Chapitre 2

Suites réelles

2.1 Généralités

2.1.1 Définition

Une suite réelle u est une application de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $n \longmapsto u_n$. On écrit u_n au lieu de $u(n)$

u_n est le nieme terme de la suite.

On écrit aussi $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ×

> × **Difficulté**
> u_n ne désigne pas la suite u_n. Il faut écrire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les suites (u_n) et v_n sont égales si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$.

On note : $S(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Exemple

$u = (n+1)_{n\in\mathbb{N}}$

$0 = (0)_{n\in\mathbb{N}}$

$v = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.1.2 Opérations sur les suites

On définit sur $S(\mathbb{R})$ les opérations $+, \times$ et $\cdot$

$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$uv = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$\lambda u = (\lambda u)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour diviser par (v_n), elle doit être tout le temps non nulle.

2.1.3 Variations

Soit $u \in S(\mathbb{R})$ et $n_0 \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.1 : Suite croissante

La suite est croissante à partir du rang n_0 si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$ et u est stictement croissante à partir de n_0 si $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} > u_n$.

Théorème 1.2 : Suite décroissante

La suite est décroissante à partir du rang n_0 si $\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$ et u est stictement croissante à partir de n_0 si $n \geq n_0$ on a $u_{n+1} < u_n$.

Exemple : $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante

$(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante

$\neg(u_n$ est croissante à partir du premier terme$)= (\exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n)$

Théorème 1.3 : Majoré et minorant

La suite est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

La suite est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

La suite est bornée si elle est minorée et majorée.

u bornée $\iff \exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$.

Valeur absolue

$|x| = x$ si $x > 0$ et $-x$ si $x < 0$.

$|x - y|$ mesure la distance e x à y.

$|xy| = |x||y|$

$|x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire)

Preuve 1.1

Preuve : On étudie la différence des carrés : $(|x|+|y|)^2 - (|x+y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2 - (x^2 + xy + y^2) = 2(|xy| - xy) \geq 0$. Donc $(|x|+|y|)^2 \geq (|x+y|)^2$. Or la fonction x^2 est croissante, donc l'inégalité est vérifiée.

$|x| = 0 \rightarrow x = 0$

2.2 Limites d'une suite

Soit u une suite réelle.

Théorème 2.1 : Définition

On dit que la suite u est convergente (CV) si existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \epsilon$. On dit que l est une limite de (U_n).

Voir schéma

Théorème 2.2 : Unicité d'une limite d'une suite convergente

Si (U_n) est convergente, sa limite l est unique on note $l = \lim\limits_{n+\infty} u_n$.

Preuve 2.1 : Démonstration par l'absurde

Supposons que (U_n) admette l_1 et l_2 comme limite, avec $l_1 \neq l_2$. Nous avons donc, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |u_n - l_1| \leq \epsilon \tag{2.1}$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2, |u_n - l_2| \leq \epsilon \tag{2.2}$$

On pose alors $\epsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$. Il existe donc N_1 et N_2 tel que les 2 assertions sont vraies.

Choisissons un nombre entier supérieur à N_1 et N_2, comme $\max(N_1, N_2)$.

Pour cette valeur de n, nous avons à la fois $|u_n - l_1| < \epsilon$ et $|u_n - l_2| < \epsilon$.

Par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$3\epsilon = |l_1 - l_2| = |(u_n - l_2) - (u_n - l_1)| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_2| \leq 2\epsilon$$

Le nombre réel vérifie à la fois $\epsilon > 0$ et $3\epsilon \leq 2\epsilon$, ce qui est absurde. Donc $l_1 = l_2$.

On utilise Valeur absolue d'une expression pour la majorer par une valeur. Il vaut mieux dire que $|(-1)^n| \leq 1$ que $-1 \leq |(-1)^n| \leq 1$. Utiliser ensuite l'inégalité triangulaire.

Théorème 2.3 : Borne d'une suite convergente

Toute suite convergente est bornée

Preuve 2.2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente. Notons l sa limite $\in \mathbb{R}$. Elle est convergente $\iff \forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_\epsilon \Rightarrow |u_n - l| \leq \epsilon$.

Pour $\epsilon = 1$:

$$\begin{aligned}\exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1 &\Rightarrow |u_n - l| \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 \leq u_n - l \leq 1 \\ &\Rightarrow -1 + l \leq u_n \leq 1 + l\end{aligned}$$

Donc pour $n \geq N_1, |u_n| \leq \max(|-1+l|, |1+l|)$

Donc pour $n < N_1$, le nombre de terme de (U_n) est fini.

Donc $M = \max(|u_k|)$ existe et est fini, avec $0 \leq k \leq N_1 - 1$ et $|U_n| \leq M, \forall 0 \leq n \leq N_1 - 1$.

2.3 Limites

2.3.1 Limites et monotonie

Théorème 3.1 :

Toute suite croissante et majorée converge vers son plus petit majorant

Toute suite décroissante et minorée converge vers son plus grand minorant.

Remarque

Si (U_n) est croissante et si $\lim_{+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq l$ car (U_n) est croissante..

En effet, si $x \leq u_n$ et si $u_{n+1} > u_n$, alors $\epsilon = U_{n+1} - U_n > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0, u_n, \geq x + \frac{\epsilon}{2}$ et $|u_n - x| > \frac{\epsilon}{2}$. Donc x ne peut être la limite de (U_n).

De plus, $\forall \epsilon > 0, l - \epsilon$ n'est pas la limite de (U_n) dnc $\exists n \in \mathbb{N}, l - \epsilon < u_n \leq l$ et l est bien le plus petit des minorants de (U_n).

2.3.2 Suites adjacentes

Théorème 3.2 : Définition

2 suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes si

- (U_n) est décroissante
- (V_n) est croissante
- $\lim_{+\infty} U_n - V_n = 0$
- $u_n \geq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.3 : Définition

Si les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes de même limite.

Preuve 3.1

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq v_n \geq v_0$ car (v_n) est croissante. Donc (U_n) est décroissante et minorée par v_0 donc convergente. Notons $l_1 = \lim_{+\infty} U_n$.

De même, $\forall n \in \mathbb{N} v_n \leq u_n \leq, u_0$ car (u_n) est décroissante. Donc (v_n) est croissante et majorée par v_0 donc convergente. Notons $l_2 = \lim\limits_{+\infty} v_n$.

De plus, $\lim\limits_{+\infty} U_n - V_n = 0 = l_1 - l_2 \iff l_1 = l_2$

Donc, si elles sont adjacentes, (U_n) et (V_n) convergent vers un unique l.

2.3.3 Limites infinies

Soit (u_n) une suite réelle.

Théorème 3.4 : définition

Elle a pour limite $+\infty$ si $\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N_A \Rightarrow u_n \geq A$.

Elle a pour limite $-\infty$ si $\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n, n \geq N_A \Rightarrow u_n \leq -A$.

2.3.4 Suites et opérations

On considère 2 suites réelles (u_n) et (v_n). On suppose que $\lim\limits_{+\infty} = l/\pm\infty$.

Somme des limites

Limite (v_n)	$-\infty$	l	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	FI
l'	$-\infty$	l+l'	$+\infty$
$+\infty$	FI	$+\infty$	$+\infty$

Produit des limites

Limite (v_n) et (u_n)	$-\infty$	l	0	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	signe de $l \times -\infty$	FI	$-\infty$
l'	signe de $l' \times -\infty$	ll'	0	signe de $l' \times +\infty$
0	FI	0	0	FI
$+\infty$	$-\infty$	signe de $l' \times +\infty$	FI	$+\infty$

Voir tableau des limites

Preuve 3.2 : Somme des limites l et l'

On veut savoir si $\forall \epsilon > 0, \exists ?N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n + v_n - (l + l')| < \epsilon$.

On sait que d'après l'inégalité triangulaire, $|u_n + v_n - (l + l')| = |u_n - l + v_n - l'| \leq |u_n - l| + |v_n - l'|$.

Or $\lim\limits_{\infty} u_n = l$, donc $\exists N_1 \in \mathbb{N}, n \geq N_1$, alors $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

De même, $\lim\limits_{\infty} v_n = l'$, donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}, n \geq N_2$, alors $|u_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc si $n \geq N_1 + N_2$, alors $|u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$ et $|v_n - l'| \leq \frac{\epsilon}{2}$

Donc $|u_n + v_n - (l + l')| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Donc $u_n + v_n$ est convergente et $\lim\limits_{\infty} u_n + v_n = l$.

Preuve 3.3 : Produit des limites l et l'

Soit $(u_n), (v_n)$ 2 suites convergentes. On veut démontrer que $\lim\limits_{\infty} u_n v_n = \lim\limits_{u} {}_n \lim\limits_{\infty} v_n$. Notons que $\lim\limits_{\infty} u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{\infty} v_n = l' \in \mathbb{R}$. On doit démontrer que la définition de la limite existe pour la suite $u_n v_n$, i.e, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |u_n v_n - ll'| \leq \epsilon > 0$.

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ll'| &= |(u_n - l)v_n + lv_n - ll'| \\
&= |v_n(u_n - l) + l(v_n - l')| \\
&\leq |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'|
\end{aligned}$$

(v_n) convergen, donc est bornée, donc, $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} |v_n| \leq M$.

$$\begin{aligned}
&\leq M|u_n - l| + |l||v_n - l'| \\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} + |l|\frac{\epsilon}{2M + 1 + |l|}
\end{aligned}$$

On a donc :

- $\lim\limits_{\infty} u_n = l$, donc pour $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2M} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$, donc $n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2M}$.
- $\lim\limits_{\infty} v_n = l'$, donc pour $\epsilon'' = \frac{\epsilon}{2(1+|l|)} > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}$, donc $n \geq N_2 \Rightarrow |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2(1+|l|)}$.

Donc $\forall n \geq N_1 + N_2$, on a $|u_n v_n - ll'| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + |l|\frac{\epsilon}{2M+1+|l|}$, puis $|u_n v_n - ll'| \leq \frac{\epsilon}{2} + 1$ et $|u_n v_n - ll'| \leq \epsilon$

On a bien l'inégalité, CQFD

2.3.5 Limites et inégalités

Théorème 3.5 : Inégalités

Supposons que $u_n \leq v_n$. On a : $\lim\limits_{\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{\infty} u_n = -\infty$

Si les 2 suites sont convergentes, $\lim\limits_{\infty} u_n \leq \lim\limits_{\infty} v_n$. ×

× **Difficulté**
Les inégalités strictes deviennent larges quand on passe à la limite. Par exemple, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et u_n converge, alors $\lim\limits_{\infty} u_n \geq 0$.

Théorème 3.6 : Théorème des gendarmes

Si on a 3 suites réelles avec $u_n \leq w_n \leq v_n$. Si u_n et v_n sont convergentes de même limite l, alors w_n est convergente vers l.

Preuve 3.4

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $N_0 \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |w_n - l| \leq \epsilon$, avec $\lim\limits_{\infty} u_n = l = \lim\limits_{\infty} v_n$ et $u_n \leq w_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
|w_n - l| &= |w_n - u_n + u_n - l| \\
&\leq |w_n - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - l + l - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - l| + |l - u_n| + |u_n - l| \\
&\leq |v_n - l| + 2|u_n - l| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + 2\frac{\epsilon}{4}
\end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{\infty} u_n = l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - l| \leq \frac{\epsilon}{4}$ et $\lim\limits_{\infty} v_n = l$, donc $\exists N \in \mathbb{N}, n \geq N_1 \Rightarrow |v_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Donc pour $N_3 = N_1 + N_2$, on a : $n \geq N_0 \Rightarrow |w_n - l| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \times \frac{\epsilon}{4} = \epsilon$. Ce qui démontre bien l'égalité souhaitée.

Si une suite est encadrée, la limite de la suite l'est aussi. La limite est un point fixe de (u_n).

Partie entière

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{N}$, tel que $n \leq x < n+1$. C'est noté $E(x) = n$.

2.4 Méthodes

2.4.1 Lever une Forme Indéterminée

Du type Infini/Infini

On donne d'abord le type de FI puis on met en facteur le terme variant de plus haut degré en facteur.

Exemple

Voir le 2 et 3 du TD 2.4

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \\ &= \frac{2n(1 + \frac{(-1)^n}{2n})}{5n(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n})} \\ &= \frac{2(1 + \frac{(-1)^n}{2n})}{5(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{5n})} \end{aligned}$$

$\lim\limits_{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = \lim\limits_{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n} = 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} (U_n) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{1}$.

Du type + Infini - Infini avec des racines

On multiplie par la quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Exemple

Voir le 4 du TD 2.4

$$\begin{aligned}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}) &= (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{(2n+1)-(2n-1)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\end{aligned}$$

Avec des exponentielles

Les exponentielles dominent les polynômes. Donc On le met en facteur et on utilise la croissance comparée :

Théorème 4.1 : Croissance comparée

$\lim\limits_{+\infty} \frac{n^x}{y^n} = 0.$

2.4.2 Montrer que 2 suites sont adjacentes (2.11)

Montrer que les 2 suites sont définies

Il peut être utile de montrer que les 2 suites sont définies et toujours positives.

Pour cela, on peut faire un raisonnement par récurrence.

Montrer qu'une suite est supérieure à l'autre

On fait la différence $u_n - v_n$ et selon le signe, on conclue.

On étudie la monotonie des suites

Il faut montrer que l'une est croissante et l'autre décroissante. Pour cela, on fait la différence $u_{n-1} - u_n$ et on conclue, pareil pour (v_n).

Montrer que les suites sont convergentes

Une suite est croissante et majorée par le premier terme de l'autre suite ; l'autre suite est décroissante et minorée par le premier terme de la première suite.

Les deux suites sont convergentes et on note l et l' leur limite respective.

Montrer que l=l'

Les 2 suites sont convergentes, donc en exprimant la limite du terme $n+1$ d'une suite en fonction de l'autre suite, on peut montrer que $l = l'$.

Conclusion

Toutes les conditions sont réunies pour dire que les 2 suites sont adjacentes.

Exemple

Énoncé

On pose $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. On a : $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$.
On veut montrer que les suites sont adjacentes.

1. On montre d'abord que les suites sont positives, par récurrence :
   L'initialisation est immédiate d'après l'énonce ($a_0 > 0$ et $b_0 > 0$).
   Hérédité : On suppose (H_n). Donc $u_n > 0$ et $v_n > 0$. On a alors : $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} > 0$. De plus, $\frac{1}{u_n} > 0$ et $\frac{1}{v_n} > 0$
   Donc la suite est bien définie et supérieure à 0.
2. On montre qu'une suite est supérieure à l'autre.
   On a $u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{v_n+u_n}$, donc la différence $u_{n+1} - v_{n+1}$ vaut :

$$
\begin{aligned}
u_{n+1} - v_{n+1} &= \frac{2u_n v_n}{v_n + u_n} - \frac{u_n + v_n}{2} \\
&= \frac{4u_n v_n}{2(v_n + u_n)} - \frac{(u_n + v_n)^2}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{4u_n v_n - (u_n + v_n)^2}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{4u_n v_n - (u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2)}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{4u_n v_n - u_n^2 - 2u_n v_n - v_n^2}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{2u_n v_n - u_n^2 - v_n^2}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{-(-2u_n v_n + u_n^2 + v_n^2)}{2(v_n + u_n)} \\
&= \frac{-(u_n + v_n)^2}{2(v_n + u_n)} \leq 0
\end{aligned}
$$

Donc $v_n \geq u_n$

3. On étudie la monotonie de (v_n) et (u_n) : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n$
   Mais $v_n \geq u_n$, donc $\frac{u_n+v_n}{2} - v_n \leq 0$

   De plus, $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(-u_n+v_n)}{u_n+v_n} \geq 0$, car comme $v_n \geq u_n$, on a $-u_n + v_n \geq 0$

4. On montre que les suites sont convergentes (u_n) est majorée par v_1 et est croissante, donc elle convergente et on note l sa limite.

   (v_n) est minorée par u_1 et est décroissante, donc elle convergente et on note l' sa limite.

5. On montre que $l = l'$
   On sait que $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$, donc :

$$
\begin{aligned}
\lim_{\infty} u_{n+1} &= \lim_{\infty} \frac{u_n + v_n}{2} \\
l' &= \frac{l + l'}{2} \\
&= l
\end{aligned}
$$

Les 2 suites sont bien adjacentes.

2.4.3 Utiliser la définition de la convergence (2.10)

Montrer qu'une suite est inférieure à un certain nombre supérieur à sa limite

Soit $\lim\limits_{+\infty} = l$. On souhaite montrer que $u_n \leq x$.

D'après la définition de la limite, $\forall \epsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, n \geq N_0 \Rightarrow |U_n - l| \leq \epsilon$.
Donc :

$$
\begin{aligned}
& u_n - l \leq \varepsilon \\
\iff & -\varepsilon \leq u_n - l \leq \varepsilon \\
\iff & l - \varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon + l
\end{aligned}
$$

Ainsi, en prenant ε tel que $l + \varepsilon = x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq x$.

2.4.4 Exercice type : Montrer qu'une suite converge (2.6/2.12)

Encadrer la suite

On trouve un majorant et un minorant de la suite, souvent par récurrence. Si la suite est positive, un minorant est 0.

On montre qu'elle est croissante/décroissante

On montre sa convergence

On déduit qu'elle est convergente et, comme on sait que la limite est un point fixe, on peut écrire que $\lim\limits_{\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{\infty} u_n = l$ et déterminer l à l'aide de cette relation.

Exemple

On a : $u_{n+1}^2 = 1 + u_n$. On peut donc écrire : $l^2 = 1 + l$ Seul le nombre d'or τ vérifie cette relation, donc $l = \tau$