UE11 Topologie

Quizz 1

1) Dans chacun des cas ci-dessous, préciser si la notion définie est une distance ou pas, en précisant le ou les conditions invalidées. Décrire, lorsqu'il s'agit d'une distance, et que cela est possible, la forme des boules.

Vrai □ Faux □ La somme de deux distances

Correction.
Vrai

Vrai □ Faux □ Le produit de deux distances

Correction.
Faux : considérer par exemple le carré de la distance usuelle sur $\mathbb{R}$. On a

$$d(0,2)^2 = 4 < d(0,1)^2 + d(1,2)^2,$$

qui invalide l'inégalité triangulaire.

Vrai □ Faux □ Le symbole de Kronecker $(x, y) \in X \times X \mapsto \delta_{xy} = 1$ si $x \neq y$, et 0 sinon.

Correction.
Vrai. Les boules ouvertes de rayon ≤ 1 sont les singletons,et l'espace entier dès que le rayon est > 1.

Vrai □ Faux □ Le nombre de composantes différentes entre deux vecteurs$(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Correction.
Vrai : si x diffère de z sur a composantes, et si y diffère de z sur b composantes, alors x diffère de y sur au plus $a+b$ composantes. Si l'on se place dans $\mathbb{R}^2$, la boule ouverte de centre 0 et de rayon r est $\{0\}$ si $r \leq 1$, l'union des axes de coordonnées si $r \in]1, 2]$, et l'espace tout entier si $r > 2$.

2) Dans chacun des cas ci-dessous, préciser si l'ensemble proposé est un ouvert ou pas ($\mathbb{R}^n$ est supposé muni de la distance euclidienne canonique)

Vrai □ Faux □ $]0, +\infty[\subset \mathbb{R}$

Correction.
Vrai

Vrai □ Faux □ $\mathbb{Q}$

Correction.
Faux

Vrai □ Faux □ $\bigcup]q_k - 1/2^k, q_k + 1/2^k[$, où q_k est une énumération des rationnels.

Correction.
Vrai, c'est une réunion d'ouverts

Vrai □ Faux □ $\bigcap]q_k - 1/2^k, q_k + 1/2^k[$, où q_k est une énumération des rationnels.

Correction.
Vrai. A priori une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte, mais ici cet intersection est vide, donc ouverte

Vrai □ Faux □ $]0,1[\times]0,1[\times\{0\}\subset\mathbb{R}^3$

Correction.
Faux, tout boule centrée en un point de cet ensemble contient des points de troisième coordonnée non nulle, donc hors de l'ensemble

3) Soit X un espace métrique, et $A\subset B\subset X$.

Vrai □ Faux □ $\bar{A}\subset\overline{B}$

Correction.
Vrai : $\overline{B}$ *est un fermé qui contient* B*, donc* A*, donc il contient le plus petit fermé qui contient* A.

Vrai □ Faux □ $\partial A\subset\partial B$

Correction.
Faux : Considérer par exemple $[0,1]$ *et* $[0,2]$

(•) Vrai □ Faux □ Un ensemble discret est d'intérieur vide.

Correction.
Vrai pour les espaces métriques avec lesquels on a l'habitude de travailler, comme $\mathbb{R}$ *(muni de la distance canonique) : une partie discrète de* $\mathbb{R}$ *ne peut contenir aucune boule ouverte, elle est donc d'intérieur vide. Mais faux en général : on peut considérer par exemple l'espace métrique* $X=\mathbb{N}$*, qui est discret, mais aussi* ouvert *comme espace métrique, donc d'intérieur égal à lui-même. Autre contre-exemple : dans* n'importe quel ensemble *muni de la métrique discrète, toute partie est à la fois* discrète *et* ouverte*, donc d'intérieur égal à elle-même.*

4) Suites

Vrai □ Faux □ Une suite convergente sur $\mathbb{R}$ est bornée

Correction.
Vrai

Vrai □ Faux □ Une suite bornée sur $\mathbb{R}$ est convergente

Correction.
Faux, exemple $(-1)^n$

(•) Vrai □ Faux □ Une suite sur $\mathbb{R}$ peut admettre une infinité de valeurs d'adhérence

Correction.
Vrai, considérer par exemple une énumération des rationnels, tout réel est valeur d'adhérence de la suite.

Vrai □ Faux □ Une partie K finie d'un espace métrique est toujours compacte.

Correction.
Vrai : une suite dans K *visite nécessairement une infinité de fois au moins l'un des points de* K*. On peut aussi considérer un recouvrement par des ouverts, il suffit pour chaque point d'en*

garder un qui contient le point en question, on obtient ainsi un recouvrement par N ouverts au plus, où N est le cardinal de l'ensemble.

Vrai $\square$ Faux $\square$ Une partie finie d'un espace métrique est toujours complète .

Correction.

Vrai : toute suite de Cauchy est stationnaire sur l'un des points de l'ensemble au delà d'un certain rang

Vrai $\square$ Faux $\square$ L'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte.

Correction.

Faux : considérer par exemple la fonction $f \quad : \ \mathbb{R} \longrightarrow e^x$, on a $f^{-1}([0,1]) =]-\infty, 0]$, qui n'est pas compact car non borné.