Chapitre 7

Polynômes et fractions rationnelles

On note $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

7.1 Polynôme

7.1.1 Définition

On note $k[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans k, avec X appelée inderminée.

C'est une suite (a_k) d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang.

On note X l'objet du polynôme qui n'est pas forcément un réel

> **Difficulté**
> On peut mettre n'importe quel objet (fonction, matrice, opérateur) dans un polynôme. Les polynômes sont donc très efficaces.

Soient $P = (a_k)$ et $Q = (b_k)$. On a $P = Q \iff a_k = b_k \forall k$.

On commence les polynômes à la puissance 0.

> **Astuce**
> Le polynôme nul n'est pas un polynome de degré 0 mais $-\infty$

Exemple : $X = (0, 1 \dots), 1 = (1, 0 \dots, 0), 0 = (0 \dots), X^k = (0, \dots, k \dots)$

> **Définition 1.1 : Degré d'un polynôme**
>
> Noté $\deg(P)$ le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$,i.e, $\deg(P) = \max\{k, a_k \neq 0\}$. On a donc $a_n \neq 0$ et $\forall k > n, a_k = 0$. Si $P = 0, \deg(P) = -\infty$.

Exemple : $\deg(0, 1, 2, 0, 3) = 5$.

7.1.2 Notation

Soit P un polynôme. On suppose que pour $k \geq n+1, a_k = 0$ ✕. On note $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Cepdendant, si on donne explicitement de degré, alors on sait que $n \neq 0$.

✕ **Difficulté**
Ici, n n'est pas forcément le degré, donc on ne sait pas si $a_n \neq 0$. Le degré est inférieur ou égal à n

7.1.3 Opérations

Addition

Soit P et Q 2 polynômes de degré inférieur à n. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. On a $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$

Multiplication par un scalaire

On a $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$

Multiplication de 2 polynômes

On a $P \times Q = \sum_{k=0}^{2n} (c_k) X^k$, avec $c_k = \sum_{p+q=k} a_p b_q$

On calcul d'abord les coefficients : Le nombre de coefficient vaut le double du degré le plus des 2 polynômes. Pour chaque coefficient, on cherche le nombre de façon d'obtenir le degré correspondant à son indice. Finalement, on écrit le résultat avec un polynome ayant le double du degré le plus haut initial, avec les coefficients trouvés.

Exemple : $P = 3 + 4X + 0X^2 + 12X^3$ et $Q = 1 + X + X^2 + 0X^3$. On a $P + Q = 4 + 5X + X^2 + 12X^3$, $\sqrt{2}Q = \sqrt{2} + \sqrt{2}X + \sqrt{2}X^2$.

$$
\begin{aligned}
C_0 &= a_0 b_0 = 3 \times 1 \\
C_1 &= a_1 b_0 + a_0 b_1 = 3 \times 1 + 4 \times 1 \\
C_2 &= a_1 b_1 + a_0 b_2 + a_2 b_0 \\
C_3 &= a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 \\
C_4 &= a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 \\
C_5 &= a_2 b_3 + a_3 b_2 \\
C_6 &= a_3 b_3
\end{aligned}
$$

On écrit $PQ = C_0 + C_1 X + C_2 X^2 + C_3 X^3 + C_4 X^4 + C_5 X^5 + C_6 X^6$.

! Remarques et résultats

- $X^k + X^m = X^{k+m}$

- $0 \times X^k = 0$
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- $(K(X), +, \cdot)$ est un espace vectoriel et $(K(X), +, \times)$ est un anneau commutatif
- Seuls les polynômes constants non nuls de degré 0 ont un inverse.

Dérivation

On appelle dérivée de P le polynôme noté P' et défini par $P'[X] = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1}$. On note parfois $P' = \mathrm{D}(P)$.

Exemple : $P = 5X^3 + 2X + 1$. $P'(X) = 15X^2 + 2$.

Si $\deg(P) > 0, \deg(P') = \deg(P) - 1$.

7.1.4 Division euclidienne

Théorème 1.1 : Théorème de la division euclidienne

Soit A et B 2 polynômes. Alors $\exists!(Q, R) \in K[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

Exemple : $X^3 + 2X^2 + X + 2$ divisé par $X + 1$.

$$\begin{array}{r|l} X^3 + 2X^2 + X + 2 & X+1 \\ \cline{2-2} -X^3 \quad -X^2 \qquad\qquad & X^2 + X \\ \cline{1-1} X^2 + X \quad\; & \\ -X^2 - X \quad\; & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

Définition 1.2 :

Soient A et B 2 polynômes. B divise $A \iff \exists Q \in K[X]$, tel que $A = BQ$. Si $B \neq 0, B|A \iff$ reste de la divisoon euclidienne de A par B est nul.

Exemple : $(X-i)|(X^2+1)$ car $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, $(X-1)|(X^3-1)$ car $X^3 - 1 = (X-1)(X^2+X+1)$.

Définition 1.3 : Morphisme de spécialisation

On définit une application $\varphi : x_0 \to P(x_0)$. On remplace X par x_0. C'est un morphisme de spécialisation. On note en général P̃ l'applixation $x \to P(x)$. C'est le processus pour transformer X en un objet défini et déterminé.