

Chapitre VI

Corrigés des exercices

Sommaire

VI.1 Topologie	161
VI.2 Calcul Différentiel	172
VI.3 Mesure et Intégration	187

VI.1 Topologie

Correction de l'exercice I.2.1 (page 8)

Une matrice est dans \mathcal{D} si et seulement si :

1. ses éléments diagonaux sont nuls, tous les autres étant strictement positifs ;
2. elle est symétrique : $d_{ij} = d_{ji}$ pour tous $i \neq j$;
3. ses coefficients vérifient les inégalités triangulaires : pour tout triangle (i, j, k) dans X^3 , on a

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{kj}.$$

L'ensemble \mathcal{D} est un cône de sommet 0 : on a $D \in \mathcal{D} \implies \lambda D \in \mathcal{D}$ pour tout $\lambda > 0$, qui ne contient pas son sommet. Ce cône est par ailleurs convexe : pour tous D_0, D_1 dans \mathcal{D} , tout $t \in [0, 1]$, on a

$$(1 - \lambda)D_0 + \lambda D_1 \in \mathcal{D}.$$

Correction de l'exercice I.2.2 (page 8)

On peut considérer par exemple la distance

$$(x, y) \in]-1, 1[^2 \longmapsto d(x, y) = |g(y) - g(x)|, \text{ avec } g(u) = \frac{u}{1 - u^2}.$$

Le caractère strictement croissant de cette fonction assure la séparation, la symétrie est immédiate, et l'inégalité triangulaire résulte de celle de la valeur absolue :

$$|g(u) - g(v)| = |g(u) - g(w) + g(w) - g(v)| \leq |g(u) - g(w)| + |g(w) - g(v)|.$$

Correction de l'exercice I.2.3 (page 8)

Si A est un singleton, ou une collection finie de points, ou un intervalle de type $[a, b]$, la distance est toujours atteinte.

En revanche si l'on prend $A =]0, 1[$, la distance $d(x, A)$ n'est atteinte que pour $x \in A$.

Correction de l'exercice I.2.4 (page 8)

La connaissance de la fonction distance à A dit beaucoup de chose sur A , mais ne suffit pas à le déterminer, comme le suggère l'exercice précédent : les intervalles $[0, 1]$, $[0, 1[$, $]0, 1[$, $]0, 1]$ on la même "signature" en termes de fonction distance, ils sont pourtant différents. Comme on le verra, la distance permet d'identifier l'adhérence de A .

Pour $A = \mathbb{D} \subset X = \mathbb{R}$, la distance à A est identiquement nulle (on peut approcher avec une précision arbitraire un réel par un décimal). De façon plus générale, comme on le verra, la distance est nulle dès que A est *dense* dans X .

Correction de l'exercice I.2.5 (page 9)

a) La séparation et la symétrie sont immédiates. Si l'on considère maintenant x, y , et z dans H_N . Si aucun des bits qui diffèrent entre x et y ne correspond à l'un de ceux qui diffèrent entre y et z , on a $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$. Si ces deux ensemble ont un ou des éléments communs, on a $d(x, z) < d(x, y) + d(y, z)$, d'où l'inégalité triangulaire.

Chaque point est seul dans sa boule de rayon $1/2$, il s'agit donc d'un espace discret.

Pour tout $x \in H_N$, le point le plus éloigné est celui obtenu en changeant tous les bits, il est donc à distance N . La diamètre est donc N , et l'on peut dire que tout point est "sur le bord de H_N ", au sens où tout point admet un élément diamétralement opposé.

2) On considère le cas $x = (0, 0, \dots, 0)$, la situation étant exactement la même si l'on part d'un autre éléments. Pour $r < 1$, la boule est réduite au centre. Pour $1 \leq r < 2$, on a tous les points qui diffèrent d'un bit, il y en a donc N . Pour $2 \leq r < 3$ on a $C_N^2 = N(N-1)/2$. De façon générale, pour $k \leq r < k+1$, le cardinal est C_N^k , et $C_N^N = 1$ pour $r \geq N$ (la sphère est constituée de l'unique point diamétralement opposé).

Correction de l'exercice I.2.6 (page 9)

On a

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

On démontre la même inégalité sur $\|x\| - \|y\|$ en intervertissant les rôles de x et y , d'où l'inégalité sur $|\|y\| - \|x\||$.

Correction de l'exercice I.3.1 (page 11)

On a A_1 fermé, A_2 fermé, A_3 ni fermé ni ouvert, A_4 fermé, A_5 ni fermé ni ouvert, A_6 est ouvert, A_7 est fermé, A_8 ouvert, A_9 ni fermé ni ouvert, A_{10} fermé.

Correction de l'exercice I.2.7 (page 10)

La sphère unité pour la norme infinie est le carré $[-1, 1] \times [-1, 1]$. La sphère unité pour la norme 1 est aussi un carré centré en l'origine, dont l'un des côtés est le segment $[(1, 0), [0, 1]$ (les autres sont obtenus par rotations d'angles $\pi/2$, π , et $3\pi/2$). Pour $p = 2$, on a le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1. Entre 2 et ∞ , la sphère a la forme d'un carré aux coins arrondis, d'autant plus proche du carré (en restant intérieure au carré limite) que p tend vers $+\infty$. On a le même type de convergence, quand p passe de 2 à 1, vers le carré du cas $p = 1$ (par l'extérieur).

Correction de l'exercice I.3.2 (page 11)

L'intersection des intervalles $] -1/n, 1/n[$ est le singleton $\{0\}$, qui n'est pas ouvert car il ne contient aucune boule ouverte de centre 0.

L'union des $[1/n, 1]$ est $]0, 1]$, qui n'est pas fermé.

Correction de l'exercice I.3.3 (page 12)

a) L'intérieur étant un ouvert par définition, un ensemble qui s'identifie à son intérieur est ouvert. Par ailleurs un ouvert se contient, et c'est évidemment le plus grand des ouverts qu'il contient. Le raisonnement est analogue pour les fermés.

b) Un ensemble qui s'identifie à sa frontière est un fermé (il l'est comme adhérence de quelque chose), d'intérieur vide.

Correction de l'exercice I.3.4 (page 12)

a) $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = A$.

b) $\bar{A} = \overline{B}(0, 1)$, $\mathring{A} = A$, $\partial A = S(0, 1)$.

c) $\bar{A} = A$, $\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $\partial A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$.

d) $\bar{A} = A \cup \{0\}$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = \bar{A}$.

e) $\bar{A} = A \cup \{0\} \times [-1, 1]$, $\mathring{A} = \emptyset$, $\partial A = \bar{A}$.

Correction de l'exercice I.3.5 (page 13)

Toute boule $B(q, \varepsilon)$ contient un non rationnel (par exemple $q + \varepsilon\pi/4$), \mathbb{Q} est donc d'intérieur vide. Comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , son adhérence est \mathbb{R} tout entier, et sa frontière aussi. Pour un tel ensemble, la frontière est infinie non dénombrable, alors que l'ensemble lui-même est dénombrable.

Correction de l'exercice I.3.6 (page 15)

Le diamètre de $\overline{\mathbb{R}}$ pour cette métrique est π , et on a

$$B(0, \pi/2) =] - \infty, +\infty[, \quad B(1, \pi/2) =] - 1, +\infty[,$$

Correction de l'exercice I.3.7 (page 15)

On peut par exemple remplacer la fonction arctan par $x \mapsto \frac{1}{1+|x|}$.

Correction de l'exercice I.5.1 (page 17)

Soient a_1, a_2, \dots, a_p les valeurs prises par la suite de Cauchy. La quantité $d(a_i, a_j)$ admet un minimum $\varepsilon > 0$ sur l'ensemble des $1 \leq i < j \leq p$. On écrit le critère de Cauchy pour cet ε particulier : il existe N tel que, pour tous p, q plus grand que N , $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Les termes x_p pour $p \geq N$ s'identifient donc forcément à x_N .

Correction de l'exercice I.5.2 (page 17)

C'est une conséquence directe de la définition : pour tout ε , il existe N tel que, pour tous p, q plus grands que N , $d(x_p, x_q) < \varepsilon$, d'où $\text{diam}((X_N)) \leq \varepsilon$ (on prendra garde au fait que l'inégalité stricte devient large, mais ça ne remet pas en cause la convergence vers 0).

Correction de l'exercice I.5.3 (page 18)

La suite $x_n = 0.1111 \dots 1100$ (décimales égales à 1 jusqu'à la n -ième) est de Cauchy, mais ne converge pas vers un décimal.

Correction de l'exercice I.5.4 (page 18)

- a) On peut considérer par exemple la suite $x_n = \log(n)$.
- b) Les termes de la suite des $\sin(x_n)$ est dense dans $[-1, 1]$. On peut lui appliquer la fonction \tan (en supprimant part sécurité les n tels que $\sin(C_n) = \pm 1$, même si on peut penser a priori

il n'y en a aucun, puisque cela signifierait que π est commensurable au log d'un entier, *ce qui se saurait*¹), pour obtenir un ensemble dense dans \mathbb{R} .

Correction de l'exercice I.6.1 (page 19)

a) \mathbb{R} n'est pas compact car de $\mathbb{R} = \cup_{\mathbb{Z}}]n-1, n+1[$ on ne peut extraire aucun recouvrement fini. Pour $]0, 1[$, on peut considérer

$$]0, 1[\subset \bigcup_{n \geq 2} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} \right[.$$

d'où on ne peut extraire aucun recouvrement fini.

b) Si un ensemble est fini, de cardinal N chaque point est contenu dans l'un des ouverts du recouvrement, on peut donc extraire un recouvrement par N ouverts (voire moins).

c) Soit x_n décroissante vers 0. On peut recouvrir l'ensemble de ses termes par l'union des $]x_n/2, 2x_n[$, dont on ne peut extraire aucun recouvrement fini. Si l'on rajoute 0, alors pour tout recouvrement par des ouverts il existe un recouvrement qui contient 0. Les termes de la suite qui ne sont pas dans cet ouvert sont en nombre fini, on peut donc extraire un recouvrement fini de ce sous ensemble (voir (b)).

Correction de l'exercice I.6.2 (page 19)

L'application

$$T : x \in \overline{\mathbb{R}} \mapsto T(x) = \arctan(x),$$

(avec la convention $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$), est une isométrie entre $[-\pi/2, \pi/2]$ muni de la distance usuelle et \mathbb{R} . Pour toute suite x_n dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut extraire une sous suite telle que $y_{\varphi(n)} = T(x_{\varphi(n)})$ converge vers $y \in [-\pi/2, \pi/2]$, d'où la convergence de $T^{-1}(x_{\varphi(n)})$ vers $T^{-1}(y)$.

Correction de l'exercice I.6.3 (page 20)

Si l'on considère une suite de points dans l'intersection, on peut extraire une suite qui converge dans le premier compact. On extrait ensuite de cette première sous-suite une sous-suite qui converge dans le second.

Correction de l'exercice I.6.4 (page 20)

On considère une suite de points du fermé. Elle est dans le compact, on peut donc extraire une sous-suite qui converge dans le compact. La limite est dans le fermé, puisqu'il est fermé.

1. On aura compris qu'il ne s'agit pas ici d'une démonstration d'une grandeur rigueur...

Correction de l'exercice I.6.5 (page 21)

On définit P_n le polynôme de degré n donc le k -ième coefficient vaut $\exp(-k)$, pour $0 \leq k \leq n$. La suite ainsi construite est de Cauchy, mais ne converge vers aucun polynôme.

Correction de l'exercice I.7.1 (page 22)

L'application $f : x \mapsto f(x) = \sin(x)$ est continue, mais l'image de l'ouvert \mathbb{R} (ou de l'ouvert $] - \pi, \pi[$ par f , égale à $[-1, +1]$, n'est pas ouverte.

L'application $f : x \mapsto f(x) = e^x$ est continue, mais l'image du fermé \mathbb{R} par f , égale à $]0, +\infty[$, n'est pas fermée.

On notera que cette deuxième application est injective, on pourrait penser que ça “marche dans les deux sens”, mais comme elle n'est pas surjective, sa réciproque doit être vue comme application (le logarithme) de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , qui est aussi continue. L'image réciproque du fermé \mathbb{R} est $]0, +\infty[$, qui est bien *fermé* comme espace métrique à part entière (voir remarque I.3.4, page 11).

Correction de l'exercice I.7.2 (page 23)

- a) Tout borné est d'adhérence compacte, d'où f est bornée sur l'adhérence, donc sur le borné.
- b) La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur le borné $]0, 1[$ de \mathbb{R} , mais non bornée.

Correction de l'exercice I.10.1 (page 26)

- a) Il suffit de considérer la suite des intervalles $]0, 1/n[$.
- b) Comme on le verra, une suite décroissante de compacts a une intersection non vide (exercice I.10.6), il est donc sans espoir de chercher un exemple avec des bornés. On pourra considérer par exemple la suite des intervalles semi-infinis $[n, +\infty[$.

Correction de l'exercice I.10.2 (page 26)

1) La distance n'est nulle que si les points sont confondus, par définition. Les rôles joués par x et y dans la définition sont interchangeables, ce qui implique la symétrie. Pour l'inégalité triangulaire, considérons x , y , et z , et k_{xy} le plus petit indice pour lequel les bits de x et y diffèrent. On définit de même k_{xz} et k_{yz} . Les éléments x et y s'identifient sur les $k_{xy} - 1$ premiers bits, y et z sur les $k_{yz} - 1$, d'où x et z s'identifient par transitivité sur les $\min(k_{xy}, k_{yz}) - 1$ premiers bits, d'où l'on déduit, $k_{xz} \geq \min(k_{xy}, k_{yz})$, et l'inégalité triangulaire en appliquant la fonction décroissante $k \mapsto 2^{-k}$.

2) 3) 4) 5) 6)

Correction de l'exercice I.10.3 (page 27)

Le complémentaire de l'adhérence du complémentaire de A est un ouvert comme complémentaire d'un fermé.

Montrons qu'il est contenu dans A : pour tout $x \in (\overline{A^c})^c$, on a $x \notin \overline{A^c}$ d'où $x \notin A^c$, et donc $x \in A$.

Montrons pour finir que tout ouvert contenu dans A est contenu dans $x \in (\overline{A^c})^c$. Soit U un ouvert contenu dans A . Il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset U \subset A$. Le point x n'est donc pas dans l'adhérence du complémentaire de A (aucune suite du complémentaire de A ne peut tendre vers x), il appartient donc à $(\overline{A^c})^c$. Cet ouvert contient donc tous les ouverts contenus dans A , c'est donc le plus grand, à savoir l'intérieur de A .

Correction de l'exercice I.10.4 (page 27)

Tout point \bar{A} est limite d'une suite (x_n) de points de A (proposition I.4.6), on a donc

$$0 \leq d(x, A) \leq d(x, x_n) \rightarrow 0,$$

d'où $d(x, A) = 0$. Réciproquement, si $d(x, A) = 0$, il existe une suite minimisante (x_n) d'éléments de A telle que $d(x, x_n)$ tend vers 0, d'où $d(x, A) = 0$.

Si $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe une boule $B(x, \varepsilon) \subset A$, la distance de x à tout point de A est donc supérieure à ε , d'où $d(x, A) \geq \varepsilon > 0$. Inversement, si $d(x, A^c) = \alpha > 0$, alors tous les points y tels que $d(x, y) < \alpha$ sont dans A , i.e. $B(x, \alpha) \subset A$.

Par définition, la frontière est l'ensemble des points de l'adhérence de A (donc tels que $d(x, A) = 0$ d'après ce qui précède), qui ne sont pas dans $\overset{\circ}{A}$ (et donc tels que $d(x, A^c) = 0$).

Correction de l'exercice I.10.5 (page 27)

a) Il suffit de considérer par exemple le segment $[0, 1[\times \{0\}$. La distance est atteinte pour tout point de $\{(x, y), x < 1\}$, non atteinte pour les autres points.

b) Il suffit de prendre un ensemble non convexe, par exemple la réunion de deux singletons disjoints. En chaque point de la médiatrice, la distance est atteinte en deux points. On peut aussi avoir une distance atteinte en une infinité de points. Considérer par exemple le cercle unité. La distance est atteinte en un seul point pour tous les x non nuls, mais en tous les points de l'ensemble pour $x = (0, 0)$.

c)

d) On considère l'ensemble des stations-relais comme une famille de points du plan. Lorsque l'on passe un appel, le téléphone passe par la borne la plus proche. La zone couverte par une station donnée (en les supposant toutes de même puissance) est donc la *cellule* de Voronoï associée à la position de la station. Le terme de cellule provient du fait que la zone ressemble à une cellule organique (cellules de peau d'oignon par exemple).

Correction de l'exercice I.10.6 (page 27)

Pour tout n on choisit x_n dans K_n . La suite (x_n) est dans K_0 compact, elle admet donc une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers $x \in K_0$. Pour tout n , la suite extraite est dans K_n au-delà d'un certain rang. Comme K_n est compact, il est fermé, la limite x est donc dans K_n . L'élément x appartient donc à tous les K_n .

Correction de l'exercice I.10.7 (page 27)

a) L'application $y \mapsto d(x, y)$ est continue sur le compact K , elle atteint donc ses bornes, en particulier sa borne inférieure.

b) Si F est un fermé non vide, on choisit arbitrairement $y_0 \in F$. La distance de x à F est par définition inférieure ou égale à $d(x, y_0)$. Elle s'écrit donc comme infimum de $d(x, \cdot)$ sur

$$F \cap \{y, d(x, y) \leq d(x, y_0)\}.$$

Le second ensemble est fermé comme image réciproque du fermé $] - \infty, d(x, y_0)]$ par l'application $d(x, \cdot)$, c'est donc un fermé, et il est borné par définition. L'intersection ci-dessus est donc un fermé comme intersection de fermés, et borné, c'est un compact. La fonction distance atteint donc ses bornes, d'où l'on déduit que l'infimum est atteint.

Correction de l'exercice I.10.8 (page 28)**Correction de l'exercice I.10.9 (page 28)**

On s'intéresse à la continuité de l'application

$$x \in X \longmapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Pour tout $a \in A$, on a

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

En appliquant cette inégalité à une suite minimisante pour $d(y, A)$, c'est à dire une suite (a_n) dans A telle que $d(y, A) = \lim d(y, a_n)$, on obtient

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A).$$

On montre en échangeant les rôles de x et y que

$$d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A).$$

On a donc montré

$$\max(d(x, A) - d(y, A), d(y, A) - d(x, A)) = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y),$$

qui exprime le caractère 1-lipchitzien de $d(\cdot, A)$.

Correction de l'exercice I.10.10 (page 28)

On se place dans le cas où le demi-plan ne contient pas l'origine (sinon le minimiseur est 0), le mieux est de tracer la plus grosse "boule" centrée en 0, c'est à dire ici un carré donc les côtés sont orientés à $\pi/4$ et $3\pi/4$. On voit que le minimum est en général réalisé par un coin du carré (donc un point sur l'un des axes), sauf si la frontière du demi plan est alignée avec l'un des côté, auquel cas le minimum n'est pas unique, car réalisé par tous les points de l'un des côtés. Cela illustre l'intérêt de l'utilisation de rajouter cette norme ℓ^1 à certains problèmes de minimisation sous contraintes (approche de type lasso), car ce terme a tendance à diminuer le nombre de coefficients non nuls pour le minimiseurs (approche *parcimonieuse*, voir aussi exercice I.10.11).

Correction de l'exercice I.10.11 (page 28)

On peut bien sûr définir la quantité $\sum |x_k|^p$ pour $p < 1$, on garde les propriétés de séparation et de symétrie, mais on perd l'inégalité triangulaire. On pourra par exemple considérer le cas $p = 1/2$, et $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, on a

$$\|x\|_{1/2} = 1, \quad \|y\|_{1/2} = 1, \quad \|x + y\|_{1/2} = 4 > \|x\|_{1/2} + \|y\|_{1/2}.$$

Lorsque l'on fait tendre p vers 0 dans $\sum |x_k|^p$, chaque terme nul reste nul, et les termes non nuls tendent vers 1, on converge donc vers un entier positif qui est le nombre de termes non nuls parmi les composantes de x . Bien que cela sorte du cadre de la norme, il s'agit d'une quantité (on parle de *norme 0*), qui peut être très intéressante à utiliser dans un contexte d'optimisation. Si l'on cherche à minimiser une fonctionnelle par rapport à un vecteur x de \mathbb{R} , rajouter à la fonctionnelle un terme proportionnelle à $\|x\|_0$ aura tendance à minimiser cette quantité, et donc à limiter le nombre de termes non nul dans le minimum trouvé, ce qui peut être très intéressant si le problème d'optimisation consistant par exemple à approcher une fonction par une combinaison de fonctions particulières, dont les coefficients sont les x_i . On parle d'approximation *parcimonieuse* quand on cherche de la sorte à approcher quelque chose par une combinaison de constituants élémentaires de façon en quelque sorte économique (l'approximant sera en particulier plus léger à stocker sur un ordinateur).

Correction de l'exercice I.10.12 (page 29)

a) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty.$$

On réalise l'égalité à droite pour $x = (1, 1, \dots, 1)$, et l'égalité à gauche pour $x = (1, 0, \dots, 0)$.

b) La constante de l'inégalité de droite tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui suggère que les normes ne sont pas équivalentes en dimension infinies.

Correction de l'exercice I.10.13 (page 29)

a) On a

$$m_p = \frac{1}{n^{1/p}} \|x\|_p = \frac{1}{n^{1/p}} \left(\sum x_k^p \right)^{1/p} \leq \frac{1}{n^{1/p}} (n \max(x_k)^p)^{1/p} = \max(x_k),$$

et de la même manière $m_p \geq \min(x_k)$. Il s'agit bien d'un nombre compris entre la valeur min et la valeur max.

On a par ailleurs, d'après l'inégalité de Hölder (proposition IV.1.31, page 139),

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^d \theta_i |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^d \theta_i |y_k|^q \right)^{1/q},$$

avec $1/p + 1/q = 1$. En appliquant cette inégalité à (x_k) et le vecteur constant égal à 1, on obtient

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \theta_i |x_k|^p \right)^{1/p} n^{1/q},$$

d'où

$$n^{1/q-1} \left(\sum_{k=1}^n \theta_i |x_k|^p \right)^{1/p} \geq m_1.$$

Comme $1/q - 1 = -1/p$, on en déduit $m_p \geq m_1$. Chaque élève voit donc sa moyenne augmenter par rapport au calcul classique.

b) Le fait d'utiliser une somme des notes à la puissance $p > 1$ renforce l'importance des notes élevées, d'autant plus que p est grand. La moyenne 1 habituellement utilisée favorise les élèves qui ne sacrifient aucune épreuves, alors qu'un p grand favorisera les profil plus spécialisés, qui brillent à certaines épreuves quitte à en sacrifier d'autres. Dans le cas extrême $p = +\infty$, on ne garde que la meilleure note. Dans le cas $n = 10$, un élève ayant 20 à une épreuve, 0 aux autres, aura une moyenne m_1 de 2, et une moyenne m_∞ de 20, alors qu'un élève ayant 10 à toutes les épreuves aura une moyenne m_1 de 10 (donc largement au-dessus du premier), et une moyenne m_∞ de 10 (très en-dessous du premier).

Correction de l'exercice I.10.14 (page 29)

Soit $\varepsilon > 0$. Par continuité de f , pour tout $x \in K$, il existe $\eta_x > 0$ tel que, pour tout y à distance de x strictement inférieure à η_x ,

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Le compact K est recouvert par l'union des boules $B(x, \eta_x/2)$, on peut donc en extraire un recouvrement fini

$$K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_i, \eta_i/2)$$

(en notant $\eta_i = \eta_{x_i}$). Soit maintenant x et y tels que $d(x, y) < \eta = \min(\eta_i/2)$. Le point x est dans l'une des boules $B(x_i, \eta_i/2)$, et y aussi par hypothèse, on a donc

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(y) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| < 2\varepsilon.$$

Correction de l'exercice I.10.15 (page 29)

a) Soit K compact. En premier lieu, f étant continue, l'image réciproque de tout fermé est fermée (proposition I.7.2, page 22), l'image réciproque du fermé K est donc fermée. Si elle

n'était pas bornée, on pourrait construire une suite (x_n) de points de $f^{-1}(K)$ non bornée, dont l'image serait non bornée par hypothèse, ce qui est absurde. L'image réciproque de K est donc compacte comme fermé borné de \mathbb{R}^n .

b) Soit (x_n) une suite de \mathbb{R}^n telle que $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Si la suite des images est bornée, alors on peut l'inclure dans un intervalle fermé (donc compact comme fermé borné), dont l'image réciproque est compacte donc bornée, alors qu'elle est censée contenir tous les x_n , ce qui est absurde.

c) On sait que $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ quand $\|x\|$ tend vers $+\infty$. Il existe donc en particulier un $R > 0$ tel que, pour tout x de norme plus grande que R , $|f(x)| \geq 1$. Si f prend des valeurs à la fois positives et négatives à l'extérieur de B_R , on peut trouver deux points x et x' de norme plus grande que R tels que, par exemple, $f(x) > 0$ et $f(x) < 0$. On relie alors les deux points par un chemin continu qui évite la boule (si le segment ne convient pas, on *fait le tour*). La restriction de f à cette ligne est continue, donc prend la valeur 0 en un certain point (d'après le théorème des valeurs intermédiaires), ce qui est absurde puisque l'on doit avoir $\|f(x)\| \geq 1$ en tout point de la ligne.

La dimension 1 est d'une certaine manière pathologique, car on ne peut pas *faire le tour* de 0 pour passer d'un nombre négatif à un nombre positif. De fait, la conclusion est invalidée : l'application identité vérifie bien l'hypothèse que l'image réciproque de tout compact est compacte, et pourtant la fonction tend bien vers $+\infty$ ou $-\infty$ selon la direction que l'on prend.

d) Soit f une fonction coercive au sens du (a). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ (par exemple 0). Par hypothèse, $f(x) > f(0)$ pour $\|x\| \geq C$. L'infimum $m \in [-\infty, +\infty[$ de f sur \mathbb{R}^n est donc l'infimum de f sur $\overline{B}(0, C)$. Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0, C)$, elle est bornée et atteint ses bornes, on a donc en particulier $m > -\infty$, et cet infimum est atteint.

Correction de l'exercice I.10.16 (page 29)

L'application $x \mapsto f(x) = 1 - e^{-x}$ sur \mathbb{R}_+ est de dérivée positive, strictement inférieure à 1 sur $]0, +\infty[$. Pour tous $x \neq y$ dans \mathbb{R}_+ , il existe c entre x et y tel que, d'après le théorème des accroissements finis, on ait

$$|f(x) - f(y)| = f'(c) |x - y| < |x - y|.$$

On a aussi

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) = 1,$$

il ne peut donc exister aucun $\kappa \in [0, 1[$ tel que f soit κ -contractante.

Correction de l'exercice I.10.17 (page 29)

L'application T^p étant contractante, elle admet un point fixe x unique : $T^p x = x$. On a donc, en composant cette identité par p , $T^p(T(x)) = T(x)$, d'où l'on tire que $T(x)$ est aussi point fixe de T^p . On a donc $T(x) = x$ par unicité du point fixe de T^p . Tout point fixe de T étant aussi point fixe de T^p , on en déduit l'unicité.

Correction de l'exercice I.10.18 (page 30)

a) Pour tout $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|Ax\|^2 = \sum a_i^2 x_i^2 \leq \max(|a_i|^2) \sum x_i^2.$$

Si l'on considère maintenant le j qui réalise le max des $|a_i|$, et que l'on prend $x_j = 1$, et $x_i = 0$ pour $i \neq j$, le vecteur ainsi défini réalise l'égalité. On a donc $\|A\| = \max(|a_i|)$.

b) Toute matrice symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée (v_i) . Tout vecteur x de \mathbb{R}^n peut s'écrire

$$x = \sum x_i v_i \implies Ax = \sum x_i \lambda_i v_i,$$

et donc

$$\|Ax\|^2 = \sum |x_i|^2 |\lambda_i|^2 \leq \max(|\lambda_i|^2) \sum |x_i|^2 = \max(|\lambda_i|^2) \|x\|^2,$$

et, comme précédemment, le vecteur $x = v_j$ (où j réalise le max des $|\lambda_i|$) réalise l'égalité. La norme d'opérateur de A est donc le max des valeurs absolues des valeurs propres de A .

VI.2 Calcul Différentiel**Correction de l'exercice II.1.2 (page 35)**

Lorsque l'application est affine, on a directement le développement limité

$$f(x+h) = f(x) + A \cdot h.$$

La différentielle est donc l'application qui à h associe A , qui se représente donc matriciellement par la matrice A .

Correction de l'exercice II.1.3 (page 35)

a) On a (avec $x = (x_1, x_2)$, $h = (h_1, h_2)$)

$$\begin{aligned} F(x+h) &= F(x_1+h_1, x_2+h_2) = f(x_1+h_1, x_2+h_2)g(x_1+h_1, x_2+h_2) \\ &= (f(x)+df(x) \cdot h+o(h))(g(x)+dg(x) \cdot h+o(h)) = f(x)g(x) + \underbrace{(g(x)df(x) + f(x)dg(x))}_{dF(x)} \cdot h + o(h). \end{aligned}$$

b) On a maintenant (avec $x_{ij} = (x_i, x_j)$, $h_{ij} = (h_i, h_j)$)

$$\begin{aligned} G(x+h) &= f(x_{12}+h_{12})g(x_{34}+h_{34}) \\ &= (f(x_{12})+df(x_{12}) \cdot h_{12}+o(h_{12}))(g(x_{34})+dg(x_{34}) \cdot h_{34}+o(h_{34})) \\ &= \underbrace{f(x_{12})g(x_{34})}_{G(x)} + \underbrace{(g(x_{34})df(x_{12}) \cdot h_{12} + f(x_{12})dg(x_{34}) \cdot h_{34})}_{dG(x) \cdot h} + o(h). \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne s'écrit par bloc de la façon suivante

$$J_G = \begin{pmatrix} g(x_{34})J_f(x_{12}) & 0 \\ 0 & f(x_{12})J_g(x_{34}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R}),$$

où J_f et J_g sont des matrices-lignes (à deux éléments).

Correction de l'exercice II.1.1 (page 35)

La fonction est identiquement nulle sur les axes de coordonnées, elle admet donc des dérivées partielles nulles sur ces axes, et en particulier en 0. La fonction n'est par contre pas continue en 0. On a par exemple

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \frac{1}{2}$$

qui n'est pas la valeur en 0. La fonction n'est donc *a fortiori* pas différentiable en 0.

Correction de l'exercice II.1.4 (page 37)

a) On a

$$dF(x) = df(b + Ax) \circ A,$$

et $J_F(x) = J_f A$ (produit matrice-vecteur).

b) On a

$$\begin{aligned} J_F(x, y) &= f'(x^2 + y^2)(2x \ 2y). \\ F(x + h_x, y + h_y) &= F(x, y) + f'(x^2 + y^2)(2xh_x + 2yh_y) + o(h). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice II.1.5 (page 38)

a) Le gradient est tel que, pour tout h ,

$$\langle \nabla F(x) | h \rangle = dF(x) \cdot h = df(b + Ax) \cdot Ah = \langle \nabla f(b + Ax) | Ah \rangle = \langle A^T \nabla f(b + Ax) | h \rangle,$$

d'où

$$\nabla F(x) = A^T \nabla f(b + Ax).$$

b) On a ici

$$\langle \nabla F(x | y), h \rangle = dF(x) \cdot h = f'(x^2 + y^2)(2xh_x + 2yh_y)$$

d'où

$$\nabla F = f'(x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice II.1.6 (page 39)

On a, pour $h \in \mathbb{R}^{3N}$,

$$E(u + h) = E(u) + \sum_{n=1}^N m_n \langle u_n | h_n \rangle + o(h),$$

d'où l'on déduit que E est différentiable, la différentielle étant l'application qui à h associe le deuxième terme du membre de droite ci-dessus. Ce terme s'écrit $\langle p | h \rangle$, avec

$$p = (p_1, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{3N}, \quad p_n = m_n u_n.$$

Le gradient de l'énergie cinétique par rapport aux vitesses est $\nabla E = p$, qui est la quantité de mouvement. Si l'on choisit de munir l'espace en vitesse du produit scalaire pondéré par les masses, le gradient est le vecteur vitesse $u \in \mathbb{R}^{3N}$.

Correction de l'exercice II.1.7 (page 39)

Ce terme vient du fait que la solution du système différentiel canoniquement associé à la fonction, appelé *flot de gradient*, et qui s'écrit $\dot{x} = -\nabla f(x)$, admet comme solution particulière $x \equiv x_s$ pour tout x_s qui annule le gradient. On parle aussi de *point d'équilibre* dans le contexte des systèmes dynamiques.

Correction de l'exercice II.1.8 (page 40)

On a

$$df = 2x dx + 2y dy + 2z dz - 2c^2 t dt,$$

que l'on peut aussi représenter matriciellement par $(2x \ 2y \ 2z \ -2c^2 t)$.

Correction de l'exercice II.1.8 (page 40)

Cette inégalité peut être étendue immédiatement à d'autres normes sur \mathbb{R}^n et \mathbb{R}^m , non nécessairement construites sur le même principe, sous réserve de munir l'espace des applications linéaires entre ces deux espaces de la norme subordonnées adaptée (pour le terme $\|df(x + th)\|$ dans l'inégalité des accroissements finis).

Correction de l'exercice II.4.3 (page 53)

On définit la fonction f de la façon suivante

$$(c, z) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \mapsto f(c, z) = P_c(z) \in \mathbb{R}.$$

L'équation

$$f(c, z) = 0$$

exprime que $z \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme P_c

On se propose d'appliquer le théorème des fonctions implicites à cette fonction, en vue d'exprimer z en fonction de x . En premier lieu on a bien $f(\tilde{c}, \tilde{z}) = 0$. La différentielle partielle $\partial_z f$ est obtenue en faisant un développement limité

$$\begin{aligned} f(c, z + h) = P_c(z + h) &= \sum_{n=0}^N c_n (z + h)^n \\ &= \sum_{n=0}^N c_n (z)^n + \sum_{n=1}^N c_n (z)^{n-1} h + o(h) \\ &= f(c, z) + P'_c(z) h + o(h). \end{aligned}$$

La dérivée partielle de f par rapport à z est donc $P'_c(z)$. Or $P'_c(\tilde{z}) \neq 0$ du fait que \tilde{z} est racine simple, et $P'_c(z)$ dépend continûment de z . La dérivée est donc non nulle dans un voisinage U de \tilde{z} , ce qui assure l'existence d'une fonction Ψ qui aux coefficient c associe une racine du polynôme. La différentielle de Ψ en c s'exprime

$$d\Psi(c) = -(\partial_z f)^{-1} \partial_c f, \text{ avec } z = \Psi(c),$$

et peut donc se représenter matriciellement par

$$\frac{1}{P'(z)} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^N \end{bmatrix}.$$

Correction de l'exercice II.2.1 (page 43)

a) On a

$$\max(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \leq \max(x_1, x_2) + \max(|h_1|, |h_2|)$$

et

$$\max(x_1 + h_1, x_2 + h_2) \geq \max(x_1, x_2) - \max(|h_1|, |h_2|),$$

d'où

$$|\max(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - \max(x_1, x_2)| \leq \max(|h_1|, |h_2|) \leq \|h\|_2,$$

d'où la continuité de f .

b) Pour $a = (x_1, x_2)$ tel que $x_1 < x_2$, cette inégalité stricte reste vérifiée dans un voisinage de x , la fonction f s'identifie donc dans ce voisinage à $x \mapsto x_2$, qui est différentiable, de différentielle dx_2 . Son gradient est le vecteur $(0, 1)$. De la même manière au voisinage d'un point tel que $x_2 < x_1$, le gradient est $(1, 0)$.

c) En un point du type (x, x) , pour tout $h > 0$, on a

$$f((x + h, x)) = f(x) + h,$$

et

$$f((x - h, x)) = f(x).$$

Il n'existe donc pas de développement limité à l'ordre 1 de f en tout point du type (x, x) .

Correction de l'exercice II.2.2 (page 43)

on a

$$f(x+h) = f(x) + \frac{1}{2}(\langle Ax | h \rangle + \langle Ah | x \rangle) - \langle b | h \rangle + o(h) = f(x) + \frac{1}{2} \left(\langle (A + A^T)x - b | h \rangle \right) + o(h),$$

d'où l'on déduit que f est différentiable, de différentielle

$$h \mapsto \frac{1}{2} \left(\langle (A + A^T)x - b | h \rangle \right),$$

et donc de gradient

$$\nabla f = \frac{1}{2}(A + A^T)x - b,$$

b) Le gradient devient $Ax - b$ pour une matrice symétrique.

c) Un point est critique pour f si et seulement s'il est solution du système linéaire $Ax = b$ (pour le cas symétrique). Cette propriété est utilisée pour approcher la solution de systèmes linéaires associés à des matrices symétriques définies positives. Pour résoudre le système on cherche un minimiseur de la fonctionnelle quadratique f .

Correction de l'exercice II.2.3 (page 44)

a) On développe comme dans l'exercice précédent, pour obtenir (on prend $a = 0$ pour alléger l'écriture)

$$f(x+h) = f(x) + \exp\left(-\frac{1}{2}\langle A \cdot x | x \rangle\right) \langle Ax | h \rangle + o(h),$$

d'où

$$\nabla f = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle A \cdot x | x \rangle\right) Ax.$$

b) Le seul point critique / stationnaire de f est donc 0 (ou plus généralement a si $a \neq 0$).

Correction de l'exercice II.2.4 (page 44)

a) Pour un singleton $a \in \mathbb{R}^2$ la fonction est continûment différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$.

Pour une paire de points, la fonction distance n'est pas différentiable sur la médiatrice, continûment différentiable sur son complémentaire.

Pour un cercle C de centre c , la fonction distance est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus (\{c\} \cup C)$.

Pour un disque, la fonction est différentiable sur le complémentaire du disque fermé, différentiable à l'intérieur du disque (car constante égale à 0), non différentiable sur le cercle frontière.

Pour un rectangle la fonction est continûment différentiable sur l'extérieur du rectangle, non différentiable sur la frontière, et différentiable à l'intérieur en dehors du "squelette" du rectangle : bissectrices des angles jusqu'à leur point de croisement, et segment reliant les deux points de croisement (en forme d'enveloppe postale).

b) L'ensemble des points de non différentiabilité est l'ensemble des points qui sont situés à équidistance de 2 centre urbains. Il s'agit de points qui ont une distance importante à la réunion des centres par rapport à la moyenne, on trouvera en particulier parmi ces points le point le plus "isolé" (le point le plus éloigné de toute ville). Il s'agit aussi de points pour lesquels on aura typiquement le choix entre deux hopitaux de centre ville, plus généralement pour tout service restreints aux grandes agglomérations.

Correction de l'exercice II.2.5 (page 44)

a) La plupart des points critiques visibles correspondent à des maxima locaux (sommets ou pointes locales). La plupart des minima locaux semblent "cachés" par les zones bleues représentant des lacs. On peut aussi identifier quelques points-cols (minimum dans une direction, maximum dans une autre), en particulier si l'on trace le chemin que l'on emprunterait pour relier deux maxima locaux en se descendant le moins possible possible (comme dans la zone en bas à gauche de l'image, au nord-est de l'indication '...morens'), on passe par un minimum local qui est un point col.

Les minima locaux, maxima locaux, et points-cols peuvent être approché par des fonctions

de types respectifs

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad f(x, y) = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}, \quad f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2},$$

respectivement.

b) Pour qu'il y ait un lac il faut qu'il y ait un minimum local de l'altitude. Le contour du lac correspond à une isovaleur de l'altitude, qui doit être une courbe fermée (qui boucle sur elle-même) associée à une valeur supérieure au minimum, qui délimite une zone qui contient ce minimum. Pour un lac sans île, les valeurs d'altitude prises dans la zone sont inférieures à la valeur du contour.

c) Pour chaque point x_0 de la zone, on peut considérer l'équation différentielle (appelée flot de gradient) $dx/dt = -\nabla f$, qui suit la trajectoire selon la ligne de plus grande pente. Les x_0 tels que cette trajectoire arrive à un lac constituent le bassin d'attraction de ce lac. En tout généralité, ce bassin peut prendre des formes complexes, qui peuvent en particulier contenir des "trous", on pourrait par exemple imaginer une petite colline entourée d'un lac (que l'on peut voir comme une île sur ce lac), qui contiendrait elle-même un petit lac sur-élevé par rapport au lac périphérique. Il n'y en a pas sur la carte proposée, mais on trouve ce type de bizarrerie en Finlande par exemple (on trouve même une île sur un lac qui contient elle-même un lac, qui contient lui-même une île).

d) Le nombre de lac peut varier en fonction de la pluviométrie. Le nombre maximal de lacs possibles est le nombre de minima locaux, au voisinage desquels émerge un lac en cas de première pluie sur un paysage sec. Mais le nombre de lac peut diminuer alors que leur taille augmente. Le grand lac allongé *estany de Lanòs*, sur la carte, est par exemple susceptible de contenir plusieurs minima locaux, qui constitueront autant de lacs en cas de sécheresse.

Correction de l'exercice II.2.6 (page 44)

a) On peut écrire

$$u(x+h) = u(x) + du(x) \cdot h + o(h) = u(x) + J(x) \cdot h + o(h) = u(x) + \frac{1}{2}(J - J^T) \cdot h + \frac{1}{2}(J + J^T) \cdot h + o(h).$$

La matrice antisymétrique $J - J^T$ peut s'écrire

$$J - J^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que le produit matrice-vecteur $J \cdot u$ corresponde au produit vectoriel $\omega \wedge u$. Les ω_i dépendent des dérivées partielles des composantes de u , on a par exemple

$$\omega_2 = \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3.$$

La matrice $D = (J + J^T)/2$ est symétrique par construction.

b) La matrice $J = J(x)$ étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Si l'on se place dans cette base (e_1, e_2, e_3) , la matrice s'écrit $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Considérons

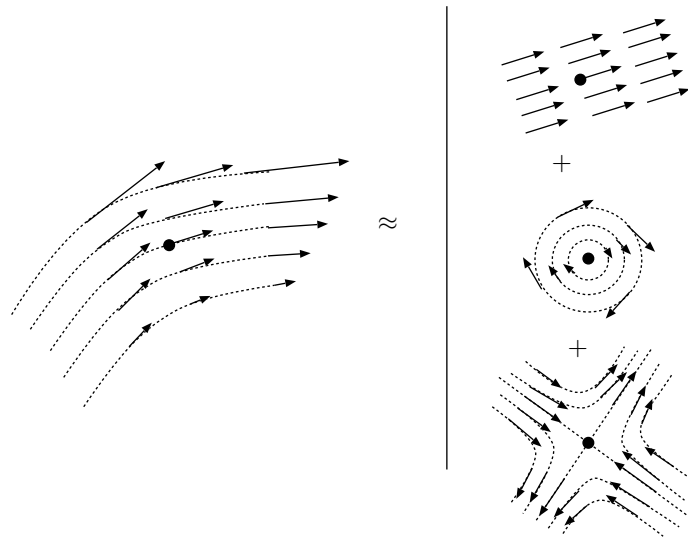


FIGURE VI.2.1 – Décomposition locale d'un champ de vitesse

le développement limité ci-dessus pour $y = x + he_1$. Le premier terme signifie que la vitesse en y est à l'ordre 0 la même que celle en x . Le second terme indique une rotation instantanée de y autour de x , donc sans changement de la distance de x à y . Le troisième terme s'écrit $hD \cdot e_1 = \lambda_1 h e_1$. Si par exemple $\lambda_1 > 0$, cela signifie que le point matériel situé à l'instant considéré en y s'éloigne de x dans la direction e_1 . Il s'agit donc du terme qui modifie les distances entre les points, ce qui correspond à une déformation du milieu fluide, les deux premiers termes encodant un *mouvement rigide* instantané.

La figure VI.2.1 illustre en dimension 2 la décomposition local du champ de vitesse en ces trois composantes : translation, rotation, et déformation

c) Si la divergence $\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3$ est nulle au point considéré, cela implique que la trace de la matrice D est nulle, donc que la somme des valeurs propres est nulle. Si elles sont toutes nulles, le mouvement instantané est rigide. Si ça n'est pas le cas, elles ne peuvent pas être toutes de même signe, il y en a donc au moins > 0 (étirement dans la direction correspondante), et au moins une < 0 (compression dans cette direction).

d) On peut par exemple considérer un mouvement (rigide) de rotation autour de l'axe vertical, caractérisé par le champ de vitesses

$$u = (u_1, u_2, u_3) = (-x_2, x_1, 0),$$

pour lequel on peut vérifier que la matrice D des taux de déformation est nulle.

e) Le champ suivant peut être vu comme la rencontre de deux masses de fluides qui "se rencontrent" sur le plan $x_1 = 0$ (on pourra faire un dessin dans le plan (x_1, x_2))

$$u = (u_1, u_2, u_3) = (x_1, -x_2, 0).$$

f) Si le champ dérive d'un potentiel, $u = -\nabla\Phi$ avec Φ régulier, alors les composantes du vecteur ω associé, qui sont du type $\partial_i u_j - \partial_j u_i$, sont toutes nulles.

Correction de l'exercice II.2.7 (page 46)

a) La fonction D est régulière comme composée de fonctions régulières, en dehors des points qui annulent la norme, c'est-à-dire le complémentaire de la diagonale. Pour calculer son gradient, on considère $D(q_1, q_2)$ comme fonction de q_1 seulement. Si l'on se déplace de ε petit de 1 vers 2, la distance diminue de ε :

$$D(q_1 + he_{12}, q_2) = D(q_1, q_2) - h,$$

pour h petit. Si l'on perturbe q_1 selon une direction orthogonale à e_{12} , la variation de la distance est d'ordre 2, la dérivée partielle est donc nulle. En procédant de même pour q_2 (en prenant garde au fait que si l'on se déplace de ε dans la direction e_{12} , la distance *augmente* de ε), on obtient

$$\nabla_{q_1} = -e_{12}, \quad \nabla_{q_2} = e_{12}.$$

b) Le potentiel est différentiable sur U comme composé de fonctions différentiables, et l'on a

$$\nabla_{q_1} V(q) = \varphi'(D) \nabla_{q_1} D = -\varphi'(D) e_{12},$$

et l'opposé pour $\nabla_{q_2} V(q)$.

c) Dans le cas du potentiel d'interaction gravitationnel, on obtient

$$\nabla_{q_1} V(q) = -\varphi'(D) e_{12} = -\frac{1}{D^2} e_{12},$$

et l'opposé pour ∇_{q_2} . On retrouve bien le fait que, pour la force gravitationnelle qui dérive de ce potentiel (c'est-à-dire que la force est l'opposé du gradient du potentiel), on a une force d'attraction mutuelle proportionnelle à l'inverse du carré de la distance.

d) L'équation s'écrit, pour chaque particule i ,

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = -\nabla_{q_i} V(q) = \sum_{j \neq i} \varphi'(D(q_i, q_j)) e_{ij}$$

e) On a

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^N \left\langle \frac{dq_i}{dt} \mid \frac{d^2 q_i}{dt^2} \right\rangle + \left\langle \nabla V \mid \frac{dq}{dt} \right\rangle,$$

qui s'annule du fait que $d^2 q/dt^2 = -\nabla V$.

Dans le cas du potentiel gravitationnel, qui n'est pas borné inférieurement, cela n'implique aucunement que la vitesse soit bornée². En revanche si le potentiel est minoré, comme pour le potentiel électrostatique entre deux charges identiques, la conservation de l'énergie assure que l'énergie cinétique, et donc la norme de la vitesse, sont majorées. Noter aussi symétriquement que, l'énergie cinétique étant positive, la conservation de l'énergie assure que l'énergie potentielle est majorée, et qu'ainsi les masses ne peuvent pas se rapprocher en-dessous d'un certain seuil³.

2. Si la lune cessait brusquement de tourner autour de la terre, elle *tomberait* vers la terre avec une vitesse d'impact telle que l'énergie cinétique de la lune correspondrait à la variation d'énergie potentielle entre la position initiale et la configuration de contact.

3. Cette propriété permet de montrer l'existence d'une solution globale au système dynamique, qui est cantonnée à rester à une certaine distance des points de non-différentiabilité du second membre.

Correction de l'exercice II.4.1 (page 52)

L'ensemble F est fermé comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue (car différentiable). Si l'on peut appliquer le TFI en un point (x_0, y_0) , alors il existe un voisinage ouvert W de (x_0, y_0) tel que $\partial_y f$ est inversible sur W . On peut donc appliquer le TFI au voisinage de tout $(x, y) \in F \cap W$.

Correction de l'exercice II.4.2 (page 52)

- a) L'ensemble des zéros de f est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r . On peut appliquer le TFI (exprimer y fonction de x) en dehors des points situés à l'est et à l'ouest $((r, 0)$ et $(-r, 0))$. En ces points, on peut appliquer le théorème dans l'autre sens, i.e. exprimer x fonction de y .
- b) L'ensemble F est une parabole d'axe l'axe des y . On peut appliquer le TFI au voisinage de tout point. Pour exprimer localement x fonction de y , il faut exclure l'origine.
- c) l'ensemble F est l'union de la courbe $y = x^3$ et de l'axe des x . On peut appliquer le TFI au voisinage de tout point de F en dehors de l'origine.

Correction de l'exercice II.4.3 (page 53)

On définit la fonction f de la façon suivante

$$(c, z) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R} \mapsto f(c, z) = P_c(z) \in \mathbb{R}.$$

L'équation

$$f(c, z) = 0$$

exprime que $z \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme P_c

On se propose d'appliquer le théorème des fonctions implicites à cette fonction, en vue d'exprimer z en fonction de x . En premier lieu on a bien $f(\tilde{c}, \tilde{z}) = 0$. La différentielle partielle $\partial_z f$ est obtenue en faisant un développement limité

$$\begin{aligned} f(c, z + h) = P_c(z + h) &= \sum_{n=0}^N c_n (z + h)^n \\ &= \sum_{n=0}^N c_n (z)^n + \sum_{n=1}^N c_n (z)^{n-1} h + o(h) \\ &= f(c, z) + P'_c(z) h + o(h). \end{aligned}$$

La dérivée partielle de f par rapport à z est donc $P'_c(z)$. Or $P'_c(\tilde{z}) \neq 0$ du fait que \tilde{z} est racine simple, et $P'_c(z)$ dépend continûment de z . La dérivée est donc non nulle dans un voisinage U de \tilde{z} , ce qui assure l'existence d'une fonction Ψ qui aux coefficient c associe une racine du polynôme. La différentielle de Ψ en c s'exprime

$$d\Psi(c) = -(\partial_z f)^{-1} \partial_c f, \text{ avec } z = \Psi(c),$$

et peut donc se représenter matriciellement par

$$\frac{1}{P'_c(z)} \begin{bmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^N \end{bmatrix}.$$

Correction de l'exercice II.4.4 (page 53)

On écrit, pour tout $n \leq N$, $c_n = a_n + ib_n$, avec a_n, b_n réels, ou plus globalement $c = a + ib$, avec a et b dans \mathbb{R}^{N+1} . On définit la fonction f de la façon suivante

$$(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^{N+1} \times \mathbb{R}^2 \mapsto f(a, b, x, y) = P_{a+ib}(x + iy) \in \mathbb{R}^2$$

(on identifie le résultat complexe à un couple de réels, correspondant aux parties réelle et imaginaire). L'équation

$$f(a, b, x, y) = 0$$

exprime que $z = x + iy$ est racine du polynôme P_{a+ib}

On se propose d'appliquer le théorème des fonctions implicites à cette fonction, en vue d'exprimer (x, y) (ou $z = x + iy$) en fonction de (a, b) . En premier lieu on a bien $f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \in \mathbb{R}^2$. La différentielle partielle $\partial_{x,y}f$ est obtenue en faisant un développement limité (on utilise ci-après les notations $c = a + ib$, $z = x + iy$, $h = h_x + ih_y$)

$$\begin{aligned} f(a, b, x + h_x, y + h_y) = P_c(z + h) &= \sum_{n=0}^N c_n(z + h)^n \\ &= \sum_{n=0}^N c_n(z)^n + \sum_{n=1}^N c_n(z)^{n-1}h + o(h) \\ &= f(a, b, x, y) + P'(z)h + o(h). \end{aligned}$$

Si l'on écrit $P'(z) = \alpha + i\beta$ et $h = h_x + ih_y$, la différentielle $\partial_{x,y}f$ s'écrit donc matriciellement

$$\partial_{x,y}f = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice est $\alpha^2 + \beta^2$. Une matrice de cette forme est donc inversible si et seulement si elle non nulle. Or $P'(\tilde{z}) = \tilde{\alpha} + i\tilde{\beta}$ est non nul en \tilde{z} (car la racine est supposée simple), et $P'(z)$ dépend continûment de z . La différentielle est donc inversible dans un voisinage U de \tilde{z} , ce qui assure l'existence d'une fonction Ψ qui aux coefficient c associe une racine du polynôme.

Pour représenter la différentielle, on a intérêt à reprendre la notation complexe, pour écrire

$$d\Psi(c) = P'_c(z)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & z & \dots & z^N \end{bmatrix}, \text{ avec } z = \Psi(c),$$

qui est l'application qui, à une variation des coefficients $h = (h_0, h_2, \dots, h_N)$, associe le complexe

$$P'(z)^{-1} \sum_{n=0}^N h_n z^n.$$

On peut retrouver une représentation matricielle réelle, comme application de $\mathbb{R}^{2(N+1)}$ (parties réelle et imaginaire de la variation de la collection c de coefficients) dans \mathbb{R}^2 (parties réelle et imaginaire de la racine), en introduisant explicitement les parties réelle et imaginaire de h .

Correction de l'exercice II.4.5 (page 53)

a) Avec les valeurs de référence données, on trouve

$$T_0 \approx 289 \text{ K} = 16 \text{ }^\circ\text{C}.$$

Cette température est en général estimée à $15 \text{ }^\circ\text{C}$ la différence (qui correspond à une variation relative de 0.3% sur la valeur en Kelvin), s'explique par le fait que les valeurs de S et A sont des estimations. La valeur correspondant à un effet de serre nul est de $-18 \text{ }^\circ\text{C}$.

b) Le modèle peut s'écrire

$$f(S, A, F, T) = \sigma T^4(1 - S) - (1 - A)F = 0.$$

La fonction f est polynomiale, donc différentiable, et l'on a

$$\partial_T f = 4\sigma T^3(1 - S),$$

qui est non nul sur toute la plage $]0, +\infty[$ des températures physiques, et en particulier en T_0 . On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites qui assure l'existence d'un voisinage de T_0 sur lequel on peut exprimer T comme fonction des paramètres S , A , et F . La différentielle de cette application peut s'écrire, d'après le même théorème,

$$dT = -\frac{1}{4\sigma T^3(1 - S)} \left(-\sigma T^4 dS + F dA - (1 - A) dF \right).$$

On a donc en particulier

$$\frac{\partial T}{\partial S} = +\frac{T}{4(1 - S)},$$

dont la valeur aux conditions de référence est 120 K (S est sans unité). La variation de S induisant une augmentation de $2 \text{ }^\circ\text{C}$ de la température est donc $+2/120 \approx 0.016$.

c) La variation relative de la concentration en CO_2 susceptible d'induire une variation de S de 0.016 est donc, si l'on admet que l'effet de serre dû au CO_2 est proportionnel à cette concentration,

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{1}{0.6 \times 0.3} 0.016 \approx 0.09.$$

Pour un taux actuel de 415 ppm (parties par million), cela correspond donc à une augmentation de l'ordre de 40 ppm .

d) Le modèle s'écrit maintenant

$$g(S, T) = \sigma T^4(1 - S) - (1 - A_0 + \beta(T - T_0))F_0.$$

La dérivée de g par rapport à T est

$$\partial_T g = 4\sigma T^3(1 - S) - \beta F_0.$$

Pour β petit, plus précisément inférieur à $4\sigma(1 - S_0)$, cette dérivée est strictement positive au voisinage de S_0 , on peut donc utiliser le théorème des fonctions implicites et exprimer T fonction de S , avec une sensibilité modifiée :

$$\partial_S T = \frac{\sigma T^4}{4\sigma T^3(1 - S) - \beta F_0} > \frac{T}{4(1 - S)}.$$

La sensibilité de T vis-à-vis de S est donc augmentée par cet effet (on parle de boucle de rétro-action positive, ou en langage commun de *cercle vicieux*, : quand la température augmente, elle induit un renforcement d'un des facteurs qui tendent à l'augmenter).

La valeur critique est $\beta_c = 4\sigma T^3(1 - S)/F_0 \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Pour cette valeur de β , une augmentation de 10°C diminue l'albedo de 0.01.

Lorsque β s'approche de cette valeur, $\partial_S T$ tend vers $+\infty$, et prend des valeurs négatives pour lorsque β_0 est dépassé. Le fait que les valeurs soit négative pourrait laisser penser que la situation s'est inversée : une augmentation de l'effet de serre entraînerait une *diminution* de la température. La situation est bien sûre tout autre, comme le suggère l'explosion en β_0 . En fait, nous allons vérifier que, pour $\beta \geq 0$, le point d'équilibre considéré n'en est plus un, ou plus précisément que c'est un point d'équilibre *instable*, qui n'a aucune chance d'être observé comme solution pérenne dans la réalité. Pour comprendre ce qui se passe, considérons un modèle dynamique d'évolution de la température, basée sur des hypothèses hautement simplificatrices. On considère que la chaleur (on exclut les autres formes d'énergie) emmagasinée par la terre à un instant donné s'écrit comme le produit d'une constante C (capacité calorifique du système terre-atmosphère) avec la température. On écrit que cette énergie évolue selon le bilan radiatif, que l'on ne suppose plus équilibré :

$$C \frac{dT}{dt} = (1 - A_0 + \beta(T - T_0)) - \sigma T^4(1 - S) = -f(T, S).$$

Pour $S = S_0$, la température T_0 est dite point d'équilibre de l'équation d'évolution, c'est à dire que $T \equiv T_0$ en est une solution triviale. Mais si l'on perturbe légèrement la température, tant que la température reste proche de T_0 , la variation u de cette température vérifie

$$C \frac{du}{dt} = C \frac{d(T_0 + u)}{dt} = -f(T_0 + u, S_0) \approx -f(T_0, S_0) - \partial_T f(T_0, S_0) u.$$

Si $\partial_T f(T_0, S_0) > 0$ (petites valeurs de β), l'évolution peut être décrite par une équation linéaire avec coefficient négatif, qui correspond à une relaxation exponentielle vers la température d'équilibre T_0 . Si $\beta > \beta_0$, on a $\partial_T f(T_0, S_0) < 0$, et l'évolution devient instable, avec une solution du type $u = u_0 \exp(\lambda t)$, $\lambda > 0$. La température a donc tendance à s'éloigner de la température d'équilibre. Noter que, dès que cette température est significativement différente de T_0 , le modèle linéaire n'a plus aucune légitimité, il faut mener une étude du modèle non linéaire pour étudier le comportement en temps long de la solution. En tout cas pour $\beta > \beta_0$, il apparaît que la température T_0 n'est pas un point d'équilibre stable, donc son étude en tant que point d'équilibre pertinent d'un système physique réel n'a pas de sens, ce qui peut expliquer le caractère paradoxal de la négativité de $\partial_S T$ dans ce régime.

Correction de l'exercice II.6.1 (page 59)

Correction de l'exercice II.6.2 (page 59)

a) On a

$$f(x + h) = \langle A \cdot x | x \rangle + \langle A \cdot x | h \rangle + \langle A \cdot h | x \rangle + o(h) = f(x) + \langle (A + A^T) \cdot x | h \rangle + o(h),$$

d'où $\nabla f = (A + A^T) \cdot x$, et par suite $H(x) = A + A^T$.

Cette matrice est identiquement nulle si et seulement si la matrice est anti-symétrique.

Correction de l'exercice II.6.3 (page 59)

a) On fait un développement limité à l'ordre 2 (proposition II.5.7), pour obtenir

$$\frac{f(x - \varepsilon h) - 2f(x) + f(x + \varepsilon h)}{\varepsilon^2} = \langle h | H(x) \cdot h \rangle + o(1),$$

qui converge donc vers $\langle h | H(x) \cdot h \rangle$ quand ε tend vers 0.

b) On écrit l'inégalité de convexité au milieu du segment $[x - \varepsilon h, x + \varepsilon h]$ (pour ε suffisamment petit pour que le segment soit dans l'ouvert U), qui implique la positivité de la quantité $f(x - \varepsilon h) - 2f(x) + f(x + \varepsilon h)$, d'où, en faisant tend ε vers 0,

$$\langle h | H(x) \cdot h \rangle \geq 0 \quad \forall h.$$

c) La même démarche conduit à l'inégalité

$$\langle h | H(x) \cdot h \rangle \geq \lambda \|h\|^2 \quad \forall h.$$

On en déduit donc que, en tout x , la plus petite valeur propre de $H(x)$ (qui est bien réelle car H est symétrique) est minorée par λ . On retrouve bien la positivité de H pour les fonctions convexes (i.e. 0 - convexe).

d) Si $\nabla f(x) = 0$ et $\langle H(x) \cdot h | h \rangle > 0$ pour tout h non nul, le développement limité en x assure que x est un minimum local strict pour f , c'est à dire qu'il existe $\eta > 0$ tel que $f(y) > f(x)$ pour tout $y \neq x$ à distance de x inférieure à η .

e) On écrit le développement de Taylor avec reste intégral (proposition II.5.8) entre x et y :

$$f(y) = f(x) + \underbrace{\langle \nabla f(x) | y - x \rangle}_{=0} + \int_0^1 \underbrace{\langle H(x + t(y - x)) \cdot (y - x) | y - x \rangle}_{=0} (1 - t) dt \geq f(x).$$

f) D'après le a), on a, pour tout h , $\langle h | H(x) \cdot h \rangle \geq 0$ pour tout h

Correction de l'exercice II.6.4 (page 60)

On a $\|\nabla f\|^2 / 2 \equiv 1$, d'où, pour tout j

$$0 = \partial_i \left(\|\nabla f\|^2 / 2 \right) = \frac{1}{2} \partial_i \left(\sum_{j=1}^n (\partial_j f)^2 \right) = \sum_{j=1}^n \partial_{ij} f \partial_j f$$

qui exprime précisément que la i -ième composante de $H \cdot \nabla f$ est nulle.

Correction de l'exercice II.6.5 (page 60)

On écrit le développement limité à l'ordre 2 de f en x :

$$f(x + \varepsilon e_\theta) = f(x) + \varepsilon \nabla f(x) \cdot e_\theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \langle H \cdot e_\theta | e_\theta \rangle + o(\varepsilon^2).$$

Si l'on intègre $f(x + \varepsilon e_\theta) - f(x)$ entre 0 et 2π , le premier terme (avec le gradient), donne

$$\int_0^{2\pi} \nabla f(x) \cdot e_\theta d\theta = \nabla f(x) \cdot \int_0^{2\pi} e_\theta d\theta = 0.$$

Le terme d'ordre 2 est la somme de 4 contributions. La première s'écrit

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \partial_{11} f(x) \cos(\theta)^2 d\theta = \frac{\pi}{2} \partial_{11} f(x).$$

L'autre contribution diagonale (en $\sin(\theta)^2$), vaut de la même manière $\partial_{22} f \pi/2$. Les contributions extra-diagonales sont multiples de l'intégrale de $\sin(\theta) \cos(\theta) = \sin(2\theta)/2$, dont l'intégrale sur $[0, 2\pi[$ vaut 0. On a donc finalement

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x + \varepsilon e_\theta) - f(x)) d\theta \longrightarrow \frac{1}{4} (\partial_{11} f(x) + \partial_{22} f(x)) = \frac{1}{4} \Delta f(x).$$

VI.3 Mesure et Intégration

Correction de l'exercice III.2.1 (page 68)

On a

- (i) $\emptyset = \emptyset \cap F \in \mathcal{A}_F$.
- (ii) Pour tout $A \in \mathcal{A}_F$, son complémentaire dans F s'écrit $A^c \cap F$ avec $A^c \in \mathcal{A}$ d'où son appartenance à \mathcal{A}_F , par définition.
- (iii) Si (A_n) est une collection dénombrable d'éléments de \mathcal{A}_F , chaque A_n s'écrit $B_n \cap F$ avec $B_n \in \mathcal{A}$, d'où

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \cap F) = F \cap \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n}_{\in \mathcal{A}}$$

qui est donc dans \mathcal{A}_F par définition.

Correction de l'exercice III.2.2 (page 68)

Si $A = \emptyset$ ou $A = X$, la tribu est $\{\emptyset, X\}$, de cardinal 2, et si A est non vide et strictement inclus dans X , la tribu engendrée est $\{\emptyset, X, A, A^c\}$, de cardinal 4. Noter que si X est de cardinal 1, seul le premier cas est possible.

Correction de l'exercice III.2.3 (page 68)

Si l'union des parties est X (elles réalisent alors une partition), le cardinal est celui de l'ensemble des parties de l'ensemble à 3 points, donc $2^3 = 8$. Si l'union ne recouvre pas X , alors la tribu est celle engendrée par la partition $\{A, B, C, (A \cup B \cup C)^c\}$, qui est donc de cardinal 2^4 .

Correction de l'exercice III.2.4 (page 70)

On suppose $f(x) = x'$ pour tout x (le même x'). Soit $A' \subset X'$. Si $x' \notin A'$, alors $f^{-1}(A') = \emptyset \in \mathcal{A}$, et si $x' \in A'$, alors $f^{-1}(A') = X \in \mathcal{A}$. Il s'agit donc de la tribu discrète, quelle que soit la tribu \mathcal{A} de départ.

Si maintenant \mathcal{A}' est une tribu sur X' , alors l'image réciproque de tous ses membres qui contiennent x' (il en existe au moins un, puisque $X' \in \mathcal{A}'$) est X , et l'image réciproque de tous ses membres qui ne pas contiennent pas x' (il en existe au moins un, puisque $\emptyset \in \mathcal{A}'$) est \emptyset . Il s'agit donc de la tribu grossière, quelle que soit la tribu \mathcal{A}' d'arrivée.

Correction de l'exercice III.2.5 (page 70)

Si f est $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ mesurable, alors \mathcal{A} doit contenir tous les $f^{-1}(A')$ pour $A' \in \mathcal{A}'$, elle contient donc en particulier $f^{-1}(\mathcal{A}')$.

Si f est $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$ mesurable, $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ pour $A' \in \mathcal{A}'$, tout $A' \in \mathcal{A}'$ est donc dans $f_{\#}(\mathcal{A})$.

Correction de l'exercice III.2.6 (page 70)

Soit f une application constante : $f(x) = a' \in X'$. On a

$$f^{-1}(A') = \emptyset \text{ si } x \notin A', \quad f^{-1}(A') = X \text{ si } x \in A',$$

d'où $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$, puisque toute tribu contient \emptyset et X , même la plus grossière d'entre elles.

Correction de l'exercice III.2.7 (page 71)

D'après la définition, l'identité est mesurable si et seulement si tout élément de \mathcal{A}' est dans \mathcal{A} , c'est à dire si $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ (\mathcal{A} est plus fine que \mathcal{A}').

Correction de l'exercice III.2.8 (page 71)

Si \mathcal{A} est la tribu discrète, toute application est mesurable. Si \mathcal{A} est la tribu grossière, alors dès qu'il existe A' tel que $f^{-1}(A')$ est non vide et non identifié à X , l'application f n'est pas mesurable. Les seules applications mesurables sont donc les applications qui sont d'une certaine manière constantes, mais dans un sens un peu particulier : elles sont constantes *autant que \mathcal{A}' soit en mesure de distinguer les valeurs*. Plus précisément, il s'agit d'applications telles que, si $f(x) \neq f(y)$, alors nécessairement les éléments de \mathcal{A}' qui contiennent x sont exactement ceux qui contiennent y . Dès que la tribu \mathcal{A}' distingue tous les éléments, c'est-à-dire que pour tous x' et $y' \in X'$ il existe $A' \in \mathcal{A}$ tel que $x \in A', y \notin A'$, alors les seules applications mesurables sont donc les applications constantes $f(x) \equiv a' \in X'$. A l'extrême inverse, si \mathcal{A}' est la tribu grossière, alors toutes les applications sont mesurables.

La propriété énoncée précédemment dans le cas où \mathcal{A} est la tribu grossière est vraie *a fortiori* pour tout \mathcal{A} : si \mathcal{A}' est la tribu grossière, toute application est mesurable (quelle que soit \mathcal{A}). Si \mathcal{A}' est la tribu discrète, une application est mesurable si et seulement si l'image réciproque de toute partie est dans \mathcal{A} . Si \mathcal{A} est discrète, tout est mesurable. S'il existe des ensembles non mesurables sur X , dont on note la collection \mathcal{A}^c (complémentaire de \mathcal{A} dans $\mathcal{P}(X)$), alors les applications non mesurables sont celles pour lesquelles il existe un $B \in \mathcal{A}^c$ image réciproque d'une partie A' de $\mathcal{P}(X')$. De telles parties sont caractérisées par $f(B) \cap f(B^c) = \emptyset$, qui implique alors $f^{-1}(f(B)) = B$, qui est donc non mesurable.

Correction de l'exercice III.4.1 (page 79)

Les inégalités à vérifier pour que μ^* soit une mesure extérieure sont toutes des tautologies du type $0 \leq 0, 0 \leq 1, 1 \leq 1, 1 \leq +\infty$.

Si X est un singleton, μ^* est une mesure. En revanche si X contient au moins 2 éléments a et b , on a $\mu(\{a\} \cup \{b\}) = 1 < 2 = \mu(\{a\}) + \mu(\{b\})$, il ne s'agit donc pas d'une mesure.

Si X est réduit à un singleton, toutes les parties (il y en a deux au total : X et \emptyset) sont mesurables. Si ça n'est pas un singleton, alors pour toute partie B de X non vide et non égale à X , on a

$$\mu^*(X \cap B) + \mu^*(X \cap B^c) = 1 + 1 > 1 = \mu^*(X),$$

la partie B n'est donc pas mesurable. Les seules parties mesurables pour μ^* sont donc \emptyset et X .

Correction de l'exercice III.4.2 (page 85)

Toute réunion d'intervalles ouverts dont la somme des longueurs est finie ne pouvant recouvrir \mathbb{R} la mesure extérieure de Lebesgue de \mathbb{R} , qui s'identifie à $\lambda(\mathbb{R})$, est infinie. On peut en revanche écrire \mathbb{R} comme réunion des $] -n, n[$, qui sont tous de mesure finie.

Correction de l'exercice III.5.1 (page 89)

a) Soit φ une bijection de \mathbb{N} . Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe N' tel que $\{\varphi(n), n \leq N'\}$ contienne tous les indices de 0 à N , on a donc

$$\sum_0^N x_n \leq \sum_0^{N'} x_{\varphi(n)} \leq \sum_0^{+\infty} x_{\varphi(n)},$$

d'où

$$\sum_0^{+\infty} x_n \leq \sum_0^{+\infty} x_{\varphi(n)}.$$

Et l'on montre l'inégalité inverse de la même manière : pour tout N il existe N' tels que $\{n, n \leq N'\}$ contienne $\{\varphi(n), n \leq N\}$, etc ...

b) On déduit des hypothèses que x_n tend vers 0, et que x_n n'est pas nulle au-delà d'un certain rang. Par ailleurs, si l'on note I_+ l'ensemble des indices tels que $x_n \geq 0$, et I_- l'ensemble des indices tels que $x_n < 0$, ces deux ensembles sont infinis, et l'on a (du fait de la non convergence absolue)

$$\sum_{I_+} x_n = +\infty, \quad \sum_{I_-} x_n = -\infty.$$

Pour produire une limite infinie, on commence par prendre des indices dans I_+ jusqu'à ce que la série partielle dépasse 1, puis on prend le premier indice de I_- , puis on continue avec I_+ jusqu'à dépasser 2, puis le deuxième indice de I_- etc ... Le nombre d'étape est forcément infinie du fait de la divergence de la série sur I_+ . On parcourt ainsi tous les indices de I_+ et I_- , et la série diverge vers $+\infty$ par construction (noter que les négatifs que l'on ajoute un par un à chaque étape tendent vers 0). On procède symétriquement pour $-\infty$. Pour λ , par exemple positif, on commence par parcourir les indices de I_+ jusqu'à dépasser λ , puis on passe à I_- jusqu'à passer en dessous de λ , puis I_+ , etc... Comme la suite des x_n tend vers 0, on a bien convergence vers λ . Pour avoir un ensemble de valeurs prises dense dans \mathbb{R} , on monte jusqu'à dépasser 1 avec des indices de I_+ , puis on descend sous -2 , puis on remonte au-dessus de 3, etc ... Comme x_n tend vers 0, les progressions de $-n$ à $n+1$ se font avec un pas de plus en plus petit, on finit donc par intersecter n'importe quel intervalle ouvert, aussi petit soit-il.

Cet exercice montre que cela n'a en général aucun sens d'écrire

$$\sum_{n \in I} x_n$$

lorsque I est un ensemble infini dénombrable et que les x_n prennent des valeurs positives et négatives, du fait que l'ordre dans lequel on effectue les additions conditionne fortement le résultat obtenu.

Correction de l'exercice III.5.2 (page 89)

Pour tout n , on pose

$$I_n = \left\{ i \in I, a_i > \frac{1}{n} \right\}.$$

D'après l'hypothèse, cet ensemble est fini. L'ensemble

$$I_\infty = \{i \in I, a_i > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

est donc dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.

Correction de l'exercice III.5.3 (page 89)

On sait que \mathbb{D} (ou \mathbb{Q}) est dénombrable et dense dans \mathbb{R} , on s'en donne une énumération (q_n) . On considère maintenant la réunion des intervalles ouverts $I_n =]q_n - \varepsilon_n, q_n + \varepsilon_n[$, avec $\varepsilon_n = \varepsilon/2^{n+2}$. Il s'agit d'un ouvert dense, qui est une réunion d'intervalles ouverts (même si certains intervalles de la collection initiale s'intersectent, cela reste une réunion d'intervalles ouverts), dont la longueur totale est majorée par la somme des longueurs des intervalles, qui vaut ε .

Correction de l'exercice III.5.4 (page 89)

Si X est dénombrable, toute partie de X est dénombrable, donc réunion dénombrable de singletons. La tribu engendrée par les singletons est donc la tribu discrète $\mathcal{P}(X)$.

Si X n'est pas dénombrable, la tribu engendrée par les singletons contient au moins toutes les parties dénombrables, ainsi que celles de complémentaire dénombrable. Or la famille \mathcal{A} constituée de ces parties est une tribu. En effet, la stabilité par complémentarité est immédiate. Considérons maintenant une famille (A_n) de \mathcal{A} . Si tous les A_n sont dénombrables, alors leur réunion l'est, elle est donc dans \mathcal{A} . Si l'un d'eux, mettons A_1 n'est pas dénombrable, alors A_1^c l'est, donc l'intersection des complémentaires est dénombrable, et donc son complémentaire, qui est l'union des A_n , est dans \mathcal{A} . Il s'agit donc bien de la tribu engendrée par les singletons.

Correction de l'exercice III.5.5 (page 89)

a) Soit \mathcal{A} une tribu sur N . Soit $x \in X$. On considère A_x le plus petit élément de \mathcal{A} qui contient x . On considère maintenant y dans A_x . Si $x \notin A_y$, alors $A_x \setminus A_y$ est élément de \mathcal{A} , est strictement inclus dans A_x , et contient x , ce qui est absurde. On a donc nécessairement $x \in A_y$. Alors A_y s'identifie nécessairement à A_x , car sinon l'intersection des deux est strictement incluse dans au moins l'un d'eux, par exemple A_x , ce qui est absurde car alors A_x ne serait

plus le plus petit élément de A contenant x . La partie A_x contient donc les éléments tels que A_x soit le plus petit élément de A les contenant. On poursuit avec un point hors de A_x (s'il y en a un), et l'on continue jusqu'à avoir recouvert X_N par p parties non vides disjointes, qui constituent donc une partition P . La tribu engendrée par la partition P est contenue dans A . Pour tout élément A de \mathcal{A} , son intersection avec chacune des parties de la partition est la partie-elle-même, sinon elle ne serait pas minimale. La tribu A ne contient donc que des unions de parties de P , donc elle est dans la tribu engendrée par P . On établit ainsi une correspondance univoque (pour un ensemble fini, rappelons-le) entre tribus et partitions. Toute tribu sur X_N est engendrée par une partition de X_N , elle est ainsi caractérisée par cette partition.

b) Le cardinal d'une tribu est défini par la granularité de la partition qui l'engendre. Si la partition contient p parties ($1 \leq p \leq N$), alors la tribu contient autant d'éléments que l'ensemble à p éléments contient de parties, c'est à dire 2^p . Une autre manière de voir les choses est de considérer que l'on peut *coder* un élément de la tribu par un mot de p bits, dont chaque bit indique si l'élément en question contient la partie correspondante.

c) Comme on l'a vu au a), compter les tribus revient à compter les partitions. On suppose connu le nombre B_k de tribus sur l'ensemble à k éléments, pour k entre 0 et N . On rajoute maintenant l'élément $x = n + 1$ à X_N pour obtenir X_{N+1} . On se propose d'énumérer les partitions sur X_{N+1} en les classant selon le nombre k d'éléments qui *ne sont pas* dans la partie qui contient x . Pour $k = 0$, on a une seule partition, constituée de l'ensemble X_{N+1} entier. Pour $k = 1$, on a N possibilités pour choisir l'élément qui n'est pas dans la partie contenant x , et chaque choix correspond à une seule partition. Pour $k \geq 2$, on a C_N^k possibilités de choisir les éléments qui ne sont pas dans la partie contenant x . Pour chacun de ces choix, on a B_k partitions possibles. On a donc

$$B_{N+1} = \sum_{k=0}^N C_N^k B_k,$$

avec $B_0 = 1$ (on considère que l'ensemble vide admet une partition unique, qui est lui-même), et $B_1 = 1$ (tout singleton $\{1\}$ admet une partition unique). On appelle B_N le N -ième nombre de *Bell*, dont on peut montrer qu'il est égal à

$$B_N = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^N}{k!}.$$

Correction de l'exercice III.5.6 (page 89)

On sait que la tribu borélienne est engendrée par les intervalles du type $] - \infty, a]$. Chacun de ces intervalles peut s'écrire comme l'intersection d'intervalles $] - \infty, q_n]$, où q_n est une suite de nombres décimaux qui convergent par valeurs décroissantes vers a . La tribu engendrée par les $] - \infty, q]$, où q est décimal, contient donc les intervalles $] - \infty, a]$, et donc la tribu borélienne, et il s'agit d'un ensemble dénombrable car en bijection avec \mathbb{D} .

Correction de l'exercice III.5.7 (page 90)

a) On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$. Par ailleurs, si $A' \in \mathcal{A}'$, alors

$$f^{-1}((A')^c) = \left(f^{-1}(A')\right)^c \in \mathcal{A},$$

d'où la stabilité par passage au complémentaire. On a enfin, si (A'_n) est une collection d'éléments de \mathcal{A}' ,

$$f^{-1}\left(\bigcup_n A'_n\right) = \bigcup_n f^{-1}(A'_n) \in \mathcal{A}.$$

b) Si \mathcal{A}'' est une tribu sur X' qui rend f mesurable, pour tout A'' dans \mathcal{A}'' , on a $f^{-1}(A'') \in \mathcal{A}$, d'où $A'' \in \mathcal{A}'$. On a donc $\mathcal{A}'' \subset \mathcal{A}'$.

c) On a $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset)$. Par ailleurs, pour toute collection (A'_n) d'éléments disjoints de \mathcal{A}' , on a

$$\nu\left(\bigcup_n A'_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_n A'_n\right)\right) = \sum_n \mu\left(f^{-1}(A'_n)\right),$$

car les $f^{-1}(A'_n)$ sont disjoints. Il s'agit donc bien d'une mesure qui fait de (X', \mathcal{A}', ν) un espace mesuré.

On a bien sûr conservation de la masse totale, du fait que $\nu(X') = \mu(f^{-1}(X')) = \mu(X)$.

Si la mesure μ est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X , alors ν est simplement la loi de la variable aléatoire $f(X)$.

c bis) Remarquons en premier lieu, même si ça ne répond pas encore à la question, que s'il existe un singleton $\{x'\}$ dans \mathcal{A}' de mesure nulle, alors l'application constante $f(x) \equiv x'$ affecte une masse nulle à tout $A \in \mathcal{A}$. Il s'agit bien dans ce cas d'une mesure, mais elle est identiquement nulle, la masse n'est donc pas conservée. On se place maintenant pour simplifier dans le cas où $X' = X$, $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, et considérons le cas où il existe un singleton $\{x'\}$ de mesure non nulle. Alors l'application constante considérée précédemment, donne une même valeur à tous les éléments de \mathcal{A} , ce qui invalide l'additivité (sauf dans des situations très particulières), par exemple dès qu'il existe dans \mathcal{A} deux ensemble disjoints de mesures non nulles.

d) (i) $f(x) = x + c$. Comme vu dans le cours, les translations laissent invariante la mesure de Lebesgue, on a donc $\nu = \lambda$.

(ii) $f(x) = \alpha x$, avec $\alpha \neq 0$. Toute partie A mesurable est dilatée par l'homothétie de rapport α . La mesure d'un objet A dans l'espace d'arrivée est donc $\lambda(A)/\alpha$.

(iii) $f(x) = E(x)$. Cette application balaie en quelque sorte tous les intervalles $[n, n+1[$ et les concentre en $\{n\}$. La mesure image est donc la mesure de comptage sur \mathbb{N} :

$$\nu(A) = \text{Card}\{n \in \mathbb{N}, n \in A\} = \text{Card}(A \cap \mathbb{N}).$$

(iv) $f(x) = 0$. Cette application envoie toute la masse en 0. La mesure image est donc très singulière, il s'agit d'une masse ponctuelle (infinie) en 0 : $\nu(A) = 0$ si $0 \notin A$, $\nu(A) = +\infty$ si $0 \in A$,

(v) En premier lieu, notons que $\nu(A') = 0$ dès que $A' \cap]0, +\infty[= \emptyset$, on a donc

$$\nu(A') = \nu(A' \cap]0, +\infty[).$$

Pour tous a, b , avec $0 < a < b$, la mesure de $]a, b[$ est $\log(b) - \log(a) = \log(b/a)$. On a donc, pour tout $y > 0$, $dy > 0$,

$$\nu([y, y + dy]) = \log\left(\frac{y + dy}{y}\right) \sim \frac{dy}{y}.$$

La mesure ν a donc sur $]0, +\infty[$ une densité par rapport à la mesure de Lebesgue égale à $1/y$.

e) Soit f et g sont égale μ -presque partout, alors $\mu(f^{-1}(A')) = \mu(g^{-1}(A'))$ pour tout $A' \in \mathcal{B}$.

f) Si μ est une masse ponctuelle, alors $f_{\#}\mu$ est aussi une masse ponctuelle. Si ν ne l'est pas, alors $\Lambda_{\mu, \nu} = \emptyset$. On a un singleton quand les deux sont des masses ponctuelles. Si μ et ν sont toutes deux sommes de n masses ponctuelles de même poids,

$$\mu = \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^n \delta_{y_j},$$

où les x_i sont distincts deux à deux, tout comme les y_j , alors $\Lambda_{\mu, \nu}$ contient $n!$ éléments. En effet, les éléments de $\Lambda_{\mu, \nu}$ sont du type $f(x_i) = y_{\varphi(i)}$, où φ est une bijection sur $\llbracket 1, N \rrbracket$ ($\varphi \in S_n$).

Correction de l'exercice III.5.8 (page 91)

a) On a bien $\mu_0(\emptyset) = 0$ et, pour toute collection disjointe de A_i mesurables, on a

$$\mu_0(\cup A_i) = \text{Card}((\cup A_i) \cap \mathbb{Z}) = \sum_i \text{Card}(A_i \cap \mathbb{Z}),$$

il s'agit donc bien d'une mesure, infinie car $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ est infini, mais σ -finie car \mathbb{R} s'écrit comme réunion des intervalles $[-n, n]$.

Les ensembles de mesure pleines pour μ_0 sont simplement les ensembles qui contiennent \mathbb{Z} .

Deux fonctions sont égales μ_0 -presque partout si et seulement si elles prennent les mêmes valeurs sur les entiers, ce qui laisse évidemment de la marge pour les choisir très différentes hors des entiers. Par exemple la fonction $\sin(\pi x)$ est nulle μ_0 -presque partout.

On peut construire une version finie de cette mesure en introduisant des poids, par exemple

$$\tilde{\mu}_0 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|k|}} \delta_k,$$

qui donne à \mathbb{R} (ou à n'importe quelle partie qui contient les entiers), une masse égale à 3.

b) la mesure μ_n est du même type que μ_0 , elle en a les mêmes propriétés. On n'a pas absolue continuité relativement à λ car les singletons $\{k/2^n\}$ sont de masse nulle pour λ , non nulle pour μ_n . Inversement les intervalles $]k/2^n, (k+1)/2^n[$ ont une masse non nulle pour λ , nulle pour μ_n .

Pour tout intervalle $]a, b[$ le nombre d'entiers de la forme $k/2^n$ qu'il contient est équivalent à $2^n(b-a)$, ce qui assure la convergence demandée.

c) Considérons par exemple l'ensemble A des nombres de l'intervalle $]0, 1[$ qui ne sont pas de la forme $k/2^n$. C'est ensemble est de mesure pleine sur $]0, 1[$, car on a enlevé un ensemble dénombrable, donc de mesure nulle. On a ainsi $\lambda(A) = 1$, et pourtant $\mu_n(A) = 0$ pour tout n .

Correction de l'exercice III.5.9 (page 91)

a) On a

$$A \cup B = (A \setminus (A \cap B)) \cup (B \setminus (A \cap B)) \cup (A \cap B) \text{ (union disjointe),}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \end{aligned}$$

b) On écrit

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu((A \cup B) \cup C) = \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cup B) \cap C).$$

On développe $\mu(A \cup B)$ d'après ce qui précède, et l'on écrit

$$\mu((A \cup B) \cap C) = \mu((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) - \mu(A \cap B \cap C).$$

c) On peut montrer par récurrence la formule générale

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) &= \sum_{1 \leq n \leq N} \mu(A_n) - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq N} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq N} \mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \\ &\quad + (-1)^N \mu(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice III.5.10 (page 91)

a) Il s'agit d'une mesure de comptage, dont on vérifie immédiatement que c'est bien une mesure. Tout ouvert non vide contient un intervalle ouvert, donc une infinité de rationnels, sa mesure est donc infinie. Et la mesure de l'ouvert \emptyset est 0.

On note A_n l'ensemble des rationnels qui s'écrivent $\pm a/b$, avec a et b des entiers naturel entre 0 et n . on a $\mu(A_n \cap [-n, n]) < +\infty$, et l'union des $A_n \cap [-n, n]$ recouvre \mathbb{R} .

b) On a $\mu(]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = +\infty$ et $\lambda(]0, 1[\cap \mathbb{Q}) = 0$ ce qui invalide $\mu \ll \lambda$, et dans l'autre sens $\mu(]0, 1[\cap \mathbb{Q}^c) = 0$ et $\lambda(]0, 1[\cap \mathbb{Q}^c) = 1$, ce qui invalide $\lambda \ll \mu$.

Correction de l'exercice III.5.11 (page 92)

a) L'ensemble A est la collection des intervalles $[k \times 10^{-n+1}, (k+1/2) \times 10^{-n+1}[$. L'intersection d'un intervalle de longueur 10^{-n+1} avec A est donc de longueur totale $10^{-n+1}/2$, d'où le résultat pour les intervalles dont la longueur est un multiple entier de cette quantité.

Soit maintenant $I =]a, b[$ un intervalle. Pour tout N , on a

$$b - a = k_N \times 10^{-N} + \varepsilon_N$$

avec $E(x)$ est la partie entière de x

$$k_N = E((b - a) \times 10^N), \quad \varepsilon_N = b - a - k_N \times 10^{-N} \in [0, 10^{-N}[.$$

l'intervalle s'écrit donc comme la réunion d'un intervalle dont la longueur est multiple de 10^{-N} , avec un intervalle de longueur $\varepsilon_N < 10^{-N}$. On a donc

$$\lambda(]a, b[\cap A_{N+1}) \geq \frac{b - a - \varepsilon_N}{2} \geq \frac{b - a}{2} - \frac{1}{2}10^{-N},$$

et

$$\lambda(]a, b[\cap A_{N+1}) \leq \frac{b - a - \varepsilon_N}{2} + \varepsilon_N \leq \frac{b - a}{2} + 10^{-N},$$

d'où la convergence de $\lambda(]a, b[\cap A_{N+1})$ vers $(b - a)/2$.

b) On se restreint à l'intervalle $]0, 1[$, en considérant l'ensemble $A' = A \cap]0, 1[$. D'après les hypothèses on a $\lambda(A') = 1/2$. L'ensemble A' étant mesurable, sa mesure s'identifie à sa mesure extérieure

$$\lambda(A') = \inf_{C_{A'}} \left(\sum_i (b_i - a_i) \right),$$

avec

$$C_{A'} = \left\{ (]a_i, b_i[)_{i \in \mathbb{N}}, A' \subset \bigcup_{\mathbb{N}}]a_i, b_i[\right\}.$$

Il existe donc une collection d'intervalles ouverts dont l'union contient A' telle que

$$\sum_i (b_i - a_i) \leq 3/4.$$

On note U la réunion ci-dessus. Comme $A' \subset U$, on a

$$\frac{1}{2} = \lambda(A') = \lambda(A' \cap U) \leq \sum_i \lambda(A' \cap]a_i, b_i[) = \frac{1}{2} \sum_n (b_i - a_i) = 3/8,$$

ce qui est absurde.

Correction de l'exercice III.5.12 (page 92)

a) L'ensemble K est une intersection de fermés (comme unions finies d'intervalles fermés), il s'agit donc d'un fermé, qui est borné par construction, donc d'un compact. Si K contient un intervalle ouvert, cet intervalle est dans chacune des K_n , réunion d'intervalles de longueur $1/3^n$, sa longueur est donc inférieure à tout $1/3^n$, donc nécessairement nulle.

b) À toute suite $a = (a_n)_{n \geq 1}$ dans $\{0, 1\}$, on peut associer

$$x_a = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} a_n \frac{1}{3^n}.$$

Le réel x_a appartient à K . En effet, la série partielle définit x_a^n qui est l'extrémité gauche de l'un des intervalles de K_n . La suite x_a^n est donc dans K , et elle est de Cauchy par construction, elle converge donc dans \mathbb{R} , donc dans K car K est fermé. Cette application $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow K$ est injective. Or l'ensemble de départ s'identifie à l'ensemble des parties de \mathbb{N}^* , qui est non dénombrable.

c) On a $\lambda(K_n) = 2^n/3^n$, et $K \subset K_n$ pour tout n , d'où $\lambda(K) \leq 2^n/3^n \rightarrow 0$.

Correction de l'exercice III.6.1 (page 93)

Considérons la fonction f par exemple croissante. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour tout x dans l'ensemble $f^{-1}(]-\infty, c])$, tout $z \leq x$ est dans ce même ensemble d'après la croissance de f . L'ensemble est donc du type $] -\infty, a]$ ou $] -\infty, a[$ (avec éventuellement $a = +\infty$), qui sont des boréliens dans les deux cas, donc a fortiori des membres de la tribu de Lebesgue. La démonstration est semblable pour une fonction décroissante (avec des intervalles de type $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$).

Correction de l'exercice III.6.2 (page 98)

Soit g une fonction étagée positive

$$g(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{1}_{A_i},$$

Si g est dominée par $I_{\mathbb{Q}}$, alors pour tout i tels que $\alpha_i > 0$, nécessairement $A_i \subset \mathbb{Q}$, d'où $\lambda(A_i) = 0$. On a donc $\int g = 0$ d'où, d'après la définition $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) d\lambda = 0$.

Correction de l'exercice III.6.3 (page 104)

La fonction définie par $f_n(x) = f(x) \cos(x)^n$ converge presque partout (sur le complémentaire des $k\pi x$) vers 0, et l'on a, pour tout x , $|f_n(x)| \leq |f(x)|$, avec $\int |f| < +\infty$. D'après le théorème de convergence dominée (théorème III.6.25, page 104), on a donc convergence des intégrales vers l'intégrale de la limite, qui est 0.

Correction de l'exercice III.7.1 (page 107)

a) Pour tout rectangle $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, on a

$$F^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \times f_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2,$$

d'où l'on déduit que F est mesurable d'après la proposition III.2.12, page 71, qui assure qu'il suffit de vérifier la mesurabilité sur un sous ensemble de parties de l'espace d'arrivée qui engendre la tribu sur cet espace.

b) Pour tout rectangle $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, on a

$$F^{-1}(A_1 \times A_2) = f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2) \in \mathcal{A},$$

d'où l'on déduit que G est mesurable, toujours d'après la proposition III.2.12.

Correction de l'exercice III.9.1 (page 119)

À tout $u = (u_n) \in \ell^p$ on associe la fonction

$$Tu = f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \mathbb{1}_{]n, n+1[}.$$

Si l'on note f_n la somme partielle, $|f_n|^p$ est une suite croissante de fonctions mesurables, qui converge presque partout vers $|f|^p$. D'après le théorème de convergence monotone (théorème III.6.23, page 102), comme $\int |f_n|^p$ converge vers $\sum u_n^p < +\infty$, la fonction $|f|^p$ est intégrable, et d'intégrale $\|u\|_{\ell^p}^p$. L'application T réalise donc une isométrie entre ℓ^p et un sous-espace strict de $L^p(\mathbb{R})$.

Correction de l'exercice III.9.2 (page 120)

L'adhérence de $C_c(\mathbb{R})$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. Le fait que ce soit des fonctions continues est immédiat par convergence uniforme. Par ailleurs, si f est limite des f_n dans $C_c(\mathbb{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$. Comme f_n est à support compact, elle est nulle en dehors de $[-M, M]$, on a donc $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout x avec $|x| \geq M$.

Réciproquement, si f continue tend vers 0 en $\pm\infty$, on peut approcher f en norme uniforme par la suite de fonctions f_n continues à support compact, où f_n s'identifie à f sur $[-n, n]$ est affine sur les intervalles $[-n-1, -n]$ et $[n, n+1]$, et s'annule au delà.

Correction de l'exercice III.11.1 (page 121)

La fonction f étant dérivable, elle est continue, et donc mesurable (proposition III.6.4, page 95). Pour tout $n \geq 1$, la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}$$

est elle-même continue, donc mesurable. La fonction f' s'exprime

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} g_n(x).$$

L'application f' est donc mesurable d'après la proposition III.6.2, page 93.

Correction de l'exercice III.11.2 (page 121)

Les B_n constituant une partition de X , on a

$$\int_X |f| = \sum_n \int_{B_n} |f|,$$

avec, pour tout n

$$n\mu(B_n) \leq \int_{B_n} |f| \leq (n+1)\mu(B_n).$$

On a donc

$$\int_X |f| < +\infty \iff \sum_n \int_{B_n} |f| < \infty \iff \sum_n \mu(B_n) < \infty.$$

Pour montrer $(ii) \iff (iii)$, il suffit de remarquer que

$$\mu(B_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n+1}).$$

En multipliant l'identité par n , et en sommant les termes de 1 à N , on obtient

$$\sum_1^N n\mu(B_n) = \sum_1^N \mu(A_n) - \mu(A_{n+1}).$$

Si $\sum \mu(A_n)$ converge, alors $\sum n\mu(B_n)$ converge aussi. Inversement, si $\sum n\mu(B_n)$ converge, alors $\mu(A_{n+1})$ (qui s'écrit comme le reste de la série) tend vers 0, d'où la convergence de la série de $\mu(A_n)$ d'après l'identité précédente.

Correction de l'exercice III.11.3 (page 121)

Il s'agit d'une application du lemme de Fatou (lemme III.6.24, page 103), qui assure que

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Comme on a convergence simple de f_n vers f , on a $\liminf_n f_n = f$, d'où le résultat.

Correction de l'exercice III.11.4 (page 121)

a) On introduit la fonction $f_n = \mathbb{1}_{A_n^c} f$. La suite $|f_n|$ converge simplement vers $|f|$, avec $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ pour tout x , et $|f|$ intégrable. D'après le théorème de convergence dominée (théorème III.6.25, page 104), on a convergence de l'intégrale $|f_n|$ vers l'intégrale de $|f|$, d'où

$$\int_{A_n} |f(x)| \, d\mu = \int_X |f(x)| \, d\mu - \int_X |f_n(x)| \, d\mu \longrightarrow 0.$$

b) D'après la question précédente, il existe n tel que

$$\int_{A_n} |f(x)| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sur le complémentaire de A_n , on a $|f(x)| < n$. On prend $\delta = \varepsilon/(2n)$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) < \delta$, on a

$$\int_A |f(x)| \, d\mu = \int_{A \cap A_n} |f(x)| \, d\mu + \int_{A \cap A_n^c} |f(x)| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + n \frac{\varepsilon}{2n} = \varepsilon.$$

Correction de l'exercice III.11.5 (page 122)

a) Le fait que $f(\cdot, t)$ soit mesurable, et la condition (ii) assurent que l'intégrale est bien définie. Il s'agit maintenant de montrer la continuité. Soit t_n une suite de réels qui tend vers t , on pose $f_n(x) = f(x, t_n)$. La continuité de f par rapport à t assure la convergence simple de $f(\cdot, t_n)$ vers $f(\cdot, t)$. La condition (iii) permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, qui assure la convergence des intégrales :

$$\int_X f(x, t_n) d\mu(x) \longrightarrow \int_X f(x, t) d\mu(x).$$

b) Soit $t \in I$ et $\varepsilon > 0$ tel que $t \pm \varepsilon \in I$. On définit (la fonction h introduite ci-dessous est définie pour ce t particulier)

$$h : (x, s) \in X \times]-\varepsilon, \varepsilon[\longmapsto h(x, s) = \begin{cases} \frac{f(x, t+s) - f(x, t)}{s} & \text{si } s \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) & \text{si } s = 0 \end{cases}$$

La fonction $h(\cdot, s)$ est mesurable pour tout $s \neq 0$, comme $h(x, 0)$ est la limite de $h(x, s)$ quand s tend vers 0, la fonction $h(\cdot, 0)$ est également mesurable. La fonction $s \mapsto h(x, s)$ est continue pour tout x d'après l'hypothèse de différentiabilité de f . On a par ailleurs $|h(x, s)| \leq g(x)$ d'après le théorème des accroissements finis. On peut donc appliquer la première question, qui assure

$$\frac{F(t+s) - F(t)}{s} = \int_X h(x, s) d\mu(x) \longrightarrow \int_X h(x, 0) d\mu(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) d\mu(x).$$

qui exprime la dérivabilité de F .

Correction de l'exercice III.11.6 (page 122)

a) On a

$$\mu_1(A_1) = \gamma(\pi_1^{-1}(A_1)) = \gamma(A_1 \times X_2),$$

et de même $\mu_2(A_2) = \gamma(X_1 \times A_2)$. On a en particulier $\mu_1(X_1) = \gamma(X_1 \times X_2) = \mu_2(X_2)$.

On n'a pas en général $\gamma = \mu_1 \otimes \mu_2$. Si l'on considère par exemple $X_1 = X_2 = \{0, 1\}$, et

$$\gamma(\{0, 0\}) = \gamma(\{1, 1\}) = 1/2, \quad \gamma(\{1, 0\}) = \gamma(\{0, 1\}) = 1/2.$$

On a $\mu_1(\{0\}) = \mu_1(\{1\}) = \mu_2(\{0\}) = \mu_2(\{1\}) = 1/2$, de telle sorte que $\gamma \neq \mu_1 \otimes \mu_2$.

Si γ est la loi d'une variable aléatoire $(Y_1, Y_2) \in X_1 \times X_2$, μ_i est simplement la loi de Y_i . La situation $\gamma = \mu_1 \otimes \mu_2$ correspond au cas de variables aléatoires indépendantes.

b) Dans le cas où $X_1 = X_2 = \llbracket 1, N \rrbracket$, les singletons sont des rectangles, et la mesure γ est entièrement déterminée par sa valeurs sur les singletons. La mesure s'identifie donc à une matrice $\gamma = (\gamma_{ij})$, avec $\gamma_{ij} = \gamma(\{(i, j)\})$. La première marginale μ_1 correspond à la somme des éléments des lignes :

$$(\mu_1)_i = \sum_{j=1}^N \gamma_{ij},$$

et μ_2 la somme des éléments des colonnes successives.

c) On peut toujours prendre pour γ la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$, qui correspondrait à des variables aléatoires indépendantes dans le cas de mesures de probabilité).

d) On peut identifier les plans de transport à des matrices $\gamma = (\gamma_{ij})$, et on a

$$\Pi_{\mu_1, \mu_2} = \left\{ \gamma = (\gamma_{ij}) \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, \sum_{i=1}^n \gamma_{ij} = \mu_2^j, \sum_{j=1}^m \gamma_{ij} = \mu_1^i \right\}.$$

Il s'agit donc d'un ensemble de matrices dont la somme des éléments de chaque ligne, et de chaque colonne, est fixée. C'est un convexe (intersection d'un sous-espace vectoriel avec le convexe $\mathbb{R}_+^{n \times m}$). C'est un singleton dès que l'une des mesures (arrivée ou départ) est concentrée en un point unique. Dès qu'on a deux points chargés de part et d'autre, il existe plusieurs plans de transport.

e) L'application considérée est linéaire donc continue, elle est donc minorée sur le compact Π_{μ_1, μ_2} , et atteint sa borne inférieure en au moins un point. L'application n'est pas strictement convexe, il n'y a pas de raison que ce point soit unique. De fait il ne l'est pas en général, c'est clair dans des cas dégénérés (par exemple si tous les coûts sont égaux à une même valeur), mais aussi par exemple dans le cas de points (au moins 2 points à l'arrivée et au départ) appartenant à une même droite, avec $c_{ij} = \|y_j - x_i\|$. On pourra considérer par exemple (on se place sur la droite réelle) $x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 1, y_2 = 2$, avec des masses égales. On peut laisser la masse en x_2 sur place (en y_1), et envoyer la masse en x_1 en y_2 , on translate de 1 la mesure. Noter que si le coût est quadratique en la distance, alors on a une solution unique (qui correspond à la translation).

f) Dans ce cas de figure, le problème consistant à trouver une solution du problème de minimisation revient à trouver un protocole d'envoi de la masse portée par les points de production vers les points de consommation de façon à minimiser le coût total de transport. Par exemple si c_{ij} correspond à la longueur du parcours routier entre x_i et y_j , cela revient à minimiser la longueur totale du parcours, et donc en première approximation l'essence consommée⁴.

g) On peut simplement définir l'opposé de la valeur ajoutée

$$A = - \sum_{ij} u_{ij} \gamma_{ij}.$$

Minimiser A revient à maximiser la valeur ajoutée, et le problème obtenu est du type des précédents, avec des coûts c_{ij} égaux aux opposés des productivités $i - j$.

Correction de l'exercice III.11.7 (page 123)

a) La fonction qui à (x, t) associe $f(x)$ est mesurable (car l'image réciproque de $] - \infty, c]$ est $f^{-1}(] - \infty, c]) \times \mathbb{R}_+$).

4. Le problème réel est en général plus complexe, dans la mesure où le coût s'écrit, pour de petites masses à transporter, comme un coût fixe, dû au fait que l'on fait partir un camion. L'approche proposée correspond au cas où l'on a des grandes masses de produit à transporter, et donc un nombre de camions important à mobiliser (que l'on peut alors considérer comme une variable réelle).

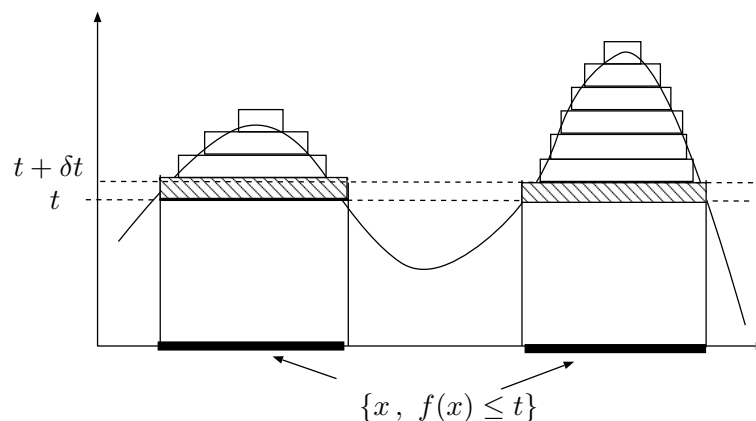


FIGURE VI.3.1 – Quadrature par rectangles horizontaux

La fonction qui à (x, t) associe t est mesurable, car l'image réciproque de $] - \infty, c]$ est $X \times [0, c]$ (qui est l'ensemble vide si $c < 0$).

L'application $F : (x, t) \mapsto f(x) - t$ est donc mesurable d'après la proposition III.6.3, page 94.

b) L'image réciproque de $] - \infty, c]$ par $\mathbb{1}_{\{(x,t), f(x) \geq t\}}$ est $X \times \mathbb{R}_+$ si $c \geq 1$, l'ensemble vide si $c < 0$ et, pour $c \in [0, 1[$, elle s'écrit

$$\{(x, t), t > f(x)\} = F^{-1}(] - \infty, 0[),$$

qui est mesurable d'après la mesurabilité de F (d'après la question précédente).

c) D'après ce qui précède, la fonction $\mathbb{1}_{\{(x,t), f(x) \geq t\}}$ rentre dans le cadre du théorème de Fubini-Tonelli (théorème III.7.10, page 107), on a donc

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mu(\{x, f(x) \geq t\}) dt &= \int_0^{+\infty} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y) \geq s\}}(x, t) d\mu \right) dt \\ &= \int_{X \times [0, +\infty[} \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y) \geq s\}}(x, t) d\mu dt = \int_X \left(\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y) \geq s\}}(x, t) dt \right) d\mu, \\ &= \int_X f(x) d\mu, \end{aligned}$$

car $\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y) \geq s\}}(x, t) dt = f(x)$ pour tout x .

d) Le dessin est représenté sur la figure VI.3.1. L'aire de la zone hachurée vaut

$$\lambda(\{x, f(x) \leq t\} \times \delta t),$$

et l'aire sous la courbe est approchée par la somme de ces aires.

Correction de l'exercice III.11.8 (page 124)

Comme dans l'exercice III.11.7, la fonction $(x, t) \mapsto f(x) - t$ est mesurable, on en déduit que $\mathbb{1}_{\{(x,t), f(x) \geq t\}}$ est également mesurable sur $X \times \mathbb{R}_+$, et elle est à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Elle

rentre donc dans le cadre du théorème de Fubini-Tonelli ((théorème III.7.10, page 107)), et l'on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\{x, f(x) = t\}) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_X \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y)=s\}}(x, t) d\mu \right) dt \\ &= \int_{X \times \mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y)=s\}}(x, t) d\mu dt = \int_X \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{(y,s), f(y)=s\}}(x, t) d\mu \right) dt \\ &= \int_X \lambda(\{t, t = f(x)\}) d\mu(x), \end{aligned}$$

or pour tout x l'ensemble $\{t, t = f(x)\}$ est le singleton $\{f(x)\}$, il est donc de mesure nulle. L'intégrale est donc nulle, d'où l'on déduit que la fonction positive $t \mapsto \mu(\{x, f(x) = t\})$ est d'intégrale nulle, elle est donc nulle presque partout (c'est une conséquence de la proposition III.6.20, page 101).

Correction de l'exercice III.11.9 (page 124)

On a, pour tout $y > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}_+} (2e^{-2xy} - e^{-xy}) dx = \left[\frac{1}{y} (-e^{-2xy} + e^{-xy}) \right]_0^{+\infty} = 0$$

d'où la nullité de la première expression. En intégrant d'abord en y , on a, pour tout $x > 0$

$$\int_0^1 (2e^{-2xy} - e^{-xy}) dy = \frac{1}{x} [-e^{-2x} + e^{-x}]$$

qui est strictement positif pour tout $x > 0$, l'intégrale en x sur \mathbb{R}_+ va donc donner une valeur strictement positive.

Ceci semble en contradiction avec le théorème de Fubini-Lebesgue, cela prouve simplement que ses hypothèses ne sont pas vérifiées, c'est à dire que la fonction n'est pas intégrable sur la bande considérée.

Correction de l'exercice III.11.10 (page 124)

a) On a

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \left[-\frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \right]_{-1}^1 = -\frac{2}{1 + y^2}.$$

L'intégrale de cette fonction en y vaut

$$-2 [\arctan y]_{-1}^1 = -\pi$$

En intégrant dans l'autre sens (d'abord en y , puis en x , on obtient π).

b) On n'a pas de contradiction avec le théorème de Fubini-Lebesgue car la fonction n'est pas intégrable au voisinage de 0. On peut s'en convaincre en calculant l'intégrale sur la couronne $\{(x, y), \varepsilon < \sqrt{x^2 + y^2} < 1\}$. En passant en coordonnées polaires, on a

$$\int_{\{(x,y), \varepsilon < \sqrt{x^2+y^2} < 1\}} |f(x, y)| dx dy = \int_{\varepsilon}^1 \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{r^2 |\cos^2 \theta - \sin^2 \theta|}{r^4} r dr d\theta$$

$$= 8 \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{r} \int_0^{\pi/4} \cos(2\theta) dr d\theta = -4 \ln(\varepsilon),$$

qui tend vers $+\infty$ quand ε tend vers 0.

Correction de l'exercice III.11.11 (page 124)

a) On considère

$$T : (r, \theta) \in U =]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in V = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Il s'agit d'un C^1 -difféomorphisme entre 2 ouverts de \mathbb{R}^2 , et l'intégrale de la fonction f sur V est la même que sur \mathbb{R}^2 , car ces ensemble ne diffèrent que par un ensemble de mesure nulle. La formule de changement de variable s'écrit ici

$$I = \int_V e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2)} |\det J_T| dr d\theta = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} |\det J_T| dr d\theta,$$

avec

$$\det J_T = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & +r \cos \theta \end{pmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r,$$

d'où

$$I = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr = 2\pi [-e^{-r^2}/2]_0^{+\infty} = \pi.$$

b) On a, d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)} dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) dx = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2.$$

On en déduit

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

c) En dimension d , on a

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{2\sigma^2}} dx$$

Le changement de variable homothétique $T : y \mapsto x = \sqrt{2}\sigma y$, de jacobien constant $2^{d/2} \sigma^d$, donne

$$I = 2^{d/2} \sigma^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-(y_1^2 + \dots + y_d^2)} dy = 2^{d/2} \sigma^d \left(\int_{\mathbb{R}} e^{y^2} dy \right)^d = 2^{d/2} \sigma^d \pi^{d/2} = (2\sigma^2 \pi)^{d/2}.$$

D'où la valeur de la constante de normalisation, et le fait que

$$\frac{1}{(2\sigma^2 \pi)^{d/2}} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_d^2}{2\sigma^2}}$$

soit une mesure de probabilité (i.e. de masse totale égale à 1).

Correction de l'exercice III.11.12 (page 124)

On considère la suite $f_n(x) = \mathbb{1}_{]0, n[}(x)$, qui est dans la boule unité fermée de L^∞ . Deux termes différents de cette suites sont toujours à distance 1, il est donc exclu que l'on puisse en extraire une sous-suite convergente. La non compacité ne vient pas de la non compacité de \mathbb{R} , on peut construire une suite analogue de fonction à support compact, par exemple $f_n(x) = \mathbb{1}_{]0, 1-1/n[}(x)$.

Correction de l'exercice III.11.13 (page 125)

a) Soit $f \in L^p(I)$. On a, pour tout x dans I tel que $|f(x)| \geq 1$,

$$|f(x)| \leq |f(x)| |f(x)|^{p-1} = |f(x)|^p,$$

d'où l'on déduit que

$$|f(x)| \leq \max(1, |f(x)|^p),$$

et donc $|f(x)|$ est intégrable.

b) Tout d'abord remarquons que l'inclusion ci-dessus est stricte, si l'on prend par exemple l'intervalle $I =]0, 1[$, la fonction définie par $f(x) = x^{-1/p}$ est dans L^1 , pas dans L^p . Par ailleurs $L^p(I)$ est dense dans L^1 , il contient en particulier les fonctions continues à support compact, qui sont denses dans L^1 . Comme cette densité des fonctions continues à support compact n'a pas été traitée en amphi, on peut aussi utiliser la troncature de l'exercice III.11.14 qui suit, si on l'a fait avant. Elle assure que l'on peut approcher toute fonction de L^1 par une suite de fonctions bornées, donc dans L^p (on est sur un intervalle borné). On a donc densité de $L^p(I)$ dans $L^1(I)$, mais inclusion stricte, L^p ne peut donc pas être fermé.

c) Si l'intervalle n'est pas borné, par exemple si $I =]1, +\infty[$, la fonction $f(x) = 1/x$ est dans L^p pour tout $p > 1$, mais pas dans $L^1(I)$.

Correction de l'exercice III.11.14 (page 125)

a) On considère la suite de fonctions définie par

$$g_n(x) = |f(x) - T_n \circ f(x)|^p.$$

On a

$$|g_n(x)| \leq |f(x)|^p$$

qui est intégrable. Et $g_n(x)$ converge vers 0 pour presque tout x . On a donc convergence (dominée) de l'intégrale de g vers 0, d'où la convergence en norme L^p de $T_n \circ f$ vers f .

b) On peut considérer de la même manière

$$h_n(x) = |f(x) - \chi_n(x)f(x)|^p.$$

Le même raisonnement assure la convergence vers f de $\chi_n f$ vers f .

c) Le même raisonnement s'applique à $\chi_n T_n \circ f$.

d) Pour $p = +\infty$, $T_n \circ f$ est presque partout égal à f pour n assez grand, on a donc bien convergence en norme L^∞ . Pour $\chi_n f$ en revanche on n'a pas convergence. Pour $f \equiv 1$ par exemple, on a $\|f - \chi_n f\|$ identiquement égal à 1.