

Chapitre

Dynamique des systèmes de points matériels et des solides

La dynamique des solides repose sur le PFD qui est une généralisation de la LFP du point matériel. Le PFD exprime la relation entre les grandeurs cinétiques ($\vec{p} = M\vec{v}_{c/R}, \vec{L}_{O/R}$) et les actions mécaniques (forces et moments)

3.1 Forces et moments appliqués à un système

3.1.1 Somme des forces et moment des forces

On définit $\sigma \vec{F} = \int \vec{f}_v dv$ avec \vec{f}_v la densité volumique de force qui s'exerce sur un volume. On a

$$\sum \vec{M}_O = \int \vec{OA} \wedge \vec{f}_v dv$$

avec O un point quelconque, A un point de F et \vec{f}_v la force appliquée au point A et \vec{M}_O le moment au point O.

3.1.2 Torseur-Force

Pour décrire les actions mécaniques qui s'exercent sur S, on introduit le torseur force qui contient la somme des forces et le moment en O de la somme des forces. Le moment des forces vérifie les propriétés de transport :

$$\vec{M}_B(\sum \vec{F}) = \vec{M}_A(\sum \vec{F}) + \vec{BA} \wedge \sum \vec{F}$$

3.1.3 Notion de couple



Définition 1.1 : Couple

Noté Γ , c'est un système de forces dont la somme est nulle ($\sum \vec{F} = \vec{0}$), mais dont le moment ne l'est pas $M_O(\sum \vec{F}) \neq 0$.

Un exemple de couple est la rotation d'un volant de voiture.

3.1.4 Assimilation d'une force à un point matériel



Théorème 1.1 : Condition d'assimilation d'une force à un point matériel

Si $M_O(\sum \vec{F}) = \vec{O}$, l'ensemble du torseur de force associé est assimilable à une force unique appliquée en O.

Exemple du torseur des forces de pesanteur terrestre :

Les forces de pesanteur sont un ensemble de forces distribuées, chaque particule de masse dm du solide étant soumise à une force $d\vec{P} = \vec{g} dm$. La résultante de ces forces est[!] :

$$\vec{P} = \int dm \vec{g} = M \vec{g}$$

Le moment de ces forces par rapport au centre de masse C est[?] :

$$\vec{M}_C = \int_{(S)} \vec{CA} \wedge dm \vec{g} = \vec{O}$$

On en déduit que le point d'application de la résultante de la gravité est confondu avec le centre de masse. Tout se passe comme si les forces de pesanteur terrestre étaient une force unique, $\vec{P} = M \vec{g}$, s'exerçant sur le centre de masse.

On distinguera les forces intérieures des forces extérieures .

Exemple

les deux mains appliquent des forces égales et opposées, ce qui annule la résultante des forces mais crée un moment qui fait tourner le volant.

Attention

si \vec{g} est constant à l'échelle du solide.

Astuce

par définition du centre de masse C, l'intégrale de $\vec{CA} dm$ est nulle

Info

Pour un solide indéformable, les forces intérieures sont nulles.

3.2 Principe fondamental de la dynamique

3.2.1 Énoncé



Théorème 2.1 : PFD

Le mouvement d'un solide S par rapport à un référentiel R soumis à un torseur de forces extérieures vérifie

$$\frac{d}{dt} [P_0] = [F_{ex}]$$

avec $[P_0]$ le torseur cinétique et $[F_{ex}]$ qui contient la somme des forces extérieures et le moment des forces extérieures.

En pratique, on n'utilise pas cet énoncé mais les 2 théorèmes généraux qui le composent.

3.2.2 Théorèmes généraux

Théorème de la Qt de mouv



Théorème 2.2 : Théorème de la QT Mouv / Centre de masse / Résultante cinétique / Relation fondamentale de la dynamique

$$\frac{d \overrightarrow{p}}{dt} = \sum \overrightarrow{f_{ext}} \iff \frac{dM \overrightarrow{v_c}}{dt} = \sum \overrightarrow{f_{ext}} \iff M \overrightarrow{a_c} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

avec C le centre de Masse M du solide.

Théorème du moment cinétique



Théorème 2.3 : Théorème du moment cinétique en un point O fixe dans R

$$\frac{d \overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{O,ext}}$$



Cas particulier

On sera toujours dans cette situation dans la majorité des exercices



Théorème 2.4 : Théorème du moment cinétique en un point O' mobile dans R

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} + \vec{v}_{O'} \wedge \vec{p}_s = \sum \overrightarrow{M_{O,ext}}$$

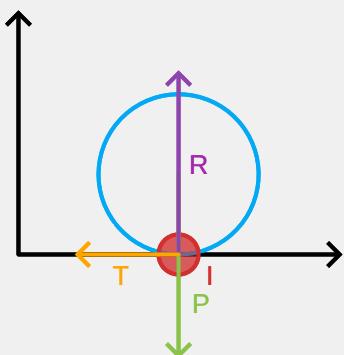


Preuve 2.1

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{L}_o}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} (\vec{L}_O + \overrightarrow{OO'} \wedge \vec{p}_s) \\ &= \frac{d\vec{L}_O}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \wedge \vec{p}_s + \overrightarrow{OO'} \wedge \frac{d\vec{p}_s}{dt} \\ &= \sum \overrightarrow{M_O} - \vec{v}_{O'} \wedge \vec{p}_s + \overrightarrow{OO'} \wedge \sum \overrightarrow{F_{ext}} \\ \left(\frac{d\vec{L}_o}{dt} \right) + \overrightarrow{V_{O'}} \wedge \vec{p}_s &= \sum \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{O'O} \wedge \sum \overrightarrow{F_{ext}} \\ &= \sum \overrightarrow{M_{O'}} \end{aligned}$$



Exemple d'application au point de contact I d'un cerceau sur le sol.



On applique le TMC sur le point I, le point de contact géométrique du cerceau avec le sol.

Justification du choix du point I : Le point de contact I est un point mobile par rapport au référentiel du sol (il se déplace selon Ox). Par conséquent, le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} + \vec{v}_I \wedge \vec{p}_s = \sum \overrightarrow{M_{I,ext}}$$

où \vec{v}_I est la vitesse du point de contact. Pour un roulement sans glissement, la vitesse du point de contact instantané est nulle ($\vec{v}_I = \vec{0}$), ce qui simplifie l'équation à

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \sum \overrightarrow{M_{I,ext}}$$

Intérêt du calcul au point I : Les forces qui s'exercent sur le cerceau sont le poids (\vec{P}), la force de réaction normale du sol (\vec{N}), et la force de frottement (\vec{f}).

Le moment d'une force est nul si son point d'application coïncide avec le point de calcul.

- La force de réaction normale \vec{N} et la force de frottement \vec{f} s'appliquent toutes deux au point de contact I. Leurs moments par rapport à I sont donc nuls :

$$\overrightarrow{M_I(\vec{N})} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{M_I(\vec{f})} = \vec{0}$$

- La seule force dont le moment n'est pas nul est le poids \vec{P} qui s'applique au centre de masse C.

$$\overrightarrow{M_I(\vec{P})} = \vec{IC} \wedge \vec{P}$$

L'application du TMC en I permet donc d'éliminer les moments des forces de contact, ce qui simplifie la résolution du problème en évitant de devoir déterminer la valeur des forces de frottement.



Cas du TMC appliqué au centre de masse

On a

$$\frac{d\vec{L}_c}{dt} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$$

que C soit fixe ou mobile.