

Chapitre

Modèle scalaire

1.1 Fonction d'onde

π Définition 1.1 : Lumière

La lumière est une onde électromagnétique. Il y a donc 2 champs $\vec{E} + \vec{B}$.

Par l'approximation scalaire, on associe l'onde non plus à des fonctions vectorielles mais à une fonction scalaire $\psi(M, t)$ dépendant de la position ($\overrightarrow{OM} = \vec{r}$) et du temps \times . C'est un cas général d'un champ physique \checkmark .

π Théorème 1.1 : Équation d'onde

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

avec ∇^2 le laplacien $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ et v la vitesse de propagation de l'onde $v = \frac{c}{n}$.

π Définition 1.2 : Période d'oscillation

L'oscillation de ψ en fonction du temps se fait à une période de $T = \frac{\lambda}{v} \simeq 10^{-15} \text{s}$.

On obtient un ordre de grandeur de l'ordre de la femtoseconde, qui est une grandeur impossible à mesurer. On mesure donc une intensité lumineuse en W/m^2 💡 .

\times Difficulté

On suppose donc que cette fonction d'onde de 4 variables décrit tous les phénomènes étudiés

\checkmark Exemple

Un champ est en effet une fonction dépendant de ces 4 variables définie partout

💡 Astuce

Une énergie arrivée pendant un certain temps sur une certaine surface.

**Définition 1.3 : Intensité lumineuse**

C'est ce qui est mesuré par les capteurs : $I = \frac{E}{\Delta t \times S} \propto \psi(\vec{r}, t)^2$.

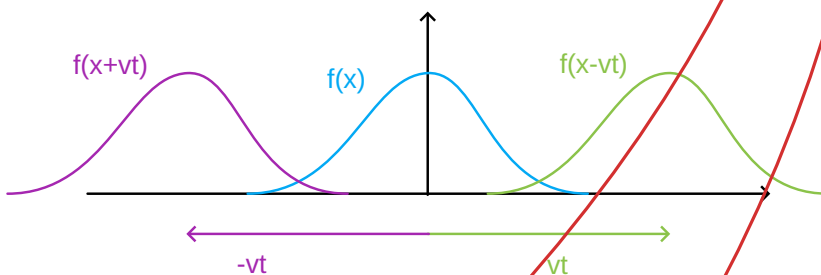
I est la moyenne temporelle de $\psi(\vec{r}, t)^2$, i.e. $I = 2 \langle \psi(\vec{r}, t)^2 \rangle$. Avec une fonction complexe, on aura $I = |\psi(\vec{r}, t)|^2$.

1.2 Types d'onde

1.2.1 Onde progressive à une dimension

**Définition 2.1 : Onde progressive**

Elle "avance" dans une direction à une vitesse v .



Au temps $t_1 > t_0$, il y a une translation de $\psi(x, t_0) = f(x)$ en t_1 de façon à obtenir $\psi(x, t_1) = f(x - vt_1)$ **×**.

On vérifie que cette solution vérifie l'équation :

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \psi &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (f(x - vt)) \\
 &= f''(x - vt) \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x - vt) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (f'(x - vt) \cdot (-v)) \\
 &= -v \frac{\partial}{\partial t} (f'(x - vt)) \\
 &= -v (f''(x - vt) \cdot (-v)) \\
 &= v^2 f''(x - vt) \\
 \nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0
 \end{aligned}$$

× Difficulté

Si on met un plus à la place du moins, il y a une propagation dans le sens des x décroissants au lieu des x croissants

On utilise la règle de la chaîne pour les fonctions composées

On utilise deux fois la règle de la chaîne pour les fonctions composées

1.2.2 Ondes monochromatiques

**Définition 2.2 : Onde monochromatique**

La dépendance temporelle est sinusoidale, en $\cos(\omega t + \varphi)$

On a alors

$$\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$$

où l'on reconnaît l'amplitude de l'onde, la phase à $t=0$, $\omega t + \varphi$ la phase en t quelconque, sans oublier ω la pulsation de l'onde $\frac{2\pi}{T}$.

On obtient alors l'équation de Helmotz :

$$\nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{v^2} \psi = 0$$

Intensité

L'intensité vaut **i** :

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= 2 \langle A^2(\vec{r}) \cos^2(\omega t + \varphi(\vec{r})) \rangle \\ &= 2 \langle A^2 \frac{1}{2} (1 + \cos(2(\omega t + \varphi))) \rangle \\ &= A^2 \end{aligned}$$

L'intensité dépend donc de l'amplitude.

i Info

En effet, la moyenne d'une fonction sinusoidale ou cosinusoidale sur un ou plusieurs cycles complets est nulle

Surface d'onde**Définition 2.3 : Surface d'onde**

Une surface telle que $\varphi(\vec{r})$ est constant, ce qui implique que $\cos()$ prend la même valeur pour un certain temps

Ce sont les cercles pour une onde à la surface de l'eau.

1.2.3 Onde plane rogressive monochromatique (OPPM)

Définitions**Définition 2.4 : OPPM**

Les surfaces d'onde sont des plans qui avancent dans une direction à la vitesse v .

Elle est de la forme $A(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$. On cherche donc A et φ .

L'équation d'un plan est de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma z = C$ avec $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\vec{r}(x, y, z)$. On peut donc la réécrire sous la forme $\vec{u} \cdot \vec{r} = K$ avec \vec{u} un vecteur orthogonal au plan.

On prend $\varphi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r}$ et A constant pour obtenir

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0)$$

C'est bien une fonction d'onde. En effet, on peut la réécrire sous la forme

$$\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega(\frac{k_x}{\omega}x + \frac{k_y}{\omega}y + \frac{k_z}{\omega}z))$$

et vérifier que cela vérifie l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\omega^2 \psi \\ \nabla^2 \psi &= -k_x^2 \psi - k_y^2 \psi - k_z^2 \psi \\ &= -\|\vec{k}\|^2 \psi \\ 0 &= (-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2}) \psi \end{aligned}$$

On en déduit :

π Théorème 2.1 : Relation de dispersion

$$\|\vec{k}\| = \frac{\omega}{v} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c}$$

Si $\vec{k} = k\vec{e}_z$, alors $\psi(\vec{r}, t) = A \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$ qui est périodique en T de période $\frac{2\pi}{\omega}$ en z de période $\frac{2\pi}{k} = \lambda$.

Avec la relation de dispersion, on obtient $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$ avec $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$

Astuce

\vec{k} est le vecteur d'onde. Il donne la direction de propagation de l'onde. Il est donc dans la même direction que \vec{u} . On remarque que la phase augmente comme $\vec{k} \cdot \vec{r}$ augmente lors de la propagation.

Info

Cette fonction est bien de la forme $f(vt - x)$ avec $x = \vec{u} \cdot \vec{r}$, $v = \omega$, donc elle est bien progressive. Elle respecte bien la condition d'une onde monochromatique $\cos(\omega t + \varphi(\vec{r}))$, avec $\varphi(\vec{r}) = \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0$

Attention

\vec{k} est le vecteur d'onde, il définit la direction de propagation.

Équivalence d'écriture

On a

$$\psi_0 \cos(\omega(t - \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{\omega}) + \varphi_0) = \psi_0 \cos(\omega(t - \frac{\vec{u} \cdot \vec{r}}{v}) + \varphi_0)$$

Le vecteur \vec{u} vaut alors $\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$

Difficulté

La couleur n'est pas définie par λ mais pas λ_0 , i.e. la pulsation!

**Double périodicité**

Il ne faut pas confondre la périodicité spatiale $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ et la périodicité temporelle $T = \frac{2\pi}{\omega}$

1.2.4 Onde sphérique monochromatique

Definition

**Définition 2.5 : Onde sphérique**

Les surfaces d'onde sont des sphères concentriques.

On en déduit que $\varphi(\vec{r}) = \pm kr + \varphi_0$ avec r le rayon depuis l'origine. Cela signifie qu'à un instant t donné, on a la même phase d'onde sur des sphères séparés de λ

**Convergence/Divergence**

Pour $\cos(\omega t - kr)$, on est en présence d'une onde divergence, dans le cas contraire, $\cos(\omega t + kr)$, c'est convergent.

En effet, la surface d'onde a un rayon croissant au cours du temps (pour une phase donnée) avec une phase $\omega t - kr$ et inversement.

Vecteur d'onde

Il vérifie toujours la relation de dispersion.

Comme il n'y a plus de direction de propagation, on ne peut plus définir le vecteur d'onde. Cependant, l'onde converge/diverge de l'origine. On peut donc prendre $\vec{u} = \pm \vec{e}_r$, $\vec{k} = \pm k \vec{e}_r$ qui est valable pour tous les points de l'espace ✓.

Amplitude

Prenons l'onde divergente $\psi(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos(\omega t - kr)$. On sait que l'intensité est une puissance surfacique. Cela signifie que pour une même surface d'onde, la puissance totale doit toujours être la même au cours de la propagation, et donc indépendante de r . ⁱ On peut écrire :

✓ **Exemple**

En effet, \vec{k} est bien localement perpendiculaire aux surfaces d'onde en tout point.

ⁱ **Info**

En d'autres termes, cela signifie que l'amplitude dans une direction diminue avec la distance

$$P = \int \int dS |A(\vec{r})|^2$$

$$= \int \int dS |A(r)|^2$$

$$= |A(r)|^2 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow A(r) \propto \frac{1}{r}$$

On a donc

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

et on remarque que l'onde n'est pas définie en 0 car $A(\vec{r})$ diverge. ^x

On peut remplacer \vec{r} par r , car pour des raisons de symétrie, l'amplitude ne dépend pas de l'angle φ

L'intégrale est simplement la surface d'une sphère de rayon r .

Le résultat doit être indépendant de r .

^x Difficulté

Les calculs précédents sont vrais pour une onde sphérique isotrope, avec A qui ne dépend pas de l'angle.

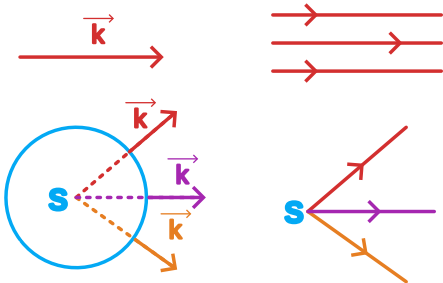
1.2.5 Lien avec l'optique géométrique

Notions élémentaires



Lien

Un rayon lumineux correspond à un vecteur d'onde pris en un point de l'espace.



Chemin optique et phase



Définition 2.6 : Chemin optique en OG

C'est

$$\int_A^B ds n = n \times AB$$

si propagation en ligne droite.

C'est relié par la phase d'une onde se propageant entre les deux points.

On a donc, à un instant donné :

$$\begin{aligned}
 \varphi_B - \varphi_A &= \vec{k} \cdot \vec{r}_b - \vec{k} \cdot \vec{r}_a \\
 &= -\vec{k} \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a) \\
 &= -\vec{k} \cdot \vec{AB} \\
 &= \frac{n\omega}{c} AB \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} n \cdot AB
 \end{aligned}$$

Théorème de Malus



Théorème 2.2 : Théorème de Malus

Les rayons lumineux sont orthogonaux aux surfaces d'onde en tout point.

1.2.6 Notation complexe

On remplace $\psi(\vec{r}, t)$ par sa version complexe :

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) e^{-i(\omega t + \varphi(\vec{r}))}$$

avec $\psi(\vec{r}, t) = \text{Re}(\underline{\psi}(\vec{r}, t))$ et $A(\vec{r}) = |\underline{\psi}(\vec{r}, t)|$ et $-(\omega t + \varphi(\vec{r})) = \arg(\underline{\psi}(\vec{r}, t))$

Pour une OPPM, on a $\underline{\psi}(\vec{r}, t) = A e^{-i\varphi_0} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ avec $A e^{-i\varphi_0} = \underline{A}$ l'amplitude complexe.

L'intensité se calcule avec $I = |\underline{\psi}(\vec{r}, t)|^2$

Chapitre

Interférences d'ondes lumineuses

2.1 Principe de superposition

L'équation d'onde est linéaire. Cela signifie que les solutions forment un espace vectoriel. Cela nous permet d'additionner les fonctions d'onde entre elles.

Ainsi, si 2 sources éclairent un point, on a une fonction d'onde totale $\psi(\vec{r}, t)_1 + \psi(\vec{r}, t)_2$. Cependant, on ne peut pas le faire avec l'intensité car elle dépend du carré des fonctions. En général, si $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t)_1 + \psi(\vec{r}, t)_2$, on a pas toujours $I = I_1 + I_2$.

On dit que 2 ondes interfèrent si $I \neq I_1 + I_2$. Si $I > I_1 + I_2$, on parle d'interférences constructives, dans le cas contraire, ce sont des interférences destructives.

2.2 Role de la pulsation dans les interférences

La superposition de $\psi = \psi(\vec{r}, t)_1 + \psi(\vec{r}, t)_2$ des deux ondes a pour intensité $I = 2 < (\psi_1 + \psi_2)^2 > = |\psi(\vec{r}, t)_1 + \psi(\vec{r}, t)_2|^2 = I_1 + I_2 + 2\text{Re}(\psi(\vec{r}, t)_1 \psi(\vec{r}, t)_2)$

La partie réelle est le terme d'interférence. Si les 2 fonctions d'onde de pulsation ω_1 et ω_2 , alors en un point M, on a

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}, t)_1 &= \varphi_{1,0} e^{-i\omega_1 t} \\ \psi(\vec{r}, t)_2 &= \varphi_{2,0} e^{-i\omega_2 t}\end{aligned}$$

On a alors $I_1 = |\varphi_{1,0}|^2$ et $I_2 = |\varphi_{2,0}|^2$ et $2\text{Re}(\psi(\vec{r}, t)_1 \psi(\vec{r}, t)_2) = 2AB \cos((\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_2 - \varphi_1))$

On remarque que le terme d'interférence oscille à la pulsation $\omega_2 - \omega_1$, très rapidement si $\omega_1 \neq \omega_2$ dans le visible. Comme on ne voit qu'une moyenne, il sera impossible de mesurer l'interférence car les oscilla-

tions sont trop rapides.

En revanche, si $\omega_1 = \omega_2$, le terme d'interférence est constant et donc observable. Si les 2 pulsations sont très proches, le terme d'interférence dépend du temps, on parle alors de battement