Chapitre

6

Nombres complexes

6.1 Généralités

6.1.1 Définitions

- L'ensemble des nombres de la forme $a + ib$, où a et b sont des réels et i est tel que $i^2 = -1$, est appelé ensemble des nombres complexes. On le note $\mathbb{C}$.
- L'écriture $z = a + ib$ est la forme algébrique du nombre complexe z, où a est la partie réelle de z, b sa partie imaginaire.

  On note $Re(z) = a, Im(z) = b$.

  $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ contient les nombres complexes dont la partie imaginaire b est nulle.
- Tout nombre complexe dont la partie réelle a est nulle est appelé nombre imaginaire pur.

6.1.2 Propriétés

> **Inférieur Ou supérieur**
>
> Il n'y a pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$. On ne peut pas dire qu'un nombre complexe est plus grand qu'un autre.

Opérations usuelles

Soient $z = a + i\,b$ et $z' = a' + i\,b'$ deux nombres complexes.

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

Opérations de conjugaison

- $\overline{z} = a - ib$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z.$

6.1.3 Module d'un nombre complexe

Définitions

Le module est noté $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$ i

Le module d'un nombre complexe est la prolongement à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue qui existe sur $\mathbb{R}$. On a $|z| = OM$. Il défini une distance sur $\mathbb{C}$

i Info

La notation $\sqrt{x}$ est réservée au Réels positifs. Or le module est une valeur réelle positive, on peut donc l'utiliser ici.

Propriétés

- Si $z = x + i\,y$ alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $|z| = |\overline{z}|\,, \quad z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|, \quad \left|\dfrac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
- $|z^n| = |z|^n, \quad n$ entier naturel.

Inégalité triangulaire

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Preuve 1.1

$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$

Montrons que $|z+z'| \leq |z|+|z'|$. Pour cela, comparons leur carré : $(|z| + |z'|)^2 - (|z + z'|)^2$. En développant, on trouve $2|zz'| - (z'\overline{z} + z\overline{z'}) = 2(z\overline{z'} - Re(z\overline{z'})) \geq 0$ d'après le lemme suivant.

Lemme : $|Re(z)| \leq |z|$. En effet, $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2$

Fin de la preuve : $(|z| + |z'|)^2 \geq |z + z'|^2$. Comme ce sont des réels positifs, on en déduit que $|z| + |z'| \geq |z + z'|$.

Module négatif

$z = -3e^{i\frac{\pi}{4}}$ n'est pas sous forme polaire. On sait que $e^{i\pi} = -1$, donc $z = 3e^{i(\frac{\pi}{4}+\pi)}$.

6.1.4 Argument

Définition

Soit M un point d'affixe le nombre complexe z non nul.
On appelle argument de z tous les réels θ, mesure en radians de l'angle $\left(\vec{e_1}; \overrightarrow{OM}\right)$.
On note $arg(z) = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$ ou $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ (modulo $[2\pi]$).

Astuce
Autrement dit, un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments.
Si θ est l'un d'entre eux, tout autre argument de z s'écrit $\theta + 2k\pi$.
On dit aussi qu'un argument de z est défini modulo 2π.

Argument du nombre 0

Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument car la définition $arg(z) = \left(\vec{e_1}; \overrightarrow{OM}\right)$ suppose $M \neq 0$.

Propriétés

- Si z est un réel strictement positif alors $arg(z) = 0 \quad [2\pi]$.
- Si z est un réel strictement négatif alors $arg(z) = \pi \quad [2\pi]$.
- Si z est un imaginaire pur non nul alors $arg(z) = \dfrac{\pi}{2} \quad [\pi]$.
- Si $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ alors $arg(-z) = \theta + \pi \quad [2\pi]$
- Si $arg(z) = \theta \quad [2\pi]$ alors $arg(\overline{z}) = -\theta \quad [2\pi]$.

Règles de calcul

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(\frac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')$
- $\arg(\frac{1}{z'}) = -\arg(z')$

- $\arg(z^n) = n\arg(z)$
- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$

On note : $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

6.1.5 Formules d'Euler

Théorème 1.1 : Formule d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Théorème 1.2 : Propriétés

$\forall\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- Formule de Moivre : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Preuve 1.2 : Règles précédentes

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = (\cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta')) + (\cos(\theta)\sin(\theta') + \sin(\theta)\cos(\theta')) = \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')}$

Formule de Moivre : On fait par récurrence : $H_n : e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$

Initialisation : Claire, par convention

Hérédité : Supposons H_n : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \Rightarrow (e^{i\theta})^n e^{i\theta} = e^{in\theta+\theta} \iff (e^{i\theta})^{n+1} = e^{i(n+1)\theta}$.

6.1.6 Exponentielle complexe

On définit l'exponentielle complexe sur $\mathbb{C}$ par $\exp : C \to C, z \to e^{a+ib}$

Elle vérifie les mêmes propriétés que dans les réels. :

- $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$
- $\exp(nz) = (\exp(z))^n$
- Elle prolonge à $\mathbb{C}$ l'exponentielle réelle. Il ne faut pas le confondre avec la forme exponentielle d'un nombre complexe.

6.2 Equations du 2nd degré

Théorème 2.1 : Solutions d'une Équation du 2nd degré à coefficients complexes

L'équation $Az^2+bz+c = 0$, notée E admet 2 solutions complexes, qui sont :

- $z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$ si $\Delta = 0$
- $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$, $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, avec $\delta^2 = \Delta$

Preuve 2.1

On écrit le polynome sous forme canonique :

$$\begin{aligned} E &= a((z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}) = 0 \\ &= a((z + \frac{b}{2a})^2 - (\frac{\delta}{2a})^2) \\ &= a(z - \frac{-b+\delta}{2a})(z - \frac{-b-\delta}{2a}) \end{aligned}$$

Théorème 2.2 : Théorème fondamental de l'algèbre

Toute fonction polynôme de degré n admet n racines dans $\mathbb{C}$.

6.3 Racines n-eme de l'unité

z est une racine de l'unité si $z^n = 1$. Si z une racine énième de l'unité, son module vaut 1. De plus, il se trouve sur le cercle de centre O et de rayon 1. De plus $\frac{z}{|z|}$ est toujours de module 1.

6.3.1 Solutions de $z^n = 1$

1. On pose $z = \rho e^{i\theta}$
2. On écrit sous forme polaire : $\rho^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$
3. L'égalité est vérifiée si le module des 2 nombres sont égaux, i.e. $\rho = 1$
4. Il faut aussi que $n\theta = 0 + 2k\pi$, avec $0 < k \leq n - 1$
5. Les solutions sont donc $\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}} \dots e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\}$

6.3.2 Résoudre $z^n = w$

1. On pose $z = \rho e^{i\theta}$
2. On écrit sous forme polaire : $\rho^n e^{in\theta} = |w|e^{i\varphi}$
3. L'égalité est vérifiée si le module des 2 nombres sont égaux, i.e. $\rho = \sqrt[n]{|w|}$
4. Il faut aussi que $\theta = \frac{\varphi}{n}$.
5. On multiplie le résultat par les racines n-eme de l'unité associées.

6.3.3 Résoudre $z^n = w^n$

On cherche z pour w donné. z a 4 solutions, qui sont z mutipliées par chacunes des racines n de l'unité associées.

6.4 Méthode

6.4.1 Calculer les racines d'un nombre complexe

On cherche les racines z_1, z_2 d'un nombre complexe, noté w. Si $w = 0, z = 0$

1. On calcule le module de w
2. Comme $z^2 = w \Rightarrow |z|^2 = |w| \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |w|$, on en déduit finalement que $a^2 + b^2 = |w|$
3. De plus, $z^2 = (a + ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$. On en déduit que la partie réelle de w est $a^2 - b^2$ et que la partie imaginaire est $2ab$.

4. On obtient un système à 3 équations. les 2 premières nous permettent de déterminer $\pm a$ et $\pm b$. La dernière nous donne le signe : si $2ab$ est positif, a et b sont de même signe, dans le cas contraire, ils sont de signe contraire.

En résumé, on doit résoudre ce système pour trouver les solutions :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = |w| \\ a^2 - b^2 & = Re(w) \\ 2ab & = Im(w) \end{cases}$$

6.4.2 Utiliser la formule de moivre pour exprimer des cosinus et sinus

On sait que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. On souhaite exprimer $\cos(4x)$ en fonction de sinus et cosinus. On introduit pour cela le nombre complexe $e^{i4x} = (e^{ix})^4 = (\cos(x) + i\sin(x))^4$. Par identification de la partie réelle pour le $\cos$ et imaginaire pour le $\sin$, on peut trouver le résultat demandé.

On se sert du binome de Newton pour retrouver les coefficients de notre développement si il le faut

$$\begin{aligned} (\cos(x) + i\sin(x))^4 &= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) \\ &\quad + 6\cos^2(x)(i\sin(x))^2 + 4\cos(x)(i\sin(x))^3 + (i\sin(x))^4 \\ &= \cos^4(x) + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) \\ &\quad - 4\cos(x)(i\sin^3(x) + \sin^4(x) \\ &= \cos^4(x) + \sin^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) \\ &\quad + 4\cos^3(x)(i\sin(x)) - 4\cos(x)(i\sin^3(x) \\ \cos(4x) &= \cos^4(x) + \sin^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) \end{aligned}$$

6.4.3 Linéariser une expression

On utilise les formules d'Euler pour exprimer les $\cos$ et $\sin$. Ainsi, pour linéariser $\cos^n(x)\sin^m(x)$, on écrit

$$\cos^n(x)\sin^m(x) = (\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2})^n(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i})^m$$

On met en facteur tout ce qui se trouve au dénominateur pour l'enlever et on calcule pour retrouver d'autres expressions que l'on pourra retransformer avec les formules d'Euler.