Chapitre IV

Éléments d'analyse fonctionnelle

Sommaire

Ce chapitre propose une introduction aux espace vectoriels normés de dimension infinie, i.e. qui ne sont pas engendrés par un nombre fini d'éléments. On se gardera pourtant de dire qu'ils sont engendrés par nombre infini d'éléments car les bases vectorielles (dont on ne peut en général montrer l'existence que par un argument fondé sur l'axiome du choix) sont complètement *inutilisables* en général. La définition d'un espace vectoriel est en revanche exactement la même qu'en dimension finie, ainsi que la définition d'une norme (voir définition I.2.7, page 12). Ce cadre abstrait est adapté aux espaces de fonctions (espaces de fonctions continues, différentiables, espaces L^p, espaces de Sobolev, ...), les "points" de ces espaces sont alors des fonctions, ce qui justifie l'appellation *Analyse Fonctionnelle.*

IV.1 Définitions

Définition IV.1.1. (Espace de Banach)
Soit E un espace vectoriel normé (e.v.n.). Si E est complet pour la distance associée à la norme, on dit que E est un espace de Banach.

On utilisera en général ce terme pour des espaces de dimension infinie, même si de fait tout e.v.n. de dimension finie est un espace de Banach (voir proposition I.5.5, page 20).

Exercice IV.1.1. Montrer que l'espace vectoriel X des suites nulles au-delà d'un certain rang, muni de la norme ∞, n'est pas complet.

Proposition IV.1.2. Soit T une application linéaire de E dans F, deux espaces vectoriels normés. Alors T est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité de E. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F. C'est un e.v.n. pour la norme d'opérateur

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}.$$

Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition III.5.1, page 67. Soit (T_n) une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $x \in E$, la suite $(T_n x)$ est de Cauchy dans F complet, elle converge donc vers un élément de F que l'on note Tx. On vérifie immédiatement T est linéaire. Pour la continuité, on utilise le caractère de Cauchy de la suite : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que, pour tous p, $q \geq N$,

$$\|T_q - T_p\| < \varepsilon \text{ i.e. } \|T_q x - T_p x\| < \varepsilon \|x\| \quad \forall x \in E.$$

Pour x fixé on fait tendre q vers l'infini, et on prend $p = N$. On obtient

$$\|Tx\| \leq (\varepsilon + \|T_N\|) \|x\| .$$

d'où l'on déduit que T est continue. La convergence de T_n vers T pour la norme d'opérateur s'obtient à partir du critère de Cauchy qui précède, en faisant tendre comme précédemment q vers $+\infty$: pour tout $p \geq N$, tout $x \neq 0$

$$\frac{\|T_p x - Tx\|}{\|x\|} \leq \varepsilon.$$

□

Définition IV.1.3. (Dual topologique)
Soit E un espace vectoriel normé (e.v.n.). On appelle dual topologique de E, et l'on note E', l'ensemble des formes linéaires (applications linéaires à valeurs dans $\mathbb{R}$) continues. C'est un e.v.n. pour la norme

$$\|\varphi\|_{E'} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle \varphi \, , x \rangle|}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle \varphi \, , x \rangle.$$

Remarque IV.1.4. Si E est de dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues. Ca n'est pas le cas en dimension infinie. Considérer par exemple l'espace vectoriel X des suites nulles au-delà d'un certain rang, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. La forme

$$\varphi \; : \; u = (u_n) \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}$$

(on gardera en tête qu'il s'agit en fait d'une somme *finie*, donc convergente) n'est pas bornée sur la boule unité, elle n'est donc pas continue [1].

Définition IV.1.5. (Convergences faible / faible–$\star$)
Soit E un e.v.n. On dit qu'une suite (x_n) de points de E converge faiblement vers x, ce qu'on écrira $x_n \rightharpoonup x$, si

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \varphi \, , x_n \rangle = \langle \varphi \, , x \rangle \quad \forall \varphi \in E'.$$

On parle de convergence faible–$\star$ pour une suite (φ_n) dans E' qui converge ers φ au sens suivant

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \varphi_n \, , x \rangle = \langle \varphi \, , x \rangle \quad \forall x \in E.$$

On écrira alors $\varphi_n \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi$.

Théorème IV.1.6. (Hahn-Banach, forme analytique)
Soit E un e.v.n. et $G \subset E$ un sous-espace vectoriel. On considère φ une forme linéaire sur G, continue, de norme

$$\|\varphi\|_{G'} = \sup_{x \in G, \|x\| \leq 1} \langle \varphi \, , x \rangle.$$

Il existe $f \in E'$ qui prolonge φ, telle que $\|f\|_{E'} = \|\varphi\|_{G'}$.

1. On notera que l'exemple choisi s'appuie sur un e.v.n. qui n'est pas complet. De fait, on s'épargnera de chercher à construire un exemple explicite d'application linéaire non continue sur un espace complet, une telle construction ne peut qu'être abstraite et nécessite l'axiome du choix.

Proposition IV.1.7. Soir E un e.v.n. et $x \in E$. Il existe $\varphi \in E'$ de norme 1 telle que $\langle \varphi \, , x \rangle = \|x\|$.

Démonstration. Soit $x \in E$. Tout y de $G = \mathbb{R}x$ s'écrit λx. On définit φ sur $\mathbb{R}x$ en posant $\langle \varphi \, , y \rangle = \lambda \|x\|$. On a $\|\varphi\|_{G'} = 1$ et $\langle \varphi \, , y \rangle = \|x\|$. Cette forme se prolonge en une forme de E' de norme 1 d'après le théorème IV.1.6. □

Théorème IV.1.8. (Hahn-Banach, forme géométrique)
Soit E un e.v.n., $K \subset E$ un convexe fermé de E, et $z \notin K$. Il existe une forme linéaire continue $\varphi \in E'$ et un réel α tels que

$$\langle \varphi \, , x \rangle \leq \alpha < \langle \varphi \, , z \rangle \quad \forall x \in K.$$

Définition IV.1.9. (Injection canonique, espaces réflexifs)
On définit l'injection canonique $J \; : \; E \longrightarrow E''$ comme suit :

$$\forall x \in E \, , \; \varphi \in E' \, , \; \langle J(x) \, , \varphi \rangle_{E'',E'} = \langle \varphi \, , x \rangle_{E',E}.$$

On a $\|J(x)\|_{E''} = 1$ d'après la proposition IV.1.7, il s'agit donc d'une *isométrie*. On dit que E est *réflexif* si J est surjective, i.e. $J(E) = E''$. On peut alors identifier E et son bidual E''.

Définition IV.1.10. (Séparabilité)
Un e.v.n. E est dit séparable s'il existe une partie dénombrable dense dans E.

Comme pour la complétude, cette propriété est immédiatement vérifiée pour tout e.v.n. de dimension finie ($\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$), elle n'a donc de pertinence que pour les espaces de dimension infinie.

Exercice IV.1.2. a) Montrer que l'espace ℓ^∞, espace des suites réelles bornées muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup |u_n|$, n'est *pas séparable*

b) Montrer qu'en revanche le sous-espace $c_0 \subset \ell^\infty$ des suites qui tendent vers 0 est séparable.

c) Montrer que, pour $p \in [1, +\infty[$ l'espace

$$\ell^p = \left\{ u = (u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \, , \; \sum u_n^p < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^p \right)^{1/p},$$

est séparable.

Dual topologique de ℓ^p

L'espace ℓ^2 est un espace de Hilbert, il s'identifie donc à son dual topologique (théorème de Riez-Fréchet III.1.17, page 60), c'est à dire qu'il existe une isométrie en ℓ^2 et $(\ell^2)'$. Il est donc réflexif.

Pour $p \in]1, +\infty[$, $p \neq 2$, le dual de ℓ^p s'identifie à ℓ^q, où q est l'exposant conjugué de p, tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Autrement dit, pour toute forme linéaire continue φ sur ℓ^p, il existe un unique élément $v = (v_n)$ de ℓ^q tel que

$$\langle \varphi \, , u \rangle = \sum u_n v_n.$$

C'est une conséquence de l'inégalité de Hölder proposition II.4.7, page 50. La symétrie de la relation de conjugaison assure que ces espaces sont réflexifs.

Le dual topologique de ℓ^1 s'identifie à ℓ^∞.

Pour ℓ^∞, la situation est plus délicate. Pour toute suite u de ℓ^1, l'application

$$v \in \ell^\infty \longmapsto \sum u_n v_n$$

est une forme linéaire continue sur ℓ^∞, qui est $J(u)$, où J est l'injection canonique de la définition IV.1.9. On peut montrer que cette application n'est pas bijective, sans pour autant être capable d'expliciter une forme linéaire sur ℓ^∞ qui ne peut se représenter par un élément de ℓ^1. Considérons pour cela le sous-espace c_0 de ℓ^∞ des suites qui convergent vers une valeur finie. On note φ l'application qui à une suite de c_0 associe sa limite. D'après le théorème de Hahn-Banach analtytique IV.1.6, cette forme peut être prolongée en une forme $\varphi \in (\ell^\infty)'$. En effet, si $v \in \ell^1$ représente cette forme linéaire, alors $\langle J(v)\, , u\rangle = 0$ pour toute suite $u \in c_0$, on a donc en particulier $v_n = 0$ pour tout n, d'où $v = 0$, ce qui est absurde, puisque φ n'est pas la forme nulle. Noter que l'existence d'une telle forme repose sur le théorème de Hahn-Banach, et donc sur l'axiome du choix.

Dual topologique de L^p

La situation est essentiellement la même pour les espaces $L^p(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$.
L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert, et comme tel réflexif.
Pour $p \in]1, +\infty[$, $p \neq 2$, le dual de L^p s'identifie à L^q, où q est l'exposant conjugué de p, tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Autrement dit, pour toute forme linéaire continue φ sur L^p, il existe un unique élément $g \in L^q$ tel que

$$\langle \varphi\, , f\rangle = \int_\Omega g(x) f(x)\, dx$$

C'est, comme pour les suites, une conséquence de l'inégalité de Hölder proposition II.4.7, page 50. La symétrie de la relation de conjugaison assure que ces espaces sont réflexifs.
Le dual topologique de L^1 s'identifie à L^∞.
Pour L^∞, la situation est plus délicate. Pour tout g de L^1, l'application

$$f \in L^\infty \longmapsto \int fg$$

est une forme linéaire continue sur L^∞, qui est $J(u)$, où J est l'injection canonique de la définition IV.1.9. On peut montrer que cette application n'est pas bijective, sans pour autant être capable d'expliciter une forme linéaire sur $L\infty$ qui ne peut se représenter par un élément de ℓ^1. Comme dans le cas des suites, on peut construire par le théorème de Hahn-Banach une forme linéaire qui, à toute fonction de L^∞ qui converge vers une limite finie quand x tend ∞, associe cette limite, et cette suite ne peut être représentée par un élément de L^1. On peut aussi, dans un esprit différent, considérer l'espace $C_b(\Omega)$ des fonctions continues bornées, qui est un sous-espace fermé de $L^\infty(\Omega)$, considérer la forme sur $C_b(\Omega)$ qui à une fonction associe sa valeur en un point de Ω, et prolonger cette forme sur $\mathcal{L}^\infty$ par le théorème de Hahn-Banach.

Exercice IV.1.3. a) Montrer que, si E est un espace de Hilbert, le φ de la proposition IV.1.7 est unique.
b) Montrer que, dans le cas général, on n'a pas unicité du φ (on pourra considérer le cas $E = \ell^1$, et / ou le cas $E = \ell^\infty$.

IV.2 Compléments sur la dualité

Soient E et F deux e.v.n., et Ψ une forme bilinaire continue sur $E \times F$. On peut associer canoniquement à Ψ une application (linéaire et continue) de F dans E', le dual topologique de E (espace des formes linéaires continues) :

$$y \in F \longmapsto Ty \in E'\,,\ \langle Ty\, , x\rangle = \Psi(x, y) \quad \forall x \in E. \tag{IV.2.1}$$

Proposition IV.2.1. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Si E est séparable [2], alors de toute suite (y_n) bornée dans F on peut extraire une suite $(y_{n'})$ qui converge au sens suivant :

$$\exists \varphi \in E' \,,\; T y_{n'} \overset{\star}{\rightharpoonup} \varphi,$$

où T est définie par (IV.2.1). Autrement dit, il existe $\varphi \in E'$ telle que

$$\psi(x, y_{n'}) \longrightarrow \langle \varphi \,, x \rangle \quad \forall x \in E.$$

Démonstration. Il existe une famille dénombrable $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dense dans E. On se propose de suivre le procédé d'extraction diagonale de Cantor.

1. Comme $\Psi(x_1, y_n)$ est bornée dans $\mathbb{R}$ on peut extraire une suite $y_{j_1(n)}$ telle que $\Psi(x_1, y_{j_1(n)})$ converge.
2. Comme $\Psi(x_2, y_{j_1(n)})$ est bornée dans $\mathbb{R}$ on peut extraire de $y_{j_1(n)}$ une suite $y_{j_1\circ j_2(n)}$ telle que $\Psi(x_2, y_{j_1\circ j_2(n)})$ converge.
3. Par récurrence, on construit une suite de sous-suites emboitées $y_{j_1\circ j_2\circ\cdots\circ j_k(n)}$ telle que $\Psi(x_k, y_{j_1\circ j_2\circ\cdots\circ j_k(n)})$ converge, pour tout k.
4. On utilise à présent le procédé d'extraction diagonale : on pose $j(k) = j_1 \circ j_2 \circ \cdots \circ j_k(k)$ (de telle sorte que j est strictement croissante), et on considère $y_{j(n)}$. Pour tout k, on remarque que $y_{j(n)}$, à partir du rang k, est aussi une suite extraite de $(y_{j_1\circ j_2\circ\cdots\circ j_k(n)})$, de telle sorte que $\Psi(x_k, y_{j(n)})$ converge lorsque $n \to +\infty$.
5. On utilise pour finir la densité des x_k pour montrer que, pour tout $x \in H$, $\Psi(x, y_{j(n)})$ est une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, il existe (x_k) tel que $|x - x_k| < \varepsilon$. Comme $\Psi(x_k, y_{j(n)})$ est de Cauchy, il existe un N au-delà duquel $\left|\Psi(x_k, y_{j(p)}) - \Psi(x_k, y_{j(q)})\right| < \varepsilon$. Pour tous p, q supérieurs à N, on a donc

$$\begin{aligned} &\left|\Psi(x, y_{j(p)}) - \Psi(x, y_{j(q)})\right| \\ \leq &\left|\Psi(x, y_{j(p)}) - \Psi(x_k, y_{j(p)})\right| + \left|\Psi(x_k, y_{j(p)}) - \Psi(x_k, y_{j(q)})\right| + \left|\Psi(x_k, y_{j(q)}) - \Psi(x, y_{j(q)})\right| \\ &\leq (1 + 2C \, \|\Psi\|)\varepsilon, \end{aligned}$$

   où $\|\Psi\|$ est la constante de continuité de Ψ (telle que $|\ \Psi(x,y)| \leq \|\Psi\| \, \|x\| \, \|y\|$, et C un majorant de $\|y_n\|$.

La suite $(y_{j(n)})$ est donc telle que $\Psi(x, y_{j(n)})$ converge, pour tout x, vers un réel noté $h(x)$. Cette limite est linéaire par rapport à x, et de norme majorée par une constante fois la norme de x, il s'agit donc d'une forme linéaire continue sur F. □

On notera l'importance de la séparabilité de E dans la démonstration ci-dessus. Par ailleurs, le procédé construit une limite qui n'est pas un élément de F, mais une forme linéaire sur E', qui n'est pas nécessairement dans l'image de T.

La proposition précédente est très générale, et d'ailleurs très vide dans certains cas (prendre par exemple Ψ identiquement nulle, ou bien E de dimension finie alors que F est de dimension infinie). La propriété devient pertinente quand l'espace E et la forme Ψ sont tels que la dualité est *séparante*, c'est à dire (on privilégie ici l'espace E) que

$$\Psi(x, y) = 0 \quad \forall x \Longrightarrow y = 0.$$

Cette propriété assure l'*injectivité* de l'application T définie ci-dessus.

La richesse de l'espace F peut être formalisée par la condition symétrique de dualité séparante :

$$\Psi(x, y) = 0 \quad \forall y \Longrightarrow x = 0.$$

Si cette seconde condition est vérifiée, alors l'image de T est dense dans E' pour la topologie faible-$\star$ sur E' (i.e. en dualité avec E'). Dans le cas où E est réflexif, on aura bien densité de $T(F)$ dans E'. On prendra garde au fait que, si E n'est pas réflexif, on peut avoir E et F en dualité séparante sans que $T(F)$ ne soit dense

2. Il admet une famille dénombrable dense.

dans E'. Considérer par exemple $E = \ell^\infty$, $F = \ell^1$, et Ψ la dualité canonique entre ces deux espaces. Elle est évidemment (doublement) séparante, mais $T(\ell^1)$ n'est pas dense dans ℓ^∞ : la forme linéaire qui à une suite de ℓ^∞ convergente associe sa limite, prolongée sur ℓ^∞ (par le théorème de Hahn-Banach analytique IV.1.6, page 72), est à distance au moins 1 de $T(\ell^1)$.

Corollaire IV.2.2. Soit E un e.v.n. séparable. De toute suite bornée dans E' on peut extraire une sous-suite bornée qui converge pour la topologie faible-$\star$.

On fera bien la distinction entre le corollaire précédent et le théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki, qui établit la compacité de la boule unité de E' pour la topologie faible-$\star$, sans hypothèse de séparabilité. Dans le cas où E n'est pas séparable, on a bien compacité, mais la topologie n'est *pas métrisable*, de telle sorte que la compacité ne peut pas se traduire en termes de suites extraites convergentes [3]. Ainsi la boule unité de ℓ^1 est bien compacte pour $\sigma(\ell^\infty, \ell^1)$, mais on ne peut par exemple extraire aucune sous suite convergente (faible-$\star$) de la suite (e_n).

Corollaire IV.2.3. Soit E un espace de Banach dont le dual est séparable. De toute suite bornée dans E on peut extraire une sous-suite qui converge [4] dans E'' pour la topologie $\sigma(E', E'')$. Si E est réflexif, la sous-suite converge faiblement dans E.

Dans le cas Hilbertien on peut supprimer la condition de séparabilité, comme l'exprime le corollaire qui suit, qui est exactement le théorème III.2.3, page 62, démontré dans un chapitre précédent.

Corollaire IV.2.4. Soit H un espace de Hilbert. De toute suite bornée dans H on peut extraire une sous-suite qui converge faiblement dans H

Démonstration. Il suffit de se placer dans l'adhérence V de l'espace vectoriel engendré par les termes de la suite, qui est séparable par construction. On vérifie ensuite que l'on a bien convergence faible sur $H = V + V^\perp$ de la suite extraite. □

Espaces fonctionnels, mesures

On considère Ω un domaine de $\mathbb{R}^d$ (qui peut être l'espace tout entier).

Le corollaire IV.2.3 permet d'extraire d'une suite bornée une sous-suite faiblement convergente dès que l'espace considéré est réflexif, donc en particulier dans les espaces $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$, ainsi que dans les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout $p \in]1, +\infty[$.

Pour les espaces non réflexifs (comme $L^1(\Omega)$ ou $L^\infty(\Omega)$, ou les espaces de Sobolev associés), la propriété est fausse en général, comme l'illustrent les exemples suivants.

Dans $L^1(\mathbb{R})$: la suite $f_n = \mathbb{1}_{]n,n+1[}$ est sur la sphère unité. Si une sous-suite converge faiblement vers f, alors f s'annule contre toute fonction régulière à support compact, elle est donc nécessairement nulle. Mais par ailleurs $\langle 1 \,, f_n \rangle$ est identiquement égale à 1, on doit donc avoir $\langle 1 \,, f \rangle = 1$, ce qui est impossible.

Dans L^∞, les choses sont un peu plus délicates, car le dual de cet espace n'est pas clairement identifié [5]. En particulier, le fait que l'on puisse (ou pas) extraire une sous-suite convergente de la suite définie précédemment n'est pas aisé à trancher. On peut néanmoins construire un contre-exemple analogue, en considérant par exemple la forme linéaire sur $L^\infty(\mathbb{R})$ qui à une fonction convergente en $+\infty$ associe sa limite, prolongée par le théorème de Hahn-banach analytique en $\varphi \in (L^\infty(\Omega))'$. On considère alors la suite $f_n = \mathbb{1}_{]n,+\infty[}$. Si elle converge faiblement vers f, alors nécessairement f est nulle presque partout, donc tend vers 0 en $+\infty$, or on doit avoir $\langle \varphi \,, f \rangle = 1$, ce qui est absurde.

Convergence faible dans les cas non réflexifs
L'espace $L^\infty(\Omega)$ s'identifie au dual de $L^1(\Omega)$, qui est séparable, on peut donc, d'une suite bornée dans L^∞ extraire une sous-suite qui convergence (faible-$\star$) vers une limite de L^∞.

3. Autant dire qu'elle n'est pas commode à *utiliser* dans la vie de tous les jours.
4. Plus précisément son image par la surjection canonique de E dans E''.
5. Comme précisé précédemment, le dual de L^∞ contient des formes qui ne peuvent pas se représenter par des fonctions de L^1 nécessite l'utilisation du théorème de Hahn-Banach analytique IV.1.6, page 72, donc indirectement de l'axiome du choix.

L'espace $L^1(\Omega)$, dont le dual L^∞ n'est pas séparable, peut être mis en dualité avec des espaces de fonctions continues (munis de la norme ∞) : espace C_c des fonctions continues à support compact, espace C_0 des fonctions qui tendent vers 0 au bord de Ω, et l'espace C_b des fonctions bornées sur Ω. Noter que ces trois espaces s'identifient si l'on se place sur un compact. Dans le cas d'un domaine ouvert considéré ici, les 2 premiers espaces sont séparables, mais le troisième ne l'est pas. D'une suite bornée dans L^1 on pourra donc extraire une sous-suite qui converge vaguement (contre les fonctions de C_c) ou faiblement (contre les fonctions de C_0), mais la limite est seulement définie comme une forme linéaire sur ces espaces, elle ne s'identifie pas forcément à une fonction de L^1 : il s'agit en toute généralité d'une mesure bornée. Par exemple la suite $f_n = n\mathbb{1}_{]0,1/n[}$ converge faiblement vers la masse de Dirac en 0. En l'occurrence, cette convergence est aussi étroite, mais on prendra garde au fait que l'on ne peut en général, d'une suite bornée de L^1, extraire une sous-suite qui converge étroitement (du fait de la non séparabilité de $C_b(\Omega)$). Ainsi la suite $f_n = n\mathbb{1}_{]n,n+1/n[}$ converge vaguement ou faiblement vers 0, mais il n'en existe aucune sous-suite qui convergerait étroitement.

Exercice IV.2.1. On considère l'espace E des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui convergent vers une valeur finie lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Montrer qu'il s'agit d'un espace complet (pour la norme ∞) séparable, et énoncer une propriété de compacité séquentielle faible-$\star$ pour $L^1(\mathbb{R}^d)$ mis en dualité avec E. Que peut on dire de la suite $f_n = n\mathbb{1}_{]n,n+1/n[}$ définie précédemment ?
Proposer une généralisation de cette approche à des fonctions pour lesquelles la limite en $+\infty$ dépend de la direction $x/|x|$. (On pourra commencer par le cas $d = 1$, avec simplement 2 limites différentes en $+\infty$ et $-\infty$.)