Probabilités IV

MINES ParisTech

17 décembre 2024 (`#ef68213`)

Question 1 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi $\Gamma(\alpha, \theta)$ et $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

- ☐ A : $M_n \to \frac{\alpha}{\theta}$ p.s. quand $n \to \infty$
- ☐ B : $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \frac{\alpha}{\theta}$
- ☐ C : $\sqrt{n}(M_n - \frac{\alpha}{\theta}) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, \frac{\alpha}{\theta^2})$
- ☐ D : $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}^1} \frac{\alpha}{\theta}$

Question 2 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi qu'une variable X de fonction de répartition F et $a \in]0, 1[$

- ☐ A : $X_n^a \to \mathbb{E}(X^a)$ p.s. quand $n \to \infty$
- ☐ B : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{]-\infty,a]}(X_i) \to F(a)$ p.s. quand $n \to \infty$
- ☐ C : $\mathbb{P}(X_n \leq a) \to 0$ quand $n \to \infty$
- ☐ D : $\mathbb{E}(1_{]a,+\infty[}(X)) = 1 - F(a)$

Question 3 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda_n)$ où λ_n est une suite réelle qui converge vers 1.

- ☐ A : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 1$
- ☐ B : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 1$ p.s. quand $n \to \infty$
- ☐ C : $\mathbb{E}(X_n) \to 1$ quand $n \to \infty$
- ☐ D : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{E}(1)$

Question 4 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Cauchy, dont on rappelle la densité :$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}$.

- ☐ A : $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- ☐ B : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$
- ☐ C : $\mathbb{E}(X_n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$
- ☐ D : Rien de tout cela

Question 5 (réponse multiple) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes et une v.a. X, toutes définies sur le même espace probabilisé, telles que $\forall\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}$.

- ☐ A : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} X$
- ☐ B : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$
- ☐ C : $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} X$ p.s.
- ☐ D : Rien de tout cela