Topologie & Calcul différentiel

Quizz 3

1) Soit $d \geq 1$. Il existe des constantes m et M telles que, pour $d \geq 1$, toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$, on ait
$$m\,\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq M\,\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Vrai ☐ Faux ☐

2) Soit $f = (f_1, \ldots, f_m)$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, différentiable en x.

Vrai ☐ Faux ☐ La $i$ème ligne de la jacobienne de f en x contient les coordonnées dans la base canonique du gradient de la fonction f_i en x

3) Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Préciser, selon les valeurs de α, les points de différentiabilité de la fonction
$$f_\alpha \;:\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f_\alpha(x, y) = |x|^\alpha + |y|^\alpha\,.$$

4) Applicabilité du Théorèmes des Fonctions Implicites (TFI)

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement y fonction de x au voisinage de $(0, 0)$, avec x et y liés par la relation $yx^2 + y^2x - 1 = 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement y fonction de x au voisinage de $(1, 0)$, avec x et y liés par la relation $yx^2 + y^2x - 1 = 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement (y_1, y_2) fonction de x au voisinage de $(1, 2, 0)$, avec x et (y_1, y_2) liés par la relation $y_1x^2 + y_2^2x - 1 = 0$.

Exercice 1

(Retour sur le théorème de point fixe de Banach (ou Picard))
a) On considère la fonction

$$f \;:\; x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{1+x^2}.$$

Montrer que f est faiblement contractante au sens où $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ pour tous $x \neq y$. Montrer que f n'admet pas de point fixe.

b) On considère maintenant une application T définie d'un compact K dans lui même, telle que

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y).$$

Montrer que T admet un point fixe unique.

Exercice 2 (Coordonnées sphériques)

a) On considère la fonction

$$f \;:\; (r, \varphi, \theta) \in U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi\cos\theta \\ r\,\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Calculer la matrice jacobienne de f, et montrer que f est différentiable sur U.

b) L'application f est elle bijective ? Peut on la rendre bijective en modifiant les espaces d'arrivée et de départ ?

c) En quels points de U la différentielle de f est-elle inversible ?