Calcul différentiel

Quizz 7

1) Applicabilité du Théorèmes des Fonctions Implicites (TFI)

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement y fonction de x au voisinage de $(0,0)$, avec x et y liés par la relation $yx^2 + y^2x - 1 = 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement y fonction de x au voisinage de $(1,1)$, avec x et y liés par la relation $yx^2 + y^2x - 2 = 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement (y_1, y_2) fonction de x au voisinage de $x = 1$ et $(y_1, y_2) = (1, 0)$, avec x et (y_1, y_2) liés par la relation $y_1x^2 + y_2^2x - 1 = 0$.

2) Calculer les matrices hessiennes (en précisant leurs domaines de définition) des fonctions suivantes :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2\,,\ \ g(x_1, x_2) = x_1\, x_2\,,\ \ h(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}.$$

3) Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable au voisinage d'un point $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que l'on connait $\langle H(x) \cdot h \,|\, h\rangle$ pour tout h de $\mathbb{R}^n$. Peut on en déduire la matrice $H(x)$?

Oui ☐ Non ☐

4) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui s'écrit $g_1(x_1)+g_2(x_2)$, où g_1 et g_2 sont deux fonctions C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$, et la matrice $H(x)$ est diagonale en tout point.

Vrai ☐ Faux ☐

5) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, qui s'écrit $g(x_2 - x_1)$, où g est une fonction C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Vrai ☐ Faux ☐ f est deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$

Vrai ☐ Faux ☐ $H(x)$ est de rang ≤ 1 pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

Vrai ☐ Faux ☐ Le vecteur $(1,1)$ est dans $\ker H(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$

6) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, deux fois continûment différentiable sur $\mathbb{R}^n$, et telle que $H(x)$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^n$. Alors f est affine.

Vrai ☐ Faux ☐

Exercice 1. On considère un convexe fermé K dans un espace de Hilbert H, et une suite (u_n) d'éléments de K qui converge faiblement vers un élément u de H.

a) Montrer que $u \in K$ (on dit que K est *faiblement séquentiellement fermé*).

b) Montrer que la conclusion peut être invalidée si K n'est pas convexe.

Exercice 2. On appelle demi-espace fermé d'un espace de Hilbert H un ensemble de la forme

$$\{v \in H\,,\ \langle h \,|\, v \rangle \leq \alpha\}$$

avec $h \in H$ non nul, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'un convexe fermé K strictement inclus dans H est l'intersection des demis espaces fermés qui le contiennent.