Chapitre

8

Puissance, travail et énergie - Méthode

8.1 Exprimer le travail d'une force

Il faut peut être d'abord découper le mouvement en plusieurs parties pour avoir des déplacements plus simples à analyser.

8.1.1 Méthode générale

1. On applique la formule : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$
2. On projette le vecteur sur les axes de notre base : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB}(F_x\overrightarrow{e_x} + F_y\overrightarrow{e_y} + F_z\overrightarrow{e_z}) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$
3. On réécrit le déplacement élémentaire dans la base considérée (souvent la cartésienne) : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB}(F_x\overrightarrow{e_x}+F_y\overrightarrow{e_y}+F_z\overrightarrow{e_z}) \cdot (\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z})$ i
4. On développe l'expression en supprimant les produits scalaires dont les résultats sont nuls, c'est à dire tous ceux entre 2 vecteurs orthogonaux : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} F_x\overrightarrow{e_x} \cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + F_y\overrightarrow{e_y} \cdot \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + F_z\overrightarrow{e_z} \cdot \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}$
5. On obtient une somme de produits scalaires dont les vecteurs sont colinéaires et unitaires. Les produits scalaires sont donc égaux à 1. Il nous reste : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} F_x \cdot \mathrm{d}x + F_y \cdot \mathrm{d}y + F_z \cdot \mathrm{d}z$
6. On peut séparer les intégrales pour les traiter séparément : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} F_x \cdot \mathrm{d}x + \int_{C,AB} F_y \cdot \mathrm{d}y + \int_{C,AB} F_z \cdot \mathrm{d}z$
7. On intègre chaque intégrale entre les coordonnées x, y ou z selon l'intégrale du début et de fin du chemin.

> i **Info**
> Souvent le déplacement se fait selon un ou 2 axes seulement, il est donc inutile d'écrire toutes les composantes de la base considérée.

8.1.2 Force constante

Force constante

Pour qu'une force puisse être qualifiée de constante, sa norme doit l'être mais cela ne suffit pas ! Il faut aussi que la direction et le sens le soient aussi !. Autrement dit, il faut que le vecteur force soit constant et non sa norme.

Pour une force constante, on peut sortir le vecteur Force de l'intégrale. On obtient alors $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \overrightarrow{F} \cdot \int_{C,AB} \mathrm{d}\overrightarrow{r} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{AB}$. En effet, la somme de tous les déplacements élémentaires entre A et B donne le vecteur $\overrightarrow{AB}$. × On peut alors simplement faire le produit scalaire.

× **Difficulté**
Attention, la somme de tous les *vecteurs* de déplacement élémentaire donne bien le vecteur $\overrightarrow{AB}$ mais la somme des déplacement élémentaires donne la longueur du chemin !

8.1.3 Force de même direction que le mouvement

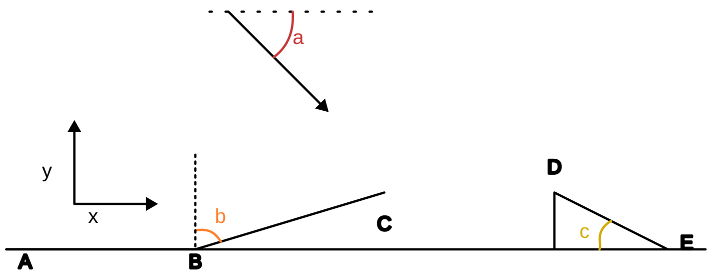
On réécrit $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$ comme $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} F \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$. Comme le vecteur vitesse divisé par sa norme est unitaire et colinéaire au déplacement élémentaire, on obtient $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = \int_{C,AB} F \mathrm{d}r$. Si la norme du vecteur est constante, on peut la sortir de l'intégrale et obtenir : $W_{AB}(\overrightarrow{F_i}) = F \times ||C_{AB}||$ avec $||C_{AB}||$ la longueur du chemin.

8.1.4 Force orthogonale au mouvement

La force est orthogonale à $\mathrm{d}\overrightarrow{r}$, donc le produit scalaire est nul, ainsi que le travail.

8.1.5 Exemple d'une force constante

On étudie la trajectoire d'un skateur dans un skatepark. On cherche à déterminer le travail du vent $\overrightarrow{F_v}$ sur sur le skateur, en fonction de sa direction et des angles des tremplins.



On va découper le trajet en plusieurs parties et calculer le travail sur chacune d'entre elle.

Astuce
On va dans cette exemple appliquer la méthode générale, même si l'on pourrait très bien utiliser la méthode, plus simple du cas où la force est constante...

Sur AB

1. On applique la formule : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = \int_{C,AB} \overrightarrow{F_v} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$
2. On projette le vecteur sur les axes de notre base : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = \int_{C,AB}(F_v \times \cos(a)\overrightarrow{e_x} - F_v \times \sin(a)\overrightarrow{e_y}) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r}$
3. On réécrit le déplacement élémentaire dans la base considérée (souvent la cartésienne) : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = \int_{C,AB}(F_v \times \cos(a)\overrightarrow{e_x} - F_v \times \sin(a)\overrightarrow{e_y}) \cdot (\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y})$
4. On développe l'expression en supprimant les produits scalaires dont les résultats sont nuls, c'est à dire tous ceux entre 2 vecteurs orthogonaux : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = \int_{C,AB} F_v \times \cos(a)\overrightarrow{e_x} \cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} - F_v \times \sin(a)\overrightarrow{e_y} \cdot \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y}$
5. On obtient une somme de produits scalaires dont les vecteurs sont colinéaires et unitaires. Les produits scalaires sont donc égaux à 1. Il nous reste : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = \int_{C,AB} F_v \times \cos(a)\mathrm{d}x - F_v \times \sin(a)\mathrm{d}y$
6. On peut séparer les intégrales pour les traiter séparément : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = \int_{C,AB} F_v \times \cos(a)\mathrm{d}x + \int_{C,AB} -F_v \times \sin(a)\mathrm{d}y$
7. On intègre chaque intégrale entre les coordonnées x, y ou z selon l'intégrale du début et de fin du chemin.
   - Le vecteur $\overrightarrow{F_v}$ est constant, on peut donc l'extraire de l'intégrale : $\int_{C,AB} F_v \times \cos(a)\mathrm{d}x = F_v \times \cos(a) \int_{C,AB} \mathrm{d}x = F_v \times \cos(a) \times AB$ ×
   - Il n'y a pas de déplacement selon y sur cette section. La deuxième intégrale est donc nulle.

× **Difficulté**
On a effectué cette opération uniquement car la force est constante et de même direction que le chemin ! Si l'une de ces conditions n'est pas remplie, on ne peut pas le faire !

On obtient donc : $W_{AB}(\overrightarrow{F_v}) = F_v \times \cos(a) \times AB$.

On remarque qu'on retrouve bien l'expression pour le travail d'une force constante, car $F_v \times \cos(a) \cdot AB = \overrightarrow{F_v} \cdot \overrightarrow{AB}$

Sur BC

Les étapes 1 à 6 sont les même que précédemment. En effet, seul le chemin change.

7. On intègre chaque intégrale entre les coordonnées x, y ou z selon l'intégrale du début et de fin du chemin.
   - Le vecteur $\overrightarrow{F_v}$ est constant, on peut donc l'extraire de l'intégrale : $\int_{C,BC} F_v \times \cos(a)\mathrm{d}x = F_v \times \cos(a) \int_{C,BC} \mathrm{d}x$
   - On intègre : $F_v \times \cos(a) \int_B^C \mathrm{d}x = F_v \times \cos(a)[x]_B^C$
   - Il faut maintenant trouver les coordonnées x de B et C. Pour B, c'est la distance AB et pour C c'est $AB + \sin(b) \times BC$
   - On peut maintenant faire le calcul : $F_v \times \cos(a)[x]_B^C = F_v \times \cos(a) \times (AB + \sin(b) \times BC) - F_v \times \cos(a) \times (AB) = F_v \times \cos(a) \times (\sin(b) \times BC)$

- De la même façon, on obtient le travail pour le déplacement selon y : $-F_v \times \sin(a)[x]_B^C = -F_v \times \sin(a) \times (\cos(b) \times BC) - (-F_v \times \sin(a) \times 0)) = -F_v \times \sin(a) \times (\cos(b) \times BC)$

> **Astuce**
> On remarque que les coordonnées y du point B sont 0 et celles de C sont $\cos(b) \times BC$

Finalement, le travail vaut sur cette section : $F_v \times \cos(a) \times (\sin(b) \times BC) - F_v \times \sin(a) \times (\cos(b) \times BC) = F_v \times BC(\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b))$

> **Info**
> Ici aussi, $\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)$ vaut le $\cos$ de l'angle entre le vent et le chemin, i.e $\cos(\frac{\pi}{2} - b + a)$. En effet, à l'aide de formules trigonométriques, on peut montrer l'égalité...

On remarque qu'il est nul seulement si les angles a et b sont égaux, ce qui correspond à la situation où le vent est orthogonal à la pente montante.

Sur DE

Les étapes 1 à 6 sont les même que précédemment. En effet, seul le chemin change.

7. On intègre chaque intégrale entre les coordonnées x, y ou z selon l'intégrale du début et de fin du chemin.
   - Le vecteur $\overrightarrow{F_v}$ est constant, on peut donc l'extraire de l'intégrale : $\int_{C,BC} F_v \times \cos(a)\mathrm{d}x = F_v \times \cos(a) \int_{C,BC} \mathrm{d}x$
   - On intègre : $F_v \times \cos(a) \int_B^C \mathrm{d}x = F_v \times \cos(a)[x]_B^C$
   - Il faut maintenant trouver les coordonnées x de D et E. Pour D, c'est la distance AD' et pour E c'est $AD' + \cos(c) \times DE$
   - On peut maintenant faire le calcul : $F_v \times \cos(a)[x]_D^E = F_v \times \cos(a) \times (AD' + \cos(c) \times DE) - F_v \times \cos(a) \times (AD') = F_v \times \cos(a) \times (\cos(c) \times DE)$
   - De la même façon, on obtient le travail pour le déplacement selon y : $-F_v \times \sin(a)[x]_D^E = -F_v \times \sin(a) \times (0) - (-F_v \times \sin(a) \times (-\sin(c)DE))) = F_v \times \sin(a) \times (\sin(c)DE)$

> **Astuce**
> On remarque que les coordonnées y du point D sont $-\sin(c)DE$ et celles de E sont 0

Finalement, le travail vaut sur cette section : $F_v \times \cos(a) \times (\cos(c) \times DE) + F_v \times \sin(a) \times (\sin(c)DE) = F_v DE(\cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c))$

> **Info**
> On remarque que pour que le vent aide le plus possible, il faut que les angles a et c soient égaux. Ainsi, le vent et la pente sont dans la même direction.

Somme

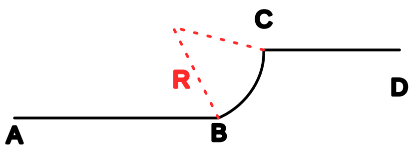
Pour obtenir le travail sur ces portions (on a exclu le moment où le skater décolle et se trouve en l'air entre les points C et D), on fait la somme des 3 travaux trouvés : $W(\overrightarrow{F_v}) = F_v \times \cos(a) \times AB + F_v \times BC(\cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)) + F_v DE(\cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c))$.

8.1.6 Exemple d'une force de frottement

On étudie les forces de frottement $F_f = -\alpha\overrightarrow{v}$ liées aux roues d'un skateur lors du parcours ci-dessous. Remarquons que la norme du vecteur est constante.

Comme dans l'autre exemple, nous allons séparer le parcourt en 3 parties, la ligne AB, l'arc de cercle BC et la ligne CD.

> **Info**
> Je ne vais pas traiter le chemin CD car c'est la même situation que la ligne AB



Sur AB

Appliquons la méthode :

1. On applique la formule : $W_{AB}(\vec{F_i}) = \int_{C,AB} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$
2. On écrit le vecteur $\vec{F_f}$ en fonction d'un vecteur unitaire lié au vecteur vitesse : $W_{AB}(\vec{F_i}) = \int_{C,AB}(-\alpha \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$
3. On peut sortir $-\alpha$ de l'intégrale qui est constant : $W_{AB}(\vec{F_i}) = -\alpha \int_{C,AB}(\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$
4. Remarquons que la somme sur le chemin AB de $\frac{\vec{v}}{||\vec{v}||} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{||\vec{v}||} \times ||\vec{v}|| \times \mathrm{d}r \times \cos(0) = \mathrm{d}r$ donne la somme de la distance parcourue et donc la longueur du chemin. On peut donc simplifier l'intégrale : $W_{AB}(\vec{F_i}) = -\alpha \times ||C_{AB}|| = AB$.

Sur BC

De la même façon, on obtient $W_{AB}(\vec{F_i}) = -\alpha \times ||C_{AB}||$ [i]

i Info
Ici, $||C_{AB}||$ vaut la distance l'arc BC, que l'on peut calculer en connaissant le rayon R et la hauteur du point C.

8.1.7 Force de rappel du ressort : Force non constante

Appliquons la méthode pour la force de rappel du ressort. Dans un déplacement après l_0, on a :

$$\begin{aligned}
W_{C(AB)}(\vec{F_r}) &= \int_{C(AB)} \vec{F_r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= \int \vec{F_r} \cdot (\mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}) \\
&= \int \vec{F_r} \cdot \mathrm{d}x\vec{e_x} \\
&= \int_{x_a}^{x_b} -kx\mathrm{d}x \\
&= -k[\frac{x^2}{2}]_{x_a}^{x_b} \\
&= -\frac{1}{2}k(x_b^2 - x_a^2)
\end{aligned}$$

8.2 Déterminer une énergie potentielle à partir d'une force

8.2.1 Avec le travail

On utilise la relation entre le travail et la variation d'énergie potentielle :$\delta W = -\mathrm{d}E_p$.

Force électrostatique

Exemple : Considérons une force d'attraction entre 2 particules : $\overrightarrow{f} = \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_\rho}$ dans un repère polaire. Le déplacement élémentaire dans ce type de repère est $\mathrm{d}\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}$.

On a :

$$\begin{aligned}\delta W &= \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} \\ &= \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}(\mathrm{d}\rho\overrightarrow{e_\rho} + \rho\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}) \\ &= \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\rho\end{aligned}$$

En effet, la force s'exprime seulement avec $\overrightarrow{e_\rho}$, donc le produit scalaire avec $\overrightarrow{e_\varphi}$ est nul et celui avec $\mathrm{d}\rho\overrightarrow{e_\rho}$ donne bien $\mathrm{d}\rho$. Une fois l'expression trouvée, on peut calculer l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}\delta W &= -\mathrm{d}E_p \\ \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\rho &= -\mathrm{d}E_p \\ \int \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\rho &= -\int \mathrm{d}E_p \\ -\frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0 r} + C &= -E_p \\ \frac{q_a q_b}{4\pi\varepsilon_0 r} + C &= E_p\end{aligned}$$

On prend la constante nulle pour avoir une énergie potentielle nulle en l'infini.

Le poids

Exemple : Le poids $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$. On a :

$$\begin{aligned}
\delta W(\overrightarrow{P}) &= -\mathrm{d}E_p \\
\overrightarrow{P} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} &= -\mathrm{d}E_p \\
-mg\overrightarrow{e_z} \cdot (\mathrm{d}x\overrightarrow{e_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{e_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}) &= -\mathrm{d}E_p \\
-mg\mathrm{d}z &= -\mathrm{d}E_p \\
\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} &= mg \\
E_p &= \int mg \\
E_p &= mgz + CST
\end{aligned}$$

On choisit $E_p = 0$ pour $z = 0$, dans ce cas la constante vaut 0 et $E_p = mgz$. Le signe de l'expression dépend de l'axe.

8.2.2 Avec le gradient

Force électrostatique

Comme avec la méthode précédente, on prend $\overrightarrow{F_e} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 \times r^2}\ \overrightarrow{F_e} = -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 \times r^2}$. Dans la base sphérique, elle ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{e_r}$.

On applique la formule $\overrightarrow{F_e} = -\operatorname{grad}(E_p)$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} & = 0 \Rightarrow E_p \text{ ne dépend pas de } \varphi \\ -\frac{\partial E_p}{\partial \rho} & = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{qq_0}{r^2} \end{cases}$$

On peut donc écrire $\Rightarrow \frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\rho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{qq_0}{r^2}$.

Astuce
Comme il n'y a qu'une seule dérivée partielle on nulle, celle dépendant de ρ, on en déduit que ma dérivée de l'énergie potentielle dépend seulement de ρ, d'où la nouvelle écriture

Il n'y a plus qu'à intégrer E_p pour trouver : $E_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{qq_0}{r} + Cst$.

On choisi que $E_p \to 0$ quand $r \to \infty$, donc la constante est nulle.

Le poids

On a $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$ avec un axe orienté vers le haut.

On cherche une fonction E_p telle que $\overrightarrow{P} = -\operatorname{grad}(E_p)$. On a donc, en identifiant les coordonnées du vecteur gradient avec celles de $\overrightarrow{P}$:

$$\begin{cases} -\frac{\partial E_p}{\partial x} & = 0 \Rightarrow E_p \text{ ne dépend pas de } x \\ -\frac{\partial E_p}{\partial y} & = 0 \Rightarrow E_p \text{ ne dépend pas de } x \\ -\frac{\partial E_p}{\partial z} & = -mg \end{cases}$$

On remarque E_p ne dépend que de z, on peut donc écrire et intégrer $\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}z} = mg \Rightarrow E_p = mgz + Cst$.

8.3 Déterminer une force à partir d'une énergie potentielle

8.3.1 Méthode

On sait que la force recherchée dérive d'un pontentiel, que l'on connaît déjà. On peut donc écrire :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(U)$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{F}$ sont différentes selon le repère considéré :

Repère cartésien

On a :

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de dériver partiellement l'expression de u en fonction de x, y et z pour trouver les coordonnées recherchées.

8.3.2 Repère polaire

On a :

$$\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial U}{\partial \rho} \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Il suffit donc de dériver partiellement l'expression de u en fonction de ρ et φ pour trouver les coordonnées recherchées.