Probabilités III

MINES ParisTech

12 décembre 2024 (`#a4e78ae`)

\$ \$

Question 1 Soient $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, et $Y \sim \mathcal{B}(1/2)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, et $Z = XY + (1 - Y)\lambda$.

- ☐ A : La fonction de répartition conditionnelle $F_{Z|Y=1}$ vaut $F_{Z|Y=1}(z) = \mathbb{P}(Z \leq z|Y = 1) = (1 - e^{-\lambda z})\nVdash_{\mathbb{R}_+^*}(z)$
- ☐ B : La fonction de répartition conditionnelle $F_{Z|Y=0}$ vaut $F_{Z|Y=0}(z) = \mathbb{P}(Z \leq z|Y = 0) = \nVdash_{[\lambda,+\infty[}(z)$
- ☐ C : Z admet une densité
- ☐ D : $Z = \lambda$ p.s.

Question 2 (réponses multiples) Soient $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$, et $Y \sim \mathcal{B}(1/2)$ deux variables aléatoires réelles indépendantes, et $Z = XY + (1 - Y)\lambda$. Alors:

- ☐ A : $\mathbb{E}(Z|Y = 1) = \frac{1}{\lambda}$
- ☐ B : $\mathbb{E}(Z|Y = 0) = \lambda$
- ☐ C : $\mathbb{E}(Z|Y) = \frac{Y}{2\lambda} + \frac{1}{2}(1 - Y)\lambda$
- ☐ D : $\mathbb{E}(Z|Y) = \frac{Y}{\lambda} + (1 - Y)\lambda$

Question 3 Soient X et Y deux variables aléatoires de densité jointe $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{x} 1_{[0,x]}(y)\lambda \exp(-\lambda x)$, $\lambda > 0$. Quelle est la densité de $Y|X = x$?

- ☐ A : $\exp(-y)$
- ☐ B : $1_{[0,x]}(y)$
- ☐ C : $\frac{1}{x} 1_{[0,x]}(y)$
- ☐ D : $\lambda \exp(-\lambda x)$

Question 4 En déduire la valeur de $\mathbb{E}(Y)$:

- ☐ A : $1/2$
- ☐ B : $x/2$
- ☐ C : $\frac{1}{2\lambda}$
- ☐ D : λ^2

Question 5 Soit (X, Y) un vecteur gaussien d'espérance (μ_X, μ_Y) et de matrice de covariance $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, où $\rho > 0$. L'espérance conditionnelle de $X|Y$ vaut :

☐ A: μ_Y
☐ B: μ_X
☐ C: $\mu_Y + \rho(Y - \mu_X)$
☐ D: $\mu_X + \rho(Y - \mu_Y)$