Martingale

January 24, 2011

Contents

Le martingale sono una classe di processi stocastici nella quale la dipendenza tra le variabili aleatorie del processo si esprime in un modo speciale, la cosiddetta proprietà di martingala. Questa proprietà costituisce una relazione di dipendenza che si può verificare in numerose situazioni ed è diventata uno strumento fondamentale nella teoria e nelle applicazioni. In questo capitolo studieremo le proprietà principali delle martingale e mostreremo qualche applicazione.

1 Definizione e prime proprietà

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$.

Definizione 1.1 *Un processo $(M_t)_{t\in I}$ è una* martingala *se è adattato, la variabile aleatoria M_t è integrabile per ogni $t \in I$ e*

$$\mathbb{E}\left[M_t \mid \mathcal{F}_s \right] = M_s, \qquad \textit{per ogni } s \leq t.$$

Esempio 1.2 Sia $(N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson con parametro λ ed $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la sua filtrazione naturale. Il processo $(M_t)_{t\geq 0}$ definito da

$$M_t = N_t - \lambda t$$

è una martingala.

Esempio 1.3 Sia $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano standard. È chiaro che B è una martingala come pure il processo $(X_t)_{t\geq 0}$ definito da

$$X_t = B_t^2 - t.$$

Esempio 1.4 Sia $I = \mathbb{N}$ e $(X_n)_{n\geq 0}$ una catena di Markov con insieme degli stati uguale a un insieme numerabile E e matrice di transizione $P = (p_{jk})_{jk\in E}$. Supponiamo che $\lambda \in]0,1]$ sia un autovalore della matrice P con autovettore una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ limitata ovvero

$$(Pf)(j) = \sum_{k\in E} P_{jk} f(k) = \lambda f(j), \qquad \text{per ogni } j \in E. \tag{1}$$

Il processo $(M_n)_{n\geq 0}$ definito da

$$M_n = \lambda^{-n} f(X_n)$$

è una martingala rispetto alla filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ della catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ $(\mathcal{F}_n = \sigma\{ X_j \mid j \leq n \})$.

Grazie alla proprietà di Markov, per ogni $n \geq 0$ e ogni funzione $g : E^{n+1} \to \mathbb{R}$ (dove E^{n+1} denota il prodotto di $n+1$ copie dell'insieme E), si ha

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1} g(X_n, \ldots, X_0) \right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j_{n+1},j_n,\ldots,j_0} \lambda^{-(n+1)} f(j_{n+1}) g(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_0) \mathbb{P}\{X_{n+1} = j_{n+1}, X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0\} \\
&= \sum_{j_{n+1},j_n,\ldots,j_0} \lambda^{-(n+1)} f(j_{n+1}) g(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_0) \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}\{X_{n+1} = j_{n+1} \mid X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0\} \cdot \mathbb{P}\{X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0\} \\
&= \sum_{j_{n+1},j_n,\ldots,j_0} \lambda^{-(n+1)} f(j_{n+1}) g(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_0) \\
&\qquad \cdot \mathbb{P}\{X_{n+1} = j_{n+1} \mid X_n = j_n\} \cdot \mathbb{P}\{X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0\} \\
&= \sum_{j_{n+1},j_n,\ldots,j_0} \lambda^{-(n+1)} p_{j_n j_{n+1}} f(j_{n+1}) g(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_0) \mathbb{P}\{X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0\} \\
&= \sum_{j_n,\ldots,j_0} \lambda^{-(n+1)} (Pf)(j_n) g(j_n, j_{n-1}, \ldots, j_0) \mathbb{P}\{X_n = j_n, \ldots, X_0 = j_0\}.
\end{aligned}
$$

Dato che $Pf = \lambda f$, si ha $\lambda^{-(n+1)}(Pf)(j_n) = \lambda^{-n} f(j_n)$ e quindi

$$
\mathbb{E}\left[M_{n+1} g(X_n, \ldots, X_0)\right] = \mathbb{E}\left[M_n g(X_n, \ldots, X_0)\right]
$$

ovvero, data l'arbitrarietà di g,

$$
\mathbb{E}\left[\, M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \,\right] = M_n.
$$

Per induzione si deduce subito che $\mathbb{E}\left[\, M_m \mid \mathcal{F}_n \,\right] = M_n$ per ogni $m \geq n$.

Esempio 1.5 *(Schema d'urna)* Un'urna contiene inizialmente una pallina blu e una nera. Si pesca una pallina a caso e si rimette nell'urna insieme ad un'altra pallina dello stesso colore. Si ripete quindi l'esperimento all'infinito ...

Sia X_n la frazione di palline blu e Y_n il numero di palline blu presenti nell'urna dopo l'n-esimo esperimento. Chiaramente $Y_0 = 1$, $Y_n = (n+2)X_n$ e

$$
\mathbb{P}\{\, Y_{n+1} = j \mid Y_n = k \,\} = \begin{cases} k/(n+2) & \text{se} \quad j = k+1, \\ 1 - k/(n+2) & \text{se} \quad j = k, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}
$$

La speranza di Y_{n+1} per la probabilità condizionata $\mathbb{P}\{\cdot \mid Y_n = k\}$ è pertanto

$$
\begin{aligned}
&(k+1)\mathbb{P}\{\, Y_{n+1} = k+1 \mid Y_n = k \,\} + k\mathbb{P}\{\, Y_{n+1} = k \mid Y_n = k \,\} \\
&= \frac{k(k+1)}{n+2} + \frac{k(n+2-k)}{n+2} = \frac{k(n+3)}{n+2}
\end{aligned}
$$

e perciò

$$
\mathbb{E}\left[\, Y_{n+1} \mid \sigma(Y_n) \,\right] = \frac{n+3}{n+2} Y_n.
$$

Ne segue che la successione $(X_n)_{n \geq 0}$

$$
X_n = \frac{Y_n}{n+2}
$$

è una martingala rispetto alla sua filtrazione naturale. In particolare

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[X_n \mid \sigma\{X_0\}\right]\right] = \mathbb{E}[\, X_0\,] = \frac{1}{2}.$$

Definizione 1.6 *Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ e Z una varibile aleatoria reale estesa integrabile. Si chiama* martingala chiusa *dalla variabile aleatoria Z un processo stocastico $(M_t)_{t\in I}$ tale che M_t sia una versione della speranza condizionale di Z rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_t$ per ogni $t \in I$.*

Esempio 1.7 *(Rapporti di verosimiglianza)* Sia $(Y_n)_{n\geq 0}$ una successione di variabili aleatorie reali indipendenti identicamente distribuite e siano f_0 ed f_1 due densità di probabilità. Supponiamo, per semplicità, che la funzione f_0 sia strettamente positiva. La successione dei rapporti di verosimiglianza

$$X_n = \frac{f_1(Y_0)f_1(Y_1)\cdots f_1(Y_n)}{f_0(Y_0)f_0(Y_1)\cdots f_0(Y_n)}$$

costituisce un processo stocastico di grande importanza nei metodi sequenziali per i test di ipotesi statistiche.

Si verifica facilmente che, se le variabile aleatorie $f_1(Y_n)/f_0(Y_n)$ sono integrabili, allora

$$\mathbb{E}\left[\, X_{n+1} \mid \sigma\{Y_0, \ldots, Y_n\}\right] = X_n \mathbb{E}\left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\right].$$

Di conseguenza, *se f_0 è la densità di tutte le Y_n*, allora $(X_n)_{n\geq 0}$ è una martingala rispetto alla filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ con $\mathcal{F}_n = \sigma\{Y_0, \ldots, Y_n\}$. Si ha infatti

$$\mathbb{E}\left[\frac{f_1(Y_{n+1})}{f_0(Y_{n+1})}\right] = \int \frac{f_1(y)}{f_0(y)} f_0(y)dy = \int f_1(y)dy = 1.$$

Si dimostra immediatamente che le somme e moltiplicazioni per scalari di martingale sono ancora martingale.

2 Prime proprietà, sottomartingale, supermartingale

Per studiare le martingale e le loro applicazioni è utile estendere la Definizione 1.1.

Definizione 2.1 *Un processo $(X_t)_{t\in I}$ è una* supermartingala *(risp.* sottomartingala*) se è adattato, la variabile aleatoria X_t è integrabile per ogni $t \in I$ e*

$$\mathbb{E}\left[\, X_t \mid \mathcal{F}_s\,\right] \leq X_s, \qquad (\textit{risp. } \geq) \quad \textit{per ogni } s \leq t.$$

Osserviamo che $(X_t)_{t\in I}$ è una supermartingala se e solo se il processo $(-X_t)_{t\in I}$ è una sottomartingala.

Esempio 2.2 Sia $(N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson di parametro $\lambda > 0$. Si verifica facilmente che il processo $(N_t - ct)_{t\geq 0}$ (rispetto alla sua filtrazione naturale) è una sottomartingala se $c < \lambda$ e una supermartingala se $c > \lambda$.

Le supermartingala e sottomartingale si ottengono spesso con semplici trasformazioni di martingale, supermartingale o sottomartingale.

Teorema 2.3 *Siano $X = (X_t)_{t\in I}$ e $Y = (Y_t)_{t\in I}$ due sottomartingale. Il processo $Z = (Z_t)_{t\in I}$ definito da*

$$Z_t(\omega) = \max\{X_t(\omega), Y_t(\omega)\}$$

è una sottomartingala.

Dimostrazione. Il processo Z è evidentemente adattato e integrabile ($|Z_t| \leq |X_t|+|Y_t|$ per ogni $t \geq 0$). Per verificare che è una sottomartingala consideriamo due tempi $s < t$ e un insieme $A \in \mathcal{F}_s$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_A Z_s d\mathbb{P} &= \int_{A\cap\{X_s\geq Y_s\}} X_s d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{X_s<Y_s\}} Y_s d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{A\cap\{X_s\geq Y_s\}} X_t d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{X_s<Y_s\}} Y_t d\mathbb{P} \\
&\leq \int_{A\cap\{X_s\geq Y_s\}} Z_t d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{X_s<Y_s\}} Z_t d\mathbb{P} \\
&= \int_A Z_t d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Ne segue che $\mathbb{E}[\, Z_t \mid \mathcal{F}_s \,] \geq Z_s$. □

Analogamante il minimo tra supermartingale è una supermartingala

Corollario 2.4 *Se $X = (X_t)_{t\in I}$ è una martingala allora i processi*

$$X^+ = (X_t^+)_{t\geq 0}, \qquad X^- = (X_t^-)_{t\geq 0}, \qquad |X| = (|X_t|)_{t\geq 0},$$

sono sottomartingale.

Dimostrazione. Basta osservare che: X^+ è il massimo tra X e la martingala nulla, X^- è l'opposto del minimo tra X e la martingala nulla, $|X|$ è la somma di X^+ e X^-. □

Teorema 2.5 *Sia $X = (X_t)_{t\in I}$ una martingala e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Supponiamo che, per ogni $t \in I$, la variabile aleatoria $\varphi(X_t)$ sia integrabile. Allora il processo $\varphi(X) = (\varphi(X_t))_{t\geq 0}$ è una sottomartingala.*

Dimostrazione. Basta ricordare la diseguaglianza di Jensen per la speranza condizionale. □

Corollario 2.6 *Sia $X = (X_t)_{t\in I}$ una martingala. Se le variabili aleatorie X_t hanno quadrato integrabile allora il processo $(X_t^2)_{t\in I}$ è una sottomartingala.*

Dimostrazione. Basta applicare il Teorema 2.5 con $\varphi(x) = x^2$. □

3 Tempi d'arresto

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. L'insieme dei tempi I sarà un sottoinsieme di $[0, +\infty[$ tale che 0 appartenga a I.

Definizione 3.1 *Una variabile aleatoria* $T : \Omega \to [0, +\infty]$ *è un* tempo d'arresto *se l'evento* $\{T \leq t\}$ *appartiene alla* σ*-algebra* $\mathcal{F}_t$ *per ogni* $t \in I$*. Un tempo d'arresto* T *si chiama* discreto *se ha valori in un sottoinsieme discreto* D *di* $[0, +\infty]$.

Ricordiamo che un sottoinsieme D di $[0, +\infty]$ si chiama *discreto* se $D \cap [a, b]$ è finito per ogni intervallo $[a, b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

Osserviamo che, se T è un tempo d'arresto, anche gli insiemi

$$\{T < t\}, \qquad \{T = t\}$$

appartengono a $\mathcal{F}_t$. Si ha infatti

$$\{T < t\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\}, \qquad \{T = t\} = \{T \leq t\} - \{T < t\}.$$

Esempio 3.2 *(Tempo d'attesa dell'n-mo successo)* Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ un processo di Bernoulli con paramento p ed $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ la sua filtrazione naturale. Le variabili aleatorie T_n definite da

$$\begin{aligned} T_1(\omega) &= \min\{\, k \geq 1 \mid X_k(\omega) = 1\,\} \\ T_{n+1}(\omega) &= \min\{\, k > T_n(\omega) \mid X_k(\omega) = 1\,\} \end{aligned}$$

(con la convenzione $\min \emptyset = +\infty$), ovvero i tempi d'attesa dell'n-esimo successo, sono tempi d'arresto. Infatti

$$\begin{aligned} \{\, T_1 = 1\,\} &= \{\, X_1 = 1\,\} \in \mathcal{F}_1, \\ \{\, T_1 \leq k\,\} &= \bigcup_{1\leq \ell\leq k} \{\, X_\ell = 1\,\} \in \mathcal{F}_k \qquad (k > 1), \\ \{\, T_{n+1} = k\,\} &= \{\, T_n < k, X_k = 1\,\} \in \mathcal{F}_k. \end{aligned}$$

Esempio 3.3 *(Tempi di salto di un processo di Poisson)* I tempi di salto T_n di un processo di Poisson sono tempi d'arresto rispetto allla filtrazione naturale del processo. Infatti, come abbiamo visto,

$$\{\, T_n \leq t\,\} = \{\, N_t \geq n\,\} \in \mathcal{F}_t$$

per ogni $t \geq 0$.

Esempio 3.4 *(Tempo del primo attraversamento del moto browniano)* Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano standard e $a > 0$. Il tempo T_a del primo attraversamento del livello a definito da

$$T_a(\omega) = \inf\{\, s \geq 0 \mid B_s(\omega) \geq a\,\}$$

è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione naturale del processo. Osserviamo infatti che

$$\{ T_a > t \} = \bigcap_{s\in[0,t]} \{ B_s < a \} .$$

Tutti gli insiemi $\{ B_s > a \}$ (con $s \leq t$) appartengono a $\mathcal{F}_t$ ma questo non ci permette ancora di concludere che l'insieme $\{ T_a > t \}$ appartiene a $\mathcal{F}_t$ perché, l'intersezione nella formula precedente è più che numerabile. Grazie alla continuità delle traiettorie abbiamo però

$$\bigcap_{s\in[0,t]} \{ B_s < a \} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{s\in[0,t]} \left\{ B_s \leq a - \frac{1}{n} \right\} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{r\in[0,t]\cap\mathbb{Q}} \left\{ B_r \leq a - \frac{1}{n} \right\} .$$

Ne segue che l'insieme $\{ T_a > t \}$ è unione numerabile di insiemi di $\mathcal{F}_t$ e perciò appartiene a $\mathcal{F}_t$ come pure il suo complementare $\{ T_a \leq t \}$. Questo dimostra che T_a è un tempo d'arresto.

La classe dei tempi d'arresto ha le seguenti proprietà

Proposizione 3.5 *Siano S, T due tempi d'arresto. Le variabili aleatorie $S+T$, $S \wedge T$, $S \vee T$ sono tempi d'arresto.*

Dimostrazione. Si ha infatti, per ogni $t > 0$,

$$\{ S \wedge T \leq t \} = \{ S \leq t \} \cup \{ T \leq t \} , \qquad \{ S \vee T \leq t \} = \{ S \leq t \} \cap \{ T \leq t \} .$$

Quanto alla somma $S + T$ osserviamo che

$$\{ S + T > t \} = \{ S > t \} \cup \{ T > t \} \cup (\{ S \leq t, T \leq t \} \cap \{ S + T > t \}) .$$

Gli insiemi $\{ S > t \}$ e $\{ T > t \}$ appartengono a $\mathcal{F}_t$ perché S e T sono tempi d'arresto. Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}
\{ S \leq t, T \leq t \} \cap \{ S + T > t \} &= \bigcup_{x,y\in[0,t],\, x+y>t} \{ S = x,\, T = y \} \\
&= \bigcup_{x,y\in[0,t],\, x+y>t} \bigcap_{n\geq 1} \left\{ x - \frac{1}{n} < S \leq x,\, y - \frac{1}{n} < T \leq y \right\} \\
&= \bigcup_{s,r\in([0,t]\cap(\mathbb{Q}\cup\{t\})),\, s+r>t} \bigcap_{n\geq 1} \left\{ s - \frac{1}{n} < S \leq s,\, r - \frac{1}{n} < T \leq r \right\} .
\end{aligned}$$

L'insieme $\{ S + T \leq t \}$ appartiene quindi a $\mathcal{F}_t$. □

Proposizione 3.6 *Sia $(T_n)_{n\geq 1}$ una successione di tempi d'arresto. La variabile aleatoria $\sup_{n\geq 1} T_n$ è un tempo d'arresto.*

Dimostrazione. Basta osservare che si ha

$$\left\{ \sup_{n\geq 1} T_n > t \right\} = \bigcup_{n\geq 1} \{ T_n > t \},$$

per ogni $t \geq 0$. □

L'estremo inferiore di una successione $(T_n)_{n\geq 1}$ di tempi d'arresto di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ potrebbe non essere un tempo d'arresto della stessa filtrazione. Infatti, per ogni $k > 0$, si ha

$$\left\{ \inf_{n\geq 1} T_n \leq t \right\} = \bigcap_{j\geq k} \left\{ \inf_{n\geq 1} T_n < t + \frac{1}{j} \right\} = \bigcap_{j\geq k} \bigcup_{n\geq 1} \left\{ T_n < t + \frac{1}{j} \right\}$$

e quindi l'insieme $\{ \inf_{n\geq 1} T_n \leq t \}$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{F}_{t+1/k}$ qualunque sia k. Ne segue che appartiene alla σ-algebra

$$\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{F}_{t+\frac{1}{k}}.$$

È chiaro che la σ-algebra $\mathcal{F}_t^+$ è più grande della σ-algebra $\mathcal{F}_t$ perché tutte le $\mathcal{F}_{t+1/k}$ contengono la $\mathcal{F}_t$. In moltissime applicazioni però si può verificare che $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$ per ogni $t \geq 0$. Questo succede, per esempio, nel caso della filltrazione naturale del moto browniano o del processo di Poisson. Quando vale questa proprietà si dice che la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ è *continua a destra.*

Indipendentemente dal fatto che la filtrazione sia continua a destra possiamo comunque mostrare la seguente

Proposizione 3.7 *Ogni tempo d'arresto limitato è limite di una successione non-crescente di tempi d'arresto discreti.*

Dimostrazione. Basta considerare la successione

$$T_n = \sum_{k\geq 0} (k+1)2^{-n} 1_{\{k2^{-n} < T \leq (k+1)2^{-n}\}}. \quad \square$$

I tempi d'arresto si utilizzano quando si voglia stabilire una regola che indichi, sulla base delle osservazioni di passato e presente, l'instante in cui si voglia effettuare una certa operazione.

Esempio 3.8 Una partita a testa e croce in cui un giocatore vinca 1 quando esce testa e perda 1 quando esce croce si modellizza naturalmente con un processo di Bernoulli $(R_n)_{n\geq 1}$ con parametro $1/2$ (supporremo che il gioco sia equo). Il capitale del giocatore al tempo n sarà

$$X_n = 2\sum_{k=1}^{n} R_k - n.$$

Una "strategia" naturale è di interrompere il gioco non appena il capitale sia strettamente positivo ovvero al tempo T

$$T(\omega) = \inf\{\, n \geq 1 \mid X_n(\omega) > 0 \,\} = \inf\{\, n \geq 1 \mid X_n(\omega) = 1 \,\}.$$

La variabile aleatoria T è un tempo d'arresto infatti

$$\{\, T \leq k \,\} = \{\, T > k \,\}^c = \{\, X_1 < 1, X_2 < 1, \ldots, X_k < 1 \,\}^c \in \mathcal{F}_k.$$

È chiaro che, ad ogni istante k si può osservare il valore di S_n e, sulla base dell'osservazione, decidere se continuare o meno.

Definizione 3.9 *Sia $X = (X_t)_{t \in I}$ un processo stocastico con insieme dei tempi $I \subseteq [0, +\infty[$ e sia T un tempo d'arresto discreto a valori in I. Si chiama* processo X arrestato al tempo T *e si denota con $X^{|T}$ il processo definito da*

$$X_t^{|T}(\omega) = X_{T(\omega) \wedge t}(\omega).$$

Per assicurarsi che la formula precedente definisca effettivamente un processo occorre verificare che le funzioni $X_t^{|T} : \Omega \to \mathbb{R}$ siano variabili aleatorie ovvero che, per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $\{\, X_t^{|T} \leq r \,\}$ appartenga a $\mathcal{F}$. Questa verifica è piuttosto facile perché l'insieme dei valori di T è numerabile. Si ha infatti

$$\{\, X_t^{|T} \leq r \,\} = (\cup_{s \in D} \{\, T = s, X_{s \wedge t} \leq r \,\}) \bigcup \{\, T > t, X_t \leq r \,\}.$$

La formula precedente permette inoltre di dimostrare la proposizione seguente

Proposizione 3.10 *Sia $X = (X_t)_{t \in I}$ un processo stocastico con insieme dei tempi $I \subseteq [0, +\infty[$ tale che $0 \in I$ e sia T un tempo d'arresto discreto a valori in I. Se il processo X è adattato, allora anche il processo arrestato $X^{|T}$ è adattato.*

4 Teorema d'arresto discreto

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$. L'insieme dei tempi I sarà un sottoinsieme di $[0, +\infty[$ tale che 0 appartenga a I.

Teorema 4.1 *Sia $X = (X_t)_{t \in I}$ una martingala (risp. supermartingala oppure sottomartingala) e T un tempo d'arresto discreto a valori in I. Il processo arrestato $X^{|T}$ è una martingala (risp. supermartingala oppure sottomartingala). In particolare, per ogni $t \in I$, si ha*

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_{T \wedge t}] = \mathbb{E}[X_0] \tag{2}$$

(risp. $\leq$ oppure $\geq$) per ogni $t \in I$.

Dimostrazione. Denotiamo con D il sottoinsieme numerabile di I tale che $\{ T \in D \} = \Omega$. La Proposizione 3.10 assicura che il processo $X^{|T}$ è adattato. La variabile aleatoria $X_{T\wedge t}$ è integrabile per ogni $t \in I$ perché

$$|X_{T\wedge t}| = \sum_{s\in D\cap[0,t]} 1_{\{T=s\}}|X_{s\wedge t}| \leq \sum_{s\in D\cap[0,t]} |X_{s\wedge t}|$$

e l'insieme $D \cap [0, t]$ è finito.

Verifichiamo infine la proprietà di martingala. Siano $t, s \in I$ con $t > s$ e $A \in \mathcal{F}_s$ fissati. Si ha allora

$$\begin{aligned}\int_A X_{T\wedge s} d\mathbb{P} &= \int_{A\cap\{T\leq s\}} X_T d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{T>s\}} X_s d\mathbb{P}\\ &= \int_{A\cap\{T\leq s\}} X_T d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{T>s\}} X_t d\mathbb{P},\end{aligned}$$

poiché l'insieme $A \cap \{T > s\}$ appartiene a $\mathcal{F}_s$. Dato che, per ogni $r \in D$ che soddisfa la diseguaglianza $s < r \leq t$ l'insieme $A \cap \{T = r\}$ appartiene a $\mathcal{F}_r$, valgono le eguaglianze

$$\begin{aligned}\int_A X_{T\wedge s} d\mathbb{P} &= \int_{A\cap\{T\leq s\}} X_T d\mathbb{P} + \sum_{r\in D, s<r\leq t} \int_{A\cap\{T=r\}} X_t d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{T>t\}} X_t d\mathbb{P}\\ &= \int_{A\cap\{T\leq s\}} X_T d\mathbb{P} + \sum_{r\in D, s<r\leq t} \int_{A\cap\{T=r\}} X_r d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{T>t\}} X_t d\mathbb{P}\\ &= \int_{A\cap\{T\leq s\}} X_{T\wedge t} d\mathbb{P} + \sum_{r\in D, s<r\leq t} \int_{A\cap\{T=r\}} X_{T\wedge t} d\mathbb{P} + \int_{A\cap\{T>t\}} X_{T\wedge t} d\mathbb{P}\\ &= \int_A X_{T\wedge t} d\mathbb{P}.\end{aligned}$$

La formula (2) segue immediatamente prendendo $s = 0$ e $A = \Omega$. □

Il Teorema d'arresto discreto (4.1) ammette il seguente

Corollario 4.2 *Sia $X = (X_t)_{t\in I}$ una sottomartingala (risp. supermartingala) e T, U due tempi d'arresto discreti a valori in I tali che $T \leq U$. Per ogni $t \in I$ si ha allora*

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge t}] \leq \mathbb{E}[X_{U\wedge t}] \qquad (\textit{risp.}\ \ \mathbb{E}[X_{T\wedge t}] \geq \mathbb{E}[X_{U\wedge t}].)$$

Dimostrazione. Per ogni $s \in I$ l'insieme $\{ T = s \}$ appartiene alla σ-algebra $\mathcal{F}_s$ e quindi, dato che il processo arrestato $X^{|U}$ è una sottomartingala, se $s \leq t$ si ha

$$\int_{\{ T=s \}} X_{T\wedge t} d\mathbb{P} = \int_{\{ T=s \}} X_s d\mathbb{P} = \int_{\{ T=s \}} X_{U\wedge s} d\mathbb{P} \leq \int_{\{ T=s \}} X_{U\wedge t} d\mathbb{P}.$$

Sommando sugli $s \in I \cap [0,t]$ si trova quindi

$$\int_{\{T \leq t\}} X_{T\wedge t} d\mathbb{P} \leq \int_{\{T \leq t\}} X_{U\wedge t} d\mathbb{P}.$$

Dato che le variabili aleatorie $X_{T\wedge t}$ e $X_{U\wedge t}$ coincidono con la variabile aleatoria X_t sull'insieme $\{T > t\}$ la conclusione segue immediatamente. □

Osservazione. In generale non si può far tendere t all'infinito nella formula (2) per trovare $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$. Per convincersene basta considerare il tempo d'arresto T dell'Esempio 3.8. In questo caso infatti $X_0 = 0$ e $X_T = 1$ dunque $\mathbb{E}[X_0] = 0 \neq 1 = \mathbb{E}[X_T]$.

Il teorema seguente dà certe condizioni sotto le quali il passaggio al limite è lecito.

Teorema 4.3 *Sia* $X = (X_t)_{t\in I}$ *una martingala e* T *un tempo d'arresto discreto a valori in* I. *Supponiamo che* T *abbia valori in un insieme discreto* D *e*

$$\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1, \qquad \mathbb{E}[\,|X_T|\,] < \infty, \qquad \lim_{t\to\infty, t\in D} \mathbb{E}[X_t 1_{\{T>t\}}] = 0.$$

Si ha allora $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$.

Dimostrazione. Per ogni $t \in D$ si ha

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_T] &= \mathbb{E}[X_T 1_{\{T\leq t\}}] + \mathbb{E}[X_T 1_{\{T>t\}}] \\
&= \mathbb{E}[X_{T\wedge t}] - \mathbb{E}[X_t 1_{\{T>t\}}] + \mathbb{E}[X_T 1_{\{T>t\}}] \\
&= \mathbb{E}[X_0] - \mathbb{E}[X_t 1_{\{T>t\}}] + \mathbb{E}[X_T 1_{\{T>t\}}]
\end{aligned}$$

grazie al Teorema (4.1). Sotto le ipotesi del teorema si può far tendere t all'infinito e concludere. □

Osservazione. La condizione

$$\lim_{t\to\infty, t\in D} \mathbb{E}[X_t 1_{\{T>t\}}] = 0$$

è soddisfatta se vale la condizione $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$ e

$$\sup_{t\in I} \mathbb{E}\left[X_t^2\right] = K < \infty.$$

Infatti, grazie alla diseguaglianza di Schwarz, si ha

$$\left|\mathbb{E}[X_t 1_{\{T>t\}}]\right|^2 \leq \mathbb{E}\left[X_t^2\right] \mathbb{P}\{T > t\} \leq K\mathbb{P}\{T > t\}$$

e $\mathbb{P}\{T > t\}$ converge verso 0 per t tendente a $+\infty$ perché T ha quasi certamente valori finiti.

4.1 Applicazione alla passeggiata casuale unidimensionale

Calcoliamo le probabilità di uscita da un intervallo $[-a, b]$ $(a, b \in \mathbb{N}^*)$ della passeggiata casuale simmetrica su $\mathbb{Z}$ che parte da 0. Il processo stocastico $(X_n)_{n\geq 1}$ in questione si può rappresentare

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

dove le variabili aleatorie Y_k sono indipendenti, identicamente distribuite con

$$\mathbb{P}\{ Y_k = 1 \} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{ Y_k = -1 \}.$$

Sia T il primo istante in cui la passeggiata casuale arriva al bordo dell'intervallo $[a, b]$ ovvero la variabile aleatoria $T : \Omega \to \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ così definita

$$T(\omega) = \inf\{ n \geq 1 \mid X_n(\omega) = -a, \text{ oppure } X_n(\omega) = b \}.$$

Si verifica immediatamente che T è un tempo d'arresto per la filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$ del processo $(X_n)_{n\geq 1}$ data da

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{ Y_1, \ldots, Y_n \}.$$

Inoltre il processo $(X_n)_{n\geq 1}$ è una martingala rispetto a questa filtrazione. Per il teorema d'arresto 4.1 si ha quindi

$$\mathbb{E}[X_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_0] = 0.$$

Poiché $\mathbb{P}\{ T < \infty \} = 1$ (la passeggiata casuale simmetrica su $\mathbb{Z}$ è ricorrente ...) e inoltre $|X_{T\wedge n}| \leq \max\{ a, b \}$, grazie al teorema della convergenza dominata, facendo tendere n all'infinito si ha $\mathbb{E}[X_T] = 0$ ovvero,

$$-a\mathbb{P}\{ X_T = -a \} + b\mathbb{P}\{ X_T = b \} = 0 \tag{3}$$

e inoltre (la variabile aleatoria X_T prenderà il valore $-a$ o il valore b) si ha

$$\mathbb{P}\{ X_T = -a \} + \mathbb{P}\{ X_T = b \} = 1. \tag{4}$$

Dalle equazioni (3) e (4) si trova quindi

$$\mathbb{P}\{ X_T = -a \} = \frac{b}{a+b}, \qquad \mathbb{P}\{ X_T = b \} = \frac{a}{a+b}.$$

Calcoliamo ora la speranza di T. Consideriamo il processo $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ definito da

$$Z_n = X_n^2 - n.$$

Grazie al teorema d'arresto discreto, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$0 = \mathbb{E}[Z_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[X_n^2] - \mathbb{E}[T \wedge n]$$

ovvero $\mathbb{E}[X_{T\wedge n}^2] = \mathbb{E}[T \wedge n]$. Facendo tendere n all'infinito (applicando il teorema della convergenza dominata alla successione $(X_{T\wedge n}^2)_{n\geq 1}$ che soddisfa $|X_{T\wedge n}^2| \leq (\max\{a, b\})^2$ e il teorema della convergenza monotona alla successione non decrescente $(T \wedge n)_{n\geq 1}$) si ha

$$\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}[X_T^2] = a^2\mathbb{P}\{ X_T = -a \} + b^2\mathbb{P}\{ X_T = b \} = ab.$$

4.2 Martingale e strategie d'investimento

Consideriamo un gioco nel quale la successione dei capitali $(M_n)_{n\geq 0}$ di un giocatore che, ad ogni istante, scommette una somma fissa formi una martingala. Supponiamo poi che il giocatore voglia provare a scommettere somme non fisse (con la speranza di vincere di più) ma variabili $(H_n)_{n\geq 0}$, *sulla base dei risultati delle scommesse precedenti.* Questa richiesta, insieme al fatto che dovrà dichiarare quanto scommette *prima* dell'n-esima giocata, si esprime dicendo che H_n deve essere una variabile aleatoria $\mathcal{F}_{n-1}$-misurabile. La domanda naturale è: potrà determinare una qualche stategia di puntate $(H_n)_{n\geq 0}$ in modo da rendere il gioco a lui favorevole?

Il capitale X_{n+1} del giocatore al tempo $n+1$ sarà dato da

$$X_{n+1} = X_n + H_n(M_{n+1} - M_n)$$

e quindi, detto X_0 il capitale al tempo 0, si ha

$$X_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} H_k(M_{k+1} - M_k).$$

Supponendo che le variabili aleatorie H_n siano limitate (cosa molto ragionevole) si verifica facilmente che il processo $(X_n)_{n\geq 0}$ è una martingala. Ne segue che il valore medio del capitale del giocatore al tempo n è uguale a quello al tempo 0 ovvero la scelta di qualunque strategia prevedibile $(H_n)_{n\geq 0}$ (e limitata) non produce vantaggi o svantaggi.

Allo stesso modo, non produce guadagni positivi in media, l'arresto della martingala ad un tempo d'arresto T.

5 Martingale di una catena di Markov

Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una catena di Markov con insieme degli stati I, insieme dei tempi $\mathbb{N}$ e matrice di transizione P. Indichiamo con $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ la sua filtrazione naturale.

Lemma 5.1 *Per ogni $f : I \to \mathbb{R}$ tale che le variabili aleatorie $f(X_n)$ abbiano speranza finita si ha*

$$\mathbb{E}\left[f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\right] = \sum_{j\in I} p_{X_n j} f(X_n) = (Pf)(X_n).$$

Dimostrazione. Ricordando che gli insiemi di $\mathcal{F}_n$ sono unioni numerabili di insiemi del tipo $A = \{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\}$, basterà verificare che, per ognunodi questi insiemi risulta

$$\int_A f(X_{n+1}) d\mathbb{P} = \int_A (Pf)(X_n) d\mathbb{P}.$$

Infatti, grazie alla proprietà di Markov,

$$\begin{aligned}
\int_A f(X_{n+1})d\mathbb{P} &= \sum_{j\in I} \int_{A\cap\{X_{n+1}=j\}} f(j)d\mathbb{P} \\
&= \sum_{j\in I} f(j)\mathbb{P}\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n, X_{n+1} = j\} \\
&= \sum_{j\in I} f(j)\mathbb{P}\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} \\
&= \sum_{j\in I} f(j)p_{i_n j}\mathbb{P}\{X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\} \\
&= \int_A \sum_{j\in I} p_{X_n j} f(j)d\mathbb{P}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposizione 5.2 *Per ogni $f : I \to \mathbb{R}$ tale che le variabili aleatorie $f(X_n)$ abbiano speranza finita la famiglia $(M_n)_{n\geq 0}$ di variabili aleatorie definite da*

$$M_0 = 0, \qquad M_n = f(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1}((Pf)(X_k) - f(X_k)) \quad n \geq 1,$$

è una martingala.

Dimostrazione. Il processo $(M_n)_{n\geq 1}$ è evidentemente adattato e le variabili aleatorie M_n sono integrabili. Per ogni $m < n$ si ha inoltre

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_m \mid \mathcal{F}_m] &= \mathbb{E}\left[f(X_n) - f(X_m) - \sum_{k=m}^{n-1}((Pf)(X_k) - f(X_k)) \mid \mathcal{F}_m\right] \\
&\quad + f(X_m) - \sum_{k=0}^{m-1}((Pf)(X_k - f(X_k)) \\
&= \sum_{k=m}^{n-1} \mathbb{E}[f(X_{k+1}) - f(X_k) - ((Pf)(X_k) - f(X_k)) \mid \mathcal{F}_m] + M_m.
\end{aligned}$$

La conclusione segue osservando che, per ogni k con $m \leq k \leq n-1$, si ha

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[f(X_{k+1}) - f(X_k) - ((Pf)(X_k) - f(X_k)) \mid \mathcal{F}_m] \\
&= \mathbb{E}[f(X_{k+1}) - (Pf)(X_k) \mid \mathcal{F}_m] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[f(X_{k+1}) - (Pf)(X_k) \mid \mathcal{F}_k] \middle| \mathcal{F}_m\right] = 0
\end{aligned}$$

perché $\mathbb{E}[f(X_{k+1}) - (Pf)(X_k) \mid \mathcal{F}_k]$ è nulla grazie al Lemma precedente. $\square$

6 Diseguaglianza massimale discreta

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$. L'insieme dei tempi I sarà un sottoinsieme discreto $[0, +\infty[$ tale che 0 appartenga a I.

Teorema 6.1 *Sia $(X_t)_{t\in I}$ una sottomartingala. Per ogni $x > 0$ e ogni $t \in I$ si ha allora*

$$x\mathbb{P}\left\{ \max_{s\in I\cap[0,t]} X_s > x \right\} \le \mathbb{E}[X_t^+].$$

Dimostrazione. Denotiamo con M_t la variabile aleatoria $M_t = \max_{s\in I\cap[0,t]} X_s$. Sia T il tempo d'arresto

$$T(\omega) = \inf \{ s \in I \cap [0,t] \mid X_s(\omega) > x \}$$

(con la convenzione abituale $\inf \emptyset = +\infty$). Chiaramente si ha

$$\{ T < \infty \} = \left\{ \max_{s\in I\cap[0,t]} X_s > x \right\} = \{ X_{T\wedge t} > x \}$$

Grazie alla diseguaglianza di Markov e al Corollario 4.2 (applicato alla sottomartingala $(X^{|T})^+$ considerando il tempo d'arresto $U = t$ costante) si ha allora

$$\begin{aligned} x\mathbb{P}\left\{ \max_{s\in I\cap[0,t]} X_s > x \right\} &= x\mathbb{P}\{ X_{T\wedge t} > x \} \\ &\le \mathbb{E}[X_{T\wedge t}^+] \le \mathbb{E}[X_t^+]. \qquad \square \end{aligned}$$

Corollario 6.2 *Una martingala $(X_t)_{t\in I}$ limitata in L^1, ovvero tale che $\sup_{t\in I} \mathbb{E}[\,|X_t|\,] < \infty$ ha quasi tutte le traiettorie limitate.*

Dimostrazione. Basterà verificare che le sottomartingale $(X_t^+)_{t\in I}$ e $(X_t^-)_{t\in I}$ hanno tutte le traiettorie limitate superiormente. Tratteremo solo la sottomartingala $(X_t^+)_{t\in I}$ poiché l'altro caso è del tutto analogo.

Per ogni $x > 0$, grazie alla diseguaglianza massimale abbiamo

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{s\in I} X_s^+ > x \right\} = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{s\in I\cap[0,t]} X_s^+ > x \right\} \le \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[\,|X_t|\,]}{x}$$

e quindi

$$\mathbb{P}\left\{ \sup_{s\in I} X_s^+ = +\infty \right\} \le \lim_{x\to+\infty} \frac{\sup_{t\in I} \mathbb{E}[\,|X_t|\,]}{x} = 0. \quad \square$$

7 Numero di attraversamenti di un intervallo

Il Teorema 6.1 mostra che il valore massimo delle traiettorie di una sottomartingala discreta su un intervallo $[0,t]$ si "controlla" con la variabile aleatoria "finale". Mostreremo ora che un risultato simile vale per il *numero di attraversamenti di un intervallo* $[a,b]$ $(a,b \in \mathbb{R},\ a < b)$.

Definiamo prima gli istanti successivi di attraversamento dell'intervallo $[a, b]$ per induzione (con la convenzione abituale $\inf \emptyset = +\infty$)

$$\begin{aligned} T_1(\omega) &= \inf\{\, r \in I \cap [0, t] \mid X_r(\omega) \geq b \,\}, \\ U_1(\omega) &= \inf\{\, r \in I \cap [0, t] \mid r > T_1(\omega),\ X_r(\omega) \leq a \,\}, \ldots \\ T_{k+1}(\omega) &= \inf\{\, r \in I \cap [0, t] \mid r > U_k(\omega),\ X_r(\omega) \geq b \,\}, \\ U_{k+1}(\omega) &= \inf\{\, r \in I \cap [0, t] \mid r > T_{k+1}(\omega),\ X_r(\omega) \leq a \,\}. \end{aligned}$$

Le funzioni T_k e U_k sono tempi d'arresto e, chiaramente, si ha

$$T_1 \leq U_1 \leq T_2 \leq U_2 \leq \ldots \leq T_k \leq U_k \leq \ldots$$

Il numero di attraversamenti (in discesa) dell'intervallo $[a, b]$ al tempo t è la variabile aleatoria

$$J = \sum_{k \geq 1} 1_{\{\, U_k < \infty \,\}}. \tag{5}$$

Teorema 7.1 *Sia $(X_t)_{t \in I}$ una sottomartingala. Per ogni $t \in I$ vale la diseguaglianza*

$$\mathbb{E}[J] \leq \frac{\mathbb{E}[(X_t - b)^+]}{b - a} \tag{6}$$

Premettiamo alla dimostrazione il seguente

Lemma 7.2 *Sia $(X_s)_{s \in I}$ una sottomartingala, T, U due tempi d'arresto a valori in $(I \cap [0, t]) \cup \{+\infty\}$ tali che $T \leq U$. Si ha allora*

$$\int_{\{\, U < +\infty \,\}} (X_T - X_U)\, d\mathbb{P} \leq \int_{\{\, T < +\infty,\, U = +\infty \,\}} (X_t - X_T)\, d\mathbb{P}.$$

Dimostrazione. Grazie al Corollario 4.2 vale la diseguaglianza $\mathbb{E}[X_{T \wedge t}] \leq \mathbb{E}[X_{U \wedge t}]$ ovvero

$$\int_{\{\, T < \infty \,\}} X_T d\mathbb{P} + \int_{\{\, T = \infty \,\}} X_t d\mathbb{P} \leq \int_{\{\, U < \infty \,\}} X_U d\mathbb{P} + \int_{\{\, U = \infty \,\}} X_t d\mathbb{P}.$$

Da questa diseguaglianza si trova subito

$$\int_{\{\, T < \infty \,\}} X_T d\mathbb{P} \leq \int_{\{\, U < \infty \,\}} X_U d\mathbb{P} + \int_{\{\, U = \infty, T < \infty \,\}} X_t d\mathbb{P}$$

e quindi la conclusione. □

Dimostrazione del Teorema 7.1. Grazie al Lemma 7.2, per ogni $k \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} (b - a)\mathbb{P}\{\, U_k < \infty \,\} &\leq \int_{\{\, U_k < \infty \,\}} (X_{T_k} - X_{U_k}) d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{\, T_k < \infty, U_k = \infty \,\}} (X_t - X_{T_k}) d\mathbb{P} \\ &\leq \int_{\{\, T_k < \infty, U_k = \infty \,\}} (X_t - b) d\mathbb{P}. \end{aligned}$$

Sommando su k si trova la diseguaglianza (6). □

8 Teorema di convergenza

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\in I}$ con insieme dei tempi I discreto e infinito e sia $(M_t)_{t\in I}$ una martingala.

Teorema 8.1 *Se $(M_t)_{t\in I}$ è limitata in L^1, ovvero $\sup_{t\in I} \mathbb{E}[\,|M_t|\,] < \infty$, allora*

$$\lim_{t\to\infty} M_t$$

esiste quasi certamente.

La dimostrazione è basata sul fatto che le traiettorie hanno limiti all'infinito perché possono attraversare ogni intervallo al più un numero finito di volte per la diseguaglianza sul numero di attraversamenti.

9 Versioni con traiettorie regolari

Mostreremo ora come si costruiscono martingale con traiettorie regolari nel caso in cui l'insieme dei tempi non sia discreto. Supporremo che l'insieme dei tempi sia l'intervallo $[0, +\infty[$. Come sempre supporremo fissato uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.

Proposizione 9.1 *Sia $X = (X_t)_{t\geq 0}$ una sottomartingala positiva e D un sottoinsieme numerabile di $[0, +\infty[$ tale che $\sup_{s\in D} \mathbb{E}[X_s] = c < +\infty$. Quasi tutte le traiettorie di X hanno una restrizione a D che è una funzione limitata con limiti da destra e da sinistra in ogni punto di D.*

La Proposizione precedente afferma che per quasi tutti gli ω si ha $\sup_{s\in D} X_s(\omega) < \infty$ ed esistono i limiti

$$\lim_{s\to t^-,\, s\in D} X_s(\omega), \qquad \lim_{s\to t^+,\, s\in D} X_s(\omega), \qquad \text{per ogni } t \geq 0$$

(se $t = 0$ si prende in considerazione il solo limite da destra).
Dimostrazione. Sia $(D_n)_{n\geq 1}$ una successione crescente di sottoinsiemi finiti di D la cui unione è uguale a D. Per ogni $n \geq 1$ sia

$$t_n = \max D_n, \qquad U_n(\omega) = \max\{\, X_s(\omega) \mid s \in D_n \,\}.$$

La successione di variabili aleatorie reali $(U_n)_{n\geq 1}$ è non decrescente ed evidentemente converge puntualmente verso la variabile aleatoria U definita da

$$U(\omega) = \sup\{\, X_s(\omega) \mid s \in D \,\}.$$

Grazie al Teorema 6.1, per ogni $n \geq 1$ e ogni $x > 0$, si ha

$$\mathbb{P}\{\, U_n > x \,\} \leq \frac{1}{x} \int X_{t_n} d\mathbb{P} \leq \frac{c}{x}.$$

Ne segue che

$$\mathbb{P}\{ U > x \} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{ U_n > x \} \leq c/x$$

e quindi

$$\mathbb{P}\{ U = +\infty \} = \lim_{x\to\infty} \mathbb{P}\{ U > x \} = 0,$$

cioè la restrizione all'nsieme D di quasi tutte le traiettorie è limitata.

Mostriamo ora l'esistenza dei limiti da destra e da sinistra. Per ogni coppia a, b di numeri reali con $a < b$ sia $J(a, b)$ la variabile aleatoria (5), numero di attraversamenti dell'intervallo $[a, b]$ con D insieme dei tempi, e sia $J_n(a, b)$ la variabile analoga ottenuta considerando D_n come insieme dei tempi. Chiaramente la successione di variabili aleatorie $(J_n(a, b))_{n\geq 1}$ è non decrescente converge puntualmente verso la variabile aleatoria

$$J(a, b)(\omega) = \sup_{n\geq 1} J_n(a, b).$$

Grazie al Teorema 7.1 per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\mathbb{E}[J_n(a, b)] \leq (b - a)^{-1}\mathbb{E}[(X_{t_n} - b)^+] \leq (b + c)/(b - a).$$

Facendo tendere n all'infinito (convergenza monotona) si trova quindi

$$\mathbb{E}[J(a, b)] \leq (b + c)/(b - a).$$

L'insieme $\{ J(a, b) = \infty \}$ ha quindi probabilità nulla come l'insieme

$$\bigcup_{a,b\in\mathbb{Q},\, a<b} \{ J(a, b) = \infty \}$$

che è unione numerabile di insiemi di probabilità nulla.

Sia $t \to X_t(\omega)$ una traiettoria la cui restrizione a D non ha la proprietà voluta. Supponiamo, per esempio, che non ammetta limite da sinistra in qualche punto $t \in [0, +\infty[$. È possibile allora trovare due numeri razionali a, b con $a < b$ e una successione $(s_k)_{k\geq 1}$ in D crescente verso t tali che

$$X_{s_1}(\omega) \geq b, \quad X_{s_2}(\omega) \leq a, \quad X_{s_3}(\omega) \geq b, \ldots$$

e quindi $J(a, b)(\omega) = \infty$ cioè ω appartiene all'insieme di probabilità 0.

Se invece la traiettoria $t \to X_t(\omega)$ non ammette limite da destra in qualche punto $t \in [0, +\infty[$, allora è possibile trovare due numeri razionali a, b con $a < b$ e, per ogni intero $k \geq 1$ indipendente da a e b e degli $(s_j)_{j=1}^k$ in D tali che $s_1 > s_2 > \ldots > s_k$ e

$$X_{s_1}(\omega) \geq b, \quad X_{s_2}(\omega) \leq a, \quad X_{s_3}(\omega) \geq b, \ldots$$

Ne segue che $J(a, b)(\omega) \geq k$ e perciò, data l'arbitrarietà di k, si ha $J(a, b)(\omega) = \infty$ come prima. □

La Proposizione 9.1 permette di costruire martingale con traiettorie regolari adattate però rispetto ad una filtrazione un pò più grande ovvero la filtrazione $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ definita da

$$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s.$$

Teorema 9.2 *Data una variabile aleatoria Z integrabile esiste un processo $X = (X_t)_{t\geq 0}$ con traiettorie regolari (e cioè continue a destra con limiti da sinistra) adattato alla filtrazione $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ tale che*

$$X_t = \mathbb{E}[\, Z \mid \mathcal{F}_{t+}\,]$$

per ogni $t \geq 0$. Il processo X una martingala con traiettorie regolari chiusa dalla variabile aleatoria Z.

Dimostrazione. Si può supporre, utilizzando eventualmente la decomposizione $Z = Z^+ - Z^-$ che Z sia non negativa.

Sia $D \subseteq [0, +\infty[$ numerabile denso e, per ogni $s \in D$, sia X_s una versione della speranza condizionale $\mathbb{E}[\, Z \mid \mathcal{F}_s\,]$. Il processo $(X_s)_{s\in D}$ è una martingala positiva tale che $\mathbb{E}[X_s] = \mathbb{E}[Z]$ per ogni $s \in D$. Grazie alla Proposizione 9.1, per ogni $t \geq 0$ possiamo quindi definire

$$X_t(\omega) = \lim_{s\to t^+} X_s(\omega)$$

per tutti gli ω dell'evento quasi certo che la restrizione a D della traiettoria $s \to X_s(\omega)$ sia regolare e definire poi $X_t(\omega) = 0$ per tutti gli altri ω.

Il processo cosìottenuto è evidentemente adattato a $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ poiché, per ogni numero reale x e ogni $t' > t$ si ha

$$\{\, X_t > x \,\} = \bigcup_{\{\, s\in D \,|\, t\leq s<t' \,\}} \; \bigcap_{\{\, r\in D \,|\, t\leq r<s, \}} \{\, X_r > x \,\}.$$

L'insieme $\{\, X_t > x \,\}$ appartiene dunque a tutte le σ-algebre $\mathcal{F}_{t'}$ con $t' > t$ cioè a $\mathcal{F}_{t+}$.

La variabile aleatoria X_t è integrabile poiché è limite puntuale di una successione di variabili aleatorie uniformemente integrabili (Lemma previsto in Appendice).

Verifichiamo infine la proprietà di martingala. Siano t, s due numeri reali con $s < t$ e $A \in \mathcal{F}_{s+}$ e sia $(s_n)_{n\geq 1}$ una successione di elementi di $D \cap [s, t]$ convergente verso s. Si ha allora, per ogni $n \geq 1$,

$$\int_A X_{s_n} d\mathbb{P} = \int_A X_t d\mathbb{P}.$$

La conclusione segue subito facendo tendere n all'infinito grazie all'uniforme integrabilità delle variabili aleatorie X_{s_n}.

Si verifica, infine, che le traiettorie della martingala $(X_t)_{t\geq 0}$ sono regolari. □

Nelle applicazioni la filtrazione $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ spesso coincide con la filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Si potrebbe dimostrare, per esempio, che la filtrazione naturale di un moto browniano standard o del processo di Poisson che abbiamo costruito è continua a destra. Tuttavia questa proprietà non vale in generale. Si introduce perciò la definizione seguente

Definizione 9.3 *Sia* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uno spazio probabilizzato. Una filtrazione* $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ *soddisfa le* condizioni abituali *se*

1. *per ogni* $t \geq 0$ *si ha* $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$,
2. *ogni evento* $A \in \mathcal{F}$ *con* $\mathbb{P}(A) = 0$ *appartiene a* $\mathcal{F}_0$.

Nel seguito supporremo sempre che la filtrazione in questione soddisfi le condizioni abituali.

10 Teorema d'arresto

Mostreremo ora un teorema d'arresto per martingale con insieme dei tempi $[0, +\infty[$. Supponiamo, come al solito, fissato uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ e $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ una filtrazione che soddisfa le condizioni abituali.

Teorema 10.1 *Sia* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *una martingala con traiettorie regolari e* T *un tempo d'arresto. Il processo* $X^{|T}$ *arrestato al tempo* T *è una martingala. In particolare si ha* $\mathbb{E}[X_{T\wedge t}] = \mathbb{E}[X_0]$ *per ogni* $t \geq 0$.

Il teorema si dimostra approssimando il tempo d'arresto T con una successione non crescente di tempi d'arresto discreti e utilizzando il seguente lemma

Lemma 10.2 *Sia* $X = (X_t)_{t\geq 0}$ *una martingala,* $t > 0$ *e* $\mathcal{T}$ *la famiglia dei tempi d'arresto discreti maggiorati da* t. *La famiglia di variabili aleatorie* $(X_T)_{T\in\mathcal{T}}$ *è uniformemente integrabile.*

Dimostrazione. Un tempo d'arresto discreto $T \in \mathcal{T}$ si scrive nella forma

$$T = \sum_{k=1}^{n} t_k 1_{\{T=t_k\}}$$

con $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq t$. Il processo X è una martingala e quindi, per ogni $c > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{\{X_T>c\}} X_T d\mathbb{P} &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\{X_{t_k}>c,\, T=t_k\}} X_{t_k}\, d\mathbb{P} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{\{X_{t_k}>c,\, T=t_k\}} X_t\, d\mathbb{P} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\{X_{t_k}>c,\, T=t_k\}} |X_t|\, d\mathbb{P} \\
&= \int_{\{X_T>c\}} |X_t|\, d\mathbb{P}.
\end{aligned}$$

Analogamente abbiamo

$$\int_{\{X_T < -c\}} -X_T d\mathbb{P} \leq \int_{\{X_T < -c\}} |X_t| d\mathbb{P}.$$

Troviamo perciò la diseguaglianza

$$\int_{\{|X_T| > c\}} |X_T| d\mathbb{P} \leq \int_{\{|X_T| > c\}} |X_t| d\mathbb{P}$$

e quindi, dato che

$$c\mathbb{P}\{|X_T| > c\} \leq \mathbb{E}[|X_T|] \leq \mathbb{E}[|X_t|],$$

grazie al Teorema d'arresto discreto per sottomartingale, concludiamo che la famiglia $(X_T)_{T\in\mathcal{T}}$ è uniformemente integrabile. □

Dimostrazione del Teorema 10.1. Sia $(T_n)_{n\geq 1}$ una successione non crescente di tempi d'arresto discreti a valori in $[0, +\infty]$ convergente verso T. Grazie alla continuità a destra delle traiettorie di X, per ogni $t \geq 0$ e ogni $\omega \in \Omega$ si ha

$$X_{T\wedge t}(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{T_n \wedge t}(\omega).$$

Le variabili aleatorie $X_{T_n\wedge t}$ sono $\mathcal{F}_t$ misurabili (Teorema 4.1) dunque anche la variabile aleatoria $X_{T\wedge t}$ è $\mathcal{F}_t$ misurabile. La successione $(X_{T_n\wedge t})_{n\geq 1}$ è uniformemente integrabile per il Lemma 10.2, dunque la variabile aleatoria $X_{T\wedge t}$ è integrabile grazie al Teorema ??.

Verifichiamo infine la proprietà di martingala. Fissiamo $s < t$ e un evento $A \in \mathcal{F}_s$. Poiché i processi $X^{|T_n}$ sono martingale, si ha

$$\int_A X_{T_n\wedge s} d\mathbb{P} = \int_A X_{T_n\wedge t} d\mathbb{P}.$$

La conclusione segue facendo tendere n all'infinito. □

In modo sostanzialmente analogo si dimostra il teorema d'arresto per sottomartingale e supermartingale con traiettorie regolari. Nei due casi si ha rispettivamente $\mathbb{E}[X_{T\wedge t}] \geq \mathbb{E}[X_0]$ e $\mathbb{E}[X_{T\wedge t}] \leq \mathbb{E}[X_0]$.

11 Diseguaglianza di Doob

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ e $(X_t)_{t\geq 0}$ una martingala con tutte le traiettorie continue a destra tale che $\mathbb{E}[|X_t|^p] < +\infty$ (con $1 < p < \infty$) per ogni $t \geq 0$.

Teorema 11.1 *Per ogni $t > 0$ si ha*

$$\mathbb{E}\left[\left|\sup_{0\leq s\leq t} X_s\right|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|X_t|^p].$$

12 Decomposizione di Doob-Meyer

Ogni sottomartingala (risp. supermartingala) si può essenzialmente decomporre nella somma di una martingala e di un processo a traiettorie non decrescenti (risp. non crescenti). Il processo a traiettorie monotòne, inoltre, ha una proprietà di misurabilità più forte della martingala. Per illustrare questo fatto iniziamo dal caso di una sottomartingala a tempi discreti.

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato munito di una filtrazione $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.

Proposizione 12.1 *Ogni sottomartingala $X = (X_n)_{n\geq 0}$ si decompone nella somma di una martingala e di un processo $A = (A_n)_{n\geq 0}$ tale che*

1. *$A_0 = 0$ e le traiettorie di A sono non decrescenti,*

2. *per ogni $n \geq 1$ la variabile aleatoria A_n è $\mathcal{F}_{n-1}$ misurabile.*

Dimostrazione. Dobbiamo trovare una decomposizione $X_n = M_n + A_n$ con A_n misurabile rispetto alla σ-algebra $\mathcal{F}_{n-1}$. Grazie alle proprietà della speranza condizionale, per ogni $n \geq 0$ deve valere l'identità

$$X_n - A_n = \mathbb{E}[\, X_{n+1} - A_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \,] = \mathbb{E}[\, X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \,] - A_{n+1} \tag{7}$$

da cui

$$A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}[\, X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n \,] - X_n.$$

Poniamo quindi $A_0 = 0$ e, per ogni $n \geq 1$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \left(A_{k-1} + \mathbb{E}[\, X_k \mid \mathcal{F}_{k-1} \,] - X_{k-1} \right).$$

Dato che X è una sottomartingala, si verifica subito che il processo $A = (A_n)_{n\geq 0}$ ha traiettorie non decrescenti. Infine il processo $(X_n - A_n)_{n\geq 0}$ è una martingala per come è stato definito il processo A (a partire dalla formula (7)). □

La proprietà 2 del processo $A = (A_n)_{n\geq 0}$ si esprime dicendo che il processo è *prevedibile*. Infatti, se la variabile aleatoria A_{n+1} è $\mathcal{F}_n$ misurabile, allora il suo valore è determinato dalla conoscenza (del verificarsi o meno) degli eventi della σ-algebra $\mathcal{F}_n$ ovvero, al tempo n si può "prevedere" il valore di A all'istante successivo. Un processo adattato è ovviamente prevedibile.

La decomposizione della Proposizione 12.1 ha un analogo risultato a tempi continui. In questo caso, però, la nozione di prevedibilità deve essere definita in modo diverso perché non esiste l'istante precedente a un certo istante t.

13 Esercizi

Esercizio 13.1 Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano standard. Mostrare che il processo $(X_t)_{t\geq 0}$ definito da $X_t = B_t^3 - 3tB_t$ è una martingala.

Esercizio 13.2 Sia $(N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson con parametro λ e $u \in \mathbb{R}$. Mostrare che il processo $(X_t)_{t\geq 0}$ definito da

$$X_t = \exp(iuN_t - \lambda(\mathrm{e}^{iu} - 1)t)$$

è una martingala.

Esercizio 13.3 Sia T un tempo d'arresto e c una costante. Mostrare che cT è un tempo d'arresto se e solo se $c \geq 1$.

Esercizio 13.4 Sia T un tempo d'arresto tale che $T \geq 1$. Mostrare che T^2 è un tempo d'arresto.

Esercizio 13.5 Sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano standard, $\varepsilon > 0$ e S il primo istante t tale che, dopo un tempo ε il moto browniano supererà un livello $a > 0$ cioè

$$S = \{\, t \geq 0 \mid B_{t+\varepsilon} > a \,\}$$

non è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione naturale del moto browniano.

Esercizio 13.6 Calcolare le probabilità di arrivo in $-a$ oppure in b $(a, b \in \mathbb{N}^*)$ della passeggiata casuale su $\mathbb{Z}$ che parte da 0 e, ad ogni istante, avanza (risp. arretra) di 1 con probabilità p (risp. q) $(p + q = 1)$ con $p \neq 1/2$. Calcolare la speranza del tempo medio di arrivo in $-a$ oppure in b.

Esercizio 13.7 Sia $(M_t)_{t\geq 0}$ una martingala di quadrato integrabile. Verificare che se anche il processo $(M_t^2)_{t\geq 0}$ è una martingala allora $M_t = M_0$ quasi certamente per ogni $t \geq 0$.

14 Appendice: Martingale e catene di Markov a tempo continuo

Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ una catena di Markov a tempo continuo con insieme degli stati S, semigruppo associato $(P_t)_{t\geq 0}$ e filtrazione naturale $(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$.

Lemma 14.1 *Per ogni $s < t$ e ogni $f : S \to \mathbb{R}$ limitata si ha*

$$\mathbb{E}\left[\, f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right] = \sum_{j\in S} f(j) p_{X_s j}(t-s).$$

In particolare

$$\mathbb{E}\left[\, f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\, f(X_t) \mid \sigma(X_s)\right]$$

Dimostrazione. La σ-algebra $\mathcal{F}_s$ è generata dagli insiemi della forma

$$A(s_1, i_1, \ldots, s_n, i_n) = \{\, X_{s_1} = i_1, \ldots, X_{s_n} = i_n \,\}$$

con $n \geq 1$, $0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n = s$ e $i_1, \ldots, i_n \in S$. Basterà quindi verificare che

$$\int_{A(s_1,i_1,\ldots,s_n,i_n)} f(X_t) d\mathbb{P} = \int_{A(s_1,i_1,\ldots,s_n,i_n)} \sum_{j\in S} f(j) p_{X_s j}(t-s)\, d\mathbb{P}$$

Il membro destro si scrive nella forma

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in S} \int_{A(s_1,i_1,\ldots,s_n,i_n)} f(X_t) d\mathbb{P} &= \sum_j \int_{A(s_1,i_1,\ldots,s_n,i_n)\cap\{X_t=j\}} f(j) d\mathbb{P} \\
&= \sum_j f(j)\mathbb{P}\{\, X_t = j, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_1} = i_1 \,\} \\
&= \sum_j f(j)\mathbb{P}\{\, X_t = j, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_1} = i_1 \,\}
\end{aligned}$$

e quindi, grazie alla proprietà di Markov, è uguale a

$$\begin{aligned}
&\sum_j f(j)\mathbb{P}\{\, X_t = j \mid X_s = i_n \,\}\, \mathbb{P}\{\, X_{s_n} = i_n, \ldots, X_{s_1} = i_1 \,\} \\
&= \sum_j f(j) \int_{A(s_1,i_1,\ldots,s_n,i_n)} p_{X_s j}(t-s) d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

da cui segue subito la conclusione. □

Teorema 14.2 *Per ogni funzione $f : S \to \mathbb{R}$ limitata il processo $(M_t)_{t\geq 0}$ definito da*

$$M_t = f(X_t) - \int_0^t (Qf)(X_s) ds$$

è una martingala rispetto alla filtrazione naturale della catena di Markov.

Dimostrazione. Basterà verificare che, per ogni $s < t$ risulta

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) - f(X_s) \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t (Qf)(X_r)dr \mid \mathcal{F}_s\right].$$

Osserviamo che, grazie al Lemma 14.1 e alle equazioni di Kolmogorov all'avanti, il membro destro si scrive

$$\begin{aligned}
\int_s^t \mathbb{E}\left[(Qf)(X_r) \mid \mathcal{F}_s\right] dr &= \int_s^t \sum_j p_{X_s j}(r-s)(Qf)(j)dr \\
&= \int_s^t \sum_{j,k} p_{X_s j}(r-s) q_{jk} f(k)dr \\
&= \int_s^t \sum_k p'_{X_s k}(r-s) f(k)dr \\
&= \sum_k \left(p_{X_s k}(t-s) - \delta_{X_s k}\right) f(k) \\
&= \mathbb{E}\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s\right] - f(X_s).
\end{aligned}$$

Si verifica così che $(M_t)_{t\geq 0}$ è una martingala. □

Il risultato precedente si generalizza facilmente alle funzioni f non limitate se valgono le opportune condizioni d'integrabilità.