Chapitre 1

Cinématique du solide et des solides en contact

1.1 Cinématique du solide

1.1.1 Modèles du solide indéformable

Solide indéformable

Définition 1.1 : Solide indéformable

C'est un solide (S) “idéal” dans lequel les atomes sont rigouresuement fixes les uns par rapport aux autres. Tous les points A et B lui appartenant ont une distance constante au cours du temps.

Ainsi, 3 points situés à des distances fixes forment un solide.

Point lié à un solide

Définition 1.2

C'est un point restant à une distance fixe de tous les autres points du solide (S).

× . On le note $P \in S$ i . Le centre d'une sphère creuse se déplace comme s'il était lié au solide, mais il n'appartient pas au solide.

× **Difficulté**
Il peut se trouver à l'extérieur du solide

i **Info**
On note alors la vitesse de $A \in S$, $\vec{v}(A \in S/R)$

Repère

SI on définit 4 points O,I,J,K formant un repère, alors R est le repère lié ua solide. On peut associer à tous solide un repère

Degrès de liberté (DDL)

Définition 1.3 : Degrès de liberté

Ce sont des coordonnées importantes indépendants qui définissent la position d'un solide dans l'espace au cours du temps

Ainsi, pour un solide à 3 dimensions, il y a 6 DDL :

- 3 de translation (x,y,z) pour repérer le centre de masse
- 3 de rotation (autour des axes) pour l'orientation des autres points du solide par rapport au centre de masse.

1.1.2 Champ des vitesses dans un solide

Quand on travaille avec un solide, on considère un ensemble de points. La notion de vitesse d'un solide n'a donc pas de sens et on introduit la notion de champ de vitesse.

Si on considère 2 points A et B, on a $AB = K$ donc

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}^2}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$2(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$
$$\overrightarrow{AB} \cdot (-\overrightarrow{v_{A/R}} + \overrightarrow{v_{B/R}}) = 0$$

On obtient

Proposition 1.1 : Relation du champ des vitesses dans un solide (Varignon)

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v_{A/R}} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v_{B/R}}$$

qui équivaut à

$$\overrightarrow{v_{B\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\omega_{S/R}}$$

avec $\overrightarrow{\Omega}$ le vecteur rotation du solide par rapport à R.

On peut démontrer l'une en fonction de l'autre

$$\overrightarrow{v_{B\in S/R}} = (\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t})_R = (\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t})_R + (\frac{\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t})_R$$
$$= \overrightarrow{v_{A\in S/R}} + (\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t})_{R=S} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{v_{A\in S/R}} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{v_{A\in S/R}} + \overrightarrow{\Omega}_{S/R} \wedge \overrightarrow{AB}$$
$$= \overrightarrow{v_{A\in S/R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{S/R}$$

Torseur

On définit le torseur avec un vecteur "somme" et un vecteur "moment".
Le torseur cinématique d'un solide en un point A est

$$[V(A/R)] = \overrightarrow{\Omega}\overrightarrow{v(A \in S/R)}$$

. On a

$$\overrightarrow{Moment}(B) = \overrightarrow{Moment(A)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{Resultante}$$

1.1.3 Mouvements d'un solide

Translation d'un solide

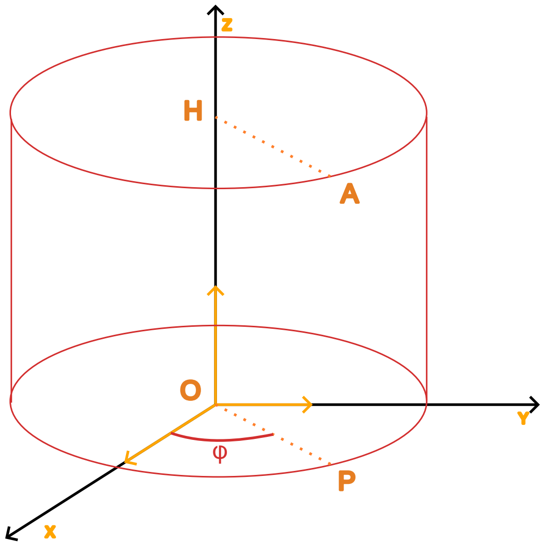
Un solide S est en translation par rapport à un référentiel R si tous les points de (S) ont même vitesse par rapport à R ou si $\overrightarrow{\Omega}_{S/R} = \overrightarrow{0}$. On peut avoir une translation

- uniforme : norme de la vitesse de chacun des points est constante
- rectiligne : le vecteur vitesse de tous les points garde une direction constante
- circulaire : la trajectoire est un cercle ×

× **Difficulté**
L'objet ne tourne pas autour de lui-même mais autour d'un point.

Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

Un solide s a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe par rapport à R s'il existe une droite liée à S dont les points sont fixes par rapport à R. On a alors



- $HA = \rho = OP$
- $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OP}})$

Pour trouver $\overrightarrow{v_{A\in S}}$, on applique Verignon avec $\overrightarrow{\Omega} = \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z}$. On trouve :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_A} &= \overrightarrow{0} - (z\overrightarrow{e_z} + \rho\overrightarrow{e_\rho}) \wedge \dot{\varphi}\overrightarrow{e_z} \\ &= \rho\dot{\varphi}\overrightarrow{e_\varphi}\end{aligned}$$

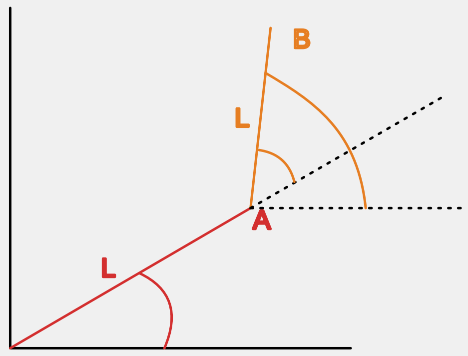
Angle orienté

Il faut bien regarder si la rotation est dans le sens horaire (vitesse angulaire positive) ou antihoraire (vitesse angualire négative)

Mouvement général

Le mouvement le plus général d'un solide associe translation et rotation. Le mouvement de n'importe quel point $B \in S$ sera défini à partir de la connaissance de la vitesse d'un autre point de S

Exemple en deux dimensions



On a $l = OA = AB$ et $\varphi_1 = \widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OA}}$ et $\varphi_2 = \widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{AB}}$ et $\beta = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}}$. De plus, $\overrightarrow{\Omega_{OA}} = \cdot\varphi_1 \overrightarrow{e_z}$ et $\overrightarrow{\Omega_{AB}} = \cdot\varphi_2 \overrightarrow{e_z}$ Il faut toujours prendre la vitesse angulaire par rapport à un axe fixe.

En se plaçant dans 2 bases orthonormées, on veut déterminer $\overrightarrow{v_{A/R}}$ et $\overrightarrow{v_{B/R}}$.

Donc, avec Verignon

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_A/R} = \overrightarrow{A \in OA/R} = \overrightarrow{v_{A \in AB/R}} \\
&= \overrightarrow{v_{O \in OA/R}} + \overrightarrow{AO} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{OA/R} \\
&= -l\overrightarrow{e_\rho} \wedge \dot{\varphi}_1 \overrightarrow{e_z} \\
&= l\dot{\varphi}_1 \overrightarrow{e_{\varphi_1}}
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_{B \in AB/R}} &= \overrightarrow{A \in OA/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{AB/R} \\
&= l\dot{\varphi}_1 \overrightarrow{e_{\varphi_1}} - l\overrightarrow{e_{\rho_2}} \wedge \dot{\varphi}_2 \overrightarrow{e_z} \\
&= l\dot{\varphi}_1 \overrightarrow{e_{\varphi_1}} + l\dot{\varphi}_2 \overrightarrow{e_{\varphi_2}}
\end{aligned}$$

1.2 Cinématique des solides en contact

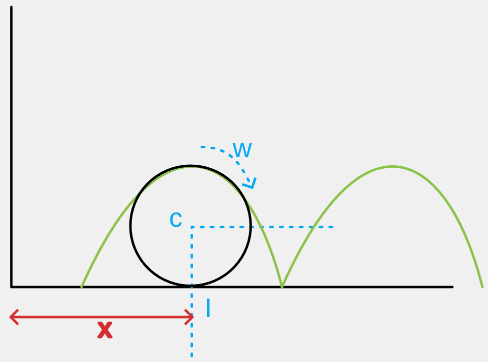
1.2.1 Introduction

On considère 2 solides se déplaçant par rapport à R en restant en contact permanent entre eux. On suppose que le contact est ponctuel et s'effectue au point I. On distingue en I :

- Le point géométrique I
- Le point matériel $I_1 \in S_1$
- Le point matériel $I_2 \in S_2$

Ces derniers sont confondus à l'instant t.

Disque (S1) roulant sur un plan (S2)



Si on utilise $\overrightarrow{v_{I/R}} = (\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OI}}{\mathrm{d}t})_R = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\overrightarrow{e_x}) = \dot{x}\overrightarrow{e_x}$, on a la vitesse du point géométrique.

Pour déterminer $\overrightarrow{v_{I_1 \in S_1}} = \overrightarrow{C \in S_1/R} + \overrightarrow{I_1C} \wedge \omega\overrightarrow{e_z} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} - r\omega\overrightarrow{e_x}$.

On a donc $\overrightarrow{v_{I_1}} = (\dot{x} - r\omega)\overrightarrow{e_x} \neq \overrightarrow{v_I} \neq \overrightarrow{v_{I_2 \in sol}}$

1.2.2 Vitesse de glissement

Définition 2.1 : Vitesse de glissement

Notée $\overrightarrow{v_g}$, elle est définie par

$$\overrightarrow{v_{g1/2}} = \overrightarrow{v_{I_1 \in S_1/R}} - \overrightarrow{I_2 \in S_2/R}$$

1.2.3 Condition de roulement sans glissement

Définition 2.2 : CRSG

Elle correspond à $\overrightarrow{V_g} = 0$. On a alors $\overrightarrow{v_{I_1 \in S_1/R}} = \overrightarrow{I_2 \in S_2/R}$

Disque

On a vue que $\overrightarrow{V_{I_1}} = (\dot{x} - r\omega)$, $\overrightarrow{I_2} = \overrightarrow{0}$. On en déduit que pour se trouver en CRSG, il faut que $\dot{x} = r\omega$