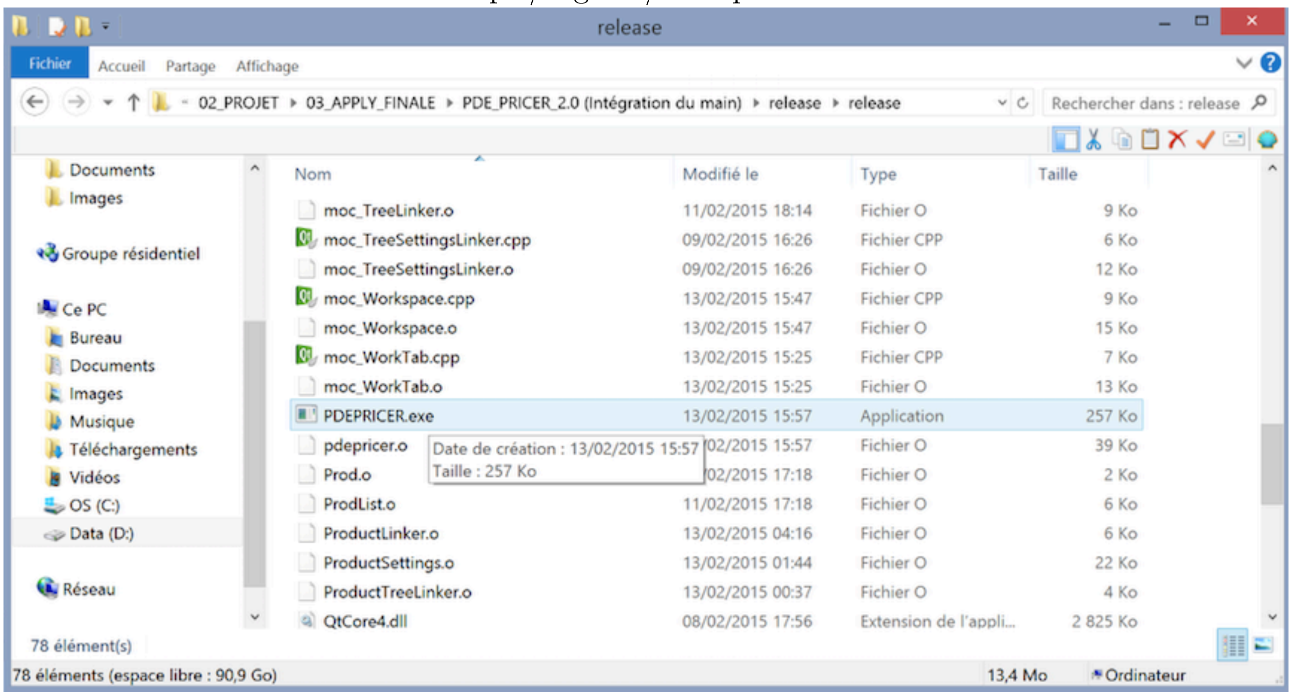

Figure 2: Lancement du pricer à partir de l'exe

- copie/Figures/doc3.pdf

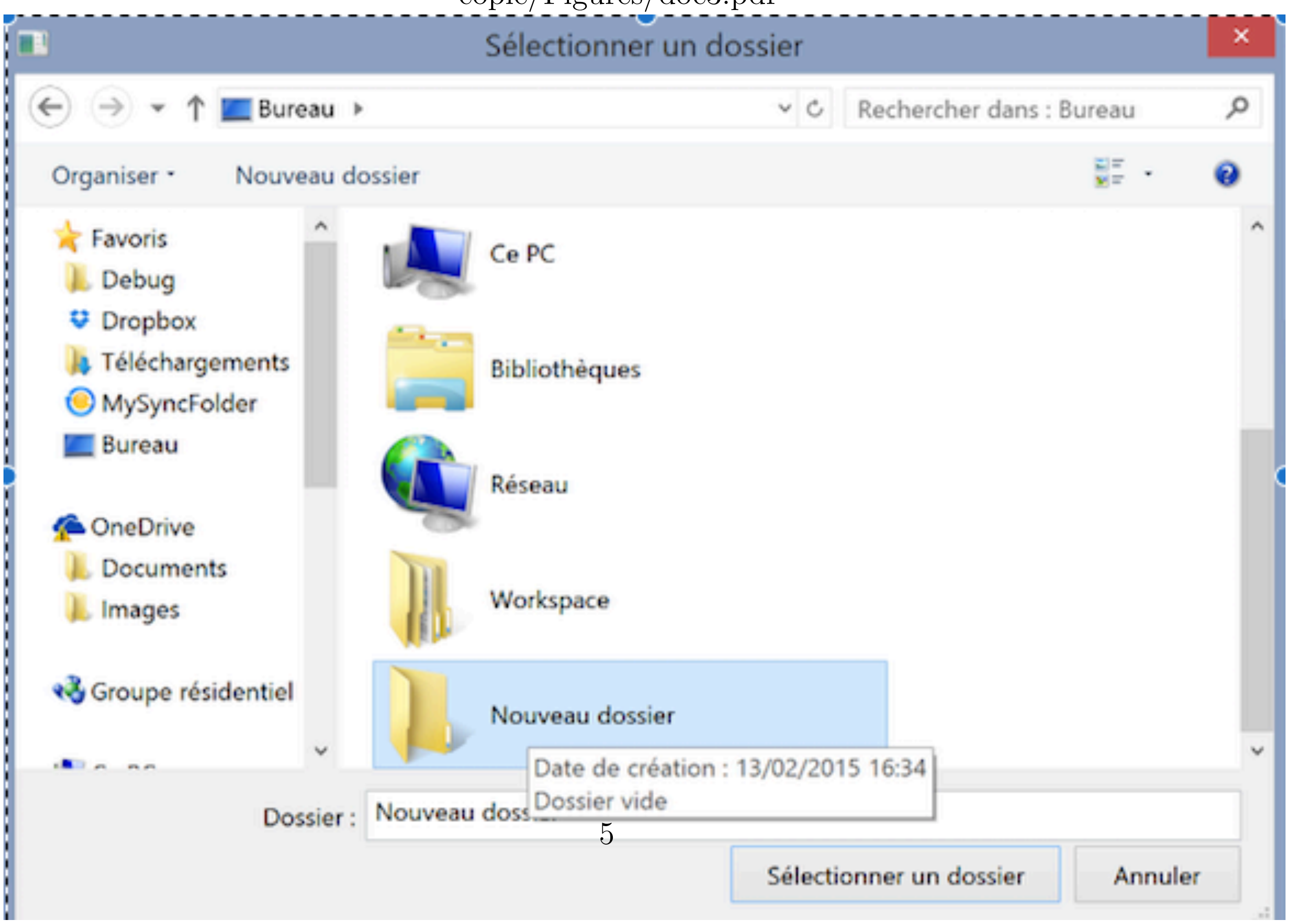

Figure 3: Sélection de dossier vide

- copie/Figures/doc5.pdf

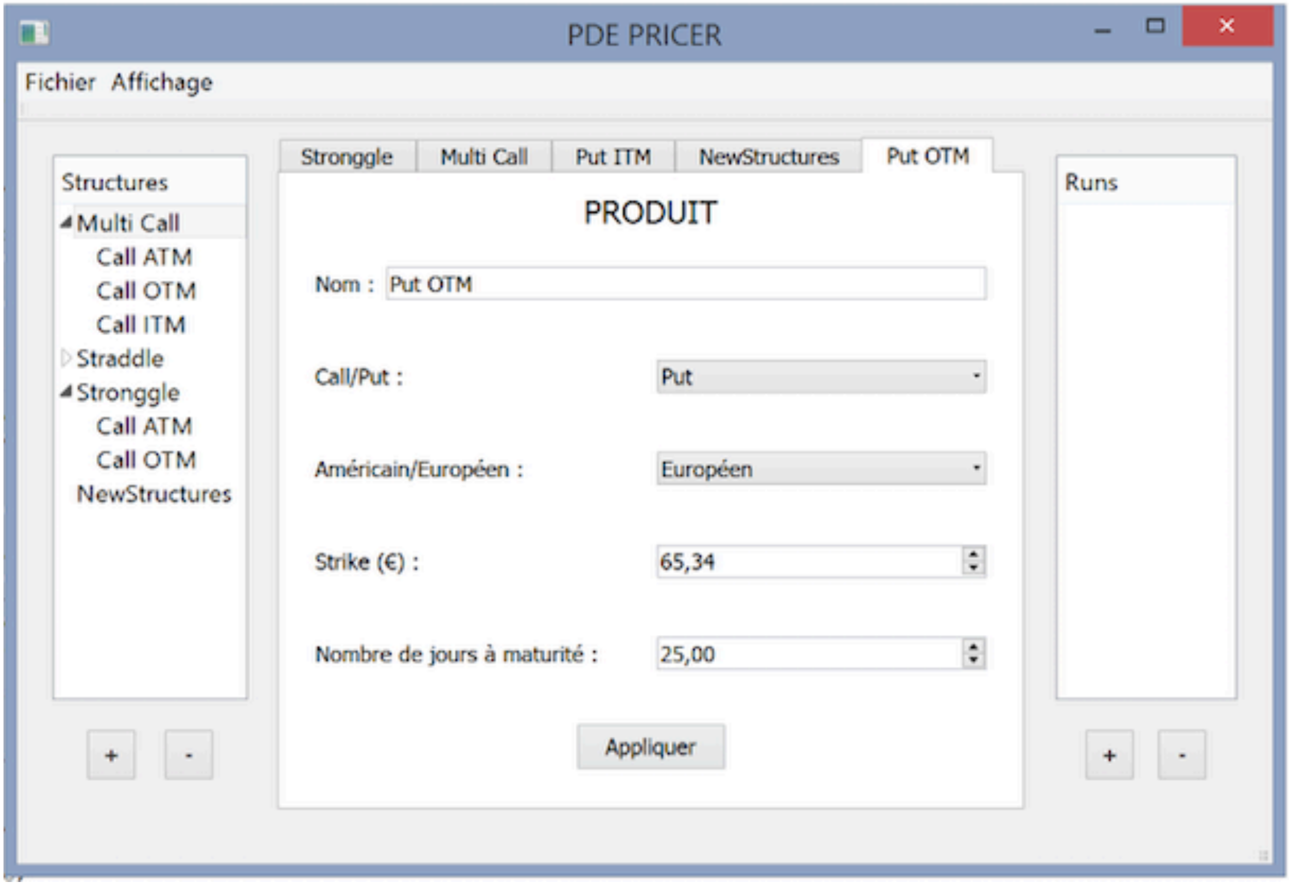

Figure 4: Définition des paramètres du dérivé

Bibliographie

1. Notes provided by the Qt Community. *QT Designer manual.* (2013).

2. Mark Joshi. *Design patterns and derivatives pricing.* (June 2008).

3. Daniel J. Duffy. *Finite difference methods in financial engineering.* (June 2006).