Espaces de Hilbert

Quizz 5

1) (Dimension finie)

Vrai ☐ Faux ☐ $\mathbb{R}^n$ est un espace de Hilbert.

Vrai ☐ Faux ☐ Pour tout $\varepsilon > 0$, la quantité

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k x_k^2$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$, issue d'un produit scalaire, qui en fait donc un espace de Hilbert.

Vrai ☐ Faux ☐ L'expression

$$(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longmapsto \langle x \mid y \rangle = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \right)$$

définit un produit scalaire $\mathbb{R}^n$.

Vrai ☐ Faux ☐ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, l'application

$$(x, y) \mapsto \langle Ax \mid y \rangle$$

(où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien) définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Vrai ☐ Faux ☐ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, l'application

$$x \mapsto |Ax|$$

(où $|\cdot|$ est la norme euclidienne) définit une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire issue d'un produit scalaire

$$\langle x \mid y \rangle_A = \langle Ax \mid Ay \rangle = \left\langle A^T Ax \mid y \right\rangle,$$

où la matrice $A^T A$ est symétrique définie positive.

2) Dans la suite H désigne un espace de Hilbert séparable.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit K un sous-ensemble de H tel que l'implication suivante soit vérifiée :

$$\langle h \mid w \rangle = 0 \quad \forall w \in K \Longrightarrow h = 0.$$

Alors K est dense dans H.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit (e_n) une base hilbertienne de H, espace de Hilbert de dimension infinie. Pour tout N, l'espace vectoriel F_N engendré par les N premiers e_n est fermé.

Vrai ☐ Faux ☐ Une suite u_n qui converge fortement vers u converge faiblement vers u.

Vrai ☐ Faux ☐ Soit u_n une suite d'éléments d'un fermé F de H, qui converge faiblement vers u. Alors u est dans H.