Chapitre

2

Démonstrations

Théorème 0.1 : Théorème de comparaison

Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $k_0 \geq 0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, $u_k \leq v_k$.

- Si $\sum v_k$ converge alors $\sum u_k$ converge.
- Si $\sum u_k$ diverge alors $\sum v_k$ diverge.

Preuve 0.1

La convergence ne dépendant pas des premiers termes, on peut donc supposer $k_0 = 0$.

- Notons $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $S'_n = v_0 + \cdots + v_n$. Les suites (S_n) et (S'_n) sont croissantes, et de plus, pour tout $n \geq 0$, $S_n \leq S'_n$.
- Si la série $\sum v_k$ converge, alors la suite (S'_n) converge. Soit S' sa limite.
- La suite (S_n) est croissante et majorée par S', donc elle converge, et ainsi la série $\sum u_k$ converge aussi.
- Inversement, si la série $\sum u_k$ diverge, alors la suite (S_n) tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la suite (S'_n) et ainsi la série $\sum v_k$ diverge.

Théorème 0.2 : Théorème des équivalents

Soient (u_k) et (v_k) deux suites à termes strictement positifs. Si $u_k \sim v_k$ alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Preuve 0.2

Comme les 2 suites sont équivalents, la limite de leur quotient vaut 1. Donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geq k_0$,

$$\left|\frac{u_k}{v_k} - 1\right| < \epsilon,$$

ou autrement dit

$$(1-\epsilon)v_k < u_k < (1+\epsilon)v_k.$$

Fixons un $\epsilon < 1$.

Si $\sum u_k$ converge, alors par le théorème de comparaison, $\sum(1-\epsilon)v_k$ converge, donc $\sum v_k$ également.

Réciproquement, si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum(1+\epsilon)v_k$ diverge, et $\sum v_k$ aussi.

Théorème 0.3

Toute série absolument convergente est convergente.

Preuve 0.3

Utilisons le critère de Cauchy. Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente.

La série $\sum |u_k|$ est convergente, donc la suite des sommes partielles (S'_n) avec $S'_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|$ est une suite convergente, donc de Cauchy.

Soit $\epsilon > 0$ fixé. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $p \geq 0$:

$$S'_{n+p} - S'_n = |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \epsilon.$$

Par suite, pour $n \geq n_0$ et $p \geq 0$ on a par l'inégalité triangulaire :

$$\left|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\right| \leq |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \epsilon.$$

Donc, d'après le critère de Cauchy, $\sum u_k$ est convergente.

Théorème 0.4 : Règle du quotient de d'Alembert

Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$ converge vers l

1. Si $l < 1$, la série converge.
2. Si $l > 1$, la série diverge.
3. Si $l = 1$, on ne peut conclure.

Preuve 0.4

Rappelons tout d'abord que la série géométrique $\sum q^k$ converge si $|q| < 1$, diverge sinon.

- Dans le premier cas du théorème, soit un réel q tel que $l < q < 1$. On a $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leq q$ à partir d'un certain rang N, et donc $u_{k+1} \leq u_k q$. Par récurrence, on obtient que

  $$u_k \leq u_{k-(k-N)} q^{k-N} = u_N q^{-N} q^k = cq^k$$

  , avec c constant.
  Comme $0 < q < 1$, alors la série $\sum q^k$ converge, et, par le théorème de comparaison : la série $\sum u_k$ converge.
- Si $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| > 1$, la suite $(|u_k|)$ est croissante : elle ne peut donc pas tendre vers 0 et la série diverge.

Théorème 0.5 : Règle des racines de Cauchy

Soit une série à termes strictement positifs. Si il existe, on note $l = \lim \sqrt[n]{u_n}$.

- Si $l < 1$, la série converge
- Si $l > 1$, la série diverge.

Preuve 0.5

Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. On peut ainsi trouver trouver un certaing rang N à partir duquel les assertions suivantes sont vérifiées.

Dans le premier cas, soit un réel q tel que $l < q < 1$. On a $\sqrt[k]{|u_k|} \leq q$ implique $|u_k| \leq q^k$. Comme $0 < q < 1$, alors $\sum q^k$ converge, donc la série aussi par le théorème de comparaison.

Dans le second cas, $\sqrt[k]{|u_k|} > 1$, donc $|u_k| > 1$. Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Théorème 0.6 : Critère de Leibniz

Supposons que $(u_k)_{k\geq 0}$ soit une suite qui vérifie :

1. $u_k \geq 0$ pour tout $k \geq 0$,
2. la suite (u_k) est une suite décroissante,
3. et $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$.

Alors la série alternée $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ converge.

De plus, Soit S la somme de cette série et soit (S_n) la suite des sommes partielles.

1. La somme S vérifie les encadrements :

$$S_1 \leq S_5 \leq \cdots \leq S_{2n+1} \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_{2n} \leq \cdots \leq S_4 \leq S_0.$$

2. En plus, si $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ est le reste d'ordre n, alors on a

$$|R_n| \leq u_{n+1}.$$

Preuve 0.6

Nous allons nous ramener à deux suites adjacentes.

- La suite (S_{2n+1}) est croissante car $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0$.
- La suite (S_{2n}) est décroissante car $S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n-1} \leq 0$.
- Enfin $S_{2n+1} - S_{2n}$ tend vers 0 car $S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1} \to 0$ (lorsque $n \to +\infty$).

En conséquence (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent vers la même limite

S. Donc (S_n) converge vers S.

De plus, comme les suites S_{2n+1} et S_{2n} sont adjacentes, $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n.

Enfin on a aussi

$$0 \geq R_{2n} = S - S_{2n} \geq S_{2n+1} - S_{2n} = -u_{2n+1}$$

pour n pair et, pour n impair

$$0 \leq R_{2n+1} = S - S_{2n+1} \leq S_{2n+2} - S_{2n+1} = u_{2n+2}.$$

Ainsi, quelle que soit la parité de n, on a $|R_n| = |S - S_n| \leq u_{n+1}$.