Mesure et intégration

Quizz 3

1) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f une application de X dans un ensemble X'.

Vrai ☐ Faux ☐   La famille $f(\mathcal{A})$ est une tribu sur X'.

Correction.
Faux en général, par exemple si f est constante, alors $f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{y\}\}$

2) Soit (X) un ensemble, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux tribus sur X.

Vrai ☐ Faux ☐   la famille $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est une tribu sur X.

Correction.
Faux en général, contre exemple : $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \sigma(\{1\}, \{2, 3\})$, $\mathcal{A}' = \sigma(\{1, 2\}, \{3\})$. L'union ne contient pas $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$.

3) Les familles suivantes engendrent la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$:

Vrai ☐ Faux ☐   La famille des parties fermées

Correction.
Vrai, il s'agit d'une famille dans la tribu des boréliens, et elle contient notamment les $]-\infty, c]$

Vrai ☐ Faux ☐   La famille $\{[a, b[\,,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

Correction.
Vrai, il s'agit de boréliens comme intersection des $]a - 1/n, b[$ et on peut retrouver les intervalles ouverts en considérant l'union des $[a + 1/n, b[$.

Vrai ☐ Faux ☐   La famille des compacts

Correction.
Vrai, il s'agit de fermés, donc de boréliens, et elle contient notamment les $[a, b]$, donc les $]a, b[$ par union dénombrable, comme précédemment.

4) Soient μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur le même espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On a alors

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda\mu_1$ est une mesure pour tout λ réel.

Correction.
Faux évidemment en général, mais vrai si $\lambda \geq 0$.

Vrai ☐ Faux ☐   La somme $\mu_1 + \mu_2$ est une mesure

Correction.
Vrai .

Vrai ☐ Faux ☐   Le produit $\mu_1 \times \mu_2$ est une mesure

Correction.
Faux en général, on perd l'additivité. Prendre par exemple $\mu_1 = \mu_2$, deux ensembles A et B disjoints de masse 1, on a

$$\mu_1 \times \mu_2(A \cup B) = 4 \neq 2 = \mu_1 \times \mu_2(A) + \mu_1 \times \mu_2(B).$$

Noter que la question n'est pas très bien posée en général (si les mesures ne sont pas finies), car il faudrait s'entendre sur ce que vaut le produit $0 \times +\infty$.

Vrai ☐ Faux ☐ La différence $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure

Toute mesure est une mesure extérieure.

Vrai ☐ Faux ☐

Correction.
Faux en général : les conditions exigées pour une mesure extérieure sont certes plus faibles que les conditions pour une mesure, mais une mesure peut n'être définie que sur une tribu strictement incluse dans la tribu discrète, auquel cas il ne s'agit pas d'une mesure extérieure, qui elle est toujours définie sur $\mathcal{P}(X)$.

5) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace métrique mesurable. L'application μ qui à $A \in \mathcal{A}$ associe son diamètre

$$\mu(A) = \text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)\,,\ \mu(\emptyset) = 0,$$

est une

mesure ☐ mesure extérieure ☐ ni l'une ni l'autre ☐

Correction.
Ni l'une ni l'autre en général : dès que X *contient* 2 *points, le diamètre des singletons est* 0, *et le diamètre de la réunion des singletons est strictement positif.*

6) On considère l'ensemble X des personnes habitant sur terre, muni de la tribu discrète. Préciser si les μ définis ci-dessous sont des mesures, mesures extérieures, ou ni l'un ni l'autre. On définit μ par la valeur qu'elle affecte à une sous-population $A \in \mathcal{P}(X)$ (en affectant toujours 0 à $\emptyset$).

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ nombre total d'années vécues par les éléments de A

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge moyen des individus dans A

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge maximal parmi les individus dans A (avec $\mu(\emptyset) = 0$).

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge minimal parmi les individus dans A

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ nombre de “connections” entre individus de A (on compte 1 pour tout couple (x, y) tel que x et y se sont déjà rencontrés au moins une fois).

7) On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Les assertions suivantes sont elles vraies / fausses ?

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A}) = \lambda(\bar{A})$ pour tout intervalle A

Correction.
Vrai, $\lambda([a,b]) = b - a = \lambda([a,b[) =$ *etc...*

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A})$ pour tout borélien A

Correction.
Faux, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$, *alors que* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *est d'intérieur vide.*

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(\partial A) \leq \lambda(A)$ pour tout borélien A

Correction.
Faux, $\mathbb{Q}$ *est de mesure nulle, mais sa frontière est* $\mathbb{R}$ *de mesure pleine.*

Vrai ☐ Faux ☐ Tout borélien borné est de mesure finie

Correction.
Vrai, si $A \subset [-M, M]$*, alors* $\lambda(A) \leq 2M$.

Vrai ☐ Faux ☐ Tout borélien de mesure finie est borné

Correction.
Faux, $\mathbb{Z}$ *est de mesure nulle, et non bornés.*

Vrai ☐ Faux ☐ Tout ouvert de mesure finie est borné

Correction.
Cela reste faux, même pour les ouverts, l'union des $]n, n + 1/n^2[$ *est un ouvert de mesure finie, non borné.*