Primale	Duale
min	max
$A_i x \geq b$	$y_i \geq 0$
$A_i x \leq b$	$y_i \leq 0$
$A_i x = b$	y_i libera
$x_i \geq 0$	$y^T A^i \leq c_i$
$x_i \leq 0$	$y^T A^i \geq c_i$
x_i libera	$y^T A^i = c_i$

$$(\bar{y}^T A - c^T)\,\bar{x} = 0$$

condizioni di complementarità

$\Downarrow$

$\bar{x}$ e $\bar{y}$ sono ottime

$\bar{x}$ associata a A_B

$\bar{y}^T = c_B^T A_B^{-1}$

a) $\bar{y}^T A_N \geq 0$

$\bar{x}$ ottima

b) $\bar{y}^T A_N < 0$

$\bar{x}$ non ottima

min $7x_1 + x_2 + 5x_3$

$x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10$

$5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 6$

$x_1 \geq 0$

$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

max $10y_1 + 6y_2$

$y_1 \geq 0$

$y_2 \geq 0$

$y_1 + 5y_2 \leq 7$

$-y_1 + 2y_2 \leq 1$

$3y_1 - y_2 \leq 5$

	x_1	x_2	x_3		max
y_1	1	-1	3	$\geq$	10
y_2	5	2	-1	$\geq$	6
	$\leq$	$\leq$	$\leq$		
min	7	1	5		

max $2y_1 - 4y_2 - 7y_3 - y_4 - 5y_5$

$-y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 + 5y_5 = 7$

$-y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_5 \leq 6$

$-y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 \geq 4$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0$, y_4 libera, $y_5 \leq 0$

	x_1	x_2	x_3		max
y_1	-1	-1	-1	$\geq$	2
y_2	1	2	1	$\geq$	-4
y_3	2	3	1	$\geq$	-7
y_4	1	0	1	$=$	-1
y_5	5	1	0	$\leq$	-5
	$=$	$\leq$	$\geq$		
min	7	6	4		

max $2y_1 + y_2$

$-2y_1 - y_2 \leq -1$

$y_1 - y_2 = 3$

$4y_1 + y_2 \geq 17$

$y_2 \leq 5$

$-y_1 + y_2 \leq 4$

$y_1 \geq 0$

y_2 libera

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		max
y_1	-2	1	4	0	-1	$\geq$	2
y_2	-1	-1	1	1	1	$=$	1
	$\leq$	$=$	$\geq$	$\leq$	$\leq$		
min	-1	3	17	5	4		

ES. 4

max $2y_1 + y_2$

$-2y_1 - y_2 \le -1$

$y_1 - y_2 \le 3$

$4y_1 + y_2 \le 17$

$y_2 \le 5$

$-y_1 + y_2 \le 4$

$y_1, y_2 \ge 0$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		max
y_1	-2	1	4	0	-1	$\ge$	2
y_2	-1	-1	1	1	1	$\ge$	1
	$\le$	$\le$	$\le$	$\le$	$\le$		
min	-1	3	17	5	4		

$x_i \ge 0$

$$\boxed{\begin{aligned} \min\ & -x_1 + 3x_2 + 17x_3 + 5x_4 + 4x_5 \\ & -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 \ge 2 \\ & -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \ge 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}}$$

equazioni degli scarti complementari: $(c^T - \bar{y}^T A)\bar{x} = 0$

$$\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 17 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (-1 + 2y_1 + y_2)\, x_1 = 0 \\ (3 - y_1 + y_2)\, x_2 = 0 \\ (17 - 4y_1 - y_2)\, x_3 = 0 \\ (5 - y_2)\, x_4 = 0 \\ (4 + y_1 - y_2)\, x_5 = 0 \end{cases} \quad + \quad \begin{aligned} (-2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_5 - 2)\, y_1 = 0 \\ (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 1)\, y_2 = 0 \end{aligned}$$

$(3,5)$, $(4,1)$ sono ottimo?

$(3,5) \Rightarrow x = [0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0]^T \Rightarrow$ ammissibile $\Rightarrow$ $(3,5)$ ottimo

$(4,1) \Rightarrow x = [0, -\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0]^T \Rightarrow$ non ammissibile $\Rightarrow$ $(4,1)$ non ottimo

ES. 5

	x_1	x_2	x_3	x_4		max
y_1	1	4	-1	2	=	9
y_2	-2	3	2	-1	=	8
	$\le$	$\le$	$\le$	$\le$		
min	-1	4	3	-4		

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4 \\ & x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 9 \\ & -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 \geq 8 \\ & x_1, \dots, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$(\bar{y}^T A - c^T)\,\bar{x} = 0$

$$\left([y_1\ y_2] \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (y_1 - 2y_2 + 1)\,x_1 = 0 \\ (4y_1 + 3y_2 - 4)\,x_2 = 0 \\ (-y_1 + 2y_2 - 3)\,x_3 = 0 \\ (2y_1 - y_2 + 4)\,x_4 = 0 \end{cases}$$

$(-3,-1)$, $\left(-\frac{5}{2}, \frac{2}{3}\right)$?

$+$

$$(x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 - 9)\,y_1 = 0$$
$$(-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 8)\,y_2 = 0$$

$(-3,-1)$: $x = [x_1, 0, 0, 0]^T \rightarrow x_1 = 9,\ x_1 = -4,\ x_1 \geq 0$

$\Rightarrow$ non è una sol. ammissibile

$\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$: $x = \left[0, 0, \frac{25}{3}, \frac{26}{3}\right]^T \Rightarrow$ ammissibile $\rightarrow$ $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$ è ottima

---

ES. 6

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 + 2x_2 \\ & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_3 = 3 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 1 \\ & 2x_1 - 6x_2 \le 15 \\ & x_1, x_3 \geq 0 \quad x_2 \text{ libera} \end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3		max
y_1	-1	1	0	$\le$	2
y_2	1	0	1	=	3
y_3	2	1	0	$\geq$	1
y_4	2	-6	0	$\le$	15
	$\le$	=	$\le$		
min	-1	2	0		

$$\max\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 + 15y_4 \ :$$
$$\begin{aligned} & -y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 \le 1 \\ & y_1 + y_3 - 6y_4 = 2 \\ & y_2 \le 0 \qquad y_1, y_4 \le 0 \qquad y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (-y_1 + y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 1)\,x_1 = 0 \\ (y_1 + y_3 - 6y_4 - 2)\,x_2 = 0 \\ (y_2)\,x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-x_1 + x_2 - 2)\,y_1 = 0 \\ (x_1 - x_3 - 3)\,y_2 = 0 \\ (2x_1 + x_2 - 1)\,y_3 = 0 \\ (2x_1 - 6x_2 - 15)\,y_4 = 0 \end{cases}$$

$\overset{1}{x} = \left[3, -\frac{3}{2}, 0\right]$ $\qquad \overset{2}{x} = \left[\frac{3}{2}, -2, \frac{3}{2}\right]$

(1) $y = \left[0, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}\right] \Rightarrow$ ottima

(2) $y = \left[0, 0, -\frac{1}{7}, -\frac{5}{14}\right]$

$\hookrightarrow$ non ammissibile

ES. 7

$$\min \quad 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4$$
$$3x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + x_4 - s_1 = 2$$
$$8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 - s_2 = 8$$

Base $\{s_1, s_2\}$: $A_B = A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad x_B^T = [-2, -8]$ $\quad s_1$ esce $\quad p=1$

$c_B^T = [0 \;\; 0]$, $\quad c_N^T = [8 \;\; 8 \;\; 6 \;\; 6]$

$A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3/2 & -1 \\ -8 & -12 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

$r_N^T = [8 \;\; 8 \;\; 6 \;\; 6]$

$-\dfrac{r_i}{(A_B^{-1}A_N)_{pi}}$

x_1	x_2	x_3	x_4
$-\dfrac{8}{-3}$	$-\dfrac{8}{-2}$	$-\dfrac{6}{-3/2}$	$-\dfrac{6}{-1}$

$*$

minimo $\Longrightarrow$ entra x_1 al posto di s_1

1. Base $= I$, $x_B^T = A_B^{-1} b$ per capire chi esce
   $A_B^{-1} A_N + r_N^T \Longrightarrow *$ per capire chi entra
2. Calcolo x_B^T se ammissibile OK, se no (1.)

Base $\{x_1, s_2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 8/3 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad x_B^T = \left[\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right]$ $\quad s_2$ esce : $p=2$

$c_B^T = [8 \;\; 0]$, $\quad c_N^T = [8 \;\; 8 \;\; 6 \;\; 0]$

$A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/5 & 1/3 & -1/3 \\ -20/3 & -4 & -10/3 & -8/3 \end{bmatrix}$

$r_N^T = \left[\frac{8}{3} \;\; 2 \;\; \frac{10}{3} \;\; \frac{8}{3}\right]$

$-\dfrac{r_i}{(A_B^{-1}A_N)_{pi}}$

x_2	x_3	x_4	s_1
$+\dfrac{8/3}{20/3}$	$+\dfrac{2}{4}$	$+\dfrac{10/3}{10/3}$	$+\dfrac{8/3}{8/3}$
$\dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$	$\dfrac{1}{2}$	1	1

minimo $\Longrightarrow$ entra x_2 al posto di s_2

Base $\{x_1, x_2\}$: $x_B = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/10 \\ -2/5 & 3/20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$ ammissibile

$y = c_B^T A_B^{-1} = [8 \;\; 8] \begin{bmatrix} 3/5 & -1/10 \\ -2/5 & 3/20 \end{bmatrix} = \left[\frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right]$

$\Longrightarrow$ base ottima

Esercitazione 2

ES. 1

$$-\min -(x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4)$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + s_1 = 3$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + s_2 = 4$$
$$x_i \geq 0$$

$$\begin{array}{c} \\ A \end{array}\begin{array}{c} x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ s_1\ s_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} b \end{array}$$

$$c^T = [-1\ \ -3\ \ -5\ \ -2]$$

I) Base $\{s_1, s_2\}$:

$$x_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad z = 0$$

$$c_B^T = [0, 0] \qquad c_N^T = [-1, -3, -5, -2],$$

$$r_N = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = [-1, -3, -5, -2]^T, \qquad A_B^{-1}A_N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

faccio entrare x_1

$(x_B)_1 = s_1 \qquad (A_B^{-1}b)_1 = 3 \qquad (A_B^{-1}A_N)_{11} = 1 \qquad \vartheta \leq 3$

$(x_B)_2 = s_2 \qquad (A_B^{-1}b)_2 = 4 \qquad (A_B^{-1}A_N)_{21} = 2 \qquad \vartheta \leq 2 \rightarrow$ esce s_2

entra $x_1 = 2$

II) Base $\{x_1, s_1\}$

quando le ordino sono ordinate in base alle posizione in A

$$x_B = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad z = c_B^T A_B^{-1} b = -2$$

$$c_B^T = [-1, 0], \quad c_N^T = [-3, -5, -2, 0]$$

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = [-3, -5, -2, 0] + \left[-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1, 0\right]$$
$$= \left[-\tfrac{5}{2}, -\tfrac{9}{2}, -1, 0\right]$$

entre x_2

$(x_B)_1 = x_1 \qquad (A_B^{-1}b)_1 = 2 \qquad (A_B^{-1}A_N)_{11} = 1/2 \qquad \vartheta \leq 4$

$(x_B)_2 = s_1 \qquad (A_B^{-1}b)_2 = 1 \qquad (A_B^{-1}A_N)_{21} = 3/2 \qquad \vartheta \leq \frac{2}{3} \Rightarrow$ esce s_1

entra $x_2 = \frac{2}{3}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$r_N^T = [x_2, x_3, x_4, s_2]$$

x_2 ha come indice $1 \Rightarrow i = 1$

III) Base $\{x_1, x_2\}$

$$x_B = A_B^{-1}b = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \left[\tfrac{5}{3}, \tfrac{2}{3}\right]$$

$$c_B^T = [-1, -3], \qquad c_N^T = [-5, -2, 0, 0]$$

$$r_N^T = c_N^T - c_B^T A_B^{-1}A_N = [-5, -2, 0, 0] - [-1, -3]\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [-5, -2, 0, 0] - \tfrac{1}{3}[-14, -3, -4, 1] = \left[-\tfrac{1}{3}, -1, \tfrac{4}{3}, -\tfrac{1}{3}\right]$$

entre x_3

$(x_B)_1 = x_1 \qquad (A_B^{-1}b)_1 = 5/3 \qquad (A_B^{-1}A_N)_{11} = -1/3 \qquad \vartheta\ \forall$

$(x_B)_2 = x_2 \qquad (A_B^{-1}b)_2 = 2/3 \qquad (A_B^{-1}A_N)_{21} = \frac{5}{3} \qquad \vartheta \leq \frac{2}{5} \Rightarrow$ entra $x_3 = \frac{2}{5}$

esce x_2

IV) Base $\{x_1, x_3\}$ $\quad x_B = A_B^{-1} b = \begin{bmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \left[\frac{9}{5}, \frac{2}{5} \right]$

$c_B^T = [-1, -5], \quad c_N^T = [-3, -2, 0, 0]$

$r_N^T = \left[\frac{1}{5}, -1, \frac{9}{5}, -\frac{2}{5} \right]$

entra x_4 in base

[...]

V) Base $\{x_3, x_4\}$ $\quad$ [...] $r_N^T = \left[1, \frac{2}{5}, \frac{8}{5}, \frac{1}{5} \right] \Rightarrow$ soluzione ottima

---

ES. 2

$$\min \; 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4$$
$$x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + s_1 = 4$$
$$-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + s_2 = 6$$
$$x_i \geq 0$$

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
1	-2	2	2	1	0	4
-1	1	1	-1	0	1	6

I) Base $\{s_1, s_2\}$: $\quad x_B = A_B^{-1} b = [4 \; 6]$

$c_B^T = [0, 0], \quad c_N^T = [5, -2, -3, -1] \qquad A_B^{-1} A_N = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$r_N^T = c_N^T = [5, -2, -3, -1]$

entra x_2

$(x_B)_1 = s_1 \quad (A_B^{-1} b)_1 = 4 \quad (A_B^{-1} A_N)_{12} = -2$

$(x_B)_2 = s_2 \quad (A_B^{-1} b)_2 = 6 \quad (A_B^{-1} A_N)_{22} = 1 \qquad \theta \leq 6 \rightarrow$ esce s_2 entra $x_2 = 6$

II) Base $\{x_2, s_1\}$ $\quad x_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = [6 \; 16]$

$c_B^T = [-2, 0) \quad c_N^T = [5, -3, -1, 0)$

$r_N^T = c_N^T - c_B^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = [3, -1, -3, 2]$

entra in base x_3

$(x_B)_1 = x_2 \quad (A_B^{-1} b)_1 = 6 \quad (A_B^{-1} A_N)_{12} = 1 \qquad \theta \leq 6$

$(x_B)_2 = s_1 \quad (A_B^{-1} b)_2 = 16 \quad (A_B^{-1} A_N)_{22} = 4 \qquad \theta \leq 4 \rightarrow$ esce s_1, entra $x_3 = 4$

III) Base $\{x_2, x_3\}$ $\quad x_B = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = [2 \; 4)$

$c_B^T = [-2, -3], \quad c_N^T = [5 \; -1 \; 0 \; 0]$

$r_N^T = \left[\frac{11}{4} \;\; -3 \;\; \frac{1}{4} \;\; \frac{5}{2} \right]$

entra in base x_4

$(x_B)_1 = x_2 \quad (A_B^{-1} b)_1 = 2 \quad (A_B^{-1} A_N)_{12} = -1$

$(x_B)_2 = x_3 \quad (A_B^{-1} b)_2 = 4 \quad (A_B^{-1} A_N)_{22} = 0$

tutti negativi o nulli $\Longrightarrow$ problema illimitato

$z = -\infty$

ES. 3

$\min\ 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4$

$3x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 - s_1 = 2$

$8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 - s_2 = 8$

$x_i \geq 0$ (perché $\geq$)

x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	b
3	2	3/2	1	-1	0	2
8	12	8	6	0	-1	8

Siccome non ho una matr. identità $\Longrightarrow$ non ho una base da cui partire

$\boxed{\text{FASE I DEL SIMPLESSO}}$

Problema artificiale:

$\min\ w_1 + w_2$

$3x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 - s_1 + w_1 = 2$

$8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 - s_2 + w_2 = 8$

$x_i, s_i, w_i \geq 0$

Base iniziale $B = \{w_1, w_2\}$ $\quad x_B = [2, 8]$

$c_B^T = [1\ 1],\quad c_N^T = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$

$r_N^T = [-11\ \ -14\ \ -\frac{13}{2}\ \ -7\ \ 1\ 1]$

entra in base x_1 $\quad$ [...] esce w_1

Base $B = \{x_1, w_2\}$: $\quad x_B = [2/3\ \ 8/3]$

$c_B^T = [0, 1],\quad c_N^T = [0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$

$r_N^T = [-\frac{20}{3}, -4, -\frac{10}{3}, -\frac{8}{3}, 1, \frac{11}{3}]$

entra in base x_2 $\quad$ [...] esce w_2

Base $B = \{x_1, x_2\}$: [...] $r_N^T \geq 0$

$\Longrightarrow$ base $\{x_1, x_2\}$ ottima

$\Longrightarrow$ valore $w_1 + w_2 = 0$

$\Longrightarrow$ $\exists$ base ammissibile nel problema originario

Base $\{x_1, x_2\}$ (problema originario)

$x_B = [2/5,\ 2/5]$

$c_B^T = [8, 8],\quad c_N^T = [6\ 6\ 0\ 0]$

$r_N^T = [\frac{2}{5}, 2, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}] \Longrightarrow$ base ottima $\quad z = \frac{32}{5}$

Fase I:
se la base finale (ottima) di PA (prob. art.) rende $w_1 + \ldots + w_m = 0$
$\Longrightarrow$ il problema originario ha una base ammissibile

ES. 4

min $3x_1+x_2+x_3$

$2x_1+x_2+x_3=6$

$x_1+x_2+2x_3=2$

$x_i \geq 0$

$\xrightarrow{\text{fase I}}$

min w_1+w_2

$2x_1+x_2+x_3+w_1=6$

$x_1+x_2+2x_3+w_2=2$

$$\left.\begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix}$$

$B=\{w_1,w_2\}$ $\quad x_B=[6,2]$

$c_B^T=[1,1]$ $\quad c_N^T=[0,0,0,0]$

$r_N^T=[-3,-2,-3]$

entra in base x_1 [..] esce w_2

$B=\{x_1,w_1\}$ $\quad x_B=[2,2]$

$c_B^T=[0,1]$ $\quad c_N^T=[0\ 0\ 1]$

$r_N^T=[1\ 3\ 3]$

→ soluzione ottima ma $z=2$ ⇒ il problema originario non è ammissibile

---

ES. 5

max $2x_1+x_2$ → $[2,1]$

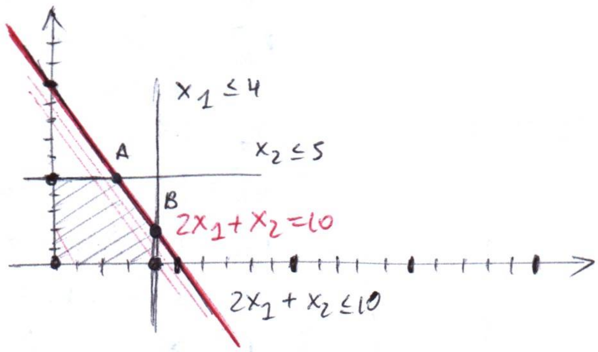
$2x_1+x_2 \leq 10$

$x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 5$

$x_i \geq 0$

$y=10-2x$



Solo A e B sono basi ottime (perché vertici) sono pt. di ottimo, ma anche tutti i pt. del segmento $\overline{AB}$ sono pt. di ottimo $(z=10)$

$\exists\, \infty$ soluzioni

ES. 6 ! (R)

min $-x_1-x_2$

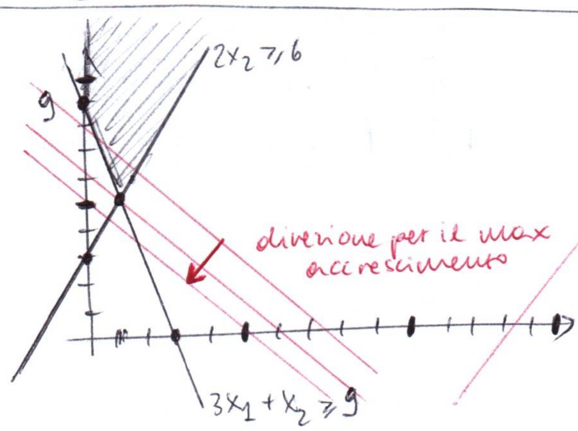
$-3x_1+2x_2 \geq 6$

$3x_1+x_2 \geq 9$

$x_i \geq 0$

$y=9-3x$

$y=3+\frac{3}{2}x$

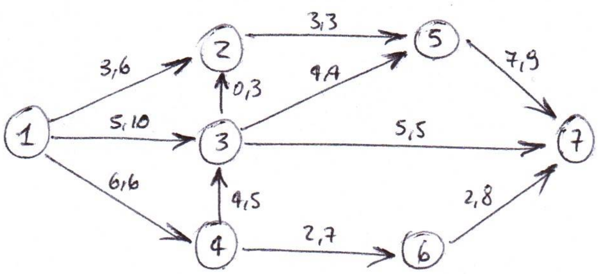


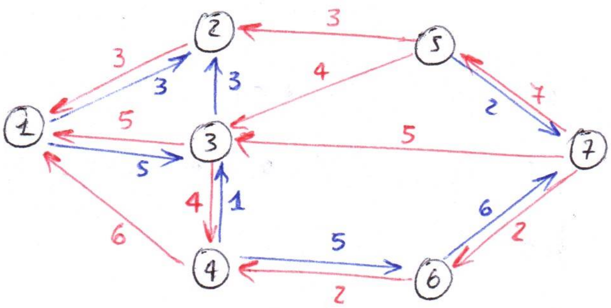
min ⇒ la funzione obiettivo può decrescere indefinitivamente

valore ottimo: $-\infty$

NB. Fai sempre un paio di curve di livello per vedere cosa succede

Esercizi: FLUSSO MASSIMO



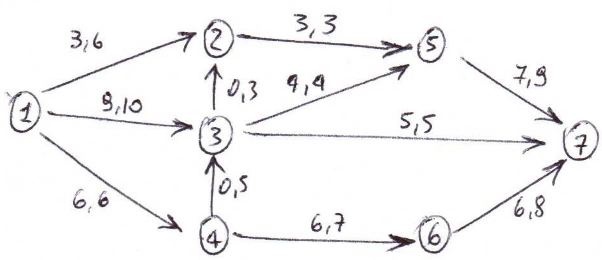


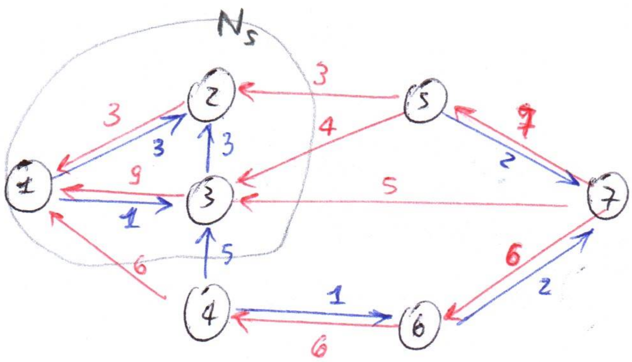
$P = \{1,3,4,6,7\}$

$P^+ = \{(1,3)^5, (4,6)^5, (6,7)^6\}$

$P^- = \{(3,4)^4\}$

$\theta = 4$



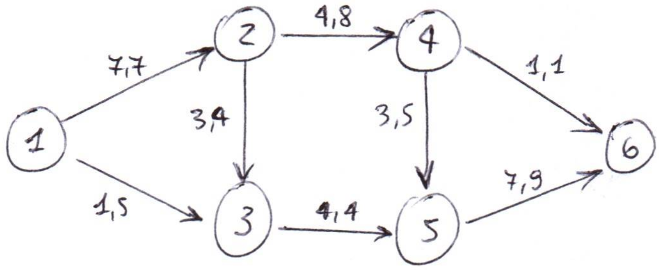


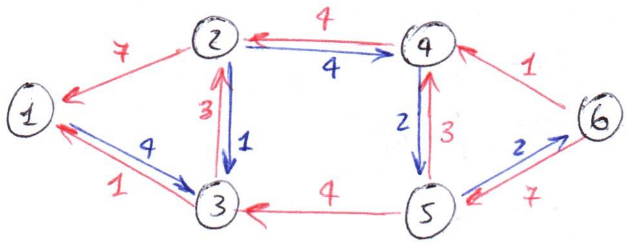
$N_S = \{1,2,3\}$

$N_T = \{4,5,6,7\}$

$U = 18 \quad \left(\sum_{\text{rosse entranti}} = 3+4+5+6\right)$

Esercizi: FLUSSO MASSIMO



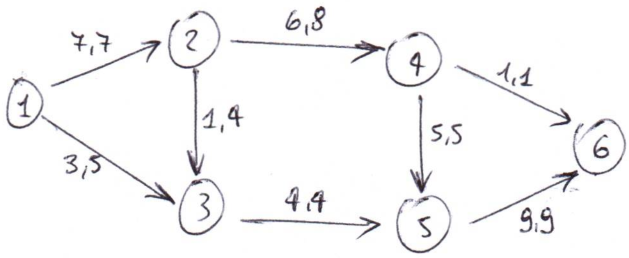


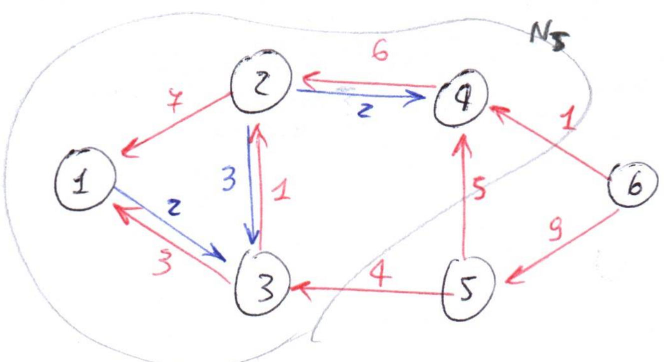
$p = \{1, 3, 2, 4, 5, 6\}$

$p^+ = \{(1,3)^4, (2,4)^4, (4,5)^2, (5,6)^2\}$

$p^- = \{(3,2)^3\}$

$\theta = 2$





$N_s = \{1, 2, 3, 4\}$

$N_t = \{5, 6\}$

$U = 1 + 5 + 4 = 8$

Esercizio 7 **Simplesso duale**

Risolvere il seguente problema con il simplesso duale

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + x_4 \geq 2 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 \geq 8 \\ & x_i \geq 0. \end{aligned}$$

Traccia della soluzione: Forma standard:

$$\begin{aligned} \min \quad & 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 6x_4 \, . \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + 2x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 + x_4 - s_1 = 2 \\ & 8x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 6x_4 - s_2 = 8 \\ & x_i, s_i \geq 0. \end{aligned}$$

La base iniziale è data dalle variabili di scarto $\{s_1, s_2\}$, non ammissibile, ma super-ottima.

$$A_B = A_B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_B^T = A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 0$$

$$c_N^T = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 8 & 12 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$r_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -\frac{3}{2} & -1 \\ -8 & -12 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

Esce la variabile s_1, entra x_1.

Seconda iterazione: $z = \frac{16}{3}$

$$A_B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{8}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_B^T = A_B^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$c_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$z = 0$$

$$c_N^T = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$y^T = c_B^T \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 & -1 \\ 12 & 8 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_N^T = c_N^T - y^T \cdot N = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 2 & \frac{10}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

$$A_B^{-1} A_N = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{20}{3} & -4 & -\frac{10}{3} & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Esce la variabile s_2, entra x_2. Base ottima $x_1 = x_2 = \frac{2}{5}$. ◇

Fondamenti di Ricerca Operativa

Esercitazione n.4: Problemi su grafo

giuliana.carello(at)polimi.it

AA. 2018/2019

Esercizio 1 Impianto industriale
Un impianto industriale è composto da diversi edifici:

1. Un ingresso controllato
2. Una mensa
3. L'officina A
4. L'officina B
5. Un laboratorio di ricerca
6. Un laboratorio di prototipazione
7. Una palazzina per gli uffici

Alcuni di questi edifici sono collegati da strade asfaltate, che possono essere percorse in entrambi i sensi, secondo quanto riportato in tabella:

DA	A	lunghezza
1. ingresso	3. officina A	3
1. ingresso	4. officina B	11
1. ingresso	2. mensa	6
1. ingresso	7. uffici	5
4. officina B	3. officina A	2
4. officina B	2. mensa	6
4. officina B	5. lab. ricerca	8
2. mensa	5. lab. ricerca	7
2. mensa	6. lab. prototipazione	4
2. mensa	7. uffici	3
6. lab. prototipazione	5. lab. ricerca	8
6. lab. prototipazione	7. uffici	3

1. La direzione dell'impianto ha deciso di far costruire dei passaggi coperti lungo alcune delle strade, per garantire, in caso di pioggia, di poter andare da un edificio all'altro senza bagnarsi. La costruzione di un percorso coperto ha un costo che dipende dalla lunghezza del percorso stesso: individuare le strade su cui costruire i passaggi coperti in modo da minimizzare il costo.
2. l'unica uscita è situata nell'edificio dell'ingresso: in caso di emergenza tutti i lavoratori devono evacuare l'area raggiungendo l'ingresso. Trovare il percorso da seguire a partire da ogni edificio per garantire che l'area sia evacuata il più rapidamente possibile, sapendo che il tempo di percorrenza di una strada strettamente collegato alla sua lunghezza.

Traccia della soluzione: L'impianto industriale può essere rappresentato dal grafo mostrato nella Figura 1, in cui i nodi rappresentano gli edifici mentre i lati rappresentano le strade asfaltate.

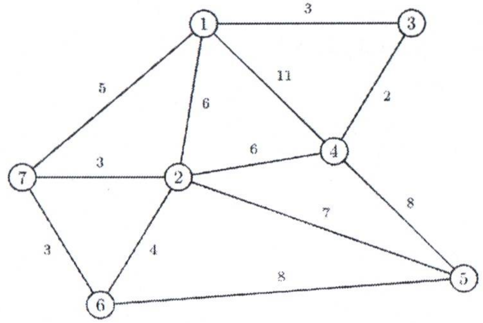


Figure 1: Grafo dell'impianto industriale

1. Il primo problema richiede di trovare l'albero di copertura di costo minimo, applicando l'algoritmo di Kruskal:

Lato	Accettato	$\vert T\vert$
3 – 4	sì	1
1 – 3	sì	2
2 – 7	sì	3
6 – 7	sì	4
2 – 6	no, crea ciclo	
1 – 7	sì	5
1 – 2	no, crea ciclo	
2 – 4	no, crea ciclo	
2 – 5	sì	6 (albero completo)

Si ottiene l'albero riportato nella Figura 2, di costo 23.

2. Il secondo problema richiede di calcolare l'albero dei cammini minimi con radice nell'ingresso. In questo caso ogni strada asfaltata che connette due edifici A e B può essere considerata come una coppia di archi (A,B) e (B,A) con uguale costo. Possiamo risolvere questo problema mediante l'algoritmo di Dijkstra (i dettagli sono riportati nella Tabella 1) ottenendo l'albero dei cammini minimi illustrato in Figura 3.

◇

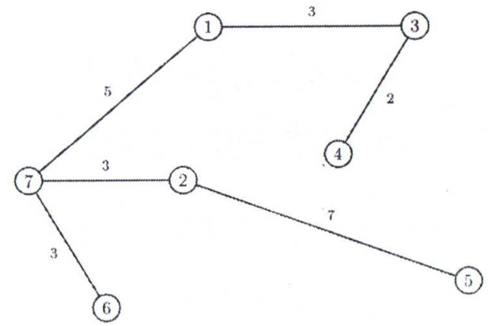


Figure 2: Albero di copertura di costo minimo

d[1],P[1]	0,1						
d[2],P[2]	M,1	6,1	6,1	6,1	6,1		
d[3],P[3]	M,1	3,1					
d[4],P[4]	M,1	11,1	5,3				
d[5],P[5]	M,1	M,1	M,1	13,4	13,4	13,4	13,4
d[6],P[6]	M,1	M,1	M,1	M,1	8,7	8,7	
d[7],P[7]	M,1	5,1	5,1	5,1			
Q	1	2,3,4,7	2,4,7	2,5,7	2,5,6	5,6	5
i	1	3	4	7	2	6	5

Table 1: Dettaglio algoritmo di Dijkstra

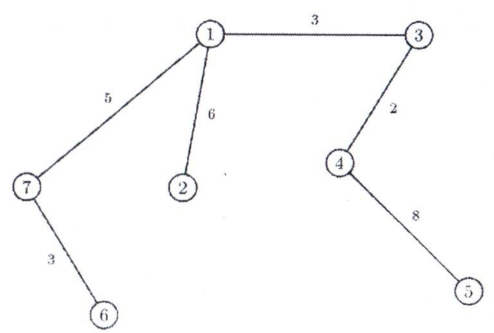


Figure 3: Albero dei cammini minimi

ESERCIZIO 2 **Memorizzazione di sequenze in forma compatta**
Nell'ambito degli studi sul genoma si presenta il problema di memorizzare in forma compatta un insieme molto grande di sequenze composte da elementi provenienti da un alfabeto di quattro simboli (le basi del DNA) che sono della stessa lunghezza e differiscono poco tra loro. Consideriamo la versione semplificata in cui le sequenze sono composte da due soli simboli (0 e 1).
Dato un insieme di k sequenze di M bit, calcoliamo per ogni coppia di sequenze i e j la distanza di Hamming che le separa, ovvero quanti bit è necessario commutare nella sequenza i per trasformarla nella sequenza j e viceversa (la distanza è simmetrica). Ad esempio, in un insieme di sei sequenze binarie (1-6) come sotto, la matrice $D = \{d_{ij}\}$ delle distanze, per brevità espressa in forma triangolare, è:

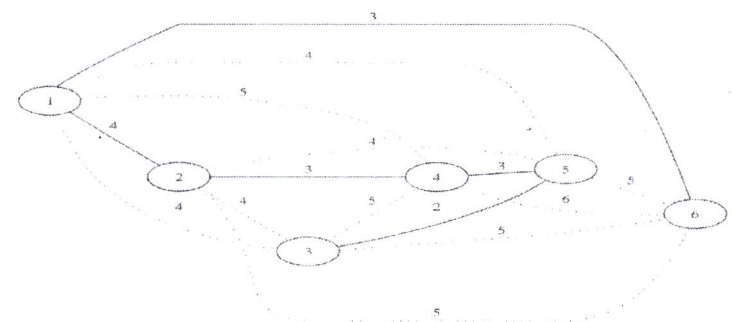
1) 011100011101
2) 101101011001
3) 110100111001
4) 101001111101
5) 100100111101
6) 010101011100

	1	2	3	4	5	6
1	0	4	4	5	1	3
2		0	4	3	4	5
3			0	5	2	5
4				0	3	6
5					0	5
6						0

Per sfruttare le ridondanze fra le varie sequenze si può memorizzare interamente una sequenza, e quindi memorizzare le differenze che permettono di ricavare tutte le altre sequenze, in maniera diretta o indiretta, a partire da quella di riferimento. La memorizzazione delle differenze tra due sequenze avviene tramite la lista delle posizioni dei bit da invertire. Una posizione è un numero codificato con $\lceil log_2(M)\rceil$ bit, quindi il numero di bit utilizzati per memorizzare la lista delle differenze tra i e j è direttamente proporzionale a d_{ij}.

Spiegare come si può ricondurre il problema di scelta di quali differenze memorizzare, al fine di minimizzare il numero totale di bit di memoria utilizzati, al problema di determinare l'albero di supporto di costo minimo in un apposito grafo. Risolvere il problema per l'esempio citato.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE: L'idea è quella di generare un grafo completo G con un nodo per ogni sequenza e con un lato tra ogni coppia di sequenze, avente peso d_{ij}. L'insieme delle differenze da memorizzare si può vedere come un sottografo G' del grafo G: per ogni lato (i, j) in G' si memorizzerà la differenza tra le sequenze i e j.
Poiché si memorizzerà per intero una sola sequenza (non importa quale), per poter ricostruire ogni altra sequenza tramite le differenze il sottografo G' dovrà essere connesso. Dal momento che cerchiamo la soluzione con costo di memorizzazione minore, è ovvio che in G' non ci saranno cicli. Quello che stiamo cercando è quindi un albero di supporto di costo minimo su G, come ad esempio quello dato nella seguente figura ricavato tramite l'algoritmo di Kruskal.



◇

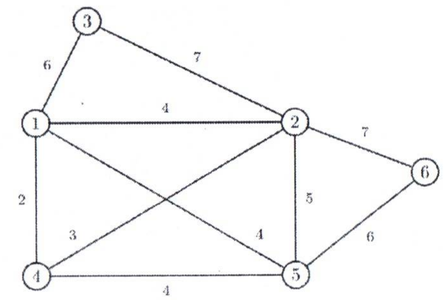
ESERCIZIO 3 **Campagna elettorale**
Un candidato alle prossime elezioni presidenziali USA decide di condurre la sua campagna elettorale lungo la Route 66 da Chicago a Los Angeles. Il viaggio è in una direzione e il candidato non ritorna mai sui suoi passi. Lungo la strada si incontrano n città, con indice da 1 a n, secondo l'ordine in cui si incontrano. Il candidato non può tenere un discorso in ogni città ma deve scegliere un sottoinsieme di città in cui fermarsi. La distanza in miglia tra una città i e la successiva $i+1$ è di $c_{i,i+1}$. Il candidato ha deciso di viaggiare almeno d miglia e non più di D tra una tappa e la successiva. Inoltre, il candidato vorrebbe raggiungere il maggior numero di elettori. Si stima che al discorso nella città i saranno presenti v_i elettori.
Formulare il problema di pianificare il viaggio del candidato come un problema di ricerca di cammino minimo o massimo su un apposito grafo. Descrivere il grafo.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE: Il problema può essere rappresentato come un problema di cammino massimo su un grafo direzionato $G = (N, A)$ così costruito:

- esiste un nodo per ogni città incontrata $\longrightarrow |N| = n$;
- esiste un arco per ogni coppia di città $i, j \in N$ tali che $d \leq \sum_{k=i}^{k=j-1} c_{k,k+1} \leq D$. Ogni arco rappresenta una possibile tappa da percorrere in un giorno;
- ad ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un peso v_i: infatti l'arco rappresenta la scelta di tenere un comizio in i e ripartire il giorno successivo con destinazione j.

Sul grafo così costruito il cammino massimo corrisponde a raccogliere il massimo numero di voti. ◇

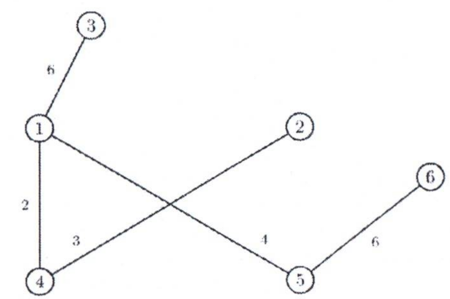
ESERCIZIO 4 Trovare l'albero di copertura di costo minimo sul grafo in figura, applicando l'algoritmo di Kruskal.



TRACCIA DELLA SOLUZIONE:
Si ordinano gli archi per costo non crescente:
(1,4); (2,4); (1,5); (1,2); (2,5); (1,3); (5,6); (2,3); (2,6); (3,5); (4,6); (1,6); (3,6); (3,4).
L'insieme degli archi dell'albero inizialmente è vuoto: $T = \emptyset$.

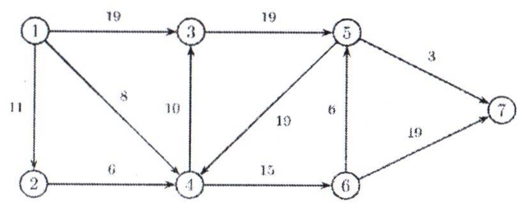
- $e = (1,4)$: non ci sono cicli, $T = \{(1,4)\}$;
- $e = (2,4)$: non ci sono cicli, $T = \{(1,4), (2,4)\}$;
- $e = (1,5)$: non ci sono cicli, $T = \{(1,4), (2,4), (1,5)\}$;
- $e = (4,5)$: si forma il ciclo 1-4-5;
- $e = (1,2)$: si forma il ciclo 1-4-2;
- $e = (2,5)$: si forma il ciclo 1-4-2-5;
- $e = (1,3)$: non ci sono cicli, $T = \{(1,4), (2,4), (1,5), (1,3)\}$;
- $e = (5,6)$: non ci sono cicli, $T = \{(1,4), (2,4), (1,5), (1,3), (5,6)\}$;

$|T| = |V| \Longrightarrow$ STOP. L'albero ottenuto, di costo 21, è:



◇

Esercizio 5 Si consideri il problema di trovare l'albero dei cammini minimi sul seguente grafo:

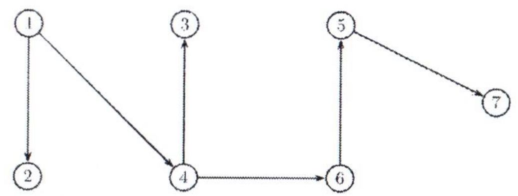


Trovare l'albero dei cammini minimi, illustrando i passi dell'algoritmo applicato.

Traccia della soluzione: Il problema si risolve applicando l'algoritmo di Dijkstra.

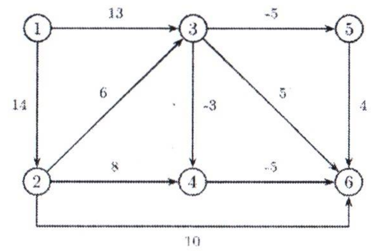
d[1],P[1]	0,1						
d[2],P[2]	M,1	11,1	11,1				
d[3],P[3]	M,1	19,1	18,4	18,4			
d[4],P[4]	M,1	8,1					
d[5],P[5]	M,1	M,1	M,1	M,1	37,3	29,6	
d[6],P[6]	M,1	M,1	23,4	23,4	23,4		
d[7],P[7]	M,1	M,1	M,1	M,1	M,1	42,6	32,5
Q	1	2,3,4	2,3,6	3,6	6,5	5,7	7
i	1	4	2	3	6	5	7

Applicando l'algoritmo di Dijkstra si ottiene il seguente albero dei cammini minimi:



◇

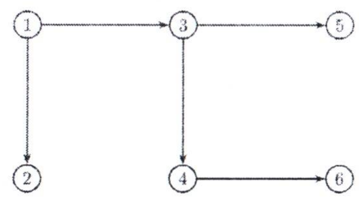
Esercizio 6 Trovare l'albero dei cammini minimi con radice 1 sul seguente grafo, illustrando i passi dell'algoritmo applicato.



Traccia della soluzione: Si applica l'algoritmo SPT_aciclico. I nodi devono essere rinumerati secondo la buona enumerazione:

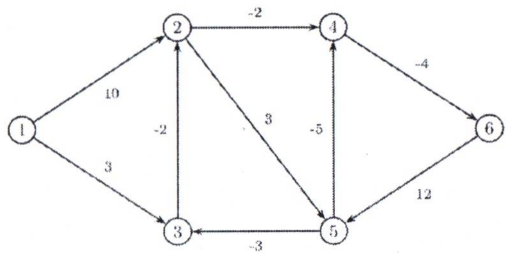
i	$\phi(i)$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6

Dopo aver enumerato i nodi del grafo, si ottiene il seguente albero dei cammini minimi:



◇

ESERCIZIO 7 Si calcoli l'albero di cammini minimi con radice 1 sul seguente grafo:



TRACCIA DELLA SOLUZIONE: Per risolvere il problema si applica l'algoritmo di Bellman-Ford:

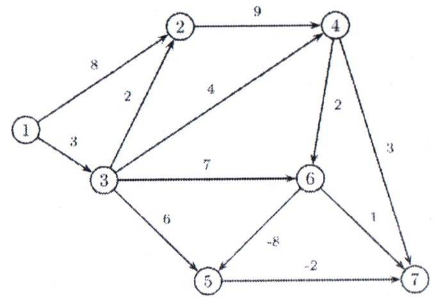
$d[1], P[1], k[1]$	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1
$d[2], P[2], k[2]$	M,1,0	10,1,1	10,1,1	1,3,2	1,3,2	1,3,2	1,3,2	-1,3,3	-1,3,3	-1,3,3
$d[3], P[3], k[3]$	M,1,0	3,1,1	3,1,1	3,1,1	3,1,1	3,1,1	1,5,2	1,5,2	1,5,2	1,5,2
$d[4], P[4], k[4]$	M,1,0	M,1,0	8,2,1	8,2,1	-1,2,1	-1,2,1	-1,2,1	-1,2,1	-3,2,2	-3,2,2
$d[5], P[5], k[5]$	M,1,0	M,1,0	13,2,1	13,2,1	4,2,1	4,2,1	4,2,1	4,2,1	2,2,2	2,2,2
$d[6], P[6], k[6]$	M,1,0	M,1,0	M,1,0	M,1,0	M,1,0	-5,4,1	-5,4,1	-5,4,1	-5,4,1	-7,4,1
Q	1	2,3	3,4,5	2,4,5	4,5	5,6	3,6	2,6	4,5,6	5,6
i	1	2	3	2	4	5	3	2	4	5

$d[1], P[1], k[1]$	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1	0,1,1
$d[2], P[2], k[2]$	-1,3,2	-3,3,4	-3,3,4	-3,3,4	-3,3,4	-5,3,5	-5,3,5	-5,3,5	-5,3,5	-7,3,6
$d[3], P[3], k[2]$	-1,5,3	-1,5,3	-1,5,3	-1,5,3	-3,5,4	-3,5,4	-3,5,4	-3,5,4	-5,5,5	-5,5,5
$d[4], P[4], k[4]$	-3,2,2	-3,2,2	-5,2,3	-5,2,3	-5,2,3	-5,2,3	-7,2,4	-7,2,4	-7,2,4	-7,2,4
$d[5], P[5], k[5]$	2,2,2	2,2,2	0,2,3	0,2,3	0,2,3	0,2,3	-2,2,4	-2,2,4	-2,2,4	-2,2,4
$d[6], P[6], k[6]$	-7,4,1	-7,4,1	-7,4,1	-9,4,1	-9,4,1	-9,4,1	-9,4,1	-11,4,1	-11,4,1	-11,4,1
Q	3,6	2,6	4,5,6	5,6	3,6	2,6	4,5,6	5,6	3,6	2,6
i	3	2	4	5	3	2	4	5	3	

Poichè il nodo 2 è entrato nella lista per la sesta volta, l'algoritmo termina rilevando la presenza di un ciclo negativo.

◇

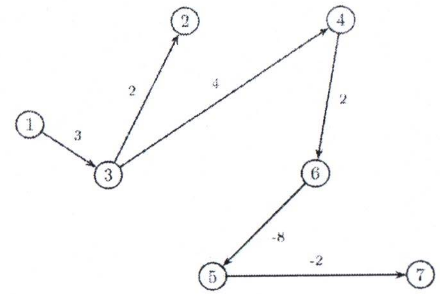
ESERCIZIO 8 Trovare l'albero dei cammini minimi con radice nel nodo 1 sul seguente grafo:



TRACCIA DELLA SOLUZIONE: Si applica l'algoritmo SPT_aciclico. I nodi devono essere rinumerati secondo la buona enumerazione:

i	$\phi(i)$
1	1
2	3
3	2
4	4
5	6
6	5
7	7

Dopo aver enumerato i nodi del grafo, si ottiene il seguente albero dei cammini minimi:



◇

ESERCIZIO 9 **Software house**

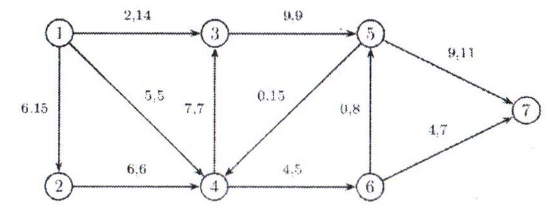
Una Software House deve stabilire se tre progetti possono essere completati durante i prossimi quattro mesi rispettando il seguente calendario: il progetto P_1, che può iniziare solo dopo il primo mese, deve essere terminato entro il terzo mese, i progetti P_2 e P_3, che possono iniziare subito, devono essere completati rispettivamente entro il quarto e il secondo mese. I progetti richiedono rispettivamente 8, 10 e 12 mesi uomo. Ogni mese sono disponibili otto ingegneri a tempo pieno, però solo sei di essi possono lavorare contemporaneamente su uno stesso progetto. È possibile terminare i tre progetti in tempo? Si spieghi come ricondurre il problema in esame ad un problema di flusso massimo.

TRACCIA DELLA SOLUZIONE: Il problema può essere rappresentato come un problema di flusso massimo su un grafo così costruito:

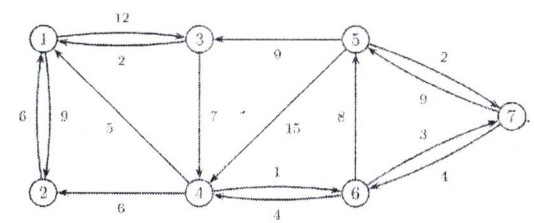
- ogni mese è associato ad un nodo;
- ogni progetto è associato ad un nodo;
- vengono aggiunti un nodo sorgente e un nodo destinazione;
- un arco collega il nodo che rappresenta il mese i al nodo che rappresenta il progetto j se il mese i cade tra l'inizio e la scadenza del progetto j. L'arco ha capacità 6, pari al numero di ingegneri che possono lavorare a uno stesso progetto in un mese;
- un arco con capacità pari al numero di ingegneri disponibili (8) collega il nodo sorgente a ogni nodo-mese;
- un arco collega ogni nodo-progetto con il nodo destinazione, con una capacità pari al numero di mesi uomo richiesti dal progetto.

I progetti possono essere eseguiti se il flusso massimo è pari alla somma dei mesi uomo richiesti dai progetti. ◇

ESERCIZIO 10 Calcolare il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 nel seguente grafo, in cui sono indicati, per ogni arco, il flusso iniziale e la capacità, in quest'ordine. Illustrare i passi dell'algoritmo applicato e indicare un taglio di capacità minima.

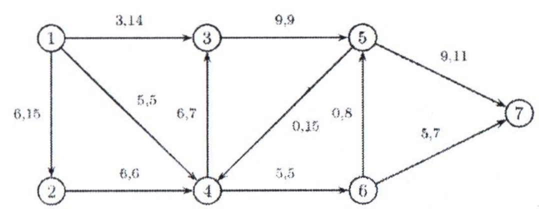


TRACCIA DELLA SOLUZIONE: Primo grafo residuale:

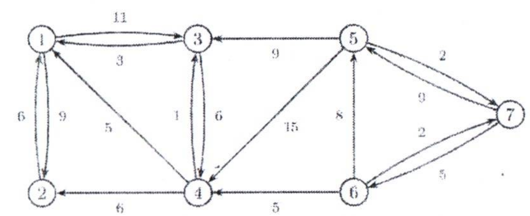


Cammino aumentante 1 - 3 - 4 - 6 -7, $\theta = 1$. Il flusso passa da 13 a 14.

Nuovo flusso.

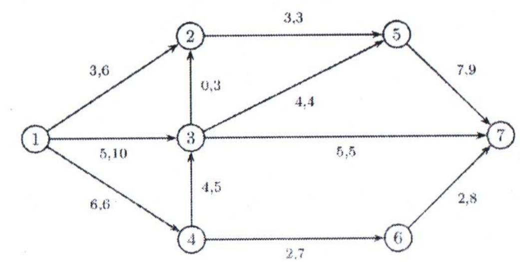


Nuovo grafo residuale:

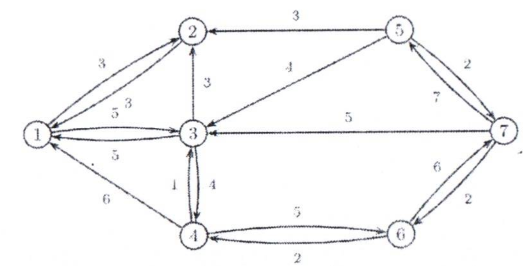


Il taglio è dato da $N_s = \{1, 2, 3, 4\}$, $N_t = \{5, 6, 7\}$, $U(N_s, N_t) = 14$. ◇

Esercizio 11 Calcolare il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 nel seguente grafo, in cui sono indicati, per ogni arco, il flusso iniziale e la capacità. Illustrare i passi dell'algoritmo applicato e indicare un taglio di capacità minima.

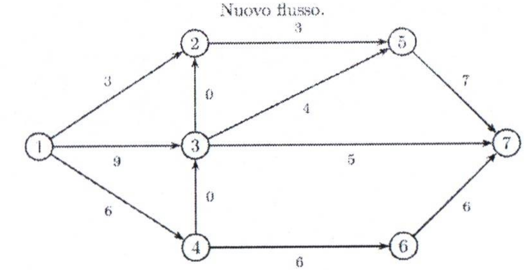


Traccia della soluzione: Primo grafo residuale:

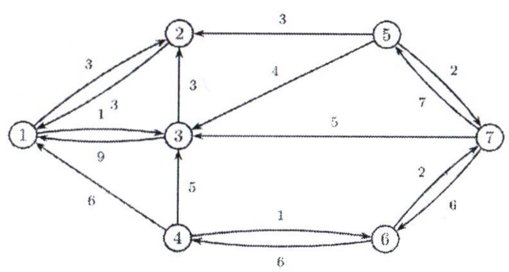


Cammino aumentante 1 - 3 - 4 - 6 - 7, $\theta = 4$. Il flusso passa da 14 a 18.

Nuovo flusso.



Nuovo grafo residuale:



Il taglio è dato da $N_s = \{1, 2, 3\}$, $N_t = \{4, 5, 6, 7\}$, $U(N_s, N_t) = 18$. ◇