

# Probabilités IV

MINES ParisTech

2 décembre 2022 (#524f182)

**Question 1 (réponse multiple)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. i.i.d. de loi  $\Gamma(\alpha, \theta)$  et  $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

- ☐ A :  $M_n \rightarrow \frac{\alpha}{\theta}$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ B :  $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \frac{\alpha}{\theta}$
- ☐ C :  $\sqrt{n}(M_n - \frac{\alpha}{\theta}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{\alpha}{\theta^2})$
- ☐ D :  $M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}^1} \frac{\alpha}{\theta}$

**Question 2 (réponse multiple)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. i.i.d. de même loi qu'une variable  $X$  de fonction de répartition  $F$  et  $a \in ]0, 1[$

- ☐ A :  $X_n^a \rightarrow \mathbb{E}(X^a)$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ B :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{]-\infty, a]}(X_i) \rightarrow F(a)$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ C :  $\mathbb{P}(X_n \leq a) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ D :  $\mathbb{E}(1_{]a, +\infty[}(X)) = 1 - F(a)$

**Question 3 (réponse multiple)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. indépendantes de loi  $\mathcal{E}(\lambda_n)$  où  $\lambda_n$  est une suite réelle qui converge vers 1.

- ☐ A :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$
- ☐ B :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 1$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ C :  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 1$  quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ D :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{E}(1)$

**Question 4 (réponse multiple)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. indépendantes de loi de Cauchy, dont on rappelle la densité :  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$ .

- ☐ A :  $\frac{1}{\sqrt{n}} (\sum_{i=1}^n X_i - 1) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- ☐ B :  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ C :  $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$
- ☐ D : Rien de tout cela

**Question 5 (réponse multiple)** Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de v.a. indépendantes et une v.a.  $X$ , toutes définies sur le même espace probabilisé, telles que  $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}$ .

- ☐ A :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$
- ☐ B :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$
- ☐ C :  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X$  p.s.
- ☐ D : Rien de tout cela