

CATENE DI MARKOV

F. Fagnola, E. Sasso

November 13, 2011

Contents

1 Definizione e prime proprietà	2
2 Classificazione degli stati	9
3 Leggi invarianti e teoremi limite	22
4 La proprietà di Markov forte	32
5 Assorbimento in classi ricorrenti	38

1 Definizione e prime proprietà

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio probabilizzato e I un insieme finito o numerabile che sarà sempre considerato uno spazio misurabile con la σ -algebra formata da tutti i suoi sottoinsiemi. Si consideri una successione di variabili aleatorie $X = (X_n)_{n \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in I .

Definizione 1.1 La successione X di variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori in I è una **catena di Markov** con insieme degli stati I se, per ogni intero n , per ogni $i_0, \dots, i_n, j \in I$, con $\mathbb{P}\{X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\} > 0$ si ha

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} \quad (1)$$

La catena di Markov si dice **omogenea** se i due membri di (1) sono indipendenti da n .

I numeri reali positivi p_{ij} dati da

$$p_{ij} = \begin{cases} \mathbb{P}\{X_{n+1} = j | X_n = i\} & \text{se } \mathbb{P}\{X_n = i\} \neq 0, \\ 1 & \text{se } \mathbb{P}\{X_n = i\} = 0 \text{ e } i = j, \\ 0 & \text{se } \mathbb{P}\{X_n = i\} = 0 \text{ e } i \neq j, \end{cases}$$

si chiamano **probabilità di transizione** della catena di Markov omogenea X . La catena di Markov X si chiama omogenea poiché le probabilità di transizione (1) sono indipendenti da n . Nel seguito considereremo sempre catene di Markov omogenee perciò ometteremo spesso l'aggettivo. Inoltre, quando scriveremo una probabilità condizionata, supporremo sempre, implicitamente, che l'evento condizionante sia non trascurabile.

La famiglia di numeri reali positivi $(p_{ij})_{i,j \in I}$ si chiama **matrice di transizione** della catena di Markov X ed ha le proprietà seguenti:

$$(1) \quad p_{ij} \geq 0 \quad \text{per ogni } i, j \in I,$$

$$(2) \quad \sum_{j \in I} p_{ij} = 1 \quad \text{per ogni } i \in I.$$

Definizione 1.2 Una matrice $p = (p_{ij})_{i,j \in I}$ con le proprietà (1) e (2) si dice **stocastica**. Se la matrice trasposta è anch'essa una matrice stocastica allora si dice che p è **bistocastica**.

La matrice di transizione $p = (p_{ij})_{i,j \in I}$ e la legge μ di X_0 , detta anche **legge iniziale**, determinano la legge congiunta delle variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 0}$ cioè permettono, come vedremo, di calcolare tutte le probabilità di eventi determinati dalle variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 0}$.

ESEMPIO 1.1 *La rovina del giocatore.* Sia $N \geq 2$ un numero naturale fissato e $p, q \in]0, 1[$ due numeri reali tali che $p + q = 1$. Due giocatori A e B con capitali iniziali rispettivi di a monete e b , con $N = a + b$, monete giocano un certo numero di partite in ciascuna delle quali A vince una moneta (che gli viene pagata da B) con probabilità p e la perde (cioè la paga a B) con probabilità



q. Il gioco si può modellizzare con una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ nella quale la variabile aleatoria X_n rappresenta il capitale del giocatore A al tempo n . La catena di Markov ha insieme degli stati $\{0, 1, \dots, N\}$ e matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il gioco termina non appena uno dei due giocatori resta senza monete. Un problema naturale è il calcolo della probabilità che vinca A oppure B .

ESEMPIO 1.2 *Estrazioni da un mazzo di carte.* Si consideri l'esperimento aleatorio consistente nelle estrazioni (senza rimpiazzo) di carte da un mazzo. Le carte vengono estratte ad una ad una e, quando sono state tutte estratte, si rimettono insieme e si ricomincia. Indicando con X_n la carta ottenuta nell' n -esima estrazione si trova una successione $X = (X_n)_{n \geq 0}$ di variabili aleatorie. È facile verificare che X *non* è una catena di Markov poiché la probabilità di ottenere come risultato dell' $(n+1)$ -esima estrazione una certa carta dipende dai risultati di *tutte* le precedenti estrazioni e non solamente dall' $(n-1)$ -esima.

$$\mathbb{P}\{X_5 = A\spadesuit | X_4 = A\diamondsuit, X_3 = A\spadesuit\} = 0 \neq \mathbb{P}\{X_5 = A\spadesuit | X_4 = A\diamondsuit\} = \frac{1}{51}.$$

ESEMPIO 1.3 *Successione di variabili indipendenti.* Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una successione di variabili aleatorie su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a valori interi indipendenti ed equidistribuite e sia $(a_n)_{n \geq 0}$ la successione di numeri reali positivi data da

$$a_n = \mathbb{P}\{X_k = n\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

La successione $(X_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov con insieme degli stati \mathbb{N} e matrice di transizione $(p_{ij})_{i,j \in I}$ data da

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 1.4 *Passeggiata casuale.* Con le notazioni dell'esempio precedente, si consideri la successione di variabili aleatorie $(Y_n)_{n \geq 0}$ definita da

$$Y_n = \sum_{k=0}^n X_k.$$

La successione $(Y_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov con insieme degli stati \mathbb{N} e matrice di transizione $(p_{ij})_{i,j \in I}$ data da

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 1.5 Sia $(Y_k)_{k \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti e equidistribuite a valori in \mathbb{N}^* e sia $S_k = \sum_{j=0}^k Y_j$. Poniamo

$$N_0 := 0, \quad N_n = \sum_{k \geq 1} 1_{\{S_k \leq n\}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Le condizioni seguenti sono equivalenti

- i) $(N_n)_{n \geq 1}$ è una catena di Markov omogenea;
- ii) le variabili aleatorie Y_k hanno legge geometrica.

Infatti, se assumiamo vera i), per ogni $n \geq 1$ si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}\{Y_1 = n+1\}}{\mathbb{P}\{Y_1 = n\}} &= \frac{\mathbb{P}\{N_{n+1} = 1, N_n = 0\}}{\mathbb{P}\{N_n = 1, N_{n-1} = 0\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{N_{n+1} = 1 | N_n = 0\}}{\mathbb{P}\{N_n = 1 | N_{n-1} = 0\}} \frac{\mathbb{P}\{N_n = 0\}}{\mathbb{P}\{N_{n-1} = 0\}} \\ &= \frac{\mathbb{P}\{Y_1 > n\}}{\mathbb{P}\{Y_1 > n-1\}}. \end{aligned}$$

Poniamo $p = \mathbb{P}\{Y_1 = 1\}$, allora

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y_1 = 2\} &= \mathbb{P}\{Y_1 = 1\} \mathbb{P}\{Y_1 > 1\} \\ &= \mathbb{P}\{Y_1 = 1\} (1 - \mathbb{P}\{Y_1 = 1\}) = p(1-p). \end{aligned}$$

A questo punto si può concludere per induzione che $\mathbb{P}\{Y_1 = n+1\} = p(1-p)^n$. Infatti, se assumiamo per ipotesi che $\mathbb{P}\{Y_1 = k\} = p(1-p)^{k-1}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{Y_1 = k+1\} &= \mathbb{P}\{Y_1 = k\} \frac{\mathbb{P}\{Y_1 > k\}}{\mathbb{P}\{Y_1 > k-1\}} \\ &= p(1-p)^{k-1} \frac{1 - \mathbb{P}\{Y_1 \leq k\}}{1 - \mathbb{P}\{Y_1 \leq k-1\}} \\ &= p(1-p)^{k-1} \frac{1 - \sum_{j=1}^k p(1-p)^{j-1}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} p(1-p)^{j-1}} \\ &= p(1-p)^{k-1} \frac{\sum_{j=k+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1}}{\sum_{j \geq k} p(1-p)^{j-1}} \\ &= p(1-p)^k. \end{aligned}$$

Questo dimostra che *i*) implica *ii*). L'implicazione opposta segue direttamente se si interpretano le Y_k come il tempo del k -esimo successo in uno schema di Bernoulli. Allora N_n conta il numero di successi in n prove e quindi $(N_n)_{n \geq 1}$ soddisfa la proprietà di Markov.

ESEMPIO 1.6 *Coda casuale.* Con le notazioni degli Esempi 1.3 e 1.4 si consideri la successione di variabili aleatorie $(Y_n)_{n \geq 0}$ definita da

$$\begin{cases} Y_0 = X_0 \\ Y_{n+1} = (Y_n - 1)^+ + X_{n+1} \end{cases}$$

dove, per ogni numero reale x ,

$$x^+ = \max\{x, 0\}.$$

La successione $(Y_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov con insieme degli stati \mathbb{N} e matrice di transizione $(p_{ij})_{i,j \in I}$ data da

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Questa catena di Markov descrive la lunghezza di una coda ad uno sportello dove, in ogni unità di tempo, viene servito un cliente e ne arriva un numero aleatorio Y , inoltre i numeri di clienti che arrivano in unità di tempo distinte sono indipendenti.

Mostreremo ora come si possono esprimere le probabilità di eventi relativi ad una catena di markov $(X_n)_{n \geq 0}$ attraverso la matrice di transizione. Iniziamo col dimostrare il seguente

Lemma 1.3 *Per ogni coppia di numeri naturali n, m con $m \geq 1$, e ogni coppia i, j di elementi di I si ha*

$$\mathbb{P}(\{X_{n+m} = j\} \mid \{X_n = i\}) = p_{ij}^{(m)} \quad (2)$$

dove $p^{(m)}$ denota la potenza m -esima della matrice p .

DIMOSTRAZIONE. Grazie alla definizione di probabilità condizionata e alla formula della probabilità totale il membro sinistro di (2) si può scrivere nella forma

$$\sum_{k \in I} \mathbb{P}\{X_{n+m} = j, X_{n+m-1} = k, X_n = i\} / \mathbb{P}\{X_n = i\}$$

Per ogni $k \in I$ si ha quindi, grazie alla proprietà di Markov (1),

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_{n+m} = j, X_{n+m-1} = k, X_n = i\} \\ &= \mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_{n+m-1} = k, X_n = i\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k, X_n = i\} \\ &= p_{kj} \cdot \mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k, X_n = i\} \end{aligned}$$

e perciò

$$\mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\} = \sum_{k \in I} p_{kj} \cdot \mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k \mid X_n = i\}$$

Ragionando per induzione si vede quindi che il membro sinistro della (2) si può esprimere nel modo seguente

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in I} p_{kj} \mathbb{P}\{X_{n+m-1} = k \mid X_n = i\} \\ &= \sum_{k_1, k_2 \in I} p_{k_1 j} p_{k_2 k_1} \mathbb{P}\{X_{n+m-2} = k_2 \mid X_n = i\} \\ &= \sum_{k_2 \in I} \left(\sum_{k_1 \in I} p_{k_2 k_1} p_{k_1 j} \right) \mathbb{P}\{X_{n+m-2} = k_2 \mid X_n = i\} \\ &= \sum_{k_2 \in I} p_{k_2 j}^{(2)} \mathbb{P}\{X_{n+m-2} = k_2 \mid X_n = i\} \\ &= \dots = \sum_{k \in I} p_{kj}^{(m-1)} \mathbb{P}\{X_{n+1} = k \mid X_n = i\}. \end{aligned}$$

La conclusione segue quindi dalla proprietà di Markov (1). ■

Sia μ la legge della variabile aleatoria X_0 .

Proposizione 1.4 Per ogni n -pla $(j_k)_{0 \leq k \leq n}$ di stati ed ogni n -pla $(m_k)_{0 \leq k \leq n}$ ($0 = m_0 < m_1 < \dots < m_n$) di tempi si ha

$$\mathbb{P}(\cap_{0 \leq k \leq n} \{X_{m_k} = j_k\}) = p_{j_{n-1} j_n}^{(m_n - m_{n-1})} p_{j_{n-2} j_{n-1}}^{(m_{n-1} - m_{n-2})} \dots p_{j_0 j_1}^{(m_1)} \mu\{j_0\}.$$

Dunque la legge iniziale μ e la matrice di transizione $(p_{ij})_{i,j \in I}$ determinano la legge congiunta delle variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 0}$.

DIMOSTRAZIONE. Applicando più volte la proprietà di Markov (1) ed il Lemma 1.3 si ha

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cap_{0 \leq k \leq n} \{X_{m_k} = j_k\}) &= \mathbb{P}(\{X_{m_n} = j_n\} \mid \cap_{0 \leq k \leq n-1} \{X_{m_k} = j_k\}) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}(\cap_{0 \leq k \leq n-1} \{X_{m_k} = j_k\}) \\ &= p_{j_{n-1} j_n}^{(m_n - m_{n-1})} \mathbb{P}(\cap_{0 \leq k \leq n-1} \{X_{m_k} = j_k\}) \\ &= \dots = p_{j_{n-1} j_n}^{(m_n - m_{n-1})} p_{j_{n-2} j_{n-1}}^{(m_{n-1} - m_{n-2})} \dots p_{j_0 j_1}^{(m_1)} \mathbb{P}\{X_0 = j_0\} \\ &= p_{j_{n-1} j_n}^{(m_n - m_{n-1})} p_{j_{n-2} j_{n-1}}^{(m_{n-1} - m_{n-2})} \dots p_{j_0 j_1}^{(m_1)} \mu\{j_0\}. \end{aligned}$$



La proposizione è così dimostrata. ■

Osservazione. Si può verificare facilmente che dalla proprietà di Markov (1) segue che, per ogni evento A , dipendente dalle variabili aleatorie X_0, \dots, X_{n-1} si ha

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid \{X_n = i_n\} \cap A\} = \mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}. \quad (3)$$

Per esempio, se I_{n-1}, \dots, I_0 sono sottoinsiemi di I potremmo prendere

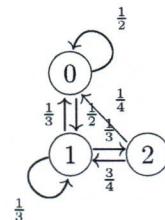
$$A = \{X_{n-1} \in I_{n-1}\} \cap \dots \cap \{X_0 \in I_0\}.$$

Si potrebbe dimostrare pure che, per ogni legge μ su I e ogni matrice stocastica $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ esiste una catena di Markov con matrice stocastica P e variabile aleatoria X_0 con legge μ .

A volte può essere utile rappresentare le catene di Markov (a stati finiti) con un grafo. I nodi rappresentano gli stati della catena di Markov, le frecce tra i nodi rappresentano le probabilità di transizione. In particolare, se si etichettano le frecce fra i nodi con le probabilità di transizione da uno stato ad un altro, si avrà che la somma delle "frecce uscenti" da un nodo deve essere uguale a 1. In questo modo ad ogni matrice stocastica $n \times n$ corrisponde in maniera univoca un grafo a n nodi. Ad esempio, data la matrice P

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix},$$

associata a una catena di Markov con spazio degli stati $\{0, 1, 2\}$, si può associare il corrispondente grafo orientato



ESERCIZI

Es 1.1 Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti a valori in \mathbb{N}^* con legge geometrica di parametro p . Stabilire se la successione $(Z_n)_{n \geq 1}$ di variabili aleatorie a valori in \mathbb{N}^* così definita

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = Z_n X_{n+1}$$

è una catena di Markov e calcolare la matrice di transizione.

Es 1.2 Un punto si muove a caso sui vertici di un esagono regolare saltando ad ogni istante dal vertice in cui si trova in uno dei due adiacenti scelto a caso. Modellizzare il moto del punto con una catena di Markov e scriverne la matrice di transizione. Calcolare la probabilità che dopo due salti si trovi nello stesso vertice.

Es 1.3 Uno sportello serve al massimo 1 cliente per unità di tempo. Il numero di clienti che arrivano nell' n -esima unità di tempo è una variabile aleatoria V_n di legge $B(2, 1/2)$. Supponendo che le V_n siano indipendenti e inoltre che i clienti che arrivando vedono già 5 persone in coda se ne vadano immediatamente, modellizzare la situazione con una catena di Markov e scriverne la matrice di transizione.

Es 1.4 Un modello preliminare sulle previsioni meteorologiche si basa sull'ipotesi che il tempo di domani sia influenzato dalla situazione odierna. Basandosi su questa ipotesi è naturale utilizzare le catene di Markov. Per semplicità assumiamo che ci siano solo due tipi di tempo "sole" (stato 0) e "pioggia" (stato 1). Una realistica matrice di transizione per il tempo di Roma potrebbe essere

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

Calcolare la probabilità che se oggi piove, domani e dopo ci sia il sole. Calcolare la probabilità che se oggi piove, dopo tre giorni ci sia una nuova giornata di pioggia.

Es 1.5 Una pedina si muove su un circuito "circolare" a 4 vertici, numerati da 1 a 4. La pedina si trova inizialmente nel vertice 1. Ad ogni passo un giocatore lancia un dado equilibrato a quattro facce: se la pedina si trova negli stati 1, 2 o 3 avanza di una posizione in caso di risultato dispari e di due posizioni in caso di risultato pari; se la pedina si trova nel vertice 4, essa passa nel vertice 1, se il risultato del dado è 4, altrimenti resta in 4. Sia X_n la variabile aleatoria che indica la posizione della pedina al tempo n -esimo, ossia dopo l' n -esimo lancio del dado. Si individui la legge μ_0 di X_0 . Qual è la probabilità che partendo da 4 la catena si trovi in 1 dopo due passi? Qual è la probabilità che al terzo passo si trovi in 1? Qual è la posizione attesa dopo il secondo lancio del dado?

2 Classificazione degli stati

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con insieme degli stati I e matrice di transizione $(p_{ij})_{i,j \in I}$.

Definizione 2.1 Uno stato j è **accessibile** da uno stato i se esiste un intero positivo n tale che

$$p_{ij}^{(n)} > 0.$$

Due stati i, j **comunicano**, o sono **comunicanti**, se ciascuno dei due è accessibile dall'altro.

Osserviamo che, essendo

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

secondo la definizione precedente, ogni stato comunica con sé stesso.

Proposizione 2.2 Siano i, j, k tre elementi di I . Se k è accessibile da j e j , a sua volta, è accessibile da i allora k è accessibile da i .

DIMOSTRAZIONE. Dall'ipotesi segue che esistono due interi positivi m, n tali che

$$p_{ij}^{(n)} > 0, \quad p_{jk}^{(m)} > 0.$$

Si ha quindi

$$p_{ik}^{(n+m)} = \sum_{l \in I} p_{il}^{(n)} p_{lk}^{(m)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jk}^{(m)} > 0.$$

Ciò dimostra che k è accessibile da i . ■

Definizione 2.3 Una **classe di stati** è un sottoinsieme J dello spazio degli stati I tale che, per ogni coppia i, j di elementi di J , gli stati i e j comunicano e, per ogni coppia di stati i, j con $i \in I - J$, $j \in J$, i e j non comunicano.

Definizione 2.4 Una catena di Markov si dice **irriducibile** se la sola classe di stati non vuota è l'insieme I .

Definizione 2.5 Dato uno stato i tale che l'insieme

$$\left\{ n \geq 1 \mid p_{ii}^{(n)} > 0 \right\}$$

sia non vuoto, si chiama **periodo** di i il massimo comune divisore dei numeri interi $n \geq 1$ appartenenti a tale insieme. Uno stato avente periodo $n > 1$ si dice **periodico** di periodo n , diversamente se $n = 1$, lo stato i si dice **aperiodico**.

Dunque uno stato i è periodico di periodo n se, partendo dallo stato i al tempo 0, la catena di Markov non può ritornare nello stato i a tempi m che non siano un multiplo intero di n .

Proposizione 2.6 Siano i e j due stati comunicanti. Allora il periodo di i è uguale al periodo di j .

DIMOSTRAZIONE. Basterà ovviamente dimostrare la proposizione nel caso in cui $i \neq j$. Denotiamo con $d(i)$ e $d(j)$ i periodi di i e j . Siano a e b due numeri interi strettamente positivi tali che

$$p_{ij}^{(b)} > 0, \quad p_{ji}^{(a)} > 0.$$

Per ogni intero n tale che il numero reale $p_{ii}^{(n)}$ sia strettamente positivo si hanno allora le diseguaglianze seguenti

$$p_{jj}^{(a+n+b)} = \sum_{k_1, k_2} p_{jk_1}^{(a)} p_{k_1 k_2}^{(n)} p_{k_2 j}^{(b)} \geq p_{ji}^{(a)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(b)} > 0$$

e, analogamente, si trovano le diseguaglianze

$$p_{jj}^{(a+2n+b)} \geq p_{ji}^{(a)} p_{ii}^{(2n)} p_{ij}^{(b)} \geq p_{ji}^{(a)} (p_{ii}^{(n)})^2 p_{ij}^{(b)} > 0.$$

Ne segue che i due numeri naturali

$$a + b + n, \quad a + b + 2n$$

sono multipli di $d(j)$, dunque anche la loro differenza n è un multiplo di $d(j)$. Quindi il numero naturale $d(j)$ è un divisore di tutti i numeri naturali n per i quali $p_{ii}^{(n)}$ sia strettamente positivo ovvero $d(j)$ è un divisore di $d(i)$. In modo analogo si può dimostrare che $d(i)$ è un divisore di $d(j)$, pertanto $d(i)$ e $d(j)$ coincidono. ■

ESEMPIO 2.1 Consideriamo la catena di Markov *Rovina del giocatore* dell'Esempio 1.1. Ciascuno degli stati 0 ed N forma una classe con un solo elemento poiché $p_{0j}^{(n)} = p_{Ni}^{(n)} = 0$ per ogni $n \geq 1$ ed ogni $i \in \{0, 1, \dots, N-1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, N\}$. Infatti non è possibile lasciare gli stati 0 e N una volta raggiunti. Gli stati $1, 2, \dots, N-1$ formano un'altra classe perché comunicano. Infatti, per ogni $i, j \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ con $i < j$ (risp. $i > j$) si ha

$$p_{ij}^{(j-i)} = p^{j-i} > 0 \quad (\text{risp. } p_{ij}^{(i-j)} = q^{i-j} > 0).$$

ESEMPIO 2.2 Consideriamo la catena di Markov dell'esempio *Successione di variabili aleatorie indipendenti* dell'Esempio 1.3. Si può vedere, con un facile calcolo, che la matrice di transizione P relativa verifica la condizione

$$p_{ij}^{(n)} = p_{ij} \quad \text{per ogni } n \geq 1 \tag{4}$$

per ogni coppia di stati i, j . Quindi uno stato k è accessibile da un qualunque altro stato se e solo se il numero a_k è strettamente positivo. Pertanto la condizione

$$a_k > 0 \quad \text{per ogni } k \geq 0$$

è necessaria e sufficiente affinché la catena di Markov sia irriducibile. Utilizzando la formula (4) si può vedere inoltre che, sotto questa condizione, tutti gli stati sono aperiodici.

ESEMPIO 2.3 Consideriamo la catena di Markov dell'Esempio 1.4 e supponiamo che i numeri $(a_k)_{k \geq 0}$ siano tutti strettamente positivi. È chiaro allora che, dati due stati i e j , lo stato j è accessibile dallo stato i se e solo se $j \geq i$. Dunque le sole classi di stati, oltre alla classe vuota, sono le classi costituite da un solo stato. Tutti gli stati sono evidentemente aperiodici.

ESEMPIO 2.4 Consideriamo la catena di Markov dell'Esempio 1.6 e supponiamo che siano soddisfatte le condizioni seguenti

$$0 < a_0 < 1, \quad 0 < a_0 + a_1 < 1. \quad (5)$$

Si può dimostrare allora che tutti gli stati comunicano. Infatti, per ogni coppia di stati i, j con $j < i$, ragionando come nell'esempio precedente, si trova la diseguaglianza

$$p_{ij}^{(i-j)} \geq p_{ii-1} p_{i-1, i-2} \cdots p_{j+2, j+1} p_{j+1, j} = (a_0)^{i-j} > 0,$$

che mostra che j è accessibile da i . Osserviamo poi che, grazie alla seconda delle diseguaglianze (5), esiste un intero $\nu \geq 2$ tale che il numero reale a_ν sia strettamente positivo. Quindi, per ogni stato $i > 0$ e ogni numero intero $n \geq 1$, gli stati $(i + n(\nu - 1))_{n \geq 1}$ sono accessibili dallo stato i perché $p_{i+k(\nu-1), i+(k+1)(\nu-1)} = a_\nu$ e, procedendo come sopra, si trova la diseguaglianza

$$p_{ii+n(\nu-1)}^{(n)} \geq (a_\nu)^n > 0.$$

Inoltre, per $i = 0$, abbiamo analogamente

$$p_{0, (n-1)(\nu-1)+\nu}^{(n)} \geq p_{0,\nu} p_{\nu, \nu+(\nu-1)} \cdots p_{\nu+(n-2)(\nu-1), \nu+(n-1)(\nu-1)} \geq (a_\nu)^n > 0.$$

Perciò, per ogni coppia di stati i, j con $i < j$, esiste uno stato k accessibile da i con $k > j$. Per quanto già dimostrato, lo stato j è, a sua volta, accessibile da k , quindi, per la Proposizione 2.2, j è accessibile da i .

Ciò prova che, per ogni coppia di stati i, j lo stato j risulta accessibile dallo stato i , dunque tutti gli stati comunicano ovvero la catena di Markov è irriducibile. Inoltre lo stato 0 è evidentemente aperiodico, dunque, poiché la catena di Markov è irriducibile, grazie alla Proposizione 2.6, ogni stato è aperiodico.

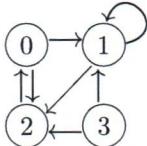
Definizione 2.7 Uno stato i si dice **ricorrente** se

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = i\} \mid \{X_0 = i\} \right) = 1,$$

altrimenti si dice **transiente**.

Quindi uno stato i è ricorrente se, partendo dallo stato i al tempo 0 la catena di Markov ritorna nello stato i in un tempo finito quasi certamente. In particolare se $p_{ii} = 1$, allora i si dice stato **assorbente** o **trappola**, in quanto una volta raggiunto, non se ne può più uscire.

ESEMPIO 2.5 Per le catene di Markov con spazio degli stati E finito, la rappresentazione grafica può semplificare la classificazione degli stati. In particolare, se uno stato appartiene a una classe I chiusa, ovvero per ogni $i \in I$ non esiste nessuno stato $j \in E \setminus I$, tale che $p_{ij} > 0$, risulterà ricorrente. Allora si vede facilmente che nella catena di Markov associata al grafo



gli stati $\{0, 1, 2\}$ formano una classe di stati ricorrenti, mentre $\{3\}$ è uno stato transiente. Si osservi che uno stato è ricorrente o transiente indipendentemente dall'esatto valore numerico delle probabilità di passaggio da uno stato all'altro.

ESEMPIO 2.6 Consideriamo nuovamente la catena di Markov *Rovina giocatore* dell'Esempio 1.1. Come abbiamo visto, partendo da 0 (o da N), con probabilità 1 la catena di Markov rimane in 0 (o in N) ad ogni istante successivo. Questi stati sono evidentemente ricorrenti. Ogni stato $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ invece è transiente poiché, partendo da i , la catena di Markov arriverà in 0 (risp. N) con probabilità maggiore o uguale a q^i (risp. p^{N-i}). Una volta arrivata in 0 o in N non lascerà più lo stato raggiunto e quindi la probabilità di ritornare in i verifica la diseguaglianza

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = i\} \mid \{X_0 = i\}\right) \leq 1 - (q^i + p^{N-i}) < 1.$$

Nello studio della ricorrenza degli stati di una catena di Markov è di grande utilità la variabile aleatoria seguente

Definizione 2.8 Sia j uno stato. Si chiama **tempo della prima entrata nello stato j** la variabile aleatoria a valori $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$$T_j(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = j\} & \text{se } \{n \geq 1 \mid X_n(\omega) = j\} \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osserviamo che, per ogni stato j ed ogni intero $n > 1$, valgono le seguenti eguaglianze

$$\begin{aligned} \{T_j < +\infty\} &= \bigcup_{1 \leq n < +\infty} \{X_n = j\}, \\ \{T_j = 1\} &= \{X_1 = j\}, \\ \{T_j = n\} &= \{X_n = j\} \bigcap_{1 \leq m \leq n-1} \{X_m \neq j\}. \end{aligned}$$

Notazione. Nel seguito, per semplicità, denoteremo con \mathbb{P}_i la probabilità condizionata

$$\mathbb{P}_i(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid \{X_0 = i\}).$$

Per ogni numero intero n strettamente positivo ed ogni coppia i, j di elementi di I poniamo

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i\{T_j = n\}, \quad f_{ij}^{(0)} = 0.$$

Poniamo inoltre

$$f_{ij}^* = \sum_{1 \leq n < +\infty} f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}_i\{T_j < +\infty\}.$$

Poiché la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ è omogenea, per ogni coppia di stati i, j ed ogni coppia di numeri interi $n, m > 1$ si ha inoltre

$$f_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(\{X_{m+n} = j\} \cap \bigcap_{1 \leq \nu \leq n-1} \{X_{m+\nu} \neq j\} \mid \{X_m = i\}).$$

Osserviamo inoltre che, con le notazioni ora introdotte, uno stato i è ricorrente se risulta $f_{ii}^* = 1$, transiente se $f_{ii}^* < 1$.

Possiamo dimostrare ora il seguente

Teorema 2.9 (Equazione dei rinnovi) *Siano i, j elementi di I . Per ogni intero $n \geq 1$ si ha*

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{\nu=1}^n f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)}. \quad (6)$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per semplificare le notazioni, che l'evento $\{X_0 = i\}$ sia quasi certo. Utilizzando la decomposizione dell'evento $\{X_n = j\}$ in eventi disgiunti della forma

$$\{X_n = j\} = \bigcup_{\nu=1}^n (\{X_n = j\} \cap \{T_j = \nu\})$$

e la proprietà di Markov (1.1) si ha allora

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}\{X_n = j\} \\ &= \sum_{1 \leq \nu \leq n} \mathbb{P}\{X_n = j, T_j = \nu\} \\ &= \mathbb{P}\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_2 \neq j, X_1 \neq j\} \\ &\quad + \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \mathbb{P}\{X_n = j, X_\nu = j, X_{\nu-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j\} \\ &= f_{ij}^{(n)} + \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_\nu = j, X_{\nu-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j\} \\ &\quad \cdot \mathbb{P}\{X_\nu = j, X_{\nu-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j\} \\ &= f_{ij}^{(n)} + \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_\nu = j\} \mathbb{P}\{T_j = \nu\} \\ &= f_{ij}^{(n)} + \sum_{1 \leq \nu \leq n-1} f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)}. \end{aligned}$$



Ciò dimostra la (6). ■

Nella dimostrazione del Teorema 2.11, un criterio fondamentale per stabilire se uno stato è transiente o ricorrente utilizzeremo il seguente risultato detto Lemma di Abel

Lemma 2.10 *Sia $(a_n)_{n \geq 0}$ una successione di numeri reali non negativi tale che la serie di potenze*

$$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$$

abbia raggio di convergenza $r \geq 1$. Si ha allora

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Teorema 2.11 *Per ogni stato i le condizioni seguenti sono equivalenti*

- a) *i è ricorrente,*
- b) *la serie $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ è divergente.*

Se i è transiente allora si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}^*}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le funzioni generatrici delle successioni di numeri reali $(p_{ii}^{(n)})_{n \geq 0}$, $(f_{ii}^{(n)})_{n \geq 0}$

$$P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n, \quad F_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n.$$

Osserviamo che queste serie di potenze hanno raggio di convergenza $r \geq 1$ poiché le successioni $(p_{ii}^{(n)})_{n \geq 0}$ e $(f_{ii}^{(n)})_{n \geq 0}$ sono limitate. Grazie al Teorema 2.9, per ogni intero $n \geq 1$ si ha allora

$$p_{ii}^{(n)} s^n = s^n \sum_{\nu=1}^n f_{ii}^{(\nu)} p_{ii}^{(n-\nu)} = \sum_{\nu=1}^n f_{ii}^{(\nu)} s^\nu p_{ii}^{(n-\nu)} s^{n-\nu}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned} P_{ii}(s) - 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^n f_{ii}^{(\nu)} s^\nu p_{ii}^{(n-\nu)} s^{n-\nu} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ii}^{(\nu)} s^{\nu} \sum_{n=\nu}^{\infty} p_{ii}^{(n-\nu)} s^{n-\nu} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ii}^{(\nu)} s^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \\
&= F_{ii}(s) P_{ii}(s).
\end{aligned}$$

Si ha pertanto, per ogni $s \in (-1, 1)$,

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}.$$

La conclusione segue allora osservando che

$$\lim_{s \rightarrow 1^-} F_{ii}(s) = f_{ii}^*, \quad \lim_{s \rightarrow 1^-} P_{ii}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

ed applicando il Lemma di Abel. ■

Corollario 2.12 *Sia J una classe di stati e j un elemento di J . Se j è ricorrente (o, rispettivamente, transiente) allora ogni elemento di J è ricorrente (o, rispettivamente, transiente).*

DIMOSTRAZIONE. Sia k elemento di $J - \{j\}$. Poiché k e j comunicano, esistono due interi $l, m \geq 1$ tali che

$$p_{jk}^{(l)} > 0, \quad p_{kj}^{(m)} > 0.$$

Per ogni intero $n \geq 1$ si ha allora

$$\begin{aligned}
p_{kk}^{(l+n+m)} &\geq p_{kj}^{(m)} p_{jj}^{(n)} p_{jk}^{(l)} \\
p_{jj}^{(l+n+m)} &\geq p_{jk}^{(l)} p_{kk}^{(n)} p_{kj}^{(m)}.
\end{aligned}$$

Quindi le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{kk}^{(n)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$$

sono entrambe convergenti oppure entrambe divergenti. La conclusione segue allora dal Teorema 2.11. ■

Osserviamo che, per ogni stato j , la somma della serie

$$\sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)}$$

è il tempo medio di occupazione dello stato j partendo da i . Infatti la variabile aleatoria

$$\sum_{n \geq 0} 1_{\{X_n=j\}}$$

rappresenta il tempo (aleatorio) trascorso nello stato j poiché conta per quanti n si è verificato l'evento $\{X_n = j\}$ e la sua speranza è

$$\mathbb{E}_i \left[\sum_{n \geq 0} 1_{\{X_n = j\}} \right] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}_i [1_{\{X_n = j\}}] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\{X_n = j\} = \sum_{n \geq 0} p_{ij}^{(n)}. \quad (7)$$

Corollario 2.13 *Se j è uno stato transiente, allora, per ogni stato i , la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \quad (8)$$

è convergente. In particolare, partendo da qualunque stato i , la catena di Markov passa per j quasi certamente solo un numero finito di volte.

DIMOSTRAZIONE. Se $i = j$ la convergenza della serie segue dal Teorema 2.11. Se $i \neq j$ allora, grazie all'equazione dei rinnovi (6), si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^n f_{ij}^{(\nu)} p_{jj}^{(n-\nu)} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ij}^{(\nu)} \sum_{n=\nu}^{\infty} p_{jj}^{(n-\nu)} \\ &= f_{ij}^* \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty. \end{aligned}$$

In particolare, grazie alla (7), la variabile aleatoria

$$\sum_{n \geq 0} 1_{\{X_n = j\}}$$

ha speranza finita. Ne segue che è quasi certamente finita e quindi che si verifica solo un numero finito di eventi $\{X_n = j\}$. ■

Nel caso in cui l'insieme degli stati sia finito la catena di Markov non potrà occupare sempre stati transienti (che occupa per un tempo medio finito). Si ha quindi il seguente

Corollario 2.14 *Una catena di Markov con insieme degli stati I finito ha almeno uno stato ricorrente.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo, per assurdo, che tutti gli stati siano transienti. Allora, per ogni i, j , la serie (8) è convergente e quindi, in particolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0.$$

La matrice $p^{(n)}$ è stocastica e quindi, per ogni $n \geq 1$, si ha anche

$$\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

Facendo tendere n all'infinito e scambiando il limite con la sommatoria (cosa possibile perché I è finito) si trova la contraddizione $0 = 1$. ■

Applicheremo ora il criterio di transienza o ricorrenza del Teorema 2.11 allo studio delle passeggiate casuali su \mathbb{Z}^d .

ESEMPIO 2.7 *Passeggiata casuale su \mathbb{Z} .* Consideriamo una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati \mathbb{Z} e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

dove p, q sono due numeri reali tali che

$$p, q \in]0, 1[, \quad p + q = 1.$$

È chiaro che questa catena di Markov rappresenta il moto sull'insieme dei numeri naturali di un punto che, ad ogni istante, si sposta da i a $i + 1$ con probabilità p e da i a $i - 1$ con probabilità q . È facile vedere inoltre che si tratta di una catena di Markov irriducibile e che ogni stato ha periodo 2.

Vogliamo stabilire se gli stati sono transienti oppure ricorrenti. A questo scopo cominciamo con l'osservare che, per ogni $n \geq 0$, si ha

$$P_{00}^{(n)} = \binom{2n}{n} (pq)^n.$$

Grazie alla formula di Stirling

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \exp(-n) \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$$

si trova l'andamento asintotico

$$P_{00}^{(n)} \approx \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Poiché il numero reale positivo $4pq = 4p(1-p)$ è eguale a 1 se $p = q = 1/2$ e strettamente minore di 1 se $p \neq q$, applicando il Teorema 2.11 possiamo concludere che tutti gli stati sono ricorrenti nel primo caso e transienti nel secondo.

Nel caso in cui $p = q$ i tempi della prima entrata in ogni stato sono variabili aleatorie positive quasi certamente a valori finiti. Utilizzando le funzioni generatrici F_{00} e P_{00} introdotte nella dimostrazione del Teorema 2.11 possiamo

calcolare anche il tempo medio della prima entrata in 0 sotto la condizione $X_0 = 0$. Infatti, ricordando lo sviluppo in serie di Taylor notevole,

$$(1 - 4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} x^n, \quad |x| < \frac{1}{4},$$

otteniamo in forma esplicita la funzione generatrice P_{00}

$$P_{00}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - 4pq s^2}}, \quad |s| < 1.$$

La funzione generatrice F_{00} è quindi

$$F_{00}(s) = 1 - (P_{00}(s))^{-1} = 1 - \sqrt{1 - 4pq s^2}, \quad |s| < 1.$$

Grazie al Lemma di Abel, poiché $4pq = 1$, troviamo infine

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0[T_0] &= \sum_{n \geq 1} n f_{00}^{(n)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 1} n f_{00}^{(n)} s^{n-1} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{dF_{00}(s)}{ds} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{4pq s}{\sqrt{1 - 4pq s^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Nel caso in cui $p = q = 1/2$ pertanto, anche se il ritorno in 0 è quasi certo, si farà attendere molto a lungo e comunque, in media, più di quanto possa aspettare un individuo mortale.

ESEMPIO 2.8 *Passeggiata casuale simmetrica su \mathbb{Z}^2 .* Consideriamo una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati \mathbb{Z}^2 e probabilità di transizione

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = (i, j) \mid X_n = (h, k)\} = \begin{cases} 1/4 & \text{se } |i - h| + |j - k| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$(X_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov irriducibile ed ogni stato ha periodo 2. Detta P la matrice di transizione si ha

$$P_{00}^{(2n)} = \sum_{h+k=n} \frac{(2n)!}{(h!)^2(k!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$$

(dove 0 denota l'origine di \mathbb{Z}^2). Con facili calcoli si trova quindi

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n)} &= \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} \end{aligned}$$

Confrontando i termini $a^n b^n$ del binomio di Newton di $(a+b)^{2n}$ e del quadrato del binomio di Newton di $(a+b)^n$ si trova l'identità notevole

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$



Otteniamo quindi la formula

$$P_{00}^{2n} = \left(\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4} \right)^n \right)^2.$$

Utilizzando la formula di Stirling troviamo poi lo sviluppo asintotico

$$P_{00}^{2n} \approx \frac{1}{\pi n}$$

che ci permette di concludere, grazie al Teorema 2.11 e al Corollario 2.12 che tutti gli stati sono ricorrenti.

ESEMPIO 2.9 *Passeggiata casuale simmetrica su \mathbb{Z}^d quando $d \geq 3$.* Consideriamo una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati \mathbb{Z}^d e probabilità di transizione

$$\mathbb{P}\{X_{n+1} = (j_1, \dots, j_d) \mid X_n = (i_1, \dots, i_d)\} = \begin{cases} (2d)^{-1} & \text{se } \sum_{k=1}^d |i_k - j_k| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

In analogia con gli Esempi 2.7 e 2.8 abbiamo

$$\begin{aligned} P_{00}^{(2n)} &= \sum_{k_1+\dots+k_d=n} \frac{(2n)!}{(k_1!)^2 \dots (k_d!)^2} \left(\frac{1}{2d} \right)^{2n} \\ &= \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2d} \right)^{2n} \sum_{k_1+\dots+k_d=n} \frac{(n!)^2}{(k_1!)^2 \dots (k_d!)^2}. \end{aligned}$$

La sommatoria è maggiorata da

$$\max_{k_1+\dots+k_d=n} \left\{ \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} \right\} \sum_{k_1+\dots+k_d=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} = d^n \max_{k_1+\dots+k_d=n} \left\{ \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} \right\}$$

avendo utilizzato una facile estensione della formula del binomio di Newton.

$$\sum_{k_1+\dots+k_d=n} \frac{n!}{k_1! \dots k_d!} x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d} = (x_1 + \dots + x_d)^n.$$

Inoltre, con calcoli elementari, si può vedere che il valore massimo in questione è raggiunto quando

$$k_1 = k_2 = \dots = k_d = \frac{n}{d}.$$

Utilizzando una generalizzazione della formula di Stirling si trova che la successione $(P_{00}^{(2n)})_{n \geq 0}$ è asintoticamente maggiorata da una costante volte

$$\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2d} \right)^{2n} \frac{n! d^n}{((n/d)!)^d} \approx \frac{d^{d/2}}{\pi^{d/2} 2^{(d-1)/2}} \frac{1}{n^{d/2}}.$$

Poiché $d \geq 3$, possiamo concludere che tutti gli stati sono transienti.

Tramite la definizione delle f_{ii} si può dare una caratterizzazione ulteriore di periodo di uno stato i , che verrà utilizzata in seguito.

Proposizione 2.15 *Il periodo $d(i)$ di uno stato i coincide con il massimo comune divisore dell'insieme $\{n \geq 1 | f_{ii}^{(n)} > 0\}$.*

DIMOSTRAZIONE. Assumiamo inizialmente che i sia uno stato aperiodico. In questo caso ciò che vogliamo dimostrare è che il massimo comune divisore dell'insieme di numeri naturali

$$\left\{ k \geq 1 \mid f_{ii}^{(k)} > 0 \right\}$$

sia eguale a 1. Se così non fosse, detto $m > 1$ tale numero avremmo ovviamente $p_{ii}^{(k)} = 0$ per $1 \leq k < m$ e quindi

$$p_{ii}^{(m+k)} = f_{ii}^{(m)} p_{ii}^{(k)} = 0$$

per $1 \leq k < m$. Si potrebbe quindi dimostrare per induzione su n che $p_{ii}^{(mn+k)}$ è nullo per $1 \leq k < m$ e $n \geq 0$ ovvero che $p_{ii}^{(k)}$ è nullo se k non è multiplo di m . Ciò contraddice l'ipotesi che i è aperiodico. Il caso in cui $d(i) = n > 1$ si dimostra nello stesso modo. ■

ESERCIZI

Es 2.1 Individuare le classi di stati in una catena di Markov con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quali sono gli stati ricorrenti e transienti? Dire se vi sono stati periodici e calcolarne eventualmente il periodo.

Es 2.2 Una catena di Markov con insieme degli stati \mathbb{N} ha matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & p & 0 & \dots \\ 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & p & \dots \end{pmatrix}$$

dove $p \in (0, 1)$. Mostrare che la catena di Markov è irriducibile e aperiodica. Verificare che il tempo T_0 del primo ritorno nello stato 0 rispetto ad ogni probabilità \mathbb{P}_i ha legge geometrica. Questo fatto ha qualche relazione con la nota proprietà della legge geometrica?

Es 2.3 Data una catena di Markov con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

individuare gli stati transienti e gli stati ricorrenti. Verificare che, per ogni $n \geq 2$, si ha che

$$P^n = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 2^{-n} & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(al posto degli asterischi ci sono opportuni numeri reali strettamente positivi).

Si può spiegare questo fatto con qualche proprietà della catena di Markov?

Es 2.4 Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di variabili aleatorie indipendenti con legge di Bernoulli $B(1, p)$ e $(Z_n)_{n \geq 0}$ la successione di variabili aleatorie così definita

$$Z_0 = 1, \quad Z_{n+1} = Z_n(2X_{n+1} - 1).$$

Stabilire se $(Z_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov e determinarne eventualmente la matrice di transizione. Mostrare che tutti gli stati sono ricorrenti.

Es 2.5 Assegnati due stati i e j di una catena di Markov, provare che

i) se j è ricorrente e accessibile da i , allora $\sum_{n \geq 1} p_{ij}^{(n)} = +\infty$,

ii) se j è ricorrente e non accessibile da i , allora $\sum_{n \geq 1} p_{ij}^{(n)} = 0$.

Es 2.6 Consideriamo la passeggiata casuale simmetrica su \mathbb{Z} . Con riferimento alle notazioni dell'Esempio 1.4 verificare che

$$F_{00}(s) = 1 - \sqrt{1 - s^2} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{s^{2(n+1)}}{2^{2n+1}(n+1)}$$

(Suggerimento: osservare che $1 - (1 - 4x)^{1/2} = 2 \int_0^x (1 - 4y)^{-1/2} dy$ e utilizzare la serie di potenze data per l'integrandi). Dedurre che

$$\mathbb{P}_0\{T_0 = 2n\} = \frac{1}{2^{2n}(n+1)} \binom{2n}{n}$$

(Suggerimento:

$$\mathbb{P}_0\{T_0 = 2n\} = \frac{1}{(2n)!} \left. \frac{d^{2n}}{ds^{2n}} F_{00}(s) \right|_{s=0}$$

e utilizzare la serie di Taylor).

Mostrare che, per n grande,

$$\mathbb{P}_0\{T_0 = 2n\} \approx \frac{1}{(n+1)\sqrt{\pi n}}.$$

3 Leggi invarianti e teoremi limite

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov sullo spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con insieme degli stati I e matrice di transizione $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$.

Definizione 3.1 Una legge μ su I è *invariante per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$* se la variabile aleatoria X_n ha legge μ per ogni $n \geq 0$.

Identificheremo spesso le leggi su I con la loro densità (rispetto alla misura che conta i punti di ogni sottoinsieme di I) cioè con la famiglia di numeri reali non negativi $(\mu_i)_{i \in I}$ ove $\mu_i = \mu(\{i\})$.

Proposizione 3.2 Una legge μ su I è invariante per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ se e solo se, per ogni stato i , si ha

$$\mu_i = \sum_{j \in I} \mu_j p_{ji} \quad (9)$$

(ovvero la sua densità è un autovettore sinistro della matrice di transizione con autovalore relativo 1).

DIMOSTRAZIONE. Detta μ la legge di X_0 , la legge ν di X_1 ha densità

$$\nu_i = \mathbb{P}\{X_1 = i\} = \sum_{j \in I} \mathbb{P}\{X_0 = j\} p_{ji} = \sum_{j \in I} \mu_j p_{ji},$$

Quindi, se μ è una legge invariante per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$, allora la vale la (9). Viceversa, se μ è una legge su I che soddisfa la (9), si può dimostrare facilmente per induzione che X_n ha legge μ per ogni n . ■

Dunque una legge μ su I , identificando la sua densità con il vettore $(\mu_i)_{i \in I}$, è invariante se e solo se $\mu = \mu P$ (P è la matrice di transizione).

Teorema 3.3 Se l'insieme degli stati I è finito allora esiste almeno una legge invariante.

DIMOSTRAZIONE. L'insieme delle densità di probabilità su I

$$\mathcal{K} = \left\{ (\mu_i)_{i \in I} \mid 0 \leq \mu_i \leq 1, \text{ per ogni } i, \quad \sum_{i \in I} \mu_i = 1 \right\}$$

è compatto. Preso un elemento $\mu^{(0)}$ di \mathcal{K} è facile dimostrare che, per ogni intero $n \geq 1$, la famiglia di numeri reali non negativi $(\mu_j^{(n)})_{j \in I}$ così definita

$$\mu_j^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I} \mu_i^{(0)} p_{ij}^{(k)} \right)$$

è una densità di probabilità su I . Poiché l'insieme \mathcal{K} è compatto, passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che la successione $(\mu_j^{(n)})_{n \geq 0}$ sia convergente per ogni $j \in I$. Posto quindi

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_j^{(n)}$$

la famiglia di numeri reali $(\pi_j)_{j \in I}$ è una densità di probabilità su I e inoltre si ha

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(k+1)} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(k)} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ &= \pi_j \end{aligned}$$

per ogni $j \in I$. Ciò dimostra che la legge con densità $(\pi_i)_{i \in I}$ è invariante per la catena di Markov. ■

Nel teorema precedente la legge invariante è stata ottenuta come limite (di sottosuccessioni estratte da) $(\mu^{(n)})_{n \geq 1}$ dove $\mu^{(0)}$ è una legge su I e

$$\mu_j^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mu^{(0)} P^k)_j$$

per ogni $n \geq 1$ ed ogni $j \in I$ (qui $(\mu^{(0)} P^k)_j = \sum_{i \in I} \mu_i^{(0)} p_{ij}^{(k)}$). In particolare, se $\mu^{(0)} = \delta_i$ (densità di Dirac nel punto i), si ha

$$\mu_j^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)}.$$

L'analisi di questa espressione fornisce anche l'interpretazione del significato della legge invariante. Infatti, ricordando che la variabile aleatoria

$$\sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=j\}}$$

rappresenta il numero di visite nello stato j fino al tempo n , è chiaro che la variabile aleatoria

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=j\}}$$

rappresenta la *frequenza* delle visite nello stato j al tempo n . La sua media, rispetto alla probabilità \mathbb{P}_i ,

$$\mathbb{E}_i \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k=j\}} \right] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_i \{X_k = j\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)}$$

rappresenta quindi la *frequenza media* delle visite nello stato j al tempo n . Si possono quindi interpretare i π_j della legge invariante come *frequenza media asintotica* delle visite nello stato j .

Una catena di Markov (anche con I finito) può avere più di una legge invariante come mostra l'esempio *Rovina del giocatore*. In questo caso infatti le densità

$$(1, 0, \dots, 0), \quad (0, \dots, 0, 1)$$

e le loro combinazioni convesse

$$\lambda(1, 0, \dots, 0) + (1 - \lambda)(0, \dots, 0, 1) = (\lambda, 0, \dots, 0, 1 - \lambda) \quad \lambda \in [0, 1]$$

sono tutte leggi invarianti.

Nel caso in cui l'insieme I sia infinito, tuttavia, si possono fornire esempi naturali di catene di Markov che non ammettono nessuna legge invariante.

ESEMPIO 3.1 La catena di Markov corrispondente alla *Passeggiata casuale su \mathbb{Z}* dell'Esempio 2.7 non ha nessuna legge invariante infatti la densità $(\pi_i)_{i \in I}$ di tale legge dovrebbe soddisfare la relazione

$$\pi_i = q\pi_{i+1} + p\pi_{i-1}$$

per ogni numero intero i , cioè

$$q(\pi_{i+1} - \pi_i) = p(\pi_i - \pi_{i-1}). \quad (10)$$

Cominciamo con l'osservare che deve essere $\pi_{i+1} \neq \pi_i$ per ogni intero i poiché, diversamente, dalla relazione precedente, otterremmo $\pi_{i+1} = \pi_i$ per ogni intero i e la $(\pi_i)_{i \in I}$ trovata non è una densità di probabilità. Quindi distinguiamo i tre casi $p > q$, $p = q = 1/2$ e $p < q$. Nel primo caso dalla (10) si trova facilmente per induzione la formula

$$\pi_{i+1} - \pi_i = (p/q)^i(\pi_1 - \pi_0)$$

dalla quale segue la relazione

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} |\pi_{i+1} - \pi_i| = +\infty$$

che contraddice la limitatezza di $(\pi_i)_{i \in I}$. Nel secondo dalla (10) si trova la formula

$$\pi_{i+1} - \pi_i = \pi_1 - \pi_0$$

dalla quale segue la relazione

$$\pi_i = i(\pi_1 - \pi_0) + c$$

(con c costante) che contraddice ancora la limitatezza di $(\pi_i)_{i \in I}$. Il terzo caso si tratta come il primo. In conclusione la catena di Markov considerata non possiede nessuna legge invariante.

Il calcolo esplicito o anche la sola dimostrazione dell'esistenza di una legge invariante in generale può non essere semplice. L'esempio seguente, che modellizza varie situazioni (rovina del giocatore contro un avversario con capitale praticamente infinito, passeggiata casuale su \mathbb{N} , ...) mostra un caso notevole in cui l'insieme degli stati è infinito ma si riesce ugualmente a risolvere semplicemente entrambi i problemi.

ESEMPIO 3.2 Consideriamo la catena di Markov con insieme degli stati \mathbb{N} e matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & r_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

dove $(p_m)_{m \geq 0}$, $(r_m)_{m \geq 0}$, $(q_m)_{m > 0}$ sono tre successioni di numeri reali con $p_m, q_m \in]0, 1[$ e $r_m \in [0, 1]$ tali che

$$r_0 + p_0 = 1, \quad q_m + r_m + p_m = 1$$

per ogni intero $m \geq 1$. Ogni legge invariante $(\pi_n)_{n \geq 0}$ soddisfa le equazioni

$$\begin{aligned} \pi_0 &= r_0 \pi_0 + q_1 \pi_1 \\ \pi_n &= p_{n-1} \pi_{n-1} + r_n \pi_n + q_{n+1} \pi_{n+1} \end{aligned}$$

per ogni $n \geq 1$ oltre alla condizione di positività $\pi_n \geq 0$ e di normalizzazione

$$\sum_{n \geq 0} \pi_n = 1.$$

Dalla prima equazione si trova

$$\pi_1 = \frac{1 - r_0}{q_1} \pi_0 = \frac{p_0}{q_1} \pi_0$$

e, per induzione,

$$\pi_n = \frac{p_0 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \pi_0$$

per ogni $n \geq 1$. La condizione di normalizzazione può essere soddisfatta prendendo

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n} \right)^{-1}$$

se e solo se la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{n-1}}{q_1 \cdots q_n}$$

è convergente. Questa condizione è quindi necessaria e sufficiente per l'esistenza di una legge invariante che sarà necessariamente unica.

Enunciamo il seguente teorema (vedi [?] p. 335 oppure [?] p. 81 per la dimostrazione), che ci servirà per enunciare una condizione necessaria e sufficiente affinché una catena di Markov con insieme degli stati infinito abbia una legge invariante.

Teorema 3.4 *Sia $(a_k)_{k \geq 1}$ una successione di numeri reali non negativi tale che*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$$

e il massimo comune divisore dell'insieme dei numeri naturali k per i quali a_k sia strettamente positivo sia 1. La successione di numeri reali non negativi definita per ricorrenza dalle relazioni

$$u_0 = 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^n a_k u_{n-k},$$

è limitata e soddisfa la relazione (con la convenzione abituale $1/\infty = 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \right)^{-1}.$$

Osserviamo che la successione $(u_n)_{n \geq 0}$ qui definita è limitata poiché vale la diseguaglianza

$$0 \leq u_n \leq \max_{1 \leq k \leq n-1} \{u_k\} \sum_{k=1}^n a_k$$

per ogni intero $n \geq 1$.

Enunciamo ora il seguente risultato abbastanza naturale data l'interpretazione della legge invariante.

Teorema 3.5 *Se i è uno stato ricorrente aperiodico allora si ha*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = (\mathbb{E}_i[T_i])^{-1}.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il Teorema 3.4 Infatti, grazie alla Proposizione 2.15, si ha

$$p_{ii}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ii}^{(k)} p_{ii}^{(n-k)}$$

e, valgono le formule,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{ii}^{(k)} = 1, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k f_{ii}^{(k)} = \mathbb{E}_i[T_i].$$



essendo i ricorrente. Inoltre, per la Proposizione 2.15, il massimo comune divisore dell'insieme di numeri naturali

$$\left\{ k \geq 1 \mid f_{ii}^{(k)} > 0 \right\}$$

è eguale a 1.

Ricordiamo che T_i è l'istante (aleatorio) del primo ritorno nello stato i che è quasi certamente finito per la probabilità \mathbb{P}_i (cioè $\mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} = 1$) ma può avere speranza infinita (cioè $\mathbb{E}_i[T_i] = +\infty$). In tal caso, poniamo $(\mathbb{E}_i[T_i])^{-1} = 0$.

Definizione 3.6 *Uno stato ricorrente i si chiama ricorrente positivo (o veloce) se $\mathbb{E}_i[T_i] < +\infty$ e ricorrente nullo (o lento) se $\mathbb{E}_i[T_i] = +\infty$.*

Osserviamo che, se i e j sono due stati comunicanti, ricorrenti e aperiodici allora sono entrambi ricorrenti positivi o entrambi ricorrenti nulli. Infatti basta osservare, come abbiamo già fatto molte volte, che vale una diseguaglianza del tipo

$$p_{jj}^{(a+n+b)} \geq p_{ji}^{(a)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(b)}$$

dove i numeri interi $a, b \geq 1$ sono scelti in modo tale che i numeri reali $p_{ji}^{(a)}$ e $p_{ij}^{(b)}$ siano strettamente positivi.

Si può verificare che *una catena di Markov con insieme degli stati I finito non ha stati ricorrenti nulli (o lenti)*. Infatti, detta \mathcal{C} la classe a cui appartiene un eventuale stato ricorrente lento i , ragionando come nell'osservazione precedente, si vede subito che tutti gli stati della classe \mathcal{C} sono tutti ricorrenti nulli ovvero la successione $(p_{jj}^{(n)})_{n \geq 1}$ converge a 0 per n tendente all'infinito per ogni $j \in \mathcal{C}$. Inoltre, poiché la catena di Markov non può uscire da \mathcal{C} , si ha

$$\sum_{j \in \mathcal{C}} p_{kj} = 1$$

per ogni stato $k \in \mathcal{C}$. Infine, procedendo come nella dimostrazione del Corollario 2.14, si ottiene una contraddizione.

Osserviamo inoltre che il caso di uno stato ricorrente i di periodo $d > 1$ si può trattare in modo analogo considerando i come uno stato (aperiodico) della catena di Markov $(X_{nd})_{n \geq 0}$. In tal caso si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = d(\mathbb{E}_i[T_i])^{-1}.$$

Poiché si vede facilmente che $p_{ii}^{(m)}$ è nullo per ogni intero $m \geq 1$ che non sia multiplo di d , si trova la relazione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ii}^{(k)} = (\mathbb{E}_i[T_i])^{-1}.$$

Teorema 3.7 *Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov irriducibile e aperiodica. Le condizioni seguenti sono equivalenti:*

1. ogni stato è ricorrente positivo,

2. esiste una legge invariante $(\pi_i)_{i \in I}$ tale che per ogni coppia di stati i, j si abbia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \pi_j.$$

Se valgono le condizioni precedenti allora $(\pi_i)_{i \in I}$ è l'unica legge invariante per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.

DIMOSTRAZIONE. 1. \Rightarrow 2. Grazie al Teorema 2.9 si ha

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

e quindi, per Teorema 3.5 (e il Teorema di Lebesgue), detto π_j il limite della successione $(p_{jj}^{(n)})_{n \geq 0}$, si trova

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{ij}^{(k)} \pi_j = \pi_j.$$

Inoltre, per ogni sottoinsieme finito F di I , abbiamo la diseguaglianza

$$\sum_{j \in F} \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in F} p_{ij}^{(n)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

e quindi

$$\sum_{j \in I} \pi_j \leq 1.$$

Dimostriamo ora che $(\pi_j)_{j \in I}$ è la densità di una legge invariante per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$. Sia F un sottoinsieme finito di I . Passando al limite nella relazione

$$\sum_{k \in F} p_{ik}^{(n)} p_{kj} \leq p_{ij}^{(n+1)}$$

per ogni $i, j \in I$, otteniamo le diseguaglianze

$$\sum_{k \in F} \pi_k p_{kj} \leq \pi_j$$

e quindi, data l'arbitrarietà di F ,

$$\sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} \leq \pi_j. \quad (11)$$

Sommando su j troviamo poi

$$\sum_{k \in I} \pi_k = \sum_{j \in I} \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj} = \sum_{j \in I} \pi_j.$$

Le diseguaglianze (11) sono dunque egualanze.

Iterando le *egualanze* (11) si trovano le identità

$$\pi_j = \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}^{(n)}$$

per ogni intero $n \geq 1$. Facendo tendere n all'infinito si trova

$$\pi_j = \pi_j \sum_{k \in I} \pi_k$$

per ogni stato j da cui segue che

$$\sum_{k \in I} \pi_k = 1.$$

Dunque $(\pi_j)_{j \in I}$ è la densità di una legge invariante per $(X_n)_{n \geq 0}$.

2. \Rightarrow 1. La conclusione segue immediatamente dal Teorema 3.5.

Mostriamo infine che, se valgono 1. e 2., allora la legge invariante è unica. Per dimostrare questo basta osservare che, se μ è un'altra legge invariante, allora, per ogni stato j si ha

$$\mu_j = \sum_{k \in I} \mu_k p_{kj}.$$

Iterando n -volte si trovano le identità

$$\mu_j = \sum_{k \in I} \mu_k p_{kj}^{(n)}.$$

Facendo tendere n all'infinito si ottiene la relazione

$$\mu_j = \sum_{k \in I} \mu_k \pi_j = \pi_j$$

per ogni $j \in I$. L'unicità è così dimostrata. ■

Come conseguenza di questo Teorema, data una catena di Markov a stati finiti irriducibile e aperiodica esiste un'unica legge invariante π , tale che $\mathbb{E}_i[T_i] = \frac{1}{\pi_i}$. Nelle stesse ipotesi, possiamo chiederci quando vale il tempo medio necessario per raggiungere uno stato j partendo da i , con $i \neq j$. Vogliamo quindi calcolare

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i[T_j] &= \sum_{k \geq 1} k \mathbb{P}_i\{T_j = k\} \\ &= p_{ij} + \sum_{k > 1} k \mathbb{P}_i\{T_j = k\}. \end{aligned}$$

Siccome $\mathbb{P}_i\{T_j = k\} = \sum_{h \neq j} p_{ih} \mathbb{P}_h\{T_j = k - 1\}$ per ogni $k > 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_i[T_j] &= p_{ij} + \sum_{k>1} \sum_{h \neq j} k p_{ih} \mathbb{P}_h\{T_j = k - 1\} \\ &= p_{ij} + \sum_{h \neq j} \sum_{k>1} k p_{ih} \mathbb{P}_h\{T_j = k - 1\} \\ &= p_{ij} + \sum_{h \neq j} p_{ih} \mathbb{E}_h[T_j + 1] \\ &= 1 + \sum_{h \neq j} p_{ih} \mathbb{E}_h[T_j].\end{aligned}$$

In questo modo abbiamo ottenuto un sistema di equazioni lineari che ci permette di calcolare le speranze $\mathbb{E}_i[T_j]$ quando $i \neq j$. Nella prossimo capitolo, cercheremo di rispondere a domande analoghe quando la catena di Markov non è più irriducibile.

ESERCIZI

Es 3.1 Individuare tutte le leggi invarianti della catena di Markov con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Es 3.2 Una catena di Markov con insieme degli stati \mathbb{N} ha matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \dots \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & \dots \end{pmatrix},$$

dove $p \in (0, 1)$. Mostrare che la catena di Markov è irriducibile e aperiodica e che la sua legge invariante è la legge geometrica di parametro p .

Es 3.3 Provare che, per una catena di Markov con matrice di transizione bimodale, la distribuzione uniforme è invariante. Quando questa può essere una misura di probabilità?

Es 3.4 Una legge $(\pi_i)_{i \in I}$ si dice *reversibile* rispetto ad una matrice di transizione P se, per ogni $i, j \in I$ verifica

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji}.$$

Mostrare che una legge reversibile è necessariamente invariante.

Es 3.5 Classificare gli stati della catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione del tipo

$$P = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix},$$

dove il simbolo * individua gli elementi della matrice strettamente positivi. Una tale catena possiede leggi invarianti? Si può dire qualcosa di più nel caso in cui si supponga che tutte le transizioni in partenza dallo stesso vertice siano equiprobabili?

Es 3.6 Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov con legge invariante. π . Sia \mathcal{C} una classe di stati e sia $a \in \mathcal{C}$. Provare che a è ricorrente e $\pi_j > 0$ per ogni $j \in \mathcal{C}$.

Es 3.7 Data una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati \mathbb{Z} e matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 2/5 & 1/5 & 2/5 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 2/5 & 1/5 & 2/5 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Classificare gli stati e dire se esiste una legge invariante.

Es 3.8 Supponiamo che un'industria produca due tipi di Cola, Cola1 e Cola2. Sappiamo che una persona che all'acquisto abbia scelto Cola1, all'acquisto successivo sceglierà Cola 2 con probabilità 0.9, mentre se ha scelto inizialmente Cola2 sceglierà ancora Cola 2 con probabilità 0.8. Quante bottiglie in media berrà il compratore di Cola1 prima di passare a Cola2?

4 La proprietà di Markov forte

Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con insieme degli stati I e matrice di transizione p . Per ogni intero $n \geq 0$ denotiamo con \mathcal{F}_n la più piccola sotto- σ -algebra di \mathcal{F} contenente gli eventi

$$\{X_n = i_n, \dots, X_0 = i_0\}, \quad n \in \mathbb{N}, i_n, \dots, i_0 \in I.$$

È chiaro che \mathcal{F}_n è costituita da tutti quegli eventi dei quali si può dire se si sono verificati o meno avendo osservato le variabili aleatorie X_0, \dots, X_n e rappresenta quindi la storia della catena di Markov fino al tempo n .

Definizione 4.1 *La famiglia $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ di sotto- σ -algebre di \mathcal{F} si chiama **filtrazione naturale** della catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.*

Introduciamo ora la nozione di tempo d'arresto.

Definizione 4.2 *Una variabile aleatoria*

$$T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

è un **tempo d'arresto**, rispetto alla famiglia crescente di σ -algebre $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$, se, per ogni intero positivo n , l'evento

$$\{T \leq n\}$$

appartiene alla σ -algebra \mathcal{F}_n .

Osserviamo che, per ogni stato j , il tempo T_j della prima entrata in j introdotto con la Definizione 2.12 è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ infatti, per ogni intero positivo $n \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} \{T_j \leq 0\} &= \emptyset, \\ \{T_j \leq n\} &= \bigcup_{\nu=1}^n \{X_\nu = j\}. \end{aligned}$$

Analogamente il tempo U_j della prima uscita dallo stato j definito da

$$U_j(\omega) = \begin{cases} \min\{n \geq 1 \mid X_n(\omega) \neq j\} & \text{se } X_n(\omega) \neq j \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

è un tempo d'arresto rispetto alla filtrazione naturale $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ poiché, per ogni intero positivo $n \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} \{U_j \leq 0\} &= \emptyset, \\ \{U_j \leq n\} &= \bigcup_{\nu=1}^n \{X_\nu \neq j\}. \end{aligned}$$

Il calcolo della legge di U_j e della legge della variabile aleatoria X_{U_j} che indica lo stato scelto dalla catena di Markov una volta che lascia lo stato j sono utili per capire il comportamento della dinamica stocastica.

Teorema 4.3 Se $0 < p_{jj} < 1$ la variabile aleatoria U_j ha legge geometrica con parametro p_{jj} , in particolare è quasi certamente finita. Inoltre la variabile aleatoria X_{U_j} definita da

$$X_{U_j} = \sum_{n \geq 1} X_n(\omega) 1_{\{U_j=n\}}(\omega)$$

se $U_j(\omega) < +\infty$ e in modo arbitrario sull'insieme trascurabile $\{U_j = +\infty\}$, soddisfa

$$\mathbb{P}\{X_{U_j} = k\} = \frac{p_{jk}}{1 - p_{jj}}.$$

per ogni $k \neq j$.

DIMOSTRAZIONE. La legge di U_j si trova subito osservando che

$$\mathbb{P}_j\{U_j > n\} = \mathbb{P}_j\{X_n = j, \dots, X_1 = j\} = (p_{jj})^n$$

per ogni $n \geq 1$ e quindi

$$\mathbb{P}_j\{U_j = n\} = \mathbb{P}_j\{U_j > n - 1\} - \mathbb{P}_j\{U_j > n\} = (1 - p_{jj})(p_{jj})^{n-1}.$$

La legge di X_{U_j} si trova analogamente calcolando, per $k \neq j$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_j\{X_{U_j} = k\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_j\{X_n = k, X_{n-1} = j, \dots, X_1 = j\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_{jk} (p_{jj})^n = \frac{p_{jk}}{1 - p_{jj}}. \end{aligned}$$

La proprietà di Markov implica naturalmente l'assenza di memoria della legge di U_j . Il risultato appena trovato, inoltre, mostra che la catena di Markov, partendo da j , vi trascorre un tempo aleatorio con legge geometrica con parametro p_{jj} e quindi salta in un altro stato k scelto a caso con una legge di probabilità su $I - \{j\}$ uguale alla legge di X_{U_j} .

Nel teorema seguente dimostreremo la cosiddetta proprietà di Markov forte.

Teorema 4.4 Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov su uno spazio probabilizzato $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con matrice di transizione p e sia T un tempo d'arresto rispetto alla sua filtrazione naturale che sia quasi certamente finito, ovvero $\mathbb{P}\{T < \infty\} = 1$. Per ogni elemento ω dell'insieme Ω si ponga

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_{T(\omega)+n}(\omega) & \text{se } T(\omega) < +\infty, \\ i_\infty & \text{se } T(\omega) = +\infty, \end{cases}$$

dove i_∞ è uno stato arbitrario. Allora $(Y_n)_{n \geq 0}$ è una catena di Markov con matrice di transizione p .

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che, per ogni intero positivo n ed ogni stato j , l'insieme $\{Y_n = j\}$ è un evento (cioè un elemento di \mathcal{F}) poiché si può scrivere nella forma

$$\{X_{T+n} = j\} = \bigcup_{0 \leq \nu < \infty} (\{T = \nu\} \cap \{X_{\nu+n} = j\})$$

se $j \neq i_\infty$ e

$$\{T = +\infty\} \bigcup \left(\bigcup_{1 \leq \nu < \infty} (\{T = \nu\} \cap \{X_{\nu+n} = i_\infty\}) \right)$$

se $j = i_\infty$. Dunque, per ogni intero positivo n , Y_n è una variabile aleatoria. Per dimostrare il teorema, grazie alla Proposizione 1.5, basterà quindi far vedere che, per ogni intero $n \geq 0$, per ogni famiglia finita $(i_k)_{0 \leq k \leq n}$ di stati tale che l'evento

$$\bigcap_{0 \leq k \leq n} \{Y_k = i_k\}$$

sia non trascurabile ed ogni stato j si ha

$$\mathbb{P}(\{Y_{n+1} = j\} \mid \cap_{0 \leq k \leq n} \{Y_k = i_k\}) = \mathbb{P}\{Y_{n+1} = i_{n+1} \mid Y_n = i_n\}.$$

Ovvero basterà dimostrare che

$$\mathbb{P}\{X_{T+n+1} = j, X_{T+n} = i_n, \dots, X_T = i_0\} = p_{i_n j} \mathbb{P}\{X_{T+n} = i_n, \dots, X_T = i_0\}.$$

A questo scopo osserviamo che

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_{T+n+1} = j, X_{T+n} = i_n, \dots, X_T = i_0\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_{T+n+1} = j, X_{T+n} = i_n, \dots, X_T = i_0, T = l\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_{l+n+1} = j\} \mid \{X_{l+n} = i_n, X_{l+n-1} = i_{n-1}, \dots, X_l = i_0, T = l\}) \\ &\quad \cdot \mathbb{P}\{X_{l+n} = i_n, X_{l+n-1} = i_{n-1}, \dots, X_l = i_0, T = l\}. \end{aligned}$$

Ora, se $n \geq 1$, l'evento

$$\{X_{l+n-1} = i_{n-1}, \dots, X_l = i_0, T = l\}$$

appartiene alla σ -algebra \mathcal{F}_{l+n-1} , e, dalla proprietà di Markov (1.1) della catena $(X_n)_{n \geq 0}$, si ottiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_{T+n+1} = j, X_{T+n} = i_n, \dots, X_T = i_0\} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(\{X_{l+n+1} = j\} \mid \{X_{l+n} = i_n\}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \mathbb{P}\{X_{l+n} = i_n, X_{l+n-1} = i_{n-1}, \dots, X_l = i_0, T = l\} \\
= & p_{i_n j} \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}\{X_{l+n} = i_n, X_{l+n-1} = i_{n-1}, \dots, X_l = i_0, T = l\} \\
= & p_{i_n j} \mathbb{P}\{X_{T+n} = i_n, X_{T+n-1} = i_{n-1}, \dots, X_T = i_0\}.
\end{aligned}$$

Poiché l'eguaglianza da verificare è ovvia per $n = 0$ ciò conclude la dimostrazione ■

Verificheremo ora che la catena di Markov $Y = (Y_m)_{m \geq 0}$ è anche indipendente dal suo passato fino al tempo T .

Definizione 4.5 Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov e T un tempo d'arresto della sua filtrazione naturale. Si chiama catena arrestata al tempo T la famiglia $X^{[T]}$ di variabili aleatorie $(X_n^{[T]})_{n \geq 0}$ definite da

$$X_n^{[T]} = X_{T \wedge n}.$$

Lemma 4.6 Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov. Per ogni T tempo d'arresto, $m, k \geq 0$, ogni $i, j_1, \dots, j_m \in I$ e ogni evento B della σ -algebra \mathcal{F}_k si ha

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1\} \mid \{X_k = i\} \cap \{T = k\} \cap B) \\
= & \mathbb{P}\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1 \mid X_k = i\}.
\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Le misure di probabilità su \mathcal{F}_k

$$\begin{aligned}
Q_1(B) &= \mathbb{P}(\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1\} \cap \{X_k = i\} \cap \{T = k\} \cap B) \\
Q_2(B) &= \mathbb{P}\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1 \mid X_k = i\} \cdot \mathbb{P}(\{X_k = i, T = k\} \cap B)
\end{aligned}$$

coincidono perché coincidono sugli eventi della forma $\{X_k = i_k, \dots, X_0 = i_0\}$ che generano la σ -algebra \mathcal{F}_k grazie alla proprietà di Markov. ■

Proposizione 4.7 Le famiglie di variabili aleatorie Y e $X^{[T]}$ sono indipendenti rispetto alle leggi di probabilità $\mathbb{P}(\cdot \mid \{X_T = i\})$.

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare che, per ogni $n, m > 0$ e ogni $i = j_0, j_1, \dots, j_m, i_0, \dots, i_n \in I$ gli eventi

$$\{Y_m = j_m, \dots, Y_1 = j_1, Y_0 = j_0\}, \quad \{X_{T \wedge n} = i_n, \dots, X_{T \wedge n} = i_0\}$$

sono indipendenti.

Cominciamo calcolando

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}\{Y_m = j_m, \dots, Y_0 = j_0, X_{T \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0 \mid X_T = i\} \\
= & \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_k = i, T = k, X_{k \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0\} / \mathbb{P}\{X_T = i\} \\
= & \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1 \mid X_k = i, T = k, X_{k \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0\} \\
& \cdot \frac{\mathbb{P}\{X_k = i, T = k, X_{k \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0\}}{\mathbb{P}\{X_T = i\}}
\end{aligned}$$



Grazie al Lemma 4.6, per ogni $k \geq 0$, abbiamo

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1 \mid X_k = i, T = k, X_{k \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0\} \\ &= \mathbb{P}\{X_{k+m} = j_m, \dots, X_{k+1} = j_1 \mid X_k = i\} \\ &= \mathbb{P}\{Y_m = j_m, \dots, Y_1 = j_1 \mid X_T = i\} \end{aligned}$$

poiché $(Y_m)_{m \geq 0}$ è una catena di Markov con matrice la stessa matrice di transizione di $(X_n)_{n \geq 0}$ e $\{X_T = i\} = \{Y_0 = i\}$.

Troviamo quindi

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\{Y_m = j_m, \dots, Y_0 = j_0, X_{T \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0 \mid X_T = i\} \\ &= \mathbb{P}\{Y_m = j_m, \dots, Y_1 = j_1 \mid X_T = i\} \\ &\quad \cdot \sum_{k \geq 0} \frac{\mathbb{P}\{X_T = i, T = k, X_{T \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0\}}{\mathbb{P}\{X_T = i\}} \\ &= \mathbb{P}\{Y_m = j_m, \dots, Y_1 = j_1 \mid X_T = i\} \cdot \mathbb{P}\{X_{T \wedge n} = i_n, \dots, X_0 = i_0 \mid X_T = i\}. \end{aligned}$$

L'indipendenza è così dimostrata. ■

Per ogni coppia di stati i, j poniamo

$$f_{ij}^{**} = \mathbb{P}_i \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m = j\} \right)$$

e ricordiamo che

$$f_{ij}^* = \mathbb{P}_i \left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \{X_m = j\} \right).$$

Osserviamo che f_{ij}^* rappresenta la probabilità che, partendo dallo stato i , la catena di Markov entri nello stato j in un tempo finito mentre f_{ij}^{**} rappresenta la probabilità che, partendo dallo stato i , la catena di Markov ritorni nello stato j infinite volte in un tempo finito. Osserviamo inoltre che, dall'inclusione tra eventi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{X_m = j\} \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} \{X_m = j\},$$

segue la relazione

$$f_{ij}^{**} \leq f_{ij}^*.$$

Il seguente teorema mostra che, se uno stato i è ricorrente, allora la catena di Markov, partendo da i ritorna quasi certamente in i addirittura un numero infinito di volte.

Teorema 4.8 *Per ogni stato i si ha*

$$f_{ii}^{**} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è ricorrente,} \\ 0 & \text{se } i \text{ è transiente.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Sia N_i la variabile aleatoria a valori $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

$$N_i = \sum_{1 \leq n < \infty} 1_{\{X_n=i\}}.$$

che rappresenta il numero di ritorni nello stato i della catena di Markov. Consideriamo la successione $(T_i^{(n)})_{n \geq 1}$ di tempi d'arresto definita per ricorrenza

$$\begin{aligned} T_i^{(1)}(\omega) &= \min \{ n \geq 1 \mid X_n(\omega) = i \}, \\ T_i^{(n+1)}(\omega) &= \min \left\{ k > T_i^{(n)}(\omega) \mid X_k(\omega) = i \right\} \end{aligned}$$

(con la convenzione abituale $\min \emptyset = +\infty$). Se lo stato i è transiente allora la conclusione segue dal Corollario 2.17. Possiamo quindi supporre che lo stato i sia ricorrente cioè che l'evento $\{T_i^{(1)} < +\infty\}$ sia quasi certo. Allora, per ogni intero n strettamente positivo, si ha

$$\mathbb{P}_i \{N_i \geq n\} = \mathbb{P}_i \{T_i^{(n)} < +\infty\} = \mathbb{P}_i \{T_i^{(n)} < +\infty \mid T_i^{(1)} < +\infty\}.$$

Consideriamo ora la successione di variabili aleatorie $(Y_n)_{n \geq 0}$ date da

$$Y_n(\omega) = \begin{cases} X_{T_i^{(1)}(\omega)+n}(\omega) & \text{se } T_i^{(1)}(\omega) < +\infty, \\ i_\infty & \text{se } T_i^{(1)}(\omega) = +\infty, \end{cases}$$

dove i_∞ è uno stato arbitrario. Poiché il tempo d'arresto $T_i^{(1)}$ è quasi certamente finito e la variabile aleatoria Y_0 è quasi certamente uguale a i , dal Teorema 3.2 segue che le leggi globali delle variabili aleatorie $(X_n)_{n \geq 0}$ e $(Y_n)_{n \geq 0}$ su $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ coincidono. Inoltre l' n -esima entrata in i della catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ coincide quasi certamente con l' $n - 1$ -esima entrata in i della catena di Markov $(Y_n)_{n \geq 0}$. Si ha pertanto

$$\mathbb{P}_i \{T_i^{(n)} < +\infty \mid T_i^{(1)} < +\infty\} = \mathbb{P}_i \{T_i^{(n-1)} < +\infty\}.$$

Ragionando per induzione, per ogni intero positivo n , si ha

$$\mathbb{P} \{N_i \geq n\} = \dots = \mathbb{P} \{T_i^{(1)} < +\infty\} = 1.$$

Si ha quindi

$$f_{ii}^{**} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \{N_i \geq n\} = 1.$$

Ciò dimostra il teorema nel caso in cui lo stato i sia ricorrente. ■

5 Assorbimento in classi ricorrenti

Abbiamo dimostrato che gli stati transienti sono visitati solo un numero finito di volte e quindi, partendo da uno stato transiente, la catena di Markov ha due possibilità

- 1) continua a muoversi tra stati transienti (sempre che ce ne siano infiniti),
- 2) entra in una classe \mathcal{C} di stati ricorrenti da cui non uscirà più.

Nel caso in cui l'insieme degli stati I sia finito il primo caso (vedi Proposizione 5.1 qui sotto) non può sussistere e quindi, quando vi sono più classi ricorrenti, sorge il problema di calcolare la *probabilità di assorbimento* in ciascuna di esse. Questo problema è abbastanza naturale nelle applicazioni. Nella catena di Markov che descrive la *Rovina del giocatore* (Esempio 1.1), per esempio, le probabilità di assorbimento nelle classi $\{0\}$ ed $\{N\}$ rappresentano le probabilità di rovina del giocatore e del banco.

In questo paragrafo, *supponendo sempre che I sia finito*, vedremo come si possono calcolare semplicemente queste probabilità.

Denotiamo con \mathcal{T} l'insieme degli stati transienti e, per ogni $i \in \mathcal{T}$, denotiamo con $u_i^{(n)}$ la probabilità, partendo da i di continuare passare ad altri stati transienti almeno fino al tempo n e con u_i la probabilità di fare questo per sempre cioè

$$\begin{aligned} u_i^{(n)} &= \mathbb{P}_i \{X_n \in \mathcal{T}, \dots, X_1 \in \mathcal{T}\} \\ u_i &= \mathbb{P}_i \left(\bigcap_{n \geq 1} \{X_n \in \mathcal{T}\} \right). \end{aligned}$$

Proposizione 5.1 *Per ogni stato transiente i la successione $(u_i^{(n)})_{n \geq 0}$ è decrescente; poniamo*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_i^{(n)} = u_i.$$

La famiglia di numeri reali $(u_i)_{i \in \mathcal{T}}$ è la più grande soluzione a valori in $[0, 1]$ delle equazioni

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} u_j. \quad (12)$$

In particolare, se l'insieme \mathcal{T} è finito, l'unica soluzione del sistema di equazioni (12) a valori in $[-1, 1]$ quella nulla.

DIMOSTRAZIONE. La successione è ovviamente decrescente poiché le $(u_i^{(n)})_{n \geq 0}$ rappresentano le probabilità di una successione decrescente di eventi. Inoltre, per ogni $n \geq 1$, si ha

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} u_j^{(n)}.$$

La (12) segue passando al limite.



Verifichiamo ora che $(u_i)_{i \in \mathcal{T}}$ è la più grande soluzione di (12) a valori in $[0, 1]$. Detta $(v_i)_{i \in \mathcal{T}}$ una soluzione a valori in $[0, 1]$ di (12), risulta

$$u_i^{(1)} = \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \geq \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} v_j = v_i.$$

Supponendo, per induzione, $u_i^{(n)} \geq v_i$ per un certo n e per ogni $i \in \mathcal{T}$, abbiamo

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} u_j^{(n)} \geq \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} v_j = v_i.$$

Ne segue che $u_i^{(n)} \geq v_i$ per ogni n e per ogni $i \in \mathcal{T}$, dunque, facendo tendere n all'infinito, $u_i \geq v_i$ per ogni $i \in \mathcal{T}$.

Se l'insieme \mathcal{T} è finito, allora, iterando la (12) n volte, abbiamo

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{j_1 \in \mathcal{T}} p_{ij_1} u_{j_1} \\ &= \sum_{j_1, j_2 \in \mathcal{T}} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} u_{j_2} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_n \in \mathcal{T}} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} u_{j_n}. \end{aligned}$$

Pertanto troviamo le diseguaglianze

$$\begin{aligned} |u_i| &\leq \sum_{j_n \in \mathcal{T}} \left(\sum_{j_1, \dots, j_{n-1} \in I} p_{ij_1} p_{j_1 j_2} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \right) |u_{j_n}| \\ &\leq \max_{j \in I} \{|u_j|\} \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

Grazie al Corollario 2.13, la conclusione segue facendo tendere n all'infinito. ■

ESEMPIO 5.1 Consideriamo il problema della rovina del giocatore contro un avversario (banco) con capitale infinito, praticamente il modello dell'esempio 1.1 con $N = +\infty$. Vogliamo calcolare la probabilità che il giocatore non sia mai rovinato, ovvero che la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ e matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

partendo da uno stato iniziale $i > 0$ rimanga per sempre negli stati transienti $\{1, 2, \dots\}$. Supponiamo $p > q$.

Dobbiamo trovare la più grande soluzione a valori $[0, 1]$ del sistema di equazioni

$$\begin{aligned} u_1 &= pu_2 \\ u_i &= pu_{i+1} + qu_{i-1} \quad \text{per } i > 1. \end{aligned}$$

La seconda equazione ci dà $u_i = c_1 + c_2(q/p)^i$ con c_1, c_2 costanti reali e, dalla prima, troviamo subito $c_1 + c_2 = 0$, perciò

$$u_i = c \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right)^i \right)$$

con c costante reale. Dato che $p > q$, risulta $0 \leq u_i \geq 1$ se e solo se $0 \leq c \leq 1$ e quindi la più grande soluzione a valori in $[0, 1]$ delle equazioni (12) si ottiene scegliendo $c = 1$.

Procedendo in modo simile, si potrebbe verificare che, nel caso $p \leq q$, risulta $u_i = 0$ per ogni i .

Calcoliamo ora la probabilità h_i che, partendo da uno stato transiente i , la catena di Markov entri in una classe ricorrente \mathcal{C} e quindi vi rimanga definitivamente. Questa probabilità è detta *probabilità di assorbimento* e vale la formula

$$h_i = \mathbb{P}_i (\cup_{1 \leq k < \infty} \{X_k \in \mathcal{C}\}).$$

Detta $h_i^{(n)}$ la probabilità di assorbimento entro il tempo n

$$h_i^{(n)} = \mathbb{P}_i (\cup_{1 \leq k \leq n} \{X_k \in \mathcal{C}\}),$$

risulta evidentemente

$$h_i^{(n+1)} - h_i^{(n)} = \mathbb{P}_i \{X_{n+1} \in \mathcal{C}, X_n \notin \mathcal{C}, \dots, X_1 \notin \mathcal{C}\} \geq 0.$$

Dunque la successione $(h_i^{(n)})_{n \geq 1}$ è non decrescente e risulta

$$h_i = \sup_{n \geq 1} h_i^{(n)}.$$

Possiamo dimostrare il seguente risultato

Teorema 5.2 *Le probabilità $(h_i)_{i \in \mathcal{T}}$ sono la più piccola soluzione a valori in $[0, 1]$ delle equazioni*

$$h_i = \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} h_j, \quad i \in \mathcal{T}. \quad (13)$$

Se l'insieme degli stati transienti \mathcal{T} è finito, allora le probabilità $(h_i)_{i \in \mathcal{T}}$ sono l'unica soluzione a valori in $[0, 1]$ delle equazioni (13).

DIMOSTRAZIONE. Si ha evidentemente

$$h_i^{(1)} = \mathbb{P}_i\{X_1 \in \mathcal{C}\} = \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}$$

e, per ogni $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} h_i^{(n+1)} &= \mathbb{P}_i(\cup_{1 \leq k \leq n+1} \{X_k \in \mathcal{C}\}) \\ &= \sum_j \mathbb{P}_i((\cup_{2 \leq k \leq n+1} \{X_k \in \mathcal{C}\}) \cap \{X_1 = j\}) \\ &= \sum_{j \in C} \mathbb{P}_i\{X_1 = j\} + \sum_{j \in \mathcal{T}} \mathbb{P}_i((\cup_{2 \leq k \leq n+1} \{X_k \in \mathcal{C}\}) \cap \{X_1 = j\}) \\ &= \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \mathbb{P}_j(\cup_{1 \leq k \leq n} \{X_k \in \mathcal{C}\}) \\ &= \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} h_j^{(n)}. \end{aligned}$$

Facendo tendere n all'infinito si ottiene la (13).

Verifichiamo ora che questa è la più piccola soluzione di (13) a valori in $[0, 1]$. Se $(v_i)_{i \in \mathcal{T}}$ è un'altra soluzione di questo tipo allora

$$v_i = \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} v_j \geq \sum_{j \in C} p_{ij} = h_i^{(1)}.$$

Supponendo, per induzione, che $v_i \geq h_i^{(n)}$ per un certo n , allora

$$v_i = \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} v_j \geq \sum_{j \in C} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} h_j^{(n)} = h_j^{(n+1)}.$$

Facendo tendere n all'infinito, troviamo $v_i \geq h_i$ per ogni $i \in \mathcal{T}$.

Se l'insieme degli stati I è finito e $(h_i)_{i \in I}, (h'_i)_{i \in I}$ sono due soluzioni di (13), allora la differenza $(u_i)_{i \in I}$ $u_i = h_i - h'_i$ è una soluzione a valori $[-1, 1]$ di (12) ed essendo I finito è nulla. La conclusione è ora evidente. ■

ESEMPIO 5.2 Riprendiamo l'Esempio 1.1. Sia $N \geq 2$ un numero naturale fissato e p, q due numeri reali strettamente positivi tali che $p + q = 1$. Consideriamo una catena di Markov con insieme degli stati $\{0, 1, \dots, N\}$ con matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La catena di Markov in questione ha evidentemente due classi ricorrenti $\{0\}$ e $\{N\}$ e tutti gli stati $1, 2, \dots, N-1$ sono transienti. Il calcolo della probabilità suddetta equivale quindi al calcolo delle probabilità di assorbimento h_i degli stati transienti $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ nelle classi ricorrenti $\{0\}$ e $\{N\}$. Calcoliamo, per esempio, le probabilità di assorbimento $(h_i)_{1 \leq i \leq N-1}$ in $\{0\}$. Poichè l'insieme degli stati è finito le equazioni (13), che in questo caso si scrivono

$$\begin{aligned} h_1 &= q + ph_2 \\ h_i &= qh_{i-1} + ph_{i+1} \quad \text{se } 2 \leq i \leq N-2 \\ h_{N-1} &= qh_{N-2} \end{aligned}$$

Ponendo quindi, come è naturale $h_0 = 1$ e $h_N = 0$ si trova

$$h_i = qh_{i-1} + ph_{i+1}$$

per ogni $i \in \{1, \dots, N-1\}$. Risolvendo questo sistema di equazioni a differenze finite, con $h_0 = 1$ e $h_N = 0$ come "condizioni al bordo", si trova

$$h_i = \frac{(q/p)^i - (q/p)^N}{1 - (q/p)^N}$$

se $p \neq q$ e

$$h_i = 1 - \frac{i}{N}$$

se $p = q = 1/2$. Ciò risolve il problema posto.

Osserviamo che, per $N \rightarrow +\infty$, le v_i convergono verso

$$1 \quad \text{se } q \geq p, \quad (q/p)^i \quad \text{se } q < p.$$

Questo indica che, per N molto grande, il giocatore con capitale iniziale i ha probabilità vicina a $(q/p)^i$ di diventare ricchissimo (sbancando l'avversario).

Una procedura a quella indicata per il calcolo delle probabilità di assorbimento permette di dedurre un metodo per il calcolo dei tempi medi di assorbimento in una classe ricorrente in un caso particolare notevole.

Teorema 5.3 *Supponiamo l'insieme degli stati I sia finito ed esista un'unica classe ricorrente C . I tempi medi di assorbimento $w_i = \mathbb{E}_i[V]$ di uno stato transiente i nella classe C sono finiti e coincidono con l'unica soluzione limitata $(w_i)_{i \in \mathcal{T}}$ delle equazioni*

$$w_i = 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} w_j. \tag{14}$$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con l'osservare che, con le notazioni utilizzate più sopra, per ogni intero $n \geq 1$, si ha

$$\mathbb{P}_i\{V > n\} = \mathbb{P}_i\{X_n \in \mathcal{T}, \dots, X_1 \in \mathcal{T}\} = u_i^{(n)}.$$

Inoltre, dalla relazione trovata precedentemente,

$$u_i^{(n+1)} = \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} u_j^{(n)}$$

si ottengono facilmente per iterazione le diseguaglianze

$$u_i^{(n+m)} \leq \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij}^{(m)} u_j^{(n)}$$

per ogni intero $m \geq 1$. Si hanno inoltre le diseguaglianze

$$u_i^{(n+m)} \leq \max_{j \in \mathcal{T}} \{u_j^{(n)}\} \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij}^{(m)} \quad (15)$$

Grazie al Corollario 2.13, per ogni $j \in \mathcal{T}$, la successione $(p_{ij}^{(m)})_{m \geq 1}$ converge verso 0 per m tendente a $+\infty$. Possiamo quindi scegliere un numero naturale m abbastanza grande in modo tale che, per ogni $i \in \mathcal{T}$, valga la diseguagliaza

$$\sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij}^{(m)} < 1$$

ovvero, poiché l'insieme degli stati I è finito, in modo tale che il numero reale M

$$M = \max_{i \in \mathcal{T}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij}^{(m)} \right\}$$

risulti strettamente minore di 1. Dalla (15) si ha pertanto la diseguagliaza

$$u_i^{(n)} \leq M^{[n/m]}$$

dalla quale segue che

$$\mathbb{E}_i[V] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_i\{V > n\} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} M^{[n/m]} \leq (M(1 - M^{1/m}))^{-1} < +\infty.$$

Ciò dimostra la prima affermazione. Per completare la dimostrazione basterà far vedere che i tempi medi di assorbimento $(w_i)_{i \in \mathcal{T}}$ soddisfano le equazioni (14) infatti la soluzione di tali equazioni è unica per il Corollario (5.1). Questo segue dalle identità seguenti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i[V] &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_i\{V = n\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_i\{V = n, X_1 \in \mathcal{T}\} + \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_i\{V = n, X_1 \in \mathcal{C}\} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \mathbb{P}\{X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in \mathcal{T}, \dots | X_1 = j\} + \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \mathbb{P}_j \{X_{n-1} \in \mathcal{C}, X_{n-2} \in \mathcal{T}, \dots\} + \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} \\
&= \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \sum_{n=2}^{\infty} n \mathbb{P}_j \{V = n - 1\} + \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}.
\end{aligned}$$

Con facili calcoli si ha infine

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_i[V] &= \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \mathbb{P}_j \{V = n\} + \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} \\
&= \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}_j \{V = n\} + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_j \{V = n\} \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} \\
&= \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \mathbb{E}_j[V] + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} + \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} \\
&= 1 + \sum_{j \in \mathcal{T}} p_{ij} \mathbb{E}_j[V].
\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione. ■

ESEMPIO 5.3 *Il collezionista di figurine.* Un tale acquista ogni giorno una bustina contenente una figurina con lo scopo di completare un album con N figurine distinte. Evidentemente, vedendo la figurina contenuta in ogni busta solo dopo l'acquisto, può accadere che trovi più volte la stessa figurina. È spontaneo chiedersi quanti giorni occorreranno, in media, perché il tale completa l'album. L'evoluzione della collezione si può descrivere con una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $\{0, 1, \dots, N\}$ convenendo che X_n rappresenti il numero di figurine al giorno n e $X_0 = 0$. La matrice di transizione è evidentemente la matrice

$$\left(\begin{array}{ccccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{N} & \frac{N-1}{N} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{2}{N} & \frac{N-2}{N} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{N-2}{N} & \frac{2}{N} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{N-1}{N} & \frac{1}{N} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1
\end{array} \right)$$

È chiaro che gli stati $0, \dots, N-1$ sono transienti e lo stato N è ricorrente. Il tempo medio per il completamento dell'album è rappresentato dal tempo medio di assorbimento nella classe ricorrente $\{N\}$. Grazie ai risultati precedenti, si trova

$$\mathbb{E}_0[T_N] = \sum_{k=1}^N \frac{N}{N-k+1} \approx N \log(N+1).$$

Nel caso in cui vi siano *più classi ricorrenti* è chiaro che i tempi di assorbimento in una di esse potrebbero essere uguali a $+\infty$ con probabilità strettamente

positiva. Infatti, se la catena di Markov, partendo dallo stato transiente i , entra in una classe ricorrente \mathcal{C} non potrà più uscire ed entrare in un'altra classe ricorrente \mathcal{C}_2 . Nel caso in cui si verifichi questo evento, e che abbia probabilità strettamente positiva, il tempo di assorbimento in \mathcal{C}_2 sarà quindi uguale a $+\infty$ ed evidentemente anche la sua speranza. Il tempo medio di assorbimento sarà quindi uguale a $+\infty$. Il Teorema 5.3 non si può applicare direttamente.

Una piccola variante permette però di calcolare il tempo medio di assorbimento per la probabilità condizionata all'evento costituito dall'entrata della catena di Markov nella classe ricorrente della quale si vuole calcolare il tempo medio (rispetto alla probabilità condizionata!) di assorbimento.

In questo caso basterà risolvere un sistema di equazioni simile a (14) come mostra la seguente applicazione alla rovina del giocatore in cui $\mathcal{C} = \{0\}$, $\mathcal{T} = \{1, \dots, N-1\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{N\}$.

ESEMPIO 5.4 Riprendiamo l'Esempio 1.1 *Rovina del giocatore*. Vogliamo calcolare il tempo medio della durata del gioco nel caso in cui il giocatore sia rovinato ovvero

$$w_i = \mathbb{E}_i [T_0 \mid T_0 < \infty].$$

Posto $w_0 = 0$, le w_i soddisfano le equazioni

$$\begin{aligned} w_i &= 1 + qw_{i-1} + pw_{i+1}, && \text{per } i = 1, \dots, N-2, \\ w_{N-1} &= 1 + w_{N-2}, && \text{per } i = N-1. \end{aligned} \quad (16)$$

La seconda equazione è modificata, rispetto alla corrispondente di (14), per tenere conto del fatto che stiamo calcolando la speranza rispetto alla probabilità condizionata $\mathbb{P}_i \{ \cdot \mid T_0 < \infty \}$ per la quale si ha $\mathbb{P}\{X_n = N\} = 0$ e quindi, arrivando in $N-1$ la catena di Markov deve ritornare in $N-2$.

Consideriamo dapprima il caso $p = q = 1/2$. Le soluzioni delle equazioni

$$w_i = 1 + \frac{1}{2}w_{i-1} + \frac{1}{2}w_{i+1}$$

hanno la forma (soluzioni dell'equazione omogenea associata più una soluzione particolare (u_i) dell'equazione non omogenea, linearmente indipendente dalle soluzioni precedenti dell'equazione omogenea)

$$w_i = c_1 + c_2 i + u_i.$$

Si verifica facilmente che una soluzione particolare è data da $u_i = -i^2$. Con questa scelta le w_i qui sopra soddisfano (16) se e solo se $w_0 = 0$ e $w_{N-1} = 1 + w_{N-2}$ ovvero se e solo se $c_1 = 0$ e $c_2 = 2(N-1)$. I tempi medi di assorbimento sono quindi dati da

$$w_i = 2(N-1)i - i^2, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Consideriamo poi il caso $p \neq q$. Si vede subito che una soluzione particolare della prima equazione (16) è data da $u_i = i/(q-p)$ e quindi tutte le soluzioni sono date da

$$w_i = c_1 + c_2 \left(\frac{q}{p}\right)^i + \frac{i}{q-p}.$$

Le w_i qui sopra soddisfano (16) se e solo se $w_0 = 0$ e $w_{N-1} = 1 + w_{N-2}$ ovvero se e solo se

$$c_1 = -c_2 \quad c_2 = -\frac{2}{(1-p/q)^2} \left(\frac{q}{p}\right)^{-N}.$$

I tempi medi di assorbimento sono quindi dati da

$$w_i = \frac{i}{q-p} + \frac{2}{(1-p/q)^2} \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{-N} - \left(\frac{q}{p}\right)^{i-N} \right), \quad i = 1, \dots, N-1.$$

ESEMPIO 5.5 I metodi studiati per determinare le probabilità di assorbimento nelle classi ricorrenti, possono essere utilizzati per studiare il comportamento limite della catena di Markov, quando non sono soddisfatte le ipotesi del Teorema 3.7. Consideriamo la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sullo spazio degli stati $\{0, 1, 2, 3\}$. Si può verificare facilmente che $\{0, 1\}$ e $\{3\}$ sono classi ricorrenti, mentre $\{2\}$ è transiente. Partendo dallo stato 2, il processo verrà assorbito in una delle due classi e le probabilità di assorbimento nelle singole classi si ottengono risolvendo un sistema. In particolare, avremo che la probabilità di assorbimento nella classe $\{0, 1\}$, si ottiene risolvendo

$$v = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}v,$$

cioè $v = \frac{2}{3}$. Quindi, la probabilità di assorbimento nella classe $\{3\}$ sarà pari a $1 - v = 1/3$. Se restringiamo l'attenzione alla classe ricorrente $\{0, 1\}$ con matrice di transizione ottenuta da P , cancellando le ultime due righe e colonne, otteniamo una nuova matrice di transizione

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

irriducibile e aperiodica, per cui è possibile calcolare la legge limite, che risulta $(1/3, 2/3)$. Siccome possiamo scrivere

$$p_{2,0}^{(n)} = \mathbb{P}\{X_n = 0, X_m \in \{0, 1\}, \text{ per qualche } m \leq n | X_0 = 2\},$$

passando al limite si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,0}^{(n)} = \frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 2/9 & 4/9 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La stessa tecnica non può essere applicata se le classi ricorrenti non sono aperiodiche. Infatti, consideriamo il seguente esempio. Data la matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con spazio degli stati $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Ci sono due classi ricorrenti $C_1 = \{0, 1\}$ e $C_2 = \{4, 5\}$. La legge limite per la classe C_1 è $(2/5, 3/5)$. La classe C_2 è periodica, quindi p_{ij} non converge per $i, j \in C_2$. Comunque, il tempo medio ossia $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} p_{ij}^m = 1/2$. Allora, calcolate le probabilità di assorbimento nelle classi C_1 e C_2 partendo dalla classe transiente $\{2, 3\}$, si può ottenere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} P^m = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3/5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (8/17)(2/5) & (8/17)(3/5) & 0 & 0 & (9/17)(1/2) & (9/17)(1/2) \\ (7/17)(2/5) & (7/17)(3/5) & 0 & 0 & (10/17)(1/2) & (10/17)(1/2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

ESEMPIO 5.6 Consideriamo una catena di Markov associata ad una matrice di transizione della forma

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

dove Q rappresenta le relazioni fra gli stati transienti e R la transizione da stati transienti a stati ricorrenti. Indichiamo con $W_{ij}^{(n)}$ il numero di volte che si transita per lo stato j nei primi n passi. Se j è uno stato transiente ha senso chiedersi qual è il numero medio di periodi che si passeranno in j prima dell'assorbimento in una classe ricorrente partendo da uno stato transiente i , ovvero $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_i[W_j^{(n)}]$ che indichiamo con W^{ij} . Osserviamo che vale la seguente formula ricorsiva

$$P^n = \begin{pmatrix} Q^n & (I + Q^2 + \cdots + Q^{n-1})R \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

per ogni $n \geq 1$. Abbiamo che

$$\mathbb{E}_i[W_j^{(n)}] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_i[1_{\{X_n=j\}}]$$

$$= \sum_{i=1}^n p_{ij}^{(n)} \\ = \sum_{i=1}^n q_{ij}^{(n)}.$$

Si ottiene quindi $\mathbb{E}_i[W_j^{(n)}] = \delta_{ij} + \sum_{h \in E} Q_{ih} \mathbb{E}_h[W_j^{(n-1)}]$. Passando al limite per n che tende a ∞ si ha la seguente relazione matriciale $W = I + QW$, da cui $W = (I - Q)^{-1}$.

ESERCIZI

Es 5.1 Data una catena di Markov con insieme degli stati $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Determinare quali sono gli stati ricorrenti e gli stati transienti. Calcolare la probabilità di assorbimento degli stati transienti negli stati ricorrenti. Calcolare la probabilità, partendo dallo stato 1, di arrivare nello stato 4 senza passare dallo stato 3.

Es 5.2 Un pezzo semilavorato entra in una linea produttiva da cui può uscire difettoso con probabilità 0.2 oppure recuperabile con probabilità 0.3 oppure buono con probabilità 0.5. I pezzi difettosi sono scartati, i pezzi buoni vengono portati in magazzino come pezzi finiti; i pezzi recuperabili rientrano nella linea produttiva per essere nuovamente lavorati. Descrivere il processo di lavorazione mediante una catena di Markov. Sapendo che un pezzo è recuperabile, calcolare la probabilità che dopo due processi di lavorazione sia classificabile come buono. Calcolare la probabilità che alla fine del ciclo produttivo un pezzo recuperabile sia buono. Calcolare il tempo medio di un ciclo produttivo di un pezzo recuperabile.

Es 5.3 un giocatore muove la pedina tra i vertici (numerati da 1 a 4) e il centro (0) di un quadrato con la seguente "strategia". Ad ogni passo lancia un dado a 4 facce equilibrato: se la pedina si trova in 0, si muoverà nel vertice con numero pari al risultato del dado. Se la pedina si trova in un diverso vertice, questa si sposterà in 0 se il risultato del lancio è pari, altrimenti avanza di una posizione in senso antiorario sul perimetro esterno del circuito. Se la pedina parte, al tempo iniziale, dal vertice 1, qual è il tempo medio necessario perché la pedina visiti il vertice 0 per la prima volta? Qual è la probabilità che la pedina visiti il vertice 0 per la prima volta senza passare mai dal vertice 4?

Es 5.4 Una moneta equilibrata è lanciata ripetutamente fino a che non si ottengono come risultati due "teste" consecutive. Indicare con X_n il numero di "teste" consecutive ottenute dopo l' n -esimo lancio. Trovare il numero medio di lanci richiesti.

6 Criteri di transienza o ricorrenza

La caratterizzazione degli stati ricorrenti del Teorema 2.11 è spesso difficilmente utilizzabile nelle applicazioni. In questo paragrafo dimostreremo due criteri per classificare gli stati di una catena di Markov irriducibile.

Teorema 6.1 *Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov irriducibile con insieme degli stati I . Condizione necessaria e sufficiente affinché ogni stato sia transiente è che esista una famiglia $(y_j)_{j \in I}$ limitata e non costante che soddisfi le equazioni*

$$\sum_{k \in I} p_{jk} y_k = y_j, \quad (17)$$

per tutti gli stati $j \in I$ tranne al più uno.

DIMOSTRAZIONE. Denotiamo con z l'unico stato che eventualmente non soddisfa la (17). Consideriamo la catena di Markov $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$ con matrice di transizione

$$\tilde{p}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} & \text{se } i \neq z, \\ \delta_{ij} & \text{se } i = z, \end{cases}$$

ottenuta dalla $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$ trasformando lo stato z in uno stato assorbente (tutti gli altri stati $j \neq z$ restano transienti).

Cominciamo col far vedere che la condizione è necessaria. La catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ è transiente; dunque esiste almeno uno stato $i \neq z$ per il quale si abbia

$$\tilde{v}_i = \mathbb{P}_i\{T_z < +\infty\} < 1.$$

Infatti, se così non fosse, si avrebbe

$$\mathbb{P}_z\{T_z < +\infty\} = p_{zz} + \sum_{k \neq z} p_{zk} \mathbb{P}_k\{T_z < +\infty\} = p_{zz} + \sum_{k \neq z} p_{zk} = 1$$

e questo contraddirebbe il fatto che z è transiente per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$.

Consideriamo allora le probabilità di assorbimento in z $(\tilde{v}_j)_{j \geq 0}$ relative alla catena di Markov $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$ e poniamo $\tilde{v}_0 = 1$. Perciò, grazie al Teorema (5.2), è verificata l'equazione

$$\tilde{v}_j = p_{jz} + \sum_{k \neq z} p_{jk} \tilde{v}_k$$

e quindi, ponendo $\tilde{v}_z = 1$, abbiamo

$$\sum_{k \in I} \tilde{p}_{jk} \tilde{v}_k = \tilde{v}_j$$

per ogni $j \in I$ ovvero la successione limitata e non costante $(\tilde{v}_k)_{k \geq 0}$ soddisfa le equazioni (17).

↑
Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Una soluzione limitata $(y_k)_{k \geq 0}$ delle equazioni (17) soddisfa evidentemente le equazioni

$$\sum_{k \in I}^{\infty} \tilde{p}_{jk} y_k = y_j$$

per ogni stato j . Iterando n volte queste relazioni si trovano le identità

$$\sum_{k \in I}^{\infty} \tilde{p}_{jk}^{(n)} y_k = y_j$$

per ogni stato j e $n \geq 1$. Se la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ fosse ricorrente, si avrebbe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{jz}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_j\{\tilde{X}_n = z\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_j\{T_z \leq n\} = 1$$

da cui, per ogni $j \neq z$,

$$\begin{aligned} |y_j - y_z| &= \lim_{n \rightarrow \infty} |y_j - \tilde{p}_{jz}^{(n)} y_z| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k \neq z} \tilde{p}_{jk}^{(n)} y_k \right| \\ &\leq \sup_{k \neq z} |y_k| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \neq z} \tilde{p}_{jk}^{(n)} \\ &= \sup_{k \neq z} |y_k| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \tilde{p}_{jz}^{(n)}) = 0. \end{aligned}$$

Ciò implica che la famiglia $(y_k)_{k \in I}$ è costante. ■

Teorema 6.2 *Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov irriducibile con insieme degli stati \mathbb{N} . Condizione sufficiente affinché ogni stato sia ricorrente è che esista una successione $(y_j)_{j \geq 0}$ tale che*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} y_k \leq y_j, \quad \text{per ogni } j > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = +\infty. \quad (18)$$

DIMOSTRAZIONE. Utilizzeremo le stesse notazioni della dimostrazione del Teorema 6.1. È chiaro che, la diseguaglianza

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_{jk} y_k \leq y_j \quad (19)$$

vale per ogni $j \geq 0$. Inoltre la successione $(y_j)_{j \geq 0}$ è limitata inferiormente e perciò, considerando eventualmente una successione della forma $(y_j + c)_{j \geq 0}$

con $c > 0$, possiamo supporre che la $(y_j)_{j \geq 0}$ sia a valori strettamente positivi.
Iterando n volte l'equazione (20) otteniamo le diseguaglianze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_{jk}^{(n)} y_k \leq y_j$$

per ogni $j \geq 0$ ed ogni $n \geq 1$. Nella catena di Markov $(\tilde{X}_n)_{n \geq 0}$, lo stato 0 è ricorrente e tutti gli altri stati sono transienti poiché

$$\mathbb{P}_j \left(\cap_{n=1}^{\infty} \{\tilde{X}_n \neq j\} \right) \geq \mathbb{P}_j (\cup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\}) > 0$$

per ogni $j > 0$ essendo la catena di Markov irriducibile.

Fissato $\varepsilon > 0$ sia $M(\varepsilon)$ un intero tale che $y_j > \varepsilon^{-1}$ per ogni $j > M(\varepsilon)$. Per ogni stato $i \geq 0$ possiamo scrivere le diseguaglianze

$$\begin{aligned} \sum_{j>0} \tilde{p}_{ij}^{(n)} &= \sum_{j=1}^{M(\varepsilon)} \tilde{p}_{ij}^{(n)} + \sum_{j>M(\varepsilon)} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \\ &\leq \sum_{j=1}^{M(\varepsilon)} \tilde{p}_{ij}^{(n)} + \varepsilon \sum_{j>M(\varepsilon)} \tilde{p}_{ij}^{(n)} y_j \\ &\leq \sum_{j=1}^{M(\varepsilon)} \tilde{p}_{ij}^{(n)} + \varepsilon y_i. \end{aligned}$$

Quindi, passando al limite,

$$0 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j>0} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \leq \varepsilon y_i$$

ovvero, data l'arbitrarietà di ε , la successione $(\sum_{j>0} \tilde{p}_{ij}^{(n)})_{n \geq 0}$ converge verso 0 per ogni $j \neq 0$. Ne segue che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{i0}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sum_{j>0} \tilde{p}_{ij}^{(n)} \right) = 1.$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i (\cup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i (\cup_{k=1}^n \{X_k = 0\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_i \{\tilde{X}_n = 0\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_{i0}^{(n)} = 1 \end{aligned}$$

per ogni $i > 0$, troviamo l'eguaglianza

$$\mathbb{P}_0 (\cup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\}) = p_{00} + \sum_{j>0} p_{0j} \mathbb{P}_j (\cup_{k=1}^{\infty} \{X_k = 0\})$$

$$= p_{00} + \sum_{j>0} p_{0j} = 1$$

che implica che 0 è ricorrente per la catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$. Ciò conclude la dimostrazione. ■

ESEMPIO 6.1 Consideriamo la catena di Markov dell'Esempio 1.6. Nell'Esempio 2.4 abbiamo verificato che, sotto le condizioni

$$0 < a_0 < 1, \quad 0 < a_0 + a_1 < 1$$

la catena di Markov è irriducibile. Supponiamo quindi che queste condizioni siano verificate e denotiamo

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k$$

il numero medio di clienti che arrivano in una unità di tempo. Utilizzando i Teoremi 5.1 e 5.2 possiamo dimostrare che la catena di Markov è:

- a) transiente se $\lambda > 1$,
- b) ricorrente se $0 < \lambda \leq 1$.

Per verificare l'affermazione a) cerchiamo una soluzione limitata e non costante delle equazioni (5.1) della forma $y_j = \xi^j$ con $\xi \in]0, 1[$. La successione $(\xi^j)_{j \geq 0}$ soddisfa le (5.1) se e solo se

$$\sum_{k=j-1}^{\infty} a_{k-j+1} \xi^k = \xi^j, \quad \text{per ogni } j > 0$$

ovvero

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k = \xi.$$

La funzione

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k.$$

soddisfa le condizioni $f(0) = a_0 > 0$, $f(1) = 1$ e, grazie al Lemma di Abel,

$$\lim_{\eta \rightarrow 1^-} f'(\eta) = \lambda.$$

Pertanto, se $\lambda > 1$, esiste un numero reale $\xi_0 \in]0, 1[$ tale che $f(\xi_0) = \xi_0$. La successione $(\xi_0^j)_{j \geq 0}$ è quindi una soluzione limitata non costante delle equazioni 6.1.

Per verificare l'affermazione b) basta verificare che la successione $(j)_{j \geq 0}$ soddisfa le 18. Per ogni $j > 0$ si ha infatti

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} y_k = \sum_{k=j-1}^{\infty} a_{k-j+1} k$$



$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(k + j - 1) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} ka_k + (j - 1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k \\
 &= j + \lambda - 1 \leq j.
 \end{aligned}$$

Si può dimostrare inoltre (ma è piuttosto laborioso) che gli stati sono ricorrenti positivi se $m < 1$ e ricorrenti nulli se $m = 1$.

È più semplice verificare che esiste una legge invariante, supponendo che il numero di arrivi per unità di tempo abbia varianza finita (oltre che $\sum_{k>0} ka_k < 1$ come prima), ovvero

$$\sum_k k^2 a_k < \infty$$

applicando la seguente condizione sufficiente alla successione $(y_k)_{k \geq 0}$, $y_k = k^2$.

Teorema 6.3 *Sia $(X_n)_{n \geq 0}$ una catena di Markov irriducibile con insieme degli stati \mathbb{N} . Condizione sufficiente affinché ogni ammetta un'unica legge invariante è che esista una successione $(y_j)_{j \geq 0}$ tale che*

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jk} y_k = y_j - x_j, \text{ per ogni } j > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty. \quad (20)$$

7 Algoritmo di Metropolis

In questo capitolo studieremo un algoritmo, noto come **algoritmo di Metropolis**, per la ricerca dei punti di minimo assoluto di una funzione

$$V : \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow]0, +\infty[,$$

utilizzando la modellizzazione fornita dalla teoria sulle catene di Markov. Tale algoritmo è particolarmente efficace quando N è molto grande, quindi, l'algoritmo banale consistente nel calcolo e confronto dei valori assunti dalla funzione V è troppo costoso in termini di tempo.

Questo problema ha una classica applicazione nella risoluzione del cosiddetto "problema del commesso viaggiatore". Il commesso deve visitare N città in N giorni, rimanendo un giorno in ognuna e si chiede in che ordine le deve visitare in modo da minimizzare il costo dei viaggi. Se le città in questione sono ad esempio i capoluoghi di provincia italiani, allora $N = 102$ e i possibili itinerari sono $N!$, che è un numero dell'ordine di 10^{162} .

In particolare, l'algoritmo di Metropolis cerca i punti di minimo assoluto seguendo l'evoluzione di una opportuna catena di Markov, in generale non omogenea, con insieme degli stati $I = \{1, 2, \dots, N\}$ che, ad ogni istante, ha probabilità maggiore di entrare negli stati nella quale V ha valore più piccolo e, col passare del tempo la probabilità di entrare negli stati in cui V ha valore grande è sempre più piccola. In questo modo la catena di Markov dovrebbe "convergere" ai punti di minimo assoluto non arrestandosi nei punti di minimo relativo.

Lo stesso algoritmo si può utilizzare per simulare la scelta di uno stato $i \in I$, con un'assegnata distribuzione π . Infatti i "classici" metodi di simulazione sono inutilizzabili se la cardinalità di I è molto grande. Stesse tecniche, si stanno utilizzando nella teoria dei problemi inversi di ricostruzione di immagini per calcolare il valore medio di una variabile aleatoria e quindi per approssimare il calcolo di integrali.

L'idea è la seguente: supponiamo di poter costruire una catena di Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irriducibile e aperiodica, con un'unica legge limite π . Se noi simuliamo l'evoluzione della catena, per il Teorema 3.3, la legge di X_n al tempo n , quando $n \rightarrow +\infty$, convergerà a π , indipendentemente dalla legge iniziale scelta.

Prima di enunciare la proposizione principale di questo capitolo, consideriamo una matrice stocastica simmetrica e irriducibile $Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$ e π una legge di probabilità su I , tale che $\pi_j > 0$, per ogni $j \in I$. Poniamo

$$p_{ij} = \begin{cases} q_{ij} & \text{se } \pi_j \geq \pi_i, \\ q_{ij} \frac{\pi_i}{\pi_j} & \text{se } \pi_j < \pi_i, \\ 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij} & \text{se } i = j. \end{cases} \quad (21)$$

Proposizione 7.1 *Sia π una distribuzione di probabilità non uniforme. La catena di Markov associata alla matrice di transizione P , definita da (21), ha π come unica legge invariante.*

DIMOSTRAZIONE. Si dimostra facilmente che $P = (p_{ij})_{i,j \in I}$ è ancora una matrice stocastica. Inoltre, si ha che

$$\pi_i p_{ij} = \pi_j p_{ji},$$

cioè π è reversibile per P (vedi Esercizio 3.4), quindi π è una legge invariante per P . infatti

$$\begin{aligned} (\pi P)_j &= \sum_i \pi_i p_{ij} \\ &= \sum_i \pi_j p_{ji} = \pi_j. \end{aligned}$$

Si osserva anche che P è una matrice irriducibile. Infatti, se gli stati $i, j \in I$, $i \neq j$, sono tali che $q_{ij} > 0$, allora, per definizione $p_{ij} > 0$. Quindi l'irriducibilità di P segue dalla scelta di Q . Inoltre, se $i \mapsto \pi_i$ non è costante, allora P è aperiodica. Infatti, consideriamo l'insieme $M = \{i \in I : \pi_i = \max_{j \in I} \pi_j\}$. Siccome Q è irriducibile esistono $i_0 \in M$ e $j_0 \in M^c$, tali che $q_{i_0 j_0} > 0$. Inoltre si ha che $\pi_{i_0} > \pi_{j_0}$ per definizione di M . Quindi, sapendo che $p_{ij} \leq q_{ij}$. se $i \neq j$, si ottiene che

$$\begin{aligned} p_{i_0 i_0} &= 1 - \sum_{j \neq i_0} p_{i_0 j} \\ &= 1 - \sum_{j \neq i_0, j_0} p_{i_0 j} - p_{i_0 j_0} \\ &\geq 1 - \sum_{j \neq i_0, j_0} q_{i_0 j} - q_{i_0 j_0} \frac{\pi_{j_0}}{\pi_{i_0}} \\ &\geq q_{i_0 i_0} + q_{i_0 j_0} \left(1 - \frac{\pi_{j_0}}{\pi_{i_0}}\right) \\ &\geq q_{i_0 j_0} \left(1 - \frac{\pi_{j_0}}{\pi_{i_0}}\right) > 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi dimostrato che, se π non è uniforme, è possibile costruire una catena di Markov, associata a una matrice di transizione P (costruita a partire da una qualunque matrice simmetrica e irriducibile Q) irriducibile e aperiodica, tale che ammetta π come legge limite. ■

Il metodo per simulare la catena di Markov associata alla matrice P si chiama **algoritmo di Metropolis**. Vediamo alcune applicazioni.

ESEMPIO 7.1 Supponiamo, ad esempio, di voler simulare la scelta di un numero $i \in E$ a caso con una legge assegnata π . Come abbiamo già osservato, i metodi "classici" di generazione di numeri casuali spesso sono inapplicabili se la cardinalità di E è molto elevata. Possiamo, però costruire una variabile aleatoria con legge approssimativamente uguale a π . A partire da una matrice simmetrica e irriducibile Q , si costruisce P , data da (21) e si simula la catena di

Markov $(X_n)_n$ associata. Questo significa che se $X_n = i$ è sufficiente scegliere a caso j con legge q_{ij} dopo di che se $\pi_j \geq \pi_i$ si pone $X_{n+1} = j$, altrimenti si pone $X_{n+1} = j$ con probabilità $\frac{\pi_j}{\pi_i}$, mentre con probabilità $1 - \frac{\pi_j}{\pi_i}$ si rifiuta la transizione e si lascia $X_{n+1} = i$.

Ritorniamo ora al problema del commesso viaggiatore e, in generale, alla ricerca dei punti di minimo assoluto di una funzione V . Consideriamo, per ogni $\varepsilon > 0$, la legge su $\{0, \dots, N\}$ non uniforme π^ε data da

$$\pi_i^\varepsilon = \frac{e^{-V(i)/\varepsilon}}{Z_\varepsilon},$$

con Z_ε costante di normalizzazione. Scelta una matrice simmetrica e irriducibile Q , si può costruire a partire da (21) una matrice di transizione $P(\varepsilon)$. È chiaro che per calcolare la matrice $P(\varepsilon)$, in generale, dovremmo calcolare il valore della funzione V per tutti gli interi $i \in \{0, \dots, N\}$ e quindi non avremmo aggirato l'ostacolo iniziale se non scegliessimo una matrice Q con molti elementi nulli. Ad esempio possiamo scegliere

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

In questo caso per determinare la probabilità di transizione $(P(\varepsilon))_{ij}$ con i fissato occorre calcolare i valori di V in al più due punti. A questo punto si può procedere con la simulazione della catena di Markov associata alla matrice $P(\varepsilon)$, come nell'esempio precedente.

Osserviamo che se ε è piccolo, la distribuzione π^ε si concentra su quegli stati su cui V è piccola. Si può anzi dimostrare che se i_1, \dots, i_k sono punti di minimo assoluto per V , allora per $\varepsilon \rightarrow 0$, π^ε converge alla distribuzione uniforme su i_1, \dots, i_k .

Si può anche dimostrare che prendendo una successione $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ convergente verso 0 abbastanza lentamente, la catena di Markov non omogenea $(X_n)_{n \geq 0}$ che ha $P(\varepsilon_n)$ come matrice di transizione al tempo n converge in legge verso la legge uniforme sui punti di minimo assoluto di V . La dimostrazione è piuttosto tecnica e sarà omessa. Questa procedura, in cui si fa variare il valore di ε viene chiamata **simulated annealing** ed è un'utile tecnica per certi problemi di ottimizzazione.

8 Convergenza verso la legge invariante

Mostreremo ora come si può ottenere semplicemente una stima della velocità di convergenza verso la legge invariante. Cominciamo introducendo una distanza

tra le leggi di probabilità su I nel modo seguente

$$\|\mu - \nu\| = \sum_{k \in I} |\mu_k - \nu_k|.$$

Si dimostra facilmente che l'insieme delle leggi su I munito di questa distanza è uno spazio metrico completo. Osserviamo inoltre che ogni matrice di transizione P agisce come una contrazione sulle leggi su I . Si ha infatti

$$\begin{aligned} \|\mu P - \nu P\| &= \sum_{j \in I} \left| \sum_{k \in I} (\mu_k - \nu_k) p_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k \in I} \left(|\mu_k - \nu_k| \sum_{j \in I} p_{kj} \right) = \|\mu - \nu\|. \end{aligned}$$

Teorema 8.1 *Se esiste un intero $k \geq 1$ per il quale il numero reale $c \in [0, 1]$*

$$c = \sum_{j \in I} \left(\inf_{i \in I} p_{ij}^{(k)} \right)$$

sia strettamente positivo allora la catena di Markov ha un'unica legge invariante π e, per ogni legge μ su I ed ogni intero $n \geq 1$ vale la diseguaglianza

$$\|\mu P^n - \pi\| \leq (1 - c)^{\lfloor n/k \rfloor} \|\mu - \pi\|. \quad (22)$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la matrice di transizione $Q = (q_{ij})_{i,j \in I}$ così definita

$$q_{ij} = c^{-1} \inf_{l \in I} p_{lj}^{(k)}.$$

Si tratta evidentemente di una matrice stocastica per come è definito il numero reale c . Inoltre si ha $p_{ij}^{(k)} \geq cq_{ij}$ per ogni coppia di stati i, j e

$$\sum_{j \in I} (p_{ij}^{(k)} - cq_{ij}) = \sum_{j \in I} p_{ij}^{(k)} - c \sum_{j \in I} q_{ij} = 1 - c.$$

Dunque la matrice $R = (1 - c)^{-1}(P^k - cQ)$ è una matrice stocastica e la matrice P^k si può scrivere nella forma

$$P^k = cQ + (1 - c)R.$$

Per ogni coppia μ, ν di leggi su I le leggi $\mu Q, \nu Q$ coincidono e si trova subito la diseguaglianza

$$\|\mu P^k - \nu P^k\| = (1 - c) \|\mu R - \nu R\| \leq (1 - c) \|\mu - \nu\|.$$

Ne segue che l'applicazione $\mu \rightarrow \mu P^k$ è una contrazione stretta nello spazio metrico completo delle leggi su I e quindi possiede un unico punto fisso π .



Dalla relazione $\pi = \pi P^k$ si ottiene subito $\pi P = (\pi P)P^k$; dunque anche la legge πP è un punto fisso per $\mu \rightarrow \mu P^k$ e, pertanto, coincide con π . Ciò dimostra che π è l'unica legge invariante. Infine, dimostrare la diseguaglianza 22, basta osservare che, per ogni intero $n \geq 1$, si ha

$$\|\mu P^{nk} - \pi\| \leq (1 - c)^n \|\mu - \pi\|$$

e, posto $d_n = \|\mu P^n - \pi\|$, la successione $(d_n)_{n \geq 0}$ è non crescente. Quindi, se $m = [n/k]$, si ha $mk \leq n$ e $d_n \leq d_{mk} \leq (1 - c)^m \|\mu - \pi\|$. \square



ESEMPIO 8.1 Applicazione al problema del collezionista di figurine dell'Esempio 5.2. Osservare che, per $k = N$, si ha $c = N!/N^N$.

TEMPI DI ASSORBIMENTO E DI SOGGIORNO IN STATI PER UNA CATENA DI MARKOV A TEMPO DISCRETO

Supponiamo che $(X_n)_{n \geq 0}$ sia una catena di Markov a tempo discreto, con spazio degli stati I e matrice di transizione $P = (p_{i,j})_{i,j \in I}$. Sia $A \subset I$ un insieme di stati, e sia

$$T_A = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_{\{X_n \in A\}} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{1}_A(X_n)$$

il *tempo di soggiorno* nell'insieme A . Chiaramente, T_A è una variabile aleatoria, in quanto limite p.p. di una successione di variabili aleatorie.

Denotiamo con \mathcal{T} [rispettivamente, \mathcal{C}] l'insieme di tutti gli stati ricorrenti [risp., transienti] della catena. Osserviamo che $T_{\{i\}} < \infty$ q.c. per ogni stato $i \in \mathcal{T}$, e, di conseguenza, $T_A < \infty$ q.c. ognqualvolta $A \subset \mathcal{T}$ e $|A| < \infty$. In tal caso, ha senso definire la funzione generatrice dei momenti di T_A quando lo stato iniziale è un qualunque $i_0 \in I$:

$$m_{i_0}(z) = \mathbb{E}_{i_0}[z^{T_A}] \quad \forall z \in [0, 1].$$

Notiamo che

$$m_{i_0}(z) = \sum_{k \geq 0} z^k \mathbb{P}_{i_0}(T_A = k),$$

da cui si vede che la legge di T_A si ricava derivando in successione m_{i_0} :

$$\mathbb{P}_{i_0}(T_A = k) = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k m_{i_0}(z)}{dz^k} \right|_{z=0}.$$

I momenti di T_A si ottengono invece dalla relazione

$$\mathbb{E}_{i_0}[T_A^k] = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{d^k m_{i_0}(e^t)}{dt^k}.$$

In particolare, se $k = 1$,

$$\mathbb{E}_{i_0}[T_A] = \lim_{z \rightarrow 1^-} \frac{dm_{i_0}(z)}{dz}.$$

Anche quando $T_A < \infty$ q.c., tuttavia, non è detto che i momenti di T_A siano finiti. In particolare, se definiamo il *tempo medio di soggiorno* in A della catena partendo dallo stato iniziale $i_0 \in I$ come

$$k_{i_0} = \mathbb{E}_{i_0}[T_A],$$

non basta che $A \subset \mathcal{T}$ e $|A| < \infty$ affinché sia $k_{i_0} < \infty$. Se però richiediamo in più che $|I| < \infty$, allora $k_i < \infty$ per ogni $i \in I$. Infatti, sappiamo che in tal caso $\mathbb{E}_i[T_{\mathcal{T}}] < \infty$ (perché $T_{\mathcal{T}}$ non è altro che il tempo di assorbimento nelle classi ricorrenti della catena), e il fatto che $T_A \leq T_{\mathcal{T}}$ implica $k_i < \infty$.

I seguenti due risultati forniscono un modo per ricavare il valor medio e la funzione generatrice del tempo di soggiorno risolvendo un semplice sistema lineare.

Proposition 1. Sia $A \subset \mathcal{T}$, con $|A| < \infty$. La successione delle funzioni generatrici dei momenti $(m_i)_{i \in I}$ della variabile aleatoria T_A è una soluzione del sistema

$$(1) \quad \begin{cases} m_i(z) = 1 & \text{se } i \in \mathcal{C} \\ m_i(z) = z \sum_{j \in I} p_{i,j} m_j(z) & \text{se } i \in A \\ m_i(z) = \sum_{j \in I} p_{i,j} m_j(z) & \text{se } i \in \mathcal{T} \setminus A \end{cases} .$$

Proof. Se $i \in \mathcal{C}$, abbiamo $\mathbb{P}_i(T_A = 0) = 1$, dunque $m_i(z) = \mathbb{E}_i[z^0] = 1$ per ogni $z \in [0, 1]$ (ricordare che $0^0 = 1$). Se invece $i \in \mathcal{T}$, abbiamo

$$T_A = \mathbb{1}_A(X_0) + \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_A(X_n) = \mathbb{1}_A(X_0) + \tilde{T}_A,$$

dove $\tilde{T}_A = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_A(X_n)$ è il tempo di soggiorno in A per il processo $(X_n)_{n \geq 1}$. Per la proprietà di Markov debole

$$\mathbb{E}_i[z^T \mid X_1 = j] = \mathbb{E}_i\left[z^{\mathbb{1}_A(X_0)} z^{\tilde{T}_A} \mid X_1 = j\right] = z^{\mathbb{1}_A(i)} \mathbb{E}_j[z^{\tilde{T}_A}]$$

per ogni $j \in I$. Dalla formula delle probabilità totali

$$\mathbb{E}_i[z^T] = \sum_{j \in I} \mathbb{E}_i[z^T \mid X_1 = j] \mathbb{P}_i(X_1 = j) = z^{\mathbb{1}_A(i)} \sum_{j \in I} \mathbb{E}_j[z^{\tilde{T}_A}] p_{i,j}$$

cioè

$$m_i(z) = \begin{cases} z \sum_{j \in I} p_{i,j} m_j(z) & \text{se } i \in A \\ \sum_{j \in I} p_{i,j} m_j(z) & \text{se } i \in \mathcal{T} \setminus A \end{cases} .$$

□

Proposition 2. Sia $|I| < \infty$ e $A \subset \mathcal{T}$, con $|A| < \infty$. Allora la successione $(k_i)_{i \in I}$ dei tempi medi di soggiorno in A è una soluzione del sistema

$$\begin{cases} k_i = 0 & \text{se } i \in \mathcal{C} \\ k_i = 1 + \sum_{j \in I} p_{i,j} k_j & \text{se } i \in A \\ k_i = \sum_{j \in I} p_{i,j} k_j & \text{se } i \in \mathcal{T} \setminus A \end{cases} .$$

Proof. Sotto le ipotesi della proposizione, per ogni $i \in I$ abbiamo

$$\mathbb{E}_i[T_A] = \frac{dm_i(z)}{dz} \Big|_{z=1} .$$

Perciò, derivando le equazioni (1),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_i[T_A] &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \mathcal{C} \\ \sum_{j \in I} p_{i,j} m_j(1) + \sum_{j \in I} p_{i,j} (\frac{dm_j}{dz})(1) & \text{se } i \in A \\ \sum_{j \in I} p_{i,j} (\frac{dm_j}{dz})(1) & \text{se } i \in \mathcal{T} \setminus A \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } i \in \mathcal{C} \\ 1 + \sum_{j \in I} p_{i,j} \mathbb{E}_j[T_A] & \text{se } i \in A \\ \sum_{j \in I} p_{i,j} \mathbb{E}_j[T_A] & \text{se } i \in \mathcal{T} \setminus A \end{cases} . \end{aligned}$$

□