Mathématiques

Langage mathématique

C.Dartyge

Paulhenry Saux

11 septembre 2024

Français

Chapitre 1

Introduction au raisonnement

1.1 Vocabulaire

Paradoxe du tas de sable

A partir de combien de grain on considère que c'est un tas de sable. Si on enlève un grain, peut on dire que c'est toujours un tas ? Problème de langage et de définition

1.1.1 Ensemble

Théorème 1.1 : Ensemble

Un ensemble est constitué d'éléments et est défini par une relation d'appartenance

Soit E un Ensemble. Il est bien défini si ∀ x on peut dire sans ambiguïté si $x \in E$ (x appartient à E) Dans le cas contraire, il n'appartient pas.

!

Un ensemble n'est jamais élément de lui même. Conséquence : La collection de tous les ensemble n'est pas un ensemble (car il s'appartiendrait à lui-même

Exemples : $\mathbb{N}, \mathbb{C}$.

1.1.2 Éléments de logique propositionnelle

Assertions

Assertion : Une phrase grammaticalement correcte dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse

Exemples

Exemple 1 : P : “Les élèves du TDA2 sont au nombre de 37” P est fausse.

Exemple 2 : P : “Je mens” n’est pas une assertion mais un paradoxe

Exemple 3 : $1 + 1 = 2$ est une assertion

Opérations logique

Négation : $\neg$

Et : $\wedge$

Ou : $\vee$

$\neg P$ est vrai si P est faux

$\neg P$ est faux si P est vrai ×

× **Difficulté**
Le contraire de tous/pour tous est au moins un

Exemple

P : Tous les chevaux de Martine sont noirs

$\neg P$: Au moins un des chevaux n’est pas noirs

Q : Au moins un des étudiant n’a pas de téléphone

$\neg Q$: Tous les étudiants ont un téléphone

P	Q	P et Q	P ou Q	P $\Rightarrow$ Q	P $\iff$ Q	$\neg P$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V

Attention si La première assertion est fausse

Paris n'est pas la capitale de France (F) ⇒ Tous les élèves ont une voiture (V) : Assertion vraie

Paris est la capitale de la France (V) ⇒ Tous les étudiants sont en bleu. (F) : Assertion fausse

On suppose maintenant P ou ¬ P. Il faut montrer que si P est vrai alors Q est vrai.

Règles de calcul

$\neg(\neg P) = P$

$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$

$P \iff Q = \neg P \vee Q$

Attention : $\neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$

Exemple

Assertion : $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$ a une racine

Le contraire est : (x∈ ℝ) ∧ (x n'a pas de racine)

Contraposée

Contraposé : $(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

$\forall x, y \in R,\ x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3 \iff x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$

Prédicat

$P(x_1 \dots x_r)$ est un prédicat si c'est une phrase correcte qui dépend de variables et dont on peut dire la valeur de vérité pour tout k-uplet donné.

Astuce
(Assertion sauf que l'on a pas défini les variables)

Quantificateurs

Quantificateur universels : ∀ = Pour tout

Quantificateur d'existence : ∃ = Il existe au moins un

Ils transforment un prédicat en assertion

Proposition

$\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x)$

$\neg(\exists x, P(x)) = \forall x, \neg P(x)$

Ex 1.5

Fin Séance 1

1.2 Raisonnements

1.2.1 Par l'absurde

Tautologie et contradiction

> **Théorème 2.1 :** Tautologie
>
> Formule propositionnelle toujours vraie

Ex : $P \vee \neg P$

> **Théorème 2.2 :** Contradiction
>
> Formule propositionnelle toujours fausse

Ex : $P \wedge \neg P$

Fonctionnement

On cherche à démontrer une propriété P en supposant $\neg P$. On poursuit le raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction. Comme les mathématiques sont non contradictoire, l'hypothèse de départ est fausse. Donc $\neg P$ est fausse, D'où P.

> **Exemple**

Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, en effectuant un raisonnement par l'absurde.

Je suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Donc $\exists a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{a}{b}, PGCD(a, b) = 1$.

$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2b^2 = a^2$.

Donc $2|2b^2$, donc $2|a^2$ et $2|a$. Donc $\exists a'$ tq $a = 2a'$.

Donc $2b^2 = a^2 = 4a'^2 \Rightarrow b^2 = 2a'^2$. Donc $2|b^2$ et $2|b$. Donc Le PGCD est de 2 et non de 1, contradiction.

1.2.2 Par récurrence

On veut démontrer des assertions où $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 2.3 : Proposition

Si $(P(0)$ et $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$.

Exemple : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$

Soit $H(n) = n < 2^n$.

Je démontre $H(n)$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

$H(0) : 0 < 2^0 = 1$, donc $H(0)$.

Hérédité

On suppose $H(n)$, montrons $H(n+1)$, ie $n + 1 < 2^{n+1}$.

D'après $H(n)$, $n + 1 < 2^n + 1$. Or $n < 2^n$, d'où $n + 1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Donc $H(n+1)$ et $H(n) \Rightarrow H(n+1)$.

Conclusion

- $H(0)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) \Rightarrow H(n+1)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : n < 2^n$.

1.2.3 Récurrence à 2 pas

Théorème 2.4 : Déf

Si $(P(0) \wedge P(1)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2))$, alors $P(n)$.

1.2.4 Récurrence forte

Théorème 2.5 : définition

Si $P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, [\forall \mathbb{R} \in \{0, \ldots, n\}, P(k) \Rightarrow P(n+1)])$, alors $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$.

Ex 1.11 : Produit de plusieurs entiers impairs. Ex 1.12 : Récurrence ×

× **Difficulté**
Utilisation des signes sigma pour somme et grand pi pour produit

1.3 Théorie des ensembles

Théorème 3.1 : Égalité d'Ensemble

Soit E et F 2 ensembles. Ils sont égaux ssi $\forall x, x \in E \iff x \in F$. On écrit alors E = F.

Théorème 3.2 : Inclusion

E est inclu dans F ssi $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$. On écrit alors $E \subset F$. E est un sous ensemble de F

Remarque : $E \not\subset F \iff \exists x, x \in E \wedge x \notin F$

Axiome 3.1 : Axiome

Il existe un ensemble appelé ensemble vide noté $\varnothing$, tel que $\forall x, x \notin \varnothing$.

Axiome 3.2 : Unicité de l'ensemble vide

Cet Ensemble est unique

Preuve : Supposons qu'il existe 2 ensembles vides, notés E et F.

Montrons que E = F.

$\forall x, x \notin E \Rightarrow x \notin F$.

Par contraposé : $\neg(x \in F) \Rightarrow \neg(x \in E)$. $\iff$ $(x \in F \Rightarrow x \in E)$. De la même façon en permutant les rôles de E et F, on a $x \in E \Rightarrow x \in F$ et $E = F$.

Axiome 3.3 : Parties de E

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble E est un Ensemble E, que l'on note P(E)

Axiome 3.4 : Collection des x de E qui vérifient P(x)

Soit E un Ensemble, Soi P(x) un prédicat défini sur E, alors la collection des x de E qui vérifient P(x) est un ensemble. On le note $(x, x \in E \wedge P(n))$

Théorème 3.3 : Conséquence

Soit E et F 2 ensembles.

l'intersection de E et F, noté $(E \cap F) = \{x, x \in E \wedge x \in F\}$ est un ensemble.

La réunion de E et F est défini par $(E \cup F) = \{x, x \in E \vee x \in F\}$ est un ensemble complémentaire F dans E

$E \backslash F = \{x \in E, x \notin F\}$ est un ensemble.

Axiome 3.5 : Produit cartésien

Soit E et F 2 ensembles. On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble des couples $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$.

Théorème 3.4 : Propriété

$\varnothing \subset E$ pour tout Ensemble. $\forall x, x \notin E \Rightarrow x \notin \varnothing$ et par contraposé : $x \in \varnothing \Rightarrow x \in E$.

Exemples

$E = \{1.2\}$

$P(E) = \{\varnothing; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\}$

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$P(P(\varnothing)) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

Fin Séance 2

Syntaxe pour $A \times B$

$\{(1, 1); (1, 5)\}$

Démontrer une inclusion : Démontrer que $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$.

1.4 Propriétés de l'intersection

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

$A \cap B = \{x \in E, x \in A \land x \in B\}$.

$A \cup B = \{x \in E, x \in A \lor x \in B\}$.

Théorème 4.1 : Def

Le complémentaire de A dans E, noté $\bar{A}$ est l'ensemble défini par $x \in \bar{A} \iff x \notin A$. Ainsi, $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$.

Théorème 4.2 : Propriétés

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$\bar{\varnothing} = E$.

$\bar{E} = \varnothing$.

$\bar{\bar{A}} = A$.

Exemple : $x \in A \bar{\cap} B \iff \neg(x \in A \cap B) \iff \neg(x \in A \land x \in B) \iff \neg x \in A \lor \neg x \in B \iff x \notin A \lor x \notin B \iff x \in \bar{A} \lor x \in \bar{B} \iff ((x \in \bar{A}) \lor (x \in \bar{B}))$.

Théorème 4.3 : Definition

Soit I un ensemble, et $\forall i \in I$, soit F_i un ensemble.

$F = (F_i, i \in I)$.

I est appelé ensemble des index.

$\forall x, x \bigcap_{i \in I} F_i \iff \forall i \in I, x \in F_i$.

$\bigcap_{i \in I} = \{x, x \in F_i, \forall i \in I\}$.

$x \in \bigcup_{i \in I} F_i \iff \exists i \in I, x \in F_i$.

$\bigcup_{i \in I} = \{x, \exists i \in I, x \in F_i\}$.

Exemples :

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[= [0, +\infty[$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[= \varnothing$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n[= \varnothing$

$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n] = [-1, 1]$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] = \{0\}$ ×

× Difficulté
Le contenu de l'ensemble, ici celui du singleton 0 n'a pas besoin d'appartenir à l'ensemble de définition de n, ici $\mathbb{N}^*$.

1.5 Applications

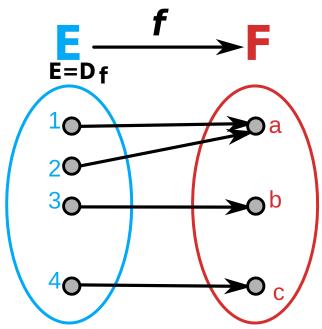
Soient E et F 2 ensembles non vides.

1.5.1 Définition

Théorème 5.1 : Definition

Une application f de E vers F, notée $f : E \to F$ est définie par la donnée d'un sous-ensemble Γ_f de $E \times F$ qui vérifie la propriété : $\forall x \in E, \exists! y \in F, (x, y) \in \Gamma_f$. On écrit alors $y = f(x)$. y est l'image unique de x. x est un antécédent de y.

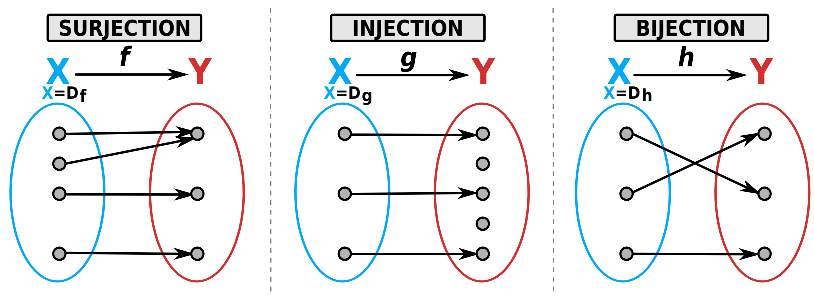
Exemple : E = {1,2,3,4} et F = {a,b,c}



$\Gamma_f = \{(1, c); (2, b); (3, a); (4, b)\}$. On l'appelle le graphe de l'application. E est appelé ensemble de départ et F ensemble d'arrivée.

$f : E \to F$ est une application si tout élément de E a une unique image dans F.

1.5.2 Injection, surjection, bijection



Soit $f : E \to F$ et $x \longmapsto f(x)$.

Soit $y \in F$. $\exists ? x \in E, y = f(x)$. On veut savoir le nombre de solution à cette équation.

Exemple

Si il y a :

- au plus une solution, c'est injectif (Card(E) < ou > ? Card(F)
- au moins une solution, c'est surjectif,
- exactement une solution, c'est bijectif (Elles ont le même nombre d'élément, ensemble équipotent)

Définitions à connaitre par coeur

Théorème 5.2 : Surjectivité

f est surjective de $E \to F \iff \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \iff$ tout élément de F admet au moins un antécédent dans E.

Théorème 5.3 : Injectivité

f est injective de $E \to F \iff (\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')) \iff (\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \iff$ tout élément de F a au plus un antécédent dans E.

Théorème 5.4 : Bijectivité

f est bijective de $E \to F \iff (\forall x, x' \in E, \exists! x \in E, y = f(x)) \iff$ tout élément de F a un unique antécédent par f dans E. $\iff$ f est injective et surjective.

Fonction	Injective	Surjective
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	Non	Non
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 2x$	Oui	Oui
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	Oui	Oui
$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	Oui	Non
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	Non	Oui
$f : \mathbb{R} \to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x), \cos(x)$	Non	Oui
$f : [0, 2\pi[\to [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$	Oui	Oui

Théorème 5.5 : Rappel de la définition de la composée d'une application

Soient E,F,G 3 ensembles, Soit $f : E \to F$ $g : F \to G$

L'application $g \circ f$ est l'application définie par $g \circ f : E \to F \to G$ et $g \circ f : x \to f(x) \to g(f(x))$

Fin Séance 3

Théorème 5.6 : Définitions

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$, i.e $A \in P(E)$.

L'image directe de A, notée $f(A)$ est l'ensemble défini par : $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$.

Soit $B \subset F$. L'image réciproque de B pat f, notée $f^{-1}(B)$ est le sous-ensemble de E défini par $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$ (= "tiré en arrière de B")

Exemple :

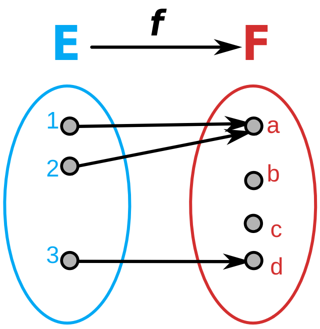


Image directe

$f(E) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a, d\}$

$f(\{1\}) = \{a\}$

$f(\{2, 3\}) = \{a, d\}$

$f(\varnothing) = \varnothing$

Image réciproque

$f^{-1}(F) = E$ (toujours vrai, définition même d'une application)

$f^{-1}(\{a, d\}) = E$

$f^{-1}(\{c\}) = \varnothing$

$f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$

$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$

Remarque

$f : E \to F$ est surjective si $f(E) = F$.