Topologie & Calcul différentiel

Quizz 3

1) Soit $d \geq 1$. Il existe des constantes m et M telles que, pour $d \geq 1$, toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^d$, on ait

$$m\,\|x\| \leq \|x\|_\infty \leq M\,\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Vrai ☐ Faux ☐

Faux : pour toute paire de normes il existe de telles constantes, mais la constante dépend des normes (une grosse constante fois la norme ∞ par exemple invalide manifestement une telle inégalité).

2) Soit $f = (f_1, \dots, f_m)$ une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, différentiable en x.

Vrai ☐ Faux ☐ La $i$ème ligne de la jacobienne de f en x contient les coordonnées dans la base canonique du gradient de la fonction f_i en x

Vrai, sous réserve que le gradient soit définis à partir du produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

3) Soit $\alpha \in]0, +\infty[$. Préciser, selon les valeurs de α, les points de différentiabilité de la fonction

$$f_\alpha \;:\; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto f_\alpha(x,y) = |x|^\alpha + |y|^\alpha\,.$$

Pour tout $\alpha > 0$ la fonction est différentiable sur l'ouvert $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On peut représenter la différentielle par la matrice jacobienne

$$J(x) = \alpha \begin{pmatrix} |x|^{\alpha-1} & 0 \\ 0 & |y|^{\alpha-1} \end{pmatrix}$$

Pour $\alpha > 1$, la fonction est différentiable en $(0,0)$, de différentielle nulle. Pour $\alpha = 1$, la restriction g de f_α à l'axe des x est $|x|$, qui n'est pas différentiable en 0 (dérivées à droite et à gauche définies, mais différentes). Pour $\alpha \in]0,1[$, cette fonction n'est pas non plus différentiable en 0, car le terme dominant de $g(h)$ est $\alpha\,|x|^{\alpha-1}$, avec $\alpha - 1 < 0$, qui n'est pas un $\mathcal{O}(h)$.

4) Applicabilité du Théorèmes des Fonctions Implicites (TFI)

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement y fonction de x au voisinage de $(0,0)$, avec x et y liés par la relation $yx^2 + y^2x - 1 = 0$.

Faux : la différentielle (ou dérivée) partielle de f par rapport à y vaut 0

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement y fonction de x au voisinage de $(1,1)$, avec x et y liés par la relation $yx^2 + y^2x - 2 = 0$.

Vrai : la différentielle (ou dérivée) partielle de f par rapport à y vaut 3

Vrai ☐ Faux ☐ On peut exprimer localement (y_1, y_2) fonction de x au voisinage de $(1,2,0)$, avec x et (y_1, y_2) liés par la relation $y_1x^2 + y_2^2x - 1 = 0$.

Sûrement pas : on n'a qu'une équation pour deux inconnues, connaître x *ne permet pas de définir* (y_1, y_2).

Exercice 1

(Retour sur le théorème de point fixe de Banach (ou Picard))
a) On considère la fonction
$$f \ : \ x \in \mathbb{R} \longmapsto \sqrt{1+x^2}.$$
Montrer que f est faiblement contractante au sens où $|f(y) - f(x)| < |y - x|$ pour tous $x \neq y$. Montrer que f n'admet pas de point fixe.

La dérivée de f est partout < 1 en valeur absolue, on a donc contraction stricte d'après le théorème des accroissements finis. L'équation du point fixe conduit à $1 = 0$.

b) On considère maintenant une application T définie d'un compact K dans lui même, telle que
$$d(T(x), T(y)) < d(x, y).$$
Montrer que T admet un point fixe unique.

On considère la fonction définie par
$$x \in K \longmapsto \Phi(x) = d(x, T(x)).$$
L'application T est continue par hypothèse, Φ est donc également continue, sur le compact K, elle atteint donc sa borne inférieure $m = d(x, T(x))$ en un certain point x. Mais alors $\Phi(T(x)) < m$, ce qui est absurde.

Exercice 2 (Coordonnées sphériques)

a) On considère la fonction
$$f \ : \ (r, \varphi, \theta) \in U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \longmapsto \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\theta \\ r \cos\varphi \sin\theta \\ r \sin\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

a) Calculer la matrice jacobienne de f, et montrer que f est différentiable sur U.

b) L'application f est elle bijective ? Peut on la rendre bijective en modifiant les espaces d'arrivée et de départ ?

c) En quels points de U la différentielle de f est-elle inversible ?

a) La matrice jacobienne s'écrit
$$J = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\cos\theta & -r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & -r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$$
Elle est continue sur U, f est donc différentiable sur U.
b) L'application est surjective de U vers $V = \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$. Elle n'est pas injective du fait des cos *et* sin. *Mais elle est bijective si on restreint l'espace de départ à*
$$U' =]0, +\infty[\times] - \pi/2, \pi/2[\times[-\pi, \pi[,$$

et l'espace d'arrivée à $\mathbb{R}^3$ *privé de l'axe des z. c) Le calcul du déterminant, en développant par rapport à la dernière ligne, donne*

$$\det J = -\cos\varphi,$$

qui est nul pour $\varphi = \pm\pi/2 + k\pi$. *La différentielle est donc inversible en tout point de* U' *défini précédemment, mais si l'on s'en tient à l'espace de départ défini au début, elle n'est différentiable qu'en dehors de l'axe des pôles.*