Chapitre 2

Cinématique - Méthodologie

2.1 Centre de masse

Définition 1.1 : Centre de masse ou centre d'inertie

Noté C ou G, il est défini par

$$M\overrightarrow{OC} = \int_S \overrightarrow{OA} \cdot \mathrm{d}m = \int_V \overrightarrow{OA} \cdot \rho(A)\mathrm{d}V$$

2.1.1 Exemples

Part de tarte

On cherche le centre de masse d'une part de tarte d'angle 2α et de rayon R. Avec les règles de symétrie, on obtient facilement [i] que $y_G = z_G = 0$. Trouvons maintenant x_G :

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{M} \int\int x\sigma \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{S} \int\int \rho\cos(\varphi)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{S} \int_0^R \rho^2 \mathrm{d}\rho \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2R^3}{3S}\sin(\alpha) \\
&= \frac{2}{3}\frac{\sin(\alpha)}{\alpha}R
\end{aligned}$$

i Info

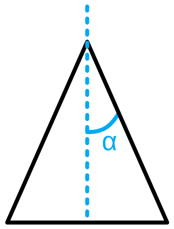
La part de tarte est placée de telle façon qu'il y a un axe de symétrie le long de l'axe x

On convertit le x en coordonnée polaires pour trouver $\rho\cos(\varphi)$

On sépare les intégrales

L'aire de la tarte dans son ensemble est πR^2. Comme on prend un angle de 2α, on prend la fraction qui coorespond à une moitié de tarte, soit $\frac{2\alpha}{2\pi} = \alpha$ et $S = \alpha R^2$

Centre de masse d'un cône homogène



On définit la hauteur du cône h et α le demi angle du cone à partir du sommet. On sait par symétrie que le cdm se trouve sur l'axe perpendiculaire à la base et passant par le sommet. Reste à savoir où il se trouve sur l'axe Oz. On prend $\mathrm{d}S = \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}l$ avec $\rho = z\tan(\alpha), l = \frac{z}{\cos(\alpha)}$, donc $\mathrm{d}l = \frac{\mathrm{d}z}{\cos(\alpha)}$.

$$\begin{aligned} M \times z_G &= \int_A z\sigma \mathrm{d}A \\ &= \int_A z\sigma \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}l \\ &= \int_A z\sigma z\tan(\alpha)\mathrm{d}\theta\frac{\mathrm{d}z}{\cos(\alpha)} \\ &= \sigma\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}\int_A z^2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z \\ &= \sigma\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}\int_0^h z^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \\ &= \sigma\frac{\tan(\alpha)}{\cos(\alpha)}\times\frac{h^3}{3}\times 2\pi \end{aligned}$$

On calcule de la même façon M pour trouver

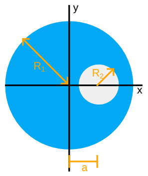
$$M = \int_{(S)} \sigma \mathrm{d}S = 2\pi\sigma\frac{\tan(\alpha)h^2}{2\cos(\alpha)}$$

On en déduit que, en injectant l'expression de M dans les calculs précédents :

$$z_G = \frac{2}{3}h$$

Associativité du centre de masse : Exemple du disque évidé

Prenons ce disque :



On cherche le barycentre. Par symétrie, on sait que $y_G = z_G = 0$. Reste à trouver x_G. On introduit donc $M_1 = \sigma\pi R_1^2$ et $M_2 = -\sigma\pi R_2^2$. En appliquant la formule, on obtient

$$x_g = \frac{\sigma\pi R_1^2 \times 0 - \sigma\pi R_2^2 \times a}{\sigma\pi(R_1^2 - R_2^2)} = -a\frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}$$

2.2 Moment d'inertie

2.2.1 Méthode de calcul (symétrie de révolution)

Disque

> **Différence de méthode**
>
> Les méthodes présentées ici peuvent paraitre différentes de celles vues en cours. En réalité, elles reviennent au même, mais celles présentées ici sont plus générales (et plus rigoureuses) et serviront également en Électromagnétisme 1

On remplace $\mathrm{d}A$ par l'élément de surface élémentaire en coordonnées polaires

On remplace σ par $\frac{M}{A}$ car par définition $\sigma A = M$

$$\begin{aligned}
I_{oz} &= \int_{(S)} \mathrm{d}I \\
&= \int_{(S)} r^2 \mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} r^2 \sigma \mathrm{d}A \\
&= \int_{(S)} r^2 \sigma r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\
&= \sigma \int_0^R r^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\
&= \sigma \int_0^R r^3 \mathrm{d}r 2\pi \\
&= \sigma [\frac{r^4}{4}]_0^R 2\pi \\
&= \sigma \frac{R^4}{4} 2\pi \\
&= \frac{M}{A}\frac{R^4}{2}\pi \\
&= \frac{M}{\pi R^2}\frac{R^4}{2}\pi \\
&= \frac{MR^2}{2}
\end{aligned}$$

Cercle

On calcule de la même façon

$$
\begin{aligned}
I_{oz} &= \int_{(S)} \mathrm{d}I \\
&= \int_{(S)} r^2 \mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} r^2 \lambda \mathrm{d}L \\
&= \int_{(S)} r^2 \lambda r \mathrm{d}\theta \\
&= R^2 \lambda R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\
&= R^3 \lambda 2\pi \\
&= R^3 2\pi \frac{M}{L} \\
&= R^3 2\pi \frac{M}{2\pi R} \\
&= R^2 M
\end{aligned}
$$

Astuce

Cette méthode fonctionne également et est plus simple.

$$
\begin{aligned}
I_{oz} &= \int r^2 \mathrm{d}m \\
&= \int R^2 \mathrm{d}m \\
&= R^2 \int \mathrm{d}m \\
&= R^2 M
\end{aligned}
$$

et

$$I_{ox} = \frac{MR^2}{2}$$

Cylindre creux

Pour l'axe z, le résultat est identique à celui d'un cercle .

Info

En effet, d'un point de vue de la rotation autour de l'axe, la masse est répartie de la même manière : elle est entièrement concentrée à une distance R de l'axe de rotation.

Pouyr l'axe x, avec la base du cylindre en $-h/2$.

Difficulté

On peut aussi le calculer avec la base en O. On trouvera un autre résultat $\frac{Mh^2}{3}$, ce qui est logique, car il y aura plus de résistance en le faisant tourner autour de cet axe.

$$
\begin{aligned}
I_{ox} = I_{oy} = \frac{1}{2} I_{oz} &+ \int z^2 \mathrm{d}m \\
&+ \int z^2 \sigma R \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\
&+ \sigma R \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \mathrm{d}z \\
&+ \sigma R 2\pi \frac{h^3}{12} \\
= \frac{MR^2}{2} &+ \frac{Mh^2}{12}
\end{aligned}
$$

Si on considère un fil vertical, on obtiendra aussi

$$I_{ox} = \frac{Mh^2}{12}$$

Cylindre plein

Le résultat est le même que pour le disque pour les mêmes raisons.

2.2.2 Méthode de calcul (symétrie sphérique)

On aura toujours $I_{oz} = I_{ox} = I_{oy}$

On en déduit

$$\begin{aligned} 3I_{ox} &= 2(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}m \\ &= 2\int r^2 \mathrm{d}m = 2I_o \\ &= \frac{2}{3}\int r^2 \mathrm{d}m \end{aligned}$$

Sphère creuse (Coque)

On applique les mêmes méthodes que précédenement, avec des coordonnées polaires et l'élément de surface élémentaire $R\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, puis on multiplie le résultat par $\frac{2}{3}$ en raison de la propriété précédente.

$$I_o = \frac{2}{3}MR^2$$

Sphère pleine

Erreur courante

Le calcul suivant de fonctionne pas

$$\begin{aligned} I_{oz} &= \int_{(S)} \mathrm{d}I \\ &= \int_{(S)} r^2 \mathrm{d}m \\ &= \int_{(S)} r^2 \sigma \mathrm{d}V \\ &= \int_{(S)} r^2 \sigma r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \sigma \int_0^R r^4 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \sigma\frac{R^5}{5} \times 2\pi \times 2\pi \\ &= \sigma 4\pi \frac{R^5}{5} \end{aligned}$$

$$= \frac{M}{V}4\pi\frac{R^5}{5}$$
$$= \frac{3M}{4\pi R^3}4\pi\frac{R^5}{5}\pi$$
$$= \frac{3MR^2}{5}$$

Bien qu'il semble logique, on calcul ici, la distance par rapport au centre du cercle et non par rapport à un axe ! Il faut donc bien différencier les deux !

Pour rappel, pour intégrer $\sin^3$, on peut le remplacer par $(1 - \cos^2)\sin$ et poser $u = \cos(x)$

$$\begin{aligned}
I_{oz} &= \int_{(S)} \mathrm{d}I \\
&= \int_{(S)} r_a^2 \mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} r_a^2 \sigma \mathrm{d}V \\
&= \int_{(S)} r^2 \sin(\theta)^2 \sigma r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_{(S)} r^4 \sigma r^2 \sin(\theta)^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \sigma \int_0^R r^4 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta)^3 \mathrm{d}\theta \\
&= \sigma \frac{R^5}{5} \times 2\pi \times \frac{4}{3} \\
&= \sigma \frac{8}{3}\pi \frac{R^5}{5} \\
&= \frac{M}{V}\pi\frac{8R^5}{15} \\
&= \frac{3M}{4\pi R^3}\pi\frac{8R^5}{15}\pi \\
&= \frac{2MR^2}{5}
\end{aligned}$$

$$I_{ox} = \frac{2}{5}MR^2$$

2.3 Moment cinétique d'un solide en rotation

2.3.1 Cas d'un solide avec un point fixe O

Considérons un solide (S) en rotation autour d'un point O qui est fixe dans le référentiel R. Le moment cinétique de ce solide par rapport à

O est donné par la formule intégrale suivante :

$$\overrightarrow{L}_{O/R} = \int_{(S)} \overrightarrow{OA} \wedge d\overrightarrow{p} = \int_{(S)} \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{v}_{A\in S/R}\, \mathrm{d}m$$

où $\overrightarrow{OA}$ est le vecteur position d'un point A du solide par rapport à O, et $\overrightarrow{v}_{A\in S/R}$ est la vitesse de ce point dans le référentiel R.

Puisque le point O est fixe dans R, la vitesse de tout point A du solide peut être exprimée en utilisant la formule de Varignon :

$$\overrightarrow{v}_{A\in S/R} = \overrightarrow{v}_{O\in S/R} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA}$$

où $\overrightarrow{\Omega}$ est le vecteur de vitesse de rotation du solide.

En remplaçant cette expression dans la formule du moment cinétique :

$$\overrightarrow{L}_{O/R} = \int_{(S)} \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OA})\, \mathrm{d}m$$

Avec

Théorème 3.1 : Identité du double produit vectoriel

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$$

avec $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{\Omega}$ et $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{OA}$

l'intégrale devient :

$$\overrightarrow{L}_{O/R} = \int_{(S)} \left((\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA})\overrightarrow{\Omega} - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{\Omega})\overrightarrow{OA}\right)\, \mathrm{d}m$$

Soit :

$$\overrightarrow{L}_{O/R} = \left(\int_{(S)} OA^2\, \mathrm{d}m\right)\overrightarrow{\Omega} - \int_{(S)} (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{\Omega})\overrightarrow{OA}\, \mathrm{d}m$$

Astuce

Cette dernière équation est la relation générale entre le moment cinétique et la vitesse de rotation pour un solide avec un point fixe.

Pour obtenir une expression plus explicite, nous projetons $\overrightarrow{L}_{O/R}$ sur les axes d'un repère orthonormé lié au solide :

$$\begin{aligned}
L_{Ox} &= \overrightarrow{L}_{O/R} \cdot \overrightarrow{e_x} \\
&= \int_{(S)} \left[(x^2+y^2+z^2)\overrightarrow{\Omega} - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)(x\overrightarrow{e_x} + y\overrightarrow{e_y} + z\overrightarrow{e_z})\right] \cdot \overrightarrow{e_x}\, \mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} \left[(x^2+y^2+z^2)\omega_x - (x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z)x\right]\, \mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} (x^2+y^2+z^2)\omega_x\, \mathrm{d}m - \int_{(S)} (x^2\omega_x + xy\omega_y + xz\omega_z)\, \mathrm{d}m \\
&= \int_{(S)} (y^2+z^2)\omega_x\, \mathrm{d}m - \int_{(S)} (xy\omega_y + xz\omega_z)\, \mathrm{d}m \\
&= \omega_x \int_{(S)} (y^2+z^2)\, \mathrm{d}m - \omega_y \int_{(S)} xy\, \mathrm{d}m - \omega_z \int_{(S)} xz\, \mathrm{d}m
\end{aligned}$$

En utilisant les définitions des moments et produits d'inertie :

- $I_{Ox} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}m$ (Moment d'inertie par rapport à l'axe Ox)
- $I_{xy} = \int_{(S)} xy\,\mathrm{d}m$ (Produit d'inertie)
- $I_{xz} = \int_{(S)} xz\,\mathrm{d}m$ (Produit d'inertie)

On obtient :

$$L_{Ox} = I_{Ox}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

De même, les autres composantes sont :

$$L_{Oy} = -I_{yx}\omega_x + I_{Oy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$
$$L_{Oz} = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{Oz}\omega_z$$

En notation matricielle, ceci s'écrit $\overrightarrow{L}_O = [I]_O\overrightarrow{\Omega}$, où $[I]_O$ est la matrice d'inertie du solide au point O.

2.3.2 Cas général : Théorème de transport (ou de Koenig)

Si le solide n'a pas de point fixe, le moment cinétique par rapport à un point O (non lié au solide) est donné par le théorème de transport du moment cinétique [i] :

$$\overrightarrow{L}_{O/R} = \overrightarrow{L}_{C/R} + \overrightarrow{OC} \wedge \overrightarrow{p}_{S/R}$$

Le moment cinétique propre $\overrightarrow{L}_{C/R}$ est calculé comme dans le cas du point fixe, mais en remplaçant O par C :

$$\overrightarrow{L}_{C/R} = [I]_C\overrightarrow{\Omega}$$

i Info

où C est le centre de masse du solide, $\overrightarrow{L}_{C/R}$ est le moment cinétique par rapport au centre de masse (moment cinétique propre), et $\overrightarrow{p}_{S/R} = M\overrightarrow{v}_{C/R}$ est la quantité de mouvement totale du solide de masse M.

2.3.3 Exemple d'application

Considérons un système de deux solides, OA et AB, en mouvement.

- Solide OA : O est un point fixe. L'axe de rotation est l'axe z. On a $\overrightarrow{\Omega}_{OA} = \dot{\theta}_1\overrightarrow{e_z}$. Si l'axe z est un axe principal d'inertie (API) pour le solide OA, alors les produits d'inertie correspondants sont nuls. Le moment cinétique est donc :

$$\overrightarrow{L}_O(OA) = I_{Oz}\dot{\theta}_1\overrightarrow{e_z}$$

- Solide AB : Il n'a pas de point fixe. On utilise le théorème de Koenig. Le centre de masse est C_2. Le moment cinétique par rapport à O est :

$$\overrightarrow{L}_O(AB) = \overrightarrow{L}_{C_2}(AB) + \overrightarrow{OC_2} \wedge M_2\overrightarrow{v}_{C_2/R}$$

  Le moment cinétique propre $\overrightarrow{L}_{C_2}(AB)$ est calculé par rapport à C_2. Si C_2Z est un API pour le solide AB, alors :

$$\overrightarrow{L}_{C_2}(AB) = I_{C_2z}\dot{\theta}_2\overrightarrow{e_z}$$

Le moment cinétique total du système par rapport à O est la somme des moments cinétiques de chaque solide :

$$\vec{L}_O(OA + AB) = \vec{L}_O(OA) + \vec{L}_O(AB)$$