Chapitre 4

Réseaux de Diffraction

4.1 Diffraction par un réseau

4.1.1 Principe du montage

On considère un ensemble de $\mathbf{N}$ fentes de largeur $\mathbf{a}$ dans un plan, répétées périodiquement avec un pas $\mathbf{p}$ (distance entre les **centres** des fentes). × Le réseau est éclairé par une onde plane en incidence $\theta_{\mathbf{i}}$ par rapport à la normale (Oz). On étudie la diffraction à l'infini dans la direction $\theta_{\mathbf{d}}$.

× Difficulté

Le pas p (parfois noté d) est la constante du réseau. La quantité $\mathbf{n = 1/p}$ est la fréquence spatiale (nombre de traits par unité de longueur).

4.1.2 Diffraction par une fente unique

L'onde diffractée par une fente de largeur a centrée en $x = 0$, observée dans la direction θ_d (avec la fréquence spatiale $u = \frac{\sin(\theta_d)}{\lambda}$), est proportionnelle à la fonction $\mathrm{sinc}(ua)$.

$$\underline{\psi}_{\text{fente}}(u) \propto a\,\mathrm{sinc}(ua)$$

Pour une fente centrée en $x_n = np$, son amplitude diffractée $\underline{\psi}_n(u)$ est la même, multipliée par un terme de phase dû à son décalage spatial :

$$\underline{\psi}_n(u) = \underline{\psi}_{\text{fente}}(u) \cdot e^{-2i\pi u(np)}$$

Calcul

En effet, on a l'intégrale suivante pour un éclairage en incidence normale :

$$\begin{aligned}
\underline{\psi_n(u)} &= \int_{np-a/2}^{np+a/2} \underline{\psi_0} e^{-i\omega t} e^{-2i\pi u x} \mathrm{d}x \\
&= K\underline{\psi_0} e^{-i\omega t} \int_{np-a/2}^{np+a/2} e^{-2i\pi u x} \mathrm{d}x \\
&= K\underline{\psi_0} e^{-i\omega t} \int_{a/2}^{a/2} e^{-2i\pi u(s+np)} \mathrm{d}s \text{ avec s= x-np (changement de variable)} \\
&= K\underline{\psi_0} e^{-i\omega t} e^{-2i\pi u(np)} \int_{a/2}^{a/2} e^{-2i\pi u(s)} \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

De la même façon, on trouve pour la fente suivante

$$\underline{\psi_{n+1}} = \underline{\psi_0}(u) e^{-2i\pi u(n+1)p}$$

On additionne les 2 ondes pour décrire les interférences à l'infini :

$$\underline{\psi_n} + \underline{\psi_{n+1}} = \psi_0 e^{-i\omega t} a \operatorname{sinc}(ua)(e^{-2i\pi n u p})(1 + e^{-2i\pi u p})$$

4.1.3 Déphasage et Interférences

Le déphasage entre les 2 ondes vaut donc $2\pi u p = 2\pi \sin(\theta_x)\frac{p}{\lambda}$

En effet : Pour une incidence normale ($\theta_i = 0$ et $u' = u$), la différence de marche est $\delta = p\sin(\theta_d) = p\lambda u$. Déphasage $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(p\lambda u) = 2\pi u p$$

Info

Le δ est la différence de chemin optique entre deux rayons homologues des fentes n et $n + 1$. Si l'incidence est θ_i et l'observation θ_d : $\delta = p(\sin(\theta_d) - \sin(\theta_i))$.

4.1.4 Fonction d'onde diffractée pour N fentes

L'onde diffractée totale $\underline{\psi}(u)$ est la somme des ondes $\underline{\psi_n}(u)$ des N fentes ($n = 0$ à $N - 1$) :

$$\underline{\psi(u)} = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{\psi_n}(u) = \underline{\psi}_{\text{fente}}(u) \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-2i\pi u p})^n$$

Somme géométrique

La somme est une série géométrique de raison $q = e^{-2i\pi u p}$. Le terme d'interférence S est :

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q} = e^{-i\pi(N-1)up}\frac{\sin(\pi N up)}{\sin(\pi up)}$$

Finalement :

$$\underline{\psi}(u) = \left(\psi_0 e^{-i\omega t} a \operatorname{sinc}(ua)\right) \cdot \left(e^{-i\pi(N-1)up}\frac{\sin(\pi N up)}{\sin(\pi up)}\right)$$

4.1.5 Intensité Diffractée

L'intensité $I(u)$ est proportionnelle au module carré de l'amplitude $\underline{\psi}(u)$:

$$I(u) = I_0 \cdot \underbrace{\operatorname{sinc}^2(ua)}_{\text{Diffraction}} \cdot \underbrace{\frac{\sin^2(\pi N up)}{\sin^2(\pi up)}}_{\text{Interférence}}$$

i Si l'incidence est $\theta_i \neq 0$, on remplace la fréquence spatiale u par $u' = u - u_0$, où $u_0 = \frac{\sin(\theta_i)}{\lambda}$.

i **Info**

L'intensité résultante est le produit de :

1. La figure de diffraction d'une seule fente ($\operatorname{sinc}^2(ua)$).
2. La figure d'interférence de N ondes ($\propto \frac{\sin^2}{\sin^2}$).

4.1.6 Fonction Réseau

Définition

Définition 1.1 : Fonction Réseau

La Fonction Réseau $R(\varphi)$ normalisée est :

$$R(\varphi) = \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{N^2\sin^2(\varphi/2)}$$

Elle décrit l'intensité de l'interférence de N ondes avec un déphasage successif $\varphi = 2\pi u'p$.

- La fonction $R(\varphi)$ présente des maxima principaux lorsque le déphasage φ est un multiple de 2π :

$$\varphi = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

- La largeur des pics est inversement proportionnelle au nombre de fentes N ($\propto 1/N$). Plus N est grand, plus les maxima sont fins.

Nouvelle expression de l'intensité

Pour $u' = u - u_0$, on a

$$I(u') = N^2 I_0 \operatorname{sinc}^2(u'a) R(2\pi u'p)$$

avec R la fonction réseau. La fonction obtenue est la fonction réseau enveloppée de la fonction sinus cardinal au carré. I(u') présente une succession de pics de diffractions chacun associés à l'interférence constrcive des ondes diffractées par chaque fente.

4.2 Formule fondamentale des réseaux

4.2.1 Formule

Les maxima d'intensité se produisent lorsque l'argument du terme d'interférence vérifie la condition :

$$2\pi u'p = 2\pi m \quad \Rightarrow \quad u'p = m$$

En substituant l'expression de u' (avec $u' = \frac{\sin(\theta_d)}{\lambda} - \frac{\sin(\theta_i)}{\lambda}$), on obtient :

> **Théorème 2.1 : Formule Fondamentale des Réseaux**
>
> On a des pics de diffraction si
>
> $$\mathbf{p}(\sin(\theta_d) - \sin(\theta_i)) = \mathbf{m}\lambda$$

Cette relation donne la direction θ_d de l'ordre de diffraction $\mathbf{m}$ (maximum principal) pour une longueur d'onde λ et une incidence θ_i. Elle exprime la condition d'interférence constructive totale.

4.2.2 Interprétation physique

- $\mathbf{m}$ est l'ordre de diffraction ($m \in \mathbb{Z}$). Pour m entier, le déphasage $\Delta\phi$ est un multiple de 2π et produit des interférences constructives.
- $\mathbf{m}$ est limité par la condition géométrique : $|\sin(\theta_\mathbf{d})| \leq \mathbf{1}$. Le nombre d'ordres visibles est donc fini.

4.3 Performance spectrale d'un réseau optique

4.3.1 Éclairage en lumière polychromatique

Le réseau est un instrument dispersif. × Pour les ordres $m \neq 0$,

> × **Difficulté**
>
> Pour $m = 0$, la formule devient $\sin(\theta_d) = \sin(\theta_i)$. L'angle θ_d est indépendant de λ. Toutes les longueurs d'onde se superposent : c'est l'ordre non dispersif (lumière blanche).

$\sin(\theta_d) = \sin(\theta_i) + m\frac{\lambda}{p}$.

On remarque que θ_d est fonction de λ. Le réseau sépare les longueurs d'onde : on fait de la spectroscopie.

4.3.2 Pouvoir de résolution du réseau

Le Pouvoir de Résolution R mesure l'aptitude du réseau à séparer spatialement deux longueurs d'onde très proches, λ et $\lambda + \Delta\lambda$.

> **Théorème 3.1 :** Critère de Rayleigh
>
> Deux pics (longueurs d'onde) sont considérés comme séparables si le maximum du premier (λ) coïncide avec le premier minimum du second ($\lambda + \Delta\lambda$).

Nous devons comparer :

- L'Écart Angulaire $\boldsymbol{\Delta\theta_d}$ entre les pics des deux longueurs d'onde. (Obtenu par différentiation de la formule fondamentale).

$$\Delta\theta_d = \frac{m\Delta\lambda}{\cos(\theta_d)p}$$

- La Demi-Largeur Angulaire $\boldsymbol{\Delta\theta_a}$ d'un pic (distance angulaire entre le max et le premier zéro de la fonction réseau). ! La première annulation de l'intensité a lieu lorsque $\sin(\pi N u' p) = 0$, soit $\pi N u' p = \pi$. En remplaçant u', on obtient :

$$\Delta\theta_a = \frac{\lambda}{Np\cos(\theta_d)}$$

! **Attention**
Condition du premier zéro

Le critère de Rayleigh est satisfait lorsque $\Delta\theta_d \geq \Delta\theta_a$. En égalisant pour trouver la résolution limite $\Delta\lambda_{\text{min}}$:

$$\frac{m\Delta\lambda_{\text{min}}}{\cos(\theta_d)p} = \frac{\lambda}{Np\cos(\theta_d)}$$

On obtient : $m\Delta\lambda_{\text{min}} = \frac{\lambda}{N}$

> **Théorème 3.2 :** Pouvoir de Résolution du Réseau
>
> Le Pouvoir de Résolution R est défini par $\mathbf{R} = \frac{\lambda}{\boldsymbol{\Delta\lambda_{\text{min}}}}$.
>
> $$R = \mathbf{mN}$$

Le pouvoir de résolution est proportionnel à l'ordre de diffraction m et au nombre total de fentes N éclairées par le faisceau incident.