Mesure et intégration

Quizz 3

1) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et f une application de X dans un ensemble X'.

Vrai ☐ Faux ☐ La famille $f(\mathcal{A})$ est une tribu sur X'.

CORRECTION.
Faux en général, par exemple si f est constante, alors $f(\mathcal{A}) = \{\emptyset, \{y\}\}$

2) Soit (X) un ensemble, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux tribus sur X.

Vrai ☐ Faux ☐ la famille $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ est une tribu sur X.

CORRECTION.
Faux en général, contre exemple : $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \sigma(\{1\}, \{2, 3\})$, $\mathcal{A}' = \sigma(\{1, 2\}, \{3\})$. L'union ne contient pas $\{2\} = \{1, 2\} \cap \{2, 3\}$.

3) Les familles suivantes engendrent la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$:

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des parties fermées

CORRECTION.
Vrai, il s'agit d'une famille dans la tribu des boréliens, et elle contient notamment les $]-\infty, c]$

Vrai ☐ Faux ☐ La famille $\{[a, b[\,,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

CORRECTION.
Vrai, il s'agit de boréliens comme intersection des $]a - 1/n, b[$ et on peut retrouver les intervalles ouverts en considérant l'union des $[a + 1/n, b[$.

Vrai ☐ Faux ☐ La famille des compacts

CORRECTION.
Vrai, il s'agit de fermés, donc de boréliens, et elle contient notamment les $[a, b]$, donc les $]a, b[$ par union dénombrable, comme précédemment.

4) Soient μ_1 et μ_2 deux mesures définies sur le même espace mesurable $(X, \mathcal{A})$. On a alors

Vrai ☐ Faux ☐ $\lambda\mu_1$ est une mesure pour tout λ réel.

CORRECTION.
Faux évidemment en général, mais vrai si $\lambda \geq 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ La somme $\mu_1 + \mu_2$ est une mesure

CORRECTION.
Vrai .

Vrai ☐ Faux ☐ Le produit $\mu_1 \times \mu_2$ est une mesure

CORRECTION.
Faux en général, on perd l'additivité. Prendre par exemple $\mu_1 = \mu_2$, deux ensembles A et B disjoints de masse 1, on a

$$\mu_1 \times \mu_2(A \cup B) = 4 \neq 2 = \mu_1 \times \mu_2(A) + \mu_1 \times \mu_2(B).$$

Noter que la question n'est pas très bien posée en général (si les mesures ne sont pas finies), car il faudrait s'entendre sur ce que vaut le produit $0 \times +\infty$.

Vrai ☐ Faux ☐ La différence $\mu_1 - \mu_2$ est une mesure

Toute mesure est une mesure extérieure.

Vrai ☐ Faux ☐

Correction.
Faux en général : les conditions exigées pour une mesure extérieure sont certes plus faibles que les conditions pour une mesure, mais une mesure peut n'être définie que sur une tribu strictement incluse dans la tribu discrète, auquel cas il ne s'agit pas d'une mesure extérieure, qui elle est toujours définie sur $\mathcal{P}(X)$.

5) Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace métrique mesurable. L'application μ qui à $A \in \mathcal{A}$ associe son diamètre

$$\mu(A) = \text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)\,,\ \mu(\emptyset) = 0,$$

est une

mesure ☐ mesure extérieure ☐ ni l'une ni l'autre ☐

Correction.
Ni l'une ni l'autre en général : dès que X contient 2 points, le diamètre des singletons est 0, et le diamètre de la réunion des singletons est strictement positif.

6) On considère l'ensemble X des personnes habitant sur terre, muni de la tribu discrète. Préciser si les μ définis ci-dessous sont des mesures, mesures extérieures, ou ni l'un ni l'autre. On définit μ par la valeur qu'elle affecte à une sous-population $A \in \mathcal{P}(X)$ (en affectant toujours 0 à $\emptyset$).

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ nombre total d'années vécues par les éléments de A

Correction.
Ils s'agit bien d'une variable extensive, qui vérifie la propriété de sommation demandée : c'est une mesure sur la tribu discrète (donc a fortiori une mesure extérieure).

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge moyen des individus dans A

Correction.
Là il s'agit typiquement d'une variable intensive, qui n'est pas une mesure : pour A et B deux parties donnant le même âge moyen, l'âge moyen de la réunion est cette valeur commune, et pas la somme des deux. Pour ce qui est des mesures extérieures, la troisième condition est vérifiée : la moyenne d'âge d'une union est combinaison convexe des moyennes d'âge, donc inférieure à la somme. Par contre on n'a pas la monotonie : on peut diminuer la moyenne d'âge en considérant un ensemble plus grand. Il ne s'agit donc ni d'une mesure ni d'une mesure extérieure

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge maximal parmi les individus dans A (avec $\mu(\emptyset) = 0$).

Correction.
Ca n'est pas une mesure car comme précédemment si deux parties disjointes correspondent au même âge maximal, on a le même âge maximal pour la réunion des deux. En revanche on a la monotonie, l'âge maximal d'une union de sous population est égal au max des max, donc inférieur à la somme, il s'agit bien d'une mesure extérieure. Il y a très peu d'ensembles mesurables pour cette tribu extérieure : X et $\emptyset$, et les ensembles constitués de nourrissons (d'âge nul) et leurs complémentaires.

Mesure ☐ Mesure extérieure ☐ âge minimal parmi les individus dans A

Correction.
Ni une mesure ni une mesure extérieure, on a une relation de monotonie inversée : si $A \subset B$ alors l'âge minimal dans B est inférieur (strictement dans certains cas) à l'âge minimal dans A.

Mesure □ Mesure extérieure □ nombre de "connections" entre individus de A (on compte 1 pour tout couple (x, y) tel que x et y se sont déjà rencontrés au moins une fois).

Correction.
Malgré la nature apparemment extensive *de cette quantité, il ne s'agit ni d'une mesure ni d'une mesure extérieure, du fait qu'elle prend en compte des interactions entre ensembles : si A et B sous deux sous-populations disjointes, avec des interactions entre elles, on a*

$$\mu(A \cup B) > \mu(A) + \mu(B).$$

N.B. : si l'on considère la tribu engendrée par les composantes connexes du graphe des contacts, alors μ est une mesure sur cette tribu.

7) On se place sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue λ. Les assertions suivantes sont elles vraies / fausses ?

Vrai □ Faux □ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A}) = \lambda(\bar{A})$ pour tout intervalle A

Correction.
Vrai, $\lambda([a, b]) = b - a = \lambda([a, b[) =$ etc...

Vrai □ Faux □ $\lambda(A) = \lambda(\mathring{A})$ pour tout borélien A

Correction.
Faux, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = +\infty$, alors que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide.

Vrai □ Faux □ $\lambda(\partial A) \leq \lambda(A)$ pour tout borélien A

Correction.
Faux, $\mathbb{Q}$ est de mesure nulle, mais sa frontière est $\mathbb{R}$ de mesure pleine.

Vrai □ Faux □ Tout borélien borné est de mesure finie

Correction.
Vrai, si $A \subset [-M, M]$, alors $\lambda(A) \leq 2M$.

Vrai □ Faux □ Tout borélien de mesure finie est borné

Correction.
Faux, $\mathbb{Z}$ est de mesure nulle, et non bornés.

Vrai □ Faux □ Tout ouvert de mesure finie est borné

Correction.
Cela reste faux, même pour les ouverts, l'union des $]n, n + 1/n^2[$ est un ouvert de mesure finie, non borné.