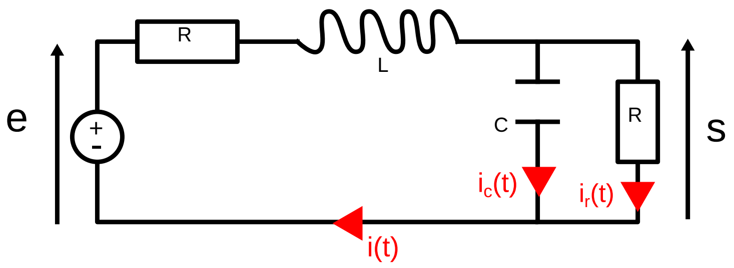
Chapitre 6

Filtrage

On prendra ce circuit en exemple dans cette fiche :



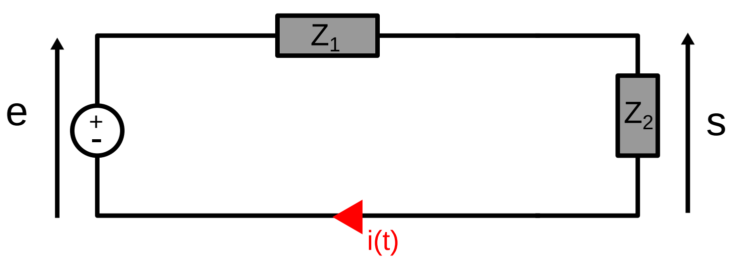
6.1 Détermination des fonctions utiles

6.1.1 Fonction de transfert

Impédance équivalente

On trouve d'abord le circuit équivalent avec les impédances équivalentes, puis on applique un pont diviseur de tension.

On peut réécrire le circuit comme



Avec, $Z_1 = jL\omega + R$ et $Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{Z_R}+\frac{1}{Z_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R}+jc\omega}$.

On peut maintenant exprimer s avec un pont diviseur de tension : $s = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2}e$. Comme $H = \frac{s}{e}$, on obtient finalement que $H = \frac{1}{1+\frac{Z_1}{Z_2}}$.

Forme canonique

Pour obtenir la forme canonique avec ω_0 et Q, on sépare les parties réelles et imaginaire, puis on identifie ω_0 et Q.

Ici, $H = \frac{1}{2-LC\omega^2+j\omega(\frac{L}{R}+RC)} = \frac{1}{(2-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)+j\frac{\omega}{\omega_0}(Q+\frac{1}{Q})}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

6.1.2 Gain

Le gain vaut le module de la fonction de transfert. Pour trouver le module de H, qui est complexe, on peut appliquer la formule (voir fiche sur les nombres complexes niveau terminale maths expertes).

$$G = \frac{1}{\sqrt{(2-(\frac{\omega}{\omega_0})^2)^2 + (\frac{\omega}{\omega_0}(Q+\frac{1}{Q}))^2}}$$

6.1.3 Gain en decibel

On applique la formule : $G_{dB} = 20\log(G)$. Comme G est le plus souvent de la forme $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$, on peut écrire : $G_{dB} = 20 \times -\frac{1}{2}\log(a^2+b^2)$.

6.1.4 Décalage de phase

On prend l'argument de H, qui est de la forme $\frac{1}{z}$. On peut donc écrire $\varphi = -\arg(z)$. Pour trouver l'argument d'un nombre complexe, on utilise l'arctan de sa partie imaginaire sur sa partie réelle, c'est à dire :

$$\arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$

> **Négativité**
>
> Si l'expression contenue dans arctan devient négative, il faut rajouter π au résultat !

Ici, $\varphi = \tan^{-1}(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}(Q+1/Q)}{2-(\frac{\omega}{\omega_0})^2}) + \pi$ si $\omega > \sqrt{2}\omega_0$ car le dénominateur deviendrait négatif.

6.2 Étude de comportements asymptotiques

On étudie le comportement quand la pulsation tend vers 0 et vers l'infini.

> **Comportement des bobines et condensateurs**
>
> À très basse fréquence, quand $\omega \to 0$, une bobine se comporte comme un fil. À l'inverse, elle se comporte comme un interrupteur ouvert quand $\omega \to \infty$.
>
> C'est le contraire avec un condensateur, celui-ci se comporte comme un interrupteur ouvert quand $\omega \to 0$ et comme un fil quand $\omega \to \infty$.
>
> Pour s'en rappeler, on peut imaginer le schema de la bobine s'écraser au fur et à mesure que ω est petit, jusqu' à ressembler à un fil !

Pour cela, on calcule la limite de H, puis celle de G, de G_{dB} et de φ

On rappelle que $\lim\limits_{+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{0} \arctan(x) = 0$.

6.3 Fréquence de coupure

La fréquence de coupure est le plus souvent définie à -3 dB. On cherche donc la ou les pulsations telle qu'on atteint la zone de filtrage.

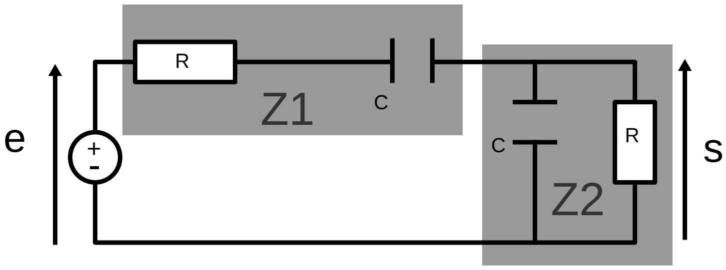
On cherche donc ω_c tel que $G_{dB}(\omega_c) = -3$ ou encore

$$\begin{aligned} & -10\log(a+b) = -3 = -10\log(2) \\ \iff \ & a+b = 2 \end{aligned}$$

Comme a+b est l'expression contenant ω_c, on peut le trouver en résolvant l'équation.

> **Filtre passe-bande**
>
> Dans le cas du filtre passe-bande, il faut résoudre une ou plusieurs équations du second degrés. Dans ce cas, comme la pulsion est toujours positive, on ne garde que les solutions positives.

6.4 Exemple : Filtre de Wien



Nous allons étudier la fonction de transfert de ce filtre de Wien dans le régime sinusoïdal établi à la pulsation ω.

Fonction de transfert

Montrons que la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme

$$H = \frac{A}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$$

On caclule le circuit équivalent avec les impédances équivalentes :

- $Z_1 = R + \frac{1}{j\omega C}$
- $Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1+j\omega RC}$

En appliquant un pont diviseur de tension, on trouve que H vaut

$$\frac{\frac{R}{1+j\omega RC}}{\frac{R}{1+j\omega RC} + R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{R}{1+j\omega RC}\frac{1}{\frac{R}{1+j\omega RC}+R+\frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{R}{(1+j\omega RC)(\frac{R}{1+j\omega RC}+R+\frac{1}{j\omega C})} \\
&= \frac{R}{(\frac{R}{1+j\omega RC}+R+\frac{1}{j\omega C})+(j\omega CR^2+R+\frac{jC\omega R^2}{1+j\omega RC})} \\
&= \frac{R}{2R+jC\omega R^2+\frac{1}{j\omega C}+\frac{R+jC\omega R^2}{1+jc\omega R}} \\
&= \frac{R}{2R+jC\omega R^2+\frac{1}{j\omega C}+\frac{R(1+jC\omega R)}{1+jc\omega R}} \\
&= \frac{R}{3R+jC\omega R^2+\frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{R}{3R+jC\omega R^2-\frac{j}{\omega C}} \\
&= \frac{R}{R(3+j(C\omega R-\frac{1}{\omega CR}))} \\
&= \frac{1}{3+j(C\omega R-\frac{1}{\omega CR})} \\
&= \frac{1}{3(1+\frac{j}{3}(C\omega R-\frac{1}{\omega CR})} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{j}{3}(C\omega R-\frac{1}{\omega CR})}
\end{aligned}
$$

On trouve bien l'expression demandée, avec $A = 1/3, Q = 1/3, \omega_0 = 1/RC$.

Gain

$$
\begin{aligned}
G = |H| &= |\frac{A}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}| \\
&= \frac{|A|}{|1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})|} \\
&= \frac{A}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_{dB} = 20\log(G) &= 20\log(\frac{A}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}}) \\
&= 20\log(A) - 20\log(\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2}) \\
&= 20\log(A) - 10\log(1+Q^2(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})^2)
\end{aligned}
$$

Gain maximal

$$G = \frac{A}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

A étant positif, le gain est maximal quand le dénomateur est le plus petit, ce qui peut se produire quand $\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = 0$, soit quand $\omega = \omega_0$.

La valeur de G_{dB} vaut alors :

$$\begin{aligned}
G_{dB} &= 20\log(A) - 10\log(1 + Q^2(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2) \\
&= 20\log(A) - 10\log(1 + Q^2(0)^2) \\
&= 20\log(A) - 10\log(1) \\
&= 20\log(A)
\end{aligned}$$

Déphasage

$$\begin{aligned}
\varphi &= \arg(H) = \arg(\frac{A}{1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}) \\
&= \frac{\arg(A)}{\arg(1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}))} \\
&= A - \arg(1 + jQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})) \\
&= A - \tan^{-1}(\frac{Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}{1}) \\
&= A - \tan^{-1}(Q(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})) + \pi \text{ si } \omega < \omega_0
\end{aligned}$$

Fréquences de coupure

On cherche à calculer les fréquences à -3dB, c'est à dire les fréquences ω_{c1}, ω_{c2} telles que $G_{dB}(\omega_{c1}) = G_{dB}(\omega_{c2}) = G_{dB,max} - 3$.

$$\begin{aligned}
G_{dB}(\omega_c) &= G_{dB,max} - 3 \\
&= 20\log(A) - 10\log(2) \\
&= 20\log(A) - 10\log(\sqrt{2}^2) \\
&= 20\log(A) - 20\log(\sqrt{2}) \\
&= 20\log(\frac{A}{\sqrt{2}})
\end{aligned}$$

De plus,

$$G_{dB}(\omega_c) = 20\log(\frac{A}{\sqrt{1 + Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c})^2}})$$

On en déduit que

$$\frac{A}{\sqrt{1+Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c})^2}}=\frac{A}{\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow 1+Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c})^2=2$$
$$\Rightarrow Q^2(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c})^2=1$$
$$\Rightarrow Q(\frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c})=\pm 1$$
$$\Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_c}=\pm\frac{1}{Q}$$
$$\Rightarrow X-\frac{1}{X}=\pm\frac{1}{Q}$$
$$\Rightarrow X^2-1=\pm\frac{X}{Q}$$
$$\Rightarrow X^2\pm\frac{X}{Q}-1=0$$

On pose $X = \frac{\omega_c}{\omega_0}$ pour simplifier les notations

On obtient un équation du second degré que l'on va résoudre.

$\Delta=\frac{1}{Q^2}+4>0$, donc les racines sont réelles.

On a donc

- Cas $+1$: $X=\dfrac{\frac{1}{Q}\pm\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$
- Cas -1 : $X=\dfrac{-\frac{1}{Q}\pm\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$

Il y a donc 4 solutions en tout, mais on ne va garder que les racines positives. Donc

- Cas $X_1=\dfrac{\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$
- Cas $X_2=\dfrac{-\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$

Finalement,

- $\omega_{c1}=\omega_0\times\dfrac{\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$
- $\omega_{c2}=\omega_0\times\dfrac{-\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}}{2}$

Bonus : calcul de la bande passante

$$\begin{aligned}\Delta\omega_c &= |\omega_{c1} - \omega_{c2}| \\ &= \frac{\omega_0}{Q}\end{aligned}$$