Chapitre 2

Éléments cinétiques des solides

2.1 Centre de masse

2.1.1 Centre de masse

Définition 1.1 : Centre de masse ou centre d'inertie

Noté C ou G, il est défini par

$$M\overrightarrow{OC} = \int_S \overrightarrow{OA} \cdot \mathrm{d}m = \int_V \overrightarrow{OA} \cdot \rho(A)\mathrm{d}V$$

Il correspond au barycentre des points matériels affectés de leur masse respective :

$$\int_S \overrightarrow{CA}\mathrm{d}m = \overrightarrow{0}$$

La première expression permet de déterminer les coordonnées de C. Il ne faut pas confondre centre de masse et centre d'inertie et centre de gravité

Astuce
Le centre de gravité est confondu avec le centre de masse uniquement si le champ de gravitation uniforme.

2.1.2 Propriétés

Symétries du système

Le centre de masse respecte les symétries du système. Si il existe un élément de symétrie (plan, centre, axe), ce dernier contient le centre de masse.

Associativité du centre de masse

Lorsqu'un solide est constitué de l'association de plusieurs solides, le centre de masse correspond au barycentre des centres de masse de chaque solide affecté de leur masse respective. Ainsi

$$M\overrightarrow{OC} = \sum_i m_i\overrightarrow{OC_i}$$

Il s'agit d'une somme algébrique qui contient un signe négatif dans le cas d'un trou. ✓

✓ **Exemple**

Par exemple, dans le cas d'un disque évidé d'un autre disque, on peut faire la somme du premier disque moins celle du second disque

2.1.3 Exemples

Part de tarte

On cherche le centre de masse d'une part de tarte d'angle 2α et de rayon R. Avec les règles de symétrie, on obtient facilement i que $y_G = z_G = 0$. Trouvons maintenant x_G :

i **Info**

La part de tarte est placée de telle façon qu'il y a un axe de symétrie le long de l'axe x

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M}\int\int x\sigma\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{S}\int\int \rho\cos(\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{S}\int_0^R \rho^2\mathrm{d}\rho\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2R^3}{3S}\sin(\alpha) \\
&= \frac{2}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}R
\end{aligned}$$

On convertit le x en coordonnée polaires pour trouver $\rho\cos(\varphi)$

On sépare les intégrales

L'aire de la tarte dans son ensemble est πR^2. Comme on prend un angle de 2α, on prend la fraction qui coorespond à une moitié de tarte, soit $\frac{2\alpha}{2\pi} = \alpha$ et $S = \alpha R^2$

Centre de masse d'un cône homogène

On définit la hauteur du cône h et α le demi angle du cone à partir du sommet. On sait par symétrie que le cdm se trouve sur l'axe perpendiculaire à la base et passant par le sommet. Reste à savoir où il se trouve sur l'axe Oz. On prend $\mathrm{d}S = \rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}l$ avec $\rho = z\tan(\alpha), l = \frac{z}{\cos(\alpha)}$, donc $\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}z}{\cos(\alpha)}$.

$$\begin{aligned}
M\times z_G &= \int_A z\sigma\mathrm{d}A \\
&= \int_A z\sigma\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}l \\
&= \int_A z\sigma z\tan(\alpha)\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}z}{\cos(\alpha)} \\
&= \sigma\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}\int_A z^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\
&= \sigma\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}\int_0^h z^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \sigma\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}\times\frac{h^3}{3}\times 2\pi
\end{aligned}$$

On calcule de la même façon M pour trouver

$$M = \int_{(S)} \sigma \mathrm{d}S = 2\pi\sigma \frac{\tan(\alpha)h^2}{2\cos(\alpha)}$$

On en déduit que, en injectant l'expression de M dans les calculs précédents :

$$z_G = \frac{2}{3}h$$

2.2 Moment d'inertie

2.2.1 Par rapport à un axe

Définition 2.1 : Moment d'inertie

C'est la quantité

$$I_\Delta = \sum_i d_i^2 = \sum_i m_i \overrightarrow{H_i A_i}^2$$

avec H_i le projeté orthogonal de A_i selon l'axe Δ

Pour un solide, on a

$$I_\Delta = \int\int\int_S \overrightarrow{HA}^2 \rho \mathrm{d}V = \int\int\int \overrightarrow{r}^2 \mathrm{dm}$$

avec r la distance de particule par rapport à l'axe ✓ .

✓ **Exemple**

Le moment d'inertie est un obstacle au mouvement circulaire autour de l'axe. Le moment d'inertie a la dimension d'une masse multipliée par une distance au carrée.

2.2.2 Méthode de calcul (symétrie de révolution)

Généralités

Théorème 2.1 : Relation des moment d'un système à symétrie de révolution

$$I_{ox} + I_{oy} = I_{oz} + 2\int_{(S)} z^2 \mathrm{dm}$$

Preuve 2.1 : À savoir démontrer

On étudie le cas d'un cylindre creux ou plein et d'un disque ou cerceau. Dans les 2 cas, l'axe Oz est l'axe de symétrie de révolution. Pour des raisons de symétrie, les moments d'inertie I_{ox} et I_{oy} sont les mêmes. Ainsi

$$\begin{aligned}
I_{ox} &= \int_{(S)} (y^2+z^2)\mathrm{d}m \\
I_{oy} &= \int_{(S)} (x^2+z^2)\mathrm{d}m \\
I_{ox}+I_{oy} &= \int_{(S)} (y^2+x^2)\mathrm{d}m + 2\int z^2\mathrm{d}m \\
&= I_{oz} + 2\int_{(S)} z^2\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Disque

Différence de méthode

Les méthodes présentées ici peuvent paraitre différentes de celles vues en cours. En réalité, elles reviennent au même, mais celles présentées ici sont plus générales (et plus rigoureuses) et serviront également en Électromagnétisme 1

$$\begin{aligned}
I_{oz} &= \int_{(S)} \mathrm{d}I \\
&= \int_{(S)} r^2\mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} r^2\sigma\mathrm{d}A \\
&= \int_{(S)} r^2\sigma r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \sigma\int_0^R r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\
&= \sigma\int_0^R r^3\mathrm{d}r 2\pi \\
&= \sigma[\frac{r^4}{4}]_0^R 2\pi \\
&= \sigma\frac{R^4}{4}2\pi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{oz} &= \frac{M}{A}\frac{R^4}{2}\pi \\ &= \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{2}\pi \\ &= \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

Cercle

$$\begin{aligned} I_{oz} &= \int_{(S)} \mathrm{d}I \\ &= \int_{(S)} r^2 \mathrm{d}m \\ &= \int_{(S)} r^2 \lambda \mathrm{d}L \\ &= \int_{(S)} r^2 \lambda r \mathrm{d}\theta \\ &= R^2 \lambda R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= R^3 \lambda 2\pi \\ &= R^3 2\pi \frac{M}{L} \\ &= R^3 2\pi \frac{M}{2\pi R} \\ &= R^2 M \end{aligned}$$

Cette méthode fonctionne également et est plus simple.

$$\begin{aligned} I_{oz} &= \int r^2 \mathrm{d}m \\ &= \int R^2 \mathrm{d}m \\ &= R^2 \int \mathrm{d}m \\ &= R^2 M \end{aligned}$$

et

$$I_{ox} = \frac{MR^2}{2}$$

Cylindre creux

Pour l'axe z, le résultat est identique à celui d'un anneau car, d'un point de vue de la rotation autour de l'axe, la masse est répartie de la même manière : elle est entièrement concentrée à une distance R de l'axe de rotation.

Pouyr l'axe x, avec la base du cylindre en o.

$$\begin{aligned} I_{ox} = I_{oy} = \frac{1}{2}I_{oz} + \int z^2 \mathrm{d}m \\ + \int z^2 \sigma R \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\ + \sigma R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^h z^2 \mathrm{d}z \\ + \sigma R 2\pi \frac{h^3}{3} \\ = \frac{MR^2}{2} + \frac{Mh^3}{3} \end{aligned}$$

Pouyr l'axe x, avec la base du cylindre en o, on obtient

$$I_{ox} = \frac{MR^2}{2} + \frac{Mh^2}{12}$$

Si on considère un fil vertical, on obtiendra aussi

$$I_{ox} = \frac{Mh^2}{12}$$

Cylindre plein

Le résultat est le même que pour le disque pour les mêmes raisons.

2.2.3 Méthode de calcul (symétrie sphérique)

On aura toujours $I_{oz} = I_{ox} = I_{oy}$

On en déduit

$$\begin{aligned} 3I_{ox} &= 2(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}m \\ &= 2\int r^2 \mathrm{d}m = 2I_o \\ &= \frac{2}{3}\int r^2 \mathrm{d}m \end{aligned}$$

Sphère creuse

On applique les mêmes méthodes que précédenement, avec des coordonnées polaires et l'élément de surface élémentaire $R\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, puis on multiplie le résultat par $\frac{2}{3}$ en raison de la propriété précédente.

$$I_o = \frac{2}{3}MR^2$$

Sphère pleine

$$I_{ox} = \frac{2}{5}MR^2$$

Forme	Axe de rotation	Valeur
Disque	Oui	$\frac{1}{2}MR^2$
Disque	Perpendiculaire	$\frac{1}{4}MR^2$
Anneau	Oui	MR^2
Anneau	Perpendiculaire	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre	Oui	$\frac{1}{2}MR^2$
Cylindre	Perpendiculaire	$\frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Tube	Oui	MR^2
Tube	Perpendiculaire	$\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
Boule	Oui	$\frac{2}{5}MR^2$
Coque	Oui	$\frac{2}{3}MR^2$
Tige	Perpendiculaire	$\frac{1}{12}ML^2$
Tige	Perp. + Extremité	$\frac{1}{3}ML^2$

2.2.4 Opérateurs d'intertie

On souhaiter déterminer les moments d'inertie d'une solide par rapport à une droite passant par O.

L'opérateur d'inertie est une matrice 3×3 qui relie la **vitesse angulaire** $\vec{\omega}$ d'un corps rigide à son **moment cinétique** $\vec{L}$ par la relation vectorielle :

$$\vec{L} = \mathbf{I}\vec{\omega}$$

où $\mathbf{I}$ est le tenseur d'inertie. Contrairement au moment d'inertie scalaire qui ne s'applique qu'à une rotation autour d'un axe fixe, le tenseur d'inertie prend en compte la complexité du mouvement de rotation dans l'espace. En général, le moment cinétique $\vec{L}$ et la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ ne sont pas parallèles, sauf si la rotation se fait autour d'un axe de symétrie particulier.

Le tenseur d'inertie $\mathbf{I}$ est représenté par une matrice symétrique de la forme :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

2.2.5 Axes principaux d'intertie

Définition

Pour tout corps rigide, il existe un système de coordonnées spécifique, appelé **axes principaux d'inertie**, où le tenseur d'inertie est une matrice diagonale. Dans ce système, tous les produits d'inertie sont nuls, et la relation devient :

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \vec{\omega}$$

où I_1, I_2, I_3 sont les moments d'inertie principaux. Lorsque la rotation se fait autour de l'un de ces axes, le moment cinétique est parallèle à la vitesse angulaire, ce qui se traduit par un mouvement de rotation stable.

Détermintaion des API

Pour un corps rigide, il existe une connexion directe entre sa symétrie et ses axes principaux d'inertie (API).

1. **Plan de symétrie :** Si un objet a un plan de symétrie (un plan qui le divise en deux moitiés identiques), alors tout axe qui est **perpendiculaire** à ce plan et qui passe par le centre de masse est un API.
2. **Axe de symétrie :** Si un objet peut être tourné sur lui-même autour d'une ligne droite pour se superposer parfaitement, cette ligne est un **axe de symétrie**, et elle est donc aussi un API. L'axe de rotation d'une toupie bien équilibrée est un exemple parfait.

> **Astuce**
> L'axe central est perpendiculaire à la base circulaire, qui est un plan de symétrie. Cet axe central est donc un API.

Si l'axe Oz est un API, alors les termes I_{xz} et I_{yz} du tenseur d'inertie sont nuls. Cela signifie que la masse est distribuée de manière équilibrée par rapport à cet axe, ce qui simplifie les calculs. En fait, si un objet tourne autour d'un API, la rotation est plus stable car le moment cinétique est aligné avec la vitesse angulaire.

> **Propriété pour trouver les API**
>
> Si on a trouvé deux axes perpendiculaires qui sont des API, alors le troisième axe, perpendiculaire aux deux premiers, est automatiquement un API. Il suffit de trouver deux axes de symétrie pour trouver le troisième, sans calculs supplémentaires.

2.2.6 Théorème d'Huygens

Théorème

Théorème 2.2 : Théorème d'Huygens

$$I_{oz} = I_{cz} + Md^2_{cz,oz}$$

Où :

- I_{oz} est le moment d'inertie par rapport au nouvel axe de rotation.
- I_{cz} est le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le **centre de masse** du corps.
- M est la masse totale du corps.
- d est la distance perpendiculaire entre les deux axes parallèles.

ce théorème n'est valable qu'avec I_{cz} passant par C, le centre de masse du solide et O un point quelconque [i] .

Info

Ce théorème repose sur l'idée que la résistance d'un corps à la rotation est plus grande quand il est éloigné de son axe de rotation. Le terme Md^2 ajoute l'inertie supplémentaire due à la translation de l'axe de rotation. Il représente l'inertie de l'ensemble du corps si on le considérait comme une masse ponctuelle située au centre de masse, et tournant autour du nouvel axe.

Ici, le centre de masse est O et on cherche I_{Ax}, I_{Az}. On aura donc

$$I_{AZ} = I_{oz} + Md^2 = I_{oz} + Md_1^2$$

et

$$I_{AX} = I_{ox} + Md_2^2$$

Utilisation

Si A et B sont quelconques et C le centre de masse dde S. Si on connait A_{az} et que l'on cherche I_{Bz}, on écrit $I_{az} = I_{cz} + Md^2_{az,cz}$ puis $I_{BZ} = I_{cz} + Md^2_{Bz,c_z}$ dans lequel on injcete $I_{C}z$ trouvé avec l'équation précédente.

Tige

Considérons une tige mince, homogène, de masse M et de longueur L. Le moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par son centre de masse est connu :

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$$

Pour trouver le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par l'une de ses extrémités, la distance entre les deux axes est $d = \frac{L}{2}$. En appliquant le théorème d'Huygens-Steiner :

$$\begin{aligned} I = I_{\text{cm}} + Md^2 &= \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{12}ML^2 + \frac{1}{4}ML^2 = \frac{1}{12}ML^2 + \frac{3}{12}ML^2 \\ &= \frac{4}{12}ML^2 = \frac{1}{3}ML^2 \end{aligned}$$

Cela correspond au résultat attendu pour le moment d'inertie d'une tige en rotation autour de l'une de ses extrémités.

Astuce

Ce théorème est un outil puissant pour éviter de refaire des calculs d'intégrale complexes pour chaque nouvel axe de rotation.