Chapitre 29 : Développements limités

I Définition et premières propriétés.

1 Développement limité en 0

Définition 1 : Développement limite d'une fonction en 0.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, tel que $0 \in I$ ou 0 est une borne de I.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 s'il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 + \dots + a_n\ x^n + o\big(x^n\big)}$$

$a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \dots + a_n h^n$ *est la partie régulière du développement limité.*

$o\big(h^n\big)$ *est le reste d'ordre n du développement limité.*

Remarques

1. Les termes sont négligeables les uns devant les autres. Le premier terme non nul $a_k\ x^k$ du développement limité vérifie :
$$f(x) = a_k\ x^k + o_0(x^k) \underset{0}{\sim} a_k\ x^k$$
2. Le signe de cet équivalent s'obtient immédiatement en fonction du signe de la constante a_k et de la parité de k : par équivalence, on en déduit alors le signe de f au voisinage de 0.

Propriété 1 : Unicité du DL en 0 à un ordre fixé.

Soit f une fonction vérifiant :

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1\ x + \dots + a_n\ x^n + o\big(x^n\big) \\ &= b_0 + b_1\ x + \dots + b_n\ x^n + o\big(x^n\big) \end{aligned}$$

Alors pour tout $i \in [\![0; n]\!]$, $a_i = b_i$.

Remarque

Cela signifie qu'une fonction ne peut admettre deux développements limités distincts. On obtient bien l'unicité du développement limité.

Preuve

La démonstration se fait par limites successives :
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = a_0 = b_0$.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-a_0}{x-x_0} = a_1 = b_1$.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-a_0-a_1(x-x_0)}{(x-x_0)^2} = a_2 = b_2$.
etc....

Propriété 2 : Troncature d'un développement limité.

Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1\ x + \cdots + a_n\ x^n + o\big(x^n\big)$$

Alors pour tout $k \leq n$, f admet un développement limité d'ordre k en 0, obtenu par troncature du précédent :

$$f(x) = a_0 + a_1\ x + \cdots + a_k\ x^k + o\big(x^k\big)$$

Preuve

En effet on a $f(x) = a_0 + a_1\ x + \cdots + a_k\ x^k + \big[a_{k+1}\ x^{k+1} + \cdots + a_n\ x^n + o(x^n)\big]$.

Il faut donc prouver que $\big[a_{k+1}\ x^{k+1} + \cdots + a_n\ x^n + o(x^n)\big] = o(x^k)$.

Or $\frac{\big[a_{k+1}\ x^{k+1} + \cdots + a_n\ x^n + o(x^n)\big]}{x^k} = \big[a_{k+1}\ x + \cdots + a_n\ x^{n-k} + o(x^{n-k})\big] \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ comme somme de termes tendant vers 0.

Propriété 3 : Développement limité d'une fonction paire, impaire.

- Soit f une fonction paire admettant un développement limité d'ordre n en 0. Alors tous les termes impairs du DL sont nuls.
- Soit f une fonction impaire admettant un développement limité d'ordre n en 0. Alors tous les termes pairs du DL sont nuls.

Preuve

Notons $f(x) = a_0 + a_1\ x + \cdots + a_n\ x^n + o\big(x^n\big)$ le DL d'ordre n en 0 de f. Comme $-x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on a alors :

$$f(-x) = a_0 + a_1\ (-x) + \cdots + a_n\ (-x)^n + o\big((-x)^n\big) = a_0 - a_1\ x + a_2\ x^2 + \cdots + (-1)^n a_n\ x^n + o\big(x^n\big)$$

- Si f est paire, comme $f(-x) = f(x)$ pour tout x, on vient de déterminer un nouveau DL de f ; par unicité du DL, on a donc :

  $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ (-1)^k a_k = a_k \quad \text{donc} \quad a_k\left[(-1)^k - 1\right] = 0.$$

  Comme de plus $(-1)^k - 1$ est différent de 0 lorsque k est impair, on en déduit bien que $a_k = 0$ dès que k est impair.

- Si f est paire, comme $f(-x) = -f(x)$ pour tout x, on vient de déterminer un nouveau DL de $-f$ (l'autre étant obtenu en multipliant par -1 celui de f) ; par unicité du DL, on a donc :

  $$\forall k \in [\![0,n]\!],\ (-1)^k a_k = -a_k \quad \text{donc} \quad a_k\left[(-1)^k + 1\right] = 0.$$

  Comme de plus $(-1)^k + 1$ est différent de 0 lorsque k est pair, on en déduit bien que $a_k = 0$ dès que k est pair.

2 DL en un point quelconque

Définition 2 : Développement limite d'une fonction en un point.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$ ou une borne de I.
On dit que f admet un développement limité d'ordre n en a si la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un développement limité en 0, c'est-à-dire s'il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que :

$$\boxed{f(a+h) = a_0 + a_1\ h + a_2\ h^2 + \cdots + a_n\ h^n + o\big(h^n\big)}$$

Remarques

1. Comme en 0, le premier terme non nul $a_k\ h^k$ du développement limité vérifie :

   $$f(a+h) = a_k\ h^k + o_0\big(h^k\big) \underset{0}{\sim} a_k\ h^k \quad \text{donc} \quad f(x) \underset{a}{\sim} a_k\ (x-a)^k.$$

2. A nouveau, cet équivalent permet de déterminer le signe de f au voisinage de a, en fonction du signe de a_k et de la parité de la puissance.

Propriété 4 : DL d'ordres 0 et 1.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et $a \in I$ ou une borne de I.

- f admet un DL d'ordre 0 au point a si et seulement si elle admet une limite en a, et le terme constant a_0 du DL est égal à cette limite.

- Lorsque f admet un DL d'ordre 0, elle est donc continue ou prolongeable par continuité en a, selon que a soit ou non élément de I.

- f admet un DL d'ordre 1 au point a si et seulement si f (ou son prolongement continu si f n'est pas définie au point a) est dérivable au point a, et le coefficient d'ordre 1 a_1 du DL est égal à $f'(a)$.

Preuve

Le lien entre ordre 0 et limite au point est immédiat car $f(a+h) = a_0 + o(1)$ si et seulement si $f(a+h) \xrightarrow[h \to 0]{} a_0$.

Pour l'ordre 1, on a déjà vu dans le cours de dérivabilité qu'un fonction dérivable admet un DL d'ordre 1 et que $f(a+h) = f(a) + f'(a)\ h + o(h)$; et dans l'autre sens, si f admet un DL d'ordre 1, on vient de voir que $a_0 = f(a)$ et si f est dérivable, on a alors :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{a_0 + a_1\ h + o(h) - f(a)}{h} = \frac{a_1\ h + o(h)}{h} \sim \frac{a_1\ h}{h} \sim a_1.$$

II Opérations.

Les développements limités sont des égalités entre fonctions, valables pour tout x ou pour tout h, **mais n'ayant d'intérêt qu'au voisinage de 0, car c'est le seul endroit où on dispose d'une information sur le reste**.

Il n'en reste pas moins qu'il s'agit **d'égalités**, et on peut donc réaliser toutes les opérations que l'on souhaite avec les développements limités : **cependant celles-ci n'auront d'intérêt que si on sait simplifier les écritures pour arriver à une nouvelle forme de développement limité afin de tirer des conclusions**.

Par exemple, effectuer des opérations avec des développements limités en deux points distincts n'a aucun intérêt : il n'existera aucun point où on pourra savoir quelque chose sur la quantité manipulée, puisqu'il existera toujours au moins un terme sur lequel on n'aura aucune information.

Propriété 5 : Combinaison linéaire de DL.

- Si f et g admettent des DL d'ordre n en un point a, alors $\lambda f + \mu g$ également et on obtient son DL en effectuant la combinaison des DL de f et de g.
- Si on veut réaliser une combinaison linéaire de DL à des ordres distincts, il sera nécessaire de tronquer pour obtenir un DL à l'ordre le plus bas des deux.

Propriété 6 : Produit de DL.

On peut multiplier deux développements limités pour obtenir un développement limité du produit : il faudra être capable de développer efficacement pour rassembler tout de suite les termes de même ordre, et repérer les différents termes en $o(\ )$ qui apparaîtront pour déterminer l'ordre final du DL et ne pas calculer les termes qui devront disparaître.

Propriété 7 : Composée de DL.

Si f admet un DL au point a et que g admet un DL au point $f(a)$, alors on peut composer ces deux DL pour obtenir un DL de $g \circ f$ au point a. Formellement, il faudra utiliser un changement de variable pour faire apparaître une variable H qui tend vers 0.

Exemple

Posons $f(x) = 1 + 2x + 5x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, et $g(1+x) = 3 - 5x - 2x^2 + o(x^2)$ au voisinage de 0, on peut alors écrire :

$$g \circ f(x) = g\left[f(x)\right] = g\left(1 + 2x + 5x^2 + o(x^2)\right] = g\left(1 + \left[2x + 5x^2 + o(x^2)\right]\right)$$

Or le crochet tend vers 0 lorsque x tend vers 0, on peut donc utiliser le DL de g :

$$g \circ f(x) = 3 - 5\left[2x + 5x^2 + o(x^2)\right] - 2\left[2x + 5x^2 + o(x^2)\right]^2 + o\left(\left[2x + 5x^2 + o(x^2)\right]^2\right)$$

On remarque alors que le crochet est équivalent à son premier terme $2x$, donc son carré à $4x^2$, donc le $o(..)$ est en fait $o(x^2)$; on le compare avec le o (..) dans le premier crochet, et on conserve le plus petit ordre des deux.

on peut alors développer les le crochet et le carré du crochet, en rassemblant tout de suite les termes puissance par puissance, et en s'arrêtant lorsque la puissance dépasse l'ordre du $o(x^2)$ puisque notre terme serait lui-même négligeable devant x^2. Cela donne donc :

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= 3 - 10x + 25x^2 + o(x^2) - 2\left[4x^2 + o(x^2)\right]^2 + o(x^2) \\ &= 3 - 10x + (25 - 8)x^2 + o(x^2) = 3 - 10x + 17x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

Propriété 8 : Cas particulier : quotient de DL.

Si f et g admettent un DL au point a, on peut obtenir un DL de $\frac{f}{g}$ en factorisant le DL de g au dénominateur par son terme prépondérant, pour écrire :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{TP} \times \frac{DL1}{1 + ...} = \frac{1}{TP} \times (DL1) \times \frac{1}{1 + ...}$$

On peut alors utiliser le DL de $\frac{1}{1+....}$ lorsque .... tend vers 0, puis multiplier DL1 avec le DL obtenu, et enfin diviser le tout par le terme prépondérant du dénominateur sorti au départ.

Remarque

Comme nous ne connaissons pas encore le DL de $\frac{1}{1+x}$, nous ne pouvons pas encore donner d'exemple. Voir plus loin la preuve du DL de $\tan(x)$ en 0 pour obtenir un tel exemple.

Propriété 9 : Primitivation d'un développement limité.

Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n au point a. Alors la primitive F_a de f s'annulant en a (et par suite, en ajoutant une constante, toutes les autres primitives de f aussi) admet un DL à l'ordre $n+1$ au point a. De plus, si on a

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

alors on a :

$$F_a(a+h) = \int_a^{a+h} f(t)\, dt = a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + a_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + o(h^{n+1}).$$

Remarque

En revanche, **il n'existe aucun théorème permettant de dériver un développement limité**.

Preuve

On sait que pour tout x dans le domaine de définition de F_a, on a $F_a(x) = \int_a^x f(t)\ dt$. On en déduit que

$$F_a(a+h) = \int_a^{a+h} f(t)\ dt = \int_0^h f(a+u)\ dt$$

avec le changement de variable $t = a + u$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} F_a(a+h) &= \int_0^h (a_0 + a_1 u + \cdots + a_n u^n + o(u^n))\ du \\ &= a_0 \int_0^h du + a_1 \int_0^h u\ du + \cdots + a_n \int_0^h u^n\ du + \int_0^h o(u^n)\ du \\ &= a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + \cdots + a_n \frac{h^{n+1}}{n+1} + \int_0^h o(u^n)\ du \end{aligned}$$

Il reste à prouver que $\int_0^h o(u^n)\ du = o(h^{n+1})$, ce qui n'a rien d'évident ! On va devoir repasser par les ε pour passer du $o(\ )$ à une inégalité qu'on va intégrer.

Par définition de la négligeabilité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que pour $|u| \leq \rho$, on a :

$$|o(u^n)| \leq \varepsilon |u^n|$$

On intègre entre 0 et h, en prenant $0 \leq h \leq \rho$ pour que l'inégalité soit valable pour tout $u \in [0, h]$ et on a :

$$\int_0^h |o(u^n)|\ dt \leq \varepsilon \int_0^h |u^n|\ du = \int_0^h u^n\ dt = \frac{h^{n+1}}{n+1}$$

puis par inégalité triangulaire on obtient :

$$\left| \int_0^h o(u^n)\ dt \right| \leq \int_0^h |o(u^n)|\ dt \leq h^{n+1} \times \frac{\varepsilon}{n+1} \leq \varepsilon h^{n+1}$$

On fait un raisonnement analogue pour $h < 0$ (avec le sens de l'inégalité qui change car on intègre avec des bornes rangées dans l'ordre décroissant, puis qui rechange en prenant les valeurs absolues car les quantités sont négatives) et on obtient : pour tout h tel que $|h| \leq \rho$,

$$\left| \int_0^h o(u^n)\ dt \right| \leq \varepsilon |h^{n+1}|$$

ce qui assure bien que $\int_0^h o(u^n)\ dt = o(h^{n+1})$, ce qui conclut la preuve.

III Formule de Taylor-Young.

Propriété 10 : Formule de Taylor-Young.

Soit f une fonction de classe C^n sur un intervalle I. Alors en tout point a de I f admet un développement limité d'ordre n au point a, sous la forme :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a)+f'(a)\ h+\frac{f''(a)}{2}\ h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\ h^n+o(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^n) \end{aligned}$$

Preuve

La preuve est difficile. L'idée générale est, pour obtenir le DL de f à un certain ordre, d'appliquer le DL de f' à l'ordre précédent et de primitiver ce DL.

Mais pour obtenir ce DL de f' à l'ordre précédent, une récurrence classique ne fonctionne pas : en effet, si on suppose que f admet un DL à l'ordre n sous la forme souhaitée, cela ne donnera pas de DL pour f' !

On va s'en sortir avec une récurrence plus puissance : on suppose la formule à l'ordre n prouvée **pour n'importe quelle fonction** de classe C^n (et pas seulement sur une fonction f qu'on aurait fixée au préalable), et on prouve la formule à l'ordre $n+1$ **pour n'importe quelle fonction** de classe C^{n+1} : il suffira pour cela de fixer une fonction f quelconque de classe C^{n+1}, mais **on n'est plus obligés d'utiliser l'hypothèse au rang n pour cette même fonction** : on peut l'appliquer pour n'importe quelle fonction de classe C^n, qu'on peut choisir comme on le souhaite, et par exemple... f', qui est bien de classe C^n !!!

Montrons donc par récurrence sur n que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall f \text{ de classe } C^n \text{ au voisinage de } a,\ f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^n).$$

- **Initialisation** : pour $n=0$, on a vu plus haut que **pour n'importe quelle fonction** f est continue au point a, son DL d'ordre 0 est $f(a+h)=f(a)+o(1)$, ce qui correspond bien à la formule recherchée.

- **Hérédité** : soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que **pour n'importe quelle fonction** f de classe C^n au voisinage du point a, la formule de Taylor-Young à l'ordre n est valable.
  Montrons alors la formule à l'ordre $n+1$ **pour n'importe quelle fonction** f de classe C^{n+1} au voisinage du point a.

  Soit alors une fonction f quelconque de classe C^{n+1} au voisinage du point a ; la fonction f' est de classe C^n au voisinage du point a, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Young à l'ordre n et on a :

  $$f'(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^n)$$

  On primitive alors ce DL et on obtient :

  $$f(a+h)-f(a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\times\frac{h^{k+1}}{k+1}+o(h^{n+1})$$

  On remarque alors que :

  $$\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}\times\frac{h^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}\ h^{k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ h^k$$

  et en repassant $f(a)$ de l'autre côté puis en remarquant que c'est le terme d'ordre 0 du DL, on a bien :

  $$f(a+h)=f(a)+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^{n+1})=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^{n+1}).$$

- Conclusion : on a bien montré par récurrence que :

  $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall f \text{ de classe } C^n \text{ au voisinage de } a,\ f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ h^k+o(h^n)$$

  et la formule de Taylor-Young à tout ordre est prouvée.

IV Développement limités usuels.

Propriété 11 : Développements limités usuels en 0.

La formule de Taylor-Young d'une part, l'utilisation astucieuse des propriétés des développements limités usuels d'autre part, permettent d'obtenir des développements limités en 0 pour toutes les fonctions usuelles, qui permettent ensuite de récupérer les développements limités en tout point par des transformations simples.

1) l'exponentielle et ses conséquences :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

On en tire alors les DL de ch (termes pairs de l'exponentielle) et sh (termes impairs de l'exponentielle) :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

Puis on obtient les DL de cosinus et sinus comme la "version alternée" des DL de ch et sh.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

2) La série géométrique et ses connaissances :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

On en déduit $\frac{1}{1+x}$ avec $x' = -x$, puis les DL de $\ln(1+x)$ et $\ln(1-x)$ par intégration :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Enfin en posant $x' = x^2$ dans $\frac{1}{1+x}$ on obtient le DL de la dérivée de arctan, qu'on primitive (avec $\arctan(0) = 0$ donc qui disparaît) pour récupérer le DL de arctan :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^{2n} x^{2n} + o(x^{2n})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

3) Le petit dernier :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

4) Un cas à part : la fonction tangente.
Le DL de $\tan(x)$ s'obtient par quotient de celui de $\sin x$ et $\cos x$; la lourdeur de calcul ne permettra pas de l'obtenir à l'ordre n sous forme simple, mais on doit savoir le retrouver à l'ordre 3 :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Preuve

Pour obtenir les DL demandés, il suffit d'obtenir celui de l'exponentielle, de cosinus, de $x \mapsto 1/1+x$ et de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, tous les autres s'en déduisent par primitivation ou par partie paire/impaire.

- Pour l'exponentielle, appliquons la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre n :
$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(0)}{k!} x^k + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$$
- De même pour le cosinus :
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$
Or $\cos^{(4k)} = \cos$, $\cos^{(4k+1)} = -\sin$, $\cos^{(4k+2)} = -\cos$ et $\cos^{(4k+3)} = -\sin$; de plus $\sin(0) = 0$ et $\cos(0) = 1$ donc on a :
$$\cos^{(4k)}(0) = 1 \quad , \quad \cos^{(4k+2)}(0) = -1 \quad \text{et} \quad \cos^{(4k+1)}(0) = \cos^{(4k+3)}(0) = 0$$
ce qu'on peut résumer par :
$$\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad \text{et} \quad \cos^{(2k+1)}(0) = 0$$
On prend alors la formule de Taylor à l'ordre $2n$ et on séparer termes pairs et impairs :
$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{\cos^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n})$$
- Pour $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, on part de la somme géométrique :
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + O(x^{n+1}) = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$$
et il suffit d'isoler $1/(1+x)$ pour conclure.

- Enfin pour $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ on applique la formule de Taylor en calculant au préalable les dérivées successives de f : par une itération évidente, on obtient :
$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots[\alpha-(k-1)](1+x)^{\alpha-k}$$
puis
$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$$
et il n'y a plus qu'à appliquer la formule de Taylor pour conclure.

- Enfin déterminons le DL d'ordre 3 de tan à l'aide de ceux de sin et cos :
$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}$$
En posant $X = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$ qui tend vers 0, le DL d'ordre 1 de $\frac{1}{1+X}$ donne :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+X} &= 1 - X + \frac{X^2}{2} + o(X^2) = 1 - X + O(X^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + O([x^2/2 + o(x^3)]^2) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) + O(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$
Enfin un multipliant on obtient :
$$\tan(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) = x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) x^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
- Une deuxième option pour déterminer le DL de tan : on utilise le fait que $\tan' = 1 + \tan^2$.

Comme tan est de classe C^∞, sa dérivée aussi, donc elle admet un DL d'ordre 2, qu'on note :
$$\tan'(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$
De plus tan est impaire, donc sa dérivée est paire, les termes impairs du DL sont nuls et il est donc de la forme (en renommant les coefficients) :
$$\tan'(x) = a + bx^2 + o(x^2)$$
On primitive ce DL pour obtenir le DL de tan :
$$\tan(x) - \tan(0) = ax + b\frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{ou encore} \quad \tan(x) = ax + \frac{b}{3} x^3 + o(x^3)$$
On peut alors calculer le DL de $1 + \tan^2$, et l'égaler à celui de $\tan'$ (l'unicité du DL impose l'égalité deux à deux des coefficients) pour obtenir des équations sur les coefficients a et b :
$$1 + \tan^2 x = 1 + \left(ax + \frac{b}{3} x^3 + o(x^3)\right)^2 = 1 + a^2x^2 + o(x^3)$$
On a donc deux DL de $\tan'(x)$, celui de départ et celui donné par $1 + \tan^2(x)$, et on en déduit que :
$$a = 1 \quad \text{et} \quad b = a^2 = 1$$
et on peut finalement injecter dans le DL de tan obtenu plus tôt :
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

V Application à l'étude locale de fonction.

1 Calculs d'équivalents et de limites.

La première application des développements limités est la levée des formes indéterminées dans les limites qui ne sont pas réglées par les croissances comparées ou les équivalents usuels.

Ils permettent, lorsqu'on cherche un équivalent simple d'une fonction, d'effectuer n'importe quelle opération qui était impossible avec les équivalents (somme, composée), et de déterminer un équivalent du reste lors d'une compensation de deux termes équivalents dont on prend la différence.

2 Etude d'une fonction au voisinage d'un point de $\mathbb{R}$.

L'utilisation du DL à un ordre de plus en plus grand d'une fonction en un point où elle n'est pas définie permet d'obtenir des informations de plus en plus précises en ce point :

- Le terme d'ordre 0 du DL donne la limite de la fonction en ce point : **cela permet de prolonger la fonction par continuité en ce point.**

- Une fois la fonction prolongée, le terme d'ordre 1 du DL donne la limite du taux d'accroissement en ce point : **via le théorème de prolongement de la dérivée, cela assure que le prolongement précédent est dérivable en ce point et donne la valeur de la dérivée.**

- Le DL d'ordre 1 complet **donne une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction en ce point.**

- Une fois la tangente connue, **le premier terme non nul après l'ordre deux permet d'obtenir un équivalent de l'expression** $f(x) - T_a(x)$, dont le signe permet de **connaître la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage du point**, selon le signe du coefficient constant et la parité de la puissance de $(x - a)$ (voir la remarque à la première page de ce cours).

- Lorsque la tangente est horizontale (c'est-à-dire que la dérivée est nulle), le signe de la fonction au voisinage de ce point permettra de savoir si la fonction admet ou non un extremum en ce point, ce qui permet de donner une technique permettant de trouver les extrema locaux d'une fonction **sans chercher le signe de sa dérivée en tout point** :

  – On commence par chercher les points où la dérivée s'annule (points critiques) : c'est la **condition nécessaire d'ordre 1 d'extremum local**.

  – En un point critique, on regarde le signe de f'' en ce point : s'l est strictement positif, alors **la fonction admet un minimum local** ; s'il est strictement négatif, alors **la fonction admet un minimum local** ; et s'il est nul, on ne peut rien dire. C'est la **condition suffisante d'ordre 2 d'extremum local**.

  – Si f'' s'annule au point, pour régler l'indétermination, on regarde les dérivées suivante de f en ce point : la première non nulle donnera un DL de f au point a de la forme :

  $$f(a+h) = f(a) + a_k\ h^k + o(h^k)$$

  Si k est impair, on a alors un point d'inflexion (la courbe traverse sa tangente) ; et si k est pair, on a un extremum local : minimum local si $a_k \geq 0$, maximum local si $a_k \leq 0$.

  – Cette technique, peu utilisée sur les fonctions de la variable réelle, deviendra fondamentale lors de l'étude des fonctions de plusieurs variables ou plus généralement de fonctions vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}$: la notion de signe de la dérivée et de sens de variation n'auront plus de sens, mais on pourra malgré tout étudier les extremums locaux.

3 Etude d'une fonction au voisinage de l'infini.

Un développement asymptotique de la forme $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + \frac{d}{x^2} + \cdots + \frac{cste}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ d'une fonction au voisinage de l'infini permet d'obtenir des informations de plus en plus précises sur le comportement de cette fonction en l'infini.

- Les deux premiers termes donne une asymptote à la courbe représentative de f.

- Le premier terme non nul après ceux-ci représentera un équivalent de $f(x)-(ax+b)$, dont le signe au voisinage de l'infini permettra de connaître la position de la courbe de f par rapport à son asymptote au voisinage de l'infini.

- Pour obtenir ce développement asymptotique, la technique la plus simple est de chercher un DL de $\frac{f(x)}{x}$ en utilisant le fait que $1/x$ tend vers 0. On aura alors :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \ldots.. \qquad \text{donc} \qquad f(x) = ax + b + \ldots..$$

- Notons que la détermination d'un tel développement asymptotique n'est pas toujours possible, et ne peut pas toujours être réalisée à l'aide de calculs avec les développements limités usuels : on pourra parfois le chercher autrement, à l'aide de la recherche de limites successives :
  - La limite de $\frac{f(x)}{x}$, si elle existe, donne a.
  - Si a existe, la limite de $f(x) - ax$ donne b.
  - Si a et b existent, la limite de $x\left(f(x) - ax - b\right)$ donne c.
  - Si a, b et c existent, la limite de $x\left[x\left(f(x) - ax - b\right) - c\right]$ donne d, et ainsi de suite....

- Notons enfin qu'on peut obtenir des développements asymptotiques d'une forme un peu plus compliquée, en suivant le même schéma de raisonnement : on trouve un équivalent simple de f qui donne le premier terme f_1 du développement, puis on cherche un équivalent de $f - f_1$ qui donne le second terme f_2, puis un équivalent de $f - f_1 - f_2$ qui donne le troisième terme f_3, etc...