Combinazione convessa: combinazione lineare di elementi fatta con coefficienti non negativi a somme 1:

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$
- $\lambda_i \in [0,1] \quad \forall i$
- $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$

la combinazione convessa è propria se $\lambda_i > 0 \quad \forall i$

Insieme convesso: per ogni coppia di punti il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme

Involucro convesso: di un insieme K è l'insieme di tutte le combinazioni convesse degli elementi di K (= più piccolo insieme convesso che contiene tutti i punti di K)

Cono: K è cono se $\forall x \in K$ e $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$

Combinazione conica: combinazione lineare di elementi fatta con coefficienti non negativi

$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \qquad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$

Involucro conico: K: insieme di tutte le combinazioni coniche degli elementi di K

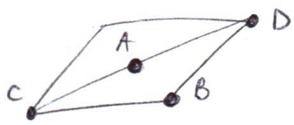
Poliedro: (in $\mathbb{R}^n$): intersezione di un numero finito di sottospazi chiusi di $\mathbb{R}^n$ (non descrivibile linearmente)

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ può essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema con n incognite di m (< n) equazioni

Politopo: poliedro limitato

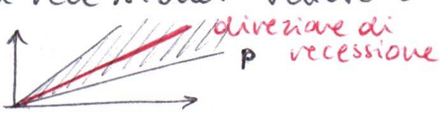
Cono poliedrico: P cono poliedrico se $\exists Q : P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$

Vertice: punto del poliedro che non può essere scritto come combinazione lineare convessa propria di altri pt. del poliedro:




per scrivere A posso usare C e D
per scrivere B devo usare B $\Rightarrow$ vertice

Direzione di recessione: vettore d: $x + d\lambda \in P \quad \forall x \in P \ \forall \lambda \geq 0$




**Teorema** (Rappresentazione di poliedri)

Dato un poliedro P, esistono un sottoinsieme finito di punti $V = \{v_i\}$ di P e un sottoinsieme finito di direzioni $E = \{e_i\}$ (eventualmente anche vuoti) tali che:

$$P = \text{conv}(V) + \text{cono}(E)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{combinazione} \\ \text{convessa dei} \\ \text{punti } v_i\end{pmatrix}}_{\text{involucro convesso}} + \underbrace{\begin{pmatrix}\text{combinazione} \\ \text{conica delle} \\ \text{direzioni } e_i\end{pmatrix}}_{\text{direzioni di recessione}} = \text{Politopo} + \text{cono}$$

**Teorema** (Caratterizzazione elementare dell'ottimalità)

$$(P) \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\} \end{cases}$$

- $c \neq 0 \implies$ la soluzione ottima non è all'interno di $P$
- $(P)$ ha due soluzioni ottime $\implies$ ne ha infinite
- le soluzioni ottime locali sono anche globali
  (perché il problema è lineare)

**Teorema*** (Fondamentale della PL)

$P = conv(V) + cono(E)$ : se $(P)$ ha valore ottimo finito, allora $\exists k \in \{1, .., m\}$ tale che $v^k \in V$ è soluzione ottima di $(P)$
(= le soluzioni ottime di $(P)$ sono vertici del poliedro)

dimostrazione:

$P = conv(v^1, .., v^m) + cono(e^1, .., e^p)$

$x \in P$ : $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j e^j$, $\quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_j \geq 0$

$\implies \max c^T x = \max \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i + \sum_{j=1}^{p} \mu_j c^T e^j$

se l'ottimo è finito $\implies$ $c^T e^j \leq 0 \quad \forall j = 1, .., p$

(altrimenti $\mu_j \to +\infty \implies$ funzione obiettivo che tende a $+\infty$)

$v^k := \max_{1 \le i \le m} c^T v^i \implies c^T x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i + \underbrace{\sum_{j=1}^{p} \mu_j c^T e^j}_{\text{sempre} < 0} \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i c^T v^i$

$\leq c^T v^k \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = c^T v^k$ combinazione convessa

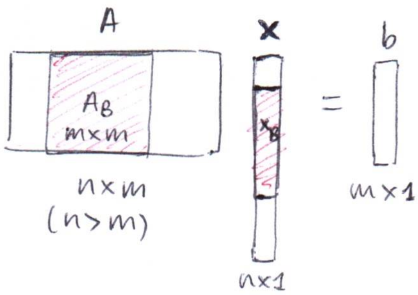
$\implies \forall$ pt. della regione ammissibile ha un valore della funzione obiettivo $\leq v^k$

$\max c^T x \leq c^T v^k$

e siccome $v^k \in P \implies c^T v^k \leq \max_{x \in P} c^T x \implies \max_{x \in P} c^T x = c^T v^k$

$v^k$ è soluzione ottima ∎

Problema in forma standard: $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$




$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$ $\qquad x_N, x_B \geq 0$

$x_N = 0 \qquad x_B = A_B^{-1} b$ soluzione di base

**Teorema*** (soluzioni di base e vertici)

Consideriamo A mtr. di rango max $m \times n$ $(m<n)$ e la regione P descritta da:

$$\left.\begin{matrix} Ax = b \\ x \geq 0 \end{matrix}\right\} (1)$$

x è vertice di P $\Longleftrightarrow$ è soluzione di base per (1)

dimostrazione:

$(\Longleftarrow)$ x soluzione di base: $x = (x_1, x_2, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_m a_m = b$ $\qquad a_i$ = i-esima colonna di A

Se x non è vertice $\Rightarrow x = \lambda y + (1-\lambda) z$ $\qquad x, y, z \geq 0$

$\Rightarrow \quad y_1 a_1 + \dots + y_m a_m = b$

$\qquad z_1 a_1 + \dots + z_m a_m = b$

sottraendo si ottiene una comb. lineare nulla delle colonne di A a coefficienti non tutti nulli contraddicendo che x sia soluzione di base

$(\Rightarrow)$ Se x è vertice supponiamo le prime k componenti non nulle; si ha:

$x_1 a_1 + \dots + x_k a_k = b$

dim $\{a_1, \dots, a_k\}$ sono linearmente indipendenti:

supponiamo per assurdo che non lo sono : $\exists\, y_1, \dots, y_k$ non tutti nulli :

$y_1 a_1 + \dots + y_k a_k = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (y_1, \dots, y_k, 0, \dots, 0)$

$\exists\, \varepsilon$: $\quad x + \varepsilon y \geq 0 \qquad x - \varepsilon y \geq 0$

$\qquad A(x+\varepsilon y) = b \qquad A(x - \varepsilon y) = b$

$\qquad x + \varepsilon y \in P \qquad x - \varepsilon y \in P$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(x+\varepsilon y) + \frac{1}{2}(x - \varepsilon y)$ e x non è un vertice

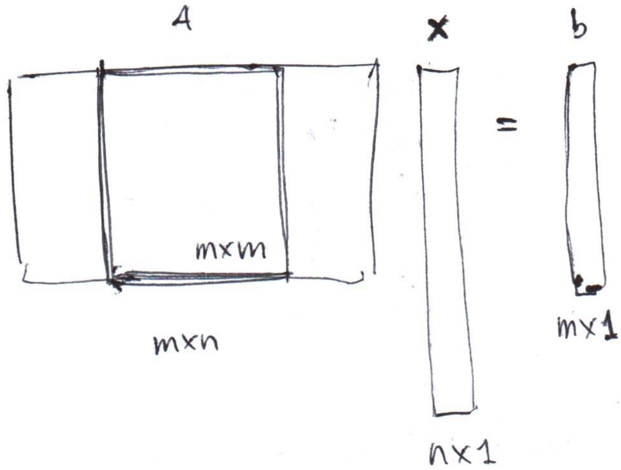
$\Rightarrow \{a_1, \dots, a_k\}$ lin. indip $\Rightarrow$ x è una base ∎

Problema in forma standard:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

$A = (m \times n)$ $\quad n > m$

rango max




$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

$$x_N,\ x_B \geq 0$$

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b$$

$x_N = 0, \quad x_B = A_B^{-1} b$ soluzione di base

I vertici della regione ammissibile sono soluzioni di base

↓

$\boxed{\text{Simplesso}}$: si muove tra una sol di base all'altra fino a giungere a quella ottima

Si muove tra sol adiacenti

= che differiscono per una sola colonna

esempio.

$-\min(-3x_L - 5x_p)$

$x_L + x_p + x_1 = 12$
$x_L + 2x_p + x_2 = 16$
$x_L + x_3 = 10$
$x_p + x_4 = 6$

| $x_L$ | $x_p$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 16 |

$\underset{\text{obiettivo}}{z} = -3x_L - 5x_p \qquad (\min(z))$

!

NB. Ciascuna delle var in base può essere scritta in funzione di quelle fuori base:

$x_1 = 12 - x_L - x_p$
$x_2 = 16 - x_L - 2x_p$
$x_3 = 10 - x_L$
$x_4 = 6 - x_p$

$(x_L, x_P) = (0,0)$ . considero come base $(x_1, x_2, x_3, x_4)$

possibile migliorare? $z = -3x_L - 5x_P$

Considero che aumentando $x_P$, $z$ diminuisce

Quanto posso aumentarlo?

$x_1 = 12 - \vartheta \geq 0$ $\quad \vartheta \leq 12$

$x_2 = 16 - 2\vartheta \geq 0$ $\quad \vartheta \leq 8$

$x_3 = 10 \geq 0$

$x_4 = 6 - \vartheta \geq 0$ $\quad \vartheta \leq 6$ $\longrightarrow$ $x_P = 6$ : nuova soluzione

$$\begin{bmatrix} x_L \\ x_P \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = -30$$

ottimizzabile?

1. scrivo le var in base in funzione di quelle fuori base
2. valuto la funzione obiettivo con le var. fuori base, valutando che impatto hanno le var.
3. far entrare chi può ottimizzare
4. nuova soluzione

(1) scrivo le var. in base con quelle fuori base:

$x_P = 6 - x_4$

$x_1 = 12 - x_L + x_4$

$x_2 = 4 - x_L + 2x_4$

$x_3 = 10 - x_L$

(2) $z = -3x_L - 5x_P = -3x_L - 30 + 5x_4$

$$z = \underbrace{-30}_{\text{valore della fol obiettivo nella soluzione corrente}} \underbrace{-3x_L + 5x_4}_{\text{contributo delle funzioni fuori base}}$$

(3) $x_P = 6$

$x_1 = 12 - \vartheta \geq 0$ $\quad \vartheta \leq 6$

$x_2 = 4 - \vartheta \geq 0$ $\quad \vartheta \leq 4$ $\longrightarrow$ $x_L = 4$

$x_3 = 10 - \vartheta \geq 0$ $\quad \vartheta \leq 10$

(4) nuova soluzione:

$$\begin{bmatrix} x_L \\ x_P \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z = -42$$

$$Ax = A_B x_B + A_N x_N = b \longrightarrow x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N$$

è possibile scrivere le variabili in base in funzione di quelle fuori base

$$z = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N = \dots = c_B^T A_B^{-1} b + \left(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N\right) x_N$$

$$= z_0 + r_N^T x_N$$

$z_0$: valore della funzione obiettivo associato alla sol. di base attuale

$r_N^T$: vettore dei $\boxed{\text{COSTI RIDOTTI}}$

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$$

descrivono l'impatto sulla funzione obiettivo dell'aumento del valore delle var. fuori base

se $\exists$ una var fuori base con $r_i < 0$ $\rightarrow$ inserendola in base, il valore della funzione obiettivo diminuisce

- $\forall i \quad r_i \geq 0$ : soluzione ottima
- $\exists j \quad r_j < 0$ : soluzione non ottima

Scelta della var che esce

$$x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N :$$

$x_B$: vettore delle var in base

$$(x_B)_j = \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N\right)_j = \left(A_B^{-1} b\right)_j - \left(A_B^{-1} A_N x_N\right)_j \geq 0 \qquad \forall j \in B$$

$(x_B)_j$: variabile j-esima del vett. della base

Se voglio far entrare $x_i$ con valore $\vartheta$

$$(x_B)_j = \left(A_B^{-1} b\right)_j - \left(A_B^{-1} A_N\right)_{ji} \vartheta \geq 0$$

- $\left(A_B^{-1} A_N\right)_{ji} > 0 \Rightarrow \vartheta \leq \dfrac{\left(A_B^{-1} b\right)_j}{\left(A_B^{-1} A_N\right)_{ji}}$
- $\left(A_B^{-1} A_N\right)_{ji} < 0 \Rightarrow \forall \vartheta$

in questo caso l'ottimo è illimitato ($x_i$ grande a piacere, $z$ decresce infinitamente)

Esce dalla base:

$$j^* = \arg \min_{\substack{j \in B \\ (A_B^{-1} A_N)_{ji} \geq 0}} \left\{ \frac{\left(A_B^{-1} b\right)_j}{\left(A_B^{-1} A_N\right)_{ji}} \right\}$$

Nuova base: $B = B \cup \{i\} \setminus \{j^*\}$

## Metodo del simplesso

1. Si calcola $x_B = A_B^{-1} b$, $z = c_B^T A_B^{-1} b$, $r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$
2. Se $r_N^T \geq 0 \Rightarrow$ soluzione ottima
3. Altrimenti si seleziona $x_i$ con $(r_N^T)_i < 0$
4. Se $(A_B^{-1} A_N)_{ji} \leq 0$ $\forall_j \in B \Rightarrow$ ottimo illimitato, stop del simplesso
5. Altrimenti $j^* = \arg\min_{\substack{j \in B \\ (A_B^{-1}A_N)_{ji} > 0}} \left\{ \frac{(A_B^{-1}b)_j}{(A_B^{-1}A_N)_{ji}} \right\}$
6. Si aggiorna la base sostituendo $x_{j^*}$ con $x_i$ e si torna a 1.

$(A_B^{-1} A_N)_{ji}$ — $j$ = j-esimo vett. di B, $i$ = i-esima colonna della principale A

esempio.

$-\min(-3x_L - 5x_P)$

$x_L + x_P + x_1 = 12$
$x_L + 2x_P + x_2 = 16$
$x_L + x_3 = 10$
$x_P + x_4 = 6$

| $A_N$ | | $A_B$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_L$ | $x_P$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | b |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 12 |
| 1 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 10 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 |

$z = -3x_L - 5x_P$

**I** Scelgo come base: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$x_B = A_B^{-1} b^T = [12, 16, 10, 6]^T$, $z = 0$

$c_B^T = [0,0,0,0]$

$c_N^T = [-3, -5]$

$r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = c_N^T = [-3, -5]$ prendo $x_P$

calcolo i rapporti relativi a $x_P$ (4., 5.)

$(x_B)_1 = x_1$ $\quad (A_B^{-1}A_N)_{12} = 1$ $\quad \vartheta \leq \frac{(A_B^{-1}b)_1}{(A_B^{-1}A_N)_{12}} = \frac{12}{1}$

$(x_B)_2 = x_2$ $\quad (A_B^{-1}A_N)_{22} = 2$ $\quad \vartheta \leq \frac{(A_B^{-1}b)_2}{(A_B^{-1}A_N)_{22}} = \frac{16}{2} = 8$

$(x_B)_3 = x_3$ $\quad (A_B^{-1}A_N)_{32} = 0$

$(x_B)_4 = x_4$ $\quad (A_B^{-1}A_N)_{42} = 1$ $\quad \vartheta \leq \frac{(A_B^{-1}b)_4}{(A_B^{-1}A_N)_{42}} = \frac{6}{1} = 6$

min (5.)

$\Rightarrow$ $x_P$ entra in base con valore $x_P = 6$, $x_4$ esce dalla base

**II** nuova base: $\{x_P, x_1, x_2, x_3\}$, $x_B = [6, 6, 4, 10]^T$, $z = -30$

$c_B^T = [-5, 0, 0, 0]$, $c_N^T = [-3, 0]$

$r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N = [\overset{x_L}{-3}, 5]$

entra in base $x_L$

Calcolo i rapporti relativi a $x_L$:

$(x_B)_1 = x_P \quad (A_B^{-1} A_N)_{11} \leq 0$

$(x_B)_2 = x_1 \longrightarrow \vartheta \leq 6$

$(x_B)_3 = x_2 \longrightarrow \vartheta \leq 4 \longrightarrow$ esce dalla base $x_2$

$(x_B)_4 = x_3 \longrightarrow \vartheta \leq 10$

III nuova base $\{x_L, x_P, x_1, x_3\}$, $x_B = [4, 0, 2, 6]^T$, $z = -42$

$$r_N^T = \begin{array}{cc} x_2 & x_4 \\ \end{array} \quad [3, -1]$$

entra in base $x_4$

Calcolo i rapporti relativi a $x_4$:

$(x_B)_1 = x_L \quad (A_B^{-1} A_N)_{12} \leq 0$

$(x_B)_2 = x_P \longrightarrow \vartheta \leq 6$

$(x_B)_3 = x_1 \longrightarrow \vartheta \leq 2 \longrightarrow$ esce dalla base $x_1$

$(x_B)_4 = x_3 \longrightarrow \vartheta \leq 3$

IV nuova base $\{x_L, x_P, x_3, x_4\}$, $x_B = [8, 4, 2, 2]^T$, $z = -44$

$r_N^T = [1, 2] \Longrightarrow$ soluzione ottima

Regola di Bland (anti-ciclo):

Se si deve scegliere tra due, entra in base la colonna di indice più basso.
(esce dalla base)

$$\min \boxed{7x_1 + x_2 + 5x_3}$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$$
$$5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$$

$$7x_1 + x_2 + 5x_3 \geq y_1(x_1 - x_2 + 3x_3) + y_2(5x_1 + 2x_2 - x_3) \geq \underline{10y_1 + 6y_2}$$

$$\begin{cases} y_1 + 5y_2 \leq 7 \\ -y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ 3y_1 - y_2 \leq 5 \end{cases} \qquad y_1, y_2 \geq 0$$

$\Longrightarrow$ Probleme duale: $\max \boxed{10y_1 + 6y_2}$

$$y_1 + 5y_2 \leq 7$$
$$-y_1 + 2y_2 \leq 1$$
$$3y_1 - y_2 \leq 5$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | | max |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_1$ | 1 | -1 | 3 | $\geq$ | 10 |
| $y_2$ | 5 | 2 | -1 | $\geq$ | 6 |
| | $\leq$ | $\leq$ | $\leq$ | | |
| min | 7 | 1 | 5 | | |

| primale | duale | |
|---|---|---|
| $\min c^T x$<br>$Ax \geq b$<br>$x \geq 0$ | $\max y^T b$<br>$y^T A \leq c^T$<br>$y \geq 0$ | coppia simmetrica |
| $\min c^T x$<br>$Ax = b$<br>$x \geq 0$ std. | $\max y^T b$<br>$y^T A \leq c^T$<br>generale | coppia antisimmetrica |

| Primale | Duale |
|---|---|
| min | max |
| variabile<br>vincolo<br>$c$<br>$b$ | vincolo<br>variabile<br>$b$<br>$c$ |
| $A_i x \geq b_i$<br>$A_i x \leq b_i$<br>$A_i x = b_i$<br>$x_i \geq 0$<br>$x_i \leq 0$<br>$x_i$ libera | $y_i \geq 0$<br>$y_i \leq 0$<br>$y_i$ libera<br>$y^T A^i \leq c_i$<br>$y^T A^i \geq c_i$<br>$y^T A^i = c_i$ |

## Proprietà *:

Il duale del duale è il primale

dimostrazione:

$$P = \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad D = \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \end{cases} = \begin{cases} \min\left(-(y^+ - y^-)^T b\right) \\ (y^+ - y^-)A + s = c^T \\ y^+, y^- \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{duale di } D = \begin{cases} \max c^T w \\ Aw \leq -b \\ -Aw \leq b \\ w \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{x = -w} \begin{cases} \max -c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \min (c^T x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \blacksquare$$

## Teorema * (Dualità debole):

$$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \end{cases} \Longrightarrow$$

se (P) e (D) hanno sol. ammissibili:

$$c^T \bar{x} \geq \bar{y}^T b$$

dimostrazione:

$\bar{x}$ ammissibile $\Longrightarrow$ $A\bar{x} = b$ $\Longrightarrow$ $\bar{y}^T b = \bar{y}^T A \bar{x}$ $\blacksquare$

$\bar{y}$ ammissibile $\Longrightarrow$ $\bar{y}^T A \leq c^T$ $\Longrightarrow$ $\bar{y}^T b = \bar{y}^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x}$

## Corollario *:

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili per (P) e (D): $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \Longrightarrow \bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime

dimostrazione:

$c^T x \geq \bar{y}^T A x = \bar{y}^T b = c^T \bar{x} \longrightarrow c^T x \geq c^T \bar{x}$ $\quad \forall x$ ammissibile

$y^T b = y^T A \bar{x} \leq c^T \bar{x} = \bar{y}^T b \Longrightarrow y^T b \leq \bar{y}^T b$ $\quad \forall y$ ammissibile $\blacksquare$

## Corollario:

(P) illimitato $\Longrightarrow$ (D) non ha soluzioni ammissibili

## Lemma (Farkas)

$A$ mtr. $m \times n$, $c \in \mathbb{R}^n$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} Ax \leq 0 \\ c^T x > 0 \end{cases}$ $\dot{\vee}$ $\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$

uno ammette soluzioni $\Leftrightarrow$ l'altro è impossibile

conseguenza:
(D) non ha soluzioni
$\Rightarrow$ (P) illimitato
(e viceversa)

## Teorema (Dualità forte)

se (P) e (D) ammettono sol. ammissibili:

$$\Longrightarrow \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \end{cases}$$

## Teorema * (Scarti complementari)

(P), (D), $\bar{x}, \bar{y}$ ammissibili $\Longrightarrow$

i) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime
ii) $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$
iii) $(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$ (eq. agli scarti complement.)

sono equivalenti

dimostrazione:

i) e ii) per dualità forte

ii) $\Rightarrow$ iii): $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$, $A\bar{x} = b \Longrightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \Longrightarrow (c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$

iii) $\Rightarrow$ ii): $(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0 \Longrightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T A \bar{x} \longrightarrow c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$ $\blacksquare$

Soluzioni complementari: $(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$

**Teorema*** :

(P), (D) simmetrici, $\bar{x}, \bar{y}$ ammissibili $\Rightarrow \bar{x}, \bar{y}$ ottime $\Rightarrow \begin{cases} (c_j - y^T A^j) x_j = 0 \\ y_i (b_i - A_i x) = 0 \end{cases}$

dimostrazione:

$\bar{x}, \bar{y}$ ammissibili $\Rightarrow \bar{y}^T b \le \bar{y}^T A \bar{x} \le c^T \bar{x}$

ottime $\rightarrow y^T b = c^T \bar{x}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{y}^T b = \bar{y}^T A \bar{x} \Rightarrow \bar{y}^T (b - A\bar{x}) = 0 \\ y^T A \bar{x} = c^T \bar{x} \Rightarrow (\bar{y}^T A - c^T)\bar{x} = 0 \end{cases}$$

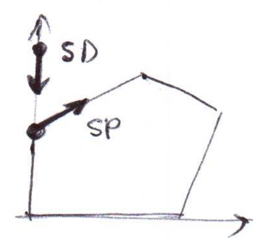
simplesso primale $\xrightarrow{\text{mantiene l'ammissibilità primale}}$ ottimalità primale (= ammissibilità duale)

simplesso duale $\xrightarrow{\text{mantiene l'ammissibilità duale}}$ ottimalità duale (= ammissibilità primale)

E la soluzione primale super ottima

SP: parte da una soluzione ammissibile e si muove per arrivare all'ottimo $r_N^T \geq 0$ (ci si muove nella regione ammissibile)

SD: parte da una soluzione non ammissibile (primale) ottima (tutti $r_N^T \geq 0$) e si muove verso l'ammissibilità (il tutto passando per il duale)



## GRAFO DIREZIONATO

$n(n-1)$ archi

Coppia di insiemi $(N, A)$

- $N$ = insieme dei nodi
- $A \subseteq N \times N$ sottoinsieme delle coppie ordinate dei nodi

$(i, j)$ $\quad i \xrightarrow{\text{arco}} j$

coda $\quad$ testa

se $\exists (i,j) \Rightarrow i$ e $j$ sono adiacenti

## GRAFO NON DIREZIONATO

$\frac{n(n-1)}{2}$ nodi

$G = (N, E)$

se le coppie non sono direzionate

$\{i, j\}$ $\quad i \overset{\text{lato}}{—} j$

estremo $\quad$ estremo

$i < j$

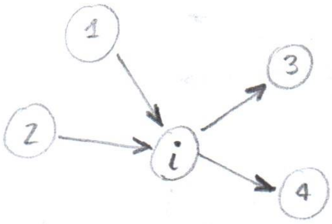
$FN(i) = \{ j \in N : (i,j) \in A \}$ successori di $i$

$PN(i) = \{ j \in N : (j,i) \in A \}$ predecessori di $i$

$AD(i) = FN(i) + PN(i)$ adiacenti

$FS(i) = \{ (i,j) \in A \}$ stella uscente

$BS(i) = \{ (j,i) \in A \}$ stella entrante




$FN(i) = \{3, 4\}$

$PN(i) = \{1, 2\}$

$FS(i) = \{(i,3), (i,4)\}$

$BS(i) = \{(1,i), (2,i)\}$

- cammino: sequenza di archi (con verso) che collega $s$ e $t$
- cammino semplice: senza archi ripetuti
- cammino elementare: senza nodi ripetuti
- ciclo: cammino chiuso in cui è ripetuto solo il primo nodo

**Taglio**: partizione dell'insieme dei nodi:

$$N_T \subseteq N, \quad N_S \subseteq N, \quad N_T \cap N_S = \emptyset, \quad N_T \cup N_S = N$$

**Archi di taglio**: $\Big\{ \underbrace{\{(i,j) \in N : i \in N_S, j \in N_T\}}_{\text{archi in avanti}} \cup \underbrace{\{(i,j) \in N : j \in N_S, i \in N_T\}}_{\text{archi all'indietro}} \Big\}$

**Proprietà**: $G(N, A)$, $s, t \in A$: ($\exists$ un cammino che collega $s$ a $t$) $\dot{\vee}$ ($\exists$ un taglio $(N_S, N_T)$, $s \in N_S$, $t \in N_T$ e tutti gli archi del taglio sono all'indietro)

**Albero di copertura**:

- sottografo
- connesso (tocca tutti i nodi)
- aciclico (senza cicli)

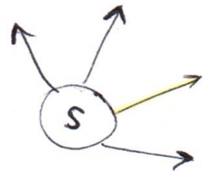
# Cammini minimi

$$x_{ij} = \begin{cases} 0 & (i,j) \text{ non appartiene} \\ 1 & (i,j) \text{ appartiene al cammino minimo} \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A$$

$\longrightarrow$ Funzione obiettivo: $\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$

Vincoli:

- partire da $s$: $\sum_{(s,j)\in A} x_{sj} = 1$

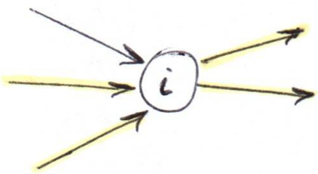



sicuramente da $s$ bisogna spostarsi

- arrivare in $t$: $\sum_{(i,t)\in A} x_{it} = 1$


qualcuno deve arrivare in $t$

- se passo per un punto generico devo uscire: $\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = 0 \quad \forall i \neq s,t$




$$\Longrightarrow \quad \underbrace{\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}}_{\text{uscenti}} - \underbrace{\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}}_{\text{entranti}} = \begin{cases} 1 & i=s \\ -1 & i=t \\ 0 & i\neq s,t \end{cases} \qquad \forall i \in N$$

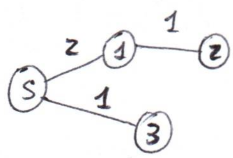
questo se un arco lo percorro oppure no (variabili binarie)

---

$x_{ij} \in \{0,1\} \longrightarrow x_{ij} \geq 0$ (il cammino si può biforcare)

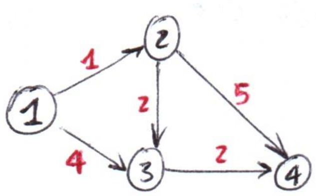
$n$ vertici $\Longrightarrow$ $n-1$ cammini
(Fissato un vertice, il vertice fissato deve raggiungere gli altri $n-1$)

$x_{ij}$ := numero di cammini che usano l'arco $(i,j)$ :




$x_{s1} = 2$
$x_{12} = 1$
$x_{s3} = 1$

$\Longrightarrow$ Funzione obiettivo $\sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$




2: (1,2) costo 1
3: (1,3) costo 4 , (1,2,3) costo 3
4: (1,2,4) costo 6 , (1,3,4) costo 6 , (1,2,3,4) costo 5

$\Longrightarrow x_{12} = 3, \quad x_{23} = 2, \quad x_{34} = 1$

$\Longrightarrow \sum x_{ij} c_{ij} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 1 = 9$

$$\underbrace{\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}}_{\text{uscenti}} - \underbrace{\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}}_{\text{entranti}} = \begin{cases} n-1 & i=r \\ -1 & i\neq r \end{cases}$$

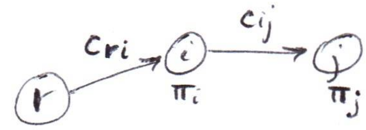
$i=r$: devono partire $n-1$ cammini dalla radice

$i\neq r$: deve arrivare un cammino per ciascun nodo (se lo attraversa allora $\rightarrow O \rightarrow$ ma uno deve rimanere)

$\pi_i$ = costo per arrivare da r a i $\qquad \pi \in \mathbb{R}^n$

$\pi_r := 0$

se l'albero contiene $(i,j)$ $\Longrightarrow$ $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$



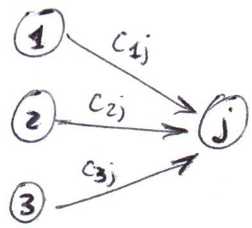

## Condizione di ottimalità

$\pi = \boxed{r \mid \;\; \mid \boxed{i} \mid j \mid \;\; \mid \;\;}$

costo del cammino di costo minimo da r a i

$\pi_j \le \pi_i \; c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$

$\Longrightarrow$ $\pi_j$ rappresenta il più breve tra tutti i percorsi che passano tra tutti i predecessori di j (strada più breve tra r e j)




Scelgo come percorso:

$(1) \rightarrow (j)$ se $\pi_1 + c_{1j} < \pi_2 + c_{2j}$

$\pi_1 + c_{1j} < \pi_3 + c_{3j}$

$\vdots$

Albero dei cammini minimi (ottimo) $\Longleftrightarrow$ $\pi_j \le \pi_i + c_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$

---

## FLUSSO MASSIMO

$V$ = flusso che può essere inviato da s a t senza violare i limiti

$u_{ij}$ = capacità dell'arco $(i,j)$

Modello: $\max V$

1) $$\underbrace{\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}}_{\text{uscenti}} - \underbrace{\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}}_{\text{entranti}} = \begin{cases} V & i=s \\ -V & i=t \\ 0 & i \neq s,t \end{cases}$$

2) $x_{ij} \le u_{ij} \qquad \forall (i,j) \in A$

3) $x_{ij} \ge 0 \qquad \forall (i,j) \in A$

Capacità del taglio: $U(N_S, N_T) = \sum_{(i,j)\in A^+(N_S,N_T)} u_{ij}$