Chapitre 7

Oscillateurs forcés

Dans le thème précédant, on a étudié des systèmes libres (fréquence d'oscillation dépend des prorpriétés du système). Ici, on va considérer la cas où le système subit un forçage d'un système extérieur. On supposera un forçage sinusoidal.

7.1 Système du premier ordre forcé

7.1.1 Exemple : Piston horizontal dans un fluide

On a une force de frottement fluide du type $-\alpha\vec{v}$.

Forçage : On fait subir une force du type $\vec{F} = F\cos(\omega t)\vec{e_x}$

On projette le PFD selon l'axe x :

$$
\begin{aligned}
& m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} + F\cos(\omega_e t) && (7.1)\\
& \iff m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = F\cos(\omega_e t) && (7.2)\\
& \iff m\dot{v_x} + \alpha v_x = F\cos(\omega_e t) && (7.3)\\
& \iff \dot{v_x} + \frac{\alpha}{m}v_x = \frac{F}{m}\cos(\omega_e t) && (7.4)\\
& \iff \dot{v_x} + \frac{1}{\tau}v_x = a_m\cos(\omega_e t + \varphi_e) && (7.5)
\end{aligned}
$$

Le terme de forçage introduit en tant que second membre dans est non constant dans l'EQD (7.5).

7.1.2 Solution homogène

On résout (7.5).

L'équation homogène est

$$\dot{V_h} + \frac{1}{\tau} V_h = 0 \tag{7.6}$$

On trouve

$$V_h(t) = Ce^{-t/\tau} \tag{7.7}$$

Le second membre est sinosoidal, donc on cherche une solution particulière sous la forme sinosidale de même pulsation que le terme de forçage, ω_e

On cherche V_p de la forme $V_m \cos(\omega_e t + \varphi_v)$. Il faut donc déterminer V_m, l'amplitude et φ_v la phase.

7.1.3 Résolution avec les réels

V_p est solution de (7.5).

On calcule $\dot{v_p} = -V_m\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi_v)$

On a alors

$$\begin{aligned}
-V_m\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi_v) + \frac{1}{\tau} V_m \cos(\omega t + \varphi) &= a_m \cos(\omega_e t) \\
-V_m\omega_e (\sin(\omega_e t)\cos(\varphi_v) + \cos(\omega_e)\sin(\varphi_v)) + \frac{V_m}{\tau}(\cos(\omega_e t)\cos(\varphi_v) - \sin(\omega_e t)\sin(\varphi_v)) &= a_m \cos(\omega_e t) \\
(-V_m\omega_e \sin(\varphi_v) + \frac{V_m}{\tau}\cos(\varphi_v))\cos(\omega_e t) + (-V_m\omega_e\cos(\varphi_v) - \frac{V_m}{\tau}\sin(\varphi_v))\sin(\omega_e t) &= a_m\cos(\omega_e t) + 0\sin(\omega_e t)
\end{aligned}$$

On identifie les coefficients de $\cos(\omega_e t)$ et $\sin(\omega_e t)$

$$\begin{cases} -V_m\omega_e \sin(\varphi_v) + \frac{V_m}{\tau}\cos(\varphi_v) & = a_m \\ -V_m\omega_e\cos(\varphi_v) - \frac{V_m}{\tau}\sin(\varphi_v) & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V_m}{\tau}\cos(\varphi_v)(-\omega_e\tau\frac{\sin(\varphi_v)}{\cos(\varphi_v)} + 1) & = a_m \\ \frac{\sin(\varphi_v)}{\cos(\varphi_v)} = -\omega_e\tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{V_m}{\tau}\cos(\varphi_v)(-\omega_e\tau\tan(\varphi_v) + 1) & = a_m \\ \tan(\varphi_v) = -\omega_e\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{V_m}{\tau}\cos(\varphi_v)(-\omega_e\tau(-\omega_e\tau) + 1) & = a_m \\ \tan(\varphi_v) = -\omega_e\tau \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_m = \frac{a_m\tau\sqrt{1+\omega_e^2\tau^2}}{1+\omega_e^2\tau^2} \\ \tan(\varphi_v) = -\omega_e\tau \end{cases}$$

7.1.4 Résolution avec les complexes

Rappels

Forme	Écriture	Rmq
complexe	$\rho e^{i\varphi}$	$\rho > 0$
algébrique	$a + ib$	$a, b \in \mathbb{R}$
trigonométrique	$\lvert z\rvert(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$	

- $\frac{1}{z} = \frac{e^{-i\varphi}}{\rho}$
- $\arg(\frac{1}{z}) = -\arg(z)$
- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $\arg(\frac{z_1}{z_2} = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

Introduction des grandeurs complexes

On cherche V_p de la forme $V_m \cos(\omega_e t + \varphi_v)$. Il faut donc déterminer V_m, l'amplitude et φ_v la phase.

V_p est solution de (7.5).

On introduit $\underline{V_p} \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\underline{V_p}) = V_p$ i , i.e. $\underline{V_p} = V_m e^{i(\omega_e t + \varphi_v)} = V_m e^{i\omega_e t} e^{i\varphi_v}$

> **i Info**
> À chaque fois que l'on introduit une grandeur complexe, sa partie réelle vaut la grandeur réelle associée. Ici, on voit que $Re(\underline{V_p}) = Re(V_m(\cos(\omega_e t + \varphi_v) + i\sin(\omega_e t + \varphi_v))) = V_m(\cos(\omega_e t + \varphi_v) = V_p$.

On introduit $\underline{A} \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\underline{A}) = a_m \cos(\omega_e t + \varphi_e)$, i.e. $\underline{A} = a_m e^{i(\omega_e t + \varphi_e)} = a_m e^{i\omega_e t} e^{i\varphi_e}$

Introduction des Constantes complexes

On pose $\underline{V_m} = V_m e^{i\varphi_v}$ et $\underline{a_m} = a_m e^{i\varphi_e}$

On a alors $\underline{V_p} = \underline{V_m} e^{i\omega_e t}$ et $\underline{A} = \underline{a_m} e^{i\omega_e t}$

Écrire l'EQD complexe

L'équation (7.5) devient, avec les grandeurs introduites :

$$\underline{\dot{V_p}} + \frac{1}{\tau}\underline{V_p} = \underline{A} \qquad (7.8)$$

On dérive $\underline{V_p}$ pour obtenir $\underline{\dot{V_p}} = \underline{V_m} i\omega_e e^{i\omega_e t}$ que l'on introduit dans (7.8) :

$$\begin{aligned}
\underline{V_m} i\omega_e e^{i\omega_e t} + \frac{1}{\tau}\underline{V_m} e^{i\omega_e t} &= \underline{a_m} e^{i\omega_e t} \\
\underline{V_m} i\omega_e \cancel{e^{i\omega_e t}} + \frac{1}{\tau}\underline{V_m} \cancel{e^{i\omega_e t}} &= \underline{a_m} \cancel{e^{i\omega_e t}} \\
\underline{V_m} i\omega_e + \frac{1}{\tau}\underline{V_m} &= \underline{a_m} \\
\underline{V_m}(i\omega_e + \frac{1}{\tau}) &= \underline{a_m} \\
\underline{V_m} &= \frac{\underline{a_m}}{\frac{1}{\tau} + i\omega_e}
\end{aligned}$$

Pour obtenir V_m et φ_v, il faut calculer le module et l'argument de $\underline{V_m}$.

$$\begin{aligned}
V_m = |\underline{V_m}| &= \frac{|\underline{a_m}|}{|\frac{1}{\tau} + i\omega_e|} \\
&= \frac{a_m}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_e^2}} \\
&= \frac{a_m \tau}{\tau\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_e^2}} \\
&= \frac{a_m \tau}{\sqrt{1 + \omega_e^2 \tau^2}}
\end{aligned} \tag{7.9}$$

De plus $\varphi_v = \arg(\underline{V_m}) = \arg(\underline{a_m}) - \arg(\frac{1}{\tau} + i\omega_e) = \varphi_e - \arctan(\omega_e \tau)$.

> **Astuce**
> Rappel : Si $Re(a + ib) > 0, \rho = \arctan(\frac{b}{a})$, si $Re(z) < 0, \rho = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi$.

On a trouvé la solution générale en (7.7) et trouvé la solution particulière. La Solution complète est :

$$s(t) = V_H + V_P = Ce^{-t/\tau} + V_m \cos(\omega_e t + \varphi_v)$$

> **Type de Régime**
>
> Si $t \leq \tau$, on parle de régime transitoire, si $t >> \tau$, $V_H(t) \simeq 0$ et $V(t) \simeq V_P(t)$. On parle alors de régime forcé.

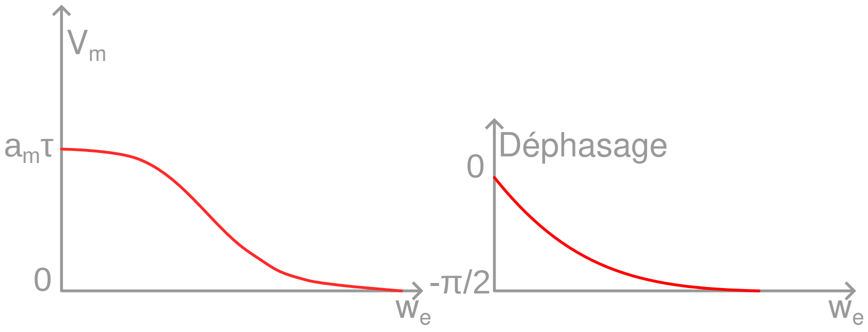
7.1.5 Notion de filtrage

On se place dans le régime forcé $V(t) \simeq V_m \cos(\omega_e t + \varphi_v)$ et on regarde comment l'amplitude des oscillations V_M varie en fonction de ω_e.

D'après (7.9), $V_m = a_m \tau (1 + \omega_e^2 \tau^2)^{-1/2}$. Donc $\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}\omega_e} = a_m \tau \times (-\frac{1}{2}) \times (1 + \omega_e^2 \tau^2)^{-3/2} \times 2\omega_e \tau^2 < 0$.

En $\omega_e = 0$, $V_m(\omega_e) = a_m \tau$ et $\frac{\mathrm{d}V_m}{\mathrm{d}\omega_e} = 0$. De plus, quand $\omega_e \to +\infty$, $Vm(\omega_e) \to 0$.

On parle de filtre “passe-bas” (les hautes fréquences provoquent des oscillations de très faible amplitude).



Comme $\varphi_v(\omega_e) = \varphi_e - \arctan(\omega_e \tau)$, le déphasage tend vers $-\frac{\pi}{2}$. [i]

i Info
La fonction arctan tend vers $\pi/2$ à l'infini.

7.2 Systèmes forcés du deuxième ordre

7.2.1 Exemple

On fait varier la position de l'extrémité gauche du ressort x_0 de façon périodique au cours du temps. $x_0 = d_m \cos(\omega_e t + \varphi_e)$ avec d_m l'amplitude du mouvement et ω_e la fréquence.

PFD selon $\overrightarrow{e_x}$: $m\ddot{x} = -k(x - x_0 - l_0)$

On obtient $m\ddot{x} + kx = kl_0 + kx_0(t)$. En posant $X = x - l_0$ pour faire disparaître kl_0, on a

$$m\ddot{X} + kX = kd_m \cos(\omega_e t + \varphi_e)$$
$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}d_m \cos(\omega_e t + \varphi_e)$$
$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 d_m \cos(\omega_e t + \varphi_e) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{7.10}$$

7.2.2 Résolution sans dissipation

On obtient une équation d'OH avec un second membre sinusoidal :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 d_m \cos(\omega_e t + \varphi_e) \tag{7.11}$$

L'équation homogène associée est $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$, donc la solution homogène est $X_H(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

On cherche une solution particulière $X_p(t)$ du même type que le second membre : sinusoidal avec la même pulsation ω_e. Elle est de la forme $X_p(t) = X_m \cos(\omega_e t + \varphi_X)$ avec X_m et φ_x à déterminer.

Introduction des grandeurs complexes

$\underline{X_p} = X_m e^{i(\omega_e t + \varphi_x)} = \underline{X_m} e^{i\omega_e t}$ avec $\underline{X_m} = X_m e^{i\varphi_x}$

$\underline{D} = d_m e^{i(\omega_e t + \varphi_e)} = \underline{d_m} e^{i\omega_e t}$ avec $\underline{d_m} = d_m e^{i\varphi_e}$

Écriture de l'équation en complexe

On réécrit (7.10) avec les nouvelles grandeurs :

$$\underline{\ddot{X}_p} + \omega_0^2 \underline{X_p} = \omega_0^2 \underline{D} \tag{7.12}$$

On a bien Re((7.12)) = (7.11).

Calcul de la dérivée seconde et remplacement

On calcule $\underline{\ddot{X}_p}$: $\underline{\dot{X}_p} = \underline{X_m} i\omega_e e^{i\omega_e t}$ et $\underline{\ddot{X}_p} = -\omega_e^2 \underline{X_m} e^{i\omega_e t}$ × .

> × Difficulté
> On trouve bien $i\omega_e^2$ car on rappelle que $i \times i = i^2 = -1$!

On remplace dans (7.12) :

$$-\omega_e^2 \underline{X_m} e^{i\omega_e t} + \omega_0 \times \underline{X_m} e^{i\omega_e t} = \omega_0^2 \underline{d_m} e^{i\omega_e t}$$
$$\underline{X_m}(\omega_0^2 - \omega_e^2) = \omega_0^2 \underline{d_m}$$
$$\underline{X_m} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_e^2} \underline{d_m} \tag{7.13}$$

Calcul des variables à determiner

On calcule $X_m = |\underline{X_m}|$ et $\varphi_X = \arg(\underline{X_m})$.

$X_m = |\underline{X_m}| = |\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_e^2}| \times |\underline{d_m}|$.

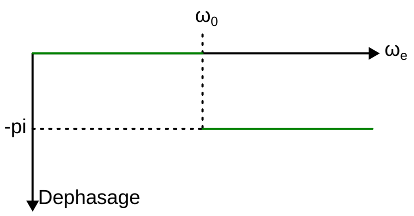
Si $\omega_0 > \omega_e, X_m = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_e^2} d_m$ et si $\omega_0 < \omega_e, X_m = \frac{\omega_0^2}{\omega_e^2 - \omega_0^2} d_m$.

$\varphi_X = \arg(\underline{X_m}) = \arg(\underline{d_m}) + \arg(\omega_0^2) - \arg(\omega_0^2 - \omega_e^2) = \varphi_e + 0 - \arg(\omega_0^2 - \omega_e^2)$

Si $\omega_0 > \omega_e, \varphi_X = \varphi_e$

> Astuce
> En effet, l'argument d'un nombre négatif est π et celui d'un positif est 0

Si $\omega_e > \omega_0, \varphi_X = \varphi_e - \pi$



7.2.3 Résolution avec dissipation

Mise en équation

On rajoute une force de frottement fluide $F = -\alpha \vec{v}$.

On fait le PFD selon $\overrightarrow{e_x}$:

$$m\ddot{x} = -k(x - x_0 - l_0) - \alpha\dot{x}$$
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k(x - l_0) = kx_0$$
$$m\ddot{X} + \alpha\dot{X} + kX = kx_0(t)$$
$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}x_0(t)$$
$$\ddot{X} + \frac{1}{\tau}\dot{X} + \omega_0^2 X = \omega_0^2 x_0(t) \quad (7.14)$$

En posant $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et en effectuant un changement de variable : $X = x - l_0$.

Solution générale

L'équation homogène associée à (7.14) est :

$$\ddot{X}_h + \frac{1}{\tau}\dot{X}_H + \omega_0^2 X_H = 0 \quad (7.15)$$

Il s'agit d'une équation d'OH amorti dont la solution dépend du discriminant. [i]

i Info
Voir le chapitre précédant pour la solution d'un OH amorti

Régime transitoire

La solution de l'équation (7.14) est la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière. Compte tenu de la présence d'un amortissement, la solution de l'équation sans second membre tend vers 0. au bout d'un temps suffisamment important, seule la solution particulière reste non nulle. Seul le régime forcé est étudié ici [i] . Pour le décrire, il suffit de rechercher la solution particulière.

i Info
Pour décrire le régime transitoire, il serait nécessaire d'écrire la solution complète qui dépend des conditions initiales, mais ce n'est pas l'objet de cette partie.

Mise en équation de la solution particulière

On cherche maintenant une solution particulière $X_p(t)$

Elle doit vérifier

$$\ddot{X}_p + \frac{1}{\tau}\dot{X}_p\omega_0^2 X_p = \omega_0^2 d_m \cos(\omega_e t + \varphi_e) \quad (7.16)$$

On cherche $X_p(t)$ sous la mn̂e forme que le second membre, i.e

$$X_P(t) = X_m \cos(\omega_e t + \varphi_x) \quad (7.17)$$

avec ω_e de même pulsation que l'excitation

Introduction des grandeurs complexes

$\underline{X_p} = X_m e^{i(\omega_e t + \varphi_x)} = \underline{X_m} e^{i\omega_e t}$ avec $\underline{X_m} = X_m e^{i\varphi_x}$

$\underline{D} = d_m e^{i(\omega_e t + \varphi_e)} = \underline{d_m} e^{i\omega_e t}$ avec $\underline{d_m} = d_m e^{i\varphi_e}$

On réécrit (7.16) avec les nouvelles grandeurs :

$$\underline{\ddot{X}_p} + \frac{1}{\tau}\underline{\dot{X}_p} + \omega_0^2 X_p = \underline{D} \tag{7.18}$$

On calcule $\underline{\ddot{X}_p}$: $\underline{\dot{X}_p} = \underline{X_m} i\omega_e e^{i\omega_e t}$ et $\underline{\ddot{X}_p} = -\omega_e^2 \underline{X_m} e^{i\omega_e t}$.

On remplace dans (7.18) :

> **Astuce**
> En remplaçant les valeurs par leur écriture complexe, les exponentielles doivent se simplifier comme ici, si ce n'est pas le cas, c'est qu'il y a une erreur de calcul.

$$-\omega_e^2 \underline{X_m} e^{i\omega_e t} + \frac{1}{\tau} \times \underline{X_m} i\omega_e e^{i\omega_e t} + \omega_0^2 \times \underline{X_m} e^{i\omega_e t} = \omega_0^2 \underline{d_m} e^{i\omega_e t}$$

$$-\omega_e^2 \underline{X_m} \cancel{e^{i\omega_e t}} + \frac{1}{\tau} \times \underline{X_m} i\omega_e \cancel{e^{i\omega_e t}} + \omega_0^2 \times \underline{X_m} \cancel{e^{i\omega_e t}} = \omega_0^2 \underline{d_m} \cancel{e^{i\omega_e t}}$$

$$\underline{X_m}(\omega_0^2 - \omega_e^2 + \frac{i\omega_e}{\tau}) = \omega_0^2 \underline{d_m}$$

$$\underline{X_m} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega_e^2 + \frac{i\omega_e}{\tau}} \underline{d_m} \tag{7.19}$$

On obtient $X_m = |\underline{X_m}|$ et $\varphi_x = \arg(\underline{X_m})$

On pose $u = \frac{\omega_e}{\omega_0}$. On a alors, en divisant par ω_0^2.

$$\begin{aligned}\underline{X_m} &= \frac{1}{1 - \frac{\omega_e^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_e}{\omega_0}\frac{i\omega_e}{\tau}} \underline{d_m} \\ &= \frac{1}{1 - u^2 + \frac{iu}{Q}} \underline{d_m} \\ &= \frac{Q}{Q(1-u^2) + iu} \underline{d_m}\end{aligned} \tag{7.20}$$

On calcule $X_m = |\underline{X_m}| = \frac{d_m Q}{\sqrt{Q^2(1-u^2)^2 + u^2}}$

Si $\omega_e \to 0$, le ressort se comporte comme une tige rigide et le déplacement de la masse vaut le déplacement de x_0

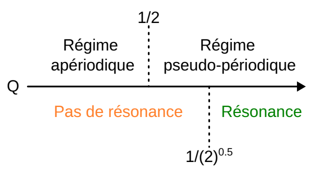
Étude de la fonction

On dérive la fonction :

$$d_m Q \times (-\frac{1}{2}) \times \frac{Q^2 \times 2 \times (1-u^2) \times (-2u) + 2u}{(Q^2(1-u^2) + u^2)^{3/2}}$$

Elle vaut 0 si $Q^2 \times 2 \times (1-u^2) \times (-2u) + 2u = 0$, i.e. $u = 0$ ou $u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$.
Si $Q \to \infty$, on tend vers le cas sans dissipation (OH).

Il existe une résonance seulement si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \iff Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. i



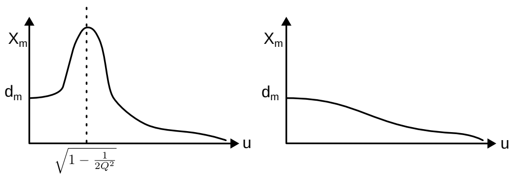
> **i Info**
> L'oscillateur est obligatoire en régime pseudo-périodique. Les condition de résonance sont uniquement sur Q mais nécessite quand même un forçage.

- Si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Pulsation de la résonance : $u^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \iff \omega_e = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

X_m à la résonance : $X_m = \frac{d_m Q}{\sqrt{Q^2(1-u^2)^2+u^2}} = \frac{d_m Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

- Dans le cas contraire, la seule valeur de u qui annule la dérivée est $u = 0$, donc u décroît, sans résonance.



Si Q est très grand devant 1 qu'il tend vers l'infini par exemple, il y a une résonance pour $u = 1$ et l'amplitude maximale des oscillations de la masse est $d_m \times Q$. i

Info
En effet, si $Q >> 1$, alors $\frac{d_m Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \simeq \frac{d_m Q}{\sqrt{1}} = d_m Q$

Si $Q = 100$, $X_{m,max} = d_m \times 100$.

Calcul de la phase

$\varphi_X = \arg(\underline{X_m}) = \arg(\underline{d_m}) + \arg(Q) - \arg(Q(1-u^2)+iu) = \varphi_e + 0 - \arg(Q(1-u^2)+iu)$.

Donc Si $u < 1$, on a $\varphi_x = \varphi_e - \arctan(\frac{u}{Q(1-u^2)})$. Dans le cas contraire, on a $\varphi_x = \varphi_e - \arctan(\frac{u}{Q(1-u^2)}) - \pi$

Astuce
Si $a > 0, \arg(a+ib) = \arctan(\frac{b}{a})$ ou $a > 0, \arg(a+ib) = \arctan(\frac{b}{a}) + \pi$