Chapitre 1

Suites

1.1 Rappels

Définition 1.1 : Suite réelle/complexe

Une suite réelle réelle est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 1.2 : Suites réelles majorées/minorées

Une suite réelle est

- majorée si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, u_p \leq C$
- minorée si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, u_p \geq C$

Définition 1.3 : Suite réelle/complexe bornée

Si $\exists C \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{N}, |u_p| \leq C$.

Définition 1.4 : Suite convergente/divergente

Une suite est dite convergente si $\exists l \in \mathbb{R} \setminus \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, |u_p - l| \leq \varepsilon$. On dit que l est la limite de la suite. On le note $u_p \to l$.

On n'écrit pas $\lim u_p = l$ car en faisant ça on suppose que la limite existe vant même de commencer à l'étudier. Il ne faut pas l'écrire en début de calcul.

Définition 1.5 : Suite divergente

Elle est divergente i elle n'est pas convergente.

Proposition 1.1

Soit (u) une suite convergente. On suppose qu'il existe l_1, l_2 telle que $u_p \to l_1$ et $u_p \to l_2$. Alors $l_1 = l_2$.

Preuve 1.1

On suppose qu'il existe l_1, l_2 telle que $u_p \to l_1$ et $u_p \to l_2$. Par définition de la convergence d'une suite :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_1, |u_p - l_1| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall p \geq N_2, |u_p - l_2| \leq \varepsilon$

On pose $N = \max(N_1, N_2)$. On a alors $\forall p \geq N, |u_p - l_1| \leq \varepsilon$ et $\forall p \geq N, |u_p - l_2| \leq \varepsilon$

$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

$|l_1 - l_2| < 2\varepsilon \iff l_1 = l_2$

Proposition 1.2

Soit u une suite convergente. Alors elle est bornée. La réciproque est fausse. En effet, $u_n = (-1)^p$ à démontrer avec la def de la limite

Preuve 1.2

Soit u CV et l sa limite. Prenons $\varepsilon = 36$. $\exists N, \forall p \geq N, |u_p - l| \leq 36$. Mais $|u_p - l| \leq 36 \Rightarrow |u_p| \leq 36 + |l|$ par inégalité triangulaire.

Posons $M = \max(|u_0|, |u_1| \dots |u_N|)$ et $C = \max(M, 36 + |l|)$

Soit $p \in \mathbb{N}$, on a :

- $p \leq N, |u_p| \leq M \leq C$

- $p \geq N, |u_p| \leq 36 + |l| \leq C$

Définition 1.6 : Limite infinie de suites réelles

On dit que la suite tend vers

- $+\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_p \geq A$
- $-\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_p \leq A$

Définition 1.7 : Propriété vraie à partir d'un certain rang

On dit qu'une suite vérifie une propriété à partir d'un certain rang, si $\exists n, \forall p \geq n, u_p$ vérifie la propriété.

Définition 1.8 : Suites réelles monotones

Soit u une suite réelle. On dit que u est croissante (à partir d'un certain rang) si $(\exists N,) \, \forall p (\geq N), u_{p+1} \geq u_p$.

Proposition 1.3

Toute suite réelle croissante à partir d'un certain rang tend vers une limite finie ou infinie.

Si elle est en plus majorée, elle tend vers une limite finie.

Exemple : $w_p = \frac{p^2}{2^p} \geq -70$ Elle est minorée.

$w_{p+1} - w_p = \frac{p^2+2p+1-2p^2}{2^{p+1}} = -\frac{(p-1)^2-2}{2^{p+1}} \leq 0$ dès que $p \geq 3$. Donc elle est décroissante à partir du rang 3. Donc elle est convergente et admet une limite.

1.2 Notations de Landau

Définition 2.1 : Suites néglieables

Soit u et v deux suites. On dit que u est néglieable devant v (en $+\infty$), noté $u_p o_{p\to\infty}(v_p)$. Il existe une suite ε telle que $\varepsilon_p \to 0$ et $u_p = v_p\varepsilon_p$ à partir d'un certain rang.

Proposition 2.1

u et v deux suites. On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}, \forall p \geq N, v_p \neq 0$. Alors $u_p = o(v_p) \iff \frac{u_p}{v_p} \to 0$.

Preuve 2.1

Supposons $u_p = o(v_p)$. Alors $\exists(\varepsilon_p), \varepsilon \to 0$ et $u_p\varepsilon_p v_p$ à partir d'un certain rang M.

$\forall p \geq \max(M, N), \frac{u_p}{v_p} = \varepsilon_p \to 0$.

Supposons $\frac{u_p}{v_p} \to 0$. Définissons $\varepsilon_p = \frac{u_p}{v_p}$ si $p \geq N$ et 1 dans le cas contraire. Alors $\varepsilon_p \to 0$ et $\forall p \geq N, u_p = \varepsilon_p v_p$, donc $u_p = o(v_p)$.

Exercice : Montrer que $u_p = o(v_p) \iff |u_p| = o(|v_p|)$. en utilisant la definition

$u_p = v_p\varepsilon_p \Rightarrow |u_p| = |\varepsilon_p v_p| = |o||v_p| = o(|v_p|)$ car $\varepsilon_p > 0$.

$|u_p| = o(|v_p|) \iff \frac{|u_p|}{|v_p|} \to 0$ Si u_p et v_p sont de même signe, $\frac{u_p}{v_p} \geq 0$ et $\frac{u_p}{v_p} \to 0+$. Dans le cas contraire, $\frac{u_p}{v_p} \to 0-$. Dans tous les cas, $\frac{u_p}{v_p} \to 0-$, donc $u_p = o(v_p)$.

Exemple : $p^3 = o(p^5)$.

Exemple : $p^k = o(p^m) \iff m > k$.

On a jamais $u_p = o(u_p)$ sauf si la suite est nulle à partir d'un certain rang.

Proposition 2.2

Si $u = o(v), v = o(w)$, alors $u = o(w)$.

Preuve 2.2

Il existe 2 suites ε et η qui tendent vers 0 telles que $u_p = \varepsilon_p v_p \forall p \geq$

N_1 et $v_p = \eta_p w_p \forall p \geq N_2$

$\forall p \geq \max(N_1, N_2), u_p = \varepsilon_p v_p = \varepsilon_p \eta_p w_p$. On pose $\delta_p = \varepsilon_p \eta_p \to 0$.

Définition 2.2 : Suite dominée

Soient u et v deux suites, on dit que u est dominée par v, noté $u = O(v)$ si $\exists \eta$ une suite *bornée* telle que $u_p = \eta_p v_p$ à partir d'un certain rang.

Proposition 2.3

Si $u = o(v)$, alors $u = O(v)$.

Preuve 2.3 : À faire

$u_p = o(v_p) = \varepsilon_p v_p$ avec $\varepsilon_p \to 0$. Elle est convergente, donc bornée. On peut donc poser $\eta_p = \varepsilon_p$ et $u_p = \eta_p v_p = O(v_p)$

Proposition 2.4

Si $v_p \neq 0, \forall p \geq N_1$, on a : $u = O(v) \iff \exists C \in \mathbb{R} tq \forall p \geq N, |\frac{u_p}{v_p}| \leq C$.

Preuve 2.4

$(u_p) = O(v_p) = \eta_p v_p$, donc $\frac{u_p}{v_p} = \frac{\eta_p v_p}{v_p} = \eta_p$ qui est bornée. Donc par définition, $\exists C \in \mathbb{R} tq \forall p \geq N, |\frac{u_p}{v_p}| \leq C$

Autre sens ?

—–-

Proposition 2.5

Soient u, v, w trois suites. Si $u = O(v)$ et $v = O(w)$, alors $u = O(w)$.

Proposition 2.6

Soient $u = O(v) \wedge v_p \to 0 \Rightarrow u_p \to 0$.

Preuve 2.5

$\exists \eta$ suite bornée et $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = \eta_p v_p, \forall p \geq N$. Alors $\forall p \geq N, |u_p| = |\eta_p v_p| = |\eta_p||v_p|$. Comme η est bornée, $\exists C \in \mathbb{R}$ tel qye $\forall p \in \mathbb{N}, |\eta_p| \leq C$.

Donc $\forall p \geq N, |u_p| \leq c|v_p| \to 0$, donc $u_p \to 0$.

Exemple : $u_p = p^2+3p+2$ et $v_p = p^2+6p-3$. On remarque que $v_p \to \infty$ donc $\exists N, \forall n \geq N, v_p \geq 1$. Pour $p \geq N$, $\frac{u_p}{v_p} \to 1$. La suite converge, donc elle est bornée.

Définition 2.3 : Suite équivalente

Soient u et v 2 suites équivalentes. La suite u est éuivalente à v_p, noté $u \sim v$ si $u_p = v_p + o(v_p)$ ou encore $\exists \varepsilon \to 0, \forall p \geq N, u_p = v_p + \varepsilon_p v_p = (1+\varepsilon_p)v_p$

Proposition 2.7

Soient u et v deux suites. $u_p \sim v_p \iff \frac{u_p}{v_p} \to 1$

Preuve 2.6

Si $u_p \sim v_p, \exists N_1, \varepsilon \to 0$ telle que $u_n = v_n(1+\varepsilon)\forall p \geq N_1$. Donc $\forall p \geq N_1 + N, \frac{u_p}{v_p} = 1 + \varepsilon_p \to 1$.

Récirpoquement, on suppose $\frac{u_p}{v_p} \to 1$. Pour $p \geq N u_p = v_p \frac{u_p}{v_p} = v_p(1 + \frac{u_p}{v_p} - 1)$. posons $\varepsilon_p = 42 si p < N, \frac{u_p}{v_p} - 1$ sinon. Alors $\varepsilon_p \to 0$ et $\forall p \geq N, u_p = v_p(1+\varepsilon_p)$.

Proposition 2.8

Soient u, v, w trois suites. On a :

- $u \sim u$
- $u_p \sim v_p \iff v_p \sim u_p$
- $u_p \sim v_p$ et $v_p \sim w_p$ alors $u_p \sim w_p$.

Preuve 2.7

$u_p = (1+0)u_p$ avec $0 = \varepsilon_p$.

Supposons que $u_p \sim v_p$, alors $\exists \varepsilon_p \to 0$ et N tel que $\forall p \geq N, u_p = (1+\varepsilon_p)v_p$. Comme $\varepsilon_p \to 0, \exists N_3, \forall p \geq N_3, |\varepsilon_p| \leq 1/2$, et donc $1+\varepsilon_p \geq 1-|\varepsilon_p| \geq 1/2 > 0$. Donc $\forall n \geq \max(N, N_3)$, on a $v_p = u_p \frac{1}{1+\varepsilon_p} = u_p(1+\frac{1}{1+\varepsilon_p}-1) = u_p(1+\frac{-\varepsilon_p}{1+\varepsilon_p})$. Posons alors $\varepsilon_q = \frac{-\varepsilon_p}{1+\varepsilon_p} sip \geq \max(N, N_3)$. Alors $\varepsilon_q \to 0$ e $\forall p \geq \max(N, N_3), v_p(1+\varepsilon_p)u_p$.

Exemple : Soit $u_p, |u_p| < 1$ et $u_p \to 0$. Alors $\ln(1+u_p) \sim u_p$.

$v_p = \ln(1+u_p) = \ln(1+up) - \ln(1)$. D'après le TAF :$\exists c_p \in [1-|u_p|, 1+|u_p|]$ tel que $\ln(1+u_p) - \ln(1) = \ln'(c_p)(1+u_p-1) = \frac{u_p}{c_p} = u_p(1+\frac{1}{c_p}-1) = u_p(1+\frac{1-c_p}{c_p})$. Or, $c_p \to 1, 1-|u_p| \leq c_p \leq 1+|u_p|$.

Proposition 2.9

Soient u et v 2 suites. On suppose que $u_p \sim v_p$ et v converge vers l. Alors $u_p \to l$.

Preuve 2.8 : À faire

$v_p \to l \wedge u_p = (1+\varepsilon)v_p$, donc $u_p \to l \times 1 = l$.

Proposition 2.10

u et v deux suites réelles. Si $u \sim v$ et $v_p \to \infty$, alors $u_p \to \infty$.

1.3 Sous-suites

Définition 3.1

On dit que v est une suite extraite de $u \iff \exists\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strcutement croissante telle que $\forall p \in \mathbb{N}, v_p = u_{\varphi(p)}$.

Exemple : $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_p$ Si on prend $v_0 = u_2, \varphi(0) = 2$

C'est φ qui définit la sous-suite, la suite u est une suite extraite de u. Il suffit de prendre $\varphi(p) = p$.

Proposition 3.1

On a $\varphi(p) \geq p$.

Preuve 3.1 : Laissée en exo

Proposition 3.2

Une suite converge vers $l \iff$ toutes ses suites extraites cobvergent ver l.

Preuve 3.2

u est une suite extraite de u

Dans l'autre sens : u CV vers l donc $\forall\varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N, |u_p| - l < \varepsilon$. Soit v une suite extraite de u. $\exists\varphi N \to \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, v_p = u_{\varphi(p)}$. $\forall p \geq N, \varphi(p) \leq p, |v_p - l| = |u_\varphi - l| < \varepsilon$.

Définition 3.2 : Valeur d'adhérence

l est une valeur d'adhérence $\iff$ l est une limite finie d'une suite extraite de u.

Proposition 3.3

Toute suite admet une sous-suite monotone.

Théorème 3.1 : Bolzano Weitrass

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Preuve 3.3

Soit une sous-suite réelle/complexe bornée. Elle admet une sous-suite monotone qui sera aussi bornée (pourquoi ?), donc convergente

1.4 Suite de Cauchy / Complétude

Définition 4.1 : Suite de Cauchy

Soit u une suite. On dit que u est de Cauchy si elle vérifie une des 2 prorpiétés suivantes équivalentes :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p\, N, q > N, |u_p - u_q| \leq \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p\, N, q > N, |u_{p+q} - u_p| \leq \varepsilon$

Proposition 4.1

Toute suite convergente est de Cauchy

Preuve 4.1

On prend une suite et sa limite l. Alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \leq N, |u_p - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. D'où $\forall p, q \geq N, |u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |l - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Proposition 4.2

Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve 4.2

Prenons $\varepsilon = 1, \exists N, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| \leq 1$.

Alors ,$\forall p \geq N, |u_p - u_N + u_N| \leq |u_p - U_n| + |u_N| \leq 1 + |u_N|$. On a bien écrit que la suite u_p est bornée.

Posons $C = \max(|u_0|, |u_1|, \ldots |U_n|, 1 + |U_N|)$. Si $p \leq N, |u_p \leq C$. Si $p \geq N, |u_p| \leq C$. Donc u est bornée.

Proposition 4.3

Si u est de Cauchy et admet une sous-suite convergente, alors u converge.

Preuve 4.3

Il existe $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strcitement croissant et un l tel que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, \forall p \geq N_1, |u_{\varphi(p)} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme la suite est de Cauchy, $\exists N_2, \forall p; q \geq N_2, |u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $N = \max(N_1 N_2), \forall p \geq N, \varphi(p) \geq N$, d'où $|u_p - l| = |u_p - u_{\varphi(p)} + u_{\varphi(p)} - l| \leq |u_p - u_{\varphi(p)}| + |u_{\varphi(p)} - l| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Donc u converge vers l.

Théorème 4.1

Toute suite de Cauchy converge. On dit que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.

Preuve 4.4

Soit u de Cauchy. Alors u est bornée. Par BW, elle admet une sous-

> suite convergente, donc elle converge.