Chapitre 1

Suites

1.1 Rappels

Définition 1.1 : Suite réelle/complexe

Une suite réelle réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.2 : Suites réelles majorées/minorées

Une suite réelle est

- majorée si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, u_p \leq C$
- minorée si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, u_p \geq C$

Définition 1.3 : Suite réelle/complexe bornée

Si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_p| \leq C$.

Définition 1.4 : Suite convergente/divergente

Une suite est dite convergente si $\exists l \in \mathbb{R} \setminus \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, |u_p - l| \leq \varepsilon$. On dit que l est la limite de la suite. On le note $u_p \to l$.

On n'écrit pas $\lim u_p = l$ car en faisant ça on suppose que la limite existe vant même de commencer à l'étudier. Il ne faut pas l'écrire en début de calcul.

Définition 1.5 : Suite divergente

Elle est divergente si elle n'est pas convergente.

Proposition 1.1

Soit (u) une suite convergente. On suppose qu'il existe l_1, l_2 telle que $u_p \to l_1$ et $u_p \to l_2$. Alors $l_1 = l_2$.

Proposition 1.2

Soit u une suite convergente. Alors elle est bornée. La réciproque est fausse($u_n = (-1)^p$)

Définition 1.6 : Limite infinie de suites réelles

On dit que la suite tend vers

- $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_p \geq A$
- $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_p \leq A$

Définition 1.7 : Propriété vraie à partir d'un certain rang

On dit qu'une suite vérifie une propriété à partir d'un certain rang, si $\exists n, \forall p \geq n, u_p$ vérifie la propriété.

Définition 1.8 : Suites réelles monotones

Soit u une suite réelle. On dit que u est croissante (à partir d'un certain rang) si $(\exists N,)\ \forall p (\geq N), u_{p+1} \geq u_p$.

Proposition 1.3

Toute suite réelle croissante à partir d'un certain rang tend vers une limite finie ou infinie.

Si elle est en plus majorée, elle tend vers une limite finie.

1.2 Notations de Landau

Définition 2.1 : Suites négliegables

Soit u et v deux suites. On dit que u est négliegable devant v (en $+\infty$), noté $u_p o_{p\to\infty}(v_p)$. Il existe une suite ε telle que $\varepsilon_p \to 0$ et $u_p = v_p\varepsilon_p$ à partir d'un certain rang.

Proposition 2.1

u et v deux suites. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, v_p \neq 0.$
Alors $u_p = o(v_p) \iff \frac{u_p}{v_p} \to 0.$

Proposition 2.2

Si $u = o(v), v = o(w)$, alors $u = o(w)$.

Définition 2.2 : Suite dominée

Soient u et v deux suites, on dit que u est dominée par v, noté $u = O(v)$ si $\exists \eta$ une suite *bornée* telle que $u_p = \eta_p v_p$ à partir d'un certain rang.

Proposition 2.3

Si $u = o(v)$, alors $u = O(v)$.

Proposition 2.4

Si $v_p \neq 0, \forall p \geq N_1$, on a : $u = O(v) \iff \exists C \in \mathbb{R} tq \forall p \geq N, |\frac{u_p}{v_p}| \leq C.$

Proposition 2.5

Soient u, v, w trois suites. Si $u = O(v)$ et $v = O(w)$, alors $u = O(w)$.

Proposition 2.6

Soient $u = O(v) \wedge v_p \to 0 \Rightarrow u_p \to 0$.

Définition 2.3 : Suite équivalente

Soient u et v 2 suites équivalentes. La suite u est éuivalente à v_p, noté $u \sim v$ si $u_p = v_p + o(v_p)$ ou encore $\exists \varepsilon \to 0, \forall p \geq N, u_p = v_p + \varepsilon_p v_p = (1 + \varepsilon_p) v_p$

Proposition 2.7

Soient u et v deux suites. $u_p \sim v_p \iff \frac{u_p}{v_p} \to 1$

Proposition 2.8

Soient u, v, w trois suites. On a :

- $u \sim u$
- $u_p \sim v_p \iff v_p \sim u_p$
- $u_p \sim v_p$ et $v_p \sim w_p$ alors $u_p \sim w_p$.

Proposition 2.9

Soient u et v 2 suites. On suppose que $u_p \sim v_p$ et v converge vers l. Alors $u_p \to l$.

Proposition 2.10

u et v deux suites réelles. Si $u \sim v$ et $v_p \to \infty$, alors $u_p \to \infty$.

1.3 Sous-suites

Définition 3.1

On dit que v est une suite extraite de u $\iff$ $\exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strcutement croissante telle que $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = u_{\varphi(p)}$.

Proposition 3.1

On a $\varphi(p) \geq p$.

Proposition 3.2

Une suite converge vers l $\iff$ toutes ses suites extraites cobvergent ver l.

Définition 3.2 : Valeur d'adhérence

l est une valeur d'adhérence $\iff$ l est une limite finie d'une suite extraite de u.

Proposition 3.3

Toute suite admet une sous-suite monotone.

Théorème 3.1 : Bolzano Weitrass

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

1.4 Suite de Cauchy

Définition 4.1 : Suite de Cauchy

Soit u une suite. On dit que u est de Cauchy si elle vérifie une des 2 prorpiétés suivantes équivalentes :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p\, N, q > N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p\, N, q > N, |u_{p+q} - u_p| \leq \varepsilon$

Proposition 4.1

Toute suite convergente est de Cauchy

Proposition 4.2

Toute suite de Cauchy est bornée.

Proposition 4.3

Si u est de Cauchy et admet une sous-suite convergente, alors u converge.

Théorème 4.1

Toute suite de Cauchy converge. On dit que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

1.5 Types de suite

1.5.1 Suites géométriques, arithmétiques

Définition 5.1

- arithmétique : $u_{n+1} = u_n + r \Rightarrow u_n = u_0 + nr$
- géométrique : $u_{n+1} = u_n \times q \Rightarrow u_n = u_0 \times q^n$

- arithmético-géométrique : $u_{n+1} = qu_n + a \Rightarrow u_n = q^n u_0 + \frac{1-q^n}{1-q}a$

Définition 5.2 : Suite linéaire d'ordre 2

C'est une suite de la forme : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

On associe le polynomes $x^2 - ax - b$ dont on doit trouver les solutions pour avoir l'expression de u_n.

Théorème 5.1 : Écriture d'une telle suite

Si les racines λ sont réelles : $u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$

Si les racines sont complexes, on en met une sous la forme $re^{i\theta}$ et on écrit $u_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \sin(n\theta)$