Chapitre 15

Combinatoire et dénombrement

Comme nous avons pu l'observé dans le chapitre sur la loi binomiale, il est important de savoir dénombrer certaines quantités. En effet, dans ce chapitre, lorsque nous avons étudié l'expression algébrique de la loi binomiale nous avons constaté qu'il était nécessaire de déterminer le nombre de chemins (présents sur l'arbre pondéré représentant le schéma de Bernoulli) contenant exactement k succès sur les n répétitions. Nous avions alors convenu que cette valeur s'écrivait

$$\binom{n}{k} \quad \text{(lire } k \text{ parmi } n\text{)}$$

et la calculatrice nous permettait d'obtenir sa valeur. Dans ce chapitre, nous allons voir plus en détails cette notion ainsi que d'autres qui y sont liées.

15.1 Combinaisons, arrangements et permutations

Débutons par ce qui va nous permettre de définir formellement l'expression *de k parmi n*.

15.2 Factorielle

Exemple 15.2.1. Imaginons que nous disposions d'un alphabet E composé de 3 lettres : $E = \{a, b, c\}$. Combien de mots différents (sous qu'ils aient forcément du sens dans notre langue) pouvons nous alors former avec cet alphabet ?

Ici, n'ayant que 3 lettres à notre disposition, il est facile de lister les 6 possibilités :

$$abc \quad ; \quad acb \quad ; \quad bac \quad ; \quad bca \quad cab \quad ; \quad cba.$$

Remarque. Finalement nous avons chercher implicitement à connaitre le nombre de permutations qu'il était possible de faire avec les lettres de notre alphabet pour obtenir des mots distincts.

Il semble assez raisonnable de trouver un outil mathématiques permettant de lister ces possibilités sans avoir à les chercher, les unes après les autres à la main. Il s'agit de la notion de factorielle.

Définition 15.2.1 (Factorielle)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, nous appelons* factorielle *n le produit*

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

et notons cette quantité $n!$. Par convention, $0! = 1$.

Remarque. Il s'agit finalement d'une généralisation de l'exemple précédent. Cette fois-ci, nous disposons d'un alphabet de n lettres et nous cherchons à savoir combien de mots est-il possible de faire à partir de celui-ci.

Pour se rassurer, voyons un exemple.

Exemple 15.2.2.
1. $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$.
2. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Nous constatons qu'il était raisonnable de ne pas chercher à lister les nmbres de mots distincts obtenus à partir d'un alphabet de 5 lettres.

3. Lors d'une compétition sportive, 20 équipes s'affrontent. Il existe $20!$ classements différents (soit environ $2.,4 \times 10^{18}$).

Exercices à traiter : 18 et 19 page 347 ; 39/41 page 349.

15.2.1 Arrangements

Supposons maintenant que nous ayons à disposition, non pas des lettres, mais des livres et que nous souhaitions les disposer (tranches visibles) sur une étagère. Que se passe-t-il si nous avions 10 livres mais que la rangée de notre étagère ne peut en accueillir que 6 ? Autrement dit, combien de choix avons nous à notre disposition ?

En reprenant ce qui précède, nous savons qu'il est possible de faire $10!$ rangées différentes (si les dix livres pouvait tenir sur une seule rangée). Avec notre contrainte supplémentaire (6 livres par rangées), nous allons devoir faire des choix.

Proposition 95 (Arrangement)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$ un entier. Le nombre d'arrangement de k éléments dans une liste de n éléments vaut :*

$$\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \ldots (n-p+1).$$

Remarque. Il est important de noter que l'ordre est important dans un arrangement. Pour s'en souvenir, il peut être opportun de se souvenir de l'exemple des livres disposés suivant leur tranche dans une bibliothèque. Ceci est notamment à distinguer de ce nous avions étudié avec la loi binomiale : l'ordre des succès obtenus n'a alors aucune importance, il faut seulement qu'un certain nombre de succès soit obtenu.

Voyons cela sur deux exemples.

Exemple 15.2.3.
1. Pour reprendre l'exemple des livres, nous avons $\dfrac{10!}{4!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151\,?200$ possibilités.
2. Dans une compétition opposant 6 joueurs, combien y a -t-il de podiums possibles (ordre des 3 premiers, sans ex-aequo). Cela revient à faire un arrangement de 3 joueurs parmi 6. Ainsi, le nombre de podiums vaut $\dfrac{6!}{(6-3)!} = 6 \times 5 \times 4 = 120.$

Exercices à traiter : 44 page 349.

15.2.2 Combinaisons

Comme indiqué dans l'exemple précédent, il y a une différence entre les arrangements et ce que nous avions utilisé pour compter le nombre de chemin contenant exactement k succès parmi n répétitions. Pour saisir cette différence, il est possible de l'illustrer en utilisant de nouveau des livres :

- arranger 6 livres parmi 10 consiste à choisir 6 livres pour ensuite les disposer, tranches visibles, dans rangée d'une bibliothèque. L'ordre est alors important (par exemple, mettre le tome 3 avant le tome 2 sera un arrangement différent de celui ou le tome 2 est rangé avant le tome 3).
- choisir une combinaison de 6 livres parmi 10 consiste à choisir 6 livres pour ensuite les mettre dans un sac. Ainsi, les livres n'étant plus visibles après la sélection, l'ordre n'a aucune importance[1].

Ce qui précède mène à la proposition suivante.

Proposition 96 (Combinaison)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$ un entier. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi une liste de n éléments vaut*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque. 1. Insistons à nouveau : l'ordre dans lequel les éléments sont choisis n'a aucune importance.

1. Exactement comme dans l'exemple lié au nombre de chemins comportant exactement k succès, la place des succès parmi les répétitions n'a aucune importance

2. Certaines valeurs remarquables sont à retenir :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{1} = 1 \quad ; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

D'autres propriétés sont satisfaites, celles-ci seront étudiées plus tard dans ce chapitre.

Voyons cela sur un exemple.

Exemple 15.2.4. Considérons un jeu de 32 cartes. Nous dirons par la suite qu'une main est constituée de 5 cartes.

1. Pour savoir combien de mains différentes sont possibles, il suffit de déterminer le nombre de combinaisons de 5 éléments parmi 32 : à savoir $\binom{32}{5} = 201\,376$.
2. Pour savoir combien de mains contienne le valet de pique. Il suffit de chercher le nombre de combinaison de 4 cartes parmi les 31 restantes ; la 5ème carte étant forcément le valet de pique. A savoir $\binom{31}{4} = 31\,465$.

Exercices à traiter : 9 à 12 page 343 ; 15 à 17 page 345.

Coefficients binomiaux

Comme nous l'avions observé dans le chapitre sur la loi binomiale, les combinaisons $\binom{n}{k}$ interviennent lorsque nous avons affaire à un schéma de Bernoulli. A ce moment là, nous avions utilisé parler de *coefficients binomiaux* pour désigner ces quantités. Cette terminologie est, bien entendu, liée à la loi binomiale mais aussi à la formule générale d'identités remarquables.

Proposition 97 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *alors*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{15.2.1}$$

Remarque. 1. Hormis la présence d'une somme, cette formule fait songer à celle associée à la loi d'une variable $X \sim B(n;p)$. Ce n'est pas un hasard. En effet, le développement de $(a+b)^n = (a+b) \times \ldots (a+b)$ implique de distribuer a : pour effectuer tous ces produits, pour chacune des parenthèses, il faut alors choisir systémtique entre a et b. Ceci donne lui à un arbre, semblable à un chemin de Bernouilli, où chacune des branches corresponds à a ou b. Ceci expliquant alors la présence de $\binom{n}{k}$.

2. Lorsque $n = 2$, la formule donne $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ tandis que si $n = 3$ alors $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Finalement, nous observons que les puissances de a diminuent lorsque celles de b augmentent (et leur somme correspond toujours à la puissance n) et les coefficients sont donnés par $\binom{n}{k}$.

   Il existe d'ailleurs un moyen pratique pour déterminer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, il s'agit du triangle de Pascal

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}$$

   Pour chaque ligne, la valeur de k vaut 0 pour le terme le plus à gauche puis augmente de 1 jusqu'à attendre la valeur n sur le terme le plus à droite.

Le triangle de Pascal suggère une relation entre les coefficients binomiaux : un terme est obtenu en additionnant les deux se trouvant au dessus de lui. Ceci est confirmé par la proposition suivante.

Proposition 98. *Soient* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \leq n$ *un entier. Alors*

1. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.
2. *Les coefficients binomiaux vérifient une propriété de symétrie*[2] *:* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

2. visible dans le triangle de Pascal

Exemple 15.2.5. Soit E un ensemble composé de n éléments distincts. Combien d'ensembles, contenu dans E, est-il possible de former ?

Un instant de réflexion suggère qu'il est possible de construire un ne contenant aucun élément de E (il s'agit de l'ensemble vide $\emptyset$. Vient ensuite les ensembles ne contenant qu'un seul élément de E ; il y a $\binom{n}{1}$ possibilités. Forcément, il y a aussi les ensembles contenant deux éléments de E et il y a $\binom{n}{2}$ possibilités. En poursuivant ainsi jusqu'à l'ensemble contenant exactement n éléments, nous constatons que cela revient à faire la somme

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

d'après la formule du Binôme de Newton (15.2.1) (en choisissant $a=b=1$).

15.3 Dénombrement

Poursuivons notre étude du dénombrement, cette fois-ci en prenant un peu de recul. Jusqu'à présent nous avons considéré des ensembles finis : c'est-à-dire des ensembles pour lesquels il est possible de compter le nombre d'éléments qui le compose (un nombre de livres, un nombre de chemin vérifiant une propriété donnée,. . .).

Définition 15.3.1. *Soit E un ensemble fini. Nous appelons $\mathrm{Card}(E)$ le nombre d'éléments de l'ensemble E.*

Remarque. Lorsque E n'est pas fini, forcément $\mathrm{Card}(E)=+\infty$. Il est toutefois nécessaire de faire la distinction entre différents infinis : il y a beaucoup plus d'éléments dans $\mathbb{R}$ que dans $\mathbb{N}$. Nous dirons que $\mathbb{R}$ est un ensemble infini non dénombrable (il n'est pas possible de numéroter tous les nombres réels à l'aide d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$) alors que $\mathbb{N}$ est un ensemble infini dénombrable (cette fois-ci, il est possible de numéroter ses éléments à l'aide d'une suite).[3]

15.3.1 Réunion d'ensembles

En classe de seconde, dans le chapitre de probabilité, nous avons étudié la notion d'union, entre deux ensembles. La question suivante est alors naturelle : si E et F sont des ensembles dont les cardinaux sont connus, que dire de $\mathrm{Card}(E\cup F)$?

Proposition 99 (Cardinal d'une union)**.** *Soient E et F deux ensembles finis alors*

$$\mathrm{Card}(E\cup F)=\mathrm{Card}(E)+\mathrm{Card}(F)-\mathrm{Card}(E\cap F).$$

Plus généralement, si $E_1, E_2, \ldots E_k$ ont des ensembles deux à deux disjoints (i.e. $E_i\cap E_j=\emptyset$ pour tout $i\neq j$) alors

$$\mathrm{Card}(E_1\cup\ldots\cup E_k)=\mathrm{Card}(E_1)+\ldots+\mathrm{Card}(E_k).$$

Voyons cela sur des exemples. Malgré les notations, les choses sont très simples et concrètes.

Exemple 15.3.1. Dans une classe de 35 élèves, 20 ont choisi l'option Maths expertes, 15 l'option Arts et 8 aucune de ces deux options. Combien d'élèves suivent les 2 options ?

il est possible de décomposer la classe en deux ensembles : celui composé (noté O^c) des élèves ne suivant aucunes de ces deux options et celui avec les élèves restant (noté O). Ces deux ensembles sont disjoints donc (en notant Ω l'ensembles des élèves de la classe), nous avons

$$\Omega=O\cup O^c \quad \text{d'où} \quad \mathrm{Card}(\Omega)=\mathrm{Card}(O)+\mathrm{Card}(O^c) \iff \quad 35=\mathrm{Card}(O)+8.$$

Donc $\mathrm{Card}(O)=27$. Dans l'ensemble O se trouve les élèves ayant choisi l'option maths expertes (l'ensemble associé est noté E) et ceux qui ont choisi l'option arts (l'ensemble associé est noté F). Par suite,

$$27=\mathrm{Card}(E)+\mathrm{Card}(F)-\mathrm{Card}(E\cap F) \iff 27-20-15=\mathrm{Car}(E\cap F).$$

Il y a donc 2 élèves qui ont pris les deux options.

Exercices à traiter : 29 page 349.

3. $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des ensembles infinis dénombrables, $[0;1]$ ou $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont des ensembles infinis non dénombrables.

15.3.2 Produit cartésien d'ensemble

Dans certain cas de figures, la réunion d'ensembles n'est pas la manière adaptée pour décrire la situation. Voyons plutôt sur un exemple.

Exemple 15.3.2. Considérons à cadenas à 4 chiffres, lesquelles sont données par une roue crantée indiquant un chiffre $(0, \ldots, 9)$. Combien de codes différent est-il possible de trouver ?

Après réflexion, nous constatons que notre code est composée de 4 valeurs (v_1, v_2, v_3, v_4) où $v_1 \in \{0; \ldots; 9\}$ correspond au chiffre associé à la première roue, $v_2 \in \{0; \ldots; 9\}$ pour celui de la deuxième roue, etc

Si $E = \{0, \ldots, 0\}$, pour résumer ce qui précède nous noterons cela par

$$(v_1, v_2, v_3, v_4) \in E \times E \times E \times E$$

L'exemple ci-dessous, nous pousse à donner une définition précise de l'ensemble $E \times E \times E \times E$.

Définition 15.3.2 (Produit cartésien d'ensembles)**.** *Soient E et F deux ensembles. Nous appelons produit cartésien de E et F, l'ensemble $E \times F$ tel que tout élément $v \in E \times F$ soit de la forme*

$$v = (v_1, v_2) \quad \textit{avec} \quad v_1 \in E \quad \textit{et} \quad v_2 \in F.$$

Plus généralement, si $E_1, \ldots E_p$ sont des ensembles, $E_1 \times E_2 \times E_p$ contient tous les éléments de la forme $(v_1, \ldots, v_p)$ où $v_1 \in E_1$, ..., $v_p \in E_p$.

Remarque. Au niveau de la terminologie, $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ sera parfois appelé un p-uplet.

Ce genre d'ensembles a déjà été considérés, de manière implicite dans un chapitre précédent.

Exemple 15.3.3.
1. Un vecteur de l'espace (x, y, z) est un élément du produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (noté $\mathbb{R}^3$ en abrégé).
2. La carte d'un restaurant propose un menu composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert. Si E est l'ensemble des entrées proposées, P celui des plats et D celui des desserts, un menu est une élément de l'ensemble $E \times P \times D$.

En reprenant le dernier exemple, si jamais E est composé de 5 entrées, P de 3 plats et D de 4 desserts, combien de menu différent est-il possible de faire ? Autrement dit, quel est le cardinal de $E \times P \times D$?

Proposition 100 (Cardinal d'un produit cartésien)**.** *Soient $E_1, \ldots, E_p$ des ensembles alors*

$$\mathrm{Card}(E_1 \times E_2 \times E_p) = \mathrm{Card}(E_1) \times \ldots \times \mathrm{Card}(E_p). \tag{15.3.1}$$

Voyons cela sur plusieurs exemples.

Exemple 15.3.4.
1. Concernant l'exemple des menus, nous avons $\mathrm{Card}(E \times P \times D) = 5 \times 3 \times 4 = 60$ menus différents.
2. Dans le cas du cadenas, nous avons $\mathrm{Card}(E \times E \times E \times E) = 10^4$ codes différents.

Nous allons voir qu'il est possible de reprendre la notion de factorielle avec le points de vu des produits cartésiens.

Exemple 15.3.5. Si $E = \{a, b, c\}$ combien de mots pouvons nous former à partir des élément composant E ? Un tel mot correspond à un 3-plet $(v_1, v_2, v_3$ où $v_1 \in E$, $v_2 \in E \backslash \{v_1\}$ et $v_3 \in E \backslash \{v_1, v_2\}$. L'utilisation de la formule (15.3.1) nous assure alors que le cardinal du produit cartésien contenant les mots (v_1, v_2, v_3) est composé de $3 \times 2 \times 1 = 6$ éléments. Autrement dit, $3!$.

La notion de produit cartésien peut également survenir dans un contexte employant des combinaisons.

Exemple 15.3.6. Au bridge, chaque joueur possède une main de 13 cartes extraites d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains qui ne contiennent qu'un seul coeur ? Nous constatons que pour composer cette main, il faut choisir une carte de coeur v_1 et v_2 les deux autres cartes (n'étant pas du coeur). Il y a ainsi $\binom{13}{1}$ possibilités pour v_1 et $\binom{39}{12}$ pour les autres cartes. Ceci mène alors à

$$\binom{12}{1} \times \binom{39}{12}$$

mains différentes.

Exercices à traiter : 7 et 8 page 341 ; 37 page 349