Chapitre

2

Cinématique, forces, équilibre

Dans ce cours, on s'intéresse à la mécanique du point matériel. Le système d'étude est assimilé à un point matériel qui posséderait l'ensemble de la masse du système, confondu à son centre de gravité. On suppose le centre de gravité et de masse confondu.

C'est une approximation correcte pour des systèmes dont les dimensions sont très petites devant (< <) les dimensions de l'espace dans lequel ils évoluent.

Exemple : Mouvement de la Terre autour du Soleil. $R_T = 6400km$, $R_S = 700000km$, $d_{ST} = 150 \cdot 10^6$. Ici, $R_T, R_S << d_{ST}$, donc on peut appliquer la simplification

2.1 Repérage spatio-temporel

2.1.1 repère temporel

Revient à se donner une origine des temps, évènement pour lequel t=0.

Théorème 1.1 : Hypothèse

On suppose le temps "universel". Le temps mis pour effectuer un mouvement est identique pour le système qui bouge et pour un observateur. Cette hypothèse est correcte tant que la vitesse des objets < < vitesse de la lumière, c'est à dire pour des mouvements dits non relativistes.

2.1.2 Repère spatial

En général, le mouvement a lieu dans l'espace à trois dimensions, il faut se donner 3 axes non coplanaires, i.e pas dans le même plan ainsi qu'un point de référence (origine).

Exemple : On se donne un repère cartésien (x,y,z)

2.1.3 Référentiel

C'est un solide par rapport auquel on étudie le mouvement et que l'on considère comme fixe durant le mouvement. Le mouvement dépend du référentiel choisi et in faut toujours le préciser.

2.2 Rappel de géométrie vectorielle

2.2.1 base cartésienne et repère cartésien

L'espace à trois dimensions est un espace vectoriel de dimension 3. On dit que 3 vecteurs de l'espace $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ forment une base de l'espace s'ils sont dits indépendants. On ne peut pas en écrire un à partir des 2 autres, i.e ne doivent pas être coplanaires.

Dans ce cas, pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, il existe une unique décomposition du type $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y} + c\overrightarrow{e_z}$.

Schéma 2.2.1

Le choix des vecteurs est arbitraire mais généralement, on va les choisir

- orthogonaux entre deux à deux
- unitaires (de norme 1)
- orientés dans le sens direct (règle "de la main droite" : pouce = $\overrightarrow{e_x}$, index = $\overrightarrow{e_y}$ et majeur = $\overrightarrow{e_z}$. Elle est directe si $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_y}$

Si ces 3 conditions sont vérifiées, on dit que la base $B(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est une base orthonormée directe (BOND)

Théorème 2.1 : Définition

On appelle repère la combinaison d'une base et d'une origine O : $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$

2.2.2 Coordonnées et composantes

Soit M un point de l'espace muni du repère $R(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. $\overrightarrow{OM} = a\overrightarrow{e_x} + b\overrightarrow{e_y} + c\overrightarrow{e_z}$.

Les quantités scalaires x, y et z sont les coordonnées du point M dans le repère R. On écrit $M(x, y, z)_R$.

Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ peut se décomposer comme $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$

Les scalaires u_x, u_y, u_z sont appelées composantes du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans le repère R. On écrit $\overrightarrow{u}(u_x, u_y, u_z)_R$.

Exercice 2.2.2

2.2.3 Produit scalaire et norme

Norme

Si la base B est une base orthonormée directe, alors $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$.

Produit scalaire entre 2 vecteurs

Schéma 2.2.3

Théorème 2.2 : Définition

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\theta)$.

Proriétés du produit scalaire :

- C'est un nombre
- $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = ||\overrightarrow{u}||^2$
- $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} = 0$
- Il est commutatif : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$ car $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$.
- Il est bilinéaire : $(\lambda\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}) \cot \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} + \beta\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w}$.
- Dans une BOND, on a $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_j} = \delta_{ij}(= 0 \iff i \neq j \vee = 1 \iff i = j)$.
- Dans une BOND : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = u_x v_x + u_y v_z + u_z v_z$

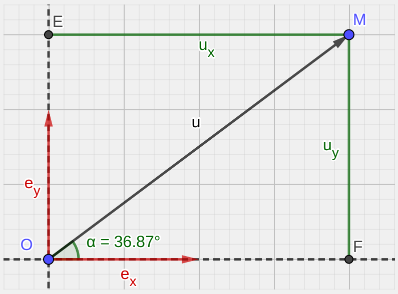
2.2.4 Projection sur une base

Méthode 1

Soit un vecteur $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$. On peut retrouver les composantes du vecteur en effectuant le produit scalaire entre ce vecteur et les vecteurs de la base.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} = u_x$. De même, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = u_y$ et $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z} = u_z$. On peut donc écrire $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x}) \cdot \overrightarrow{e_x} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y}) \cdot \overrightarrow{e_y} + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_z}) \cdot \overrightarrow{e_z}$.

Exemple en 2D



$u_x = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_x} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{e_x}|| \cos\theta = ||\overrightarrow{u}|| \cos\theta$

$u_y = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{e_y} = ||\overrightarrow{u}||||\overrightarrow{e_y}|| \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = ||\overrightarrow{u}|| \sin(\theta)$

Produit scalaire avec les coordonnées

Méthode 2

Projeter $\overrightarrow{u}$ dans la base revient à écrire $\overrightarrow{u}$ sous la forme $\overrightarrow{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y}$ et déterminer u_x, u_y. On se place dans un triangle rectangle du schéma précédant

On utilise les relations de trigonométrie : $u_x = ||\overrightarrow{u}|| \cos(\theta)$ et $u_y = ||\overrightarrow{u}|| \sin(\theta)$

2.2.5 Produit vectoriel

Soit 2 vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$ est l'unique vecteur tel que :

$\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$

de norme $||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times |\sin(\theta)|$ avec θ l'angle entre $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

De plus, l'ensemble $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe.

$\overrightarrow{w}$ est unique car on a défini sa direction, sa norme et son sens.

Propriétés

- C'est un vecteur
- Il est antisymétrique : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$

- Il est linéaire : $(\lambda\vec{u} + \beta\vec{v}) \wedge \vec{w} = \lambda\vec{u} \wedge \vec{w} + \beta\vec{u} \wedge \vec{w}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, la norme de $\vec{w}$ est le produit des normes des 2 vecteurs.
- Dans une BOND, $\vec{e_x} \wedge \vec{e_y} = \vec{e_z}$ et $\vec{e_x} \wedge \vec{e_z} = -\vec{e_y}$
- $||\vec{u} \wedge \vec{v}||$ = aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

Sur le sens du produit dans une BOND

Quand on le fait de gauche à droite, le produit est positif, dans le cas contraire, il est négatif.

Avec les coordonnées

$\vec{u} = u_x\vec{e_x} + u_y\vec{e_y} + u_z\vec{e_z}$

$\vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z}$

Le produit vaut $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_yv_z - u_zv_y \\ u_zv_x - u_xv_z \\ u_xv_y - u_yv_x \end{pmatrix}$

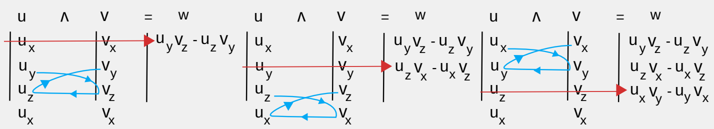
Méthode du Gamma

On écrit côte à côte les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dont on veut faire le produit vectoriel.

On réécrit u_x en-dessous de u_z et v_x en-dessous de v_z

Pour avoir les coordonnée x, on cache les coordonnées suivant x et on fait le "calcul en γ.

Pour obtenir les autres coordonnées, on procède de la même manière.



Théorème 2.3 : Démonstration

$$\begin{aligned}
\vec{u} \wedge \vec{v} &= (u_1\,\vec{e}_1 + u_2\,\vec{e}_2 + u_3\,\vec{e}_3) \wedge (v_1\,\vec{e}_1 + v_2\,\vec{e}_2 + v_3\,\vec{e}_3) \\
&= u_1\,v_2\,(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + u_1\,v_3\,(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3) + u_2\,v_1\,(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1) + u_2\,v_3\,(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3) + \ldots \\
&= (u_1\,v_2 - u_2\,v_1)\,(\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) + (u_2\,v_3 - u_3\,v_2)\,(\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3)\,(u_3\,v_1 - u_1\,v_3)\,(\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1) \\
&= (u_1\,v_2 - u_2\,v_1)\,\vec{e}_3 + (u_2\,v_3 - u_3\,v_2)\,\vec{e}_1 + (u_3\,v_1 - u_1\,v_3)\,\vec{e}_2 \\
&= (u_2\,v_3 - u_3\,v_2)\,\vec{e}_1 + (u_3\,v_1 - u_1\,v_3)\,\vec{e}_2 + (u_1\,v_2 - u_2\,v_1)\,\vec{e}_3
\end{aligned}$$

2.3 Cinématique

C'est l'étude du mouvement sans ses causes.

2.3.1 vecteur position

Soit un point M de l'espace repéré par rapport à un repère R composée d'une BOND. Il représente la position du centre de masse de l'objet. Il dépend du temps car la position de M varie au cours du temps.

Le vecteur $\overrightarrow{OM(t)} = x_m(t)\overrightarrow{e_x} + y_m(t)\overrightarrow{e_y} + z_m(t)\overrightarrow{e_z}$

Les quantités $x_m(t), y_m(t) et z_m(t)$ sont les équations horaire du mouvement. Ce sont des équations paramétriques qui indiquent quel mouvement va suivre M. On peut en déduire l'équation cartésienne de la trajectoire en supprimant la dépendance au temps

2.3.2 Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{M/R}} = \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} = \frac{\overrightarrow{OM(t+dt)} - \overrightarrow{OM(t)}}{dt}$$

> **Direction du vecteur vitesse**
>
> Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire et dans le sens du mouvement

Composantes du vecteur vitesse

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_{M/R}} &= \frac{d\overrightarrow{OM(t)}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(x_m(t)\overrightarrow{e_x} + y_m(t)\overrightarrow{e_y} + z_m(t)\overrightarrow{e_z}) \\
&= \frac{d}{dt}(x_m(t)\overrightarrow{e_x}) + \frac{d}{dt}(y_m(t)\overrightarrow{e_y}) + \frac{d}{dt}(z_m(t)\overrightarrow{e_z}) \\
&= \dot{x}_m(t)\overrightarrow{e_x} + \dot{y}_m(t)\overrightarrow{e_y} + \dot{z}_m(t)\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

2.3.3 Vecteur accélération

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_{M/R}} &= \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} \\
&= \frac{d^2\overrightarrow{OM(t)}}{dt^2}
\end{aligned}$$

> **Direction du vecteur accélération**
>
> Dans le cas général, il n'est pas tangent à la trajectoire.

Composantes du vecteur accélération

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a_{M/R}} &= \frac{d\overrightarrow{v(t)}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(v_x(t)\overrightarrow{e_x} + v_z(t)\overrightarrow{e_y} + v_z(t)\overrightarrow{e_z}) \\
&= \frac{d}{dt}(v_x(t)\overrightarrow{e_x}) + \frac{d}{dt}(v_y(t)\overrightarrow{e_y}) + \frac{d}{dt}(v_z(t)\overrightarrow{e_z}) \\
&= \ddot{x}_m(t)\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}_m(t)\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}_m(t)\overrightarrow{e_z}
\end{aligned}$$

2.3.4 Changement de référentiel dans le cas d'une translation

Soit 2 référentiels R et R' tels que R' est une translation rectiligne par rapport à R avec une vitesse $\overrightarrow{V_{R'/R}}$

Dans ce cas on a $\overrightarrow{V_{M/R}} = \overrightarrow{V_{M/R'}} + \overrightarrow{V_{R/R'}}$. C'est la loi de composition des vitesses.

Exemple du marcheur et nageur

R est le référentiel lié au sol et R' lié à l'eau.

On a : $\overrightarrow{V_{R'/R}} = V\overrightarrow{e_x}$ avec $V = 1$m/s.

$||\overrightarrow{V_{M/R}}|| = 2$m/s (Vitesse du marcheur par rapport au sol)

$||\overrightarrow{V_{N/R}}|| = 2$ (Vitesse du nageur par rapport au à l'eau)

Donc pour le marcheur : $t_A = t_B = \frac{d_{ab}}{||\overrightarrow{V_{M/R}}||} = \frac{6}{2}$

Donc pour le nageur :

Aller : $\overrightarrow{V_{N/R}} = \overrightarrow{V_{N/R'}} + \overrightarrow{V_{R'/R}} = 2\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_x} = 3\overrightarrow{e_x}$ donc 3m/s

Retour : $\overrightarrow{V_{N/R}} = \overrightarrow{V_{N/R'}} + \overrightarrow{V_{R'/R}} = -2\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_x} = -\overrightarrow{e_x}$ donc 1m/s

2.3.5 Types de mouvements

Mouvement rectiligne

1 seule dimension $\overrightarrow{a} = a_x\overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{v} = v_x\overrightarrow{e_x}$

$\overrightarrow{OM} = x(t)\overrightarrow{e_x}$

Mouvement uniforme

Mouvement pour lequel $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ est constant.

Implications fausse

Ne veut pas dire que le vecteur vitesse est constant ou que le vecteur accélération est nul (voir orbite de la terre dans le repère de Frenet)

On a un mouvement uniforme si $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{a} = 0$, donc que $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{a}$.

Démonstration

Le mouvement uniforme $\iff$ $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ = constant

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{d}{dt}||\overrightarrow{V_{M/R}}|| = 0\\
&\iff \frac{d}{dt}||\overrightarrow{V_{M/R}}||^2 = 0\\
&\iff \frac{d}{dt}\overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \overrightarrow{V_{M/R}} = 0\\
&\iff \frac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt} \cdot \overrightarrow{V_{M/R}} + \overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \frac{d\overrightarrow{V_{M/R}}}{dt} = 0\\
&\iff 2\overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \overrightarrow{a_{M/R}} = 0\\
&\iff \overrightarrow{V_{M/R}} \cdot \overrightarrow{a_{M/R}} = 0
\end{aligned}$$

Conséquences :

Si $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ alors $\frac{d||\overrightarrow{V_{M/R}}||}{dt} > 0$ et $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ augmente au cours du temps (mouvement accéléré).

Si $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ alors $\frac{d||\overrightarrow{V_{M/R}}||}{dt} < 0$ et $||\overrightarrow{V_{M/R}}||$ diminue au cours du temps (mouvement décéléré).

$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ si $\cos\alpha > 0 \iff \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$ si $\cos\alpha < 0 \iff \alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

2.4 Rappels sur les lois de Newton

On fait maintenant de la dynamique, qui consiste à étudier le mouvement à partir de ses causes.

2.4.1 Rappel sur le centre de gravité

Chaque système est considéré comme un point confondu avec son centre de gravité G, position définie par le barycentre du système :

Théorème 4.1 : Définition du barycentre

$$\sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = 0$$

2.4.2 Référentiel galiléen

C'est un référentiel dans lequel un système isolé (pas de forces) ou pseudo-isolé (résultante des forces nulle) est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme (principe d'inertie). C'est un idéal vers lequel on peut tendre mais qu'on atteint pas.

Un référentiel qui en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est aussi galiléen.

> **Exemple**
>
> Le référentiel terrestre (référentiel du laboratoire) : En fait, il est en rotation par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Mais il peut être considéré comme galiléen si le temps du mouvement est très petit par rapport à un jour.

Référentiel géocentrique

L'origine est le centre de la Terre avec les axes pointés vers des étoiles lointaines ($\simeq$ fixe) mais il est en rotation autour du Soleil, donc considéré comme galiléen si le temps du mouvement est petit par rapport à une année.

Référentiel de Copernic

L'origine est le centre de gravité du système solaire mais aussi en rotation autour du centre de la galaxie $250 \cdot 10^6$ans.

2.4.3 Lois de Newton

Principe d'inertie

Il existe un certain type de référentiels, dits galiléens, dans lesquels ces principes s'appliquent.

Principe fondamental de la dynamique

Il s'exprime à partir de la quantité de mouvement $\overrightarrow{p_{M/R}} = m\overrightarrow{v}$:

> **Théorème 4.2 :** Relation

$$\frac{d\overrightarrow{p_{M/R}}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Dans la pratique, la masse du système est souvent constante, dans ce cas :

Théorème 4.3 : Relation

$$\frac{d\overrightarrow{p_{M/R}}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v_{M/R}}}{dt} = m\overrightarrow{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Principe d'action réciproque

La force exercée par A sur B vaut l'opposée de la force exercée par B sur A : $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$.

2.4.4 Exemples de forces

Force gravitationnelle

C'est la première intéraction fondamentale

Soit 2 corps de masse m_A et m_B. On a :

$$\overrightarrow{F_{g,A/B}} = -G\frac{m_A m_B}{d^2}\overrightarrow{e_r}$$

Proriétés :

- $||\overrightarrow{F_g}|| \simeq \frac{1}{r^2}$.
- Elle a une porté infinie
- Elle est toujours attractive
- Dans le cas particulier du poids, $\overrightarrow{F_{g,A/B}} = -m_A \times g$, avec $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$. Utiliser le poids n'est pas pénalisé si on est sur/proche de la surface de la Terre. (Pour un satellite, on utilise la force gravitationnelle au lieu du poids).

Remarque

Dans le contexte de la relativité générale, le concept de force gravitationnelle est remplacé par une courbure de l'espace-temps produite par des objets massifs.

Force électrostatique ou force de Coulomb

Soit 2 charges q_A et q_B, distante de r. On a, avec ϵ_0 la permittivité du vide :

$$\overrightarrow{F_{e,A/B}} = k_e \frac{q_A q_B}{r^2} \overrightarrow{e_r} = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0 r^2} \overrightarrow{e_r}$$

Si les 2 charges sont de même signe, la force est répulsive, dans la cas contraire, elle est attractive.

Elle est analogue à la force gravitationnelle mais elle peut être répulsive.

À l'échelle des particules, cette force domine sur la force gravitationnelle.

Remarque

Les 2 autres intéractions fondamentales sont l'intéraction forte (assure la cohésion des noyaux mais a une porté limité <taille des noyaux d'atome) et l'intéraction faible (responsable de la désintégration radioactive)

Poussée d'Archimède

On isole une quantité de fluide. S'il n'y avait que le Poids, il coulerait. or ce n'est pas la cas, il est en repos. Il faut donc une force de même diretion et norme et de sens opposé. Donc $\overrightarrow{\pi} = -\overrightarrow{P}$.

Théorème 4.4 : Expression de la poussée d'Archimède

Tout corps plongé dans un fluide (gaz ou liquide) est soumis à une force, appelée poussée d'Archimède qui à la même direction que le poids, de sens opposé et dont la norme est égale au poids du volume de fluide déplacé.

Exemple

Exemple 1 : On prend un objet. Voir schéma. $||\overrightarrow{\pi}|| = V_i \times \rho_f \times g$.

Exemple 2 : Cas où le corps est complètement immergé : $||\overrightarrow{\pi}|| =$

$\rho_f V g$ et $||\overrightarrow{P}|| = mg = \rho_0 V g$. On se demande si le corps descent, remonte ou reste sur place.

D'après la seonde loi de newton :

$$
\begin{aligned}
m\overrightarrow{a} &= \sum \overrightarrow{F_i} \\
\rho_0 V a_z \overrightarrow{e_z} &= -\rho_0 V g \overrightarrow{e_z} + \rho_f V g \overrightarrow{e_z} \\
\rho_0 a_z \overrightarrow{e_z} &= -\rho_0 g \overrightarrow{e_z} + \rho_f g \overrightarrow{e_z} \\
\rho_0 a_z &= -\rho_0 g + \rho_f g \\
a_z &= \frac{-\rho_0 g + \rho_f g}{\rho_0} \\
a_z &= \frac{-\rho_0 g + \rho_f g}{\rho_0}
\end{aligned}
$$

Ainsi, l'objet flotte si la masse volumique est plus faible que celle de l'eau.

Généralement, on néglige la poussée d'archimède dans l'air car $\rho_{air} = 1.2kg/m^3$ à l'expetion des mongolfières.

Ordre de grandeur de masse volumique

$\rho_{air} = 1.2kg/m^3$ et $\rho_{eau} = 1000kg/m^3$

Réaction du support

Si un support s'oppose à la chute d'un corps, il exerce sur lui une force appelée réaction du support (Exemple d'un objet immobile sur une table où elle est de même norme et de sens différent).

En l'absence de frottements solides, la réaction du support est orthogonale au mouvement. Dans le cas contraire, le support s'oppose au mouvement

2.4.5 Équilibre statique

Dans un référentiel galiléen, le principe d'inertie s'applique t on a l'équivalence $\sum_i \overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{0} \iff \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Le système est au repos ou en mouvement rectiligne uniforme

Exemple d'application

Si on sait qu'un objet est à l'équilibre statique, on sait que l'ac-

> célération est nulle est donc que la somme des force vaut 0.
>
> Imaginons une voiture en panne sur une route. On essaye de bouger la voiture, mais elle ne bouge pas

2.4.6 Résolution d'un problème de dynamique

Exemple de la chute libre (Ex4) : Lancer d'un ballon : On se donne un repère R et on va dire que le ballon est initialement à l'origine.

Définir le système d'étude

Ici, le sytème est Ballon

Définir un référentiel d'étude et un repère

Ici, c'est le référentiel terrestre, que l'on consière galiléen, avec un repère $R(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Faire un bilan des forces

Ici, uniquement le poids $\overrightarrow{P}$ avec les frottements de l'air négligés.

Appliquer le PDF

$m\overrightarrow{a_{b/r}} = \sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{P}$

Projeter les forces et le vecteur accélération suivant les axes du repère

Pour cela, il faut déterminer le nombrede dimension du problème et projeter : $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e_z}$. On a aucun mouvement suivant y car pas de force dans cette direction et pas de vitesse initiale suivant y. Donc le mouvement se fait dans le plan (Oxz).

On projette $\overrightarrow{a}$. le PDF projeté suivant les axes s'écrit : $m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

On obtient autant d'équations scalaires que de dimensions du problème.

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = 0$$

Intégrer une première fois pour obtenir la vitesse

$$\dot{x} = A$$
$$\dot{y} = B$$
$$\dot{z} = -gt + C$$

Donc, en déterminant les constantes

$$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha)$$
$$\dot{y} = 0$$
$$\dot{z} = -gt + v_0 \sin(\alpha)$$

Intégrer pour obtenir la position

$$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha)t + A'$$
$$\dot{y} = A$$
$$\dot{z} = -gt^2 \frac{1}{2} + v_0 \sin(\alpha)t + C$$

On détermine les conditions initiales et on trouve :

$$\dot{x} = v_0 \cos(\alpha)t$$
$$\dot{y} = 0$$
$$\dot{z} = -gt^2 \frac{1}{2} + v_0 \sin(\alpha)t$$

On obtient ainsi les équations horaire du mouvement

Calculer l'équation cartésienne de la trajectoire

Il faut éliminer le temps.

On va utiliser l'équation en x pour trouver que $t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ et l'injecter dans l'expression de $z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}x^2 + \tan(\alpha)x$. C'est l'équation d'une parabole.

Points remarquable

- Altitude maximale : correspond au point où la vitesse verticale s'annule : On veut que v_z au temps t_1 soit égale à 0. On utilise l'expression de $v_z = -gt + v_0 \sin(\alpha)$ pour trouver le temps où $v_z = 0$. L'altitude maximale vaut z_{t1}. On utilise l'équation horaire pour déterminer z en t_1.

2.5 Frottements solides

2.5.1 Approche phénoménologique

Théorème 5.1 : Définition

Elles sont liée au contact entre 2 surfaces

Exemple en l'absence de mouvement : Voir schéma 5.1. Le bilan des forces est $\overrightarrow{P}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{R}$ et on a : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$ On aura donc nécessairement pour $\overrightarrow{R}$

- une composante normale $\overrightarrow{N}$ qui s'oppose au poids
- une composante tangentielle $\overrightarrow{T}$ qui s'oppose à $\overrightarrow{F}$. Elle correspond aux forces de frottement solide et dépend des matérieux des surfaces en contact

Si la norme de $\overrightarrow{F}$ augmente, l'objet finit par se mettre en mouvement.

Quand $||\overrightarrow{F}||$ dépasse $\mu_s \overrightarrow{N}$, l'objet se met en mouvement. μ_s est le coefficient de frottement statique, sans dimension.

Quand l'objet est en mouvement, la norme de $||\overrightarrow{T}||$ reste contsnate et vaut $\mu_d \overrightarrow{N}$. μ_d est le coefficient de frottement dynamique, sans dimension. On a toujours $\mu_d < \mu_s$.

Matériaux	μ_s	μ_d
acier/acier	0.74	0.57
gomme/béton	1	0.8
glace/glace	0.1	0.03
articulation d'un humain	0.01	0.003

2.5.2 Lois de Coulomb

Elles sont empirique, i.e déduites de l'expérience. La réaction du support est décomposée en $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$

Théorème 5.2 : Lois

- Il y a équilibre si $||\overrightarrow{T}|| \leq \mu_s ||\overrightarrow{N}||$

> - Si il y a un glissement, $||\overrightarrow{T}|| = \mu_d||\overrightarrow{N}||$ et $\overrightarrow{T}$ dans la direction opposé au mouvement, c'est à dire : $\overrightarrow{T} = -||\overrightarrow{T}|| \times \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$.

2.5.3 Méthode de résolution

Pour résoudre un problème avec des frottements solides

On suppose l'équilibre

On écrit le principe fondamental de la statique

$$\sum \overrightarrow{F} = F\overrightarrow{F_1} + \cdots + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}$$

Les normes de T et N sont inconnues pour le moment.

On en déduit les valeurs de T et N

Soit $||\overrightarrow{T}|| \leq \mu_s||\overrightarrow{N}||$, il y a bien équilibre

Soit $||\overrightarrow{T}|| > \mu_s||\overrightarrow{N}||$, il y a glissement. On écrit alors le PFD avec $\overrightarrow{T} = -||\overrightarrow{T}|| \times \frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$.

2.5.4 Exemple du solide sur le plan incliné

On donne μ_s, μ_d le coefficient de frottement statique et dynamique entre le solide et le plan incliné.

- Sytème : Masse m
- Référentiel terrestre + repère $R(0, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$.

On suppose l'équilibre

Dans ce cas, $\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}$.

On fait la projectiond des forces dans R : $\overrightarrow{P} = -||\overrightarrow{P}|| \sin\alpha\overrightarrow{e_x} - ||\overrightarrow{P}|| \cos\alpha\overrightarrow{e_y} = -mg(\sin\alpha\overrightarrow{e_x} + \cos\alpha\overrightarrow{e_y})$.

$\overrightarrow{T} = T\overrightarrow{e_x} + 0ce_y$ avec T positif ou négatif

$\overrightarrow{N} = 0\overrightarrow{e_x} + Nce_y$ avec N positif ou négatif

On réécrit les équations :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + T + 0 = 0 & \Rightarrow T = mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha + 0 + N = 0 & \Rightarrow N = mg\cos\alpha 0 \end{cases}$$

On vérifie si c'est à l'équilibre.

On calcule $\dfrac{||\overrightarrow{T}||}{\mu_s||\overrightarrow{N}||} = \dfrac{mg\sin\alpha}{\mu_s mg\cos\alpha} = \dfrac{\tan\alpha}{\mu_s}$.

On a équilibre si $||\overrightarrow{T}|| \leq \mu_s||\overrightarrow{N}|| \iff \dfrac{\tan\alpha}{\mu_s} \leq 1 \iff \mu_s \geq \tan\alpha \iff \alpha \leq \tan^{-1}\mu_s$.

Si $\mu_s < \tan\alpha$, alors l'équilibre n'est pas possible. Il y a glissement et d'après la deuxième Loi de Coulomb, $||\overrightarrow{T}|| = \mu_d||\overrightarrow{N}||$ et $\overrightarrow{T}$ opposé au mouvement.

Il y a mouvement

On écrit le PFD : $\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$. On a donc :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + T & = m\ddot{x} \\ -mg\cos\alpha + 0 + N & = m\ddot{y} \end{cases}$$

Mais il n'y a pas de mouvement selon y donc, donc $\ddot{y} = 0$. On obtient :

$$\begin{cases} -mg\sin\alpha + T - m\ddot{x} & = 0 \\ -mg\cos\alpha + 0 + N & = m \times 0 \end{cases} \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

Mais $||\overrightarrow{T}|| = \mu_d||\overrightarrow{N}|| = \mu_d mg\cos\alpha$, donc $T = \mu_d mg\cos\alpha$.

On peut réécrire l' équation, pour obtenir $\ddot{x}$:

$$\begin{aligned} & -mg\sin\alpha + T - m\ddot{x} = 0 \\ & -mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha - m\ddot{x} = 0 \\ \iff & -mg\sin\alpha + \mu_d mg\cos\alpha = m\ddot{x} \\ \iff & -g(m\sin\alpha - \mu_d m\cos\alpha) = m\ddot{x} \end{aligned}$$

On obtient donc : $\ddot{x} = -g(\sin\alpha - \mu_d\cos\alpha)$, qui est constante.