

Mesure et intégration

Quizz 2 (mesures et mesures extérieures)

0) Toute mesure est une mesure extérieure.

Vrai ☐ Faux ☐

1) Soit (X, \mathcal{A}) un espace métrique mesurable. L'application μ qui à $A \in \mathcal{A}$ associe son diamètre

$$\mu(A) = \text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y), \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

est une

mesure ☐ mesure extérieure ☐ ni l'une ni l'autre ☐

2) On considère l'ensemble X des personnes habitant sur terre, muni de la tribu discrète. Préciser si les μ définis ci-dessous sont des mesures, mesures extérieures, ou ni l'un ni l'autre. On définit μ par la valeur qu'elle affecte à une sous-population $A \in \mathcal{P}(X)$ (en affectant toujours 0 à \emptyset).

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ nombre total d'années vécues par les éléments de A

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge moyen des individus dans A

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge maximal parmi les individus dans A (avec $\mu(\emptyset) = 0$).

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge minimal parmi les individus dans A

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ nombre de "connections" entre individus de A (on compte 1 pour tout couple (x, y) tel que x et y se sont déjà rencontrés au moins une fois).

3) Soit (X, \mathcal{A}) un espace métrique mesurable. Soit $r > 0$. On définit $\mu(\cdot)$ comme l'application qui à A associe le nombre minimal (éventuellement infini) de boules fermées de rayon r nécessaires pour recouvrir A . Alors μ est une

mesure ☐ mesure extérieure ☐ ni l'un ni l'autre ☐

4) On se place sur \mathbb{R} muni de la mesure de Lebesgue λ . Les assertions suivantes sont elles vraies / fausses ?

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(A) = \lambda(\overset{\circ}{A}) = \lambda(\bar{A})$ pour tout intervalle A

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(A) = \lambda(\overset{\circ}{A})$ pour tout borélien A

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda(\partial A) \leq \lambda(A)$ pour tout borélien A

Vrai ☐ Faux ☐ Tout borélien borné est de mesure finie

Vrai ☐ Faux ☐ Tout borélien de mesure finie est borné

Vrai ☐ Faux ☐ Tout ouvert de mesure finie est borné