

Chapitre

Interférences d'ondes lumineuses

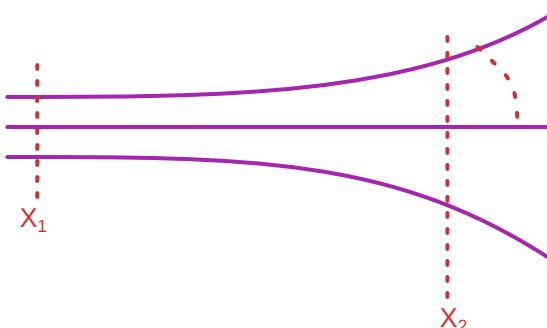
3.1 Introduction



Théorème 1.1 : Diffraction

La diffraction d'une onde correspond à son étalement au cours de la propagation. C'est équivalent à un écart à la propagation rectiligne de la lumière.

Un faisceau laser collimaté de diamètre 1mm aura un diamètre de l'ordre du cm . On obtient à une certaine distance un faisceau conique au lieu d'un faisceau cylindrique.



Difficulté

Le phénomène se manifeste pour une onde dont la largeur est suffisamment petite

Info

Imaginez des vagues de mer passant par une petite ouverture dans une digue. Au lieu de continuer en ligne droite, les vagues s'étalement en demi-cercle derrière l'ouverture. La lumière agit de la même manière.

3.2 Principe de Huygens-Fresnel

3.2.1 Principe



Hypothèse

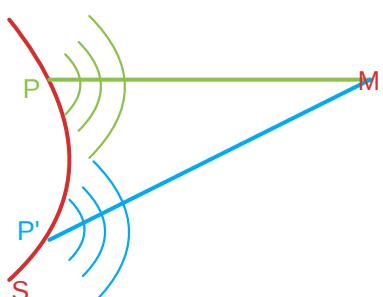
L'onde est monochromatique de pulsation ω avec $k = n\frac{\omega}{c}$ et $PM \gg \lambda_0$

π Théorème 2.1 : Principe de Huygens

$$\underline{\psi}(M) = \iint_{(P \in S)} k \underline{\psi}(P) \frac{e^{ikPM}}{PM} dS$$

avec K le facteur d'inclinaison

Cela signifie que si l'on connaît son profil sur une surface fermée, je peux calculer son expression partout. ☺



Astuce

Chaque point P de la surface S sur lequel l'onde incidente $\psi(P)$ est connue devient une source secondaire qui émet une ondelette sphérique. L'onde totale $\psi(M)$ au point M est la superposition (ou interférence) de toutes ces ondelettes secondaires.

✓ Simplification

On utilisera souvent une surface S plane comme un plan principal de l'espace pour obtenir une intégrale sur dx, dy

3.2.2 Diffraction pour un trou circulaire illuminé par une OPPM

De l'autre côté du plan, pour un point M , on a

$$\underline{\psi}(M) = K \iint dx dy \underline{\psi}(P) \frac{e^{ikPM}}{PM}$$

L'intégrale se simplifie car la fonction d'onde en P est nulle en dehors du trou.

3.3 Diffraction de Fraunhofer

On va essayer de faire des hypothèses pour calculer l'intégrale précédente

3.3.1 Condition de calcul



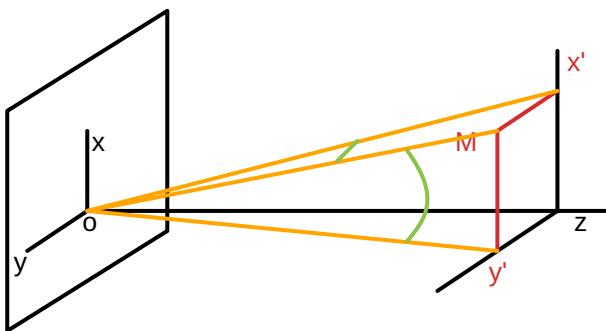
Conditions de Fraunhofer

Elles sont valides lorsque :

1. Le point d'observation M est très éloigné de l'ouverture (ou que l'on se place dans le plan focal image d'une lentille, ce qui est équivalent).
2. L'onde incidente est une onde plane.

Ces conditions permettent de considérer que les rayons lumineux atteignant M sont pratiquement parallèles (d'où l'appellation diffraction "à l'infini").

Mise en situation



- La surface S est un plan quelconque appelé plan diffractif
- M est proche des axes x', y'
- M est loin du plan diffractant

Définition des angles

On définit θ_x, θ_y tels que $\sin(\theta_x) = \frac{x'}{OM}, \sin(\theta_y) = \frac{y'}{OM}$. Par les hypothèses précédentes, les angles sont très petits devant 1 et $\sin(\theta_{x,y}) \simeq \theta_{x,y}$.

Nouvelle expression de PM

$$\begin{aligned}
 PM &= \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - 0)^2} \\
 PM^2 &= \|\overrightarrow{PM}\|^2 \\
 &= (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP}) \\
 &= OM^2 + OP^2 - 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} \text{ Avec } OM \gg OP \\
 &= OM^2 \left(1 - \frac{2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}}{OM^2} + \frac{OP^2}{OM^2}\right) \text{ Mais } \frac{OP}{OM} \gg \left(\frac{OP}{OM}\right)^2 \\
 PM &= OM \sqrt{1 - \frac{2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}}{OM^2}} \\
 &\simeq OM \left(1 - \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP}}{OM^2}\right) \text{ Avec le DL de la racine carrée} \\
 &\simeq OM - \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} \cdot \overrightarrow{OP} \\
 &\simeq OM - (x'x + y'y)/OM \\
 &\simeq OM - \frac{x'x}{OM} - \frac{y'y}{OM} \\
 &\simeq OM - (x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))
 \end{aligned}$$

Dans l'intégrale de diffraction, on a $\frac{e^{ikPM}}{PM}$.



Développement de PM

L'approximation $PM \simeq OM - (x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))$ est cruciale. Elle signifie que :

- Le terme OM dans l'amplitude $\frac{1}{PM} \simeq \frac{1}{OM}$ est simplement une constante d'atténuation.
- Le terme $x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y)$ dans la phase $e^{ikPM} \simeq e^{ik(OM - \dots)}$ est le seul qui varie en fonction de x et y , et c'est lui qui génère les **interférences** (le motif de diffraction).

Donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{e^{ikPM}}{PM} &\simeq \frac{e^{ik(OM - (x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y)))}}{OM} \\
 &\simeq \frac{e^{ikOM}}{OM} e^{-ik(x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))} \\
 \underline{\psi(M)} &\simeq K \frac{e^{ikOM}}{OM} \iint dS \underline{\psi(P)} e^{-ik(x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))}
 \end{aligned}$$



Théorème 3.1 : Intégrale de Fraunhofer

$$\underline{\psi(M)} \simeq K \frac{e^{ikOM}}{OM} \iint dS \underline{\psi(P)} e^{-ik(x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))}$$

3.3.2 Fréquence spatiale

On a simplifié l'intégrale en faisant apparaître un terme de phase linéaire en $e^{-ik(x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y))}$ associé à la fonction d'onde incidente en $\underline{\psi(P)}$. Avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on peut écrire $k \sin(\theta_x) = 2\pi \frac{\sin(\theta_x)}{\lambda} = 2\pi u$ et de même pour v. On obtient :



Définition 3.1 : Fréquence spatiale au point M

$$u = \frac{\sin(\theta_x)}{\lambda_0} \text{ et } v = \frac{\sin(\theta_y)}{\lambda_0}$$

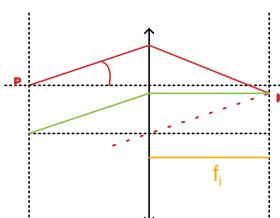
On peut alors écrire la fonction comme

$$\underline{\psi(M)} \simeq K \frac{e^{ikOM}}{OM} \iint dS \underline{\psi(P)} e^{-2i\pi(ux+vy)}$$

qui est périodique de période u^{-1} . ? On obtient donc une expression ne dépendant que des angles et des fréquences spatiales. On peut le représenter en imaginant une onde diffractée subissant une homothétie au cours de la propagation. Le motif de diffraction ne dépend que des angles introduits, donc des fréquences spatiales. On parle de direction d'observation du plan diffractant vu depuis le point M.

3.3.3 Diffraction de Fraunhofer à l'infini

Les approximations deviennent rigoureusement exactes quand on est à l'infini x. On se place donc dans le plan focal image d'une lentille, ce qui nous permet d'obtenir la même chose qu'à l'infini sans la lentille.



On a une correspondance totale entre $M(x_i, y_i)$ et les points dans le plan focal image et on associe θ_x, θ_y à un point dans le pfi. On obtient alors

$$\sin(\theta_x) \simeq \theta_x \simeq \frac{x_i}{f}$$

Astuce

L'intégrale de Fraunhofer est la Transformée de Fourier (TF) de la fonction d'onde complexe $\underline{\psi(P)}$ sur le plan diffractant S, évaluée aux fréquences spatiales u et v. En optique, l'intensité $I \propto |\psi(M)|^2$ est donc proportionnelle au carré du module de la TF de l'ouverture.

Difficulté

En fait, les conditions de Fraunhofer correspondent aux conditions de Gauss dans la lentille

On en déduit que

$$u = \frac{x_i}{\lambda f_i}, v = \frac{y_i}{\lambda f_i}$$

Interprétation de l'intégrale de diffraction

C'est la somme des ondes secondaires émises depuis le point P. Il y a des interférences avec une phase supplémentaire que l'on peut interpréter géométriquement. La différence de marche dépend uniquement de OH :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin(\theta_x) = 2\pi u x$$

i Info

Cela signifie que le terme $e^{-2i\pi ux}$ montre simplement que l'onde émise en P est en avance de phase par rapport à celle émise en O

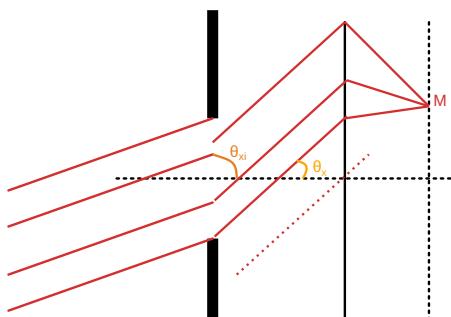


Lien

Cette partie fait le lien entre la diffraction et les interférences à l'infini.

3.4 Diffraction d'une onde plane par une fente

3.4.1 Dispositif



Onde incidente

On prend $\theta_{x,i} \times$ qui est unique et $\theta_x \times$, le vecteur d'onde de l'onde incidente α, β, γ est quelconque et l'onde plane s'écrit $\psi_0 e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

On peut déterminer les composantes de \vec{k} en fonction des angles : $\alpha = \vec{k} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{k}\| \sin(\theta_{x,i}) = 2\pi \frac{\sin(\theta_{x,i})}{\lambda_0} = 2\pi u_0$. De la même façon, on a $\beta = 2\pi v_0 \text{ ?}$

x Difficulté

$\theta_{x,i}$ est l'angle que fait le vecteur d'onde de l'onde incidente (avant la fente) avec l'axe normal au plan de la fente. Il est directement lié à la direction de propagation de la lumière qui arrive sur la fente.

x Difficulté

θ_x est l'angle que fait le rayon diffracté (après la fente) observé au point M avec l'axe normal.

💡 Astuce

u_0 est une constante alors que u dépend de x et on doit considérer toutes ses valeurs possibles.

Étude de la fente

On considère une fente rectangulaire dans le plan Oxy centrée en O, de largeur a selon x et b selon y. L'onde reste inchangée à l'intérieur de la fente et bloquée à l'extérieur.

3.4.2 Calcul de l'onde diffractée (À savoir)

$$\begin{aligned}
 \underline{\psi(u,v)} &= K \iint dx dy \underline{\psi(P)} e^{-2i\pi(ux+vy)} \\
 &= K \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \psi_0 e^{-i\omega t} e^{2i\pi(u_0x+v_0y)} \times e^{-2i\pi(ux+vy)} \\
 &= K \psi_0 e^{-i\omega t} \int_{-a/2}^{a/2} dx e^{-2i\pi(u-u_0)x} \int_{-b/2}^{b/2} dy e^{-2i\pi(v-v_0)y} \\
 &= K \psi_0 e^{-i\omega t} \left[\frac{e^{-2i\pi(u-u_0)x}}{-2i\pi(u-u_0)} \right]_{-a/2}^{a/2} \times \left[\frac{e^{-2i\pi(v-v_0)y}}{-2i\pi(v-v_0)} \right]_{-b/2}^{b/2} \\
 &= K \psi_0 e^{-i\omega t} \times \frac{-1}{2i\pi(u-u_0)} (e^{-i\pi(u-u_0)a} - e^{+i\pi(u-u_0)a}) \times \frac{-1}{2i\pi(v-v_0)} (e^{-i\pi(v-v_0)b} - e^{+i\pi(v-v_0)b}) \\
 &= K \psi_0 e^{-i\omega t} \times \frac{1}{\pi(u-u_0)} \sin(\pi(u-u_0)a) \times \frac{1}{\pi(v-v_0)} \sin(\pi(v-v_0)b) \\
 &= K \psi_0 e^{-i\omega t} \times \text{sinc}((u-u_0)a) \text{sinc}((v-v_0)b) \\
 &= K' ab \times \text{sinc}((u-u_0)a) \text{sinc}((v-v_0)b)
 \end{aligned}$$

On utilise $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

On utilise la fonction sinus cardinal. Les a et b apparaissent car dans l'expression, on divise par tout l'argument du sinus, mais a et b n'apparaissent déjà au dénominateur. Il faut donc artificiellement les introduire pour utiliser la fonction

3.4.3 La fonction sinus cardinal

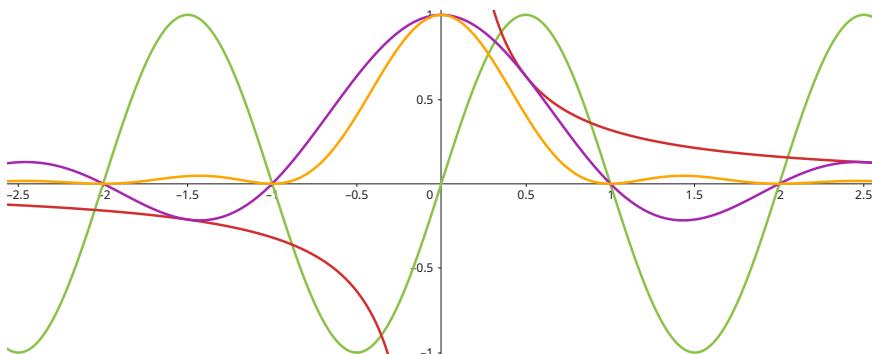


Définition 4.1 : Fonction Sinus Cardinal

En physique et traitement du signal, on utilise souvent la définition :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

Avec cette définition, $\text{sinc}(0) = 1$ (par prolongement par continuité) et $\text{sinc}(x) = 0$ lorsque x est un entier non nul ($x = \pm 1, \pm 2, \dots$).



La courbe du sinus cardinal (en violet) présente un pic autour de l'origine suivi d'oscillations d'amplitude décroissantes. Elle s'annule quand $s \neq 0$ et entier avec des extrema proche de s demi-entier. L'effet de la multiplication par a ou b dilate ou comprime l'axe des abscisses d'un facteur a ou b .

Le décalage par u_0 translate la courbe de ce facteur, et la fonction est centrée en u_0

Astuce

(pour $a>1$, c'est comprimé, pour $a<1$, c'est étiré)

3.4.4 Motif de diffraction

On sait que $u = \frac{x_i}{\lambda f_i}$, $v = \frac{y_i}{\lambda f_i}$ et on peut écrire $u_0 = \frac{x_0}{\lambda f_i}$, $v_0 = \frac{y_0}{\lambda f_i}$ de sorte que

$$\underline{\psi(x_i, y_i)} = K'' \psi_0 e^{-i\omega t} \text{absinc}\left(\frac{a(x_i - x_0)}{\lambda f_i}\right) \text{sinc}\left(\frac{b(y_i - y_0)}{\lambda f_i}\right)$$

avec K'' une constante 

On calcule l'intensité :

$$I = ||\overrightarrow{K''}||^2 |\psi_0|^2 (ab)^2 \text{sinc}^2(\dots) \text{sinc}^2(\dots) \neq |\psi_0|^2$$

Astuce

$x_{i,0}$ est le point où l'onde incidente convergerait s'il n'y avait pas la fente, uniquement la lentille

Info

Son expression est différente de K' mais cela n'a pas d'importance



À retenir

Le motif de diffraction correspond au produit de 2 fonctions sinc^2 , centrée en x_0, y_0 et dilatés de facteurs $\frac{a}{\lambda f_i}, \frac{b}{\lambda f_i}$



Propriétés Graphiques de sinc^2

Le motif d'intensité $I \propto \text{sinc}^2$ (en jaune sur le schéma) présente :

- Un maximum principal en $x = x_0, y = y_0$.
- Des zéros (intensité nulle) qui définissent la largeur de la tache centrale. Pour une fente, ces zéros sont en $x_i = \pm \frac{\lambda f_i}{a}$ et $y_i = \pm \frac{\lambda f_i}{b}$.
- Des lobes secondaires dont l'intensité décroît très rapidement (le pic secondaire le plus proche ne représente qu'environ 4,7% de l'intensité maximale I_0).

On en déduit que la tache centrale a une largeur de $2\frac{\lambda f_i}{a}$ en x et $2\frac{\lambda f_i}{b}$ en y.

Interprétation physique

On observe une tache centrale d'intensité max I_0 et des lobes secondaires de faible intensité. La tache centrale est beaucoup plus brillante que les autres, donc si la largeur de la fente est assez grande, on n'observe qu'un point central brillant.

3.4.5 Propriétés du motif de diffraction

- La tache de diffraction est centrée sur l'image géométrique x_0, y_0
- La tache de diffraction est d'autant plus large que la fente est petite. i
- pour s'affranchir de la diffraction, il faut une fente la plus large possible. Dans certains cas, c'est la taille des éléments optiques qui jouent le rôle de la fente
- La diffraction se manifeste plus pour les grandes valeurs de λ
- On peut interpréter la taille de la tache centrale en fonction de l'angle θ_x correspondant. On trouve que cette tache correspond à un demi-angle $\theta_x \simeq \frac{\lambda}{a}$
- Plus la longueur d'onde est grande, plus la diffraction est importantes

i Info

La relation $\theta_x \simeq \frac{\lambda}{a}$ pour le demi-angle d'ouverture de la tache centrale montre bien la relation : * Petite fente (a petit) \Rightarrow Grande tache de diffraction (θ_x grand). * Grande fente (a grand) \Rightarrow Petite tache de diffraction (θ_x petit).

3.4.6 Résolution d'un système optique

Une conséquence est la limite de résolution des systèmes optiques. L'image d'un point n'est plus un point mais doit être associé à une tache de diffraction avec une certaine largeur.