Chapitre III

Espaces de Hilbert

Sommaire

III.1 Définitions, principales propriétés

Définition III.1.1. (Produit scalaire)
Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire une forme bilinéaire $\langle u \,|\, v\rangle$ de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$, symétrique, définie et positive :

$$\langle u \,|\, v\rangle = \langle v \,|\, u\rangle\,,\ \langle u \,|\, u\rangle \geq 0 \quad \forall u \in H\,,\quad \text{et}\quad \langle u \,|\, u\rangle = 0 \iff u = 0.$$

Proposition III.1.2. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Tout produit scalaire vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|\langle u \,|\, v\rangle| \leq |u|\ |v| \quad \forall u, v \in H.$$

Démonstration. On écrit

$$\langle u + tv \,|\, u + tv\rangle \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le minimum de cette quantité est atteint en $t = -\langle u \,|\, v\rangle / |v|^2$, on a donc en particulier

$$|u|^2 - 2\frac{\langle u \,|\, v\rangle^2}{|v|^2} + \frac{\langle u \,|\, v\rangle^2}{|v|^2} \geq 0,$$

d'où $|\langle u \,|\, v\rangle| \leq |u|\ |v|$. □

Proposition III.1.3. Un produit scalaire définit sur H une structure d'espace vectoriel normé pour la norme

$$u \longmapsto |u| = \langle u \,|\, u\rangle^{1/2}.$$

Démonstration. La séparation est conséquence du caractère défini de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, et l'homogénéité de sa bilinéarité. Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$|u+v|^2 = |u|^2 + |v|^2 + 2\langle u \,|\, v\rangle \leq |u|^2 + |v|^2 + 2\,|u|\,|v| = (|u| + |v|)^2\,.$$

□

Définition III.1.4. (Espace de Hilbert)
On appelle espace de Hilbert un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et qui est complet pour la norme associée.

Pour tout $d \geq 0$, $\mathbb{R}^d$ muni de la norme ℓ^2, est un espace de Hilbert (on parle plutôt d'espace euclidien lorsque la dimension est finie). Les espaces ℓ^2 et $L^2(\mathbb{R})$ (voir section II.4.3, cas $p = 2$), sont des espaces de Hilbert de dimension infinie[1].

Proposition III.1.5. Un espace de Hilbert est séparable (i.e. il contient une partie dénombrable dense, voir définition I.3.10) si et seulement s'il contient une famille dénombrable de vecteurs engendrant un sous-espace dense.

Démonstration. Si H est séparable, il admet une partie X dénombrable dense. L'ensemble des combinaisons linéaires (finies) à coefficient rationnels de ces éléments est elle même dénombrable, et dense dans H puisqu'elle contient X. Réciproquement si H admet une famille (e_n) engendrant un sous-espace dense, on considère l'ensemble X de combinaisons linaires *finies* des e_n à coefficients rationnels. Il s'agit d'un ensemble dénombrable, qui est dense dans H. □

Exercice III.1.1. Montrer que l'espace ℓ^2 muni du produit scalaire canonique est séparable.

Exemple III.1.1. Tout espace de dimension finie munie d'un produit scalaire est un espace de Hilbert (espace Euclidien). En dimension infinie, l'exemple le plus simple d'espace de Hilbert de dimension infinie est l'espace ℓ^2 des suites de carré intégrable. On peut définir par extension une infinité de nouveaux espaces dits “à poids” en introduisant, pour $\gamma = (\gamma_n)$ une suite quelconque de réels strictement positifs,

$$\ell^2_\gamma = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,,\ \sum \gamma_n \left|u_n\right|^2 < +\infty \right\}.$$

Proposition III.1.6. (Identité du parallélogramme)
Toute norme issue d'un produit scalaire vérifie l'identité du parallélogramme

$$\left|\frac{u+v}{2}\right|^2 + \left|\frac{u-v}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|u|^2 + |v|^2).$$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de gauche. □

Proposition III.1.7. Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert est un espace de Hilbert (pour le même produit scalaire).

Démonstration. La propriété découle simplement du fait que la restriction d'un produit scalaire à un sous-espace est un produit scalaire, et qu'un sous-espace fermé d'un espace complet est complet (voir proposition I.5.4, page 20). □

On sait que la distance d'un point à un fermé non vide de l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ est atteinte (exercice I.9.9, page 31). Cette distance peut être atteinte en plusieurs points si le fermé n'est pas convexe. Pour un espace de Hilbert de dimension infinie, la distance peut ne pas être atteinte (voir exercice III.6.4, page 69). En

0. La démonstration est faite dans $\mathbb{R}^d$, mais on pourra vérifier qu'elle s'applique directement à n'importe quel produit scalaire.

1. Cela signifie simplement qu'il ne sont pas engendrés par une famille finie d'éléments. La fait qu'il existe une base algébrique (i.e. telle que tout élément s'écrive comme combinaison linéaire *finie* d'éléments de cette famille) est une question délicate (son existence repose sur l'axiome du choix). En tout cas une telle base, quand bien même elle existe, est complètement *inutilisable*.

1. On prendra garde au fait qu'il ne s'agit pas d'une base *algébrique* de ℓ^2 (i.e. telle que tout vecteur puisse s'écrire comme combinaison linéaire finie). On verra dans la section III.3 qu'il s'agit en revanche de ce que l'on appellera une *base hilbertienne*.

revanche, si l'on suppose le fermé *convexe*, alors cette distance est atteinte, en un point unique, la convexité assurant à la fois l'existence et l'unicité. Ce résultat fondamental en optimisation fait l'objet du théorème qui suit.

Théorème III.1.8. (Projection sur un convexe fermé)
Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé non vide de H. Pour tout $z \in H$, il existe un unique $u \in K$ (appelé projection de z sur K) tel que

$$|z-u| = \min_{v\in K} |z-v| = \operatorname{dist}(z,K).$$

La projection u est caractérisée par la propriété

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K \\ \langle z-u \,|\, v-u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \tag{III.1.1}$$

On notera $u = P_K z$.

Démonstration. On considère une suite minimisante (u_n)

$$u_n \in K\,,\ |z-u_n| \longrightarrow d = \operatorname{dist}(z,K).$$

Pour p, $q \in \mathbb{N}$, on applique l'identité du parallélogramme à $u_p - z$ et $u_q - z$:

$$\left|\frac{u_p+u_q}{2} - z\right|^2 + \left|\frac{u_p-u_q}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}(|u_p-z|^2 + |u_q-z|^2).$$

Comme K est convexe $(u_p+u_q)/2 \in K$,

$$\left|\frac{u_p+u_q}{2} - z\right|^2 \geq d^2.$$

On a donc

$$\left|\frac{u_p-u_q}{2}\right|^2 \leq d^2 - d^2 + \varepsilon_p + \varepsilon_q = \varepsilon_p + \varepsilon_q,$$

avec $\varepsilon_n = |u_n - z|^2 - d^2 \longrightarrow 0$. La suite u_n est donc de Cauchy dans H complet, donc converge vers $u \in H$. Comme K est fermé, $u \in K$, et par continuité de la norme, $|u-z| = \operatorname{dist}(z,K)$.

On écrit ensuite simplement que u réalise la distance si et seulement si, pour tout $v \in K$, l'inégalité $|z-w|^2 \geq |z-u|^2$ est vérifiée pour tout w du segment $[u,v]$. Cette propriété s'écrit

$$|z-(u+t(v-u))|^2 \geq |z-u|^2\ ,\quad \text{i.e.}\quad -2t\langle z-u\,|\,v-u\rangle + t^2\,|v-u|^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

qui est équivalent à

$$\langle z-u\,|\,v-u\rangle \leq 0 \quad \forall v \in K,$$

soit l'égalité annoncée. □

Corollaire III.1.9. Si K est un sous-espace affine fermé de H, alors la caractérisation (III.1.1) prend la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K \\ \langle z-u \,|\, v-u\rangle = 0 \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \tag{III.1.2}$$

Si K est un sous-espace vectoriel de H, on a

$$\left\{ \begin{array}{c} u \in K \\ \langle z-u \,|\, v\rangle = 0 \quad \forall v \in K. \end{array} \right. \tag{III.1.3}$$

Remarque III.1.10. On prendra garde que la projection sur un sous-espace vectoriel n'est en général pas définie, car en dimension infinie les sous-espaces vectoriel peuvent ne pas être fermés (considérer par exemple le sous-espace de ℓ^2 des suites nulles au delà d'un certain rang).

Proposition III.1.11. L'application de projection P_K définie par le théorème précédent est 1-lipschitzienne, i.e.

$$|P_K z - P_K z'| \leq |z - z'| \quad \forall z\,,\ z' \in H.$$

Démonstration. Cette propriété est l'objet de l'exercice III.6.3, page 69). □

Proposition III.1.12. (Caractérisation de la densité)
Soit H un espace de Hilbert et K un sous-espace de H tel que l'implication suivante soit vérifiée :

$$\langle h \,|\, w \rangle = 0 \quad \forall w \in K \Longrightarrow h = 0.$$

Alors K est dense dans H

Démonstration: Si K n'est pas dense dans H, alors il existe $u \in H$, $u \notin \overline{K}$. On pose $h = u - P_{\overline{K}} u$. On a $\langle h \,|\, w \rangle = 0$ pour tout $w \in K$, et $h \neq 0$ car $u \notin \overline{K}$. □

Théorème III.1.13. (Hahn-Banach)
Soit H un espace de Hilbert, $K \subset H$ un convexe fermé, et z un point de H qui n'appartient pas à K. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare K et z au sens strict, c'est-à-dire qu'il existe $h \in H$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle h \,|\, x \rangle \leq \alpha < \langle h \,|\, z \rangle \quad \forall x \in K.$$

Démonstration. On introduit la projection $u = P_K z$ de z sur K, et l'on prend $h = z - u$ et $\alpha = \langle h \,|\, u \rangle$. Pour tout $x \in K$, on a

$$\langle h \,|\, x \rangle - \alpha = \langle h \,|\, x \rangle - \langle h \,|\, u \rangle = \langle z - u \,|\, x - u \rangle \leq 0.$$

et on a par ailleurs $\langle h \,|\, z \rangle - \alpha = \langle h \,|\, z \rangle - \langle h \,|\, u \rangle = |z - u|^2 > 0$. □

Remarque III.1.14. Ce théorème est une version facile d'un théorème plus général et profond, appelé théorème de Hahn-Banach géométrique (théorème IV.1.8, page 73), qui exprime que tout convexe fermé d'un espace vectoriel normé peut être *séparé* de n'importe quel point qui lui est extérieur par un hyperplan fermé. La difficulté vient du fait que, en dehors du cas hilbertien, on ne peut pas en général définir de projection sur un convexe fermé (voir par exemple l'exercice II.2.1, page 38).

Définition III.1.15. (Orthogonal d'un ensemble)
Soit H un espace de Hilbert et K un sous-ensemble de H. On appelle orthogonal de K l'ensemble

$$K^\perp = \{v \in V\,,\ (v, u) = 0 \quad \forall u \in K\}\,.$$

On vérifie immédiatement que c'est un sous-espace vectoriel fermé.

Définition III.1.16. (Espace dual topologique)
Soit H un espace de Hilbert, on appelle *espace dual topologique* de H l'espace des formes linéaires (applications linéaires à valeurs dans $\mathbb{R}$) continues sur H. Pour $\varphi \in H'$, $u \in H$, on note

$$\langle \varphi\,, u \rangle \in \mathbb{R}$$

l'image de u par φ.

Tout espace de Hilbert peut s'identifier à son dual topologique, comme l'exprime le théorème suivant.

Théorème III.1.17. (Riesz-Fréchet)
Soit $\varphi \in H'$. Il existe $f \in H$ unique tel que

$$\langle \varphi\,, u \rangle = \langle f \,|\, u \rangle \quad \forall u \in H. \tag{III.1.4}$$

De plus, on a

$$|f| = \|\varphi\|_{H'} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{\langle \varphi\,, v \rangle}{|v|}.$$

Démonstration. Si φ est la forme nulle, le résultat est immédiat. Dans le cas contraire, on introduit K le noyau de φ. C'est un hyperplan fermé de H. On construit ensuite un $h \in S_H \cap K^\perp$. Pour celà on considère $z \notin K$. D'après la caractérisation (III.1.3), on a $\langle z - P_K z \mid v \rangle = 0$ pour tout $v \in K$. Le vecteur

$$h = \frac{z - P_K z}{|z - P_K z|}$$

convient donc. Pour finir on remarque que tout $v \in H$ peut s'écrire

$$v = \underbrace{\frac{\langle \varphi \, , v \rangle}{\langle \varphi \, , h \rangle} h}_{\in K^\perp} + \underbrace{\left(v - \frac{\langle \varphi \, , v \rangle}{\langle \varphi \, , h \rangle} h \right)}_{\in K},$$

On a donc, pour tout $v \in H$ (on prend le produit scalaire de l'identité précédente avec h),

$$\langle \varphi \, , v \rangle = \langle \varphi \, , h \rangle \langle v \mid h \rangle$$

d'où l'identité (III.1.4) avec $f = \langle \varphi \, , h \rangle \, h$. L'unicité d'un tel f est immédiate.
On a enfin

$$\|\varphi\|_{H'} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{\langle \varphi \, , v \rangle}{|v|} = \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{\langle f \mid v \rangle}{|v|} = |f| \, .$$

□

On prendra garde au fait que cette identification dépend du produit scalaire choisi.

L'identification établie ci-dessus permet de donner un sens à la notion de différentielle d'une application à valeurs dans $\mathbb{R}$ en tant qu'élément de l'espace de Hilbert :

Définition III.1.18. (Différentiabilité)
Soit J une application de H dans $\mathbb{R}$, et $u \in H$. On dit que J est différentiable en u s'il existe $\varphi \in H'$ tel que l'on ait, pour h au voisinage de 0,

$$J(u + h) = J(u) + \langle \varphi \, , h \rangle + |h| \, \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon : H \longrightarrow H$ est telle que $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$. Si un tel φ existe, on peut l'identifier à un élément de H que l'on note $\nabla J(u)$. On dira que J est différentiable si elle admet une différentielle en tout point, et que J est C^1 si l'application $u \longmapsto \nabla(u)$ est continue.

Proposition III.1.19. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. La boule unité fermée de H n'est pas compacte.

Démonstration. Partant d'un élément unitaire quelconque, on construit une suite de vecteurs de norme 1 orthogonaux deux à deux selon le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Les vecteurs e_1, ..., e_n étant construits, on prend un vecteur v qui n'est pas dans $F_n = \mathrm{vect}(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On définit alors

$$e_{n+1} = \frac{v - P_{F_n}}{|v - P_{F_n}|},$$

qui est orthogonal à F_n (voir corollaire III.1.9). On considère maintenant cette suite (e_n) de la boule unité fermée. On a $|e_p - e_q| = \sqrt{2}$ pout tous p, q distincts, il est donc impossible d'en extraire une sous-suite qui serait de Cauchy. □

Exercice III.1.2. Montrer que toute partie d'intérieur non vide d'un espace de Hilbert H de dimension infinie n'est pas compacte.

III.2 Convergence faible

Comme précédemment H désigne un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(\cdot\,,\,\cdot)$ et de la norme associée $|\cdot|$.

Définition III.2.1. (Convergence faible)
Soit (u_n) une suite d'éléments de H. On dit que (u_n) converge faiblement vers u dans H, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si

$$\langle u_n \,|\, v\rangle \to \langle u \,|\, v\rangle \quad \forall v \in H.$$

Proposition III.2.2. Si $u_n \rightharpoonup u$ et $|u_n| \to |u|$, alors la suite u_n converge fortement vers u.

Démonstration: On écrit

$$|u_n - u|^2 = |u_n|^2 - 2\langle u_n \,|\, u\rangle + |u|^2 .$$

On a $\langle u_n \,|\, u\rangle \to |u|^2$ d'où $|u_n - u|^2 \to 0$. □

Le résultat fondamental de cette section est le suivant.

Théorème III.2.3. Soit (u_n) une suite **bornée** dans un espace de Hilbert H. Alors on peut extraire une sous-suite convergeant faiblement vers u dans H.

Démonstration: On raisonne d'abord dans le cas où H est séparable. Il existe donc une famille dénombrable $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dense dans H. On se propose de suivre le procédé d'extraction diagonale de Cantor.

1. Comme $\langle u_n \,|\, x_1\rangle$ est bornée dans $\mathbb{R}$ on peut extraire une suite $u_{j_1(n)}$ telle que $\left\langle u_{j_1(n)} \,|\, x_1\right\rangle$ converge.
2. Comme $\left\langle u_{j_1(n)} \,|\, x_2\right\rangle$ est bornée dans $\mathbb{R}$ on peut extraire de $u_{j_1(n)}$ une suite $u_{j_1\circ j_2(n)}$ telle que $\left\langle u_{j_1\circ j_2(n)} \,|\, x_2\right\rangle$ converge.
3. Par récurrence, on construit une suite de sous-suites emboitées $u_{j_1\circ j_2\circ\cdots\circ j_k(n)}$ telle que $\left\langle u_{j_1\circ j_2\circ\cdots\circ j_k(n)} \,|\, x_k\right\rangle$ converge, pour tout k.
4. On utilise à présent le procédé d'extraction diagonale : on pose $\varphi(k) = j_1 \circ j_2 \circ \cdots \circ j_k(k)$ (de telle sorte que φ est strictement croissante), et on considère $u_{\varphi(n)}$. Pour tout k, on remarque que $u_{\varphi(n)}$, à partir du rang k, est aussi une suite extraite de $(u_{j_1\circ j_2\circ\cdots\circ j_k(n)})$, de telle sorte que $\left\langle u_{\varphi(n)} \,|\, x_k\right\rangle$ converge lorsque $n \to +\infty$.
5. On utilise ensuite la densité des x_k. Pour tout $x \in H$, on montre que $(u_{\varphi(n)}, x)$ est une suite de Cauchy : soit $\varepsilon > 0$, il existe (x_k) tel que $|x - x_k| < \varepsilon$. Comme $\left\langle u_{\varphi(n)} \,|\, x_k\right\rangle$ est de Cauchy, il existe un N au-delà duquel $\left|\left\langle u_{\varphi(p)} \,|\, x_k\right\rangle - \left\langle u_{\varphi(q)} \,|\, x_k\right\rangle\right| < \varepsilon$. Pour tous p, q supérieurs à N, on a donc
$$\begin{aligned}\left|\left\langle u_{\varphi(p)} \,|\, x\right\rangle - \left\langle u_{\varphi(q)} \,|\, x\right\rangle\right| &\leq \left|\left\langle u_{\varphi(p)} \,|\, x\right\rangle - \left\langle u_{\varphi(p)} \,|\, x_k\right\rangle\right| + \left|\left\langle u_{\varphi(p)} \,|\, x_k\right\rangle - \left\langle u_{\varphi(q)} \,|\, x_k\right\rangle\right| \\ &\quad + \left|\left\langle u_{\varphi(q)} \,|\, x_k\right\rangle - \left\langle u_{\varphi(q)} \,|\, x\right\rangle\right| \\ &\leq M\varepsilon + \varepsilon + M\varepsilon = (1+2M)\varepsilon,\end{aligned}$$
où M est un majorant de $|u_n|$.
On a donc démontré que, pour tout $x \in H$, $\left\langle u_{\varphi(n)} \,|\, x\right\rangle$ converge vers un élément de H que l'on note $h(x)$. L'application $x \mapsto h(x) \in \mathbb{R}$ est linéaire, et on a pour tout $x \in H$
$$|h(x)| = \lim_{n\to\infty} \left|\left\langle u_{\varphi(n)} \,|\, x\right\rangle\right| \leq M\,|x|\,,$$
d'où h continue[2] sur H. D'après le théorème de Riesz-Fréchet, cette forme s'identifie à un élément u de H. On a donc convergence faible de la suite extraite vers u.

Dans le cas où le Hilbert n'est pas séparable, on se place dans l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par les termes de la suite, qui est un espace de Hilbert séparable (pour le même produit scalaire) par construction. La convergence faible vers un u de ce sous-espace entraîne la convergence faible dans H.

2. Remarquer qu'il n'est pas nécessaire ici d'utiliser le théorème de Banach–Steinhaus, du fait de l'hypothèse (u_n) bornée.

III.3 Sommes hilbertiennes, bases hilbertiennes

Définition III.3.1. (Somme hilbertienne)
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert H. On dit que H est somme Hibertienne des E_n si

(i) Les E_n sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire

$$\langle u \,|\, v\rangle = 0 \quad \forall u \in E_n\,,\ \forall v \in E_m \quad \forall m\,,\ n \in \mathbb{N}\,,\ m \neq n.$$

(ii) L'espace vectoriel engendré par les E_n est dense dans H, c'est -à-dire que pour tout $u \in H$, tout $\varepsilon > 0$, il existe v_1, ..., v_N, avec $v_n \in E_n$ pour $n = 1$, ..., N, tels que

$$\left| u - \sum_{j=1}^{N} v_j \right| < \varepsilon.$$

Théorème III.3.2. On suppose que H est somme Hilbertienne des E_n. Pour $u \in H$, on note $u_n = P_{E_n}u$. On a

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_n \text{ et } |u|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_n|^2\,.$$

Réciproquement, si l'on considère une suite (u_n) avec $u_n \in E_n$ pour tout n, et telle que $\sum |u_n|^2$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge, et sa limite $u = \sum u_n$ est telle que $u_n = P_{E_n}u$.

Démonstration. On considère l'opérateur

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} P_{E_n}.$$

On a $S_k \in \mathcal{L}(H)$, et $S_k u$ vérifie (les E_n sont orthogonaux deux à deux)

$$|S_k u|^2 = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2\,.$$

D'autre part on a, pour tout n

$$\langle u \,|\, u_n\rangle = \langle u_n + u - u_n \,|\, u_n\rangle = |u_n|^2\,,$$

d'où, en sommant de 1 à k,

$$\langle u \,|\, S_k u\rangle = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2 = |S_k u|^2\,.$$

On a donc $|S_k u| \leq |u|$. On désigne par E l'espace vectoriel engendré par les E_n. Pour tout $\varepsilon > 0$, tout u dans H, il existe un $v \in E$ tel que $|v - u| < \varepsilon$. Pour k assez grand, on a $S_k v = v$, et ainsi

$$|S_k u - u| \leq |S_k(u - v)| + |v - u| \leq 2\varepsilon.$$

on a donc bien convergence de $S_k u$ vers u.

D'autre part l'égalité, pour tout k

$$|S_k u|^2 = \sum_{n=1}^{k} |u_n|^2\,,$$

entraîne, à la limite,

$$|u|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^2\,.$$

Pour la réciproque, on utilise le caractère de Cauchy de la suite $\sum_{n=1}^{k} u_n$, et la continuité des opérateurs de projection. □

Le théorème précédent permet d'introduire la notion de base Hilbertienne :

Définition III.3.3. (Bases hilbertiennes)
Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de vecteurs d'un espace de Hilbert H. On dit que (e_n) est une base Hilbertienne si

(i) $|e_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\langle e_m , e_n\rangle = 0$ pour tous m, n, avec $m \neq n$.

(ii) L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.

La définition dit exactement que H est somme hilbertienne des droites vectorielles $\mathbb{R}e_n$.

Théorème III.3.4. Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.

Démonstration. Soit H un espace de Hilbert séparable [3]. On considère $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dense dans H. On note F_k l'espace vectoriel engendré par les k premiers vecteurs. L'espace vectoriel engendré par les F_k est dense dans H. On peut construire la base Hilbertienne de la façon suivante : si f_1 est non nul, on prend $e_1 = f_1/|f_1|$ comme premier vecteur. Une base orthonormale sur F_k étant construite, de dimension $n_k \leq k$, on complète, par procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : si $f_{k+1} \notin F_k$, on définit

$$e_{n_{k+1}} = \frac{f_{k+1} - P_{F_k} f_{k+1}}{|f_{k+1} - P_{F_k} f_{k+1}|}.$$

On construit ainsi une base Hilbertienne $(e_{n_k})_k$ de H. □

Remarque III.3.5. L'existence d'une base hilbertienne sur un espace de Hilbert H séparable permet de construire une isométrie entre l'espace H et ℓ^2 (on associe simplment à tout élément u la suite de ses coefficients dans la base hilbertienne). La plupart des espaces fonctionnels que l'on utilise en pratique, en particulier dans l'étude des EDP, étant séparables, on pourrait penser que tous ces espaces se ramènent à l'espace *modèle* ℓ^2. Cette isométrie est en effet très féconde dans certains cas, comme par exemple pour l'étude de $L^2(0, L)$, qui admet comme base hilbertienne la collection des

$$w_n \ : \ x \longmapsto = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right),$$

cette approche spectrale (on parle de séries de Fourier dans ce contexte) est de fait très utile en traitement du signal, et dans l'étude de certaines EDP (équation de la chaleur, équation des ondes, ...), plus précisément pour l'étude de régularité des solutions, ou de leur comportement en temps long. Mais, plus généralement, la base n'est pas en général connue explicitement [4], ce qui exclut toute possibilité de calcul effectif. Par ailleurs, même si cette base est connue explicitement comme dans le cas ci-dessus, elle peut être très inadaptée à la formalisation de certains problèmes. Par exemple décrire le cône des fonction de $L^2(0, 1)$ qui sont positives ou nulles presque partout est très incommode si l'on représente les fonctions par leurs coefficients de Fourier.

La notion de base hilbertienne permet d'exprimer la convergence faible d'une suite composante par composante, sous réserve que la suite soit *bornée*.

La proposition ci-dessous propose une version faible de la propriété suivante des espaces euclidiens : si une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, exprimés dans la base canonique, est telle que chaque composante converge, alors la suite converge. Dans le cas d'un espace de Hilbert de dimension infinie, si une suite, exprimée comme combinaison infinie de vecteurs d'une base hilbertienne, est *bornée* et converge *composante par composante*, alors on a *convergence faible* de la suite.

3. C'est à dire qu'il existe un ensemble dénombrable et dense. C'est le cas pour l'essentiel des espace de Hilbert que l'on rencontre dans la "nature", en particulier pour les espaces fonctionnels de type $L^2(\Omega)$ ou $H^m(\Omega)$.

4. Si l'on considère par exemple un domaine de $\mathbb{R}^d$ de forme quelconque, on peut montrer que l'opérateur du laplacien avec conditions nulles au bord admet une collection de fonctions propres qui forment une base hilbertienne de L^2. On peut approcher numériquement certaines de ces fonctions propres, et étidier leurs propriétés asymptiques, mais elle ne sont en général pas connues sous forme analytique, contrairement au cas de la dimension 1.

Proposition III.3.6. (••) Soit H un espace de Hilbert séparable, et (e_n) une base hibertienne de H. Soit (u^k) une suite d'éléments de H, bornée, telle que, pour tout n

$$\lim_{k\to+\infty} \left\langle u^k \,|\, e_n \right\rangle = u_n \in \mathbb{R}.$$

Alors la suite (u_n) est dans ℓ^2, et la suite (u^k) converge faiblement vers

$$u = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n e_n.$$

Démonstration. On écrit $u^k = \sum u_n^k e_n$. Comme u^k est bornée par un certain $M > 0$, on a, pour tout N,

$$\sum_{n=0}^{N} \left|u_n^k\right|^2 \le \sum_{n=0}^{+\infty} \left|u_n^k\right|^2 \le M.$$

La convergence terme à terme dans la somme finie de droite assure que les u_n vérifient la même inégalité, pour tout N, d'où $u \in \ell^2$.
Montrons que u^k converge faiblement vers u. On considère d'abord le cas $u = 0$. Pour tout vecteur-test $v = \sum v_n e_n \in H$, on a, pour tout N,

$$\left|\left\langle u^k \,|\, v\right\rangle\right| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k v_n\right| \le \left|\sum_{n=0}^{N-1} u_n^k v_n\right| + \left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^k v_n\right|.$$

On a

$$\left|\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^k v_n\right|^2 \le \left(\sum_{n=N}^{+\infty} \left|u_n^k\right|^2\right)\left(\sum_{n=N}^{+\infty} \left|v_n\right|^2\right) \le M \sum_{n=N}^{+\infty} \left|v_n\right|^2.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, le dernier terme peut être rendu inférieur à ε^2 pour N assez grand. Ce N étant maintenant fixé, la somme finie des $u_n^k v_n$ peut être rendue inférieure à ε, par convergence vers 0 des u_n^k quand k tend vers $+\infty$. On a donc bien convergence vers 0 de $\left\langle u^k \,|\, v\right\rangle$ pour tout v, qui exprime la convergence faible vers 0. Si u est non nul, on applique simplement ce qui précède à la suite $(u^k - u)$. □

Remarque III.3.7. Le caractère borné de la suite est essentiel. On peut en fait montrer que l'on a équivalence entre convergence faible vers une limite, et caractère borné + convergence composante par composante. L'argument essentiel est le suivant : toute suite faiblement convergence dans un espace de Hilbert (la complétude est importante) est *nécessairement bornée*. C'est une conséquence du théorème (hors programme) de Banach-Steinhaus, théorème VI.7.5, page 136, détaillé en annexe).

III.4 Théorie de Lax-Milgram

Proposition III.4.1. (Continuité d'une forme bilinéaire)
Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. Alors $a(\cdot\,,\cdot)$ est continue si et seulement s'il existe une constante C telle que

$$|a(u,v)| \le C\,|u|\,|v| \quad \forall u, v \in H.$$

On note $\|a\|$ la plus petite des constantes qui vérifient l'inégalité ci-dessus.

Démonstration. On suppose a continue. La continuité en 0 assure l'existence d'un r tel que $|a(u,v)| \le 1$ sur $B_f(0,r) \times B_f(0,r)$. On a donc, pour tous u, v, non nuls

$$\left|a\left(r\frac{u}{|u|}, r\frac{v}{|v|}\right)\right| \le 1 \Longrightarrow |a(u,v)| \le \frac{1}{r^2}\,|u|\,|v|.$$

Réciproquement, le développement

$$a(u+h, v+k) = a(u,v) + a(h,v) + a(u,k) + a(h,k)$$

assure la continuité en tout $(u,v) \in H \times H$. □

Définition III.4.2. (Coercivité d'une forme bilinéaire)
Soit $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire. On dit que a est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$a(u,u) \geq \alpha \, |u|^2 \quad \forall u \in H.$$

Remarque III.4.3. En dimension finie, et dans le cas où la forme est symétrique ($a(u,v) = a(v,u)$), on retrouve la notion de forme symétrique définie positive. Le plus grand coefficient α est alors la plus petite valeur propre de la matrice associée, et la plus petite constante $\|a\|$ de la continuité sa plus grande valeur propre.

Exercice III.4.1. Soit $\alpha = (\alpha_n)$ une suite bornée de réels, et

$$a \ : \ (u,v) \in \ell^2 \times \ell^2 \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n u_n v_n.$$

a) A quelles conditions sur α la forme bilinéaire $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est-elle coercive dans ℓ^2 ?

b) On suppose ici $\alpha = 1/2^n$. Donner un exemple d'espace de Hilbert dans lequel cette forme est bien définie, et coercive.

Proposition III.4.4. Soit H un espace de Hilbert, et a une forme bilinéaire et continue sur l'espace produit $H \times H$. Pour tout $u \in H$, on note Au l'élément de H qui s'identifie à la forme linéaire $a(u,\,\cdot\,)$, définit par :

$$\langle Au \,|\, v \rangle = a(u,v) \quad \forall v \in H.$$

L'application $u \longmapsto Au$ est linéaire et continue. De plus si $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est coercive, alors l'application A est une bijection.

Démonstration: L'application A est évidemment linéaire, et

$$|Au|^2 = \langle Au \,|\, Au \rangle = a(u, Au) \leq \|a\| \, |u| \, |Au| \, ,$$

d'où $|Au| \leq \|a\| \, |u|$, qui exprime la continuité de A.

Si $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ est coercive, on a $\langle Au \,|\, u \rangle = a(u,u) \geq \alpha \, |u|^2$, et donc $|Au| \geq \alpha \, |u|$ pour tout u dans H. L'application linéaire A est donc injective. On vérifie que l'image est fermée en considérant une suite (Au_n) qui converge vers un élément de l'image w. Comme (Au_n) converge, elle est de Cauchy, donc (u_n) est également de Cauchy d'après l'inégalité précédemment démontrée. Elle converge donc vers $u \in H$ qui vérifie $Au = w$ par continuité de A. On a de plus, pour tout $g \in H$,

$$\langle g \,|\, Au \rangle = 0 \quad \forall u \in H \Longrightarrow \langle g \,|\, Ag \rangle = a(g,g) = 0$$

qui entraîne $g = 0$ par coercivité de $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$. L'image de A est donc fermée et dense dans H : c'est l'espace H lui-même. L'injectivité est une conséquence immédiate de la coercivité. □

Théorème III.4.5. (Lax-Milgram)
Soit H un espace de Hilbert, et a une forme bilinéaire continue et coercive sur $H \times H$. Pour tout $\varphi \in H'$, il existe un $u \in H$ unique tel que

$$a(u,v) = \langle \varphi \, , v \rangle \quad \forall v \in H. \tag{III.4.1}$$

Si a est symétrique, u est l'unique élément de H qui réalise le minimum de la fonctionnelle

$$v \longmapsto J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi \, , v \rangle.$$

Démonstration. D'après le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il existe un unique $f \in H$ tel que

$$\langle f \mid v\rangle = \langle \varphi \, , v\rangle \quad \forall v \in H.$$

On introduit l'opérateur A associé à $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$, qui est bijectif (voir proposition III.4.4). Il existe donc une unique solution u à l'équation $Au = f$.

On suppose maintenant $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ symétrique. On note toujours u la solution du problème variationnel (III.4.1). Pour tout $h \in H$, la fonction (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)

$$t \longmapsto \psi(t) = J(u + th) - J(u)$$

est convexe, nulle en 0, de dérivée nulle en 0. Elle est donc positive, et ainsi $J(u + h) \geq J(u)$ pour tout $h \in H$.

De la même manière, si w minimise J, on écrit que la dérivée de la fonction $J(w + th) - J(w)$ est nulle en 0, ce qui est exactement la formulation variationnelle (III.4.1). □

III.5 Opérateurs

Proposition III.5.1. Soit T une application linéaire de H dans F, deux espaces de Hilbert. Alors F est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de H. On note $\mathcal{L}(H, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de H dans F. C'est un e.v.n. pour la norme d'opérateur

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Tx|_F}{|x|_H}.$$

L'espace $\mathcal{L}(H, F)$ est un espace de Banach, i.e. un espace vectoriel normé complet.

Démonstration. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(H, F)$. Pour tout $x \in H$, la suite $(T_n x)$ est de Cauchy dans H complet, elle converge donc vers un élément de F que l'on note Tx. On vérifie immédiatement T est linéaire. Pour la continuité, on utilise le caractère de Cauchy de la suite : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, pour tous p, $q \geq N$,

$$\|T_q - T_p\| < \varepsilon \text{ i.e. } |T_q x - T_p x| \leq \varepsilon \, |x| \quad \forall x \in H.$$

Pour x fixé on fait tendre q vers l'infini, et on prend $p = N$. On obtient

$$|Tx| \leq (\varepsilon + |T_N|) \, |x| \, .$$

d'où l'on déduit que T est continue. La convergence de T_n vers T pour la norme d'opérateur s'obtient à partir du critère de Cauchy qui précède, en faisant tendre comme précédemment q vers $+\infty$: pour tout $p \geq N$, tout $x \neq 0$

$$\frac{|T_p x - Tx|}{|x|} \leq \varepsilon,$$

qui termine la preuve. □

Définition III.5.2. (Opérateur compact)
Soit T un opérateur linéaire continu de H vers F, deux espaces de Hilbert. On dit que T est compact si l'image de B_H, la boule unité fermée de H, est relativement compacte dans F, c'est à dire d'adhérence compacte.

Exercice III.5.1. Montrer que $T \in \mathcal{L}(H, F)$ est compact si et seulement si, pour toute suite bornée (x_n) dans H, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $T(x_{\varphi(n)})$ converge dans F.

Proposition III.5.3. L'ensemble $\mathcal{K}(H, F)$ des applications linéaires compactes est un s.e.v. fermé de $\mathcal{L}(H, F)$

Démonstration. La somme de deux opérateurs compacts est compacte, ainsi que le produit d'un opérateur compact par un réel. Maintenant considérons une suite T_n d'opérateurs compacts qui converge vers un opérateur $T \in \mathcal{L}(H,F)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n tel que $\|T_n - T\| < \varepsilon/2$. On peut recouvrir $T_n(B_H)$ par une union finie de boules de rayon $\varepsilon/2$. L'union des boules de mêmes centres et de rayon ε recouvre $T(B_H)$ par construction. L'image de la boule unité fermé par T est donc précompacte, donc relativement compacte d'après la proposition I.6.8, page 23. ☐

Définition III.5.4. (Opérateur de rang fni)
Soit $T \in \mathcal{L}(H,F)$. On dit que T est de rang fini si son image $R(T)$ est de dimension finie.

Tout opérateur de rang fini étant compact (du fait que tout borné dans un espace de vectoriel de dimension finie est relativement compact), et du fait que $\mathcal{K}(H,F)$ est fermé (proposition III.5.3), toute limite d'une suite d'opérateur de rang fini est compacte. Il s'agit, dans le contexte bien spécifique des espaces de Hilbert, d'une équivalence, comme le précise la proposition suivante.

Proposition III.5.5. Un opérateur $T \in \mathcal{L}(H,F)$ est compact si et seulement s'il est limite dans $\mathcal{L}(H,F)$ d'opérateurs de rang fini.

Démonstration. On a vu que toute limite d'une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini. est compacte. Réciproquement, considérons un opérateur T compact. Comme $\overline{T(B_H)}$ est compact, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut le recouvrir par une collection finie de boules de rayon ε :

$$\overline{T(B_H)} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon).$$

On considère maintenant l'espace vectoriel G engendré par les f_i. Pour tout $x \in B_F$, il existe i tel que

$$|Tx - f_i| < \varepsilon$$

d'où (d'après la proposition III.1.11, page 60)

$$|P_G(Tx) - f_i| = |P_G(Tx) - P_G f_i| \leq |Tx - f_i| < \varepsilon.$$

On a donc

$$|P_G \circ Tx - Tx| \leq |P_G \circ Tx - f_i| + |f_i - Tx| < 2\varepsilon \quad \forall x \in B_H,$$

d'où, par définition de la norme d'opérateur,

$$\|T_\varepsilon x - Tx\| < 2\varepsilon,$$

où $T_\varepsilon = P_G \circ T$ est de rang fini. ☐

III.6 Exercices

Exercice III.6.1. Soit H un espace de Hilbert, K un convexe fermé non vide de H, $z \in H$. On note u la projection de z sur K. Montrer que

$$|v - u| \leq |v - z| \quad \forall v \in K.$$

Exercice III.6.2. *La démonstration du théorème III.1.8 est basée sur le fait qu'une suite (v_n) minimisante de la distance de z à un convexe fermé K converge vers un point de K, que l'on définit comme la projection de z sur K. Cet exercice vise à estimer la vitesse de convergence de v_n vers $P_K z$ en fonction de la vitesse de convergence de $|v_n - z|$ vers $d(z,K)$.*
Soit H un espace de Hilbert, K un convexe fermé non vide de H, $z \in H$. On note u la projection de z sur K. Pour tout $v \in K$, note $d_v = |v - z|$.

a) Montrer que

$$|u - v| \leq \sqrt{2}\sqrt{d_v - d}\sqrt{d_v}.$$

b) Montrer que cette estimation est optimale dès que la dimension de H est supérieure ou égale à 2.

Exercice III.6.3. (Caratère 1-Lipschtizien de la projection sur un convexe fermé)
Soit $K \subset H$ un convexe fermé. On note P_K l'application de projection définie par le théorème III.1.8, page 59. Montrer que, pour tous f, $g \in H$, on a

$$|P_K f - P_K g| \leq |f - g| \, .$$

Remarque III.6.1. Ne pas confondre le résultat précédent avec le caractère 1-lipschitzien de la fonction distance à un ensemble quelconque, dans tout espace métrique (voir exercice I.7.3, page 25).

Exercice III.6.4. a) Montrer que, si l'espace de Hilbert H est de dimension finie (on parle alors d'espace euclidien), alors pour tout fermé K non vide (sans hypothèse de convexité), la distance de tout point z à K est atteinte, mais que l'on peut perdre l'unicité.
b) $(\bullet\bullet\bullet)$ Montrer que, si H est de dimension infinie (on pourra se placer sur ℓ^2), alors la distance d'un point à un fermé peut ne pas être réalisée.

Exercice III.6.5. a) Soient u, u_1, …, u_n, des éléments d'un espace de Hilbert H. Montrer l'équivalence suivante

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} u_i^{\perp}\right) \subset u^{\perp} \iff \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \, , \; u = \sum \lambda_i u_i.$$

b) Reformuler la propriété ci-dessus dans le cas où u, u_1, …, u_n sont des vecteurs de $\mathbb{R}^m$

Exercice III.6.6. Soit (e_j) une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H.
a) Montrer que la suite (e_n) tend faiblement vers 0.

Soit (a_j) une suite réelle bornée. On pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j e_j.$$

b) Montrer que $|u_n|$ tend vers 0.
c) Montrer que $\sqrt{n} u_n \rightharpoonup 0$.

Exercice III.6.7. (Ondelettes de Haar)
On se place sur $H = L^2(0,1)$, et l'on introduit la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$$W = \mathbb{1}_{]0,1/2[} - \mathbb{1}_{]1/2,1[}.$$

On considère maintenant les fonctions w_n^k définies par

$$w_n^k(x) = 2^{n/2} W \left(2^n (x - k/2^n)\right) \, , \; n \in \mathbb{N} \, , \; 0 \leq k < 2^n.$$

Montrer que le système constitués de la fonction $w_0 \equiv 1$ et des fonctions précédemment définies constitue une base hilbertienne de H.

Exercice III.6.8. Donner un exemple de forme linéaire non continue sur un espace vectoriel normé dont la norme est issue d'un produit scalaire. *(On pour considérer l'espace F des suites nulles au-delà d'un certain rang muni de la norme euclidienne).*

Exercice III.6.9. $(\bullet\bullet\bullet)$ Soit H un espace de Hilbert, φ une forme linéaire sur H, et $K = \ker \varphi$ son noyau.
a) Montrer que, si φ est continue et non nulle, alors K sépare H en deux composantes connexes par arcs.
b) Montrer que, si φ n'est *pas* continue, alors H, de même que $u + K$ pour tout $u \in H$, sont denses dans K.
c) Toujours dans l'hypothèse où φ n'est *pas* continue, montrer que $H \setminus K$ est connexe par arcs (!!).

Exercice III.6.10. On considère un convexe fermé K dans un espace de Hilbert H, et une suite (u_n) d'éléments de K qui converge faiblement vers un élément u de H.

a) Montrer que $u \in K$ (on dit que K est *faiblement séquentiellement fermé*).

b) Montrer que la conclusion peut être invalidée si K n'est pas convexe ;

Exercice III.6.11. On appelle demi-espace fermé d'un espace de Hilbert H un ensemble de la forme

$$\{v \in H\,,\ \langle h \,|\, v\rangle \leq \alpha\}$$

avec $h \in H$ non nul, et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Montrer qu'un convexe fermé K strictement inclus dans H est l'intersection des demis espaces fermés qui le contiennent.