La loi exponentielle

Combien de temps faut-il à un atome radioactif pour se désintégrer? La réponse s'exprime de façon probabiliste à partir d'un fait physique : un atome n'a pas de mémoire.

On considère un atome radioactif, c'est-à-dire susceptible de se désintégrer à tout moment. On sait qu'il n'y a aucun moyen de savoir quand il va « choisir » de se désintégrer, donc tout ce qu'on peut dire est qu'il y aura telle ou telle probabilité pour qu'il se soit désintégré avant le temps t. Tout le problème est donc de déterminer cette probabilité de manière convaincante. Bien sûr, le mieux est de commencer par mener quelques observations pour se faire une idée. Mais la démarche théorique a aussi ses avantages.

Amnésie permanente

Un atome est réputé « sans mémoire », c'est-à-dire qu'il ne se dit jamais quelque chose du genre « Bon, j'ai déjà attendu pas mal de temps, alors il serait peut-être temps que je me désintègre. » Ce genre de remarque ne peut être le fait que d'un observateur extérieur, qui se dit effectivement que, s'il attend suffisamment longtemps, alors il a des chances de voir l'atome se désintégrer.

Dans le langage des probabilités, l'absence de mémoire d'un atome se traduit de la façon suivante : la probabilité que l'atome ne se désintègre pas durant les t prochaines secondes est égale à celle qu'il ne se désintègre pas durant n'importe quel intervalle de t secondes, sachant tout de même qu'il est toujours intact au début de l'intervalle considéré.

Autrement dit, seul compte le temps restant. En termes de probabilités conditionnelles, si l'on note E_t l'événement « l'atome ne s'est pas désintégré avant l'instant t », on a la relation suivante, pour tous s et t :

$$P(E_{s+t}/E_t) = P(E_s).$$

On en tire, à l'aide de la formule des probabilités conditionnelles :

$$P(E_s) = \frac{P(E_{s+t} \cap E_t)}{P(E_t)} = \frac{P(E_{s+t})}{P(E_t)}.$$

Notons alors $G(x)$ la valeur $P(E_x)$, pour tout nombre x. On a ainsi, pour tous s et t :

$$G(s+t) = G(s)\,G(t).$$

Posons alors $H(x) = \ln(G(x))$. L'égalité précédente devient :

$$H(s+t) = H(s) + H(t),$$

ce qui prouve que H est une fonction linéaire (voir encadré), c'est-à-dire de la forme $H(x) = ax$, où a est un nombre réel quelconque. On en déduit alors que la probabilité que l'atome ne se soit pas désintégré au bout du

Un atome radioactif se désintègre à un instant aléatoire selon la règle de l'« absence de mémoire ».

temps t est donnée par l'expression $G(t) = e^{-at}$: c'est la loi exponentielle, dont a est le paramètre.
Le paramètre a est donc le seul « degré de liberté » pour nos atomes. C'est en particulier sa valeur qui fixe la « demi-vie » de l'atome, c'est-à-dire le temps qu'il faut attendre pour que la moitié des atomes radioactifs aient été désintégrés.

La demi-vie dépend du type d'atome auquel on a affaire : par exemple, elle est de 5 720 ans pour le carbone 14.
Si l'on note T la demi-vie d'un atome (une grandeur que l'on peut estimer expérimentalement), alors les grandeurs a et T sont liées par la relation :

$$e^{-a\mathrm{T}} = 1/2,$$

soit $a = \dfrac{\ln(2)}{\mathrm{T}}$.

Pourquoi linéaire ?

Une fonction f qui vérifie que, pour tous réels s et t, $f(s+t) = f(s) + f(t)$ est-elle nécessairement de la forme $f(x) = ax$ pour tout x, où a est une constante ?
La réponse est oui… ou presque.

Tout d'abord, remarquons que $f(0) = 0$, puisque $f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$. Posons alors $a = f(1)$: il vient donc que $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$ et, de même, pour tout entier positif n, $f(n) = an$.
Pour les entiers négatifs, remarquons que $f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$,
donc $f(-n) = -f(n)$, d'où l'on tire que $f(n) = an$ pour tous les entiers.

Passons aux rationnels, de la forme $\dfrac{p}{q}$ (p, q entiers).

On a $f\left(q \times \left(\dfrac{p}{q}\right)\right) = q \times f\left(\dfrac{p}{q}\right)$, d'où l'on tire $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{f(p)}{q}$, d'où $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = a \times \left(\dfrac{p}{q}\right)$.

Ça semble se préciser : la relation $f(x) = ax$ est vraie au moins pour tout nombre rationnel x. Et pour les autres ? Là, les choses se corsent : on a besoin d'une hypothèse supplémentaire sur f pour déduire que la relation $f(x) = ax$ est vraie pour tous les réels. Ici, dans le contexte de la loi exponentielle, on peut utiliser une hypothèse de monotonie de f, qui correspond au fait que plus le temps passe, plus l'atome a des chances de se désintégrer.

Soit alors un réel x, que l'on approche en croissant par des rationnels $\dfrac{p}{q}$. On a donc, en prenant par exemple $a = 1$ et donc f croissante (le cas général s'en déduit facilement), que $f(x)$ est supérieur à $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{p}{q}$ pour tous les rationnels $\dfrac{p}{q}$ inférieurs à x. En conséquence, $f(x) \geqslant x$.

De même, en approchant x par des rationnels supérieurs à x, on montre que $f(x) \leqslant x$, et donc $f(x) = x$ pour tout x.

Carte d'identité

Nom : loi exponentielle

Notation : Exp(a)

Formule : $P(X > t) = e^{-at}$ pour tout réel t tel que $t \geqslant 0$.

Espérance : $E(X) = \dfrac{1}{a}$

Variance : $V(X) = \dfrac{1}{a^2}$

Signes particuliers : loi continue ; loi sans mémoire.

Amnésies discrète et continue

Il est tout à fait remarquable qu'un argument à l'origine purement « intellectuel » sur l'absence de mémoire des atomes puisse conduire à un résultat quantitatif aussi précis.

La loi exponentielle est ainsi la seule loi sans mémoire, du moins pour celle qui concerne les temps continus. Si l'on s'intéresse à des temps discrets, c'est-à-dire que l'on ne regarde, par exemple, que toutes les secondes, ou toutes les minutes, mais pas tous les instants possibles, il existe aussi une loi sans mémoire, qui est simplement la loi géométrique (cf. page 57). Cette dernière est d'ailleurs une approximation aux temps discrets de la loi exponentielle. En effet, la probabilité que l'atome se désintègre entre les temps n et $n+1$ est donnée par la valeur

$$G(n) - G(n+1),$$

qui peut s'écrire, après simplifications,

$$(e^{-a})^n \times (1 - e^{-a}).$$

Un détecteur compte le temps selon une certaine unité de mesure, par exemple la seconde : si l'atome s'est désintégré entre la seconde n et la seconde $n+1$, le détecteur se bornera à mentionner la valeur n : la quantité $(e^{-a})^n \times (1 - e^{-a})$ est donc la probabilité que le détecteur indique la seconde n. En posant $p = 1 - e^{-a}$, on reconnaît bien la loi géométrique de paramètre p et l'expression $p(1 - p)^n$ (il faudrait l'exposant $n - 1$, le décalage provient de ce qu'on part du temps 0 dans la loi exponentielle, et non du temps 1 comme dans la loi géométrique).

La loi exponentielle est aux réels ce que la loi géométrique est aux entiers.

Ainsi, la loi géométrique est aux entiers ce que la loi exponentielle est aux réels.
À moins que ce ne soit le contraire…

B. R.