Chapitre 3

Fonctions

3.1 Précisions sur les applications réciproques

Théorème 1.1 : Proposition

Soit $f : E \to F$ une application. S'il existe $g : F \to E$ une application telle que : $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Alors f est bijective et g est la réciproque de f.

Preuve 1.1 :

Je suppose :$f : E \to F$. Soit $g : F \to E$ avec $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

- Montrons que f est bijective.

  Soir $y \in F, E?x \in E$, tel que $y = f(x)$, est unique ?

  $y = f(x) \Rightarrow g(y) = g(f(x)) = x$, car $g \circ f = Id_E$.

  Si $g = f(x)$, alors $x = g(y)$. y a au plus un antécédant et f est injective.

  De plus, $f(x) = f(g(y)) = y$ car $f \circ g = Id_F$. Donc $x = g(y)$ est bien un antécédant de y par f et c'est le seul.

  Conslusion : f est bijective de $E \to F$

- Montrons $g = f^{-1}$.

  f bijective et $F \to E$ et $y \longmapsto x$.

  $f^{-1}(x) = x \iff y = f(x)$ et $x \in E$.

  Vérifions que $\forall y \in F, f^{-1}(y) = g(y)$.

  $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y \iff g \circ f(x) = g(y) \Rightarrow x = g(y)$. Donc $g(y) = f^{-1}(y) \forall y \in F$.

Donc l'implication est démontrée.

Théorème 1.2 : Proposition

Soit $f : E \to F$ et $g : F \Rightarrow G$ deux applications bijectives. $g \circ f : E \to F \to G$ et $x \longmapsto f(x) \longmapsto g(f(x))$ Alors $g \circ f$ est bijective.

Théorème 1.3 : Proposition

Soit $f : E \to F$ bijective et notons $f^{-1} : F \Rightarrow E$ sa réciproque. Alors f^{-1} est bijective de réciproque f.

Preuve 1.2 :

Si f est bijective, alors $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$. D'après la proposition précédante, f^{-1} est bijective

Théorème 1.4 : Proposition

Soit $f : I \to R$, si f est strictement monotone sur I, alors f est injective de I sur R.

Preuve 1.3

Pour une fonction strictement décroissante.

$\forall x, x', x' > xf(x) > f(x')$ et donc $f(x) \neq f(x')$ $\forall x, x', x' < x, f(x) < f(x')$ et donc $f(x) \neq f(x')$

Donc, on a bien $\forall x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

On dit que f est continue sur l'intervalle I si elle est continue en tout x de I.

3.2 Continuité et opérations

On prend 2 fonctions f et g continues sur I. Alors $f + g, fg$ sont continues sur I et $\frac{f}{g}$ est continue en tout point de I tel que $g(x) \neq 0$.

Théorème 2.1 : Continuité des composées

Soient $f : I \to J$ une fonction continue sur$I$, à valeurs dans $I \in \mathbb{R}$ et $g : I \to J \in \mathbb{R}$. Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Preuve 2.1

Soit $x_0 \in I$

Soit $\epsilon > 0$ $\exists ?\alpha > 0$, tel que $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. On cherche α tel que $y_0 = f(x_0)$. Notons alors $y = f(x)$. g est continue en x_0, donc $\exists \eta > 0$, $|y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$.

Or, f est continue en x_0, donc $\exists \alpha > 0, |x - x_0| \Rightarrow |f(x) - f(x_0) < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$ car $|y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

Donc $g \circ f$ est bien continue en x_0.

3.2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2.2 : TVI

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $(a \leq b) \in I$. On suppose f continue sur $[a, b]$.

Alors $\forall y_0 \in [f(a), f(b)], \exists x_0 \in [a, b], y_0 = f(x_0)$.

Théorème 2.3 : Variante du TVI

Il est équivalent à :

si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$, alors $\exists c \in [a, b], f(c) = 0$.

Preuve 2.2 : Par dichotomie

Supposons par exemple que $f(a) \leq 0 \leq f(b)$, de sorte que $0 \in [f(a), f(b)]$ (l'autre cas s'y ramène en considérant f). On construit par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) de la façon suivante.

On part de $a_0 := a$, $b_0 := b$, et supposant construits a_n et b_n tels que $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$, on considère la valeur de f en $(a_n + b_n)/2$, milieu du segment $[a_n, b_n]$.

On construit alorsa_{n+1} et b_{n+1} ainsi :

- si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0$, on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
- Sinon, c'est à dire si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.

On voit ainsi que :

1. $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$
2. $0 \leq b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ (On divise par 2 à chaque fois la longueur initiale $b - a$
3. $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$

En particulier, $\lim\limits_{\infty} |b_n - a_n| = 0$ et les 2 suites sont adjacentes.

Elles convergent donc vers une unique limite c. On a $c \in [a, b]$ car $a_n \in [a, b]$ et comme f est continue, on a : $\lim\limits_{\infty} f(a_n) = f(c) = f(b_n)$.

Les doubles inégalités 2 et 3 impliquent que $c = 0$.

3.2.2 Théorème de Heine

Théorème 2.4 : Théorème de Heine

L'image continue d'un intervalle fermé et borné est un intervalle fermé et borné.

Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}, f$ continue sur $[a, b]$, alors $\exists m \in \mathbb{R}, M \in \mathbb{R}, m \leq M$ tels que $f([a, b] = [m, M]$ en particulier $\exists x_0 \in [a, b], f(x_0) = m$ et $\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = M$

Preuve 2.3

On montre d'abord que la fonction est bornée, puis qu'elle atteint ses bornes.

Montrons que la fonction est bornée. Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose la fonction f non majorée (hypothèse de la démonstration par l'absurde). Dans ce cas, $\forall M, \exists t \in [a, b], t \geq M$.

En posant $M = n \in \mathbb{N}$, on a $t_n \in [a,b], f(t_n) \geq n = M$. La suite obtenue est bornée, on peut en extraire une suite convergente (t_{n_k}) de limite α.

Nous avons donc $f(t_{n_k}) \geq n_k, \forall k \in \mathbb{N}$.

f est continue, donc la suite $(f(t_{n_k})) \to f(\alpha)$.

Or, d'après $f(t_{n_k}) \geq n_k$, la suite devrait tendre vers $+\infty$. Il y a contradiction, donc f est majorée. On applique ce qui précède pour montrer que f est minorée.

Montrons qu'elle atteint ses bornes.

Notons maintenant α sa borne inférieure et supposons qu'elle n'est pas atteinte pas f. Posons alors la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}, g(t) = \dfrac{1}{f(t) - \alpha}$. g est bien continue sur $[a,b]$ par composition.

Soit $M > 0$ donné. Par définition de la borne inférieure, nous savons qu'il existe $t \in [a,b]$ tel que $\alpha \leq f(t) < \alpha + \frac{1}{M}$, et donc que $g(t) > M$. M étant arbitraire, g n'est pas majorée. Or, cela contredit la première partie de la démonstration.

3.2.3 Réciproque d'une application continue strictement monotone

3.2.4 Dérivées

Théorème 2.5 : Dérivée de la réciproque

On donne un intervalle $I, J \in \mathbb{R}$ et $f : I \to J$. On suppose f dérivable sur I et que f est bijective de $I \to J$. On note $f^{-1} : J \to I$ la réciproque. Elle est dérivable en $y_0 \in J \iff f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$

On a alors : $(f^{-1})'_{y_0} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$ avec $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Preuve 2.4

On pose $f^{-1}(y_0) = x_0$ Si f^{-1} est dérivable en x.

On a $\lim\limits_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$.

On pose alors $y = f(x)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. Donc $y \to y_0 \iff x \to x_0$ car les fonctions sont continues.

Donc $\lim_{x \to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$ si $f'(x_0) \neq 0$.

3.3 Théorème des accroissements finis et de Rolle

$a < b$

3.3.1 Théorème des accroissements finis

Théorème 3.1 :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors $\exists c \in]a, b[, \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$

Preuve 3.1

On suppose f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

On considère une fonction auxilliaire $\varphi(t) = (t-a)(f(b) - f(a)) - (b-a)(f(t) - f(a))$.

φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ car f l'est.

$\varphi(b) = 0 = \varphi(a)$

D'après le Théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[, \varphi'(c) = 0$.

Or, $\varphi'(t) = f(b) - f(a) - (b-a)f'(t)$, donc $\varphi'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

3.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 3.2 : Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors $\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$

Preuve 3.2

f étant continue sur $[a, b]$, elle est bornée et atteint sa borne inférieure α et sa borne supérieure β. Prenons donc c et d dans $[a, b]$ tels que $f(c) = \alpha$ et $f(d) = \alpha$.

Si $\alpha = \beta$, alors la fonction est en fait constante, et donc en tous les points $c \in]a, b[$, la dérivée s'annule.

Sinon, on a $\alpha \neq \beta$, et donc l'un des deux est différent de $f(a) = f(b)$. Disons par exemple que $f(c) = \alpha < f(a) = f(b)$. Donc $c \neq a$ et $c \neq b$, soit $c \in]a, b[$ et $f'(c) = 0$.

En effet, $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-m}{x-x_0} \leq 0$.

Mais $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-m}{x-x_0} \geq 0$.

Donc $f'(x_0) \geq 0$ et ≤ 0, donc $f'(x_0) = 0$.