Chapitre 26 B : Techniques de décomposition en éléments simples.

I. Quelques astuces donnant des relations sur les coefficients afin de simplifier les calculs.

- On peut obtenir des relations sur les différents coefficients en évaluant en une valeur qui ne soit pas un pôle de la fraction rationnelle : par exemple, pour $F = \frac{2X^2-1}{(X-1)(1+X^2)}$ on peut remarquer que :

$$F = \frac{2X^2-1}{(X-1)(1+X^2)} = \frac{a}{X-1} + \frac{bX+c}{1+X^2}$$

  et en évaluant en 0, on obtient $\frac{-1}{-1} = \frac{a}{-1} + \frac{c}{1}$, donc $c - a = 1$.

  En obtenant encore deux relations du même style, on aura fini !

- En multipliant la fraction rationnelle par X et en prenant la limite en l'infini, on obtient toujours une relation assez simple sur les coefficients. Par exemple avec notre fraction F ci-dessus on a :

$$XF = \frac{X \times (2X^2-1)}{(X-1)(1+X^2)} = a\frac{X}{X-1} + \frac{X(bX+c)}{1+X^2}$$

  et en prenant la limite en l'infini, on obtient donc $a + b = 2$.

- Si on remarque que la fraction rationnelle est paire ou impaire, alors chaque pôle a son opposé parmi les autres pôles, avec le même ordre. On peut obtenir des relations intéressantes en remarquant que $F(-X) = \pm F(X)$. Par exemple avec $G = \frac{2X}{X^2-1} = \frac{2X}{(X-1)(X+1)}$, on a :

$$G = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$$

  donc

$$G(-X) = -G(X) = \frac{a}{-X-1} + \frac{b}{-X+1}$$

  ce qui donne encore :

$$G(X) = \frac{a}{X+1} + \frac{b}{X-1}$$

  donc $a = b$ par unicité de la décomposition !

  Cette technique est rarement d'une grande utilité pour un pôle simple, mais elle pourra considérablement accélerer et simplifier les calculs dans le cas de pôles multiples.

- Si la fraction rationnelle est à coefficients réels et qu'on cherche sa décomposition dans $\mathbb{C}$, chaque pôle non réel a son conjugué parmi les autres pôles, avec le même ordre. On peut alors montrer que le coefficient de l'élément simple $\frac{\alpha}{(X-a)^k}$ est le conjugué du coefficient de l'élément simple $\frac{\beta}{(X-a)^k}$.

  Par exemple, si on cherche la décomposition complexe de $F = \frac{2X^2-1}{(X-1)(X^2+1)}$, alors :

$$F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X-i} + \frac{c}{X+i}$$

puis :

$$\overline{F} = F = \frac{\overline{a}}{X-1} + \frac{\overline{b}}{X+i} + \frac{\overline{c}}{X-i}$$

et l'unicité de la décomposition assure que $\overline{a} = a$ (donc $a \in \mathbb{R}$), et $\overline{b} = c$ puis (c'est la même chose) $\overline{c} = b$.

De nouveau, cette technique est rarement d'une grande utilité pour un pôle simple, mais elle pourra considérablement accélerer et simplifier les calculs dans le cas de pôles multiples.

II. Coefficients associés aux pôles simples.

Soit a un pôle simple de la fraction rationnelle P/Q telle que $\deg(P) < \deg(Q)$: il existe alors une unique fraction rationnelle F telle que a dont a n'est pas un pôle et un unique coefficient α tels que :

$$\frac{P}{Q} = \frac{\alpha}{X-a} + F.$$

- La technique la plus usuelle pour trouver a consiste à factoriser Q par $(X-a)$, pour obtenir :

  $$\frac{P}{(X-a)Q_1} = \frac{\alpha}{X-a} + F$$

  Pour obtenir la valeur de α, il suffit alors de multiplier par $(X-a)$ l'égalité, puis de l'évaluer en a : comme a n'est pas un pôle de F, $(X-a)F$ s'annule en a et on obtient donc :

  $$\alpha = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

- Dans le cas où il n'est pas possible ou compliqué de factoriser Q, ou bien dans le cas où on demande une écriture spécifique de α en fonction de Q', on peut aussi montrer que :

  $$\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

  Proposons trois méthodes pour retrouver ce résultat :

  - On multiplie par $X-a$ et on obtient :

    $$\alpha = (X-a)F + \frac{(X-a)P}{Q}$$

    Comme a est encore un pôle de la fraction $\frac{(X-a)P}{Q}$, on ne peut pas évaluer en a ; mais on peut prendre la limite lorsque x tend vers a par valeurs différentes. Or, comme a est une racine de Q, on a :

    $$\frac{Q(x)}{x-a} = \frac{Q(x)-Q(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} Q'(a)$$

    et comme $Q'(a)$ est non nul puisque a est un pôle simple de la fraction rationnelle, donc une racine simple de Q, on a alors :

    $$\frac{x-a}{Q(a)} \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} \frac{1}{Q'(a)} \quad \text{puis} \quad (x-a)F(x) + \frac{(x-a)P(x)}{Q(x)} \xrightarrow[x\to a, x\neq a]{} 0\times F(a) + \frac{P(a)}{Q'(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

    et donc $\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

  - On utilise la formule de Taylor sur le polynôme Q :

    $$Q = Q(a) + Q'(a)(X-a) + ... + \frac{Q^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

    avec $n = \deg(Q)$. Or $Q(a) = 0$ et $Q'(a) \neq 0$ puisque a est une racine de Q, on a alors :

    $$Q = (X-a)[Q'(a) + R] \quad \text{avec } R(a) = 0$$

$$\frac{(X-a)P}{Q} = \frac{(X-a)P}{(X-a)[Q'(a)+R]} = \frac{P}{Q'(a)+R}$$

et on peut alors évaluer l'égalité $\alpha = (X-a)F + \frac{P}{Q'(a)+R}$ au point a qui n'est plus un pôle des fractions rationnelles considérées, on obtient bien :

$$\alpha = 0 \times F(a) + \frac{P(a)}{Q'(a)+0} = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

– On écrit $Q = (X-a)Q_1$ et on vérifie que $Q'(a) = Q_1(a)$: en effet en dérivant l'égalité, on a :

$$Q' = Q_1 + (X-a)Q_1' \quad \text{donc} \quad Q'(a) = Q_1(a) + 0 = Q_1(a)$$

donc l'égalité $\alpha = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$ donne bien également $\alpha = \frac{P(a)}{Q'(a)}$.

III. Coefficients associés aux pôles multiples.

- L'élément simple associé au pôle a avec la puissance maximale s'obtient comme pour un pôle simple (la formule avec $Q'(a)$ n'est plus valable, mais celle avec $Q_1(a)$ marche encore, sauf qu'on doit factoriser Q par $(X-a)^k$ avec k l'ordre de multiplicité de la racine a).

- En retirant l'élément simple $\frac{a_k}{(X-a)^k}$ des deux côtés de l'égalité, on diminue de 1 l'ordre du pôle, et on recommence, et on recommence : cela permet de déterminer tous les éléments simples du pôle a, mais au prix de calculs assez pénibles.

- Pour ne pas mener le calcul ci-dessus en intégralité sur chaque pôle, on essaiera d'utiliser les techniques de la partie I pour obtenir des relations sur les coefficients de la décomposition afin de les déterminer à moindre frais.

- !une technique plus anecdotique : si on doit décomposer en élément simple une fraction de la forme $\frac{A}{(X-a)^k}$, la formule de Taylor au point a sur A fera apparaître immédiatement la décomposition : les coefficients seront donc de la forme $\frac{A^{(j)}(a)}{j!}$.

IV. Coefficients associés aux polynômes de degré 2 irréductibles.

- Les coefficients correspondant à la puissance maximale peuvent s'obtenir de la même manière qu'avant, mais en utilisant les deux racines complexes pour obtenir deux relations et déterminer les deux coefficients.

- Dans le cas d'une puissance 1, on peut travailler dans $\mathbb{C}$ puis rassembler dans $\mathbb{R}$.

- Prendre des valeurs simples pour x peut donner des relations pour finir lorsqu'il ne manque plus que quelques coefficients. La limite en l'infini après multiplication par X marche aussi. On essaiera au maximum d'utiliser ces techniques pour ne pas trop alourdir les calculs....