Décroissance radioactive

1. Introduction

Combien de temps faut-il à un atome radioactif pour se désintégrer ? La réponse s'exprime de façon probabiliste à partie d'un fait physique : un atome n' a pas de mémoire.

On considère un atome radioactif, c'est à dire susceptible de se désintéger à tout moment. On sait qu'il n'y a aucun moyen de savoir qaudn il va choisir de se désintégrer, donc tout ce qu'on peut dire est qu'il y aura telle ou telle probabilité pour qu'il se soit désintégré avant le temps t. Tout le problème est donc de déterminer cette probabilité de manière convaincante. Bien sur, le mieux est de commencer par merner quelques observations pour se faire une idée. Mais la démarche théorique a aussi ses avantages.

2. Démonstration de la loi exponentielle

2.1. Aspect probabbilitse

Un atome est réputé "sans mémoire", c'est à dire qu'il ne se dit jamais "Cela fait longtemp que j'attend, il serait peut-être temps que je me désintègre". Ce type de remarque ne peut être le fait que d'un observateur extérieur, qui se dit efecrivement que, s'il attend suffisament longtemps, alors il a des chances de voir l'atome se désintégrer.

Dans le langage des probabilités, cette absence de mémoire peut se traduire de la façon suivante : la probabilité que l'atome ne se désintègre pas durant les $s = t$ prochaines secondes est égale à celle qu'il ne se désintègre pas durant n'importe quel intervalle de t secondes précédant, noté s, sachant tout de même qu'il est toujours intact au début de l'intervalle considéré.

Autrement dit, seul compte le temps restant. En terme de probabilités conditionnelles, si l'on note

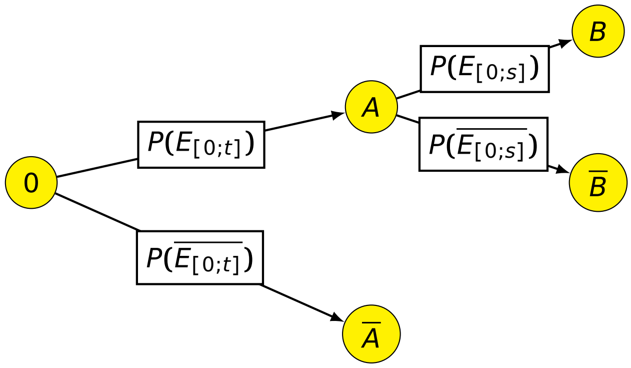
$E_{[0;t]}$ l'évènement "l'atome ne s'est pas désintégré avant l'instant t" et

$E_{[t;t+s]}$ l'évènement "l'atome ne se désintègre pas durant les s prochaines secondes.", On peut donc soumettre chaque atome à un "tirage" à 2 issues dont les "résultats" sont les suivants : "l'atome se désintègre entre 0 et t " ou "l'atome ne se désintègre pas entre 0 et t ". On obtient une épreuve de Bernoulli. Ainsi, La probabilité $P(E_{[t;t+s]})$ pour qu'un noyau se désintègre entre t et $t + s$ nécessite donc :

— que le noyau ne se soit pas désintégré entre 0 et t, 1^{ere} épreuve de notre schéma de Bernoulli.

— qu'il se désintègre ensuite entre t et $t+s$, ou, ce qui revient au même, entre 0 et s, “épreuve” B.

On peut modéliser la situation par un arbre :



On a la relation suivante, pour tout s et t : $P(E_{s+t}/E_t) = P(E_S)$.
On obtient, à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_t(E_{[0;s]}) = \frac{P(E_{[t;t+s]} \cap E_{[0;t]})}{P(E_{[0;t]})} = \frac{P(E_{[t;t+s]})}{P(E_{[0;t]})}$$

On peut aisément enlever le $\cap E_t$ car on a supposé que l'atome est toujours intact au début des s secondes étudiées.

2.2. Une fonction vérifiant $f(a+b) = f(a) + f(b)$

Notons alors $G(x)$ la valeur de $P(E_x)$, pour tout intervalle d'une durée x. On a ainsi, pour tout s et t : $G(s+t) = G(s)G(t)$.

Posons alors $H(x) = \ln(G(x))$. L'inégalité précédante devient : $H(s+t) = H(s)+H(t)$, ce qui prouve que H est une fonction linéaire, c'est à dire que de la forme $H(x) = ax$, où a est un nombre réel quelconque.

2.3. Une fonction linéaire ?

Pour la démonstration de $f(a+b) = f(a) + f(b) \iff f(x) = cx$: Voir livre page 99, Équation fonctionnelle de Cauchy

2.4. Retour à notre situation

Rappel : On trouve ce résultat car la fonction exponetielle et le logarithme népérien sont réciproques.

$$H(x) = \ln(G(x))$$
$$ax = \ln(G(x))$$
$$G(x) = e^{at}$$

On obtient la probabilité que l'atome se désintègre pas au cours du temps. On obtient une exponentielle croissante. Cela signifie que plus, le temps passe, plus la proba que l'atome se désintègre diminue. Pour obtenir la proba que l'atome ne se soit pas désintégré à un instant t, il faut donc faire l'inverse de la fonction trouvée précédement, soit :

Pour obtenir l'inverse, on fait :

$$G(x) = \frac{1}{e^{\alpha t}}$$
$$G(x) = \frac{e^0}{e^{\alpha t}}$$
$$G(x) = e^{-\alpha t}$$

On en déduit alors que la probabilité que l'atome ne se soit pas désintégré au bout du temps t est donné par l'expression $G(t) = e^{-\alpha t}$. C'est la loi exponentielle, dont α est le paramètre, le seul dégrès de liberté de l'atome.

3. Appplication à une population d'atomes

On suppose que la masse d'un élément radioactif contenu dans une source scéllée a une masse initiale m_0. Sa masse va diminuer en suivant la loi exponetielle, c'est-à-dire : $m(t) = m_0 e^{-\alpha t}$. En physique, α est noté λ et se nomme la constante radioactive. Comme on l'a di c'est le seul degrès de liberté de l'atome, qui dépend donc de son type.

3.1. Introduction

C'est en particulier sa valeur qui fixe la demi-vie de l'atome, c'est à dire le temps qu'il faut attendre pour que la moitié des atomes radioactifs aient été désintégrés. La demi-vie dépend du type d'atome auquel on a affaire : par exemple, elle est de 5720 ans pour le carbone 14. Si l'on note T la demi-vie d'un atome (grandeur mesurable expérimentalement), alors les grandeurs α et T sont liées par la relation :

$$e^{-\alpha T} = 1/2 \iff \alpha = \frac{\ln(2)}{T}$$

.

Le 1/2 provient du fait que durant T, la moitié des atomes se sont désintégrés, dont on a une proba de 1/2 qu'un atome se désintègre.

3.2. Étude de la fonction à travers un exemple

Imaginons qu'un conteneur renferme une source radioactive constituée par une masse m_0 = 50 mg de plutonium provenant d'un réacteur nucléaire. La période radioactive du plutonium est $T = 24000$ ans.

On cherche d'abord l'expression de la masse m en fonction du temps.

On a $\lambda = \frac{\ln n}{T} = \frac{\ln 2}{24}$ et $m_0 e^{-\lambda t} = 50 e^{-\frac{\ln 2}{24} t}$.

On cherche comment va évoluer la masse de plutonium. On cherche la limite.

$-\dfrac{\ln 2}{24} < 0$, donc $\lim_{t\to+\infty} -\dfrac{\ln 2}{24}t = -\infty$.

Par composition des limites, $\lim_{t\to+\infty} m(t) = 0$.

On veut ensuite montrer que la fonction est décroissante. On utilise une fonction composée pour calculer la dérivée. Ainsi, $m(t) = 50e^{-\frac{\ln 2}{24}t} = 50e^{u}$.

On a : $u'(t) = -\ln 224$. Nous avons donc : $m'(t) = 50u'(t)e^{u(t)}$, soit

$$m'(t) = -\frac{20\ln 2}{24}e^{-\frac{\ln 2}{24}t} < 0$$

La fonction est donc décroissante, mais ce ne nous indique pas dans combien de temps il ne restera plus qu'un %. On cherche donc à résoudre $m(t) \leq \frac{1}{100} \times m_0$.

$$\begin{aligned}
m(t) \leq \frac{1}{100} \times m_0 = \frac{50}{100} = 0.5. \\
&\iff 50e^{-\frac{\ln 2}{24}t} \leq 0.5 \\
&\iff e^{-\frac{\ln 2}{24}t} \leq \frac{0.5}{50} = 0.01 \\
&\iff \ln e^{-\frac{\ln 2}{24}t} \leq \ln 0.01 \\
&\iff -\frac{\ln 2}{24}t \leq \ln 0.01 \\
&\iff t \geq \frac{\ln 100}{\ln 2} \times 24 \\
&\iff t \simeq 260
\end{aligned}$$

On obtient donc 160 000 an avant qu'il ne reste plus que 1% de masse d'éléments radioactifs.

3.3. Application historique