Fondamenti di Ricerca Operativa
Esercitazione n.1 - modelli

Giuliana Carello
giuliana.carello(at)polimi.it

AA. 2018/2019

ESERCIZIO 1 **Miscelazione di benzine**
Una raffineria deve miscelare 4 tipi di petrolio grezzo per ottenere 3 tipi di benzina: *normale*, *super95*, *super98*. La tabella seguente mostra la massima quantità disponibile per ogni tipo di petrolio grezzo (in barili) e il corrispondente costo (Euro/barile).

Tipo di olio	Barili disponibili	Costo (euro/barile)
1	5000	9
2	2400	7
3	4000	12
4	1500	6

Ogni benzina deve soddisfare delle specifiche tecniche, che vincolano la quantità di ogni petrolio usata per la sua produzione. La tabella seguente mostra questo vincolo di miscelazione (*blending*) insieme al rispettivo prezzo di vendita (Euro/barile).

Tipo di benzina	Richiesta di olio	prezzo (euro/barile)
normale	almeno 20% di tipo 2 al massimo 30% di tipo 3	12
super95	almeno 40% di tipo 3	18
super98	al massimo 50% di tipo 2	10

Formulare in termini di programmazione lineare il problema di determinare come la raffineria deve miscelare i diversi oli in modo tale da massimizzare il profitto (differenza tra guadagno e spesa).

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

Insiemi e parametri:

- R insieme dei tipi di olio grezzo. $R = \{1, 2, 3, 4\}$
- F insieme dei tipi di benzina. $F = \{A, B, C\}$

Variabili:

- $x_j \geq 0$ quantità di benzina del tipo j prodotta.
- $y_{ij} \geq 0$ quantità di olio grezzo del tipo i usato per produrre benzina del tipo j.

Formulazione:

$$\begin{aligned} \max \quad & 12x_A + 18x_B + 10x_C - 9(y_{1A} + y_{1B} + y_{1C}) \\ & - 7(y_{2A} + y_{2B} + y_{2C}) - 12(y_{3A} + y_{3B} + y_{3C}) \\ & - 6(y_{4A} + y_{4B} + y_{4C}) \end{aligned}$$

Differenza tra ricavo e spesa

$$
\begin{array}{lll}
\text{s.t.} & & \\
& y_{1A} + y_{1B} + y_{1C} \leq 5000 & \textit{Vincoli di disponibilità} \\
& y_{2A} + y_{2B} + y_{2C} \leq 2400 & \\
& y_{3A} + y_{3B} + y_{3C} \leq 4000 & \\
& y_{4A} + y_{4B} + y_{4C} \leq 1500 & \\
& x_A = y_{1A} + y_{2A} + y_{3A} & \textit{Vincoli di conservazione} \\
& x_B = y_{1B} + y_{2B} + y_{3B} & \\
& x_C = y_{1C} + y_{2C} + y_{3C} & \\
& y_{2A} \geq 0.2x_A & \textit{Vincoli di miscelazione} \\
& y_{3A} \leq 0.3x_A & \\
& y_{3B} \geq 0.4x_B & \\
& y_{2C} \leq 0.5x_C & \\
& x_j \geq 0 \quad \forall j \in F & \\
& y_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in R &
\end{array}
$$

Formulazione parametrica
Insiemi e parametri:

- R insieme dei tipi di olio grezzo. $R = \{1, 2, 3, 4\}$
- F insieme dei tipi di benzina. $F = \{A, B, C\}$
- b_i numero di barili di olio del tipo i disponibili.
- c_i costo in euro per barile dell'olio di tipo i.
- p_j ricavo in euro per barile di benzina del tipo j.
- q_{ij}^{Max} massima percentuale di olio del tipo i nella benzina di tipo j.
- q_{ij}^{Min} minima percentuale di olio di tipo i nella benzina di tipo j.

Formulazione:

$$
\begin{array}{llll}
\max & \sum_{j\in F} g_j x_j - \sum_{i\in R}\left(\sum_{j\in F} c_i y_{ij}\right) & & \textit{Profitto totale} \\
\text{s.t.} & & & \\
& \sum_{j\in F} y_{ij} \leq q_i & \forall i \in R & \textit{Vincoli di disponibilità} \\
& \sum_{i\in R} y_{ij} = x_j & \forall j \in F & \textit{Vincoli di conservazione} \\
& y_{ij} \geq q_{ij}^{Min} x_j & \forall i \in R,\ \forall j \in F & \textit{Vincoli di miscelazione} \\
& y_{ij} \leq q_{ij}^{Max} x_j & \forall i \in R,\ \forall j \in F & \\
& x_j \geq 0 & \forall j \in F & \\
& y_{ij} \geq 0 & \forall i \in R &
\end{array}
$$

◇

Esercizio 2 **Il pastificio**
Un pastificio deve pianificare la produzione per il mese successivo. Il pastificio produce una sola tipologia di pasta. La domanda del mercato è pari a d_t quintali per giorno ($t = 1, ..., 30$). Se in un giorno le macchine di produzione vengono attivate allora la quantità di pasta prodotta può variare da un minimo di q ad un massimo di Q quintali. I costi di produzione si dividono in costi fissi S, da pagarsi in ogni giorno in cui la produzione è attiva, e costi variabili pari, a c_t per ogni per quintale prodotto il giorno t. Per soddisfare la domanda può essere usata sia la produzione giornaliera sia la merce in magazzino. All'inizio del mese il magazzino è vuoto. I costi di immagazzinamento sono pari a g euro al quintale per giorno. Il magazzino ha una capacità massima pari a M. Si formuli in termini di programmazione lineare il problema di pianificare la produzione minimizzando i costi.

Traccia della soluzione È un problema multiperiodo.
Insiemi e parametri:

- $T = 1, \ldots, 30$ insieme dei giorni del mese.
- $d_t >= 0$ domanda nel giorno t.
- q minima quantità prodotta se la produzione è attivata.
- Q massima quantità prodotta se la produzione è attivata.
- c_t costo di produzione per quintale nel giorno t.
- g costo di immagazzinamento giornaliero per quintale.
- S costo fisso di produzione giornaliero.
- M capacità massima magazzino.

Variabili:

- $x_t \geq 0$ produzione giornaliera nel giorno t.
- $z_t \geq 0$ prodotto immagazzinato nel giorno t.
- $y_t \in \{0, 1\}$, $y_t = 1$ se la produzione è attiva durante il giorno t, 0 altrimenti.

Formulazione:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{t\in T} c_t x_t + \sum_{t\in T} g z_t + \sum_{t\in T} S y_t & & \textit{Minimizzazione dei costi} \\
\text{s.t.} & & & \\
& x_t \leq Q y_t & \forall t \in T & \textit{Quantità massima/big M} \\
& x_t \geq q y_t & \forall t \in T & \textit{Quantità minima} \\
& x_t + z_{t-1} = d_t + z_t & \forall t \in T \setminus \{1\} & \textit{Bilanciamento tra giorni} \\
& x_1 = d_1 + z_1 & & \\
& z_t \leq M & \forall t \in T & \textit{Capacità magazzino} \\
& x_t \geq 0 & \forall t \in T & \\
& y_t \in \{0, 1\} & \forall t \in T &
\end{array}
$$

◇

X **ESERCIZIO 3 Setup di robot**

Un'azienda realizza n differenti tipologie di prodotti ed utilizza m differenti robot per la produzione. Produrre una unità di prodotto $i \in \{1, \ldots, n\}$ sul robot j ($j = 1, \ldots, m$) richiede un tempo di lavorazione a_{ij}. Il massimo tempo a disposizione di un robot j è pari a b_j. Il ricavo per la vendita di un'unità di prodotto i è pari a r_i. Se il robot j lavora sul prodotto i l'azienda deve sostenere un costo di setup pari a c_{ij} . Il costo c_{ij} è indipendente dalla quantità prodotta. L'azienda si aspetta un minimo ritorno sugli investimenti, calcolato come differenza tra guadagni e costi, pari a B. Scrivere il modello di programmazione lineare del problema di pianificare la produzione in modo equo, ovvero massimizzando la produzione della tipologia meno prodotta.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

Insiemi e parametri:

- m numero di robot.
- n numero di tipi di prodotti.
- $a_{ij} \geq 0$ tempo di lavorazione di i su j.
- b_j massimo tempo di lavorazione del robot j.
- r_i ricavo dalla vendita del prodotto i.
- c_{ij} costi di setup se i è lavorato su j.

Variabili:

- $x_{ij} \geq 0$ unità di prodotto i realizzate dal robot j.
- $y_{ij} \in \{0, 1\}$, $y_{ij} = 1$ se il prodotto i è lavorato dal robot j, 0 altrimenti.

Formulazione:

$$\max \; z$$

s.t.

$$z \leq \sum_{j=1}^{m} x_{ji} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \qquad \textit{Vincoli bottleneck}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_j \qquad \forall j = 1, \ldots, m \qquad \textit{Vincolo di capacità del robot}$$

quando c'è {1,0} di attivazione va sempre collegato! →

$$x_{ij} \leq \frac{b_j}{a_{ij}} y_{ij} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \, \forall j = 1, \ldots, m \qquad \textit{Big } M = \frac{b_j}{a_{ij}} \textit{ poichè } a_{ij} x_{ij} \leq b_j y_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} y_{ij} > B \qquad \textit{Minimo ritorno di investimento}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \forall i = 1, \ldots, n \, \forall j = 1, \ldots, m$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall i = 1, \ldots, n \, \forall j = 1, \ldots, m$$

◇

X **ESERCIZIO 4 Turni in ospedale**

Si vogliono organizzare i turni in un reparto ospedaliero in modo tale da minimizzare il numero di infermieri coinvolti. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi seguiti da due giorni di riposo. Le esigenze di personale (in termini di numero minimo di infermieri) per ogni giorno della settimana sono le seguenti:

giorno	Lun	Mar	Mer	Gio	Ven	Sab	Dom
richiesta	11	9	7	12	13	8	5

Formulare il problema in termini di programmazione lineare intera.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE Siano x_{LU}, x_{MA}, x_{ME}, x_{GI}, x_{VE}, x_{SA} e x_{DO} le variabili che indicano il numero di infermieri il cui turno di 5 giorni inizia il giorno di lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì, sabato, domenica, rispettivamente. Il modello è il seguente:

$$\min(x_{LU} + x_{MA} + x_{ME} + x_{GI} + x_{VE} + x_{SA} + x_{DO})$$

$$x_{LU} + + x_{GI} + x_{VE} + x_{SA} + x_{DO} \geq 11 \qquad \textit{Copertura Lun}$$

$$x_{LU} + x_{MA} + x_{VE} + x_{SA} + x_{DO} \geq 9 \qquad \textit{Copertura Mar}$$

$$x_{LU} + x_{MA} + x_{ME} + x_{SA} + x_{DO} \geq 7 \qquad \textit{Copertura Mer}$$

$$x_{LU} + x_{MA} + x_{ME} + x_{GI} + x_{DO} \geq 12 \qquad \textit{Copertura Gio}$$

$$x_{LU} + x_{MA} + x_{ME} + x_{GI} + x_{VE} \geq 13 \qquad \textit{Copertura Ven}$$

$$x_{MA} + x_{ME} + x_{GI} + x_{VE} + x_{SA} \geq 5 \qquad \textit{Copertura Sab}$$

$$x_{ME} + x_{GI} + x_{VE} + x_{SA} + x_{DO} \geq 5 \qquad \textit{Copertura Dom}$$

$$x_i \geq 0, \text{intere}$$

◇

ESERCIZIO 5 Azienda Dolciaria

Un'azienda di cioccolatini deve pianificare la produzione per i prossimi m mesi. In ogni mese l'azienda ha a disposizione Q ore di manodopera (espresse in minuti). L'azienda produce diversi tipi di cioccolatini (insieme K). Ogni singolo cioccolatino di tipo k richiede h_k minuti di lavoro e ha un costo di produzione c_k. I cioccolatini vengono prodotti a partire da un insieme J di materie prime. Un cioccolatino di tipo $k \in K$ richiede una quantità a_{kj} di materia prima $j \in J$. Le materie prime vengono acquistate in confezioni: una confezione di materia prima j contiene v_j unità di materia prima e costa p_j. Per ogni mese $i = 1, \ldots, m$ e per ogni tipo di cioccolatino $k \in K$ è nota la domanda di mercato d_{ik} che deve essere soddisfatta. In ogni mese è possibile immagazzinare una parte del prodotto, per venderlo nei mesi successivi, ad un costo g_k per ogni cioccolatino di tipo k. Il magazzino inizialmente è vuoto. Oltre alla produzione ordinaria è possibile produrre cioccolatini richiedendo straordinari alla manodopera. Per ogni mese i è possibile richiedere al più S ore di straordinario. Attivare gli straordinari in un mese i ha un costo fisso f_i, indipendente dal numero di ore effettivamente usate. Gli straordinari possono essere richiesti in al più b mesi e mai in due mesi consecutivi.
Formulare il problema di pianificare la produzione in modo da soddisfare la domanda minimizzando il costo complessivo della produzione (produzione, straordinari e magazzino) come un problema di programmazione lineare mista intera.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE
Insiemi e Parametri:

- $M = \{1, \ldots, m\}$: insieme dei mesi di produzione
- K : insieme dei tipi di cioccolatini prodotti
- J : insieme delle materie prime
- Q : ore di manodopera (espresse in minuti) disponibili in ogni mese di produzione
- h_k : minuti richiesti per la produzione di un cioccolatino di tipo k
- c_k : costo unitario per la produzione di un cioccolatino tipo k
- g_k : costo unitario per l'immagazzinamento di un cioccolatino tipo k
- d_{ik} : domanda nel mese i di cioccolatini di tipo k
- a_{kj} : quantità d materia prima j richiesta da un cioccolatino di tipo k
- p_j : prezzo di una confezione di materia prima j
- v_j : capacità di una confezione di materia prima j
- f_i : costo fisso di attivazione dello straordinario nel mese i
- S : numero di ore di straordinario (espresse in minuti) disponibili ogni mese
- b : numero massimo di mesi consecutivi in cui è possibile usare lo straordinario

Variabili: Nel problema dobbiamo prendere 4 tipi di decisioni:

1. Quanti cioccolatini produrre ogni mese
2. Quanti cioccolatini destinare al magazzino

quando c'è il magazzino una variabile è sempre destinata a quello

3. Se usare lo straordinario
4. Quante confezioni di materia prima acquistare

Introduciamo quindi 4 insiemi di variabili:

1. $x_{ik} \geq 0$, intera, indica la quantità di cioccolatini di tipo k prodotti nel mese i
2. $y_{ik} \geq 0$, intera, indica la quantità di cioccolatini di tipo k immagazzinati nel mese i.
3. $u_i = \begin{cases} 1 & \text{se lo straordinario viene usato nel mese } i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
4. $w_j \geq 0$, intera, indica il numero di confezioni di materia prima j acquistate.

ai costi fissi va sempre associata una flag

Formulazione:

$$\min \sum_{i \in M}\sum_{k \in K} c_k x_{ik} + \sum_{i \in M}\sum_{k \in K} g_k y_{ik} + \sum_{j \in J} p_j w_j + \sum_{i \in M} f_i u_i$$

$$y_{i-1,k} + x_{ik} = d_{ik} + y_{ik}, \qquad \forall i \in M \setminus 1, k \in K \qquad \textit{multiperiodo}$$

$$x_{1k} = d_{1k} + y_{1k}$$

$$\sum_{k \in K} h_k x_{ik} \leq Q + S u_i, \qquad \forall i \in M \qquad \textit{manodopera e straordinario}$$

$$\sum_{i \in M} u_i \leq b \qquad \textit{numero massimo mesi straordinario}$$

$$\boxed{u_i + u_{i+1} \leq 1.} \qquad \forall 1, \ldots, m-1 \qquad \textit{straordinario consecutivo}$$

$$\sum_{i \in M}\sum_{k \in K} a_{kj} x_{ik} \leq v_j w_j, \qquad \forall j \in J \qquad \textit{acquisto materie prime}$$

◇

mai per due mesi consecutivi

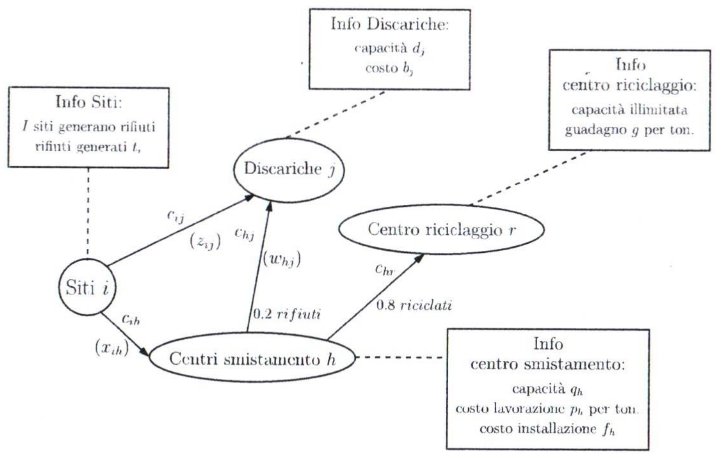
con i magazzini c'è sempre qualcosa così

ESERCIZIO 6 **Gestione dei rifiuti**

Il governo di una regione deve gestire i rifiuti provenienti da vari siti (insieme I). Ogni sito $i \in I$ produce t_i tonnellate di rifiuti indifferenziati. Ci sono due strategie per la gestione dei rifiuti: inviare i rifiuti alle discariche esistenti (insieme D) oppure costruire dei centri di smistamento dei rifiuti dove i rifiuti indifferenziati vengono suddivisi in base al materiale e inviati a centri di riciclaggio. Esiste nella regione un solo centro di riciclaggio (r) capace di riciclare qualsiasi tipo di materiale. Sia H l'insieme delle località che possono ospitare un centro di smistamento. Costruire un centro di smistamento nella località $h \in H$ costa f_h. Un centro di smistamento costruito nel sito $h \in H$ può trattare fino a q_h tonnellate di rifiuti. Ogni centro di smistamento, per ogni tonnellata di rifiuti, produce 800kg di materiale che può essere inviato al centro di riciclaggio e 200kg di rifiuti indifferenziati che devono essere inviati in una discarica, con un costo di lavorazione p_h. Ogni discarica $j \in D$ ha una capacità pari a d_j tonnellate. Smaltire una tonnellata di rifiuti nella discarica $j \in D$ costa b_j. Invece si ha un guadagno nel vendere il materiale riciclato pari a g per tonnellata. I costi di trasporto per ogni tonnellata di rifiuti sono c_{ij}, c_{ih}, c_{hj}, c_{hr} per ogni $i \in I, j \in D, h \in H$. Si fornisca un modello di programmazione lineare per la gestione ottimale dei rifiuti (minimizzare la differenza tra costi e guadagni).

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

Insiemi e parametri: Si veda la figura.



Variabili:

- $y_h \in \{0, 1\}$ se un centro di smistamento è aperto in h.
- $x_{ih} \geq 0$ quantità di rifiuti inviati dalla sito i al centro di smistamento h.
- $z_{ij} \geq 0$ quantità di rifiuti inviati dal sito i alla discarica j.

- $w_{hj} \geq 0$ quantità di rifiuti inviati dal centro di smistamento h alla discarica j.

Formulazione:

$$\begin{aligned}
\min \sum_{h \in H} f_h y_h + & \qquad \textit{installazione}\\
+ \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in D} c_{ij} z_{ij} + \sum_{h \in H} c_{ih} x_{ih} \right) + & \qquad \textit{trasporto dai siti}\\
+ \sum_{h \in H} \left(\sum_{j \in D} c_{hj} w_{hj} + 0.8 c_{hr} \sum_{i \in I} x_{ih} \right) + \sum_{h \in H} p_h \sum_{i \in I} x_{ih} + & \qquad \textit{trasporto e lavorazione centri}\\
+ \sum_{j \in D} b_j \left(\sum_{i \in I} z_{ij} + \sum_{h \in H} w_{hj} \right) + & \qquad \textit{smaltimento discarica}\\
- g \sum_{h \in H} 0.8 \sum_{i \in I} x_{ih} & \qquad \textit{guadagno riciclaggio}
\end{aligned}$$

Con vincoli:

$$\begin{array}{lll}
\sum_{h \in H} x_{ih} + \sum_{j \in D} z_{ij} = t_i, & \forall i \in I & \textit{smaltimento}\\
\sum_{i \in I} z_{ij} + \sum_{h \in H} w_{hj} \leq d_j, & \forall j \in D & \textit{capacità discariche}\\
\sum_{i \in I} x_{ih} \leq q_h, & \forall h \in H & \textit{capacità centri smistamento}\\
x_{ih} \leq t_i y_h, \forall i \in I & \forall h \in H & \textit{consistenza}\\
0.2 \sum_{i \in I} x_{ih} = \sum_{j \in D} w_{jh}, & \forall h \in H & \textit{bilanciamento flussi}\\
x_{ih}, z_{ij}, w_{hj} \geq 0, & \forall i, j, h & \\
y_h \in \{0, 1\}, & \forall h \in H &
\end{array}$$

Osservazione: I vincoli di capacità e di consistenza possono essere combinati: $\sum_{i \in I} x_{ih} \leq q_h y_h$

◇

Esercizio 7 Localizzazione di discariche

Alcuni politici devono decidere la posizione nella quale localizzare nuove discariche scegliendo tra 10 diverse aree vicine a 7 città. Ogni città non può avere più di una discarica nelle proprie vicinanze. Per ragioni politiche, se una discarica è costruita nell'area 2 allora anche nell'area 7 dovrà essere costruita una discarica. Inoltre se una discarica è costruita nell'area 1 allora non potranno essere costruite discariche ne' nell'area 2 ne' nella 4.

Il budget a disposizione per la costruzione delle discariche è pari a 25 milioni di euro. Lo scopo dei politici è quello di massimizzare la capacità totale delle discariche costruite.

Le prime 7 righe della tabella seguente indicano quale area sia vicina a quale città (X); l'ottava riga riporta la capacità di ogni area, la nona riga contiene i costi di costruzione.

Città/Discarica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1		X			X	X	X		X	
2	X	X		X				X		
3					X			X	X	
4	X		X		X		X	X	X	X
5			X	X			X			X
6		X						X	X	
7			X			X	X	X		X
Capacità (w_i)	450	720	580	460	660	390	510	1000	830	680
Costo (c_i)	4	7	8	4	6	9	10	10	8	6

Formulare in Programmazione Lineare il problema.

Traccia della soluzione

Insiemi e parametri:

- Insieme dei siti candidati: S.
- Insieme delle città C.
- Budget B.
- w_i capacità delle discarica posizionata in $i \in S$.
- c_i costo della discarica posizionata in $i \in S$.
- $\forall i \in S$, $\forall j \in C$ $a_{ij} = 1$ se la discarica i è vicina alla città j, 0 altrimenti. a_{ij} esprime in forma parametrica la tabella.

Variabili:

- $y_i \in \{0, 1\}$ vale 1 se una discarica è costruita nella località i.

Formulazione:

$$\max \sum_{i \in S} w_i y_i \qquad \textit{Capacità totale}$$

$$\sum_{i \in S} c_i y_i \leq B \qquad \textit{Budget}$$

$$\sum_{i \in S} a_{ij} y_i \leq 1, \quad \forall j \in C \qquad \textit{Vicinanza}$$

$$y_1 \leq y_7 \qquad \textit{Vincolo logico}$$

$$y_1 + y_2 \leq 1 \qquad \textit{Vincolo logico}$$

$$y_1 + y_4 \leq 1 \qquad \textit{Vincolo logico}$$

$$y_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in S$$

◇

ESERCIZIO 8 **Dirigente scolastico**

Un dirigente scolastico deve programmare l'erogazione di corsi opzionali per il prossimo anno scolastico. Può scegliere tra un insieme C di corsi disponibili. Ogni corso $j \in C$ è caratterizzato da un diverso costo c_j.

Ogni studente $i \in I$ (dove I è l'insieme degli studenti, ha indicato i corsi a lui/lei graditi: le prime scelte, rappresentate dall'insieme $f_i \subset C$ e le seconde scelte, rappresentate dall'insieme $s_i \subset C$, con $f_i \cap s_i = \emptyset$.

Il digerente scolastico vuole scegliere i corsi opzionali cosìda includare almeno un corso gradito (scelta primaria e/o secondaria) per ogni studente.

Scrivere un modello di programmazione lineare intera per la pianificazione dell'erogazione dei corsi a costo minimo.

Variante: come cambierebbe il modello nel caso in cui sia richiesto che almeno il 50% degli studenti possa frequentare almeno uno dei corsi indicati come scelta primaria?

TRACCIA DELLA SOLUZIONE

Insiemi e parametri:

- C insieme dei corsi disponibili.
- I insieme degli studenti.
- c_j costo del corso $j \in C$.
- $\forall i \in I:\ f_i \subseteq C,\ s_i \subseteq C,\ f_i \cap s_i = \emptyset$ prime e seconde scelte di ogni studente.

Variabili:

- $y_j \in \{0,1\}$, $y_j = 1$ se il corso j è attivato.

Formulazione (Set Covering):

$$\min \sum_{j \in C} c_j y_j \qquad \textit{Costi totali}$$

$$\sum_{j \in f_i \cup s_i} y_j \geq 1, \quad \forall i \in I \qquad \textit{Almeno un corso preferito da ogni studente è attivato}$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in C$$

Variante

Variabili:

- $x_i \in \{0,1\}$, $x_i = 1$ se un corso tra quelli graditi allo studente i è attivato.

Formulazione:

$$\min \sum_{j \in C} c_j y_j \qquad \textit{Costi totali}$$

$$\sum_{j \in f_i \cup s_i} y_j \geq 1, \quad \forall i \in I \qquad \textit{Almeno un corso preferito da ogni studente è attivato}$$

$$\sum_{j \in f_i} y_j \geq x_i, \quad \forall i \in I \qquad \textit{x_i può valere solo se almeno una prima scelta dello studente è attivata}$$

$$\sum_{i \in I} x_i \geq 0.5\,|I| \qquad \textit{Minimo numero di studenti soddisfatti}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in C$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \in C$$

◇

ESERCIZIO 9 **Doni natalizi**
Il titolare di una profumeria vuole preparare dei pacchi dono da distribuire sotto le feste ai clienti. Ha a disposizione n oggetti da mettere nei pacchi. A ciascun oggetto è associato un valore v_i e il titolare vuole essere sicuro che nessun pacco abbia un valore complessivo minore di V. Formulare in Programmazione Lineare il problema di assegnare gli oggetti ai pacchi, in modo da massimizzare il numero di pacchi accettabili prodotti.
Variante Alcuni tra gli oggetti disponibili sono simili e il titolare non vuole inserire due oggetti simili nello stesso pacco. L'insieme A è l'insieme delle coppie di oggetti simili. Come cambia la formulazione?

TRACCIA DELLA SOLUZIONE
Insiemi e Parametri:

- $I = \{1, \ldots, n\}$ insieme degli oggetti
- $J = \{1, \ldots, n\}$ insieme dei possibili pacchi (al più ho un pacco per ogni oggetto)
- v_i valore dell'oggetto i
- V soglia minima di valore per un pacco
- $A \subset I \times I$ insieme di coppie di oggetti simili

Variabili: Le variabili decisionali sono le seguenti:

1. $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se l'oggetto } i \text{ viene assegnato al pacco } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

2. $y_j = \begin{cases} 1 & \text{se viene formato il pacco } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Formulazione:

$$\max \sum_{j \in J} y_j \qquad \textit{numero dei pacchi}$$
$$\sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1, \quad \forall i \in I \qquad \textit{assegnamento}$$
$$\sum_{i \in I} v_i x_{ij} \geq V y_j, \quad \forall j \in J \qquad \textit{valore minimo del pacco}$$

Si può introdurre anche il vincolo (ridondante) che se un pacco non viene creato allora nessun oggetto può essere assegnato al pacco:

$$x_{ij} \leq y_j, \quad \forall i \in I, j \in J.$$

Variante: La variante richiede che ogni coppia di oggetti $\{i, j\} \in A$ non venga inserita nello stesso pacco. Abbiamo quindi i seguenti vincoli di tipo logico:

$$x_{ip} + x_{jp} \leq 1, \quad \forall \{i, j\} \in A, \forall p \in J.$$

◇

ESERCIZIO 10 **Matrimonio**
Una giovane ricercatrice di ricerca operativa deve convolare a nozze in una torrida estate. I laboriosi ed estenuanti preparativi del ricevimento prevedono anche la composizione dei tavoli dei convenuti. Gli invitati sono suddivisi in k gruppi $G_1, \ldots, G_k$ (per esempio: parenti sposo, parenti sposa, colleghi sposa, amici sposo, ...). I tavoli hanno una capacità di p posti. Nella composizione si deve tener conto della eterogeneità della composizione (le persone in ogni tavolo devono appartenere ad almeno q gruppi diversi), e del fatto che ognuno deve avere almeno altri r compagni di gruppo al proprio tavolo per non sentirsi abbandonato. Formulare il problema della composizione dei tavoli con l'obiettivo di minimizzare il numero di tavoli.
Variante: Come cambia il modello se si considera come funzione obiettivo quella di minimizzare il massimo numero di componenti di uno stesso gruppo ad un tavolo?

TRACCIA DELLA SOLUZIONE
Insiemi e Parametri:

- I : insieme degli invitati
- k : numero di gruppi di persone
- $G = G_1, \ldots, G_k$: composizione dei gruppi (ogni invitato appartiene ad un solo gruppo)
- T : insieme dei tavoli
- p : capienza dei tavoli
- r : numero minimo di persone dello stesso gruppo allo stesso tavolo
- q : numero minimo di gruppi per tavolo

Variabili:
Si introducono quindi le seguenti variabili:

- $x_{it} = \begin{cases} 1 & \text{se l'invitato } i \text{ siede al tavolo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $y_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{se il gruppo } j \text{ è presente al tavolo } t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$
- $z_t = \begin{cases} 1 & \text{se il tavolo } t \text{ è usato} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Formulazione:

$$\min \sum_{t \in T} z_t \qquad \textit{Numero di tavoli}$$
$$\sum_{t \in T} x_{it} = 1. \quad \forall i \in I \qquad \textit{assegnamento degli invitati}$$
$$\sum_{i \in I} x_{it} \leq p z_t, \quad \forall t \in T \qquad \textit{capienza e uso dei tavoli}$$
$$\sum_{i \in G_k} x_{it} \geq r y_{kt}. \quad \forall k \in K, t \in T \qquad \textit{minimo numero di persone di uno stesso gruppo a un tavolo}$$
$$x_{it} \leq y_{kt}, \quad \forall k \in K, i \in G_k, t \in T \qquad \textit{presenza di un gruppo a un tavolo}$$
$$\sum_{k \in G} y_{kt} \geq q z_t. \quad \forall t \in T \qquad \textit{numero di gruppi a ogni tavolo}$$

Variante:
Si introduce una nuova variabile $\alpha >= 0$ che rappresenta il massimo numero di componenti di uno stesso gruppo ad un tavolo.
La nuova funzione obiettivo sarà quindi:

$$\min \alpha$$

Verrà infine introdotto un nuovo vincolo che completa la nuova formulazione e impone che α sia sempre maggiore o uguale del massimo numero di componenti di uno stesso gruppo ad un tavolo:

$$\sum_{i \in G_k} x_{it} \leq \alpha, \quad \forall k \in K, t \in T$$

◇

ESERCIZIO 11 **Instradamento di pacchetti**
n pacchetti di dati devono essere instradati dal nodo s al nodo t seguendo uno di due collegamenti possibili, con capacità rispettivamente $k_1 = 1$Mbps e $k_2 = 2$Mbps.
La società che gestisce il link 2 è del 30% più costosa di quella che gestisce il link 1. La tabella seguente riporta la quantità di risorse consumate dall'i-esimo pacchetto e il costo di instradare l'i-esimo pacchetto sul link 1, con $i \in \{1 \dots n\}$.

Pacchetto	Risorse richieste (Mbps)	Costo sul link 1
1	0.3	200
2	0.2	200
3	0.4	250
4	0.1	150
5	0.2	200
6	0.2	200
7	0.5	700
8	0.1	150
9	0.1	150
10	0.6	900

Formulare in termini di programmazione lineare intera il problema di minimizzare il costo di instradamento totale dei pacchetti rispettando le capacità dei link.
Variante Come va cambiata la formulazione del problema se il numero di link possibili è $m > 2$?

TRACCIA DELLA SOLUZIONE
Formulazione per 2 link.
Insiemi e parametri:

- $I = \{1 \dots n\}$: pacchetti
- a_i: quantità di risorsa consumata dal pacchetto i, con $i \in I$
- c_{i1} e c_{i2}: costi di instradamento del pacchetto i sui link 1 e 2 calcolati con la differenza percentuale data nel testo, con $i \in I$
- k_1 e k_2: capacità dei link 1 e 2

Variabili:

- x_i: 1 se l'i-esimo pacchetto è instradato sul link 1, 0 se l'i-esimo pacchetto è instradato sul link 2, con $i \in I$

Formulazione:

$$\min \sum_{i \in I} c_{i1} x_i + c_{i2}(1 - x_i) \qquad \textit{Costo}$$
$$\sum_{i \in I} a_i x_i \leq k_1 \qquad \textit{capacità link 1}$$
$$\sum_{i \in I} a_i (1 - x_i) \leq k_2 \qquad \textit{capacità link 2}$$
$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I \qquad \textit{dominio}$$

La formulazione per m link richiede di introdurre un insieme di variabili diverso (dipendente sia dal pacchetto sia dal link). Inoltre occorre rendere esplicito il vincolo di singolo assegnamento fra pacchetto e link.

Insiemi e parametri:

- $I = \{1 \dots n\}$: pacchetti
- $J = \{1 \dots m\}$: link
- a_i: quantità di risorsa consumata dal pacchetto i, con $i \in I$
- c_{ij}: costo di instradamento del pacchetto i sul j-esimo link, con $i \in I$ e $j \in J$
- k_j: capacità del j-esimo link, con $j \in J$

Variabili:

- x_{ij}: 1 se l'i-esimo pacchetto è instradato sul j-esimo link, 0 altrimenti, con $i \in I$ e $j \in J$

Formulazione:

$$\begin{array}{lr}
\min \sum_{i \in I, j \in J} c_{ij} x_{ij} & \textit{Costo} \\
\sum_{j \in J} x_{ij} = 1, \quad i \in I & \textit{assegnamento} \\
\sum_{i \in I} a_i x_{ij} \le k_j, \quad j \in J & \textit{capacità dei link} \\
x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I & \textit{dominio}
\end{array}$$

◇

ES. 2

d_t = domanda per il giorno t $(t = 1, .., 30)$

q = min prodotto
Q = max prodotto
S = costi fissi $\forall t$ se si attivano
C_t = costo per quintale

g = costo per quintale di immagazz.
M = capacità max

---

x_i = quanto produco al giorno

z_i = quanto ho immagazzinato nel giorno i
y_i = se la produzione è attiva il giorno i

$$\min \sum_{i=1}^{30} y_i \, S + x_i \cdot c_i + z_i \, g$$

$x_i \geq 0$
$z_i \leq M$
$y_i = \{0, 1\}$

$x_i \leq Q \, y_i$
$x_i \geq q \, y_i$
$x_i + z_{i-1} = d_i + z_i$
$x_1 = d_1 + z_1$

n = tipi di prodotti $1, \dots, n$ (i)

m = numero di robot: $1, \dots, m$ (j)

a_{ij} = tempo per produrre i su j

b_j = massimo tempo a disposizione per un robot

r_i = ricavo dalla vendita di i

c_{ij} = costo se j lavora su i

$$A = \begin{array}{c|c} & \text{robot} \\ \hline \text{prodotto} & \text{tempo} \end{array}$$

$$C = \begin{array}{c|c} & \text{robot} \\ \hline \text{prodotto} & \text{costo} \end{array}$$

$\Downarrow$ qt. prodotta

B = minimo ritorno := guadagni − costi

$x_{ij} \geq 0$ quanto prodotto i ha fatto j

$$y_{ij} = \{0,1\} = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ ha prodotto } i \\ 1 & \text{se } j \text{ non ha prodotto } i \end{cases}$$

$$\max z, \quad z = \min \sum_j x_{ij} \implies z \leq \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_j \quad \forall j = 1, \dots, m \quad \text{tempo}$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} y_{ij} \cdot c_{ij} \geq B$$

$$x_{ij} \leq M y_{ij} \implies x_{ij} \leq \frac{b_j}{a_{ij}} y_{ij} \quad \text{perché} \quad x_{ij} a_{ij} \leq b_j y_{ij}$$

ES. 4

x_i = numero di infermieri che inizia i 5 giorni in i

$x_i \geq 0$

1	2	3	4	5	6	7
L	M	M	G	V	S	D

$\min \sum_{i=1}^{7} x_i$

lunedì : 11 : $x_1 + x_7 + x_6 + x_5 + x_4 \geq 11$

martedì : 9 $x_2 + x_1 + x_7 + x_6 + x_5 \geq 9$

⋮

ES. 5

m = mesi : $1, .., m$

Q = h di manodopera disponibili al mese

K = tipo di cioccolatino K

h_k = tempo per farlo

c_k = costo per farlo

j = materie prime J

a_{kj} = quanta j per fare k

v_j = quante unità di materia prima j c'è in una confezione

p_j = costo confezione di j

d_{ik} = domanda mese i cioccolatino k

g_k = costo di immagazzinamento ciocc. k

S = ore di straordinario disponibile

f_i = ~~att~~ attivazione straordinari mese i

b = # mesi in cui si possono chiedere gli straordinari (non 2 consecutivi)

---

x_{ik} = quanti cioccolatini k produco in i $\qquad x_{ik} \geq 0$

y_{ik} = quanti ciocco k immagazzino in i $\qquad y_{ik} \geq 0$

$u_i = \{1,0\}$ straordinario o no $\qquad u_i = \{1,0\}$

w_j = quante confezioni acquistare $\qquad w_j \geq 0$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \left(x_{ik} c_k + f_i u_i + g_k y_{ik} \right) + w_j p_j$$

$\sum_k x_{ik} h_k \leq Q + u_i S$ tempo

$x_{ik} = d_{ik} - y_{i-1,k} + y_{i,k}$ | magazzino

$x_{1_k} = d_{1_k} + y_{1k}$

$v_j w_j \geq \sum_{k,i} a_{kj} x_{ij}$

$\sum_i u_i \leq b$ $\qquad \boxed{u_i + u_{i+1} \leq 1}$ mai per due mesi consecutivi

ES. 6

I = insieme di siti i

t_i = tonnellate di rifiuti prodotti da i → D ; → smistamento riciclaggio (r ∃!)

D = discariche esistenti

H = insieme dei posti che possono prendere lo smistamento

f_h = costo per il centro di smistamento in h (costruzione)

q_h = tonnellate gestibili da h

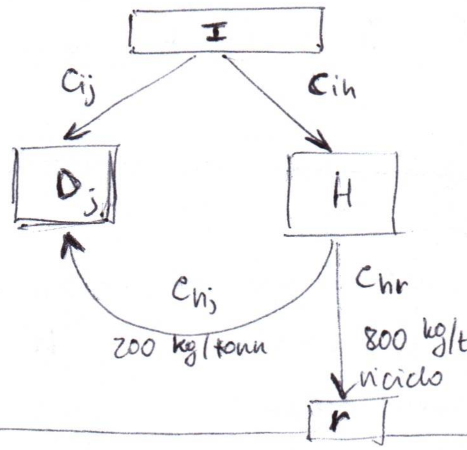
$\forall h$: 800 kg/tonnellate riciclo
200 kg/tonnellate D

p_h = costo di lavorazione di h

d_j = capacità discarica j

b_j = costo smaltimento 1 tonnellata in j

g = guadagno di tonn materiale riciclato



$y_h = \{0,1\}$ centro aperto in h

z_{ij} = quanti rifiuti mandati in discarica

x_{ih} = " " " al sito h di smistamento

w_{hj} = " " " ad h da j

$$\min \quad f_h y_h + c_{ih} x_{ih} + \left[0{,}2 \cdot x_{ih} c_{hj} + 0{,}8\, x_{ih} c_{hr} + p_h x_{ih} - 0{,}8\, x_{ih}\, g\right] + c_{ij} z_{ij} + b_j z_{ij} + b_j\, 0{,}2\, x_{ih}$$