TS

Lois de probabilités continues (2) : loi exponentielle

Rappels sur le chapitre précédent

On est parti de la loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1] puis sur un intervalle [a ; b] quelconque (formule donnant la probabilité d'un intervalle [α ; β] inclus dans [a ; b] : $\frac{\beta-\alpha}{b-a}$).

On a procédé à une ouverture permettant de relier les calculs précédents aux intégrales (ce qui peut paraître un peu bizarre de prime abord !).

Cela a débouché sur la notion de loi de probabilité définie par une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] (ou plus généralement sur un intervalle fermé borné [a ; b]).
La probabilité d'un intervalle apparaît alors comme aire sous la courbe de la fonction de densité.

Dans ce chapitre, le principe sera le même que dans le chapitre précédent sauf que l'on va voir la notion de densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; +∞[. Comme cet intervalle est illimité à droite, cela va nécessiter quelques petites adaptations que nus allons voir.

Objectif : étudier une loi de probabilité continue autre que la loi uniforme sur [0 ; 1] qui sert en physique.

I. Fonction de densité sur l'intervalle [0 ; +∞[

1°) Définition

$\lambda > 0$ est fixé (nous verrons l'interprétation de ce réel en physique dans le paragraphe IV).

On considère la fonction $f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$$

N.B. : La valeur de λ sera en général donnée dans les exercices sauf dans certains exercices où l'on demandera d'abord de calculer la valeur de λ avant de l'utiliser dans la suite.
On ne peut pas se représenter concrètement le λ.

2°) Propriété

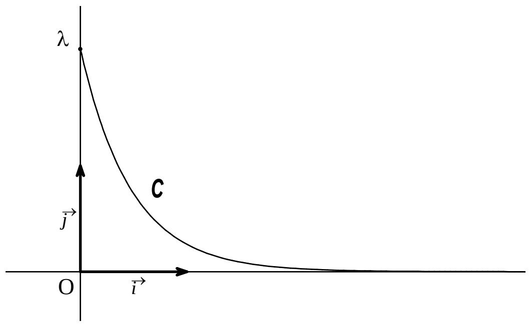
f vérifie les 3 conditions :

C_1 : f est définie et continue sur [0 ; +∞[

C_2 : f est positive ou nulle sur [0 ; +∞[

C_3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

On dit que f est une **fonction de densité** sur l'intervalle [0 ; +∞[.



C_3 peut aussi s'écrire : $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$

N.B. : Il n'y a pas de condition sur la monotonie pour une densité de probabilité.

3°) Démonstration

$\left.\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix}\right\}$ évidents

C_3 : $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

$$= \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x$$
$$= 1 - e^{-\lambda x}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ (car $\lambda > 0$)

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1$ (on aborde ici la notion de limite d'intégrale qui a déjà été vue en exercice)

II. Loi exponentielle

1°) Définition

Nous admettrons qu'il existe une unique loi de probabilité P sur l'intervalle [0 ; +∞[de densité de probabilité

$f : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \lambda e^{-\lambda x}$$

Cette loi de probabilité P est appelée **« loi exponentielle de paramètre λ »** (notée $\mathcal{E}$ (λ)).

La fonction f définie précédemment est la fonction de densité associée à la **« loi exponentielle de paramètre λ »**.

2°) Probabilité d'un intervalle fermé borné

Pour tout intervalle $[\alpha\,;\beta]\subset[0\,;+\infty[$, on a :

$$\boxed{P([\alpha\,;\beta])=\int_{\alpha}^{\beta}\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x=\left[-e^{-\lambda x}\right]_{\alpha}^{\beta}=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}}$$

3°) Cas particulier : probabilité d'un singleton

Pour tout réel $\alpha\geq 0$, on a :

$$\boxed{P(\{\alpha\})=P([\alpha\,;\alpha])=\int_{\alpha}^{\alpha}\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x=0}$$

La probabilité d'un singleton est égale à 0.

4°) Remarque en physique

Cette loi de probabilité modélise la durée de vie d'un noyau radioactif (cf. IV).

III. <u>Exercice-type rédigé</u>

Enoncé :

La durée en années de bon fonctionnement d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{10}$ (notée $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{10}\right)$).

1°) Probabilité que le composant fonctionne entre 10 et 15 ans (au sens large)

On note P la loi exponentielle de paramètre $\lambda=\dfrac{1}{10}$ sur $[0\,;+\infty[$.

$$P([10\,;15])=\int_{10}^{15}\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x=\left[-e^{-\lambda x}\right]_{10}^{15}=e^{-10\lambda}-e^{-15\lambda}=e^{-1}-e^{-1,5}\quad\text{(valeur exacte)}$$
$$P([10\,;15])=0,1447...$$

2°) Probabilité que le composant fonctionne au plus 10 ans

$$P([0\,;10])=\int_{0}^{10}\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x=\left[-e^{-\lambda x}\right]_{0}^{10}=-e^{-10\lambda}+e^{0}=1-e^{-1}\quad\text{(valeur exacte)}$$
$$P([0\,;10])=0,6321...$$

3°) Probabilité que le composant fonctionne au moins de 10 ans

$$P([10\,;+\infty[)=\int_{10}^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x\ \to\ \text{pas cette année}$$
$$P([10\,;+\infty[)=1-P([0\,;10[)=1-\left(1-e^{-1}\right)=\frac{1}{e^{1}}=\frac{1}{e}=0,367...$$

Remarque :

$[0\,;10]=[0\,;10[\,\cup\{10\}$
$P(\{10\})=0$

IV. <u>Application à la physique</u>

1°) Lien entre décroissance radioactive et loi exponentielle

Noyaux radioactifs.

Nombre à l'instant t : $N(t)=N_0\ e^{-\lambda t}$.

($\lambda>0$: constante de radioactivité)

La loi exponentielle modélise la durée de vie d'un noyau radioactif.

$$P(\text{" le noyau meurt entre 0 et } t\text{ "})=\frac{\text{nombre de noyaux morts entre les instants 0 et } t}{\text{nombre de noyaux initial}}$$
$$=\frac{\text{nombre de noyaux initial }-\text{nombre de noyaux restant à l'instant } t}{\text{nombre de noyaux initial}}$$
$$=\frac{N_0-N_0e^{-\lambda t}}{N_0}$$
$$=1-e^{-\lambda t}$$
$$=\int_0^t\lambda e^{-\lambda x}\ \mathrm{d}x$$

2°) Propriété fondamentale (qui justifie le nom de **loi de durée de vie sans vieillissement)**

P : loi de exponentielle $\lambda>0$ sur $[0\,;+\infty[$.

> Pour tout réel $s\geq 0$, la probabilité conditionnelle $P\left([t+s\,;+\infty[\,/\,[t\,;+\infty[\right)$ ne dépend pas du réel $t\geq 0$.

ou :

On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Pour tout réel $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P\left(X \geq t+s \,/\, X \geq t\right)$ ne dépend pas du réel $t \geq 0$.

La probabilité qu'un noyau radioactif soit encore en vie à l'instant *t* + *s* sachant qu'il est encore en vie à l'instant *t* ne dépend pas du réel *t*.

Exemple :

t représente un instant et *s* représente une durée.

$t = 30$ et $s = 20$
$P\left(X \geq t+s \,/\, X \geq t\right) = P\left(X \geq 50 \,/\, X \geq 30\right)$ (probabilité que le composant ait une durée de vie supérieure ou égale à 50 sachant qu'il a déjà vécu 30 année).

On peut prendre la 30$^{\text{e}}$ année comme année 0.
La probabilité est égale à $P\left(X \geq 20\right)$.

On dira que X est « sans mémoire ».

3°) Démonstration (ROC)

$$P(\text{A}/\text{B}) = \frac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})} \quad \text{(avec } P(\text{B}) \neq 0\text{)}$$

$$P\left(\left[t+s\,;+\infty\right[\,/\, \left[t\,;+\infty\right[\right) = \frac{P\left(\left[t+s\,;+\infty\right[\cap \left[t\,;+\infty\right[\right)}{P\left(\left[t\,;+\infty\right[\right)}$$

$$P\left(\left[t+s\,;+\infty\right[\,/\, \left[t\,;+\infty\right[\right) = \frac{P\left(\left[t+s\,;+\infty\right[\right)}{P\left(\left[t\,;+\infty\right[\right)}$$

$$P\left(\left[t\,;+\infty\right[\right) = \text{e}^{-\lambda t}$$

$$P\left(\left[t+s\,;+\infty\right[\,/\, \left[t\,;+\infty\right[\right) = \frac{\text{e}^{-\lambda(t+s)}}{\text{e}^{-\lambda t}}$$

$$= \text{e}^{-\lambda(t+s)+\lambda t}$$

$$= \text{e}^{-\lambda s}$$

Rappel : $P\left(\left]\alpha\,;\beta\right]\right) = P\left(\left[\alpha\,;\beta\right]\right)$ (α et β sont deux réels positifs ou nuls).