Mesure et intégration

Quizz 1

1) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f une application de X dans un ensemble X'.

La famille $f(\mathcal{A})$ est elle en général une tribu sur X' ?

☐ oui ☐ non

Non en général, par exemple si f est constante, alors $f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{y\}\}$

2) Soit (X) un ensemble, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux tribus sur X.

La famille $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est elle en général une tribu sur X ?

☐ oui ☐ non

Non en général, contre exemple : $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \sigma(\{1\}, \{2, 3\})$, $\mathcal{A}' = \sigma(\{1, 2\}, \{3\})$. L'union ne contient pas $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$.

3) Les familles suivantes sont-elles des π-systèmes sur $\mathbb{R}$? (on supposera sans forcément le préciser explicitement que l'ensemble vide est ajouté à la famille)

Vrai ☐ Faux ☐ $\{[a, b[\,,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Vrai

Vrai ☐ Faux ☐ $\{[a, b]\,,\ a, b \in \mathbb{N}\}$

Vrai

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des ensembles de cardinal $= N$, avec $N \geq 1$.

Faux en général, l'intersection de 2 ensemble de cardinal 2 peut être de cardinal 1. Par contre c'est vrai pour $N = 1$ puisque l'on a rajouté $\emptyset$, comme précisé en préambule.

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des ensembles de cardinal $\leq N$, avec $N \geq 1$

Vrai

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des ensembles de cardinal fini

Vrai

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des ensembles de cardinal dénombrable.

Vrai

Sont-elles des classes monotones ?

Non dans tous les cas, même si on rajoute $\mathbb{R}$. Noter que la dernière vérifie les conditions 2 et 3, elle ne contient juste pas $\mathbb{R}$ (et si on rajoute $\mathbb{R}$ elle ne vérifie plus la condition 2). En fait je n'ai pas en tête d'exemple explicite de famille qui soit une classe monotone non triviale, suggestions bienvenues ...

4) Soit X un ensemble infini, et $\mathcal{A}$ la collection des ensembles A tels que A ou A^c est fini. S'agit-il d'une tribu ? (●●)

☐ oui ☐ non

Non. On peut considérer par exemple une injection de $\mathbb{N}$, dans X, notée (x_n). La réunion des x_{2n} est censée être dans la tribu, mais ni elle ni son complémentaire ne sont finies.

5) Les familles suivantes engendrent la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$:

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des parties fermées

Vrai, il s'agit d'une famille dans la tribu des boréliens, et elle contient notamment les $]-\infty, c]$

Vrai ☐ Faux ☐ La famille $\{[a, b[\,,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Vrai, il s'agit de boréliens comme intersection des $]a - 1/n, b[$ et on peut retrouver les intervalles ouverts en considérant l'union des $[a + 1/n, b[$.

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des compacts

Vrai, il s'agit de fermés, donc de boréliens, et elle contient notamment les $[a, b]$, donc les $]a, b[$ par union dénombrable, comme précédemment.

6) Soient μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur le même espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On a alors

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda\mu_1$ est une mesure pour tout λ réel.

Faux évidemment en général, mais vrai si $\lambda \geq 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ La somme $\mu_1 + \mu_2$ est une mesure

Vrai .

Vrai ☐ Faux ☐ Le produit $\mu_1 \times \mu_2$ est une mesure

Faux en général, on perd l'additivité. Prendre par exemple $\mu_1 = \mu_2$, deux ensembles A et B disjoints de masse 1, on a

$$\mu_1 \times \mu_2(A \cup B) = 4 \neq 2 = \mu_1 \times \mu_2(A) + \mu_1 \times \mu_2(B).$$

Noter que la question n'est pas très bien posée en général (si les mesures ne sont pas finie), car il faudrait s'entendre sur ce que vaut le produit $0 \times +\infty$.

Vrai ☐ Faux ☐ La différence $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure

Faux évidemment en général, ça peut prendre des valeurs négatives, mais c'est quand même vrai dès que $\mu_2(A) \leq \mu_1(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.