Chapitre 3

Séries numériques

3.1 Séries et sommes partielles

3.1.1 Vocabulaire

Définition 1.1

On appelle érie de terme général u_k la suite S_n définie par $S_n = \sum_{k=0} u_k$. On appelle S_n la somme partielle de la série.

Définition 1.2

On dit que la série est convergente si sa somme partielle est une suite convergente. Dans ce cas, on appelle somme de la série la limite de S_n.

Convergence

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes. Si on prend 2 séries qui différent d'un nombre fini de terme, elles auront la même nature. Autrement dit, àa converge si et seulement si cela converge à partir d'un certain rang.

Si une série ne converge pas, elle est divergente.

Définition 1.3 : reste

On note le reste d'une série convergente $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}$. On a $S = S_n + R_n$. C'est ce qui manque pour que S_n vale la limite de la série, S.

Proposition 1.1

Si une série est convergente, alors $\lim\limits_{+\infty} R_n = 0$

Exemple

Une série géométrique est convergente si $|q| < 1$.

Série harmonique

On a $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{t}$ si $t \in [k, k+1]$. Donc $\frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}$ d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} = \int_1^{n+1} = \frac{1}{t}$ par la relation de Chasles. D'où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) \to +\infty$.

3.1.2 Premières propriétés

Proposition 1.2 : Somme telescopique

C'est une série de la forme $\sum_{k\geq 0}(a_{k+1} - a_k)$. Si la limite l de a_k existe, la limite vaut $l - a_0$.

Exemple

$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}) = 1 - \frac{1}{n+2} \to 1$

Proposition 1.3

Si $\sum u_k$ est convergent, alors $U_k \to$.

Convergence

Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut converger et est dite grossièrement divergente. La réciproque est fausse (série harmonique).

3.2 Séries à termes positifs

Tous les termes de la suite sont positifs. La suite est donc croissante.

Proposition 2.1

Une série à terme positif est convergente si et seulement si la suite est majorée.

Théorème 2.1 : Théorème de comparaison

Si $u_k \leq v_k$, alors

- Si $\sum v_k$ converge, $\sum u_k$ converge
- Si $\sum u_k$ diverge, $\sum v_k$ diverge

Preuve 2.1

Si $u_n \leq v_n$ à partir de n_0, on a $\forall n \geq n_0$: $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k$. La suite des des sommes partielles est majorée donc CV.

De la même façon, on a $\sum_{k=0}^{n} V_l \geq \sum_{k=0}^{n} U_k$ avec $\sum_{k=0}^{n} U_k \to +\infty$, donc $\sum_{k=0}^{n} v_k \to +\infty$

Convergence de puissance

Pour $\alpha \geq 2, \sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge. À l'inverse, $\sum \frac{1}{k}$, $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent

Théorème 2.2 : Théorème des équivalents

Si $u_k \sim v_k$, alors $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.

Preuve 2.2

On a alors $\frac{u_k}{v_k} \to 1$. Il existe donc un rang k_0 à partir duquel on a $|\frac{u_k}{v_k}| \leq 1/2$. On a donc pour $k \geq k_0$: $-1/2 \leq \frac{u_k}{v_k} - 1 \leq 1/2$ puis $\frac{1}{2}v_k \leq u_k \leq \frac{3}{2}v_k$.

Si $\sum v_k$ CV, alors par linéarité $\frac{3}{2}v_k$ converge et $\sum u_k$ converge par comparaison.

Si $\sum v_k$ DV, alors par linéarité $\frac{1}{2}v_k$ diverge et $\sum u_k$ diverge par comparaison.

Théorème 2.3 : Critère de Riemann

Si $a > 1$, alors la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a}$ converge. Si $0 < a \leq 1$, elle diverge.

Nature

Ne pas confondre la nature de la suite avec la nature de la série.

Preuve 2.3

Soit $t \in [k, k+1]$. On a $k \leq t \leq k+1$ et $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ puis $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$

Doù, on somme pour k allant de 1 à n. : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{\mathrm{d}t}{t^{-\alpha}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$. De plus, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1$. Doù $\sum_{k+1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$.

Or, $\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \ln(n+1) ou \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}$

Si $\alpha > 1$, la somme partielle est majorée, donc convergente. Dans le cas contraire, on minore par un quelque chose qui diverge vers l'infini.

Proposition 2.2 : Série de Bertrand

Soit la série $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^a(\ln(k))^b}$. Si $0 < a < 1$, elle diverge, si $a > 1$ elle converge et si $a = 1$, avec $b > 1$, elle converge, avec $b \leq 1$, elle diverge.

Preuve 2.4 : Critère de D'Alembert

Pour l<1

On applique la définition avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2}$. Il existe un rang n_0 à partir duquel $|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leq \frac{1-l}{2}$ et $\frac{1-l}{2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \leq \frac{1-l}{2}$, d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1+l}{2} < 1$. On a montré qu'il existe a et n_0 tel qye $u_{n+1} \leq au_n$. On a $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n_0} a^{n-n_0}$ par récurrence.

Initialisation : à n_0 : $u_{n_0} \leq u_{n_0}$.

Hérédité : Si $U_n \leq U_{n_0} \times a^{n-n_0}$, alors $un+1 \leq aU_n \leq a^{n+1-n_0} \times U_{n_0}$.

Or, $\sum_{n=1} u_{n_0} \times a^{n-n_0}$ est convergente car série géométrique de raison $a = \frac{1+l}{2} < 1$. Donc par comparaison, $\sum U_n$ converge.

Même raisonnement si l>1. En effet $U_{n+1} \geq \frac{1+l}{2} U_n$.

Le théorème se généralise avec l'hypothèse $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| \leq q < 1$.

Exemple : $u_n = \frac{1}{n^{100}}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$. Le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

Théorème 2.4 : Règle des racines de Cauchy

Soient une série à termes strictement positifs. Si il existe, on note $l = \lim \sqrt[n]{u_n}$. Si $l < 1$, la série converge, si $l > 1$, la série diverge.

Théorème 2.5 : Comparaison par critère de Riemann

Si $n^a U_n \to 0$ avec $a > 1$, la série est convergente

> Si $n^a U_n \to \infty$ avec $a < 1$, la série converge. ×