

Étude des désintégrations radioactives

I. ASPECT THEORIQUE : DECROISSANCE RADIOACTIVE.

Cette partie est destinée à l'information des professeurs.

Deux points de vue sont *a priori* possibles : considérer un noyau seul ou bien considérer une population de noyaux. Le second a l'avantage d'être plus directement exploitable du point de vue expérimental.

1. Noyau, considéré comme seul.

La loi de décroissance (ou plutôt de désintégration) est la suivante : la probabilité pour qu'une particule (ici noyau) se désintègre entre les dates t et $t + dt$ est : $dP = \frac{dt}{\tau}$ où τ est une constante caractéristique de la particule *indépendante* de t (non vieillissement des particules) et indépendante des désintégrations des autres particules.

Soit $P(t)$ la probabilité pour que la particule existe à la date t ; on a : $P(t + dt) = P(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau} \right)$ qui exprime que pour que la particule existe à la date $t + dt$, il est nécessaire qu'elle existe à la date t et qu'elle ne soit pas désintégrée entre les dates t et $t + dt$. La probabilité de ces deux événements conjoints et *indépendants* (la loi de probabilité ignore l'histoire antérieure de la particule) est égale au produit des probabilités des événements considérés.

L'équation précédente s'écrit : $dP = -P dt/\tau$, d'où par intégration :

$$P(t) = P(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (1)$$

Si la particule « naît » à la date $t_0 = 0$, $P(t_0) = P(0) = 1$ et

$$P(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$\text{Vie moyenne : } t_m = \frac{\int_0^{\infty} t P(t) dt}{\int_0^{\infty} P(t) dt} = \tau, \text{ d'où la signification physique de } \tau.$$

2. Population de noyaux.

Soit une population de noyaux identiques subissant la désintégration radioactive. Le nombre $N(t)$ de noyaux existant à une date t , n'est pas connu, *a priori*, avec certitude, car il s'agit d'un phénomène aléatoire (cf. 1). Ce point sera détaillé dans l'appendice. A toute date t , on peut définir la valeur moyenne de $N(t)$, soit $\bar{N}(t)$. On peut montrer rigoureusement que $\bar{N}(t)$ obéit à l'équation :

$$d\bar{N}(t) = -\bar{N}(t) dt/\tau \quad (2)$$

soit, par intégration :

$$\bar{N}(t) = \bar{N}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} \quad (3)$$

analogue à (1). Il suffira de donner cette loi (2) aux élèves, comme le prévoit le programme. La liaison avec (1) peut être faite intuitivement : il s'agit en fait de la liaison entre une loi de probabilité et une propriété statistique portant sur une population de noyaux (voir appendice).

Il apparaît, de toute façon, nécessaire de bien distinguer $N(t)$ et $\bar{N}(t)$ ceci en vue des T.P. prévus de comptages radioactifs.

3. Appendice.

Ce qui suit est destiné à donner quelques notions sur le caractère aléatoire de la désintégration radioactive (mais évidemment sans donner toutes ces explications aux élèves).

Soit i le nombre initial supposé donné d'une population de noyaux, à la date $t = 0$. La probabilité pour qu'à la date t , on ait observé m désintégrations dans cette population est exprimée par la loi :

$$P_{i,m}(t) = \frac{i!}{m!(i-m)!} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^m \left(e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^{(i-m)} \quad (4)$$

Cette loi est une *conséquence* de la loi de probabilité énoncée en 1. et de l'indépendance des désintégrations des particules. Elle peut être ainsi établie rigoureusement à partir des hypothèses énoncées en 1 (*). (τ ayant la signification donnée en 1). C'est

une loi de type binomial : $P_{i,m} = C_i^m p^m q^{(i-m)}$ avec $q = e^{-\frac{t}{\tau}}$ et $p + q = 1$. (Ce type de loi est présentement au programme de maths de TC. TD.)

On établit que pour la loi binomiale :

- le nombre moyen de désintégrations $\bar{M}(t)$ à la date t :

$$\bar{M}(t) = \sum_{m=0}^i m P_{i,m}(t)$$

est donné par :

$$\bar{M}(t) = i p = i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

(*) Voir par exemple l'article de BRIGUET : « Examen de quelques processus stochastiques simples ». B.U.P. n° 605, p. 1205.

d'où le nombre moyen $\bar{N}(t)$ de noyaux existant à la date t :

$$\bar{N}(t) = i - \bar{M}(t) = i e^{-\frac{t}{\tau}}$$

qui donne facilement : $\bar{N}(t) = \bar{N}(t_0) e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$, c'est-à-dire (3);
la variance à la date t :

$$\sigma^2(t) = i p q = \bar{M}(t) \left(1 - \frac{\bar{M}(t)}{i} \right).$$

Cas particulier important.

Dans le cas des T.P. prévus, la durée de désintégration considérée, soit t , est très inférieure à τ , soit $\frac{t}{\tau} \ll 1$.

Dans ces conditions : $e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$, d'où :

$$\bar{M}(t) \simeq i \frac{t}{\tau} = \alpha t \text{ (évident } a \text{ priori) et } \sigma^2(t) \simeq \alpha t = \bar{M}(t)$$

(où $\alpha = \frac{i}{\tau}$ est une constante caractéristique de l'échantillon),
d'où le résultat important :

$$\sigma(t) = \sqrt{\bar{M}(t)}$$

(écart-type) que l'on peut approcher expérimentalement (cf. T.P.).

Dans cette approximation, la loi de probabilité (4) prend la forme particulière :

$$P_m(t) \simeq \frac{(\bar{M}(t))^m}{m!} e^{-\bar{M}(t)} \quad (5)$$

appelée *loi de Poisson*. Le passage de (4) à (5) se fait sans difficulté.

Pour \bar{M} suffisamment grand, la fonction $P_m(t)$ s'identifie à une fonction de GAUSS de la variable discrète m :

$$P_m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\bar{M}}} e^{-\frac{(m - \bar{M})^2}{2\bar{M}}} \quad (6)$$

pour laquelle on a effectivement : $\sigma^2 = \bar{M}(t)$. (Mais ce n'est évidemment pas une propriété générale des fonctions gaussiennes).

H. GIÉ.

II. ETUDE EXPERIMENTALE : CARACTERE ALEATOIRE DES DESINTEGRATIONS RADIOACTIVES.

La détection des particules fait intervenir une succession d'événements tels que la désintégration des noyaux et l'interaction des rayonnements émis avec la matière. *Ces événements sont aléatoires.*

La probabilité de désintégration d'un noyau pendant un temps dt est indépendante de son histoire. Que ce noyau soit jeune ou vieux n'influe pas sur son comportement. D'autre part, le comportement d'un noyau donné est sans influence sur celui de ses voisins. Il est impossible d'étudier le comportement d'un noyau donné mais l'ensemble constitué par un grand nombre de noyaux a un comportement qui obéit à une loi statistique.

— La source utilisée est du $^{137}_{55}\text{Cs}$ de 10 μCi . La désintégration des noyaux de césium est bien connue (fig. 1). La période de cette source est $T = 30$ ans. Elle est très grande par rapport au temps du comptage (quelques secondes). (La loi binomiale se confond alors avec une loi de Poisson).

— Le physicien compte les particules à l'aide d'une *installation de comptage* constituée essentiellement par un détecteur et une échelle de comptage.

1^{re} série de comptages :

$t = 2\text{ s} =$ durée du comptage.

La courbe représentant la fréquence f du comptage (nombre de fois où on trouve la valeur n) en fonction de la valeur du comptage n est tracée point par point.

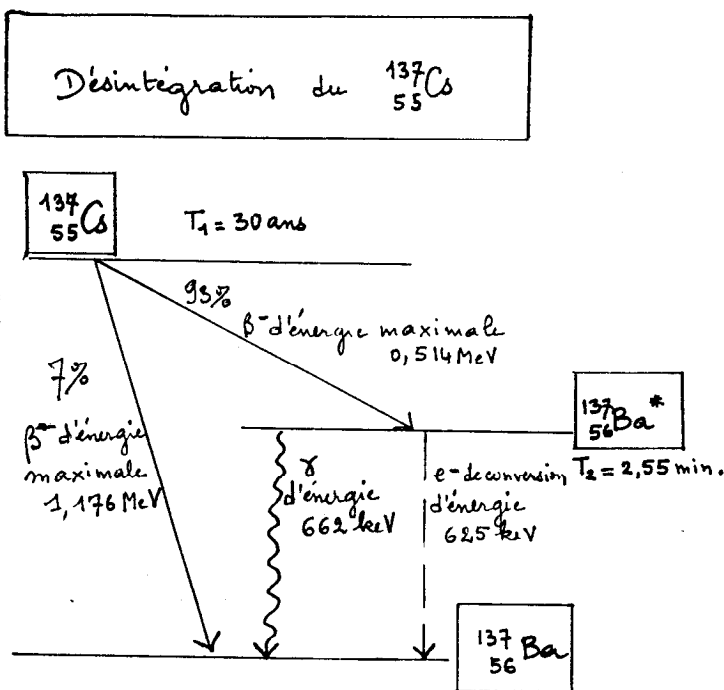
— Pour 10 comptages : on note une grande dispersion des valeurs.

— Pour 100 comptages : une courbe se dessine.

— Pour 200 comptages : la courbe se précise et prend l'allure d'une *courbe de Poisson* (fig. 2).

• La valeur la plus probable $\bar{n} = 3$.

• La valeur moyenne $\bar{n} = \frac{\sum n_i f_i}{\sum f_i} = 3,28$.



- Les $\frac{10}{11}$ de 93 % des noyaux émettent des γ , soit :

$$\frac{10}{11} \times \frac{93}{100} = 84,5 \, \%.$$

- 93 % + 7 % des noyaux donnent des β^- . Il faut ajouter à ces 100 % les électrons de conversion, soit $\frac{1}{11}$ de $\frac{93}{100}$, soit au total : 108,5 %.

Fig. 1

La courbe étant dissymétrique \tilde{n} et \bar{n} ne sont pas confondus.

- Calculons la variance : moyenne pondérée des carrés des écarts à la moyenne :

$$V = \overline{s^2}_n = \frac{\sum f_i (n_i - \bar{n})^2}{\sum f_i}$$

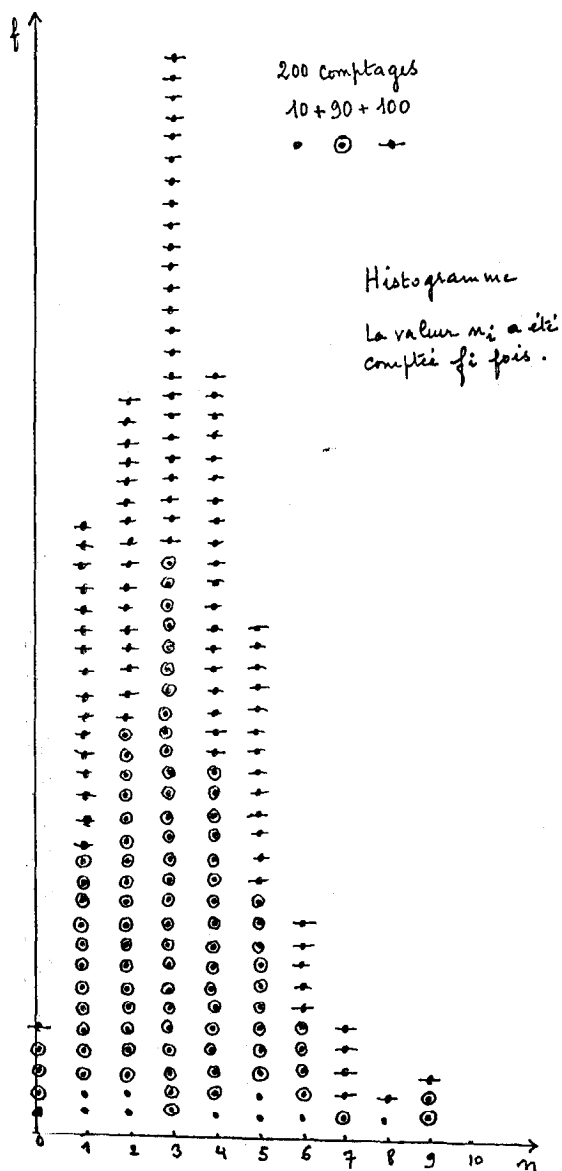


Fig. 2

\bar{s}_n est, par définition, l'écart-type.

Un tableau (fig. 3) groupant les résultats expérimentaux permet de faire ce calcul simplement et donne :

$$\bar{s}_n^2 = 3,25 \quad \text{soit} \quad \bar{s}_n = 1,8.$$

Par ailleurs : $\sqrt{\bar{n}} = 1,81$.

La théorie indique que dans le cas d'une loi de Poisson $\sigma = \sqrt{\bar{M}}$ (§ I). Or σ et \bar{M} sont *a priori* inconnus (voir en fin d'article comment déterminer \bar{M} , nombre moyen de désintégrations pendant la durée t , avec une bonne précision statistique). Les valeurs mesurées \bar{n} et \bar{s}_n sont en fait elles-mêmes des variables aléatoires pouvant souvent différer notablement de \bar{M} (qui est la moyenne des \bar{n}) et σ respectivement (comptage insuffisant). Néanmoins, la « vérification » semble assez bonne puisque :

$$\bar{s}_n \simeq \sqrt{\bar{n}}.$$

Caractère aléatoire des désintégrations

n_i	f_i	$n_i \times f_i$	$n_i - \bar{n}$	$(n_i - \bar{n})^2$	$f_i (n_i - \bar{n})^2$
0	5	0	3,28	10,8	54
1	29	29	2,28	5,2	151
2	35	70	1,28	1,64	57,4
3	51	153	0,28	0,08	4,08
4	35	140	0,72	0,52	18,20
5	24	120	1,72	2,96	71
6	11	66	2,72	7,40	81,4
7	5	35	3,72	13,8	69
8	2	16	4,72	22,3	44,6
9	3	27	5,72	32,7	98,1

$$\Sigma f_i = 200 \quad \Sigma n_i f_i = 656 \quad \bar{n} = \frac{\Sigma n_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{656}{200} \quad \bar{n} = 3,28.$$

$$V = \bar{s}_n^2 = \frac{\Sigma f_i (n_i - \bar{n})^2}{\Sigma f_i}.$$

$$\Sigma f_i (n_i - \bar{n})^2 = 649,78 \quad \text{d'où :} \quad \bar{s}_n^2 = 3,25 \quad \underline{\bar{s}_n = 1,80}.$$

Fig. 3

2^{me} série de comptages :

$$\bar{n} < 10$$

La valeur moyenne est toujours faible < 10 mais nous avons augmenté le *nombre des comptages jusqu'à 1000*. La courbe se précise au fur et à mesure que le nombre de comptages augmente mais la courbe garde toujours une allure dissymétrique : celle de la *loi de Poisson* (fig. 4). La courbe traduisant la loi de

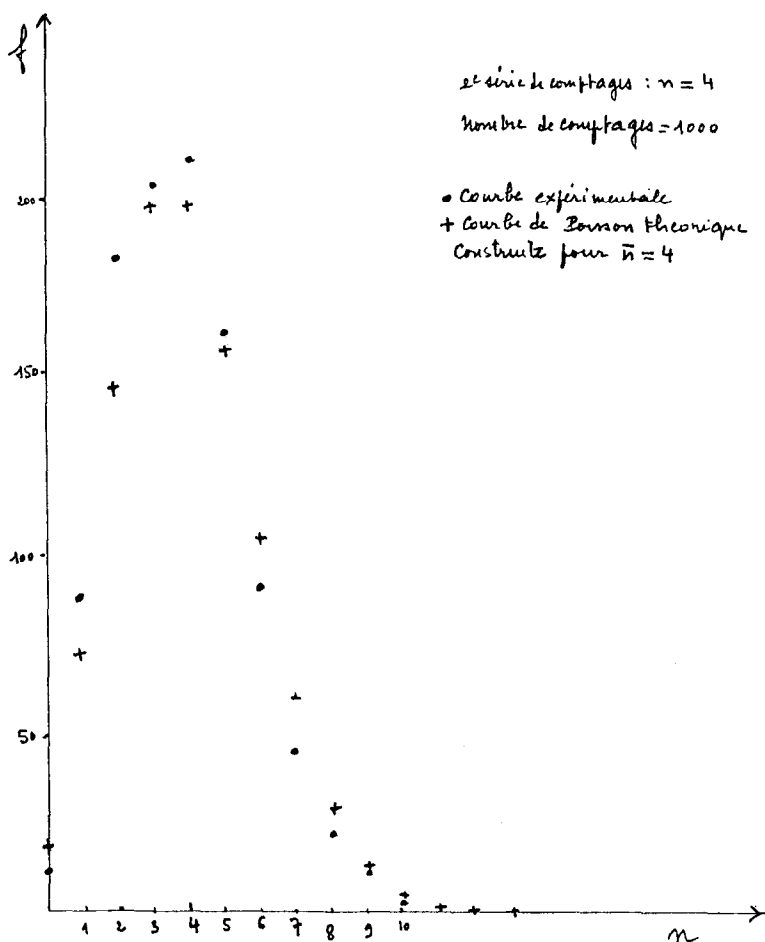


Fig. 4

Poisson a été construite point par point pour la valeur moyenne 4

(soit $1000 \frac{(4)^{n_i}}{n_i!} e^{-4}$) (qui est celle calculée d'après les résultats expérimentaux). La concordance est bonne entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux.

3^{me} série de comptages :

$$\bar{n} = 28$$

La valeur moyenne du comptage est $\bar{n} = 28$. La courbe de Poisson construite à partir des valeurs calculées pour $\bar{n} = 28$

(soit $1000 \frac{(28)^{n_i}}{n_i!} e^{-28}$) se superpose à la courbe expérimentale

mais la dissymétrie est moins marquée que pour $\bar{n} < 10$. La forme de la courbe suggère une fonction de Gauss discrète.

La fonction de Gauss est représentée graphiquement pour

$$\bar{n} = 28 \text{ (soit : } 1000 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{28}} e^{-\frac{(n_i - 28)^2}{2 \times 28}} \text{)}. \text{ La courbe obtenue}$$

est voisine de la courbe expérimentale mais il y a quelques écarts.

Pour $\bar{n} = 28$, c'est encore la loi de Poisson qui traduit le mieux la répartition des valeurs (fig. 5).

4^{me} série de comptages :

$$\bar{n} = 74$$

La valeur moyenne du comptage est $\bar{n} = 74$.

Comme précédemment, la courbe se précise quand le nombre de comptages augmente. Cette fois, la répartition est bien décrite par une fonction de Gauss discrète (fig. 6).

Il faut noter que le choix de \bar{n} pour construire les courbes théoriques est discutable. Il faudrait, en fait, utiliser le nombre moyen de désintégrations \bar{M} . Comme nous l'avons déjà remarqué, les valeurs de \bar{n} (qui est en fait une variable aléatoire) peuvent souvent différer sensiblement de \bar{M} à cause de la faible précision statistique. En fait, rien n'empêche de connaître \bar{M} avec une bonne précision statistique en effectuant un comptage suffisant (voir fin d'article).

Les résultats précédents illustrent le fait que pour \bar{M} suffisamment grand (ou $\bar{n} \dots$), soit $\bar{M} > 50$, la loi de Poisson se confond avec une loi discrète de Gauss.

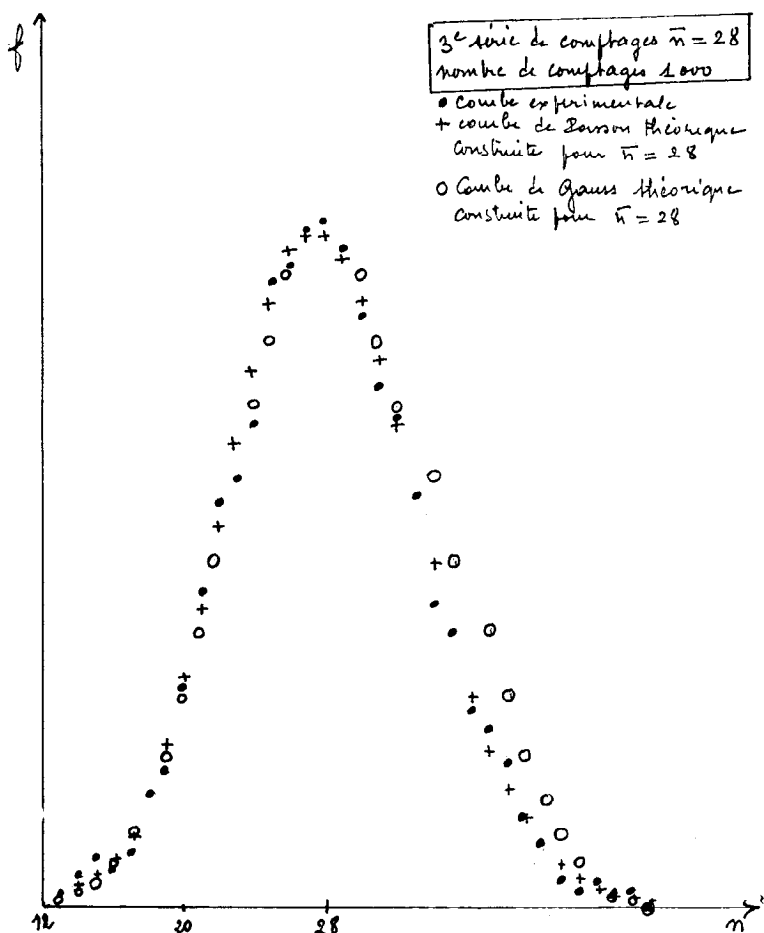


Fig. 5

Probabilité associée à un intervalle donné.

On recherche la probabilité P pour qu'une mesure n réponde au critère :

$$\bar{M} - \Delta n < n < \bar{M} + \Delta n.$$

Pour \bar{M} assez grand (la fonction de Poisson s'approchant d'une fonction de Gauss) approximativement :

• si $\Delta n = \sigma = \sqrt{\bar{M}}$ on trouve $P = 0,68$

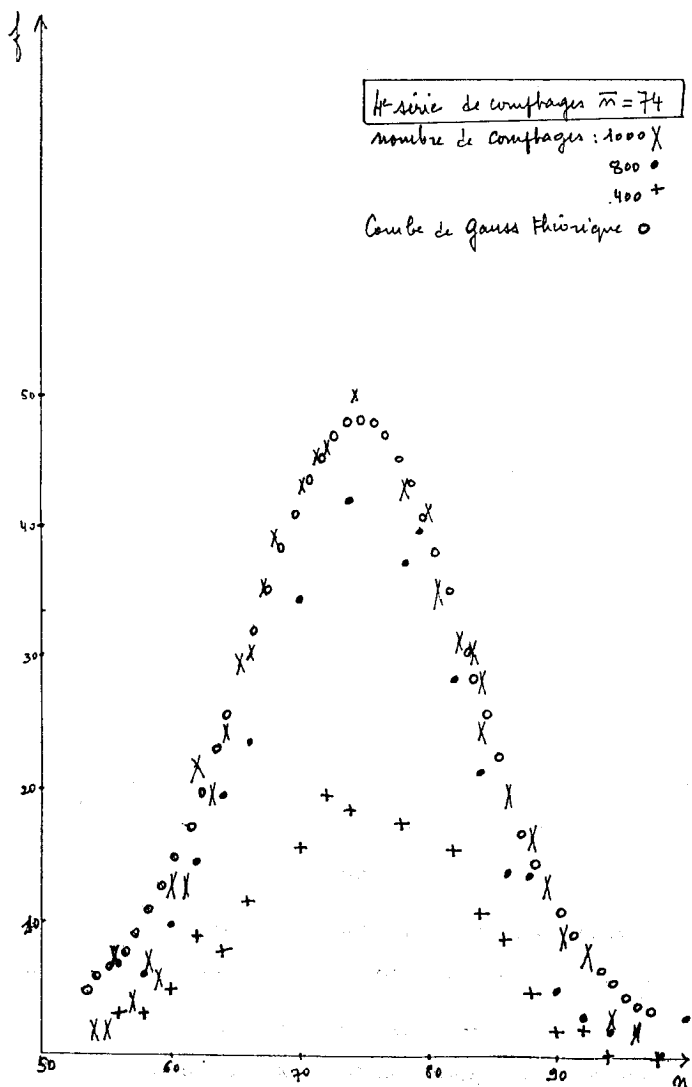


Fig. 6

Cela veut dire que 68 % des valeurs sont comprises dans l'intervalle $[\bar{M} - \sigma, \bar{M} + \sigma]$.

• si $\Delta n = 2\sigma = 2\sqrt{\bar{M}}$ on trouve $P = 0,95$.

95 % des valeurs sont comprises entre $[\bar{M} - 2\sigma \text{ et } \bar{M} + 2\sigma]$.

• si $\Delta n = 3\sigma = 3\sqrt{\bar{M}}$ on trouve $P = 0,997$.

Accès à la moyenne $\bar{M}(t)$; précision statistique.

La source et le détecteur occupant une certaine position relative, on peut essayer d'évaluer le nombre moyen $\bar{M}(t)$ d'événements détectés pendant la durée t , soit $\bar{M}(t) = at$ (voir page 88).

Seule, une bonne connaissance de $\bar{M}(t)$ permet d'approcher expérimentalement la loi de probabilité.

On peut, pour cela, effectuer une seule mesure de durée t . On trouvera alors un nombre n dont l'étude précédente nous a montré qu'il aura la probabilité 0,95 d'occuper l'intervalle $(\bar{M} - 2\sqrt{\bar{M}}, \bar{M} + 2\sqrt{\bar{M}})$ (\bar{M} grand).

Or ayant n , on cherche à évaluer \bar{M} . On peut montrer par un raisonnement tout à fait analogue à celui qui est utilisé dans une remarque de l'article suivant, page 103, que \bar{M} a la probabilité 0,95 d'appartenir à $(n - 2\sqrt{\bar{M}}, n + 2\sqrt{\bar{M}})$.

Posant alors $\Delta n = 2\sqrt{\bar{M}}$, la précision de la mesure n de \bar{M} , définie par le quotient $\frac{2\sqrt{\bar{M}}}{n}$, ou puisque l'on souhaite que n soit proche de \bar{M} : $\frac{\Delta n}{n} \simeq \frac{2\sqrt{n}}{n}$.

Si nous fixons, pour la précision à atteindre, la valeur $\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{100}$, n est déterminé par la relation $\frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{n} = \frac{1}{100}$, soit $n = 4 \cdot 10^4$.

Il suffira donc d'attendre suffisamment longtemps en mesurant la durée t correspondante, pour estimer $\bar{M}(t)$ avec une

précision suffisante de $\frac{1}{100}$ par un nombre n , voisin de 40 000.

On aura alors la même précision sur $\alpha = \frac{n}{t}$, puis sur la valeur

de $\overline{M}(t') = \alpha t'$ mesuré sur une durée t' quelconque (par exemple beaucoup plus petite). Le seul paramètre significatif est finalement α , nombre moyen de désintégrations par unité de temps.

Il faut tenir compte de ces conclusions pour faire des mesures valables lors de l'étude de l'absorption des β^- et des γ .

Conclusion. — Cette étude pourra constituer une bonne initiation aux phénomènes aléatoires et à la statistique dans le second cycle. Mais la référence aux résultats théoriques doit rester discrète. En particulier, la construction des courbes théoriques (Poisson et Gauss) n'est pas nécessaire. On a vu, d'ailleurs, que cette construction soulevait une difficulté.

H. LE BAIL.
