4

Chapitre

Circuits du premier ordre

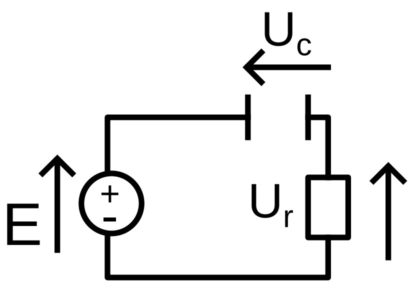
On souhaite décrire l'évolution du courant ou de la tension dans les circuits (R,C) ou (R,L).

4.1 Charge et décharge d'un condensateur dans une résistance

Le condensateur peut se charger ou se décharger.

On rappelle que $q = CU_C$ et $i = \dot{q}$ et $i = C\dot{U}_c$.

4.1.1 Mise en équation de la charge du condensateur



Initialement, le condensateur est déchargé, ses charges et tensions valent 0. À t=0, l'interrupteur passe en position 1. Par la loi des mailles :

$$\begin{aligned} E &= U_c + U_R \\ &= U_c + R \times i \\ &= U_c(t) + R \times cU_c(t)' \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} + \frac{U_c}{C} = \frac{E}{\tau} \tag{4.1}$$

avec $\tau = RC$.

On résout. La solution générale vaut la solution de l'équation homogène + la solution particulière. Pour la solution particulière, on cherche une solution de la forme du second membre : $U^p = B = Cst$. En injectant la constante dans l'équation, on obtient que $U^p = E$

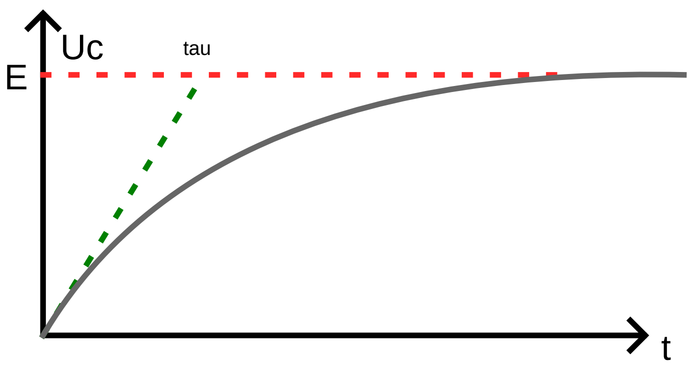
On cherche la solution sans second membre telle que $\frac{\mathrm{d}U_c^h}{\mathrm{d}t} + \frac{U_c^h}{C} = 0$. Elle est de la forme $U^h(t) = Ae^{-t/\tau}$.

Donc $U_c(t) = E + Ae^{-t/\tau}$. On dit que la constante A est déterminée à partir des conditions initiales, c'est à dire $U_c(0-) = 0$. Par la propriété de la continuité de la charge aux bornes d'un condensateur, on a $U_c(0-) = 0 = U_c(0+)$. On en déduit que $E + A = U_c(0+) = 0 \Rightarrow A = -E$.

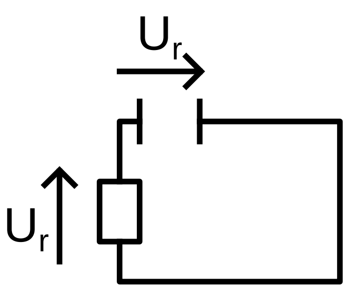
Proposition 1.1 : Solution d'une équation différentielle d'un condensateur se chargeant

$$U_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$$

Le temps caractéristique est de l'ordre de la miliseconde.



4.1.2 Équation de la décharge d'un condensateur



Après un temps long, (le condensateur est chargé sous E), on bascule l'interrupteur en position 2. On part d'une tension qui vaut E. On fait décarger le condensateur dans la résistance

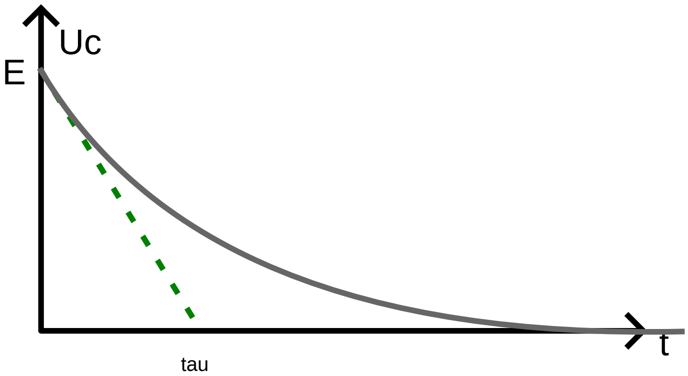
1. On obtient l'équation différentielle par la loi des mailles : $\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} = 0$.

2. On résout $U_c(t) = A'e^{-t/\tau}$.
3. On détermine A par les conditions initiales : $U_c(0) = E = A'$.

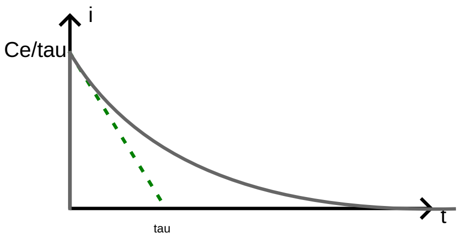
Proposition 1.2 : Solution d'une équation différentielle d'un condensateur se déchargeant

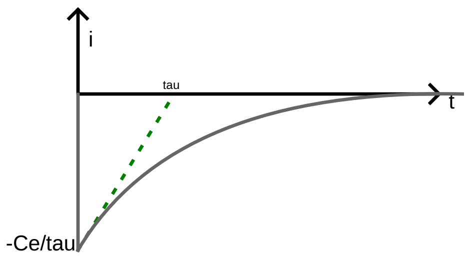
$U_c(t) = Ee^{-t/\tau}$

Un condensateur est capable de stocker de l'énergie puis de la restituer sur un temps τ.



4.1.3 Évolution du courant





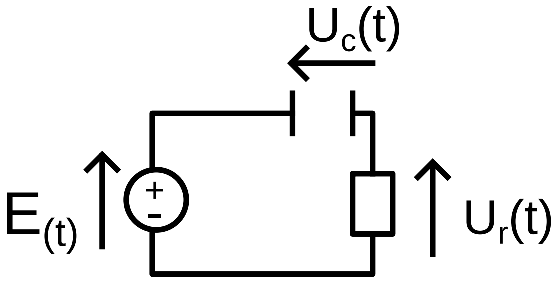
En charge, on a $U_c(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$ et en décharge $U_c(t) \ = Ee^{-t/\tau}$.

On sait aussi que $i(t) \ = C\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t}$. En dérivant, on obtient $i(t) = \frac{CE}{\tau}e^{-t/\tau}$ pour la charge et $i(t) = -\frac{CE}{\tau}e^{-t/\tau}$ pour la décharge

Discontinuité du courant

Le courant est discontinu dans un condensateur, alors que la tension est bien continue !

4.2 Circuit RC et régime sinusoidal



4.2.1 Mise en équation

On a

$$\begin{aligned} e(t) &= U_c(t) + U_R(t) \\ &= U_c(t) + R \times i \\ &= U_c(t) + R \times cU_c(t)' \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}U_c(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{U_c(t)}{C} = \frac{E_0}{\tau}\cos(\omega t) \tag{4.2}$$

On trouve la solution homogène : $Ae^{-t\tau}$

4.2.2 Solution particulière

Pour la solution particulière, on utilise la méthode de ressemblance, de la forme $\alpha \cos(\omega t + \varphi)$ ou $\beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}U_c^p(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{U_c^p(t)}{C} &= -\beta\omega \sin(\omega t) + \gamma\omega \cos(\omega t) + \frac{1}{\tau}(\beta \cos(\omega t) + \gamma \sin(\omega t)) \\ &= (\gamma\omega + \frac{\beta}{\tau})\cos(\omega t) + (\frac{\gamma}{\tau} - \beta\omega)\sin(\omega t) && (4.3) \\ &= \frac{E_0}{\tau}\cos(\omega t) && (4.4) \end{aligned}$$

On obtient un système que l'on résout :

$$\begin{cases} \gamma\omega + \frac{\beta}{\tau} &= \frac{E_0}{\tau} \\ \frac{\gamma}{\tau} - \beta\omega &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma &= \frac{E_0}{1+\omega^2\tau^2} \\ \beta &= \frac{E_0\omega\tau}{1+\omega^2\tau^2} \end{cases}$$

4.2.3 Expression finale

Donc $U_c(t) = Ae^{-t/\tau} + \frac{E_0}{1+\omega^2\tau^2}(\omega\tau \cos(\omega\tau) + \sin(\omega\tau))$

On appelle la partie de la solution homogène le régime transitoire et l'autre partie le régime établi.

Pour t supérieur à τ, après le régime transitoire, toutes les quantités vont suivre l'oscillation sinusoidale du générateur. Il ne reste plus que lasolution paticulière.

Déterminer la réponse du système en régime établi revient à chercher une amplitude et un déphasage : $\alpha \cos(\omega t + \varphi)$.