Topologie

Séance de mise à niveau

Notion, définitions, propriétés

Distance espace métrique, diamètre, distance à une partie, boules ouvertes / fermées, ensemble discret, norme, espaces vectoriels normés, normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^d$.
Topologie (métrique) : ouvert, fermé, stabilité par union (resp. intersection) du caractère ouvert (resp. fermé), intérieur, adhérence, frontière, densité, droite réelle achevée.
Suite convergente, unicité de la limite, valeur d'adhérence, caractérisations séquentielles de notions topologiques (adhérence, intérieur, fermé).
Complétude, compacité

A) Vrai ou faux.

Vrai ☐ Faux ☐ La somme de deux distances est une distance.

Vrai ☐ Faux ☐ Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ borné, $\mathrm{diam}(A) = \sup A - \inf A$

Vrai ☐ Faux ☐ Pour toute partie $A \neq \emptyset$ de (X, d), $d(x, A) = 0$ implique $x \in A$.

Vrai ☐ Faux ☐ Pour tout $x \in (X, d)$, $B(x, 1)$ est strictement inclus dans $B_f(x, 1)$.

Vrai ☐ Faux ☐ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est discret.

Vrai ☐ Faux ☐ Tout ensemble fini d'un espace métrique est discret

Vrai ☐ Faux ☐ Aucun ensemble infini n'est discret

Vrai ☐ Faux ☐ Les distances entre deux éléments d'un ensemble discret sont minorées par une constante strictement positive.

Vrai ☐ Faux ☐ Toute somme finie de normes est une norme.

Vrai ☐ Faux ☐ Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les $]a, b[$, avec $a < b$.

Vrai ☐ Faux ☐ L'adhérence d'une partie contient toujours son intérieur

Vrai ☐ Faux ☐ L'adhérence d'une partie de (X, d) contient toujours strictement son intérieur

Vrai ☐ Faux ☐ La frontière d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de ses deux extrémités.

Vrai ☐ Faux ☐ $\varepsilon\mathbb{Z} = \{n\varepsilon\,,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour ε suffisamment petit.

Vrai ☐ Faux ☐ La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, munie de la métrique $d(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$, est de diamètre fini.

Vrai ☐ Faux ☐ Une suite admet au maximum une valeur d'adhérence.

B) Préciser l'intérieur, l'adhérence, et la frontière, des ensembles suivants, considérés comme des parties de $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle.

$$A_1 = \mathbb{Q}\,,\ A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,,\ A_3 = \mathbb{N}\,,\ A_4 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, A_5 =]-\infty, 0[\cup]0, 1].$$

(••) Répondre à la même question si on l'on considère maintenant ces ensembles non plus comme parties de $\mathbb{R}$, mais comme espaces métriques à part entière.

C) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. L'adhérence de l'intérieur de F est-elle toujours égal à F ?

COURS

Proposition I.3.2 Soit (X, d) un espace métrique.

L'ensemble vide et X sont à la fois fermés et ouverts.

Toute union d'ouverts est un ouvert, et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection de fermés est fermée, et toute union finie de fermés est fermée.

Proposition I.4.6 Soit (X, d) un espace métrique, et A une partie de X. On a les équivalences :

1. Un point $x \in X$ est dans l'adhérence de A si et seulement si x est limite d'une suite de points (non nécessairement distincts, il peut s'agir de la suite constante égale à x) de A.
2. Un point $x \in A$ est dans l'intérieur de A si et seulement si toute suite convergeant vers x est dans A au delà d'un certain rang.
3. A est fermé si et seulement si, pour toute suite de points de A qui converge dans X, la limite est dans A.

Complétude

Exercice 1. (•) Soit X un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que la suite est nécessairement constante au delà d'un certain rang.

Exercice 2. (•) Soit X un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy. On note X_N l'ensemble des termes de la suite au delà du rang N :

$$X_N = \{x_n\,,\ n \geq N\}\,.$$

Montrer que la suite (x_n) est de Cauchy si et seulement si le diamètre de X_N tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$.

Compacité

Exercice 3. Montrer que l'intersection de deux compacts est compacte.

Exercice 4. Montrer qu'une partie finie d'un espace métrique est toujours compacte.