Mesure et intégration

Quizz 4

1) Préciser (sans faire de calcul) les limites quand n tend vers $+\infty$ de

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(e^{-nx})}{1+x^2}\, dx\,,\ v_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{2+\cos(x)^n}\, dx$$

CORRECTION.
La suite des fonctions intégrées converge simplement sur $[0,+\infty[$ *vers* $1/(1+x^2)$*. cette convergence est dominée par la fonction limite, qui est intégrable. La limite des intégrale est donc d'après le TCD l'intégrale de la limite, i.e.* $\pi/2$.
Pour v_n*, la suite de fonctions converge simplement vers* $e^{-x}/2$ *sur* $\mathbb{R}$ *en dehors des* $k\pi$*, donc presque partout (noter qu'on n'a pas convergence vers une limite sur les* $(2k+1)\pi$*). Cette convergence est dominée par* e^{-x}*, on a donc convergence vers l'intégrale de la limite simple, qui est* $1/2$.

2) On a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{xy}{1+x^6+y^6} dx\right) dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{xy}{1+x^6+y^6} dy\right) dx$$

Vrai □ Faux □

CORRECTION.
Vrai : la fonction en question est intégrable sur $\mathbb{R}^2$*. On a en effet (avec* $x = r\cos\theta$ *et* $y = r\sin\theta$*)*

$$|xy| \le r^2 \text{ et } 1+x^6+y^6 \ge r^6(\cos^6\theta+\sin^6\theta) \ge \frac{1}{8}r^6,$$

car $\max(|\cos\theta|, |\sin\theta|) \ge 1/\sqrt{2}$*, d'où l'on déduit que la valeur absolue de l'intégrande est majorée par* $8r^{-4}$*. On peut donc intégrer dans un sens ou dans l'autre, ou n'en indiquer aucun (*$\int_{\mathbb{R}^2} \dots dx\, dy$*).*

3) On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions étagées sur $\mathbb{R}$ (muni de la tribu des boréliens)

Vrai □ Faux □ $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel normé pour la norme L^1.

CORRECTION.
Vrai

Vrai □ Faux □ L'espace $\mathcal{E}$ est complet pour la norme L^1.

CORRECTION.
Faux : considérer la suite de fonctions (f_n) *définie par*

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \mathbb{1}_{]k,k+1[},$$

c'est une suite de Cauchy, qui converge dans L^1 vers une fonction qui prend un nombre infini de valeurs.
Cette non complétude n'est pas liée à la non compacité de $\mathbb{R}$: on peut aussi considérer la fonction $x \mapsto x$ sur $]0,1[$, nulle ailleurs, une subdivision de l'intervalle $]0,1[$ de pas $1/2^n$, et introduire la fonction f_n, plus grande fonction constante sur chaque sous-intervalle de la subdivision qui soit inférieure f. Cette suite est de Cauchy, mais converge en norme L^1 vers la fonction $x \mapsto x$ qui n'est pas simple, donc pas étagée.

4) Espace $L^1(\mathbb{R})$

Vrai ☐ Faux ☐ Une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ appartient à L^1.

Correction.
Faux, la fonction constante égale à 1 par exemple est continue non intégrable.

Vrai ☐ Faux ☐ Une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

Correction.
Faux, la fonction $\mathbb{1}_{]1,+\infty[}/x$ tend vers 0 en $\pm\infty$, mais n'est pas intégrable.

Vrai ☐ Faux ☐ Une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à support compact ($f(x)$ est nul en dehors d'un intervalle borné), appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

Correction.
Vrai :on peut par exemple considérer son approximation en escalier avec des subdivisions de plus en plus fines. On a convergence simple, et dominée par $M\mathbb{1}_{[-R,R]}$, où $M = \sup |f|$ et f est nulle à l'extérieur de $[-R,R]$.

Vrai ☐ Faux ☐ Une fonction de $L^1(\mathbb{R})$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

Correction.
Pas forcément, considérer par exemple la fonction

$$f = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{1}_{]n,n+1/n^3[}.$$

5) On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue.

Vrai ☐ Faux ☐ Une fonction étagée sur $\mathbb{R}$ est continue sauf en un nombre fini de points.

Correction.
Faux : par exemple la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée, mais n'a que des points de discontinuité.

Vrai ☐ Faux ☐ Toute fonction continue presque partout est égale presque partout à une fonction continue.

Correction.
Faux : par exemple la fonction $\mathbb{1}_{]0,1[}$ *est continue sauf en* 2 *points, mais ne s'identifie pas p.p. à une fonction continue.*

Vrai ☐ Faux ☐ Toute fonction égale presque partout à une fonction continue est continue presque partout.

Correction.
Faux : par exemple la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ *égale p.p. à la fonction nulle, n'est continue nulle part.*