Chapitre

4

Intégrales

4.1 Intégrale de Riemann

Définition 1.1 : Subdivision

C'est toute famille de réels $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Son pas est la quantité $\max(x_1 - x_{i-1})$. On dit que v est plus fine, si tout élément de de v est un élément de u.

C'est une subdivision régulière si $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.

Proposition 1.1

Si u et v sont des subdivisions, alors il existe une subdivision plus fine que u et v.

Définition 1.2

Une fonction est dite en escalier s'il existe une subdivision u telle que la fonction est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$. On dit alors que u est une subdivision adaptée à la fonction.

Définition 1.3 : Fonction continue par morceaux

On dit qu'une fonction est continue par morceaux si on peut trouver une subdivision adaptée à f telle que la restriction de f à chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$ soit continue et ademette des limites finies à droite de x_{i-1} et à gauche de x_i.

Remarque

Si une fonction est cpm, alors $\forall x_0 \in [a,b]$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(b)$ existent et sont finies.

Exemple : $g(x) = 0 si x = 0, \sin(\frac{1}{x} si x > 0)$

Proposition 1.2

La combinaison linéaire (et produit/division) de fonctions en escaliers est une fonction en escalier.

Proposition 1.3

Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée

Définition 1.4

f est prolongeable par continuité en a si f possède une limite a.

Le prolongement par continuité de f en a est bien définie en a. On rajoute le point duquel la fonction se rapproche.

Théorème 1.1 : Approximation d'une fonction continue par morceaux

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment. Pour tout $\varepsilon > 0, \exists \theta$ en escalier tq

$$\forall x \in [a,b], |f(x) - \theta(x)| < \varepsilon$$

Proposition 1.4

Soit fcpm sur $[a,b]$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \phi, \psi,$ en escalier telles que $\forall x \in [a,b], \phi(x) \leq f \leq \psi(x)$ et $\psi - \phi \leq \varepsilon$.

Proposition 1.5

On a

$$\int \varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

qui ne dépend pas de la subidivisoon choisie, avec c_i la valeur de la fonction entre x_i et x_{i-1}.

Proposition 1.6

Les propriétés de linéarité, de croissance, de positivité et d'additivité sont conservées.

Proposition 1.7

On note E^+, E^- l'ensemble des fonctions en escalier supérieures et inférieures à f. La borne supérieure de l'ensemble des E- et la borne inférieure de la borne des E+ sont égales.

Définition 1.5

Si f est cpm, on appelle intégrale de f $\sup(\{\int \varphi, \varphi \in E^-(f)\}) = \inf(\{\int \psi, \psi \in E^+(f)\})$.

Proposition 1.8

On dit que la fonction est intégrable au sens de Riemann si $\sup(I^-) = \inf(I^+(f))$

Proposition 1.9 : VA de l'intégrale

Si f est cpm sur un intervalle, alors $|f|$ l'est aussi et $|\int_I f| \leq \int_I |f|$

Proposition 1.10 : Inégalité de la moyenne

Si f et g sont cpm, alors leur produit l'est aussi et $|\int_I fg| \leq \sup_I(|f|) \times \int_I |g|$

Proposition 1.11 : Corollaire des bornes

Si f est cpm, on a $|\int_{[a,b]} f| \leq (b-a)\sup_{[a,b]}(|f|)$

Proposition 1.12 : Valeur moyenne

$\inf_{[a,b]}(f) \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} \leq \sup_{[a,b]}(f)$

Théorème 1.2 : Intégrale non nulle

Si f est continue et positive sur [a,b], alors $\int f = 0 \Rightarrow f = 0$ sur $[a,b]$

4.2 Somme de Riemann

Définition 2.1

Soit f continue sur $[a,b]$ et u une subidivision. On appelle Somme de Riemann associée à u la quantité $\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n})$

Théorème 2.1 : Limite de la somme de Riemann

$\lim S_R = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

4.3 Intégrales et primitives

importance de l'intervalle I : arctan(x) + arctan(1/x) a une dérivée nulle mais n'est pas constante.

Théorème 3.1 : Théorème fondamental

La fonction F_a définie par $\forall i \in I, F_a(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a

Démonstrations

Théorème 3.2 : Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.
$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$

Théorème 3.3 : Changement de variable

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$, on a $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\ dt$

Si F est une primitive de f alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $\big(f \circ \varphi\big) \cdot \varphi'$.

4.4 Intégrale à paramètres

Définition 4.1 : Fonction continue sur 2 variables

Soit $\bar{x}, \bar{t} \in I \times [a, b]$. On dit que la fonction f est continue en ces 2 points si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, t) \in I \times [a, b], |x - \bar{x}| \leq \delta$$

et de même pour t

On retrouve les caractérisations (séquentielle) habituelles de la continuité.

Théorème 4.1 : Continuité des intégrales à paramètres

Si f est continue sur $I \times [a, b]$, F est continue sur I.

Définition 4.2 : Dérivée partielle

On dit que d admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur I si pour tout $t \in [a, b]$, la focntion

Théorème 4.2 : Dérivabilité des intégrales à paramètre

Si f est continue sur $I \times [a, b]$, admet une dérivée partielle par rapport à la première variable sur I, et la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a, b]$, alors $F : x \in I \to \int_a^b f(x, t)\mathrm{d}t$ est de classe C1 sur I et $F' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\mathrm{d}t$