UE 11, topologie

Quizz 2

Vrai ☐ Faux ☐ Une union de compacts est compacte

Correction.
Faux, considérer par exemple l'union des intervalles $[n, n+1]$.

Vrai ☐ Faux ☐ Une union finie de compacts est compacte

Correction.
Vrai : prendre une suite dans l'union, au moins l'un des des compacts contient une infinité de termes, on peut donc extraire une sous suite qui converge dans ce compact, donc dans l'union.

Vrai ☐ Faux ☐ Une suite (x_n) telle que $d(x_n, x_{n+1})$ tend vers 0 est de Cauchy

Correction.
Faux : considérer par exemple la suite réelle $\ln(n)$

Vrai ☐ Faux ☐ L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$, muni de la distance canonique $d(x, y) = |y - x|$, est complet.

Correction.
Vrai : toute suite de Cauchy est stationnaire au delà d'un certain rang, donc convergente. La notion de convergence de suite n'a de fait pas trop d'intérêt sur $\mathbb{Z}$.

Vrai ☐ Faux ☐ L'ensemble $\mathbb{D}_k$ des nombres décimaux qui s'écrivent avec au plus k chiffres après la virgule est complet.

Correction.
Vrai : toute suite de Cauchy est stationnaire au delà d'un certain rang (il suffit de prendre $\varepsilon = 10^{-k}$*), donc convergente dans* $\mathbb{D}_k$.

Vrai ☐ Faux ☐ La fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.
Vrai. La dérivée est bornée en valeur absolue par 1*, la fonction est donc* 1*-lipschitzienne d'près le théorème des accroissements finis, donc (globalement)* 1*-lipschtizienne, donc uniformément continue.*

Vrai ☐ Faux ☐ La fonction $x \longmapsto x^2$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Correction.
Faux. Pour tout $\eta > 0$ *fixé, la différence* $(x+\eta)^2 - x^2 = 2x\eta + \eta^2$ *tend vers* $+\infty$ *quand* x *tend vers* $+\infty$*. Cette fonction est par contre uniformément continue sur tout compact de* $\mathbb{R}$.

Vrai ☐ Faux ☐ Toute fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Correction.
Faux. Considérer par exemple la fonction $x \longmapsto \sqrt{|x|}$. *Elle est uniformément continue sur le compact* $[-1, 1]$, *et lipschtizienne sur le complémentaire. Mais pas lipschitziene au voisinage de* 0.

Vrai ☐ Faux ☐ Toute fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

Correction.
Faux. Considérer par exemple la fonction $x \longmapsto |x|$, *non dérivable en* 0.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit $n \geq 1$ fixé. Il existe deux constantes m et M telles que, pour toutes normes $\|\cdot\|_\alpha$ et $\|\cdot\|_\beta$, on ait.

$$m \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq M \|x\|_\alpha . \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Correction.
Faux. Les constantes dépendent du couple de norme choisi. On peut s'en convaincre simplement en multipliant l'une des normes par $\varepsilon > 0$ *jusqu'à invalider l'inégalité pour un* $x \neq 0$.

Vrai ☐ Faux ☐ Soient p et q dans l'intervalle $[1, +\infty]$. Il existe deux constantes m et M telles que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$m \|x\|_p \leq \|x\|_q \leq M \|x\|_p . \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Correction.
Faux. Les constantes dépendent non seulement de p *et* q, *mais aussi de* n. *Considérer par exemple le vecteur* $u = (1, \ldots, 1)$, *dont la norme* ∞ *vaut* 1, *et la norme* 1 *vaut* n.

Vrai ☐ Faux ☐ La suite de fonctions réelles $f_n(x) = \mathbb{1}_{[n,n+1/n]}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$

Correction.
Faux. Pour tout n *il existe au moins un point en lequel la valeur vaut* 1. *Elle converge par contre uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}$.

Vrai ☐ Faux ☐ La suite de fonctions réelles $f_n(x) = \sin(n^2 x)/n$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Correction.
Vrai. On a $|f_n(x)| \leq 1/n$. *On peut vérifier qu'en revanche la suite des fonctions dérivées ne converge pas (ni uniformément, ni même simplement) vers* 0.

Vrai ☐ Faux ☐ Toute fonction bornée sur $[a, b]$ est Riemann intégrable.

Correction.
Faux . Consdérer par exemple la fonction caractéristique des rationnels sur cet intervalle. les rationnels sont denses, ainsi que les irrationnels. Pour toute subdivision, on peut donc choisir des marques rationnelles, auquel cas la somme de Riemman vaut $b-a$, *ou des marques irrationnelles, auquel cas la somme vaut* 0. *On ne peut donc pas converger vers une valeur bien définie. (N.B. : en choisissant bien les marques, on peut converger vers n'importe quelle valeur de* $[0, b-a]$*).*