

# *Mathématiques*

Langage mathématique



C.Dartyge



Paulhenry Saux



11 septembre 2024



Français

## Chapitre

# Introduction au raisonnement

## 1.1 Vocabulaire



### Paradoxe du tas de sable

A partir de combien de grain on considère que c'est un tas de sable. Si on enlève un grain, peut on dire que c'est toujours un tas? Problème de langage et de définition

### 1.1.1 Ensemble



### Théorème 1.1 : Ensemble

Un ensemble est constitué d'éléments et est défini par une relation d'appartenance

Soit  $E$  un Ensemble. Il est bien défini si  $\forall x$  on peut dire sans ambiguïté si  $x \in E$  ( $x$  appartient à  $E$ ) Dans le cas contraire, il n'appartient pas.



Un ensemble n'est jamais élément de lui même. Conséquence : La collection de tous les ensemble n'est pas un ensemble (car il s'appartiendrait à lui-même)

Exemples :  $\mathbb{N}, \mathbb{C}$ .

## 1.1.2 Éléments de logique propositionnelle

### Assertions

Assertion : Une phrase grammaticalement correcte dont on peut dire sans ambiguïté si elle est vraie ou fausse



#### Exemples

Exemple 1 :  $P$  : "Les élèves du TDA2 sont au nombre de 37"  $P$  est fausse.

Exemple 2 :  $P$  : "Je mens" n'est pas une assertion mais un paradoxe

Exemple 3 :  $1 + 1 = 2$  est une assertion

### Opérations logique

Négation :  $\neg$

Et :  $\wedge$

Ou :  $\vee$

$\neg P$  est vrai si  $P$  est faux

$\neg P$  est faux si  $P$  est vrai  $\times$

$\times$  Difficulté

Le contraire de tous/pour tous est au moins un



#### Exemple

$P$  : Tous les chevaux de Martine sont noirs

$\neg P$  : Au moins un des chevaux n'est pas noirs

$Q$  : Au moins un des étudiant n'a pas de téléphone

$\neg Q$  : Tous les étudiants ont un téléphone

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \iff Q$	$\neg P$
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	V	V	V



### Attention si La première assertion est fausse

Paris n'est pas la capitale de France (F)  $\Rightarrow$  Tous les élèves ont une voiture (V) : Assertion vraie

Paris est la capitale de la France (V)  $\Rightarrow$  Tous les étudiants sont en bleu. (F) : Assertion fausse

On suppose maintenant  $P$  ou  $\neg P$ . Il faut montrer que si  $P$  est vrai alors  $Q$  est vrai.

## Règles de calcul

$$\neg(\neg P) = P$$

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

$$P \iff Q = \neg P \vee Q$$

$$\text{Attention : } \neg(P \Rightarrow Q) = P \wedge \neg Q$$



### Exemple

Assertion :  $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x$  a une racine


Le contraire est :  $(x \in \mathbb{R}) \wedge (x \text{ n'a pas de racine})$

## Contraposée

$$\text{Contraposé : } (P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q \Rightarrow \neg P)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \neq y \Rightarrow x^3 \neq y^3 \iff x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

## Prédicat

$P(x_1 \dots x_r)$  est un prédicat si c'est une phrase correcte qui dépend de variables et dont on peut dire la valeur de vérité pour tout k-uplet donné. 



### Astuce

(Assertion sauf que l'on a pas défini les variables)

## Quantificateurs

Quantificateur universels :  $\forall$  = Pour tout

Quantificateur d'existence :  $\exists$  = Il existe au moins un

Ils transforment un prédicat en assertion

## Proposition

$$\neg(\forall x, P(x)) = \exists x, \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x, P(x)) = \forall x, \neg P(x)$$

Ex 1.5

Fin Séance 1



# 1.2 Raisonnements

## 1.2.1 Par l'absurde

### Tautologie et contradiction



#### Théorème 2.1 : Tautologie

Formule propositionnelle toujours vraie

Ex :  $P \vee \neg P$



#### Théorème 2.2 : Contradiction

Formule propositionnelle toujours fausse

Ex :  $P \wedge \neg P$

### Fonctionnement

On cherche à démontrer une propriété  $P$  en supposant  $\neg P$ . On poursuit le raisonnement jusqu'à arriver à une contradiction. Comme les mathématiques sont non contradictoire, l'hypothèse de départ est fausse. Donc  $\neg P$  est fausse, D'où  $P$ .



#### Exemple

Montrer que  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , en effectuant un raisonnement par l'absurde.

Je suppose que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

Donc  $\exists a \in \mathbb{N}, \exists b \in \mathbb{N}^*, \sqrt{2} = \frac{a}{b}, PGCD(a, b) = 1$ .

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2b^2 = a^2.$$

Donc  $2|2b^2$ , donc  $2|a^2$  et  $2|a$ . Donc  $\exists a' \text{ tq } a = 2a'$ .

Donc  $2b^2 = a^2 = 4a'^2 \Rightarrow b^2 = 2a'^2$ . Donc  $2|b^2$  et  $2|b$ . Donc Le PGCD est de 2 et non de 1, contradiction.

## 1.2.2 Par récurrence

On veut démontrer des assertions où  $n \in \mathbb{N}$ .



### Théorème 2.3 : Proposition

Si  $(P(0) \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)))$ , alors  $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ .



### Exemple : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n < 2^n$

Soit  $H(n) = n < 2^n$ .

Je démontre  $H(n)$  par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Initialisation

$H(0) : 0 < 2^0 = 1$ , donc  $H(0)$ .

Hérédité

On suppose  $H(n)$ , montrons  $H(n+1)$ , ie  $n+1 < 2^{n+1}$ .

D'après  $H(n)$ ,  $n+1 < 2^n + 1$ . Or  $n < 2^n$ , d'où  $n+1 < 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ .

Donc  $H(n+1)$  et  $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ .

Conclusion

- $H(0)$
- $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) \Rightarrow H(n+1)$

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}, H(n) : n < 2^n$ .

## 1.2.3 Récurrence à 2 pas

### $\pi$ Théorème 2.4 : Déf

Si  $(P(0) \wedge P(1)) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2))$ , alors  $P(n)$ .

## 1.2.4 Récurrence forte

### $\pi$ Théorème 2.5 : définition

Si  $P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}, [\forall k \in \{0, \dots, n\}, P(k) \Rightarrow P(n+1)])$ , alors  $P(n) \forall n \in \mathbb{N}$ .

Ex 1.11 : Produit de plusieurs entiers impairs. Ex 1.12 : Récurrence  $\times$

$\times$  Difficulté

Utilisation des signes sigma pour somme et grand pi pour produit

## 1.3 Théorie des ensembles

### $\pi$ Théorème 3.1 : Égalité d'Ensemble

Soit E et F 2 ensembles. Ils sont égaux ssi  $\forall x, x \in E \iff x \in F$ . On écrit alors  $E = F$ .

### $\pi$ Théorème 3.2 : Inclusion

E est inclu dans F ssi  $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$ . On écrit alors  $E \subset F$ . E est un sous ensemble de F

Remarque :  $E \not\subset F \iff \exists x, x \in E \wedge x \notin F$

### $\pi$ Axiome 3.1 : Axiome

Il existe un ensemble appelé ensemble vide noté  $\emptyset$ , tel que  $\forall x, x \notin \emptyset$ .



### Axiome 3.2 : Unicité de l'ensemble vide

Cet Ensemble est unique

Preuve : Supposons qu'il existe 2 ensembles vides, notés E et F.

Montrons que  $E = F$ .

$$\forall x, x \notin E \Rightarrow x \notin F.$$

Par contraposé :  $\neg(x \in F) \Rightarrow \neg(x \in E)$ .  $\iff (x \in F \Rightarrow x \in E)$ . De la même façon en permutant les rôles de E et F, on a  $x \in E \Rightarrow x \in F$  et  $E = F$ .



### Axiome 3.3 : Parties de E

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble E est un Ensemble E, que l'on note  $P(E)$



### Axiome 3.4 : Collection des x de E qui vérifient P(x)

Soit E un Ensemble, Soit P(x) un prédicat défini sur E, alors la collection des x de E qui vérifient P(x) est un ensemble. On le note  $\{x, x \in E \wedge P(x)\}$



### Théorème 3.3 : Conséquence

Soit E et F 2 ensembles.

l'intersection de E et F, noté  $(E \cap F) = \{x, x \in E \wedge x \in F\}$  est un ensemble.

La réunion de E et F est défini par  $(E \cup F) = \{x, x \in E \vee x \in F\}$  est un ensemble complémentaire F dans E

$$E \setminus F = \{x \in E, x \notin F\} \text{ est un ensemble.}$$



### Axiome 3.5 : Produit cartésien

Soit E et F 2 ensembles. On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble des couples  $E \times F = \{(x; y), x \in E, y \in F\}$ .





### Théorème 3.4 : Propriété

$\emptyset \subset E$  pour tout Ensemble.  $\forall x, x \notin E \Rightarrow x \notin \emptyset$  et par contraposé :  
 $x \in \emptyset \Rightarrow x \in E$ .



### Exemples

$$E = \{1, 2\}$$

$$P(E) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1, 2\}\}$$

$$P(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

$$P(P(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Fin Séance 2



### Syntaxe pour $A \times B$

$$\{(1, 1); (1, 5)\}$$

Démontrer une inclusion : Démontrer que  $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$ .

## 1.4 Propriétés de l'intersection

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

$$A \cap B = \{x \in E, x \in A \wedge x \in B\}.$$

$$A \cup B = \{x \in E, x \in A \vee x \in B\}.$$



### Théorème 4.1 : Def

Le complémentaire de A dans E, noté  $\bar{A}$  est l'ensemble défini par  
 $x \in \bar{A} \iff x \notin A$ . Ainsi,  $\bar{A} = \{x \in E, x \notin A\}$ .



### Théorème 4.2 : Propriétés

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

$$\bar{\emptyset} = E.$$

$$\bar{E} = \emptyset.$$

$$\bar{\bar{A}} = A.$$

Exemple :  $x \in A \cap B \iff \neg(x \in A \cap B) \iff \neg(x \in A \wedge x \in B) \iff \neg x \in A \vee \neg x \in B \iff x \notin A \vee x \notin B \iff x \in \bar{A} \vee x \in \bar{B} \iff ((x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B}))$ .



### Théorème 4.3 : Definition

Soit  $I$  un ensemble, et  $\forall i \in I$ , soit  $F_i$  un ensemble.

$$F = (F_i, i \in I).$$

$I$  est appelé ensemble des index.

$$\forall x, x \bigcap_{i \in I} F_i \iff \forall i \in I, x \in F_i.$$

$$\bigcap_{i \in I} = \{x, x \in F_i, \forall i \in I\}.$$

$$x \in \bigcup_{i \in I} F_i \iff \exists i \in I, x \in F_i.$$

$$\bigcup_{i \in I} = \{x, \exists i \in I, x \in F_i\}.$$

Exemples :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[ = [0, +\infty[$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, n+1[ = \emptyset$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n[ = \emptyset$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [-n, n] = [-1, 1]$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\} \quad \times$$

× Difficulté

Le contenu de l'ensemble, ici celui du singleton 0 n'a pas besoin d'appartenir à l'ensemble de définition de  $n$ , ici  $\mathbb{N}^*$ .

# 1.5 Applications

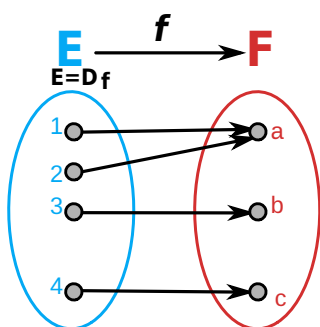
Soient  $E$  et  $F$  2 ensembles non vides.

## 1.5.1 Définition

### π Théorème 5.1 : Definition

Une application  $f$  de  $E$  vers  $F$ , notée  $f : E \rightarrow F$  est définie par la donnée d'un sous-ensemble  $\Gamma_f$  de  $E \times F$  qui vérifie la propriété :  $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in \Gamma_f$ . On écrit alors  $y = f(x)$ .  $y$  est l'image unique de  $x$ .  $x$  est un antécédent de  $y$ .

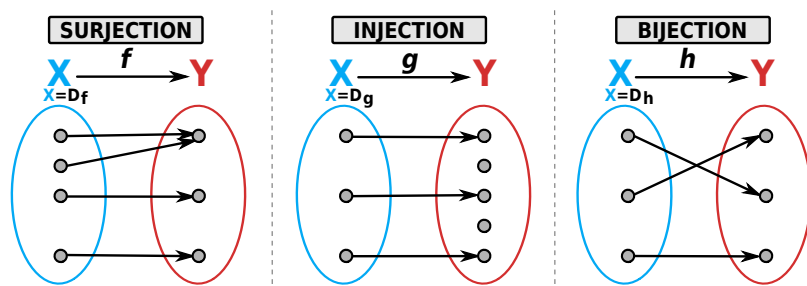
Exemple :  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $F = \{a, b, c\}$



$\Gamma_f = \{(1, c); (2, b); (3, a); (4, b)\}$ . On l'appelle le graphe de l'application.  $E$  est appelé ensemble de départ et  $F$  ensemble d'arrivée.

$f : E \rightarrow F$  est une application si tout élément de  $E$  a une unique image dans  $F$ .

## 1.5.2 Injection, surjection, bijection



Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $x \mapsto f(x)$ .

Soit  $y \in F$ .  $\exists x \in E, y = f(x)$ . On veut savoir le nombre de solution à cette équation. ✓

## ✗ Définitions à connaître par coeur

### π Théorème 5.2 : Surjectivité

$f$  est surjective de  $E \rightarrow F \iff \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \iff$  tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent dans  $E$ .

### π Théorème 5.3 : Injectivité

$f$  est injective de  $E \rightarrow F \iff (\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')) \iff (\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \iff$  tout élément de  $F$  a au plus un antécédent dans  $E$ .

### π Théorème 5.4 : Bijektivité

$f$  est bijective de  $E \rightarrow F \iff (\forall x, x' \in E, \exists! x \in E, y = f(x)) \iff$  tout élément de  $F$  a un unique antécédent par  $f$  dans  $E$ .  $\iff f$  est injective et surjective.

### ✓ Exemple

Si il y a :

- au plus une solution, c'est injectif ( $\text{Card}(E) < \text{ou } ? \text{ Card}(F)$ )
- au moins une solution, c'est surjectif,
- exactement une solution, c'est bijectif (Elles ont le même nombre d'élément, ensemble équipotent)

Fonction	Injective	Surjective
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	Non	Non
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 2x$	Oui	Oui
$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	Oui	Oui
$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^2$	Oui	Non
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ : x \mapsto x^2$	Non	Oui
$f : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin(x), \cos(x)$	Non	Oui
$f : [0, 2\pi[ \rightarrow [-1, 1] : x \mapsto \sin(x)$	Oui	Oui

### π Théorème 5.5 : Rappel de la définition de la composée d'une application

Soient  $E, F, G$  3 ensembles, Soit  $f : E \rightarrow F$   $g : F \rightarrow G$

L'application  $g \circ f$  est l'application définie par  $g \circ f : E \rightarrow F \rightarrow G$   
et  $g \circ f : x \rightarrow f(x) \rightarrow g(f(x))$



### Complément : Ensemble des éléments de E admettant une image

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. On appelle antécédent d'un élément  $y \in F$  par l'application  $f$  tout élément  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . L'ensemble des éléments de  $F$  qui admettent un antécédent par  $f$  est une partie de  $F$  appelée ensemble image ou image de  $f$  et notée  $Im f$



### Complément : Application surjective sur $\mathcal{P}$

Il n'existe aucune application surjective d'un ensemble  $E$  sur  $\mathcal{P}(E)$ .



### Théorème 5.6 : Définitions

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. Soit  $A \subset E$ , i.e  $A \in \mathcal{P}(E)$ .

L'image directe de  $A$ , notée  $f(A)$  est l'ensemble défini par :  $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subset F = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$ .

Soit  $B \subset F$ . L'image réciproque de  $B$  par  $f$ , notée  $f^{-1}(B)$  est le sous-ensemble de  $E$  défini par  $f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$  (= "tiré en arrière de  $B$ ")

Exemple :

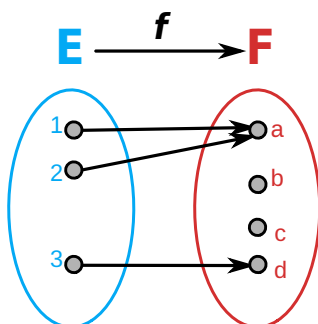


Image directe

$$f(E) = \{f(1), f(2), f(3)\} = \{a, d\}$$

$$f(\{1\}) = \{a\}$$

$$f(\{2, 3\}) = \{a, d\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset$$

Image réciproque

$$f^{-1}(F) = E \text{ (toujours vrai, définition même d'une application)}$$

$$f^{-1}(\{a, d\}) = E$$

$$f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{a\}) = \{1, 2\}$$



#### Remarque

$f : E \rightarrow F$  est surjective si  $f(E) = F$ .