Le Concept de facteur de chute en escalade

1.

On note x l'alongement du ressort Par le PFD, on a :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$
$$m\ddot{x} = mg - kx \text{en projetant sur i}$$

On intègre une première fois :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mgx - \frac{1}{2}kx^2 + k_1$$

Quand $x = 0$, la vitesse vaut V_0, donc :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mg \times 0 - \frac{1}{2}k \times 0^2 + k_1$$
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = k_1$$
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = k_1$$

On obtient :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = mgx - \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$m\dot{x}^2 - 2mgx + kx^2 = mv_0^2$$

Quand l'élongation maximale est atteinte, la vitesse est nulle, donc $\dot{x} = 0$. On obtient l'équation du second degré $-2mgx + kx^2 - mv_0^2 = 0$, dont on va chercher la solution positive.

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac\\ &= (-2mg)^2 - 4 \times k \times (-mv_0^2)\\ &= 4m^2g^2 + 4kmv_0^2\end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}S &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\\ &= \frac{2mg + \sqrt{(-2mg)^2 + 4kmv_0^2}}{2k}\end{aligned}$$

On transforme l'expression de la racine du Delta :

$$\begin{aligned}&\sqrt{(-2mg)^2 + 4kmv_0^2}\\ &\sqrt{4m^2g^2 + 4kmv_0^2}\\ &\sqrt{4m^2g^2(1 + \frac{4kmv_0^2}{4m^2g^2})}\\ &\sqrt{4m^2g^2(1 + \frac{kv_0^2}{mg^2})}\\ &\sqrt{4m^2g^2(1 + \frac{k}{m}\frac{v_0^2}{g^2})}\\ &\sqrt{4m^2g^2(1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2)}\\ &2mg\sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}\end{aligned}$$

On la met dans l'expression de base :

$$\begin{aligned} S &= \frac{2mg + 2mg\sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}}{2k} \\ &= \frac{2mg(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2})}{2k} \\ &= \frac{mg(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2})}{k} \\ &= \frac{mg}{k}(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}) \end{aligned}$$

La force maximale de rappel du ressort vaut $F = kx_{max}$, soit

$$\begin{aligned} F &= \frac{kmg}{k}(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}) \\ &= mg(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m}(\frac{v_0}{g})^2}) \end{aligned}$$

2.

2.1. Calcul de la hauteur h

Analysons l'aspect mécanique du problème pour trouver la hauteur de chute libre h qui donne une vitesse v_0 à la limite de tension de la corde.

$$\begin{aligned}
\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta Epp &= 0 \\
&= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_B - mgz_A \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_B - mgh \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh \\
mgh &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\
gh &= \frac{1}{2}v_0^2 \\
h &= \frac{v_0^2}{2g}
\end{aligned}$$

La hauteur de chute libre h qui donne une vitesse v_0 à la limite de tension de la corde est $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

2.2. Calcul du facteur de chute

Par définition, $f = \frac{h}{L}$. Or, on a trouvé $l = h = \frac{v_0^2}{2g}$. Le facteur de chute du cas étudié est donc $f = \frac{v_0^2}{2gL}$.

2.3. Réécriture de la force maximale

Par définition, $k = \dfrac{1}{\alpha L}$, donc

$$\begin{aligned}
F &= mg(1 + \sqrt{1 + (\frac{kv_0^2}{mg^2}})) \\
&= mg(1 + \sqrt{1 + (\frac{v_0^2}{mg^2\alpha L}}))
\end{aligned}$$

De plus, $v_0^2 = 2gLf$, donc

$$
\begin{aligned}
F &= mg(1+\sqrt{1+(\frac{v_0^2}{mg^2\alpha L}})) \\
&= mg(1+\sqrt{1+(\frac{2gLf}{mg^2\alpha L}})) \\
&= mg(1+\sqrt{1+(\frac{2f}{mg\alpha}})) \\
&= P(1+\sqrt{1+(\frac{2f}{P\alpha}}))
\end{aligned}
$$

Ce résultat ne dépend que du facteur de chute, pas de h : pour une corde deux fois plus longue et une hauteur de chute deux fois plus grande, la force maximale est inchangée (le contact avec la paroi risque tout de même d'être un peu plus sévère !). Le cas le plus défavorable correspond à L minimum, pour une hauteur de chute h donnée, soit f = 2, cas du doc. 2 de l'énoncé.

3.

3.1.

3.1.1 -

$$
\begin{aligned}
F &= P(1+\sqrt{1+(\frac{2f}{P\alpha}})) \\
\frac{F}{P} &= 1+\sqrt{1+(\frac{2f}{P\alpha})} \\
\frac{F}{P} &= \frac{P}{P}+\sqrt{1+(\frac{2f}{P\alpha})} \\
\frac{F-P}{P} &= \sqrt{1+(\frac{2f}{P\alpha})} \\
(\frac{F-P}{P})^2 &= 1+(\frac{2f}{P\alpha}) \\
\frac{F^2-2FP+P^2}{P^2} &= 1+(\frac{2f}{P\alpha}) \\
\frac{F^2-2FP+P^2}{P^2}-1 &= \frac{2f}{P\alpha} \\
\frac{F^2-2FP+P^2}{P^2}-\frac{P^2}{P^2} &= \frac{2f}{P\alpha} \\
\frac{F^2-2FP}{P^2} &= \frac{2f}{P\alpha} \\
\iff \frac{2fP^2}{F^2-2FP} &= P\alpha \\
\frac{2fP}{F^2-2FP} &= \alpha \\
\frac{2fP}{F(F-2P)} &= \alpha
\end{aligned}
$$

L'élasticité de ma corde est :

$$\alpha = \frac{2fP}{F_{max}(F_{max}-2P)}$$

Elle est mesurée en N^{-1}.

Pour $F_{max} = 9\text{kN}, P = 800\text{N}, f = 2$, il faut que l'élasticité de la corde soit $\alpha = 4.8 \cdot 10^{-5} N^{-1}$.

3.1.2 -

Par définition, $F = kx$. Donc :

$$\begin{aligned} & F = kx \\ \iff & x = \frac{F}{k} \\ & = \frac{mg}{k}(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{\alpha p}}) \\ & = \frac{mg}{\frac{1}{\alpha L}}(\ldots) \\ & = mg\alpha L(\ldots) \\ & = P\alpha L(\ldots) \\ & = P\alpha L(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{\alpha p}}) \end{aligned}$$

Pour $L = 10$m et $f = 1$, l'élongation maximale est :

$$x_{max} = \alpha LP(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{\alpha P}}) = 3.2m$$

et la force maximale vaut 6.6kn.

3.1.3 -

Ce cas apparaît catastrophique : la hauteur de chute est importante alors que la partie extensible de la corde est très réduite. C'est pourtant ce qui est utilisé dans le cas d'une excursion en via ferrata, mais le dispositif d'assurance utilisé est alors tout particulièrement conçu pour ce genre d'expédition : la fixation au harnais est un amortisseur.

A.N. : $f = 5, L = 1metF_{max} = 13,7$ kN.