Forma generale: $\max c^T x$
$Ax \leq b$

Forma standard: $\min c^T x$
$Ax = b \quad (b \geq 0)$
$x \geq 0$

$\min(f(x)) \rightarrow -\max(-f(x))$
$\max(f(x)) \rightarrow -\min(-f(x))$
$x \leq 0 \rightarrow y = -x, \; y \geq 0$
x libera $\rightarrow x = x^+ - x^-, \quad x^+, x^- \geq 0$

$$G \begin{cases} Ax \geq b \rightarrow -Ax \leq -b \\ Ax = b \rightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{cases} \end{cases}$$

$$S \begin{cases} Ax \leq b \rightarrow Ax + x_S = b \\ Ax \geq b \rightarrow Ax - x_S = b \end{cases}$$

Combinazione convessa: un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e' combinazione convessa di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$:
$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i, \quad \lambda_i \in [0,1] \;\; \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$
La combinazione convessa e' propria se $\forall i \;\; \lambda_i > 0$

Insieme convesso: per ogni coppia di punti il segmento che li congiunge e' interamente contenuto nell'insieme
= la loro combinazione convessa

Involucro convesso: di un insieme K e' l'insieme di tutte le combinazioni convesse degli elementi di K (= più piccolo insieme convesso che contiene tutti gli elementi di K)

Cono: K e' un cono se $\forall x \in K$ e $\lambda \geq 0$ si ha $\lambda x \in K$

Combinazione conica: un punto $x \in \mathbb{R}^n$ e' combinazione conica di $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$ se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_m$:
$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i \qquad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i$$

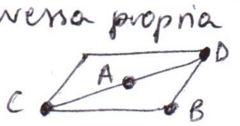
Involucro conico K $(\text{cono}(K))$: insieme di tutte le combinazioni coniche degli elementi di K

Poliedro: (in $\mathbb{R}^n$): intersezione di un numero finito di sottospazi chiusi di $\mathbb{R}^n$
Ogni poliedro puo' essere visto come l'insieme delle soluzioni di un sistema di m disequazioni in n incognite $(m<n)$
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$$
(la regione ammissibile di un problema in PL e' un poliedro)

Politopo: poliedro limitato

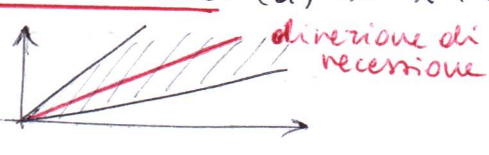
Cono poliedrico P: se $\exists Q : P = \{x \in \mathbb{R}^n : Qx \leq 0\}$

Vertice: punto del poliedro che non puo' essere scritto come combinazione lineare convessa propria di altri punti del poliedro



per scrivere A posso usare C e D
per scrivere B devo usare B $\Rightarrow$ B vertice

Direzione di recessione: (d) se $x + d\lambda \in P \quad \forall x \in P \quad \forall \lambda \geq 0$



Teorema (Rappresentazione di poliedri)

Dato un poliedro P, esiste un sottoinsieme finito di punti $V = \{v^i\}$ di P e un sottoinsieme finito di direzioni $E = \{e^i\}$ (eventualmente anche vuoti) tali che:

$$P = conv(V) + cono(E)$$

combinazione convessa dei vertici (politopo) + combinazione conica delle direzioni di recessione (cono) = P

Teorema (caratterizzazione elementare dell'ottimalità)

$$(P) \begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} \end{cases}$$

- $c \neq 0 \Rightarrow$ la soluzione ottima non è all'interno di P
- (P) ha due soluzioni ottime $\Longrightarrow$ ne ha infinite
- le soluzioni ottime locali sono anche globali (perché il problema è lineare)

Teorema (Fondamentale della PL)

$P = conv(V) + cono(E)$: se (P) ha un valore ottimo finito, allora $\exists\ k \in \{1, .., m\}$ tale che $v^k \in V$ è soluzione ottima di (P)
(= le soluzioni ottime di (P) sono vertici del poliedro)

Simplesso: soluzione ottima (se finita) si trova sul vertice $\rightarrow$ la ricerca si limita ai vertici della regione ammissibile (ci si sposta da un vertice all'altro (adiacente) migliorando la funzione obiettivo)

Il problema è in forma standard: $\min c^T x : \ Ax = b, \ x \geq 0$

$A_B x_B + A_N x_N = b$:

<u>Soluzione di base</u>: data una sottomatrice A_B della matrice dei coefficienti dei vincoli, invertibile di rango massimo, una soluzione del tipo $(A_B^{-1} b, 0)$ è una soluzione di base (l'insieme degli indici delle variabili associate alla matrice di base è descritto da B, la base)

<u>Soluzione ammissibile di base</u>: una soluzione di base con $x_B \geq 0$ è una soluzione ammissibile di base

<u>Soluzione degenere</u>: una soluzione di base in cui una variabile di base assume valore nullo è detta soluzione degenere

Teorema (Soluzioni di base e vertici)

Sia A una matrice $m \times n$ $(m < n)$ di rango massimo. Sia P la regione ammissibile descritta dai vincoli :

$$\left.\begin{array}{l} Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}\right\} (1)$$

$\rightarrow$ un punto x è vertice di $P \Longleftrightarrow$ è una soluzione di base per (1)

<u>Implicazioni (PL)</u>: è possibile limitare la ricerca della soluzione ottima del problema ai vertici del poliedro, quindi alle soluzioni di base

Costi ridotti: il vettore $r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N$ dei costi ridotti descrive l'impatto sulla funzione obiettivo delle variabili fuori base $(z = z_0 + r_N^T x_N)$
Se $\exists$ una variabile x_i con $i \in B$ per cui $r_i < 0$, aumentando il valore della variabile x_i (cioè inserendola tra le variabili in base) il valore della funzione obiettivo diminuisce

- entra in base la variabile con costo ridotto negativo
- esce dalla base la variabile con indice $j^* = \arg\min \frac{(A_B^{-1}b)_j}{(A_B^{-1}A_N)_{ji}}$ $\quad j \in B$, $(A_B^{-1}A_N)_{ji} > 0$

→ con $\theta \le \frac{(A_B^{-1}b)_j}{(A_B^{-1}A_N)_{ji}}$

Regole anticiclo: in presenza di soluzioni di base degeneri è possibile spostarsi da una base all'altra senza cambiare il valore delle variabili. Può succedere che il simplesso cicli indefinitivamente su un insieme di basi associate allo stesso vertice degenere senza cambiare il valore della funzione obiettivo ⟹ **Teorema** (Bland):
Il simplesso termina se come variabile che entra o esce dalla base viene scelta quella di indice inferiore

Fase I del simplesso: (si applica quando non si ha I come A_B)
Problema artificiale: si introducono m variabili w, una per ogni vincolo, e si risolve il problema:
$$\begin{cases} \min w_1 + \dots + w_m \\ Ax + w = b \qquad x \ge 0,\ w \ge 0 \end{cases}$$

- valore ottimo nullo:
  dalla base ottima del problema artificiale si può ricavare una base ammissibile del problema originario
- valore ottimo non nullo:
  il problema originario non ammette soluzioni ammissibili

primale	duale	
$\min c^T x$ $Ax \ge b$ $x \ge 0$	$\max y^T b$ $y^T A \le c^T$ $y \ge 0$	coppia simmetrica
$\min c^T x$ $Ax = b$ $x \ge 0$ std.	$\max y^T b$ $y^T A \le c^T$ generale	coppia asimmetrica

primale	duale
min	max
variabile vincolo c b	vincolo variabile b c
$A_i x \ge b_i$	$y_i \ge 0$
$A_i x \le b_i$	$y_i \le 0$
$A_i x = b_i$	y_i libera
$x_i \ge 0$	$y^T A^i \le c_i$
$x_i \le 0$	$y^T A^i \ge c_i$
x_i libera	$y^T A^i = c_i$

Proprietà: il duale del duale è il primale

Teorema (Dualità debole)

$(P) \begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$ $\quad (D) \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \le c^T \end{cases}$ ⟹ se (P) e (D) hanno soluzioni ammissibili $\bar{x}$ e $\bar{y}$ allora: $c^T \bar{x} \ge \bar{y}^T b$

Corollario: $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili per (P) e (D): $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$ → $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime

Corollario: (P) illimitato $\Longrightarrow$ (D) non ha soluzioni ammissibili

Lemma (Farkas)

A matr. $m \times n$
$c \in \mathbb{R}^n$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} Ax \leq 0 \\ c^T x > 0 \end{cases}$ $\dot{\vee}$ $\begin{cases} y^T A = c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$

uno ammette soluzioni $\Longleftrightarrow$ l'altro è impossibile

		P		
		finito	illimitato	N.A
D	finito	✓	X	X
D	illimitato	X	X	✓
D	N.A.	X	✓	✓

Conseguenza:

se (D) non ha soluzioni: $\nexists y: \; y^T A = c^T, \; y \geq 0 \xrightarrow{F} \exists x: \; c^T x > 0, \; Ax \leq 0$

Se considero $\bar{x}$ soluzione ammissibile del primale e una nuova soluzione ottenuta come $\bar{x} + x$:

$$\left.\begin{array}{l} c^T(\bar{x}+x) = c^T\bar{x} + c^T x > c^T x \\ A(\bar{x}+x) = A\bar{x} + Ax \leq b \end{array}\right\}$$

possiamo muoverci illimitatamente nella direzione x trovando sol. sempre migliori
$\Longrightarrow$ (P) è illimitato

Teorema (Dualità forte)

(P) e (D) ammettono soluzioni ammissibili $\longrightarrow$ $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \end{cases}$

Teorema (Scarti complementari)

(P), (D), $\bar{x}, \bar{y}$ ammissibili $\longrightarrow$

i) $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime
ii) $c^T \bar{x} = \bar{y}^T b$
iii) $\boxed{(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0}$

equazione agli scarti complementari

sono equivalenti

(P) $\begin{array}{l} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$ (D) $\begin{array}{l} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \end{array}$

Soluzioni complementari: dati (P), (D), due soluzioni sono dette complementari se soddisfano le condizioni agli scarti complementari

$$(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$$

nel caso di coppia simmetrica c'è anche: $y^T(A\bar{x} - b) = 0$

Teorema

(P) $\begin{cases} \min c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} \max y^T b \\ y^T A \leq c^T \\ y \geq 0 \end{cases}$ e due soluzioni ammissibili $\bar{x}$ e $\bar{y}$:

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime $\longrightarrow$ $\begin{cases} (c_j - y^T A^j)\, x_j = 0 \\ y_i\,(b_i - A_i x) = 0 \end{cases}$

Condizioni di ottimalità:

Se due soluzioni complementari $\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ammissibili (per (P) e (D) rispettivamente) $\Longrightarrow$ sono soluzioni ottime

Condizioni di ottimalità:

$\bar{x}$ di (P) associata a B $\Rightarrow$ $\bar{y}^T = c_B^T A_B^{-1}$ (duale):

- $\bar{y}$ ammissibile $\Rightarrow$ $\bar{x}$ ottima
- $\bar{y}$ non ammissibile $\Rightarrow$ $\bar{x}$ non ottima

Simplesso primale:

ammissibilità primale $\xrightarrow{\text{mantiene l'ammissibilità primale}}$ ottimalità primale

Simplesso duale:

- sol. ammissibile duale
- sol. non ammiss. primale super ottima

mantiene:
- ammiss. duale
- ottimalità primale

$\longrightarrow$

- ottimalità duale
- ammissibilità primale

Il simplesso duale si applica quando abbiamo una sol. di base con tutti i costi ridotti nulli o positivi e almeno una variabile di valore negativo: $x_p < 0$, $p \in B$

Condizioni di ottimalità:

Se il gradiente della funzione obiettivo appartiene al cono generato dai gradienti dei vincoli attivi non esistono direzioni ammissibili di crescita e il vertice è ottimo

La direzione di spostamento deve essere:

- di crescita (ci si muove verso l'ottimalità duale)
- ammissibile (si mantiene l'ammissibilità duale)

$d^T = -(A_B^{-1})_p$

GRAFI

Grafo (direzionato): coppia di insiemi (N, A):

$\frac{n(n-1)}{}$ archi: $n(n-1)$ archi

- N: insieme dei nodi
- $A \subseteq N \times N$: sottoinsieme delle coppie ordinate dei nodi (rappresenta la relazione tra nodi)

  $(i,j) \in A$ è detto arco: i e j sono gli estremi dell'arco, i è la coda, j è la testa:

  - insieme dei successori di i: $FN(i) = \{j \in N : (i,j) \in A\}$
  - insieme dei predecessori di i: $PN(i) = \{j \in N : (j,i) \in A\}$
  - insieme degli adiacenti di i: $AD(i) = FN(i) + PN(i)$
  - stella uscente: $FS(i) = \{(i,j) \in A\}$
  - stella entrante: $BS(i) = \{(j,i) \in A\}$

- cammino: sequenza di archi presi secondo il loro verso di percorrenza che collega due nodi s e t
  - cammino semplice: cammino senza archi ripetuti
  - cammino elementare: cammino senza nodi ripetuti

Grafo (non direzionato): $G = (N, E)$: coppie non ordinate

$\frac{n(n-1)}{2}$ archi

si parla di lati: $\{i,j\} \in E$ è detto lato, i e j sono i suoi estremi
Due nodi sono adiacenti se collegati da un lato
Un lato è incidente nei suoi estremi

Nodi connessi: dato $G = (N, A)$, due nodi $i, j \in N$ sono connessi se esiste un cammino che li lega

Grafo connesso: dato $G = (N, A)$, G è connesso se ogni coppia di nodi $i, j \in N$ è connessa

Taglio di un grafo: partizione dell'insieme di nodi:

$$N_T \subseteq N, \quad N_S \subseteq N, \quad N_T \cap N_S = \emptyset, \quad N_T \cup N_S = N$$

Archi di taglio: sono gli archi che collegano i due sottoinsiemi della partizione

$$\{ \underbrace{\{(i,j) \in N : i \in N_S, j \in N_T\}}_{\text{archi in avanti}} \cup \underbrace{\{(i,j) \in N : i \in N_T, j \in N_S\}}_{\text{archi all'indietro}} \}$$

Proprietà:

$G(N, A)$, $s, t \in N$: $\left(\begin{array}{l}\exists \text{ un cammino} \\ \text{che collega } s \text{ a } t\end{array}\right) \;\dot{\vee}\; \left(\begin{array}{l}\exists \text{ un taglio } (N_S, N_T),\ s \in N_S, \\ t \in N_T \text{ e tutti gli archi di taglio} \\ \text{sono all'indietro}\end{array}\right)$

Albero di copertura

- sottografo: $G' = (N', E')$: $N' \subseteq N$, $E' \subseteq E$ dove ogni $\{i,j\} \in E'$ collega i nodi di N'
- connesso: $N' = N$
- aciclico: senza cicli

Osservazioni:
- albero con n nodi $\Rightarrow$ $n-1$ lati
- ogni coppia di nodi è collegata da un cammino unico
- eliminando dall'albero un lato si ottiene un taglio
- aggiungendo un lato che non gli appartiene si genera un ciclo
- (proprietà di scambio): sostituendo $e \notin T$ a ogni lato del ciclo si ottiene un altro albero di copertura

1. Come generare le regioni:

Le regioni si generano aggiungendo vincoli: il risultato deve essere una partizione della regione ammissibile intera

- Branch binario: si suddivide in due aggiungendo due vincoli
- Branch ennario: si suddivide in **n** regioni aggiungendo **n** vincoli

Scendendo nell'albero le regioni si partizionano a loro volta

2. Stime della soluzione ottima:

La stima deve essere sempre migliore o uguale all'ottimo. Per calcolare la stima si usa il rilassamento:

$P = \max\{c^T x : x \in F\}$: $P' = \max\{c'^T x : x \in F'\}$ è un rilassamento di P se (1) $F \subseteq F'$, (2) $c'^T x \geq c^T x \quad \forall x \in F$

- max: ottimo $\in$ [sol. intera ammissibile, stima] [LB, UB]
- min: ottimo $\in$ [stima, sol. intera ammissibile] [LB, UB]

3. Criteri di potatura:

1. assenza di soluzione migliorante:
   si chiude il nodo se la stima dell'ottimo nella regione è peggiore della miglior soluzione intera nota (z^*)
   - max: si chiude P_i se $UB_i \leq z^*$
   - min: se $LB_i \geq z^*$
2. Ottimo della regione:
   se la stima coincide con una sol. intera ammissibile, per la regione è stato trovato l'ottimo (non si esplora più)
3. Non ammissibilità:
   si chiude il nodo se la regione risulta non ammissibile a causa dei vincoli aggiunti

4. Strategie di esplorazione:

- Depth first: $\forall$ nodo esplora il primo nodo figlio generato dal nodo stesso. Non tiene conto della qualità della sol.
- Best first: esplora il nodo più promettente
- Breadth first: esplora tutti i nodi allo stesso livello prima di passare al livello successivo

---

Zaino binario:

$$\boxed{\begin{aligned} &\max \sum_{i \in I} p_i x_i \\ &\sum_{i \in I} w_i x_i \leq B \\ &x_i \in \{0,1\} \end{aligned}}$$

PLI

- piani di taglio: raffinamento della formulazione
- branch & bound: enumerazione implicita delle soluzioni

PIANI DI TAGLIO

Involucro convesso: dato un insieme di pt. S, $conv(S)$ è il più piccolo poliedro che contiene S

La formulazione ideale descrive l'involucro convesso delle soluzioni a variabili intere (se i vertici del poliedro sono interi $\Rightarrow$ il simplesso garantisce una sol. intera.
Non è facile descrivere $conv(S)$: metodo alternativo:

si risolve il problema con variabili continue (rilassamento continuo), se l'ottimo non è a variabili intere si aggiungono dei vincoli per eliminarlo dalla regione ammissibile

Disuguaglianza valida: dato un problema in PLI, una disuguaglianza valida è una disuguaglianza $gx \le \gamma$ tale che:

$$gx \le \gamma \quad \forall x \in \{ x \ge 0,\ x \in \mathbb{Z}^n,\ Ax \le b \}$$

Piano di taglio: dato un problema in PLI e una sol. $\bar{x}$ del problema rilassato dove $\bar{x}$ non è intera, un piano di taglio è una disuguaglianza valida $gx \le \gamma$ tale che $g\bar{x} > \gamma$

Tagli di Gomory (applicabili a un problema in forma std. e a una soluzione ottima continua di base).

I vincoli possono essere scritti nella forma: $x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$
Se tutte le variabili in base sono intere la soluzione trovata è ottima anche per il problema intero.
Altrimenti se $\exists h$ tale che $\bar{x}_h$ è frazionaria (x_h t-esima var. della base) si può riscrivere il vincolo come:

$$x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{tj} x_j = \bar{b}_t \qquad \text{con} \qquad \bar{A} = A_B^{-1} A_N, \quad \bar{b} = A_B^{-1} b$$

$$x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor x_j \le x_h + \sum_{j \in N} \bar{a}_{tj} x_j = b_t$$

$$\Rightarrow \boxed{x_h + \sum_{j \in N} \lfloor \bar{a}_{tj} \rfloor x_j \le \lfloor \bar{b}_t \rfloor} \qquad \text{(siccome } b_t \text{ è frazionario)}$$

- disuguaglianza valida (soddisfatta dalle sol. intere)
- taglio (violata dalla sol. ottima continua: $\bar{x}_h = \bar{b}_t > \lfloor \bar{b}_t \rfloor$)

È possibile enumerare tutte le soluzioni a variabili intere. Può richiedere un grande sforzo computazionale: si può scartare le soluzioni a gruppi (en. implicita).

Branch & Bound:
- branching: si partiziona la regione ammissibile generando un albero di ricerca
- bounding: si valuta la regione ottenuta stimandone il valore ottimo
- fathoming (/potatura): si scartano le regioni che non contengono l'ottimo

Grafo residuale: rappresenta le variazioni che un flusso ammissibile $\bar{x}$ può subire rimanendo ammissibile: $G(N, A) \rightarrow G_R(N, A)$

$$x_{ij} \in (0, u_{ij}) \longrightarrow \begin{cases} \text{può essere aumentato} \\ \text{può essere diminuito} \end{cases}$$

Cammino aumentante: si cerca sul grafo residuale un cammino da s a t

- se $\exists \Rightarrow$ la soluzione corrente non è ottima: si può trovare una sol. migliore variando il flusso sugli archi secondo il cammino minimo trovato
- se $\nexists \Rightarrow$ la soluzione corrente è ottima

Algoritmo di Ford-Fulkerson: scegliendo sempre il cammino aumentante con il minor numero di archi si garantisce la polinomialità dell'algoritmo

Condizioni di ottimalità:

- sui cammini: per ogni lato $l = \{i,j\} \notin T^*$ (albero) si ha $w_e \le w_l$ per ogni lato e che appartiene all'albero T^* e al cammino che sull'albero T^* collega i e j
- sui tagli: per ogni lato dell'albero $e \in T^*$ si ha che $w_e \le w_l$ per ogni lato l che appartiene al taglio generato eliminando e dall'albero

Algoritmo di Kruskal: crea la soluzione aggiungendo un elemento per volta, non ridiscute decisioni già prese, impiega un tempo polinomiale

! Come si controlla che $T \cup \{e\}$ contiene un ciclo?
Usando una lista per ogni sottoinsieme di nodi già collegati e assegnando a ciascuna lista un'etichetta: se due estremi di un lato sono associati alla stessa etichetta $\Rightarrow$ aggiungere il lato creerebbe un ciclo. Quando si aggiunge un lato si uniscono le due liste a cui appartengono i suoi estremi

---

Albero dei cammini minimi

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \text{ appartiene all'albero} \\ 0 & (i,j) \text{ non appartiene} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

Vincoli: $$\underbrace{\sum_{(j,i)\in A} x_{ji}}_{\text{entranti}} - \underbrace{\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}}_{\text{uscenti}} = \begin{cases} 1 & i = t \\ -1 & i = s \\ 0 & i \ne s,t \end{cases}$$

A variabili continue ($x_{ij} \ge 0$)

!
$$\boxed{\begin{array}{l} \min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\ \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = \begin{cases} -(n-1) & i = r \\ 1 & i \ne r \end{cases} \end{array}}$$

: devono partire $n-1$ cammini dalla radice

: deve arrivare un cammino per ciascun nodo: (se ci arriva: $\longrightarrow o$; se lo attraversa: $\Longrightarrow o \longrightarrow$ (perché uno si ferma)

x_{ij} = numero di cammini che usano l'arco (i,j)

(P)

(D)

modello duale:

!
$$\boxed{\begin{array}{l} \max \; -(n-1)\pi_r + \sum_{\substack{i\in N \\ i\ne r}} \pi_i \\ \pi_j - \pi_i \le c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \end{array}}$$

π_i = costo per arrivare da r a i

$\pi_r := 0$

Se l'albero contiene (i,j): $\pi_j = \pi_i + c_{ij}$

$$r \xrightarrow{c_{ri}} \underset{\pi_i}{i} \xrightarrow{c_{ij}} \underset{\pi_j}{j}$$

condizioni di ottimalità:

$$\pi_j \le \pi_i + c_{ij} \quad \forall (i,j) \in A$$

Ordinamento topologico (in assenza di cicli): $(i,j) \in A \Longrightarrow i < j$
(quando si controlla i si sono controllati tutti i cammini fino a i)

Algoritmo SPT-aciclico: $G(N,A)$, costi, $r \longrightarrow$ cammino minimo da r a ogni altro nodo

Algoritmo di Dijkstra (caso con cicli)

Algoritmo di Bellman-Ford (caso con cicli e costi $\gtreqless 0$):

Ogni iterazione in cui si controllano tutti gli archi è detta fase

Nella fase k si trovano i cammini minimi con al più k archi

Un cammino semplice può contenere al più n-1 archi

Se nella fase n-1 c'è ancora un aggiornamento $\Rightarrow$ il grafo contiene un ciclo negativo

---

Flusso massimo: trovare in una rete di flusso con una sola sorgente e un solo pozzo un flusso ammissibile che sia massimo

max v — flusso che può essere inviato da s a t senza violare limiti

$$1.\quad \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji} = \begin{cases} v & i=s \\ -v & i=t \\ 0 & i\neq s,t \end{cases}$$

$$2.\quad x_{ij} \leq u_{ij} \quad \text{capacità dell'arco } (i,j)$$

$$3.\quad x_{ij} \geq 0$$

(P)

Capacità del taglio: $U(N_S, N_T) = \sum_{(i,j)\in A^+(N_S,N_T)} u_{ij}$

Flusso attraverso il taglio:

pari alla somma dei flussi sugli archi in avanti meno il flusso degli archi all'indietro:

$$X(N_S,N_T) = \sum_{(i,j)\in A^+} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A^-} x_{ij}$$

Il flusso da s a t è pari al flusso che attraversa un generico taglio $X(N_S,N_T)$

Il flusso da s a t è sempre $\leq$ alla capacità di un generico taglio:

$$X(N_S,N_T) \leq U(N_S,N_T)$$

Condizioni di ottimalità:

Il flusso è massimo (ottimo) se $X(N_S,N_T) = U(N_S,N_T)$

Problema duale:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}\pi_{ij}$$

$\sigma_i - \sigma_j + \pi_{ij} \geq 0 \qquad (x_{ij})$

$-\sigma_s + \sigma_t \geq 1 \qquad (v)$

$\pi_{ij} \geq 0$

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)\in A^+ \\ 0 & \notin \end{cases}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & i\in N_T \\ 0 & i\in N_S \end{cases}$$

(D)

Teorema (max flow-min cut)

Il valore del flusso massimo è pari alla capacità del taglio di capacità minima

Sol $\bar{x}_{ij}$ del primale ottima se:
- $\bar{x}_{ij} = 0 \quad \forall (i,j)\in A^-$
- $\bar{x}_{ij} = u_{ij} \quad \forall (i,j)\in A^+$