

# UE11 Topologie

## Quizz 1

1) Dans chacun des cas ci-dessous, préciser si la notion définie est une distance ou pas, en précisant le ou les conditions invalidées. Décrire, lorsqu'il s'agit d'une distance, et que cela est possible, la forme des boules.

Vrai ☐ Faux ☐ La somme de deux distances

CORRECTION.

*Vrai*

Vrai ☐ Faux ☐ Le produit de deux distances

CORRECTION.

*Faux : considérer par exemple le carré de la distance usuelle sur  $\mathbb{R}$ . On a*

$$d(0, 2)^2 = 4 < d(0, 1)^2 + d(1, 2)^2,$$

*qui invalide l'inégalité triangulaire.*

Vrai ☐ Faux ☐ Le symbole de Kronecker  $(x, y) \in X \times X \mapsto \delta_{xy} = 1$  si  $x \neq y$ , et 0 sinon.

CORRECTION.

*Vrai.*

Vrai ☐ Faux ☐ Le nombre de composantes différentes entre deux vecteurs  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

CORRECTION.

*Vrai : si  $x$  diffère de  $z$  sur  $a$  composantes, et si  $y$  diffère de  $z$  sur  $b$  composantes, alors  $x$  diffère de  $y$  sur au plus  $a + b$  composantes.*

2) Dans chacun des cas ci-dessous, préciser si l'ensemble proposé est un ouvert ou pas ( $\mathbb{R}^n$  est supposé muni de la distance euclidienne canonique)

Vrai ☐ Faux ☐  $]0, +\infty[ \subset \mathbb{R}$

CORRECTION.

*Vrai*

Vrai ☐ Faux ☐  $\mathbb{Q}$

CORRECTION.

*Faux*

Vrai ☐ Faux ☐  $\bigcup ]q_k - 1/2^k, q_k + 1/2^k[$ , où  $q_k$  est une énumération des rationnels.

CORRECTION.

*Vrai, c'est une réunion d'ouverts*

(•) Vrai ☐ Faux ☐  $\bigcap ]q_k - 1/2^k, q_k + 1/2^k[$ , où  $q_k$  est une énumération des rationnels.

CORRECTION.

*Vrai. A priori une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte, mais ici cet intersection est vide, donc ouverte*

Vrai ☐ Faux ☐  $]0, 1[ \times ]0, 1[ \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$

CORRECTION.

*Faux, tout boule centrée en un point de cet ensemble contient des points de troisième coordonnée non nulle, donc hors de l'ensemble*

3) Soit  $X$  un espace métrique, et  $A \subset B \subset X$ .

Vrai ☐ Faux ☐  $\bar{A} \subset \bar{B}$

CORRECTION.

*Vrai :  $\bar{B}$  est un fermé qui contient  $B$ , donc  $A$ , donc il contient le plus petit fermé qui contient  $A$ .*

Vrai ☐ Faux ☐  $\partial A \subset \partial B$

CORRECTION.

*Faux : Considérer par exemple  $[0, 1]$  et  $[0, 2]$*

(•) Vrai ☐ Faux ☐ Un ensemble discret est d'intérieur vide.

CORRECTION.

*Vrai pour une partie de  $\mathbb{R}$  par exemple, il ne peut contenir aucune boule ouverte. Mais faux en général : on peut considérer par exemple l'espace métrique  $X = \mathbb{N}$ , qui est discret, mais aussi ouvert comme espace métrique, donc d'intérieur égal à lui-même.*

4) Suites

Vrai ☐ Faux ☐ Une suite convergente sur  $\mathbb{R}$  est bornée

CORRECTION.

*Vrai*

Vrai ☐ Faux ☐ Une suite bornée sur  $\mathbb{R}$  est convergente

CORRECTION.

*Faux, exemple  $(-1)^n$*

(•) Vrai ☐ Faux ☐ Une suite sur  $\mathbb{R}$  peut admettre une infinité de valeurs d'adhérence

CORRECTION.

*Vrai, considérer par exemple une énumération des rationnels, tout réel est valeur d'adhérence de la suite.*

Vrai ☐ Faux ☐ Une partie  $K$  finie d'un espace métrique est toujours compacte.

CORRECTION.

*Vrai : une suite dans  $K$  visite nécessairement une infinité de fois au moins l'un des points de  $K$ .*

Vrai ☐ Faux ☐ Une partie finie d'un espace métrique est toujours complète .

CORRECTION.

*Vrai : toute suite de Cauchy est stationnaire sur l'un des points de l'ensemble au delà d'un certain rang*

Vrai ☐ Faux ☐ L'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte.

CORRECTION.

*Faux : considérer par exemple la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow e^x$ , on a  $f^{-1}([0, 1]) = ]-\infty, 0]$ , qui n'est pas compact car non borné.*