Topologie

Séance de mise à niveau

**Notion, définitions, propriétés**

Distance espace métrique, diamètre, distance à une partie, boules ouvertes / fermées, ensemble discret, norme, espaces vectoriels normés, normes $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{R}^d$.
Topologie (métrique) : ouvert, fermé, stabilité par union (resp. intersection) du caractère ouvert (resp. fermé), intérieur, adhérence, frontière, densité, droite réelle achevée.
Suite convergente, unicité de la limite, valeur d'adhérence, caractérisations séquentielles de notions topologiques (adhérence, intérieur, fermé).
Complétude, compacité

**A)** Vrai ou faux.

Vrai □ Faux □ La somme de deux distances est une distance.

Correction.
*Vrai.*

Vrai □ Faux □ Pour tout $A \subset \mathbb{R}$ borné, $\mathrm{diam}(A) = \sup A - \inf A$

Correction.
*Vrai. On a en premier lieu $a' - a \leq \sup A - \inf A$ pour tous $a$, $a'$ dans $A$, d'où $\mathrm{diam}(A) \leq \sup A - \inf A$. L'égalité est obtenue en considérant une suite maximisante $(a'_n)$ (qui tend vers $\sup A$, et une suite minimisante $(a_n)$ (qui tend vers $\inf A$).*

Vrai □ Faux □ Pour toute partie $A \neq \emptyset$ de $(X, d)$, $d(x, A) = 0$ implique $x \in A$.

Correction.
*Faux. Par exemple $]0, 1[$ et $0$.*

Vrai □ Faux □ Pour tout $x \in (X, d)$, $B(x, 1)$ est strictement inclus dans $B_f(x, 1)$.

Correction.
*Faux. Si $X = [0, 1]$, $x = 1/2$, $B(x, 1) = B_f(x, 1) = X$ tout entier.*

Vrai □ Faux □ $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est discret.

Correction.
*Faux*

Vrai □ Faux □ Tout ensemble fini d'un espace métrique est discret

Correction.
*Vrai. En effet pour tout $x$ dans $A$ discret, l'ensemble des distances aux autres éléments de $A$ admet un minimum $m > 0$, et par construction $B(x, m/2) \cap A = \{x\}$.*

Vrai □ Faux □ Aucun ensemble infini n'est discret

Correction.
*Faux. L'ensemble* $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ *est infini et discret*

Vrai ☐ Faux ☐ Les distances entre deux éléments d'un ensemble discret sont minorées par une constante strictement positive.

Correction.
*Faux. L'ensemble* $\{\log n\,,\ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ *est discret, et les distances entre éléments sont arbitrairement petites.*

Vrai ☐ Faux ☐ Toute somme finie de normes est une norme.

Correction.
*Vrai*

Vrai ☐ Faux ☐ Les ouverts de $\mathbb{R}$ sont les $]a, b[$, avec $a < b$.

Correction.
*Faux. l'union de deux intervalles ouverts disjoints, qui n'est pas un intervalle, est ouverte.*

Vrai ☐ Faux ☐ L'adhérence d'une partie contient toujours son intérieur

Correction.
*Vrai (définition)*

Vrai ☐ Faux ☐ L'adhérence d'une partie de $(X, d)$ contient toujours strictement son intérieur

Correction.
*Faux.* $\emptyset$ *et* $\mathbb{R}$ *comme parties de* $\mathbb{R}$.
*Piste de réflexion (à ne pas traiter a priori) : sont-ce les seules parties qui vérifient cela ?. Une telle partie de* $\mathbb{R}$ *est à la fois ouverte et fermée, donc c'est* $\mathbb{R}$ *ou* $\emptyset$ *par connexité, mais cette notion de connexité n'est pas traitée en cours, à éviter donc pour un TD de rattrapage.*

Vrai ☐ Faux ☐ La frontière d'un intervalle borné de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de ses deux extrémités.

Correction.
*Vrai*

Vrai ☐ Faux ☐ $\varepsilon\mathbb{Z} = \{n\varepsilon\,,\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ pour $\varepsilon$ suffisamment petit.

Correction.
*Faux.*

Vrai ☐ Faux ☐ La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, munie de la métrique $d(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$, est de diamètre fini.

Correction.
*Vrai, son diamètre est* $\pi$*, qui est la distance entre ses deux "bouts"* $-\infty$ *et* $+\infty$.

Vrai ☐ Faux ☐ Une suite admet au maximum une valeur d'adhérence.

Correction.
*Faux : suite* $(-1)^n$ *dans* $\mathbb{R}$. *Une suite peut même admettre une infinité non dénombrable de*

*valeurs d'adhérence, comme une numérotation $(q_n)$ des rationnels dans $\mathbb{R}$.*

**B)** Préciser l'intérieur, l'adhérence, et la frontière, des ensembles suivants, considérés comme des parties de $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle.

$$A_1 = \mathbb{Q}\,,\ A_2 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\,,\ A_3 = \mathbb{N}\,,\ A_4 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, A_5 = ]-\infty, 0[\cup]0,1].$$

(••) Répondre à la même question si on l'on considère maintenant ces ensembles non plus comme parties de $\mathbb{R}$, mais comme espaces métriques à part entière.

Correction.
*On a*

$$\mathring{A}_1 = \emptyset\,,\ \bar{A}_1 = \mathbb{R}\,,\ \partial A_1 = \mathbb{R}\,,\ \mathring{A}_2 = \emptyset\,,\ \bar{A}_2 = \mathbb{R}\,,\ \partial A_2 = \mathbb{R}\,,\ \mathring{A}_3 = \emptyset\,,\ \bar{A}_3 = \mathbb{N}\,,\ \partial A_3 = \mathbb{N}\,,$$

$$\mathring{A}_4 = A_4\,,\ \bar{A}_4 = \mathbb{R}\,,\ \partial A_4 = \mathbb{N}\,,\ \mathring{A}_5 = ]-\infty, 0[\cup]0,1[\,,\ \bar{A}_5 = ]-\infty, 1]\partial A_5 = \{0,1\}\,.$$

*Si $A_i$ est considéré comme espace topologique à part entière, il est à la fois ouvert est fermé. Son intérieur est donc lui-même, son adhérence aussi, et par suite sa frontière est vide, dans tous les cas.*

**C)** Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}^n$. L'adhérence de l'intérieur de $F$ est-elle toujours égal à $F$ ?

Correction.
*Non. Cela peut être vrai par exemple pour un intervalle comme $[0,1]$, mais c'est faux en général, considérer par exemple $F = \mathbb{N}$, fermé d'intérieur vide, donc tel que l'adhérence de l'intérieur est vide.*

**COURS**

**Proposition I.3.2** Soit $(X,d)$ un espace métrique.

L'ensemble vide et $X$ sont à la fois fermés et ouverts.

Toute union d'ouverts est un ouvert, et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection de fermés est fermée, et toute union finie de fermés est fermée.

**Proposition I.4.6** Soit $(X,d)$ un espace métrique, et $A$ une partie de $X$. On a les équivalences :

1. Un point $x \in X$ est dans l'adhérence de $A$ si et seulement si $x$ est limite d'une suite de points (non nécessairement distincts, il peut s'agir de la suite constante égale à $x$) de $A$.
2. Un point $x \in A$ est dans l'intérieur de $A$ si et seulement si toute suite convergeant vers $x$ est dans $A$ au delà d'un certain rang.
3. $A$ est fermé si et seulement si, pour toute suite de points de $A$ qui converge dans $X$, la limite est dans $A$.

**Complétude**

**Exercice 1.** (•) Soit $X$ un espace métrique, et $(x_n)$ une suite de Cauchy qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que la suite est nécessairement constante au delà d'un certain rang.

Correction.
*Soient $a_1$, $a_2$, ..., $a_p$ les valeurs prises par la suite de Cauchy. La quantité $d(a_i, a_j)$ admet un minimum $\varepsilon > 0$ sur l'ensemble des $1 \leq i < j \leq p$. On écrit le critère de Cauchy pour cet $\varepsilon$ particulier : il existe $N$ tel que, pour tous $p$, $q$ plus grand que $N$, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. Les termes $x_p$ pour $p \geq N$ s'identifient donc forcément à $x_N$.*

**Exercice 2.** (•) Soit $X$ un espace métrique, et $(x_n)$ une suite de Cauchy. On note $X_N$ l'ensemble des termes de la suite au delà du rang $N$ :

$$X_N = \{x_n\,,\ n \geq N\}\,.$$

Montrer que la suite $(x_n)$ est de Cauchy si et seulement si le diamètre de $X_N$ tend vers 0 quand $N$ tend vers $+\infty$.

Correction.
*Si la suite est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que, pour tous $p$, $q$ plus grands que $N$, on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$, d'où $\mathrm{diam}(X_N) \geq N$, ce qui exprime exactement[1] la convergence de $\mathrm{diam}(X_N)$ vers 0. La réciproque se démontre de la même manière.*

**Compacité**

**Exercice 3.** Montrer que l'intersection de deux compacts est compacte.

Correction.
*On considère une suite de $K_1 \times K_2$. On extrait une première suite qui converge dans $K_1$. Cette sous-suite est une suite de $K_2$, on peut donc en extraire une suite qui converge dans $K_2$, donc dans $K_1 \cap K_2$.*

**Exercice 4.** Montrer qu'une partie finie d'un espace métrique est toujours compacte.

Correction.
*Une suite d'éléments d'un ensemble $K$ (partie d'un espace métrique) fini visite nécessairement une infinité de fois au moins l'un de ces éléments. La sous-suite correspondant à ces indices est stationnaire en cet élément, elle converge donc dans $K$.*

1. Pour les élèves les moins formés en maths, penser à préciser que le fait que l'inégalité soit large ne pose pas de problème, on peut même si on veut pinailler écrire les distances sont $< \varepsilon/2$, donc le diamètre est $\leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.