Tanda de Ejercicios

Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá
Introducción a la optimización
2022-I

Ana Paulina Castillo Velásquez
ancastillov@unal.edu.co

2.1 Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be a convex set, with $x_1, \ldots, x_k \in C$, and let $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \mathbb{R}$ satisfy $\theta_i \geq 0$, $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$. Show that $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$. (The definition of convexity is that this holds for $k = 2$; you must show it for arbitrary k). *Hint*. Use induction on k.

Solución.

La prueba se hará por inducción. Consideremos el caso donde $k = 2$, es claro que se cumple la condición dada la definición de convexidad. Supongamos ahora para $k = n$, veamos que bajo estas suposiciones se tiene para $n + 1$.

Sea $\sum_{i=1}^{n} \theta_i' x_i$ una combinación convexa de $x_1, \ldots, x_n \in C$ con $\theta_i \geq 0$ y $\theta_1 + \cdots + \theta_n = 1$. Por la hipótesis inductiva es claro que esta sumatoria pertenece a C. Sea $x_{n+1} \in C$, consideramos $\theta \geq 0$. Es claro, al ser C convexo que la combinación convexa $\theta \sum_{i=1}^{n} \theta_i' x_i + (1 - \theta) x_{n+1}$ está en C. Así obtenemos

$$\begin{aligned}
\theta \sum_{i=1}^{n} \theta_i' x_i + (1-\theta) x_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n} \theta \theta_i' x_i + (1-\theta) x_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i + \theta_{n+1} x_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \theta_i x_i
\end{aligned}$$

Considerando $\theta \theta_i' = \theta_i$ y $\theta = \theta_{n+1}$. basta verificar que $\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \theta_i &= \sum_{i=1}^{n} \theta_i + \theta_{n+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \theta \theta_i' + (1-\theta) \\
&= \theta \sum_{i=1}^{n} \theta_i' + (1-\theta) \\
&= \theta + (1-\theta) \\
&= 1
\end{aligned}$$

Así, vemos que la combinación convexa de $n + 1$ elementos también está en C a partir de la definición inicial $2 - 2$. Al probarse para un k arbitrario se concluye el enunciado.

$\square$

2.3 *Midpoint convexity.* A set C is midpoint convex if whenever two points a, b are in C, the average or midpoint $(a + b)/2$ is in C. Obviously a convex set is midpoint convex. It can be proved that under mild conditions midpoint convexity implies convexity. As a simple case, prove that if C is closed and midpoint convex, then C is convex.

Solución.

Antes de comenzar la prueba directamente es necesario mencionar lo siguiente: consideremos la sucesión binaría de un número entre 0 y 1: $\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \dot{2}^{-n}$, donde $\theta_1 = 0$ si $\theta \in [0, 1/2)$ y $\theta_1 = 1$ si $\theta \in [1/2, 1]$. Consideramos $D_k = \theta - \sum_{n=1}^{k} \theta_n \dot{2}^{-n}$, y definimos los $\theta_{k+1} = 0$ si $D_k < \frac{1}{2^{k+1}}$ o $\theta_{k+1} = 1$ si $D_k \geq \frac{1}{2^{k+1}}$. Esta recurrencia no es más que la forma de hallar la expansión binaria de θ.

Sean $x, y \in C$, queremos verificar que la combinación convexa de $\theta x + (1 - \theta) y$ pertenece a C. Es claro que la combinación de la forma $D_n x + (1 - D_n) y$ pertenecen a C dada la condición de punto medio sobre sobre el conjunto y la forma binaria de D_n. Como para todo n se tiene la combinación convexa escrita anteriormente, necesariamente se tendrá el limite en C

$$\lim_{n\to\infty} D_n x + (1 - D_n) y = \theta x + (1 - \theta) y.$$

Esto gracias a que C es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, un espacio métrico completo, por tanto C es completo, conteniendo así a $\theta x + (1 - \theta) y$. □

2.4 Show that the convex hull of a set S is the intersection of all convex sets that contain S. (The same method can be used to show that the conic, or affine, or linear hull of a set S is the intersection of all conic sets, or affine sets, or subspaces that contain S).

Solución.

Probaremos la contenencia de izquierda a derecha.Sea $y \in C$, donde C es el convex hull de S, y debe ser combinación convexa de elementos de S de la forma $y = \sum_{i=1}^{k} \theta_i x_i$. Es claro que $x_i \in S \subseteq C_j$ para todo i y para todo j que indexan los elementos de S y los conjuntos convexos que contienen a S respectivamente. Así, cualquier combinación convexa de cualesquiera elementos de S estará en C_j para todo j, en particular estará y.

La contenencia de derecha a izquierda. Es claque que C es convexo, luego existe un l tal que $c_l = C$, así $I = \cap_{j\in J} C_j \subseteq C$

Concluyendo así la prueba pues se tiene la doble contenecia. □

2.5 What is the distance between two parallel hyperplanes $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_1\}$ and $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = b_2\}$?

Solución.

b_1 y b_2 son la distancia de sus respectivas rectas al origen, pero al tener el mismo vector director (el cual considero unitario), al ser estas paralelas, la distancia entre ellas será necesariamente la diferencia de estos b_1 y b_2, concluyendo así que la distancia entre estas dos rectas es $|b_1 - b_2|$ □

2.8 Which of the following sets S are polyhedra? If possible, express S in the form $S = \{x : Ax \preceq b, Fx = g\}$.

a) $S = \{y_1 a_1 + y_2 a_2 : -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, where $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$.

Solución.

Podemos ver este conjunto como un paralelogramo con vértices $v_1 = (1)a_1 + (1)a_2$, $v_2 = (1)a_1 + (-1)a_2$, $v_3 = (-1)a_1 + (1)a_2$ y $v_4 = (-1)a_1 + (-1)a_2$. Consideremos ahora el plano π como el generado por los vectores $a1$ y $a2$, podemos definir dos regiones más que resultarán en hiper planos:

$$S_1 = \left\{z + y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid a_1^T z = a_2^T z = 0, -1 \leq y_1 \leq 1\right\}$$
$$S_2 = \left\{z + y_1 a_1 + y_2 a_2 \mid a_1^T z = a_2^T z = 0, -1 \leq y_2 \leq 1\right\}$$

Los cuales resultan en los puntos que son perpendiculares a los puntos, los cuales definen plano, arrastrados en su posición entre -1 y 1 según la variable descrita.

Es claro que todos estos son hiper planos, lo cual al intersecarlos definen un poliedro. $\square$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ \mathbf{1}^T x = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\right\}$, where $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ and $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Solución.

El hecho de que este conjunto es un poliedro se deriva que las condiciones dadas sobre los x pertenecientes son directamente un semi plano y tres hiper-planos. Veamoslo:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0\} \\
S_2 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{1}^T x = 1\right\} \\
S_3 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T x = b_1\right\} \\
S_4 &= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a^2}^T x = b_2\right\}
\end{aligned}
$$

Donde $\mathbf{a}^T = [a_1, \cdots, a_n]$ y $\mathbf{a^2}^T = \left[a_1^2, \cdots, a_n^2\right]$

$\square$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ x^T y \leq 1 \text{ for all } y \text{ with } \|y\|_2 = 1\right\}$.

Solución.

Dado el hecho

$$
\begin{aligned}
\|x^T y\|_2 &= \|x^T\|_2 \|y\|_2 \\
&= \|x^T\|_2 = \|x\|_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

es claro que el conjunto S resulta en la bola unitaria centrada en 0 intersecada con el primer ortante de $\mathbb{R}^n$, pero al ser una curva esta requiere infinitos semi planos (la cantidad de puntos con derivadas en la curva), por lo cual no puede ser un poliedro ya que este tiene finitos parámetros.

$\square$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ x^T y \leq 1 \text{ for all } y \text{ with } \sum_{i=1}^n |y_i| = 1\right\}$.

Solución.

Este conjunto S resulta en la intersección del primer ortante de $\mathbb{R}^n$ con $\{x : |x_i| = 1\}$, bajo un argumento análogo al literal anterior. La diferencia crucial radica en que este conjunto lo podemos ver como la intersección finita de hiperplanos sobre y por su forma.

$\square$

2.9 *Voronoi sets and polyhedral decomposition.* Let $x_0, \ldots, x_K \in \mathbb{R}^n$. Consider the set of points that are closer (in Euclidean norm) to x_0 than the other x_i, i.e.,

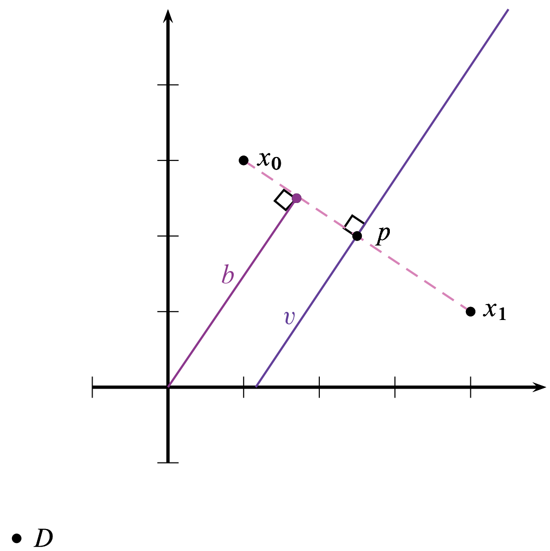
$$V = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_2 \leq \|x - x_i\|_2\,,\ i = 1, \ldots, K\}$$

V is called the Voronoi region around x_0 with respect to $x_1, \ldots, x_K$.

a) Show that V is a polyhedron. Express V in the form $V = \{x : Ax \preceq b\}$.

Solución.

Con dos puntos en el espacio, se puede hallar la región de los elementos que están más cerca de un punto en especifico, a manera de ilustrar consideremos la siguiente imagen:



Donde b es la distancia del Todos los puntos que estén a la izquierda de la recta v estarán más cerca de x_0 que de x_1, esto se puede ver como la desigualdad $\{x : -v^T x \succeq -b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : v^T x \preceq b\}$, lo cual es claramente un semiplano. del mismo modo para los K puntos existente existen K semiplanos, resultando en la intersección de estos, lo cual es claramente un poliedro descrito de la forma: $\{x \in \mathbb{R}^n : A^T x \preceq B\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} (-1)^{a_1} V_1 \\ (-1)^{a_1} V_2 \\ \vdots \\ (-1)^{a_1} V_k \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} (-1)^{a_1} b_1 \\ (-1)^{a_2} b_2 \\ \vdots \\ (-1)^{a_k} b_k \end{bmatrix}.$$

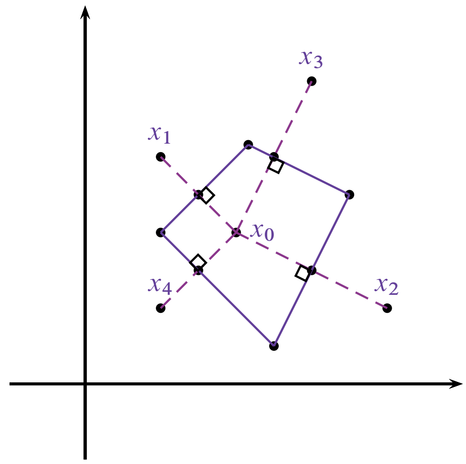
contando con que $a_i = 1$ si x_0 está a la izquierda o encima de la recta v y $a_i = 0$ en caso contrario

$\square$

b) Conversely, given a polyhedron P with nonempty interior, show how to find $x_0, \ldots, x_K$ so that the polyhedron is the Voronoi region of x_0 with respect to $x_1, \ldots, x_K$.

Solución.

Se toman las aristas del poliedro, y se refleja el punto x_0 como se ve en la ilustración.



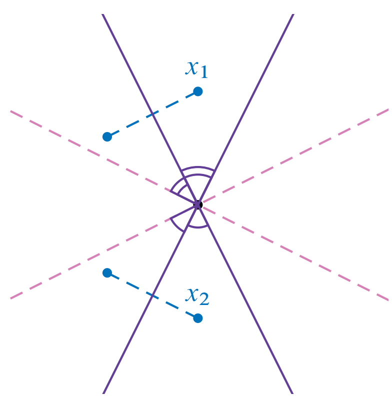
$\square$

c) We can also consider the sets

$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_k\|_2 \leq \|x - x_i\|_2, i \neq k\}$$

The set V_k consists of points in $\mathbb{R}^n$ for which the closest point in the set $\{x_0, \ldots, x_K\}$ is x_k.
The sets $V_0, \ldots, V_K$ give a polyhedral decomposition of $\mathbb{R}^n$. More precisely, the sets V_k are polyhedra, $\bigcup_{k=0}^{K} V_k = \mathbb{R}^n$, and $\operatorname{int} V_i \cap \operatorname{int} V_j = \emptyset$ for $i \neq j$, i.e., V_i and V_j intersect at most along a boundary. Suppose that $P_1, \ldots, P_m$ are polyhedra such that $\bigcup_{i=1}^{m} P_i = \mathbb{R}^n$, and $\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j = \emptyset$ for $i \neq j$. Can this polyhedral decomposition of $\mathbb{R}^n$ be described as the Voronoi regions generated by an appropriate set of points?

Solución.
Falso, tomemos como ejemplo cualesquiera dos rectas en $\mathbb{R}^2$ las cuales el ángulo entre ellas sea diferentes a 90 y 60 grados.



Es claro que las áreas de reflexión de una recta sobre la otra no contarán con una intersección no vacía, por lo que es imposible generar un x_3 y x_4 pertinentes para la partición de $\mathbb{R}^2$ según lo descrito en el inciso *b)*

$\square$

2.10 *Solution set of a quadratic inequality.* Let $C \subseteq \mathbb{R}^n$ be the solution set of a quadratic inequality,

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x^T A x + b^T x + c \leq 0 \right\}$$

with $A \in \mathbf{S}^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, and $c \in \mathbb{R}$.

a) Show that C is convex if $A \succeq 0$.

Solución.

Según el libro guía un conjunto es conexo si y solo si su intersección con una recta es conexa. Así a modo de simplificar consideremos la recta con puntos $x + t \cdot v$ donde x y v son vectores fijos de $\mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$

$$(x + tv)^T A(x + tv) + b^T(x + tv) + c = a_1 t^2 + a_2 t + a_3$$

Donde

$$a_1 = v^T Av, \quad a_2 = b^T v + 2x^T Av, \quad a_3 = c + b^T x + x^T Ax$$

Así su intersección resulta en

$$\left\{x + tv \mid a_1 t^2 + a_2 t + a_3 \leq 0\right\}$$

La cual es claramente convexa. □

b) Show that the intersection of C and the hyperplane defined by $g^T x + h = 0$ (where $g \neq 0$) is convex if $A + \lambda g g^T \succeq 0$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución.

De manera análoga al punto anterior, la intersección resulta en una recta, pero donde la matriz ”principal” es $A + \lambda g g^T$, por lo cual es necesario, para que sea convexo, que esta sea definida positiva. □

Are the converses of these statements true?

2.13 *Conic hull of outer products.* Consider the set of rank-k outer products, defined as $\left\{XX^T : X \in \mathbb{R}^{n\times k}, \text{rank } X = k\right\}$. Describe its conic hull in simple terms.

Solución.

Primero, podemos ver a XX^T como una matriz semi definida positiva, ya que para todo $v \in \mathbb{R}^n$

$$v^T XX^T v = y^T y = \|y\|^2 \geq 0.$$

Además, gracias a las propiedades del rango sabemos que rank $\left(X^T X\right) = k$. Sean A, B matrices semi definidas positivas con rango k y v un vector del espacio nulo de $A + B$

$$v^T(A + B)v = v^T Av + v^T Bv = 0$$

Al ser A y B semi definidas positivas, necesariamente

$$v^T Av = v^T Bv = 0$$

Lo cual implica que el rango de $A + B$ necesariamente es mayor o igual a k ya que por lo anterior el espacio nulo de $A + B$ está contenido en el espacio nulo de A y el de B, lo cual acota su nulidad a a lo más k y se concluye el hecho por el teorema de rango nulidad. Se sigue que la envolvente cónica son las matrices semi definidas positivas cuyo rango es mayor o igual a k, incluyendo la matriz 0

□

2.14 *Expanded and restricted sets.* Let $S \subseteq \mathbb{R}^n$, and let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathbb{R}^n$.

a) For $a \geq 0$ we define S_a as $\{x : \text{dist}(x, S) \leq a\}$, where $\text{dist}(x, S) = \inf_{y\in S} \|x - y\|$. We refer to S_a as S expanded or extended by a. Show that if S is convex, then S_a is convex.

Solución.
Sean $x_1, x_2 \in S_a$. Con $0 \leq \theta \leq 1$, veamos que su combinación convexa está dentro de S_a.

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(\theta x_1 + (1-\theta)x_2, S) &= \inf_{z \in S} \|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - z\| \\
&= \inf_{z_1, z_2 \in S} \|\theta x_1 + (1-\theta)x_2 - \theta z_1 - (1-\theta)z_2\| \\
&= \inf_{z_1, z_2 \in S} \|\theta (x_1 - z_1) + (1-\theta)(x_2 - z_2)\| \\
&\leq \inf_{z_1, z_2 \in S} (\theta \|x_1 - z_1\| + (1-\theta)\|x_2 - z_2\| \\
&= \quad \theta \inf_{z_1 \in S} \|x_1 - z_1\| + (1-\theta) \inf_{z_2 \in s} \|x_2 - z_2\| \\
&\leq a,
\end{aligned}$$

concluyendo así la prueba

□

b) For $a \geq 0$ we define $S_{-a} = \{x : B(x,a) \subseteq S\}$, where $B(x,a)$ is the ball (in the norm $\|\cdot\|$), centered at x, with radius a. We refer to S_{-a} as S shrunk or restricted by a, since S_{-a} consists of all points that are at least a distance a from $\mathbb{R}^n \setminus S$. Show that if S is convex, then S_{-a} is convex.

Solución.
Sean $x_1, x_2 \in S_{-a}$. Tengamos en cuenta que si x_{-a}, para todo y tal que $\|y\| \leq a$, $x + y \in S$, así para $0 \leq \theta \leq 1$ se tiene:

$$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 + y = \theta (x_1 + y) + (1-\theta)(x_2 + y) \in S$$

lo cual por lo mencionado arriba implica que $\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in S_{-a}$ □

2.15 *Some sets of probability distributions.* Let x be a real-valued random variable with $\mathbf{prob}\,(x = a_i) = p_i, i = 1, \ldots, n$, where $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Of course $p \in \mathbb{R}^n$ lies in the standard probability simplex $P = \{p : \mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\}$. Which of the following conditions are convex in p ? (That is, for which of the following conditions is the set of $p \in P$ that satisfy the condition convex?)

a) $\alpha \leq \mathbf{E}\, f(x) \leq \beta$, where $\mathbf{E}\, f(x)$ is the expected value of $f(x)$, i.e., $\mathbf{E}\, f(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$. (The function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is given.)

Solución.
Dada la definición de valor esperado nos queda la desigualdad

$$\alpha \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(a_i) \leq \beta$$

Lo cual es claramente convexo □

b) $\mathbf{prob}(x > \alpha) \leq \beta$.

Solución.
De manera análoga al literal anterior tenemos

$$\sum_{i: a_i \geq \alpha} p_i \leq \beta$$

□

c) $\mathbf{E}\left|x^3\right| \leq \alpha\, \mathbf{E}\,|x|$.

Solución.
Este es un caso especifico del literal a), donde $f(x) = |x^3| - |x|$ □

d) $\mathbf{E}\, x^2 \le \alpha$.

Solución.
Este es un caso especifico del literal a), donde $f(x) = x^2$ □

e) $\mathbf{E}\, x^2 \ge \alpha$.

Solución.
Este es un caso especifico del literal a), donde $f(x) = x^2$ □

f) $\mathbf{var}(x) \le \alpha$, where $\mathbf{var}(x) = \mathbf{E}(x^2) - (\mathbf{E}\, x)^2$ is the variance of x.

Solución.
No es convexo, podemos ver el problema como

$$\text{var}(x) = \mathbf{E}x^2 - (\mathbf{E}x)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i\right)^2 \ge \alpha$$

con $b_i = a_i^2$ y $A = -aa^T$, es claro que por el punto 2.10 esto NO es convexo ya que A es un matriz definida negativa

□

g) $\mathbf{var}(x) \ge \alpha$.

Solución.
Análogo al punto anterior pero se intercambian los signos de b y A por lo cual es un conjunto convexo al ser A definida positiva □

h) $\mathbf{quartile}(x) \ge \alpha$, where $\mathbf{quartile}(x) = \inf\{\beta : \mathbf{prob}(x \le \beta) \ge 0.25\}$.

Solución.
Esto es equivalente a $\mathbf{prob}(x \le \beta) < 0.25$, Caso que ya probamos es convexo. □

i) $\mathbf{quartile}(x) \le \alpha$.

Solución.
Completamente análogo punto anterior intercambiando la desigualdad. □

2.16 Show that if S_1 and S_2 are convex sets in $\mathbb{R}^{m+n}$, then so is their partial sum

$$S = \{(x, y_1 + y_2) : x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

Solución.
Sean $w_1 = (x, y_1 + y_2)\,, w_2 = (a, b_1 + b_2)$ dos puntos de S. Sea θ tal que $0 \le \theta \le 1$, la combinación convexa de estos puntos es de la forma

$$\theta\,(x, y_1 + y_2) + (1-\theta)\,(a, b_1 + b_2) = (\theta x + (1-\theta)a, (\theta y_1 + (1-\theta)b_1) + (\theta y_2 + (1-\theta)b_2))\,.$$

$(x, y_1) \in S_1, \quad (x, y_2) \in S_2, \quad (a, b_1) \in S_1, \quad (a, b_2) \in S_2$, ya que $w_1, w_2 \in S$, lo cual implica que

$$(\theta x + (1-\theta)a, \theta y_1 + (1-\theta)b_1) \in S_1, \quad (\theta x + (1-\theta)a, \theta y_2 + (1-\theta)b_2) \in S_2.$$

Gracias a la convexidad de S_1 y S_2, estando así la combinación en S por definición

□

2.17 *Image of polyhedral sets under perspective function.* In this problem we study the image of hyperplanes, halfspaces, and polyhedra under the perspective function $P(x, t) = x/t$, with $\mathbf{dom}\, P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$. For each of the following sets C, give a simple description of

$$P(C) = \{v/t : (v, t) \in C, t > 0\}.$$

a) The polyhedron $C = \mathbf{conv}\{(v_1, t_1), \ldots, (v_K, t_K)\}$ where $v_i \in \mathbb{R}^n$ and $t_i > 0$.

Solución.
Es claro que una base para C es $\{(v_1, t_1), \ldots, (v_K, t_K)\}$, ya que todo elemento es un combinación lineal de estos elementos, por tanto al aplicar una función al conjunto basta aplicar la función a los elementos de la base. Por tanto,

$$P(C) = \mathbf{conv}\{v_1/t_1, \ldots, v_K/t_K\}$$

$\square$

b) The hyperplane $C = \left\{(v, t) : f^T v + gt = h\right\}$ (with f and g not both zero).

Solución.
Consideramos $z \in \mathbb{R}^n = x/t$ para $t \neq 0$. Así

$$P(C) = \left\{z : f^T z + g = h/t\right\}$$

$\square$

c) The halfspace $C = \left\{(v, t) : f^T v + gt \leq h\right\}$ (with f and g not both zero).

Solución.
Consideramos $z \in \mathbb{R}^n = x/t$ para $t \neq 0$. Así

$$P(C) = \left\{z : f^T z + g \leq h/t\right\}$$

$\square$

d) The polyhedron $C = \{(v, t) : Fv + gt \preceq h\}$.

Solución.
Consideramos $z \in \mathbb{R}^n = x/t$ para $t \neq 0$. Así

$$P(C) = \{z : Fz + g \preceq h(1/t)\}$$

$\square$

2.18 *Invertible linear-fractional functions.* Let $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be the linear-fractional function

$$f(x) = (Ax + b)/\left(c^T x + d\right), \quad \mathbf{dom}\, f = \left\{x : c^T x + d > 0\right\}$$

Suppose the matrix

$$Q = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}$$

is nonsingular. Show that f is invertible and that f^{-1} is a linear-fractional mapping. Give an explicit expression for f^{-1} and its domain in terms of A, b, c, and d. *Hint.* It may be easier to express f^{-1} in terms of Q.

Solución.

Veamos que f es composición de funciones invertibles, lo cual implica que ella lo es. Sea

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{bmatrix} Ax + b \\ c^T x + d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A \\ c^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= Q\mathcal{P}(x) \end{aligned}$$

Donde $\mathcal{P}(x) = (x, 1)$ con $x \in \mathbb{R}^n$. $f = P(Q\mathcal{P}(x))$. Consideraremos $P^{-1}((x, 1)) = x$. Así $f^{-1} = (\mathcal{P}^{-1}[Q^{-1}P^{-1}(x)])$, donde Q^{-1} existe gracias a que se supone no singular, además existe la inversa de P, dada en el libro guía como la función $P^{-1}(C) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x/t \in C, t > 0\}$. El dominio de f^{-1} son los vectores de $\mathbb{R}^m$.

□

2. Implementar un algoritmo para determinar el cono convexo de un conjunto de puntos en cualquier dimensión.

Solución.

El algoritmo no fue implementado pero la teoría del mismo es la siguiente:

Sean m puntos en $\mathbb{R}^n$.

i. Se crea el Convex Hull de los puntos.
   Para este paso es necesario la librería LazySet de Julia, la cual ya viene integrada con esta función.
ii. Si 0 esta en el interior del convex hull el generado es todo el espacio
iii. Se toman los vértices del convex hull
iv. De los k puntos se hacen $\binom{k}{n-1}$ elecciones de grupos de n elementos, ya que siempre estará el 0.
   En caso de que $k \leq n$ el conic hull es el generado por las combinaciones lineales positivas de estos elementos.
v. Por cada elección del paso anterior se crea el semi- espacio de estos elementos, y se toma un vertice diferente a los seleccionados, por donde se extenderá el semi espacio.
vi. Se evalúa si los demás vértices están contenidos. En caso de ser afirmativo se marcan con 1, en caso contrario, 0
vii. Se intersecan los semi-espacios marcados con 1

Para los casos donde $n = 2$ el algoritmo se simplifica pues basta evaluar los angulos de los puntos dados:

```
point = {x0,x1,x2,...,xm}

thetas = {}
for x in points

    angle = tan^{-1}(x[1]/x[2])
    list.append(angle)
end

theta1 = Min (thetas)
theta2 = Max (thetas)
```

de pantalla 2022-04-17 150219.jpg de pantalla 2022-04-17 150219.bb

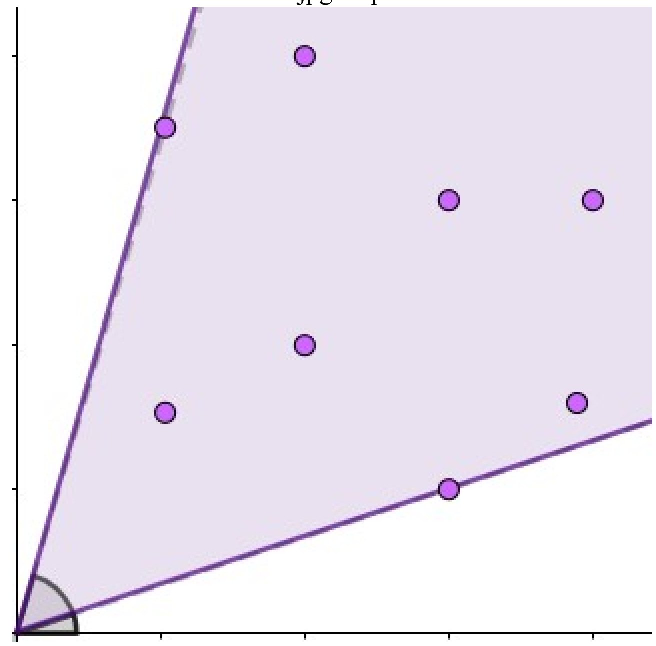


Figura 1: Caption

El cono convexo serían los puntos cuyos ángulos estén entre $\theta 1$ y $\theta 2$

$\square$

3. Verificar que el conjunto de soluciones de un conjunto de desigualdades de matrices lineales es convexa.

Solución.

Consideraremos las matrices lineales como las matrices asociadas a transformaciones lineales. El conjunto $S_i = \{Ax \preceq b\}$ es un semi espacio. De esta forma el conjunto $s = \{x : A_i x \preceq b_i\}$ puede verse como la intersección de conjuntos como se sigue:

$$\bigcap_{i \in I} S_i$$

Lo cual es una intersección de semiespacios, los cuales son convexos, por lo que S es convexo

$\square$