Chapitre 3

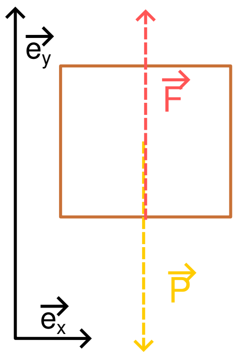
Systèmes du premier ordre

Dans ce chapitre, on va considérer des forces du type $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ avec α une constante positive.

3.1 Mouvement avec frottements fluides

3.1.1 Exemple : Largage d'un colis

Travail préparatoire



Système = Colis M. On se met dans le référentiel terrestre muni du repère R

On fait un bilan des forces : $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}$

On écrit le PDF : $m\overrightarrow{a} = \sum \overrightarrow{F}$

Donc $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_f}$

On projette les forces : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{F_f} = -\alpha(V_x\overrightarrow{e_x} + V_y\overrightarrow{e_y})$ ×

× Difficulté
Lorsque l'on projette la force, on ne sait rien du vecteur vitesse, on ne peut pas formellement savoir sa direction (même si on peut s'en douter), c'est pourquoi le signe de $\overrightarrow{F_f}$ est indépendant de l'axe choisi.

On réécrit le PFD, projeté selon les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = & 0 + -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = & -mg + -\alpha\dot{y} \end{cases}$$

On transforme les équations

On obtient une équation linéaire :

$$\begin{cases} m\dot{v_x} = & 0 + -\alpha v_x \\ m\dot{v_y} = & -mg + -\alpha v_y \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme canonique

$$\begin{cases} m\dot{v_x} + \alpha v_x = & 0 \\ m\dot{v_y} + \alpha v_y = & -mg \end{cases}$$

On divise tout par m :

$$\begin{cases} \dot{v_x} + \frac{\alpha}{m} v_x = & 0 \\ \dot{v_y} + \frac{\alpha}{m} v_y = & -g \end{cases}$$

On pose $\tau = \frac{m}{\alpha}$:

$$\begin{cases} \dot{v_x} + \frac{1}{\tau} v_x = & 0 \\ \dot{v_y} + \frac{1}{\tau} v_y = & -g \end{cases}$$

On résout les équations

Première équation Elle est homogène, donc de la forme $v_x(t) = Ce^{-t/\tau}$.

À $t = 0$, $v_x(0) = Ce^0 = C$, donc $C = V_0$ 💡 . Donc $v_x(t) = V_0 e^{-t/\tau}$ ℹ .

Seconde équation Elle est non homogène : On écrit donc l'équation sous forme homogène : $\dot{v}_{y,h}(t) + \frac{1}{\tau} v_{y,h} = 0$. Donc : $v_{y,h} = De^{-t/\tau}$.

On cherche ensuite une solution particulière. Le second membre est constant, on cherche $v_{y,p}$ constant, (avec sa dérivée nulle). On obtient $0 + \frac{v_{y,p}}{\tau} = -g \iff v_{y,p} = -\tau g$.

Donc, $v_y(t) = De^{-t/\tau} - \tau g$ ✕ .

À $t = 0$, $v_y(0) = 0$. Donc $v_y(0) = De^0 - \tau g = D - \tau g = 0 \iff D = \tau g$.

Finalement, en faisant la somme de solution générale et particulière, on trouve : $v_y(t) = \tau g(e^{-t\tau} - 1)$.

On va tendre vers un vecteur vitesse $v_{lim} = 0\overrightarrow{e_x} - \tau g\overrightarrow{e_y} = -\tau g\overrightarrow{e_y}$ 💡

> 💡 **Astuce**
> On se sert des conditions initiales pour déterminer C

> ℹ **Info**
> $v_x(t) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. Au fil du temps, la vitesse horizontale faiblie.

> ✕ **Difficulté**
> On trouve la valeur de D à partir de la solution complète, et non à partir de la solution homogène.

> 💡 **Astuce**
> La vitesse tend vers une constante, l'accélération est nulle.

Intégration

Première équation On intègre $v_x(t)$: $x(t) = -\tau V_0 e^{-t/\tau} + A$.

Avec les conditions initiales : $x(t=0) = 0$, donc $x(t=0) = -\tau V_0 + A = 0$ et $A = \tau v_0$. $x(t)$ tend vers τV_0 quand x tend vers l'infini.

Seconde équation On intègre $v_y(t)$: $y(t) = \tau g(-\tau e^{-t/\tau} - t) + B = \tau^2 g e^{-t/\tau} - \tau g t + B$. Avec les conditions initiales : $y(0) = h$ et $y(t=0) = \tau^2 g e^{-t/\tau} - \tau g t + B$ et $B = h + \tau^2 g$.

Détermination de la durée nécéssaire pour que v_y atteigne 95% du régime établi

v_y tend vers $-\tau g$, vitesse limite. On veut $v_y(t_{95}) = 0.95 \times -\tau g$. Donc $\tau g e^{-t_{95}/\tau} = 0.05\tau g$, donc $t_{95} = -\tau \ln(0.05)$. Donc au bout de 3τ, v_y atteint 95% de sa valeur limite.

> **Astuce**
> Si le temps de chute est petit devant τ, on calcule la tangente à v_y au voisinage de 0 en calculant la dérivée de v_y, qui est l'accélération. L'équation de la tangente en 0 est $-gt$.

3.2 Radioactivité

3.2.1 Types de réactions

> **Types de Radioactivité**
>
> Radioactivité α : ${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} X' + {}^4_2 \alpha + \gamma$
>
> Radioactivité $\beta+$: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} X' + {}^0_1 e + \nu + \gamma$ avec ν un neutrino.
>
> Radioactivité $\beta-$: ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} X' + {}^0_{-1} e + \bar{\nu} + \gamma$ avec $\bar{\nu}$ un antineutrino.

Capture électronique : ${}^A_Z X + {}^0_{-1} e \rightarrow {}^A_{Z-1} X' + \nu + \gamma + X$ avec X des rayons X

3.2.2 Lois de décroissance radioactive

Pour chaque réaction radioactive, on peut déterminer la probabilité de désintégration du noyau pendant un intervalle de temps compris entre t et $t + dt$.

On alors $dP = \lambda dt$. Dans le SI, λ est en s^{-1}.

> **Info**
> Si λ est donné en s^{-1}, si il est donné en année^{-1}, T est en années.

Si on dispose de n noyaux, on peut déterminer le nombre de désintégrations par seconde = $N \times \lambda dt$.

Donc la variation du nombre de noyaux n pendant dt : $dN = -N\lambda dt$. On divise tout par dt : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, et on aboutit à une EQD du premier ordre linéaire à coefficients constants : $\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$

On cherche une solution du type Ce^{rt} avec $r = -\lambda$, donc $N(t) = Ce^{-\lambda t}$. Si à $t = 0$, $N(0) = N_0$ noyaux, alors $C = N_0$ et $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Période de demie-vie T : temps au bout duquel le nombre initial de noyaux est divisé par 2 :

> **Difficulté**
> Pour déterminer la durée de vie moyenne de l'échantillon τ, on fait $\tau = \frac{1}{\lambda}$. Tout comme pour la vitesse limite, au bout de 3τ, on aura fait disparaître 95% de l'échantillon, il en restera donc plus que 5%.

> **Astuce**
> Pour réduire au milliéme l'échantillon, il faut 10 T car $\frac{\frac{\ln(1000)}{\lambda}}{\frac{\ln(2)}{\lambda}} = \frac{\ln(1000)}{\ln(2)} \simeq \frac{\ln(2^{10})}{\ln(2)} = 10\frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 10$

$$\begin{aligned}
N_0 e^{-\lambda t} &= \frac{N_0}{2} \\
e^{-\lambda t} &= \frac{1}{2} \\
\ln(e^{-\lambda t}) &= \ln(\frac{1}{2}) \\
-\lambda T &= -\ln(2) \\
T &= \frac{\ln(2)}{\lambda}
\end{aligned}$$

3.2.3 Activité

Définition : Nombre de désintégrations par seconde. Elle se mesure en Becquerel (Bq).

$$A(t) = \lambda \times N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

3.2.4 Élément fils

$M(t) =$ nombre de noyaux de l'élément fils, soit le nombre d'éléments père détruits.

$$M(t) = N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$