Mesure et intégration

Quizz 3

**1)** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et $f$ une application de $X$ dans un ensemble $X'$.

Vrai □ Faux □ La famille $f(\mathcal{A})$ est une tribu sur $X'$.

**2)** Soit $(X)$ un ensemble, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux tribus sur $X$.

Vrai □ Faux □ la famille $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est une tribu sur $X$.

**3)** Les familles suivantes engendrent la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ :

Vrai □ Faux □ La famille des parties fermées

Vrai □ Faux □ La famille $\{[a, b[\,,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Vrai □ Faux □ La famille des compacts

**4)** Soient $\mu_1$ et $\mu_2$ deux mesures définies sur le même espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On a alors

Vrai □ Faux □ $\lambda\mu_1$ est une mesure pour tout $\lambda$ réel.

Vrai □ Faux □ La somme $\mu_1 + \mu_2$ est une mesure

Vrai □ Faux □ Le produit $\mu_1 \times \mu_2$ est une mesure

Vrai □ Faux □ La différence $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure

Toute mesure est une mesure extérieure.

Vrai □ Faux □

**5)** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace métrique mesurable. L'application $\mu$ qui à $A \in \mathcal{A}$ associe son diamètre

$$\mu(A) = \text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)\,,\ \mu(\emptyset) = 0,$$

est une

mesure □ mesure extérieure □ ni l'une ni l'autre □

**6)** On considère l'ensemble $X$ des personnes habitant sur terre, muni de la tribu discrète. Préciser si les $\mu$ définis ci-dessous sont des mesures, mesures extérieures, ou ni l'un ni l'autre. On définit $\mu$ par la valeur qu'elle affecte à une sous-population $A \in \mathcal{P}(X)$ (en affectant toujours 0 à $\emptyset$).

Mesure □ Mesure extérieure □ nombre total d'années vécues par les éléments de $A$

Mesure □ Mesure extérieure □ âge moyen des individus dans $A$

Mesure □ Mesure extérieure □ âge maximal parmi les individus dans $A$ (avec $\mu(\emptyset) = 0$).

Mesure □ Mesure extérieure □ âge minimal parmi les individus dans $A$

Mesure □ Mesure extérieure □ nombre de "connections" entre individus de $A$ (on compte 1 pour tout couple $(x, y)$ tel que $x$ et $y$ se sont déjà rencontrés au moins une fois).

**7)** On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue $\lambda$. Les assertions suivantes sont elles vraies / fausses ?

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A}) = \lambda(\bar{A})$ pour tout intervalle $A$

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A})$ pour tout borélien $A$

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(\partial A) \leq \lambda(A)$ pour tout borélien $A$

Vrai ☐ Faux ☐ Tout borélien borné est de mesure finie

Vrai ☐ Faux ☐ Tout borélien de mesure finie est borné

Vrai ☐ Faux ☐ Tout ouvert de mesure finie est borné