

## Chapitre

# Interférences d'ondes lumineuses - Méthode

## 2.1 Miroir de Loyd

### 2.1.1 Sources d'interférence

Dans le dispositif du miroir de Lloyd, deux ondes interfèrent :

- Une onde qui vient directement de la source réelle  $S$ .
- Une onde qui est réfléchie par le miroir et qui provient de l'image virtuelle  $S'$  de la source  $S$ .

Ces deux ondes sont cohérentes car elles proviennent de la même source. Les deux "sources" qui interfèrent sont donc la source réelle  $S$  et son image virtuelle  $S'$ .

### 2.1.2 Marche des rayons lumineux

L'interférence au point  $M$  de l'écran est due à la superposition de deux rayons :

- Un rayon direct issu de la source  $S$  qui se propage vers  $M$ .
- Un rayon issu de  $S$ , réfléchi par le miroir en un point  $I$ , puis se propageant vers  $M$ .

Le trajet optique du second rayon est équivalent au trajet direct de la source virtuelle  $S'$  vers  $M$ .

## 2.1.3 Champ d'interférence

Le champ d'interférence est la zone où les deux ondes (directe et réfléchie) se superposent. Cette zone est la région triangulaire délimitée par la source  $S$ , le miroir et l'écran.

## 2.1.4 Équivalence avec les trous de Young

Le dispositif du miroir de Lloyd est équivalent à celui des trous de Young car il met en jeu l'interférence de deux sources ponctuelles cohérentes : la source réelle  $S$  et son image virtuelle  $S'$ . La distance entre ces deux sources est de  $2a$ , où  $a$  est la distance entre la source réelle et le miroir. Le principe physique de superposition d'ondes est le même.

## 2.1.5 Différence de marche et de phase

En utilisant les mêmes approximations que pour l'exercice 2.1, la différence de marche  $\delta$  en un point  $M$  de l'écran (avec  $y$  sa coordonnée verticale) est :

$$\delta = S'M - SM \approx \frac{2ay}{D}$$

Cependant, la réflexion sur le miroir introduit un déphasage supplémentaire de  $\pi$  x (ou  $\lambda_0/2$ ). La différence de phase totale  $\phi(M)$  est donc :

$$\phi(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta + \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{2ay}{D} + \pi$$

L'ordre d'interférence  $p(M)$  est donné par :

$$p(M) = \frac{\phi(M)}{2\pi} = \frac{2ay}{\lambda_0 D} + \frac{1}{2}$$

### x Difficulté

Si dans l'énoncé, cette information est présentée à la fin et ne doit pas avoir d'influence dans ces questions, nous choisissons de l'utiliser pour décrire le phénomène au mieux.

## 2.1.6 Intensité et figure d'interférence

L'intensité en un point  $M(y)$  de l'écran est :

$$I(y) = 2I_0 (1 + \cos(\phi(y))) = 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{4\pi ay}{\lambda_0 D} + \pi\right)\right)$$

En utilisant la relation  $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ , on obtient i :

$$I(y) = 2I_0 \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi ay}{\lambda_0 D}\right)\right)$$

Cette expression montre que l'intensité est nulle pour  $y = 0$  (la frange centrale est sombre). L'interférogramme est constitué de franges rectilignes et parallèles, mais le motif est inversé par rapport aux trous de Young. L'interfrange  $i$  est ✓ :

$$i = \frac{\lambda_0 D}{2a}$$

### i Info

On trouverait le même résultat final quelque soit le déphasage, qui soit nul ou non.

### ✓ Exemple

Pour le trouver, on écrit que  $i = y_2 - y_1$  avec  $2k\pi = \frac{4\pi y_1 a}{\lambda_0 D}$  et  $2(k+1)\pi = \frac{4\pi y_2 a}{\lambda_0 D}$

## 2.1.7 Valeurs réalistes

Pour que l'interfrange  $i$  soit observable (par exemple,  $i = 1 \text{ mm}$ ), on peut choisir des valeurs typiques :

- Longueur d'onde  $\lambda_0 \approx 500 \text{ nm}$
- Distance source-miroir  $a \approx 0.5 \text{ mm}$
- Distance miroir-écran  $D \approx 2 \text{ m}$

Ces valeurs donnent un interfrange  $i = \frac{(500 \cdot 10^{-9})(2)}{2(0.5 \cdot 10^{-3})} = 10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$ .

## 2.1.8 Conséquence du déphasage par réflexion

Sans calcul, l'ajout d'un déphasage de  $\pi$  (ou  $\lambda_0/2$ ) par la réflexion sur le miroir a pour conséquence directe d'inverser la figure d'interférence. Les maxima d'intensité deviennent des minima et les minima deviennent des maxima. Ainsi, la frange centrale, qui est un maximum dans le cas des trous de Young, devient un minimum (une frange sombre) dans le cas du miroir de Lloyd.

## 2.2 Mesure de l'indice de l'air

### 1. Montrer que les deux sources ponctuelles sont déphasées.

L'interféromètre utilise une division d'amplitude, séparant une onde en deux faisceaux. Un faisceau se propage à travers l'enceinte de longueur  $l$  contenant de l'air, tandis que l'autre se propage à travers un milieu de référence (l'air ambiant dans l'autre bras). Le chemin optique dans l'enceinte est  $\delta = 2n_{air}l$ . Puisque  $n_{air} > 1$ , ce chemin optique est différent de celui parcouru dans le vide ou un autre milieu, créant ainsi un déphasage entre les deux faisceaux.

### 2. Exprimer l'intensité au point A en fonction de $\varphi_0$ .

L'intensité résultante de la superposition de deux ondes cohérentes est donnée par la formule d'interférence :

$$I = 2I_0(1 + \cos(\varphi_0))$$

où  $I_0$  est l'intensité d'une seule onde x.

#### x Difficulté

Les interférences ne sont pas dues qu'à la cuve et ne sont pas d'origine géométrique car le point est à égale distance des 2 sources

### 3. Comment varie qualitativement la phase par rapport à $\varphi_0$ ?

On vide la cuve pour faire le vide et on cherche à savoir comment va évoluer la phase.

Mathématiquement, on va définir la nouvelle phase quand le vide est fait :  $\varphi_B = \varphi_{S'_1} - \varphi_{S'_2}$ . Comme  $\varphi_{S'_1} = \varphi_{S_1} + \frac{2\pi}{\lambda_0}l(n_v - n_a)$ . On peut donc écrire  $\varphi_B = \varphi_{S_1} + \frac{2\pi}{\lambda_0}l(n_v - n_a) - \varphi_{S_2} = \varphi_0 + \frac{2\pi}{\lambda_0}l(n_v - n_a)$  qui est plus petit que  $\varphi_0$  car le second terme est négatif. On en déduit que la phase diminue.

C'est cohérent car comme  $n$  se rapproche du vide, le chemin optique diminue et la phase avec.

### 4. Dans quel sens le défilement des franges a-t-il lieu ?

Suivons la frange associée au point A initialement.  $\varphi_0 = \varphi + \frac{2\pi}{\lambda_0}\delta'(A)$  la nouvelle frange est située au point A'. Donc  $\delta(A') = (S_1A') - (S_2A')$  et  $(S_1A') > (S_2A')$ , donc A est dans le demi-plan inférieur, donc les franges défilent vers le bas.

### 5. Exprimer $\varphi_0 - \varphi_1$ en fonction de N, puis en fonction de l, $\lambda_0$ et $\Delta n$ .

On sait que  $\varphi_0 - \varphi_1 = -2\pi N = \frac{2\pi}{\lambda_0}l\Delta n \iff \Delta n = \frac{N\lambda_0}{l}$ .

### 6. En déduire $\Delta n$ puis $n_{air}$ .

D'après la question précédente, on peut isoler  $\Delta n$  :

$$\Delta n = \frac{N\lambda_0}{l}$$

Avec les valeurs données ( $N = 53.5$ ,  $\lambda_0 = 546.07 \text{ nm}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ ) :

$$\Delta n = \frac{53.5 \times (546.07 \times 10^{-9})}{0.10} \approx 1.46 \times 10^{-4}$$

L'indice de l'air est :

$$n_{air} = 1 + \Delta n = 1 + 1.46 \times 10^{-4} = 1.000146$$

### 7. Évaluer l'incertitude sur ce résultat.

La formule pour l'incertitude sur  $\Delta n$  est :

$$u(\Delta n) = \Delta n \sqrt{\left(\frac{u(N)}{N}\right)^2 + \left(\frac{u(l)}{l}\right)^2}$$

Avec  $u(N) = 0.25$ ,  $N = 53.5$ ,  $u(l) = 0.5$  mm =  $5 \times 10^{-4}$  m,  $l = 0.10$  m :

$$\begin{aligned} u(\Delta n) &= (1.46 \times 10^{-4}) \sqrt{\left(\frac{0.25}{53.5}\right)^2 + \left(\frac{5 \times 10^{-4}}{0.10}\right)^2} \\ &= (1.46 \times 10^{-4}) \sqrt{2.18 \times 10^{-5} + 2.5 \times 10^{-5}} \\ &\approx (1.46 \times 10^{-4}) \times (6.84 \times 10^{-3}) \approx 9.99 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

L'incertitude sur  $n_{air}$  est la même que sur  $\Delta n$ , soit  $u(n_{air}) \approx 1 \times 10^{-6}$ .

$$n_{air} = 1.000146 \pm 0.000001$$

## 2.3 Interférence dans une lame à face parallèle

### 2.3.1 Type de division

Ce dispositif fonctionne par **division d'amplitude**. L'onde incidente est divisée en plusieurs ondes réfléchies et transmises à chaque interface, créant ainsi les conditions pour les interférences.

### 2.3.2 Intensité

Les deux ondes qui interfèrent ont la même amplitude  $A$ . L'intensité d'une seule onde est donc  $I_0 = A^2$ . L'intensité résultante de la superposition des deux ondes est donnée par la formule générale :

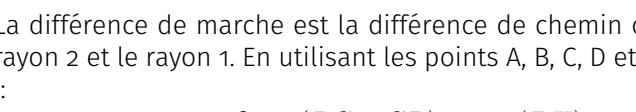
$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi)$$

Puisque  $I_1 = I_2 = I_0$ , on obtient :

$$I = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \cos(\varphi) = 2I_0(1 + \cos \varphi)$$

où  $\varphi$  est le déphasage entre les ondes.

### 2.3.3 Différence de marche $\delta$ entre les rayons

La différence de marche est la différence de chemin optique entre le rayon 2 et le rayon 1. En utilisant les points A, B, C, D et H de la figure  :

$$\delta = n(BC + CD) - n_{air}(BH)$$

#### 4. Montrer que $\delta = 2ne \cos r$ .

On utilise la relation de Snell-Descartes :

$$\sin(i) = n \sin(r)$$

**✖ Difficulté**

On peut arrêter le calcul à la droite DH car le déphasage des ondes ne change plus à partir de ce point. De plus, si on envoyait les rayons lumineux dans l'autre sens (principe du retour inverse de la lumière), ces derniers seraient en phase jusqu'à cette droite

Dans le triangle  $ABC$ , le chemin optique de l'onde 2 à l'intérieur de la lame est  $n(BC + CD) = 2n(BC)$  puisque  $BC = CD$  **i**.

Dans le triangle rectangle formé par les points B et la projection de A sur la seconde face, on a  $AB = e/\cos r$ . Donc, le chemin optique dans la lame est  $2ne/\cos r$ .

### **i** Info

Car on se trouve dans un triangle isocèle

De plus,  $BH = BD \sin(i) = nAC \sin(r)$ ,  $BD = 2e \tan(r)$

On en déduit que  $(BH) = 2ne \tan(r) \sin(r) = \frac{2ne \sin^2(r)}{\cos(r)}$

Donc

$$\delta = (BC) + (CD) - (BH) = 2ne\left(\frac{1}{\cos(r)} - \frac{\sin^2(r)}{\cos(r)}\right) = 2ne \cos(r)$$

On a est bien  $\delta = 2ne \cos r$ .

## 5. Nouvelle expression du déphasage.

Le déphasage  $\varphi$  est relié à la différence de marche  $\delta$  par la relation :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (2ne \cos(r))$$

## 6. Observation des interférences

Les interférences se produisent à l'infini. En effet, les deux rayons émergents sont parallèles. Pour les observer, on doit utiliser une lentille convergente qui va faire converger les rayons parallèles dans son plan focal image, où la figure d'interférence sera visible.

## 7. Interférogramme

La différence de marche  $\delta = 2ne \cos r$  dépend de l'angle de réfraction  $r$ . Via la loi de Snell-Descartes ( $n_0 \sin i = n \sin r$ ),  $r$  est fonction de l'angle d'incidence  $i$ . Tous les rayons qui arrivent sur la lame avec le même angle d'incidence  $i$  auront la même différence de marche, donc la même différence de phase et la même intensité. Dans le plan focal de la lentille, ces rayons convergent sur un cercle. Ainsi, la figure d'interférence est constituée d'anneaux concentriques. Le centre de la figure correspond à l'incidence normale, où  $i = 0$ , et par conséquent  $r = 0$ .

## 8. Ordre d'interférence

L'ordre d'interférence est défini par :

$$p = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2ne \cos(r)}{\lambda_0}$$

L'intensité est maximale lorsque  $p$  est un entier. Au centre de la figure,  $r = 0$ , donc  $\cos(r) = 1$ . La condition pour une intensité maximale est

que l'ordre d'interférence  $p_0$  soit un entier :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} = \text{entier}$$

## 9. Quel est l'ordre d'interférence du plus petit anneau suivant ?

Lorsque l'angle  $i$  (et donc  $r$ ) augmente, le terme  $\cos(r)$  diminue. Par conséquent, l'ordre d'interférence  $p$  diminue. Le plus petit anneau suivant le centre (qui correspond au maximum d'ordre  $p_0$ , et doit donc être entier) est l'anneau brillant correspondant à l'ordre d'interférence immédiatement inférieur, soit  $p_1 = p_0 - 1$

## 2.4 Superposition de 2 OPPM

On considère deux ondes planes monochromatiques de même pulsation  $\omega$  et de même amplitude  $A$ . Leurs fonctions d'ondes sont :

$$\psi_1(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \psi_2(\vec{r}, t) = A e^{-i(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})}$$

avec les vecteurs d'onde :

$$\vec{k}_1 = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = -\alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_z$$

On place un écran  $E$  perpendiculaire à l'axe  $Oz$  à une distance  $L$  de l'origine. Un point  $M$  de l'écran a pour coordonnées  $(x, y, L)$ .

1. Déterminer l'expression de l'onde résultante en un point  $M$  de coordonnées  $(x, y, L)$  de l'écran.
2. Montrer que l'intensité totale au point  $M$  s'écrit  $I(M) = 2I_0(1 + \cos \phi)$  et déterminer la phase  $\phi$  en fonction de  $x$  et de  $\alpha$ .
3. Quelle est alors la forme des franges d'interférences ? Déterminer l'interfrange.
4. Comment est modifié l'interférogramme si on ajoute un déphasage  $\theta$  à la deuxième onde mais sans changer la première ?

### Question 1 : Onde Résultante $\psi_R(\vec{r}, t)$

L'onde résultante est  $\psi_R(\vec{r}, t) = \psi_1(\vec{r}, t) + \psi_2(\vec{r}, t)$ . Pour le point  $M$  où  $\vec{r} = x \vec{e}_x + L \vec{e}_z$ , on calcule les produits scalaires :

$$\vec{k}_1 \cdot \vec{r} = (\alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + L \vec{e}_z) = \alpha x + \beta L$$

$$\vec{k}_2 \cdot \vec{r} = (-\alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_z) \cdot (x \vec{e}_x + L \vec{e}_z) = -\alpha x + \beta L$$

L'onde résultante s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi_R(\vec{r}, t) &= A e^{-i(\omega t - (\alpha x + \beta L))} + A e^{-i(\omega t - (-\alpha x + \beta L))} \\ &= A e^{-i\omega t} e^{i\beta L} [e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}] \\ &= 2A \cos(\alpha x) e^{-i(\omega t - \beta L)} \end{aligned}$$

On utilise la formule d'Euler  
 $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$

## Question 2 : Intensité $I(M)$ et Phase $\phi$

L'intensité est proportionnelle à  $I(M) \propto |\psi_R|^2 = \psi_R \psi_R^*$ . En posant  $I_0 = A^2$  (intensité d'une onde seule), on a :

$$\begin{aligned} I(M) &= \left(2A \cos(\alpha x) e^{-i(\omega t - \beta L)}\right) \left(2A \cos(\alpha x) e^{+i(\omega t - \beta L)}\right) \\ &= 4A^2 \cos^2(\alpha x) \\ &= 4I_0 \cos^2(\alpha x) \\ &= 4I_0 \left(\frac{1 + \cos(2\alpha x)}{2}\right) \\ &= 2I_0(1 + \cos(2\alpha x)) \end{aligned}$$

On utilise la relation trigonométrique  $\cos^2(\theta) = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$  avec  $\theta = \alpha x$

Par identification avec  $I(M) = 2I_0(1 + \cos \phi)$ , la phase  $\phi$  est :

$$\phi = 2\alpha x$$

## Question 3 : Forme des Franges et Interfrange

### Forme des Franges

Les maxima d'intensité (franges brillantes) sont obtenus lorsque  $\cos \phi = 1$ , soit  $\phi = 2p\pi$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ .

$$2\alpha x = 2p\pi \implies x = \frac{p\pi}{\alpha}$$

Puisque la position  $x$  ne dépend que de  $p$  et non de  $y$ , les franges sont des lignes droites (bandes) parallèles à l'axe  $Oy$ .

### Interfrange $i$

L'interfrange  $i$  est la distance entre deux franges brillantes consécutives (d'ordres  $p+1$  et  $p$ ) :

$$\begin{aligned} i &= x_{p+1} - x_p = \frac{(p+1)\pi}{\alpha} - \frac{p\pi}{\alpha} \\ i &= \frac{\pi}{\alpha} \end{aligned}$$

## Question 4 : Modification avec Déphasage $\theta$

Si l'on ajoute un déphasage  $\theta$  à la deuxième onde, la nouvelle différence de phase  $\phi'$  devient :

$$\phi' = \phi_{initial} + \theta = 2\alpha x + \theta$$

La nouvelle intensité  $I'(M)$  est :

$$I'(M) = 2I_0(1 + \cos \phi') = 2I_0(1 + \cos(2\alpha x + \theta))$$

La position des nouvelles franges brillantes  $x'$  est donnée par  $\phi' = 2p\pi$ :

$$2\alpha x' + \theta = 2p\pi \implies x' = \frac{2p\pi - \theta}{2\alpha} = \frac{p\pi}{\alpha} - \frac{\theta}{2\alpha}$$

Le nouvel interfrange  $i'$  est :

$$i' = x'_{p+1} - x'_p = \left( \frac{(p+1)\pi}{\alpha} - \frac{\theta}{2\alpha} \right) - \left( \frac{p\pi}{\alpha} - \frac{\theta}{2\alpha} \right) = \frac{\pi}{\alpha}$$

L'interférogramme est modifié par une **translation** dans la direction *Ox* d'une quantité  $\Delta x = -\frac{\theta}{2\alpha}$ . L'interfrange et la forme des franges restent inchangées.