Chapitre II

Espaces fonctionnels, théorie de la mesure et de l'intégration

Sommaire

Nous introduisons dans ce chapitre les espaces fonctionnels (espaces vectoriels normés constitués de fonctions) utilisés en analyse et analyse numérique[1] *des équations aux dérivées partielles, ainsi qu'en optimisation. Les espaces de fonctions continues, ou plusieurs fois continûment différentiables, sont décrits en premier lieu. Ces espaces ne fournissent pas un cadre satisfaisant pour la plupart des Équations aux Dérivées Partielles (EDP) de la physique. Il est ainsi nécessaire de construire des normes basées sur des intégrales en espace, qui correspondent pour la plupart de ces EDP à des quantités pertinentes physiquement. Nous précisons en quoi l'intégrale de Riemann ne permet pas de définir des espaces fonctionnels dotés de bonnes propriétés. Nous présentons ensuite une approche alternative, basée sur la théorie de la mesure et de l'intégrale de Lebesgue, qui permet de construire des espaces de fonctions ayant de bonnes propriétés, en particulier de complétude. La construction détaillée de cette intégrale de Lebesgue est reportée en annexe B, nous nous contentons ici d'en esquisser les principaux éléments, qui permettent la construction des espaces fonctionnels de type L^p développés à la fin de ce chapitre.*

II.1 Convergences simple & uniforme

Nous rappelons dans cette section les notions très générales de convergence *uniforme* et de convergence *simple* pour des suite d'applications à valeurs dans un espace métrique. On notera que les définitions ne

1. L'analyse numérique consiste à étudier la convergence des méthodes d'approximation numérique des équations différentielles et équations aux dérivées partielles, qui permet d'assurer que les approximations numériques produites par calcul effectif sur ordinateur convergent bien vers la solution exacte de l'équation considérée. Ces solutions exactes étant des fonctions d'une ou plusieurs variables, elle nécessitent de définir des normes adaptées sur ces espaces de fonctions.

nécessitent aucune structure sur l'ensemble de départ. La propriété de convergence uniforme, très forte, jouera un rôle essentiel dans les espaces de fonctions continues introduits ci-après (l'espace de départ sera alors muni d'une métrique, et les applications considérée seront continues). Les espaces construits sur une norme intégrale, qui font l'objet des sections suivantes, feront jouer un rôle central à la notion plus faible de convergence simple (l'espace de départ sera alors *mesuré*, l'espace d'arrivée mesurable, et les applications considérées seront mesurables, dans un sens précisé ci-après).

Définition II.1.1. (Convergence simple, convergence uniforme (•))
Soit f une application d'un ensemble X dans un espace métrique (Y, d), et (f_n) une suite d'applications de X dans Y. On dit que f_n converge *simplement* vers f si $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$, pour tout x, ce qui peut s'écrire

$$\forall x \in X\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N\,,\ \forall n \geq N\,,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

On dit que la convergence est *uniforme* si le N ne dépend pas du x, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N\,,\ \forall n \geq N\,,\ d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon \quad \forall x \in X\,,\ .$$

Exercice II.1.1. Pour chacune des suites de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ci-dessous, indiquer sa limite simple si elle existe, et préciser si la convergence est uniforme (sur $\mathbb{R}$, sinon sur certaines parties de $\mathbb{R}$).

$$f_n^1(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}\,,\ f_n^2(x) = e^{-nx^2}\,,\ f_n^3(x) = \frac{e^{-nx^2}}{1+(x-n)^2}\,,\ f_n^4(x) = \sin\left(\frac{2\pi x}{n}\right)\,,$$

Topologie de la convergence simple (• • •)
Même si nous n'utiliserons pas cette structure dans la suite du chapitre, précisons que la notion de convergence simple permet de définir une *topologie*[2] sur l'ensemble des applications d'un ensemble X dans un espace métrique (Y, d), noté X^Y.

Proposition II.1.2. (Topologie de la convergence simple (• • •))
Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique[3]. On dit que $F \subset X^Y$ est *fermé* si, pour toute suite (f_n) dans F qui converge simplement vers $f \in Y^X$, la limite f est dans F. On définit les ouverts comme complémentaires des fermés. On définit ainsi une *topologie* (au sens de la définition générale A.2.5, page 147) sur Y^X.

Démonstration. On considère une collection de fermés $(F_i)_{i\in I}$ de X^Y, et une suite (f^n) d'applications dans l'intersection de F_i, qui converge simplement vers $f \in Y^X$. Cette limite appartient à chacun des F_i, donc à l'intersection. On considère maintenant une collection *finie* de fermés $(F_i)_{i\in I}$, et une suite (f^n) d'applications dans l'union des F_i, qui converge simplement vers $f \in Y^X$. Comme I est fini, il existe au moins un i tel que F_i contient une infinité de termes de la suite. On extrait la sous-suite correspondante, qui converge simplement vers f, qui est donc nécessairement dans F_i, donc dans l'union. □

II.2 Espaces de fonctions continues

Proposition II.2.1. (Espace $C_b(X)$ (•))
Soit X un espace métrique. L'ensemble $C_b(X)$ des applications continues et bornées de X dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

est un espace vectoriel normé *complet*, c'est à dire un *espace de Banach*[4].

2. Topologie au sens de la topologie générale (voir section A.2.3), qui n'est en générale pas *métrisable*, c'est à dire qu'il n'existe pas de métrique qui conduirait à la même collection d'ouverts.
3. On pourrait immédiatement généraliser ce qui suit au cas d'un espace d'arrivée topologique, en se basant sur la notion de convergence d'une suite par les ouverts, voir définition A.2.19 page 148.
4. On se reportera au chapitre IV, page 67, pour une présentation générale de ce type d'espaces.

Démonstration. On vérifie immédiatement $\|\cdot\|$ est une norme. Considérons maintenant une suite de Cauchy (f_n) dans $C_b(X)$. Pour tout $x \in X$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, elle converge donc vers un réel que l'on note $f(x)$. La suite (f_n) étant de Cauchy, pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe N tel que pour tous p, q plus grands que N, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in X.$$

On fait tendre p vers $+\infty$, on obtient $|f(x)| \leq \varepsilon + M$ pour tout x, où M est un majorant de $|f_q|$, la fonction f est donc bornée. On peut donc étendre la norme du sup aux fonctions de type $g + f$, avec $g \in C_b(X)$, même si on n'a pas encore montré que f est continue.
De la même manière, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $p \geq N$, on a

$$\|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On a donc convergence de f_n vers f en norme $\|\cdot\|$.
Montrons maintenant que f est continue. Soit $x \in X$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

La fonction f_N étant continue en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout y à distance de x inférieure à η, $|f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon$. On a donc, pour un tel y

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| < 3\varepsilon,$$

d'où $f \in C_b(X)$. $\square$

Noter que, lorsque X est compact, il n'est pas nécessaire d'imposer le caractère borné des fonctions. On écrira ainsi $C([0,1])$ l'espace des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ (qui sont bornées sans qu'il soit nécessaire de le préciser).

Proposition II.2.2. (Espace $C_b^1(]a,b[)$ (••))
L'espace $C_b^1(]a,b[)$ des fonctions continûment différentiables sur $]a,b[\subset \mathbb{R}$, bornées et de dérivées bornées, est un espace vectoriel normé complet pour la norme

$$\|f\| = \sup_{x\in]a,b[} |f(x)| + \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)|\,.$$

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy dans $C_b(]a,b[)$. Comme dans la proposition précédente, f_n et f_n' convergent uniformément vers f et g, respectivement, fonctions continues et bornées. Montrons que f est continûment dérivable, et de dérivée g. Pour toute fonction φ continûment différentiable sur $]a,b[$, à support compact, on a

$$\int_a^b f_n'\varphi = -\int_a^b f_n\varphi' \quad \forall n \Longrightarrow \int_a^b g\varphi = -\int_a^b f\varphi'.$$

Soit $x \in]a,b[$ et $h > 0$ tel que $[x - 2h, x + 2h] \subset]a,b[$. Pour $\varepsilon \in]0,h[$, on introduit une fonction régulière positive d'intégrale 1 supportée sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, et l'on définit φ_ε comme

$$\varphi_\varepsilon(y) = \int_a^b (\rho_\varepsilon(y) - \rho_\varepsilon(y - (x+h)))\, dy.$$

On a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\int_a^b g\varphi_\varepsilon = -\int_a^b f\varphi_\varepsilon',$$

d'où, en faisant tendre ε vers 0

$$\int_x^{x+h} g(y)\, dy = -f(x) + f(x+h),$$

d'où

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \longrightarrow g(x).$$

On démontre de la même manière que la limite du taux de variation pour $h < 0$ est $g(x)$. La fonction f est donc dérivable en x, et de dérivée $g(x)$, poru tout $x \in]a, b[$, d'où la continue différentiabilité du fait que g est continue. La convergence de f_n vers f pour la norme $\|\cdot\|$ se vérifie comme dans la preuve de la proposition précédente. □

Noter que l'on peut définir de la même manière l'espace $C_b^1(\Omega)$ des fonctions bornées et de gradient (voir chapitre V) borné sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, qui est complet pour la norme

$$\|f\|_{C^1} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)| + \sup_{x\in\Omega} |\nabla f(x)| \,.$$

Exercice II.2.1. (Distance à un convexe fermé de $C([a, b])$ non atteinte)
On se place sur $E = C([0, 1])$, et l'on considère

$$F = \left\{ f \in E\,,\ f(0) = 1\,,\ \int_0^1 f(s)\,ds = 0 \right\}.$$

a) Montrer que F est un convexe fermé de E.

b) Montrer que la distance de $g = 1$ à F n'est pas atteinte.

Exercice II.2.2. Montrer que la boule unité fermée de $C([0, 1])$ n'est pas compacte.

II.3 De Riemann à Lebesgue

II.3.1 L'intégrale de Riemann et ses limites

Définition II.3.1. (Sommes de Riemann, Intégrale de Riemann)
On se place sur l'intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On note Λ l'ensemble des *subdivisions marquées* de l'intervalle I, c'est à dire l'ensemble des couples (σ, t), avec

$$\sigma = (x_0, \ldots, x_n)\,,\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,,\ t = (t_1, \ldots, t_n)\,,\ t_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad \forall j = 1, \ldots n,$$

où $n \geq 1$ est un entier. Pour toute fonction f de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $(\sigma, t) \in \Lambda$, on note $S(f, \sigma, t)$ la *somme de Riemann*

$$S(f, \sigma, t) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(t_j). \tag{II.3.1}$$

On appelle *pas* d'une subdivision le max des $x_j - x_{j-1}$, que l'on note h_σ. On note Λ_h l'ensemble des subdivisions marquées de pas inférieur à $h > 0$. On dit que f est Riemann intégrable si la limite de $S_{(\sigma,t)}$ lorsque h_σ tend vers 0 existe, c'est-à-dire

$$\exists I \in \mathbb{R}\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \eta\,,\ \forall (\sigma, t) \in \Lambda_\eta\,,\ \left|S_{(\sigma,t)} - I\right| < \varepsilon.$$

On appelle alors I l'intégrale (de Riemann) de f, et l'on note

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Proposition II.3.2. Une fonction Riemann intégrable sur $[a, b]$ est nécessairement bornée sur cet intervalle.

Démonstration. Soit f une fonction non majorée sur $[a, b]$. Nous allons montrer que l'on peut trouver une suite de subdivisions marquées de pas tendant vers 0 telle que $S_{(\sigma_\eta, t_\eta)}$ tende vers $+\infty$, ce qui exclut la Riemann intégrabilité. Il existe une suite (x_n) de $[a, b]$ telle que $f(x_n)$ tend vers $+\infty$. L'intervalle $[a, b]$ étant compact, on peut en extraire une suite qui converge vers un élément $x \in [a, b]$. On note toujours (x_n) cette suite extraite. Pour tout $\eta > 0$, on complète l'intervalle $[x - \eta/2, x + \eta/2] \cap [a, b]$ pour former une subdivision marquée (σ_η, t_η) de pas $\leq \eta$, dont l'intervalle centré en x est le k-ème. On choisit arbitrairement des marques t_j pour $j \neq k$ (par exemple la borne inférieure du sous-intervalle considéré). Comme f n'est pas bornée sur $[x - \eta/2, x + \eta/2] \cap [a, b]$, il existe y dans cet intervalle tel que

$$S_{(\sigma_\eta, t_\eta)} = \eta f(y) + \sum_{j \neq k}^{n} (x_j - x_{j-1}) f(t_j) \geq \frac{1}{\eta}$$

On construit ainsi une suite (σ_η, t_η) de subdivisions marquées dont le pas tend vers 0, telle que les sommes de Riemann associées tendent vers $+\infty$, cette fonction n'est donc pas R-intégrable. On démontre de la même manière qu'une fonction non minorée n'est pas Riemann intégrable. □

Remarque II.3.3. (Sommes de Riemann / de Darboux)
Il existe une construction alternative de l'intégrale de Riemann, basée sur les sommes dites de *Darboux* (équations (II.6.1)(II.6.2), page 52). L'équivalence des deux constructions fait l'objet de l'exercice II.6.1, page 51.

Proposition II.3.4. (Structure d'e.v.n. des fonctions Riemann-intégrables)
On note E l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On munit E de la relation d'équivalence

$$f \,\mathcal{R}\, g \Longleftrightarrow \int_a^b |f - g| = 0,$$

et l'on note $\overline{E} = E/\mathcal{R}$ l'espace quotient. La quantité $\int_a^b |f|$ ne dépend pas du représentant choisi pour $\bar{f}$, on la note $\|\bar{f}\|$, elle confère à $\overline{E}$ une structure d'espace vectoriel normé.

Exercice II.3.1. Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Proposition II.3.5. L'espace E des (classes de) fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ n'est *pas complet.*

Démonstration. On se place sur l'intervalle $[0, 1]$, et l'on considère la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ sur } \; [1/n, 1]\,, \; f_n(x) = 0 \text{ sur } \; [0, 1/n[.$$

On a, pour tous $p < q$

$$\|f_q - f_p\| = \int_{1/q}^{1/p} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2}{\sqrt{p}} - \frac{2}{\sqrt{q}},$$

qui tend vers 0 quand p et q tendent vers $+\infty$. Il s'agit donc d'une suite de Cauchy. Cette suite converge uniformément vers $1/\sqrt{x}$ sur tout intervalle du type $[\eta, 1]$, avec $\eta > 0$. Si elle converge dans $\overline{E}$, elle converge donc nécessairement vers la classe de cette fonction, qui n'est *pas* dans $\overline{E}$ d'après la proposition II.3.2. □

Le contre-exemple de la démonstration ci-dessus repose sur le caractère borné des fonctions Riemann-intégrables. On pourrait espérer contourner ce problème en intégrant la notion d'intégrale généralisée absolument convergente. Mais cette notion n'est pas suffisante : on peut construire de tels contre-exemples avec des fonctions qui explosent en des points intérieurs à l'intervalle, et même en une infinité de points intérieurs à l'intervalle. Par ailleurs le caractère borné des fonctions R-intégrables n'est pas le seul obstacle à la complétude, comme l'exercice II.3.2 ci-dessous le montre.

Exercice II.3.2. (••)
On considère une numérotation (r_n) des rationnels de $[0, 1]$, et l'on considère la suite de fonctions (f_n) définie par

$$x \in [0, 1] \longmapsto f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[r_k, r_k + \varepsilon/2^n]}(x),$$

avec $\varepsilon > 0$.

a) Montrer que (f_n) (plus précisément la suite des classes de fonctions associées aux f_n) est une suite de Cauchy dans l'e.v.n. E des fonctions R-intégrables sur $[0,1]$ (défini par la proposition II.3.4 ci-dessus).

b) Montrer que, pour tout n, $0 \leq \int f_n \leq \varepsilon$.

On suppose que f_n converge vers une fonction f de E.

c) Montrer que, pour tout $h > 0$, il existe une subdivision marquée (σ, t) de pas plus petit que h telle que

$$S(f, \sigma, t) \geq 1.$$

d) Conclure.

Comme nous l'avons vu ci-dessus (proposition II.3.5), les espaces de fonctions (ou de classes de fonctions) canoniquement associés à l'intégrale de Riemann ne sont pas complets. L'élaboration de cadres fonctionnels adaptés à l'étude des équations aux dérivées partielles (existence / unicité de solution, étude de convergence des méthodes numériques) passe par une autre construction de la notion d'intégrale, appelée intégrale de Lebesgue, qui fait l'objet des sections suivantes. Comme nous le verrons, cette construction présente un certain nombre d'avantages par rapport à celle de Riemann, parmi lesquels :

1) La nouvelle notion généralise strictement la précédente au sens où toutes les fonctions Riemann-intégrables seront Lebesgue-intégrables, mais il y a "beaucoup plus" de fonctions intégrables dans ce sens nouveau. En particulier les fonctions intégrables ne seront pas nécessairement bornées, elle peuvent aussi être aussi très pathologique en termes de continuité : une fonction peut n'être continue en aucun point, et pourtant Lebesgue-intégrable [5].

2) Comme nous l'avons indiqué comme motivation principale de cette nouvelle construction, cette intégrale permettra de définir une norme sur des espaces de fonctions intégrables (ou dont une certaine puissance est intégrable), normes qui feront de ces espaces des espaces *complets*.

3) Cette nouvelle théorie de l'intégration apporte des théorèmes puissants très utiles pour les démonstrations, en particuliers deux théorèmes permettant, sous certaines conditions, de déduire de la convergence simple d'une suite de fonctions intégrables l'intégrabilité de la fonction limite et la convergence des intégrales vers l'intégrale de la limite [6].

4) La notion de *tribu* évoquée ci-dessus, au fondement de la construction de la notion de mesure et de l'intégrale de Lebesgue, est aussi à la base de la théorie des probabilités, permettant de formaliser de façon rigoureuse la notion d'espace probabilisé et d'*événement*.

5) La construction de Riemann peut s'étendre aux espaces $\mathbb{R}^d$, mais cette construction est un peu laborieuse, en particulier si l'on souhaite considérer des fonctions définies sur des domaines peu réguliers. La construction de Lebesgue est beaucoup plus souple et générale, et, même si sa construction sur $\mathbb{R}$ passe par les longueurs des segments [7], elle peut se définir sur des espaces sans structure affine ni métrique.

Précisons néanmoins que la construction Riemannienne reste intéressante en elle-même. En particulier le calcul effectif de valeurs approchées d'intégrales suit en général une démarche de type sommes de Riemann. Par ailleurs la convergence des sommes de Riemann (pour des subdivisions uniformes) vers l'intégrale permet d'estimer certaines limites de sommes de façon très performante.

Précisons que cette nouvelle approche sera d'une certaine manière plus restrictive selon un certain aspect : à aucun moment un principe de compensation [8] ne sera utilisé. De fait, la construction de Lebesgue ne repose que sur une structure assez rudimentaire sur l'espace de départ des fonctions que l'on cherche à intégrer, plus précisément la notion de *tribu*, ensemble de parties dont on sait définir la *mesure*, indépendamment de toute structure d'ordre. On aura donc équivalence entre l'intégrabilité d'une fonction et l'intégrabilité de sa valeur absolue. On pourra se reporter à l'exercice II.6.2, page 52, pour se convaincre de la fragilité des constructions d'intégrales (il s'agit de sommes en l'occurence) basées sur un principe de compensation.

5. À titre d'exemple la fonction de l'exercice II.3.1, qui n'est pas Riemann intégrable, sera Lebesgue intégrable.

6. Il s'agit des théorèmes de convergence monotone (Th. B.7.23, page 185), et de convergence dominée (Th. B.7.25, page 186). Noter qu'il existe des versions de ces théorèmes dans le cadre de l'intégrale de Riemann (voir par exemple `http://alain.troesch.free.fr/2018/Fichiers/sujet12.pdf`), mais il est nécessaire de supposer que la fonction limite est elle-même intégrable, ce qui n'est pas le cas dans le cadre Lebesgue.

7. En particulier dans la construction de la mesure extérieure de Lebesgue, qui fait l'objet de la proposition B.4.6, page 168.

8. Qui permet par exemple de définir l'intégrale sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$.

II.3.2 Théorie de la mesure et intégrale de Lebesgue : un aperçu

La section qui suit donne un aperçu synthétique de la théorie de la mesure, ainsi que de l'intégration de Lebesgue, sur lesquelles se fonde la construction des espaces fonctionnels proposée dans les sections suivantes. Cette construction [9] est basée sur la notion de mesure. Le point de départ est le suivant [10] : si l'on se donne une partie A de $\mathbb{R}^d$ dont on connait le volume, il est naturel de définir l'intégrale d'une fonction constante sur A comme le produit de cette constante par le volume [11]. Pour toute fonction qui s'écrit comme somme finie de fonctions constantes sur des parties disjointes deux à deux dont on connait le volume (on parlera plus loin de fonction *étagée*), on a aussi une manière canonique de définir l'intégrale comme somme des différentes contributions. On peut alors définir l'intégrale d'une fonction positive quelconque comme le supremum des intégrales des fonctions étagée positives inférieure ou égale à f. L'extension à des fonctions de signe quelconque se fait alors aisément en considérant les parties positives et négatives. Le point délicat ici est le sens que l'on donne à la notion de "volume" pour des parties quelconques. Comme précisé ci-après, on introduira la notion de *mesure*, qui généralise la notion de volume. Sur $\mathbb{R}^d$, on demandera à cette mesure de vérifier des propriétés conformes aux attentes, c'est à dire que le vide a un volume nul, est les volumes (ou mesures) de parties disjointes s'additionnent [12] pour donner le volume de la réunion. Pour que la définition de l'intégrale conduise à des propriétés exploitables, on aura besoin que cette propriété de sommation s'étendent aux unions infinies dénombrables. On souhaite enfin que cette mesure donne les valeurs attendues pour des ensembles simples, c'est à dire que la mesure d'un segment est sa longueur (pour $d = 1$), la mesure d'un rectangle est le produit des côtés pour $d = 2$, etc ... Cette construction est plus délicate qu'il n'y paraît, du fait qu'il est *impossible* de construire une mesure sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$, qui vérifie les propriétés précédentes. On est contraint de se restreindre à des sous-familles de l'ensemble des parties. Pour que l'intégrale résultant de cette démarche ait de bonnes propriétés, ces sous-familles doivent vérifier un certain nombre de conditions (en particulier de stabilité vis-à-vis de l'union et du passage au complémentaire), ce qui conduit à la notion de *tribu*. Cette notion (en particulier au travers de la tribu des boréliens, et de la tribu de Lebesgue sur $\mathbb{R}$) joue un rôle central dans le théorie de l'intégration de Lebesgue. Elle constitue par ailleurs le fondement de la théorie moderne des probabilités. Nous en précisons donc ci-dessous les principales propriétés, dans un cadre très général, en renvoyant au chapitre B en annexe (page 151) pour un exposé plus détaillé et formalisé de ces questions.

II.3.3 Mesure et intégration

Tribus

Soit X un ensemble. Une tribu $\mathcal{A}$ sur X est un ensemble de parties ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ qui vérifie les trois propriétés suivantes (voir définition B.2.13) :

(i) $\mathcal{A}$ contient l'ensemble vide,

(ii) si A est dans $\mathcal{A}$, son complémentaire l'est aussi,

(iii) si (A_n) est une collection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors leur union est dans $\mathcal{A}$.

On appelle $(X, \mathcal{A})$ un *espace mesurable*.

Noter qu'une tribu est également stable par intersection dénombrable (proposition B.2.3), du fait que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c .$$

L'ensemble des parties $\mathcal{P}(X)$ est une tribu, appelée tribu discrète, c'est la tribu la plus fine sur X (elle contient toutes les autres). La tribu la moins fine est $\{\emptyset, X\}$, appelée tribu *grossière*.

L'intersection de tribus étant une tribu, on peut définir la tribu *engendrée* par un ensemble de parties $\mathcal{C}$, que l'on notera $\sigma(\mathcal{C})$, comme la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$, c'est-à-dire l'intersection des tribus contenant $\mathcal{C}$.

9. La démarche présentée ci-après a fait l'objet des travaux de thèse de Henri Lebesgue, au tout début du vingtième siècle.
10. Ces considérations informelles sur la démarche générale sont détaillées dans la section B.1, page 151.
11. On peut penser à la valeur de la fonction comme une *densité*, en kg m^{-d}. Le résultat de cette "intégration" est simplement la masse de la matière contenue dans cette partie.
12. La mesure est la version mathématique d'une variable *extensive*.

Exercice II.3.3. Donner un exemple de tribu sur $\mathbb{Z}$ (ainsi que sur $\mathbb{R}$), autre que la tribu grossière, qui ne contient qu'un nombre fini de parties.

Exercice II.3.4. Les familles ci-dessous engendrent-elles la tribu discrète sur $\mathbb{N}$?

(i) La famille des singletons.

(ii) La famille des parties du type $\{n, n+1\}$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

(iii) La famille des parties du type $\{2n, 2n+1\}$, pour n décrivant $\mathbb{N}$.

Exercice II.3.5. Soit X un ensemble et A, B et C des parties de $\mathcal{A}$, non vides, et disjointes deux à deux. Quels sont les cardinaux possibles pour la tribu engendrée par $\{A, B, C\}$?

Sur un espace topologique X, on définit la *tribu des boréliens* $\mathcal{B}(X)$ comme la tribu engendrée par les ouverts de X.

Sur $\mathbb{R}$ cette tribu est engendrée par les intervalles $]-\infty, b]$, pour b décrivant $\mathbb{R}$ (prop. B.2.7, page 157).

Sur $\overline{\mathbb{R}}$ cette tribu est engendrée par les intervalles $[-\infty, b]$, pour b décrivant $\mathbb{R}$. (prop. B.2.8, page 157).

Noter que, si la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$ est très facile à définir, il n'est pas aisé de se représenter ce qu'elle contient. Nous verrons plus loin qu'elle est strictement incluse dans l'ensemble des parties, mais contient néanmoins des ensembles beaucoup plus exotiques que les ouverts qui l'engendrent.

Une application f entre deux espaces mesurables $(X, \mathcal{A})$ et $(X, \mathcal{A}')$ est dite *mesurable* si l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{A}'$ est dans $\mathcal{A}$ (définition B.2.11, page 158).

Mesures

Sur un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$, une mesure[13] est une application μ de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty]$, qui vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) pour toute collection (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ disjoints deux à deux, la mesure de l'union de A_n est égale à la somme des mesures des A_n (définition B.3.1, page 161).

On dit que la mesure est *$\sigma-$ finie* si X est réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ de mesure finie.

On parle de mesure de *probabilité* si $\mu(X) = 1$.

On appelle le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace *mesuré* (espace *probabilisé* s'il s'agit d'une mesure de probabilité).

On dit qu'une partie est *négligeable* si elle est incluse dans une partie de mesure nulle. Une union dénombrable de parties négligeables reste négligeable. On dit qu'une propriété est vérifiée *presque partout* (p.p. en abrégé) si elle est vérifiée en dehors d'un ensemble négligeable.

Toute mesure μ est *monotone*, c'est-à-dire que si $A \subset B$ est inclus dans $B \in \mathcal{A}$, alors la mesure de A est plus petite que celle de B. Si la mesure de A est finie, on a de plus $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ (voir proposition B.3.3, page 162).

Exercice II.3.6. (Mesure grossière)
Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur X. Montrer que l'application qui à tout élément non vide de $\mathcal{A}$ affecte la valeur $+\infty$, et 0 à l'ensemble vide, est une mesure.
Cela reste-t-il vrai si l'on remplace $+\infty$ par 1 ?

Exercice II.3.7. Décrire l'ensemble des mesures définies sur la tribu discrète d'un ensemble X fini.

Exercice II.3.8. Donner un exemple de mesure finie sur $\mathbb{Z}$ qui affecte une masse strictement positive à chaque singleton

13. On peut voir cette définition comme une formalisation mathématique de la notion de variable *extensive* utilisée par les physiciens.

Construction abstraite de mesures, application à la mesure de Lebesgue (• • •)

Une mesure extérieure $\mu^\star$ (définition B.4.2, page 165) est une application de l'ensemble des parties d'un ensemble à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, qui affecte 0 à l'ensemble vide, et vérifie la propriété de *sous-additivité* suivante : pour toute collection (A_n) au plus dénombrable de parties de X, alors la mesure extérieure de l'union est inférieure ou égale à la somme des mesures extérieures.

$$\mu^\star\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^\star(A_n).$$

On peut associer à $\mu^\star$ une notion de mesurabilité, qui exprime un bon comportement vis à vis de l'additivité : une partie A est dite *mesurable* pour $\mu^\star$ si $\mu^\star(A) = \mu^\star(A\cap B) + \mu^\star(A\cap B^c)$ pour toute partie B. On peut montrer en toute généralité que l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties $\mu^\star$-mesurables au sens ci-dessus constitue une *tribu*, et que la restriction de $\mu^\star$ à $\mathcal{A}$ est une mesure (théorème B.4.4, page 166).

Cette propriété abstraite permet de construire des mesures effectives sur des ensembles très généraux, selon la démarche décrite ici dans le cas de la construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ (qui fait l'objet de la proposition B.4.6, page 168). On considère une famille de parties dont on connait la valeur de la mesure que l'on souhaite leur affecter, en l'occurrence les intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, auxquels on souhaite affecter leurs longueurs. On suppose que toute partie peut être recouverte par une réunion dénombrable de telles parties (ce qui est le cas ici). On définit alors $\lambda^\star(A)$ l'infimum des sommes des longueurs sur l'ensemble des collections d'intervalles qui recouvrent A (équation B.4.4). On peut alors montrer que $\lambda^\star$ est une mesure extérieure, appelée mesure extérieure de Lebesgue. On appelle alors tribu de Lebesgue l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties mesurables pour $\lambda^\star$. La propriété abstraite évoquée précédemment assure que la restriction de $\lambda^\star$ à $\mathcal{A}$ est une mesure, appelée *mesure de Lebesgue*, qui affecte aux intervalles (ouverts ou fermés) leurs longueurs. On peut montrer que $\mathcal{A}$ contient strictement la tribu des borélien, la mesure de Lebesgue λ se trouve ainsi définie sur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on pourra être amené à considérer l'une ou l'autre de ces tribus selon le cas.

On peut ainsi construire sur $\mathbb{R}$ une mesure λ, appelée *mesure de Lebesgue*, définie sur une tribu $\mathcal{A}$ appelée tribu de Lebesgue, qui est telle que la mesure de tout intervalle est égale à sa longueur. La tribu sur laquelle elle est définie contient en particulier la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (proposition B.4.8, page 169). La mesure d'un singleton étant nulle, toute partie dénombrable (comme $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{D}$) est de mesure nulle.

Parties non mesurables (• • •)
Il est a priori impossible de construire une telle mesure sur l'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, et en même temps il est impossible de décrire explicitement une partie qui ne serait pas dans la tribu de Lebesgue. La construction (dans un sens assez abstrait) de parties non mesurables nécessite l'axiome du choix (voir proposition B.5.1, page 171).

Exercice II.3.9. Donner des exemples de boréliens A de $\mathbb{R}$ tels que

$$(i)\ \lambda(\partial A) = \lambda(A),\ (ii)\ \lambda(\partial A) < \lambda(A),\ (iii)\ \lambda(\partial A) > \lambda(A).$$

Nous décrivons ci-dessous la démarche permet de construire une notion d'intégrale pour des fonctions définies d'un espace mesuré à valeur dans $\mathbb{R}$. Cette démarche s'appliquant à des fonctions mesurables, nous munissons l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ de la tribu des boréliens [14].

Intégrales de fonctions étagées

On appelle fonction étagée sur $(X,\mathcal{A})$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ mesurable ($\mathbb{R}$ est ici muni de la tribu borélienne), qui prend un nombre fini de valeurs. On écrira une telle fonction

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i},$$

où les A_i sont dans $\mathcal{A}$, et deux à deux disjoints (les α_i ne sont pas nécessairement distincts 2 à 2). On notera $\mathcal{E}^+$ l'ensemble des fonctions étagées positives. Si l'espace est muni d'une mesure μ, on définit l'intégrale de

14. Il est possible de munir $\mathbb{R}$ de la tribu de Lebesgue, mais la notion de mesurablité d'une application est alors plus exigeante. Noter que si l'espace de départ est aussi $\mathbb{R}$, on choisira de munir $\mathbb{R}$ en tant qu'espace de départ de la tribu de Lebesgue. Ce double choix, qui n'aura pas d'incidence pratique, permet de relaxer au maximum la contrainte de mesurablité, et donc d'avoir le maximum de fonctions mesurables.

f comme

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Intégrales de fonctions mesurables positives, intégrabilité

On définit ici l'intégrale de fonctions mesurables positives sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$. Conformément à ce qui précède, une telle fonction est mesurable si l'image réciproque de tout $[-\infty, b]$ est dans $\mathcal{A}$. Si l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on le considèrera muni de la tribu de Lebesgue, qui contient la tribu borélienne.

On définit l'intégrale d'une fonction mesurable [15] à valeurs positives comme

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sup_{g \in \mathcal{E}^+, g \leq f} \left(\int_X g(x) d\mu \right) \in [0, +\infty].$$

Intégrabilité
Toute fonction mesurable sur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$, peut être écrite comme comme la différence de ses parties positive et négative :

$$f = f^+ - f^-\ ,\ f^+ = \max(f, 0) = \frac{1}{2}\left(f + |f|\right).$$

On dit que f est *intégrable* si $\int f^+$ et $\int f^-$ sont finies, et l'on note $\int f = \int f^+ + \int f^-$. Si au moins l'une des deux est infinie, on dira que la fonction est *non intégrable*. Si une seule des intégrales est finie, on dira simplement que l'*intégrale existe*, avec la valeur $\pm\infty$, selon que $\int f^+$ ou $\int f^-$ est finie) [16].

Une fonction mesurable f de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est intégrable si et seulement si $|f|$ l'est, et l'on a (voir proposition B.7.19, page 185).

$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu.$$

Exercice II.3.10. La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Remarque II.3.6. (Existence d'une intégrale / intégrabilité)
On prendra garde au fait suivant : l'intégrale d'une fonction positive, telle que définie ci-dessus, peut prendre la valeur $+\infty$. Mais une telle fonction n'est dite intégrable que si la valeur est *finie*. Comme précisé ci-dessus, pour une fonction signée, les intégrales de f^+ et f^- peuvent exister et être toutes deux infinies, on aura alors une indétermination [17]. On pourra se reporter à l'exercice B.7.3, page 184, qui précise ces notions sur un exemple classique.

Intégrale selon la mesure de Lesbegue, notation
Lorsque l'espace de départ est $\mathbb{R}$ (muni de la mesure de Lebesgue), et que l'intégrale existe, on écrira cette intégrale, conformément à l'usage courant,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

15. Noter que l'expression qui suit permet en fait de définir l'intégrale de n'importe quelle fonction positive, *fût-elle non mesurable*, puisqu'elle est simplement définie comme borne supérieure d'un ensemble de réels non vide (il contient 0, puisque la fonction nulle, étagée, minore toute fonction positive). Nous n'utiliserons pourtant cette définition que pour des fonctions mesurables.

16. On peut se demander ce qui pousse à refuser le statut formel d'*intégrable* à une fonction dont l'intégrale est bien définie. Les motivation de cette intransigeance apparaitront plus loin. Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'un des objectifs est de construire un espace vectoriel normé sur la base de cette intégrale ; une norme devant prendre des valeurs finies, les fonctions d'intégrale $\pm\infty$ ne seront pas intégrées à ces espaces.

17. Dans le contexte de l'intégrale de Lebesgue, on ne cherchera pas à lever cette indétermination en invoquant des principes de compensation, qui permettent par exemple de définir dans le contexte de l'intégrale de Riemann l'intégrale (généralisée) de $x \mapsto \sin(x)/x$. Ces compensations font intervenir de façon essentielle l'ordre dans lequel on effectue les intégrations (de 0 vers $+\infty$ pour l'exemple cité). Cette directionalité de l'espace sous jacent n'est pas du tout présente dans la construction de l'intégrale de Lebesgue, qui ne repose que sur une mesure définie sur une tribu de l'espace de départ.

Théorèmes fondamentaux

Nous exprimons ci-dessous les trois théorèmes fondamentaux portant sur des suites de fonctions mesurables. Ils sont exprimés sous leur forme abstraite dans l'annexe B (sur un espace mesuré général $(X, \mathcal{A}, \mu)$), mais nous les énonçons ci-dessous dans le cadre d'usage courant, où l'espace de départ est $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.

Théorème de convergence monotone (th. B.7.23, page 185) : soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$, qui converge presque partout vers f, et telle que $f_n(x)$ est croissant pour presque tout x. Alors f est mesurable et $\int f_n(x)\,dx$ converge vers $\int f(x)\,dx$.

Lemme de Fatou (lemme B.7.24, page 186) : soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty]$. Alors

$$\int \liminf_n f_n(x)\ dx \leq \liminf_n \int f_n(x)\ dx.$$

Théorème de convergence dominée (th. B.7.25, page 186) : soit (f_n) une suite de fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $[-\infty, +\infty]$, qui converge presque partout vers f, avec

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{p.p.},$$

où g est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors les f_n et f sont intégrables, et $\int f_n$ converge vers $\int f$.

Exercice II.3.11. Pour les suites de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous, préciser la fonction qui est limite simple de la suite, la limite des intégrales, l'intégrale de la limite, et préciser si ces 3 suites (f_n^1), (f_n^2), et (f_n^3), rentrent dans le cadre du théorème de convergence monotone ou du théorème de convergence dominée :

$$f_n^0(x) = \mathbb{1}_{]n,n+1[}\,,\ f_n^1(x) = \frac{1}{|x|^2}\mathbb{1}_{]1/n,1[}\,,\ f_n^2(x) = \frac{1}{|x|}\mathbb{1}_{]n,2n[}\,,\ f_n^3(x) = -\frac{1}{n}\mathbb{1}_{]0,n[}.$$

Exercice II.3.12. Préciser (sans faire de calcul) les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(e^{-nx})}{1+x^2}\,dx\,,\ v_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2+\cos(x)^n}\,dx$$

Tribus-produit, mesures-produit, intégrales multiples

Si $(X_1, \mathcal{A}_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2)$ sont deux espaces mesurables, on appelle *tribu-produit*, et l'on note $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, la tribu sur $X_1 \times X_2$ engendrée par les rectangles, i.e. les $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$.

Mesure-produit (théorème B.7.34) : si $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ sont deux espaces mesurés, où μ_1 et μ_2 sont σ–finies, il existe une unique mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, telle que

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)\,(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2).$$

Ce théorème permet donc de construire une mesure sur le produit de deux espaces mesurés, mesure compatible avec le volume des "rectangles".

Le résultat principal est le théorème de Fubini-Lebesgue (énoncé sous forme abstraite page 190, théorème B.7.36), que nous présentons ci-dessous dans le cas du produit $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, muni de la mesure de Lebesgue produit. Il énonce essentiellement que, si une fonction $(x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2)$ est intégrable sur le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, alors on peut intégrer d'abord par rapport à x_1, puis x_2, ou d'abord par rapport à x_2, puis x_1.

Théorème de Fubini-Lebesgue : soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Alors

17. Appelées *section*, voir définition B.7.29.

(i) Pour presque tout x_1, la fonction $f(x_1, \cdot\,)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et pour presque tout x_2, la fonction $f(\,\cdot\,, x_2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Les fonctions [18] $x_1 \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2$ et $x_2 \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_1$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(iii) On a

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_2 \right) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right) dx_2.$$

Exercice II.3.13. Soit $P(x, y)$ un polynôme des deux variables x et y, de degré quelconque. L'identité

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} P(x, y)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} P(x, y)\, e^{-(x^2+y^2)}\, dy \right) dx$$

est-elle vérifiée en général ?

Exercice II.3.14. On considère la fonction

$$(x, y) \in]0, +\infty[\times]0, 1[\longmapsto 2e^{-2xy} - e^{-xy}.$$

Montrer que les deux quantités

$$\int_0^1 \left(\int_0^{+\infty} f(x, y)\, dx \right) dy \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x, y)\, dy \right) dx$$

sont bien définies, mais ont des valeurs différentes.

Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Changement de variable

Si l'on considère une application f d'un espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ vers un ensemble X', la proposition B.2.10, page 158 définit la *tribu image* de $\mathcal{A}$ comme

$$\mathcal{A}' = f_\sharp \mathcal{A} = \left\{ A' \subset X' ,\ f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \right\}.$$

On peut définir de façon analogue la *mesure image* d'une mesure par une application :

Proposition II.3.7. (Mesure image)
Soit f une application d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans un ensemble X'. Alors

$$\mu' \ :\ \mathcal{A}' = f_\sharp \mathcal{A} \longmapsto \mathbb{R}_+$$

définie par

$$\mu'(A') = \mu\left(f^{-1}(A')\right),$$

est une mesure sur la tribu image $f_\sharp \mathcal{A}$, appelée *mesure image* de μ par f. Ce transport conserve la masse totale.

Démonstration. On a bien $\mu'(\emptyset) = 0$, et

$$\mu'\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n \right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}\left(A'_n\right) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu\left(f^{-1}\left(A'_n\right)\right).$$

On a par ailleurs $\mu'(X') = \mu(f^{-1}(X')) = \mu(X)$. □

18. on prend la valeur 0 lorsque l'intégrande n'est pas intégrable, ce qui peut arriver pour un ensemble négligeable.

Dans le cadre des deux propositions précédentes, on peut écrire une formule abstraite de changement de variable.

Proposition II.3.8. Soient $(X, \mathcal{A})$ et $(X', \mathcal{A}')$ deux espaces mesurables, μ une mesure sur $(X, \mathcal{A})$, et $T : X \longrightarrow X'$ une application mesurable de X vers X'.

(i) Pour toute fonction f de X' dans $[0, +\infty]$, mesurable,

$$\int_{X'} f(y)\, d(T_\sharp \mu)(y) = \int_X f \circ T(x)\, d\mu(x)$$

(ii) Pour toute fonction f de X' dans $\overline{\mathbb{R}}$, mesurable, la fonction f est $T_\sharp\mu$–intégrable si et seulement si la fonction $f \circ T$ est μ-intégrable, et la formule ci-dessus est alors valable.

Démonstration. Si f est une fonction étagée (voir définition B.7.5, page 179), (i) est une conséquence directe de la définition de la mesure image. Dans le cas général d'une fonction mesurable, on peut approcher f par une suite croissante (f_n) de fonctions étagées (proposition B.7.6, page 179). Alors $(f_n \circ T)$ est une famille croissante de fonctions étagées convergeant vers $f \circ T$, et on peut passer à la limite grâce au théorème de convergence monotone (théorème B.7.23 page 185).

Pour (ii), on applique simplement ce qui précède à f^+ et f^-. □

Lorsqu'il s'agit d'une application régulière entre parties de $\mathbb{R}^d$, on dispose d'une formule de changement de variable plus explicite, qui fait intervenir la *différentielle* de l'application (voir proposition V.1.20, page 84, dans le chapitre V dédié au calcul différentiel).

II.4 Les espaces L^p

Nous introduisons dans cette section les espaces L^p qui jouent un rôle central dans un très grand nombre d'applications. Ce sont des espaces naturels pour décrire des champs de quantités physiques intensives sur des domaines, typiquement l'espace physique $\mathbb{R}^d$ ou un ouvert Ω de cet espace. La construction pouvant se faire en toute généralité, nous la proposons sur un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ quelconque, mais on pourra instancier cette construction abstraite en remplaçant $(X, \mathcal{A}, \mu)$ par $(\Omega, \mathcal{B}, \lambda)$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$ (on parle de *domaine*), $\mathcal{B}$ la tribu des boréliens, et λ la mesure de Lebesgue.

Remarques préliminaires : espaces fonctionnels et modélisation

La construction décrite dans les sections précédentes permet d'intégrer des variables intensives contre la mesure sous-jacente, pour obtenir une variable extensive afférente au domaine sur lequel on a intégré. Prenons le cas de la mesure de Lebesgue qui, conformément à la terminologie employée au début de ce chapitre, correspond à une mesure de type "volume". Si l'on intègre sur un domaine une fonction correspondant à la densité locale d'une certaine substance, on obtient la masse contenue dans le domaine considéré. La mesure volume peut ainsi être vue comme une capacité à accueillir de la masse. Pour un système fermé, la conservation de la masse se traduira par la conservation d'une certaine norme, qui correspond au cas $p = 1$, de sorte que l'espace L^1 introduit constituera un cadre naturel à cette description. Dans un contexte thermique, on peut considérer cette mesure uniforme comme prenant une certaine valeur fixe de type capacité calorifique. Lorsque l'on intègre sur un domaine un champ de température contre cette mesure, on obtient la quantité de chaleur contenue dans le domaine. La mesure de départ peut ainsi être vue comme une capacité locale à emmagasiner de l'énergie thermique. Noter que si le milieu est hétérogène, cette capacité peut varier d'un endroit à l'autre. Dans ce contexte, si l'on considère un problème d'évolution pour un système fermé (adiabatique), le cas $p = 1$ sera également adapté pour décrire ces phénomènes.

Considérons maintenant une mesure de type "masse", toujours selon la terminologie employée au début du chapitre. Si l'on considère que la mesure correspond à la distribution dans l'espace d'une matière pesante en mouvement, on peut intégrer la quantité vectorielle *Vitesse* contre cette mesure, pour obtenir la quantité de mouvement. Là encore le cas $p = 1$ constituera un cadre naturel, la conservation de la quantité de mouvement assurant la préservation d'une quantité définie ci-après comme la norme L^1 associée à la distribution de masse en mouvement. Si l'on intègre une autre variable intensive, scalaire celle-là, égale à la moitié du module de la vitesse au carré, le résultat de l'intégration sur un domaine correspond à l'énergie cinétique emmagasinée par le fluide occupant le domaine en question. Dans ce contexte, c'est l'espace L^2 qui s'impose comme cadre naturel. On notera que les considérations précédentes permettent de concevoir la mesure sous-jacente (distribution de masse dans l'espace) comme une *capacité* à accueillir de la quantité de mouvement, ou une capacité à accueillir de l'énergie cinétique.

II.4.1 L'espace $L^\infty(X)$

Définition II.4.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On note [19] $\tilde{L}^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions *essentiellement bornées*, c'est à dire des fonctions f qui sont $\mathcal{A}$-mesurables, et telles qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$|f(x)| \leq C \quad \text{pour presque tout } x.$$

Pour une telle fonction, on définit

$$\|f\|_\infty = \inf \{C\,,\ |f| \leq C \text{ p.p.}\}\,, \tag{II.4.1}$$

appelé supremum *essentiel* de la fonction f sur l'espace mesuré X. On définit l'espace $L^\infty(X)$ à partir de $\tilde{L}^\infty(X)$ en identifiant les fonctions égales presque partout, c'est-à-dire que $L^\infty(X)$ est l'espace des classes d'équivalence de $\tilde{L}^\infty(X)$ pour la relation d'équivalence

$$f \,\mathcal{R}\, g \iff f = g \text{ p.p.}$$

On vérifie immédiatement que la quantité $\|f\|_\infty$ (que l'on appellera *norme* de f) est bien définie pour une classe, puisque la valeur est la même pour deux fonctions de $\tilde{L}^\infty(X)$ égales presques partout.

Remarque II.4.2. On prendra garde au fait que, dans la pratique courante, il subsiste une certaine ambigüité entre $\tilde{L}^\infty(X)$ et $L^\infty(X)$. En particulier, lorsque l'on écrit $f \in L^\infty(X)$, on considère parfois f comme une fonction au sens usuel, ce qui peut amener à écrire pour deux fonctions f et g de cet espace que f et g sont égales presque partout, ce qui n'a a priori pas de sens s'il s'agit de *classes* de fonctions (on devrait écrire simplement $f = g$ si l'on considérait les classes). En revanche lorsque l'on établit des propriétés de cet espace, il s'agit bien de l'espace des classes. Nous verrons en particulier que $\|\cdot\|_\infty$ définit une *norme* sur $L^\infty(X)$, ce qui n'est vrai que si l'on considère l'espace des classes d'équivalence. Cette quantité n'est en effet pas une norme sur $\tilde{L}^\infty(X)$: dès que $\mathcal{A}$ admet des ensembles de mesure nulle, il existe des fonctions qui annulent $\|\cdot\|_\infty$ (toutes les fonctions nulles presque partout).

Lemme II.4.3. Pour tout $f \in L^\infty(X)$, on a

$$|f(x)| \ \leq \|f\|_\infty \quad \text{p.p.}$$

Démonstration. Il existe une suite (C_n) convergeant vers $\|f\|_\infty$ telle que

$$|f(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X \setminus E_n,$$

avec $E_n \in \mathcal{A}$ négligeable On note E l'union des E_n, qui est aussi négligeable, et l'on a, pour tout n,

$$|f(x)| \leq C_n \quad \forall x \in X \setminus E,$$

d'où $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout x dans $X \setminus E$. □

Proposition II.4.4. L'ensemble $L^\infty(X)$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur cet espace.

19. Nous omettrons dans la définition la référence explicite à la tribu $\mathcal{A}$ et la mesure μ, pour alléger l'écriture.

Démonstration. La structure vectorielle de $L^\infty(X)$ est immédiate d'après la définition. On a $\|f\|_\infty = 0$ si et seulement si f est nulle presque partout, et la $1-$homogénéité est immédiate. Pour tous f et g dans L^∞ (plus précisément des représentants de leurs classes respectives dans L^∞), on a

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

presque partout. □

Proposition II.4.5. L'espace $(L^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace *de Banach*, c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet.

Démonstration. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que,

$$\|f_m - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k} \quad \forall m\,,\ n \geq N_k,$$

ce qui signifie que, pour tous m, n plus grands que N_k, il existe $E_{m,n,k}$ négligeable tel que $|f_m(x) - f_n(x)| \leq 1/k$ sur $X \setminus E_{m,n,k}$. L'ensemble $E = \cup E_{m,n,k}$ est négligeable comme union dénombrable d'ensembles négligeables et, sur $X \setminus E$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy, donc converge dans $\mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient $|f_n(x) - f(x)| \ \leq 1/k$, d'où la convergence presque partout de f_n vers f, qui appartient à L^∞, et qui est telle que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. □

II.4.2 Les espaces $L^p(X)$, pour $p \in [1, +\infty[$

Définition II.4.6. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. On note $L^p(X)$ l'ensemble des fonctions f qui sont $\mathcal{A}$-mesurables et telles que $|f|^p$ est intégrable. On note

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Comme pour L^∞, on définit en fait cet ensemble comme l'espace des classes d'équivalences obtenu en identifiant les fonctions égales presque partout. Comme précédemment, on prendra garde au fait que dans la pratique, lorsque l'on écrit $f \in L^p(X)$, on considère en fait f comme une fonction (un représentant de sa propre classe), voir remarque II.4.2.

Proposition II.4.7. (Inégalité de Hölder)
Soit $p \in]1, +\infty[$, $f \in L^p$, et $g \in L^{p'}$, où p' est l'exposant conjugué de p, tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On a alors $fg \in L^1$, avec

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Démonstration. Soient $f \in L^q$ et $g \in L^{p'}$. D'après l'inégalité de Young (proposition A.1.43, page A.1.43) on a, pour tout $x \in X$,

$$|f(x)|\,|g(x)| \leq \frac{1}{p}\,|f(x)|^p + \frac{1}{p'}\,|f(x)|^{p'},$$

d'où $fg \in L^1$, et

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\,\|f\|_{L^p} + \frac{1}{p'}\,\|f\|_{L^{p'}}.$$

On obtient, en remplaçant f par λf (avec $\lambda > 0$) dans l'inégalité ci-dessus,

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p}\,\|f\|_{L^p} + \frac{1}{\lambda p'}\,\|g\|_{L^{p'}}.$$

La fonction ci-dessus est convexe en λ, et tend vers $+\infty$ quand λ tend vers 0 et vers $+\infty$, elle est minimale pour $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1}\,\|f\|_{L^{p'}}^{p'/p}$, ce qui conclut la preuve. □

Proposition II.4.8. L'ensemble $L^p(X)$ est un espace vectoriel, et $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $L^p(X)$.

Démonstration. Pour tous f et g dans $L^p(X)$, tout $x \in X$, on a

$$|f(x)+g(x)|^p \leq (|f(x)|+|g(x)|)^p \leq (2\max(|f(x)|,|g(x)|))^p \leq 2^p\left(|f(x)|^p+|g(x)|^p\right),$$

d'où $f+g \in L^p(X)$. On a par ailleurs $\lambda f \in L^p(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

L'inégalité triangulaire est une conséquence de l'inégalité de Hölder. En effet, pour tous f et g dans $L^p(X)$, on a

$$\int |f+g|^p = \int |f+g|^{p-1}|f+g| \leq \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g|.$$

Or, si p' est l'exposant conjugué de p, on a $p'(p-1)=p$, d'où l'on déduit que la fonction $|f+g|^{p-1}$ est dans $L^{p'}(X)$. D'après l'inégalité de Hölder (proposition II.4.7), appliquée successivement aux deux intégrales du membre de droite ci-dessus, on a

$$\int |f+g|^p \leq \left(\int |f+g|^p\right)^{1/p'}\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |f+g|^p\right)^{1/p'}\left(\int |g|^p\right)^{1/p}$$

d'où l'on déduit, en utilisant $1/p' = 1-1/p$, l'inégalité triangulaire (l'inégalité est trivialement vérifiée si $\int |f+g|^p = 0$). □

Proposition II.4.9. Soit $p \in [1,+\infty[$. L'espace vectoriel normé $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est complet.

Démonstration. Soit f_n une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Il suffit de montrer qu'il existe une sous-suite extraite convergente dans L^p, le caractère de Cauchy assurera la convergence de l'ensemble de la suite vers la même limite. La première étape consiste à extraire une sous-suite f_{n_k} telle que

$$\left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}.$$

On procède de la façon suivante : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq 1/2$ pour tous m et n plus grands que n_1. Il existe ensuite un $n_2 \geq n_1$ tel que la même quantité est majorée par $1/4$, etc ... On construit ainsi une sous-suite qui vérifie l'inégalité ci-dessus. Pour simplifier l'écriture, nous écrivons (f_k) cette sous-suite, qui vérifie donc $\|f_{k+1}-f_k\|_{L^p} \leq 1/2^k$.

On introduit maintenant la fonction g_n définie par

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

On a par construction $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$. La suite $g_n(x)$ est croissante pour tout x, donc converge vers une limite

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \in [0,+\infty].$$

La suite $g_n(x)^p$ est elle même croissante, et converge simplement vers $g(x)^p$. L'intégrale de g^p est donc finie d'après le théorème de convergence monotone B.7.23, page 185. La fonction g est donc dans $L^p(X)$, et $g(x)$ est fini pour presque tout x (voir proposition B.7.22). On a par ailleurs, pour tous $m \geq n \geq 2$,

$$\begin{aligned}|f_m(x)-f_n(x)| &\leq |f_m(x)-f_{m-1}(x)| + \cdots + |f_{n+1}(x)-f_n(x)| \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} |f_{k+1}(x)-f_k(x)| = g(x) - g_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Cette dernière quantité étant finie presque partout, et du fait que $g_n(x)$ converge vers $g(x)$, la suite $f_n(x)$ est de Cauchy pour presque tout x, donc converge vers une limite, que l'on note $f(x)$. On a, pour presque tout x et $n \geq 2$,

$$|f(x)-f_n(x)| \leq g(x) \Longrightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + g(x),$$

d'où $f \in L^p(X)$. Enfin, $|f_n(x) - f(x)|^p$ tend vers 0 presque partout, et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g(x)^p$, qui est intégrable. Le théorème de convergence dominée assure donc la convergence de f_n vers f en norme L^p. □

Notation II.4.10. On note $L^p(X)^n$ l'espace des fonctions vectorielles, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, donc chaque composante est dans $L^p(X)$. Cet espace est complet pour la norme [20]

$$\|f\|_{L^p(X)^n} = \left(\int_X \|f(x)\|_2^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

II.4.3 Les espaces $L^p(\mathbb{N}) = \ell^p$ et $L^p(\mathbb{R}^d)$

Espaces de suites

On considère dans un premier temps le cas $X = \mathbb{N}$, muni de la tribu discrète (ensemble des parties) et de la mesure de comptage canonique :

$$A \subset \mathbb{N} \longmapsto \mu(A) = \mathrm{Card}(A).$$

Une "fonction" sur $X = \mathbb{N}$, c'est-à-dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, peut s'écrire comme une suite (u_n) de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Noter que, si les fonctions telles qu'on les a définies sont a priori autorisées à prendre la valeur $+\infty$, imposer l'appartenance à l'un des espaces L^p impose que toutes les valeurs soient finies. L'espace $L^p(\mathbb{N})$, pour $p \in [1, +\infty[$, s'identifie dans ce cas à l'espace des suites noté en général ℓ^p, défini par

$$\ell^p = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,,\ \sum |u_n|^p < +\infty\right\}\ .$$

Nous avons montré précédemment qu'il s'agit d'un espace vectoriel normé complet pour la norme p, définie par

$$u = (u_n) \longmapsto \|u\|_{\ell^p} = \left(\sum |u_n|^p\right)^{1/p}.$$

L'espace ℓ^∞ des suites bornées est de la même manière un espace vectoriel normé pour

$$\|u\|_{\ell^\infty} = \sup_n |u_n|\,.$$

On notera qu'il s'agit ici d'un sup "traditionnel", du fait que l'espace $\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage ne contient aucun ensemble non vide qui soit négligeable.

Il peut être pertinent de construire de tels espaces de suites à partir d'une mesure non uniforme sur $\mathbb{N}$, pour représenter par exemple une collection de masses ponctuelles non identiques. On considère dans cet esprit une collection infinie de masses strictement positives $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$, et la mesure associée

$$A \subset \mathbb{N} \longmapsto m(A) = \sum_{i\in A} m_i \in [0, +\infty].$$

Si l'on se donne une fonction vectorielle sur X, à valeur dans $\mathbb{R}^3$, qui correspond aux vitesses des masses, notée $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$, sa norme en tant qu'élément de l'espace $L^2(X, m)$ est définie par

$$\|v\|_{L^2}^2 = \sum_{i\in A} m_i \, |v_i|^2\,,$$

qui est (au facteur 1/2 près), l'énergie cinétique du système de masses. Le fait que cette énergie soit bornée n'empêche pas qu'il y ait des vitesses arbitrairement grandes. Dans ce qui précède nous avons considéré des

20. On notera l'utilisation de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ (indice 2 dans $\|f\|_2$). Ce choix est le plus couramment effectué, mais on pourrait munir $\mathbb{R}^n$ d'une autre norme.

particules labellisées, mais non situées dans l'espace. On peut construire un cadre fonctionnel permettant de suivre leurs positions dans l'espace en considérant la mesure discrète

$$\mu = \sum_{i=1}^{+\infty} m_i \delta_{x_i},$$

où les x_i sont des points de l'espace $\mathbb{R}^3$ (position des masses). La mesure μ, définie sur la tribu discrète (ensemble des parties de $\mathbb{R}^3$) est définie par

$$A \subset \mathbb{R}^3 \longmapsto \mu(A) = \sum_{i, x_i \in A} m_i.$$

Noter que si l'on cherche à modéliser de cette façon (dite eulérienne) un nuage de particules en mouvement, l'objet naturel est une mesure μ_t dépendant du temps, définie comme ci-dessus à partir des positions courantes des particules. L'espace naturel pour représenter la vitesse dépendra alors lui-même du temps (contrairement au cadre précédent, purement lagrangien), puisque la mesure de référence, définie comme mesure sur $\mathbb{R}^3$, dépend du temps.

Espaces de fonctions sur $\mathbb{R}^d$

La construction de la mesure le Lebesgue n'était pas nécessaire pour construire les espaces de suites ci-dessus, elle l'est en revanche pour les espaces fonctionnels correspondant au cas $X = \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}^d$, ou $X = \Omega$, avec Ω ouvert de $\mathbb{R}^d$. Si l'on considère ainsi un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ muni canoniquement de la mesure de Lebesgue [21], la construction précédente permet en particulier d'identifier, pour $p \in [1, +\infty[$, l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f \text{ mesurable sur } \Omega\,, \ \int_\Omega |f(x)|^p \ dx < +\infty \right\}$$

à un espace vectoriel normé complet pour la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \ dx \right)^{1/p}.$$

De la même manière l'espace L^∞ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|\,,$$

étant entendu qu'il s'agit ici du supremum *essentiel*, tel que défini par (II.4.1).

Exercice II.4.1. Construire une isométrie entre ℓ^p et un sous-espace vectoriel de $L^p(\mathbb{R})$, pour $p \in [1, +\infty]$.

Proposition II.4.11. L'espace $C_c(\mathbb{R})$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Démonstration. Nous démontrons tout d'abord cette propriété dans le cas $p = 1$. Toute fonction de $L^1(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme somme d'une fonction positive et d'une fonction négative. Il suffit donc de montrer que l'on peut approcher une fonction positive par une fonction de C_c. D'après la proposition B.7.6 et le théorème de convergence monotone B.7.23, toute fonction positive peut être approchée avec une précision arbitraire en norme L^1 par une fonction étagée. Toute fonction étagée s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions de type $\mathbb{1}_A$, où A est un borélien. On se ramène donc à la question de savoir si l'on peut approcher toute fonction de type $\mathbb{1}_A$ par une suite de fonctions continues à support compact. On utilise maintenant la régularité de la mesure de Lebesgue (théorème B.5.3, page 172), qui est en fait une conséquence directe de sa définition à partir de la mesure extérieure de Lebesgue. Il existe un ouvert U contenant A tel que

21. On utilisera ici la notation dx (à la place de $d\lambda$) pour représenter le volume élémentaire d'intégration associé à la mesure de Lebesgue, conformément à l'usage.

$\lambda(U \setminus A) = \|\mathbb{1}_U - \mathbb{1}_A\|_{L^1}$ est arbitrairement petit, ce qui nous ramène à l'approximation d'une fonction de type $\mathbb{1}_U$, avec U ouvert. La suite de fonctions $\mathbb{1}_{]-n,n[}\mathbb{1}_U$ converge en norme L^1 ver $\mathbb{1}_U$ d'après le théorème de convergence monotone, on se ramène ainsi à l'approximation d'une fonction de type $\mathbb{1}_U$, avec U ouvert borné. On considère la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = \min(nd(x, U^c), 1),$$

où $d(x, U^c)$ est la distance de x au complémentaire de U. Il s'agit d'une suite qui converge simplement vers $\mathbb{1}_U$, dominée par $\mathbb{1}_U$, on a donc, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\|\mathbb{1}_U - f_n\|_{L^1} = \int (\mathbb{1}_U - f_n) = \int \mathbb{1}_U - \int f_n \longrightarrow 0.$$

Les fonctions f_n étant continues et à support compact, nous avons ainsi montré que l'on peut approcher toute fonction de L^1 par une suite de telles fonctions.

Pour la convergence en norme L^p, on utilise le fait que toute fonction de L^p est approchable par une suite de fonctions bornées et à support compact (voir exercice II.6.15). On peut donc supposer la fonction f de L^p bornée par un certain M et à support compact. Elle est donc dans L^1, et peut être approchée par une suite (f_n) de fonctions continues à support compact en norme L^1. On a

$$|f(x) - f_n(x)|^p \leq M^{p-1} |f(x) - f_n(x)| .$$

L'intégrale de la fonction ci-dessus converge vers 0, d'où la convergence en norme L^p de f_n vers f. □

Exercice II.4.2. Quelle est l'adhérence de $C_c(\mathbb{R})$ (fonctions continues à support compact) dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

II.5 Compléments

Théorème II.5.1. (Radon-Nikodym)
Soit μ et λ deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On suppose que μ est absolument continue par rapport à λ (voir définition B.3.10, page 163). Alors il existe une fonction positive g mesurable telle que

$$\mu(A) = \int_A g \, d\lambda.$$

On dira que g est la *densité* de μ relativement à λ.

Définition II.5.2. (Points de Lebesgue)
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$. On dit que x est un point de Lebesgue de f si

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| \quad dy = 0.$$

Théorème II.5.3. (de différentiation de Lebesgue)
Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Les points de Lebesgue forment un ensemble de mesure pleine, c'est à dire que l'ensemble des points qui ne sont pas des points de Lebesgue est négligeable.

II.6 Exercices

Exercice II.6.1. (Sommes de Darboux)
On note Λ l'ensemble des *subdivisions* de l'intervalle I, c'est à dire l'ensemble des

$$\sigma = (x_0, \ldots, x_n)\,, \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \; t = (t_1, \ldots, t_n)\,, \; t_j \in [x_{j-1}, x_j] \quad \forall j = 1, \ldots n,$$

où $n \geq 1$ est un entier (qui dépend de σ). Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On définit les sommes de Darboux inférieure et supérieure par

$$s_{[a,b]}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \; m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), \tag{II.6.1}$$

$$S_{[a,b]}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}), \; M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x). \tag{II.6.2}$$

On définit

$$s_{[a,b]} = \sup_{\sigma \in \Lambda} s_{[a,b]}(f, \sigma), \; S_{[a,b]} = \inf_{\sigma \in \Lambda} S_{[a,b]}(f, \sigma).$$

Montrer que ces quantités sont bien définies, avec $s_{[a,b]} \leq S_{[a,b]}$. Si ces deux quantités sont égales, on dit que la fonction est intégrable au sens de Darboux.

Montrer qu'une fonction est intégrable au sens de Darboux si et seulement si elle est intégrable au sens de Riemann [22].

Exercice II.6.2. a) Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que la série Σx_n converge. Montrer que la valeur de la somme ne dépend pas de l'ordre dans lequel on effectue les sommations.

b) Soit maintenant (x_n) une suite de réels telle que la série Σx_n soit convergente, mais sans que la série soit absolument convergente. On chercher à montrer que, selon l'ordre dans lequel on effectue la somme, on peut obtenir essentiellement *n'importe quoi*.

Plus précisément, montrer que, pour tout $\lambda \in [-\infty, +\infty]$, il existe une bijection φ sur $\mathbb{N}$ telle que telle que la série $\sum x_{\varphi(n)}$ converge vers λ. Montrer qu'il existe aussi une bijection telle que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la série soit $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice II.6.3. *Ce petit exercice illustre d'une certaine manière l'impossibilité de définir une mesure finie sur un ensemble infini non dénombrable (comme* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$*) en affectant un point strictement positif à chaque point.*

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille infinie de réel positifs ou nuls, possédant la propriété suivante :

$$\forall J \subset I, \; J \text{ dénombrable}, \; \sum_{i \in J} a_i < +\infty.$$

Montrer que l'ensemble des i tels que $a_i > 0$ est nécessairement dénombrable.

Exercice II.6.4. (Tribus sur l'ensemble à N éléments (●●))

a) Décrire l'ensemble des tribus sur $X_N = [\![1, N]\!]$.

b) Préciser le cardinal de chacune de ces tribus.

c) (● ● ●) Préciser le nombre B_N total de tribus sur N, sous la forme d'une relation de récurrence, qui exprime B_{N+1} en fonction des B_n jusqu'à N.

Exercice II.6.5. Soit X un ensemble. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties A telles que A ou A^c est dénombrable. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu. Quelle est cette tribu dans le cas où X est fini ou dénombrable ?

Exercice II.6.6. Soit X un ensemble infini. Décrire la tribu engendrée par la collection des singletons, selon que X soit dénombrable ou pas.

Exercice II.6.7. Montrer qu'il existe un ensemble dénombrable qui engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

22. Les sommes de Riemann (équation (II.3.1), page 36) sont définies pour des fonctions non nécessairement bornées, mais la proposition II.3.2, page 36, assure qu'une fonction Riemann-intégrable est bornée.

Exercice II.6.8. Donner des exemples de boréliens A de $\mathbb{R}$ tels que

$$(i)\ 0 < \lambda(\mathring{A}) = \lambda(A)\,,\ (ii)\ \lambda(\mathring{A}) = 0\,,\ \lambda(A) = +\infty\,,\ (iii)\ 0 < \lambda(\mathring{A}) < \lambda(A) < +\infty.$$

Exercice II.6.9. Pour les suites de fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies ci-dessous, préciser la fonction qui est limite simple de la suite, la limite des intégrales, l'intégrale de la limite, et préciser si ces 3 suites (f_n^1), (f_n^2), et (f_n^3), rentrent dans le cadre du théorème de convergence monotone ou du théorème de convergence dominée :

$$f_n^1(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{]1/n,1[}\,,\ f_n^2(x) = \mathbb{1}_{]-n^2,n^2[}.$$

$$f_n^3(x) = -\frac{1}{n^2}\mathbb{1}_{]0,n[}.$$

Exercice II.6.10. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

(i) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, telle que $\min(|f|\,,n)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction f est elle même intégrable sur $\mathbb{R}$.

(ii) Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, telle que $\min(|f|\,,n)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale inférieure à $C > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction f est elle-même intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice II.6.11. Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^1 \frac{1 + nx^3}{(1+x^2)^n}\,dx\,,\ v_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{1+x^n}\,dx$$

Exercice II.6.12. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, intégrable. Décrire le comportement de la suite

$$u_n = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\cos(x)^n\,d\lambda.$$

Exercice II.6.13. Montrer que la boule unité fermée de $L^\infty(\mathbb{R})$ n'est pas compacte. Cette non compacité résulte-t-elle de la non compacité de $\mathbb{R}$?

Exercice II.6.14. On se place sur l'intervalle borné $I =]a,b[$ muni de la mesure de Lebesgue.

a) Montrer que $L^p(I) \subset L^1(I)$ pour tout $p \in]1,+\infty]$.

b) Le sous-espace L^p est-il fermé dans L^1 ?

c) Montrer que les inclusions du (a) sont invalidées si l'intervalle n'est pas borné (on pourra considérer le cas $I =]1,+\infty[$

Exercice II.6.15. (Opérateur de troncature)
Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$, avec $p \in [1,+\infty[$.

a) On définit

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto T_n(t) = \left|\begin{array}{ll} t & \text{si } |t| \le n \\ n\frac{t}{|t|} & \text{si } |t| > n \end{array}\right.$$

Montrer que $T_n \circ f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

b) On note χ_n la fonction indicatrice de $]-n,n[$. Montrer que $\chi_n f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R})$.

c) Montrer que $\chi_n T_n \circ f$ tend vers f dans L^p.

d) Que peut-on dire de $T_n \circ f$, $\chi_n f$, et $\chi_n T_n \circ f$, dans le cas $p = +\infty$?

Exercice II.6.16. (Translations)
Soit $p \in [1,+\infty]$. On définit

$$\tau_h\ :\ f \in L^p \longmapsto \tau_h f\,,\ \tau_a(f)(x) = f(x-a).$$

a) Montrer que, pour $p \in [1, +\infty[$, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, l'application qui à h associe $\tau_h f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $L^p(\mathbb{R})$

b) Montrer que cette propriété n'est pas vraie pour $p = +\infty$.

Exercice II.6.17. a) Soit $u \in \mathbb{R}^d$. Montrer que

$$\lim_{p \to +\infty} \|u\|_p = \|u\|_\infty .$$

b) Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné, et $f \in L^\infty(I)$. Montrer que f appartient à tous les $L^p(I)$, et que

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty .$$