Chapitre

3

Systèmes du premier ordre

L'air exerce des forces de frottement qui modifient significativement les trajectoires. Ces frottements correspondent à des forces de frottement fluide/visqueux, qui sont

- dans la direction du mouvement
- dans le sens opposé au mouvement

Dans ce chapitre, on va considérer des forces du type $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}$ avec α une constante positive.

> **Remarque**
>
> Il y a d'autres types de forces de frottement

3.1 Rappel sur la résolution d'EQD du premier ordre linéaire et à coefficient constant

C'est une équation dont l'inconnue faisant intervenir une fonction f et ses dérivées. L'ordre de l'EQD est le plus haut degré de dérivation de la fonction f dans l'EQD. Elle est linéaire si u et v sont solutions de l'EQD, $\lambda u + \mu v$ est aussi solution de l'EQD. Elle est à coefficient constant si les coefficients sont des constantes de dépendant pas de t. Elle est dite homogène si le second membre est nul

3.1.1 Forme canonique

On a une équation de cette forme :$Af' + Bf = C$. On met dans le membre de gauche tout ce qui dépend de f et dans celui de droite ce qui ne dépend pas de f. On divise donc par a : $f' + \frac{B}{A} f = \frac{C}{A}$ et on obtient $f' + \frac{1}{\tau} f = a$ avec $\tau \equiv \frac{A}{B}$ et $a \equiv \frac{C}{A}$ τ est un temps.

3.1.2 Résolution

On écrit l'équation homogène associée :

$$f_h' + \frac{1}{\tau} f_h = 0$$

On cherche la solution sous la forme exponentielle : $f_h = Ce^{rt}$ et $f_h' = Cre^{rt}$. On les injecte dans l'EQD pour obtenir l'équation caractéristique : $r + \frac{1}{\tau} = 0$. Donc $f_h = Ce^{-t/\tau}$.

On cherche une solution particulière qui vérifie l'équation complète :

$$f_h' + \frac{1}{\tau} f_h = a$$

On utilise la méthode de ressemblance : On cherche une solution particulière du même type que le second membre :

Si le second membre a est constant, on cherche f_p = Constant : alors on a $f_p = a\tau$.

La solution générale est la somme des 2 : $f(t) = f_h(t) + f_p(t)$. On obtient donc

$$f(t) = Ce^{-t/\tau} + a\tau$$

On trouve C à partir des conditions initiales.

3.2 Mouvement avec frottements fluides

3.2.1 Exemple : Largage d'un colis

On obtient les 2 équations

Système = Colis M. On se met dans le referénetiel terrestre muni du repère R

On fait un bilan des forces : $\vec{P}, \vec{F_f} = -\alpha \vec{v}$

On écrit le PDF : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f}$

On projette les forces : $\vec{P} = -mg\vec{e_y}$ et $\vec{F_f} = -\alpha(V_x\vec{e_x} + V_y\vec{e_y})$

On réécrit le PFD, projeté selon les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = & 0 + -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = & -mg + -\alpha\dot{y} \end{cases}$$

On transforme les équations

On obtient une équation linéaire :

$$\begin{cases} m\dot{v_x} = & 0 + -\alpha v_x \\ m\dot{v_y} = & -mg + -\alpha v_y \end{cases}$$

On l'écrit sous la forme canonique

$$\begin{cases} m\dot{v_x} + \alpha v_x = & 0 \\ m\dot{v_y} + \alpha v_y = & -mg \end{cases}$$

On divise tout par m :

$$\begin{cases} \dot{v_x} + \frac{\alpha}{m} v_x = & 0 \\ \dot{v_y} + \frac{\alpha}{m} v_y = & -g \end{cases}$$

On pose $\tau = \frac{m}{\alpha}$:

$$\begin{cases} \dot{v_x} + \frac{1}{\tau} v_x = & 0 \\ \dot{v_y} + \frac{1}{\tau} v_y = & -g \end{cases}$$

On résout les équations

La première équation est homogène, donc $v_x(t) = Ce^{-t/\tau}$. À $t = 0, v_x(0) = Ce^0 = C$, donc $C = V_0$. Finalement, $v_x(t) = V_0 e^{-t/\tau}$. Dans ce cas, $v_x(t) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

La deuxième équation est non homogène : On écrit donc l'équation sous forme homogène : $\dot{v}_{y,h}(t) + \frac{1}{\tau} v_{y,h} = 0$. Donc : $v_{y,h} = De^{-t/\tau}$. On cherche maintenant une solution particulière. Le second membre est constant, donc on cherche $v_{y,p}$ constant, (avec sa dérivée nulle), donc $v_{y,p} = -\tau g$.

Donc, $v_y(t) = De^{-t/\tau} - \tau g$ ✕ .

À $t = 0, v_y(0) = 0$ et $v_y(0) = De^0 - \tau g = D - \tau g = 0 \iff D = \tau g$. Donc : $v_y(t) = \tau g(e^{-t\tau} - 1)$.

On va tendre vers un vecteur vitesse

$$v_{lim} = 0\overrightarrow{e_x} - \tau g \overrightarrow{e_y}$$

On peut noter qu'il s'agit de la valeur obtenue quand l'accélération s'annule : quand la vitesse tend vers une constante, l'accélération est nulle.

✕ **Difficulté**

On trouve la valeur de D à partir de la solution complète, et non à partir de la solution homogène.

Astuce

Elle est indépendante des conditions initiales. Cependant elle n'est pas obtenue instantanément mais après un régime transitoire dont la durée caractéristique est la constante τ.
La constante τ s'interprète donc physiquement comme le temps caractéristique d'établissement du régime pour lequel la vitesse est égale à la vitesse limite.

Représentation des solutions

Intégration

On intègre $v_x(t)$: $x(t) = -\tau V_0 e^{-t/\tau} + A$. Avec les conditions initiales : $x(0) = 0$ et $x(t = 0) = -\tau V_0 + A = 0$ et $A = \tau v_0$. $x(t)$ tend vers τV_0 quand x tend vers l'infini.

On intègre $v_y(t)$: $y(t) = \tau g(-\tau e^{-t/\tau} - t) + B = \tau^2 g e^{-t/\tau} - \tau g t + B$. Avec les conditions initiales : $y(0) = h$ et $y(t = 0) = \tau^2 g e^{-t/\tau} - \tau g t + B$ et $B = h + \tau^2 g$.

Au bout de combien de temps v_y atteint-t-elle 95% de la vitesse limite ?

v_y tend vers $-\tau g$, vitesse limite. On veut $v_y(t_{95}) = 0.95 \times -\tau g$. Donc $\tau g e^{-t_{95}/\tau} = 0.05\tau g$, donc $t_{95} = -\tau \ln(0.05)$. Donc au bout de 3τ, v_y atteint 95% de sa valeur limite.

Astuce

Si le temps de chute est petit devant τ, on calcule la tangente à v_y au voisinage de 0 en calculant la dérivée de v_y, qui est l'accélération. L'équation de la tangente en 0 est $-gt$.

3.3 Force de frottement visqueux non linéaires (non essentiel)

On peut avoir des forces de frottement visqueux du type : $\overrightarrow{F} = -\beta||\overrightarrow{v}||\overrightarrow{v}$, avec β constante positive. On a : $||\overrightarrow{F}|| \propto ||\overrightarrow{v}||^2$.

3.3.1 Chute d'un objet verticale

Schéma 3.3.1

Dans ce cas, $\overrightarrow{F} = -\beta v_z^2 \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{P} = mg$

On écrit le PFD : $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} \iff ma_z\overrightarrow{e_z} = mg\overrightarrow{e_z} - \beta v_z^2\overrightarrow{e_z}$.

On a alors : $\dot{v_z} + \frac{\beta}{m} v_z^2 = g$.

C'est une EQD non linéaire, car si u et v sont solutions, $u + v$ ne l'est pas ($(u + v)^2 \neq u^2 + v^2$).

On cherche une vitesse limite constante

On a $\dot{v_z} = 0$, donc $\frac{\beta}{m} v^2 = g \Rightarrow v_l^2 = \frac{mg}{\beta}$. On l'introduit dans l'EQD : $\dot{v_z} + \frac{\beta}{m} v_z^2 - \frac{\beta}{m}(\frac{mg}{\beta} = 0$

$\dot{v_z} + \frac{\beta}{m}(v_z^2 - v_l^2) = 0$

$\dot{v_z} + \frac{g\beta}{gm}(v_z^2 - v_l^2) = 0$

$\dot{v_z} + \frac{g}{v_l^2}(v_z^2 - v_l^2) = 0$

$\dot{v_z} + g(\frac{v_z^2}{v_l^2} - 1) = 0$

On pose $u = \frac{v_z}{v_l} \Rightarrow v_z = u \times v_l$

On fait un changement de variable avec u et l'EQD devient : $v_l \frac{du}{dt} + g(u^2 - 1) = 0$ et $v_l \frac{du}{dt} = g(-u^2 + 1)$ puis $v_l \frac{du}{1-u^2} = gdt$

Mais la dérivé de arctanh est $\frac{1}{1-u^2}$.

On intègre : $\text{arctanh}(u) = \frac{g}{v_l}t + C$, donc $u = \tanh(\frac{g}{v_l}t + C)$.

3.4 Radioactivité

3.4.1 Rappels sur le noyau des atomes

${}^a_zX$ avec Z le nombre de protons, qui détermine le nom de l'espèce et A le nombre de nucléons. Le nombre de neutrons vaut $A - Z$. 2 espèce avec le même nombre de protons et nb de neutrons $\neq$ sont des isotopes.

${}^1_1H$: Hydrogène et ${}^2_1H$ deutérium

3.4.2 Unités liés aux noyaux

- Taille d'un noyau : 1fm = 10^{-15}m
- Unité d'énergie : $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}$ J
- Masse en unité de masse atomique u
- 1 u = $1.66 \cdot 10^{-27}$ kg
- Masse proton : 1.00728 u
- Masse neutron : 1.00867 u
- Masse électron : $0.55 \cdot 10^{-3}$u.

3.4.3 Défaut de masse

$m_x < Zm_p + (A - Z)m_n$ Énergie de liaison de l'atome : $Zm_p + (A - Z)m_n - m_x = \Delta m$.

3.4.4 Radioactivité

Quand on s'écarte de la zone de stabilité, les éléments ont tendance à se désintégrer, cela donne lieu à des réactions de radioactivité :

$^A_Z X \rightarrow ^{A'}_{Z'} X +^{A_1}_{Z_1} p_1 +^{A_2}_{Z_2} p_2$

3.4.5 Lois de conservations

Lors des réactions, il y a conservation du nombre de nucléons, de la charge, de l'équivalent masse-énergie (Δm est la différence de masse entre produits et réactifs).

3.4.6 Types de réactions

Radioactivité α : Une particule α est ^4_2He

$^A_Z X \rightarrow ^{A-4}_{Z-2} X' +^4_2 \alpha + \gamma$

Radioactivité $\beta+$: $^A_Z X \rightarrow ^A_{Z-1} X' +^0_1 e + \nu + \gamma$ avec ν un neutrino.

Radioactivité $\beta-$: $^A_Z X \rightarrow ^A_{Z+1} X' +^0_{-1} e + \bar{\nu} + \gamma$ avec $\bar{\nu}$ un antineutrino.

Capture électronique : $^A_Z X +^0_{-1} e \rightarrow ^A_{Z-1} X' + \nu + \gamma + X$ avec X des rayons X

3.4.7 Lois de décroissance radioactive

Pour chaque réaction radioactive, on peut déterminer la probabilité de désintégration du noyau pendant un intervalle de temps compris entre t et $t + dt$.

On alors $dP = \lambda dt$. Dans le SI, λ est en s^{-1}. i

i Info
Si λ est donné en s^{-1}, si il est donné en année^{-1}, T est en années.

Si on dispose de n noyaux, on peut déterminer le nombre de désintégrations par seconde = $N \times \lambda dt$.

Donc la variation du nombre de noyaux n pendant dt : $dN = -N\lambda dt$. On divise tout par dt : $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$, et on aboutit à une EQD du premier ordre linéaire à coefficients constants : $\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$

On cherche une solution du type Ce^{rt} avec $r = -\lambda$, donc $N(t) = Ce^{-\lambda t}$. Si à $t = 0$, $N(0) = N_0$ noyaux, alors $C = N_0$ et $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

Période de demie-vie T : temps au bout duquel le nombre initial de noyaux est divisé par 2 :

$$\begin{aligned} N_0 e^{-\lambda t} &= \frac{N_0}{2} \\ e^{-\lambda t} &= \frac{1}{2} \\ \ln(e^{-\lambda t}) &= \ln(\frac{1}{2}) \\ -\lambda T &= -\ln(2) \\ T &= \frac{\ln(2)}{\lambda} \end{aligned}$$

3.4.8 Activité

Définition : Nombre de désintégrations par seconde. Elle se mesure en Becquerel (Bq).

$$A(t) = \lambda \times N(t)$$

donc $A(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$.

3.4.9 Élément fils

$M(t) =$ nombre de noyaux de l'élément fils, soit le nombre d'éléments père détruits.

$$M(t) = N_0 - N(t) = N_0(1 - e^{-\lambda t})$$