Produit scalaire 1/2

I – Définition

A – Rappel

Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\| \overrightarrow{u} \|$, est la distance AB.

B – Produit scalaire

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, le

nombre réel défini par :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est nul
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$, dans le cas contraire.

Remarque : Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on a : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

C – Opérations

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, on a :

1. Bilinéarité

- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
- $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{kv}) = \overrightarrow{ku}.\overrightarrow{v}$, avec k un nombre réel.

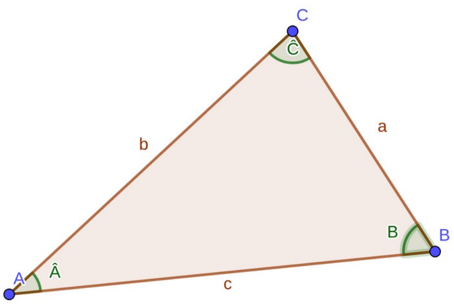
2. Identités remarquables

- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

II – Relation avec la norme

A – Formules

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2)$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 - \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2)$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$



B – Théorème d'Al Kashi

Dans un triangle ABC, avec les notation de Fig 1, on a :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$