4

Chapitre

Méthode - Étude d'un réseau

4.0.1 Calcul de la Différence de Marche Optique (δ)

On considère deux fentes successives, F_n et F_{n+1}, séparées par une distance p (le pas du réseau). La différence de marche totale (δ) entre les ondes issues de ces deux fentes est la somme de deux contributions :

- La différence de marche due à l'**incidence** (δ_{inc}) de l'onde plane sur le réseau.
- La différence de marche due à la **diffraction** (δ_d) vers l'observateur.

Contribution due à l'incidence (δ_{inc})

L'onde incidente est plane et arrive avec un angle θ_i par rapport à la normale au réseau.

Considérons le front d'onde incident qui arrive au point A. Le rayon qui arrive au point B (correspondant à la fente suivante) doit parcourir une distance supplémentaire AC pour atteindre le même front d'onde.

$$AC = p \cdot \sin(\theta_i)$$

$$\delta_{\mathbf{inc}} = \mathbf{p}\sin(\theta_{\mathbf{i}})$$

Contribution due à la diffraction (δ_d)

Les ondes diffractées se propagent dans la direction θ_d (angle de diffraction).

Considérons un front d'onde diffracté. Le rayon issu de A parcourt une distance supplémentaire pour rejoindre le front d'onde de référence par rapport au rayon issu de A (fente F_n).

$$AD = p \cdot \sin(\theta_d)$$

$$\delta_\mathbf{d} = \mathbf{p}\sin(\theta_\mathbf{d})$$

Différence de Marche Totale (δ)

La différence de marche totale est la somme algébrique des deux contributions :

$$\delta = \delta_{inc} - \delta_d$$

$$\delta = \mathbf{p}(\sin\theta_\mathbf{i} - \sin\theta_\mathbf{d})$$

4.0.2 Calcul du Déphasage (ϕ)

Le déphasage ϕ est directement lié à la différence de marche δ par la relation fondamentale :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta$$

En substituant l'expression de δ trouvée précédemment :

$$\phi = \frac{\mathbf{2\pi p}}{\lambda}(\sin\theta_\mathbf{i} - \sin\theta_\mathbf{d})$$

Ce déphasage ϕ est l'argument utilisé dans la fonction réseau :

$$I(\theta) \propto \left(\frac{\sin(N\phi/2)}{N\sin(\phi/2)}\right)^2$$

On rappelle que les maxima principaux (raies brillantes) se produisent lorsque le déphasage ϕ est un multiple entier de 2π, ce qui ramène à la formule du réseau :

$$\phi = 2m\pi \implies \frac{2\pi p}{\lambda}(\sin\theta_i + \sin\theta_d) = 2m\pi$$
$$m\lambda = p(\sin\theta_i + \sin\theta_d)$$

4.0.3 Annulation de la fonction réseau

On souhaite exprimer la valeur de $u = \frac{\sin\theta_d - \sin\theta_i}{\lambda}$ correspondant à la première annulation de la fonction réseau. En déduire la demi-largeur angulaire $\Delta\theta_a$ de ce pic quand on l'exprime en fonction de θ_d .

La fonction réseau est nulle quand l'argument du sinus du numérateur est un multiple de π. Donc $N\frac{\phi}{2} = \pi \Rightarrow \phi = \frac{2\pi}{N}$.

Or, $\phi = 2\pi up = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow u = \frac{1}{NP}$. On le note Δu car c'est la varitaion depuis le centre du pic :

$$\Delta u = \frac{1}{NP}$$

Mais on sait aussi que $u = \frac{\sin\theta_d - \sin\theta_i}{\lambda}$. Pour faire apparaitre $\Delta\theta_a$ qui est la variation de θ depuis le centre du pic, on va différention la relation.

On sait que $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x$. C'est cette relation que l'on va utiliser, avec comme variable θ_d pour exprimer $f(\theta_d) = u(\theta_d)$.

Exemple

cf Outils Mathématiques 1

On écrit donc, en traitant $\sin(\theta_i)$ comme uns constante :

$$u(\theta_x) = \frac{\sin(\theta_d) - \sin(\theta_i)}{\lambda}$$
$$\mathrm{d}u(\theta_x) = \frac{\cos(\theta_d)}{\lambda}\mathrm{d}\theta_d$$

Comme la variation de u et θ_d sont petites, on peut raisonnablement écrire, avec $\Delta\theta_d = \Delta\theta_a$

$$\Delta u = \frac{\cos(\theta_d)}{\lambda}\Delta\theta_a$$

En combinant les 2 expressions de Δu, on obtient $\Delta\theta_a = \frac{\lambda}{pN\cos(\theta_d)}$

4.0.4 Écart entre les pics de diffraction

La relation fondamentale des réseaux permet de voir comment, pour un ordre de diffraction m donné, l'angle θ_d donnant un pic de diffraction est fonction de la longueur d'onde λ. En prenant la différentielle de cette relation, exprimer l'écart $\Delta\theta$ entre les pics de diffraction à l'ordre m pour deux longueurs d'ondes λ et $\lambda + \Delta\lambda$ proches.

On va différencier de la même façon pour obtenir la relation :

$$\begin{aligned}
p(\sin\theta_d - \sin\theta_i) &= m\lambda \\
\mathrm{d}(p(\sin\theta_d - \sin\theta_i)) &= \mathrm{d}(m\lambda) \\
p\cos(\theta_d)\mathrm{d}\theta_d &= m\mathrm{d}\lambda \\
p\cos(\theta_d)\Delta\theta &= m\Delta\lambda \\
\Delta\theta &= \frac{m\Delta\lambda}{p\cos(\theta_d)}
\end{aligned}$$

4.0.5 Séparation de longueurs d'onde par le réseau

Deux longueurs d'ondes sont séparables avec le réseau si les pics de diffraction correspondant sont séparés par un écart angulaire supérieur à la demi largeur de chaque pic. Exprimer cette condition en fonction de $\Delta\theta_a$ et $\Delta\theta$ définis précédemment.

L'écart minimal est défini par $\Delta\theta_a = \Delta\theta$, soit en remplaçant par les expressions :

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda}{mN}$$

Commentaires sur l'expression trouvée

- Plus le réseau a de fentes illuminées (N grand), plus les pics sont fins, et donc plus le réseau est capable de séparer des longueurs d'onde proches.
- Plus l'ordre de diffraction (m) est élevé, plus les pics sont angulairement espacés, et plus le pouvoir de résolution est élevé. C'est pourquoi les réseaux sont souvent utilisés à des ordres m élevés pour la spectroscopie de haute précision.
- Remarquablement, le pouvoir de résolution du réseau ne dépend pas directement de la longueur d'onde λ, mais uniquement des caractéristiques du dispositif (N) et de l'ordre utilisé (m).