Mécanique

Analyse dimensionnelle

S.Deheuvels

Paulhenry Saux

5 septembre 2024

Français

Chapitre 1

Analyse Dimensionnelle

1.1 Intro

La physique nécessite de mesurer le monde qui nous entoure. Il faut définir des grandeurs physiques.

1.2 Grandeurs physiques et unités associées

1.2.1 Grandeurs physiques

Définition

Propriété d'un système que l'on peut mesurer ou calculer

Exemple

longueur, distance, masse, force, énergie, puissance, température, vitesse, accélération, fréquence, temps, pression, longueur d'onde, tension, résistance, capacité, charge, angle, qt de matière

Ces grandeurs ne sont pas toutes indépendantes : Vitesse = Longueur/-Temps

mesure : Pour évaluer une grandeur G, on la compare a une grandeur G_0 de même nature qui sert de référence. Cette référence se nomme étalon de mesure. La mesure $m_g = \frac{G}{G_0}$.

On appelle dimension la nature d'une grandeur. Elle se note $[G]$.

Deux grandeurs G et G' qui ont la même dimension sont dites homogènes. On note $[G] = [G']$ ou $G\ G'$

1.2.2 Systèmes de mesure

Un système de mesure est un ensemble de grandeurs physiques qui sont

- indépendantes (on ne peut pas reconstituer une grandeur du système avec les autres)
- complètes (toute grandeur physique doit pouvoir être générée à partir des grandeurs du système)

Le système choisi doit avoir un caractère universel. i

i Info
Aparté historique : A la révolution, on utilisait en pieds, pouce. Au 19e, les scientifiques réclament un système fiable et universel. En 1875 a lieu la convention du mètre à Paris : création du Bureau International du poids et des mesures + Mise en place de conférences officielles générales des Poids et Mesures + Création du SI + création d'étalons de longueur et de masse le plus précis possible et reproductible

1.2.3 Système international

7 grandeurs physiques indépendantes

Dimension	Unité
Longueur (L)	mètre (m)
Masse (M)	kilogramme (kg)
Temps (T)	seconde (s)
Intensité du courant (I)	ampère (A)
Température (θ)	kelvin (K)
Qt de matière (N)	mole (mol)
intensité lumineuse (J)	candela (cd)

1.3 Dimension d'une grandeur physique

1.3.1 Dans le SI

Il est constitué de grandeurs indépendantes et il est complet. Pour toute grandeur physique G, il existe une unique décomposition dans le SI du type : $[G] = [L]^a[T]^b[M]^c[I]^d[\theta]^e[N]^f[J]^g$ Trouver la dimension de G dan le système revient à déterminer les valeurs des exposants et l'unité de G dans le sysème est $m^a s^b kg^c A^d K^e mol^f cd^g$

Exmeple : [Vitesse] = $[L] \cdot [T]^{-1}$. Dans le SI, elle se mesure en $m \cdots^{-1}$.

1.3.2 Loi de combinaison des dimensions

Somme/Différence

Soit x,y 2 grandeurs physique. On ne peut sommer/soustraire x et y que si les grandeurs sont homogènes. Dans ce cas, [x+y] = [x] = [y]

Corrolaire : Si 2 grandeurs physiques apparaissent sommées/soustraites dans une expression, elles sont la même dimension.

Exemple : Périmètre d'un rectangle : 2a+2b = p [p] = [a]= [b]

Produit

$[x \times y] = [x] \times [y]$

$[\frac{x}{y}] = \frac{[x]}{[y]}$.

Exemple : Aire du rectangle : $A = a \times b$.

Dimension de A : $[L]^2$ et l'unité m^2.

1.3.3 Grandeur sans dimension

On dit qu'une grandeur G est sans dimension si [G] = 1

Exemple : Angle Définition d'un radian : $\alpha = \frac{l}{R}$.

Dimension d'un angle : $[\alpha] = \frac{[L]}{[L]} = 1$.

Exemple 2 : $[\tan(\theta)] = \frac{[L]}{[L]}$

! Grandeur sans dimension et unité

Elle peut cependant avoir une unité

× Liste des grandeurs sans dimension

- angles
- fonctions usuelles, cos, tan, ln, exp, log

- arguments des fonction usuelles : (dans $\exp(x)$, x est sans dimension Exemple : décroissance exp : Dimension de N(t) est la même que N_0 car celle de exp est 1. $\frac{-t}{\tau}$ est l'argument d'exp donc $[\frac{t}{\tau}] = 1$ donc $[\tau] = [T]$.

1.3.4 Dimension d'un vecteur

La dimension d'un vecteur correspond à la dimension de sa norme. Exemple du vecteur vitesse $[\overrightarrow{v}] = [L][T]^{-1}$

Vecteur unitaire

$[\overrightarrow{OM}] = [x][\overrightarrow{e_x}] \Rightarrow [e_x] = 1$

1.3.5 Dimension et unité de grandeurs dérivées

Méthode pour déterminer la dimension d'une grandeur dans le SI

Il faut trouver une formule qui fait intervenir cette grandeur + des grandeurs du SI (ou de dimensions connues).

Pour la vitesse, $v = \frac{d}{t}$.

Pour l'accélération : $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow [a] = [L][T]^{-2}$.

Pour une force dans le SI : $P = m \times g$ donc $[P] = [M][L][T]^{-2}$ donc : $kg \cdot m \cdot s^{-2}$

Fin séance 1

1.3.6 Homogénéité d'un résultat

L'analyse dimensionnelle permet de vérifier que le résultat d'un calcul a bien la dimension attendue.

Méthode

Il faut systématiquement vérifier que c'est le cas.

Exemple 1 : $y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0\sin(\alpha)t + h$.

y est en $[L]$

$-g\frac{t^2}{2}$: $[L][T]^{-2}[T]^2 = [L]$.

$v_0\sin(\alpha)t$: $[L][T]^{-1} \times 1 \times [T]^1 = [L]$

h : $[L]$.

Le résultat est homogène.

Exemple 2 :

$I(t) = I_0\sqrt{2}e^{-t/\tau}\cos wt + \phi$

I : $[I]$

$\sqrt{2}e^{-t/\tau}\cos wt + \phi$ sont des fonctions ou des nombres, donc de dimension 1, ou sans dimension.

Donc $[I_0] = [I(t)] = [I]$

Les arguments des fonctions usuelles sont sans dimension, donc $[\tau] = [T]$ et $[w] = [T]^{-1}$ et $[wt] = [\phi] = 1$.

Calcul littéral

Il faut toujours mener le calcul littéral jusqu'à son terme avant de remplacer les grandeurs par leurs valeurs numériques, sinon on perd l'info de la dimension.

1.3.7 Problème aux dimensions

C'est une méthode qualitative qui permet de déterminer comment une grandeur physique dépend d'autres grandeurs ϕ en raisonnant uniquement sur les dimensions.

Principe

On suppose qu'une grandeur physique G dépend d'un ensemble d'autres grandeurs g_i (intuition physique). On voudrait écrire que la grandeur $G = g_i^{\alpha_1} \times g_i^{\alpha_2} \times g_i^{\alpha_i}$.

On détermine les valeurs des exposants α_i à partir des dimensions des grandeurs.

Exemple de la période d'osscialtion d'un pendule

On veut déterminer la période P des oscillations de la masse m.

Elle va dépendre de g, l, θ, m. Le tout peut etre multiplié par une constante sans dimension.

Dimension des grandeurs : $[P] = [T]$

$[g] = [L][T]^{-2}$

$[l] = [L]$.

$[m] = [M]$.

$[M]^0[L]^0[T]^1 = [g]^\alpha[l]^\beta[m]^\lambda$

$[M]^0[L]^0[T]^1 = ([L][T]^{-2})^\alpha[L]^\beta[M]^\lambda$

$[M]^0[L]^0[T]^1 = [M]^\lambda[L]^{\alpha+\beta}[T]^{-2\alpha}$

On procède par identification pour créer un système d'équations et trouver les coefficients.

On suppose que la constante multiplication est de

Masse volumique de l'air

$\rho_{air} = 1.2\text{kg}/\text{m}^3$.

1.3.8 Lois d'échelles

Quand on compare 2 systèmes, il n'est pas nécessaire de connaître la valeur de la constante multiplicative.

Exemple : Période du pendule : $P\ \sqrt{\frac{l}{g}}$. On peut répondre à des questions comme :

Comment varie la période si on multiplie par 4 la longueur du fil.

$P = C\sqrt{\frac{l}{g}}$

$P' = C\sqrt{\frac{l'}{g}}$

La rapport vaut $\frac{P'}{P} = \frac{l'}{l}$ en simplifiant les fractions.

Si le fil est 4 fois plus long, le rapport vaut 2.

Comment varie P si le pendule oscille sur la lune. avec $(g_l = \frac{g_T}{6})$.

$\frac{P''}{P} = \frac{g}{g''} = \sqrt{6}$

1.3.9 Calculs dans le SI

Méthode

Pour obtenir un résultat dans le SI, il faut mettre toutes les grandeurs dans les unités du SI. Il faut donc penser à convertir.

Exemple : $\rho = 1g \cdot cm^{-3} = 10^6 g \cdot m^{-3} = 10^3 kg \cdot m^{-3}$.

Énergie d'ionisation d'un atome en eV à convertir en J. Distance entre 2 étoiles en années lumières à convertir en m.