Analyse

subtitle

M. Professor

Paulhenry Saux

25 mars 2025

Français

UNIVERSITÉ TOULOUSE III PAUL SABATIER

Table des matières

Chapitre 18

Inégalité de Bienaymé

En Bref

18.1 Inégalité de Bienaymé

Théorème 1.1 : Définition

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V}{a^2}$$

18.1.1 Utilisation

À partir de la loi

1. On calcule et on pose $y = \frac{V}{a^2}$
2. Un majorant de $P(|X-E(X)| \geq a)$ est donc y : Donc la probabilité que X s'éloigne de plus de a de l'espérance est inférieure ou égale à y
3. Mais $|X - E(X)| < a \iff E(x) - a \leq X \leq E(x) + a$
4. On peut aussi dire que la probabilité que X soit compris entre $E(x) - a$ et $E(x) + a$ est inférieure à $1 - y$

Trouver un minorant de la probabilité que $c < X < d$.

1. $c < X < d \iff c - E(X) < X - E(X) < d - E(X)$
2. On pose $e = d - E(X)$
3. On a donc : $c < X < d \iff X - E(X) < e$
4. Donc : $P(c < X < d) = P(X - E(X) < e) = 1 - P(X - E(X) \geq e)$
5. D'après l'inégalité de Tchebychev, $P(X - E(X) \geq e) \leq \frac{V}{e^2}$
6. Donc $-P(X - E(X) \geq e) \geq -\frac{V}{e^2}$
7. Donc $1 - P(X - E(X) \geq e) \geq 1 - \frac{V}{e^2}$
8. Donc $P(c < X < d) \geq 1 - \frac{V}{e^2}$

Exemple

Soit L la variable aléatoire donnant le débit du Lot relevé sur un barrage à un instant t. On donne $E(L) = 350$ et $V(L) = 28000$.

On cherche une majoration de $P(|L - 350| \geq 200)$.

Donc :

1. On calcule et on pose $y = \frac{V(L)}{200^2} = 0.7$
2. Un majorant de $P(|L - 350| \geq 200)$ est donc 0.7 : Donc la probabilité que le débit du Lot soit écartée de plus ou moins 200 m3 par seconde de son cours moyen est inférieure ou égale à 0.7
3. Mais $|L - 350| < 200 \iff 350 - 200 = 150 \leq X \leq 350 + 200 = 550$
4. On peut aussi dire que la probabilité que L soit compris entre 150 et 550 est inférieure à $1 - y - 0.7 = 0.3$

On veut maintenant une minoration de la probabilité que le débit du Lot soit compris entre 50 et 650 m/s

Donc :

1. $50 < L < 350 \iff 50 - 350 = -300 < L - E(X) < 650 - 350 = 300$
2. On pose $e = 300$
3. On a donc : $50 < L < 350 \iff L - 350 < e$
4. Donc : $P(50 < L < 350) = P(L - 350 < e) = 1 - P(L - 350 \geq e)$
5. D'après l'inégalité de Tchebychev, $P(L - 350 \geq e) \leq \frac{V(L)}{e^2} = \frac{28000}{300^2} = \frac{14}{45}$
6. Donc $-P(L - 350 \geq e) \geq -\frac{14}{45}$
7. Donc $1 - P(L - 350 \geq e) \geq 1 - \frac{14}{45}$
8. Donc $P(50 < L < 650) \geq \frac{31}{45}$

Donc la probabilité que le débit soit compris entre 50 et 650 m/s est d'au moins $\frac{31}{45}$.

18.2 Inégalité de concentration

Théorème 2.1 : Définition

> Sur un échantillon de taille n et de moyenne M_n :
>
> $$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V}{na^2}$$

18.2.1 Utilisation

Déterminer une taille d'échantillon en fonction de la précision et du risque choisis

On considère un échantillon de taille n de variable aléatoire X suivant une loi binomiale de probabilité de succès p avec M_n la moyenne de cet échantillon. On cherche combien d'éléments il faut pour que la fréquence de succès soit comprise entre a et b avec une probabilité supérieure à c

1. On converti l'intervalle donné
   (a) $a < M_n < b \iff a - E(X) < M_n - E(X) < b - E(X)$
   (b) $\rightarrow |M_n - E(X)| < b - E(X)$
2. On cherche donc n tel que $P(|M_n - E(X)| < b - E(X)) \geq c$
3. On pose $e = b - E(X))$
4. On transforme l'expression :
   (a) $\iff 1 - P(|M_n - E(X)| \geq e \geq c$
   (b) $\iff -P(|M_n - E(X)| \geq e \geq c - 1$
   (c) $\iff P(|M_n - E(X)| \geq e \leq -(c - 1)$
5. On applique l'inégalité : $P(|M_n - E(X)| \geq e \leq \frac{V(X)}{ne^2}$
6. On cherche donc n tel que $\frac{V(X)}{ne^2} \leq -(c - 1) = 1 - c$
7. Finalement, $n \geq \frac{V(X)}{(1-c) \times e^2}$

Le risque correspond à $1 - c$ et la précision à e.

> **Exemple**
>
> Pour une certaine variété d'arbre, la probabilité d'obtenir une fleur blanche est de 0.25. On cherche combien il faut de fleur pour que la fréquence de fleur blanche soit comprise entre 0.2 et 0.3 avec une probabilité d'au moins 0.99
>
> On admet que $V(X) = 0.1875$ et $E(X) = 0.25$. En effet, si X suit une loi binomiale, sa variance vaut $p(1 - p)$ et son espérance vaut p.
>
> Donc :
>
> 1. On converti l'intervalle donné
>   (a) $0.2 < M_n < 0.3 \iff 0.2 - 0.25 < M_n - 0.25 < 0.3 - 0.25$

   (b) $\rightarrow |M_n - 0.25| < 0.05$

2. On cherche donc n tel que $P(|M_n - 0.25| < 0.05) \geq 0.99$
3. On pose $e = 0.05)$
4. On transforme l'expression :
   (a) $\iff 1 - P(|M_n - 0.25| \geq e \geq 0.99$
   (b) $\iff -P(|M_n - 0.25| \geq e \geq 0.99 - 1$
   (c) $\iff P(|M_n - 0.25| \geq e \leq -(-0.01)$
5. On applique l'inégalité : $P(|M_n - 0.25| \geq e \leq \frac{0.1875}{n0.05^2}$
6. On cherche donc n tel que $\frac{0.1875}{n0.05^2} \leq 0.01$
7. Finalement, $n \geq \frac{0.1875}{(0.01)\times 0.05^2}$

18.3 Loi des grands nombres

Théorème 3.1 : Définition

$$\lim_{+\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$

En conséquence, la moyenne empirique M_n converge vers$E(X)$ quand n tend vers ∞.