Démonstration de $(uv)' = u'v + uv'$

1-Remarques préliminaires

u et v sont dérivable sur I et $a \in I$

2-Taux de variation

On pose d'abord le taux de variation :

$$\begin{aligned} T_a(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (1) \\ &= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h} \quad (2) \end{aligned}$$

3-Ajout et soustraction

Pour la suite de la démonstration, il faut ajouter et soustraire en même temps $u(a+h) \times v(a)$. On a donc :

$$T_a(h) = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a+h) \times v(a) + u(a+h) \times v(a) - u(a) \times v(a)}{h}$$

4-Factorisation

On peut désormais procéder à la factorisation comme ceci :

$$T_a(h) = \frac{u(a+h) \times (v(a+h) - v(a)) + v(a) \times (u(a+h) - u(a))}{h}$$

5-Séparation de l'expression en 2

On sépare l'expression :

$$T_a(h) = \frac{u(a+h) \times (v(a+h) - v(a))}{h} + \frac{v(a) \times (u(a+h) - u(a))}{h}$$

6-Simplification

On simplifie en enlevant la division par h pour les facteurs $u(a+h)$ et $v(a)$. On a donc :

$$T_a(h) = u(a+h) \times \frac{(v(a+h) - v(a))}{h} + v(a) \times \frac{(u(a+h) - u(a))}{h}$$

7-On fait tendre h vers 0

On fait tendre h vers 0 pour trouver $T_a(h)$. La limite quand $h \to 0$ est donc :

$$T_a(h) = u(a) \times v'(a) + v(a) \times u'(a)$$

8-Conclusion

Donc f est dérivable en a et $f'(a) = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$ Ceci est valable pour tout a de I, alors f est dérivable en sur I et $f' = u'v + uv'$