Chapitre

7

Polynômes et fractions rationnelles

7.1 Polynôme

7.1.1 Définition

On note $k[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans k, avec X appelée inderminée.

C'est une suite (a_k) d'éléments de K nulle à partir d'un certain rang.

On note X l'objet du polynôme qui n'est pas forcément un réel

Difficulté
On peut mettre n'importe quel objet (fonction, matrice, opérateur) dans un polynôme. Les polynômes sont donc très efficaces.

Soient $P = (a_k)$ et $Q = (b_k)$. On a $P = Q \iff a_k = b_k \forall k$.

On commence les polynômes à la puissance 0.

Astuce
Le polynôme nul n'est pas un polynome de degré 0 mais $-\infty$

Exemple : $X = (0, 1 \ldots), 1 = (1, 0 \ldots, 0), 0 = (0 \ldots), X^k = (0, \ldots, k \ldots)$

Définition 1.1 : Degré d'un polynôme

Noté $\deg(P)$ le plus grand entier n tel que $a_n \neq 0$,i.e, $\deg(P) = \max\{k, a_k \neq 0\}$. On a donc $a_n \neq 0$ et $\forall k > n, a_k = 0$. Si $P = 0, \deg(P) = -\infty$.

Exemple : $\deg(0, 1, 2, 0, 3) = 5$.

7.1.2 Opérations

Addition

Soit P et Q 2 polynômes de degré inférieur à n. On pose $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$. On a $P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k$

Multiplication par un scalaire

On a $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k$

Multiplication de 2 polynômes

Voir Fiche de méthodologie

Remarques et résultats

- $X^k + X^m = X^{k+m}$
- $0 \times X^k = 0$
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$
- Seuls les polynômes constants non nuls de degré 0 ont un inverse.

Dérivation

On appelle dérivée de P le polynôme noté P' et défini par $P'[X] = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1}$. On note parfois $P' = \mathrm{D}(P)$.

Exemple : $P = 5X^3 + 2X + 1$. $P'(X) = 15X^2 + 2$.

Si $\deg(P) > 0, \deg(P') = \deg(P) - 1$.

7.1.3 Division euclidienne

Théorème 1.1 : Théorème de la division euclidienne

Soit A et B 2 polynômes. Alors $\exists!(Q, R) \in K[X]$ tel que $A = BQ + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$.

Exemple : $X^3 + 2X^2 + X + 2$ divisé par $X + 1$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +2X^2 & +X & +2 & X+1 \\
\cline{5-5}
-X^3 & -X^2 & & & X^2+X \\
\cline{1-2}
 & X^2 & +X & & \\
 & -X^2 & -X & & \\
\cline{2-3}
 & & & 2 &
\end{array}
$$

Définition 1.2 :

Soient A et B 2 polynômes. B divise $A \iff \exists Q \in K[X]$, tel que $A = BQ$. Si $B \neq 0, B|A \iff$ reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exemple : $(X-i)|(X^2+1)$ car $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, $(X-1)|(X^3-1)$ car $X^3-1 = (X-1)(X^2+X+1)$.

7.1.4 Racines d'un polynome

Définition 1.3 : Racine

Soit P un polynome. a est racine de P si $P(a) = 0$. De plus, a est racine de P si $X - a$ divise P, c'est à dire s'il existe Q tel que $P(X) = (X-a)Q$.

Théorème 1.2

Soit P un polynome de degré n. Alors P a au plus n racines disctinctes ou confondues. De plus, s'il s'annule en $x_1 < x_2 \cdots < x_n$, alors $\exists \lambda \in K*$ tel que $P(x) = \lambda(X-x_1)(X-x_2)\ldots(X-x_n)$

Définition 1.4 : Polynôme unitaire

P est un polynôme unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est 1. Pour rendre un polynôme unitaire, on peut le diviser par le coefficient du plus haut degré.

Exemples : $P(X) = X^3 + 5X^2 - X + 12$ est unitaire. $P(x) = 0$ ne l'est pas

7.1.5 Racines multiples

Définition 1.5

Soit $P \in K[X]$. a est tacine multiple d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}*$ de P si $(X-a)^\alpha | P$ et $(X-a)^{\alpha+1}$ ne divise pas P. C'est à dire qu'$\exists Q$, tel que $P(X) = (X-a)^\alpha Q$ et $Q(a) \neq 0$.

Si $\alpha = 1$, on parle de racine simple, si $\alpha = 2$ ce sont des racines doubles.

Exemple : $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ 1 est racine double de P

$P(X) = X^2 + X + 1 = (X-j)(X-\bar{j})$ avec $j = e^{2i\pi/3}$: j est racine simple de Q

$P(X) = X^3(X^2+1)^2(X-5)^2$ Racine/Ordre : 0/3, 5/2, i/2, -i/2

Théorème 1.3 : Caractérisation des racines multiples

Soit $P \in k[X]$. a est racine multiple d'odre α de P si $\forall k \in [0, \alpha - 1]$, $P(a) = 0$ et $P^\alpha(a) \neq 0$.

Exemple : $P(X) = X^2$: 0 est racine double. $P'(X) = 2X$. $P'(0) = 0$ mais $P''(0) \neq 0$. Il a bien $\alpha - 1$ equation avec la α ieme qui ne s'annule pas.

Lemme 1.1

Soit P un polynôme de degré n. Alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(a)}{k!}(X-a)^k$

7.1.6 Polynômes irréductibles

Définition 1.6

P, avec $\deg(P \geq 1$ est iréductible si $Q|P \iff \exists \lambda \in \mathbb{N}*$ tel que $Q = \lambda$ ou $Q = \lambda P$.

Exemple : $X^1 - 1 = (X-1)(X+1)$, on a $X - 1 \neq \lambda, \neq \lambda(X^2+1)$. Donc le polynôme n'est pas iréductible.

Exemple : $X^2 + 1$: N'a pas de diviseurs non triviaux dans $\mathbb{R}$ donc $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ mais pas dans $\mathbb{C}$ car $X + i$ est un diviseur non trivial de $X^2 + 1$.

Théorème 1.4

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos et signifie que tout polynôme à coefficients complexes a au moins une racine dans $\mathbb{C}$

Théorème 1.5

Les polynomes irréductibles de $C[X]$ sont les polynômes de degré 1 du type $X - z_0$

Dans $R[X]$, ce sont ceux de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant négatif.