Chapitre

6

Matrices

6.1 Définition

Définition 1.1

On appelle matrice un tableau rectangulaire de nombres réels. Elle est dite de taille $p \times q$ qi le tableau a p lignes et q colonnes. Les nombres du tableau sont appellés coefficients de la matrice.

Soit A une matrice. Le coefficient situé en ligne i et colonne j de A est noté A_{ij}.

On note $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels

Exemple : $I_n = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ $a_{32} = 0, a_{14} = 6, a_{22} = 1$

Définition 1.2 : Matrice ligne/colonne/nulle

A est dite matrice ligne si $p = 1$. On parle aussi de vecteur ligne.

A est dite matrice colonne si $q = 1$. On parle aussi de vecteur colonnes

A est dite nulle si tous ses coeffients sont nuls

A et B sont égales si elles ont la meme taille et les memes coefficients

6.2 Structure d'espaces vectoriels

Définition 2.1 : Addition / Multiplication par un scalaire

On additionne que des matrices de même taille.

Proposition 2.1

Munie de ces opérations, est un R-espace vectoriel de dimension finie $p \times q$

Définition 2.2

Soit A une matrice. On appelle transposée de A, notée A^T, A^t, t_A, T_A la matrice de q lignes et p colonnes. On a $A^T_{ij} = A_{ji}$.

Proposition 2.2

L'application de transposition est une application linéaire.

$(A^T)^T = A$

Preuve 2.1

Soit A et B 2 matrices.

$\lambda(A + B)^T_{ij} = (\lambda A + B)_{ji} = \lambda A_{ji} + B_{ji} = \lambda(A^T)_{ij} + (B^T)_{ij}$

Définition 2.3 : Matrices symétriques /anti-symétriques

Si A est une matrice carrée :

- A est symétrique si $A^T = A$. On note S l'ensemble des matrices symétriques
- A est anti-symétrique si $A^T = -A$ On note AS cet ensemble

Proposition 2.3

S et AS sont des SEV de $\mathcal{M}_C(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_C \ = S \oplus AS$

Preuve 2.2

On note $s : A \to A^T$ une application. Alors s est linéaire. En effet, $(A_1 + \lambda A_2)_{ij} = (A_1 + \lambda A_2)_{ji} = (A_1)_{ji} + \lambda(A_2)_{ji} = (A^T)_{ij} + \lambda(A_2^T)_{ij} = s(A_1) + \lambda s(A_2) =$

De plus, s est une symétrie, donc $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = Ker(s+Id) \oplus Ker(s-Id)$. Or, $Ker(s - Id) = S$. De même, $Ker(s - Id) = AS$.

Décomposition

On a

$$A = 0.5(A + A^T) + 0.5(A - A^T)$$

Définition 2.4 : Matrices triangulaires supérieures/inférieures ou diagonales

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On dit qu'elle est triangulaire supérieure si $A_{ij} = 0, \forall i > j$ (que des 0 sous la diagonale), triangulaire inférieure si $A_{ij} = 0, \forall i < j$, diagonale si $A_{ij} = 0, \forall i \neq j$

Proposition 2.4

L'ensemble des matrices triangulaires et diagonales sont des sev de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

Définition 2.5 : Trace

Soit une matrice carrée. La trace est la somme des éléments diagonaux. Cette application est une forme linéaire

Preuve 2.3

$tr(\lambda A+B) = \sum_{k=1}^{p}(\lambda A+B)_{ll} = \lambda \sum A_{ll} + \sum b_{ll} = \lambda tr(A) + tr(B)$.
De plus, elle est à valeurs réelles, donc c'est une forme.

6.3 Produit matriciel

6.3.1 Définition

Définition 3.1 : Produit de 2 matrices

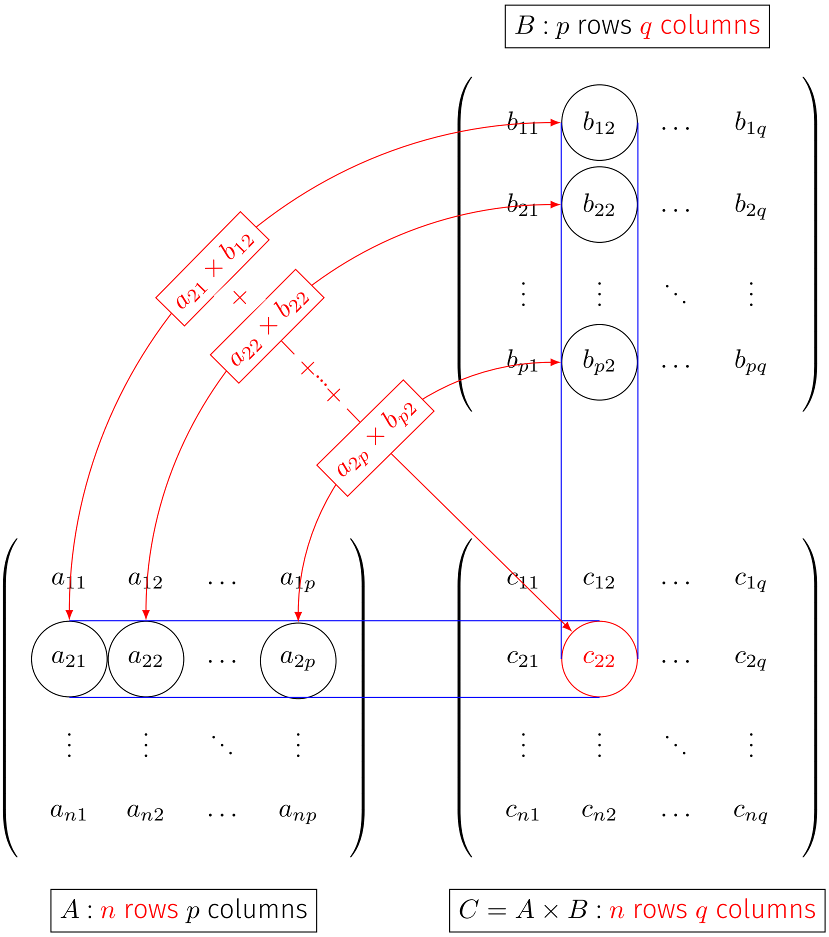
Prenons 2 matrices de tailles quelconques. On appelle produit des matrices A_{pq} et B_{qr} la matrice C définie par

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}B_{kj}$$

Le nombre de colonnes de la première doit valoir le nombre de ligne de la seconde. Le résultat sera une matrice avec le même nombre de ligne que la première et le même nombre de colonnes de la deuxième.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & c & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut faire $A \times B$



Proposition 3.1

Soit A_{np}, B_{pq}, C_{qr}.

Alors $(AB)C = A(BC)$. L'ordre n'a pas d'importance.

De plus, $A(B + C) = AB + AC$.

Enfin, $OA = O = AO$

Preuve 3.1

$(AB)C \in \mathcal{M}_{nr}, A(BC) \in \mathcal{M}_{nr}$

On a $(AB)C = \sum_{k=1}^{q}(AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p} A_{il}B_{lk}C_{kj} = \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} A_{il}B_{lk}C_{kj} = \sum_{l=1}^{p} A_{il}\sum_{k=1}^{q} B_{lk}C_{kj} = (A(BC))_{ij}$

III/2 : $\sum_{k=1}^{q} = \sum_{k=1}^{q} A_{ik}0 = 0$

Proposition 3.2 : Commutativité / intégrité

Il n'est ni commutatif ni intègre : On a pas AB = BA même quand les 2 produits sont définis.

Si AB = 0, cela n'implique pas A est nul ou B est nul.

AB = AC n'implique pas que B = C.

Avec,

Preuve 3.2

$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $AB = BA$

Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, AB = 0.

Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

Définition 3.2 : Matrice identité

On appelle matrice identité, notée I_p la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Preuve 3.3

$(I_P A)_{ij} = \sum_{m=1}^{p} (I_p)_{im} A_{mj} = (I_p)_{ii} A_{ij} = 1 A_{ij} = A_{ij}$

Proposition 3.3 : transposition / trace

$(AB)^T = B^T A^T$

$A_{pq}, B_{qp}, tr(AB) = tr(BA)$

Preuve 3.4

$tr(AB) = \sum_{m=1^p}(AB)_{mm} = \sum_{m=1}^{p}(\sum_{k=1}^{q} A_{mk}B_{km}) = \sum_{m=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} A_{ml}B_{km} = \sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{p} A_{mk}B_{km} = \sum_{k=1}^{q}(BA)_{kk} = tr(BA)$

6.3.2 Produit de matrices carrée

Proposition 3.4

Le produit matriciel est une opération interne de $\mathcal{M}_P(\mathbb{R})$. En effet, on obtient une matrice avec le même nombre de ligne et de colonnes.

Définition 3.3 : Puissance d'une matrice

On appelle puissance 'k-ieme' notée A^k définie par $A^k = Id$ si $k = 0$, AA^{k-1} sinon.

Preuve 3.5

On démontre facilement que $A^m = AAAAAAAAAAA$ si $m \geq 1$ et $\forall m \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \ldots, m\}, A^m = A^{m-k}A^k$

Définition 3.4 : Polynômes de matrice

On prend une matrice carrée et un polynôme. Le polynome de la matrice est toujours une matrice carrée.

Définition 3.5 : Matrice nilpotente

Une matrice carrée est site nilpotente si $\exists k \in \mathbb{N},$ tel que $A^k = 0$

Définition 3.6 : Matrices commutantes

Pour ces matrices là, on peut appliquer la formule du binome de Newton.

Soit 2 matrices carrées. On dit que A et B commutent si $AB = BA$. On a alors $\forall m \in \mathbb{N}, (A+B)^m = \sum_{k=1}^{m} C_M^k A^k B^{m-k}$.

6.3.3 Lien entre produit matriciel et systèmes linéaires

Soit S_A le système linéaire de p équations à q inconnues. Il est de la forme $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_4 + \cdots + a_{1q}x_q = y_1, \dots a_{p1}x_1 + \cdots + a_{pq}x_q = y_p$.

On pose $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_q \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{bmatrix}$

Il faut trouver X tel que $AX = Y$

Définition 3.7

Pour A, on pose $f : X \in \mathcal{M}_Q(\mathbb{R}) \to AX\mathcal{M}(\mathbb{R})$

Proposition 3.5

- Le système S_A admet au moins une solution $\iff$ f_a est surjective (rien à démontrer)
- Le système admet au plus une solution si la fonction est injective.
- Le système admet exactement une soltion si la fonction est bijective.

Proposition 3.6

f_A est linéaire, en conséquence :

- si $q > p$ (plus d'inconnues que d'équation), f n'est pas injective et si le système admet une solution, il en admet une infinité.

- Si $q < p$,(plus d'équations qu d'inconnues) f n'est pas surjective et il existe des y tels que le système n' a pas de solution.

Preuve 3.6

$f_A(\lambda X_1 + X_2) = A(\lambda X_1) + AX_2 \;= \lambda AX_1 + AX_2) = \lambda f_A(X_1) + f_A(X_2)$

- Si $q = \dim(Mq) > p = \dim(Mp)$, f ne peut etre injective, donc le noyau comporte un élément non nul et $\exists X \neq 0, f_A(X) = 0$, donc $A(X_1 + \lambda X) = AX_1 = Y$
- Meme idée avec la dimension

6.3.4 Matrice inversible

Définition 3.8

Soit A carrée. dit que A est inversible si $\exists B$ de meme taille telle que $AB = BA = I_d$

Proposition 3.7

Si A est inversible, alors B est unique, notée A^{-1}.

Preuve 3.7

Soit B1 et B2 qui vérifient la propriété.

$B_1 = B_1 I_d = B_1 AB_2 = IdB_2 = B_2$

On appelle le groupe linéaire, noté $GL_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille p. Ce n'est pas un sev.

Inverse

Pour montrer qu'une matrice est l'inverse d'une autre, on multiplie les 2 pour trouver l'identité

Proposition 3.8

Soit A carrée. Les 4 propositions suivantes sont équivalentes

- $A \in GL_p(\mathbb{R})$
- $f_A : X \in \mathcal{M}_p \to AX \in \mathcal{M}_{p,1}$ est bijective
- $\exists B \in M_p, AB = I_d$
- $\exists B, BA = Id$

Preuve 3.8

Preuve circulaire

- Notons que f_A est une application linéaire dans le meme espace de meme taille. f_A est bijective ssi f_A est injective. Soit $x \in Ker(f)$, alors $f_A(X) = AX = 0$. Alors $0 = A^{-1}0 = I_pX = X$, donc le noyau ne contient que le vecteur nul et f_A est injective, donc bijective.
- Notons c_i la matrice colonne remplie de 0 sauf à la i-eme ligne qui contient 1.$\exists x_i$ tq $f_A(X_i) = AX_i = C_i$ car f_A est surjective. Soit B définie par $[X_1, X_2, X_p]$ Alors $AB = A[X_1, \ldots X_p] = [AX_1, \ldots, AX_p] = [c_1, c_2 \ldots, c_p] = I_d$
- Si $AB = I_d$, f_B est inective. En effet, si $X \in Ker(F_b), 0 = BX = 0 = A0 = ABX = I_pX = X$, donc f=$f_B$ est injective, donc bijective. Comme 2->3, $\exists C$ tel que $BC = I_p$ Mais $C = I_dC = ABC = AI_d = A$
- Si $\exists B$ tel que $BA = I_d$, f_A est injective, donc $\exists C$ tel que $AC = I_d$, alors $B = BI_d = BAC = I_pC = C$, donc $BA = AB = I_d$,donc c'est bien inversible.

A^{-1} est aussi inversible.

Proposition 3.9

Soit A une matrice inversible.

Alors A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Preuve 3.9

$I_p = I_p^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T$

Proposition 3.10

Soient A et B 2 matrices inversibles, alors AB est aussi inversible et l'inverse $B^{-1}A^{-1}$, c'est dans l'autre sens.

Preuve 3.10

$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = AI_dA^{-1} = I_d$

Proposition 3.11

Soit A inversible et B et C carrées

$AB = AC = B = C \Rightarrow B = C$

Preuve 3.11

$B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = C$

Proposition 3.12

Si A a une colonne/ligne remplie de 0, elle n'est pas inversible

Preuve 3.12

$A = [C_1, \dots, C_p] = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_p \end{bmatrix}$

Supposons que la ligne L_i est remplie de 0, alors $\forall X$, AX contient un 0 en position i, donc f_A n'est pas surjective.

Supposons que la colonne c_i est remplie de 0. Soit X la matrice colonne avec que des 0 sauf en i elle contient 1.

Alors $f_A(X) = 0$, donc f_A n'est pas injective.

Proposition 3.13

Soit A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et B = $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Alors A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$ et alors $\frac{1}{ad-bc}B$

Théorème 3.1

A est inversible ssi $C_1, C_2 \dots C_p$ est une base de M_{p1} ou ssi $L_1, L_2 \dots L_p$ est une base de $M_{1,p}$

Preuve 3.13

A est inversible ssi f_A est bijective ssi l'image d'une base de $M_{p,1}$ par fa est une base de $M_{p,1}$. Prenons les matrices colonnes E_1, E_n avec des 0 sauf en i ou elles contiennent 1. Alors $A_1, \dots, E_p$ est une base de $M_{p,1}$ et $f_A(E_i)AE_i = C_i$. De plus, sa transposée est aussi inversible d'où la deuxième assertions

Si une colonne s'écrit en focntion des autres, cela ne peut pas etre inversible.

6.3.5 Algorithme pour calculer un inverse