Chapitre

5

Circuits du second ordre

5.1 Régime libre

5.1.1 RLC série

Analyse

Conditions initiales : le condensateur est initialement chargé et le courant i est nul.

Déductions : Par continuité de la charge dans le condensateur, $q(0-) = q(0+) = q_0$, par continuité du courant dans la bobine, $i(0+) = i(0-) = i_0$

> **Continuité de grandeurs**
>
> Dans un condensateur, la charge est continue et dans une bobine le courant est continu.

Mise en équation

On applique la loi des mailles : $U_R + U_C + U_L = 0$

On remplace les grandeurs par leurs expression :

- $U_r = R \times i$
- $U_C = \frac{q}{c}$
- $U_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

On obtient : $Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{c} = 0.$

En se rappelant que $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, on obtient $R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}^2t} + \frac{q}{c} = 0.$

On réécrit avec les notations de Newton et en divisant par L : $\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$.

On pose $\omega^2 = \frac{1}{LC}$ et $2\lambda = \frac{R}{L}$.

En remplaçant par ces notations, on obtient la forme canonique :

Théorème 1.1 : Forme canonique

$$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Solutions

On utilise l'équation caractéristique : $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2$. Cela admet 2 solutions r^+ et r^-.

Solution

La solution de l'équation différentielle est $a_1 e^{r^+ t} + a_2 e^{r^- t}$

On calcule le discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2$. On pose $\Delta' = \Delta/4 = \lambda^2 - \omega_0^2$ ×

× **Difficulté**
C'est pour pouvoir faire cette simplification que l'on a posé l'expression canonique avec 2λ et non λ

Si $\Delta' > 0$, il y a 2 racines réelles : $r^+ = -\lambda + \sqrt{\Delta'}$ et $r^- = -\lambda - \sqrt{\Delta'}$. On pose alors $\omega' = \sqrt{\Delta'}$.

On obtient $q(t) = e^{-\lambda t}(a_1 e^{\omega' t} + a_2 e^{-\omega' t})$. Il faut déterminer a_1, a_2 avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 = a_1 + a_2 \\ q(\dot{0}) = i_0 = 0 \Rightarrow -\lambda q_0 + \omega' a_1 - a_2\omega' = 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} a_1 = \frac{q_0}{2}(\frac{\lambda}{\omega'} + 1) \\ a_2 = \frac{q_0}{2}(\frac{-\lambda}{\omega'} + 1) \end{cases}$$

Si $\Delta' < 0$, il y a 2 racines complexes et on parle de régime de relaxation pseudo-périodique. On a $r^+ = -\lambda + j\sqrt{-\Delta'}$ et $r^- = -\lambda - j\sqrt{-\Delta'}$. On pose alors $\omega' = \sqrt{-\Delta'}$.

On obtient

$$q(t) = e^{-\lambda t}(a_1 e^{j\omega' t} + a_2 e^{-j\omega' t})$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$q(t) = e^{-\lambda t}(\beta\cos(\omega' t) + \gamma\sin(\omega' t))$$

$e^{-\lambda t}$ est le terme de relaxation et le reste le terme oscillant de période $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$.

Il faut déterminer a_1, a_2 avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} q(0) = q_0 \Rightarrow \beta = q_0 \\ \dot{q(0)} = i_0 = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{\lambda q_0}{\omega'} \end{cases}$$

On obtient donc :

$$\begin{cases} q(t) = q_0 e^{-\lambda t}(\cos(\omega' t) + \frac{\lambda}{\omega'}\sin(\omega' t)) \\ i(t) = \frac{-qu_0\omega_0^2}{\omega'} e^{-\lambda t}\sin(\omega' t) \end{cases}$$

Si $\Delta' = 0$, il y a 1 racine double et on parle de régime critique. On a $r = -\lambda$.

On écrit $q(t) = (at + b)e^{-\lambda t}$. On détermine avec les conditions initiales que $q(t) = q_0 e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)$ et $i(t) = -\lambda^2 q_0 t e^{-\lambda t}$.

5.1.2 R//C//L

Mise en équation

On peut écrire par les lois de base :

- Loi des noeuds :$I_R + I_L + I_C = 0$
- Loi des mailles : $U = RI_R = L\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{C}$

On remplace les grandeurs par leurs expression :

- $U_r = R \times i$
- $U_C = \frac{q}{c}$
- $U_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

On veut exprimer l'équation en fonction de I_L. On doit donc exprimer I_R et I_C en fonction I_L.

On a $= I_c = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = LC\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2}$ par la loi des mailles. De plus, $I_R = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}L}$ également par la loi des mailles.

On obtient en injectant dans la loi des noeuds les expressions trouvées : $\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}I_L}{\mathrm{d}t} + I_L + LC\frac{\mathrm{d}^2 I_L}{\mathrm{d}t^2} = 0$.

Ce qui donne en forme canonique : $\frac{\mathrm{d}^2 i_L}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i_L = 0$

On applique la même méthode pour trouver la solution qu'à la partie précédente.

5.2 Réponse à un échelon de tension

5.2.1 Mise en équation

Analyse

Conditions initiales : Le condensateur est déchargé et le courant est nul

On en déduit que $q(0-) = 0 = q(0+)$ et $i(0-) = 0 = i(0+)$ par continuité de la charge

On a $E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{c}$.

Or $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$.

Donc $\frac{E}{L} = R\dot{q} + L\ddot{q} + \frac{q}{c}$.

On l'écrit sous forme canonique : $\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$ avec $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $2\lambda = \frac{R}{L}$.

La solution est donc $q(t) = q^{(H)}(t) + q^{(P)}(t)$.

On cherche la solution particulière : $Q^{(P)} = K = CE$

5.2.2 Exemple R//L en série avec C

Analyse

Le condensateur est initialement déchargé et le courant dans la bobine $i_L(0-) = 0$.

On en déduit que $q(0-) = q(0+) = 0$ et $i_L(0+) = i_L(0-) = 0$. En appliquant la loi des mailles à l'instant 0+, on a $E = U_r(0+) + 0$ ✕ $\Rightarrow Ri_R(0+) = E$.

✕ **Difficulté**
Ce dernier 0 correspond à la tension de la bobine qui est nulle car elle vaut la dérivée de l'intensité qui reste à 0.

On a finalement $U_C(0+) = 0$ et $i(0+) = \frac{E}{R}$.

Mise en équation

On sait que

- Loi des mailles :$E = U_R + U_C$
- Loi des neuds : $i_R + I_L = i_C$
- Loi des mailles : $U_R = Ri_R = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$

- Propriété du condensateur : $i_C = c\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

On met en équation : $E = L\frac{\mathrm{d}i_l}{\mathrm{d}t} + U_C = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C\frac{\mathrm{d}U_C}{\mathrm{d}t} - \frac{u_r}{R}) + U_c = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} - \frac{(E-u_c)}{R}) + U_c$.

On obtient en développant $E = LC\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}U_c}{\mathrm{d}t} + U_c$ ou encore en mettant sous forme canonique :$\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \frac{u_c}{LC} = \frac{u_c}{L}$.

En posant $2\lambda = \frac{1}{RC}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, on a $\ddot{U}_c + 2\lambda\dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$